

桑木文庫
洋書



物理
08
C
2.12

九州帝國大學理學部
8193
物理學教室

桑木文庫
洋書
0162

理學部 洋 邇及
022232002002121

九州大學藏書

貴重書

物
0
2

801865

ŒUVRES

COMPLETES

D'AUGUSTIN CAUCHY



物
0
2

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
36223 Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

I^{re} SÉRIE. — TOME XII,

AVEC UNE TABLE GÉNÉRALE DE LA PREMIÈRE SÉRIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

MCM.

貴重書

物
0
2



PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.



Oeuvres de C. — S. I, t. XII.

貴重書



物
0
2

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)



NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

515.

MÉCANIQUE. — *Sur la théorie des moments linéaires et sur les moments linéaires des divers ordres.*

C. R., T. XXXVI, p. 75 (10 janvier 1853).

J'ai développé, depuis plus d'un quart de siècle, non seulement dans mes *Exercices de Mathématiques*, mais aussi dans mes Leçons données à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences, la théorie des *moments linéaires*. Comme j'en ai fait la remarque, cette théorie se lie intimement, d'un côté, à la théorie des *moments* des forces, pris par rapport à un point fixe, et représentés par des surfaces planes, de l'autre, à la théorie des *couples* établie par M. Poinso. Elle a d'ailleurs, l'avantage de s'appliquer non seulement aux forces, mais encore à toutes les quantités qui ont pour mesure des longueurs portées sur des droites dans des directions déterminées, par exemple aux vitesses et aux quantités de mouvement. Il en résulte qu'elle peut être très utilement employée dans la détermination du mouvement d'un système de points matériels, et en particulier dans la déter-



mination des deux mouvements de translation et de rotation d'un corps solide. D'ailleurs, les théorèmes auxquels on est alors conduit s'énoncent plus facilement, lorsqu'avec MM. Moëbius et Saint-Venant on appelle *somme géométrique* de deux longueurs données une troisième longueur représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux premières. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons d'abord un point mobile rapporté à trois axes fixes qui partent d'une même origine O, et soit P la position de ce point au bout du temps t . Si l'on attribue à t un accroissement infiniment petit Δt , le rayon vecteur OP, considéré comme une quantité géométrique, recevra un accroissement correspondant, et le coefficient de Δt sera, dans l'accroissement du rayon vecteur, ce qu'on nomme la *vitesse*, dans l'accroissement de la vitesse ce qu'on nomme l'*accélération*. Dans la Mécanique, on est généralement convenu d'attribuer cette accélération à une cause du mouvement appelée *force accélératrice*, et l'on prend, pour mesure de cette force, l'accélération même. Cette substitution de la force à l'accélération est d'ailleurs sans inconvénient, et ne saurait être objectée aux géomètres par ceux qui seraient tentés d'élever des doutes sur les résultats du calcul; car on démontre que le système de deux forces appliquées à un point mobile peut être remplacé par leur somme géométrique, et l'expérience prouve que les accélérations, attribuées à des forces diverses, s'ajoutent géométriquement. Ainsi, par exemple, l'accélération d'un astre placé en présence de deux autres est la somme géométrique des accélérations attribuées à des forces attractives émanant de ces derniers.

D'après ce qu'on vient de dire, la force ou l'accélération est, par sa nature, aussi distincte de la vitesse que celle-ci du rayon vecteur mené de l'origine au point mobile. Si quelquefois on a désigné la vitesse sous le nom de *force d'impulsion*, cela tient à ce qu'en Analyse il peut être commode de représenter une grandeur par une autre d'une nature toute différente, par exemple une force par une lon-

gueur, ou réciproquement une longueur par une force. Mais il vaut mieux, ce semble, afin de prévenir toute espèce d'équivoque, éviter de substituer les prétendues forces d'impulsion ou les couples d'impulsion aux vitesses elles-mêmes ou aux moments linéaires de ces vitesses.

Revenons au point mobile P. Pendant qu'il se meut dans l'espace, le rayon vecteur OP décrit une surface conique. Construisons une courbe dont l'arc soit proportionnel à l'aire décrite par le rayon vecteur, la tangente menée par l'extrémité S de cet arc étant perpendiculaire au plan qui touche le cône suivant le rayon vecteur. Le point mobile S sera celui qu'on peut nommer, en se servant d'une épithète introduite dans la science par M. Binet, le *curseur aréolaire*. D'ailleurs la vitesse de ce curseur ou la *vitesse aréolaire* sera proportionnelle au moment linéaire de la vitesse du point P, et l'accélération du point S ou l'*accélération aréolaire* sera proportionnelle au moment linéaire de l'accélération du point P. Dans mes Leçons de 1849, à la Faculté des Sciences, j'ai supposé que le rapport entre l'arc aréolaire et l'aire décrite par le rayon vecteur se réduisait à l'unité. Alors la vitesse aréolaire ne diffère pas en intensité de celle que M. Binet a désignée sous ce nom, c'est-à-dire de la vitesse avec laquelle croît l'aire décrite par le rayon vecteur. Si le rapport de l'arc à cette aire devient égal à 2, la vitesse et l'accélération aréolaires seront précisément les moments linéaires de la vitesse et de l'accélération du point mobile P.

Tandis que le point mobile P se déplace dans l'espace, la projection orthogonale ou même oblique de ce point sur un plan ou sur un axe se déplace pareillement, et le déplacement de cette projection n'est autre chose que la projection du déplacement du point P. De cette seule remarque il suit immédiatement que *la vitesse et l'accélération du point projeté sont les projections de la vitesse et de l'accélération du point donné*.

Plus généralement, si deux points se meuvent simultanément dans l'espace, le déplacement absolu du second sera la somme géométrique qu'on obtient en ajoutant au déplacement absolu du premier le dépla-



vement apparent du second vu du premier. Donc aussi *la vitesse absolue et l'accélération absolue du second point seront les sommes géométriques qu'on obtient quand, à la vitesse ou à l'accélération absolue du premier point, on ajoute la vitesse ou l'accélération apparente du second point vu du premier.*

Enfin, lorsqu'un point mobile P se déplace dans l'espace, si l'on mène par ce point et par un certain axe RS un plan PRS, ce plan se déplacera lui-même avec le temps, et, pendant un instant infiniment petit Δt , il décrira autour de l'axe RS un certain angle. Le coefficient de Δt , dans la valeur de cet angle, sera ce qu'on peut appeler *la vitesse angulaire* du plan mobile autour de l'axe RS. On obtiendra cette vitesse angulaire en divisant la projection de la vitesse du point P sur une perpendiculaire au plan PRS par la distance du point P à l'axe RS.

Jusqu'ici, nous avons fait abstraction de la nature des corps et des points matériels. Alors, comme on l'a dit, l'accélération que produit une force appliquée à un point matériel peut servir de mesure à cette force, nommée, pour cette raison, *accélératrice*. Mais l'expérience démontre que l'effet produit, dans le cas d'équilibre ou de mouvement, par une force appliquée à un point matériel, est tout à la fois proportionnel à l'accélération et à un certain coefficient appelé *masse*, qui dépend de la nature du point mobile. Donc, lorsqu'on veut avoir égard à la masse, on doit prendre pour mesure de la force le produit de la masse par l'accélération. On obtient de cette manière ce qu'on nomme *la force motrice*.

Considérons maintenant un système de points mobiles libres ou assujettis à des liaisons quelconques. En vertu du principe de d'Alembert, le système des forces appliquées à ces points devra être équivalent au système des forces motrices qui ont pour mesure les produits de leurs masses par leurs accélérations; et, pour obtenir les diverses équations du mouvement, il suffira de joindre à cette proposition le principe des vitesses virtuelles. Si les liaisons données permettent de prendre successivement pour mouvements virtuels des

mouvements quelconques de translation ou de rotation communs aux divers points, par exemple des mouvements effectués parallèlement aux axes coordonnés ou autour de ces mêmes axes, la considération de ces mouvements fournira *six équations* entre les deux systèmes de forces ci-dessus mentionnés. D'ailleurs, ces six équations pourront être remplacées par deux *équations géométriques*, exprimant que *la somme géométrique des forces et la somme géométrique de leurs moments linéaires, en d'autres termes, LA FORCE PRINCIPALE et le MOMENT-PRINCIPAL restent les mêmes dans les deux systèmes*. Ajoutons qu'il faut bien se garder de confondre le moment principal qui se rapporte aux forces, et qu'on pourrait appeler *le moment dynamique*, avec le moment principal qui se rapporte aux quantités de mouvement, c'est-à-dire aux vitesses multipliées par les masses, et qu'on pourrait appeler *le moment cinématique*. De ces deux moments, le premier est la dérivée du second, prise par rapport au temps, tout comme la somme géométrique des forces motrices est la dérivée de la somme géométrique des quantités de mouvement.

Les deux équations géométriques ici indiquées continuent de subsister, lorsque, dans chacune d'elles, on remplace les diverses quantités géométriques par leurs projections algébriques sur un même axe; et, en prenant successivement pour cet axe chacun des axes coordonnés, on est immédiatement ramené aux six équations connues, qui se trouvent ainsi établies dans le cas même où les axes cessent d'être rectangulaires.

Concevons à présent qu'après avoir multiplié la masse de chacun des points matériels donnés par la quantité géométrique qui représente le rayon vecteur mené de l'origine à ce point, ou par sa dérivée du premier ou du second ordre, c'est-à-dire, en d'autres termes, par la vitesse du point ou par son accélération, on ajoute entre eux les produits ainsi formés; on obtiendra un *rayon vecteur moyen*, ou une *vitesse moyenne*, ou une *accélération moyenne*. Or l'extrémité du rayon vecteur moyen sera précisément ce qu'on appelle le *centre des moyennes distances*, ou *centre d'inertie*, et la vitesse moyenne, ainsi que l'accélé-



ration moyenne, ne seront autre chose que la vitesse et l'accélération de ce même centre. Il y a plus : si, dans les produits dont il s'agit, on substitue aux rayons vecteurs, aux vitesses et aux accélérations leurs moments linéaires, ou, en d'autres termes, si l'on substitue à chacun des points donnés le curseur aréolaire qui lui correspond, alors, à la place du centre d'inertie, on obtiendra ce qu'on peut appeler le *centre aréolaire*. Cela posé, les deux équations géométriques ci-dessus indiquées montrent que le centre d'inertie se meut comme si toutes les forces motrices lui étaient appliquées, et le centre aréolaire comme un point auquel on appliquerait à chaque instant, non plus les forces motrices données, mais d'autres forces représentées par les moments linéaires des premières.

Dans le cas particulier où la somme géométrique des forces appliquées s'évanouit, ainsi que la somme géométrique de leurs moments linéaires, le centre d'inertie du système des points donnés est animé d'une vitesse constante et constamment dirigée suivant la même droite ; en d'autres termes, le *centre d'inertie a un mouvement uniforme*, et l'on peut en dire autant du *centre aréolaire*.

Je viens de rappeler les principes généraux sur lesquels il paraît convenable de s'appuyer pour résoudre les problèmes de la Mécanique. Ces principes, que j'ai développés en 1849, dans mes Leçons à la Faculté des Sciences, et qui sont même en grande partie ceux qu'à l'École Polytechnique je présentais, il y a plus d'un quart de siècle, comme devant servir de base à la Mécanique, résumés en quelque sorte, sous une forme simple et lumineuse, non seulement les théories exposées dans les Mémoires ou les Ouvrages d'Euler, de Lagrange, de d'Alembert, etc., mais encore les recherches plus récemment publiées sur ce sujet, soit dans la *Mécanique* de Poisson, soit dans les Ouvrages de divers auteurs, particulièrement de MM. Poincaré, Binet, Coriolis, Moëbius, Saint-Venant, etc. On peut d'ailleurs, dans l'application de ces principes à la solution définitive des problèmes, recourir utilement à la considération des moments linéaires des divers ordres dont je vais donner une idée en peu de mots.

Un point fixe O étant pris pour centre des moments, considérons une longueur AB qui, partant d'un autre point A , aboutisse au point B ; et, après avoir construit le moment linéaire OK de la longueur AB , menons par le point A une droite AC égale et parallèle à OK , puis une droite AD égale et parallèle au moment linéaire de AC ; etc. Les moments linéaires successifs des longueurs AB , AC , AD , ... seront, à l'égard de la longueur AB , ce que nous nommerons *les moments linéaires du premier, du second, du troisième, ... ordre*. Comme je l'expliquerai dans un autre article, l'usage de ces moments linéaires conduit très promptement aux formules qui déterminent le double mouvement de translation et de rotation d'un corps. Dans le cas où le corps est retenu par un point fixe, on arrive, presque sans calcul, à une équation géométrique qui comprend les trois formules données par Euler pour la détermination du mouvement de rotation du corps autour de ce point. Il y a plus : on peut souvent déduire avec facilité de cette équation géométrique les lois du mouvement. On en conclut, par exemple, qu'un solide de révolution, soumis à la seule action de la pesanteur et traversé par un axe dont l'extrémité inférieure s'appuie sur un plan horizontal, peut, en tournant sur lui-même avec une vitesse suffisamment grande, tourner en même temps autour de la verticale; de manière que l'inclinaison de l'axe par rapport au plan horizontal demeure constante. Je me bornerai, pour le moment, à formuler ici les lois de ce phénomène qu'indiquent les évolutions d'une toupie, et qu'a mis en évidence une belle expérience de M. Foucault.

Soient

P le poids du corps;

X la distance entre le centre de gravité et le point d'appui, situés l'un et l'autre sur l'axe de révolution;

α l'angle formé par cet axe avec la verticale;

A le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de révolution;

B le moment d'inertie relatif à un second axe horizontal, perpendiculaire au premier, et passant par le point d'appui;



algébrique des divers termes du tableau

$$(19) \quad \begin{cases} k_{1,1}, & k_{2,1}, & k_{3,1}, & \dots, & k_{n,1}, \\ k_{1,2}, & k_{2,2}, & k_{3,2}, & \dots, & k_{n,2}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ k_{1,n}, & k_{2,n}, & k_{3,n}, & \dots, & k_{n,n}. \end{cases}$$

le signe S pouvant être censé relatif à l'un quelconque des deux systèmes d'indices; et, puisque les facteurs symboliques A, B, C, \dots, H vérifient les conditions (5), on tirera encore des formules (16)

$$(20) \quad ABC \dots HS(\pm x_1 y_2 z_3 \dots w_n) = K_1 K_2 K_3 \dots K_n.$$

Si, dans cette dernière formule, on substitue les valeurs des produits $ABC \dots H, K_1 K_2 K_3 \dots K_n$ fournies par les équations (13) et (18), et si, dans l'équation nouvelle ainsi obtenue, on suppose, pour plus de simplicité,

$$x_1 y_2 \dots z_n = 1,$$

on trouvera

$$(21) \quad S(a_1 b_2 c_3 \dots h_n) S(\pm x_1 y_2 z_3 \dots w_n) = S(\pm k_{1,1} k_{2,2} k_{3,3} \dots k_{n,n}).$$

On sera ainsi ramené, par la considération des produits symboliques, à un théorème que j'ai démontré dans le XVII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (*), et que l'on peut énoncer comme il suit :

THEOREME II. — *Le produit de deux résultantes algébriques est encore une résultante algébrique.*

Pour mettre en évidence les avantages que présente l'intervention des clefs dans les applications numériques, supposons que l'on se propose de résoudre les trois équations

$$(22) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 3x + y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 5. \end{cases}$$

(*) Voir aussi dans le même Cahier un Mémoire de M. Binet.

De ces équations respectivement multipliées par α, β, γ , puis combinées entre elles par voie d'addition, on tirera

$$(23) \quad Ax + By + Cz = K,$$

les valeurs de A, B, C, K étant

$$(24) \quad \begin{cases} A = \alpha + 3\beta + 2\gamma, & B = 2\alpha + \beta + 3\gamma, & C = 3\alpha + 2\beta + \gamma, \\ & & K = \alpha + 3\beta + 5\gamma. \end{cases}$$

puis, en considérant α, β, γ comme des clefs assujetties aux conditions de la forme

$$\alpha^2 = 0, \quad \dots, \quad \beta\alpha = -\alpha\beta, \quad \dots,$$

on tirera immédiatement de l'équation (23) multipliée par le produit BC la valeur de l'inconnue x . Effectivement, dans cette hypothèse, les formules (24) donneront

$$BC = -5\beta\gamma + 7\gamma\alpha + \alpha\beta;$$

et par suite, en posant, pour abrégé,

$$\alpha\beta\gamma = 1,$$

on trouvera

$$ABC = -1.5 + 3.7 + 2.1 = 18,$$

$$KBC = -1.5 + 3.7 + 5.1 = 21,$$

$$x = \frac{KBC}{ABC} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}.$$

La valeur de x étant ainsi obtenue, on déduira immédiatement de la formule (23) multipliée par le seul facteur C la valeur de y , et l'on pourra même, dans la détermination de y , réduire à zéro l'une quelconque des trois clefs α, β, γ . En prenant, pour fixer les idées, $\gamma = 0$, on tirera des formules (24)

$$(25) \quad \begin{cases} A = \alpha + 3\beta, & B = 2\alpha + \beta, & C = 3\alpha + 2\beta, \\ & & K = A, \end{cases}$$



puis, en posant, pour abrégér,

$$\alpha \approx 1,$$

on trouvera

$$BC = 1, \quad AC = KC = -7,$$

$$y = \frac{AC}{BC}(1-x) = -7(1-x) = \frac{7}{6} = x.$$

Enfin, on tirera de la formule (23), en réduisant à zéro deux clefs, par exemple α et ξ ,

$$z = 5 - 2x - 3y = 5(1-x) = -\frac{5}{6}.$$

On aura donc, en définitive,

$$(26) \quad x = y = \frac{7}{6}, \quad z = -\frac{5}{6}.$$

Remarquons d'ailleurs que, en appliquant l'équation (23) à la détermination des inconnues x, y, z , on peut choisir arbitrairement : 1° l'ordre dans lequel on déterminera ces inconnues; 2° l'ordre dans lequel on multipliera les facteurs symboliques des produits ABC, KBC, \dots ; 3° les clefs que l'on fera évanouir dans les valeurs des inconnues y et z . Il y aura donc un grand nombre de manières différentes d'effectuer le calcul; mais, quelle que soit celle que l'on adopte, on sera toujours conduit au même résultat. Ainsi, par exemple, si dans la détermination de y on pose, non plus $\gamma = 0$, mais $\xi = 0$, on trouve

$$A = \alpha + 2\gamma, \quad B = 2\alpha + 3\gamma, \quad C = 3\alpha + \gamma, \\ K = \alpha + 5\gamma.$$

puis, en posant, pour abrégér, $\gamma x = 1$, on trouvera

$$BC = 7, \quad AC = 5, \quad KC = 14, \\ y = \frac{KC - ACx}{BC} = \frac{14 - 5x}{7} = \frac{7}{6}.$$

Dans un prochain article, je montrerai les avantages que présente l'emploi des clefs algébriques dans la résolution des équations non linéaires.

517.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur les avantages que présente, dans un grand nombre de questions, l'emploi des clefs algébriques.

C. R., T. XXXVI, p. 161 (24 janvier 1853).

Dans les précédents articles, j'ai fait voir que l'élimination des inconnues entre des équations linéaires et la résolution d'équations de cette forme pouvaient être réduites, par l'emploi des clefs algébriques, à de simples multiplications. J'ajoute que la théorie des clefs réduit encore à la multiplication un grand nombre d'opérations d'Algèbre et de questions diverses, par exemple la division algébrique, la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes donnés, le problème de l'interpolation, l'élimination des inconnues entre des équations de degrés quelconques, etc. C'est effectivement ce qui résulte des principes que je vais poser.

ANALYSE.

Je commencerai par établir la proposition suivante :

THEOREME. — Soient $f(x), F(x)$ deux fonctions entières de x : la première, du degré n ; la seconde, du degré m . Soient encore μ, ν deux nombres entiers distincts de m, n ; et nommons l la plus grande des deux différences

$$m - \mu, \quad n - \nu,$$

ou leur valeur commune, si elles sont égales. On pourra, si l est positif, satisfaire à l'équation

$$(1) \quad u = \nu f(x) + w F(x),$$

en prenant pour

$$u, \quad v, \quad w$$

trois fonctions entières de x , dont les degrés soient respectivement

$$l-1, \quad \mu, \quad \nu.$$



Démonstration. — En effet, supposons

$$(2) \quad v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\mu x^\mu, \quad w = \epsilon_0 + \epsilon_1 x + \dots + \epsilon_\nu x^\nu;$$

à ces valeurs de v , w correspondra, en vertu de l'équation (1), une valeur de u , qui sera de la forme

$$(3) \quad u = \omega_0 + \omega_1 x + \dots + \omega_{l+\mu+\nu} x^{l+\mu+\nu},$$

le degré $l + \mu + \nu$ de u , considéré comme fonction de x , étant le plus grand des nombres

$$m + \nu, \quad n + \mu,$$

ou leur valeur commune, s'ils sont égaux, et les quantités

$$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{l+\mu+\nu}$$

étant des fonctions linéaires des coefficients

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_\nu.$$

D'ailleurs, le nombre de ces coefficients étant $\mu + \nu + 2$, on pourra, en attribuant à l'un d'eux une valeur arbitraire, choisir les autres de manière à faire évanouir $\mu + \nu + 1$ termes dans la fonction u ; et, si ces termes sont ceux qui renferment les plus hautes puissances de x , c'est-à-dire si l'on choisit les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_\nu$, ou plutôt leurs rapports, de manière à vérifier les équations

$$(4) \quad \omega_l = 0, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \dots, \quad \omega_{l+\mu+\nu} = 0,$$

alors u , réduit à la forme

$$(5) \quad u = \omega_0 + \omega_1 x + \dots + \omega_{l-1} x^{l-1},$$

sera, non plus du degré $l + \mu + \nu$, mais du degré $l - 1$. Cela posé, les polynômes u , v , w satisferont évidemment aux conditions énoncées dans le théorème.

Quant à la détermination précise des valeurs de u , v , w , on pourrait l'effectuer, dans tous les cas, en tirant des équations (4) les valeurs des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_\nu$, et en substi-

tuant ces valeurs dans les formules (2) et (5). Il y a plus : dans le cas particulier où l'on a

$$(6) \quad m - \mu = n - \nu,$$

on peut, comme l'a remarqué M. Liouville, déduire d'une formule d'interpolation, donnée dans la Note V de mon *Analyse algébrique* (1), les valeurs de u , v , w , exprimées en fonctions symétriques des racines des deux équations

$$(7) \quad f(x) = 0,$$

$$(8) \quad F(x) = 0,$$

attendu que, en vertu de la formule (1), on a, pour chacune des valeurs de x propres à vérifier l'équation (7),

$$(9) \quad \frac{u}{w} = F(x)$$

et, pour chacune des valeurs de x propres à vérifier l'équation (8),

$$(10) \quad \frac{u}{v} = f(x).$$

Mais, après avoir exprimé u , v , w en fonctions symétriques des racines des équations (7) et (8), on devrait encore transformer ces fonctions symétriques en fonctions des coefficients que renferment $f(x)$ et $F(x)$. Enfin, dans le cas où la condition (6) est remplie, on pourrait exprimer les diverses valeurs de u , v , w correspondantes aux diverses valeurs de μ , en fonction des quotients et des restes fournis par les divisions qu'entraîne la recherche du plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $F(x)$. J'ajoute que, si l'on considère les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_\nu$ comme des clefs algébriques, il ne sera plus nécessaire de recourir ni à la résolution des équations (4), ni à aucune des opérations algébriques dont nous venons de parler, et qu'alors une simple multiplication suffira, dans tous les cas, pour déduire des fonctions entières u , v , w , déterminées par les équations

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 429.



tions (2) et (3), trois autres fonctions entières u, v, w , qui rempliront les conditions énoncées dans le théorème. En effet, les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\nu$ étant prises pour des clefs assujetties aux transmutations de la forme

$$\alpha^2 \simeq 0, \dots, \beta \alpha \simeq -\alpha \beta, \dots,$$

posons

$$(11) \quad \Omega = \omega_l \omega_{l+1} \dots \omega_{l+\mu+\nu};$$

et soient, d'ailleurs,

$$(12) \quad u = \Omega u, \quad v = \Omega v, \quad w = \Omega w.$$

Il est clair que l'équation

$$u = v f(x) + w F(x)$$

entraînera la suivante

$$(13) \quad u = v f(x) + w F(x),$$

et que les degrés des trois fonctions nouvelles

$$u, v, w$$

seront respectivement

$$l-1, \mu, \nu.$$

Remarquons encore que, si l'on nomme c le coefficient de la plus haute puissance de x dans u , la première des formules (12) donnera

$$c = \Omega \omega_{l-1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(14) \quad c = (-1)^{\mu+\nu-1} \omega_{l-1} \Omega.$$

Pour que les valeurs de u, v, w, c données par les formules (12) et (14) puissent être calculées numériquement, il sera nécessaire d'attribuer une valeur déterminée au produit des clefs

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu; \quad \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\nu,$$

multipliées l'une par l'autre dans un certain ordre. Par ce motif, nous assujettirons désormais les clefs dont il s'agit à la condition

$$(15) \quad \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_\mu \beta_0 \beta_1 \dots \beta_\nu \simeq 1.$$

Revenons maintenant au cas spécial où les nombres μ, ν sont liés entre eux par la condition (6), et supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, $m \geq n$. On aura

$$(16) \quad l = m - \mu = n - \nu,$$

et, puisque l doit être positif, le nombre

$$\mu = m - l$$

sera l'un des termes de la suite

$$0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Alors aussi, μ venant à changer de valeur, les trois fonctions

$$u, v, w$$

varieront avec leurs degrés exprimés par les trois nombres

$$m - \mu - 1, \mu, n - m + \mu,$$

et c variera encore ainsi que Ω . Cela posé, représentons, à l'aide des notations

$$u_\mu, v_\mu, w_\mu, c_\mu,$$

les quantités

$$u, v, w, c,$$

considérées comme fonctions du nombre variable μ . La formule (13) donnera

$$(17) \quad u_\mu = v_\mu f(x) + w_\mu F(x),$$

et l'on tirera de la formule (14)

$$(18) \quad c_\mu = (-1)^{m+\mu-1} \omega_{m-\mu-1} \omega_{m-\mu} \dots \omega_{n+\mu-1} \omega_{n+\mu}.$$



Cherchons à présent les coefficients des plus hautes puissances de x dans v_μ et w_μ . Ces coefficients seront, en vertu des formules (12) jointes aux équations (2),

$$(19) \quad \Omega \alpha_\mu, \quad \Omega \varepsilon_\nu,$$

la valeur de Ω étant

$$(20) \quad \Omega = \omega_{m-\mu} \dots \omega_{n+\mu-1} \omega_{n+\mu}.$$

Si d'ailleurs on pose

$$(21) \quad \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \\ F(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, \end{cases}$$

on aura

$$\omega_{m+\mu} = a_n \alpha_\mu + b_m \varepsilon_\nu,$$

et par suite les expressions (19) deviendront

$$(22) \quad \begin{cases} -b_m \omega_{m-\mu} \dots \omega_{n+\mu-1} \alpha_\mu \varepsilon_\nu, \\ + a_n \omega_{m-\mu} \dots \omega_{n+\mu-1} \alpha_\mu \varepsilon_\nu. \end{cases}$$

D'autre part, lorsqu'on multipliera $\alpha_\mu \varepsilon_\nu$ par le produit symbolique

$$\omega_{m-\mu} \dots \omega_{n+\mu-1},$$

on pourra, dans ce produit, réduire à zéro les deux clefs $\alpha_\mu, \varepsilon_\nu$; par conséquent, on pourra réduire la valeur de ce même produit à celle que lui assigne la formule (18), quand on remplace, dans cette formule, μ par $\mu - 1$, c'est-à-dire à la quantité

$$(-1)^{m+n-1} c_{\nu-1}.$$

Enfin, en vertu de la convention qu'exprime la formule (15), on devra supposer, dans l'évaluation de $c_{\mu-1}$,

$$(23) \quad \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{\mu-1} \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{\nu-1} \simeq 1,$$

et, dans l'évaluation des produits (22),

$$\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{\mu-1} \alpha_\mu \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{\nu-1} \varepsilon_\nu \simeq 1,$$

par conséquent

$$\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{\mu-1} \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{\nu-1} \alpha_\mu \varepsilon_\nu \simeq (-1)^\mu.$$

Donc, et attendu que l'on a $\nu = n - m + \mu$, les produits (22), ou les coefficients de x^μ et de $x^{n-m+\mu}$, dans les fonctions v_μ et w_μ , se réduiront aux deux quantités

$$(24) \quad (-1)^\mu b_m c_{\mu-1}, \quad (-1)^{\mu+1} a_n c_{\mu-1}.$$

Il sera maintenant facile de tirer de la formule (17) une équation remarquable à laquelle satisfont les fonctions v_μ, w_μ . En effet, si, dans la formule (17), on remplace μ par $\mu + 1$, on obtiendra la suivante

$$(25) \quad u_{\mu+1} = v_{\mu+1} f(x) + w_{\mu+1} F(x);$$

puis, en faisant, pour abrégier,

$$(26) \quad k_{\nu, \mu} = v_\nu w_\mu - v_\mu w_\nu,$$

on tirera des formules (17) et (25),

$$(27) \quad \begin{cases} k_{\mu, \mu+1} f(x) = u_\mu w_{\mu+1} - u_{\mu+1} w_\mu, \\ k_{\mu+1, \mu} F(x) = u_\mu v_{\mu+1} - u_{\mu+1} v_\mu. \end{cases}$$

Or les degrés des produits

$$u_\mu w_{\mu+1}, \quad u_\mu v_{\mu+1},$$

étant exprimés par les nombres

$$l + \nu = n, \quad l + \mu = m,$$

par conséquent égaux aux degrés des fonctions

$$f(x), \quad F(x),$$

tandis que les degrés des produits

$$u_{\mu+1} w_\mu, \quad u_{\mu+1} v_\mu$$

se réduisent aux nombres $n - 2, m - 2$, il résulte des formules (27)



que les quantités

$$k_{\mu, \mu+1}, k_{\mu+1, \mu},$$

égales au signe près, mais affectées de signes contraires, sont indépendantes de x . Comme d'ailleurs les coefficients des plus hautes puissances de x , dans les fonctions

$$f(x), F(x), u_{\mu}, v_{\mu+1}, w_{\mu+1},$$

seront respectivement

$$a_{\mu}, b_{\mu}, c_{\mu}, (-1)^{\mu+1} b_{\mu} c_{\mu}, (-1)^{\mu} a_{\mu} c_{\mu},$$

les deux derniers étant ce que deviennent les quantités (24) quand on remplace μ par $\mu + 1$, on tirera des formules (27).

$$(28) \quad k_{\mu, \mu+1} = -k_{\mu+1, \mu} = (-1)^{\mu} c_{\mu}^2.$$

En d'autres termes, on aura

$$(29) \quad v_{\mu} w_{\mu+1} - v_{\mu+1} w_{\mu} = (-1)^{\mu} c_{\mu}^2.$$

Remarquons encore que si, dans la formule (17), on remplace μ par $\mu + 2$, on obtiendra la suivante

$$(30) \quad u_{\mu+2} = v_{\mu+2} f(x) + w_{\mu+2} F(x),$$

et que, des formules (17), (25), (30), on tire, en éliminant $f(x)$ et $F(x)$,

$$(31) \quad k_{\mu+1, \mu+2} u_{\mu} + k_{\mu+2, \mu} u_{\mu+1} + k_{\mu+1, \mu+1} u_{\mu+2} = 0,$$

par conséquent,

$$(32) \quad u_{\mu} = (-1)^{\mu} \frac{k_{\mu, \mu+2}}{c_{\mu+1}^2} u_{\mu+1} + \left(\frac{c_{\mu}}{c_{\mu+1}} \right)^2 u_{\mu+2}.$$

Dans cette dernière formule, où les degrés des polynômes

$$u_{\mu}, u_{\mu+1}, u_{\mu+2}$$

sont exprimés par les nombres

$$n - \mu - 1, n - \mu - 2, n - \mu - 3,$$

$k_{\mu, \mu+2}$ ne pourra être évidemment qu'une fonction linéaire de la variable x .

