537.

Analyse mathématique. — *Formules générales pour la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites.*

C. R., T. XXXVIII, p. 945 (29 mai 1854).

La solution d'un grand nombre de problèmes exige la transformation de fonctions implicites d'une ou de plusieurs variables en fonctions explicites. C'est ainsi que, pour résoudre les problèmes astronomiques, on doit d'abord transformer la fonction perturbatrice en une fonction explicite du temps; mais cette opération et les transformations de même nature, effectuées à l'aide des méthodes connues, substituent généralement aux fonctions données des séries composées d'un nombre infini de termes; et ce n'est qu'avec peine que l'on parvient soit à démontrer la convergence de ces séries, soit à déterminer leurs modules et les valeurs approchées des termes de rang élevé. Or ces démonstrations et ces déterminations deviennent faciles, lorsque, en s'appuyant sur les formules générales que j'ai proposées en 1831 (¹) et en 1846 (²), on commence par transformer les fonctions implicites en intégrales curvilignes étendues aux périmètres entiers de certaines courbes fermées. Ces intégrales, une fois obtenues, on peut les développer en séries de diverses manières. Il y a plus : les courbes fermées auxquelles se rapportent les intégrales curvilignes peuvent, au gré du calculateur, s'étendre ou se rétrécir, du moins entre certaines limites, ce qui permet d'assigner à ces intégrales une infinité de formes diverses. En opérant comme on vient de le dire, on pourra transformer, par exemple, une fonction implicite en une somme d'intégrales, dont les unes étant circulaires, c'est-à-dire étendues aux circonférences de certains cercles, se réduiront à des moyennes isotropiques; tandis que les autres, réduites à des

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.
(²) *Ibid.*, S. I, T. X.

intégrales singulières du premier ou du second ordre, pourront être, dans le premier cas, représentées par des résidus d'une même fonction.

Concevons, pour fixer les idées, que deux variables s et Ω soient représentées par deux fonctions explicites d'une troisième variable u, et que ces deux fonctions restent monodromes et monogènes entre des limites quelconques. Ω sera une fonction implicite de la variable s; et, après avoir transformé cette fonction implicite Ω, ou une puissance quelconque de Ω, en une fonction explicite de s, représentée par une somme d'intégrales définies, on pourra aisément développer cette somme en une série ordonnée suivant les puissances entières, ascendantes et descendantes de s. Pour y parvenir, il suffira de développer en une progression géométrique ordonnée ou suivant les puissances ascendantes, ou suivant les puissances descendantes de s, l'un des facteurs renfermés sous le signe $\int$ dans chacune des intégrales que comprend la somme dont il s'agit; ou bien, sous le signe $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{E}$, dans les moyennes isotropiques, ou dans les résidus substitués à ces intégrales. Chacun des deux modules d'une série ainsi obtenue sera généralement inverse du module d'une valeur imaginaire de s, pour laquelle l'un des facteurs renfermés sous le signe $\int$, ou $\mathcal{M}$, ou $\mathcal{E}$ deviendra infini. D'ailleurs, ces modules étant déterminés, il deviendra facile de calculer avec une grande approximation, dans le développement de chaque intégrale, le coefficient d'une puissance très élevée de s ou de $\frac{1}{s}$, et, pour effectuer ce calcul, il suffira de recourir aux considérations dont j'ai fait usage dans mes Mémoires sur les approximations des fonctions de très grands nombres.

Dans un prochain article, j'appliquerai spécialement les formules générales ici établies à la solution des problèmes astronomiques, et j'obtiendrai ainsi de nouvelles méthodes très expéditives propres à fournir, par exemple, le module et l'argument de la grande inégalité découverte par M. Le Verrier dans le moyen mouvement de la planète Pallas.

Analyse.

Soient s et u deux quantités géométriques qui soient considérées comme les affixes de deux points situés dans un certain plan. Soient encore

$$U = \mathrm{f}(u) \quad \text{et} \quad \Pi(u)$$

deux fonctions de u, qui restent monodromes, monogènes et finies, dans le voisinage d'un point P dont l'affixe u est déterminée par l'équation

$$U - s = 0, \tag{1}$$

et même dans l'intérieur d'une courbe fermée, servant de contour à une certaine aire S qui renferme le point P. On aura, en supposant le résidu qu'indique le signe $\mathcal{E}$ relatif au seul point P compris dans l'aire S,

$$\mathcal{E}\left(\frac{\Pi(u)}{U-s}\right)_u = \frac{\Pi(u)}{D_u U}, \tag{2}$$

pourvu que, dans le second membre de la formule, on réduise la valeur de u à celle qui représente l'affixe du point P ; et, si l'on veut que ce second membre soit une certaine fonction

$$\Omega = \mathrm{F}(u) \tag{3}$$

de cette même affixe, qui reste monodrome, monogène et finie dans le voisinage du point P, il suffira de prendre

$$\Pi(u) = \mathrm{F}(u)\, D_u U.$$

Sous cette condition, l'équation (2) donnera

$$\Omega = \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{F}(u)}{U-s} D_u U\right)_u. \tag{4}$$

Soit maintenant ω l'arc décrit à partir d'une origine fixe sur le contour entier de l'aire S, par un point qui se meut en tournant autour de cette aire avec un mouvement de rotation direct ; nom-

mons c le contour entier de cette aire, et posons, pour abréger,

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathrm{F}(u)}{U-s} D_u U. \tag{5}$$

On aura, en regardant, sous le signe $\int$, u comme fonction de ω,

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}(u))_u = \frac{1}{2\pi i}\int_0^c \mathcal{F}(u)\, D_\omega u\, d\omega. \tag{6}$$

Donc la formule (4) entraînera la suivante :

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_0^c \frac{\mathrm{F}(u)}{U-s} D_\omega U\, d\omega. \tag{7}$$

Chacune de ces équations (4), (7) transforme immédiatement, en fonction explicite de la variable s, la fonction implicite de s, déterminée par le système des équations (1) et (3).

Si, en nommant $\mathcal{F}(u)$ une fonction de u qui reste monodrome, monogène et finie dans le voisinage du contour de l'aire S, on pose généralement

$$(\mathrm{S}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^c \mathcal{F}(u)\, D_\omega u\, d\omega, \tag{8}$$

ou, en d'autres termes, si l'on désigne, à l'aide de la notation (S), l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi i}\int \mathcal{F}(u)\, du \tag{9}$$

étendue au contour entier de l'aire S, la formule (7) donnera simplement

$$\Omega = (\mathrm{S}), \tag{10}$$

la fonction $\mathcal{F}(u)$ étant déterminée par l'équation (5).

Si le contour de l'aire S se réduisait à un cercle dont le rayon fût r, alors, en posant

$$\psi = \frac{\omega}{r},$$

on aurait

$$u = re^{\psi i}, \qquad du = i\, u\, d\psi,$$

et l'intégrale (9) serait réduite à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,\mathcal{F}(u)\,d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\,\mathcal{F}(u)\,d\psi = \mathfrak{M}[u\,\mathcal{F}(u)],$$

la moyenne isotropique indiquée par le signe $\mathfrak{M}$ étant relative à l'argument ψ de u. Donc alors l'équation (7) donnerait

$$\Omega = \mathfrak{M}\left[\frac{u\,F(u)}{U-s}\,D_u U\right]. \tag{11}$$

Considérons maintenant deux courbes fermées dont l'une enveloppe l'autre, le point P étant situé entre elles. Soient d'ailleurs A l'aire comprise dans la courbe enveloppée, B l'aire comprise dans la courbe enveloppante, et v, w les affixes variables des points situés sur ces deux courbes; enfin, partageons l'aire B — A comprise entre les deux courbes en éléments finis S, $S_{,}$, $S_{,,}$, ..., dont l'un soit précisément l'aire S, et supposons que la fonction $\mathcal{F}(u)$ demeure monodrome, monogène et finie dans le voisinage des points situés sur les deux courbes et sur les contours des éléments S, $S_{,}$, $S_{,,}$, ... En désignant, à l'aide des notations

$$(A),\quad (B),\quad (S_{,}),\quad (S_{,,}),\quad \ldots,$$

les valeurs qu'acquiert l'intégrale (S) quand on substitue à l'aire S les aires

$$A,\quad B,\quad S_{,},\quad S_{,,},\quad \ldots,$$

on aura

$$(B) = (A) + (S) + (S_{,}) + (S_{,,}) + \ldots,$$

par conséquent

$$(S) = (B) - (A) - (S_{,}) - (S_{,,}) - \ldots. \tag{12}$$

Si la fonction $\mathcal{F}(u)$ reste monodrome, monogène et finie en chaque point de chacune des aires

$$S_{,},\quad S_{,,},\quad \ldots,$$

les intégrales curvilignes

$$(S_{,}),\quad (S_{,,}),\quad \ldots$$

s'évanouiront, et la formule (12) donnera simplement

$$(S) = (B) - (A). \tag{13}$$

Si d'ailleurs les aires A, B se réduisent à deux cercles dont les rayons soient r, R, alors, les contours de ces deux aires étant deux circonférences de cercle, les affixes v, w de deux points de ces circonférences situés sur un même rayon vecteur, par conséquent de deux points correspondants au même argument ou angle polaire φ, seront de la forme

$$v = re^{\varphi i}, \qquad w = Re^{\varphi i},$$

et l'on aura

$$(A) = \mathfrak{M}[v\,\mathcal{F}(v)], \qquad (B) = \mathfrak{M}[w\,\mathcal{F}(w)],$$

en sorte que la formule (13) donnera

$$(S) = \mathfrak{M}[w\,\mathcal{F}(w)] - \mathfrak{M}[v\,\mathcal{F}(v)]. \tag{14}$$

Observons maintenant que la valeur de l'intégrale (S) restera invariable, si la courbe fermée qui lui sert de contour varie et change de forme par degrés insensibles, sans que la fonction $\mathcal{F}(u)$ cesse d'être monodrome, monogène et finie en chaque point de cette courbe. La même remarque est applicable à chacune des intégrales

$$(S_{,}),\quad (S_{,,}),\quad \ldots.$$

Cela posé, concevons que la fonction $\mathcal{F}(u)$ reste généralement monodrome, monogène et finie en chaque point de chacune des aires $S_{,}$, $S_{,,}$, ... et ne cesse de l'être que pour certains *points singuliers*, séparés les uns des autres, ou pour les points situés sur certaines *lignes singulières*. Supposons encore les aires finies

$$S_{,},\quad S_{,,},\quad \ldots,$$

qui représentent les éléments finis de l'aire

$$B - A - S,$$

choisis de manière que chacune d'elles renferme ou un seul *point* *singulier* ou une seule *ligne singulière*. On pourra, sans altérer les valeurs des intégrales

$$(S_{\prime}),\quad (S_{\prime\prime}),\quad \ldots,$$

réduire les aires finies

$$S_{\prime},\quad S_{\prime\prime},\quad \ldots$$

à des aires

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \ldots,$$

dont chacune offrira une ou deux dimensions infiniment petites, et alors les intégrales

$$(S_{\prime}),\quad (S_{\prime\prime}),\quad \ldots$$

se trouveront réduites aux intégrales

$$(\mathrm{a}),\quad (\mathrm{b}),\quad \ldots,$$

dont chacune sera une intégrale *singulière du premier ordre* dans le premier cas, *du second ordre* dans le second cas. Alors aussi la formule (12) donnera

$$(15)\qquad (S) = (B) - (A) - (\mathrm{a}) - (\mathrm{b}) - \ldots.$$

Si d'ailleurs l'aire $B - A - S$ ne renferme pas de lignes singulières, mais seulement des points singuliers, les intégrales singulières (a), (b), ... seront toutes du premier ordre, et leur somme

$$(\mathrm{a}) + (\mathrm{b}) + \ldots$$

se réduira au résidu intégral

$$\mathcal{E}\,(\mathcal{F}(u))_u,$$

étendu aux diverses valeurs de u, qui, étant racines de l'équation

$$\frac{1}{\mathcal{F}(u)} = 0,$$

représenteront des affixes de points situés dans l'aire $B - A - S$. Dans cette même hypothèse, l'équation

$$(\mathrm{a}) + (\mathrm{b}) + \ldots = \mathcal{E}\,(\mathcal{F}(u))_u$$

réduira la formule (15) à la suivante :

$$(16)\qquad (S) = (B) - (A) - \mathcal{E}\,(\mathcal{F}(u))_u.$$

Revenons maintenant au cas spécial où la fonction $\mathcal{F}(u)$ est déterminée par la formule (5), et supposons les contours des aires A, B choisis de manière que l'aire $B - A$ comprise entre ces contours renferme un seul point P dont l'affixe u vérifie l'équation (1). Alors de l'équation (10), jointe à la formule (15), on tirera

$$(17)\qquad \Omega = (B) - (A) - (\mathrm{a}) - (\mathrm{b}) - \ldots.$$

Cette dernière équation suppose que les deux fonctions

$$U = \mathrm{f}(u) \quad \text{et} \quad \Omega = \mathrm{F}(u)$$

restent généralement monodromes, monogènes et finies en chaque point de l'aire

$$B - A - S,$$

et ne cessent de l'être que pour quelques-uns de ces points, savoir pour certains points singuliers, ou pour ceux qui sont situés sur certaines lignes singulières. Si l'aire $B - A - S$ ne renferme pas de lignes singulières, la formule (17) sera réduite à

$$(18)\qquad \Omega = (B) - (A) - \mathcal{E}\,(\mathcal{F}(u))_u,$$

le signe $\mathcal{E}$ s'étendant seulement à des valeurs de u qui représenteront les affixes des points renfermés dans l'aire $B - A - S$; et, si cette aire ne renferme pas de lignes singulières, ni de points singuliers, on aura simplement

$$(19)\qquad \Omega = (B) - (A).$$

Enfin, si, dans la dernière hypothèse, les aires A et B sont celles de deux cercles qui aient pour centre l'origine des coordonnées, on aura, en nommant v, w les affixes de points situés sur les circonférences de ces deux cercles,

$$(20)\qquad \Omega = \mathfrak{M}[\mathcal{F}(w)] - \mathfrak{M}[\mathcal{F}(v)];$$

et comme, en posant, pour abréger,

$$V = \mathfrak{f}(v), \qquad W = \mathfrak{f}(w),$$

on trouvera

$$\mathfrak{F}(v) = \frac{v\,\mathrm{F}(v)}{V-s}\,\mathrm{D}_v V, \qquad \mathfrak{F}(w) = \frac{w\,\mathrm{F}(w)}{W-s}\,\mathrm{D}_w W,$$

l'équation (20) donnera

$$\Omega = \mathcal{M}\left[\frac{w\,\mathrm{F}(w)}{W-s}\,\mathrm{D}_w W\right] - \mathcal{M}\left[\frac{v\,\mathrm{F}(v)}{V-s}\,\mathrm{D}_v V\right]. \tag{21}$$

On sera donc ainsi ramené à l'équation (3) de la page 150.

538.

Analyse mathématique. — *Application des formules établies dans le précédent Mémoire à la solution des problèmes astronomiques.*

C. R., T. XXXVIII, p. 932 (29 mai 1854).

Les résultats obtenus dans ce Mémoire seront exposés dans un prochain article.

539.

Analyse mathématique. — *Sur la transformation des variables qui déterminent les mouvements d'une planète ou même d'une comète en fonction explicite du temps, et sur le développement de ces fonctions en séries convergentes.*

C. R., T. XXXVIII, p. 990 (5 juin 1854).

Les formules établies dans le précédent Mémoire transforment des fonctions implicites en fonctions explicites représentées par des intégrales curvilignes; et, pour développer ces intégrales en séries con-

vergentes ordonnées suivant les puissances entières ascendantes et descendantes des variables, il suffit de développer un des facteurs compris dans chaque intégrale en progression géométrique. D'ailleurs, les courbes auxquelles se rapportent les intégrales curvilignes peuvent changer de forme, par conséquent s'étendre ou se rétrécir du moins entre certaines limites; et, en choisissant convenablement les formes de ces courbes, on peut déterminer avec une grande facilité non seulement les deux modules, ordinairement égaux entre eux, de chacune des séries obtenues, mais encore des valeurs très approchées des termes d'un rang élevé. Parmi les résultats importants auxquels on parvient de cette manière, je me bornerai aujourd'hui à citer ceux qui sont relatifs à l'Astronomie.

Comme l'a remarqué M. Le Verrier, les séries qui se présentent au calculateur dans la détermination des mouvements d'une planète, doivent, pour demeurer convergentes, lorsque l'inclinaison et l'excentricité ne sont pas très petites, s'ordonner non plus suivant les puissances entières de ces éléments, mais suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne. Alors les séries peuvent encore être supposées ordonnées suivant les puissances entières ascendantes et descendantes de l'exponentielle trigonométrique s qui a pour argument cette anomalie moyenne. Or, en s'appuyant sur les formules que j'ai données dans le précédent Mémoire, on peut aisément développer en une semblable série une fonction rationnelle et même souvent une fonction irrationnelle de l'exponentielle trigonométrique u qui a pour argument l'anomalie excentrique. Considérons, pour fixer les idées, le cas où la fonction développée Ω est une fonction entière de u et de $\frac{1}{u}$; alors, en égalant la sécante de l'anomalie excentrique à l'excentricité, on obtiendra pour cette anomalie une infinité de valeurs imaginaires auxquelles correspondront seulement deux valeurs, toutes deux réelles, de la variable s, et la plus petite de ces deux valeurs sera précisément la valeur commune des deux modules du développement de Ω. De plus, le module du $n^{\text{ième}}$ terme sera sensiblement proportionnel, lorsque n sera très grand, à la $n^{\text{ième}}$ puissance du module divisée par la racine carrée de n.

Ces conclusions subsistent et permettent d'effectuer aisément les calculs, quelle que soit la grandeur de l'excentricité, pourvu qu'elle reste sensiblement inférieure à l'unité; elles permettent donc d'établir encore avec facilité la théorie des petites planètes. Lorsque l'excentricité se réduit à l'unité, le module de chaque série étant lui-même l'unité, l'inspection de ce module ne suffit plus à constater la convergence de la série. Mais alors, en suivant la méthode ici exposée, j'obtiens encore une valeur très approchée du terme dont le rang est n et, en supposant, pour fixer les idées, la fonction Ω réduite au sinus de l'anomalie excentrique, je prouve que, pour de grandes valeurs de n, le module de ce terme est sensiblement proportionnel à l'unité divisée par n et par la racine cubique de n. Ajoutons que, dans la valeur approchée de ce module, l'intégrale eulérienne $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ se trouve remplacée par une autre intégrale eulérienne de même espèce, savoir, par $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, qui se trouve ainsi substituée à la première, quand on passe de la théorie des planètes à la théorie des comètes.

Lorsque l'excentricité diffère très peu de l'unité, la méthode exposée est encore applicable et permet de trouver aisément les développements en séries avec les valeurs très approchées des termes de rang élevé. Elle permet donc d'établir directement, dans un grand nombre de cas, et sans recourir aux quadratures, la théorie des comètes périodiques. Ce résultat paraîtra sans doute digne de quelque attention.

J'observerai, en finissant, que les calculs se simplifient lorsqu'on détermine la position d'un point situé dans le plan des affixes, non plus à l'aide de l'affixe de ce point, ou, ce qui revient au même, à l'aide d'un rayon vecteur et d'un angle polaire, mais à l'aide du logarithme de l'affixe ou, ce qui revient au même, à l'aide de l'angle polaire et du logarithme du rayon vecteur, et lorsqu'on prend pour variables indépendantes ces deux dernières quantités.

J'observerai aussi que les formules obtenues dans le cas où l'excentricité se réduit à l'unité résolvent le problème relatif aux projections homolographiques de M. Babinet, savoir le problème qui consiste à couper la sphère par des plans parallèles à l'équateur et un méridien par des droites parallèles à la trace de l'équateur, de telle sorte que les zones interceptées sur le méridien soient proportionnelles aux zones interceptées sur la surface de la sphère. Soient alors λ la latitude d'un des points de la sphère situés sur l'un des plans sécants, et $\frac{1}{2}\psi$ la distance au pôle du point où le méridien est coupé par la sécante correspondante à ce plan. Le rapport de la zone sphérique à la surface de la sphère sera

$$\frac{1}{2}\sin\lambda,$$

et le rapport de la zone plane, interceptée entre la sécante et la surface du méridien, sera

$$\frac{1}{2} - \frac{\psi - \sin\psi}{2\pi}.$$

Pour que ces deux rapports soient égaux, il faudra que l'on ait

$$\psi - \sin\psi = T, \tag{1}$$

la valeur de T étant

$$T = \pi(1 - \sin\lambda).$$

Or la valeur de ψ, tirée de l'équation (1), sera

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= A_1 \sin T + A_2 \sin 2T + A_2 \sin 3T + A_4 \sin 4T + \ldots \\ &= \mathop{\mathrm{S}}_{n=-\infty}^{n=\infty} A_i \sin nT, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

les valeurs de A_1, A_2, A_3, A_4, ... étant

$A_1 = 0,88010$, $A_2 = 0,35284$, $A_3 = 0,20604$, $A_4 = 0,14055$, ...;

en d'autres termes, on aura

$$A_n = \frac{a_n}{n^{\frac{4}{3}}},$$

les valeurs de a_1, a_2, a_3, a_4, ... étant

$$a_1 = 0,88010, \quad a_2 = 0,88910, \quad a_3 = 0,89148, \quad a_4 = 0,89244, \quad \ldots,$$

et convergeant, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite

$$a = 6^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi\sqrt{3}} = 0,89461.$$

540.

Astronomie. — *Sur les services que la spirale logarithmique peut rendre à l'Astronomie.*

C. R., T. XXXVIII, p. 1033 (12 juin 1854).

Lorsque les géomètres grecs se livraient à l'étude spéculative des sections coniques, ils ne se doutaient guère qu'un jour Kepler et ses successeurs reconnaîtraient l'ellipse et la parabole dans les orbites décrites par les planètes et par les comètes. Lorsqu'en passant des sections coniques aux courbes transcendantes et des courbes fermées aux courbes non fermées Jacques Bernoulli découvrait les belles propriétés de la spirale logarithmique, il ne se doutait pas non plus des services éminents que cette spirale pouvait rendre aux astronomes, en facilitant la détermination de ces orbites : tel est pourtant le fait étrange que je viens constater aujourd'hui.

Si, en considérant le mouvement elliptique d'une planète, on nomme s et u les exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique, une fonction entière Ω de u et de $\frac{1}{u}$ pourra toujours être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières ascendantes et descendantes de la variable s. D'ailleurs, comme je l'ai dit, les deux modules de cette série, égaux entre eux, se confondront avec la plus

petite des deux valeurs qu'acquiert la variable s quand on égale la sécante de l'anomalie excentrique à l'excentricité; et le coefficient d'une puissance entière de s dans la même série pourra être représenté par une intégrale curviligne relative à une courbe fermée qui aura pour affixe la variable u et qui enveloppera de toutes parts, dans le plan des affixes, le point pris pour origine. La courbe à laquelle correspond la forme généralement attribuée à cette intégrale est celle qui se rapporte au module 1 de l'affixe u, c'est-à-dire la circonférence du cercle qui a pour centre l'origine, autrement appelée *pôle* et pour rayon l'unité. Mais, en nommant η la plus petite des valeurs qu'acquiert la variable u, quand on égale l'anomalie excentrique à l'excentricité, et en désignant par n un nombre très considérable, on pourra, dans la détermination du coefficient qui affecte la puissance du degré $-n$, ou du degré n, substituer avec avantage à la circonférence dont il s'agit celle qui a pour rayon η ou $\frac{1}{\eta}$. Alors le coefficient Ω_n de s^n et le coefficient Ω_{-n} de s^{-n} se trouveront représentés par de nouvelles intégrales curvilignes, qui se développeront sans peine en séries très convergentes, dont il suffira de calculer quelques termes pour obtenir des valeurs très approchées de Ω_n et de Ω_{-n}.

Si l'on considère, au lieu d'une planète qui décrive une ellipse, une comète qui décrive une parabole, ou bien encore s'il s'agit de résoudre le problème relatif aux projections homolographiques, le module η de la série, qui représente le développement de la fonction Ω, deviendra équivalent à l'unité. Alors aussi les développements de Ω_n et de Ω_{-n} en séries changeront de forme; et, pour obtenir, avec une grande facilité, les nouveaux développements, il conviendra de faire correspondre les intégrales curvilignes qui les représenteront non plus à deux circonférences de cercles, mais à deux courbes formées chacune par la réunion de deux portions de spirales logarithmiques. Concevons, pour fixer les idées, que l'on cherche le coefficient Ω_n de la puissance de s du degré n. Ce qu'il y aura de mieux à faire, ce sera de construire deux spirales logarithmiques qui partent simultanément du point situé sur l'axe polaire à la distance 1 du pôle, en formant avec cet axe un angle égal aux deux tiers d'un angle droit et qui s'arrêtent au moment où elles rencontreront pour la première fois le prolongement de l'axe polaire. Le système de ces deux spirales composera une sorte de courbe fermée en forme de cœur, et l'intégrale curviligne correspondante à cette courbe pourra être aisément développée en une série qui deviendra très convergente pour de très grandes valeurs de n. Ce qui paraîtra, sans doute, digne de remarque, c'est que le nouveau développement, réduit à ses deux premiers termes, pourra fournir une valeur très approchée du coefficient Ω_n, non seulement pour de très grandes valeurs de n, mais encore pour des valeurs de n peu considérables; par exemple pour $n=2$, et même pour $n=1$. Supposons, en particulier, que l'on veuille déterminer le sinus de l'anomalie excentrique d'une comète ou bien encore résoudre le problème énoncé dans la séance précédente et relatif aux projections homolographiques. Alors les valeurs de Ω_n, Ω_{-n} seront égales aux signes près, et, si l'on réduit le développement du coefficient Ω_n à ses deux premiers termes, l'erreur commise sur le nombre qui exprimera le module de ce coefficient sera d'environ un cent-millième pour $n=4$; elle restera inférieure à un dix-millième pour $n=2$, et à un quart de millième pour $n=1$.

Une spirale logarithmique se change en une circonférence de cercle quand le rayon vecteur, mené du pôle à un point de cette spirale, la coupe à angle droit. On peut donc dire que, pour faciliter dans le développement de Ω la détermination des coefficients Ω_n et Ω_{-n}, il convient de représenter ces coefficients par des intégrales curvilignes, dont chacune corresponde au système de deux spirales logarithmiques, tracées de manière à former, avec l'axe polaire, un angle qui se réduit pour les planètes à un angle droit, et pour les comètes aux deux tiers d'un droit.

541.

Analyse mathématique. — *Sur la résolution des équations et sur le développement de leurs racines en séries convergentes.*

C. R., T. XXXVIII, p. 1104 (26 juin 1854).

Les formules que j'ai données, dans les précédentes séances, pour la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites, permettent de résoudre aisément, dans un grand nombre de cas, des équations algébriques ou même transcendantes; mais, pour déduire de ces formules tous les résultats qu'elles peuvent fournir, il convient de joindre aux principes déjà établis quelques propositions qui paraissent dignes de remarque et que je vais indiquer.

Concevons, pour fixer les idées, que, X étant, du moins entre certaines limites, une fonction monodrome et monogène de la variable x, on égale cette fonction X à un certain paramètre t. Concevons, d'ailleurs, que l'on sache résoudre l'équation ainsi obtenue dans le cas où le paramètre t s'évanouit; nommons a une racine simple de cette dernière équation, et α la racine correspondante de l'équation donnée. Le module de t venant à croître, α sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de t, tant que la racine α ne cessera pas d'être une racine simple pour un argument quelconque de t. La série trouvée deviendra divergente, à partir de l'instant où le paramètre t acquerra un module tel, que, pour ce module et pour une valeur convenablement choisie de l'argument de t, la racine α cesse d'être simple. Soit θ le module dont il s'agit. Quand le paramètre t offrira un module inférieur à θ, on pourra développer, suivant les puissances entières et ascendantes de t, non seulement la racine α, mais encore toute fonction monodrome, monogène et finie de cette racine, par exemple une puissance entière de α; et le module de chaque série sera généralement le module du rapport $\frac{t}{\theta}$. Si le module de t devient supérieur à θ, on ne pourra plus développer, suivant les puissances ascendantes de t, ni la racine x, ni aucune de celles qui pourront cesser d'être, en même temps qu'elle, des racines simples, mais seulement la somme de ces diverses racines ou de fonctions semblables de ces racines, par exemple la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc.; ce qui permettra, si m est le nombre de ces mêmes racines, de faire dépendre leur détermination de la résolution d'une équation du degré m.

Considérons maintenant le cas où, pour une valeur nulle du paramètre t, l'équation donnée offre non plus une seule racine, mais m racines égales dont la valeur est a. Alors, d'après ce qui vient d'être dit, on pourra faire dépendre la détermination de ces racines de la résolution d'une équation du degré m, dont les coefficients seront développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de t; mais on peut aller plus loin, et je suis en effet parvenu à établir les deux propositions suivantes :

Dans le cas dont il s'agit, on peut encore, pour des valeurs suffisamment petites du module de t, développer chacune des racines qui acquièrent la valeur a pour une valeur nulle de t, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de t; seulement ces puissances ont pour degrés les divers multiples du rapport $\frac{1}{m}$.

Dans le même cas, si, le module de t venant à croître, on nomme θ la valeur qu'acquiert ce module au moment où l'une des racines développées peut cesser d'être une racine simple, le développement de chaque racine sera représenté par une série qui sera convergente jusqu'à ce moment, et qui aura pour module le module de $\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\frac{1}{m}}$.

D'ailleurs, à l'aide des formules établies dans les précédents Mémoires, je détermine sans peine, dans tous les cas, les valeurs approchées des termes qui occupent dans chaque série un rang très élevé.

Les diverses valeurs de θ, correspondantes aux diverses valeurs de a, sont évidemment les modules des valeurs de t correspondantes aux valeurs de x, que fournit non plus l'équation donnée, mais la

dérivée de cette équation. Par conséquent les divers nombres auxquels θ peut se réduire sont tous connus, quand on sait résoudre l'équation dérivée.

Ajoutons que, au lieu de développer les diverses racines de l'équation donnée suivant les puissances ascendantes du paramètre t, on peut les développer suivant les puissances ascendantes du paramètre $t-\tau$, τ étant une valeur particulière de t. On peut ainsi obtenir un grand nombre de solutions diverses d'une même équation.

Veut-on, par exemple, résoudre le problème aux Cartes homolographiques de M. Babinet? Alors on pourra déterminer la racine ψ de l'équation

$$\psi - \sin\psi = T \tag{1}$$

non seulement à l'aide de la formule

$$\left\{\begin{aligned} \sin\psi &= A_1 \sin T + A_2 \sin 2T + A_3 \sin 3T + A_4 \sin 4T + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin nT, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

les valeurs de $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ étant

$$0,88010\ldots,\quad 0,35284\ldots,\quad 0,20604\ldots,\quad 0,14055\ldots,$$

et la valeur de A_n étant sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$A_n = \frac{0,89461\ldots}{n^{\frac{4}{3}}} - \frac{0,01500}{n^{\frac{8}{3}}},$$

mais encore, à l'aide de la formule

$$\psi = t + \frac{t^3}{60} + \frac{t^5}{1400} + \frac{t^7}{252000} + \frac{43t^9}{17248000} + \ldots, \tag{3}$$

la valeur de t étant

$$t = (6T)^{\frac{1}{3}},$$

ou, ce qui revient au même, à l'aide de la formule

$$(4) \quad \psi = a_1 T^{\frac{1}{3}} + a_3 T + a_5 T^{\frac{5}{3}} + a_7 T^{\frac{7}{3}} + a_9 T^3 + \ldots = \mathop{\mathrm{S}}_{n=0}^{n=\infty} a_{2n+1} T^{\frac{2n+1}{3}},$$

les valeurs de a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, … étant

$$1{,}81712, \quad 0{,}1, \quad 0{,}01415, \quad 0{,}00260, \quad 0{,}00054, \quad \ldots,$$

et la valeur de a_n étant sensiblement, pour de très grandes valeurs de n,

$$a_n = \frac{2{,}38087}{n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{3}}.$$

On pourrait aussi développer la racine ψ de l'équation (1) suivant les puissances étendues de $\pi - T$ ou, ce qui revient au même, développer la racine ψ de l'équation

$$(5) \qquad \psi + \sin\psi = T$$

suivant les puissances ascendantes de T. On trouverait, dans ce dernier cas,

$$(6) \qquad \psi = \frac{T}{2} + \frac{1}{12}\left(\frac{T}{2}\right)^3 + \frac{1}{60}\left(\frac{T}{2}\right)^5 + \frac{10080}{43}\left(\frac{T}{2}\right)^7 + \ldots,$$

le coefficient de $\left(\frac{T}{2}\right)^n$ étant sensiblement, pour de très grandes valeurs impaires du nombre n,

$$\frac{1{,}310245}{n^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n.$$

Si, dans la formule (6), on pose

$$T = \frac{\pi}{4},$$

elle donnera

$$\psi = 22^\circ 47' 54'';$$

et cette valeur de ψ, substituée dans l'équation (5), reproduira effectivement le nombre

$$T = 0{,}78539\ldots = \frac{\pi}{4}.$$

542.

Calcul intégral. — *Sur une formule de M. Anger et sur d'autres formules analogues.*

C. R., T. XXXIX, p. 129 (17 juillet 1854).

J'ai reçu de M. Anger, président de la Société des naturalistes à Dantzick, une Lettre où l'auteur dit :

« Occupé depuis longtemps de l'examen des fonctions que les astronomes allemands désignent par I, savoir de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\alpha - k\sin\alpha)\, d\alpha = 2\pi \mathrm{I}_k^h,$$

j'ai réussi à en tirer un développement en forme de série, frappant par sa simplicité. Je ne sais s'il a été donné ailleurs. Je trouve

$$\frac{h}{\sin 2h\pi}\int_0^{2\pi} \cos(h\alpha - k\sin\alpha)\, d\alpha = 1 + \frac{k^2}{h^2 - 2^2} + \frac{k^4}{(h^2-2^2)(h^2-4^2)} + \ldots$$
$$+ h\left[\frac{k}{h^2 - 1} + \frac{k^3}{(h^2-1)(h^2-3^2)} + \ldots\right].$$

Si h est un nombre entier, on obtient comme corollaire le développement connu et donné par Bessel,

$$\mathrm{I}_k^h = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^h}{1.2.3\ldots h}\left[1 - \frac{1}{h+1}\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2(h+1)(h+2)}\left(\frac{k}{2}\right)^4 + \ldots\right]. »$$

En examinant attentivement la formule de M. Anger, j'ai reconnu qu'elle était comprise comme cas particulier, avec d'autres du même genre, dans quelques formules générales qu'on peut démontrer comme il suit.

On a

$$(1) \qquad \Delta^n \frac{1}{x} = \frac{1.2\ldots n}{x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}(-\Delta x)^n.$$

et l'on en tire : 1° en supposant $\Delta x = 1$,

$$\Delta^n \frac{1}{x} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}; \tag{2}$$

2° en supposant $\Delta x = 2$,

$$\Delta^n \frac{1}{x-n} = (-2)^n \frac{1.2\ldots n}{(x-n)(x-n+1)\ldots(x+n-1)(x+n)}. \tag{3}$$

D'autre part, on peut, de diverses manières, transformer la fonction $\frac{1}{x}$ en intégrales dont les différences finies se déterminent aisément. On a, par exemple,

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt, \tag{4}$$

et l'on en conclut, en prenant $\Delta x = 1$,

$$\Delta^n \frac{1}{x} = \int_0^\infty (e^{-t}-1)^n e^{-tx}\,dt;$$

par conséquent

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \int_0^\infty \frac{(1-e^{-t})^n}{1.2\ldots n} e^{-tx}\,dt. \tag{5}$$

On a encore

$$\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{i}}{e^{2\pi x\mathrm{i}}-1} \int_0^{2\pi} e^{\alpha x\mathrm{i}}\,d\alpha, \tag{6}$$

et l'on en conclut, en prenant $\Delta x = 2$,

$$\Delta^n \frac{1}{x} = \frac{\mathrm{i}}{e^{2\pi x\mathrm{i}}-1} \int_0^{2\pi} (2\mathrm{i}\sin\alpha)^n e^{\alpha x\mathrm{i}}\,d\alpha;$$

par conséquent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(x-n)(x-n+1)\ldots(x+n-1)(x+n)} \\ &\quad = \frac{\mathrm{i}}{e^{2\pi x\mathrm{i}}-1} \int_0^{2\pi} \frac{(-\mathrm{i}\sin\alpha)^n}{1.2\ldots n} e^{\alpha x\mathrm{i}}\,d\alpha. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Soit maintenant $\mathrm{f}(z)$ une fonction de z qui reste monodrome, mono-

gène et finie pour un module de z inférieur à c, et désignons par a_0, a_1, a_2, ... les valeurs de $\mathrm{f}(z)$, $\mathrm{f}'(z)$, $\mathrm{f}''(z)$, ..., correspondantes à une valeur nulle de z. En nommant k une constante arbitraire tellement choisie, que le module du produit kz reste inférieur à c, on aura

$$\mathrm{f}(kz) = a_0 + a_1 \frac{kz}{1} + a_2 \frac{k^2 z^2}{1.2} + \ldots. \tag{8}$$

Par suite, en supposant le module de k inférieur à c, on tirera de la formule (5)

$$\int_0^\infty e^{-tx} \mathrm{f}[k(1-e^{-t})]\,dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1 k}{x(x+1)} + \frac{a^2 k^2}{x(x+1)(x+2)} + \ldots \tag{9}$$

et de la formule (7)

$$\int_0^{2\pi} e^{\alpha x\mathrm{i}} \mathrm{f}(-\mathrm{i}k\sin\alpha)\,d\alpha = X \frac{e^{2\pi x\mathrm{i}}-1}{\mathrm{i}}, \tag{10}$$

la valeur de X étant

$$X = a_0 \frac{1}{x} + a_1 \frac{k}{(x-1)(x+1)} + a_2 \frac{k^2}{(x-2)x(x+2)} + \ldots. \tag{11}$$

Si, pour abréger, on pose

$$e^{\alpha x\mathrm{i}} \mathrm{f}(-\mathrm{i}k\sin\alpha) = A + B\mathrm{i}, \tag{12}$$

la formule (10) donnera

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} A\,d\alpha = X\sin 2\pi x, \\ &\int_0^{2\pi} B\,d\alpha = X(1-\cos 2\pi x); \end{aligned}\right. \tag{13}$$

par conséquent

$$\frac{\int_0^{2\pi} B\,d\alpha}{\int_0^{2\pi} A\,d\alpha} = \operatorname{tang}\pi x. \tag{14}$$

Si l'on prend

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{1-z},$$

la formule (9) donnera, pour un module de k inférieur à l'unité,

$$(15)\qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)}k + \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}k^2 + \ldots = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1-k+ke^{-t}}\,dt.$$

Si l'on suppose non seulement le module de k, mais aussi le module de $\frac{k}{1-k}$ inférieur à l'unité, ce qui arrivera, par exemple, quand la constante k sera positive, mais inférieure à $\frac{1}{2}$, l'équation (15) donnera

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)}k + \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}k^2 + \frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}k^3 + \ldots \\ &\quad = \frac{1}{1-k}\frac{1}{x} - \frac{k}{(1-k)^2}\frac{1}{x+1} + \frac{k^2}{(1-k)^3}\frac{1}{x+2} - \frac{k^3}{(1-k)^4}\frac{1}{x+3} + \ldots .\end{aligned}\right.$$

Si l'on supposait précisément $k=1$, le module de $x+1$ étant supérieur à l'unité, la formule (15) donnerait

$$(17)\qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)} + \ldots = \frac{1}{x-1};$$

par conséquent

$$(18)\qquad 1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1.2}{(1+x)(2+x)} + \ldots = \frac{x}{x-1},$$

et l'on serait ainsi ramené à une formule de Stirling.

Si l'on prend

$$\mathrm{f}(z) = e^{zi},$$

la formule (10) donnera

$$(19)\qquad \int_0^{2\pi} e^{(\alpha x - k\sin\alpha)i}\,d\alpha = X\,\frac{e^{2\pi x i}-1}{i}$$

et, par suite,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos(\alpha x - k\sin\alpha)\,d\alpha = X\sin 2\pi x, \\ &\int_0^{2\pi} \sin(\alpha x - k\sin\alpha)\,d\alpha = X(1-\cos 2\pi x),\end{aligned}\right.$$

la valeur de X étant

$$(21)\qquad X = \frac{1}{x} + \frac{k}{(x-1)(x+1)} + \frac{k^2}{(x-2)x(x+2)} + \ldots .$$

La première des équations (20) coïncide avec la formule de M. Anger.

Si l'on divise la seconde des intégrales (20) par la première, on trouvera

$$(22)\qquad \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\alpha x - k\sin\alpha)\,d\alpha}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\alpha x - k\sin\alpha)\,d\alpha} = \operatorname{tang}\pi x,$$

ce que donnerait aussi la formule (14). Le rapport de ces deux intégrales est donc indépendant de la constante k renfermée dans chacune d'elles.