Des principes que nous venons d'établir on déduira sans peine la conséquence que nous avons déjà indiquée, savoir que l'intervention des clefs réduit à la multiplication un grand nombre d'opérations algébriques.

S'agit-il, par exemple, de diviser le polynôme $f(x)$ du degré n par un autre polynôme $F(x)$ du degré m égal ou inférieur à n , on posera $\mu = 0$, $\nu = n - m$. Alors la fonction v , déterminée par la formule

$$(33) \quad v = \Omega x_0,$$

sera réduite à une quantité constante. Alors aussi, de l'équation (13) présentée sous la forme

$$(34) \quad f(x) = \frac{u}{v} - \frac{w}{v} F(x),$$

on conclura qu'en divisant $f(x)$ par $F(x)$ on obtiendra pour quotient et pour reste les deux fonctions entières

$$-\frac{w}{v}, \frac{u}{v}.$$

S'agit-il d'éliminer x entre les deux équations

$$f(x) = 0, F(x) = 0,$$

alors on posera $\mu = m - 1$, $\nu = n - 1$, et l'équation résultante de l'élimination sera

$$(35) \quad u = 0,$$

la valeur de u étant donnée par la première des équations (12), de sorte qu'on aura

$$u = \Omega u = \Omega \omega_0.$$

Par suite l'équation résultante pourra être réduite à la formule

$$(36) \quad \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{m+n-1} = 0.$$

Si d'ailleurs on veut, de cette dernière formule, déduire celle que j'ai donnée, comme propre à résoudre la même question, dans mon pre-



mier article sur les clefs ⁽¹⁾, il suffira d'échanger entre elles les colonnes horizontales et verticales dans le Tableau formé avec les divers termes, dont le premier membre de la formule (36) représente la résultante algébrique.

S'agit-il enfin d'obtenir les quotients et les restes divers des divisions qu'entraîne la recherche du plus grand commun diviseur des fonctions entières $f(x)$, $F(x)$, il suffira de recourir aux formules (12) et (26), à l'aide desquelles on déterminera les diverses valeurs de la fonction u ou u_p , et de la fonction $k_{p,p+2}$. En effet, il résulte des formules (34) et (32) que les divers restes et les divers quotients seront les produits des diverses valeurs de u_p et de $k_{p,p+2}$ par des constantes que donnent ces formules mêmes.

Ajoutons que l'intervention des clefs fournira encore un moyen de réduire à de simples multiplications les problèmes dont les solutions s'appuyaient sur l'une des opérations algébriques ici rappelées, par exemple, l'évaluation d'une fonction symétrique des racines d'une équation, et spécialement du produit des carrés des différences entre ces racines, la détermination du nombre des racines égales et leur élimination, la détermination d'une limite inférieure à la plus petite différence entre deux racines réelles, la détermination du nombre des racines positives, du nombre des racines négatives, et, plus généralement, du nombre des racines réelles ou imaginaires qui satisfont à certaines conditions, etc.

518.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données.*

C. R., T. XXXVI, p. 454 (14 mars 1853).

En établissant, dans mon *Analyse algébrique*, les règles générales

⁽¹⁾ *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. XI, p. 441.

relatives à la convergence des séries, j'ai, de plus, énoncé le théorème suivant :

Lorsque les différents termes de la série

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable, dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .

Comme l'ont remarqué MM. Bouquet et Briot, ce théorème se vérifie pour les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une variable. Mais, pour d'autres séries, il ne saurait être admis sans restriction. Ainsi, par exemple, il est bien vrai que la série

$$(2) \quad \sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \frac{\sin 3x}{3}, \dots,$$

toujours convergente pour des valeurs réelles de x , a pour somme une fonction de x qui reste continue, tandis que x , supposée réelle, varie, dans le voisinage d'une valeur distincte d'un multiple $\pm 2n\pi$ de la circonférence 2π , et qui se réduit, en particulier, à $\frac{\pi-x}{2}$, entre les limites $x=0$, $x=2\pi$. Mais, à ces limites mêmes, la somme s de la série (2) devient discontinue, et cette somme, considérée comme fonction de la variable réelle x , acquiert, à la place de la valeur

$$+\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2},$$

donnée par la formule

$$s = \frac{\pi - x}{2},$$

la valeur *singulière* $s=0$, qui reparait encore quand on suppose

$$x = \pm 2n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque.

Au reste, il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du



théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

D'après la définition proposée dans mon *Analyse algébrique*, et généralement adoptée aujourd'hui, une fonction u de la variable réelle x sera *continue* entre deux limites données de x , si, cette fonction admettant pour chaque valeur intermédiaire de x une valeur unique et finie, un accroissement infiniment petit attribué à la variable produit toujours, entre les limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Cela posé, concevons que la série (1) reste convergente, et que ses divers termes soient fonctions continues d'une variable réelle x , pour toutes les valeurs de x renfermées entre certaines limites. Soient alors

s la somme de la série ;

s_n la somme de ses n premiers termes ;

$r_n = s - s_n = u_n + u_{n+1} + \dots$ le reste de la série indéfiniment prolongée à partir du terme général u_n .

Si l'on nomme n' un nombre entier supérieur à n , le reste r_n ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes de n' , la différence

$$(3) \quad s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n'-1}.$$

Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande on puisse rendre, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites données, le module de l'expression (3) (quel que soit n'), et, par suite, le module de r_n , inférieurs à un nombre ε aussi petit que l'on voudra. Comme un accroissement attribué à x pourra encore être supposé assez rapproché de zéro pour que l'accroissement correspondant de s_n offre un module inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra, il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction

$$s = s_n + r_n.$$

Mais cette démonstration suppose évidemment que l'expression (3) remplit la condition ci-dessus énoncée, c'est-à-dire que cette expression devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande attribuée au nombre entier n . D'ailleurs, si cette condition est remplie, la série (1) sera évidemment convergente. En conséquence, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si les différents termes de la série*

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

sont des fonctions de la variable réelle x , continues, par rapport à cette variable, entre des limites données; si, d'ailleurs, la somme

$$(3) \quad u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n'-1}$$

devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série (1) sera, entre les limites données, fonction continue de la variable x .

Si à la série (1) on substitue la série (2), l'expression (3), réduite à la somme

$$(4) \quad \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \dots + \frac{\sin n'x}{n'},$$

s'évanouira pour $x = 0$; mais, pour des valeurs de x très voisines de zéro, par exemple pour $x = \frac{1}{n}$, n étant un très grand nombre, elle pourra différer notablement de zéro; et si, en attribuant à n une très grande valeur, on pose non seulement $x = \frac{1}{n}$, mais encore $n' = \infty$, la somme (4), ou, ce qui revient au même, le reste r_n de la série (2) se réduira sensiblement à l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4.5} + \dots = 0,6244\dots$$

Ajoutons que, pour une valeur de x positive, mais très voisine de



zéro, la somme s de la série (2) se réduira sensiblement à l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} = 1,570796\dots$$

Soit maintenant

$$z = x + yi$$

une variable imaginaire. Cette variable pourra être censée représenter l'*affixe* d'un point mobile A situé dans un certain plan, et, d'après la définition que j'ai proposée à la page 161 du XXXII^e Volume des *Comptes rendus* (1), une autre variable imaginaire

$$u = v + wi$$

sera *fonction* de z , si les variables réelles v, w sont *fonctions* de x et y . D'ailleurs, rien n'empêchera d'étendre aux fonctions de variables imaginaires la définition donnée pour les fonctions continues de variables réelles, et dès lors une fonction u de la variable imaginaire z sera *continue* par rapport à cette variable, pour toutes les valeurs de l'*affixe* z correspondantes aux divers points d'une aire S renfermée dans l'intérieur d'un certain contour, si, cette fonction admettant pour chacun de ces points une valeur unique et finie, un accroissement infiniment petit attribué à l'*affixe* z produit toujours, dans le voisinage de chacun d'eux, un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Cela posé, en raisonnant comme ci-dessus, on établira encore très facilement la proposition suivante :

THEOREME II. — *Si les différents termes de la série*

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

*sont des fonctions de la variable imaginaire z , continues par rapport à cette variable pour les diverses valeurs de l'*affixe* z correspondantes aux divers points d'une aire S renfermée dans un certain contour, si d'ailleurs, pour chacune de ces valeurs, la somme*

$$u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n'}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I. T. XI, p. 302.

devient toujours infiniment petite, quand on attribue des valeurs infiniment grandes aux nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série sera, entre les limites données, fonction continue de la variable z .

On conclut aisément du théorème II que la somme de la série (1) est fonction continue dans le voisinage d'une valeur donnée de z , lorsque, chaque terme étant dans ce voisinage fonction continue de z , le module de la série, correspondant à la valeur donnée de z , est inférieur à l'unité. Dans le même cas, si chaque terme offre une dérivée unique, la série formée avec les dérivées des divers termes sera encore une série convergente dont la somme offrira une seule dérivée équivalente à la dérivée de la somme de la série proposée.

En terminant, nous fixerons le sens de quelques expressions qui peuvent être utilement employées pour simplifier les énoncés de théorèmes relatifs à la continuité des fonctions et à la convergence des séries.

Une fonction de la variable réelle ou imaginaire z sera dite *monodrome*, si elle ne cesse d'être continue qu'en devenant infinie; elle sera dite *monogène*, si elle a une dérivée monodrome. Une fonction peut être monodrome ou monogène, seulement pour les valeurs de z correspondantes aux points intérieurs d'une certaine aire S renfermée dans un contour donné.

D'après ce qu'on vient de dire, une fonction monodrome de z variera par degrés insensibles, en acquérant à chaque instant une *valeur unique*, si le point mobile correspondant à l'*affixe* z court çà et là sans sortir de l'aire S , ou tourne autour des points singuliers correspondants à des valeurs infinies de la fonction. Cette propriété de certaines fonctions m'a paru assez bien exprimée par le mot *monodrome*, que j'ai, pour ce motif, substitué au mot *monotypique*, dont j'avais fait usage dans le Mémoire du 7 avril 1851.

Une fonction monodrome sera dite *synectique*, si elle ne cesse jamais d'être continue pour aucune valeur finie de z . Une fonction entière de z est synectique, non seulement lorsqu'elle comprend un





nombre fini de termes, mais encore lorsque, renfermant un nombre infini de termes, elle est la somme d'une série toujours convergente, ordonnée suivant les puissances positives, entières et ascendantes de z, par conséquent la somme d'une série dont le module s'évanouit. Telles sont, par exemple, les fonctions e^z, sin z, cos z, ...

Parmi les fonctions monodromes et monogènes de z, on peut citer les fonctions rationnelles de z, de e^z, de sin z, de cos z, etc.

519.

ANALYSE ALGÈBRE. — Mémoire sur l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré.

C. R., T. XXXVI, p. 1114 (27 juin 1853).

Comme l'a remarqué M. Faye, la nouvelle méthode d'interpolation que j'ai donnée, dans un Mémoire lithographié en 1835 (1), peut être utilement appliquée à l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons m inconnues représentées par les lettres

x, y, z, ..., u, v, w,

et supposons que, n étant un très grand nombre, on donne les valeurs approchées

k_1, k_2, ..., k_n

de n fonctions linéaires de ces inconnues, par exemple des fonctions représentées par les polynômes

a_1 x + b_1 y + c_1 z + ... + h_1 w,
a_2 x + b_2 y + c_2 z + ... + h_2 w,
...
a_n x + b_n y + c_n z + ... + h_n w.

(1) OEuvres de Cauchy, S. II, T. II.

Les valeurs exactes de ces fonctions seront de la forme

k_1 - \epsilon_1, k_2 - \epsilon_2, ..., k_n - \epsilon_n,

\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n désignant des quantités dont les valeurs numériques seront très petites; et l'on aura rigoureusement

(1) { a_1 x + b_1 y + c_1 z + ... + h_1 w = k_1 - \epsilon_1,
a_2 x + b_2 y + c_2 z + ... + h_2 w = k_2 - \epsilon_2,
...
a_n x + b_n y + c_n z + ... + h_n w = k_n - \epsilon_n.

Soit maintenant x celle des inconnues x, y, z, ..., w pour laquelle les valeurs numériques des coefficients offrent la plus grande somme. Désignons cette plus grande somme par Sa_i, la lettre i désignant l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ..., n; et soient

S b_i, S c_i, ..., S h_i

ce que devient Sa_i quand on y remplace les coefficients

a_1, a_2, ..., a_n

par les coefficients

b_1, b_2, ..., b_n, ou c_1, c_2, ..., c_n, ..., ou h_1, h_2, ..., h_n.

On tirera des formules (1)

(2) x S a_i + y S b_i + z S c_i + ... + w S h_i = S k_i - S \epsilon_i.

A l'aide de cette dernière formule, on pourra éliminer x des équations (1), et, en posant, pour abrégier,

(3) \alpha_i = \frac{a_i}{S a_i},

(4) { b_i - \alpha_i S b_i = \Delta b_i, c_i - \alpha_i S c_i = \Delta c_i, ..., h_i - \alpha_i S h_i = \Delta h_i,
k_i - \alpha_i S k_i = \Delta k_i, \epsilon_i - \alpha_i S \epsilon_i = \Delta \epsilon_i,



on obtiendra, au lieu des équations (1), les suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} y \Delta b_1 + z \Delta c_1 + \dots + w \Delta h_1 = \Delta k_1 - \Delta \varepsilon_1, \\ y \Delta b_2 + z \Delta c_2 + \dots + w \Delta h_2 = \Delta k_2 - \Delta \varepsilon_2, \\ \dots \\ y \Delta b_n + z \Delta c_n + \dots + w \Delta h_n = \Delta k_n - \Delta \varepsilon_n. \end{cases}$$

Soit maintenant y celle des inconnues y, z, \dots, w pour laquelle, dans les premiers membres des équations (5), la somme des valeurs numériques des coefficients est la plus grande possible. Désignons par $S' \Delta b_i$ cette plus grande somme, et par

$$S' \Delta c_i, \dots, S' \Delta h_i$$

ce que devient cette somme, quand on y remplace

$$\Delta b_i, \Delta b_2, \dots, \Delta b_n$$

par

$$\Delta c_1, \Delta c_2, \dots, \Delta c_n, \dots \text{ ou par } \Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_n.$$

On tirera des équations (5)

$$(6) \quad y S' \Delta b_i + z S' \Delta c_i + \dots + w S' \Delta h_i = S' \Delta k_i - S' \Delta \varepsilon_i.$$

A l'aide de cette dernière formule, on pourra éliminer y des équations (5), et, en posant, pour abrégé,

$$(7) \quad \varepsilon_i = \frac{\Delta b_i}{S' \Delta b_i},$$

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta c_i - \varepsilon_i S' \Delta c_i = \Delta^2 c_i, & \dots, & \Delta h_i - \varepsilon_i S' \Delta h_i = \Delta^2 h_i, \\ \Delta k_i - \varepsilon_i S' \Delta k_i = \Delta^2 k_i, & & \Delta \varepsilon_i - \varepsilon_i S' \Delta \varepsilon_i = \Delta^2 \varepsilon_i. \end{cases}$$

on trouvera

$$(9) \quad \begin{cases} z \Delta^2 c_1 + \dots + w \Delta^2 h_1 = \Delta^2 k_1 - \Delta^2 \varepsilon_1, \\ z \Delta^2 c_2 + \dots + w \Delta^2 h_2 = \Delta^2 k_2 - \Delta^2 \varepsilon_2, \\ \dots \\ z \Delta^2 c_n + \dots + w \Delta^2 h_n = \Delta^2 k_n - \Delta^2 \varepsilon_n. \end{cases}$$

En continuant de la même manière, on obtiendra définitivement, à

la place de l'équation (1), un système d'équations de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} w \Delta^{m-1} h_1 = \Delta^{m-1} k_1 - \Delta^{m-1} \varepsilon_1, \\ w \Delta^{m-1} h_2 = \Delta^{m-1} k_2 - \Delta^{m-1} \varepsilon_2, \\ \dots \\ w \Delta^{m-1} h_n = \Delta^{m-1} k_n - \Delta^{m-1} \varepsilon_n; \end{cases}$$

puis, en désignant par $S^{(m-1)} \Delta^{m-1} h_i$ la somme des valeurs numériques de $\Delta^{m-1} h_1, \Delta^{m-1} h_2, \dots, \Delta^{m-1} h_n$, et par

$$S^{(m-1)} \Delta^{m-1} k_i \text{ ou par } S^{(m-1)} \Delta^{m-1} \varepsilon_i,$$

ce que devient $S^{(m-1)} \Delta^{m-1} h_i$ quand on y remplace h_1, h_2, \dots, h_n par

$$k_1, k_2, \dots, k_n \text{ ou par } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n,$$

on tirera des formules (10)

$$(11) \quad w S^{(m-1)} \Delta^{m-1} h_i = S^{(m-1)} \Delta^{m-1} k_i - S^{(m-1)} \Delta^{m-1} \varepsilon_i.$$

Enfin, en éliminant w des équations (10) à l'aide de la formule (11), et posant, pour abrégé,

$$(12) \quad \eta_i = \frac{\Delta^{m-1} h_i}{S^{(m-1)} \Delta^{m-1} h_i},$$

$$(13) \quad \begin{cases} \Delta^m k_i = \Delta^{m-1} k_i - \eta_i S^{(m-1)} \Delta^{m-1} k_i, \\ \Delta^m \varepsilon_i = \Delta^{m-1} \varepsilon_i - \eta_i S^{(m-1)} \Delta^{m-1} \varepsilon_i. \end{cases}$$

on trouvera

$$(14) \quad 0 = \Delta^m k_i - \Delta^m \varepsilon_i, \dots,$$

par conséquent,

$$(15) \quad \Delta^m \varepsilon_1 = \Delta^m k_1, \quad \Delta^m \varepsilon_2 = \Delta^m k_2, \quad \dots, \quad \Delta^m \varepsilon_n = \Delta^m k_n.$$

Ces dernières équations déterminent complètement les valeurs de $\Delta^m \varepsilon_1, \Delta^m \varepsilon_2, \dots, \Delta^m \varepsilon_n$, c'est-à-dire les diverses valeurs de $\Delta^m \varepsilon_i$. Si, pour abrégé, on pose

$$(16) \quad \theta_i = \Delta^m k_i,$$



on aura généralement, en vertu des formules (15),

$$(17) \quad \Delta^m \varepsilon_i = \theta_i.$$

Si, d'ailleurs, on pose

$$(18) \quad \lambda = S\varepsilon_i, \quad \mu = S'\Delta\varepsilon_i, \quad \dots, \quad \zeta = S^{(m-1)}\Delta^{m-1}\varepsilon_i,$$

on tirera des formules (4), (8), ..., (17)

$$(19) \quad \varepsilon_i = \alpha_i \lambda + \beta_i \mu + \gamma_i \nu + \dots + \eta_i \zeta + \theta_i.$$

En vertu de la formule (19), la valeur de ε_i dépend des valeurs des m sommes représentées par les lettres

$$\lambda, \mu, \nu, \dots, \zeta.$$

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur les valeurs de ces mêmes sommes est de les supposer nulles, c'est-à-dire de prendre

$$(20) \quad S\varepsilon_i = 0, \quad S'\Delta\varepsilon_i = 0, \quad \dots, \quad S^{(m-1)}\Delta^{m-1}\varepsilon_i = 0.$$

Alors on a généralement

$$(21) \quad \varepsilon_i = \theta_i$$

et les formules (2), (6), ..., (11) donnent

$$(22) \quad \begin{cases} xSa_i + ySb_i + \dots + wSh_i & = Sk_i, \\ yS'\Delta b_i + \dots + wS'\Delta h_i & = S'\Delta k_i, \\ \dots & \dots \\ wS^{(m-1)}\Delta^{m-1}h_i & = S^{(m-1)}\Delta^{m-1}k_i. \end{cases}$$

Ces dernières équations sont celles auxquelles conduit la méthode d'interpolation déjà citée. Elles fournissent, pour les inconnues x, y, z, \dots, w , des valeurs que l'on peut aisément calculer, en commençant par w . Ces valeurs, qui ne sont qu'approchées, jouissent de propriétés remarquables indiquées dans le Mémoire sur l'interpolation. Si on les désigne par x, y, z, \dots, w , si, d'ailleurs, on nomme $\xi, \eta,$

ζ, \dots, ω les erreurs qu'elles comportent, on aura rigoureusement

$$(23) \quad \begin{cases} xSa_i + ySb_i + zSc_i + \dots + wSh_i & = Sk_i, \\ yS'\Delta b_i + zS'\Delta c_i + \dots + wS'\Delta h_i & = S'\Delta k_i, \\ \dots & \dots \\ wS^{(m-1)}\Delta^{m-1}h_i & = S^{(m-1)}\Delta^{m-1}k_i \end{cases}$$

et

$$(24) \quad x = x - \xi, \quad y = y - \eta, \quad z = z - \zeta, \quad \dots, \quad w = w - \omega;$$

et, des équations (2), (6), ..., (11), jointes aux formules (18), (23),

(24), on tirera

$$(25) \quad \begin{cases} \xi Sa_i + ySb_i + \zeta Sc_i + \dots + \omega Sh_i & = \lambda, \\ yS'\Delta b_i + \zeta S'\Delta c_i + \dots + \omega S'\Delta h_i & = \mu, \\ \dots & \dots \\ \omega S^{(m-1)}\Delta^{m-1}h_i & = \zeta. \end{cases}$$

Il est bon d'observer qu'en vertu des formules (3) et (4), (7) et (8), etc., on a généralement

$$(26) \quad \begin{cases} S\alpha_i = 1, & S\beta_i = 0, & S\gamma_i = 0, & \dots, & S\theta_i = 0, \\ S'\beta_i = 1, & S'\gamma_i = 0, & \dots, & S'\theta_i = 0, \\ & S''\gamma_i = 1, & \dots, & S''\theta_i = 0, \\ & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

Cela posé, on tirera successivement de la formule (19)

$$(27) \quad \begin{cases} S\varepsilon_i & = \lambda, \\ S'\varepsilon_i & = \lambda S'\alpha_i + \mu, \\ S''\varepsilon_i & = \lambda S''\alpha_i + \mu S''\beta_i + \nu, \\ \dots & \dots \\ S^{(m-1)}\varepsilon_i & = \lambda S^{(m-1)}\alpha_i + \mu S^{(m-1)}\beta_i + \dots + \zeta, \end{cases}$$

et l'on pourra des formules (27), jointes aux équations (25), tirer d'abord les valeurs des coefficients

$$\lambda, \mu, \nu, \dots, \zeta,$$



puis celles des erreurs

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega,$$

de manière à obtenir ces diverses valeurs exprimées en fonctions linéaires des sommes

$$S\varepsilon_1, S'\varepsilon_1, \dots, S^{(m-1)}\varepsilon_1,$$

ou, ce qui revient au même, en fonctions linéaires des erreurs

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n.$$

En opérant ainsi, on parviendra à des équations de la forme

$$(28) \quad \begin{cases} \xi = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \dots + \xi_n \varepsilon_n, \\ \eta = \eta_1 \varepsilon_1 + \eta_2 \varepsilon_2 + \dots + \eta_n \varepsilon_n, \\ \dots \\ \omega = \omega_1 \varepsilon_1 + \omega_2 \varepsilon_2 + \dots + \omega_n \varepsilon_n, \end{cases}$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n; \dots; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ étant des quantités dont les valeurs seront données en nombres; et, à l'aide de ces équations, on pourra se former une idée du degré de précision avec lequel chacune des inconnues

$$x, y, z, \dots, w$$

est déterminée par les formules (21), ou, ce qui revient au même, par les équations

$$(29) \quad x = x, \quad y = y, \quad z = z, \quad \dots, \quad w = w.$$

En effet, les erreurs

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$$

que l'on commettra en prenant x, y, z, \dots, w pour valeurs des inconnues x, y, z, \dots, w seront équivalentes, en vertu des formules (18), à des fonctions linéaires et déterminées des erreurs

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n;$$

et par suite les limites que pourront atteindre les valeurs numé-

riques de $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ dépendront des limites que pourront atteindre les valeurs numériques de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Concevons, pour fixer les idées, que les quantités k_1, k_2, \dots, k_n soient toutes de même nature, et que, dans la détermination de chacune d'elles, l'erreur à craindre soit renfermée entre les limites $-\varepsilon, +\varepsilon$. Soient, d'ailleurs,

Ξ la somme des valeurs numériques des quantités $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$;

H la somme des valeurs numériques des quantités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$;

.....

Ω la somme des valeurs numériques des quantités $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

En vertu des formules (28), lorsqu'on prendra x, y, z, \dots, w pour valeurs approchées des inconnues x, y, z, \dots, w , les valeurs numériques des erreurs à craindre auront pour limites les produits

$$\Xi\varepsilon, H\varepsilon, \dots, \Omega\varepsilon.$$

Par suite, si, au-dessous des inconnues

$$x, y, \dots, w,$$

on écrit les nombres correspondants

$$\Xi, H, \dots, \Omega,$$

alors, à un plus grand nombre correspondra une inconnue pour laquelle la limite des erreurs à craindre sera plus considérable. Les grandeurs respectives des nombres inverses

$$(30) \quad \frac{1}{\Xi}, \frac{1}{H}, \dots, \frac{1}{\Omega}$$

fourniront donc une idée de la précision avec laquelle les inconnues

$$x, y, \dots, w$$

seront déterminées par les formules (29).

On se formera une idée plus exacte encore de cette précision, si, au lieu de supposer les valeurs numériques des erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$



inférieures à une certaine limite ϵ qu'elles ne puissent dépasser, on considère chacune d'elles comme pouvant atteindre à la rigueur une valeur numérique quelconque, mais avec une probabilité qui décroisse très rapidement quand cette valeur numérique vient à croître, et si l'on prend pour Ξ, H, \dots, Ω des nombres proportionnels à ceux qui exprimeraient alors la probabilité respective de l'abaissement des valeurs numériques des erreurs ξ, η, \dots, ω au-dessous d'une limite commune et infiniment petite. C'est ce que je me propose d'expliquer plus en détail dans un autre article, en recherchant comment les nombres Ξ, H, \dots, Ω dépendraient alors des coefficients $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n; \dots; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Avant de terminer cet article, nous remarquerons que des valeurs de x, y, z, \dots, ω , fournies par la nouvelle méthode d'interpolation, on peut aisément déduire celles que fournirait la méthode connue des *moindres carrés*. On y parviendra, en opérant comme il suit.

Désignons par $\Sigma \epsilon_i^2$ la somme des carrés des erreurs

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n.$$

Pour que cette somme devienne un minimum, comme l'exige la méthode des moindres carrés, il suffira d'attribuer aux quantités

$$\lambda, \mu, \nu, \dots, \zeta,$$

comprises dans le second membre de la formule (19), des valeurs qui vérifient les équations linéaires

$$(31) \quad \begin{cases} \Sigma \alpha_i (\alpha_i \lambda + \epsilon_i \mu + \gamma_i \nu + \dots + \eta_i \zeta + \theta_i) = 0, \\ \Sigma \epsilon_i (\alpha_i \lambda + \epsilon_i \mu + \gamma_i \nu + \dots + \eta_i \zeta + \theta_i) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \Sigma \eta_i (\alpha_i \lambda + \epsilon_i \mu + \gamma_i \nu + \dots + \eta_i \zeta + \theta_i) = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs, les diverses valeurs de θ_i étant généralement très petites, on pourra en dire autant des valeurs de $\lambda, \mu, \nu, \dots, \zeta$, et, en les calculant, on pourra exprimer chacune d'elles à l'aide d'un très petit nombre de chiffres significatifs. Cette circonstance permettra de

résoudre facilement les équations (31). La résolution étant effectuée, les valeurs des inconnues x, y, z, \dots, ω seront fournies par les équations

$$(24) \quad x = x - \xi, \quad y = y - \eta, \quad z = z - \zeta, \quad \dots, \quad \omega = \omega - \omega,$$

les corrections $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ étant elles-mêmes déterminées par le système des équations

$$(32) \quad \begin{cases} \xi S \alpha_i + \eta S \beta_i + \zeta S \epsilon_i + \dots + \omega S h_i = \lambda, \\ \eta S' \Delta \beta_i + \zeta S' \Delta \epsilon_i + \dots + \omega S' \Delta h_i = \mu, \\ \zeta S'' \Delta^2 \epsilon_i + \dots + \omega S'' \Delta^2 h_i = \nu, \\ \dots \dots \dots \\ \omega S^{(m-1)} \Delta^{m-1} h_i = \zeta. \end{cases}$$

En vertu des équations (31) et (32), les corrections $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ offriront des valeurs numériques qui seront en général sensiblement inférieures à celles des quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. La raison en est que les coefficients de λ dans la première des équations (31), de μ dans la seconde, etc., de ζ dans la dernière, c'est-à-dire les sommes

$$\Sigma \alpha_i^2, \Sigma \epsilon_i^2, \dots, \Sigma \eta_i^2,$$

se composeront de termes qui seront tous positifs, tandis que les autres coefficients et les sommes

$$\Sigma \alpha_i \theta_i, \Sigma \epsilon_i \theta_i, \dots, \Sigma \eta_i \theta_i$$

se composeront de termes qui seront en général les uns positifs, les autres négatifs. Donc, et attendu que les valeurs numériques des quantités

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$$

seront généralement très petites, on pourra en dire autant *a fortiori* des valeurs numériques des quantités

$$\lambda, \mu, \nu, \dots, \zeta$$

et des quantités

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega,$$



qui se déduiront successivement des premières à l'aide des équations (31) et (32). On ne devra donc pas être surpris de voir les résultats que fournit la nouvelle méthode d'interpolation coïncider en général à très peu près avec ceux auxquels on est conduit par la méthode des moindres carrés.