On pourrait remarquer encore diverses formules que l'on déduit des précédentes, en attribuant aux quantités x, k des valeurs imaginaires. Si, pour fixer les idées, on remplace x par xi et k par ki, on tirera de la formule (7) :

1° Pour des valeurs impaires de n,

$$(23)\qquad \int_0^{2\pi} e^{-\alpha x}\sin^n\alpha\,d\alpha = \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2+1)(x^2+3^2)\ldots(x^2+n^2)}(1-e^{-2\pi x}),$$

2° Pour des valeurs paires de n,

$$(24)\qquad \int_0^{2\pi} e^{-\alpha x}\sin^n\alpha\,d\alpha = \frac{1.2.3\ldots n}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)\ldots(x^2+n^2)}(1-e^{-2\pi x}).$$

Alors aussi la formule (19) donnera

$$\int_0^{2\pi} e^{-\alpha x + k\sin\alpha}\, d\alpha = X(1 - e^{-2\pi x}), \tag{25}$$

la valeur de X étant

$$X = \frac{1}{x} + \frac{k}{x^2+1} + \frac{k^2}{x(x^2+2^2)} + \frac{k^3}{(x^2+1)(x^2+3^2)} + \ldots; \tag{26}$$

et, comme le produit

$$X(1 - e^{-2\pi x})$$

variera dans le rapport de 1 à $e^{2\pi x}$, quand on changera simultanément x en $-x$ et k en $-k$, on aura encore

$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-\alpha x + k\sin\alpha}\, d\alpha}{\int_0^{2\pi} e^{-\alpha x + k\sin\alpha}\, d\alpha} = e^{-2\pi x}. \tag{27}$$

Nous observerons, en finissant, que l'équation (14) peut être présentée sous la forme symbolique

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}\, \mathfrak{f}[k(1 - e^{-t})]\, dt = \mathfrak{f}(-k\Delta_x)\frac{1}{x}. \tag{28}$$

Comme on aura d'ailleurs identiquement

$$e^{-t} = 1 - (1 - e^{-t}),$$

on trouvera encore

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}\, \mathfrak{f}[k(1 - e^{-t})]\, dt = \frac{\mathfrak{f}(-k\Delta_x)}{1+\Delta_x}\frac{1}{x+1} \tag{29}$$

et, plus généralement,

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}\, \mathfrak{f}[k(1 - e^{-t})]\, dt = \frac{\mathfrak{f}(-k\Delta_x)}{(1+\Delta_x)^y}\frac{1}{x+y}. \tag{30}$$

Si, dans les équations (28), (29), on prend successivement pour

$\mathfrak{f}(z)$ les fonctions

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{l(1-z)}$$

et

$$\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{l(1-z)} - \frac{1}{2}\right]\frac{1}{l(1-z)},$$

et si l'on a égard à la formule

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{l(1-z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z + \frac{1}{24}z^2 + \frac{19}{720}z^3 + \ldots = \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty} c_n z^{n-1}, \tag{31}$$

dans laquelle la valeur de c_n est

$$c_n = \mathrm{S}(-1)^{1+f+g+h+\ldots}\frac{1.2.3\ldots(f+g+h+\ldots)}{(1.2\ldots f)(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)\ldots}\left(\frac{1}{2}\right)^f\left(\frac{1}{3}\right)^{2g}\left(\frac{1}{4}\right)^{3h}\ldots, \tag{32}$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de $f, g, h, \ldots$, qui vérifient la condition

$$f + 2g + 3h + \ldots = n,$$

on obtiendra des équations qui subsisteront pour des modules de k inférieurs à l'unité; puis, en posant

$$k = 1,$$

on retrouvera les formules que M. Binet a données dans les pages 111 et 114 de son *Mémoire sur les intégrales eulériennes*.

543.

Analyse mathématique. — *Sur l'induction en Analyse et sur l'emploi des formules symboliques.*

C. R., T. XXXIX, p. 169 (24 janvier 1854).

L'induction peut être utilement employée en Analyse comme un moyen de découvertes. Mais les formules générales ainsi obtenues doivent être ensuite vérifiées à l'aide de démonstrations rigoureuses et propres à faire connaître les conditions sous lesquelles subsistent ces mêmes formules. Donnons à cette réflexion quelques développements.

Parmi les fonctions qui reparaissent souvent dans le calcul, on doit surtout remarquer les exponentielles qui se reproduisent par différentiation, et dont les différences finies se déterminent encore avec la plus grande facilité.

On a, en effet,

$$D_x e^x = e^x$$

et, en supposant $\Delta x = \alpha$,

$$(1+\Delta_x)e^x = e^\alpha e^x, \qquad \Delta_x e^x = (e^\alpha - 1)e^x.$$

On a plus généralement, en désignant par a un coefficient constant,

$$D_x e^{ax} = a e^{ax}, \qquad (1+\Delta_x)e^{ax} = e^{a\alpha} e^{ax},$$

par conséquent

$$D_x^n e^{ax} = a^n e^{ax},$$

et de ces formules, jointes à l'équation

$$e^{a\alpha} = 1 + \frac{a\alpha}{1} + \frac{a^2\alpha^2}{1.2} + \dots,$$

on déduit immédiatement la formule symbolique

$$(1+\Delta_x)e^{ax} = e^{\alpha D_x} e^{ax}.$$

Il y a plus : cette formule subsistant, quelle que soit la constante a, on pourra évidemment y remplacer l'exponentielle e^{ax} par une somme de termes proportionnels à de semblables exponentielles, et, en posant

$$f(x) = A e^{ax} + B e^{bx} + C e^{cx} + \dots,$$

on aura encore

$$(1)\qquad (1+\Delta_x) f(x) = e^{\alpha D_x} f(x)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\qquad f(x+\alpha) = \left(1 + \frac{\alpha}{1} D_x + \frac{\alpha^2}{1.2} D_x^2 + \dots\right) f(x).$$

Or on pourra, par induction, étendre les formules (1) et (2) au cas où $f(x)$ est une fonction quelconque de la variable x. Mais la formule de Taylor ainsi obtenue n'est pas toujours exacte; elle subsiste seulement sous la condition que la fonction $f(x)$ reste monodrome, monogène et finie, pour le module attribué à la variable x et pour un module plus petit.

Des observations semblables s'appliquent aux diverses formules générales qui peuvent se déduire par induction de l'équation (1), et parmi lesquelles on doit surtout remarquer celles que je vais indiquer.

Si, dans les deux membres de l'équation (1), on conserve seulement les facteurs symboliques, en se dispensant d'y écrire la fonction $f(x)$, on obtiendra la formule symbolique

$$(3)\qquad 1 + \Delta_x = e^{\alpha D_x};$$

et de cette formule on déduira par induction les trois suivantes :

$$(4)\qquad D_x = \frac{1}{\alpha} l(1+\Delta_x),$$

$$(5)\qquad \frac{1}{\Delta_x} = \frac{1}{e^{\alpha D_x} - 1},$$

$$(6)\qquad \frac{1}{\alpha D_x} = \frac{1}{l(1+\Delta_x)}.$$

Or il suffira de développer les seconds membres des équations (4), (5), (6) en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des lettres caractéristiques Δ_x ou D_x, puis d'appliquer les deux membres de chaque équation considérés comme facteurs symboliques à une fonction déterminée $f(x)$, pour obtenir trois formules générales dont la première, déjà connue, fournira le développement de la fonction dérivée

$$D_x f(x)$$

en une série de termes proportionnels aux différences finies des divers ordres de la fonction $f(x)$. Les deux autres formules générales fourniront deux développements distincts de la différence

$$\frac{f(x)}{\Delta_x} - \frac{f(x)}{\alpha D_x} = \Sigma f(x) - \frac{1}{\alpha}\int f(x)\,dx. \tag{7}$$

Le premier de ces développements, trouvé par Maclaurin, sera composé de termes proportionnels à la fonction $f(x)$ et à ses dérivées des divers ordres. Mais, dans le second développement, les diverses dérivées de la fonction $f(x)$ seront remplacées par ses différences finies.

Il importe d'observer que, si l'on nomme r le module de la variable z, le développement de la fonction

$$\frac{1}{e^z - 1}$$

suivant les puissances ascendantes de z fournira une série dont le module sera

$$\frac{r}{2\pi}.$$

D'autre part, si, en attribuant au module r de z des valeurs croissantes, on nomme ι la plus petite valeur de r pour laquelle la fonction $f(x+z)$ cesse d'être monodrome, monogène et finie, le rapport $\frac{r}{\iota}$ sera le module de la série qui aura pour terme général l'expression

$$\frac{z^n}{1.2\ldots n} D_x^n f(x).$$

Donc le terme général de la fonction de Maclaurin sera le produit de la quantité

$$1.2.3\ldots n = \Gamma(n+1)$$

par le terme général d'une autre série dont le module sera celui de

$$\frac{\alpha}{2\pi\iota}.$$

Donc la série de Maclaurin, comme celle dont le terme général est le

produit $1.2.3\ldots n$, offrira un module infini et sera divergente, à moins que l'on n'ait

$$\frac{1}{\iota} = 0, \qquad \iota = \infty.$$

Donc, pour que la formule de Maclaurin subsiste, il sera nécessaire que la fonction $f(x)$ ne cesse jamais d'être monodrome, monogène et finie, ce qui arrivera, par exemple, si $f(x)$ est une fonction entière de x, ou d'exponentielles réelles ou imaginaires de la forme e^{ax}.

D'autre part, comme les développements des expressions

$$l(1+z) \quad \text{et} \quad \frac{1}{l(1+z)}$$

suivant les puissances ascendantes de z fournissent deux séries dont le module est l'unité, les deux formules générales déduites des équations (4) et (6) ne subsisteront que si la série

$$f(x),\quad \Delta f(x),\quad \Delta^2 f(x),\quad \ldots, \tag{8}$$

dont le terme général est $\Delta^n f(x)$, est convergente, par conséquent si elle offre un module inférieur, ou tout au plus égal à l'unité. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on suppose

$$f(x) = \frac{1}{x};$$

et alors l'équation (4) reproduira, pour des valeurs positives du rapport $\frac{\alpha}{x}$, la formule connue

$$\frac{x+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{x+2\alpha}\alpha + \frac{1.2}{(x+2\alpha)(x+3\alpha)}\alpha^2 + \ldots,$$

qui se réduit à l'équation (18) de la page 174, quand on y remplace x par $\alpha(x-1)$.

Arrêtons-nous maintenant au développement de l'expression (7) en une série de termes proportionnels à la fonction $f(x)$ et à ses différences finies des divers ordres. On aura

$$\frac{1}{\mathrm{l}(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}z + \frac{1}{24}z^2 - \frac{19}{720}z^3 + \frac{3}{160}z^4 - \ldots$$

$$= \frac{1}{z} + \mathop{\mathrm{S}}_{n=0}^{n=\infty} c_{n+1}(-z)^n,$$

les valeurs de c_1 et de c_n étant déterminées par les formules

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}c_1 - \frac{1}{n-1}c_2 - \ldots - \frac{1}{3}c_{n-2} - \frac{1}{2}c_{n-1}.$$

Donc, en posant, pour abréger,

$$(9) \qquad \varphi(x) = \left[\frac{1}{\mathrm{l}(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x}\right]\mathrm{f}(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{n=0}^{n=\infty} c_{n+1}(-\Delta_x)^n\,\mathrm{f}(x),$$

on tirera de l'équation (6)

$$(10) \qquad \sum \mathrm{f}(x) = \frac{1}{\alpha}\int \mathrm{f}(x)\,dx - \varphi(x) + \varpi(x),$$

les intégrales qu'indiquent les signes $\sum$, $\int$ étant prises à partir d'une même origine que nous désignerons par la lettre x, et $\varpi(x)$ désignant une fonction périodique, mais arbitraire, dont la valeur ne changera pas quand x recevra pour accroissement un multiple de la quantité $\Delta x = \alpha$. Si d'ailleurs on suppose la différence $x - \mathrm{x}$ réduite à un multiple de α, on aura simplement

$$\varpi(x) = -\varphi(\mathrm{x}),$$

et par suite la formule (10), dans laquelle les intégrales sont prises à partir de l'origine $x = \mathrm{x}$, donnera

$$(11) \qquad \sum \mathrm{f}(x) = \frac{1}{\alpha}\int \mathrm{f}(x)\,dx - \varphi(x) + \varphi(\mathrm{x}).$$

Si, pour fixer les idées, on pose $\mathrm{x} = 1$, et de plus

$$\alpha = 1, \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x},$$

la formule (11) donnera

$$(12) \qquad \sum \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x-1} = \mathrm{l}x - \varphi(x) + \varphi(1),$$

la valeur de $\varphi(x)$ étant donnée par l'équation

$$(13) \qquad \varphi(x) = \left[\frac{1}{\mathrm{l}(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x}\right]\frac{1}{x},$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$(14) \qquad \varphi(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{n=0}^{n=\infty} c_{n+1}\frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

en sorte qu'on aura

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x} &+ \frac{1}{12}\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{12}\frac{1}{x(x+1)(x+2)} \\ &+ \frac{19}{60}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &+ \frac{9}{120}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et

$$(16) \qquad \varphi(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} + \frac{19}{2880} + \frac{3}{800} + \ldots = 0,57721566\ldots.$$

Si, en supposant $\mathrm{x} = 1$ et $\alpha = 1$, on prenait

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{l}x,$$

la formule (11) donnerait

$$(17) \qquad \sum \mathrm{l}x = \mathrm{l}1 + \mathrm{l}2 + \ldots + \mathrm{l}(x-1) = x\,\mathrm{l}x - x + \varphi(x) - \varphi(1),$$

la valeur de $\varphi(x)$ étant

$$(18) \qquad \varphi(x) = \left[\frac{1}{\mathrm{l}(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x}\right]\mathrm{l}x.$$

D'ailleurs, eu égard aux formules

$$D_x = l(1 + \Delta_x),$$
$$D_x\, lx = \frac{1}{x},$$

on pourrait encore présenter l'équation (18) sous la forme

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\, lx = \left[\frac{1}{l(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x} - \frac{1}{2}\right]\frac{1}{l(1+\Delta_x)}\,\frac{1}{x}. \tag{19}$$

Les formules (11), (12), (17) s'accordent avec celles que j'ai données dans la précédente séance, et avec les formules données par M. Binet, pour des valeurs spéciales de $f(x)$, dans le Mémoire sur les intégrales eulériennes. Pour établir ces formules en toute rigueur, et même pour déterminer la valeur de la constante $\varphi(1)$ qu'elles renferment, on peut recourir à la transformation des fonctions en intégrales définies. Ainsi, par exemple, pour obtenir la valeur de la fonction

$$l\Gamma(x) = \sum lx,$$

telle que la donne la formule (17) jointe à l'équation (19), et même pour étendre la formule ainsi obtenue au cas où la variable x admet des valeurs positives quelconques, entières ou non, il suffit d'établir généralement l'équation

$$l\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)lx - x + \frac{1}{2}\,l(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)e^{-tx}\,\frac{dt}{t}. \tag{20}$$

Or on peut établir très simplement cette équation et une multitude d'autres équations de même genre, en s'appuyant sur la théorie des intégrales singulières, comme on va le faire voir.

Soient u, v deux fonctions de t, qui, demeurant finies pour des valeurs finies et positives de t, s'évanouissent pour $t = 0$; soit encore $f(z)$ une fonction qui devienne infinie pour $z = 0$, mais reste finie pour toute valeur finie et positive de z, et supposons que le produit $z f(z)$ se réduise, pour $z = 0$, à une constante finie k, et, pour $z = \infty$, à zéro; soient enfin μ et ν les valeurs de $D_t u$, $D_t v$ correspon-

dantes à une valeur nulle de t. La théorie des intégrales singulières donnera

$$\int_0^\infty [f(u)\,D_t u - f(v)\,D_t v]\,dt = k\,l\frac{\nu}{\mu}. \tag{21}$$

Si, pour fixer les idées, on pose

$$u = t, \qquad v = tx, \qquad f(z) = \frac{e^{-z}}{z},$$

x étant positif, la formule (20) donnera

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\,dt = lx. \tag{22}$$

Si l'on pose, au contraire,

$$u = t, \qquad v = e^t - 1, \qquad f(z) = \frac{(1+z)^{-x}}{z},$$

on trouvera

$$\int_0^\infty \left[\frac{(1+t)^{-x}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right]dt = 0; \tag{23}$$

mais, d'autre part, on aura

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \theta^{x-1} e^{-\theta}\,d\theta, \tag{24}$$

par conséquent

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \theta^{x-1} e^{-\theta}\,l\theta\,d\theta; \tag{25}$$

et, de cette dernière formule, jointe aux équations (21), (22), on tirera

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = lx - \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)e^{-tx}\,dt. \tag{26}$$

Or il suffit d'intégrer, par rapport à x, les deux membres de l'équation (26), à partir de l'origine $x = \frac{1}{2}$, et ayant égard à la formule

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t}}\right)\frac{dt}{t} = -2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty}\,{}_0^{\infty}\, \frac{1}{t\left(e^{\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t}\right)} = l2, \tag{27}$$

pour retrouver immédiatement la formule (20).

Au reste, l'équation (20) et les formules analogues qui serviraient à transformer la somme $\sum f(x)$ en intégrale définie, et par suite à établir rigoureusement les résultats qui se déduisent de l'équation (6), peuvent être fournies elles-mêmes par la méthode d'induction. Ainsi, en particulier, pour obtenir l'équation (20), il suffit de joindre à l'équation (19) les deux formules

$$1+\Delta_x = e^{D_x}, \qquad \frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt,$$

et d'avoir égard à la formule (27).

Généralement, pour obtenir ainsi des formules analogues à l'équation (20), il suffira de transformer la fonction $f(x)$ en une intégrale définie simple ou double qui offre sous le signe $\int$ la variable x dans un seul facteur de la forme e^{-tx} ou $e^{\pm txi}$. On y parviendra, par exemple, à l'aide de la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

à laquelle on pourrait substituer encore les formules du même genre, dans lesquelles un des signes $\int$ est remplacé par le signe $\sum$.

544.

Analyse mathématique. — *Sur les intégrales aux différences finies.*

C. R., T. XXXIX, p. 214 (31 juillet 1854).

Soit $f(x)$ une fonction donnée de la variable x. L'intégrale aux différences infiniment petites $\int f(x)\,dx$ ne sera autre chose qu'une nouvelle fonction $F(x)$ propre à vérifier la formule

$$D_x F(x) = f(x), \tag{1}$$

et pareillement l'intégrale aux différences finies $\sum f(x)$ ne sera autre chose qu'une fonction $\mathfrak{F}(x)$ propre à vérifier l'équation

$$\Delta_x \mathfrak{F}(x) = f(x). \tag{2}$$

Par suite, ces deux intégrales pourront être présentées sous les formes symboliques

$$F(x) = \frac{f(x)}{D_x}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{f(x)}{\Delta_x}, \tag{4}$$

et des équations (3), (4), jointes à l'équation symbolique

$$1+\Delta_x = e^{\alpha D_x},$$

dans laquelle on suppose $\alpha = \Delta x$, on tirera

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{\alpha}F(x) - \varphi(x), \tag{5}$$

la valeur de $\varphi(x)$ étant déterminée par la formule symbolique

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{\alpha D_x} - \frac{1}{\Delta_x}\right) f(x), \tag{6}$$

ou, ce qui revient au même, par l'une des deux suivantes :

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{\alpha D_x} - \frac{1}{e^{\alpha D_x}-1}\right) f(x), \tag{7}$$

$$\varphi(x) = \left[\frac{1}{l(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x}\right] f(x). \tag{8}$$

Il y a plus : à la formule (8), que l'on peut écrire comme il suit,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \left[\frac{1}{l(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x} - \frac{1}{2}\right] f(x), \tag{9}$$

on pourra substituer encore d'autres formules analogues. Ainsi, en particulier, de l'équation (9), combinée avec la formule symbolique

$$\alpha D_x = l(1+\Delta_x),$$

on déduira immédiatement la suivante :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{f}(x) + \left[\frac{1}{\mathrm{l}(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x} - \frac{1}{2}\right]\frac{\alpha \mathrm{D}_x \mathrm{f}(x)}{\mathrm{l}(1+\Delta_x)}. \tag{10}$$

Pour réduire les formules symboliques (7), (8), (10) à des équations qui déterminent avec précision la valeur de $\varphi(x)$, il suffira généralement de transformer la fonction $\mathrm{f}(x)$ en une somme de termes proportionnels à des exponentielles de la forme e^{ax}. Supposons, en effet,

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{S}\, A\, e^{ax}, \tag{11}$$

a, A désignant des coefficients réels ou imaginaires dont le second change de valeur avec le premier, et la somme qu'indique le signe S pouvant se transformer en une intégrale définie. L'équation (7) donnera

$$\varphi(x) = \mathrm{S}\left(\frac{1}{a\alpha} - \frac{1}{e^{a\alpha}-1}\right) A\, e^{ax} \tag{12}$$

et

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{f}(x) + \mathrm{S}\left(\frac{1}{a\alpha} - \frac{1}{e^{a\alpha}-1} - \frac{1}{2}\right) A\, e^{ax}. \tag{13}$$

Remarquons d'ailleurs que la formule (11) continuera de subsister, si l'on suppose la valeur de $\mathrm{f}(x)$ donnée par une équation de la forme

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{S}(A\, e^{ax} + B), \tag{14}$$

A et B étant des fonctions de a.

Revenons maintenant à l'équation (5). On en tirera

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\alpha}\int \mathrm{f}(x)\, dx - \varphi(x). \tag{15}$$

Dans cette dernière formule, l'intégrale

$$\int \mathrm{f}(x)\, dx$$

peut être censée renfermer une constante arbitraire. En déterminant

cette constante de manière que $\mathcal{F}(x)$ s'évanouisse pour $x = \mathrm{x}$, on aura

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{x}}^{x} \mathrm{f}(z)\, dz - \varphi(x) + \varphi(\mathrm{x}). \tag{16}$$

Lorsque, dans l'équation (16), on substituera pour $\varphi(x)$ sa valeur tirée de la formule (12) ou (13), on obtiendra pour $\mathcal{F}(x)$ une fonction complètement déterminée, et cette fonction sera certainement une valeur de l'intégrale $\sum \mathrm{f}(x)$, ou, ce qui revient au même, une valeur de $\mathcal{F}(x)$ propre à vérifier l'équation (2); car on tire de l'équation (16)

$$\Delta_x \mathcal{F}(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha} \mathrm{f}(z)\, dz - \Delta_x \varphi(x), \tag{17}$$

et, en vertu de la formule (9), jointe à l'équation (12) ou (13), le second membre de l'équation (17) se réduira précisément à $\mathrm{f}(x)$.

Au lieu de tirer de la formule (12) ou (13) la valeur de $\varphi(x)$, on pourrait développer $\varphi(x)$ en une série de termes proportionnels à la fonction $\mathrm{f}(x)$ et à ses différences finies des divers ordres; et, pour y parvenir, il suffirait de développer, dans le second membre de la formule (8), l'expression symbolique

$$\frac{1}{\mathrm{l}(1+\Delta_x)} - \frac{1}{\Delta_x}$$

suivant la puissance ascendante de Δ_x. On pourrait aussi, en partant de la formule (10), développer $\varphi(x)$ en une série de termes proportionnels à la fonction dérivée $\mathrm{D}_x \mathrm{f}(x)$ et à ses différences finies des divers ordres. Mais les valeurs de $\varphi(x)$, ainsi déduites des formules (8) et (13), ne subsisteraient que dans le cas où les séries obtenues seraient convergentes, et cette convergence exige que la série formée avec les différences finies de la fonction $\mathrm{f}(x)$ ou $\mathrm{D}_x \mathrm{f}(x)$ ait pour module un nombre inférieur ou tout au plus égal à l'unité.

Pour montrer une application très simple des formules que nous venons d'établir, supposons

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^m},$$

m étant un nombre quelconque. Dans cette hypothèse, la formule (11) pourra être réduite à

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-tx}\, dt, \tag{18}$$

et la formule (12) donnera

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha t}} - \frac{1}{\alpha t} \right) t^{m-1} e^{-tx}\, dt, \tag{19}$$

tandis que l'on aura

$$\int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{\mathrm{x}^{m-1}} - \frac{1}{x^{m-1}} \right). \tag{20}$$

Donc, pour obtenir une valeur de $\sum \frac{1}{x^m}$ qui ait la propriété de s'évanouir avec la différence $x - \mathrm{x}$, il suffira de prendre

$$\sum \frac{1}{x^m} = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{\mathrm{x}^{m-1}} - \frac{1}{x^{m-1}} \right) - \varphi(x) + \varphi(\mathrm{x}), \tag{21}$$

la fonction $\varphi(x)$ étant déterminée par la formule (19).

Si l'on supposait

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{l}x,$$

la formule (14) serait réduite à

$$\mathrm{l}x = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\, dt, \tag{22}$$

et la formule (13) donnerait

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \mathrm{l}x + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha t}} - \frac{1}{\alpha t} - \frac{1}{2} \right) e^{-tx} \frac{dt}{t}, \tag{23}$$

tandis que l'on aurait

$$\int_{\mathrm{x}}^{x} \mathrm{l}x\, dx = x(\mathrm{l}x - 1) - \mathrm{x}(\mathrm{l}\mathrm{x} - 1). \tag{24}$$

Donc, pour obtenir une valeur de $\Sigma\, \mathrm{l}x$ qui ait la propriété de s'évanouir avec la différence $x - \mathrm{x}$, il suffit de prendre

$$\sum \mathrm{l}x = x(\mathrm{l}x - 1) - \mathrm{x}(\mathrm{l}\mathrm{x} - 1) - \varphi(x) + \varphi(\mathrm{x}), \tag{25}$$

la fonction $\varphi(x)$ étant déterminée par la formule (23).

Si à la formule (13) on substituait la formule (10), on en déduirait immédiatement la valeur de $\Sigma\, \mathrm{l}x$ développée en une série de termes proportionnels à la fonction $\frac{1}{x}$ et à ses différences finies des divers ordres.

545.

Analyse mathématique. — *Sur un théorème général qui fournit immédiatement, dans un grand nombre de cas, des limites entre lesquelles une série simple ou multiple demeure convergente.*

C. R., T. XL, p. 162 (22 janvier 1855).

Le Mémoire lithographié que j'ai présenté le 11 octobre 1831 [1] à l'Académie de Turin renferme un théorème qui, eu égard aux remarques faites dans les *Comptes rendus* de 1851 et 1852, peut s'énoncer comme il suit :

Théorème I. — *Soit*

$$u = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

qui demeure finie, monodrome et monogène pour des modules de ces variables respectivement inférieurs à

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots.$$

Soit d'ailleurs R *la plus grande valeur que puisse acquérir le module de*

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

la fonction u, quand on attribue aux variables $x, y, z, \ldots$ les modules $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$. La fonction u sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes des variables $x, y, z, \ldots$ tant que les modules de ces variables demeureront respectivement inférieurs à $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$. De plus, si l'on pose

$$\omega = \left(1 - \frac{x}{\mathrm{x}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{y}{\mathrm{y}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{z}{\mathrm{z}}\right)^{-1}\cdots, \tag{1}$$

les modules du terme général et du reste de la série en question seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la série qui a pour somme le produit

$$\mathrm{R}\omega.$$

Corollaire. — Comme le coefficient du produit

$$x^l y^m z^n \ldots,$$

dans le développement de chacune des fonctions

$$u, \quad \mathrm{R}\omega,$$

est précisément le rapport qu'on obtient quand on divise par le nombre

$$\mathrm{N} = (1.2\ldots l)(1.2\ldots m)(1.2\ldots n)\ldots$$

la valeur qu'acquiert pour des valeurs nulles de $x, y, z, \ldots$ la dérivée

$$\mathrm{D}_x^l \mathrm{D}_y^m \mathrm{D}_z^n \ldots u \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}_x^l \mathrm{D}_y^m \mathrm{D}_z^n \ldots (\mathrm{R}\omega),$$

il est clair que le théorème I comprend la proposition suivante :

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, la fonction u et ses dérivées partielles des divers ordres offriront, pour des valeurs nulles de $x, y, z, \ldots$, des modules respectivement inférieurs aux valeurs correspondantes de la fonction $\mathrm{R}\omega$ et de ses dérivées partielles des mêmes ordres.*

Si l'on substitue aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

les différences

$$x - \xi, \quad y - \eta, \quad z - \zeta, \quad \ldots,$$

$\xi, \eta, \zeta, \ldots$ désignant des valeurs particulières attribuées aux variables $x, y, z, \ldots$, alors, à la place du théorème II, on obtiendra la proposition suivante :

Théorème III. — *Soit*

$$u = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

qui demeure finie, monodrome et monogène, dans le voisinage des valeurs particulières

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad \ldots,$$

et tant que l'on attribue aux différences

$$x - \xi, \quad y - \eta, \quad z - \zeta, \quad \ldots$$

des modules respectivement inférieurs aux quantités positives

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots.$$

Soit d'ailleurs, dans le cas où ces différences acquièrent ces modules, R la plus grande des valeurs que puisse acquérir le module de u, et posons

$$\omega = \left(1 - \frac{x-\xi}{\mathrm{x}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{y-\eta}{\mathrm{y}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{z-\zeta}{\mathrm{z}}\right)^{-1}\cdots. \tag{2}$$

La fonction u et ses dérivées partielles des divers ordres offriront, pour

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad \ldots,$$

des modules respectivement inférieurs aux valeurs correspondantes de la fonction $\mathrm{R}\omega$ et de ses dérivées partielles des mêmes ordres.

Le théorème II entraîne évidemment avec lui un théorème général que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème IV. — *Soient*

$$\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}, \quad \ldots$$

diverses fonctions des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

dont chacune demeure finie, monodrome et monogène dans le voisinage des valeurs particulières

$$x=\xi,\qquad y=\eta,\qquad z=\zeta,\qquad \ldots,$$

et tant que l'on attribue aux différences

$$x-\xi,\quad y-\eta,\quad z-\zeta,\quad \ldots,$$

des modules respectivement inférieurs aux quantités positives

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots$$

Soient d'ailleurs, dans le cas où ces différences acquièrent ces modules,

$$\mathrm{A},\quad \mathrm{B},\quad \mathrm{C},\quad \ldots$$

les plus grandes des valeurs que puissent acquérir les modules des fonctions

$$\mathcal{X},\quad \mathcal{Y},\quad \mathcal{Z},\quad \ldots,$$

et posons

$$\omega=\left(1-\frac{x-\xi}{\mathrm{x}}\right)^{-1}\left(1-\frac{y-\eta}{\mathrm{y}}\right)^{-1}\left(1-\frac{z-\zeta}{\mathrm{z}}\right)^{-1},\quad \ldots \tag{2}$$

Enfin, soit Ω *une fonction développable, pour de très petits modules des différences*

$$x-\xi,\quad y-\eta,\quad z-\zeta,\quad \ldots,$$

en une série simple ou multiple dont chaque terme soit le produit d'un facteur variable par d'autres facteurs respectivement égaux aux valeurs que prennent les fonctions

$$\mathcal{X},\quad \mathcal{Y},\quad \mathcal{Z},\quad \ldots,$$

ou leurs dérivées partielles des divers ordres, à l'instant où l'on pose

$$x=\xi,\qquad y=\eta,\qquad z=\zeta,\qquad \ldots.$$

Le développement de Ω *restera convergent, si l'on obtient une série con-*

vergente en remplaçant dans chaque terme de ce développement le facteur variable par son module, et les fonctions

$$\mathcal{X},\quad \mathcal{Y},\quad \mathcal{Z},\quad \ldots$$

par les produits

$$\mathrm{A}\omega,\quad \mathrm{B}\omega,\quad \mathrm{C}\omega,\quad \ldots.$$

Ce théorème général fournit immédiatement des limites entre lesquelles demeurent convergentes les séries qui représentent les développements de fonctions explicites ou même implicites.

Concevons, pour fixer les idées, que,

$$\mathcal{X}=\mathrm{f}(x)$$

étant une fonction finie, monodrome et monogène de la variable x, pour un module de $x-\xi$ inférieur à une certaine quantité positive x, on développe, en une série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de t, celle des racines de l'équation

$$x=\xi+t\mathcal{X}, \tag{3}$$

qui se réduit à ξ pour $t=0$. En attribuant à t un module suffisamment petit, on aura

$$x=\xi+t\mathcal{X}+\frac{t^2}{1.2}\mathrm{D}_x\mathcal{X}^2+\frac{t^3}{1.2.3}\mathrm{D}_x^2\mathcal{X}^3+\ldots, \tag{4}$$

x devant être réduit à ξ dans le second membre de la formule (4), après qu'on aura effectué les différentiations indiquées par la lettre caractéristique D_x; et la valeur de x, ainsi déterminée, vérifiera l'équation (3), tant que la série comprise dans la formule (4) sera convergente. Soit d'ailleurs A le plus grand module que puisse acquérir la fonction $\mathcal{X}$ quand la différence $x-\xi$ acquiert le module x. En vertu du théorème IV, le développement de x fourni par la formule (4) sera convergent, si l'on obtient une série convergente en supposant, dans le second membre de cette formule, t positif, en y remplaçant la fonction $\mathcal{X}$ par le produit

$$\mathrm{A}\omega=\mathrm{A}\left(1-\frac{x-\xi}{\mathrm{x}}\right)^{-1},$$

et en posant $x = \xi$ après les différentiations relatives à x. Or on aura, sous cette condition,

$$D_x^{n-1}\left(1 - \frac{x-\xi}{X}\right)^n = \frac{1.2.3\ldots(2n-2)}{1.2\ldots(n-1)} \frac{1}{X^{n-2}};$$

et par suite, en remplaçant $\mathfrak{x}$ par le produit $A\omega$ dans la formule (4), on trouvera

$$(5) \qquad x = \xi + At + \frac{A^2t^2}{X} + 2\frac{A^3t^3}{X^2} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{1.2\ldots n}\frac{2^{n-1}A^nt^n}{X^{n-1}} + \ldots.$$

Mais, d'autre part, on a identiquement

$$t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{1.2\ldots n}t^n + \ldots = 1 - \sqrt{1-2t};$$

donc la formule (5) donnera

$$(6) \qquad x = \xi + \frac{X}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4At}{X}}\right).$$

Comme on devait s'y attendre, cette dernière valeur de x est précisément celle que fournit l'équation (3), lorsqu'on la réduit à la formule

$$(7) \qquad x = \xi + \frac{At}{1 - \frac{x-\xi}{X}},$$

en remplaçant, dans le second membre, la fonction $\mathfrak{x}$ par le produit $A\omega$. D'ailleurs la valeur de x, donnée par la formule (6), se développe en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de t, quand on suppose le module de t inférieur à $\frac{X}{4A}$. Donc, dans cette même hypothèse, la série comprise dans le second membre de la formule (4) sera convergente, et, si t est positif, la valeur de $x - \xi$, donnée par la formule (4), offrira certainement une valeur numérique inférieure à celle que déterminera la formule (6).

Le théorème IV fournirait encore immédiatement des limites entre lesquelles demeurent convergentes les séries qui représentent les

intégrales d'équations différentielles ou aux dérivées partielles. On se trouve ainsi ramené, comme je l'expliquerai dans un autre article, aux résultats énoncés dans mon Mémoire lithographié de 1835 (¹) et à ceux que viennent d'obtenir MM. Briot et Bouquet.

546.

C. R., T. XL, p. 205 (29 janvier 1855).

Calcul des variations. — M. Augustin Cauchy présente à l'Académie une Note sur l'*Application du Calcul des variations à l'intégration d'un système d'équations différentielles*. Les résultats auxquels l'auteur est parvenu seront développés dans un prochain article.

547.

Analyse infinitésimale. — *Sur les avantages que présente l'introduction d'un paramètre variable et des notations propres au Calcul des variations dans quelques-unes des principales formules de l'Analyse infinitésimale.*

C. R., T. XL, p. 261 (5 février 1855).

Ce qui distingue le Calcul des variations du Calcul différentiel, c'est que dans celui-ci on se borne à faire varier des quantités supposées dépendantes, ou, en d'autres termes, fonctions les unes des autres, tandis que, dans le Calcul des variations, on fait varier les formes des fonctions elles-mêmes. Mais, pour réduire le Calcul des variations au Calcul différentiel, il suffit de faire correspondre les changements de forme des fonctions aux changements de valeur d'un paramètre variable qui ne paraissait pas dans les formules. Réciproquement, il suffit d'introduire dans plusieurs des principales formules de l'Ana-

(¹) *Sur l'intégration des équations différentielles* (*Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XI).

lyse infinitésimale un paramètre variable α, pour les transformer en d'autres qui s'expriment aisément à l'aide des notations propres au Calcul des variations. Rendons cette vérité sensible par quelques exemples.

Soit d'abord

$$u = f(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

une fonction des variables $x, y, z, \ldots$ qui demeure, du moins entre certaines limites, finie, monodrome et monogène. Si, dans cette fonction, on attribue aux variables $x, y, z, \ldots$ certains accroissements $h, k, l, \ldots$, on obtiendra une nouvelle fonction de $x, y, z, \ldots$, savoir

$$U = f(x+h, y+k, z+l, \ldots), \tag{2}$$

et les fonctions (1), (2) seront comprises, comme cas particuliers, dans l'expression analytique

$$v = f(x+\alpha h, y+\alpha k, z+\alpha l, \ldots), \tag{3}$$

qui renfermera un paramètre variable α, et de laquelle on déduira la fonction u en posant $\alpha = 0$, la fonction U en posant $\alpha = 1$. Or, le paramètre α venant à varier, l'expression (3), considérée comme fonction de $x, y, z, \ldots$, changera de forme, et le rapport

$$\frac{\delta v}{\delta \alpha},$$

entre la variation δv de la fonction v, et la variation $\delta\alpha$ du paramètre α, ne sera autre chose que la dérivée $D_\alpha v$ de la fonction v par rapport au paramètre α. Si l'on pose, pour plus de simplicité, $\delta\alpha = 1$, on aura précisément

$$\delta v = D_\alpha v, \tag{4}$$

puis on en conclura, en remplaçant v par δv, plusieurs fois de suite,

$$\delta^2 v = D_\alpha \delta v = D_\alpha^2 v,$$
$$\delta^3 v = D_\alpha^2 \delta v = D_\alpha^3 v,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et généralement

$$\delta^n v = D_\alpha^n v. \tag{5}$$

Si dans les formules (4) et (5) on pose $\alpha = 0$, elles donneront

$$\left\{\begin{aligned} \delta u &= \overset{\alpha=0}{\mathrm{I}}\, D_\alpha v \\ &\text{et} \\ \delta^n u &= \overset{\alpha=0}{\mathrm{I}}\, D_\alpha^n v. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

D'ailleurs la formule de Maclaurin donnera, pour des valeurs suffisamment petites de α,

$$v = \overset{\alpha=0}{\mathrm{I}}\, v + \frac{\alpha}{1}\overset{\alpha=0}{\mathrm{I}}\, D_\alpha v + \frac{\alpha^2}{1.2}\overset{\alpha=0}{\mathrm{I}}\, D_\alpha^2 v + \ldots. \tag{7}$$

On aura donc, eu égard aux équations (6),

$$v = u + \frac{\alpha}{1}\delta u + \frac{\alpha^2}{1.2}\delta^2 u + \ldots, \tag{8}$$

puis on en conclura, en posant $\alpha = 1$,

$$U = u + \frac{\delta u}{1} + \frac{\delta^2 u}{1.2} + \ldots. \tag{9}$$

D'autre part, la formule (4) donnera

$$\delta v = h D_x v + k D_y v + l D_z v + \ldots \tag{10}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta v = (h D_x + k D_y + l D_z + \ldots) v, \tag{11}$$

et l'on en conclura, en remplaçant plusieurs fois de suite v par δv,

$$\delta^n v = (h D_x + k D_y + l D_z + \ldots)^n v. \tag{12}$$

Enfin, on tirera de l'équation (12), en posant $\alpha = 0$,

$$\delta^n u = (h D_x + k D_y + l D_z + \ldots)^n u. \tag{13}$$

La formule (9), jointe à l'équation (13), reproduit ce qu'on nomme le *théorème de Taylor*, étendu à une fonction de plusieurs variables x, y, z, ... Comme on le voit, et comme je l'avais déjà remarqué dans mes Leçons données à l'École Polytechnique, cette extension se déduit sans peine de l'introduction du paramètre variable α sous le signe f. Ajoutons que l'expression la plus simple du théorème ainsi étendu est la formule (9), dans laquelle les valeurs de

$$\delta u, \quad \delta^2 u, \quad \ldots$$

peuvent être déduites ou de l'équation (13), ou, ce qui revient au même, des formules

$$(14) \qquad \delta x = h, \quad \delta y = k, \quad \delta z = l, \quad \ldots,$$

jointes aux règles établies pour la détermination des variations des divers ordres d'une fonction quelconque des variables $x, y, z, \ldots$.

Considérons maintenant un système d'équations différentielles de la forme

$$(15) \qquad D_t x = X, \quad D_t y = Y, \quad D_t z = Z, \quad \ldots,$$

$x, y, z, \ldots$ étant des fonctions inconnues de t, et $X, Y, Z, \ldots$ des fonctions de $x, y, z, \ldots, t$, qui demeurent, du moins entre certaines limites, finies, monodromes et monogènes. Supposons les inconnues $x, y, z, \ldots$ assujetties non seulement à vérifier ces équations différentielles, mais encore à prendre, pour une certaine valeur de t, par exemple pour $t = \tau$, les valeurs particulières

$$(16) \qquad x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad \ldots.$$

Les fonctions de t représentées par $x, y, z, \ldots$ changeront de forme si, en introduisant un paramètre variable α dans les équations (15), on leur substitue les suivantes

$$(17) \qquad D_t x = \alpha X, \quad D_t y = \alpha Y, \quad D_t z = \alpha Z, \quad \ldots;$$

et comme, pour $\alpha = 0$, les équations (17) donnent

$$(18) \qquad D_t x = 0, \quad D_t y = 0, \quad D_t z = 0, \quad \ldots,$$

il est clair que les inconnues $x, y, z, \ldots$, assujetties à vérifier, pour une valeur variable de t, les formules (17), et pour $t = \tau$ les conditions (15), deviendront indépendantes de t si α s'évanouit, et acquerront alors, quel que soit t, les valeurs constantes $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.

Cela posé, soit

$$(19) \qquad u = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de $x, y, z, \ldots$ qui demeure, du moins entre certaines limites, finie, monodrome et monogène. Le paramètre α venant à varier, $x, y, z, \ldots$, et par suite u, considérées comme fonctions de t, changeront de forme, et leurs variations, que nous indiquerons, suivant l'usage, à l'aide de la lettre caractéristique δ, seront les produits de $\delta\alpha$ par leurs dérivées relatives au paramètre α. Ces variations se réduiront donc à ces dérivées si l'on pose $\delta\alpha = 1$, et alors on aura, par exemple,

$$(20) \qquad \delta u \;= D_\alpha u,$$

$$(21) \qquad \delta^n u = D_\alpha^n u.$$

Soit d'ailleurs υ la valeur que prendra la fonction u pour une valeur nulle de α. On aura

$$(22) \qquad \upsilon = \mathrm{f}(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

et la formule de Maclaurin donnera, pour des valeurs suffisamment petites du paramètre α,

$$(23) \qquad u = \upsilon + \frac{\alpha}{1}\delta\upsilon + \frac{\alpha^2}{1.2}\delta^2\upsilon + \ldots.$$

Il reste à exprimer, dans cette formule, les variations

$$\delta\upsilon, \quad \delta^2\upsilon, \quad \ldots$$

en fonctions de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ et t. On y parviendra sans peine de la manière suivante.

On aura généralement

$$D_t u = D_t x \, D_x u + D_t y \, D_y u + D_t z \, D_z u + \ldots;$$

par conséquent, eu égard aux formules (17),

$$\mathrm{D}_t u = \alpha \nabla u, \tag{24}$$

la valeur de ∇u étant définie et déterminée par la formule

$$\nabla u = X \mathrm{D}_x u + Y \mathrm{D}_y u + Z \mathrm{D}_z u + \ldots. \tag{25}$$

Si, dans l'équation (24), on remplace u par ∇u plusieurs fois de suite, on tirera, en ordonnant le second membre suivant les puissances descendantes de α,

$$\mathrm{D}_t^n u = \alpha^n \nabla^n u + \ldots. \tag{26}$$

Enfin, si l'on différentie n fois, par rapport à α, les deux membres de la formule (24), et si après les différentiations on pose $\alpha = 0$, par conséquent $u = \upsilon$, on trouvera

$$\mathrm{D}_t^n \partial^n \upsilon = 1.2.3\ldots n \nabla^n \upsilon. \tag{27}$$

D'ailleurs il est aisé de voir que la variation $\partial^n u$ et ses dérivées relatives au temps, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$, s'évanouissent toutes pour $t = \tau$. En conséquence et en posant, pour abréger,

$$\square u = \int_\tau^t \nabla u \, dt, \tag{28}$$

on tirera de la formule (27)

$$\frac{\partial^n u}{1.2.3\ldots n} = \square^n \upsilon. \tag{29}$$

Cela posé, la formule (23) donnera

$$u = \upsilon + \alpha \square \upsilon + \alpha^2 \square^2 \upsilon + \ldots. \tag{30}$$

En posant dans cette dernière $\alpha = 1$, on trouvera

$$u = \upsilon + \square \upsilon + \square^2 \upsilon + \ldots. \tag{31}$$

On est ainsi ramené à la formule (32) du second paragraphe du Mémoire de 1835 sur l'intégration des équations différentielles.

Lorsque, dans cette formule, qui peut être présentée sous la forme symbolique

$$u = \frac{\upsilon}{1 - \square}, \tag{32}$$

on prend successivement pour u les inconnues $x, y, z, \ldots$, elle fournit pour ces inconnues les valeurs qui satisfont, quand t varie, aux équations (15) et, pour $t = \tau$, aux conditions (16).

En résumé, pour obtenir, développées en séries, les intégrales générales des équations (15), il suffit d'introduire un paramètre variable α dans ces équations, en leur substituant les formules (17), puis de développer par la formule de Maclaurin, en se servant, pour plus de facilité, de la notation adoptée dans le Calcul des variations, les valeurs des inconnues en séries ordonnées suivant les puissances entières de α, et de poser ensuite $\alpha = 1$. Les développements ainsi trouvés, quand ils sont convergents, représentent précisément les intégrales demandées.

Supposons maintenant que les valeurs de $x, y, z, \ldots$, toujours assujetties à vérifier, pour $t = \tau$, les conditions (16), soient connues, lorsqu'elles doivent satisfaire aux équations (15), et qu'il s'agisse de les modifier de manière à vérifier, non plus les équations (15), mais les suivantes

$$\mathrm{D}_t x = X + \mathfrak{X}, \quad \mathrm{D}_t y = Y + \mathfrak{Y}, \quad \mathrm{D}_t z = Z + \mathfrak{Z}, \quad \ldots, \tag{33}$$

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots$ étant de nouvelles fonctions de $x, y, z, \ldots, t$ qui demeurent, du moins entre certaines limites, finies, monodromes et monogènes. Pour résoudre ce dernier problème, il suffira encore d'introduire un paramètre variable α dans les formules (30), en leur substituant les équations

$$\mathrm{D}_t x = X + \alpha \mathfrak{X}, \quad \mathrm{D}_t y = Y + \alpha \mathfrak{Y}, \quad \mathrm{D}_t z = Z + \alpha \mathfrak{Z}, \quad \ldots, \tag{34}$$

puis de développer, à l'aide de la formule de Maclaurin, jointe aux équations (34), les inconnues $x, y, z, \ldots$ en séries ordonnées suivant les puissances entières du paramètre α, et de poser ensuite $\alpha = 1$. Les développements trouvés, quand ils seront convergents, fourniront précisément les valeurs cherchées de $x, y, z, \ldots$, comme nous l'expliquerons dans un autre article.

548.

Calcul intégral. — *Note sur les conditions de convergence des séries qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles.*

C. R., T. XL, p. 330 (12 février 1855).

Le premier des théorèmes énoncés dans la séance du 22 janvier dernier entraîne la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit* $f(t)$ *une fonction donnée de la variable* t. *Supposons d'ailleurs que cette fonction reste finie, monodrome et monogène, dans le voisinage de la valeur particulière* τ *attribuée à* t, *et tant que le module de la différence* $t-\tau$ *n'atteint pas une certaine limite* l. *Pour tout module de* $t-\tau$ *inférieur à cette limite, la fonction* $f(t)$ *sera développable, par la formule de Taylor, en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de* $t-\tau$.

D'autre part, mon Mémoire sur l'application du Calcul infinitésimal à la détermination des fonctions implicites (Tome XXXIV, année 1852, 1er semestre) renferme la proposition suivante :

Théorème II. — *Représentons par*

$$T, \quad X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

des fonctions $t, x, y, z, \ldots$, *qui restent monodromes, monogènes et finies, dans le voisinage des valeurs* $\tau, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ *attribuées à* $t, x, y, z, \ldots$; *et concevons que l'on assujettisse* $x, y, z, \ldots$ *à la double condition de vérifier, pour une valeur variable de* t, *les équations différentielles*

comprises dans la formule

$$\frac{dt}{T}=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\ldots,$$

et de se réduire à $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *pour* $t=\tau$. *Si* T *ne s'évanouit pas, quand on prend*

$$t=\tau, \quad x=\xi, \quad y=\eta, \quad z=\zeta, \quad \ldots,$$

alors, à l'aide des formules établies dans mon Mémoire de 1835 sur l'intégration des équations différentielles, on prouvera qu'il est possible de satisfaire, au moins quand le module de la différence $t-\tau$ *ne dépasse pas une certaine limite, aux deux conditions énoncées, par des valeurs de* $x, y, z, \ldots$ *qui seront développées en séries convergentes, et qui représenteront les intégrales générales des équations différentielles données. Il y a plus : on peut affirmer que, dans l'hypothèse admise, ces intégrales générales seront les seules valeurs de* $x, y, z, \ldots$ *qui, variant avec* t *par degrés insensibles, rempliront, pour un module suffisamment petit de* $t-\tau$, *les deux conditions énoncées. Enfin, comme les divers termes des séries obtenues seront des fonctions monodromes, monogènes et finies de la variable* t, *on pourra en dire autant des valeurs trouvées des variables* $x, y, z, \ldots$, *ou même d'une fonction monodrome, monogène et finie de ces variables.*

Les théorèmes I et II entraînent avec eux, comme conséquence immédiate, la proposition suivante :

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, les inconnues* $x, y, z, \ldots$ *pourront être développées, à l'aide des formules établies dans le Mémoire de 1835, en séries qui seront convergentes, tant que le module de la différence* $t-\tau$ *n'atteindra pas une limite pour laquelle se vérifie l'une des équations*

$$\frac{1}{x}=0, \quad \frac{1}{y}=0, \quad \frac{1}{z}=0, \quad \ldots,$$

$$\frac{T}{X}=0, \quad \frac{T}{Y}=0, \quad \frac{T}{Z}=0, \quad \ldots.$$

ou bien encore une limite pour laquelle un des rapports

$$\frac{X}{T}, \quad \frac{Y}{T}, \quad \frac{Z}{T}, \quad \ldots,$$

en conservant une valeur finie, cesse d'être une fonction monodrome et monogène des variables $T, X, Y, Z, \ldots$.

Si, pour plus de simplicité, on suppose $T = 1$, alors, à la place du théorème III, on obtiendra la proposition suivante :

Théorème IV. — *Représentons par*

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

des fonctions de $t, x, y, z, \ldots$ *qui restent monodromes, monogènes et finies dans le voisinage des valeurs* $\tau, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ *attribuées à* $t, x, y, z, \ldots$; *et concevons que l'on assujettisse* $x, y, z, \ldots$ *à la double condition de vérifier, pour une valeur variable de* t, *les équations différentielles*

$$\mathrm{D}_t x = X, \quad \mathrm{D}_t y = Y, \quad \mathrm{D}_t z = Z, \quad \ldots, \tag{1}$$

et de se réduire à $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, *pour* $t = \tau$. *Les inconnues* $x, y, z, \ldots$ *pourront être développées, à l'aide des formules établies dans le Mémoire de* 1835, *en séries qui seront convergentes tant que le module de la différence* $t - \tau$ *n'atteindra pas une limite pour laquelle se vérifie l'une des équations*

$$\frac{1}{x} = 0, \quad \frac{1}{y} = 0, \quad \frac{1}{z} = 0, \quad \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{1}{X} = 0, \quad \frac{1}{Y} = 0, \quad \frac{1}{Z} = 0, \quad \ldots, \tag{3}$$

ou bien encore une limite pour laquelle une des fonctions $X, Y, Z, \ldots$, *en conservant une valeur finie, cesse d'être une fonction monodrome et monogène des variables* $t, x, y, z, \ldots$.

Lorsque les inconnues $x, y, z, \ldots$ se réduisent à une seule, alors le théorème II se réduit à la proposition suivante :

Théorème V. — *Soit* X *une fonction des variables* x *et* t, *qui reste monodrome, monogène et finie, dans le voisinage des valeurs* ξ *et* τ *attri-*

buées à ces variables; et concevons que l'on assujettisse l'inconnue x *à la double condition de vérifier, pour une valeur variable de* t, *l'équation différentielle*

$$\mathrm{D}_t x = X \tag{4}$$

et de se réduire à ξ *pour* $t = \tau$. *L'inconnue* x *pourra être développée, à l'aide des formules établies dans le Mémoire de* 1835, *en une série qui sera convergente, tant que le module de la différence* $t - \tau$ *n'atteindra pas une limite pour laquelle se vérifie l'une des deux équations*

$$\frac{1}{x} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{X} = 0, \tag{6}$$

ou bien encore une limite pour laquelle X, *en conservant une valeur finie, cesse d'être une fonction monodrome et monogène de* x *et de* t.

Étant donné entre la variable indépendante t, et x inconnues $x, y, z, \ldots$ un système d'équations différentielles du premier ordre, avec les valeurs particulières $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ de $x, y, z, \ldots$, correspondantes à une valeur particulière τ de la variable t, on peut demander de calculer numériquement d'autres valeurs particulières de $x, y, z, \ldots$ correspondantes à une autre valeur particulière de t. Pour effectuer cette opération, que j'appellerai *intégration définie*, il n'est pas nécessaire de former d'abord les équations qui fournissent, pour une valeur variable de t, les valeurs de $x, y, z, \ldots$ et représentent les intégrales générales des équations différentielles données; et l'on peut, sans rechercher ces intégrales, exécuter une intégration définie, en suivant la marche que j'ai tracée dans mes Leçons de seconde année à l'École Polytechnique, et que j'ai rappelée dans le § I du Mémoire de 1835. Cela posé, il est aisé de voir que l'intégration définie suffira généralement à la détermination de la limite au-dessous de laquelle le module de la différence $t - \tau$ devra s'abaisser pour que les développements propres à vérifier une ou plusieurs équations différentielles demeurent convergents. Concevons, pour fixer les idées, que les équations différentielles données se réduisent à l'équation (4), et que la fonction X ne cesse jamais d'être monodrome et monogène. Si d'ailleurs X ne se présente jamais sous une forme indéterminée, la limite cherchée sera le module d'une valeur de $t-\tau$ pour laquelle se vérifiera ou la formule (5) ou la formule (6). D'ailleurs, si l'on pose

$$u=\frac{1}{x}, \qquad \upsilon=\frac{1}{\xi},$$

et si l'on nomme T ce que devient le rapport $-\frac{x^2}{X}$ quand on y remplace x par $\frac{1}{u}$, il suffira, pour obtenir la valeur de $t-\tau$ propre à vérifier la formule (5), d'appliquer l'intégration définie à l'équation différentielle

$$\mathrm{D}_u t = T \tag{7}$$

et de chercher la valeur de t correspondante à une valeur nulle de u, en supposant la variable t assujettie à prendre, pour $u=\upsilon$, la valeur particulière $t=\tau$. Pareillement, si l'on pose

$$u=\frac{1}{X}, \qquad \upsilon=\frac{1}{\Xi}, \tag{8}$$

Ξ étant la valeur de X qui correspond aux valeurs ξ, τ des variables x, t, et si l'on nomme T ce que devient le rapport $-\frac{X^2}{\mathrm{D}_t X + X\,\mathrm{D}_x X}$ quand on y remplace x par sa valeur tirée de la formule

$$X=\frac{1}{u},$$

il suffira, pour obtenir la valeur de $t-\tau$ propre à vérifier la formule (6), d'appliquer l'intégration définie à l'équation

$$\mathrm{D}_u t = T,$$

et de chercher encore la valeur de t correspondante à une valeur nulle de u, en supposant la variable t assujettie à prendre, pour $u=\upsilon$, la valeur particulière $t=\tau$.

On ramènerait de même à l'intégration définie la recherche des valeurs de t propres à fournir la limite au-dessous de laquelle devrait s'abaisser le module de la différence $t-\tau$, pour que les développements des intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre demeurassent convergents. On pourrait même, dans ce calcul, supposer quelques-unes des équations différentielles remplacées par des équations finies, en vertu desquelles certaines variables deviendraient fonctions des autres; enfin on pourrait substituer avec avantage le système de ces diverses équations, les unes différentielles, les autres finies, à une équation différentielle ou à un système d'équations différentielles où se trouveraient des fonctions qui, tout en conservant des valeurs finies, cesseraient d'être monodromes et monogènes.

Nous venons d'expliquer comment l'intégration définie peut servir à déterminer les valeurs de t parmi lesquelles se trouve celle qui fournit la limite au-dessous de laquelle le module de la différence $t-\tau$ devra s'abaisser pour que les développements des intégrales $x, y, z, \ldots$ d'un système donné d'équations différentielles du premier ordre demeurent convergents.

Lorsque les diverses valeurs de t propres à fournir la limite dont il s'agit sont toutes infinies, les développements des inconnues x, y, z, ... sont toujours convergents. Donc alors ces inconnues sont des fonctions de t qui ne cessent jamais d'être finies, monodromes et monogènes; en d'autres termes, elles sont des fonctions *synectiques* de la variable t. D'ailleurs certains caractères qui distinguent certaines équations différentielles permettent d'affirmer que leurs intégrales sont des fonctions synectiques de t, comme nous le montrerons dans un prochain article.

549.

Calcul intégral. — *Addition à la Note insérée dans le dernier* Compte rendu.

C. R., T. XL, p. 373 (19 février 1855).

Supposons l'inconnue x assujettie : 1° à vérifier, pour une valeur variable de t, l'équation différentielle

$$D_t x = X, \tag{1}$$

X étant fonction de x et de t; 2° à prendre, pour $t = \tau$, la valeur particulière

$$x = \xi.$$

Supposons encore que la fonction X ne cesse jamais d'être monodrome et monogène et ne se présente jamais sous une forme indéterminée. La valeur de t correspondante au module de $t - \tau$, pour lequel le développement de l'intégrale x cessera d'être convergent, sera fournie par une intégration définie appliquée à l'équation (7) de la page 208, c'est-à-dire, à la formule

$$dt = T\,du, \tag{2}$$

u désignant l'un des rapports $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{X}$; et cette valeur de t, que je désignerai par t, devra correspondre à la valeur zéro de la variable u.

Si l'on attribue à u non plus une valeur nulle, mais une valeur infiniment petite, t devra très peu différer de t; donc alors la différence $t - \mathrm{t}$ deviendra elle-même infiniment petite, si la valeur t de t reste finie. D'ailleurs, on tirera de l'équation (2)

$$t - \mathrm{t} = \int_0^u T\,du, \tag{3}$$

t étant considéré, sous le signe $\int$, comme fonction de la variable u, et par suite la différence $t - \mathrm{t}$, devenue infiniment petite, sera repré-

sentée par l'intégrale singulière

$$\int_0^\varepsilon T\,du, \tag{4}$$

dans laquelle ε et $t - \mathrm{t}$ seront infiniment petits, en sorte qu'on pourra généralement y poser, sans erreur sensible, $t = \mathrm{t}$. Donc, pour que la valeur t de t reste finie, il sera nécessaire que cette intégrale singulière offre une valeur infiniment petite. C'est ce qui arrivera, en général, quand on aura $u = \frac{1}{X}$. Mais, si l'on prend $u = \frac{1}{x}$, l'intégrale (4) deviendra

$$\int_{\frac{1}{0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dx}{X}.$$

En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Si, la fonction X ne cessant jamais d'être monodrome ou monogène, l'intégrale singulière*

$$\int_{\frac{1}{0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dx}{X} \tag{5}$$

conserve une valeur finie, la valeur t *de t, pour laquelle le développement de l'intégrale x de l'équation* (1) *cessera d'être convergent, rendra la fonction x infinie ou indéterminée.*

Corollaire. — Comme l'intégrale singulière

$$\int_{\frac{1}{0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dx}{x},$$

loin d'acquérir une valeur infiniment petite, est équivalente à

$$\mathrm{l}\frac{0}{\varepsilon},$$

par conséquent infinie, l'intégrale (5) ne pourra généralement devenir infiniment petite que dans le cas où la supposition $x = \frac{1}{0}$ entrainera la condition

$$\frac{x}{X} = 0. \tag{6}$$

Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Si l'on nomme X une fonction de x et de t, qui, toujours monodrome et monogène, ne devienne jamais ni indéterminée, ni infinie, pour des valeurs infinies de x et de t; si d'ailleurs, pour une valeur finie de t, le rapport $\frac{x}{X}$ ne s'évanouit pas avec $\frac{1}{x}$, l'intégrale x de l'équation*

$$D_t x = X$$

sera une fonction synectique *de t.*

Corollaire. — Si X est une fonction entière de x et t, cette fonction ne pourra devenir infinie qu'avec les deux variables x, t, ou du moins avec l'une d'entre elles. Donc alors, si, pour une valeur finie de la variable t, le développement de l'intégrale x de l'équation

$$D_t x = X$$

cesse d'être convergent, on aura tout à la fois, pour cette valeur finie de t,

$$\frac{1}{x} = 0, \qquad \frac{x}{X} = 0. \tag{7}$$

Mais ces deux dernières conditions s'excluront l'une l'autre, si X est indépendant de x, ou du premier degré en x, c'est-à-dire si l'équation proposée est linéaire et de la forme

$$D_t x = x\,f(t) + F(t), \tag{8}$$

$f(t)$, $F(t)$ désignant deux fonctions entières de t. Donc, en vertu du théorème II, l'intégrale générale de l'équation (8) sera une fonction synectique de t; ce qu'on reconnaît aisément à la seule inspection de

cette intégrale représentée par la formule

$$x = e^{\int_\tau^t f(t)\,dt}\left[\xi + \int_\tau^t e^{-\int_\tau^t f(t)\,dt} F(t)\,dt\right]. \tag{9}$$

En général, si le rapport $\frac{x}{X}$ ne s'évanouit pas avec $\frac{1}{x}$, et si X ne cesse jamais d'être monodrome et monogène, le développement de x ne pourra cesser d'être convergent que pour un module de $t - \tau$ correspondant à une valeur de t qui rendra la fonction X infinie ou indéterminée. Ainsi, par exemple, le développement de l'intégrale x de l'équation

$$D_t x = \frac{a}{x + t}, \tag{10}$$

a étant un coefficient constant, ne pourra cesser d'être convergent que pour une valeur de t déterminée par la formule

$$x + t = 0. \tag{11}$$

Il est aisé de vérifier cette conclusion, attendu que l'intégrale de l'équation (10) est

$$t = (\xi + \tau + a)e^{\frac{x-\xi}{a}} - (x - a), \tag{12}$$

et que la valeur de x tirée de cette dernière formule se développe en série convergente jusqu'au moment où le module de la différence $t - \tau$ atteint la limite pour laquelle se vérifie la condition

$$\frac{1}{a}(\xi + \tau + a)e^{\frac{x-\xi}{a}} - 1 = \frac{x + t}{a} + 0.$$

550.

Calcul intégral. — *Sur la nature des intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre.*

C. R., T. XL, p. 376 (19 février 1855).

Le second des théorèmes rappelés dans la précédente séance entraîne évidemment la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient, comme dans les précédents Mémoires,*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

des inconnues assujetties : 1° à vérifier, pour une valeur variable de t, *des équations différentielles de la forme*

$$(1) \qquad D_t x = X, \qquad D_t y = Y, \qquad D_t z = Z, \qquad \ldots,$$

$X, Y, Z, \ldots$ *étant des fonctions données de* $t, x, y, z, \ldots$; *2° à prendre, pour* $t = \tau$, *les valeurs particulières*

$$(2) \qquad x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta, \qquad \ldots;$$

et supposons que les fonctions

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

restent monodromes, monogènes et finies dans le voisinage des valeurs $\tau, \xi, \eta, \zeta, \ldots$, *attribuées aux variables* $x, y, z, \ldots$. *On pourra satisfaire, pour un module suffisamment petit de la différence* $t - \tau$, *aux deux conditions énoncées, par des valeurs convenables de* $x, y, z, \ldots$; *et ces valeurs, qui représenteront les intégrales des équations* (1), *seront des fonctions monodromes, monogènes et finies de* t, *tant que la différence* $t - \tau$ *n'atteindra pas une limite pour laquelle se vérifie l'une des conditions*

$$(3) \qquad \frac{1}{x} = 0, \qquad \frac{1}{y} = 0, \qquad \frac{1}{z} = 0, \qquad \ldots,$$

$$(4) \qquad \frac{1}{X} = 0, \qquad \frac{1}{Y} = 0, \qquad \frac{1}{Z} = 0, \qquad \ldots,$$

ou bien encore une limite pour laquelle une des fonctions

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

offre une valeur indéterminée (¹), *ou cesse d'être une fonction monodrome et monogène des variables* $t, x, y, z, \ldots$.

Le théorème I entraîne évidemment la proposition suivante :

Théorème II. — *Concevons que,* τ *étant l'affixe d'un point déterminé* A, *on nomme* S *une aire qui de toutes parts enveloppe le point* A, *et que l'on assujettisse le point mobile* P, *dont la variable réelle ou imaginaire* t *représente l'affixe, à demeurer compris dans l'aire* S. *L'aire* S *venant à croître et à s'étendre de plus en plus autour du point* A, *les valeurs de* $x, y, z, \ldots$, *assujetties à vérifier les équations* (1) *et les conditions* (2), *seront des fonctions monodromes, monogènes et finies de l'affixe* t, *jusqu'au moment où cette affixe vérifiera, pour un ou plusieurs points situés sur le contour de l'aire* S, *l'une des formules* (3) *ou* (4), *ou bien encore l'une des formules qu'on obtiendra en supposant indéterminée l'une des fonctions*

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots,$$

ou enfin l'une des formules qui exprimeront que $X, Y, Z, \ldots$, *en conservant des valeurs finies, cessent d'être des fonctions monodromes et monogènes de* $t, x, y, z, \ldots$. *D'ailleurs, d'après ce qui a été dit dans la dernière séance, l'*intégration définie *suffira généralement à la détermination des divers points dont il s'agit, et des valeurs de* t *correspondantes à ces mêmes points.*

Corollaire I. — Si les fonctions

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots$$

(¹) Le cas où l'une des fonctions $X, Y, Z, \ldots$ offre une valeur indéterminée mérite une mention spéciale, cette indétermination pouvant se produire pour certaines valeurs des variables, sans que la fonction cesse d'être, pour des valeurs voisines, monodrome et monogène. Ainsi, par exemple, la fonction $\frac{x+t}{t}$ reste monodrome et monogène, dans le voisinage des valeurs $x = 0$, $t = 0$, qui la rendent indéterminée.

ne cessent jamais d'être monodromes et monogènes, les intégrales x, y, z, ... des équations (1) ne pourront cesser de l'être que pour des valeurs de t propres à rendre ces fonctions indéterminées, ou à vérifier les formules (3) ou (4). D'ailleurs, à ces valeurs de t correspondront des points isolés C, C′, C″, ..., complètement déterminés de position dans le plan des affixes. Soient t la valeur finie de t relative à l'un de ces points, et

$$\mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots$$

les valeurs correspondantes de x, y, z, ... Pour savoir si les intégrales x, y, z, ... des équations (1) cessent d'être monodromes et monogènes dans le voisinage de la valeur $t = \mathrm{t}$, il suffira de recourir à l'intégration par approximation des équations (1) et de chercher les valeurs x, y, z, ... correspondantes à des valeurs infiniment petites de $t - \mathrm{t}$. On y parviendra sans peine, si les valeurs $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... sont finies, en observant qu'à des valeurs infiniment petites de $t - \mathrm{t}$ correspondront des valeurs infiniment petites des différences

$$x - \mathfrak{r},\quad y - \mathfrak{y},\quad z - \mathfrak{z},\quad \ldots,$$

et en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs relativement à ceux qui seront d'un ordre moindre. Si une ou plusieurs des quantités $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... sont infinies, on pourra résoudre la question en substituant aux quantités

$$\mathrm{t},\quad \mathfrak{r},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots$$

des quantités

$$\mathrm{t},\quad \mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots$$

qui en soient très voisines [1], attendu qu'alors celles des quantités $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... qui étaient infinies se trouveront remplacées par

[1] On pourrait aussi, comme je l'ai fait dans plusieurs Mémoires, substituer à celles des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots$$

qui deviendront infinies pour $t = \mathrm{t}$, les rapports qui correspondront à ces variables dans la suite

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{y},\quad \frac{1}{z},\quad \ldots.$$

des quantités finies, mais dont les modules seront très considérables. Si, pour abréger, on pose

$$(5)\qquad t - \mathrm{t} = \theta,\qquad x - \mathrm{x} = \alpha,\qquad y - \mathrm{y} = \beta,\qquad z - \mathrm{z} = \gamma\qquad \ldots,$$

on pourra, dans tous les cas, substituer aux équations (1) des équations différentielles entre les variables

$$\theta,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots$$

et intégrer par approximation ces équations différentielles en supposant les nouvelles variables infiniment petites.

Ajoutons que, si quelques-unes des fonctions X, Y, Z, ..., étant implicites, cessent d'être monodromes et monogènes, on pourra souvent, avec avantage, comme je l'ai montré en 1846, substituer aux équations finies qui déterminent ces fonctions implicites de nouvelles équations différentielles.

Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'intégrer l'équation différentielle

$$(6)\qquad D_t x = y,$$

y étant une fonction implicite de x déterminée par la formule

$$(7)\qquad \mathrm{f}(x, y) = 0,$$

dans laquelle $\mathrm{f}(x, y)$ désigne une fonction toujours monodrome et monogène de x et de y. Supposons d'ailleurs que, pour $t = \tau$, on doive avoir $x = \xi$ et, en vertu de la formule (7), $y = \eta$. A l'intégration de l'équation (6) on pourra substituer avec avantage l'intégration simultanée de deux équations différentielles

$$(8)\qquad D_t x = y,\qquad D_t y = Y,$$

la valeur de Y étant

$$(9)\qquad Y = -y \frac{D_x \mathrm{f}(x, y)}{D_y \mathrm{f}(x, y)},$$

et les intégrales x, y étant assujetties à prendre, pour $t = \tau$, les valeurs particulières ξ, η. Cela posé, l'aire S venant à s'étendre, les valeurs de t, pour lesquelles les intégrales x, y pourront cesser d'être des fonctions monodromes et monogènes de t, seront celles pour lesquelles se vérifiera l'une des formules

$$x=\frac{1}{0},\qquad y=\frac{1}{0},\qquad \mathrm{D}_y \mathrm{f}(x,y)=0, \tag{10}$$

ou bien encore la formule

$$\frac{y\,\mathrm{D}_x \mathrm{f}(x,y)}{\mathrm{D}_y \mathrm{f}(x,y)}=\frac{0}{0}. \tag{11}$$

Soient t l'une de ces valeurs de t, et t une autre valeur très voisine. Soient d'ailleurs x, y les valeurs de x et y correspondantes à $t=\mathrm{t}$, et posons, pour abréger,

$$t-\mathrm{t}=\vartheta,\qquad x-\mathrm{x}=\alpha,\qquad y-\mathrm{y}=\varepsilon; \tag{12}$$

α, ε deviendront infiniment petits en même temps que ϑ, et en vertu de l'équation (7), si α est un infiniment petit du premier ordre, ε sera un autre infiniment petit dont l'ordre sera un nombre fractionnaire. Soit μ cet ordre. Pour que l'intégrale x ne cesse pas d'être une fonction monodrome et monogène de t, dans le voisinage de la valeur de t attribuée à t, il sera nécessaire et il suffira que μ soit de l'une des formes

$$1-\frac{1}{n},\qquad 1,\qquad 1+\frac{1}{n};$$

n étant un nombre entier quelconque.

En appliquant ces principes au cas où $\mathrm{f}(x,y)$ est une fonction entière des deux variables x, y, on déterminera généralement avec facilité les conditions sous lesquelles l'intégrale x de l'équation (6) est une fonction toujours monodrome et monogène de la variable t.

Si l'on suppose en particulier

$$\mathrm{f}(x,y)=y^m-\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant une fonction entière de x, on retrouvera les résultats obtenus par MM. Briot et Bouquet.

Si l'on supposait

$$\mathrm{f}(x,y)=y^4-2Py^2+Q,$$

P, Q étant des fonctions entières de x, alors, pour que l'intégrale x ne cessât pas d'être monodrome et monogène avec la valeur de t correspondante à une valeur infinie de x, il serait nécessaire que le degré de la fonction P se réduisît à l'un des nombres

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,$$

et le degré de la fonction P^2-Q à l'un des nombres

$$0,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 8;$$

alors aussi, pour que l'intégrale x ne cessât pas d'être monodrome et monogène dans le voisinage d'une valeur de t correspondante à la dernière des formules (10), il serait nécessaire que l'équation

$$P^2-Q=0$$

n'admît pas de racines simples.

Nous venons de voir comment on peut ou démontrer que les intégrales x, y, z, ... des équations (1) sont des fonctions toujours monodromes et homogènes de la variable t, ou déterminer les valeurs de t pour lesquelles ces intégrales cessent d'être monodromes et monogènes. Si, dans le dernier cas, on cherche, parmi les valeurs trouvées de t, celle qui fournit le plus petit module de $t-\tau$, celui-ci sera la limite au-dessous de laquelle il suffira d'abaisser le module de la différence $t-\tau$ pour obtenir des valeurs de x, y, z, ..., développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de cette différence.

Nous remarquerons, en finissant, que les fonctions monodromes et monogènes sont précisément celles auxquelles s'appliquent les divers théorèmes que nous avons insérés dans le Tome XXXII des

Comptes rendus (année 1851, 1er semestre), spécialement le théorème énoncé à la page 212 (¹) et ceux qui s'en déduisent.

551.

Analyse mathématique. — *Sur la distinction et la représentation des fonctions continues et discontinues.*

C. R., T. XL, p. 382 (19 février 1855).

Un moyen efficace d'accélérer les progrès des Sciences mathématiques est de perfectionner les notations. Il importe surtout que ces notations soient claires, précises, et n'exposent jamais le lecteur à confondre entre elles des quantités ou des fonctions complètement distinctes. Pour éviter cet inconvénient, j'ai cru devoir, dans mon *Analyse algébrique*, publiée en 1821, restreindre le sens des notations dont on se servait pour exprimer les logarithmes réels ou imaginaires, des puissances fractionnaires ou irrationnelles, et les arcs correspondants à des lignes trigonométriques données. Le parti que j'ai pris alors d'appliquer chacune de ces notations à une seule fonction dont la valeur dépendait uniquement de la valeur attribuée à la variable a été généralement adopté par les géomètres. J'ai moi-même constamment suivi cette règle depuis 1821. Seulement, dans mes derniers Ouvrages et Mémoires, j'ai, avec M. Bjœrling, étendu l'usage de chaque notation au cas même où la partie réelle de la variable dont une fonction dépend est une quantité négative.

Toutefois, il importe de le remarquer, entre les propriétés dont jouissent les diverses fonctions habituellement employées en Analyse, l'une des plus saillantes est la *continuité*, telle que je l'ai définie dans l'Ouvrage cité, en nommant *fonctions continues* celles qui acquièrent des accroissements infiniment petits pour des accroissements infiniment petits des variables dont elles dépendent; et, pour ce motif, il semblerait utile, suivant une observation judicieuse de M. Hermite, d'appliquer les notations usitées, non plus à des fonctions qui, uniquement dépendantes de la valeur attribuée à une variable, deviennent discontinues quand cette variable dépasse certaines limites, mais à des fonctions assujetties à varier avec elle par degrés insensibles, par conséquent à des fonctions qui ne cesseraient jamais d'être continues.

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. XI, p. 311.

J'ai cherché à réunir les avantages que présentent l'une et l'autre méthode, et j'ai reconnu qu'on pouvait y parvenir à l'aide d'un procédé très simple. Ce procédé, qui multiplie les ressources de l'Analyse, consiste à introduire simultanément dans le calcul deux espèces de fonctions, les unes toujours continues, les autres continues seulement entre certaines limites, mais uniquement dépendantes des valeurs attribuées aux variables. Je me sers, pour exprimer ces dernières fonctions, des notations usuelles; quant aux fonctions qui deviennent toujours continues, je les distingue à l'aide d'un trait horizontal, qu'il est naturel de prendre pour signe de cette continuité, et que je superpose aux notations dont il s'agit.

Ainsi, en particulier, r étant le module et p l'argument principal d'une variable imaginaire

$$z = r_p,$$

celui des logarithmes népériens de z, dans lequel le coefficient de i est renfermé entre les limites $-\pi$, $+\pi$, sera, suivant l'usage, représenté simplement par la notation $\mathrm{l}z$, en sorte qu'on aura

$$\mathrm{l}z = \mathrm{l}r + \mathrm{i}p;$$

mais, en superposant un trait horizontal à la lettre caractéristique l, nous représenterons par la notation

$$\bar{\mathrm{l}}z$$

un logarithme népérien de la variable z, assujetti à varier avec elle par degrés insensibles. D'ailleurs, il n'est pas sans intérêt de comparer entre eux des logarithmes de l'une et l'autre espèce, comme nous allons le faire voir en peu de mots.

Soit Z une fonction toujours monodrome, monogène et finie de la variable z; soit encore ζ une valeur particulière attribuée à z. Concevons d'ailleurs que, dans un plan donné, ζ soit l'affixe d'un point déterminé A, z l'affixe d'un point mobile P, et que le point P soit assujetti à se mouvoir, avec un mouvement de rotation direct, sur le contour d'une certaine aire S. Nommons s l'arc AP mesuré sur ce contour à partir du point A, et faisons

$$Z = X + Y\mathrm{i}, \tag{1}$$

X, Y étant réels. Enfin, supposons que Z ne s'évanouisse en aucun des points situés sur le contour de l'aire S, et que, pour $z = \zeta$, ou, ce qui revient au même, pour $s = 0$, on ait précisément

$$\overline{\mathrm{l}}Z = \mathrm{l}Z. \tag{2}$$

s venant à croître, X, Y varieront avec s par degrés insensibles, et $\mathrm{l}Z$ ne pourra cesser d'être fonction continue de s qu'à un instant où, X étant négatif, Y passera d'une valeur négative à une valeur positive, ou d'une valeur positive à une valeur négative. Or, à un tel instant, la fonction $\mathrm{l}Z$, devenue discontinue, passera brusquement de la valeur $-\pi\mathrm{i}$ à la valeur $\pi\mathrm{i}$, ou de la valeur $\pi\mathrm{i}$ à la valeur $-\pi\mathrm{i}$; et par suite, pour qu'elle redevienne continue, on devra lui ajouter dans le premier cas $-2\pi\mathrm{i}$, dans le second cas $2\pi\mathrm{i}$. Cela posé, concevons que, pour une valeur de s propre à vérifier la condition

$$Y = 0, \tag{3}$$

on nomme *indice* de la fonction

$$\frac{X}{Y}$$

une quantité qui se réduise à zéro quand ce rapport, en passant par l'infini, ne change pas de signe, et à $+1$ ou à -1 lorsque dans ce passage il change de signe, savoir à $+1$ quand il passe du négatif

au positif, et à -1 dans le cas contraire. Il est clair qu'à partir du moment où, pour la première fois, la valeur de s vérifiera l'équation (3) avec la condition

$$X < 0, \tag{4}$$

la formule (2) devra être remplacée par la suivante

$$\overline{\mathrm{l}}Z = \mathrm{l}Z + 2\pi\mathrm{ki}, \tag{5}$$

k étant l'indice correspondant à cette valeur de s. Par suite aussi, lorsque le point mobile P aura décrit, avec un mouvement de rotation direct, une portion quelconque du contour c de l'aire S, on aura

$$\overline{\mathrm{l}}Z = \mathrm{l}Z + 2\pi\mathrm{Ki}, \tag{6}$$

K désignant la somme des indices de la fonction $\frac{X}{Y}$ correspondants aux diverses valeurs de s qui vérifieront l'équation (3) avec la condition (4). Enfin, si l'on désigne par la notation [S] la valeur qu'acquiert cette somme à l'instant où le point P revient à sa position initiale A après avoir décrit le contour entier c de l'aire S, on aura en cet instant, c'est-à-dire pour $s = c$,

$$\overline{\mathrm{l}}Z = \mathrm{l}Z + 2\pi[\mathrm{S}]\mathrm{i}. \tag{7}$$

Par conséquent, le produit $2\pi[\mathrm{S}]\mathrm{i}$ représentera l'accroissement que prendra la fonction $\overline{\mathrm{l}}Z$, tandis que l'arc s passera d'une valeur nulle à la valeur c. Pareillement, si l'on désigne par la notation (S) la somme des indices de la fonction $\frac{X}{Y}$ correspondants aux diverses valeurs de s qui, étant égales ou inférieures à c, vérifieront l'équation (3) avec la condition

$$X > 0, \tag{8}$$

le produit $2\pi(\mathrm{S})\mathrm{i}$ représentera l'accroissement que prendra la fonction $\overline{\mathrm{l}}(-Z)$, tandis que l'arc s passera d'une valeur nulle à la valeur c; et par suite, si l'on suppose que, pour $s = 0$, on ait précisément

$$\overline{\mathrm{l}}(-Z) = -\mathrm{l}(-Z), \tag{9}$$

on aura, pour $s = c$,

$$\overline{\mathrm{l}}(-Z) = \mathrm{l}(-Z) + 2\pi(\mathrm{S})\mathrm{i}, \tag{10}$$

la valeur de $\mathrm{l}(-Z)$ étant la même dans les formules (9) et (10). Par suite aussi l'accroissement que prendra la différence

$$\overline{\mathrm{l}}(-Z) - \overline{\mathrm{l}}Z,$$

quand S passera d'une valeur nulle à la valeur c, sera le produit de $2\pi\mathrm{i}$ par la différence

$$(\mathrm{S}) - [\mathrm{S}].$$

Mais, de ces deux différences, la première évidemment devra se réduire à l'accroissement que prendra

$$\overline{\mathrm{l}}(-1),$$

quand le point mobile P aura décrit le contour entier de l'aire S, c'est-à-dire à zéro, puisque $\overline{\mathrm{l}}(-1)$ sera indépendant de s. Donc la seconde différence devra elle-même s'évanouir, et l'on aura

$$[\mathrm{S}] = (\mathrm{S}). \tag{11}$$

Ainsi, tandis que l'arc s passe d'une valeur nulle à la valeur c, la somme des indices de la fonction $\frac{X}{Y}$ correspondants à des valeurs négatives de X coïncide avec la somme des indices correspondants à des valeurs positives de X; chacune de ces deux sommes est donc la moitié de la somme totale des indices de la fonction $\frac{X}{Y}$, ou, en d'autres termes, la moitié de son *indice intégral*.