Remarquons encore qu'on pourrait appliquer aux équations (32) la méthode de résolution employée pour les équations (1). Cette application sera d'autant plus facile, que les valeurs numériques des quantités

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$$

seront plus petites. En effet, lorsque ces valeurs numériques, et à plus forte raison celles de $\lambda, \mu, \nu, \dots, \zeta$, seront très rapprochées de zéro, on pourra ordinairement, dans le calcul de ces dernières, s'arrêter après la détermination d'un petit nombre de chiffres décimaux, par exemple d'un ou de deux chiffres significatifs.

520.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les différentielles et les variations employées comme clefs algébriques.*

C. R., T. XXXVII, p. 38 (11 juillet 1853).

Comme j'en ai fait ailleurs la remarque, il est souvent utile, dans le Calcul différentiel, d'attribuer aux différentielles des variables indépendantes des valeurs finies et déterminées. La même remarque, dans le Calcul des variations, peut être appliquée aux variations de constantes arbitraires supposées indépendantes les unes des autres. J'ajouterai que ces différentielles et ces variations peuvent être aussi employées utilement comme *clefs algébriques*. C'est ce que je me propose ici de faire voir.

§ I. — *Différentielles employées comme clefs algébriques.*

Considérons n variables x, y, z, \dots liées à n autres variables x, y, z, \dots par n équations distinctes. En vertu de ces équations, les variables x, y, z, \dots seront fonctions des variables x, y, z, \dots , et réciproquement. Cela posé, en considérant x, y, z, \dots comme fonctions de x, y, z, \dots

$$(1) \quad \begin{cases} dx = D_x x dx + D_y x dy + D_z x dz + \dots, \\ dy = D_x y dx + D_y y dy + D_z y dz + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

et, en considérant x, y, z, \dots comme fonctions de x, y, z, \dots ,

$$(2) \quad \begin{cases} dx = D_x x dx + D_y x dy + D_z x dz + \dots, \\ dy = D_x y dx + D_y y dy + D_z y dz + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Concevons maintenant que l'on combine entre elles, par voie de multiplication, les différentielles dx, dy, dz, \dots , déterminées par les formules (1), en considérant les différentielles

$$dx, dy, dz, \dots$$

comme des *clefs algébriques* assujetties aux transmutations de la forme

$$(3) \quad dy dx \simeq - dx dy.$$

Posons d'ailleurs

$$(4) \quad dx dy dz \dots \simeq 1,$$

et désignons, à l'aide de la notation $|dx dy dz \dots|$, ce que devient, eu égard aux transmutations (3) et (4), le produit $dx dy dz \dots$ des différentielles des variables x, y, z, \dots . La formule (3) et les formules semblables entraîneront avec elles les transmutations de la forme

$$(5) \quad dy dx \simeq - dx dy,$$



et, eu égard aux formules (3), (4), (5), on tirera : 1° des équations (1)

$$(6) \quad |dx dy dz \dots| = S(\pm D_x x D_y y D_z z \dots);$$

2° des équations (2)

$$(7) \quad 1 = |dx dy dz \dots| S(\pm D_x x D_y y D_z z \dots).$$

Si, dans cette dernière formule, on substitue pour $|dx dy dz \dots|$ sa valeur tirée de l'équation (6), on obtiendra la suivante

$$(8) \quad S(\pm D_x x D_y y D_z z \dots) S(\pm D_x x D_y y D_z z \dots) = 1,$$

à laquelle satisfont, comme l'on sait, les dérivées que l'on forme, quand on différencie d'une part x, y, z, \dots considérées comme fonctions de x, y, z, \dots , d'autre part x, y, z, \dots considérées comme fonctions de x, y, z, \dots .

Concevons à présent qu'au-dessous des n variables

$$x, y, z, \dots$$

on écrive n autres variables

$$u, v, w, \dots$$

En nommant h, k deux fonctions quelconques des $2n$ variables

$$x, y, z, \dots, u, v, w, \dots,$$

on aura

$$(9) \quad \begin{cases} dh = D_x h dx + D_y h dy + \dots + D_u h du + D_v h dv + \dots \\ dk = D_x k dx + D_y k dy + \dots + D_u k du + D_v k dv + \dots \end{cases}$$

Cela posé, désignons à l'aide de la notation $|dh dk|$ ce que devient le produit $dh dk$ quand on assujettit les différentielles des deux systèmes de variables

$$x, y, z, \dots,$$

$$u, v, w, \dots$$

aux transmutations de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} dx du \simeq 1, & dy dv \simeq 1, & dz dw \simeq 1, & \dots \\ du dx \simeq -1, & dv dy \simeq -1, & dw dz \simeq -1, & \dots \end{cases}$$

en remplaçant par zéro, dans le développement de $dh dk$, ceux des produits binaires des différentielles

$$dx, dy, dz, \dots, du, dv, dw, \dots,$$

qui ne sont pas compris dans la formule (10). On trouvera

$$(11) \quad |dk dh| = (h, k),$$

la valeur de (h, k) étant

$$(12) \quad (h, k) = D_x h D_u k - D_u h D_x k + D_y h D_v k - D_v h D_y k + \dots$$

Ajoutons qu'en vertu de la formule (12) on aura généralement

$$(13) \quad (k, h) = -(h, k)$$

et

$$(14) \quad (h, h) = 0.$$

Supposons maintenant les $2n$ variables

$$x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$$

liées à $2n$ autres variables

$$a, b, c, \dots$$

par des équations de nature telle, qu'on puisse en tirer les valeurs de x, y, z, \dots exprimées en fonctions de a, b, c, \dots , et, réciproquement, les valeurs de a, b, c, \dots exprimées en fonctions de x, y, z, \dots . On aura, non seulement

$$(15) \quad da = D_x a dx + D_y a dy + \dots + D_u a du + D_v a dv + \dots,$$

mais encore

$$(16) \quad \begin{cases} dx = D_a x da + D_b x db + D_c x dc + \dots \\ du = D_a u da + D_b u db + D_c u dc + \dots \end{cases}$$

Cela posé, si l'on considère les différentielles $dx, dy, \dots, du, dv, \dots$ comme des clefs algébriques assujetties aux transmutations ci-dessus



énoncées, on tirera de l'équation (15)

$$|da dx| = -D_a a, \quad |da du| = D_x a,$$

et des équations (16), jointes à la formule (11),

$$\begin{aligned} |da dx| &= (a, a)D_a x + (a, b)D_b x + (a, c)D_c x + \dots, \\ |da du| &= (a, a)D_a u + (a, b)D_b u + (a, c)D_c u + \dots \end{aligned}$$

On aura donc, par suite,

$$(17) \quad \begin{cases} D_x a = (a, a)D_a u + (a, b)D_b u + (a, c)D_c u + \dots, \\ D_a a = -(a, a)D_a x - (a, b)D_b x - (a, c)D_c x - \dots \end{cases}$$

Ajoutons que les équations (17) continueront évidemment de subsister, si l'on y remplace les variables x et u soit par y et v , soit par z et w , ..., ou bien encore, si l'on remplace la quantité a par l'une des quantités b, c, \dots

Concevons, à présent, que, $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ étant considérées comme fonctions de a, b, c, \dots , on réduise à l'unité la différentielle de a , et à zéro celles de b, c, \dots , en sorte qu'on ait

$$da = 1, \quad db = 0, \quad dc = 0, \quad \dots;$$

les équations (16) et les formules analogues donneront

$$\begin{aligned} dx &= D_a x, & dy &= D_a y, & \dots, \\ du &= D_a u, & dv &= D_a v, & \dots \end{aligned}$$

Par suite, la formule (15) et les formules semblables qui fourniront les valeurs de db, dc, \dots donneront

$$(18) \quad \begin{cases} D_x a D_a x + D_y a D_a y + \dots + D_a a D_a u + D_a a D_a v + \dots = 1, \\ D_x b D_a x + D_y b D_a y + \dots + D_a b D_a u + D_a b D_a v + \dots = 0, \\ D_x c D_a x + D_y c D_a y + \dots + D_a c D_a u + D_a c D_a v + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

Or, si dans les équations (18) on substitue pour

$$\begin{aligned} D_x a, D_y a, \dots, D_x b, D_y b, \dots, \\ D_a a, D_a b, \dots, D_a b, D_a c, \dots \end{aligned}$$



leurs valeurs tirées des formules (17) et des formules analogues, on trouvera

$$(19) \quad \begin{cases} (a, a)[a, a] + (a, b)[a, b] + (a, c)[a, c] + \dots = 1, \\ (a, a)[b, a] + (a, b)[b, b] + (a, c)[b, c] + \dots = 0, \\ (a, a)[c, a] + (a, b)[c, b] + (a, c)[c, c] + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

les valeurs des quantités

$$[a, a], [a, b], [a, c], \dots, [b, a], [b, b], [b, c], \dots$$

étant données par des équations de la forme

$$(20) \quad [h, k] = D_h x D_k u - D_h u D_k x + D_h y D_k v - D_h v D_k y + \dots$$

de sorte qu'on aura généralement

$$(21) \quad [k, h] = -[h, k]$$

et

$$(22) \quad [h, h] = 0.$$

Si les formules (19), respectivement multipliées par des facteurs indéterminés $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, sont ensuite combinées ensemble par voie d'addition, alors en posant, pour abrégér,

$$(23) \quad \begin{cases} \lambda = [a, a]\alpha + [b, a]\beta + [c, a]\gamma + \dots, \\ \mu = [a, b]\alpha + [b, b]\beta + [c, b]\gamma + \dots, \\ \nu = [a, c]\alpha + [b, c]\beta + [c, c]\gamma + \dots, \end{cases}$$

on obtiendra l'équation unique

$$(24) \quad (a, a)\lambda + (a, b)\mu + (a, c)\nu + \dots = \alpha,$$

qui équivaut seule au système des formules (19). D'ailleurs il est clair que l'équation (24) devra continuer de subsister, si l'on y remplace a et α par b et β , ou par c et γ , etc. On aura donc géné-



ralement

$$(25) \begin{cases} (a, a)\lambda + (a, b)\mu + (a, c)\nu + \dots = \alpha, \\ (b, a)\lambda + (b, b)\mu + (b, c)\nu + \dots = \beta, \\ (c, a)\lambda + (c, b)\mu + (c, c)\nu + \dots = \gamma, \\ \dots \end{cases}$$

Les formules (25) permettent de déterminer les quantités

$$(a, b), (a, c), \dots, (b, c), \dots$$

en fonctions des quantités

$$[a, b], [a, c], \dots, [b, c], \dots$$

Pour arriver à cette détermination, il suffit de considérer les facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ comme des clefs assujetties aux transmutations de la forme

$$(26) \quad [\xi, \alpha] \simeq -[\alpha, \xi];$$

alors, en posant, pour plus de commodité,

$$(27) \quad \alpha\xi\gamma \dots \simeq -1,$$

et en désignant, à l'aide de la notation $|\lambda\mu\nu\dots|$, ce que devient le produit $\lambda\mu\nu\dots$ quand on a égard aux transmutations (26) et (27), on tirera de la formule (24)

$$(28) \quad (a, b) = \frac{|\lambda\alpha\nu\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}$$

et des formules (23)

$$(29) \quad |\lambda\mu\nu\dots| = S\{\pm [a, a][b, b][c, c]\dots\},$$

la somme alternée

$$S\{\pm [a, a][b, b][c, c]\dots\}$$

étant composée de termes, les uns positifs, les autres négatifs, représentés par le produit partiel

$$[a, a][b, b][c, c]\dots$$

et par ceux que l'on peut en déduire à l'aide d'échanges opérés entre les lettres a, b, c, \dots qui occupent la première place dans les expressions

$$[a, a], [b, b], [c, c], \dots$$

D'ailleurs, on tirera des formules (25)

$$(30) \quad |\mu\lambda\nu\dots| S\{\pm (a, a)(b, b)(c, c)\dots\} = 1$$

ou, ce qui revient au même,

$$(31) \quad S\{\pm [a, a][b, b][c, c]\dots\} S\{\pm (a, a)(b, b)(c, c)\dots\} = 1;$$

et, comme la somme alternée

$$S\{\pm (a, a)(b, b)(c, c)\dots\}$$

conservera généralement une valeur finie, on conclura, de la formule (29), que la quantité $|\lambda\mu\nu\dots|$ ne se réduit pas à zéro. Cela posé, les valeurs des expressions

$$(a, b), (a, c), \dots, (b, c), \dots,$$

représentées, en vertu de la formule (28) et des formules analogues, par des fractions dont $|\lambda\mu\nu\dots|$ sera le commun dénominateur, ne deviendront ni infinies, ni indéterminées. Ajoutons qu'en vertu des équations (13) et (14), jointes aux formules

$$(32) \begin{cases} (a, a) = \frac{|\alpha\mu\nu\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & (a, b) = \frac{|\lambda\alpha\nu\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & (a, c) = \frac{|\lambda\mu\alpha\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & \dots \\ (b, a) = \frac{|\beta\mu\nu\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & (b, b) = \frac{|\lambda\beta\nu\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & (b, c) = \frac{|\lambda\mu\beta\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & \dots \\ (c, a) = \frac{|\gamma\mu\nu\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & (c, b) = \frac{|\lambda\gamma\nu\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & (c, c) = \frac{|\lambda\mu\gamma\dots|}{|\lambda\mu\nu\dots|}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

on aura

$$(33) \quad |\alpha\mu\nu\dots| = 0, \quad |\lambda\beta\nu\dots| = 0, \quad |\lambda\mu\gamma\dots| = 0, \quad \dots$$



et de plus

$$(34) \quad \begin{cases} |\epsilon\mu\nu\dots| = -|\lambda\alpha\nu\dots|, & |\gamma\mu\nu\dots| = -|\lambda\mu\alpha\dots|, & \dots \\ |\lambda\gamma\nu\dots| = -|\lambda\mu\epsilon\dots|, & \dots & \dots \end{cases}$$

Les équations (19) sont précisément celles que j'ai données dans le Mémoire lithographié en 1832⁽¹⁾, comme propres à déterminer les quantités

$$(a, b), (a, c), \dots, (b, c), \dots$$

en fonctions des quantités

$$[a, b], [a, c], \dots, [b, c], \dots$$

Pour qu'il ne restât aucun doute à cet égard, il convenait, comme l'a remarqué M. Liouville, de prouver que les valeurs de

$$(a, b), (a, c), \dots,$$

déduites des équations (19), ne sont ni infinies, ni de la forme $\frac{0}{0}$. Or c'est là ce que prouvé, en effet, la formule (30) ou (31).

521.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Suite du Mémoire sur les différentielles et les variations employées comme clefs algébriques.

C. R., T. XXXVII, p. 57 (18 juillet 1853).

§ II. — Variations employées comme clefs algébriques.

Soient données entre la variable t , n fonctions de t désignées par x, y, z, \dots , et n autres fonctions de t désignées par u, v, w, \dots , des équations différentielles, en nombre égal à $2n$, et de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} D_t x = D_u Q, & D_t y = D_v Q, & D_t z = D_w Q, & \dots \\ D_t u = -D_x Q, & D_t v = -D_y Q, & D_t w = -D_z Q, & \dots \end{cases}$$

⁽¹⁾ Œuvres de Cauchy, S. II, T. XV.

Q représentant une fonction de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$. Les intégrales de ces équations fourniront les valeurs des inconnues $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, exprimées en fonction de t et de $2n$ constantes arbitraires a, b, c, \dots . Concevons maintenant que l'on fasse varier ces constantes arbitraires, et désignons, à l'aide des lettres caractéristiques δ, \mathcal{A} , des variations prises dans deux systèmes différents. On aura, en nommant s une fonction quelconque de a, b, c, \dots, t ,

$$\begin{aligned} \delta s &= D_a s \delta a + D_b s \delta b + D_c s \delta c + \dots, \\ \mathcal{A} s &= D_a s \mathcal{A} a + D_b s \mathcal{A} b + D_c s \mathcal{A} c + \dots, \end{aligned}$$

et l'on pourra, dans ces équations, attribuer aux variations

$$\delta a, \delta b, \delta c, \dots, \mathcal{A} a, \mathcal{A} b, \mathcal{A} c, \dots$$

des valeurs finies quelconques. Ajoutons que, si s est fonction non plus de a, b, c, \dots, t , mais de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$, on aura

$$(2) \quad \begin{cases} \delta s = D_x s \delta x + D_y s \delta y + \dots + D_u s \delta u + D_v s \delta v + \dots, \\ \mathcal{A} s = D_x s \mathcal{A} x + D_y s \mathcal{A} y + \dots + D_u s \mathcal{A} u + D_v s \mathcal{A} v + \dots \end{cases}$$

On trouvera, par exemple, en posant $s = Q$, et eu égard aux équations (1),

$$(3) \quad \begin{cases} \delta Q = D_t x \delta u - D_t u \delta x + D_t y \delta v - D_t v \delta y + \dots, \\ \mathcal{A} Q = D_t x \mathcal{A} u - D_t u \mathcal{A} x + D_t y \mathcal{A} v - D_t v \mathcal{A} y + \dots \end{cases}$$

Cela posé, l'équation identique

$$(4) \quad \delta \mathcal{A} Q - \mathcal{A} \delta Q = 0,$$

jointe aux équations de même forme, donnera

$$(5) \quad D_t(\delta, \mathcal{A}) = 0,$$

la valeur de (δ, \mathcal{A}) étant

$$(6) \quad (\delta, \mathcal{A}) = \delta x \mathcal{A} u - \delta u \mathcal{A} x + \delta y \mathcal{A} v - \delta v \mathcal{A} y + \dots,$$

puis on en conclura

$$(7) \quad (\delta, \mathcal{A}) = \text{const.}$$

Donc la valeur de l'expression (δ, \mathcal{A}) sera indépendante de t , et se réduira simplement à une fonction des constantes arbitraires a, b, c, \dots, t et de leurs variations. Ajoutons qu'en vertu de l'équation (6) on aura évidemment

$$(8) \quad (\mathcal{A}, \delta) = -(\delta, \mathcal{A})$$

et

$$(9) \quad (\delta, \delta) = 0.$$

Si, pour fixer les idées, on réduit à zéro les variations des constantes arbitraires, en exceptant seulement $\delta a, \delta b$, et en posant d'ailleurs

$$\delta a = 1, \quad \delta b = 1,$$

alors, s étant une fonction de a, b, c, \dots, t , on aura

$$(10) \quad \delta s = D_a s, \quad \mathcal{A} s = D_b s,$$

par conséquent

$$(\delta, \mathcal{A}) = [a, b],$$

la valeur de $[a, b]$ étant

$$(11) \quad [a, b] = D_a x D_b u - D_a u D_b x + D_a y D_b v - D_a v D_b y + \dots;$$

et l'équation (9), réduite à la forme

$$(12) \quad [a, b] = \text{const.},$$

sera précisément celle que j'ai donnée dans le Mémoire lithographié du 16 octobre 1831⁽¹⁾, en la tirant d'une analyse à laquelle se réduisent les calculs précédents, lorsqu'on a égard aux formules (10), et que l'on remplace, en conséquence, les caractéristiques δ, \mathcal{A} par les caractéristiques D_a et D_b . D'ailleurs, on a généralement

$$(13) \quad (\delta, \mathcal{A}) = [a, b] (\delta a \mathcal{A} b - \delta b \mathcal{A} a) + \dots,$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux variations des constantes. Donc l'équation (6), obtenue plus récemment par les géo-

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

mètres, pour le cas où l'on suppose les variations de a, b, c, \dots indépendantes de t , peut se déduire de la formule (11), comme la formule (11) peut être tirée de l'équation (6). Il y a plus : on peut faire coïncider la formule (11) avec l'équation (6) de la manière suivante.

Pour que les constantes a, b, c, \dots soient arbitraires, il suffit qu'on les suppose représentées par des fonctions arbitrairement choisies d'une autre constante arbitraire h ou k . Alors, en nommant s une fonction de a, b, c, \dots, t , et en indiquant, à l'aide de la caractéristique δ ou \mathcal{A} , des variations relatives à la première ou à la seconde hypothèse, on aura, si l'on considère a, b, c, \dots comme fonctions de h ,

$$\delta s = D_h s \delta h,$$

et, si l'on considère a, b, c, \dots comme fonctions de k ,

$$\mathcal{A} s = D_k s \mathcal{A} k.$$

Par suite, en posant

$$\delta h = 1, \quad \mathcal{A} k = 1,$$

on aura simplement

$$D_h s = \delta s, \quad D_k s = \mathcal{A} s,$$

et l'on en conclura

$$(14) \quad [h, k] = (\delta, \mathcal{A}).$$

D'ailleurs, il suffira de substituer, dans la formule (11), aux deux constantes arbitraires a et b les deux constantes arbitraires h et k , pour obtenir l'équation

$$(15) \quad [h, k] = \text{const.},$$

dans laquelle on aura

$$(16) \quad [h, k] = D_h x D_k u - D_h u D_k x + D_h y D_k v - D_h v D_k y + \dots;$$

et, eu égard à la formule (14), l'équation (15) coïncidera évidemment avec la formule (7).

Observons à présent que, en vertu des équations finies qui repré-



sentent les intégrales générales des équations (1), on pourra considérer, non seulement les inconnues $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ comme fonctions de t et des constantes arbitraires a, b, c, \dots , mais aussi a, b, c, \dots comme fonctions de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$. Cela posé, si, en nommant h, k deux fonctions quelconques de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$, on pose

$$(17) \quad (h, k) = D_x h D_y k - D_y h D_x k + D_z h D_w k - D_w h D_z k + \dots$$

on prouvera, comme dans le § I, que les quantités $(a, b), (a, c), \dots, (b, c), \dots$ peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles des quantités $[a, b], [a, c], \dots, [b, c], \dots$. Donc, si l'on prend pour h, k deux quelconques des quantités a, b, c, \dots , la formule (15), qui subsistera toujours dans cette hypothèse, entraînera la suivante :

$$(18) \quad (h, k) = \text{const.}$$

Au reste, sans recourir aux calculs effectués dans le § I, on pourra sans peine établir la formule (1), en considérant d'abord le cas où les constantes arbitraires a, b, c, \dots se réduisent aux valeurs particulières qu'acquièrent les inconnues $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ pour une valeur donnée, par exemple pour une valeur nulle de la variable t . En effet, soient $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ ces valeurs particulières, en sorte qu'on ait, pour $t = 0$,

$$(19) \quad \begin{cases} x = x, & y = y, & z = z, & \dots \\ u = u, & v = v, & w = w, & \dots \end{cases}$$

On aura, en vertu des équations (15) et (16),

$$(20) \quad (h, k) = D_x x D_y u - D_y u D_x x + D_x y D_w v - D_w v D_x y + \dots$$

D'ailleurs, si l'on prend pour h et k deux quelconques des quantités $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, les termes de la suite $D_x x, D_x y, D_x z, \dots, D_x u, D_x v, D_x w, \dots$ et ceux de la suite $D_y x, D_y y, D_y z, \dots, D_y u, D_y v, D_y w, \dots$ s'évanouiront tous, à l'exception des termes $D_x h,$

$D_x k$, qui se réduiront l'un et l'autre à l'unité. Cela posé, il est clair que la formule (20) donnera

$$(21) \quad [h, k] = 0,$$

à moins que h et k ne se réduisent à deux termes correspondants des deux suites

$$\begin{matrix} x, & y, & z, & \dots \\ u, & v, & w, & \dots \end{matrix}$$

et que, dans cette dernière hypothèse, on aura

$$(22) \quad [h, k] = -[k, h] = 1,$$

si h représente un terme de la suite x, y, z, \dots , et k le terme correspondant de la suite u, v, w, \dots . On trouvera effectivement

$$(23) \quad \begin{cases} [x, u] = 1, & [y, v] = 1, & [z, w] = 1, & \dots \\ [u, x] = -1, & [v, y] = -1, & [w, z] = -1, & \dots \end{cases}$$

et les autres expressions de la forme $[h, k]$, non comprises dans les formules (23), mais relatives au cas où h, k représentent deux des quantités $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, se réduiront à zéro.

D'autre part, si, en désignant par s l'une quelconque des inconnues $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, et par l l'une quelconque des constantes arbitraires $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, on pose $\partial s = D_l s$, la formule (6) donnera

$$(24) \quad (\partial, \mathcal{A}) = \partial x D_l u - \partial u D_l x + \partial y D_l v - \partial v D_l y + \dots;$$

et, comme, en vertu de l'équation (7), la valeur précédente de (∂, \mathcal{A}) ne sera point altérée si l'on y pose $t = 0$, on aura nécessairement

$$(25) \quad \begin{cases} \partial x D_l u - \partial u D_l x + \partial y D_l v - \partial v D_l y + \dots \\ = \partial x D_l u - \partial u D_l x + \partial y D_l v - \partial v D_l y + \dots \end{cases}$$

Soient maintenant h un terme quelconque de la suite x, y, z, \dots et k le terme correspondant de la suite u, v, w, \dots . On tirera de la formule (25), en posant $l = h$,

$$(26) \quad \partial x D_h u - \partial u D_h x + \partial y D_h v - \partial v D_h y + \dots = -\partial k,$$



et, en posant $l = k$,

$$(27) \quad \partial_x D_k u - \partial_u D_k x + \partial_y D_k v - \partial_v D_k y + \dots = \partial h.$$

Si dans les formules (27) et (26) on substitue à ∂h , ∂k leurs valeurs données par deux équations de la forme

$$(28) \quad \partial l = D_x l \partial x + D_y l \partial y + \dots + D_u l \partial u + D_v l \partial v + \dots,$$

on trouvera

$$(29) \quad \begin{cases} D_x h \partial x + D_y h \partial y + \dots + D_u h \partial u + D_v h \partial v + \dots \\ = D_k u \partial x + D_k v \partial y + \dots - D_k x \partial u - D_k y \partial v - \dots \end{cases}$$

et

$$(30) \quad \begin{cases} D_x k \partial x + D_y k \partial y + \dots + D_u k \partial u + D_v k \partial v + \dots \\ = -D_h u \partial x + D_h v \partial y + \dots + D_h x \partial u + D_h y \partial v + \dots \end{cases}$$

Ces deux dernières formules devant subsister, quelles que soient les variations ∂x , ∂y , ∂z , ..., ∂u , ∂v , ∂w , ..., on en conclura

$$(31) \quad \begin{cases} D_x h = D_k u, & D_y h = D_k v, & D_z h = D_k w, & \dots \\ D_u h = -D_k x, & D_v h = -D_k y, & D_w h = -D_k z, & \dots \end{cases}$$

et

$$(32) \quad \begin{cases} D_x k = -D_h u, & D_y k = -D_h v, & D_z k = -D_h w, & \dots \\ D_u k = D_h x, & D_v k = D_h y, & D_w k = D_h z, & \dots \end{cases}$$

En vertu des formules (31) et (32), on aura évidemment

$$(33) \quad (h, k) = [h, k],$$

par conséquent, en ayant égard à l'équation (22),

$$(34) \quad (h, k) = -(k, h) = 1.$$

Ajoutons que, si l'on nomme h, h' deux termes distincts de la suite x, y, z, \dots , et k, k' les deux termes correspondants de la suite u, v, w, \dots , on aura encore, en vertu des formules (31) et (32),

$$\begin{aligned} (h, h') &= [k, k'] = 0, & (k, k') &= [h, h'] = 0, \\ (h, k') &= [k, h'] = 0, & (k, h') &= [h, k'] = 0. \end{aligned}$$

Donc, en définitive, si l'on nomme h et k deux termes de la suite $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ qui ne se réduisent pas à deux termes correspondants des deux suites $x, y, z, \dots; u, v, w, \dots$, on aura toujours

$$(35) \quad (h, k) = 0.$$

Il en résulte aussi que la formule (33) subsiste toujours, quand on prend pour h et k deux termes quelconques de la suite $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$. Donc alors la formule (15) entraîne avec elle la formule (18).

Considérons maintenant le cas général où h, k représentent deux constantes arbitraires quelconques, introduites par l'intégration des équations (1). Ces deux constantes arbitraires ne pourront être que des fonctions de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, et, si l'on attribue à ces dernières quantités les variations $\partial x, \partial y, \partial z, \dots, \partial u, \partial v, \partial w, \dots$, les variations correspondantes de h et k seront données par les formules

$$(36) \quad \begin{cases} \partial h = D_x h \partial x + D_y h \partial y + \dots + D_u h \partial u + D_v h \partial v + \dots \\ \partial k = D_x k \partial x + D_y k \partial y + \dots + D_u k \partial u + D_v k \partial v + \dots \end{cases}$$

D'autre part, en vertu des intégrales générales des équations (1), on pourra considérer non seulement $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, comme fonctions de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$, mais aussi $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, et, par suite, h, k comme fonctions de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$; et alors, à la place des formules (36), on obtiendra les suivantes :

$$(37) \quad \begin{cases} \partial h = D_x h \partial x + D_y h \partial y + \dots + D_u h \partial u + D_v h \partial v + \dots \\ \partial k = D_x k \partial x + D_y k \partial y + \dots + D_u k \partial u + D_v k \partial v + \dots \end{cases}$$

Or, des formules (37), jointes à l'équation (17), on tirera

$$(38) \quad |\partial h \partial k| = (h, k),$$

pourvu que l'on représente, à l'aide de la notation $|\partial h \partial k|$, ce que devient le produit $\partial h \partial k$ dans le cas où l'on considère les variations

$$\partial x, \partial y, \partial z, \dots, \partial u, \partial v, \partial w, \dots$$



comme des clefs assujetties aux transmutations

$$(39) \quad \begin{cases} \partial x \partial u \simeq 1, & \partial y \partial v \simeq 1, & \partial z \partial w \simeq 1, & \dots \\ \partial u \partial x \simeq -1, & \partial v \partial y \simeq -1, & \partial w \partial z \simeq -1, & \dots \end{cases}$$

et où l'on remplace par zéro les produits binaires des mêmes variations, non compris dans les formules (39). D'ailleurs, de la formule (38), jointe à l'équation (34) ou (35), il résulte : 1° que l'on aura

$$(40) \quad |\partial h \partial k| = 1, \quad |\partial k \partial h| = -1,$$

si l'on prend pour h un terme de la suite x, y, z, \dots et pour k le terme correspondant de la suite u, v, w, \dots ; 2° que l'on aura, au contraire,

$$(41) \quad |\partial h \partial k| = 0,$$

si l'on prend pour h et k deux termes de la suite $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ qui ne se réduisent pas à deux termes correspondants des deux suites $x, y, z, \dots; u, v, w, \dots$. Cela posé, la valeur générale de l'expression $|\partial h \partial k|$, tirée des formules (36), sera évidemment celle qu'on obtient quand on considère les variations $\partial x, \partial y, \partial z, \dots, \partial u, \partial v, \partial w, \dots$ comme des clefs assujetties aux transmutations

$$(42) \quad \begin{cases} \partial x \partial u \simeq 1, & \partial y \partial v \simeq 1, & \partial z \partial w \simeq 1, & \dots \\ \partial u \partial x \simeq -1, & \partial v \partial y \simeq -1, & \partial w \partial z \simeq -1, & \dots \end{cases}$$

et quand on remplace par zéro les produits de ces mêmes variations, non compris dans les formules (42). Or, en opérant ainsi, on trouvera

$$\partial h \partial k = D_x h D_u k - D_u h D_x k + D_y h D_v k - D_v h D_y k + \dots;$$

et, comme la formule (38) donne généralement

$$(43) \quad (h, k) = |\partial h \partial k|,$$

on aura encore

$$(44) \quad (h, k) = D_x h D_u k - D_u h D_x k + D_y h D_v k - D_v h D_y k + \dots;$$

puis, de la formule (38), comparée à l'équation (17), on conclura que

la valeur (h, k) n'est pas altérée, quand on y pose $t = 0$, et, par suite,

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z, \quad \dots, \quad u = u, \quad v = v, \quad w = w, \quad \dots$$

On aura donc généralement $(h, k) = \text{const.}$, conformément à l'équation (18).