Lorsqu'en considérant non plus des logarithmes, mais des puissances fractionnaires ou irrationnelles, ou des arcs de cercle correspondants à des lignes trigonométriques données, nous assujettirons ces diverses fonctions à la loi de continuité, nous indiquerons encore cette circonstance à l'aide d'un trait horizontal superposé à ces fonctions, en écrivant par exemple :

$$\overline{z^{\mu}}, \quad \overline{\operatorname{arc\,tang} z}, \quad \overline{\operatorname{arc\,sin} z}, \quad \ldots.$$

D'ailleurs la comparaison de ces fonctions à celles qu'indiquent les notations usuelles fournira encore des équations analogues aux formules (5), (6), (7) et (10).

Dans un autre article, nous montrerons avec quelle facilité on déduit de ces formules le théorème sur le nombre des racines imaginaires d'une équation propres à représenter les affixes de points enveloppés par un contour donné, et d'autres propositions qui méritent d'être remarquées.

552.

Calcul infinitésimal. — *Sur les rapports différentiels des quantités géométriques, et sur les intégrales synectiques des équations différentielles.*

C. R., T. XL, p. 445 (26 février 1855).

§ I. — *Rapports différentiels des quantités géométriques.*

Soient x, y deux quantités géométriques, et ξ, η deux valeurs qu'acquièrent simultanément ces mêmes quantités. La valeur correspondante du rapport différentiel

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera le rapport aux différences finies

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}, \tag{2}$$

tandis que le module de la différence $x-\xi$ décroîtra indéfiniment. D'ailleurs cette limite, qui dépendra généralement de la valeur ξ attribuée à x, dépendra, en outre, si y n'est pas une fonction monogène de x, de l'argument de la différence $x-\xi$, ou, en d'autres termes, de la direction qu'aura la droite menée du point dont ξ est l'affixe, au point mobile dont l'affixe est représentée par la lettre x.

Si les variables x, y sont des fonctions données d'une autre variable t, on pourra dire encore que le rapport différentiel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_t y}{D_t x} \tag{3}$$

est la limite vers laquelle converge le rapport aux différences finies

$$\frac{y-\eta}{x-\xi},$$

tandis que t s'approche indéfiniment de la limite τ pour laquelle on a $x=\xi$, $y=\eta$. D'ailleurs, si l'on nomme ρ le module et ϖ l'argument de la différence $t-\tau$, en sorte qu'on ait

$$t-\tau=\rho_\varpi,$$

la limite dont il s'agit pourra dépendre de l'argument ϖ.

Si, τ étant nul ou même infini, on pose simplement

$$t=\rho_\varpi,$$

la valeur commune des deux rapports

$$\frac{D_t y}{D_t x},\quad \frac{y-\eta}{x-\xi},$$

correspondante à la valeur τ de t, dépendra encore généralement de l'argument ϖ de la variable t, ou, ce qui revient au même, de l'argument $-\varpi$ de

$$\frac{1}{t}=\rho_{-\varpi}.$$

Si ξ, η s'évanouissent, la valeur de

$$\frac{dy}{dx}=\frac{D_t y}{D_t x},$$

correspondante à $t=\tau$, ne sera autre chose que la limite vers laquelle

convergera le rapport

$$\frac{y}{x}, \tag{4}$$

tandis que t s'approchera indéfiniment de τ.

Pour faire mieux saisir ce qui précède, supposons

$$x=\cos t,\qquad y=\sin t; \tag{5}$$

la valeur du rapport

$$\frac{y}{x}=\tang t=-\mathrm{i}\,\frac{e^{t\mathrm{i}}-e^{-t\mathrm{i}}}{e^{t\mathrm{i}}+e^{-t\mathrm{i}}},$$

correspondante à une valeur infinie de t, sera $-\mathrm{i}$ ou i, suivant que le coefficient de i dans t sera négatif ou positif, ou, ce qui revient au même, suivant que $\sin\varpi$ sera négatif ou positif; et il est facile de s'assurer que la valeur de $\frac{dy}{dx}$, correspondante à $t=\frac{1}{0}$, sera elle-même égale à $-\mathrm{i}$ dans le premier cas, à i dans le second.

Si l'on posait

$$x=\cos t^m,\qquad y=\sin t^m, \tag{6}$$

m étant un nombre entier, alors, pour $t=\frac{1}{0}$, la valeur commune des deux rapports

$$\frac{y}{x},\quad \frac{dy}{dx}$$

passerait $2m$ fois de la valeur $-\mathrm{i}$ à la valeur i, ou réciproquement, tandis que l'on ferait varier l'argument ϖ entre les limites $-\pi$, $+\pi$.

Les rapports (1) ou (3), et (2) ou (4) ayant la même valeur pour $t=\tau$, leur valeur commune pourra se déduire de la considération de l'un quelconque de ces deux rapports. Cette remarque peut quelquefois être utile. Concevons, pour fixer les idées, que les variables x, y soient assujetties à vérifier les équations différentielles

$$D_t y = x,\qquad D_t x=-y, \tag{7}$$

et que l'on demande la valeur du rapport $\frac{y}{x}$ pour une valeur infinie de la variable indépendante t. En nommant θ cette valeur, on aura, pour $t = \frac{1}{0}$,

$$\frac{y}{x} = \frac{D_t y}{D_t x} = \theta,$$

et par suite les formules (7), desquelles on tire

$$\frac{D_t y}{D_t x} = -\frac{x}{y},$$

donneront

$$\theta = -\frac{1}{\theta}, \qquad \theta^2 = -1, \qquad \theta = \pm \mathrm{i}.$$

Donc le rapport $\frac{y}{x}$ offrira, pour $t = \frac{1}{0}$, deux valeurs distinctes $-\mathrm{i}$, $+\mathrm{i}$, ce qui est exact.

§ II. — *Intégrales synectiques d'équations différentielles.*

J'appelle *synectique* une fonction qui, pour une valeur finie de la variable dont elle dépend, est toujours, non seulement monodrome et monogène, mais encore finie. Les fonctions entières d'une variable indépendante t, et celles qui se développent, suivant les puissances entières et ascendantes de t, en séries toujours convergentes, par exemple

$$e^t, \quad \cos t, \quad \sin t,$$

sont des fonctions synectiques de t.

Étant donné, entre la variable indépendante t et plusieurs inconnues $x, y, z, \ldots$, un système d'équations différentielles, on pourra souvent, à l'aide des principes exposés dans les séances précédentes, s'assurer que leurs intégrales sont des fonctions synectiques de t.

Concevons, pour fixer les idées, que x et y soient assujetties à vérifier les deux équations

$$D_t x = y, \qquad D_t y = -x.$$

Les seules valeurs de t pour lesquelles x, y pourront cesser d'être monodromes et monogènes seront celles qui correspondront à des

valeurs infinies de x ou de y. D'ailleurs, à une valeur finie de l'une des variables x, y répondra, en vertu des formules (1), une valeur finie de l'autre. Donc elles deviendront simultanément infinies, et ne pourront cesser d'être monodromes et monogènes que pour une valeur t de t, qui rendra x et y infinies. D'ailleurs, si l'on nomme θ la valeur qu'acquerra le rapport $\frac{y}{x}$, pour des valeurs infinies de x et de y, on trouvera (*voir* le § I) $\theta = \pm \mathrm{i}$, et l'on aura sensiblement, pour de très grands modules de x et de y,

$$\frac{y}{x} = \theta.$$

Donc, pour une valeur de t voisine de t, la première des équations (1), que l'on peut écrire comme il suit,

$$dt = \frac{x}{y}\, d\,l x$$

donnera sensiblement

$$dt = \frac{1}{\theta}\, d\,l x,$$

et

$$t - \mathrm{t} = -\frac{1}{\theta}\, l\frac{x}{0},$$

par conséquent

$$\mathrm{t} = t + \frac{1}{\theta}\, l\frac{x}{0} = \frac{1}{0}.$$

Donc la valeur t de t correspondante à des valeurs infinies de x et de y sera elle-même infinie, et, pour des valeurs finies de t, les intégrales x, y des équations (1) seront toujours, non seulement monodromes et monogènes, mais encore finies; en d'autres termes, ces intégrales seront des fonctions synectiques de t. Cette conclusion est d'ailleurs facile à vérifier, puisque, en intégrant les équations (1), on trouve

$$x = r\cos(t - \tau), \qquad y = \sin(t - 1),$$

r, τ étant deux constantes arbitraires.

Lorsqu'une fonction z de t est toujours monodrome et monogène, on peut en dire autant du rapport

$$\frac{D_t z}{z} = D_t \bar{l} z,$$

et même de la dérivée

$$D_t^n \bar{l} z,$$

n étant un nombre entier quelconque. Si cette dérivée se décompose en deux parties u et v, toujours monodromes et monogènes, on pourra satisfaire à l'équation

$$(2) \qquad D_t^n \bar{l} z = u + v,$$

en posant

$$(3) \qquad z = \frac{y}{x},$$

$$(4) \qquad D_t^n \bar{l} y = u, \qquad D_t^n \bar{l} x = v,$$

et alors x, y seront encore monodromes et monogènes. Il y a plus : x, y seront toujours finies, pour des valeurs finies de t, et se réduiront en conséquence à des fonctions synectiques de t, si les fonctions u, v restent finies, la première quand on pose $z = \frac{1}{0}$, la seconde quand on pose $z = 0$. Ce principe fécond s'applique avec avantage à la discussion des intégrales des équations différentielles. Il met en évidence leurs diverses propriétés, et conduit, avec une grande facilité, à la représentation, sous forme fractionnaire, des fonctions circulaires, elliptiques et abéliennes. Pour donner une idée de ces applications, je me bornerai à deux exemples.

Considérons d'abord la fonction circulaire

$$(5) \qquad z = \operatorname{tang}(t - \tau).$$

Elle se confond avec l'intégrale z de l'équation différentielle

$$(6) \qquad D_t z = 1 + z^2,$$

cette intégrale étant assujettie à s'évanouir avec la différence $t - \tau$. D'ailleurs, en vertu de la formule (6), z sera une fonction toujours

monodrome et homogène de t, sans être synectique, puisqu'à une valeur infinie de z correspondra une valeur finie de t. Mais pour satisfaire à l'équation (6), présentée sous la forme

$$(7) \qquad D_t \bar{l} z = \frac{1}{z} + z,$$

il suffira de poser

$$(3) \qquad z = \frac{y}{x},$$

$$(8) \qquad D_t \bar{l} y = \frac{1}{z}, \qquad D_t \bar{l} x = -z;$$

et alors x, y seront certainement synectiques, puisqu'ils seront, non seulement monodromes et monogènes, mais toujours finis pour des valeurs finies de t, y ne cessant pas de l'être pour $z = \frac{1}{0}$, ni x pour $z = 0$. On arriverait encore à cette conclusion en observant que les équations (8), eu égard à la formule (3), coïncident avec les équations (1).

Considérons en second lieu l'intégrale z de l'équation différentielle

$$(9) \qquad D_t z = Z,$$

la valeur de Z étant de la forme

$$(10) \qquad Z = h\overline{(1 - az)^{\mu}}\,\overline{(1 - bz)^{\mu'}}\,\overline{(1 - cz)^{\mu''}}\ldots,$$

les lettres a, b, c, ..., h désignant d'ailleurs des paramètres quelconques réels ou imaginaires, et μ, μ', μ'', ... étant des fractions réduites à leurs plus simples expressions. Supposons que z doive se réduire à ζ pour $t = \tau$. Nommons m le nombre des exposants μ, μ', μ'', ..., que nous supposerons rangés dans leur ordre de grandeur, ou, ce qui revient au même, le nombre de facteurs variables de Z, dont chacun est réduit par le trait superposé à une fonction continue de z; et faisons, pour abréger,

$$(11) \qquad \mu + \mu' + \mu'' + \ldots = \nu.$$

Pour que l'intégrale z de l'équation (9) soit une fonction toujours monodrome et monogène de t, il sera nécessaire et il suffira (page 218) que chacun des nombres

$$\mu, \quad \mu', \quad \mu'', \quad \mu''', \quad \ldots, \quad \nu$$

soit de l'une des deux formes

$$1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{n}, \tag{12}$$

n étant un nombre entier; donc alors, si l'on n'a pas $\nu = 0$, ce qui réduirait Z à h et l'intégrale z à la fonction symétrique $\zeta + h(t - \tau)$, chacun des nombres

$$\mu, \quad \mu', \quad \mu'', \quad \mu''', \quad \ldots, \quad \nu$$

sera un des termes de la suite

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ \frac{5}{6}, \ \ldots, \ 1, \ \ldots, \ \frac{7}{6}, \ \frac{6}{5}, \ \frac{5}{4}, \ \frac{4}{3}, \ \frac{3}{2}, \ 2. \tag{13}$$

Cette condition étant supposée remplie, on aura nécessairement

$$\frac{m}{2} < \nu < 2, \tag{14}$$

le signe $<$ étant censé comprendre le cas d'égalité. En conséquence, $\frac{m}{2}$ ne pouvant surpasser 2, m sera l'un des nombres $1, 2, 3, 4$; et, si $\frac{m}{2} = 2$, on aura nécessairement

$$\nu = 2, \qquad \mu' = \mu'' = \mu''' = u^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}. \tag{15}$$

En outre, le plus petit entre plusieurs nombres ne pouvant jamais surpasser leur moyenne arithmétique, on aura, dans tous les cas,

$$\mu < \frac{\nu}{m} < \frac{2}{m} \tag{16}$$

et, en particulier, pour $m = 3$,

$$\nu = \frac{3}{2} \text{ ou } 2, \qquad \mu < \frac{\nu}{3}, \qquad \mu' < \frac{\nu - \mu}{2}, \qquad \mu'' = \nu - \mu - \mu', \tag{17}$$

le signe $<$ comprenant toujours le cas d'égalité. Par suite, si $m = 3$, les valeurs de ν, μ, μ', μ'' seront celles que présente l'une des lignes horizontales du Tableau suivant :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \nu & \mu & \mu' & \mu'' \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right. \tag{18}$$

Si maintenant on suppose $\mu = 2$, la formule (14) donnera $\nu > 1$; donc ν sera de la forme $1 + \frac{1}{n}$, n pouvant être infini, et $2 - \nu$ sera de la forme $1 - \frac{1}{n}$. Donc alors, en posant $\nu' = 2 - \nu$, on réduira l'équation

$$\mu' + \mu'' = \nu \tag{19}$$

à la forme

$$\mu' + \mu'' + \nu' = 2, \tag{20}$$

μ', μ'', ν' étant trois termes de la série (13). Donc, si l'on n'a pas $\nu = 2$, et par suite $\nu' = 0$, les nombres μ, μ' propres à vérifier l'équation (19) seront deux quelconques des termes compris dans l'une des quatre dernières lignes horizontales du Tableau (18). Si l'on supposait $\nu = 2$, la formule (16) donnerait $\mu < 1$, et μ, μ' se réduiraient à deux nombres de la forme

$$1 - \frac{1}{n}, \quad 1 + \frac{1}{n},$$

n pouvant être infini.

Enfin, si l'on supposait $n = 1$, $\mu = \nu$ pourrait être l'un quelconque des termes de la série (13).

Ainsi, dans tous les cas, à l'aide des seules formules (14), (16), (17), (20), on peut déterminer immédiatement, avec la plus grande facilité, les divers systèmes de valeurs de μ, μ', μ'', ... pour lesquelles l'intégrale z de l'équation (9) est une fonction toujours monodrome et monogène de la variable t, et retrouver, de cette manière, les résultats obtenus par MM. Briot et Bouquet. D'ailleurs, en adoptant l'un quelconque de ces systèmes et en désignant par n le dénominateur de la fraction ν réduite à sa plus simple expression, on tirera de la formule (9)

$$\mathrm{D}_t^n \bar{\mathrm{l}} z = \mathrm{D}_t^{n-1} \frac{Z}{z}. \tag{21}$$

D'autre part, chacune des fonctions μ, μ', μ'', ... ayant pour dénominateur un diviseur de n, la valeur de $\mathrm{D}_t^{n-1} \frac{Z}{z}$, tirée des formules (9) et (10), se réduira évidemment à une fonction entière de z et de $\frac{1}{z}$. Donc l'équation (21) sera de la même forme que l'équation (2), et l'intégrale z de l'équation (9) pourra être présentée sous la forme

$$z = \frac{y}{x},$$

y et x étant deux fonctions synectiques de t, déterminées par deux équations semblables aux formules (4).

Si l'on suppose, en particulier,

$$Z = \overline{(1-z^2)}^{\frac{1}{2}}\,\overline{(1-k^2 z^2)}^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

k désignant une constante réelle ou imaginaire, on aura

$$k = 2, \qquad \mathrm{D}_t \frac{Z}{z} = \frac{z}{2} \mathrm{D}_z \frac{Z^2}{z^2}, \qquad \frac{Z^2}{z^2} = \frac{1}{z^2} - (1+k^2) + k^2 z^2;$$

par suite, l'équation (21) sera réduite à la formule

$$\mathrm{D}_t^2 \bar{\mathrm{l}} z = -\frac{1}{z^2} + k^2 z^2, \tag{23}$$

et les équations (4) aux deux formules

$$\mathrm{D}_t^2 \bar{\mathrm{l}} y = -\frac{1}{z^2}, \qquad \mathrm{D}_t^2 \bar{\mathrm{l}} x = -k^2 z^2, \tag{24}$$

en vertu desquelles y, x seront deux fonctions synectiques de t, dont le rapport représentera l'intégrale z de l'équation (9). Si d'ailleurs z s'évanouit avec t, cette intégrale sera la fonction elliptique $\sin \mathrm{am}\, t$, dont l'une des plus belles propriétés est celle que nous venons d'énoncer, et que manifestent les formules (24).

La conclusion à laquelle nous sommes parvenu pour l'intégrale de l'équation (9) est précisément celle à laquelle M. Weierstrass est arrivé, non seulement pour les fonctions elliptiques, mais aussi pour les fonctions abéliennes, dans un Mémoire que renferme le Tome XIX du Journal de M. Liouville. Dans ce beau travail, l'Auteur, rappelant deux autres Mémoires composés par lui sur le même sujet, en 1840 et 1847, énonce le principe général sur lequel s'appuie la décomposition de l'équation (3) en deux autres de la forme (4), puis il indique la marche qu'il a suivie pour obtenir, sous forme fractionnaire, les fonctions abéliennes. Il ajoute que sa méthode, appliquée aux fonctions elliptiques, réduit $\sin \mathrm{am}\, t$ à la forme $\frac{y}{x}$, y et x étant déterminés par les formules

$$\mathrm{D}_t^2 \mathrm{l} y = +\frac{x^2}{y^2}, \qquad \mathrm{D}_t^2 \mathrm{l} x = -k^2 \frac{y^2}{x^2}. \tag{25}$$

Autant que j'en puis juger, d'après les indications que donne M. Weierstrass, la principale différence entre sa méthode et celle que je viens d'exposer consiste en ce que, dans l'une et dans l'autre, on arrive, par des considérations différentes, à prouver que les intégrales y, x des équations (23) ou (25) sont des fonctions synectiques de la variable t.

553.

Calcul intégral. — *Sur la recherche des intégrales monodromes et monogènes d'un système d'équations différentielles.*

C. R., T. XL, p. 511 (5 mars 1855).

Soient $x, y, z, \ldots$ des inconnues assujetties : 1° à vérifier, pour une valeur variable de t, les équations différentielles

$$\text{(1)} \qquad D_t x = X, \quad D_t y = Y, \quad D_t z = Z, \quad \ldots,$$

$X, Y, Z, \ldots$ étant des fonctions données de $x, y, z, \ldots$; 2° à prendre, pour une valeur particulière τ de t, les valeurs correspondantes $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Soit encore $\mathfrak{t}$ une valeur finie de t, pour laquelle se vérifie l'une des conditions

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{x} = 0, \quad \frac{1}{y} = 0, \quad \frac{1}{z} = 0, \quad \ldots,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{X} = 0, \quad \frac{1}{Y} = 0, \quad \frac{1}{Z} = 0, \quad \ldots,$$

ou pour laquelle une des fonctions $X, Y, Z, \ldots$ cesse d'être monodrome et monogène. Il y aura lieu de rechercher si les intégrales $x, y, z, \ldots$ des équations (1) ne cessent pas elles-mêmes d'être monodromes et monogènes dans le voisinage de la valeur $\mathfrak{t}$ de la variable t, et un moyen de résoudre cette question sera d'intégrer par approximation les équations (1). J'ajoute que, dans beaucoup de cas, on pourra se dispenser de recourir à cette intégration, et parvenir à la solution cherchée en s'appuyant sur les considérations suivantes.

Nommons

$$\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}, \quad \ldots$$

les valeurs particulières de $x, y, z, \ldots$ correspondantes à la valeur $\mathfrak{t}$ de t, et supposons d'abord que ces valeurs soient des quantités finies.

Pour savoir si, dans le voisinage de la valeur $\mathfrak{t}$ attribuée à t, les intégrales $x, y, z, \ldots$ des équations (1) cessent ou ne cessent pas d'être monodromes et monogènes, il faudra comparer à la différence $t - \mathfrak{t}$ les différences correspondantes

$$x - \mathfrak{x}, \quad y - \mathfrak{y}, \quad z - \mathfrak{z}, \quad \ldots,$$

qui devront être en même temps qu'elles infiniment petites, et chercher d'abord de quels ordres seront ces dernières quand on considérera $t - \mathfrak{t}$ comme un infiniment petit du même ordre. Or, ces différences étant généralement des mêmes ordres que les produits

$$(t - \mathfrak{t})\, D_t x, \quad (t - \mathfrak{t})\, D_t y, \quad (t - \mathfrak{t})\, D_t z, \quad \ldots,$$

on pourra, dans la recherche de ces ordres, substituer habituellement aux équations (1) les formules

$$\text{(4)} \qquad \frac{x - \mathfrak{x}}{t - \mathfrak{t}} = X, \quad \frac{y - \mathfrak{y}}{t - \mathfrak{t}} = Y, \quad \frac{z - \mathfrak{z}}{t - \mathfrak{t}} = Z, \quad \ldots.$$

Concevons qu'en opérant ainsi on trouve les ordres des différences

$$x - \mathfrak{x}, \quad y - \mathfrak{y}, \quad z - \mathfrak{z}, \quad \ldots$$

respectivement égaux à

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots.$$

Les intégrales $x, y, z, \ldots$ ne pourront rester monodromes et monogènes, dans le voisinage de la valeur $\mathfrak{t}$ de t pour laquelle on aura $x = \mathfrak{x}$, $y = \mathfrak{y}$, $z = \mathfrak{z}, \ldots$ que, dans le cas où les nombres $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ seront tous positifs. Supposons cette condition remplie, et posons

$$\text{(5)} \qquad x - \mathfrak{x} = u\,\overline{(t - \mathfrak{t})}^{\lambda}, \quad y - \mathfrak{y} = v\,\overline{(t - \mathfrak{t})}^{\mu}, \quad z - \mathfrak{z} = w\,\overline{(t - \mathfrak{t})}^{\nu}, \quad \ldots.$$

La substitution des inconnues $u, v, w, \ldots$ aux inconnues $x, y, z, \ldots$ transformera les équations (1) en d'autres équations de la forme

$$\text{(6)} \qquad D_t u = U, \quad D_t v = V, \quad D_t w = W, \quad \ldots,$$

$U, V, W, \ldots$ étant des fonctions de $t, u, v, w, \ldots$. Si, pour la valeur $\mathfrak{t}$

de t jointe aux valeurs correspondantes de $u, v, w, \ldots$, les fonctions $U, V, W, \ldots$ acquièrent des valeurs finies qui ne soient pas nulles, elles resteront pour l'ordinaire monodromes et monogènes dans le voisinage de ces valeurs, et alors les intégrales $u, v, w, \ldots$ des équations (6) seront elles-mêmes, pour des valeurs de t voisines de t, des fonctions monodromes et monogènes de t; alors aussi, en vertu des formules (5), les intégrales $x, y, z, \ldots$ des équations (1) seront, pour des valeurs de t voisines de t, des fonctions monodromes et monogènes de t, si les ordres

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots$$

se réduisent à des nombres entiers : elles cesseront d'être monodromes et monogènes dans le sens contraire.

Si à la valeur t de t correspond non plus une valeur finie, mais une valeur infinie de l'une des intégrales $x, y, z, \ldots$ de l'intégrale x par exemple, alors, dans les calculs précédents, la différence $x - \mathrm{r}$ devra être remplacée par le rapport $\frac{1}{x}$, qui deviendra infiniment petit avec la différence $t - \mathrm{t}$. D'ailleurs, si l'on considère cette différence comme infiniment petite du premier ordre, l'ordre de $\frac{1}{x}$ sera généralement l'ordre du produit

$$(t-\mathrm{t})\frac{\mathrm{D}_t x}{x^2} = -(t-\mathrm{t})\,\mathrm{D}_t \frac{1}{x},$$

et l'on pourra, dans la recherche de cet ordre, substituer habituellement à la première des équations (1) la formule

$$\frac{x}{t-\mathrm{t}} = X. \tag{7}$$

Concevons qu'en opérant ainsi on trouve l'ordre de $\frac{1}{x}$ égal à λ. L'intégrale x ne pourra rester monodrome et monogène dans le voisinage de la valeur t de t pour laquelle on aura $x = \frac{1}{0}$, que dans le cas où le nombre λ sera positif. Supposons cette condition remplie, et posons

$$x = u\overline{(t-\mathrm{t})^{-\lambda}}. \tag{8}$$

Après avoir à la première des formules (5) substitué l'équation (8), on pourra encore, à l'aide de ces formules, obtenir entre les variables inconnues $u, v, w, \ldots$ des équations de la forme (6), puis en tirer des conclusions identiques avec celles que nous avons ci-dessus énoncées.

On arriverait encore à des conclusions semblables si, pour la valeur t de t, plusieurs des variables $x, y, z, \ldots$ devenaient infinies. Seulement alors plusieurs des formules (4) devraient être remplacées par des équations correspondantes prises dans le système

$$\frac{x}{t-\mathrm{t}} = X, \qquad \frac{y}{t-\mathrm{t}} = Y, \qquad \frac{z}{t-\mathrm{t}} = Z, \qquad \ldots, \tag{9}$$

et plusieurs des formules (5) par des équations correspondantes prises dans le système

$$x = u\overline{(t-\mathrm{t})^{-\lambda}}, \qquad y = v\overline{(t-\mathrm{t})^{-\mu}}, \qquad z = w\overline{(t-\mathrm{t})^{-\nu}}, \qquad \ldots \tag{10}$$

Le cas où, r étant fini, le nombre λ serait infini, mérite une attention spéciale. Dans ce cas, si à la première des formules (5) on substitue l'équation

$$x = e^{u(t-\mathrm{t})}, \tag{11}$$

les intégrales $u, v, w, \ldots$ des formules (6) seront encore, sous les conditions énoncées, et pour des valeurs de t voisines de t, des fonctions monodromes et monogènes de t; mais on ne pourra pas en dire autant des intégrales $x, y, z, \ldots$, qui ne resteront monodromes et monogènes que si les exposants

$$\mu, \quad \nu, \quad \ldots$$

sont des nombres entiers.

Lorsque, en suivant la marche ici tracée, on aura constaté que les intégrales $x, y, z, \ldots$ des équations (1) sont, du moins entre certaines limites du module de $t - \tau$, des fonctions monodromes et monogènes de la variable t, on pourra évidemment appliquer à ces intégrales les théorèmes généraux que j'ai déduits du Calcul des résidus, spécialement le théorème énoncé à la page 212 du Tome XXXII des *Comptes rendus* (¹); on pourra en conséquence développer ces intégrales en séries, les décomposer en fractions simples ou en facteurs simples, ...; et ces développements, ces décompositions pourront s'effectuer pour des valeurs quelconques de la variable t, si les intégrales $x, y, z, \ldots$ ne cessent jamais d'être monodromes et monogènes. Enfin les formes des développements resteront les mêmes, quelle que soit la valeur attribuée à t, si, pour toute valeur finie de t, les intégrales $x, y, z, \ldots$ sont non seulement monodromes et monogènes, mais encore finies, et par conséquent synectiques.

Lorsque les intégrales $x, y, z, \ldots$ ne restent pas toujours monodromes et monogènes, on peut chercher à établir entre ces intégrales et de nouvelles inconnues $u, v, w, \ldots$ des relations simples, mais telles que $u, v, w, \ldots$ soient des fonctions toujours monodromes et monogènes de la variable t. Montrons en peu de mots comment ce nouveau problème peut être résolu.

Concevons, pour fixer les idées, que les équations (1) soient remplacées par celles qui se déduisent des deux formules

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} X^{-1}\mathrm{D}_t x + Y^{-1}\mathrm{D}_t y &= h,\\ x X^{-1}\mathrm{D}_t x + y Y^{-1}\mathrm{D}_t y &= k,\end{aligned}\right.$$

et que l'on ait, en conséquence,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_t x &= \frac{hy-k}{y-x}X,\\ \mathrm{D}_t y &= \frac{k-hx}{y-x}Y,\end{aligned}\right.$$

les lettres h, k désignant deux constantes réelles ou imaginaires, X étant une fonction de x, et Y étant ce que devient X quand on y remplace x par y. Concevons encore que, dans ces équations, X soit de la forme

$$(14)\qquad X = \overline{(1-ax)^{\alpha}}\,\overline{(1-bx)^{\beta}}\,\overline{(1-cx)^{\gamma}}, \qquad \ldots,$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. XI, p. 311.

$a, b, c, \ldots$ étant des constantes réelles ou imaginaires, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des exposants entiers ou fractionnaires. Les intégrales x, y ne pourront cesser d'être monodromes et monogènes dans le voisinage d'une valeur particulière t attribuée à la variable t, que dans le cas où à cette valeur répondra une valeur infinie de x ou de y, ou une valeur nulle ou infinie de X ou de Y, ou enfin une valeur nulle de $y-x$, c'est-à-dire dans le cas où se vérifiera l'une des conditions

$$(15)\qquad x = \frac{1}{0}, \qquad y = \frac{1}{0},$$

$$(16)\qquad x = \frac{1}{a}, \quad x = \frac{1}{b}, \quad x = \frac{1}{c}, \quad \ldots, \quad y = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{1}{b}, \quad y = \frac{1}{c}, \quad \ldots,$$

$$(17)\qquad y = x.$$

D'ailleurs, dans le voisinage d'une valeur de t, pour laquelle se vérifiera l'une des conditions (16), les intégrales x, y ne cesseront pas d'être des fonctions monodromes et monogènes de t, si chacun des exposants

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots$$

est de l'une des trois formes

$$1-\frac{1}{n}, \quad 1, \quad 1+\frac{1}{n},$$

la lettre n désignant un nombre entier. Supposons cette condition remplie, et faisons

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots = \iota.$$

Dans le voisinage d'une valeur de t, pour laquelle se vérifiera l'une des conditions (15), les intégrales x, y ne cesseront pas d'être des fonctions monodromes et monogènes de t, si la différence

$$\iota - 1$$

est elle-même de l'une des trois formes $1-\frac{1}{n}$, 1, $1+\frac{1}{n}$. Supposons encore cette dernière condition remplie. Alors les intégrales x, y ne pourront cesser d'être monodromes et monogènes que dans le voisinage d'une valeur de t, pour laquelle se vérifiera l'équation (17);

ajoutons que, pour une telle valeur de t, la fonction $(y-x)^2$, dont la dérivée vérifiera la formule

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}_t(y-x)^2 = k(X+Y) - h(yX+xY),$$

ne cessera pas d'être monodrome et monogène, et que la racine carrée d'une fonction monodrome et monogène cesse généralement de l'être quand on attribue à la variable indépendante des valeurs voisines de l'une de celles pour laquelle la fonction s'évanouit. Cela posé, il est clair que dans l'hypothèse admise la racine carrée $x-y$ de $(y-x)^2$, et par suite les inconnues x, y, cesseront d'être monodromes et monogènes pour des valeurs de t voisines de celles qui vérifieront la formule (17); quant à la fonction de x et de y, représentée par $(y-x)^2$, elle restera toujours, et pour une valeur quelconque de t, monodrome et monogène avec les deux fonctions

$$x+y \quad \text{et} \quad xy,$$

dont les dérivées, déterminées par les formules

$$\mathrm{D}_t(y+x) = \frac{h(yX-xY)-k(X-Y)}{y-x},$$

$$\mathrm{D}_t(xy) \quad = \frac{h(y^2X-x^2Y)-k(yX-xY)}{y-x},$$

conserveront des valeurs finies quand on posera $y=x$.

On arriverait à des résultats analogues, en considérant, non plus les équations (12), mais un système de n équations du même genre entre n variables $x, y, z, \ldots$, par exemple les trois équations

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} X^{-1}\mathrm{D}_t x + Y^{-1}\mathrm{D}_t y + Z^{-1}\mathrm{D}_t z &= h,\\ x\,X^{-1}\mathrm{D}_t x + y\,Y^{-1}\mathrm{D}t y + z\,Z^{-1}\mathrm{D}_t z &= k,\\ x^2X^{-1}\mathrm{D}_t x + y^2Y^{-1}\mathrm{D}_t y + z^2Z^{-1}\mathrm{D}_t z &= l,\end{aligned}\right.$$

h, k, l étant des constantes réelles ou imaginaires, et X, Y, Z des fonctions semblables, mais irrationnelles, qui dépendraient la première de la variable x, la deuxième de la variable y, la troisième de la variable z.

Remarquons d'ailleurs que l'intégration des équations (12), (18), etc., et la détermination des fonctions abéliennes sont deux opérations identiques. Ainsi, en particulier, intégrer les équations (12), en assujettissant les intégrales x, y à prendre pour une valeur nulle de t les valeurs ξ, η, c'est, en d'autres termes, calculer les valeurs des fonctions abéliennes x, y déterminées par les deux équations

$$\int_\xi^x X^{-1}\,dx + \int_\eta^y Y^{-1}\,dy = ht,$$

$$\int_\xi^x x\,X^{-1}\,dx + \int_\eta^y y\,Y^{-1}\,dy = kt.$$

554.

Analyse infinitésimale. — *Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par MM.* Briot *et* Bouquet, *et intitulé :* Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles.

C. R., T. XL, p. 557 (12 mars 1855).

Les recherches de MM. Briot et Bouquet, dans le travail soumis à notre examen, concernent les fonctions définies par les équations différentielles. D'ailleurs, comme le reconnaissent les auteurs eux-mêmes, ces recherches se trouvent intimement liées à celles que l'un de nous a publiées à diverses époques, savoir : en 1835, dans le Mémoire sur l'intégration des équations différentielles; en 1846, dans plusieurs Mémoires que renferment les *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, et, en 1852, dans le Mémoire sur l'application du Calcul infinitésimal à la détermination des fonctions implicites ([1]). Nous serons donc obligés de rappeler d'abord

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XI; S. I, T. X; et S. I, T. XI, p. 406.

quelques-uns des résultats obtenus dans ces Mémoires. On pourra ainsi mieux apprécier le caractère et l'importance des résultats nouveaux auxquels MM. Briot et Bouquet sont parvenus.

Le nombre des équations différentielles que l'on peut intégrer en termes finis étant très peu considérable, on a essayé, depuis longtemps, de les intégrer par séries. Ainsi, par exemple, étant donnée une équation différentielle du premier ordre entre la variable t et une fonction inconnue de t représentée par x, avec la valeur particulière ξ de la fonction x, correspondante à la valeur particulière τ de la variable t, on a supposé la fonction x développée par la formule de Taylor en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de $t-\tau$; et, comme on parvient facilement à déterminer les coefficients des diverses puissances dans cette série, en les déduisant des valeurs connues de τ, ξ à l'aide de l'équation donnée et de ses dérivées des divers ordres, et en laissant d'ailleurs arbitraire la constante ξ, on en a conclu que toute équation différentielle du premier ordre entre x et t admettait une intégrale générale, et que cette intégrale se trouvait représentée par la série de Taylor, c'est-à-dire par la somme de cette série, les coefficients étant déterminés, comme on vient de l'expliquer, en fonction de τ et de la constante arbitraire ξ. Toutefois, les considérations précédentes ne donnaient pas la certitude que l'on eût effectivement intégré l'équation proposée, ni même que cette équation admît une intégrale; car, d'une part, on ne démontrait pas généralement que la série obtenue fût convergente, et l'on sait que les séries divergentes n'ont pas de sommes; d'autre part, une série même convergente qui provient du développement d'une fonction, effectué à l'aide de la formule de Taylor, ne représente pas toujours la fonction dont il s'agit. L'intégration par série pouvait donc être illusoire. Pour transformer cette intégration en une méthode exacte et rigoureuse, il était nécessaire d'examiner sous quelles conditions et en quelles limites les séries trouvées étaient convergentes. Ces deux questions ont été traitées dans les Mémoires ci-dessus rappelés; et, dans le dernier de ces Mémoires, les conclusions auxquelles l'auteur est parvenu, se trouvent exprimées comme il suit :

Représentons par

$$\mathfrak{T},\quad \mathfrak{X},\quad \mathfrak{Y},\quad \mathfrak{Z},\quad \ldots$$

des fonctions de

$$t,\quad x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,$$

qui restent finies, monodromes et monogènes dans le voisinage des valeurs

$$\tau,\quad \xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots$$

attribuées à

$$t,\quad x,\quad y,\quad z,\quad \ldots;$$

et concevons que l'on assujettisse $x, y, z, \ldots$ *à la double condition de vérifier, quel que soit* t, *les équations différentielles comprises dans la formule*

$$\frac{dt}{\mathfrak{T}}=\frac{dx}{\mathfrak{X}}=\frac{dy}{\mathfrak{Y}}=\frac{dz}{\mathfrak{Z}}=\ldots, \tag{1}$$

et de se réduire à $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *pour* $t=\tau$. *Si* $\mathfrak{T}$ *ne s'évanouit pas quand on prend*

$$t=\tau,\qquad x=\xi,\qquad y=\eta,\qquad z=\zeta,\qquad \ldots,$$

alors, à l'aide des théorèmes établis dans le Mémoire de 1835 sur l'intégration des équations différentielles, on prouvera qu'il est possible de satisfaire, au moins quand le module de la différence $t=\tau$ *ne dépasse pas une certaine limite, aux deux conditions énoncées, par des valeurs de* $x, y, z, \ldots$ *qui seront développées en séries convergentes, et qui représenteront les intégrales générales des équations différentielles données. Il y a plus : on peut affirmer que, dans l'hypothèse admise, ces intégrales générales seront les seules valeurs de* $x, y, z, \ldots$ *qui, variant avec* t *par degrés insensibles, rempliront, pour un module suffisamment petit de* $t=\tau$, *les deux conditions énoncées. Enfin, comme les divers termes des séries obtenues seront des fonctions monodromes, monogènes et finies de la variable* t, *on pourra en dire autant des valeurs trouvées des variables* $x, y, z, \ldots$, *ou même d'une fonction monodrome, monogène et finie de ces variables.*

Ajoutons que les séries dont il est ici question ne se réduisent à des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la différence $t-\tau$ que dans le cas particulier où les fonctions $\mathcal{T}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, ... deviennent indépendantes de la variable t. Dans le cas où ces fonctions renferment la variable t, les divers termes des séries obtenues, cessant d'être proportionnels aux diverses puissances de $t-\tau$, sont fournis par des intégrations successives, et, par suite, ils peuvent revêtir des formes mieux appropriées à la solution des problèmes. Ainsi, par exemple, en Astronomie, on obtient le plus ordinairement des séries ordonnées, non suivant les puissances ascendantes du temps, mais, ce qui est bien préférable, suivant les sinus et cosinus des multiples de certains arcs proportionnels au temps.

Enfin, l'auteur du Mémoire de 1835 ne s'est pas borné à établir, dans l'hypothèse admise, l'existence des intégrales générales d'un système d'équations différentielles : il a encore fixé des limites entre lesquelles le module de la différence $t-\tau$ peut varier, sans que les séries obtenues cessent d'être convergentes, et des limites au-dessous desquelles s'abaissent nécessairement les erreurs que l'on commet quand on arrête chacune des séries obtenues après un certain terme.

Le théorème sur lequel se sont appuyés MM. Briot et Bouquet, pour établir, dans l'hypothèse admise, l'existence des intégrales générales d'un système d'équations différentielles, est précisément celui qu'a donné l'auteur du Mémoire de 1835. Mais à ce théorème et à quelques autres qui pourraient se déduire de propositions déjà connues, MM. Briot et Bouquet ont joint les résultats qui leur sont propres et qui méritent d'être cités. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

La recherche de fonctions de t qui, représentées par x, y, z, ..., aient la double propriété de vérifier un système d'équations différentielles et d'acquérir des valeurs données ξ, η, ζ, ... pour une valeur donnée τ de la variable t, peut être généralement réduite au cas où les valeurs données τ, ξ, η, ζ, ... de t, x, y, z, ... s'évanouissent. Il suffit, en effet, pour opérer cette réduction, de substituer aux

variables t, x, y, z, ... d'autres variables $t_{,}$, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, ... liées aux premières par des équations de la forme

$$t=\tau+t_{,},\qquad x=\xi+x_{,},\qquad y=\eta+y_{,},\qquad \ldots.$$

Cela posé, soient t, x deux variables dont la seconde, considérée comme fonction de t, doive s'évanouir pour une valeur nulle de t, et satisfaire, quand t varie, à l'équation différentielle

$$\frac{dt}{\mathcal{T}}=\frac{dx}{\mathcal{X}}, \tag{2}$$

$\mathcal{T}$, $\mathcal{X}$ désignant deux fonctions finies, monodromes et monogènes des variables t, x. Si $\mathcal{T}$ ne s'évanouit pas avec t, d'après ce qui a été dit ci-dessus, l'équation (2) admettra, pour des valeurs de t suffisamment petites, une seule intégrale monodrome et monogène propre à remplir les deux conditions énoncées. Il y a plus : le développement de cette intégrale en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de t sera précisément celui auquel on sera conduit par la formule de Taylor, jointe à l'équation (2). Mais il en sera autrement, si $\mathcal{T}$ s'évanouit avec t. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait précisément

$$\mathcal{T}=t.$$

L'équation (2) sera réduite à

$$t\,\mathrm{D}_t x=\mathcal{X}, \tag{3}$$

et, puisque x doit s'évanouir avec t, la fonction $\mathcal{X}$ devra s'évanouir avec les deux variables t, x. D'ailleurs, étant monodrome et monogène, elle sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de ces variables, en sorte qu'on aura

$$\mathcal{X}=ax+bt+\varphi(x,t), \tag{4}$$

a, b désignant les valeurs des dérivées $\mathrm{D}_x\mathcal{X}$, $\mathrm{D}_t\mathcal{X}$ pour des valeurs nulles des variables t, x, et $\varphi(x,t)$ une fonction dont le développement se composera de termes qui seront tous, par rapport à ces variables, d'un degré supérieur au premier. Si la fonction $\varphi(x,t)$ s'évanouit, on aura simplement

$$\mathcal{X} = ax + bt, \tag{5}$$

et l'équation (3), réduite à la formule

$$t\,\mathrm{D}_t x = ax + bt, \tag{6}$$

sera vérifiée quand on posera

$$x = \frac{bt}{1-a} + ct^a, \tag{7}$$

c désignant une constante arbitraire. La valeur de x, fournie par l'équation (7), est l'intégrale générale de l'équation (6), et la constante c qu'elle renferme peut toujours être déterminée, quand on donne une valeur particulière ξ de x correspondante à une valeur particulière τ de la variable t, à moins que la valeur τ de t ne s'évanouisse. Dans cette dernière supposition, qui est précisément celle que nous avons adoptée, on doit prêter une attention spéciale au signe qui affecte la partie réelle du paramètre a. Lorsque cette partie réelle est négative, t^a devient infini pour une valeur nulle de t, et la seule valeur de x qui remplisse la double condition de vérifier l'équation (6) et de s'évanouir avec t est celle qu'on obtient en posant dans la formule (7) $c = 0$, c'est-à-dire la fonction monodrome et monogène de t, donnée par la formule

$$x = \frac{bt}{1-a}. \tag{8}$$

Au contraire, lorsque la partie réelle de a est positive, t^a s'évanouit toujours avec t, et par suite on satisfait aux deux conditions énoncées, en supposant la valeur de x donnée ou par la formule (8) ou même généralement par la formule (7). Ainsi, dans ce cas, la seconde condition, par laquelle x est assujetti à s'évanouir avec x, ne détermine plus la constante arbitraire, et cette constante ne cesse pas d'être arbitraire dans l'intégrale particulière, qui se confond alors avec l'intégrale générale.

Dans le cas spécial où le coefficient a se réduit à l'unité, le rapport $\frac{b}{1-a}$ devient infini, et pour conserver à x une valeur finie, il faut attribuer une valeur infinie à la constante c. Pour savoir ce que devient alors l'intégrale de l'équation (6), posons d'abord $a = 1 + \alpha$, α étant une quantité infiniment petite; l'équation (7) deviendra

$$x = \frac{c\alpha - b}{\alpha} t + c\alpha t \frac{t^\alpha - 1}{\alpha}.$$

Or, pour que cette dernière valeur de x conserve une valeur finie, tandis que α s'approchera indéfiniment de la limite zéro, il faudra faire converger le produit $c\alpha$ vers la limite b, et le rapport $\frac{c\alpha - b}{\alpha}$ vers une limite finie C. On trouvera ainsi

$$x = Ct + bt\,\mathrm{l}t; \tag{9}$$

par conséquent l'équation

$$t\,\mathrm{D}_t x = x + bt \tag{10}$$

admettra une intégrale générale, qui ne sera ni monodrome ni monogène, à moins que b ne se réduise à zéro, et qui, dans tous les cas, aura la propriété de s'évanouir avec la variable t. Si b se réduisait à zéro, l'équation (10) se réduirait à

$$\mathrm{D}_t x = x, \tag{11}$$

et son intégrale générale à

$$x = Ct. \tag{12}$$

En choisissant, parmi les équations différentielles qu'ont traitées MM. Briot et Bouquet, l'une de celles dont l'intégrale générale est fournie avec la plus grande facilité par les méthodes connues, savoir l'équation (6), nous avons voulu faire bien comprendre comment il peut arriver, pour me servir de leurs propres expressions, qu'*une fonction ne soit pas complètement déterminée quand on l'assujettit à vérifier une équation différentielle du premier ordre, et à prendre une* *certaine valeur pour une valeur donnée de la variable indépendante.* Comme le remarquent MM. Briot et Bouquet, cela arrive généralement quand, *pour les valeurs données de la fonction et de la variable indépendante, le coefficient différentiel se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$. *Alors l'équation différentielle admet en général plusieurs intégrales qui remplissent les deux conditions énoncées. Souvent même elle en admet une infinité, et alors il s'introduit une constante arbitraire dans l'intégration.* Nous ajouterons que, dans ce dernier cas, l'intégrale particulière correspondante aux valeurs données de la fonction et de la variable indépendante ne diffère pas de l'intégrale générale, et que les valeurs dont il s'agit sont précisément celles qui réduisent à la forme $\frac{0}{0}$ l'expression de la constante arbitraire tirée de l'intégrale générale. Ainsi, par exemple, si de la formule (7), qui représente l'intégrale générale de l'équation (6), on tire l'expression de la constante arbitraire c, on trouvera

$$c = \frac{x - \frac{bt}{1-a}}{t^a}, \tag{13}$$

et, pour que cette expression se réduise à la forme $\frac{0}{0}$, quand x et t acquerront des valeurs particulières, il faudra que ces valeurs particulières s'évanouissent et que la partie réelle du paramètre a soit positive.

Pareillement, si de la formule (9), qui représente l'intégrale générale de l'équation (10), on tire l'expression de la constante arbitraire C, on trouvera

$$C = \frac{x - bt\,lt}{t}, \tag{14}$$

et pour que cette expression se réduise à la forme $\frac{0}{0}$, quand t et x acquerront des valeurs particulières, il faudra que ces valeurs particulières s'évanouissent.

Les diverses propriétés que nous a offertes celle des intégrales de l'équation (6) qui s'évanouit avec t continuent de subsister, comme

l'observent MM. Briot et Bouquet, quand on revient de l'équation (6) à l'équation (3), $\mathfrak{X}$ étant une fonction monodrome et monogène qui s'évanouit avec les variables x et t dont elle dépend. Alors, a étant toujours la valeur qu'acquiert la dérivée $D_x\mathfrak{X}$ pour des valeurs nulles de t et x, l'intégrale particulière dont il s'agit renferme encore une constante arbitraire, et par suite elle se confond avec l'intégrale générale quand la partie réelle de a est positive ou nulle; mais elle redevient complètement déterminée quand la partie réelle de a est négative. Dans tous les cas, si le coefficient a ne se réduit pas à un nombre entier, l'intégrale particulière dont il s'agit ou l'une de ses valeurs sera une fonction monodrome et monogène de t, pour un module de t inférieur à une certaine limite. La marche qu'ont suivie MM. Briot et Bouquet pour démontrer cette assertion mérite d'être remarquée. Ils commencent par faire voir qu'on peut réduire l'équation (3) à une autre de même forme, mais dans laquelle le coefficient a, c'est-à-dire la valeur de $D_x\mathfrak{X}$ correspondante à des valeurs nulles de x et t se trouve diminuée d'autant d'unités que l'on voudra; puis, après avoir abaissé la partie réelle de a au-dessous de zéro, ils font servir la formule de Taylor, jointe aux dérivées de l'équation (3), au développement de x en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de t, et comparent la série ainsi obtenue à celle qui représente le développement de la racine x d'une certaine équation entre x et t. A l'aide de cette comparaison, ils prouvent la convergence du premier développement pour un module suffisamment petit de la variable t, assignent au module de t une valeur au-dessous de laquelle ce module peut varier d'une manière quelconque, sans que le développement cesse d'être convergent, et concluent sans peine qu'il représente alors une intégrale monodrome et monogène de l'équation (3).

Nous avons cru devoir fixer particulièrement l'attention des géomètres sur la partie du Mémoire de MM. Briot et Bouquet qui concerne l'intégrale monodrome et monogène de l'équation (3), parce que cette partie, qui ne laisse rien à désirer pour la rigueur des démonstrations, nous paraît la plus neuve et la plus importante. Toutefois nous ne saurions passer sous silence d'autres résultats obtenus par MM. Briot et Bouquet, résultats d'autant plus intéressants qu'ils se rapportent à l'équation générale

$$D_t x = f(x, t), \tag{15}$$

qui renferme l'équation (3) comme cas particulier.

En supposant la variable x assujettie : 1° à vérifier l'équation (15); 2° à prendre une valeur donnée pour une valeur donnée de t, par exemple à s'évanouir avec t; en supposant d'ailleurs que la fonction $f(x, t)$ reste monodrome et monogène dans le voisinage de valeurs très petites attribuées aux variables x, t, mais cesse de l'être quand ces valeurs s'évanouissent, MM. Briot et Bouquet recherchent les propriétés de l'intégrale x, d'abord dans le cas où la fonction $f(x, t)$ devient infinie pour des valeurs nulles de x et t, puis dans le cas où ces valeurs réduisent la fonction $f(x, t)$ à la forme $\frac{0}{0}$. Pour y parvenir, ils intègrent par approximation l'équation (14), à l'aide du procédé qui consiste à négliger avant l'intégration les quantités finies vis-à-vis des quantités infiniment grandes, et les quantités infiniment petites vis-à-vis des quantités finies. En opérant ainsi, ils établissent aisément un théorème que l'on peut réduire à la proposition suivante :

Lorsque, pour des valeurs nulles de x, t, la fonction $f(x, t)$ devient infinie, la fonction inverse $\frac{1}{f(x, t)}$ demeurant monodrome et monogène, du moins entre certaines limites, la variable x assujettie à s'évanouir avec t, se réduit sensiblement, pour de très petites valeurs de t, à la racine d'une équation binôme du degré $m + 1$, m étant le degré de la première des dérivées de $\frac{1}{f(x, t)}$, relatives à x, qui ne s'évanouit pas quand on pose $x = 0$, $t = 0$.

Il résulte de ce théorème que, dans l'hypothèse admise, l'intégrale x ne sera point une fonction monodrome et monogène de la variable t.

Lorsque la fonction $f(x, t)$ est le rapport de deux fonctions qui restent, du moins entre certaines limites, finies, monodromes et monogènes, et se présente, pour des valeurs nulles de x et t, sous la forme $\frac{0}{0}$, la première question à résoudre est de trouver, pour des valeurs infiniment petites de t, l'ordre de l'intégrale x, devenue elle-même infiniment petite. Cette question, admettant plusieurs solutions, donne lieu à une discussion intéressante. Mais cette discussion même, ainsi que les formules et la construction géométrique, appliquées par MM. Briot et Bouquet à la recherche des solutions diverses, ont une analogie évidente avec la discussion, les formules et la construction géométrique que M. Puiseux avait, dans son beau Mémoire sur les fonctions algébriques, appliquées aux racines d'une équation dont le premier membre est une fonction de deux variables, dans le cas où la dérivée de ce premier membre s'évanouit avec lui pour des valeurs données de ces variables. Il y a plus : comme, t étant infiniment petit, la variable x, supposée elle-même infiniment petite et fonction de t, sera généralement du même ordre que le produit $t D_t x$, on peut affirmer qu'alors la dérivée $D_t x$ sera généralement de l'ordre du rapport

$$\frac{x}{t}.$$

Donc, trouver l'ordre de l'intégrale x assujettie à vérifier l'équation (15) et à s'évanouir avec t revient à trouver l'ordre de la racine x de l'équation

$$\frac{x}{t} = f(x, t), \tag{16}$$

et le problème ci-dessus mentionné peut être ainsi ramené à celui qu'a traité M. Puiseux.

Si l'on considère la variable t comme un infiniment petit du premier ordre, l'ordre de l'intégrale x de l'équation (15), calculé comme on vient de le dire, sera généralement un nombre fractionnaire. Après avoir déterminé cet ordre, MM. Briot et Bouquet prouvent qu'à l'aide d'une substitution convenable on peut réduire l'intégration de l'équation (15) à la recherche de l'intégrale x de l'équation (3). On doit toutefois excepter un cas particulier où après la réduction on obtient, à la place de l'équation (15), une équation de la forme

$$t^m \mathrm{D}_t x = \mathfrak{X}, \tag{17}$$

m étant un nombre entier, et $\mathfrak{X}$ s'évanouissant quand x et t s'évanouissent. D'ailleurs, comme le remarquent MM. Briot et Bouquet, la valeur de x assujettie à vérifier l'équation (17), et à s'évanouir avec t, n'admet pas en général, mais seulement sous certaines conditions, une intégrale monodrome et monogène.

A la fin de leur Mémoire, MM. Briot et Bouquet présentent quelques considérations générales sur l'intégration d'une équation différentielle entre deux variables t, x, dans le cas où le second membre est une fonction implicite de ces variables. Ici encore il peut arriver que le second membre soit ou ne soit pas, dans le voisinage des valeurs originairement attribuées à x et t, une fonction finie, monodrome et monogène. L'intégrale x sera toujours, dans la première hypothèse, monodrome, monogène et finie, et pourra ne l'être plus dans la seconde hypothèse. Le cas où le second membre de l'équation différentielle est une fonction implicite de la seule variable x mérite une attention spéciale. Au reste, ce cas, déjà traité dans les *Comptes rendus* de 1846, a été, comme le remarquent MM. Briot et Bouquet, étudié avec soin par M. Puiseux dans le Mémoire ci-dessus rappelé.

Au travail dont nous venons de rendre compte, MM. Briot et Bouquet ont récemment annexé une addition qui a pour titre : *Note sur un théorème de M. Cauchy relatif à l'intégration des équations différentielles.*

Le théorème dont il s'agit est précisément celui que nous avons rappelé au commencement de ce Rapport, en nous servant, pour l'énoncer, des termes mêmes employés dans le Mémoire sur l'application du Calcul infinitésimal à la détermination des fonctions implicites. Lorsque, pour établir ce théorème, on suit la marche tracée

dans le Mémoire de 1835, en l'appliquant à une équation différentielle, entre t et x, la première des deux limites assignées au module du terme général du développement de l'intégrale x est, comme la seconde, le terme général d'une série connue, cette série étant, non plus une progression géométrique, mais le développement d'une certaine équation du second degré.

D'ailleurs cette remarque, qui n'était pas énoncée dans le Mémoire de 1835, subsiste dans le cas où le second membre de l'équation différentielle renferme non seulement la variable x, mais aussi la variable t.

Appliquée à une seule équation différentielle, la démonstration que MM. Briot et Bouquet donnent du théorème cité suppose l'intégrale x développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable t, la valeur initiale de t étant réduite à zéro. Ils déterminent directement la fonction dont le développement a pour termes les limites des modules des termes compris dans le développement de l'intégrale; et, s'appuyant sur un théorème général, rappelé dans la séance du 22 janvier de cette année, ils substituent à l'équation différentielle proposée une autre équation différentielle dont cette fonction est l'intégrale. D'ailleurs cette fonction est la racine d'une équation finie du second degré. Mais cette équation finie, qui renferme un logarithme, diffère de celle dont il était ci-dessus question, et à laquelle on serait conduit encore, si l'on appliquait la démonstration de MM. Briot et Bouquet à la forme de développement adoptée dans le Mémoire de 1835.

La même démonstration, appliquée au système de n équations différentielles, entre n inconnues $x, y, z, \ldots$ et la variable t, conduit MM. Briot et Bouquet à une équation finie du degré $n+1$, qui renferme encore un logarithme, parce que les auteurs continuent de supposer les inconnues développées en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de t. Le logarithme disparaîtrait, si l'on admettait la forme de développement adoptée dans le Mémoire de 1835, et alors on pourrait, de l'équation finie à laquelle on parviendrait, déduire immédiatement les conclusions énoncées dans le Mémoire, par rapport à la limite au-dessous de laquelle le module de t peut varier sans que les séries obtenues cessent d'être convergentes. Toutefois, l'équation finie a l'avantage de fournir une limite plus étendue.

En résumé, MM. Briot et Bouquet, dans le savant Mémoire soumis à notre examen et dans la Note jointe à ce Mémoire, ont ajouté des développements utiles et des perfectionnements nouveaux, dignes de remarque, à la théorie si importante de l'intégration par série des équations différentielles.

Pour ces motifs, vos Commissaires pensent que le Mémoire et la Note de MM. Briot et Bouquet doivent être approuvés par l'Académie et ils en proposent l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*.

555.

ANALYSE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur deux Mémoires de* M. PIERRE-ALPHONSE LAURENT, *chef de bataillon du Génie*.

C. R., T. XL, p. 632 (19 mars 1855).

Un homme d'un mérite supérieur, M. Pierre-Alphonse Laurent, chef de bataillon du Génie, a été enlevé, par une mort prématurée, à sa patrie qu'il servait avec ardeur, à la Science qu'il enrichissait de ses découvertes. Dès l'année 1843, il composait, sur le Calcul des variations, un Mémoire que l'Académie a jugé digne d'être approuvé par elle, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers;* la même année, au mois d'août, M. Laurent présentait à l'Académie un second Mémoire qu'il intitulait modestement : *Extension d'un théorème de M. Cauchy*. Mais, comme il est dit dans le Rapport, cette extension constitue un nouveau théorème, digne de remarque, qui peut être utilement employé dans les recherches de haute Analyse. Aussi l'Académie a-t-elle adopté les conclusions du Rapport qui signalait ce nouveau Mémoire comme très digne d'être approuvé par elle et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*. Depuis ce moment, M. Laurent, travailleur infatigable, a su, par de constants efforts, conserver dans l'estime des savants le rang si honorable où ses premiers travaux l'avaient placé, et chaque année il a fait parvenir à l'Académie un très grand nombre de Mémoires sur l'Analyse, sur la Physique mathématique et particulièrement sur la Théorie de la lumière. Enfin, deux importants Mémoires du même auteur, présentés, au nom de sa veuve, à l'Académie par M. le Maréchal Vaillant, ne peuvent qu'augmenter les regrets des amis de la Science, en leur faisant voir tout ce qu'on devait encore attendre d'un savant distingué, dont la vie a été certainement abrégée par ses nombreuses veilles. De ces deux Mémoires, le premier, comme l'indique son titre, concerne la *Théorie des imaginaires*. Il renferme des considérations générales sur l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont, parmi les fonctions d'une variable imaginaire, celles dont la dérivée dépend uniquement de la variable, et divers théorèmes relatifs, les uns aux intégrales définies, les autres au développement de ces intégrales en séries, particulièrement le beau théorème déjà cité, puis des applications de ces théorèmes à l'intégration des équations aux dérivées partielles, spécialement de celles qui expriment l'équilibre de température et l'équilibre d'élasticité. Le second Mémoire a pour titre : *Examen de la théorie de la lumière dans le système des ondes*. L'auteur y passe en revue les explications données par les physiciens et les géomètres des divers phénomènes lumineux; il recherche jusqu'à quel point ces explications peuvent être admises, et ce qu'elles peuvent laisser encore à désirer.

Les deux nouveaux Mémoires, comme les précédents, témoignent de la science profonde et de la grande sagacité de M. Laurent. L'intérêt qui s'attache aux sujets traités dans ces Mémoires, l'importance des discussions auxquelles l'auteur s'y livre, les points de vue nouveaux que souvent il découvre, devaient naturellement inspirer aux physiciens et aux géomètres un vif désir de voir les œuvres de M. Laurent recueillies et publiées. Vos Commissaires sont d'avis que ce vœu doit être réalisé. En conséquence, ils proposent à l'Académie :

1° De décider que les divers Mémoires de M. Laurent, tous ceux du moins dont l'importance ne saurait être contestée, seront publiés dans le *Recueil des Savants étrangers;*

2° De confier à une Commission spéciale, prise dans le sein de l'Académie, le soin de recueillir ces Mémoires et d'en surveiller l'impression.

En terminant ce Rapport, les Commissaires n'hésitent pas à déclarer qu'ils s'associent pleinement au vœu émis par M. le Maréchal Vaillant et que partageront certainement tous les amis des Sciences. Comme l'a dit M. le Maréchal : « *le Corps du Génie a perdu en M. Laurent un de ses officiers les plus distingués, celui-là même que le Comité des Fortifications avait appelé à Paris pour examiner les nombreuses questions d'Art et de Science qui lui sont journellement adressées* ». Nous laisserons aux chefs du Corps dans lequel les talents et le zèle de M. Laurent étaient si bien appréciés, le soin de rappeler ses vingt-sept années de service, ses campagnes en Afrique, les travaux qu'il a exécutés comme ingénieur militaire, etc. Mais ce ne sont pas là les seuls titres qui honorent et recommandent sa mémoire. C'est à l'Institut surtout qu'il appartient de dire que les méditations auxquelles M. Laurent a consacré ses veilles ont contribué aux progrès de la Science, et vous n'avez pas oublié, Messieurs, qu'après le décès de l'illustre Jacobi, l'Académie elle-même voulut inscrire le nom de M. Laurent sur la liste des candidats pour la place de Correspondant de l'Institut. Nous croyons, avec M. le Maréchal, que tant d'honorables souvenirs, tant d'éminents services doivent, après la mort de M. Laurent, protéger encore sa famille, dont il était l'unique appui; nous croyons qu'ils seront, pour les Membres de l'Académie, un puissant motif d'appeler sur la veuve et les enfants de M. Laurent le bienveillant intérêt de M. le Ministre de l'Instruction publique.

556.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les variations intégrales des fonctions.*

C. R., T. XL, p. 651 (26 mars 1855).

§ I. — *Formules générales.*

Soit z une quantité géométrique variable qui représente l'affixe d'un point mobile P, et Z une fonction de z qui ne cesse d'être monodrome et monogène que dans le voisinage de certaines valeurs

$$c, \quad c', \quad c'', \quad \ldots$$

de z, propres à représenter les affixes de certains points singuliers

$$C, \quad C', \quad C'', \quad \ldots.$$

Concevons d'ailleurs que, dans le plan des affixes, on joigne un certain point $P_{\prime}$ dont l'affixe est $z_{\prime}$ à un autre point $P_{\prime\prime}$ dont l'affixe est $z_{\prime\prime}$, par une courbe continue $P_{\prime}P_{\prime\prime}$ qui ne renferme aucun des points C, C′, C″, ... Enfin soit $Z_{\prime}$ la valeur ou l'une des valeurs de Z pour $z = z_{\prime}$, et $Z_{\prime\prime}$ ce que devient, dans le passage du point $P_{\prime}$ au point $P_{\prime\prime}$, la fonction Z quand on l'assujettit à varier avec z par degrés insensibles. La différence

$$Z_{\prime\prime} - Z_{\prime}$$

sera nommée la *variation intégrale* de Z, correspondante à l'arc de courbe $P_{\prime}P_{\prime\prime}$ que décrit le point mobile P en passant de la position $P_{\prime}$ à la position $P_{\prime\prime}$. Si le point mobile revenait de la position $P_{\prime\prime}$ à la position $P_{\prime}$, ou, ce qui revient au même, s'il décrivait la même courbe en sens contraire, alors à l'arc $P_{\prime\prime}P_{\prime}$, dont le point $P_{\prime\prime}$ serait l'origine, correspondrait une variation intégrale de Z représentée non plus par la différence $Z_{\prime\prime} - Z_{\prime}$, mais par la différence

$$Z_{\prime} - Z_{\prime\prime} = -(Z_{\prime\prime} - Z_{\prime}).$$

Concevons maintenant que, la courbe $P_{,}P_{,,}$ étant une courbe fermée, et se réduisant au contour HIKL qui enveloppe, dans le plan des affixes, une certaine aire S, les points $P_{,}$, $P_{,,}$ coïncident tous deux avec un certain point H de ce contour. La variation intégrale de Z relative au contour HIKL sera évidemment nulle, si l'aire S ne renferme aucun point singulier. Dans le cas contraire, cette variation intégrale offrira généralement une valeur distincte de zéro qui pourra dépendre de la position H qu'occupera au moment du départ le point mobile P, de la valeur $Z_{,}$ attribuée en ce moment à la fonction Z, et du sens dans lequel le point P se mouvra en tournant autour de l'aire S. Désignons par le symbole (S) la valeur que prendra cette variation intégrale, quand le point mobile P tournera autour de l'aire S avec un mouvement de rotation direct, en sorte qu'on ait

$$(S) = Z_{,,} - Z_{,}. \tag{1}$$

Si l'on fait varier par degrés insensibles et d'une manière continue la position initiale H du point mobile P, par conséquent l'affixe $z_{,}$ du point H, et avec cette affixe la valeur $Z_{,}$ de Z, la valeur $Z_{,,}$ variera elle-même d'une manière continue, et l'on pourra en dire autant de la valeur (S) qui, en vertu de la formule (1), variera encore par degrés insensibles, à moins qu'elle ne devienne invariable et ne se réduise à une constante fixe.

Joignons maintenant le point H à un autre point K du contour HIKL par une ligne droite ou courbe HK qui partage l'aire S en deux parties S', S''. La variation intégrale que subira la fonction Z, quand le point mobile P décrira la ligne KH, en partant de la position K, sera égale, au signe près, mais opposée de signe à celle que subira Z, quand le point P reviendra en K, en décrivant la même ligne dans un sens contraire; et par suite, la variation intégrale (S) que subira Z, quand le point mobile P décrira, en partant de la position H, le contour HIKL, sera la somme de deux variations analogues (S'), (S'') que subira Z, quand le point mobile P décrira successivement avec un mouvement de rotation direct les deux contours

HIKH, HKLH

qui enveloppent le premier l'aire S', le second l'aire S'', en sorte qu'on aura non seulement

$$S = S' + S'', \tag{2}$$

mais encore

$$(S) = (S') + (S''). \tag{3}$$

Observons d'ailleurs que, dans la variation intégrale (S'') réduite à la forme qu'indique l'équation (1), celle des valeurs particulières de Z qui sera précédée du signe — restera généralement distincte de la valeur $Z_{,}$ précédée de ce signe dans la variation intégrale (S) déterminée par la formule (1) et dans la variation intégrale (S').

Concevons à présent que Z se réduise à une fonction toujours monodrome et monogène de la variable z. Alors on aura constamment, et quel que soit le contour de l'aire S,

$$(S) = 0. \tag{4}$$

Mais la variation intégrale (S) pourra cesser de s'évanouir, si à la fonction Z on substitue son logarithme népérien représenté, quand il varie avec Z d'une manière continue, par la notation $\bar{l}Z$. Admettons cette substitution. La variation intégrale (S) de la fonction $\bar{l}Z$, correspondante à un contour fermé qui enveloppera de toutes parts une certaine aire S, deviendra indépendante de la position initiale du point mobile que décrira ce contour avec un mouvement de rotation direct, et de la valeur attribuée, au premier instant, à $\bar{l}Z$, et dépendra uniquement du nombre et de la nature des points singuliers C, C', C'', ... situés à l'intérieur de l'aire S. C'est, en effet, ce que l'on démontrera sans peine à l'aide des considérations suivantes.

Les affixes $c, c', c'', \ldots$ des points singuliers C, C', C'', ... seront, dans le cas présent, les valeurs de z, pour lesquelles la fonction $\bar{l}Z$

deviendra infinie, par conséquent celles qui vérifieront l'une des formules

$$Z = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{Z} = 0. \tag{6}$$

Si l'aire S ne renferme aucun de ces points singuliers, la variation intégrale (S) sera nulle, et l'on aura encore

$$(S) = 0. \tag{7}$$

Dans le cas contraire, (S) ne pourra être que la différence des deux valeurs de $\mathrm{l}Z$ correspondantes à une même valeur de Z, par conséquent un des logarithmes népériens de l'unité. On aura donc

$$(S) = 2\pi k i, \tag{8}$$

k désignant une quantité entière, positive ou négative. D'ailleurs, tandis que l'on fera varier, par degrés insensibles, la position initiale H du point mobile P, par conséquent l'affixe $z_{,}$ du point H, et avec elle la valeur initiale $\mathrm{l}Z_{,}$ de $\mathrm{l}Z$, la variation intégrale (S) devra ou se réduire à une constante fixe ou varier par degrés insensibles. On pourra donc en dire autant de la quantité entière désignée par k; et, puisqu'une quantité entière ne peut varier par degrés insensibles, k devra se réduire à une constante fixe indépendante de la position initiale du point P. De plus, comme deux valeurs de $\mathrm{l}Z$ qui correspondent à une même valeur de Z se déduisent toujours l'une de l'autre par l'addition d'un terme constant, elles croîtront simultanément de quantités égales, et par suite leurs variations intégrales seront les mêmes. Donc la valeur de (S), et par suite celle de k, sera encore indépendante de la valeur attribuée à $\mathrm{l}Z_{,}$ pour une position donnée du point H. Donc, enfin, (S) dépendra uniquement de la forme générale attribuée à la fonction monodrome et monogène Z, et de la forme assignée au contour HIKL de l'aire S.

Ce n'est pas tout : si l'on partage l'aire S en deux parties S', S'', la variation intégrale (S) se trouvera, en vertu de la formule (3), partagée en deux variations correspondantes (S'), (S''); et comme on pourra, de la même manière, partager (S') ou (S'') en deux parties, puis chacune de ces parties en variations nouvelles, et ainsi de suite indéfiniment, il est clair que le partage de l'aire S en éléments a, b, c, ... entraînera le partage de la variation intégrale (S) en variations correspondantes. En d'autres termes, la formule

$$S = a + b + c + \ldots \tag{9}$$

entraînera la formule

$$(S) = (a) + (b) + (c) + \ldots, \tag{10}$$

les aires élémentaires étant choisies de telle sorte que jamais le contour de l'une d'elles ne passe par l'un des points singuliers C, C', C'', ... D'ailleurs, ces aires peuvent devenir assez petites pour que chacune d'elles renferme un seul de ces points, ou n'en renferme aucun. Soient, dans cette hypothèse, s, s', s'', ... les aires élémentaires qui renferment respectivement les points C, C', C'', ... On verra s'évanouir, dans le second membre de la formule (10), les variations intégrales distinctes de (s), (s'), (s''), ..., et cette formule donnera simplement

$$(S) = (s) + (s') + (s'') + \ldots. \tag{11}$$

On pourra même, dans la formule (11), supposer les aires s, s', s'', ... réduites à celles de très petits cercles qui auraient pour centres les points C, C', C'', ... Or, cette supposition étant admise, et c étant l'affixe du point C, Z sera de la forme

$$Z = (z - c)^h u, \tag{12}$$

u étant une fonction de z qui, avec son logarithme népérien, restera monodrome et monogène dans l'intérieur de l'aire s, et h étant une quantité entière qui sera positive si c est racine de l'équation (5).

négative si c est racine de l'équation (6). D'ailleurs on tirera de la formule (12)

$$\overline{l}Z = h\,\overline{l}(z-c) + \overline{l}u, \tag{13}$$

et comme la variation intégrale de $\overline{l}u$ sera évidemment nulle, celle de $\overline{l}Z$ se réduira au produit de l'exposant h par la variation intégrale de $\overline{l}(z-c)$. Mais on aura

$$\overline{l}(z-c) = lr + p\mathrm{i},$$

r étant le module et p un argument de $z-c$; et comme la variation intégrale de l'angle polaire p sera la circonférence 2π, celle de $\overline{l}(z-c)$ sera $2\pi\mathrm{i}$. On aura donc

$$(\mathrm{S}) = 2\pi h\mathrm{i}. \tag{14}$$

En nommant h' ou h'', ... ce que deviendra h quand on passera du point C au point C′ ou C″, ..., on obtiendra des formules semblables à l'équation (14), en vertu desquelles les valeurs de (s′), (s″), ... seront précisément les produits $2\pi h'\mathrm{i}$, $2\pi h''\mathrm{i}$, ... Cela posé, la formule (11) donnera

$$(\mathrm{S}) = 2\pi(h + h' + h'' + \ldots)\mathrm{i}, \tag{15}$$

et de cette dernière comparée à la formule (8) on tirera

$$k = h + h' + h'' + \ldots. \tag{16}$$

Si, pour tous les points renfermés dans l'aire S, la fonction Z est non seulement monodrome et monogène, mais encore finie, les racines c, c', c'', ... appartiendront toutes à l'équation (5); par suite, les exposants h, h', h'', ... seront tous positifs; et comme h désignera le nombre des racines égales à c, h' le nombre des racines égales à c', ..., la somme

$$h + h' + h'' + \ldots = k$$

exprimera le nombre total des racines égales ou inégales de l'équation (5), propres à représenter les affixes de points situés à l'inté-

rieur de l'aire S. D'ailleurs on tirera de la formule (8)

$$k = \frac{(\mathrm{S})}{2\pi\mathrm{i}}, \tag{17}$$

et $2\pi\mathrm{i}$ est précisément la variation intégrale de $\overline{l}z$ correspondante à un mouvement direct de rotation du point mobile P autour d'un cercle qui aurait pour centre l'origine des affixes. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit z l'affixe variable d'un point mobile* P; *soit encore Z une fonction de z qui reste monodrome, monogène et finie dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur d'une certaine aire* S *ou sur le contour de cette aire, et qui ne s'évanouisse en aucun point de ce contour. Pour obtenir le nombre de celles des racines égales ou inégales de l'équation*

$$Z = 0,$$

qui seront les affixes de points situés à l'intérieur de l'aire S, *il suffira de faire décrire au point mobile* P : 1° *le contour de l'aire* S; 2° *la circonférence d'un cercle qui aura pour centre l'origine des affixes; et de chercher le rapport des variations intégrales que subiront, dans le premier cas, le logarithme $\overline{l}Z$ de la fonction Z, dans le second cas le logarithme $\overline{l}z$ de la variable z.*

Il est bon d'observer que le théorème précédent continue de subsister quand on fait correspondre chaque variation intégrale, non plus à un mouvement de rotation direct, mais à un mouvement de rotation rétrograde du point mobile P autour de l'aire S ou du cercle qui a pour centre l'origine des affixes. Ajoutons que, si, s étant la surface du cercle qui a pour centre l'origine, on désigne les deux variations intégrales par les deux notations

$$\Delta_{\mathrm{S}}\overline{l}Z, \quad \Delta_{\mathrm{s}}\overline{l}z,$$

la formule (17) deviendra

$$k = \frac{\Delta_{\mathrm{S}}\overline{l}Z}{\Delta_{\mathrm{s}}\overline{l}z}. \tag{18}$$

Lorsque la fonction Z devient infinie pour des points situés à l'intérieur de l'aire S, alors le premier théorème doit être évidemment remplacé par la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit z l'affixe variable d'un point mobile* P; *soit encore Z une fonction de z, qui reste monodrome et monogène, dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur d'une certaine aire* S *ou sur le contour de cette aire, et ne devienne ni nulle ni infinie pour aucun point de ce contour. Si l'on fait mouvoir un point mobile : 1° sur le contour de l'aire* S; *2° sur la circonférence d'un cercle qui ait pour centre l'origine des affixes, le rapport entre les variations intégrales que subiront, dans le premier cas le logarithme népérien $\bar{\mathrm{l}}Z$ de la fonction Z, dans le second cas le logarithme népérien $\bar{\mathrm{l}}z$ de la variable z, sera la différence entre le nombre des racines de l'équation* (5) *et le nombre des racines de l'équation* (6) *quand on tiendra compte seulement de celles d'entre ces racines qui sont propres à représenter les affixes de points situés à l'intérieur de l'aire* S.

§ II. — *Application des principes établis dans le premier paragraphe aux équations algébriques.*

Soient z une quantité géométrique, r le module de z et

$$Z = az^n + bz^{n-1} + \ldots + gz + h \tag{1}$$

une fonction entière de z, du degré n. Pour des valeurs croissantes de r, le rapport

$$\frac{Z}{z^n} = a + bz^{-1} + cz^{-2} + \ldots + hz^{-n} \tag{2}$$

convergera vers la limite a, et ne pourra s'évanouir si l'on suppose $r > R$, R étant assez considérable pour que, dans le second membre de la formule (2), le module du premier terme surpasse, pour $r > R$, la somme des modules des termes suivants. Cette condition étant supposée remplie, nommons S l'aire du cercle qui a pour rayon R, et

posons

$$\frac{Z}{z^n} = u.$$

Quand on fera décrire au point mobile P le contour de l'aire S, la variation intégrale du logarithme de u sera nulle, et celle du logarithme

$$\bar{\mathrm{l}}Z = n\,\bar{\mathrm{l}}z + \bar{\mathrm{l}}u$$

se réduira au produit de n par la variation intégrale de $\bar{\mathrm{l}}z$. Donc le rapport des variations intégrales des logarithmes $\bar{\mathrm{l}}Z$ et $\bar{\mathrm{l}}z$ se réduira au nombre n, et, en vertu du théorème I du § I, n sera précisément le nombre des racines égales ou inégales de l'équation

$$Z = 0. \tag{3}$$

Ainsi les principes établis dans le § I fournissent une démonstration très simple et très directe de la proposition fondamentale, suivant laquelle *toute équation algébrique du degré n admet n racines algébriques ou géométriques, égales ou inégales.*

Ajoutons que, du théorème I (§ I), joint à la formule (7) de la page 223, on déduira immédiatement le théorème général que j'ai donné en 1831 sur le nombre des racines d'une équation qui satisfont à des conditions données, avec des théorèmes particuliers et relatifs aux racines réelles, établis par moi-même en 1813, ou par M. Sturm en 1829.

557.

Analyse mathématique. — *Sur les variations intégrales des fonctions* (suite).

C. R., T. XL, p. 713 (2 avril 1855).

Quelques-unes des formules établies dans le précédent article sont évidemment applicables, non seulement aux fonctions qui sont à la fois monodromes et monogènes, mais encore à celles qui sont monodromes sans être monogènes. Telles sont, en particulier, les formules (10) et (11) de la page 263. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Soit z l'affixe variable d'un point mobile; nommons Z une fonction de z qui reste monodrome dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur d'une certaine aire* S *ou sur le contour de cette aire, et ne devienne ni nulle ni infinie pour aucun point de ce contour. Soient d'ailleurs*

$$C,\quad C',\quad C'',\quad \ldots$$

ceux des points de l'aire S *qui ont pour affixes des racines de l'une des équations*

$$(1)\qquad Z=0,$$

$$(2)\qquad \frac{1}{Z}=0,$$

et représentons par

$$s,\quad s',\quad s'',\quad \ldots$$

des éléments de l'aire S, *dont chacun renferme un seul des points singuliers*

$$C,\quad C',\quad C'',\quad \ldots.$$

Enfin soient

$$(3)\qquad (S)=\Delta\,\mathrm{l}\,Z$$

la variation intégrale de $\mathrm{l}Z$, *dans le cas où le point mobile dont* z *est l'affixe décrit le contour entier de l'aire* S, *et*

$$(s),\quad (s'),\quad (s''),\quad \ldots$$

ce que devient (S), *quand à l'aire* S *on substitue les aires* s, s′, s″, ... *On aura*

$$(4)\qquad (S)=(s)+(s')+(s'')+\ldots.$$

On peut généralement, à l'aide de la formule (4), calculer avec facilité la variation intégrale (S) en réduisant les aires élémentaires (s), (s′), (s″), ... à celles de très petits cercles qui aient pour centres

les points C, C′, C″, ... Alors, si la fonction Z est monogène, et si le point mobile tourne autour de l'aire S avec un mouvement de rotation direct, on trouvera

$$(5)\qquad (s)=2\pi h i,$$

h étant le nombre des racines égales à c, prises avec le signe + ou avec le signe −, suivant que ces racines appartiennent à l'équation (1) ou à l'équation (2). Si l'on pose, pour abréger,

$$(6)\qquad \mathrm{I}=2\pi i,$$

c'est-à-dire si l'on représente par I la variation intégrale

$$\Delta\,\mathrm{l}\,z$$

correspondante à l'aire d'un très petit cercle dont le centre serait le pôle même, on aura simplement

$$(7)\qquad (s)=h\mathrm{I}.$$

Concevons maintenant que la fonction Z cesse d'être monogène, mais reste monodrome. L'équation (4) continuera de subsister; et l'on pourra encore déterminer les variations intégrales (s), (s′), (s″), ... en opérant comme on va le dire.