La formule (43) offre encore un moyen facile de calculer les valeurs des expressions de la forme (h, k) , et d'établir leurs diverses propriétés. C'est ce que l'on verra dans un prochain article.

562.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur l'interpolation, ou remarques sur les remarques de M. Jules Bienaymé.*

C. R., T. XXXVII, p. 64 (18 juillet 1853).

Le *Compte rendu* de la dernière séance renferme un Mémoire lu à l'avant-dernière par M. Jules Bienaymé, à un moment où j'étais absent. Ce Mémoire est intitulé : *Remarques sur les différences qui distinguent la méthode des moindres carrés de l'interpolation de M. Cauchy, et qui assurent la supériorité de cette méthode.* En lisant ce titre, on pourrait croire la méthode des moindres carrés, toujours et sous tous les rapports, préférable à la nouvelle méthode d'interpolation que j'ai donnée en 1835. Toutefois, cette conclusion ne serait pas légitime. Pour mettre le lecteur à portée de se former une opinion à cet égard, j'ai cru devoir à mon tour comparer l'une à l'autre les deux méthodes. L'algorithme dont j'ai fait usage en 1835 facilite cette comparaison, en réduisant les diverses méthodes proposées par les géomètres, pour la résolution des équations linéaires, à quelques formules générales et très simples, renfermées dans les premières pages de mon Mémoire, et que je vais indiquer.

Considérons d'abord m inconnues, x, y, z, \dots, w , liées les unes

aux autres par m équations

$$(1) \quad \mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{F} = 0,$$

don't les premiers membres soient des fonctions linéaires de ces inconnues. Si la résultante du Tableau qui a pour termes les coefficients de x, y, z, \dots, w dans les fonctions $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{F}$ ne s'évanouit pas, on pourra tirer des équations (1) les valeurs de x, y, z, \dots, w , en éliminant l'une après l'autre ces inconnues, rangées dans un certain ordre, et en remontant de la dernière des formules ainsi obtenues à celles qui la précèdent. Si, en particulier, on veut éliminer x de la deuxième, de la troisième, ..., de la dernière des équations (1), il suffira de retrancher de la fonction \mathfrak{B} , ou \mathfrak{C} , ..., ou \mathfrak{F} le produit de \mathfrak{A} par le rapport du coefficient de x dans \mathfrak{B} , ou \mathfrak{C} , ..., ou \mathfrak{F} au coefficient de x dans \mathfrak{A} . Si l'on indique, à l'aide de la lettre caractéristique Δ , les différences du premier ordre ainsi obtenues, l'élimination de x entre les équations (1) donnera les suivantes :

$$(2) \quad \Delta\mathfrak{B} = 0, \quad \Delta\mathfrak{C} = 0, \quad \dots, \quad \Delta\mathfrak{F} = 0.$$

Pareillement, si l'on veut éliminer y de celles-ci, à l'aide de l'équation $\Delta\mathfrak{B} = 0$, il suffira de retrancher de la fonction $\Delta\mathfrak{C}, \dots$, ou $\Delta\mathfrak{F}$ le produit de $\Delta\mathfrak{B}$ par le rapport du coefficient de y dans $\Delta\mathfrak{C}, \dots$, ou $\Delta\mathfrak{F}$ au coefficient de y dans $\Delta\mathfrak{B}$. Si l'on indique, à l'aide de la caractéristique Δ^2 , les différences du second ordre ainsi obtenues, l'élimination de y entre les équations (2) donnera les suivantes :

$$(3) \quad \Delta^2\mathfrak{C} = 0, \quad \dots, \quad \Delta^2\mathfrak{F} = 0.$$

En continuant ainsi, on finira par joindre aux équations (1) toutes les formules renfermées avec elles dans le Tableau suivant :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \mathfrak{A} = 0, & \mathfrak{B} = 0, & \mathfrak{C} = 0, & \dots, & \mathfrak{F} = 0, & \\ & \Delta\mathfrak{B} = 0, & \Delta\mathfrak{C} = 0, & \dots, & \Delta\mathfrak{F} = 0, & \\ & & \Delta^2\mathfrak{C} = 0, & \dots, & \Delta^2\mathfrak{F} = 0, & \\ & & & \dots, & \dots, & \\ & & & & & \Delta^m\mathfrak{F} = 0; \end{array} \right.$$

et ce Tableau permettra, non seulement de calculer aisément les valeurs de x, y, z, \dots, w , que l'on pourra déduire des seules formules

$$(5) \quad \mathfrak{A} = 0, \quad \Delta\mathfrak{B} = 0, \quad \Delta^2\mathfrak{C} = 0, \quad \dots, \quad \Delta^m\mathfrak{F} = 0,$$

en remontant de l'une à l'autre, après avoir tiré de la dernière la valeur de w , mais encore de constater la justesse des calculs par de nombreuses vérifications.

Supposons maintenant les m inconnues x, y, z, \dots, w liées entre elles par n équations exactes ou approximatives

$$(6) \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = 0,$$

n étant égal ou supérieur à m . Pour déterminer complètement les valeurs des inconnues, il suffira encore de résoudre m équations de la forme (1), $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{F}$ désignant m fonctions linéaires de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. D'ailleurs, dans les valeurs de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{F}$ exprimées en fonctions de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ pour des équations linéaires, c'est-à-dire de la forme

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n, \\ \mathfrak{B} = \mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2 + \dots + \mu_n \varepsilon_n, \\ \mathfrak{C} = \nu_1 \varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2 + \dots + \nu_n \varepsilon_n, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \mathfrak{F} = \varsigma_1 \varepsilon_1 + \varsigma_2 \varepsilon_2 + \dots + \varsigma_n \varepsilon_n, \end{array} \right.$$

les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots, \varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n$ pourront être arbitrairement choisis sous une seule condition, savoir, que les valeurs de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{F}$ ne puissent elles-mêmes satisfaire à aucune équation linéaire de laquelle serait exclue chacune des inconnues x, y, z, w . On ne doit pas se préoccuper du cas où cette condition ne pourrait être remplie; car ce serait là un cas exceptionnel, et dans lequel les équations (6) ou se contrediraient mutuellement, ou deviendraient insuffisantes pour déterminer les valeurs des inconnues.

Il est bon d'observer que, après avoir formé les équations (1), on devra leur substituer d'autres équations desquelles on puisse aisé-

dence dans mon Mémoire, ainsi que je l'expliquerai plus en détail dans un second article.

523.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la nouvelle méthode d'interpolation comparée à la méthode des moindres carrés.*

C. R., T. XXXVII, p. 100 (25 juillet 1853).

Ma nouvelle méthode d'interpolation, comme toutes celles qui ont été proposées par les géomètres, peut être réduite à la résolution de certaines équations linéaires. D'ailleurs, les problèmes que servent à résoudre les équations linéaires sont de deux genres distincts. Dans les uns, le nombre des inconnues est fixé à l'avance, et il s'agit de tirer de certaines équations exactes ou approximatives les valeurs de ces inconnues. Dans d'autres problèmes, le nombre des inconnues que renfermeront les formules n'est pas fixé d'avance, et l'on a, par suite, à déterminer non seulement les valeurs des inconnues rangées dans un certain ordre, mais encore le nombre de celles que l'on devra calculer. Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de construire une série ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes d'une variable, et supposée convergente, dans le cas où l'on connaît, pour diverses valeurs de la variable, la somme de la série. Alors, évidemment, on devra rechercher tout à la fois, et le nombre des termes après lesquels la série pourra être arrêtée sans que l'on ait à craindre d'erreurs sensibles, et les valeurs de ces mêmes termes. C'est à la solution des problèmes du premier genre qu'a été généralement appliquée la méthode des moindres carrés; c'est, au contraire, pour résoudre le second genre des problèmes, que j'ai donné en 1835 la nouvelle méthode d'interpolation.

D'autre part, les valeurs de m inconnues, liées l'une à l'autre par n équations linéaires, n étant égal ou supérieur à m , peuvent être

calculées plus ou moins rapidement et avec une exactitude plus ou moins grande. Cette rapidité, cette exactitude peuvent dépendre, non seulement du nombre et de la nature des équations données, mais encore des méthodes employées pour les résoudre.

Si l'on a

$$n = m,$$

c'est-à-dire si m inconnues x, y, z, \dots, v, w sont déterminées par le système de m équations linéaires

$$(1) \quad \mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{F} = 0,$$

les valeurs des inconnues ne dépendront pas des méthodes employées, qui toutes conduiront aux mêmes résultats, mais pourront être plus ou moins rapides. Alors aussi on pourra obtenir ces valeurs à l'aide des formules générales qui les présentent sous la forme de fractions dont le dénominateur commun est la résultante construite avec les coefficients des diverses inconnues. Mais le calcul des termes compris dans le dénominateur et dans le numérateur de chaque fraction sera très pénible, si le nombre m devient considérable; et l'on évitera ce calcul si, après avoir éliminé successivement x , puis y , puis z , \dots , puis v des équations données, on remonte de la dernière des formules ainsi obtenues à la première. De plus, comme, pour éliminer une variable x , d'une fonction linéaire \mathfrak{B} à l'aide d'une équation linéaire $\mathfrak{A} = 0$, il suffit de retrancher de la fonction \mathfrak{B} le produit de \mathfrak{A} par le rapport entre les coefficients de x dans \mathfrak{B} et dans \mathfrak{A} , l'élimination successive des variables x, y, z, \dots, v entre les équations (1) réduira les premiers membres de ces équations aux *différences de divers ordres* indiquées, quand on suit la notation que nous avons adoptée, à l'aide de la lettre caractéristique Δ . Après avoir ainsi réduit les fonctions $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{F}$ aux *différences de premier ordre* $\Delta\mathfrak{B}, \Delta\mathfrak{C}, \dots, \Delta\mathfrak{F}$, en éliminant x à l'aide de l'équation

$$\mathfrak{A} = 0,$$

puis les différences $\Delta\mathfrak{C}, \dots, \Delta\mathfrak{F}$ aux *différences de second ordre* $\Delta^2\mathfrak{C}, \dots,$



$\Delta^2 \beta$, en éliminant y , etc., on pourra substituer aux équations (1) les équations finales

$$(2) \quad \alpha = 0, \quad \Delta \alpha = 0, \quad \Delta^2 \alpha = 0, \quad \dots, \quad \Delta^m \beta = 0,$$

que l'on résoudra sans peine en remontant de la dernière, qui fournira la valeur de w , aux précédentes, qui fourniront, l'une après l'autre, les valeurs des inconnues v , ..., z , y , x .

Si l'on a $n > m$, c'est-à-dire si m inconnues x, y, z, \dots, v, w sont liées entre elles par n équations linéaires

$$(3) \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = 0,$$

n étant supérieur à m , il arrivera de deux choses l'une : ou les équations (3) seront exactes, ou elles seront simplement approximatives. Dans la première hypothèse, toutes les méthodes de résolution conduiront aux mêmes résultats, et l'on pourra se contenter de résoudre m équations, choisies arbitrairement dans le système donné, en leur appliquant la méthode indiquée pour le cas où l'on avait $n = m$. Au contraire, dans la seconde hypothèse, c'est-à-dire quand les équations (3) seront simplement approximatives, les diverses méthodes de résolution pourront différer entre elles sous le double rapport de la brièveté du calcul et de l'exactitude des résultats obtenus. Alors aussi, pour construire les équations finales, analogues aux formules (2), on pourra employer deux procédés distincts. Le premier, que l'on peut nommer *indirect*, consiste à substituer aux n équations données m équations de la forme (1), en prenant pour $\alpha, \alpha, \dots, \beta$ m fonctions linéaires de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, et à déduire ensuite des équations (1) les équations (2), en éliminant l'une après l'autre les inconnues x, y, z, \dots, v . Le second procédé, que l'on peut nommer *direct*, consiste à déduire directement les équations finales des équations données, sans passer par les équations (1). Quand on a recours à ce dernier procédé, il n'est pas nécessaire de fixer *a priori*, et dès le commencement de l'opération, les valeurs attribuées aux divers systèmes de facteurs par lesquels on doit multiplier $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ pour

obtenir les fonctions $\alpha, \alpha, \dots, \beta$. En effet, soient

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \quad \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \quad \dots$$

ces mêmes facteurs, en sorte qu'on ait

$$\alpha = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n,$$

$$\alpha = \mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2 + \dots + \mu_n \varepsilon_n,$$

$$\alpha = \nu_1 \varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2 + \dots + \nu_n \varepsilon_n,$$

$$\dots$$

On aura donc

$$\Delta \alpha = \mu_1 \Delta \varepsilon_1 + \mu_2 \Delta \varepsilon_2 + \dots + \mu_n \Delta \varepsilon_n,$$

$$\Delta^2 \alpha = \nu_1 \Delta^2 \varepsilon_1 + \dots + \nu_n \Delta^2 \varepsilon_n,$$

$$\dots$$

Par suite, pour obtenir $\Delta \alpha$, il ne sera pas nécessaire de commencer par construire α , en assignant immédiatement aux facteurs $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ des valeurs déterminées; il suffira de réduire, en éliminant x à l'aide de l'équation

$$\alpha = 0,$$

les fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ aux différences de premier ordre $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2, \dots, \Delta \varepsilon_n$, puis d'ajouter l'une à l'autre ces différences respectivement multipliées par des facteurs quelconques $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ qui pourront dépendre, si l'on veut, de ces mêmes différences, c'est-à-dire des coefficients qu'elles renferment. Pareillement, pour obtenir $\Delta^2 \alpha$, il ne sera pas nécessaire de commencer par construire α , en assignant *a priori* aux facteurs $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ des valeurs déterminées; il suffira de réduire, en éliminant y à l'aide de l'équation

$$\Delta \alpha = 0,$$

les différences de premier ordre $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2, \dots, \Delta \varepsilon_n$ aux différences de second ordre $\Delta^2 \varepsilon_1, \Delta^2 \varepsilon_2, \dots, \Delta^2 \varepsilon_n$, puis d'ajouter l'une à l'autre ces différences de second ordre respectivement multipliées par des facteurs quelconques $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ qui pourront dépendre, si l'on veut, des coefficients renfermés dans ces mêmes différences, etc.



Avant d'aller plus loin, nous ferons une remarque importante. Pour que l'on puisse tirer successivement des équations (2), et en remontant de la dernière à la première, les valeurs des inconnues w, \dots, z, y, x , il est nécessaire que les coefficients de x dans la première, de y dans la seconde, de z dans la troisième, ... de w dans la dernière, ne s'évanouissent pas. D'ailleurs, chacun de ces coefficients étant représenté par la somme de plusieurs termes, on n'aura point à craindre qu'il s'évanouisse, si chacun de ces termes est positif. Or, c'est ce qui arrivera toujours, si, ε désignant l'une quelconque des fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, le facteur λ , ou μ , ou ν , ... qui, dans la somme représentée par λ , ou par $\Delta^w \lambda$, ou par $\Delta^z \lambda$, ... précède la fonction ε , ou $\Delta \varepsilon$, ou $\Delta^2 \varepsilon$, ... est toujours une quantité affectée du même signe que le coefficient de la première des inconnues comprises dans cette même fonction. Dorénavant, nous supposons cette condition toujours remplie dans les équations finales formées par le procédé direct; et, dès lors, ces équations fourniront toujours pour les inconnues des valeurs finies, qui seront exactes si les équations (3) sont exactes elles-mêmes.

Concevons maintenant que, pour abrégé, on désigne, à l'aide de la lettre caractéristique S, par la notation $S\lambda\varepsilon$, ou $S\mu\Delta\varepsilon$, ou $S\nu\Delta^2\varepsilon$, ... la somme des produits de la forme $\lambda_l \varepsilon_l$, ou $\mu_l \Delta \varepsilon_l$, ou $\nu_l \Delta^2 \varepsilon_l$, l étant l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ... n; on aura

$$(4) \quad \lambda = S\lambda\varepsilon, \quad \Delta^w \lambda = S\mu\Delta\varepsilon, \quad \Delta^z \lambda = S\nu\Delta^2\varepsilon, \quad \dots$$

Soient d'ailleurs α le rapport entre les coefficients de x dans les fonctions ε et λ , β le rapport entre les coefficients de y dans les fonctions $\Delta\varepsilon$ et $\Delta^w \lambda$, γ le rapport entre les coefficients de z dans les fonctions $\Delta^2\varepsilon$ et $\Delta^z \lambda$, ... On aura

$$(5) \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon - \alpha\lambda, \quad \Delta^2\varepsilon = \Delta\varepsilon - \beta\Delta^w \lambda, \quad \dots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon - \alpha S\lambda\varepsilon, \quad \Delta^2\varepsilon = \Delta\varepsilon - \beta S\mu\Delta\varepsilon, \quad \dots$$

Ce n'est pas tout : les équations (3) étant linéaires par rapport à x, y, z, \dots, w , chacune de ces équations pourra être présentée sous la forme

$$ax + by + cz + \dots + hw = k$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$(7) \quad \varepsilon = 0,$$

la valeur de ε étant

$$(8) \quad \varepsilon = k - ax - by - cz - \dots - hw,$$

et a, b, c, \dots, h, k étant des constantes qui recevront, dans la fonction ε_1 , certaines valeurs $a_1, b_1, c_1, \dots, h_1, k_1$; dans la fonction ε_2 , d'autres valeurs $a_2, b_2, c_2, \dots, h_2, k_2$; ... enfin, dans la fonction ε_n , d'autres valeurs $a_n, b_n, c_n, \dots, h_n, k_n$. Cela posé, la première des formules (4) donnera

$$(9) \quad \lambda = S\lambda k - x S\lambda a - y S\lambda b - \dots - w S\lambda h,$$

et, par suite, le rapport α entre les coefficients de x dans les fonctions ε et λ sera déterminé par la formule

$$(10) \quad \alpha = \frac{a}{S\lambda a}$$

De plus, la première des équations (6) jointe à la formule (8) donnera

$$(11) \quad \Delta\varepsilon = \Delta k - x \Delta a - y \Delta b - \dots - w \Delta h,$$

les valeurs de $\Delta k, \Delta a, \Delta b, \dots, \Delta h$ étant déterminées par des formules semblables à la première des équations (6) et que l'on en déduit en substituant à la lettre ε l'une des lettres k, a, b, \dots, h , de sorte qu'on aura, par exemple,

$$(12) \quad \Delta k = k - \alpha S\lambda k.$$



On établira de la même manière les formules

$$(13) \quad \Delta^0 b = S_{\mu} \Delta k - y S_{\mu} \Delta b - z S_{\mu} \Delta c - \dots - w S_{\mu} \Delta h,$$

$$(14) \quad \bar{\epsilon} = \frac{\Delta b}{S_{\mu} \Delta b},$$

$$(15) \quad \Delta^2 \epsilon = \Delta^2 k - y \Delta^2 b - z \Delta^2 c - \dots - w \Delta^2 h,$$

les valeurs de $\Delta^2 k$, $\Delta^2 b$, $\Delta^2 c$, ..., $\Delta^2 h$ étant déterminées par des formules semblables à la seconde des équations (6), de sorte qu'on aura, par exemple,

$$(16) \quad \Delta^2 k = \Delta k - \epsilon S_{\mu} \Delta k, \quad \dots$$

En continuant ainsi, on arrivera définitivement aux équations

$$(17) \quad \Delta^m \epsilon = \Delta^m k - w \Delta^m h,$$

$$(18) \quad \Delta^m \bar{\epsilon} = S_{\mu} \Delta^m k - w S_{\mu} \Delta^m h;$$

et si de la formule (17) on élimine w à l'aide de l'équation $\Delta^m \bar{\epsilon} = 0$, on obtiendra une formule nouvelle, savoir

$$(19) \quad \Delta^{m+1} \epsilon = \Delta^{m+1} k,$$

qui, jointe aux diverses formules déjà trouvées, fournira les valeurs constantes des expressions de la forme $\Delta^{m+1} \epsilon$, c'est-à-dire des différences

$$(20) \quad \Delta^{m+1} \epsilon_1, \quad \Delta^{m+1} \epsilon_2, \quad \dots, \quad \Delta^{m+1} \epsilon_n.$$

Ces valeurs, en vertu de la formule (19), seront précisément celles des différences

$$(21) \quad \Delta^{m+1} k_1, \quad \Delta^{m+1} k_2, \quad \dots, \quad \Delta^{m+1} k_n.$$

Donc ces dernières comme les précédentes se réduiront à zéro, si l'on a $n = m$, ou si les équations (3) sont exactes, et si, n étant supérieur à m , les équations (3) ne sont qu'approximatives, à des quantités qui devront être en général d'autant plus petites (abstraction faite des signes) que l'approximation sera plus grande.

Considérons maintenant d'une manière spéciale le cas où le nombre m des inconnues n'est pas donné *a priori*. Supposons, pour fixer les

idées, que ces inconnues soient les coefficients renfermés dans les divers termes d'une série convergente, dont k représente la somme, et que, par suite, les constantes

$$k_1, \quad k_2, \quad \dots, \quad k_n$$

expriment n valeurs de cette même somme déterminées directement, à l'aide d'un certain nombre d'expériences ou d'observations. Généralement ces valeurs, qui pourront être, par exemple, des angles mesurés à l'aide d'instruments plus ou moins parfaits, ne seront pas exactes, mais entachées de certaines erreurs que comporteront les observations dont il s'agit. Cela posé, concevons que l'on emploie, pour la formation des équations finales, desquelles on doit tirer les valeurs des inconnues, le procédé direct, qui fournit avec ces équations les diverses valeurs de Δk , $\Delta^2 k$, $\Delta^3 k$, Pour que les valeurs de $\Delta^{m+1} k$ deviennent comparables aux erreurs d'observation, il sera généralement nécessaire que le nombre entier m acquière une valeur suffisamment grande, et telle qu'on puisse, sans erreur sensible, se borner à conserver dans le développement de k en série les m premiers termes. Réciproquement, lorsque, m venant à croître, les diverses valeurs de $\Delta^{m+1} k$ seront devenues comparables aux erreurs d'observation, le problème du développement de k en série pourra être considéré comme résolu. Car, en attribuant aux coefficients des termes conservés les valeurs données par le calcul, et aux coefficients des termes négligés des valeurs insensibles, on obtiendra une série dont la somme k aura pour valeurs particulières des quantités très peu différentes de k_1, k_2, \dots, k_n , les différences étant représentées par les diverses valeurs de $\Delta^{m+1} k$, et pouvant être en conséquence attribuées aux erreurs d'observation.

En résumé, si, dans le développement d'une fonction k en une série convergente, dont chaque terme renferme un coefficient inconnu, on veut déterminer à la fois et le nombre n des termes après lesquels on peut arrêter la série, sans avoir à craindre d'erreurs sensibles, et les coefficients renfermés dans ces mêmes termes, on devra, en adoptant le procédé



direct pour la formation des équations finales, porter spécialement son attention sur les valeurs des différences des divers ordres

$$\Delta k, \Delta^2 k, \Delta^3 k, \dots$$

Le nombre m aura effectivement acquis la valeur qu'il convient de lui attribuer, lorsque les diverses valeurs numériques de $\Delta^{m+1}k$ seront devenues assez petites pour être comparables aux erreurs d'observation que comportent les diverses valeurs de k .

Il est aisé maintenant de comparer entre elles les deux méthodes que M. Bienaymé a mises en présence l'une de l'autre, savoir : la méthode des moindres carrés et la nouvelle méthode d'interpolation.

Le but ordinairement assigné à la méthode des moindres carrés consiste à déduire d'équations approximatives les valeurs d'inconnues dont le nombre est fixé à l'avance. Au contraire, le but spécial assigné à la nouvelle méthode d'interpolation, dans le Mémoire de 1835, est de déterminer dans une série convergente, propre à représenter le développement d'une fonction, non pas les coefficients inconnus de certains termes dont le nombre serait fixé à l'avance, mais les coefficients des termes que l'on peut négliger sans avoir à craindre qu'il en résulte une erreur sensible dans les valeurs de la fonction (voir le Mémoire lithographié de 1835, page 3) (1).

Dans la méthode des moindres carrés, les divers systèmes de facteurs sont déterminés *a priori*, et chacun d'eux se confond avec le système des coefficients d'une même inconnue. Au contraire, dans la nouvelle méthode d'interpolation, le calculateur, éliminant l'une après l'autre les diverses inconnues, dans un ordre fixé primitivement, et adoptant, pour la formation des équations finales, ce que nous avons nommé le *procédé direct*, détermine successivement les divers systèmes de facteurs à mesure que le calcul avance, et réduit chaque facteur à ± 1 , le signe étant celui du coefficient de l'inconnue

(1) *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles (Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique, T. I, p. 327. — Œuvres de Cauchy, S. II, T. XI).*

qui doit être éliminée la première. De plus, en nommant k la constante à laquelle une quelconque des équations données réduit une fonction linéaire des inconnues, le calculateur arrête le calcul au moment où le nombre m de ces inconnues devient assez considérable pour que les diverses valeurs numériques de $\Delta^{m+1}k$ soient comparables aux erreurs dont la valeur de k est susceptible. Ainsi, ce qui distingue surtout la nouvelle méthode d'interpolation, c'est : 1° l'emploi de facteurs dont chacun se réduit, au signe près, à ± 1 , le signe étant choisi comme on vient de le dire; 2° l'emploi des différences de la forme $\Delta^{m+1}k$ pour déterminer le nombre m des inconnues qui doivent être admises dans le calcul. Remarquons d'ailleurs qu'en suivant la nouvelle méthode on n'aura jamais à craindre d'obtenir pour les inconnues des valeurs infinies, comme cela pourrait arriver, si, en réduisant les divers facteurs à ± 1 , on déterminait les signes autrement qu'il n'a été dit.

Il est vrai qu'en suivant la méthode des moindres carrés on pourrait employer, pour la formation des équations finales, le procédé direct, comme l'a fait Laplace dans le premier supplément au *Calcul des probabilités*. Mais alors même, pour rendre la méthode applicable à la détermination numérique des coefficients que renferme le développement d'une fonction en série convergente, et du nombre m des termes qui doivent être conservés dans ce développement, il serait nécessaire d'emprunter à la nouvelle méthode d'interpolation la règle qui en fait le principal mérite, celle qui s'appuie sur la considération des diverses valeurs de $\Delta^{m+1}k$.

Je dirai plus : suffira-t-il de rapprocher ainsi, autant que possible, la méthode des moindres carrés de la nouvelle méthode d'interpolation, pour assurer, en tous points et dans tous les cas, la supériorité de la première? Nullement, et quelques réflexions bien simples mettront le lecteur à portée de se former une opinion à cet égard.

D'abord, après la modification indiquée, la méthode des moindres carrés sera loin d'être supérieure à la nouvelle méthode, sous le rapport de la brièveté des calculs. Au contraire, la nouvelle méthode con-



servera sur l'autre un avantage incontestable, puisqu'elle réduira les divers facteurs introduits dans les équations finales à l'unité.

La méthode des moindres carrés sera-t-elle, sous le rapport de la précision, toujours supérieure à l'autre? Mais, dans le cas spécial où le nombre des équations est égal au nombre m des inconnues, toutes les méthodes fournissent les mêmes résultats, et alors la meilleure est évidemment celle qui exige moins de calcul.

Si maintenant le nombre n des équations devient notablement supérieur au nombre m des inconnues qui doivent rester dans le calcul, il arrivera de deux choses l'une : ou les valeurs données de la fonction dont il s'agit d'obtenir le développement en série seront entachées de graves erreurs, et alors aucune méthode ne pourra garantir la précision des valeurs trouvées pour les inconnues; ou les valeurs données de la fonction seront à peu près exactes, et, dans ce cas, surtout si le nombre n des inconnues devient considérable, les deux méthodes fourniront généralement des résultats peu différents. Il y a plus : étant données les valeurs des inconnues, telles que les fournit la nouvelle méthode d'interpolation, il suffira généralement, pour obtenir celles que fournirait la méthode des moindres carrés, d'ajouter aux premières des corrections très petites, et que, pour ce motif, il sera facile de calculer. M. Bienaymé dit que ce procédé ne tend à rien moins qu'à doubler le travail si pénible de l'élimination. Mais, dans le Mémoire lithographié de 1835, pour rendre manifestes les avantages de la nouvelle méthode, j'en ai fait à la théorie de la dispersion de la lumière une application que le Journal de M. Liouville n'a pas reproduite, et j'ai ainsi obtenu un développement dont les diverses valeurs étaient précisément celles de la fonction développée. Dira-t-on qu'alors la méthode de correction ci-dessus rappelée double le travail et accroît de fastidieux calculs? Loin de là, elle prouve, sans calcul, que la méthode des moindres carrés, rendue applicable à l'aide d'un emprunt fait à la nouvelle méthode, aurait conduit le calculateur au même résultat, mais plus péniblement, et en exigeant plus de travail.

Il est vrai que les calculs de Laplace assignent à la méthode des

moindres carrés une propriété importante, celle de fournir, comme le remarque M. Bienaymé, les résultats les plus probables. Mais cette propriété ne subsiste, comme je l'expliquerai dans un autre article, que sous certaines conditions; et alors même que ces conditions sont remplies, il peut se faire que, pour obtenir les résultats les plus probables, la voie la plus courte soit de joindre à la nouvelle méthode la méthode de correction dont j'ai parlé.

524.

C. R., T. XXXVII, p. 109 (25 juillet 1853).

M. AUGUSTIN CARCHY présente encore à l'Académie :

1° Un *Mémoire sur les variations des constantes arbitraires que comprennent les intégrales des équations différentielles considérées dans un article précédent* (page 54), et sur les avantages qu'offre l'emploi des clefs algébriques pour déterminer complètement ces variations, lorsque la fonction dont les équations différentielles renferment les dérivées se réduit à une fonction des deux sommes

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots, \quad u^2 + v^2 + w^2 + \dots$$

2° Un *Mémoire sur le Calcul des probabilités*.

Les résultats obtenus dans ces deux Mémoires seront développés dans une prochaine séance.