Soit ρ le rayon du cercle infiniment petit qui a pour centre le point C. L'affixe variable z du point mobile, assujetti à parcourir la circonférence de ce cercle, sera de la forme

$$z=c+\rho_{\varpi},$$

et la valeur correspondante de Z sera de la forme

$$(8)\qquad Z=\mathrm{R}_{\mathrm{P}},$$

P étant une fonction de ϖ, qui, pour une valeur nulle de ρ, vérifiera généralement une équation de la forme

$$(9)\qquad \Delta\mathrm{P}=h\,\Delta\varpi,$$

h étant une quantité entière positive, nulle ou négative. Cela posé, on tirera de l'équation (8)

(10) $$(s) = i\,\Delta P,$$

et, eu égard à la formule (9),

(11) $$(s) = hI.$$

Si l'on suppose

$$z = x + yi, \qquad Z = X + Yi,$$

x, y, X, Y étant réels, et si d'ailleurs la fonction

$$U = D_x X D_y Y - D_y X D_x Y$$

ne se réduit pas à zéro, on aura généralement

(12) $$h = \pm 1,$$

le double signe devant être réduit au signe + ou au signe −, suivant que U sera positif ou négatif.

Nous montrerons, dans un prochain article, comment les principes que nous venons d'exposer peuvent être appliqués à la détermination du nombre des systèmes de valeurs de x, y propres à vérifier deux équations simultanées

$$X = 0, \qquad Y = 0.$$

558.

Analyse mathématique. — *Sur les variations intégrales des fonctions* (suite).

C. R., T. XL, p. 804 (9 avril 1855).

J'ai, dans les précédentes séances, en considérant les variations intégrales des logarithmes des fonctions, établi divers théorèmes qui s'appliquent avec avantage à la résolution des équations algébriques ou transcendantes; mais à ces théorèmes on peut joindre encore un

grand nombre de propositions qui paraissent dignes d'être remarquées. Je me bornerai à en indiquer ici quelques-unes.

Théorème I. — *Soit z l'affixe d'un point mobile; soient encore u et v deux fonctions de z, dont chacune reste monodrome dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur d'une certaine aire S, ou sur le contour de cette aire, et ne devienne ni nulle ni infinie pour aucun point de ce contour. Enfin désignons à l'aide de la notation*

$$\Delta \bar{1} Z$$

la variation intégrale que subit le logarithme d'une fonction Z de z, tandis que le point mobile dont l'affixe est z décrit, avec un mouvement direct, le contour entier de l'aire S. Si, en chaque point de ce contour, le rapport $\frac{v}{u}$ offre un module inférieur à l'unité, on aura

(1) $$\Delta \bar{1}(u + v) = \Delta \bar{1} u.$$

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, la différence

$$\Delta \bar{1}\left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

entre le premier et le second membre de la formule (1) sera nulle, attendu que l'argument principal de la somme $1 + \frac{v}{u}$ ne pourra devenir égal à $\pm\pi$.

Corollaire. — Soient

$$z = r_p$$

et z_0 une valeur particulière de z. Posons d'ailleurs, pour abréger, $I = 2\pi i$; on aura, en vertu de la formule (1),

(2) $$\Delta \bar{1}(z - z_0) = I,$$

si, en chaque point du contour de l'aire S, le module r de z surpasse constamment le module r_0 de z_0; et

(3) $$\Delta \bar{1}(z - z_0) = 0,$$

si, en chaque point du contour de l'aire S, le module r est constamment inférieur au module r_0 de z_0. Au reste, les formules (2) et (3) pourraient encore se déduire du théorème I de la page 265.

On déduit immédiatement du théorème I la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Soit z l'affixe d'un point mobile. Nommons Z une fonction de z qui s'évanouisse pour $z = c$, et reste monodrome dans le voisinage de la valeur c attribuée à la variable z. Soient d'ailleurs* s *l'aire et ρ le rayon d'un très petit cercle qui renferme le point* C, *dont l'affixe est c; calculons, pour*

$$z = c + \rho_{\varpi},$$

les valeurs des divers termes de la suite

$$Z, \quad \mathrm{D}_\rho Z, \quad \mathrm{D}_\rho^2 Z, \quad \ldots;$$

et soit, parmi ces termes,

$$\mathrm{D}_\rho^n Z$$

le premier de ceux qui ne s'évanouissent pas quand on pose $\rho = 0$. Enfin, représentons par P la valeur du produit

$$e^{n\varpi \mathrm{i}}\,\mathrm{D}_\rho^n Z$$

correspondante à une valeur nulle de ρ. Si, en résolvant par rapport à la clef

$$\omega = 1_{\varpi} = e^{\varpi \mathrm{i}},$$

l'équation

$$P = 0, \tag{4}$$

qui sera généralement du degré $2n$ en ω, on obtient pour valeurs de ω des quantités géométriques dont les modules soient tous distincts de l'unité, on aura, en nommant m le nombre de ceux qui surpasseront l'unité, et (s) *la variation intégrale de* $\mathrm{l}Z$ *correspondante au contour entier de l'aire* s,

$$(\mathrm{s}) = (n - m)\mathrm{I}. \tag{5}$$

Corollaire. — Si l'on a $n = 1$, et si d'ailleurs on pose

$$z = x + y\mathrm{i}, \qquad Z = X + Y\mathrm{i},$$

m, y, X, Y étant réels, on trouvera

$$P = e^{\varpi \mathrm{i}}(\mathrm{D}_x Z \cos\varpi + \mathrm{i}\,\mathrm{D}_y Z \sin\varpi) = \omega^2(\mathrm{D}_x Z - \mathrm{i}\,\mathrm{D}_y Z) + \mathrm{D}_x Z + \mathrm{i}\,\mathrm{D}_y Z.$$

Donc alors l'équation (4), réduite à

$$\omega^2 + \frac{\mathrm{D}_x Z + \mathrm{i}\,\mathrm{D}_y Z}{\mathrm{D}_x Z - \mathrm{i}\,\mathrm{D}_y Z} = 0,$$

offrira deux racines dont le module commun aura pour carré le module du rapport

$$\frac{\mathrm{D}_x Z + \mathrm{i}\,\mathrm{D}_y Z}{\mathrm{D}_x Z - \mathrm{i}\,\mathrm{D}_y Z} = \frac{\mathrm{D}_x X - \mathrm{D}_y Y + \mathrm{i}(\mathrm{D}_y X + \mathrm{D}_x Y)}{\mathrm{D}_x X + \mathrm{D}_y Y - \mathrm{i}(\mathrm{D}_y X - \mathrm{D}_x Y)},$$

et pour quatrième puissance le rapport

$$\frac{(\mathrm{D}_x X - \mathrm{D}_y Y)^2 + (\mathrm{D}_y X + \mathrm{D}_x Y)^2}{(\mathrm{D}_x X + \mathrm{D}_y Y)^2 + (\mathrm{D}_y X - \mathrm{D}_x Y)^2},$$

qui est inférieur ou supérieur à l'unité, suivant que la différence

$$\mathrm{D}_x X\,\mathrm{D}_y Y - \mathrm{D}_y X\,\mathrm{D}_x Y$$

est positive ou négative. Par suite on aura, en vertu de la formule (5), dans le premier cas, $m = 0$,

$$(\mathrm{s}) = \mathrm{I}; \tag{6}$$

dans le second cas, $m = 2$,

$$(\mathrm{s}) = -\mathrm{I}. \tag{7}$$

On sera donc ainsi ramené aux formules (11) et (12) de la page 270.

On déduit encore aisément du théorème I la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Soit*

$$\mathrm{f}(Z, z) \tag{8}$$

une fonction des deux variables Z, z, qui reste, par rapport à chacune d'elles, non seulement monodrome, mais aussi monogène dans le voisinage des valeurs particulières et finies

$$z = c, \qquad Z = C,$$

simultanément attribuées à ces variables. Supposons d'ailleurs que, pour ces mêmes valeurs, on ait

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{D}_Z \mathrm{f}(Z, z) = K,$$

K désignant une constante finie. Si cette constante n'est pas nulle, alors, pour des valeurs infiniment petites de $z - c$, l'équation

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{f}(Z, z) - \mathrm{f}(C, c) = 0$$

fournira une valeur de Z très voisine de C, qui sera une fonction monodrome et monogène de la variable z.

Démonstration. — Posons

$$u = \mathrm{f}(Z, z) - \mathrm{f}(C, z), \qquad v = \mathrm{f}(C, z) - \mathrm{f}(C, c),$$

ce qui permet de présenter l'équation (10) sous la forme

$$u + v = 0.$$

En considérant la différence $z - c$ comme une quantité infiniment petite du premier ordre, on obtiendra pour v une autre quantité infiniment petite dont l'ordre sera un nombre entier. Soit n cet ordre; tandis que $z - c$ convergera vers zéro, le rapport $\frac{v}{(z-c)^n}$ convergera vers une limite finie k distincte de zéro, et si l'on pose, pour abréger,

$$z - c = \rho_\varpi, \qquad Z - C = R_P,$$

$$\frac{v}{(z-c)^n} = \tau_p, \qquad \frac{u}{Z - C} = \mathcal{R}_{\mathfrak{P}},$$

alors, pour des valeurs infiniment petites des différences

$$z - c, \qquad Z - C,$$

τ se réduira sensiblement au module de k et $\mathcal{R}$ au module de K; par conséquent le module de $\frac{v}{u}$ se réduira à un produit de la forme

$$\text{(11)} \qquad \frac{\theta \rho^n}{R},$$

θ étant une constante positive sensiblement égale au module $\varkappa$ du

rapport $\frac{k}{K}$. Cela posé, concevons que l'on attribue à z une valeur très voisine de c, par conséquent une valeur à laquelle corresponde une très petite valeur du module ρ, et qu'en prenant pour centre le point dont l'affixe est C on décrive autour de ce point un très petit cercle dont le rayon R soit au produit $\varkappa\rho^n$ dans un rapport supérieur à l'unité, par exemple dans le rapport de 2 à 1; enfin nommons s l'aire de ce même cercle. Pour de très petites valeurs de ρ, le rapport (11), c'est-à-dire le module de $\frac{v}{u}$, sera sensiblement égal au rapport

$$\frac{\varkappa\rho^n}{R} = \frac{1}{2};$$

il sera donc inférieur à l'unité, et par suite, en supposant les variations intégrales relatives au contour de l'aire s, on aura (théorème I)

$$\text{(12)} \qquad \Delta \bar{\mathrm{l}}(u + v) = \Delta \bar{\mathrm{l}} u.$$

Mais, d'autre part, la valeur de u étant

$$u = (Z - C)\mathcal{R}_{\mathfrak{P}},$$

et le module $\mathcal{R}$ étant sensiblement égal au module de K qui, par hypothèse, diffère de zéro, on aura

$$\Delta \mathrm{l} \mathcal{R}_{\mathfrak{P}} = 0,$$

$$\Delta \bar{\mathrm{l}} u = \Delta \bar{\mathrm{l}}(Z - C) = \mathrm{I}.$$

Donc la formule (12) donnera

$$\text{(13)} \qquad \Delta \bar{\mathrm{l}}(u + v) = \mathrm{I},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(14)} \qquad \Delta \bar{\mathrm{l}}[\mathrm{f}(Z, z) - \mathrm{f}(C, c)] = \mathrm{I}.$$

Donc, eu égard au théorème I de la page 265, l'équation (10), résolue par rapport à Z, offrira, pour une valeur infiniment petite de $z - c$, une racine très voisine de C, et n'en offrira qu'une de cette espèce.

De plus, en vertu de la formule

$$R = 2\varkappa\rho^{n}, \tag{15}$$

R sera infiniment petit en même temps que ρ; pareillement, si z, $z_{,}$ sont très voisins de c, et Z, $Z_{,}$ de C, $Z_{,} - Z$ sera infiniment petit en même temps que $z_{,} - z$. Donc la racine Z de l'équation (10) sera, dans le voisinage de $z = c$, une fonction monodrome de z. Enfin, $f(Z, z)$ étant par hypothèse une fonction non seulement monodrome, mais aussi monogène des variables z, Z, et la dérivée $D_Z f(Z, z)$ se réduisant, pour les valeurs $z = c$, $Z = C$ de ces variables, à une constante finie K différente de zéro, la valeur de $D_z Z$, tirée de la formule (10), savoir

$$D_z Z = -\frac{D_z f(Z, z)}{D_Z f(Z, z)}, \tag{16}$$

sera elle-même, quand z différera très peu de c, et Z de C, une fonction monodrome de z. Donc, en définitive, et sous les conditions énoncées dans le théorème III, l'équation (10) fournira une valeur de Z, très voisine de C, qui sera une fonction monodrome et monogène de la variable z.

Corollaire. — Si les valeurs particulières c, C, attribuées aux variables z, Z, vérifient l'équation

$$f(Z, z) = 0,$$

la formule (10) sera réduite à cette équation même. Cela posé, le théorème I entraîne évidemment la proposition suivante :

Théorème IV. — *Si $f(Z, z)$ est une fonction toujours monodrome et monogène des variables z, Z, la valeur de Z tirée de l'équation*

$$f(Z, z) = 0, \tag{17}$$

et correspondante à une valeur de z, qui, en demeurant finie, varierait par degrés insensibles, ne pourra cesser d'être une fonction monodrome

et monogène de z qu'au moment où se vérifiera l'une des conditions

$$Z = \frac{1}{0}, \tag{18}$$

$$D_Z f(Z, z) = 0, \tag{19}$$

$$D_Z f(Z, z) = \frac{1}{0}. \tag{20}$$

Alors aussi la valeur de z, tirée de l'équation (17), *et correspondante à une valeur de Z qui, en demeurant finie, varierait par degrés insensibles, ne pourra cesser d'être une fonction monodrome et monogène de Z qu'au moment où se vérifiera l'une des conditions*

$$z = \frac{1}{0}, \tag{21}$$

$$D_z f(Z, z) = 0, \tag{22}$$

$$D_z f(Z, z) = \frac{1}{0}. \tag{23}$$

Corollaire. — Lorsqu'une fonction Z de z se réduit pour $z = c$ à une constante finie C, et reste monodrome et monogène pour des valeurs de z voisines de c, elle est, pour ces mêmes valeurs, développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de $z - c$, en sorte qu'on a

$$Z - C = a(z - c) + b(z - c)^2 + \ldots \tag{24}$$

ou, ce qui revient au même,

$$Z - C - a(z - c) - b(z - c)^2 - \ldots = 0. \tag{25}$$

Or, si l'on réduit la fonction $f(Z, z)$ au premier membre de la formule (5), alors des conditions (21), (22), (23) la seconde sera la seule que l'on puisse vérifier en posant $z = c$, $Z = C$, et même, pour qu'elle se vérifie alors, il sera nécessaire que la constante a s'évanouisse, ou, en d'autres termes, que, $z - c$ étant une quantité infiniment petite du premier ordre, $Z - C$ soit une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur. Cela posé, le théorème II entraînera évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *Si une fonction Z de z se réduit pour $z = c$ à une constante finie C, et reste monodrome et monogène pour des valeurs de z voisines de c, réciproquement z considéré comme fonction de Z, et assujetti à prendre pour $Z = C$ la valeur finie c, sera, pour des valeurs de Z voisines de c, monodrome et monogène, pourvu que, $z - c$ étant un infiniment petit du premier ordre, $Z - C$ soit encore un infiniment petit de cet ordre.*

Lorsque dans l'équation (24) la constante finie C diffère de zéro, on peut développer en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $z - c$, non seulement la fonction Z, mais aussi la fonction $\frac{1}{Z}$ et par suite l'intégrale

$$\int_c^z \frac{dz}{Z}.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — *Lorsqu'une fonction Z de z se réduit pour $z = c$ à une constante finie distincte de zéro, et reste monodrome et monogène pour des valeurs de z voisines de c, l'intégrale*

$$(26) \qquad \int_c^z \frac{dz}{Z}$$

est elle-même, pour des valeurs de z voisines de c, une fonction monodrome et monogène de z.

Supposons maintenant la variable z liée à la variable t par une équation de la forme

$$(27) \qquad D_t z = Z,$$

Z étant une fonction implicite de z déterminée par la formule (17). Si, τ étant une valeur particulière et finie de t, on nomme c la valeur

correspondante de l'intégrale z de l'équation (27), on aura

$$\int_c^z \frac{dz}{Z} = t - \tau.$$

Cela posé, on déduira immédiatement des théorèmes IV et VI la proposition suivante :

THÉORÈME VII. — *Si, $f(Z, z)$ étant une fonction toujours monodrome et monogène des variables z, Z, on suppose Z lié à z par la formule*

$$(17) \qquad f(Z, z) = 0,$$

l'intégrale z de l'équation différentielle

$$(27) \qquad D_t z = Z$$

ne pourra cesser d'être une fonction monodrome et monogène de t qu'au moment où l'on aura

$$(28) \qquad z = \frac{1}{0},$$

ou bien encore au moment où, des deux fonctions

$$(29) \qquad Z, \quad D_Z f(Z, z),$$

l'une acquerra soit une valeur nulle, soit une valeur infinie.

Corollaire I. — Si $f(Z, z)$ est une fonction entière de z et de Z, alors, en nommant m le degré de la plus haute puissance de z dans $f(Z, z)$, on aura

$$(30) \qquad f(Z, z) = PZ^m + QZ^{m-1} + \ldots + UZ^2 + VZ + W,$$

$P, Q, \ldots, U, V, W$ étant des fonctions entières de la seule variable z. Alors aussi la dérivée $D_Z f(Z, z)$ étant elle-même une fonction entière des variables z, Z ne pourra devenir infinie que pour des valeurs infinies de ces variables ou de l'une d'entre elles; enfin la valeur de Z fournie par l'équation

$$f(Z, z) = 0$$

ne pourra devenir infinie, si z reste finie, qu'au moment où le coefficient P s'évanouira; et, quand Z sera nul, on aura nécessairement $W=0$. Donc alors l'intégrale Z de l'équation (27) ne pourra cesser d'être une fonction monodrome et monogène de t qu'au moment où cette intégrale vérifiera l'une des trois conditions

$$z=\frac{1}{0}, \tag{28}$$

$$P=0, \tag{31}$$

$$W=0, \tag{32}$$

ou bien encore la condition fournie par le système des deux équations

$$f(Z,z)=0, \qquad D_Z f(Z,z)=0. \tag{33}$$

Remarquons d'ailleurs que le cas où le premier membre $f(Z,z)$ de l'équation (17) serait une fonction rationnelle des variables Z, z peut toujours être ramené au cas où ce premier membre est une fonction entière, puisqu'on peut toujours passer du second cas au premier en faisant disparaître les dénominateurs.

Corollaire II. — Lorsque le coefficient P est indépendant de la variable z, on peut le supposer réduit à l'unité, et il n'est plus possible de satisfaire à la formule (31); il en serait encore de même si les coefficients

$$Q, \ \ldots, \ U, \ V, \ W$$

étaient tous divisibles algébriquement par P. Dans le cas contraire, Z deviendra infini pour des valeurs finies de z pour lesquelles on aura $P=0$. Soit c l'une de ces valeurs. Quand $z-c$ deviendra infiniment petit, Z devenu infiniment grand se réduira au produit d'un facteur fini, mais distinct de zéro, par une expression de la forme

$$(z-c)^{\mu},$$

l'exposant μ étant négatif. Donc cet exposant ne sera point de l'une des formes

$$1-\frac{1}{n}, \quad 1, \quad 1+\frac{1}{n},$$

qu'il devrait revêtir (n étant entier), pour que la fonction z de t ne

cessât pas d'être monodrome et monogène. Donc, si l'intégrale z de l'équation (27) ne cesse jamais d'être monodrome et monogène, le coefficient P de Z^m dans l'équation (17) pourra être supposé réduit à l'unité, et cette équation même a la forme

$$Z^m+QZ^{m-1}+\ldots+UZ^2+VZ+W=0, \tag{34}$$

$Q, \ldots, U, V, W$ étant des fonctions entières de z.

Il reste à joindre aux formules (28), (32), (33) les conditions qui expriment que l'intégrale z de l'équation (27) ne cesse pas d'être une fonction monodrome et monogène de t, quand on attribue à t une valeur finie voisine de l'une de celles pour lesquelles se vérifie ou l'une des formules (28), (32), ou le système des équations (33). C'est ce que nous ferons dans un prochain article.

559.

Analyse algébrique. — *Sur la transformation des fonctions implicites en fonctions monodromes et monogènes, et sur les développements de ces fonctions en séries convergentes.*

C. R., T. XL, p. 878 (16 avril 1855).

La formule de Lagrange permet de développer sous certaines conditions une fonction implicite d'une variable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable. Mais elle suppose que la valeur de la fonction, correspondante à une valeur nulle de la variable, est la racine simple d'une équation linéaire. Quand, au contraire, cette valeur est une racine multiple d'une équation algébrique ou transcendante, la formule de Lagrange cesse d'être applicable. Toutefois on peut souvent, dans ce cas là même, développer encore la fonction en une série convergente, en suivant la méthode que M. Puiseux a exposée dans ses recherches sur les fonctions algébriques, et qui l'ont conduit à un théorème digne d'être remarqué. D'après ce beau théorème, *si, en égalant à zéro une fonction monodrome et monogène de z et Z, on obtient une équation qui, résolue par rapport à Z, offre, pour une certaine valeur c de z, n racines égales entre elles, chacune de ces racines pourra être développée suivant les puissances ascendantes d'une nouvelle variable dont une puissance entière sera précisément égale à $z - c$.* La méthode suivie par M. Puiseux fournit successivement les divers termes dont se composent les développements des racines, et embrasse, en raison de cette circonstance même, une série d'opérations dont le système, soumis à une discussion lumineuse, amène définitivement le théorème ci-dessus énoncé. Mais la grande utilité de ce théorème et les nombreuses applications qu'on en peut faire étaient un motif de désirer qu'on pût en donner une démonstration rapide et simple. D'autre part, toute fonction d'une variable indépendante qui reste monodrome, monogène et finie, quand on attribue à la variable un module inférieur à une certaine limite, est alors développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable; et, réciproquement, la somme d'une série de ce genre est monodrome et monogène tant qu'elle demeure convergente. Donc, pour démontrer le théorème de M. Puiseux, il suffit d'établir, comme je vais le faire ici, la proposition suivante :

Théorème. — *Soit $\mathrm{f}(Z, z)$ une fonction qui s'évanouisse quand on attribue aux variables z, Z les valeurs particulières c, C, et qui, pour des valeurs voisines, demeure monodrome et monogène. A celles des racines égales de l'équation*

$$\mathrm{f}(Z, c) = 0, \tag{1}$$

qui ont pour valeur commune la constante C, correspondront des racines de l'équation

$$\mathrm{f}(Z, z) = 0, \tag{2}$$

qui, pour une valeur infiniment petite de $z - c$, offriront des valeurs

de Z très voisines de C. Nommons Z_1 l'une de ces racines, et $Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$ celles qui lui sont associées comme termes d'une même substitution circulaire du degré n, en sorte que l'accroissement 2π attribué à l'argument de la variable z transforme Z_1 en Z_2, Z_2 en Z_3, ..., Z_{n-1} en Z_n, et Z_n en Z_1. Si l'on pose

$$z - c = u^n, \tag{3}$$

chacune des racines

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n$$

sera une fonction monodrome et monogène de la variable u, dans le voisinage d'une valeur nulle de cette variable.

Démonstration. — Chacune des racines

$$Z_1, \quad Z_2, \quad Z_3, \quad \ldots, \quad Z_n$$

étant une fonction monodrome et monogène de z, et à plus forte raison de u, dans le voisinage de toute valeur de z très voisine de c, mais distincte de c, par conséquent dans le voisinage d'une valeur de u très voisine de zéro, mais distincte de zéro, il reste seulement à montrer que ces racines sont encore des fonctions monodromes et monogènes de u dans le voisinage d'une valeur nulle de u; et, pour le prouver, il suffit de faire voir que chacune d'elles et sa dérivée relative à z reprennent leurs valeurs primitives, quand l'argument p de u croît de la circonférence 2π. Or effectivement, en vertu de la formule (3), si l'on fait croître n fois de suite l'argument p de la quantité

$$\frac{2\pi}{n},$$

l'accroissement correspondant de $z - c$ sera chaque fois égal à 2π; donc la racine Z_1 sera successivement remplacée par Z_2, puis par $Z_3, \ldots$, puis par Z_n, puis elle reprendra sa valeur primitive, quand l'accroissement définitif et total de p sera le produit de $\frac{2\pi}{n}$ par n, c'est-à-dire 2π. Ajoutons qu'on pourra en dire autant de la dérivée de Z_1, attendu que la dérivée de Z est généralement liée aux variables z, Z par la formule

$$D_z Z = -\frac{D_z f(Z, z)}{D_Z f(Z, z)}, \tag{4}$$

dans laquelle le dénominateur $D_Z f(Z, z)$ diffère de zéro quand on attribue à $z - c$ et à $Z - C$, non plus des valeurs nulles, mais des valeurs infiniment petites.

Si, $z - c$ étant considéré comme infiniment petit du premier ordre, $Z - C$ est un infiniment petit de l'ordre fractionnaire

$$\mu = \frac{l}{m},$$

m étant premier à l, le nombre n sera évidemment égal à m ou à un multiple de m.

A cette remarque on peut joindre encore la suivante :

Si N représente le nombre des racines de l'équation (2) qui, associées les unes aux autres dans une ou plusieurs substitutions circulaires, se réduisent à C pour $z = c$, on pourra toujours réduire ces N racines à des fonctions d'une nouvelle variable u, qui, pour de très petites valeurs de u, restent monodromes et monogènes; et, pour y parvenir, il suffira de poser

$$z - c = u^n, \tag{5}$$

en prenant pour n le produit des entiers inférieurs à N qui seront ou des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers.

Je montrerai, dans un prochain article, comment, en s'appuyant sur les considérations précédentes, on peut résoudre la question posée à la fin du précédent Mémoire (page 281).

560.

Analyse mathématique. — *Sur les compteurs logarithmiques.*

C. R., T. XL, p. 1009 (30 avril 1855).

Tandis que les logarithmes réels des nombres permettent de simplifier notablement les calculs numériques, on peut, dans la haute Analyse, tirer un parti avantageux des logarithmes imaginaires; et pour déterminer, dans une équation algébrique ou même transcendante, le nombre des racines réelles ou imaginaires qui satisfont à certaines conditions, il est très utile de recourir à ce que j'appellerai les *compteurs logarithmiques*. Je me propose ici d'en donner une idée en peu de mots.

Soient

$$z = x + yi \tag{1}$$

l'affixe d'un point mobile P; z', z'' deux valeurs particulières de z, qui représentent les affixes des extrémités M et N d'une certaine ligne droite ou courbe MN décrite par ce point mobile, et s l'arc mesuré sur cette ligne dans le sens du mouvement, à partir d'une origine fixe A; soient enfin s', s'' les valeurs de s correspondantes aux points M et N. Tandis que l'affixe z du point mobile P et les coordonnées rectangulaires x, y liées à z par l'équation (1) varieront, avec l'arc s, par degrés insensibles, le logarithme népérien lz variera lui-même, et ne pourra changer brusquement de valeur qu'à une époque où l'argument principal de z, ayant atteint l'une de ses deux limites π ou $-\pi$, passera de l'une à l'autre; par conséquent, à une époque où, x étant négatif, le rapport $\frac{x}{y}$ changera de signe en passant par l'infini. Cela posé, en considérant le rapport $\frac{x}{y}$ comme fonction de s, nommons K la somme des indices de ce rapport correspondants à des valeurs négatives de x, et indiquons, à l'aide de la lettre caractéristique Δ, placée devant les logarithmes népériens

$$\mathrm{l}z \quad \text{et} \quad \bar{\mathrm{l}}z,$$

dont le second varie avec z par degrés insensibles, les variations intégrales qu'acquièrent ces logarithmes, tandis que le point mobile P décrit la ligne MN. La variation logarithmique $\Delta\bar{\mathrm{l}}z$ sera évidemment liée à la variation

$$\Delta\,\mathrm{l}z = \mathrm{l}z'' - \mathrm{l}z' \tag{2}$$

par la formule

$$\Delta\,\bar{\mathrm{l}}z = \Delta\,\mathrm{l}z + K\mathrm{I}, \tag{3}$$

la valeur de I étant

$$\mathrm{I} = 2\pi\mathrm{i}. \tag{4}$$

De plus, comme, en désignant par c un facteur constant, on aura généralement

$$\Delta\,\bar{\mathrm{l}}(cz) = \Delta\,\bar{\mathrm{l}}z, \tag{5}$$

si dans la formule (3) on remplace z par $-z$, on trouvera

$$\Delta\,\bar{\mathrm{l}}z = \Delta\,\mathrm{l}(-z) + K_{,}\mathrm{I}, \tag{6}$$

$K_{,}$ étant la somme des indices du rapport $\frac{x}{y}$ correspondants à des valeurs positives de x; puis on tirera des formules (3) et (6)

$$\Delta\,\bar{\mathrm{l}}z = \frac{\Delta\,\mathrm{l}z + \Delta\,\mathrm{l}(-z)}{2} + \frac{\mathrm{I}}{2}\mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{7}$$

la notation

$$\mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{x}{y}\right)$$

exprimant l'indice intégral de $\frac{x}{y}$ entre les limites $s = s'$, $s = s''$, c'est-à-dire la somme des indices du rapport $\frac{x}{y}$ correspondants aux divers

points où la ligne MN rencontre l'axe des x. D'autre part, comme, en désignant par a, b deux quantités algébriques et supposant

$$c = a + b\mathrm{i}, \tag{8}$$

on aura

$$cz = ax - by + (ay + bx)\mathrm{i},$$

on tirera encore des formules (5) et (7)

$$\Delta\,\bar{\mathrm{l}}z = \frac{\Delta\,\mathrm{l}(cz) + \Delta\,\mathrm{l}(-cz)}{2} + \frac{\mathrm{I}}{2}\mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{ax - by}{ay + bx}\right); \tag{9}$$

puis on en conclura, en posant $c = \mathrm{i}$,

$$\Delta\,\bar{\mathrm{l}}z = \frac{\Delta\,\mathrm{l}(\mathrm{i}z) + \Delta\,\mathrm{l}(-\mathrm{i}z)}{2} - \frac{\mathrm{I}}{2}\mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Des formules (7) et (10), comparées l'une à l'autre, on déduit immédiatement l'équation

$$\mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{x}{y}\right) + \mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\Delta\,\mathrm{l}(\mathrm{i}z) + \Delta\,\mathrm{l}(-\mathrm{i}z) - \Delta\,\mathrm{l}z - \Delta\,\mathrm{l}(-z)}{\mathrm{I}}, \tag{11}$$

dont le second membre dépend uniquement des affixes z', z'' des points M, N et conserve la même valeur, quelle que soit la nature de la ligne droite ou courbe décrite par le point mobile P. Le premier membre doit donc être lui-même indépendant de la nature de cette ligne. En effet, si l'on désigne par u ou le rapport $\frac{x}{y}$ ou une fonction réelle quelconque de l'arc s, assujettie à varier avec cet arc, tant qu'elle ne devient pas infinie, par degrés insensibles, et si l'on nomme u', u'' les valeurs de u correspondantes aux valeurs s', s'' de s, on aura généralement

$$\mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}(u) + \mathop{\mathfrak{J}}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{J}\frac{u''}{(s)} - \mathfrak{J}\frac{u'}{(s)}\right]; \tag{12}$$

de sorte qu'entre les limites $s = s'$, $s = s''$ l'indice intégral de u, joint à celui de $\frac{1}{u}$, donnera pour somme zéro, si u', u'' sont des quantités de même signe, et -1 ou $+1$ dans le cas contraire, savoir : $+1$ si, u' étant négatif, u'' est positif; -1 si, u' étant positif, u'' est négatif.

Ajoutons que, si U, V désignent deux fonctions entières de s, et W le reste qu'on obtient en divisant algébriquement U par V, on aura évidemment

$$\mathcal{J}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{U}{V}\right)=\mathcal{J}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{W}{V}\right). \tag{13}$$

Soit maintenant

$$Z=X+Yi \tag{14}$$

une fonction de z qui demeure monodrome dans le voisinage d'un point quelconque de la ligne MN décrite par le point mobile P. On tirera de la formule (7), en y remplaçant z par Z,

$$\Delta\bar{\mathrm{l}}Z=\frac{\Delta\mathrm{l}Z+\Delta\mathrm{l}(-Z)}{2}+\frac{1}{2}\mathcal{J}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{X}{Y}\right). \tag{15}$$

Si la ligne MN se transforme en un polygone ou en une courbe fermée qui serve de contour à une certaine aire S, alors, le point N se confondant avec le point M, les variations intégrales $\Delta\mathrm{l}Z$, $\Delta\mathrm{l}(-Z)$ s'évanouiront, et l'équation (15) donnera

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{l}}Z}{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\mathcal{J}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{X}{Y}\right). \tag{16}$$

Enfin, si la fonction Z de z est non seulement monodrome, mais aussi monogène dans le voisinage d'un point quelconque de l'aire S ou de son contour MN, et si d'ailleurs, en décrivant ce contour, le point mobile P tourne autour de l'aire S avec un mouvement de rotation direct, chacun des membres de l'équation (16) représentera la différence qu'on obtient quand, après avoir déterminé, pour chacune des deux équations

$$Z=0, \tag{17}$$

$$\frac{1}{Z}=0, \tag{18}$$

le nombre des racines propres à exprimer les affixes de points renfermés dans l'aire S, on retranche du nombre de celles qui appartiennent à la première équation le nombre de celles qui appartiennent à la seconde.

Il est bon d'observer que, dans l'équation (16), I représente la variation intégrale $\Delta\bar{\mathrm{l}}z$ correspondante au contour d'une aire qui renfermerait le pôle. En conséquence, si l'on nomme (S) la valeur commune des deux membres de l'équation (16), on aura non seulement

$$(\mathrm{S})=\frac{\Delta\bar{\mathrm{l}}Z}{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\mathcal{J}_{s=s'}^{s=s''}\left(\frac{X}{Y}\right), \tag{19}$$

mais encore

$$(\mathrm{S})=\frac{\Delta\bar{\mathrm{l}}Z}{\Delta\bar{\mathrm{l}}z}, \tag{20}$$

les variations intégrales $\Delta\bar{\mathrm{l}}Z$, $\Delta\bar{\mathrm{l}}z$ étant relatives, l'une au contour de l'aire S, l'autre au contour d'une aire qui renfermerait le pôle. Ajoutons que la formule (20) continuera de subsister si les mouvements de deux points mobiles assujettis à décrire les deux contours dont il s'agit, au lieu d'être l'un et l'autre directs, sont tous deux rétrogrades.

Dans le cas où la fonction Z reste monodrome, monogène et finie en chaque point de l'aire S, la quantité (S) déterminée par la formule (19) ou (20) est précisément le nombre de celles des racines de l'équation (17) qui sont propres à représenter les affixes de points renfermés dans l'aire S. Pour ce motif, nous désignerons la quantité (S) sous le nom de *compteur logarithmique*. Cela posé, on pourra énoncer les deux propositions suivantes :

Théorème I. — *Lorsque la fonction de z, représentée par Z, reste monodrome, monogène et finie, dans le voisinage d'un point quelconque de l'aire* S, *le compteur logarithmique* (S), *déterminé par l'équation* (19) *ou* (20), *exprime le nombre de celles des racines de l'équation*

$$Z = 0,$$

qui sont les affixes de points renfermés dans l'aire S.

Théorème II. — *Lorsque la fonction de z, représentée par Z, reste monodrome et monogène dans le voisinage d'un point quelconque de l'aire* S, *le compteur logarithmique, déterminé par l'équation* (19) *ou* (20), *est la différence des deux nombres qu'on obtient en cherchant combien de racines, représentées par des affixes de points renfermés dans l'aire* S, *appartiennent d'une part à l'équation $Z = 0$, d'autre part à l'équation $\frac{1}{Z} = 0$.*

Ajoutons que, si la fonction Z se décompose en deux facteurs U, V, dont le second ne devienne jamais nul ni infini en aucun point du contour de l'aire S, on pourra, dans la recherche du compteur logarithmique, substituer la fonction U à la fonction Z.

Ajoutons encore que, si, le contour de l'aire S étant composé de diverses parties, les parties correspondantes de la variation intégrale $\Delta \mathrm{l} z$ sont deux à deux égales au signe près, mais affectées de signes contraires, le compteur logarithmique (S) se réduira simplement à zéro.

De la première remarque, jointe au premier théorème, on conclut immédiatement (*voir* la page 267) que *toute équation algébrique du degré n admet n racines réelles ou imaginaires, égales ou inégales.*

De la seconde remarque jointe au second théorème, on déduit immédiatement une proposition établie par M. Liouville, qui est relative aux fonctions doublement périodiques, et que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème III. — *Soient z l'affixe d'un point mobile, et x, y deux coordonnées rectangulaires ou obliques mesurées sur deux axes qui, passant par le pôle, forment avec l'axe polaire les angles φ et χ, en sorte qu'on ait*

$$z = 1_\varphi x + 1_\chi y. \tag{21}$$

Soit, de plus, Z une fonction monodrome et monogène de z, qui ne varie pas quand on attribue à la variable x l'accroissement a, ou à la variable y l'accroissement b. Si l'on nomme S *l'aire d'un parallélogramme dont les côtés, représentés par a et b, soient respectivement parallèles aux axes des x et des y, et ne renferment aucun point dont l'affixe soit racine de l'une des équations*

$$Z = 0, \quad \frac{1}{Z} = 0,$$

le nombre des points pour lesquels se vérifiera la première équation, sera, dans l'intérieur du parallélogramme, égal au nombre des points pour lesquels se vérifiera la seconde.

Je joindrai ici une dernière observation. Si Z est une fonction entière de z du degré n, on pourra, en opérant comme je l'ai fait dans le Mémoire de 1831, déduire de la formule (19), jointe aux équations (12) et (13), le nombre m des racines de l'équation $Z = 0$ correspondantes à des points renfermés dans l'aire S, lorsque le contour de cette aire se transformera en un polygone rectiligne ou curviligne dont chaque côté sera ou une ligne droite ou un arc de cercle. Toutefois, si l'on suit la marche indiquée dans le Mémoire cité, alors, dans chacune des fractions rationnelles dont les indices serviront à déterminer le nombre m, les deux termes, réduits à des fonctions entières d'une seule variable, seront généralement du degré n quand il s'agira d'un côté rectiligne du polygone, et du degré $2n$ quand un côté se transformera en un arc de cercle. Les principes ci-dessus exposés permettent de réduire, dans le second cas, le degré $2n$ au degré n. Pour montrer comment cette réduction s'opère, concevons que, Z étant une fonction entière de z du degré n, on demande le nombre m de celles des racines de l'équation $Z = 0$ qui correspondent à des points situés dans l'intérieur du cercle qui a pour rayon le module r, et pour centre le point dont l'affixe est c. Pour chacun des points situés sur la circonférence de ce cercle, l'affixe z sera de la forme

$$z = c + r_p = c + re^{pi},$$

et, en posant

$$t = \tang \frac{p}{2},$$

on aura

$$(22) \qquad z = c + r\frac{1 + t\mathrm{i}}{1 - t\mathrm{i}}.$$

Cela posé, si l'on prend

$$(23) \qquad T = (1 - t\mathrm{i})^n Z,$$

T sera évidemment une fonction entière de t du degré n. D'ailleurs on pourra aux limites $-\pi$, $+\pi$ de la variable p faire correspondre les limites $-\infty$, $+\infty$ de la variable t; par conséquent l'équation (19) jointe à l'équation (23) donnera

$$(24) \qquad m = \frac{\Delta\,\overline{\mathrm{l}}\,T - n\,\Delta\,\overline{\mathrm{l}}(1 - t\mathrm{i})}{\mathbf{I}},$$

chaque variation intégrale s'étendant à toutes les valeurs de t comprises entre les limites $t = -\infty$, $t = \infty$. Mais on aura entre ces limites

$$\Delta\,\overline{\mathrm{l}}(1 - t\mathrm{i}) = \Delta\,\mathrm{l}(1 - t\mathrm{i}) = -\pi\mathrm{i} = -\frac{\mathbf{I}}{2}.$$

Donc la formule (24) donnera

$$(25) \qquad m = \frac{n}{2} + \frac{\Delta\,\overline{\mathrm{l}}\,T}{\mathbf{I}}.$$

Si maintenant on pose

$$(26) \qquad T = U + V\mathrm{i},$$

U, V étant deux quantités algébriques, on tirera de la formule (25), jointe à l'équation (15),

$$(27) \qquad m = \frac{n}{2} + \frac{\Delta\,\mathrm{l}(T) + \Delta\,\mathrm{l}(-T)}{2\mathbf{I}} + \frac{1}{2}\mathop{\mathfrak{J}}_{t=-\infty}^{t=\infty}\left(\frac{U}{V}\right),$$

et il est clair que, dans l'équation (27), U, V seront, ainsi que T, des fonctions de t entières et du degré n.

561.

Analyse algébrique. — *Sur le dénombrement des racines qui, dans une équation algébrique ou transcendante, satisfont à des conditions données.*

C. R., T. XL, p. 1329 (25 juin 1855).

Comme je l'ai remarqué dans de précédents Mémoires, les diverses racines réelles ou imaginaires d'une équation algébrique ou transcendante peuvent être censées représenter les affixes de points situés dans un certain plan, et le nombre de celles qui correspondent à des points compris dans un contour donné est exprimé par le *compteur logarithmique*. D'ailleurs, ce compteur peut être déterminé à l'aide des indices des fonctions, et par conséquent le dénombrement des racines qui satisfont à des conditions données peut être réduit à la détermination de ces indices. Effectivement, le *calcul des indices* fournit un moyen simple d'aborder, pour une équation algébrique, les deux problèmes que j'ai résolus en 1813 et en 1831 (¹), savoir : le dénombrement des racines positives, des racines négatives et des racines réelles ou imaginaires qui représentent les affixes de points renfermés dans un contour limité par des droites ou des arcs de cercle.

D'autre part, l'indice intégral d'une fraction rationnelle entre des limites données peut se déduire, ou de la considération des polynômes que fournit la recherche du plus grand commun diviseur algébrique entre les deux termes de la fraction et des propriétés que possèdent ces polynômes, spécialement de celles que M. Sturm a signalées le premier et appliquées au dénombrement des racines réelles, ou, comme l'a fait M. Hermite dans un Mémoire (²) qui m'a

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

(²) Dans ce beau Mémoire, M. Hermite déterminait aussi le nombre des systèmes de valeurs réelles de x et de y qui, étant comprises entre des limites données, vérifient deux équations algébriques en x et y.

toujours paru digne d'être remarqué, de la considération de certaines équations d'une forme particulière et dont toutes les racines sont réelles.

La méthode suivie par M. Hermite, et appliquée par lui-même au dénombrement des racines réelles, évite les divisions. A la vérité, les résultats immédiatement fournis par elle diffèrent au premier abord des résultats plus simples que fournit la méthode de M. Sturm, quand, avec M. Sylvester, on débarrasse chaque polynôme du diviseur constant introduit par la division algébrique. Mais on peut revenir des uns aux autres, et un artifice de calcul dont la simplicité a frappé M. Hermite, auquel je le communiquais, peut être utilement mis en œuvre pour cette transition que M. Hermite m'a dit avoir effectuée de son côté. D'ailleurs les principes sur lesquels s'appuie la nouvelle méthode se déduisent avec facilité de plusieurs théorèmes déjà connus; on pourrait dire qu'elle consiste dans l'emploi de théorèmes nouveaux qui sont des conséquences directes des premiers. J'ai cru qu'il ne serait pas sans intérêt d'énoncer avec précision ces divers théorèmes, d'en simplifier, autant que possible, les démonstrations, enfin d'appeler l'attention des géomètres sur les rapports qui existent entre eux, sur l'extension qu'on peut leur donner, sur les nombreuses applications auxquelles ils se prêtent. Tel est l'objet spécial du Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie. Je me bornerai pour l'instant à le résumer en peu de mots.

D'après la *règle de Descartes*, dans une équation dont le premier membre est ordonné suivant les puissances descendantes de l'inconnue, le nombre des racines positives est tout au plus égal au nombre des variations de signe, et le nombre des racines négatives au nombre des permanences de signe entre les coefficients des diverses puissances pris consécutivement et deux à deux.

Si quelques coefficients s'évanouissent, chacun d'eux pouvant être à volonté considéré comme positif ou comme négatif, le nombre des permanences pourra dépendre des signes qui leur seront attribués, et admettre, en raison de cette dépendance, une valeur maximum

ainsi qu'une valeur minimum. *La différence entre ces deux valeurs sera égale ou inférieure au nombre des racines imaginaires* [*voir* l'*Analyse algébrique*, p. 519 ([1])], pourvu toutefois que l'équation donnée n'ait pas des racines nulles.

De ce théorème fondamental on déduit immédiatement les deux propositions suivantes, dont la première était connue depuis longtemps :

Théorème I. — *Dans une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et distinctes de zéro, les coefficients de deux puissances consécutives de l'inconnue ne peuvent disparaître simultanément, et quand un coefficient s'évanouit, les deux coefficients voisins sont affectés de signes contraires.*

Théorème II. — *Représentons par*

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1}, \quad X_n$$

des fonctions réelles et entières de x, la dernière X_n étant telle, que les racines réelles de l'équation

$$X_n = 0, \tag{1}$$

comprises entre les limites $x = x'$, $x = x''$, soient des racines simples qui ne réduisent pas X_{n-1} à zéro. Soit encore Θ une fonction entière de x et θ déterminée par la formule

$$\Theta = \theta^n - X_1\theta^{n-1} + X_2\theta^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}X_{n-1}\theta + (-1)^n X_n. \tag{2}$$

Si, pour toute valeur réelle de x comprise entre les limites x', x'', les n racines de l'équation

$$\Theta = 0, \tag{3}$$

résolue par rapport à l'inconnue θ, sont constamment réelles, l'accroissement que subira le nombre des permanences entre les termes de la suite

$$1, \quad X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1}, \quad X_n, \tag{4}$$

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 324.

quand on passera de la limite $x = x'$ à la limite $x = x''$, sera précisément la valeur de l'indice m déterminé par la formule

$$m = \underset{x=x'}{\overset{x=x''}{\mathfrak{J}}} \left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right). \tag{5}$$

Corollaire I. — Pour que l'équation (3) soit du nombre de celles dont les racines ne cessent jamais d'être réelles, il suffit que $\pm\Theta$ soit ce que devient la résultante algébrique de fonctions réelles et entières de x, représentées par les divers termes d'un tableau à double entrée dont chaque ligne horizontale ou verticale renferme n termes différents, quand on retranche l'inconnue θ de chacun des termes situés sur une diagonale, si d'ailleurs ce tableau n'est pas modifié quand on échange les lignes horizontales contre les lignes verticales; par conséquent, il suffit que $\pm\Theta$ soit la résultante d'un tableau de la forme

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{s}_{1,1} - \theta, & \mathfrak{s}_{1,2}, & \ldots, & \mathfrak{s}_{1,n}, \\ \mathfrak{s}_{2,1}, & \mathfrak{s}_{2,2} - \theta, & \ldots, & \mathfrak{s}_{2,n}, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \mathfrak{s}_{n,1}, & \mathfrak{s}_{n,2}, & \ldots, & \mathfrak{s}_{n,n} - \theta, \end{array}\right. \tag{6}$$

$\mathfrak{s}_{\mu,\nu}$ étant une fonction entière de x dont la forme dépende des nombres μ, ν et redevienne la même quand on échange entre eux les indices μ, ν. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si, $\mathfrak{s}_{\mu,\nu}$ étant de la forme $\mathfrak{s}_{\mu+\nu-2}$, le tableau (6) se réduit au suivant :

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{s}_0 - \theta, & \mathfrak{s}_1, & \ldots, & \mathfrak{s}_{n-1}, \\ \mathfrak{s}_1, & \mathfrak{s}_2 - \theta, & \ldots, & \mathfrak{s}_n, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \mathfrak{s}_{n-1}, & \mathfrak{s}_n, & \ldots, & \mathfrak{s}_{2n-2} - \theta. \end{array}\right. \tag{7}$$

Corollaire II. — On doit remarquer le cas particulier où, dans le tableau (7), $\mathfrak{s}_\nu$ est une fonction linéaire de x, par conséquent de la forme

$$a_\nu + b_\nu x,$$

a_ν, b_ν étant deux coefficients réels. C'est ce qui aura lieu, par exemple,

si, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, étant les racines réelles ou imaginaires, supposées inégales, d'une certaine équation

$$u = 0, \tag{8}$$

dont tous les coefficients sont réels, on pose

$$\mathfrak{s}_\nu = k_1 x_1^{l+\nu}(x - x_1) + k_2 x_2^{l+\nu}(x - x_2) + \ldots + k_n x_n^{l+\nu}(x - x_n), \tag{9}$$

k_μ étant réel en même temps que x_μ, et k_μ, $k_{\mu'}$ étant deux quantités géométriques conjuguées en même temps que x_μ, $x_{\mu'}$. Supposons, pour plus de commodité, le coefficient de x_n dans u réduit à l'unité, en sorte qu'on ait

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n. \tag{10}$$

Posons d'ailleurs

$$s_\nu = k_1 x_1^\nu + k_2 x_2^\nu + \ldots + k_n x_n^\nu. \tag{11}$$

Désignons par S_ν la résultante du tableau

$$\left\{\begin{array}{llll} s_0, & s_1, & \ldots, & s_{\nu-1}, \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_\nu, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ s_{\nu-1}, & s_\nu, & \ldots, & s_{2\nu-2}, \end{array}\right. \tag{12}$$

et par $\mathfrak{S}_\nu$ la résultante du tableau

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{s}_0, & \mathfrak{s}_1, & \ldots, & \mathfrak{s}_{\nu-1}, \\ \mathfrak{s}_1, & \mathfrak{s}_2, & \ldots, & \mathfrak{s}_\nu, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \mathfrak{s}_{\nu-1}, & \mathfrak{s}_\nu, & \ldots, & \mathfrak{s}_{2\nu-2}; \end{array}\right. \tag{13}$$

on aura, en admettant pour valeur de $\mathfrak{s}_\nu$ celle que détermine la formule (9),

$$X_n = \mathfrak{S}_n = S_n a_n^l u \tag{14}$$

et

$$\frac{X_{n-1}}{X_n} = \frac{\varkappa_1}{x - x_1} + \frac{\varkappa_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{\varkappa_n}{x - x_n}, \tag{15}$$

$\varkappa_\nu$ désignant une quantité qui, pour une valeur réelle de x_ν, sera réelle et affectée du même signe que $k_\nu x_\nu^l$, par conséquent du même signe que k_ν ou $k_\nu x_\nu$ suivant que l sera pair ou impair. Cela posé, si l'on nomme u_1 une fonction entière de x déterminée par la formule

$$(16)\qquad \frac{u_1}{u} = \frac{k_1}{x - x_1} + \frac{k_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{k_n}{x - x_n},$$

et $\pm\Theta$ la résultante du tableau (7), l'équation (3) sera du nombre de celles auxquelles s'appliquera le théorème I, la valeur de l'indice m étant, pour des valeurs paires de l,

$$(17)\qquad m = \mathop{\mathfrak{J}}_{x=x'}^{x=x''} \left(\frac{u_1}{u}\right),$$

et, pour des valeurs impaires de l,

$$(18)\qquad m = \mathop{\mathfrak{J}}_{x=x'}^{x=x''} \left(\frac{x u_1}{u}\right).$$

Ajoutons qu'en vertu des équations (9) et (11) la valeur générale de $\mathfrak{s}_\nu$ dans le tableau (7) sera de la forme

$$(19)\qquad \mathfrak{s}_\nu = s_{l+\nu} x - s_{l+\nu+1}.$$

Pour tirer des formules qu'on vient d'établir le parti le plus avantageux, et en déduire, avec le moins de calcul possible, l'indice intégral

$$\mathop{\mathfrak{J}}_{x=x'}^{x=x''} \left(\frac{u_1}{u}\right),$$

il convient de joindre au théorème II la proposition suivante :

Théorème III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, et la valeur de $\mathfrak{s}_\nu$ étant déterminée par le système des formules* (9) *et* (11), *le théorème II continuera d'être applicable, quand on prendra pour $\pm\Theta$ la résultante du tableau* (7), *après avoir remplacé généralement dans ce tableau $\mathfrak{s}_\nu$ par $\alpha^\nu \mathfrak{s}_\nu$, α étant un coefficient réel.*

Corollaire. — Supposons, pour fixer les idées, que le coefficient α soit positif. Si les quantités de la forme

$$\mathfrak{S}_\nu$$

sont toutes distinctes de zéro, pour chacune des valeurs x', x'' attribuées à la variable x, alors, pour de très petites valeurs du coefficient α, on aura sensiblement

$$(20)\qquad k_\nu^{-1} = \alpha^{2n-2} k_\nu x_\nu^l (u'_\nu)^2,$$

u'_ν étant ce que devient $u' = D_x u$ quand on y pose $x = x_\nu$, et

$$(21)\qquad X_\nu = \alpha^{\nu(\nu-1)} \mathfrak{S}_\nu.$$

Cela posé, en attribuant au coefficient α des valeurs suffisamment petites, on conclura de la formule (20) que l'équation (5) peut être réduite à l'équation (17) ou (18), ce que l'on savait déjà, puis de la formule (21) que, dans la recherche de l'indice m déterminé par la formule (18), on peut à la suite (4) substituer la suivante :

$$(22)\qquad 1,\ \mathfrak{S}_1,\ \mathfrak{S}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{S}_n.$$

En conséquence, l'indice m déterminé par l'équation (17) sera précisément l'accroissement que subira le nombre des permanences de signe dans la suite (22) quand x passera de la valeur x' à la valeur x''.

Si l'on suppose en particulier $x' = -\infty$, $x'' = \infty$, l'indice m sera la différence entre le nombre des permanences de signe et le nombre des variations de signe dans la suite

$$(23)\qquad 1,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n.$$

562.

Calcul des résidus. — *Considérations nouvelles sur les résidus.*

C. R., T. XLI, p. 41 (9 juillet 1855).

Dans ce Mémoire, l'auteur considère sous un nouveau point de vue les résidus des fonctions et les définit comme il suit :

Lorsqu'une fonction $f(z)$ de l'affixe z devient infinie pour une valeur c de cette affixe, mais demeure monodrome et monogène pour des valeurs voisines de c, le *résidu partiel* de $f(z)$ relatif à la racine c de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

est la moyenne isotropique entre les diverses valeurs du produit

$$(z-c)\,f(z)$$

correspondantes à un module constant et très petit, mais à des arguments divers de la différence $z - c$, de sorte qu'en représentant par ζ cette différence on a

$$\mathcal{E}\frac{(z-c)\,f(z)}{((z-c))} = \mathfrak{M}[\zeta f(c+\zeta)].$$

Cette définition étant admise, on établit aisément les diverses propositions et formules que fournit le Calcul des résidus, et qui peuvent être si utilement appliquées à un grand nombre de questions diverses, particulièrement le théorème suivant :

Théorème. — *Soient*

z *l'affixe d'un point mobile;*

$f(z)$ *une fonction qui demeure monodrome et monogène pour tous les points de l'aire renfermée entre deux contours* FGH, KLM *dont le second enveloppe le premier de toutes parts;*

$c, c', c'', \ldots$ *les affixes des points singuliers compris dans cette aire et pour lesquels on a*

$$\frac{1}{f(z)} = 0; \tag{1}$$

s *l'aire renfermée dans le contour* FGH;

S *l'aire renfermée dans le contour* KLM;

(s) *l'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *étendue à tous les points du contour* FGH *qu'un point mobile est supposé décrire en tournant autour de l'aire* s *avec un mouvement de rotation direct;*

(S) *ce que devient la même intégrale quand on substitue le contour* KLM *au contour* FGH;

u *la valeur de* z *correspondante à un point quelconque du contour* FGH;

v *la valeur de* z *correspondante à un point quelconque du contour* KLM;

w *la valeur de* z *correspondante à un point situé entre les deux contours.*

Si l'on pose, pour abréger,

$$\upsilon = \frac{(s)}{I}, \qquad \vartheta = \frac{(S)}{I},$$

la valeur de I *étant*

$$I = 2\pi i,$$

on aura

$$\vartheta - \upsilon = \mathop{\mathcal{E}}_{w=u}^{w=v} ((f(w))). \tag{2}$$

Corollaire. — Si, dans l'équation (2), on remplace $f(w)$ par le rapport

$$\frac{f(w)}{w-z},$$

alors, en supposant le point dont l'affixe est z renfermé entre les deux contours FGH, KLM, et ayant égard à la formule

$$\mathcal{E}\left(\frac{f(w)}{w-z}\right) = f(z) + \mathcal{E}\frac{((f(w)))}{w-z},$$

on aura

$$f(z) = \vartheta - \upsilon + \mathop{\mathcal{E}}_{w=u}^{w=v} \frac{((f(w)))}{z-w}. \tag{3}$$

563.

Analyse mathématique. — *Sur une formule très simple et très générale qui résout immédiatement un grand nombre de problèmes d'Analyse déterminée et d'Analyse indéterminée.*

C. R., T. XLII, p. 366 (25 février 1856).

La considération des fonctions linéaires et homogènes m'a conduit à divers théorèmes, puis à une formule très simple, qui, en raison des nombreuses applications qu'on en peut faire, m'a paru digne d'être remarquée, et que je vais établir.

Considérons d'une part m variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

d'autre part n fonctions linéaires et homogènes

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s$$

de ces mêmes variables. Les valeurs de ces fonctions seront fournies par n équations, desquelles on pourra tirer les valeurs de quelques-unes des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

exprimées en fonctions des autres variables, et des termes de la suite

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s.$$

Pour y parvenir, on tirera de la première équation la valeur d'une variable x_1, puis on la substituera dans les autres équations. Si, par cette substitution, toutes les variables ne sont pas éliminées en même temps que x_1, on tirera d'une seconde équation la valeur d'une seconde variable x_2, ..., et en continuant de la sorte, on substituera aux équations données, d'une part, des équations qui détermineront certaines variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\nu,$$

dont le nombre sera ν, en fonction de $m - \nu$ autres variables

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots,$$

et des termes de la suite

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s;$$

d'autre part, si, ν étant inférieur à n, $n - \nu$ diffère de zéro, $n - \nu$ équations de condition linéaires et homogènes entre les fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s.$$

Dans ce dernier cas, les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

étant prises pour clefs anastrophiques, si l'on pose

$$\Omega = uvw \ldots s,$$

le produit symbolique $|\Omega|$ sera identiquement nul, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées, dans le développement de $|\Omega|$, aux produits symboliques partiels qui auront pour facteurs n termes de la suite

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

Dans le cas contraire, en laissant indéterminée la valeur de chacun de ces produits partiels, on obtiendra une valeur de $|\Omega|$ qui renfermera une ou plusieurs indéterminées, dont l'une sera précisément la valeur attribuée au produit symbolique

$$|x_1 x_2 \ldots x_n|.$$

Cela posé, on établira sans peine les propositions suivantes :

Théorème I. — *Étant données n équations qui expriment n quantités*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s$$

en fonctions linéaires et homogènes de m variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

posons

$$\Omega = uvw \ldots s;$$

et concevons que, les variables $x, y, z, \ldots, t$ *étant prises pour clefs anastrophiques, on laisse indéterminée dans le produit* $|\Omega|$ *la valeur de chacun des produits partiels formés avec quelques-unes des clefs* $x, y, z, \ldots, t$. *Il arrivera de deux choses l'une : ou le coefficient de chaque produit partiel, par conséquent de chaque indéterminée, sera identiquement nul, et l'on trouvera ainsi*

$$|\Omega| = 0;$$

ou la valeur générale de $|\Omega|$ *ne sera pas nulle. Dans le premier cas, les fonctions*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s$$

vérifieront une ou plusieurs équations de condition linéaires et homogènes; et, si l'on nomme l *le nombre de ces équations de condition, on pourra, des équations données, tirer les valeurs de plusieurs variables*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\nu,$$

dont le nombre sera

$$\nu = n - l,$$

exprimées en fonctions linéaires et homogènes des autres variables

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots$$

et des termes de la suite

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s.$$

Dans le second cas, les équations de condition dont nous venons de parler disparaîtront, et les n *équations données détermineront les valeurs de* n *variables*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

prises dans la suite

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

en fonctions linéaires et homogènes de $m - n$ *autres variables*

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots,$$

et des termes de la suite

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots, \quad s.$$

THÉORÈME II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le premier*

théorème, concevons que l'on assujettisse les variables $x, y, z, \ldots, t$ *à vérifier les équations*

$$(1) \qquad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \ldots, \quad s = 0.$$

Si l'on a $|\Omega| = 0$, *quelques-unes de ces équations se déduiront des autres, et par suite le nombre* ν *des variables*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\nu$$

qu'elles détermineront, sera inférieur à n. *Si, au contraire, le produit symbolique* $|\Omega|$ *n'est pas identiquement nul, les équations* (1) *détermineront* n *variables*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

en fonctions linéaires et homogènes de $m - n$ *autres variables*

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots,$$

dont chacune restera indéterminée; et, pour que des valeurs de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

propres à vérifier les équations (1), *soient aussi générales qu'elles doivent l'être, il suffira qu'elles renferment des indéterminées distinctes dont le nombre ne puisse s'abaisser au-dessous de* $m - n$. *Or c'est précisément ce qui arrivera si l'on pose*

$$(2) \qquad x = |\Omega x|, \quad y = |\Omega y|, \quad \ldots, \quad t = |\Omega t|.$$

Donc les solutions les plus générales des équations (1) *seront données par les formules* (2). *Ajoutons que, si l'on nomme* r *une fonction linéaire et homogène des variables* $x, y, z, \ldots, t$, *on aura, en supposant ces variables déterminées par les équations* (1),

$$(3) \qquad r = |\Omega r|.$$

Cette dernière formule peut à elle seule remplacer les équations (2) *que l'on en déduit, en prenant successivement pour* r *chacune des variables* $x, y, z, \ldots, t$.

On peut appliquer utilement le deuxième théorème et la formule générale qu'il nous offre, c'est-à-dire la formule (3), à un grand nombre de questions diverses, spécialement à la résolution des équations linéaires homogènes ou non homogènes, déterminées ou indéterminées, à l'élimination des variables entre des équations algébriques de degrés quelconques, à la détermination des restes successifs que produit la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes, etc. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Supposons d'abord que l'on donne à résoudre n équations linéaires, essentiellement distinctes et homogènes, entre $n+1$ variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

Ces équations seront de la forme

$$u=0, \qquad v=0, \qquad w=0, \qquad \ldots, \qquad s=0, \tag{1}$$

$u, v, w, \ldots, s$ désignant n fonctions linéaires et homogènes des $n+1$ variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t;$$

et, si l'on pose

$$\Omega = uvw\ldots s,$$

le produit symbolique $|\Omega|$ ne sera pas nul. Cela posé, si l'on nomme r une nouvelle fonction linéaire et homogène de $x, y, z, \ldots, t$, le produit symbolique

$$|\Omega r|$$

sera de la forme

$$k\,|xyz\ldots t|,$$

k désignant une constante déterminée; et si, en laissant indéterminée la valeur attribuée au produit symbolique

$$|xyz\ldots t|,$$

on désigne cette valeur par τ, la formule (3) donnera

$$r = k\tau. \tag{4}$$

Ainsi, par exemple, si l'on suppose les équations (2) réduites aux suivantes

$$\begin{cases} 3x+2y+\ \ z=0, \\ \ \ x+3y+2z=0, \end{cases} \tag{5}$$

et si d'ailleurs on prend

$$r = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

on aura

$$\begin{aligned} |\Omega|\ &= |yz| - 5\,|zx| + 7\,|xy|, \\ |\Omega r| &= (\alpha - 5\beta + 7\gamma)\,|xyz|; \end{aligned}$$

puis, en laissant indéterminée la valeur du produit symbolique $|xyz|$, et désignant cette valeur par τ, on tirera de la formule (3)

$$r = (\alpha - 5\beta + 7\gamma)\tau. \tag{6}$$

Si, dans l'équation (6), on suppose la fonction r successivement réduite à x, puis à y, puis à z, cette équation donnera

$$x=\tau, \qquad y=-5\tau, \qquad z=7\tau. \tag{7}$$

Telles sont les valeurs générales de x, y, z propres à résoudre les équations (5). Il suffira, d'ailleurs, d'attribuer à l'indéterminée τ une valeur entière pour obtenir les solutions en nombres entiers.

Si l'on attribue à l'une des variables $x, y, z, \ldots, t$ une valeur déterminée, les équations données seront linéaires par rapport aux variables restantes, mais cesseront d'être homogènes, et les valeurs des variables restantes se déduiront immédiatement de la formule (3). Ainsi, cette formule sert encore à résoudre n équations linéaires, mais non homogènes, entre n variables.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on donne, entre deux variables x, y, les équations

$$\begin{cases} 3x+2y=1, \\ \ \ x+3y=2. \end{cases} \tag{8}$$

Il suffira, pour obtenir ces équations, de poser $z=-1$ dans les formules (5). D'ailleurs, en posant $z=-1$, on tirera des formules (7), $\tau=-\frac{1}{7}$, et, par suite,

$$x=-\frac{1}{7},\qquad y=\frac{5}{7}. \tag{9}$$

Telles sont effectivement les valeurs de x, y qui satisfont aux équations (8).

On déduirait pareillement de la formule (3) les valeurs de m inconnues $x, y, z, \ldots, t$ déterminées par m équations linéaires, mais non homogènes, et l'on retrouverait ainsi les formules générales qui fournissent ces valeurs.

Supposons maintenant que, les équations données étant linéaires et homogènes, la différence $n-m$ entre le nombre m des variables et le nombre n des équations surpasse l'unité. Alors le nombre des indéterminées, dans les valeurs générales des variables, ne pourra s'abaisser au-dessous de $m-n$. D'ailleurs,

$$N=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \tag{10}$$

étant le nombre des produits que l'on peut former avec m facteurs pris n à n, les formules (2) et (3) pourront introduire dans les valeurs de

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

et dans la valeur de r, N indéterminées; mais, sans diminuer la généralité de ces valeurs, on pourra égaler à zéro plusieurs indéterminées et réduire ainsi leur nombre à $m-n$, pourvu toutefois qu'on ne demande pas de résoudre les équations linéaires données en nombres entiers.

Concevons maintenant que, les coefficients de $x, y, z, \ldots, t$ dans les fonctions $u, v, w, \ldots, s$ ayant des valeurs entières, on propose de résoudre en nombres entiers les équations (2), et supposons d'abord $m-n=1$; alors, pour obtenir les valeurs générales de

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

il suffira de poser

$$|xyz\ldots t|=\tau,$$

si les coefficients numériques du produit symbolique $|xyz\ldots t|$ dans les valeurs de

$$|\Omega x|,\quad |\Omega y|,\quad |\Omega z|,\quad \ldots,\quad |\Omega t|$$

ne sont pas tous divisibles par un même nombre, et

$$\theta|xyz\ldots t|=\tau,$$

s'ils sont tous divisibles par un même nombre θ, puis d'attribuer à τ des valeurs entières quelconques.

Si l'on a $m-n>1$, c'est-à-dire si le nombre des variables x, y, $z, \ldots, t$, surpasse de plus d'une unité le nombre des équations données, on devra encore, pour obtenir les solutions générales des équations (2) en nombres entiers, représenter par une lettre un certain multiple de chacun des produits symboliques partiels compris dans le développement de $|\Omega r|$, savoir le multiple qu'on obtient quand on multiplie ce produit partiel par le plus grand des entiers qui divisent les divers coefficients du même produit dans les développement des expressions

$$|\Omega x|,\quad |\Omega y|,\quad |\Omega z|,\quad \ldots,\quad |\Omega t|;$$

puis attribuer à la lettre qui représentera ce multiple une valeur entière, qui sera d'ailleurs indéterminée. Les valeurs de

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

ainsi obtenues renfermeront en général N indéterminées, la valeur de N étant donnée par la formule (10); et il pourra se faire qu'on ne puisse égaler à zéro une ou plusieurs de ces indéterminées sans restreindre la généralité des solutions en nombres entiers.

Ainsi, par exemple, s'agit-il de résoudre en nombres entiers l'équation linéaire et homogène

$$2x+3y+5z=0, \tag{11}$$

alors, en posant

$$|yz| = \xi, \quad |zx| = \eta, \quad |xy| = \zeta,$$

on tirera des formules (2)

$$(12) \qquad \begin{cases} x = 5\eta - 2\zeta, \\ y = 2\zeta - 5\xi, \\ z = 3\xi - 2\eta, \end{cases}$$

et ces valeurs de x, y, z résoudront en nombres entiers l'équation donnée, quelles que soient les valeurs entières attribuées aux trois indéterminées ξ, η, ζ. D'ailleurs, on ne pourra, sans restreindre la généralité de la solution, réduire l'une de ces indéterminées à zéro.

Au contraire, s'il s'agit de résoudre en nombres entiers l'équation

$$(13) \qquad 6x + 10y + 15z = 0,$$

alors, en posant

$$5|yz| = \xi, \quad 3|zx| = y, \quad 2|xy| = \zeta,$$

on tirera des formules (2)

$$(14) \qquad \begin{cases} x = 5(\eta - \zeta), \\ y = 3(\zeta - \xi), \\ z = 2(\xi - \eta); \end{cases}$$

et ces valeurs de x, y, z satisferont encore à l'équation (13), quelles que soient les valeurs entières attribuées aux trois indéterminées ξ, η, ζ; mais on pourra, sans diminuer la généralité de la solution trouvée, réduire à zéro l'une quelconque de ces trois indéterminées.

Enfin, s'il s'agit de résoudre les équations

$$(15) \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0, \\ 4x + 3y + 2z + t = 0, \end{cases}$$

alors, en posant

$$5|yzt| = \xi, \quad 5|ztx| = \eta, \quad 5|txy| = \zeta, \quad 5|xyz| = \tau,$$

on tirera des formules (2),

$$(16) \qquad \begin{cases} x = -\ \eta - 2\zeta - \tau, \\ y = -\ \xi + 3\zeta + 2\tau, \\ z = \ \ 2\xi + 3\eta - \tau, \\ t = -\ \xi - 2\eta - \zeta; \end{cases}$$

et si l'on demande des solutions en nombres quelconques rationnels ou irrationnels, on pourra, sans diminuer la généralité des formules (16), y réduire à zéro deux quelconques des quatre indéterminées

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \tau;$$

mais il ne sera plus de même si l'on demande les solutions en nombres entiers. Alors, à la vérité, on pourra, sans diminuer la généralité de la solution, poser

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

et réduire ainsi les formules (16) aux suivantes

$$x = -2\zeta - \tau, \quad y = 3\zeta + 2\tau, \quad z = -\tau, \quad t = -\zeta$$

ou, ce qui revient au même, aux deux équations

$$x = z + 2t, \quad y = -2z - 3t;$$

mais on restreindrait la généralité de la solution en supposant

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0$$

ou

$$\xi = 0, \quad \tau = 0,$$

puisqu'on exclurait ainsi, dans le premier cas, les valeurs impaires des variables y et t, dans le second cas, les valeurs de y et de z non divisibles par 3.

Dans un autre article, je donnerai d'autres applications de la formule (3).

564.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Note sur un théorème de M. Puiseux.*

C. R., T. XLI, p. 663 (14 avril 1856).

Un Mémoire sur les fonctions continues, que j'ai publié dans les *Comptes rendus* de 1844 (1er semestre), renferme la proposition suivante [1] :

Désignons par z une variable imaginaire et par u une fonction implicite de z qui représente une racine simple de l'équation

$$f(u, z) = 0. \tag{1}$$

Concevons d'ailleurs que le premier membre de l'équation (1) renferme, avec les variables z et u, un ou plusieurs paramètres, et que, pour une certaine valeur, par exemple pour une valeur nulle du paramètre α, la racine simple u reste fonction continue de z, du moins tant que le module de z ne dépasse pas une certaine limite. En raisonnant comme dans le Volume II des *Exercices d'Analyse* [2], on prouvera que, si le paramètre α vient à varier, et si, tandis qu'il varie, le premier membre de l'équation (1) reste fonction continue de z, u et α, la racine simple u restera généralement fonction continue de z, jusqu'à l'instant où, une seconde racine devenant égale à la première, l'équation (1) acquerra des racines multiples.

Une remarque importante à faire, mais qui n'était pas énoncée dans mon Mémoire, c'est qu'on peut établir une relation entre le paramètre α et la variable imaginaire z. On peut supposer, par exemple, que cette variable représente l'affixe d'un point mobile qui décrit une courbe dont la forme change avec ce paramètre. On peut même supposer que le premier membre de l'équation (1) est fonction des seules variables z et u, z étant fonction de α.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 151.
(2) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XII.

En partant de cette remarque, on parvient à un autre théorème que M. Puiseux a énoncé dans les termes suivants :

Soit $f(u, z)$ une fonction imaginaire de u et de la variable imaginaire z. Le point Z (dont l'affixe est z) allant de C en K soit par le chemin CMK, soit par le chemin CNK, la fonction u, qui avait en C la valeur b, acquerra dans les deux cas la même valeur h, si l'on peut, en déformant la ligne CMK, la faire coïncider avec la ligne CNK, sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction u devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Les nouvelles recherches de divers géomètres, particulièrement de MM. Briot et Bouquet, ont fait ressortir toute l'importance de ce beau théorème, dont l'auteur lui-même avait déjà su tirer un parti si avantageux dans ses Mémoires. Pour ce motif, il m'a semblé qu'il ne serait pas inutile de donner du théorème de M. Puiseux une démonstration très simple qui se déduit de la considération des compteurs logarithmiques. Tel est l'objet de la présente Note, dans laquelle je montrerai d'ailleurs comment le même théorème peut être étendu à des fonctions implicites déterminées par un système d'équations simultanées.

ANALYSE.

Je commencerai par établir la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soient*

z *l'affixe d'un point mobile* P;
c *l'affixe d'un point déterminé* C;
r *le rayon d'une circonférence de cercle* KLM *tracée dans le plan des affixes, et ayant pour centre le point* C;
u, v *deux fonctions de* z, *dont le rapport se réduise à l'unité pour* $z = c$.

Supposons d'ailleurs que les deux fonctions u, v *restent monodromes, quand le point* P *se meut dans l'intérieur du cercle* KLM, *et que sur la* *circonférence de ce cercle la différence*

$$\frac{u}{v} - 1$$

offre un module constamment inférieur à l'unité. Si l'on résout par rapport à z les deux équations

$$(1) \qquad u = 0,$$

$$(2) \qquad v = 0,$$

on trouvera, pour l'une et pour l'autre, le même nombre de racines correspondantes à des points renfermés dans le cercle KLM.

Démonstration. — Effectivement, si l'on pose

$$\mathrm{I} = 2\pi i,$$

le nombre des racines dont il s'agit sera représenté, pour l'équation (1), par le compteur logarithmique

$$\frac{\Delta \bar{\mathrm{l}} u}{\mathrm{I}},$$

pour l'équation (2) par le compteur logarithmique

$$\frac{\Delta \bar{\mathrm{l}} v}{\mathrm{I}},$$

et dans l'hypothèse admise ces deux compteurs seront évidemment égaux, puisqu'en posant

$$\frac{u}{v} - 1 = \omega$$

on obtiendra pour ω une quantité géométrique dont le module sera inférieur à l'unité, et que l'on aura par suite

$$\Delta \bar{\mathrm{l}} u - \Delta \bar{\mathrm{l}} v = \Delta \bar{\mathrm{l}} \frac{u}{v} = \Delta \bar{\mathrm{l}}(1 + \omega) = 0.$$

Le théorème I entraine la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit*

$$U = \mathrm{f}(u, z)$$

une fonction des variables z et u, qui s'évanouisse pour les valeurs

$$z = \mathrm{z}, \qquad u = \mathrm{u}$$

de ces deux variables, et qui, dans le voisinage de ces valeurs, soit monodrome par rapport à z, monodrome et monogène par rapport à u. Si la fonction dérivée

$$\mathrm{D}_u U$$

acquiert pour $z = \mathrm{z}$, $u = \mathrm{u}$ une valeur finie et distincte de zéro, on pourra satisfaire à l'équation

$$(3) \qquad U = 0$$

par une valeur de u qui, se réduisant à u pour $z = \mathrm{z}$, sera, pour une valeur de z voisine de z, fonction monodrome de z.

Démonstration. — U étant monodrome et monogène par rapport à u, quand z et u diffèrent très peu de z et u, sera, dans cette hypothèse, développable suivant les puissances ascendantes de $u - \mathrm{u}$, et, si l'on représente par V la somme des deux premiers termes du développement, on aura

$$(4) \qquad V = \mathrm{f}(\mathrm{u}, z) + (u - \mathrm{u})\,\mathrm{F}(\mathrm{u}, z),$$

$\mathrm{F}(u, z)$ pouvant être ou la dérivée de $\mathrm{f}(u, z)$ relative à u, ou, ce qui revient au même, une fonction déterminée par la formule

$$(5) \qquad \mathrm{F}(u, z) = \frac{\mathrm{f}(u, z) - \mathrm{f}(\mathrm{u}, z)}{u - \mathrm{u}},$$

de laquelle on tire, pour $u = \mathrm{u}$,

$$(6) \qquad \mathrm{F}(u, z) = \mathrm{D}_u U.$$

Si maintenant on pose

$$(7) \qquad u = \mathrm{u} - \theta \frac{\mathrm{f}(\mathrm{u}, z)}{\mathrm{F}(\mathrm{u}, z)},$$

la formule (4) donnera

$$(8) \qquad V = (1 - \theta)\,\mathrm{f}(\mathrm{u}, z),$$

et, eu égard à la formule (5), on trouvera

$$(9)\qquad U = \mathrm{f}(u, z) = \mathrm{f}(\mathrm{u}, \mathrm{z}) + (u - \mathrm{u})\,\mathrm{F}(u, z) = \left[1 - \vartheta \frac{\mathrm{F}(u, z)}{\mathrm{F}(\mathrm{u}, z)}\right] \mathrm{f}(\mathrm{u}, z).$$

On aura par suite

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 - \vartheta}\left[1 - \vartheta \frac{\mathrm{F}(u, z)}{\mathrm{F}(\mathrm{u}, z)}\right]$$

et

$$(10)\qquad \frac{U}{V} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\vartheta}}\left[\frac{\mathrm{F}(u, z)}{\mathrm{F}(\mathrm{u}, z)} - 1\right].$$

Or, si l'on considère la nouvelle variable ϑ comme l'affixe d'un point mobile, et si l'on attribue à cette variable un module $\varkappa$ supérieur à l'unité, par exemple le module 2, il suffira d'attribuer à la différence $z - \mathrm{z}$ un module infiniment petit et de faire converger z vers la limite z, pour faire converger $\mathrm{f}(\mathrm{u}, z)$ vers zéro, et, par suite, en vertu des formules (7) et (11), la variable u vers la limite u, et la différence

$$\frac{U}{V} - 1$$

vers la limite zéro. Donc alors, pour un module suffisamment petit de $z - \mathrm{z}$, les modules des différences

$$u - \mathrm{u}, \quad \frac{U}{V} - 1$$

deviendront aussi petits que l'on voudra; et le second de ces deux modules deviendra inférieur à l'unité. Alors aussi, en vertu du théorème II, si l'on résout, par rapport à ϑ, l'équation (3) et la suivante

$$(11)\qquad V = 0,$$

on obtiendra, pour l'une et pour l'autre, le même nombre de racines correspondantes à des valeurs de ϑ dont le module sera inférieur à 2; et comme, en vertu de la formule (8), l'équation (11) offrira une seule racine de cette espèce, savoir la racine 1, l'équation (3) admettra elle-même une seule racine de la même espèce. Si, au lieu de résoudre

les équations (3) et (4) par rapport à ϑ, on les résout par rapport à u, on pourra dire que chacune d'elles offre, pour un très petit module de $z - \mathrm{z}$, une seule racine très peu différente de u et de la forme

$$(7)\qquad u = \mathrm{u} - \vartheta \frac{\mathrm{f}(u, z)}{\mathrm{F}(\mathrm{u}, z)},$$

le module de ϑ étant inférieur à 2. D'ailleurs, de ces deux racines la seconde, qu'on obtiendra en posant $\vartheta = 1$, et qui sera en conséquence déterminée par la formule

$$(12)\qquad u = \mathrm{u} - \frac{\mathrm{f}(u, z)}{\mathrm{F}(\mathrm{u}, z)},$$

pourra être considérée comme une valeur approchée de la première, et sera précisément la valeur de u déduite de l'équation (3) par la méthode d'approximation linéaire ou newtonienne. Enfin la propriété qu'aura la racine u de l'équation (3) de varier infiniment peu quand z passera de la valeur z à une valeur infiniment voisine, subsistera encore, et pour les mêmes motifs, quand la nouvelle valeur de z recevra un accroissement infiniment petit $\Delta \mathrm{z}$. Donc la racine u de l'équation (3) sera, sous les conditions énoncées par le théorème II et pour des valeurs de z très voisines de z, une fonction monodrome de la variable z.

Corollaire. — Si la fonction

$$U = \mathrm{f}(u, z)$$

est non seulement monodrome, mais aussi monogène par rapport à z, et si d'ailleurs la fonction dérivée

$$\mathrm{D}_z U$$

conserve une valeur finie pour $z = \mathrm{z}$, $u = \mathrm{u}$, alors la fonction de z à laquelle se réduira la racine u de l'équation (3) aura pour dérivée une fonction monodrome et finie de z déterminée par la formule

$$(13)\qquad \mathrm{D}_z u = -\frac{\mathrm{D}_z U}{\mathrm{D}_u U},$$

et sera, par conséquent, une fonction non seulement monodrome, mais aussi monogène. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Soit*

$$U = f(u, z)$$

une fonction des variables z *et* u, *qui s'évanouisse pour les valeurs*

$$z = \mathrm{z}, \qquad u = \mathrm{u}$$

de ces deux variables, et qui, dans le voisinage de ces valeurs, soit monodrome et monogène par rapport à chacune des variables z *et* u. *Si les fonctions dérivées*

$$D_z U, \quad D_u U$$

acquièrent, pour $z = \mathrm{z}$, $u = \mathrm{u}$, *des valeurs finies dont la seconde soit distincte de zéro, on pourra satisfaire à l'équation*

$$U = 0$$

par une valeur de u, *qui, se réduisant à* u *pour* $z = \mathrm{z}$, *sera, pour une valeur de* z *voisine de* z, *fonction monodrome et monogène de* z.