525.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les coefficients limitateurs ou restricteurs.*

§ I. — *Considérations générales.*

Concevons qu'étant données diverses valeurs particulières

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$



d'une fonction u des variables indépendantes x, y, z, \dots, t avec la somme s de ces valeurs dont le nombre peut être fini ou infini, on demande ce que devient cette somme, lorsqu'on la restreint à un moindre nombre de termes, et que l'on conserve seulement les termes correspondants aux valeurs de x, y, z, \dots, t , qui vérifient certaines conditions. Pour résoudre la question proposée, il suffira évidemment de substituer à la fonction u le produit de cette fonction par un coefficient I qui ait la double propriété de se réduire à l'unité quand les conditions énoncées seront remplies, et de s'évanouir dans le cas contraire. Ce coefficient, que je nomme, pour indiquer son rôle, coefficient *limitateur* ou *restreuteur* ⁽¹⁾ pourra d'ailleurs revêtir un grand nombre de formes diverses. Supposons, pour fixer les idées, qu'un *restreuteur* doive ou se réduire à l'unité, ou s'évanouir, suivant que la variable t est positive ou négative. Ce *restreuteur* pourra être représenté par l'une quelconque des expressions

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2}} \right), \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} dx \right), \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{t dx}{t^2 + x^2} \right),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{x(\lambda-t)} dx d\lambda, \quad \dots$$

Si d'ailleurs, en adoptant la notation que j'ai proposée dans un précédent Mémoire, on représente par I , l'une quelconque des expressions précédentes, un *restreuteur* I , qui se réduirait à l'unité seulement pour des valeurs réelles de t comprises entre des limites t, t_1 , pourra être exprimé à l'aide de la formule

$$(1) \quad I = I_{t-t_1} - I_{-t-t_1};$$

et de cette formule, combinée avec l'équation

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2}} \right),$$

⁽¹⁾ Dans les *Comptes rendus* de 1849, j'avais indiqué les facteurs de cette espèce sous le nom de *coefficients limitateurs*. Le mot *restreuteurs*, qui est plus court, offre aussi l'avantage de bien exprimer le rôle que ces coefficients jouent dans le calcul.

on tirera immédiatement

$$(2) \quad I = \frac{1}{2} \left[\frac{t-t_1}{\sqrt{(t-t_1)^2}} - \frac{t-t_2}{\sqrt{(t-t_2)^2}} \right].$$

Au contraire, en ayant égard à l'équation

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{x(\lambda-t)} dx d\lambda,$$

on trouverait

$$(3) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{t_1}^{t_2} e^{x(\lambda-t)} dx d\lambda.$$

Pareillement, v étant une fonction réelle des variables x, y, z, \dots, t , un *restreuteur* qui se réduirait à l'unité seulement pour des valeurs de v comprises entre deux limites données v, v_1 pourra être exprimé à l'aide de l'une des formules

$$(4) \quad I = I_{v-v_1} - I_{v-v_2},$$

$$(5) \quad I = \frac{1}{2} \left[\frac{v-v_1}{\sqrt{(v-v_1)^2}} - \frac{v-v_2}{\sqrt{(v-v_2)^2}} \right],$$

$$(6) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{v_1}^{v_2} e^{x(\lambda-v)} dx d\lambda.$$

Il sera également facile de trouver un *restreuteur* I qui se réduise à l'unité seulement dans le cas où les variables x, y, z, \dots, t vérifient à la fois plusieurs conditions données. Ainsi, par exemple, si I doit se réduire à l'unité, dans le cas seulement où toutes ces variables sont positives, on pourra prendre

$$(7) \quad I = I_x I_y I_z \dots I_t;$$

et si I doit se réduire à l'unité, dans le cas seulement où deux fonctions réelles v, w de ces variables sont comprises, la première entre les limites v, v_1 , la deuxième entre les limites w, w_1 , on pourra prendre

$$(8) \quad I = (I_{v-v_1} - I_{v-v_2})(I_{w-w_1} - I_{w-w_2}),$$



ou bien encore

$$(9) \quad I = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_1}^{v_2} \int_{w_1}^{w_2} e^{i(x(z-\nu)+\beta(y-w))} dx d\beta d\nu d\omega.$$

L'introduction des restricteurs dans le calcul permet de résoudre facilement une question qui n'est pas sans importance, et que nous allons indiquer.

Considérons n variables réelles

$$x, y, z, \dots, v, w,$$

et n intégrales définies réelles

$$(10) \quad \int_{x_1}^{x_2} X dx, \int_{y_1}^{y_2} Y dy, \dots, \int_{v_1}^{v_2} V dv, \int_{w_1}^{w_2} W dw,$$

X étant fonction de x , Y de y , ..., V de v , W de w . Le produit Π de ces intégrales sera l'intégrale multiple que présente la formule

$$(11) \quad \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \dots \int_{v_1}^{v_2} \int_{w_1}^{w_2} XY \dots VW dx dy \dots dv dw.$$

D'ailleurs, en regardant chacune des intégrales (10) comme une somme d'éléments infiniment petits de l'une des formes

$$(12) \quad X dx, Y dy, \dots, V dv, W dw,$$

et, par suite, le produit Π comme une somme de produits partiels de la forme

$$(13) \quad XY \dots VW dx dy \dots dv dw,$$

on peut demander ce que deviendra le produit Π , si l'on tient compte seulement des produits partiels correspondants à des valeurs de x, y, \dots, w , qui remplissent certaines conditions, et si, en conservant ceux-ci, on écarte tous les autres. Concevons, pour fixer les idées, que les produits partiels conservés correspondent uniquement aux valeurs de x, y, \dots, v, w , qui réduisent une certaine fonction ω

à une quantité comprise entre deux limites données ω_1, ω_2 . En nommant P la somme de ces produits partiels, et en posant

$$(14) \quad I = I_{\omega_1-\omega_2} - I_{\omega_2-\omega_1},$$

on trouvera

$$(15) \quad P = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \dots \int_{v_1}^{v_2} \int_{w_1}^{w_2} IXY \dots VW dx dy \dots dv dw.$$

On pourra d'ailleurs donner au restricteur I la forme

$$(16) \quad I = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega - \omega_1}{\sqrt{(\omega - \omega_1)^2}} - \frac{\omega - \omega_2}{\sqrt{(\omega - \omega_2)^2}} \right],$$

ou bien encore la forme

$$(17) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(\tau-\omega)} d\theta d\tau.$$

De l'équation (15), jointe à la formule (17), on tirera

$$(18) \quad P = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \dots \int_{v_1}^{v_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} XY \dots V\Theta dx dy \dots dv d\tau,$$

la valeur de Θ étant

$$(19) \quad \Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W e^{i\theta(\tau-\omega)} d\theta d\tau.$$

D'autre part, si l'on pose, pour abrégé,

$$\varepsilon = \sqrt{(D_w \omega)^2},$$

et si l'on désigne par la notation

$$\mathbf{S}_{\omega_1-\omega_2}^{\omega_2-\omega_1} \frac{W'}{\varepsilon}$$

la somme des valeurs que peut acquérir le rapport

$$\frac{W'}{\varepsilon},$$



pour des valeurs de ω propres à vérifier l'équation

$$(20) \quad \omega = \tau,$$

et renfermées entre les limites ω_1, ω_2 , la formule (19) donnera (voir le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) (1)

$$(21) \quad \theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{W}{\omega} d\omega.$$

Donc la formule (18) pourra être réduite à la suivante :

$$(22) \quad P = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \dots \int_{v_1}^{v_2} \frac{XY \dots VW}{\omega} dz dx dy \dots dv.$$

On peut, au reste, établir encore cette dernière équation comme il suit.

Soit ω_2 une valeur de ω propre à vérifier l'équation

$$\omega = \tau,$$

τ étant une quantité renfermée entre les limites ω_1, ω_2 . Si l'on attribue à τ un accroissement infiniment petit et positif $d\tau$, la valeur de ω représentée par ω_2 recevra un accroissement correspondant dont la valeur numérique sera $\frac{d\tau}{\omega}$, et la partie de l'intégrale

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} W d\omega$$

correspondante à ce même accroissement sera

$$\frac{W}{\omega} d\tau.$$

Cela posé, concevons que les différentielles dx, dy, \dots, dv soient, dans les éléments (12), des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur à l'ordre de la quantité infiniment petite représentée par $d\tau$. Alors, dans la valeur de P donnée par la formule (15), ceux des éléments de l'intégrale

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} W d\omega$$

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. I.

qui correspondront à la valeur τ de ω et à l'élément $d\tau$ de la différence $\omega_2 - \omega_1$, se réduiront aux produits de la forme

$$\frac{W}{\omega} d\tau,$$

en sorte qu'on aura

$$(23) \quad \int_{\omega_1}^{\omega_2} W d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{W}{\omega} d\omega.$$

Or, eu égard à cette dernière formule, l'équation (15) peut être évidemment remplacée par l'équation (22).

Considérons spécialement le cas où la fonction ω est linéaire par rapport aux variables x, y, \dots, v, w , et de la forme

$$(24) \quad \omega = ax + by + \dots + gv + hw.$$

Alors, en posant, pour abrégér,

$$(25) \quad A = \int_{x_1}^{x_2} X dx, \quad \mathcal{A} = \int_{x_1}^{x_2} X e^{-a^2 x^2} dx,$$

et nommant B, \dots, G, H , ou $\mathcal{B}, \dots, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ ce que devient A ou \mathcal{A} quand aux lettres x, X, a on substitue les lettres y, Y, b , ou v, V, g , ou w, W, h , on tirera des formules (11) et (15)

$$(26) \quad \Pi = AB \dots GH,$$

$$(27) \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A} \mathcal{B} \dots \mathcal{G} \mathcal{H} e^{\beta^2 \tau^2} \dots d\tau d\beta.$$

Si, les fonctions X, Y, \dots, V, W étant toutes semblables entre elles, on suppose les intégrales (10) toutes prises entre les mêmes limites, on aura

$$A = B = \dots = G = H,$$

par conséquent

$$(28) \quad \Pi = A^n.$$

Enfin, si l'on suppose

$$x_1 = -\infty, \quad x_2 = \infty, \quad \omega_1 = -\nu, \quad \omega_2 = \nu,$$



ν désignant une quantité positive, les formules (25) et (27) donneront

$$(29) \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} X dx, \quad A_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} X e^{-\nu x^2} dx,$$

$$(30) \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} X_\nu \psi_0 \dots \psi_\nu e^{\tau x} d\tau d\beta.$$

Pour montrer une application des formules trouvées, considérons en particulier le cas où l'on aurait

$$(31) \quad X = K e^{-kx^2},$$

k, K désignant deux constantes positives. Alors on aura encore

$$(32) \quad A = K \sqrt{\frac{\pi}{k}},$$

et l'on tirera des formules (28) et (30)

$$(33) \quad \frac{P}{\Pi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\nu}{\sqrt{s}}} e^{-\beta^2} d\beta,$$

la valeur de s étant

$$(34) \quad s = \frac{a^2 + b^2 + \dots + g^2 + h^2}{k}.$$

Si l'on supposait, au contraire,

$$(35) \quad X = K e^{-k\sqrt{x^2}},$$

on trouverait

$$(36) \quad A = \frac{2K}{k}$$

et

$$(37) \quad \frac{P}{\Pi} = 2 \int_0^{\frac{\nu}{\sqrt{s}}} \mathcal{E} \left(\frac{e^{\nu\beta} - 1}{\left(1 + \frac{a^2\beta^2}{k^2}\right) \left(1 + \frac{b^2\beta^2}{k^2}\right) \dots \left(1 + \frac{g^2\beta^2}{k^2}\right) \left(1 + \frac{h^2\beta^2}{k^2}\right)} \right) d\beta,$$

le signe \mathcal{E} étant relatif à la variable θ .

Si, dans la formule (37) on pose $n = 2$, elle donnera

$$(38) \quad \frac{P}{\Pi} = 1 - \frac{a^2 e^{-\frac{k\nu}{\sqrt{a^2}} - b^2 e^{-\frac{k\nu}{\sqrt{b^2}}}}{a^2 - b^2}.$$

§ II. — Applications au Calcul des probabilités.

L'emploi des restricteurs permet de résoudre très aisément un grand nombre de problèmes relatifs au Calcul des probabilités, mais qu'on n'avait point encore résolus, si ce n'est dans des cas particuliers, et dont la solution, dans ces cas-là même, n'avait été obtenue qu'à l'aide d'une analyse difficile à suivre. C'est ce que je vais montrer en peu de mots.

Représentons par

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$$

n erreurs diverses que comportent n quantités

$$k_1, k_2, \dots, k_n,$$

déterminées à l'aide de certaines expériences ou de certaines observations. Soit ε_l l'une quelconque de ces erreurs, l étant l'un des nombres entiers $1, 2, \dots, n$. Soient encore ε une valeur particulière attribuée à ε_l , $d\varepsilon$ un accroissement infiniment petit attribué à ε , et

$$x,$$

deux limites inférieure et supérieure entre lesquelles l'erreur ε est certainement comprise. Enfin, concevons que, $f(\varepsilon)$ étant une fonction de ε , le produit

$$f(\varepsilon) d\varepsilon$$

représente la probabilité de coïncidence de l'erreur ε_l avec une quantité renfermée entre les deux limites infiniment voisines

$$\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon.$$

On aura

$$(1) \quad \int_x^x f(\varepsilon) d\varepsilon = 1.$$



Si les quantités k_1, k_2, \dots, k_n sont déduites d'observations ou d'expériences de natures diverses, et qui ne comportent pas les mêmes facilités d'erreurs, la forme de la fonction $f(\varepsilon)$ et les valeurs des limites ι, z pourront varier avec la valeur de l .

Si, pour fixer les idées, on représente par

$$\varphi(\varepsilon), \chi(\varepsilon), \dots, \varpi(\varepsilon)$$

les formes successives de $f(\varepsilon)$, correspondantes aux valeurs

$$1, 2, \dots, n$$

du nombre l ; si d'ailleurs, dans la formule (1), on écrit, au lieu de ι et de z, ι_l et z_l , on tirera successivement de cette formule

$$(2) \int_{\iota_1}^{z_1} \varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 = 1, \int_{\iota_2}^{z_2} \chi(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 = 1, \dots, \int_{\iota_n}^{z_n} \varpi(\varepsilon_n) d\varepsilon_n = 1,$$

puis on en conclura

$$(3) \int_{\iota_1}^{z_1} \int_{\iota_2}^{z_2} \dots \int_{\iota_n}^{z_n} \mathfrak{Q} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n = 1,$$

la valeur de \mathfrak{Q} étant

$$(4) \mathfrak{Q} = \varphi(\varepsilon_1) \chi(\varepsilon_2) \dots \varpi(\varepsilon_n).$$

Or il est clair que l'élément

$$(5) \mathfrak{Q} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n$$

de l'intégrale multiple qui forme le premier membre de l'équation (3), sera le produit des éléments

$$(6) \varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1, \chi(\varepsilon_2) d\varepsilon_2, \dots, \varpi(\varepsilon_n) d\varepsilon_n,$$

compris dans les intégrales simples qui forment les premiers membres des équations (2). Il représentera donc la probabilité de la coïncidence simultanée de la première erreur avec une quantité comprise entre deux limites infiniment voisines et de la forme $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$, de la seconde erreur avec une quantité comprise entre deux limites de la

forme $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon, \dots$, de la $n^{\text{ième}}$ erreur avec une quantité comprise entre deux limites de la forme $\varepsilon_n, \varepsilon_n + d\varepsilon_n$.

Soit maintenant ω une fonction donnée des erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, et nommons P la probabilité de coïncidence de cette fonction avec une quantité comprise entre les deux limites ω, ω_p . Pour obtenir P, il suffira évidemment d'écarter de l'intégrale (3) les éléments correspondants à des valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, qui produiront des valeurs de ω situées en dehors des limites ω, ω_p , et de conserver tous les autres. On y parviendra en multipliant l'élément (5) de l'intégrale (3) par un restricteur I qui ait la double propriété de se réduire à l'unité quand la valeur de ω tombe entre les limites ω, ω_p , et à zéro dans le cas contraire. On aura donc

$$(7) P = \int_{\iota_1}^{z_1} \int_{\iota_2}^{z_2} \dots \int_{\iota_n}^{z_n} I \mathfrak{Q} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n.$$

Ajoutons que la valeur de I pourra se déduire de la formule (16) ou (17) du § I. On pourra donc prendre

$$(8) I = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega}^{\omega_p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{b(\tau-\omega)\iota} d\tau d\beta.$$

Si les quantités k_1, k_2, \dots, k_n sont déduites d'observations ou d'expériences de même nature, qui comportent les mêmes facilités d'erreurs, les fonctions

$$\varphi(\varepsilon), \chi(\varepsilon), \dots, \varpi(\varepsilon)$$

deviendront toutes égales; et, en désignant par $f(\varepsilon)$ l'une quelconque d'entre elles, on aura

$$(9) \mathfrak{Q} = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n).$$

Alors aussi les limites inférieures et supérieures des intégrales (2) ne varieront pas dans le passage d'une intégrale à l'autre, et, en désignant toujours ces limites à l'aide des lettres ι, z , on aura

$$(10) P = \int_{\iota}^z \int_{\iota}^z \dots \int_{\iota}^z I \mathfrak{Q} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n.$$



Si l'on ne peut assigner *a priori* aucune limite inférieure ni supérieure aux erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, la formule (10) donnera

$$(11) \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} I^{\omega} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n.$$

Enfin, si l'on veut que l'erreur ω tombe entre deux limites égales aux signes près, mais affectées de signes contraires, et si l'on pose en conséquence

$$\omega_1 = -\nu, \quad \omega_2 = \nu,$$

ν étant une quantité positive, la formule (8) donnera

$$(12) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{b(\tau - \omega)} d\tau d\theta.$$

Considérons spécialement le cas où l'erreur ω est une fonction linéaire des erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, et où l'on a, par suite,

$$(13) \quad \omega_1 = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant des facteurs constants. Dans ce cas, en posant, pour abréger,

$$(14) \quad \mathcal{A}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 \varepsilon_1} f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

et en nommant $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ ce que devient \mathcal{A} quand on y remplace successivement la lettre λ par les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on tirera des formules (8) et (10)

$$(15) \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_n e^{b\tau} d\tau d\theta.$$

Si d'ailleurs on n'assigne *a priori* aucune limite aux erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, et si l'on veut que l'erreur ω tombe entre les limites $-\nu, +\nu$, les formules (14) et (15) donneront

$$(16) \quad \mathcal{A}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 \varepsilon_1} f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$(17) \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_n e^{b\tau} d\tau d\theta.$$

De plus, l'équation (1), à laquelle devra satisfaire la fonction $f(\varepsilon)$ donnera

$$(18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = 1.$$

Si l'on suppose, en particulier,

$$(19) \quad f(\varepsilon) = K e^{-k\varepsilon^2},$$

k, K étant deux constantes positives, on tirera de la formule (18)

$$K = \sqrt{\frac{k}{\pi}},$$

et l'équation (17) donnera

$$(20) \quad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\nu} e^{-b\theta^2} d\theta,$$

la valeur de s étant déterminée par les formules

$$(21) \quad s = \frac{\Lambda}{k}, \quad \Lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Si l'on suppose, au contraire,

$$(22) \quad f(\varepsilon) = K e^{-k\sqrt{|\varepsilon|}},$$

on tirera de la formule (18)

$$K = \frac{k}{2},$$

et l'équation (17) donnera

$$(23) \quad P = 2 \int_0^{\nu} \frac{e^{-b\theta} - 1}{\theta \left(\left(1 + \frac{\lambda_1^2 \theta^2}{k^2}\right) \left(1 + \frac{\lambda_2^2 \theta^2}{k^2}\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda_n^2 \theta^2}{k^2}\right) \right)} d\theta,$$

le signe \int du calcul des résidus étant relatif à la variable θ .

Si, dans la formule (23), on pose $n = 2$, elle donnera

$$(24) \quad P = 1 - \frac{\frac{k\nu}{\sqrt{\lambda_1^2}} e^{-\frac{k\nu}{\sqrt{\lambda_1^2}}} - \lambda_2^2 e^{-\frac{k\nu}{\sqrt{\lambda_2^2}}}}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$



Pour montrer une application des formules qui précèdent, supposons que l'on veuille déterminer les valeurs des m inconnues x, y, \dots, v, w liées aux quantités k_1, k_2, \dots, k_n , par n équations approximatives de la forme

$$(25) \quad a_1 x + b_1 y + \dots + g_1 v + h_1 w = k_1,$$

l étant l'un quelconque des nombres entiers $1, 2, \dots, n$, et n étant supérieur à m . Pour obtenir la valeur de x , il suffira de multiplier chaque équation par un certain facteur λ_l , puis d'ajouter l'une à l'autre les diverses formules ainsi obtenues, en choisissant les facteurs λ de manière que, dans l'équation finale, le coefficient de x se réduise à l'unité, et ceux de y, z, \dots, w à zéro. Si, pour abrégér, on indique, à l'aide de la lettre caractéristique S , une somme de termes semblables les uns aux autres, la valeur de x sera

$$(26) \quad x = S \lambda_l k_l,$$

les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant déterminés par les formules

$$(27) \quad S a_l \lambda_l = 1, \quad S b_l \lambda_l = 0, \quad \dots, \quad S h_l \lambda_l = 0;$$

et, si l'on nomme toujours ε_l l'erreur que comporte k_l , l'erreur ξ que comportera la valeur de x sera, en vertu de la formule (26),

$$(28) \quad \xi = S \lambda_l \varepsilon_l.$$

D'autre part, si l'on ne peut assigner *a priori* à l'erreur ε_l aucune limite inférieure ni supérieure, et si la loi de facilité des erreurs est celle qu'exprime la formule (19), la probabilité de la coïncidence de l'erreur ξ avec une quantité comprise entre les limites $-\nu, \nu$ sera la valeur de P que donne la formule (20), et qui croît pour des valeurs décroissantes de la somme

$$(29) \quad \Lambda = S \lambda_l^2.$$

Done la valeur de x la plus probable sera celle qui correspondra à la valeur minimum de Λ , et qui sera déterminée par la formule

$$(30) \quad S \lambda_l d \lambda_l = 0,$$

jointe aux équations (27) desquelles on tire

$$(31) \quad S a_l d \lambda_l = 0, \quad S b_l d \lambda_l = 0, \quad \dots, \quad S h_l d \lambda_l = 0.$$

Or les formules (30) et (31) devant se vérifier, quelles que soient parmi les différentielles $d \lambda_1, d \lambda_2, \dots, d \lambda_n$ celles qui resteront arbitraires, il en résulte que λ_l devra être de la forme

$$(32) \quad \lambda_l = a_l \alpha + b_l \beta + \dots + h_l \eta,$$

$\alpha, \beta, \dots, \eta$ désignant m coefficients nouveaux dont les valeurs pourront être déduites des formules (27). Il en résulte aussi que la valeur la plus probable de x sera fournie par l'équation

$$(33) \quad x = \alpha X + \beta Y + \dots + \eta W = 0,$$

si, en posant, pour abrégér,

$$K_l = k_l - a_l x - b_l y - \dots - h_l w,$$

on prend

$$(34) \quad X = S a_l K_l, \quad Y = S b_l K_l, \quad \dots, \quad W = S h_l K_l.$$

Si à la variable x on substitue l'une des variables y, z, \dots, w , l'équation (33) gardera la même forme, les coefficients $\alpha, \beta, \dots, \eta$ n'étant plus les mêmes; et par suite les valeurs les plus probables de x, y, \dots, v, w seront généralement celles qui vérifieront les formules

$$(35) \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad \dots, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

c'est-à-dire celles que fournit la méthode des moindres carrés.

De ce qu'on vient de dire, il résulte que la méthode des moindres carrés, appliquée à la résolution d'équations linéaires dont le nombre surpasse celui des inconnues, fournira toujours les résultats les plus probables, si, la loi de facilité étant la même pour les diverses erreurs que comportent les quantités fournies par les expériences ou les observations, on ne peut assigner à ces erreurs aucune limite inférieure ni supérieure, et si d'ailleurs la probabilité d'une erreur comprise entre deux limites infiniment voisines est proportionnelle à une exponen-

tielle népérienne dont l'exposant soit le produit d'un coefficient négatif par le carré de cette même erreur. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, la méthode des moindres carrés peut fournir pour les inconnues $x, y, z, \dots, \varphi, \omega$ des valeurs qui diffèrent sensiblement des valeurs les plus probables. C'est effectivement ce que l'on peut conclure des formules établies dans ce Mémoire, et ce que j'expliquerai plus en détail dans un prochain article.

526.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables.*

C. R., T. XXXVII, p. 198 (8 août 1853).

Supposons m inconnues liées, par n équations linéaires et approximatives, à n quantités fournies par des observations de même nature, et dont chacune comporte une certaine *erreur* ε . On pourra, de ces équations multipliées par certains facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, puis ajoutées entre elles, déduire une équation finale propre à déterminer la première inconnue x , et la valeur de x ainsi trouvée sera ce qu'on appelle un *résultat moyen*. Si l'on connaît la *loi de facilité* de l'erreur ε et les limites entre lesquelles cette erreur est certainement comprise, on pourra, des formules établies dans le précédent Mémoire, déduire la probabilité P de la coïncidence de l'erreur ξ , que comportera le résultat moyen, avec une quantité numériquement inférieure à une certaine limite ν . Cette probabilité varie avec les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ que l'on peut choisir de manière à obtenir la plus grande valeur possible de P ; et à cette plus grande valeur de P correspondra la *valeur la plus probable* de x , qui dépendra généralement de la limite ν et de la fonction $f(\varepsilon)$ propre à représenter la loi de l'erreur ε . D'ailleurs, ε venant à croître, la fonction $f(\varepsilon)$ peut décroître assez rapidement

pour qu'on puisse, sans erreur sensible, négliger les valeurs de cette fonction correspondantes à des valeurs de ε situées hors des limites entre lesquelles l'erreur ε est certainement comprise. C'est à ce cas spécial que se rapporte le présent Mémoire; et, en supposant remplie la condition qui vient d'être énoncée, j'établis les formules très simples qui déterminent la valeur la plus probable de l'inconnue x .

D'après ces formules, la valeur de x la plus probable ne deviendra indépendante de la valeur assignée à la limite ν que pour une forme spéciale de la fonction $f(\varepsilon)$, qui renferme deux constantes arbitraires c, N . De ces deux constantes, la seconde N est la seule qui serve, avec les coefficients des inconnues dans les équations données, à déterminer les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Si on la suppose réduite au nombre 2, les résultats moyens les plus probables seront précisément ceux que fournirait la méthode des moindres carrés. Mais il en sera tout autrement si le nombre N cesse d'être égal à 2. Concevons, pour fixer les idées, que les inconnues se réduisent à une seule x , et que les coefficients de cette inconnue, dans les équations données, soient inégaux; alors la valeur la plus probable de l'inconnue x sera fournie, si l'on suppose $N = 1$, par une seule des équations données, savoir, par celle dans laquelle le coefficient de x offrira la plus grande valeur numérique, et, si l'on suppose N très grand, par l'équation finale qu'on obtiendra en ajoutant l'une à l'autre les équations données, préparées de manière que dans chacune d'elles le coefficient de x soit positif.

§ I. — *Considérations générales sur la probabilité des résultats moyens, et sur les résultats les plus probables.*

Soient, comme dans le précédent Mémoire,

k_1, k_2, \dots, k_n des quantités fournies par l'observation;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ les erreurs qu'elles comportent;

l l'un quelconque des nombres entiers $1, 2, \dots, n$;

ν, ν' les limites inférieure et supérieure entre lesquelles l'erreur ε_l est certainement comprise;



$f(\varepsilon)$ de la probabilité de la coïncidence de l'erreur ε_i avec une quantité comprise entre les limites infiniment voisines ε , $\varepsilon + d\varepsilon$.

Supposons encore que, m inconnues x , y , ..., v , w étant liées aux quantités k_1, k_2, \dots, k_n par n équations approximatives de la forme

$$(1) \quad a_1x + b_1y + \dots + g_1v + h_1w = k_1,$$

on tire de ces équations multipliées par certains facteurs, puis ajoutées entre elles, la valeur de l'inconnue x ; et nommons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ces facteurs, choisis de manière que l'on ait

$$(2) \quad S a_i \lambda_i = 1, \quad S b_i \lambda_i = 0, \quad \dots, \quad S h_i \lambda_i = 0,$$

la lettre caractéristique S indiquant une somme de termes semblables les uns aux autres. La valeur trouvée de l'inconnue x et l'erreur ξ que comportera cette valeur seront

$$(3) \quad x = S \lambda_i k_i, \quad \xi = S \lambda_i \varepsilon_i.$$

Soit maintenant P la probabilité de la coïncidence de l'erreur ξ avec une quantité renfermée entre deux limites données ω , ω_p , et posons, pour abrégér,

$$(4) \quad \varphi(\theta) = \int_1^x e^{-\theta \varepsilon} f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$(5) \quad \Phi(\theta) = \varphi(\lambda_1 \theta) \varphi(\lambda_2 \theta) \dots \varphi(\lambda_n \theta).$$

On aura

$$(6) \quad \varphi(0) = 1,$$

$$(7) \quad \Phi(0) = 1,$$

et la formule (15) de la page 90 donnera

$$(8) \quad P = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega_p \theta - \sin \omega \theta}{\theta} \Phi(\theta) d\theta.$$

Considérons spécialement le cas où l'on aurait

$$1 = -x, \quad \omega_1 = -\omega, \quad \omega_p = \omega,$$

ω étant, ainsi que x , une quantité positive, et, de plus,

$$(9) \quad f(-\varepsilon) = f(\varepsilon).$$

Dans ce cas spécial, la formule (4) donnera

$$(10) \quad \varphi(\theta) = 2 \int_0^x f(\varepsilon) \cos \theta \varepsilon d\varepsilon,$$

et la formule (17) de la page 90 donnera

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{2}{\pi} \int_0^\omega \int_0^\infty \Phi(\theta) \cos \theta \tau d\tau d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta \omega}{\theta} \Phi(\theta) d\theta \\ &= \frac{2\omega}{\pi} \left[\int_0^\infty \Phi(\theta) d\theta - \frac{\omega^2}{2.3} \int_0^\infty \theta^2 \Phi(\theta) d\theta + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad D_\omega P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi(\theta) \cos \theta \omega d\theta.$$

Si l'on ne peut assigner à ε_i aucune limite inférieure ni supérieure, on aura $x = \infty$, et par suite la formule (10) donnera

$$(13) \quad \varphi(\theta) = 2 \int_0^\infty f(\varepsilon) \cos \theta \varepsilon d\varepsilon.$$

Au reste, la formule (13) comprend, comme cas particulier, la formule (10) que l'on en tire, en réduisant $f(\varepsilon)$ à une fonction discontinue qui s'évanouisse constamment, pour des valeurs de ε supérieures à x .

Si la fonction $f(\varepsilon)$, sans être discontinue, devient très petite, et décroît très rapidement pour des valeurs de ε supérieures à x , en sorte qu'on ait sensiblement

$$\int_x^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon = 0,$$

alors, la valeur numérique de l'intégrale $\int_x^\infty f(\varepsilon) \cos \theta \varepsilon d\varepsilon$, toujours inférieure à celle de l'intégrale $\int_x^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon$, puisqu'on a constamment



$f(\varepsilon) > 0$, sera elle-même très petite, et par suite, dans la détermination de la fonction $\varphi(\theta)$, on pourra, sans erreur sensible, substituer la formule (13) à l'équation (10).

Observons encore que les équations (1), (2), (3) ne sont pas altérées, quand chacune des quantités

$$a_i, b_i, \dots, g_i, k_i, \lambda_i$$

vient à changer de signe. Il en résulte que, dans le cas où la condition (9) est vérifiée, on peut se borner à déduire des formules (5) et (11), jointes à la formule (10) ou (13), les valeurs de P correspondantes à des valeurs positives des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Observons enfin que de la formule (13) on peut déduire, non seulement la fonction $\varphi(\theta)$, lorsque l'on connaît la fonction $f(\varepsilon)$, mais réciproquement la fonction $f(\varepsilon)$, lorsque l'on connaît $\varphi(\theta)$. En effet, multiplions les deux membres de cette formule par $\cos \theta \tau$, puis intégrons par rapport à θ entre les limites $\theta = 0, \theta = \infty$. Alors, en remplaçant τ par ε , nous trouverons

$$(14) \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\theta) \cos \theta \varepsilon d\theta.$$

Pareillement, on tirera de la formule (11)

$$(15) \quad \Phi(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \nu \tau \cdot D \cdot P d\nu.$$

La probabilité P, déterminée par la formule (11), dépend généralement de la forme assignée à la fonction $f(\varepsilon)$ et des valeurs attribuées, non seulement aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, mais encore à la quantité positive ν . En supposant invariable la forme de la fonction $f(\varepsilon)$ et la valeur de ν , on peut demander quelles valeurs il convient d'attribuer aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, pour que la valeur de P soit la plus grande possible, ou, en d'autres termes, pour que la première des équations (3) fournisse la valeur de x la plus probable. Or, si l'on désigne à l'aide de la lettre caractéristique δ des variations corres-

pondantes attribuées aux quantités $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, P$, et si P est une fonction continue de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, il suffira ordinairement, pour obtenir le maximum de P, d'assujettir $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ à la condition

$$(16) \quad \delta P = 0,$$

quelles que soient, d'ailleurs, celles des variations $\delta \lambda_1, \delta \lambda_2, \dots, \delta \lambda_n$ qui resteront arbitraires, quand on aura égard aux formules (2) et, par conséquent, aux suivantes :

$$(17) \quad S a_i \delta \lambda_i = 0, \quad S b_i \delta \lambda_i = 0, \quad \dots, \quad S h_i \delta \lambda_i = 0.$$

Donc, pour obtenir le maximum de P, il suffira ordinairement d'exprimer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en fonction de m nouveaux facteurs $\alpha, \beta, \dots, \eta$, à l'aide d'équations de la forme

$$(18) \quad D_i P = a_i \alpha + b_i \beta + \dots + h_i \eta,$$

puis de déterminer ces nouveaux facteurs, à l'aide des formules (2) jointes à la formule (18).

§ II. — Sur les conditions à remplir pour que les résultats les plus probables deviennent indépendants des limites assignées aux erreurs qu'ils comportent.

Soient toujours ξ l'erreur que comporte la valeur trouvée de l'inconnue x , et P la probabilité de la coïncidence de cette erreur avec une quantité comprise entre les limites $-\nu, +\nu$. Admettons d'ailleurs, comme nous l'avons fait, pour les erreurs que comportent les quantités fournies par l'observation, une loi de facilité représentée par une fonction $f(\varepsilon)$ qui reste invariable quand l'erreur ε change de signe, et qui décroisse très rapidement pour des valeurs croissantes de cette même erreur. La probabilité P sera donnée par la formule (11) du § I, et si, en supposant P fonction continue des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on veut faire en sorte que P devienne un maximum, on devra les déterminer à l'aide de la formule

$$(1) \quad \delta P = 0,$$



dans laquelle δP représente la variation de P correspondante aux variations $\delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \dots, \delta\lambda_n$ des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. D'ailleurs, les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ déduites de la formule (1), combinée avec les formules (17) du § I, et, par suite, la valeur la plus probable x de l'inconnue x , dépendront, en général, des valeurs attribuées, non seulement aux coefficients

$$a_i, b_i, \dots, h_i, k_i,$$

que renferment les équations données, mais encore à la quantité positive ν ; et si l'on veut que x devienne indépendant de ν , il faudra que, ν venant à varier, la relation établie par la formule (1) entre les quantités $\delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \dots, \delta\lambda_n$ demeure invariable; en d'autres termes, il faudra que l'on ait

$$(2) \quad D_\nu \delta P = 0.$$

Mais, eu égard à la formule (15) du § I, l'équation (2) entraînera la suivante

$$(3) \quad \delta \Phi(\tau) = 0,$$

quelle que soit, d'ailleurs, la valeur attribuée à τ . Donc, si la valeur la plus probable x de l'inconnue x devient indépendante de ν , alors à la formule (1) on pourra substituer l'équation (3) qui, subsistant quel que soit τ , s'accordera nécessairement avec la suivante :

$$(4) \quad \delta \Phi(1) = 0.$$

D'autre part, si l'on pose, pour abrégier,

$$(5) \quad \varpi(\theta) = \frac{D_\theta \varphi(\theta)}{\varphi(\theta)} = D_\theta 1 \varphi(\theta),$$

on aura identiquement

$$(6) \quad \delta \Phi(\tau) = \Phi(\tau) S \varpi(\lambda_i \tau) \delta \lambda_i,$$

et par suite les formules (3), (4) donneront

$$(7) \quad S \varpi(\lambda_i \tau) \delta \lambda_i = 0,$$

$$(8) \quad S \varpi(\lambda_i) \delta \lambda_i = 0.$$

Or, pour que les équations (7) et (8) s'accordent entre elles, il faudra que l'on ait

$$(9) \quad \frac{\varpi(\lambda_1 \tau)}{\varpi(\lambda_1)} = \frac{\varpi(\lambda_2 \tau)}{\varpi(\lambda_2)} = \dots = \frac{\varpi(\lambda_n \tau)}{\varpi(\lambda_n)}.$$

Il est bon d'observer que l'équation (8), jointe aux formules (17) du § I, déterminera les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en fonction des coefficients a_i, b_i, \dots, h_i . Si ces coefficients viennent à varier, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ varieront par suite, et si, pendant qu'ils varient, la valeur la plus probable x de l'inconnue x reste indépendante de ν , alors, de la formule (9) qui ne cessera pas d'être vérifiée, on en conclura qu'un rapport de la forme

$$\frac{\varpi(\lambda \tau)}{\varpi(\lambda)}$$

offre une valeur indépendante de la valeur attribuée à λ . On aura donc alors

$$(10) \quad \frac{\varpi(\lambda \tau)}{\varpi(\lambda)} = \frac{\varpi(\tau)}{\varpi(1)}$$

et, par suite, en supposant τ positif,

$$(11) \quad \varpi(\tau) = \tau^M \varpi(1),$$

M étant une quantité constante. Cela posé, la formule (5) donnera, pour des valeurs positives de θ ,

$$(12) \quad \varphi(\theta) = e^{-c\theta^N},$$

les valeurs de N, c étant

$$N = M + 1, \quad c = -\frac{\varpi(1)}{N}.$$

D'ailleurs, la valeur de $\varphi(\theta)$ étant déterminée par la formule (12), la formule (14) du § I donnera

$$(13) \quad f(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-c\theta^N} \cos \theta \tau d\theta.$$

Ainsi la loi de facilité des erreurs que comportent les observations



devra être une des lois que suppose la formule (13), si l'on veut que la valeur la plus probable de chaque inconnue devienne indépendante des limites assignées à l'erreur que comporte cette valeur même.

Supposons maintenant la valeur de $f(\varepsilon)$ déterminée par la formule (13); alors, en attribuant, comme on peut le faire, des valeurs positives aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on tirera de l'équation (12), jointe aux formules (5) et (11) du § I,

$$(14) \quad \Phi(\theta) = e^{-\theta^N}$$

et

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-s\theta^N} \frac{\sin \theta \nu}{\theta} d\theta \\ &= \frac{2\nu}{\pi} \frac{1}{Ns^{\frac{1}{N}}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{N}\right) - \frac{\nu^2}{2.3} \frac{1}{s^{\frac{2}{N}}} \Gamma\left(\frac{3}{N}\right) + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

la valeur de s étant déterminée par les formules

$$(16) \quad s = c\Lambda, \quad \Lambda = \lambda_1^N + \lambda_2^N + \dots + \lambda_n^N.$$

Alors aussi P croîtra pour des valeurs croissantes des deux quantités s, Λ , et l'équation (8) donnera

$$(17) \quad S \lambda_i^{N-1} \delta \lambda_i = 0.$$

Donc à la formule (18) du § I on pourra substituer celle-ci :

$$(18) \quad \lambda_i^{N-1} = a_i x + b_i \varepsilon + \dots + h_i \eta.$$

Si l'on suppose les inconnues réduites à une seule x , alors, après avoir préparé les équations données de manière que le coefficient a_i soit toujours positif, on tirera de l'équation (18)

$$(19) \quad \lambda_i^{N-1} = a_i x,$$

$$(20) \quad \lambda_i = a_i^{\frac{1}{N-1}} x^{\frac{1}{N-1}},$$

et de l'équation (20), jointe à la formule $S a_i \lambda_i = 1$,

$$(21) \quad a_i^{\frac{1}{N-1}} = S a_i^{\frac{N}{N-1}}.$$

Alors aussi, pour obtenir l'équation finale qui fournira la valeur de x la plus probable, il suffira d'ajouter l'une à l'autre les équations données, après les avoir respectivement multipliées par les divers termes de la suite

$$(22) \quad a_1^{\frac{1}{N-1}}, a_2^{\frac{1}{N-1}}, \dots, a_n^{\frac{1}{N-1}}.$$

Si l'on réduit l'exposant N au nombre 2, l'équation (13) donnera

$$(23) \quad f(\varepsilon) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-k\varepsilon^2},$$

la valeur de k étant

$$k = \frac{1}{2\sqrt{c}};$$

alors aussi la formule (18), réduite à

$$(24) \quad \lambda_i = a_i x + b_i \varepsilon + \dots + h_i \eta,$$

conduira précisément aux résultats que fournit la méthode des moindres carrés, ce qui s'accorde avec les conclusions auxquelles nous sommes parvenu dans le Mémoire précédent.

Si l'on réduit l'exposant N à l'unité, on tirera de l'équation (13)

$$(25) \quad f(\varepsilon) = \frac{k}{\pi} \frac{1}{1+k^2\varepsilon^2},$$

la valeur de k étant $\frac{1}{c}$. Alors aussi, en supposant les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n inégaux, et désignant par a , le plus grand de tous, on tirera des formules (20), (21) de très petites valeurs des rapports $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$. Donc alors, si les inconnues se réduisent à une seule x , la valeur de x la plus probable sera celle que fournira la seule équation

$$a_1 x = k_1.$$

Enfin, si l'exposant N devient très grand, les divers termes de la suite (22) se réduiront sensiblement à l'unité. Donc alors, si les



inconnues se réduisent à une seule x , la valeur de x la plus probable se tirera de la formule qu'on obtient, quand on ajoute entre elles les équations données préparées de manière que les coefficients de l'inconnue x dans les premiers membres soient tous positifs.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente aussi un Mémoire qui a pour titre : *Sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations.*

527.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature.*

C. R., T. XXXVII, p. 264 (16 août 1853).

§ I. — *Sur la probabilité des erreurs qui affectent des quantités déterminées par des observations de même nature.*

Soient, comme dans le précédent Mémoire,

k_1, k_2, \dots, k_n des quantités fournies par des observations de même nature;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ les erreurs qu'elles comportent;

l l'un quelconque des nombres entiers 1, 2, 3, ..., n .

Supposons, d'ailleurs, les erreurs positives ou négatives également probables, et soient, dans cette hypothèse,

$-x, x$ les limites entre lesquelles l'erreur ε_l est certainement comprise;

$f(\varepsilon)$ de la probabilité de la coïncidence de cette erreur avec une quantité renfermée entre les limites infiniment voisines $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$.

La fonction $f(\varepsilon)$, que nous nommerons l'indice de probabilité de l'erreur ε , pourra être transformée en une intégrale définie à l'aide de la

formule

$$(1) \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos \theta \varepsilon \, d\theta,$$

dans laquelle on aura

$$(2) \quad \varphi(\theta) = 2 \int_0^\infty f(\varepsilon) \cos \theta \varepsilon \, d\varepsilon.$$

La fonction $\varphi(\theta)$, que détermine la formule (2), est donc liée à la probabilité $f(\varepsilon)$, de telle sorte que, l'une de ces fonctions étant donnée, l'autre s'en déduit. D'ailleurs, si, dans la formule (2), on pose $\theta = 0$, on aura

$$(3) \quad \varphi(0) = 1$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \quad 2 \int_0^\infty f(\varepsilon) \, d\varepsilon = 1.$$

La fonction $\varphi(\theta)$ étant supposée connue, on peut sans peine en déduire, non seulement la valeur de $f(\varepsilon)$, c'est-à-dire l'indice de probabilité de l'erreur ε , mais encore la probabilité P de la coïncidence de l'erreur ε , avec une quantité renfermée entre les limites $-\varepsilon, \varepsilon$. En effet, cette dernière probabilité sera évidemment représentée par l'intégrale

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\theta) \, d\theta = 2 \int_0^{\varepsilon} f(\theta) \, d\theta$$

ou, ce qui revient au même, par le double de l'intégrale

$$\int f(\varepsilon) \, d\varepsilon,$$

prise à partir de $\varepsilon = 0$. D'ailleurs, en vertu de la formule (1), cette dernière intégrale sera équivalente à

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\theta) \frac{\sin \theta \varepsilon}{\theta} \, d\theta.$$

On aura donc

$$(5) \quad P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\theta) \frac{\sin \theta \varepsilon}{\theta} \, d\theta.$$

Soit maintenant

$$(6) \quad \omega = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$$

une fonction linéaire des erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. La probabilité P de la coïncidence de l'erreur ω avec une quantité renfermée entre les limites $-\nu, \nu$ sera fournie par une équation analogue à la formule (5), savoir par celle qu'on en déduit en remplaçant la limite ε par la limite ν , et la fonction $\varphi(\theta)$ par la fonction

$$(7) \quad \Phi(\theta) = \varphi(\lambda_1 \theta) \varphi(\lambda_2 \theta) \dots \varphi(\lambda_n \theta).$$

On aura, en conséquence,

$$(8) \quad P = \frac{2}{\pi} \int_0^\nu \Phi(\theta) \frac{\sin \theta \nu}{\theta} d\theta.$$

En d'autres termes, on aura

$$(9) \quad P = \int_0^\nu F(\tau) d\tau,$$

la forme de la fonction qu'indique la lettre F étant déterminée par l'équation

$$(10) \quad F(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\nu \Phi(\theta) \cos \theta \nu d\theta.$$

Cela posé, le produit $F(\nu) d\nu$ représentera la probabilité de la coïncidence de l'erreur ω avec une quantité renfermée entre les limites infiniment voisines $\nu, \nu + d\nu$, et le premier facteur de ce produit ou la fonction F(ν) sera ce que nous nommerons l'*indice de probabilité de l'erreur* ν , considérée comme une valeur particulière de ω . L'indice de probabilité d'une valeur nulle de ω sera donc

$$(11) \quad F(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi(\theta) d\theta.$$

Dans le cas particulier où la fonction ω se réduit à la moyenne arithmétique entre les erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, et où l'on a, par suite,

$$(12) \quad \omega = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n},$$

la formule (7) donne simplement

$$(13) \quad \Phi(\theta) = \left[\varphi\left(\frac{\theta}{n}\right) \right]^n.$$

Les formules (7), (8), (9) et (10) font dépendre les quantités F(ν) et P de la fonction $\varphi(\theta)$ déterminée elle-même par la formule (2). D'ailleurs, de cette dernière formule on peut en déduire plusieurs autres qui peuvent lui être substituées plus ou moins utilement, suivant qu'on attribue à la variable positive θ des valeurs plus ou moins grandes.

Remarquons d'abord qu'on tire de l'équation (2), en ayant égard à la formule $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$,

$$(14) \quad \varphi(\theta) = 1 - \int_0^\infty \left(2 \sin \frac{\theta \varepsilon}{2} \right)^2 f(\varepsilon) d\varepsilon$$

et, en intégrant par parties,

$$(15) \quad \varphi(\theta) = 2 \frac{f(x) \sin \theta x - \int_0^\infty f'(x) \sin \theta x dx}{\theta}.$$

D'autre part, si l'on nomme x une variable positive et $\chi(x)$ une fonction qui, s'évanouissant pour $x = 0$, demeure continue, avec sa dérivée $\chi'(x)$, pour des valeurs de x inférieures à une certaine limite, on aura, comme on sait, pour de telles valeurs de x ,

$$\chi(x) = x \chi'(\eta x),$$

η désignant un nombre inférieur à l'unité. Il en résulte, par exemple, que, pour des valeurs de x très petites, $\sin x$ est le produit de x par un facteur compris entre les limites 1, $\cos x$; que, pareillement, $1(1-x)$ est le produit de $-x$ par un facteur compris entre les limites 1, $\frac{1}{1-x}$, et que, par suite, en nommant ρ un tel facteur, on a

$$1-x = e^{-\rho x}.$$

Cela posé, si l'on fait, pour abrégér,

$$(16) \quad c = \int_0^x \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

et si, d'ailleurs, on attribue à la variable positive θ une valeur assez petite pour que le produit θx soit lui-même très petit, on verra la valeur de $\varphi(\theta)$ donnée par la formule (15) se réduire sensiblement à l'exponentielle $e^{-\zeta\theta}$, et l'on conclura de cette formule qu'on a en toute rigueur

$$(17) \quad \varphi(\theta) = e^{-\zeta\theta},$$

ζ étant le produit de la constante c par un facteur renfermé entre les limites

$$(18) \quad \cos^2 \frac{\theta x}{2}, \frac{1}{1 - \int_0^x \left(2 \sin \frac{\theta \varepsilon}{2}\right)^2 f(\varepsilon) d\varepsilon},$$

et à plus forte raison entre les limites

$$(19) \quad 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta x}{2}\right)^2, \frac{1}{1 - c \theta^2 x^2}.$$

La formule (17) permet d'obtenir facilement une valeur très approchée de la fonction $\varphi(\theta)$, dans le cas où θ et θx sont très petits.

Si, au contraire, on attribue à θ une valeur qui ne soit pas très petite, alors, la valeur de ζ n'étant plus très voisine de la constante c , la formule (17) devra être abandonnée. Mais alors, surtout si θ devient très grand, on pourra utilement recourir à la formule (15). Considérons, pour fixer les idées, le cas où la fonction $f(\varepsilon)$ décroît constamment, tandis que la variable ε , supposée positive, croît à partir de zéro. Dans ce cas, $f'(\varepsilon)$ étant négatif, la formule (15) fournira immédiatement une limite supérieure de $\varphi(\theta)$ et donnera

$$(20) \quad \varphi(\theta) < \frac{2f(0)}{\theta}.$$

Pour montrer une application des formules que nous venons d'ob-

tenir, appliquons-les à la détermination de la quantité $F(u)$, ou, ce qui revient au même, à la détermination de l'intégrale

$$(21) \quad \int_0^{\infty} \Phi(\theta) \cos \theta u d\theta,$$

dans le cas où, n étant un très grand nombre, les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des quantités très petites de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Soit d'ailleurs Θ un nombre qui soit lui-même très grand, mais tel, que les produits $\lambda_1 \Theta, \lambda_2 \Theta, \dots, \lambda_n \Theta$ restent très petits. L'intégrale (21) sera la somme des deux intégrales

$$(22) \quad \int_0^{\Theta} \Phi(\theta) \cos \theta u d\theta,$$

$$(23) \quad \int_0^{\Theta} \Phi(\theta) \cos \theta u d\theta.$$

D'ailleurs, en vertu des formules (7) et (17), on aura, pour des valeurs de θ inférieures à Θ ,

$$(24) \quad \Phi(\theta) = e^{-s\theta},$$

la valeur de s étant donnée par une équation de la forme

$$s = \zeta_1 \lambda_1^2 + \zeta_2 \lambda_2^2 + \dots + \zeta_n \lambda_n^2,$$

et les facteurs $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ étant très voisins de la constante c . Il y a plus : on aura encore

$$(25) \quad s = \zeta \Lambda, \quad \Lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2,$$

ζ étant une quantité renfermée entre le plus petit et le plus grand des nombres $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, par conséquent une quantité qui sera elle-même très voisine de c . Cela posé, l'intégrale (22) deviendra

$$(26) \quad \int_0^{\Theta} e^{-s\theta} \cos \theta u d\theta.$$

Or cette dernière différera très peu de l'intégrale

$$(27) \quad \int_0^{\infty} e^{-s\theta} \cos \theta u d\theta,$$

si le produit $s\theta^2$ est un très grand nombre, ce qui arrivera si θ^2 est d'un ordre supérieur à l'ordre de $\frac{1}{s}$, c'est-à-dire à l'ordre de n , ou, en d'autres termes, si θ est d'un ordre supérieur à l'ordre de \sqrt{n} . Donc aussi, sous cette condition, l'intégrale (22) se réduira sensiblement à un produit de la forme

$$(28) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{s} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{v^2}{4s}}$$

la valeur de s étant

$$(29) \quad s = c\Lambda.$$

D'autre part, on aura, en vertu de la formule (20),

$$(30) \quad \Phi(\vartheta) < \frac{[2f(0)]^n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \frac{1}{\vartheta^n},$$

et par suite l'intégrale (23) sera inférieure au produit

$$(31) \quad \frac{[2f(0)]^n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \frac{1}{(n+1)\theta^{n+1}}.$$

Donc, si ce dernier peut être négligé vis-à-vis de l'expression (28), ce qui arrivera, par exemple, quand la quantité $2f(0)$ sera inférieure à chacun des produits $\lambda_1\theta$, $\lambda_2\theta$, ..., $\lambda_n\theta$, l'intégrale (21) se réduira sensiblement à l'expression (28), et l'on aura, à très peu près,

$$(32) \quad F(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{v^2}{4s}}.$$

Alors aussi la formule (9) donnera sensiblement

$$(33) \quad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v}{2\sqrt{s}}} e^{-\theta^2} d\theta.$$

§ II. — Sur la probabilité des erreurs qui affectent les résultats moyens.

Supposons que, les m inconnues x, y, \dots, v, w étant déterminées par n équations linéaires approximatives, on déduise de ces équations

multipliées par certains facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, puis ajoutées entre elles, l'équation finale qui fournit immédiatement la valeur de l'inconnue x . Cette valeur sera de la forme

$$(1) \quad x = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_n k_n,$$

la première des équations de condition auxquelles satisferont les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant elle-même de la forme

$$(2) \quad a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n = 1,$$

et, si l'on nomme $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ les erreurs que comportent les quantités k_1, k_2, \dots, k_n , l'erreur ξ de la valeur précédente de x sera

$$(3) \quad \xi = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n.$$

Enfin, si, des erreurs positives et négatives étant également probables, on suppose l'erreur ε_i certainement comprise entre les limites $-\alpha, \alpha$, la probabilité P de la coïncidence de l'erreur ξ avec une quantité renfermée entre les limites $-\nu, \nu$, et l'indice de probabilité $F(\nu)$ de l'erreur ν dans la valeur de l'inconnue x , seront déterminés par les formules (8) et (10) du § I.

Il importe d'observer qu'on tire des formules (1) et (3), jointes à la condition (2),

$$(4) \quad x = \frac{\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_n k_n}{a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n},$$

$$(5) \quad \xi = \frac{\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n}{a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n}.$$

Ces dernières valeurs de x et de ξ dépendent uniquement des rapports entre les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et sont aussi celles qu'on obtiendrait si l'on cessait d'assujettir ces facteurs à la condition (2). Admettons cette dernière hypothèse, et concevons que, les signes des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ restant arbitraires, on assigne à ces mêmes facteurs des valeurs numériques déterminées. Soit, d'ailleurs, λ la moyenne arithmétique entre ces valeurs numériques, et nommons A la plus grande valeur numérique que puisse acquérir la somme

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n.$$



La plus grande des valeurs numériques que pourra prendre l'erreur ξ sera la plus petite possible, et précisément égale au rapport

$$(6) \quad \frac{n\lambda x}{A},$$

quand les signes des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seront choisis de manière que l'on ait

$$(7) \quad a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_n\lambda_n = A.$$

D'ailleurs, étant donnés les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n et les valeurs numériques des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on connaîtra la valeur numérique de chacun des produits

$$(8) \quad a_1\lambda_1, a_2\lambda_2, \dots, a_n\lambda_n;$$

et la quantité A , déterminée par l'équation (7), sera la plus grande possible lorsque tous ces produits seront positifs, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand les signes des facteurs

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

seront ceux des quantités

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

qui représentent les coefficients de l'inconnue x dans les équations linéaires donnés. Donc un système de facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ qui satisferont à cette condition, étant comparé aux systèmes que l'on peut en déduire en changeant les signes d'un ou de plusieurs de ces facteurs, sera précisément le système pour lequel la plus grande erreur à craindre dans la valeur de l'inconnue x deviendra la plus petite possible. Il conviendra donc, dans la recherche de l'équation finale qui déterminera l'inconnue x , d'attribuer au facteur λ_i , par lequel on multipliera une équation linéaire, le signe qui affectera, dans cette équation, le coefficient a_i de x .

Concevons maintenant que, les produits (8) étant tous positifs, on fasse varier les valeurs numériques des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, en

supposant, comme on peut le faire, ces facteurs assujettis à la condition (2). Les valeurs de x et ξ données par les formules (1) et (3) varieront, et la valeur la plus probable x de l'inconnue x sera celle pour laquelle la probabilité P deviendra la plus grande possible. D'ailleurs, pour déterminer la valeur x de l'inconnue x avec les valeurs correspondantes des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, il suffira, en général, de recourir à la condition

$$(9) \quad \delta P = 0.$$

La quantité x ainsi déterminée, c'est-à-dire la valeur la plus probable de l'inconnue x , sera indépendante de la limite ∞ au-dessous de laquelle on veut abaisser l'erreur ξ de cette inconnue, si la fonction $f(\varepsilon)$ est de la forme

$$(10) \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-\varepsilon\theta^N} \cos \theta \varepsilon \, d\theta,$$

les lettres c, N désignant deux constantes positives, et si, d'autre part, on n'assigne aux erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ aucune limite, en sorte qu'on puisse poser $x = \infty$. Alors on aura

$$(11) \quad \varphi(\theta) = e^{-c\theta^N},$$

$$(12) \quad \Phi(\theta) = e^{-s\theta^N},$$

la valeur de s étant déterminée par les formules

$$(13) \quad s = cA, \quad A = \lambda_1^N + \lambda_2^N + \dots + \lambda_n^N.$$

Alors aussi l'indice de probabilité $F(0)$ d'une erreur nulle dans la valeur de ξ sera donné par l'équation

$$(14) \quad F(0) = \frac{2}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{N}\right) s^{-\frac{1}{N}}.$$

La valeur la plus probable x de l'inconnue x est, en vertu de la formule (12), et quand on suppose $N = 2$, celle que donne la méthode des moindres carrés. Mais la même formule conduit à d'autres valeurs de x quand N est supérieur à 2. Donc la valeur la plus probable x de

l'inconnue x peut différer sensiblement de celle que fournit la méthode des moindres carrés.

Cette méthode a-t-elle du moins la propriété de fournir la valeur de x la plus probable, dans le cas où, la limite x étant une quantité finie, le nombre des observations devient très considérable. Pour éclaircir cette question, il convient d'examiner spécialement le cas dont il s'agit. C'est ce que je ferai dans le prochain article.

M. CAUCHY présente encore à l'Académie un *Mémoire sur la probabilité des erreurs qui affectent les résultats moyens d'un grand nombre d'observations.*

528.

C. R., T. XXXVII, p. 293 (22 août 1853).

M. AUGUSTIN CAUCHY lit un *Mémoire* ayant pour titre : *Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum.*

529.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum* (Mémoire présenté dans la précédente séance).

C. R., T. XXXVII, p. 326 (29 août 1853).

§ I. — *Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen.*

Soient, comme dans le précédent Mémoire,

k_1, k_2, \dots, k_n des quantités fournies par l'observation;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ les erreurs qu'elles comportent;

l l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ..., n .

Supposons d'ailleurs que, les erreurs positives ou négatives étant également probables, on nomme $-x, x$ les limites entre lesquelles l'erreur ε_l est certainement comprise.

Enfin, supposons que, m inconnues x, y, \dots, v, w étant liées aux quantités k_1, k_2, \dots, k_n par n équations linéaires et approximatives de la forme

$$a_l x + b_l y + \dots + g_l v + h_l w = k_l,$$

on déduit de ces équations multipliées par certains facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, puis ajoutées l'une à l'autre, l'équation finale qui fournit immédiatement la valeur de l'inconnue n . Cette équation finale sera

$$(1) \quad x = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_n k_n,$$

les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant choisis de manière à vérifier les conditions

$$(2) \quad S a_l \lambda_l = 1, \quad S b_l \lambda_l = 0, \quad \dots, \quad S h_l \lambda_l = 0,$$

et l'erreur ξ , qui affectera la valeur de x , sera

$$(3) \quad \xi = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n.$$

Concevons à présent que l'on nomme z la plus grande erreur à craindre, pour un système donné de facteurs, sur la valeur de l'inconnue x ; z sera, en vertu de la formule (3), le produit de la limite x par la somme des valeurs numériques des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, et l'on aura, en conséquence,

$$(4) \quad z = z \Lambda,$$

la valeur de Λ étant

$$(5) \quad \Lambda = \sqrt{\lambda_1^2} + \sqrt{\lambda_2^2} + \dots + \sqrt{\lambda_n^2} = S \sqrt{\lambda_l^2}.$$

Il est bon d'observer que, les n facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant liés les uns aux autres par les formules (2), on pourra généralement

exprimer m d'entre eux, par exemple les facteurs

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m,$$

en fonction de $n - m$ facteurs restants

$$\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n.$$

On doit seulement excepter le cas particulier où l'on aurait

$$(6) \quad S(\pm a_1 b_2 \dots g_{m-1} h_m) = 0.$$

De plus, en laissant de côté ce cas exceptionnel, on pourra éliminer de la somme Λ les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Pour y parvenir, il suffira de retrancher de la formule (5) l'équation qu'on obtient en ajoutant l'une à l'autre les équations (2), respectivement multipliées par des coefficients arbitraires $\alpha, \beta, \dots, \eta$, puis de choisir ces coefficients de manière à faire disparaître dans la valeur de Λ les termes proportionnels aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. On trouvera ainsi, en premier lieu,

$$(7) \quad \Lambda = \alpha + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n,$$

la valeur de α_i étant

$$(8) \quad \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2}} - a_i \alpha - b_i \beta - \dots - h_i \eta,$$

puis ensuite

$$(9) \quad \Lambda = \alpha + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} + \alpha_{m+2} \lambda_{m+2} + \dots + \alpha_n \lambda_n,$$

les coefficients $\alpha, \beta, \dots, \eta$ étant déterminés par le système des formules

$$(10) \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_m = 0.$$

D'ailleurs, sauf le cas exceptionnel où la condition (6) serait vérifiée, les formules (10) fourniront toujours des valeurs finies et déterminées de $\alpha, \beta, \dots, \eta$. Ces valeurs toutefois dépendront des signes

attribués aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, attendu que le rapport

$$\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2}}$$

se réduira ou à $+1$, ou à -1 , suivant que le facteur λ_i sera positif ou négatif.