Lorsque la fonction

$$U = f(u, z)$$

est une fonction entière ou même rationnelle des variables z et u, elle ne cesse jamais d'être monodrome et monogène par rapport à ces deux variables. Donc alors la racine u de l'équation (3) est, sous les conditions énoncées dans les théorèmes II et III, une fonction monodrome et monogène de z, ce qui entraîne évidemment le théorème de M. Puiseux.

Au reste, les théorèmes II et III sont compris, comme cas particulier, dans deux théorèmes généraux que l'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME IV. — *Soient*

$$z, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

$n + 1$ *variables, dont l'une,* z, *reste indépendante, les* n *autres*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

étant liées à z *par* n *équations*

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0, \qquad \ldots, \tag{14}$$

dont les premiers membres

$$U, \quad V, \quad W, \quad \ldots$$

représentent des fonctions de

$$z, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

monodromes par rapport à z, *monodromes et monogènes par rapport à* $u, v, \ldots$. *Supposons d'ailleurs que, pour les valeurs particulières*

$$\mathrm{z}, \quad \mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}, \quad \ldots$$

des variables

$$z, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

chacune des dérivées comprises dans le tableau

$$\left\{\begin{matrix} D_u U, & D_v U, & D_w U, & \ldots, \\ D_u V, & D_v V, & D_w V, & \ldots, \\ D_u W, & D_v W, & D_w W, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{matrix}\right. \tag{15}$$

conserve une valeur finie, et que la valeur correspondante de la résultante algébrique Ω, *formée avec les divers termes de ce même tableau, soit distincte de zéro. On pourra satisfaire aux équations* (14) *par des valeurs de*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

qui, se réduisant, pour $z = \mathrm{z}$, *à*

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}, \quad \ldots,$$

seront, dans le voisinage de $z = \mathrm{z}$, *c'est-à-dire pour des valeurs suffisamment petites du module de* $z - \mathrm{z}$, *des fonctions monodromes de* z.

Démonstration. — La résultante Ω des termes compris dans le tableau (15) est déterminée par la formule

$$\Omega = \frac{|dU\, dV\, dW \ldots|}{|du\, dv\, dw \ldots|}, \tag{16}$$

dans le cas où les différentielles du, dv, dw, ... sont prises pour clefs anastrophiques; et puisque aux valeurs

$$\mathrm{z},\quad \mathrm{u},\quad \mathrm{v},\quad \mathrm{w},\quad \ldots$$

des variables

$$z,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \ldots,$$

correspond une valeur de Ω distincte de zéro, les valeurs correspondantes des termes compris dans une ligne horizontale de ce tableau, par exemple des dérivées

$$\mathrm{D}_u U,\quad \mathrm{D}_v U,\quad \mathrm{D}_w U,\quad \ldots,$$

ne pourront s'évanouir toutes à la fois. Concevons, pour fixer les idées, qu'alors la dérivée

$$\mathrm{D}_u U$$

offre effectivement une valeur finie distincte de zéro. En vertu des théorèmes II et III, l'équation

$$U = 0,$$

résolue par rapport à u, fournira pour u une fonction des variables

$$z,\quad v,\quad w,\quad \ldots,$$

qui sera monodrome par rapport à z, monodrome et monogène par rapport à chacune des autres variables

$$v,\quad w,\quad \ldots;$$

et si l'on substitue cette valeur de u dans les équations (14), on obtiendra $n-1$ équations

$$\mathcal{V} = 0,\qquad \mathcal{W} = 0,\qquad \ldots, \tag{17}$$

dont les premiers membres seront des fonctions de

$$z,\quad v,\quad w,\quad \ldots,$$

monodromes par rapport à z, monodromes et monogènes par rapport

à v, w, ... D'ailleurs la résultante algébrique Ω' des termes compris dans le tableau

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{D}_v\mathcal{V}, & \mathrm{D}_w\mathcal{V}, & \ldots, \\ \mathrm{D}_v\mathcal{W}, & \mathrm{D}_w\mathcal{W}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}\right. \tag{18}$$

sera déterminée par la formule

$$\Omega' = \frac{|\, d\mathcal{V}\, d\mathcal{W}, \ldots \,|}{|\, dv\, dw, \ldots \,|}, \tag{19}$$

si l'on y considère dv, dw, ... comme des clefs anastrophiques; et, comme il suffira de supposer u et du déterminés par les formules

$$U = 0,$$
$$dU = \mathrm{D}_u U\, du + \mathrm{D}_v U\, dv + \mathrm{D}_w U\, dw + \ldots$$

pour réduire les différentielles

$$dV,\quad dW,\quad \ldots$$

aux différentielles

$$d\mathcal{V},\quad d\mathcal{W},\quad \ldots,$$

on aura nécessairement

$$\Omega = \Omega' \mathrm{D}_u \Omega, \tag{20}$$

$$\Omega' = \frac{\Omega}{\mathrm{D}_u \Omega}. \tag{21}$$

Donc, puisqu'aux valeurs

$$\mathrm{z},\quad \mathrm{u},\quad \mathrm{v},\quad \mathrm{w},\quad \ldots$$

de

$$z,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \ldots,$$

correspondent par hypothèse des valeurs de

$$\Omega \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_u U,$$

finies et distinctes de zéro, la valeur correspondante de Ω' sera elle-même finie et distincte de zéro. Cela posé, il est clair que le théorème III subsistera pour n équations qui renfermeront, avec z, les

n variables $u, v, w, \ldots$, s'il subsiste pour $n-1$ équations renfermant, avec z, $n-1$ autres variables $u, v, w, \ldots$. Donc, puisque ce théorème subsiste pour $n=1$, il subsistera pour $n=2$, puis encore pour $n=3$, puis encore pour $n=4$, ... Donc il subsistera généralement quel que soit n.

Corollaire. — De même que le théorème II entraine le théorème IV, de même le théorème III entraine la proposition suivante :

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème IV, si pour les valeurs*

$$\mathrm{z}, \quad \mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}, \quad \ldots$$

des variables

$$z, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

les fonctions

$$U, \quad V, \quad W, \quad \ldots$$

sont monodromes et monogènes, non seulement par rapport à

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

mais aussi par rapport à z, on pourra satisfaire aux équations (14) *par des valeurs de*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

qui, se réduisant, pour $z=\mathrm{z}$, à

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}, \quad \ldots,$$

seront, dans le voisinage de $z=\mathrm{z}$, c'est-à-dire pour des valeurs suffisamment petites du module de $z-\mathrm{z}$, des fonctions monodromes et monogènes de z.

Corollaire. — Les valeurs de $u, v, w, \ldots$ dont il est ici question, étant des fonctions monodromes et monogènes de z, seront, pour cela même, développables en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes de $z-\mathrm{z}$.

565.

Analyse mathématique. — *Sur les fonctions monodromes et monogènes.*

C. R., T. XLIII, p. 13 (7 juillet 1856).

Soient

$$z = r_p, \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{p}}$$

les affixes de deux points mobiles, et

$$Z, \quad \mathfrak{Z}$$

les valeurs correspondantes d'une certaine fonction. Si cette fonction reste monodrome et monogène pour toute valeur de r inférieure à une valeur donnée et constante du module $\mathfrak{r}$, on aura, pour une telle valeur de r,

$$(1) \qquad Z = \mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{Z}}{1-\dfrac{z}{\mathfrak{z}}},$$

la moyenne isotropique qu'indique le signe $\mathcal{M}$ étant relative à l'argument $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{z}$. En développant dans la formule (1) le rapport

$$\frac{1}{1-\dfrac{z}{\mathfrak{z}}}$$

suivant les puissances ascendantes de z, on obtiendra le développement de Z suivant les mêmes puissances. Dans ce développement, la somme des n premiers termes sera une fonction entière de z, du degré n, et si l'on désigne cette somme par s_n, on aura

$$(2) \qquad Z = s_n + z^{n+1}\,\mathcal{M}\,\frac{\mathfrak{z}^{-n-1}\mathfrak{Z}}{1-\dfrac{z}{\mathfrak{z}}}.$$

Si, dans la formule (2), on fait croître indéfiniment le nombre n, alors, z^{-n-1} convergera vers la limite zéro, et en posant

$$n = \infty,$$

on obtiendra l'équation

$$Z = s_\infty, \tag{3}$$

qui sera précisément la formule de Taylor; et cette équation subsistera quel que soit z, si Z reste finie, monodrome et monogène pour toute valeur finie de z. Si, de plus, Z conserve une valeur finie pour une valeur infinie de z, par conséquent pour une valeur infiniment petite de $\frac{1}{z}$, ou si, $\frac{1}{z}$ étant infiniment petit du premier ordre, $\frac{1}{Z}$ est un infiniment petit d'un ordre fini ν, alors pour réduire à zéro le produit $z^{-n-1}\mathfrak{Z}$, et, par suite, la moyenne isotropique

$$\mathfrak{M}\frac{z^{-n-1}\mathfrak{Z}}{1-\frac{z}{z}},$$

il ne sera plus nécessaire de faire converger n vers la limite ∞ : il suffira de faire converger le module r de z vers la limite ∞, et de prendre

$$n \overline{>} \nu.$$

Sous cette condition, la formule (2) donnera

$$Z = s_n. \tag{4}$$

Donc alors la fonction Z sera une fonction entière de z du degré n.

Il est bon d'observer que, dans l'hypothèse admise, le nombre ν qui représente l'ordre de $\frac{1}{Z}$, quand $\frac{1}{z}$ est supposé infiniment petit du premier ordre, ne peut différer du nombre entier n qui représente le degré de Z, en sorte qu'on a nécessairement

$$\nu = n.$$

Si Z conservait une valeur finie pour une valeur infinie de z, on aurait

$$\nu = n = 0,$$

et l'équation (4) réduite à

$$Z = s_0 \tag{5}$$

donnerait pour Z une valeur constante. L'équation (5), comprise comme cas particulier dans une formule générale du Calcul des résidus, reproduit un théorème énoncé par M. Liouville.

Supposons maintenant que la fonction Z, toujours monodrome et monogène pour une valeur finie z, devienne infinie pour certaines valeurs particulières de la variable, et nommons c l'une quelconque de ces valeurs. Le rapport $\frac{1}{Z}$ deviendra infiniment petit, si c est fini, pour une valeur infiniment petite de $z - c$, et si c est infini, pour une valeur infiniment petite de $\frac{1}{z}$. Admettons que, dans l'une ou l'autre hypothèse, $z - c$ ou $\frac{1}{z}$ étant infiniment petit du premier ordre, $\frac{1}{Z}$ soit un infiniment petit d'un ordre fini μ ou ν, et que le nombre des valeurs finies de c soit encore un nombre fini. Enfin soient

$$c', c'', \ldots, c^{(l)}$$

les valeurs finies de c;

$$\mu', \mu'', \ldots, \mu^{(l)}$$

les valeurs correspondantes de μ;

$$m', m'', \ldots, m^{(l)}$$

des entiers supérieurs aux nombres

$$\mu', \mu'', \ldots, \mu^{(l)},$$

et posons

$$\mathfrak{Z} = (z - c')^{m'}(z - c'')^{m''}\ldots(z - c^{(l)})^{m^{(l)}} Z, \tag{6}$$

$\mathfrak{Z}$ sera évidemment une fonction monodrome et monogène qui, toujours finie pour une valeur finie de z, fournira pour $\frac{1}{Z}$ une quantité infiniment petite dont l'ordre sera la quantité finie

$$m' + m'' + \ldots + m^{(l)} + \nu, \tag{7}$$

quand $\frac{1}{z}$ sera du premier ordre. Donc $\mathfrak{z}$ sera, en vertu des propositions déjà démontrées, une fonction entière de z. Cela posé, l'équation (6) fournira évidemment pour Z une fonction rationnelle, et

$$\mu', \quad \mu'', \quad \mu''', \quad \ldots, \quad \mu^{(l)}, \quad \nu$$

ne pourront être que des nombres entiers. Ajoutons que l'équation (8) continuera de fournir pour $\mathfrak{z}$ une fonction entière de Z, si l'on prend pour

$$m', \quad m'', \quad m''', \quad \ldots, \quad m^{(l)}$$

ces mêmes nombres entiers; et que, si, pour une valeur infinie de z, Z conservait une valeur finie différente de zéro, ou devenait infiniment petit, on devrait, dans la somme (7), réduire ν à zéro, ou lui attribuer une valeur négative.

On peut donc énoncer généralement la proposition suivante :

Théorème I. — *Si une fonction Z de z, toujours monodrome et monogène pour une valeur finie de z, devient infinie pour un nombre fini de valeurs de z; si, d'ailleurs, c étant l'une de ces valeurs, le rapport $\frac{1}{Z}$ est une quantité infiniment petite d'un ordre fini μ ou ν, quand on considère la différence $z-c$, c étant fini, ou le rapport $\frac{1}{z}$, c étant infini, comme un infiniment petit du premier ordre, alors μ, ν seront toujours des nombres entiers, et Z sera une fonction rationnelle de z, à laquelle on pourra donner pour dénominateur le produit des facteurs de la forme*

$$(z-c)^{\mu}.$$

Les conditions ici mentionnées seront évidemment remplies, si Z est une fonction monodrome et monogène qui vérifie une équation de la forme

$$\text{(8)} \qquad F(z, Z) = 0,$$

$F(z, Z)$ étant une fonction entière de z et Z. Alors le théorème I ne sera pas distinct du beau théorème énoncé par M. Puiseux dans le

Mémoire qui a pour titre : *Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques*.

D'autre part, on établira sans peine la proposition suivante :

Théorème II. — *Nommons Z une fonction de z, qui, étant toujours monodrome et monogène pour une valeur finie de z, soit simplement périodique et demeure invariable, tandis que l'on fait croître z de la période ω. Si l'on pose*

$$\text{(9)} \qquad u = e^{\frac{z}{\omega}\mathrm{I}},$$

la valeur de I *étant*

$$\mathrm{I} = 2\pi i,$$

Z considéré comme fonction de u sera encore monodrome et monogène pour toute valeur finie de u.

Démonstration. — Soit en effet

$$\text{(10)} \qquad Z = f(z),$$

et substituons, dans la formule (12), à la variable z sa valeur

$$z = \frac{\omega}{\mathrm{I}}\,\mathrm{l}u,$$

$\mathrm{l}u$ désignant un logarithme népérien assujetti à varier avec u par degrés insensibles. On aura

$$\text{(11)} \qquad Z = f\left(\frac{\omega}{\mathrm{I}}\,\mathrm{l}u\right).$$

Or, $\mathrm{l}u$ étant monodrome et monogène dans le voisinage de toute valeur finie de u, autre que la valeur zéro, on pourra en dire autant de Z; et, si l'on fait décrire autour du pôle une courbe fermée au point dont l'affixe est u, le produit

$$\frac{\omega}{\mathrm{I}}\,\mathrm{l}u,$$

après une ou plusieurs révolutions du point, effectuées dans un sens ou dans un autre sur la courbe dont il s'agit, se trouvera augmenté ou diminué d'un multiple de la période ω; par conséquent Z ne changera pas de valeur, et l'on pourra en dire autant de la dérivée

$$D_u Z = \frac{\omega}{\mathrm{I}} \frac{1}{u} D_z Z.$$

Du théorème I joint au théorème II, on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème III. — *Soit Z une fonction de z, simplement périodique; représentons la période ω par un rayon mené d'un point donné à un autre point dans la direction qu'indique l'argument de cette période, et par les extrémités de ce rayon menons deux droites parallèles l'une à l'autre. Si la fonction Z, toujours monodrome et monogène pour une valeur finie de z, devient infinie pour un nombre infini de valeurs de z propres à représenter les affixes de points situés entre les deux parallèles; si d'ailleurs, c étant l'une de ces valeurs, et h la valeur correspondante de l'exponentielle*

$$u = e^{\frac{z}{\omega}\mathrm{I}},$$

le rapport $\frac{1}{Z}$ est une quantité infiniment petite d'un ordre fini μ ou ν, quand on considère la différence $u - h$, h étant fini, ou le rapport $\frac{1}{u}$, h étant infini, comme un infiniment petit du premier ordre, alors μ, ν seront toujours des nombres entiers, et Z sera une fonction rationnelle de u à laquelle on pourra donner pour dénominateur le produit des facteurs de la forme

$$(u - h)^{\mu}.$$

Si, en nommant ω la période de la variable z dans la fonction périodique Z, supposée monodrome et monogène pour toute valeur finie de z, on substituait à l'équation (9) la suivante

$$u = \cos\frac{z}{\omega},$$

Z, considéré comme fonction de u, pourrait cesser d'être monodrome et monogène pour toute valeur finie de u. Mais il serait fonction monodrome et monogène de u et v si l'on supposait

$$u = \cos\frac{z}{\omega}, \qquad v = \sin\frac{z}{\omega}, \tag{12}$$

attendu qu'on aurait alors

$$z = \frac{\omega}{\mathrm{I}} \bar{\mathrm{l}}(u + v\mathrm{i}), \tag{13}$$

$$Z = \mathrm{f}\left[\frac{\omega}{\mathrm{I}} \bar{\mathrm{l}}(u + v\mathrm{i})\right], \tag{14}$$

et qu'on pourrait appliquer à la première formule (12) ce qui a été dit de la formule (11). Remarquons d'ailleurs que, en vertu des formules (12), on aurait

$$u^2 + v^2 = 1,$$

$$\bar{\mathrm{l}}(u + v\mathrm{i}) + \bar{\mathrm{l}}(u - v\mathrm{i}) = 0,$$

par conséquent

$$\mathrm{l}(u + v\mathrm{i}) = \frac{1}{2} \bar{\mathrm{l}} \frac{u + v\mathrm{i}}{u - v\mathrm{i}},$$

et que $\frac{u + v\mathrm{i}}{u - v\mathrm{i}}$ est simplement fonction de

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tang}\frac{z}{\omega}.$$

On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème IV. — *Une fonction Z de z, supposée monodrome, monogène et simplement périodique, sera encore une fonction monodrome et monogène des deux variables*

$$u = \cos\frac{z}{\omega}, \qquad v = \sin\frac{z}{\omega}$$

et de leur rapport; elle en sera même une fonction rationnelle sous les conditions énoncées dans le théorème III.

Un théorème semblable s'applique, sous de semblables conditions, aux fonctions doublement périodiques.

D'ailleurs les conditions dont il s'agit sont remplies quand la fonction Z se réduit à l'intégrale u de l'équation

$$D_z u = U, \tag{15}$$

U étant déterminé par la formule

$$F(u, U) = 0, \tag{16}$$

dans laquelle $F(u, U)$ désigne une fonction entière de u et U, et par suite, les derniers théorèmes ici énoncés et mentionnés ne sont pas distincts de ceux qui ont été donnés par MM. Briot et Bouquet dans leur important travail sur l'intégration des équations différentielles.

Dans un autre article, je montrerai comment on peut intégrer à l'aide de fonctions monodromes et monogènes des systèmes d'équations simultanées et résoudre ainsi complètement certains problèmes de Mécanique et d'Astronomie.

566.

Calcul intégral. — *Rapport sur un Mémoire de MM.* Briot *et* Bouquet.

C. R., T. XLIII, p. 26 (7 juillet 1856).

Jusqu'à présent les géomètres n'étaient parvenus à intégrer en termes finis qu'un très petit nombre d'équations différentielles, même du premier ordre. Il y a plus : les intégrales obtenues étaient souvent de peu d'utilité quand il s'agissait de résoudre le problème auquel se rapportait une équation différentielle. Ainsi, par exemple, à une équation dans laquelle deux variables étaient séparées, on substituait une équation entre deux intégrales définies. Mais on ne savait pas généralement tirer de cette équation nouvelle la valeur de l'une des variables considérée comme fonction de l'autre, ou du moins l'on n'y parvenait qu'en développant la fonction en une série composée d'un nombre infini de termes, et à l'aide de formules qui, pour l'ordinaire, ne subsistaient qu'entre certaines limites de la variable indépendante.

C'est donc un véritable progrès dans la haute Analyse et le Calcul infinitésimal que d'être parvenu, comme l'ont fait MM. Briot et Bouquet, à intégrer sous forme finie un grand nombre d'équations du genre de celles que nous venons de mentionner. Disons en peu de mots comment ils y ont réussi.

Dans son Mémoire sur les fonctions algébriques, c'est-à-dire sur les fonctions que déterminent des équations algébriques, M. Puiseux a démontré les deux théorèmes suivants, dont le second peut aussi se déduire d'une formule générale du Calcul des résidus.

Théorème I. — *Si une fonction algébrique de z cesse d'être monodrome pour une valeur c de cette variable, alors, pour une valeur de z très voisine de c, une racine quelconque de l'équation algébrique donnée sera développable en série convergente suivant les puissances ascendantes de $(z-c)^{\frac{1}{n}}$, n étant l'ordre de la substitution circulaire qui comprend la racine donnée, c'est-à-dire le nombre qu'on obtient en joignant à cette racine celles qui s'échangent avec elles quand on fait tourner le point dont l'affixe est z autour du point dont l'affixe est c.*

Théorème II. — *Une fonction algébrique monodrome est nécessairement rationnelle.*

En partant de ces deux théorèmes, MM. Briot et Bouquet en ont obtenu d'autres, et particulièrement ceux que nous allons rappeler.

Théorème I. — *u étant une fonction de z déterminée par l'équation différentielle*

$$D_z u = U, \tag{1}$$

dans laquelle U est une racine de l'équation algébrique

$$F(u, U) = 0, \tag{2}$$

si l'intégrale u admet un nombre limité de valeurs pour chaque valeur *de z, u, considérée comme fonction de z, sera non périodique, ou simplement périodique, ou doublement périodique, et de plus fonction algébrique dans le premier cas de z, dans le second cas de* $\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}$, *$\omega$ étant la période de la variable z, dans le troisième cas de la fonction elliptique $\lambda(z)$ correspondante aux deux périodes données:*

Théorème II. — *Si l'intégrale u est monodrome, elle sera une fonction rationnelle ou de z, ou de* $\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}$, *ou de $\lambda(z)$ et de $\lambda'(z)$.*

Théorème III. — *L'équation* (2) *étant du degré m par rapport à* U, *les conditions nécessaires pour que l'intégrale u de l'équation* (1) *ne cesse jamais d'être fonction monodrome de z sont les suivantes* : 1° *le coefficient de* U^n *dans* $F(u, U)$ *devra être une fonction entière de u, d'un degré égal ou inférieur au double de $m - n$*; 2° *quand, pour une valeur h de u, la fonction implicite* U *deviendra une racine multiple différente de zéro, elle devra rester dans le voisinage du point dont l'affixe est h, fonction monodrome de u*; 3° *quand la racine multiple sera nulle, l'exposant de $u - h$ dans le premier terme du développement de* U *suivant les puissances ascendantes de $(u - h)^{\frac{1}{n}}$ devra être de la forme $1 - \frac{1}{n}$ si cet exposant est plus petit que l'unité*; 4° *enfin l'équation transformée que l'on déduira de l'équation* (2) *en posant $u = \frac{1}{v}$ devra offrir les mêmes caractères pour $v = 0$.*

Théorème IV. — *Les conditions qui rendent monodrome l'intégrale de l'équation* (1) *étant remplies, cette intégrale sera doublement périodique si l'équation* (2), *pour une valeur finie h de u, et la transformée, pour $v = 0$, n'admettent pas de racines nulles et telles que, pour des valeurs infiniment petites de $u - h$ ou de v,* U *se développe en une série dont le premier terme offre un exposant égal ou supérieur à l'unité; l'intégrale sera rationnelle si l'équation* (2), *pour une valeur finie de h, ou la transformée pour $v = 0$, admet un groupe de n racines égales à zéro, dont le développement suivant les puissances ascendantes de $(u - h)^{\frac{1}{n}}$ ou de $v^{\frac{1}{n}}$ commence par un terme du degré $1 + \frac{1}{n}$, le terme suivant du degre $1 + \frac{2}{n}$ étant nul; ces cas exceptés, la fonction u sera simplement périodique.*

Après avoir obtenu les remarquables théorèmes que nous venons de rappeler, MM. Briot et Bouquet ont voulu mettre encore en évidence le parti qu'on pouvait en tirer pour l'intégration des équations différentielles; ils ont montré comment on peut déterminer les constantes que renferme une intégrale reconnue rationnelle par rapport à z, ou à $\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}$, ou à $\lambda(z)$ et $\lambda'(z)$; et afin de ne laisser aucun doute à cet égard, ils ont effectivement pris pour exemples onze équations différentielles qu'il ont intégrées en termes finis. Ils ont ensuite vérifié l'exactitude de plusieurs des résultats, en faisant voir que les intégrales obtenues satisfaisaient aux équations différentielles proposées.

En résumé, les Commissaires pensent que les résultats obtenus par MM. Briot et Bouquet constituent un véritable progrès dans la haute Analyse; ils croient que le Mémoire soumis à leur examen est très digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des travaux des Savants étrangers*.

567.

Analyse mathématique. — *Sur la théorie des fonctions.*

C. R., T. XLIII, p. 69 (14 juillet 1856).

§ I. — *Considérations générales.*

Soient z, Z les affixes de deux points mobiles dans un plan. Si ces deux points se meuvent sur l'axe polaire, les variables z, Z seront réelles, et la seconde sera dite *fonction* de la première, quand le mouvement du premier point entrainera le mouvement du second. Il était naturel, il était convenable d'étendre cette définition au cas où le premier point se meut d'une manière quelconque dans le plan donné. Ce parti, que j'ai osé adopter, et qui a paru d'abord étonner quelques géomètres, est pourtant, je crois, l'unique moyen d'écarter les difficultés sans nombre qui se présentaient à l'esprit quand on méditait sur la nature et sur l'existence même de ce qu'on appelait des *fonctions de variables imaginaires*. D'ailleurs, à cette notion générale des fonctions, il importe de joindre, en l'étendant, la notion de *continuité*, telle que je l'ai donnée en 1821 dans mon *Analyse algébrique* [1], et de dire que l'affixe Z est *fonction continue* de la variable z, dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à cette variable, quand une variation infiniment petite de z produit dans ce voisinage une variation infiniment petite de Z. La limite vers laquelle converge le rapport de la seconde variation à la première, tandis que chacune des variations s'approche indéfiniment de zéro, est précisément la *fonction dérivée*, et dépend en général tout à la fois de l'affixe z et de la direction suivant laquelle se meut, quand z varie, le point dont l'affixe est z. Mais, si la fonction dérivée reprend la même valeur pour deux directions distinctes, elle deviendra complètement indépendante de la direction, et sera une *fonction monogène*. Enfin une fonction continue de la variable z est *monodrome* lorsque, pour chaque valeur de z, la valeur de Z demeure unique tant qu'elle n'est pas infinie.

Une fonction *synectique* est une fonction monodrome et monogène qui ne devient pas infinie pour des valeurs particulières de la variable.

Une fonction peut être monodrome, monogène, ou synectique seulement entre certaines limites déterminées par le système des lignes droites ou courbes qui enveloppent une certaine aire, c'est-à-dire tant que la variable z représente l'affixe d'un point renfermé dans l'aire dont il s'agit.

Ces principes étant posés, on reconnaît sans peine que les fonc-

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

tions monodromes et monogènes sont précisément celles auxquelles s'appliquent les formules générales que j'ai déduites du Calcul des résidus, comme aussi celles que j'ai données pour la détermination des intégrales définies, pour l'énumération des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques ou même transcendantes, et pour le développement des fonctions explicites ou implicites en séries convergentes et en produits convergents, les fonctions implicites pouvant d'ailleurs être déterminées, soit par des équations finies, soit par un système d'équations différentielles. Ainsi, par exemple, c'est à une fonction monodrome et monogène $f(z)$ que se rapporte la formule

$$f(x) = \mathcal{E}\frac{(f(z))}{x-z} + \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{(z)(1-zx)}, \tag{1}$$

que j'ai donnée à la page 136 du Volume I des *Exercices de Mathématiques* [1], et qui détermine immédiatement les fractions simples et la fonction entière dont la somme reproduit une fonction rationnelle $f(x)$; c'est encore à une fonction monodrome et monogène $f(z)$ que s'applique l'équation (26) de mon Mémoire du 27 octobre 1831, c'est-à-dire la formule

$$\int_0^c f(z)\, D_s z\, ds = 2\pi i\, \mathcal{E}\,(f(z)), \tag{2}$$

dans laquelle le signe $\mathcal{E}$ indique un résidu intégral relatif aux points renfermés dans une certaine aire qu'enveloppe un certain contour, s une longueur mesurée sur ce contour, depuis un point donné jusqu'à celui dont z est l'affixe, et c le contour entier. Remarquons d'ailleurs que la formule (2) comprend, comme cas particulier, des équations générales données dans les *Exercices de Mathématiques* et ailleurs, par exemple l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty}^{\infty}{}_0^{\infty}\,(f(z)), \tag{3}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 172.

qui subsiste quand le produit $z\,\mathrm{f}(z)$ s'évanouit pour des points situés à une distance infinie du pôle au-dessus de l'axe polaire, et les formules

$$\mathrm{f}(0) = \mathfrak{M}\,\mathrm{f}(z), \tag{4}$$

$$\mathrm{f}(x) = \mathfrak{M}\,\frac{\mathrm{f}(z)}{1-\frac{x}{z}}, \tag{5}$$

qui supposent $\mathrm{f}(z)$ synectique pour le module attribué à z et pour un module plus petit, le module de x devant être, dans la formule (5), inférieur au module de z.

En m'appuyant sur les principes que je viens de rappeler, j'ai été conduit à de nouveaux théorèmes et à des formules nouvelles qui paraissent dignes de quelque attention, et qui se rapportent, soit aux fonctions explicites ou implicites, soit à l'intégration d'un système d'équations différentielles. Je me propose de développer successivement ces théorèmes et ces formules. Je me bornerai pour le moment à en donner une idée.

§ II. — *Sur les fonctions déterminées par des équations finies.*

En vertu de la formule (5) du § I, une fonction $Z = \mathrm{f}(z)$, qui reste synectique tant que la variable z conserve un module inférieur à une certaine limite r, est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de z.

Lorsque la fonction $\mathrm{f}(z)$ est explicite, on peut aisément reconnaître avec facilité si elle est synectique, au moins dans le voisinage d'une valeur donnée de z. Il reste à examiner le cas où la fonction est implicite, par exemple le cas où elle est déterminée par une équation de la forme

$$\mathrm{F}(z, Z) = 0. \tag{1}$$

Alors, si C représente une valeur finie de Z correspondante à une valeur finie c de z, et si, dans le voisinage des valeurs c, C des deux

variables z, Z, le premier membre de l'équation (1) reste fonction monodrome et monogène de ces variables, Z sera, pour des valeurs de z très voisines de c, fonction monodrome et monogène de z, à moins que $z = c$ ne soit une racine multiple de l'équation (1).

A ce théorème, énoncé par M. Puiseux, on peut joindre un théorème analogue relatif au cas où plusieurs fonctions d'une variable sont déterminées par le système de plusieurs équations finies, dont chacune exprime l'égalité de deux fonctions monodromes et monogènes des diverses variables.

Si l'une des quantités c, C, ... devenait infinie, alors à la variable z ou Z on substituerait le rapport variable $\frac{1}{z}$ ou $\frac{1}{Z}$....

Si, dans chacune des équations données, les deux membres n'étaient pas monodromes et monogènes, il suffirait ordinairement, pour les rendre tels, d'augmenter, comme je l'ai dit ailleurs, le nombre des variables.

Si, pour $z = c$, plusieurs racines z de l'équation (1) deviennent égales entre elles, et si l'on nomme m l'ordre de la substitution qui indique comment les racines s'échangent entre elles, quand, z différant très peu de c, on fait tourner autour du point dont l'affixe est c le point dont l'affixe est z, alors il suffira généralement de poser

$$z - c = u^m, \tag{2}$$

pourvu que chaque racine devienne une fonction monodrome et monogène de u.

Les théorèmes sur l'énumération des racines que j'ai donnés en 1831 [1] s'appliquent non seulement aux équations algébriques, mais aussi aux équations transcendantes, et peuvent servir à déterminer le nombre des racines de ces dernières, entre des limites données.

Concevons, pour fixer les idées, que,

$$Z = \mathrm{F}(t, z) \tag{3}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

étant une fonction synectique de t et z, on pose

$$z = x + yi, \qquad Z = X + Yi,$$

x, y, X, Y étant réelles, et que l'on demande le nombre n des racines de l'équation

$$F(t, z) = 0, \tag{4}$$

comprises entre des limites données, par exemple le nombre des points dont chacun, renfermé dans une certaine aire S, a pour affixe une racine z de l'équation (4). Le nombre n sera donné par la formule

$$n = \frac{1}{2}\mathcal{J}\left(\frac{X}{Y}\right), \tag{5}$$

le résidu intégral qu'indique le signe $\mathcal{J}$ étant relatif au contour de l'aire S; et si, tandis que cette aire s'étend indéfiniment dans tous les sens autour du pôle, le second membre de la formule (5) devient infiniment grand, le nombre total des racines sera infini. D'ailleurs la détermination de n pourra devenir facile, si l'on a choisi convenablement le contour.

Ainsi, par exemple, si l'équation (4) se réduit à

$$z - e^z = t, \tag{6}$$

ou bien à

$$z - \varepsilon \sin z = t, \tag{7}$$

ε étant un nombre donné, on facilitera notablement la détermination de n en réduisant le contour de l'aire S au périmètre d'un rectangle dont les côtés soient les uns parallèles, les autres perpendiculaires à l'axe polaire. Quand ces côtés seront très éloignés du pôle, la valeur de n sera très grande, mais facile à calculer.

Le nombre des racines de l'équation (4) varie avec le nombre des racines de l'équation dérivée

$$D_z F(t, z) = 0, \tag{8}$$

à laquelle deux racines z de l'équation (4) doivent satisfaire, quand ces deux racines deviennent égales entre elles. Quand la fonction synectique $F(t, z)$ est une fonction entière de z, le degré de cette fonction surpasse d'une unité le degré de sa dérivée. Je rechercherai dans un autre article comment se modifie l'énoncé de cette dernière proposition quand on l'applique à une équation transcendante.

§ III. — *Sur les fonctions implicites déterminées par des systèmes d'équations différentielles.*

Comme je l'ai remarqué depuis longtemps, quand on veut intégrer un système d'équations différentielles, on doit commencer par réduire ces équations au premier ordre, ce qu'on peut toujours faire lorsque les équations renferment des dérivées d'ordre supérieur, en considérant quelques-unes de ces dérivées comme de nouvelles inconnues. La réduction dont il s'agit étant effectuée, il sera nécessaire, pour que les inconnues soient complètement déterminées, que le nombre des équations soit précisément égal au nombre des inconnues, et que l'on connaisse les valeurs des inconnues correspondantes à une valeur donnée de la variable indépendante. Par conséquent, les intégrales générales serviront à déduire d'un système donné de valeurs de toutes les variables un autre système de valeurs de ces mêmes variables; et, si la question ne peut être résolue que d'une seule manière, comme il arrive généralement dans la Mécanique, il est clair qu'en la renversant on devra retrouver le premier système, si l'on part du second.

Un autre point capital, sur lequel les Mémoires que j'ai présentés à l'Académie en 1846 [1] ne laissent aucun doute, c'est que, pour bien connaître la nature des intégrales d'un système d'équations différentielles et la nature des fonctions qui représentent ces intégrales, il est nécessaire de considérer non seulement leurs intégrales rectilignes, mais encore et surtout leurs intégrales curvilignes. En effet, la considération de ces dernières permet de déterminer directement le nombre

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. X.

et les valeurs des périodes qui peuvent s'ajouter à la variable indépendante, etc.

D'ailleurs la recherche des propriétés des intégrales devient plus simple et plus facile, quand on commence par réduire les équations données à des équations dont les deux membres sont des fonctions monodromes et monogènes des inconnues et de leurs dérivées. Or on peut généralement y parvenir en introduisant dans le calcul de nouvelles inconnues liées par des équations finies à celles qui entrent dans les équations différentielles.

Ainsi, par exemple, dans le mouvement d'une planète autour du Soleil, les équations différentielles pourront être réduites à sept équations monodromes et monogènes dont l'une sera finie, ces équations étant de la forme

$$\mathrm{D}_t x = u, \qquad \mathrm{D}_t y = v, \qquad \mathrm{D}_t z = w,$$

$$\mathrm{D}_t u = -\frac{k}{r^3}x, \qquad \mathrm{D}_t v = -\frac{k}{r^3}y, \qquad \mathrm{D}_t z = -\frac{k}{r^3}z,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Cela posé, concevons que l'on donne, entre une variable indépendante t et n fonctions inconnues

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w,$$

n équations différentielles de la forme

$$(1) \qquad \mathrm{D}_t x = X, \qquad \mathrm{D}_t y = Y, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{D}_t w = W,$$

X, Y, ..., W étant des fonctions monodromes et monogènes des variables x, y, z, ..., u, v, w, t et d'autres variables r, s, ... liées aux premières par des équations finies. Le premier soin du calculateur devra être de rechercher la nature et les propriétés de chaque inconnue, par exemple de l'inconnue x, considérée comme fonction de t. On y parviendra surtout en recherchant pour quelles valeurs de t, x cesse d'être fonction monodrome et monogène de t. Or ces valeurs sont généralement celles qui rendent x infini, ou X nul, infini, ou indéterminé. Remarquons d'ailleurs que poser $\frac{1}{x} = 0$, ou bien

$$X = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{0}{0}, \quad \text{ou} \quad \infty,$$

c'est établir entre les diverses variables une équation qui peut se vérifier pour une valeur particulière de t.

Soient t cette valeur de t, et

$$\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{w}$$

les valeurs correspondantes de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w.$$

Elles ne devront pas, en général, vérifier aussi l'une des équations qu'on obtient en supposant l'une des quantités

$$Y, \quad \text{ou} \quad Z, \quad \ldots, \quad \text{ou} \quad W$$

nulle, ou infinie, ou indéterminée. Donc, pour une valeur très petite de $t - \mathrm{t}$, les différences

$$y - \mathfrak{y}, \quad z - \mathfrak{z}, \quad \ldots, \quad w - \mathfrak{w}$$

seront, pour l'ordinaire, sensiblement proportionnelles à $t - \mathrm{t}$ et seront même des fonctions monodromes, monogènes et finies de $t - \mathrm{t}$. C'est sur ce principe que s'appuie une nouvelle méthode qui, très souvent, peut être employée avec succès pour l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées, ainsi que je l'expliquerai plus en détail dans un autre article.

568.

Calcul intégral. — *Méthode nouvelle pour l'intégration d'un système d'équations différentielles.*

C. R., T. XLIII, p. 127 (21 juillet 1856).

Parmi les résultats auxquels je suis parvenu en m'occupant des systèmes d'équations différentielles, il me paraît utile de citer une méthode d'intégration que je crois nouvelle, et qui, appliquée à un tel système, en fournit souvent avec facilité les diverses intégrales ou du moins plusieurs d'entre elles. Cette méthode est fondée sur un théorème général dont voici l'énoncé.

Théorème. — *Soient données entre la variable t et n inconnues*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

n équations différentielles du premier ordre

$$(1) \qquad D_t x = X, \qquad D_t y = Y, \qquad D_t z = Z, \qquad \ldots.$$

Soient encore

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

m fonctions linéaires des variables $x, y, z, \ldots$, *et supposons que, les valeurs de*

$$D_t u, \quad D_t v, \quad D_t w, \quad \ldots,$$

étant tirées des formules (1), *on trouve*

$$(2) \qquad \begin{cases} D_t u = U_1 u_1 + U_2 u_2 + U_3 u_3 + \ldots, \\ D_t v = V_1 v_1 + V_2 v_2 + V_3 v_3 + \ldots, \\ D_t w = W_1 w_1 + W_2 w_2 + W_3 w_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$u_1, u_2, u_3, \ldots, v_1, v_2, v_3, \ldots, w_1, w_2, w_3, \ldots$ *étant de nouvelles fonctions linéaires de* $x, y, z, \ldots$. *Si les coefficients*

$$\alpha, \quad 6, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

renfermés dans les fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

peuvent être choisis de manière que

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots, \quad w_1, \quad w_2, \quad w_3, \quad \ldots$$

se réduisent à des fonctions linéaires de

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

et si d'ailleurs, cette condition étant remplie, on ne peut, des formules

$$(3) \qquad u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad \ldots,$$

déduire aucune équation dans laquelle les coefficients

$$\alpha, \quad 6, \quad \gamma, \quad \ldots$$

disparaissent tous à la fois, les formules (3) *représenteront un système d'intégrales des équations données.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit d'observer que, dans l'hypothèse admise, les valeurs générales de $u, v, w, \ldots$ s'évanouiront, en vertu des équations (2), si elles s'évanouissent pour un système particulier de valeurs des variables $y, x, z, \ldots$, et que cette condition pourra être remplie par la fixation de valeurs convenables attribuées aux coefficients $\alpha, 6, \gamma, \ldots$.

La méthode qui repose sur le théorème que je viens d'énoncer offre de nouveaux avantages quand aux équations différentielles données on joint celles qui déterminent de nouvelles inconnues propres à représenter des quantités dont l'introduction dans le calcul est appelée par la nature même des questions que l'on se propose de résoudre.

Dans un prochain article, je montrerai, par des exemples spécialement choisis entre ceux que fournissent la Mécanique et l'Astronomie, les avantages que présente la méthode nouvelle pour l'intégration des systèmes d'équations différentielles.