Remarquons encore que, parmi les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, le nombre de ceux qui se réduiront à zéro ne pourra généralement être supérieur à $n - m$. Car, $n - m$ facteurs étant supposés nuls, les m facteurs restants se trouveront, pour l'ordinaire, complètement déterminés par les formules (2) qui fourniront pour ces m facteurs des valeurs généralement distinctes de zéro.

§ II. — Sur le système de facteurs pour lequel la plus grande erreur à craindre dans la valeur d'une inconnue devient la plus petite possible.

On peut demander quel est le système de facteurs pour lequel l'erreur ε , c'est-à-dire la plus grande erreur à craindre dans la valeur de l'inconnue x , devient la plus petite possible.

Lorsque les équations linéaires données renferment une seule inconnue x , la question se résout immédiatement à l'aide des formules (5), (6) des pages 111, 112. En vertu de ces formules, pour que la plus grande erreur à craindre sur la valeur de x soit la plus petite possible, il sera nécessaire, comme on l'a dit, que les signes des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient précisément les signes des coefficients a_1, a_2, \dots, a_n ; et si l'on nomme ε la plus grande erreur à craindre, l'erreur ε , en devenant la plus petite possible, se réduira, au signe près, au plus petit des rapports $\frac{x}{a_1}, \frac{x}{a_2}, \dots, \frac{x}{a_n}$. En conséquence, la plus petite valeur de ε sera

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{x}{\sqrt{a_1^2}},$$

si a_1 est celui des coefficients a_1, a_2, \dots, a_n qui offre la plus grande valeur numérique; et, d'ailleurs, pour obtenir cette valeur de ε , on

devra supposer

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n = 0.$$

Ces conclusions cesseraient d'être légitimes, si les équations proposées renfermaient plusieurs inconnues. Mais, quel que soit le nombre m de ces inconnues, on peut, à l'aide des principes établis dans le § I, déterminer la plus petite valeur de x et le système de facteurs correspondants. En effet, dans ce système, sauf des cas exceptionnels où les coefficients a_i, b_i, \dots, h_i satisferaient à certaines conditions, m facteurs au moins

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

acquerront des valeurs distinctes de zéro, et, pour éliminer ces mêmes facteurs de la somme Λ , il suffira d'assujettir les coefficients $\alpha, \zeta, \dots, \gamma$ aux conditions (10) du § I, c'est-à-dire aux formules

$$(3) \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_m = 0,$$

puis de remplacer la formule (5) par la formule (9). Alors aussi, sauf des cas exceptionnels, les quantités

$$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$$

seront généralement distinctes de zéro, et, par suite, il sera nécessaire que les facteurs $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n$ se réduisent tous à zéro. Car si l'on n'avait pas

$$(4) \quad \lambda_{m+1} = 0, \quad \lambda_{m+2} = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n = 0,$$

si, par exemple, λ_n différait de zéro, il suffirait d'attribuer à λ_n un accroissement infiniment petit, mais affecté d'un signe contraire au signe de α_n , pour faire décroître la quantité Λ et par suite l'erreur x . Donc alors l'erreur x ne serait pas, comme on le suppose, la plus petite possible. D'ailleurs, quand les formules (4) seront vérifiées, les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ seront immédiatement fournies par les équations

$$(5) \quad S a_i \lambda_i = 1, \quad S b_i \lambda_i = 0, \quad \dots, \quad S h_i \lambda_i = 0,$$

et les formules (5), (9), (4) du § I donneront

$$(6) \quad \Lambda = \sqrt{\lambda_1^2} + \sqrt{\lambda_2^2} + \dots + \sqrt{\lambda_m^2} = \alpha,$$

$$(7) \quad y = \alpha x.$$

Donc la plus petite valeur de x sera généralement de la forme αx , x étant une quantité positive, déterminée par le système de m équations analogues aux formules (3), c'est-à-dire par m équations de la forme

$$(8) \quad a_i x + b_i \zeta + \dots + h_i \gamma = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i},$$

et généralement aussi les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, propres à fournir cette plus petite valeur, s'évanouiront, hormis les facteurs correspondants aux valeurs de l écrites comme indices au bas des lettres a, b, \dots, h, λ , dans les équations desquelles on tirera les valeurs de x .

Ajoutons que, parmi les valeurs de x déterminées comme on vient de le dire, on devra choisir la plus petite de toutes. En substituant celle-ci dans l'équation (7), on obtiendra précisément la valeur cherchée de y .

Appliquée au cas où les équations linéaires données renferment une seule inconnue x , la méthode que nous venons d'exposer reproduit les formules (1) et (2).

Lorsque les équations linéaires données renferment deux inconnues x, y , on a, en vertu des formules (4) et (5),

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = 1, \quad b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n = 0,$$

et de ces équations, jointes aux formules (6) et (7), on tire

$$(9) \quad \lambda_1 = \frac{1}{\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n = 0,$$

$$(10) \quad y = \alpha x \frac{\frac{1}{\sqrt{b_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{b_2^2}}}{\sqrt{\left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}\right)^2}}.$$

Donc alors, pour trouver la plus petite valeur de z , il suffit d'écrire, l'une au-dessus de l'autre, les deux suites

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{b_1}, & \frac{1}{b_2}, & \dots, & \frac{1}{b_n}, \\ \frac{a_1}{b_1}, & \frac{a_2}{b_2}, & \dots, & \frac{a_n}{b_n}, \end{pmatrix}$$

puis de multiplier par x le plus petit des rapports qu'on obtient quand on divise la somme des valeurs numériques de deux termes de la première suite par la différence entre les valeurs numériques des termes correspondants de la seconde suite. Si le plus petit de ces rapports est formé avec les premiers termes des deux suites, la plus petite valeur de z sera fournie, avec les valeurs correspondantes des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, par les formules (9) et (10).

Il est bon d'observer qu'on tire des formules (9)

$$(12) \quad a_1 \lambda_1 = \frac{1}{1-\rho}, \quad a_2 \lambda_2 = \frac{1}{1-\rho^{-1}},$$

la valeur de ρ étant

$$\rho = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}.$$

Par suite, les produits $a_1 \lambda_1, a_2 \lambda_2$ seront tous deux positifs, si le rapport ρ est négatif. Mais, si ce rapport est positif, alors l'unité étant comprise entre les limites ρ et ρ^{-1} , les produits $a_1 \lambda_1, a_2 \lambda_2$ seront, l'un positif, l'autre négatif.

On devrait évidemment, dans les formules (9), (10), etc., échanger entre elles les lettres a et b , s'il s'agissait de faire en sorte que la plus grande erreur à craindre, non plus sur la valeur de x , mais sur la valeur de y , devint la plus petite possible.

Nous avons, dans ce qui précède, fait abstraction des cas exceptionnels où les coefficients a_i, b_i, \dots, h_i vérifient certaines conditions, par exemple la condition (6) du § I. Pour résoudre le problème dans ces cas exceptionnels, il suffira ordinairement de substituer aux coefficients a_i, b_i, \dots, h_i d'autres coefficients qui en diffèrent infiniment

peu et cessent de remplir les conditions dont il s'agit. De plus, il sera généralement facile de voir comment doivent être modifiées, dans les cas exceptionnels, les formules ci-dessus établies.

Considérons, pour fixer les idées, le cas où, les inconnues étant réduites à une seule x , plusieurs des coefficients a_1, a_2, \dots, a_n , par exemple les l coefficients a_1, a_2, \dots, a_l , offrent des valeurs numériques égales, mais supérieures à celles de tous les autres. Alors la plus petite valeur de z sera toujours déterminée par la formule (1). Mais les valeurs correspondantes de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne seront pas nécessairement celles que fournissent les équations (2) et pourront être encore toutes celles qu'on déduit de la formule

$$(13) \quad a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_l \lambda_l = 1,$$

en attribuant aux produits $a_1 \lambda_1, a_2 \lambda_2, \dots, a_l \lambda_l$ des valeurs positives ou, en d'autres termes, en attribuant respectivement aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ les signes des coefficients a_1, a_2, \dots, a_l , par conséquent toutes celles qui vérifient la condition

$$(14) \quad \sqrt{\lambda_1^2} + \sqrt{\lambda_2^2} + \dots + \sqrt{\lambda_l^2} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2}}.$$

§ III. — Conclusions.

Soient, comme dans le § I, ξ l'erreur de l'inconnue x , et z la plus grande valeur que cette erreur puisse acquérir pour un système donné de facteurs. Soient, en outre, $-v, v$ les limites inférieure et supérieure entre lesquelles on veut renfermer l'erreur ξ , et P la probabilité de coïncidence de cette erreur avec une quantité comprise entre les limites $-v, v$. Si, en attribuant aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des valeurs telles que la plus grande erreur z devienne la plus petite possible, on pose précisément $v = z$, la probabilité P se changera en certitude et acquerra ainsi la plus grande valeur possible. Par suite, si l'on attribue à v une valeur qui soit inférieure à la valeur de z , déterminée dans le § II, mais qui en diffère très peu,

le système de facteurs qui fournira la plus grande valeur de P différera très peu du système qui correspond à cette valeur de ε .

Ainsi, par exemple, si, en supposant les inconnues réduites à une seule x , et en désignant par a_i celui des coefficients a_1, a_2, \dots, a_n qui offre la plus grande valeur numérique, on attribue à ν une valeur inférieure au rapport $\frac{\varepsilon}{\sqrt{a_i^2}}$, mais très peu différente de ce rapport, le système de facteurs qui fournira la plus grande valeur de P différera très peu du système déterminé par les formules

$$(1) \quad \lambda_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n = 0.$$

D'ailleurs, ce dernier système sera, en général, très différent de celui que fournirait la méthode des moindres carrés. Donc, pour des valeurs de ν suffisamment grandes, la méthode des moindres carrés sera loin de fournir la valeur x de x , correspondante à la plus grande valeur de P. Cette conclusion, qui subsiste, quels que soient la limite ε et le nombre n des équations données, s'étend évidemment au cas où, ces équations renfermant plusieurs inconnues, on remplace le système de facteurs que déterminent les formules (1) par celui qui rend alors la valeur de ε la plus petite possible. En conséquence, on peut énoncer généralement la proposition suivante :

Si l'on nomme ν la limite au-dessous de laquelle on veut abaisser l'erreur ξ de l'inconnue x , et P la probabilité de la coïncidence de cette erreur avec une quantité comprise entre les limites $-\nu, +\nu$, le système de facteurs correspondant à la plus grande valeur de P sera ordinairement, pour des valeurs de ν suffisamment grandes, très différent de celui que donnerait la méthode des moindres carrés, quel que soit d'ailleurs le nombre n des quantités fournies par l'observation, et quelle que soit la limite ε assignée aux erreurs que comportent ces mêmes quantités.

Il semblerait au premier abord que, dans le cas où le nombre n devient très grand, on pourrait tirer des conclusions différentes ou même opposées d'une formule établie dans le § I du précédent

Mémoire. Il semble, en effet, que, pour de grandes valeurs de n , les produits $a_1\lambda_1, a_2\lambda_2, a_n\lambda_n$ assujettis à vérifier la condition

$$(2) \quad a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_n\lambda_n = 1,$$

et par suite les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, doivent généralement se réduire à des quantités très petites de l'ordre $\frac{1}{n}$; et si cette réduction a lieu, si d'ailleurs, en attribuant au nombre Θ une valeur très grande d'un ordre supérieur à celui de \sqrt{n} , mais inférieur à l'ordre de n , on néglige l'intégrale (23) de la page 109 vis-à-vis de l'intégrale (22), alors la valeur de P paraît devoir être sensiblement celle que donne la formule (33) de la page 110, c'est-à-dire celle dont le maximum est fourni par la méthode des moindres carrés. Mais la formule (33), établie comme on vient de le dire, repose évidemment sur des hypothèses qui peuvent ne pas se réaliser.

En premier lieu, de ce qu'on attribue au nombre n une très grande valeur, il n'en résulte pas nécessairement que les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient tous très petits. Le contraire arrivera si l'on attribue à la plupart d'entre eux des valeurs nulles, comme dans le § II du présent Mémoire. Il y a plus : parmi les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ plusieurs pourront conserver des valeurs finies dans le cas même où l'on supposera ces facteurs déterminés par la méthode des moindres carrés.

En effet, considérons spécialement le cas où, les inconnues étant réduites à une seule x , les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n de cette inconnue, dans les équations linéaires données, forment une progression géométrique dont le premier terme est a et la raison r . Alors on aura

$$(3) \quad a_i = ar^i;$$

et, en supposant les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivement proportionnels aux coefficients a_1, a_2, \dots, a_n , conformément à la règle fournie par la méthode des moindres carrés, on aura encore, eu

égard à l'équation (2),

$$(4) \quad \frac{\lambda_1}{1} = \frac{\lambda_2}{r} = \dots = \frac{\lambda_n}{r^{n-1}} = \frac{1}{a} \frac{1-r}{1-r^n}.$$

Or, si, la valeur de a n'étant pas très grande, on attribue à r une valeur comprise entre les valeurs 0, 1, mais sensiblement distincte de ces limites, les termes de la suite

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

déterminés par la formule (4), ne seront pas tous très petits, pour de grandes valeurs de n . Les premiers termes, par exemple, conserveront des valeurs finies, en se réduisant à très peu près aux termes correspondants de la progression géométrique

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots,$$

si, n étant un très grand nombre, on suppose $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$.

En second lieu, l'intégrale (23) du § I du précédent Mémoire ne peut pas toujours être négligée vis-à-vis de l'intégrale (22); et, de plus, pour que la formule (9) du même paragraphe puisse être réduite à la formule (33), il est nécessaire que la valeur de ν ne dépasse pas une certaine limite. C'est ce que prouve l'analyse déjà ci-dessus exposée, et ce que montrent aussi les formules relatives au cas spécial où le nombre n acquiert une très grande valeur, comme nous l'expliquerons dans un prochain article.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente encore à l'Académie un *Mémoire sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations.*

530.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Mémoire sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations.*

Le règlement ne permettant pas d'insérer ce Mémoire dans les *Comptes rendus*, nous nous bornerons à en indiquer sommairement les principaux résultats.

L'auteur, adoptant les notations de la page 104, commence par rappeler la formule

$$(1) \quad P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \frac{\sin \theta \nu}{\theta} d\theta,$$

dans laquelle on a

$$(2) \quad \Phi(\theta) = \varphi(\lambda_1 \theta) \varphi(\lambda_2 \theta) \dots \varphi(\lambda_n \theta),$$

$$(3) \quad \varphi(\theta) = 2 \int_0^x f(\varepsilon) \cos \theta \varepsilon d\varepsilon.$$

La fonction $f(\varepsilon)$, qui représente l'*indice de probabilité* de l'erreur ε , est assujettie à la condition

$$(4) \quad 2 \int_0^x f(\varepsilon) d\varepsilon = 1,$$

à laquelle on satisfera, si l'on pose

$$(5) \quad f(\varepsilon) = K \varpi(\varepsilon),$$

$\varpi(\varepsilon)$ étant une fonction arbitraire, mais toujours positive, de ε , et K une constante positive déterminée par la formule

$$(6) \quad K = \frac{1}{2 \int_0^x \varpi(\varepsilon) d\varepsilon}.$$

La *fonction auxiliaire* $\varphi(\theta)$, déterminée par la formule (3), jouit de propriétés remarquables. Elle se réduit à l'unité pour une valeur

nulle de θ ; pour toute autre valeur de θ , elle s'abaisse numériquement au-dessous de l'unité; et, si l'on pose

$$(7) \quad [\varphi(\theta)]^2 = \frac{1}{1 + \rho\theta^2},$$

la fonction φ de θ offrira une valeur positive, quel que soit θ . On aura, en particulier, pour $\theta = 0$,

$$(8) \quad \rho = 2c,$$

la valeur de c étant

$$(9) \quad c = \int_0^x \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

et pour $\theta = \infty$

$$(10) \quad \rho = \left[\frac{1}{2f(x)} \right]^2.$$

Cela posé, soit r la plus petite des valeurs de ρ ; r sera toujours une quantité positive, et l'on aura constamment

$$(11) \quad [\varphi(\theta)]^2 \leq \frac{1}{1 + r\theta^2}.$$

Lorsque θ et θx sont très petits, on a

$$(12) \quad \varphi(\theta) = e^{-c\theta^2},$$

ζ étant le produit de la constante c par un facteur renfermé entre les limites (18) de la page 108, et à plus forte raison entre les limites

$$(13) \quad 1 - \left(\frac{\theta x}{2} \right)^2, \quad \frac{1}{1 - c\theta^2}.$$

Pour que la fonction auxiliaire $\varphi(\theta)$ s'exprime en termes finis, il suffit que la fonction $\omega(\varepsilon)$ se réduise à une fonction entière de ε , et d'exponentielles dont les exposants, réels ou imaginaires, soient proportionnels à ε . Le cas où la fonction $\omega(\varepsilon)$ est linéaire et de la forme

$$(14) \quad \omega(\varepsilon) = a - b\varepsilon,$$

a, b étant deux constantes positives, mérite une attention spéciale. Dans ce même cas, on trouve, en supposant $b = 0$,

$$(15) \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}, \quad \varphi(\theta) = \frac{\sin \theta x}{\theta x}, \quad c = \frac{1}{2} x^2;$$

et, en supposant $a = bx$,

$$(16) \quad f(\varepsilon) = \frac{x - e}{\varepsilon^2}, \quad \varphi(\theta) = \left(\frac{\sin \frac{\theta x}{2}}{\frac{1}{2} \theta x} \right)^2, \quad c = \frac{1}{12} x^2.$$

Ajoutons que, dans l'une et l'autre supposition, la valeur de r est donnée par la formule

$$(17) \quad r = 2c.$$

Cette dernière formule se déduit immédiatement de la suivante :

$$(18) \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\theta^2} > \frac{1}{2},$$

à laquelle on parvient en observant que, pour des valeurs de θ positives, mais inférieures à $\frac{\pi}{2}$, la dérivée de la fonction $\sin \theta \cos^{-\frac{1}{2}} \theta - \theta$, ou, en d'autres termes, la fonction $\frac{1}{3} (\cos^{-\frac{2}{3}} - 1)^2 (1 + 2 \cos^2 \theta)$, offre une valeur toujours positive.

Après avoir établi, comme on vient de le dire, les principales propriétés de la fonction auxiliaire $\varphi(\theta)$, l'auteur recherche ce que devient la *probabilité* P dans le cas spécial où le nombre n des observations devient très grand, et où, les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant tous très petits de l'ordre de $\frac{1}{n}$, ou d'un ordre inférieur, la somme de leurs carrés

$$(19) \quad \Lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$$

est une quantité très petite de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Dans ce cas, à la formule (1) on peut, sans erreur sensible, substituer d'autres formules qui fournissent des valeurs très approchées de la probabilité P . Ainsi,

par exemple, si l'on nomme Θ un très grand nombre d'un ordre supérieur à celui de \sqrt{n} , mais inférieur à l'ordre de n , on aura sensiblement, pour de très grandes valeurs de n ,

$$(20) \quad P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Theta} \Phi(\theta) \frac{\sin \theta \nu}{\theta} d\theta;$$

et, si l'on nomme λ le plus grand des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la différence entre les valeurs de P fournies par les équations (1) et (20) sera inférieure, abstraction faite du signe, au produit

$$(21) \quad \frac{1}{\pi \mathfrak{K}} e^{-\mathfrak{K}},$$

\mathfrak{K} étant un nombre déterminé par la formule

$$(22) \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{2} \frac{r \Lambda \Theta^2}{1 + r \lambda^2 \Theta^2},$$

et, par conséquent, un très grand nombre, puisque des deux produits $\Lambda \Theta^2, \lambda \Theta$, le premier sera très grand et le second très petit.

De plus, si Θ est un très grand nombre dont l'ordre soit inférieur non seulement à celui de n , mais aussi à l'ordre de $n^{\frac{3}{2}}$, on aura encore, sensiblement, pour de très grandes valeurs de n ,

$$(23) \quad P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Theta} e^{-s\theta} \frac{\sin \theta \nu}{\theta} d\theta,$$

la valeur de s étant

$$(24) \quad s = c\Lambda;$$

et la différence entre les valeurs de P fournies par les équations (20) et (23) sera inférieure, abstraction faite du signe, au produit

$$(25) \quad \frac{2h\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{\Theta \nu}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 + \frac{\Theta^2 \nu^2}{3}} \right),$$

h étant la plus grande des deux différences

$$(26) \quad e^{\frac{1}{2} \lambda^2 \Theta^2} - 1, \quad 1 - e^{-\frac{c \lambda^2 \Theta^2}{1 + c \lambda^2 \Theta^2}}.$$

Cela posé, si l'on attribue à la limite x une valeur finie, le produit (25) sera, pour de très grandes valeurs de n , du même ordre que la quantité $\Lambda \lambda^2 \Theta^2 \nu$, par conséquent du même ordre que les deux quantités $\frac{\Theta \nu \Lambda \Theta^2}{n^2}, \frac{\Theta \nu}{n^2}$, qui deviendront très petites quand l'ordre de Θ sera inférieur à celui de $n^{\frac{3}{2}}$.

Enfin l'on aura sensiblement, pour de très grandes valeurs de n ,

$$(27) \quad P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-s\theta} \frac{\sin \theta \nu}{\theta} d\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\nu}{\sqrt{s}}} e^{-\theta^2} d\theta,$$

et la différence entre les valeurs de P fournies par les formules (23), (27) sera inférieure, abstraction faite du signe, au rapport

$$(28) \quad \frac{1 - e^{-s\Theta^2}}{\pi s \Theta^2},$$

qui sera de l'ordre de $\frac{1}{\Theta^2}$, et par conséquent très petit quand l'ordre de Θ sera inférieur à celui de $n^{\frac{3}{2}}$.

Donc, en définitive, si, la valeur de la limite x étant finie, on attribue aux facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des valeurs numériques de l'ordre de $\frac{1}{n}$, ou d'un ordre inférieur, mais telles, que la somme Λ de leurs carrés soit de l'ordre de $\frac{1}{n}$, alors, pour de très grandes valeurs de n , la probabilité P sera généralement déterminée avec une grande approximation par la formule (27). Si d'ailleurs on assigne à la fonction $f(\varepsilon)$, qui représente l'indice de probabilité de l'erreur ε , une forme déterminée, on pourra trouver une limite supérieure à l'erreur que l'on commettra, quand à la formule (1) on substituera la formule (27). On pourra, par exemple, prendre pour cette limite la somme des expressions (21), (25), (28), Θ étant un très grand nombre, dont l'ordre supérieur à celui de $n^{\frac{3}{2}}$ soit inférieur à l'ordre de $n^{\frac{3}{2}}$.

Observons maintenant qu'on tire des formules (3), (9) et (24)

$$(29) \quad c = \frac{1}{2} \pi z^2,$$

$$(30) \quad \frac{v}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}A} \frac{v}{z},$$

γ étant un nombre inférieur à l'unité. Or il suit de la formule (30) que, si l'on attribue à la limite v une valeur comparable à la limite z , en posant, par exemple, $v = z$, ou $v = \frac{1}{2}z$, ou $v = \frac{1}{3}z$, ... la limite supérieure $\frac{v}{2\sqrt{s}}$ de l'intégrale comprise dans le dernier membre de la

formule (27) sera, pour de très grandes valeurs de n , un très grand nombre d'un ordre au moins égal à l'ordre de \sqrt{n} . Donc alors la probabilité P sera très voisine de la certitude 1. Cette conséquence subsiste d'ailleurs quelle que soit la forme attribuée à la fonction $f(\varepsilon)$.

Les diverses formules que nous venons de transcrire permettent encore d'apprécier, en les réduisant à leur juste valeur, les avantages qu'on peut retirer de l'emploi de tel ou tel système de facteurs, par conséquent de telle ou telle méthode. Mais, forcés de nous arrêter ici, nous renverrons ce que nous aurions à dire sur ce point à un autre article.

531.

C. R., T. XXXVII, p. 526 (10 octobre 1853).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie des considérations nouvelles sur les mouvements infiniment petits des corps considérés comme des systèmes d'atomes, et sur la réflexion et la réfraction des mouvements simples.

Les résultats auxquels l'auteur est parvenu seront développés dans un prochain article.

532.

GEOMETRIE ANALYTIQUE. — Sur les rayons vecteurs associés et sur les avantages que présente l'emploi de ces rayons vecteurs dans la Physique mathématique.

C. R., T. XXVIII, p. 67 (16 janvier 1854).

La théorie de la lumière, comme la théorie des corps élastiques, présente deux cas distincts, et il peut arriver de deux choses l'une : ou la propagation du mouvement s'effectue en tous sens, suivant les mêmes lois, et alors le corps transparent devient ce que j'ai nommé un corps *isophane*, et le corps élastique ce que j'ai nommé un corps *isotrope*, ou cette condition n'est pas remplie. Ajoutons qu'un corps peut être isophane ou isotrope, non autour d'un point, mais seulement autour d'un axe dont la direction est donnée. D'ailleurs on peut établir les équations d'équilibre ou de mouvement que présente la Mécanique moléculaire, à l'aide de deux méthodes différentes. Celle de ces deux méthodes qui paraît la plus rigoureuse consiste à considérer les corps comme des systèmes de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Lorsqu'on la suit, les formules auxquelles on parvient sont celles que j'ai données dans le Mémoire du 1^{er} octobre 1827 (1). L'autre méthode opère comme si les corps étaient des masses continues; elle s'appuie sur la notion fondamentale de la *tension* ou *pression* dans un corps solide. Cette pression ou tension, dont il m'a semblé utile d'introduire la considération dans la Mécanique moléculaire, et dont j'ai indiqué les propriétés principales dans le Mémoire du 30 septembre 1822, diffère de la pression telle qu'on l'envisageait dans l'Hydrostatique, en ce qu'elle est généralement, non plus normale, mais oblique aux faces qui la supportent. Elle n'est pas distincte de la force récemment appelée par M. Lamé *force élastique*. Il suffit d'établir des relations

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.



linéaires entre les projections algébriques des pressions ou tensions supportées en un point donné d'un corps élastique par trois plans rectangulaires, et les six coefficients que renferme la condensation ou dilatation linéaire, supposée infiniment petite, pour obtenir les équations homogènes que l'on a considérées comme propres à représenter l'équilibre ou le mouvement intérieur des corps élastiques.

Nous joindrons ici une remarque qui n'est pas sans importance. Le mot *axes d'élasticité*, employé par les auteurs des divers Ouvrages ou Mémoires publiés sur la théorie des corps élastiques, n'a pas toujours été bien défini, et on lui a donné des acceptions diverses. Pour éviter toute confusion, nous adopterons les définitions que je vais indiquer.

Rapportons les positions des divers points d'un corps à trois axes rectangulaires des x, y, z . L'un de ces axes, l'axe des x par exemple, sera un *axe d'élasticité*, si le système est isotrope autour de cet axe, ou, ce qui revient au même, si l'on n'altère pas les équations d'équilibre ou de mouvement, en faisant tourner le plan des yz autour de l'axe des x .

D'autre part, le plan des yz , perpendiculaire à l'axe des x , sera un *plan principal d'élasticité* si l'on n'altère pas les équations d'équilibre ou de mouvement, en changeant le signe de x , ou, ce qui revient au même, en échangeant entre eux le demi-axe des x positives et le demi-axe des x négatives.

Ces définitions étant admises, si chacun des trois plans coordonnés est un plan principal d'élasticité, les trois axes coordonnés pourront ne pas être des axes d'élasticité.

Étant données les équations générales d'équilibre ou de mouvement d'un système de points matériels, on peut demander les conditions que doivent remplir, dans ces équations supposées linéaires, les coefficients supposés constants pour que le système offre un ou plusieurs plans principaux, ou bien un ou plusieurs axes d'élasticité, et par suite les conditions à remplir pour que le système soit isotrope autour d'un point quelconque, ou autour d'un axe donné.

J'ai indiqué dans d'autres Mémoires un moyen facile d'effectuer

cette recherche. J'ajouterai, aujourd'hui, qu'on peut encore résoudre très simplement les problèmes de ce genre, en s'appuyant, comme je vais le dire, sur la considération des *points associés* et des *rayons vecteurs associés*.

Les positions de deux points mobiles étant rapportées à trois axes coordonnés rectangulaires ou obliques, ces deux points mobiles seront nommés *points associés* lorsque les coordonnées rectilignes de l'un seront des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées de l'autre. Alors aussi les rayons vecteurs menés de l'origine à ces deux points seront nommés *rayons vecteurs associés*.

Les coefficients constants des coordonnées de l'un des points dans les expressions des coordonnées de l'autre changeront généralement de valeurs, non seulement si l'on échange les deux points mobiles entre eux, mais encore si l'on fait tourner les axes autour de l'origine, ou si l'on échange entre elles deux parties d'un même axe, par exemple le demi-axe des abscisses positives et le demi-axe des abscisses négatives. Ces changements de valeurs peuvent d'ailleurs se déduire des formules générales qui servent à la transformation des coordonnées; mais, sans recourir à ces formules, j'ai reconnu qu'on peut établir directement plusieurs théorèmes dignes de remarque, spécialement relatifs au cas où les axes coordonnés sont rectangulaires. Parmi ces théorèmes je citerai les deux suivants :

THÉORÈME I. — *Si l'on fait tourner autour de l'origine les trois axes coordonnés supposés rectangulaires, la somme des trois coefficients qui affecteront les coordonnées d'un point mobile, dans les expressions des coordonnées de même espèce d'un point associé, demeurera invariable.*

THÉORÈME II. — *Les trois axes coordonnés étant supposés rectangulaires, si l'on fait tourner autour du premier le plan des deux autres, de manière qu'il décrive, avec un mouvement de rotation direct, un certain angle φ , non seulement le coefficient de la coordonnée d'un point mesuré sur le premier axe dans l'expression de la coordonnée de même espèce d'un point associé restera invariable, mais, de plus, les huit autres*



coefficients qui affecteront les coordonnées du premier point dans les expressions des coordonnées du point associé vérifieront quatre conditions très simples en vertu desquelles, de quatre fonctions linéaires, mais imaginaires, de ces coordonnées, la première restera invariable, tandis que les deux suivantes varieront dans le rapport de 1 à 1—, et la dernière dans le rapport de 1 à 1—₂₂.

Si, pour plus de commodité, on nomme x, y, z les coordonnées d'un premier point, x, y, z les coordonnées du point associé, et

$$(x, x), (x, y), (x, z)$$

les coefficients de x, y, z dans l'expression de x ; si, d'ailleurs, dans les trois symboles qui précèdent, on remplace x par y ou par z , quand les coefficients sont pris dans l'expression de y ou de z , les quatre fonctions linéaires mentionnées dans le second théorème seront

$$\begin{aligned} (y, y) + (z, z) - i[(y, z) - (z, y)], \\ (x, y) + i(x, z), \quad (y, x) + i(z, x), \\ (y, y) - (z, z) + i[(y, z) + (z, y)], \end{aligned}$$

quand l'axe de rotation sera l'axe des x . Alors aussi la première de ces fonctions devant rester invariable, sa partie réelle $(y, y) + (z, z)$ devra être invariable elle-même ainsi que la différence $(y, z) - (z, y)$; et, comme (x, x) devra encore rester invariable, on pourra en dire autant de la somme

$$(x, x) + (y, y) + (z, z).$$

Il y a plus : cette dernière somme devra rester encore invariable, si l'on fait tourner successivement autour de chaque axe le plan des deux autres, et par suite si l'on fait tourner les trois axes d'une manière quelconque autour de l'origine. Donc le premier théorème est une conséquence du second.

D'ailleurs, le second théorème se déduit très aisément de cette seule remarque, que, dans le cas où l'on fait tourner autour de l'axe des x le point dont les coordonnées sont x, y, z , la distance de l'ori-

gine à ce point projeté sur le plan des yz est représentée, en grandeur et en direction : 1° avant la rotation, par la quantité géométrique $y + zi$; 2° après la rotation, par le produit de cette quantité géométrique et du facteur

$$1 - \varphi = e^{-\varphi i},$$

φ étant l'angle décrit avec un mouvement de rotation direct par le plan des yz .

Concevons maintenant que l'on construise une sphère qui ait pour centre un point donné d'un corps homogène, et que l'on détermine en grandeur comme en direction la pression supportée au point dont il s'agit par une petite face perpendiculaire à un rayon de la sphère. Ce rayon, que nous supposons infiniment petit, venant à changer de direction, la pression variera elle-même, conformément au théorème que j'ai donné en 1822; et pour énoncer ce théorème, il suffira de dire que, le rayon de la sphère venant à se mouvoir, la pression sera représentée par un rayon vecteur associé.

Il y a plus : le même théorème continuera de subsister si, à la pression supportée par une face perpendiculaire au rayon de la sphère, on substitue le déplacement apparent de l'extrémité de ce même rayon dans une déformation infiniment petite du corps solide, mesurée par un observateur placé au centre de la sphère. Donc ce déplacement pourra encore être représenté par un rayon vecteur associé au rayon de la sphère.

Enfin, comme deux rayons vecteurs associés à un troisième sont nécessairement associés entre eux, il est clair que la pression ou tension, et le déplacement apparent dont il s'agit, seront encore deux quantités représentées par deux rayons vecteurs associés.

De cette seule considération, jointe au second des deux théorèmes généraux énoncés ci-dessus, on déduit immédiatement, et avec la plus grande facilité, les équations qui expriment les projections algébriques des pressions ou tensions en fonctions linéaires des projections algébriques des déplacements apparents dans un corps isotrope autour d'un axe donné.

Lorsque les conditions d'isotropie sont remplies par rapport à deux axes rectangulaires, elles le sont encore par rapport à un troisième axe perpendiculaire aux deux autres, et alors on retrouve les conditions d'isotropie du corps autour d'un point quelconque, telles qu'on les obtient en faisant usage ou de la méthode que j'ai donnée en 1829, ou de celles qui ont été proposées plus tard par moi-même, ou par d'autres géomètres.

Je remarquerai, en finissant, que la théorie des points associés peut être employée avec succès dans un grand nombre de problèmes de Physique mathématique. Ainsi, par exemple, dans un cristal à un axe optique, les rayons vecteurs menés à des points correspondants de la surface de l'onde et de la surface caractéristique sont des rayons vecteurs associés.

533.

C. R., T. XXXVIII, p. 238 (6 février 1854).

M. CAUCHY présente à l'Académie des *Recherches nouvelles sur la torsion des prismes*.

L'auteur se propose de développer, dans une prochaine séance, les résultats auxquels il a été conduit.

534.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Sur la torsion des prismes*.

C. R., T. XXXVIII, p. 326 (20 février 1854).

La torsion des prismes ou cylindres à base rectangulaire, ou même à base quelconque, le changement de forme des prismes tordus et la détermination des points de leur surface où la rupture est le plus à craindre, sont, dans la théorie des corps élastiques, des questions

capitales, dont la solution intéresse au plus haut degré les ingénieurs, les constructeurs, et généralement tous ceux qui veulent déduire de cette théorie des résultats utiles pour la pratique. Je me suis déjà occupé, dans le quatrième Volume des *Exercices de Mathématiques* ⁽¹⁾, de la torsion des prismes à base rectangulaire. Mais les résultats que j'ai obtenus, en négligeant certains termes des séries introduites dans le calcul, ne peuvent être considérés que comme approximatifs, et subsistant sous certaines conditions. M. de Saint-Venant, ayant reporté son attention sur cet objet, est parvenu, dans un Mémoire approuvé par l'Académie, à des formules dignes de remarque. Il suit de ces formules que, contrairement à l'opinion admise jusqu'à ce jour, le danger de rupture est le plus grand, non pas dans les points de la surface les plus éloignés de l'axe de torsion, mais dans les points les plus rapprochés de cet axe. L'analyse de M. de Saint-Venant met cette conclusion en évidence, pour des prismes ou cylindres de diverses formes, spécialement pour ceux dont les bases sont rectangulaires ou elliptiques; et elle l'explique en faisant voir que ces bases, loin de rester planes, sont gauchies par la torsion. Grâce à ce gauchissement, les arêtes d'un prisme ou d'un cylindre droit, transformées en hélices par la torsion, peuvent rester à très peu près normales aux éléments des bases. D'ailleurs leur inclinaison sur ces éléments, par conséquent le danger de rupture, est généralement plus faible pour les arêtes éloignées de l'axe de torsion que pour les arêtes rapprochées de cet axe, attendu que, dans un prisme ou dans un cylindre droit, les parties saillantes et proéminentes sont, par cela même, plus indépendantes du reste de la masse, et plus libres d'obéir séparément, sans se déformer, à l'action des pressions extérieures.

Une lecture attentive du beau travail de M. de Saint-Venant m'a conduit à faire, sur la torsion des prismes ou cylindres droits, des réflexions nouvelles qui ne sont pas sans importance. M. de Saint-

⁽¹⁾ *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. IX.

Oeuvres de C. — S. I, t. XII.



Venant s'est borné à considérer le cas où l'angle de torsion θ , relatif à l'unité de longueur mesurée sur l'axe de torsion, est une quantité constante. Or on peut démontrer que l'équation indéfinie, dans laquelle l'inconnue est un très petit déplacement parallèle à cet axe, ne changera pas de forme et coïncidera encore avec celle qui représente l'équilibre des températures dans un prisme ou cylindre droit, si, l'axe de torsion étant un axe d'élasticité, l'angle de torsion, supposé très petit, devient fonction de la distance à l'axe. De plus, on peut déduire immédiatement du calcul des résidus, non seulement les formules remarquables trouvées par M. de Saint-Venant pour la torsion d'un prisme à base rectangulaire, mais encore des formules analogues relatives au cas où l'angle de torsion θ varierait avec la distance à l'axe du prisme et serait représenté par une fonction entière du carré de cette distance.

ANALYSE.

§ I. — Préliminaires.

Considérons un corps élastique homogène dont les molécules s'écartent très peu des positions qu'elles occuperaient si les pressions extérieures et intérieures se réduisaient à zéro. Nommons x, y, z les coordonnées primitives d'une molécule m rapportées à trois axes rectangulaires. Soient ξ, η, ζ les déplacements très petits de cette molécule, produits par des pressions extérieures, et mesurés parallèlement aux axes. Enfin soient

$$p_x, p_y, p_z$$

les pressions ou tensions exercées au point (x, y, z) , du côté des coordonnées positives, contre trois plans perpendiculaires aux axes des x, y, z , et représentons par

$$\begin{array}{l} \text{ou par} \\ \text{ou par} \end{array} \quad \begin{array}{l} p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} \\ p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} \\ p_{zx}, p_{zy}, p_{zz} \end{array}$$

les projections algébriques de la force p_x ou p_y ou p_z sur les axes des x, y et z . On aura, comme nous l'avons montré dans les *Exercices mathématiques*,

$$(1) \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx},$$

et les équations d'équilibre du corps élastique seront

$$(2) \quad \begin{cases} D_x p_{xx} + D_y p_{xy} + D_z p_{xz} = 0, \\ D_x p_{yx} + D_y p_{yy} + D_z p_{yz} = 0, \\ D_x p_{zx} + D_y p_{zy} + D_z p_{zz} = 0. \end{cases}$$

De plus, si les déplacements ξ, η, ζ sont infiniment petits, les six pressions

$$\begin{array}{l} p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} \\ p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} \end{array}$$

se réduiront à des fonctions linéaires des diverses dérivées des déplacements

$$\xi, \eta, \zeta$$

différentiés par rapport à x, y, z . Donc elles se réduiront, si les termes qui renferment les dérivées des ordres supérieurs peuvent être négligés, vis-à-vis de ceux qui renferment les dérivées du premier ordre, à des fonctions linéaires des neuf quantités

$$\begin{array}{l} D_x \xi, D_y \xi, D_z \xi, \\ D_x \eta, D_y \eta, D_z \eta, \\ D_x \zeta, D_y \zeta, D_z \zeta. \end{array}$$

D'autre part, si l'on nomme p la pression ou tension exercée au point (x, y, z) contre un plan perpendiculaire à la droite qui forme avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus sont a, b, c , et δ l'angle formé par la direction de la force p avec celle de la droite, on aura

$$(3) \quad p \cos \delta = a^2 p_{xx} + b^2 p_{yy} + c^2 p_{zz} + 2bc p_{yz} + 2ca p_{zx} + 2ab p_{xy}.$$

Enfin, si l'on désigne par r la distance primitive de la molécule m à

une molécule très voisine, située sur la droite dont il s'agit, et par $r(1 + \varepsilon)$ ce que devient cette distance après le déplacement des molécules, ε sera ce que j'ai nommé la *dilatation* ou *condensation linéaire* mesurée suivant la nouvelle direction de cette droite, et l'on aura, en supposant ξ, η, ζ infiniment petits,

$$(4) \quad \varepsilon = (aD_x + bD_y + cD_z)(a\xi + b\eta + c\zeta)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \quad \varepsilon = a^2 \varepsilon_{xx} + b^2 \varepsilon_{yy} + c^2 \varepsilon_{zz} + 2bc \varepsilon_{yz} + 2ca \varepsilon_{zx} + 2ab \varepsilon_{xy},$$

les valeurs de $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}, 2\varepsilon_{xy}$ étant

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = D_x \xi, & \varepsilon_{yy} = D_y \eta, & \varepsilon_{zz} = D_z \zeta, \\ 2\varepsilon_{yz} = D_y \zeta + D_z \eta, & 2\varepsilon_{zx} = D_z \xi + D_x \zeta, & 2\varepsilon_{xy} = D_x \eta + D_y \xi; \end{cases}$$

en sorte que $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ représenteront les dilatations ou condensations suivant les axes des x, y et z . Cela posé, si les pressions ou tensions au point (x, y, z) dépendent uniquement des diverses dilatations ou condensations mesurées suivant les diverses directions des droites qui passent par ce même point, les six pressions

$$(7) \quad \begin{cases} p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, \\ p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} \end{cases}$$

devront se réduire, ainsi qu'on l'admet ordinairement, à des fonctions linéaires des six quantités

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \\ \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}. \end{cases}$$

Si le plan des yz , perpendiculaire à l'axe des x , est un plan principal d'élasticité, alors, x venant à changer de signe, les quantités (7) et (8) conserveront, aux signes près, les mêmes valeurs; seulement, parmi ces quantités, quatre changeront de signe, savoir :

$$p_{xx}, p_{xy} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}.$$

Pareillement, si le plan des xz , perpendiculaire à l'axe des y , est un plan principal d'élasticité, alors parmi les quantités (7), (8), quatre seulement changent de signe, savoir :

$$p_{xy}, p_{yz} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}.$$

Par suite, si les plans des yz et des xz sont des plans principaux d'élasticité, chacune des pressions

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$$

devra se réduire à une fonction linéaire des quantités

$$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz},$$

et les trois pressions

$$p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$$

deviendront respectivement proportionnelles aux trois quantités

$$\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}.$$

On aura donc alors

$$(9) \quad \begin{cases} p_{xx} = a \varepsilon_{xx} + f' \varepsilon_{yy} + e' \varepsilon_{zz}, \\ p_{yy} = f \varepsilon_{xx} + b \varepsilon_{yy} + d' \varepsilon_{zz}, \\ p_{zz} = e \varepsilon_{xx} + d \varepsilon_{yy} + c \varepsilon_{zz} \end{cases}$$

et

$$(10) \quad p_{yz} = 2\delta \varepsilon_{yz}, \quad p_{zx} = 2\epsilon \varepsilon_{zx}, \quad p_{xy} = 2\zeta \varepsilon_{xy},$$

les coefficients $a, b, c, \delta, \epsilon, f; \delta', \epsilon', f'; \delta'', \epsilon'', f''$ étant des quantités constantes. Alors aussi le plan des xy , perpendiculaire à l'axe des z , sera encore un plan principal d'élasticité.

Si l'axe des x est un axe d'élasticité, alors, en échangeant l'un contre l'autre les axes des y et z , on n'altérera point les valeurs de p_{xx} ni de p_{yz} , mais on transformera p_{yy}, p_{xy} en p_{zz}, p_{xz} , et réciproquement. Donc alors on aura

$$b = a, \quad \delta' = \delta'', \quad f = e, \quad f' = e',$$

et les formules (9), (10) donneront

$$(11) \quad \begin{cases} p_{xx} = a \varepsilon_{xx} + c'(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \\ p_{yy} = c' \varepsilon_{xx} + b \varepsilon_{yy} + b' \varepsilon_{zz}, \\ p_{zz} = c' \varepsilon_{xx} + b' \varepsilon_{yy} + b \varepsilon_{zz}, \end{cases}$$

$$(12) \quad p_{yz} = 2\delta \varepsilon_{xz}, \quad p_{zx} = 2c \varepsilon_{xz}, \quad p_{xy} = 2c' \varepsilon_{xy}.$$

Cela posé, les équations (2), jointes aux formules (6), (11), (12), donneront

$$(13) \quad \begin{cases} [aD_x^2 + c(D_y^2 + D_z^2)]\xi + (c + c')D_x(D_y\eta + D_z\zeta) = 0, \\ [cD_x^2 + bD_y^2 + b'D_z^2]\eta + (b + b')D_y D_z \zeta + (c + c')D_x D_y \xi = 0, \\ [cD_x^2 + bD_y^2 + b'D_z^2]\zeta + (c + c')D_x D_z \xi + (b + b')D_y D_z \eta = 0. \end{cases}$$

§ II. — Torsion des prismes ou cylindres droits.

Supposons que, dans un plan perpendiculaire à l'axe des x , on mène de cet axe une droite au point (x, y, z) . Soient r la longueur de cette droite, et p l'angle qu'elle forme avec le plan des xy . Elle pourra être représentée en grandeur et en direction par la quantité géométrique

$$(1) \quad y + zi = r p.$$

Si le point (x, y, z) appartient à un prisme ou cylindre droit auquel on imprime un mouvement de torsion autour de l'axe des x , alors, en nommant ω l'angle de torsion, et ξ, η, ζ les accroissements supposés infiniment petits des coordonnées x, y, z , on aura

$$(2) \quad y + \eta + (z + \zeta)i = r_{p-\omega}.$$

Si, d'ailleurs, le point (x, y, z) venant à se déplacer sur une droite parallèle à l'axe des x , la variation de ω est proportionnelle à la variation de x , en sorte qu'on ait

$$D_x \omega = \theta.$$

θ étant indépendant de x ; alors de l'équation (2) différenciée par

rapport à x , et jointe à la formule

$$D_p r_p = i r_p,$$

on tirera

$$D_x(\eta + \zeta i) = -i \theta r_{p-\omega},$$

ou à très peu près, en supposant ω très petit,

$$D_x(\eta + \zeta i) = -i \theta r_p = -\theta(y + zi)i;$$

puis on en conclura

$$(3) \quad D_x \eta = \theta z, \quad D_x \zeta = -\theta y.$$

Telles sont les équations qui caractérisent un mouvement de torsion infiniment petit d'un prisme ou d'un cylindre autour de l'axe des x . D'ailleurs, on tire de ces équations, en supposant θ indépendant de y et z ,

$$(4) \quad D_x D_y \eta = 0, \quad D_x D_z \zeta = 0,$$

$$(5) \quad D_x(D_y \eta + D_z \zeta) = 0,$$

et alors, si la dilatation $D_x \xi$, mesurée suivant l'axe des x , est indépendante de x , ou, ce qui revient au même, si l'on suppose

$$(6) \quad D_x^2 \xi = 0,$$

la première des équations (13) du § I donnera, comme l'a observé M. de Saint-Venant,

$$(7) \quad (D_y^2 + D_z^2)\xi = 0.$$

Mais il est clair que, pour arriver à l'équation (7), il n'est pas absolument nécessaire de supposer θ indépendant de y et z ; il suffit que l'équation (5) puisse être jointe à l'équation (6). Or, si θ devient fonction de r , la formule

$$\frac{D_y r}{y} = \frac{D_z r}{z}$$

entraînera la suivante

$$\frac{D_y \theta}{y} = \frac{D_z \theta}{z},$$

et des formules (3) différenciées, la première par rapport à y , la seconde par rapport à z , on déduira encore la formule (5). Donc alors aussi l'équation indéfinie à laquelle satisfera l'inconnue ξ , sera encore l'équation (7).

Il reste à montrer comment, à l'aide du Calcul des résidus, on pourra obtenir immédiatement l'intégrale donnée par M. de Saint-Venant, et l'intégrale du même genre relative au cas où θ est facteur de r ; c'est ce que je me propose d'expliquer dans un prochain article.

535.

CALCUL INTÉGRAL. — *Rapport sur un Mémoire de M. MARIE, relatif aux périodes des intégrales.*

C. R., T. XXXVIII, p. 821 (8 mai 1854).

L'Académie nous a chargés, M. Sturm et moi, d'examiner un Mémoire de M. Marie, relatif aux périodes des intégrales simples et doubles. Les intégrales simples considérées par l'auteur sont celles qui peuvent être présentées sous la forme

$$\int y D_x x ds,$$

s désignant un arc de courbe, et x, y des fonctions réelles ou imaginaires de s , liées entre elles par une équation caractéristique, algébrique ou transcendante,

$$(1) \quad f(x, y) = 0.$$

Considérons spécialement le cas où l'équation caractéristique est algébrique et de forme réelle; alors, pour chaque valeur réelle de x , l'équation (1), résolue par rapport à y , fournira une ou plusieurs valeurs réelles ou imaginaires, par conséquent de la forme

$$y = u$$

ou de la forme

$$y = v + wi,$$

u, v, w étant des fonctions réelles de x . Cela posé, concevons que, la variable x représentant une abscisse, on construise : 1° la courbe dont l'ordonnée serait représentée par la fonction u ; 2° la courbe dont l'ordonnée serait représentée par la somme $v + w$, les axes coordonnés étant ou rectangulaires ou obliques. Ces deux courbes seront celles que M. Marie nomme la *courbe réelle* et la *conjuguée* de la courbe réelle. Si, avant de résoudre l'équation (1), on opère une transformation de coordonnées, en assignant une direction nouvelle à l'axe des y , on substituera ainsi aux variables x, y deux nouvelles variables x', y' , qui offriront toutes deux, pour une valeur réelle de x et pour une valeur imaginaire de y , des valeurs correspondantes imaginaires dans lesquelles le rapport entre les coefficients de i sera constant. Réciproquement, si l'on attribue à x , une valeur réelle, et à y , une valeur imaginaire qui satisfasse avec x , à l'équation caractéristique transformée, les valeurs correspondantes de x, y seront généralement imaginaires; mais le rapport entre le coefficient de i dans ces diverses valeurs sera constant. De cette observation il résulte qu'à une même courbe réelle, représentée par l'équation (1), correspondent, en nombre infini, des *courbes conjugues* dont chacune a pour coordonnées variables des valeurs réelles de x, y que l'on obtient, en remplaçant i par 1 , dans des valeurs imaginaires de x, y assujetties à la double condition de vérifier l'équation (1), et d'offrir pour coefficients de i des quantités dont le rapport demeure constant.

Les courbes conjuguées, définies comme on vient de le dire, jouissent de propriétés remarquables, qui sont exposées et démontrées dans le Mémoire de M. Marie. Citons-en quelques-unes.

Chacune des courbes conjuguées est généralement tangente à la courbe réelle aux points où elle la rencontre; par suite, la courbe réelle est une enveloppe des diverses conjuguées.

Si une des conjuguées présente un anneau fermé, si d'ailleurs on nomme S l'aire comprise dans cet anneau, et s l'arc décrit sur le périmètre de cet anneau par un point qui se meut avec un mouvement de rotation direct autour de l'aire S , le produit de cette aire par i sera

généralement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^c y D_x x ds,$$

c étant le périmètre entier de l'aire S , ou ce qu'on peut nommer la *période imaginaire* de l'intégrale

$$\int y D_x x ds.$$

Si l'on fait varier, par degrés insensibles, la forme d'un anneau fermé, appartenant à une courbe conjuguée, en faisant varier l'inclinaison de l'axe des y , l'aire S comprise dans cet anneau restera ordinairement invariable. Cette dernière proposition, dont la démonstration se déduit d'un théorème donné par l'un de nous et relatif aux intégrales curvilignes, suppose toutefois que, l'axe des y venant à changer de direction par degrés insensibles, la valeur de y tirée de l'équation (1) n'atteint pas une valeur pour laquelle la dérivée de $f(x, y)$ relative à y s'évanouisse avec $f(x, y)$.

Dans la dernière partie de son Mémoire, M. Marie considère non plus une fonction de y de x déterminée par la fonction (1), mais une fonction z de deux variables x, y , déterminée par une *équation caractéristique* de la forme

$$f(x, y, z) = 0.$$

A des valeurs réelles de x, y correspondent, en vertu de cette équation, des valeurs de z réelles ou imaginaires, par conséquent de la forme

$$z = u$$

ou de la forme

$$z = v + w i,$$

u, v, w étant des fonctions réelles de x, y, z . Cela posé, concevons que les variables x, y représentant deux coordonnées réelles, on construise : 1° la surface courbe dont l'ordonnée serait représentée par la fonction u ; 2° la surface courbe dont l'ordonnée serait représentée par la somme $v + w$, les axes coordonnés étant ou rectangu-

laïres ou obliques. Ces deux surfaces seront celles que M. Marie nomme la *surface réelle* et la *conjuguée de la surface réelle*. Si, avant de résoudre l'équation caractéristique, on opère une transformation de coordonnées, en assignant une direction nouvelle à l'axe des z , on substituera ainsi aux variables x, y, z trois nouvelles variables x, y, z , qui offriront toutes trois, pour des valeurs réelles de x, y et pour une valeur imaginaire de z , des valeurs correspondantes imaginaires, dans lesquelles les rapports entre les coefficients de i seront constants. Réciproquement, si l'on attribue à x, y , des valeurs réelles, et à z , une valeur imaginaire qui satisfasse, avec x, y , à l'équation caractéristique transformée, les valeurs correspondantes de x, y, z seront généralement imaginaires, mais les rapports entre les coefficients de i dans ces dernières valeurs seront constants. De cette observation il résulte qu'à une même surface réelle correspondent, en nombre infini, des *surfaces conjuguées*, dont chacune a pour coordonnées variables des valeurs réelles de x, y, z que l'on obtient en remplaçant i par 1 , dans des valeurs imaginaires de x, y, z assujetties à la double condition de vérifier l'équation caractéristique et d'offrir pour coefficients de i des quantités dont les rapports demeurent constants.

Les surfaces conjuguées, définies comme on vient de le dire, jouissent de propriétés remarquables, analogues à celles des courbes conjuguées. Ainsi, en particulier, comme l'observe M. Marie, lorsqu'une surface conjuguée est fermée et limitée en tous sens, le volume V compris dans cette surface et représenté par une intégrale double reste généralement invariable, tandis que l'on fait varier par degrés insensibles, ou entre des limites quelconques, ou du moins entre certaines limites, l'inclinaison de l'axe des z sur l'axe des x ou sur l'axe des y . D'ailleurs, le produit de ce volume V par i est ce qu'on peut nommer la *période imaginaire* d'une certaine intégrale double.

En résumé, les Commissaires jugent que le Mémoire de M. Marie présente, sur les périodes des intégrales simples et doubles, des

recherches intéressantes qui ont conduit l'auteur à des résultats nouveaux, et qu'en conséquence ce Mémoire mérite d'être approuvé par l'Académie.

536.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la transformation des fonctions implicites en moyennes isotropiques, et sur leurs développements en séries trigonométriques.*

C. R., T. XXXVIII, p. 910 (22 mai 1854).

J'appelle *série trigonométrique* une série ordonnée suivant les puissances entières, ascendantes et descendantes d'une exponentielle trigonométrique. Dans le développement d'une fonction implicite en une série de cette espèce, le coefficient d'une puissance entière de l'exponentielle peut être souvent exprimé par une intégrale définie, dans laquelle on trouve, sous le signe \int , une fonction non plus implicite, mais explicite, d'une autre exponentielle trigonométrique, ou même par la moyenne isotropique entre les diverses valeurs d'une fonction qui dépend de l'argument d'une variable substituée à la nouvelle exponentielle, mais douée d'un module inférieur ou supérieur à l'unité. J'indique dans le présent Mémoire un moyen très simple d'obtenir le développement dont il s'agit, en le déduisant de la transformation de la fonction implicite donnée en une moyenne isotropique de même nature que celles qui expriment les divers coefficients. Cette transformation permet d'ailleurs non seulement de déterminer sans peine les deux modules de la série qui représente le développement, mais encore de réduire, dans beaucoup de cas, chaque coefficient au résidu intégral d'une certaine fonction rationnelle. On trouve ainsi, par exemple, avec la plus grande facilité, et sous une forme très simple, les divers termes du développement d'une fonction rationnelle des sinus et cosinus de l'anomalie excentrique d'une planète en une série ordonnée suivant les puissances

entières de l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument l'anomalie moyenne, et les deux modules, ordinairement égaux entre eux, de la série qui représente ce même développement.

ANALYSE.

Supposons deux angles θ et ψ liés entre eux par une équation algébrique ou transcendante, en vertu de laquelle l'angle ψ soit une fonction implicite de θ . Si l'on pose

$$s = e^{\theta i}, \quad u = e^{\psi i},$$

l'élimination de θ et ψ réduira l'équation donnée à une *équation caractéristique* entre les variables u et s , en vertu de laquelle u sera une fonction implicite de s .

Concevons maintenant que, en vertu de l'équation donnée, ψ et θ se réduisent simultanément à un multiple quelconque de la demi-circonférence π . Soit encore

$$\Omega = F(u)$$

une fonction monodrome et monogène de la variable u . Si l'équation caractéristique entre les variables s , u a pour premier membre une fonction monodrome et monogène de chacune de ces variables, Ω envisagé comme fonction de s pourra être généralement transformé en une moyenne isotropique relative à l'argument moyen de deux variables nouvelles σ , ω , dont u sera considéré comme représentant une valeur particulière, mais dont les modules seront, le premier inférieur, le second supérieur à l'unité. D'ailleurs cette moyenne isotropique sera généralement développable en une série ordonnée suivant les puissances entières ascendantes et descendantes de s , et dans le développement ainsi obtenu le coefficient Ω_n de s^n sera lui-même une moyenne isotropique que l'on pourra supposer relative à l'argument ψ de la moyenne u . Enfin l'on pourra ordinairement déterminer avec une grande facilité le coefficient Ω à l'aide du Calcul des résidus, et les deux modules de la série qui représente le développement de Ω à l'aide de l'équation caractéristique. En effet, chacun de

ces deux modules sera généralement inverse d'un volume de s , qui vérifiera l'équation caractéristique, jointe à cette équation différentielle par rapport à u .

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation caractéristique entre s et u soit de la forme

$$(1) \quad s = f(u),$$

$f(u)$ étant une fonction monodrome et monogène de u . Nommons d'ailleurs φ l'argument commun de deux variables v , w , dont les modules soient, le premier inférieur, le second supérieur à l'unité, et posons

$$(2) \quad V = f(v), \quad W = f(w).$$

Enfin, concevons que, le module de s venant à croître ou à décroître à partir de l'unité, on puisse en dire autant du module de u . En désignant à l'aide de la lettre \mathfrak{N} une moyenne isotropique relative à l'argument commun φ de v et de w , on aura, pour des modules de v et w très voisins de l'unité,

$$(3) \quad \Omega = \mathfrak{N} \left[\frac{v F(v)}{W - s} D_w W \right] + \mathfrak{N} \left[\frac{v F(v)}{s - V} D_v V \right],$$

puis on en conclura

$$(4) \quad \Omega = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Omega_n s^n,$$

la valeur de Ω étant

$$(5) \quad \Omega_n = \mathfrak{N} \left[\frac{u F(u)}{s^{n+1}} D_u s \right],$$

et la moyenne isotropique étant relative à l'argument ψ de la variable u . Si d'ailleurs s et $F(u)$ peuvent être considérées comme des fonctions rationnelles de u , composées d'un nombre fini ou même infini de termes, l'équation (5) pourra encore s'écrire comme il suit :

$$(6) \quad \Omega_n = \int_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\frac{F(u)}{s^{n+1}} D_u s \right)_n.$$

Pour montrer une application des formules précédentes, supposons que l'angle θ se réduise à l'anomalie moyenne T d'une planète, et que l'angle ψ désigne l'anomalie excentrique liée à l'anomalie moyenne par l'équation

$$(7) \quad \psi - \varepsilon \sin \psi = T,$$

dans laquelle ε est l'excentricité de l'orbite. Dans ce cas, l'élimination de ψ et T entre l'équation (7) et les deux suivantes

$$s = e^{T i}, \quad u = e^{\psi i}$$

produira l'équation caractéristique

$$s = u e^{-\frac{\varepsilon}{i} \left(u - \frac{1}{u} \right)},$$

et l'on aura par suite, dans la formule (3),

$$V = v e^{-\frac{\varepsilon}{i} \left(v - \frac{1}{v} \right)}, \quad W = w e^{-\frac{\varepsilon}{i} \left(w - \frac{1}{w} \right)}.$$

Alors aussi l'équation (4) donnera

$$(8) \quad \Omega = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Omega_n e^{n T i},$$

les valeurs de Ω_n et de Ω_{-n} étant déterminées par les formules

$$(9) \quad \Omega_n = \int_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\frac{\Pi(u)}{u s^n} \right)_n, \quad \Omega_{-n} = \int_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\frac{\Pi(u^{-1})}{u s^n} \right)_n,$$

dans lesquelles on pourra supposer

$$(10) \quad \Pi(u) = \Omega D_\psi T,$$

ou bien

$$(11) \quad \Pi(u) = \frac{1}{n i} D_\psi \Omega,$$

ou enfin

$$(12) \quad \Pi(u) = \frac{1}{n i} \left(1 + \frac{i}{n} D_\psi \right) \frac{D_\psi \Omega}{\cos \psi}.$$