482.

ANALYSE. — *Mémoire sur l'application du calcul des résidus à plusieurs questions importantes d'Analyse.*

C. R., T. XXXII, p. 207 (7 février 1851).

Les principes du calcul des résidus, et les formules que j'en ai déduites dans divers Mémoires, fournissent immédiatement la solution d'un grand nombre de questions importantes. S'agit-il, par exemple, de développer une fonction en une série d'exponentielles, ou plus généralement en une série dont les divers termes dépendent des diverses racines d'une équation transcendante; s'agit-il de démontrer la convergence d'une telle série, ou bien encore de transformer les fonctions à simple et à double période, et en particulier les fonctions elliptiques, en produits composés d'un nombre infini de facteurs, les formules et les théorèmes que j'ai donnés, dès l'année 1827, dans le second Volume des *Exercices de Mathématiques* (¹) et dans le Mémoire du 27 novembre 1831 (²), permettront d'effectuer les développements et les transformations demandées et d'établir les conditions de convergence des séries obtenues. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient x, y les coordonnées rectangulaires, r, p les coordonnées polaires, et

$$z = x + y\mathrm{i} = re^{p\mathrm{i}}$$

la coordonnée imaginaire d'un point mobile Z. Soit encore $f(z)$ une fonction de z, dont la valeur soit unique et déterminée, quand elle ne devient pas infinie, et dont la différentielle divisée par dz fournisse un rapport qui dépende uniquement des variables réelles x, y. Soit enfin S l'aire d'une portion du plan des x, y; nommons PQR le contour qui renferme cette aire, et désignons par (S) l'intégrale $\int f(z)\,dz$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII.
(²) *Ibid.*, S. II, T. XV.

étendue à tous les points de ce contour que nous supposerons parcouru par le point mobile Z avec un mouvement de rotation direct autour de l'aire S. En vertu d'une formule que j'ai donnée dans le Mémoire de 1831 (page 9), on aura

$$(S) = 2\pi\mathrm{i}\,\mathcal{E}\,(f(z)), \tag{1}$$

le signe $\mathcal{E}$ indiquant la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux valeurs de z qui vérifient l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0, \tag{2}$$

et correspondent à des points renfermés dans l'aire S.

Il est bon d'observer que l'équation (1) peut servir à déduire ou l'intégrale curviligne (S) du résidu intégral $\mathcal{E}\,(f(z))$, ou ce résidu lui-même de l'intégrale (S). Dans ce dernier cas, l'équation (1) doit être présentée sous la forme

$$\mathcal{E}\,(f(z)) = \frac{1}{2\pi i}(S). \tag{3}$$

Si l'on suppose que, $f(z)$ étant une fonction transcendante, l'équation (2) offre une infinité de racines $z_1, z_2, z_2, \ldots$ dont quelques-unes offrent des modules infiniment grands, le premier membre de l'équation (3) offrira la somme d'un certain nombre de termes d'une série simple ou multiple. Si, dans la même hypothèse, on fait croître, dans un rapport donné k, le rayon vecteur mené aux divers points du contour PQR qui renferme l'aire S, ce contour se dilatera, en demeurant semblable à lui-même. Cela posé, soient $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des valeurs croissantes du rapport k; $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les valeurs correspondantes de S, et

$$\omega_1, \quad \omega_1 + \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$$

les valeurs correspondantes du résidu intégral $\mathcal{E}\,(f(z))$. On aura

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = \frac{(S_n)}{2\pi\mathrm{i}}, \tag{4}$$

ω_n étant la somme des résidus relatifs à des points situés entre les contours des aires S_{n-1}, S_n; et si, pour des valeurs croissantes de n, l'intégrale curviligne (S_n) converge vers une limite fixe, alors, en nommant Ω le rapport de cette limite au produit $2\pi i$, on verra les quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ se réduire aux divers termes d'une série convergente dont Ω représentera la somme, en sorte qu'on aura

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots = \Omega. \tag{5}$$

On déduit des équations (1), (3) et (5) une multitude de résultats importants, en assignant des formes déterminées soit à la fonction $f(z)$, soit au contour PQR.

Parmi les formes qu'on peut assigner au contour PQR, on doit remarquer celle qu'on obtient quand on réduit ce contour à un polygone dont les côtés sont des droites ou des arcs de cercle. Dans plusieurs Mémoires, j'ai spécialement examiné ce qui arrive quand l'aire S se réduit soit à un rectangle, soit à un cercle décrit de l'origine avec le rayon P. Dans cette dernière hypothèse, l'équation (3) donne

$$ {}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)} ((f(z))) = \mathfrak{M}(P), \tag{6}$$

P étant une fonction de l'argument p déterminée par le système des formules

$$P = z f(z), \tag{7}$$

$$z = Re^{pi}, \tag{8}$$

et $\mathfrak{M}(P)$ étant la *moyenne isotropique* de P déterminée par la formule

$$\mathfrak{M}(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P\,dp. \tag{9}$$

Si, pour des valeurs croissantes de R, cette moyenne isotropique converge vers une limite fixe Ω, l'équation (6) donnera

$$ {}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)} ((f(z))) = \Omega. \tag{10}$$

Si l'on réduisait la surface S, non plus au cercle décrit de l'origine

avec le rayon R, mais à l'un des demi-cercles dans lesquels ce cercle est divisé par l'axe des x ou par l'axe des y, alors, en désignant par

$$\mathop{\mathrm{M}}_{p=p'}^{p=p''}(P)$$

la valeur moyenne de la fonction P de p, entre les limites $p = p'$, $p = p''$, c'est-à-dire la valeur du rapport

$$\frac{\int_{p'}^{p''} P\,dp}{p''-p'},$$

on obtiendrait à la place de l'équation (6) les quatre formules

$$\left\{\begin{aligned} {}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(0)}^{(\pi)} ((f(z))) &= \frac{1}{2}\mathop{\mathrm{M}}_{p=0}^{p=\pi}(P) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx, \\ {}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(0)} ((f(z))) &= \frac{1}{2}\mathop{\mathrm{M}}_{p=-\pi}^{p=0}(P) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} {}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} ((f(z))) &= \frac{1}{2}\mathop{\mathrm{M}}_{p=-\frac{\pi}{2}}^{p=\frac{\pi}{2}}(P) - \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} f(iy)\,dy, \\ {}_{(0)}^{(R)}\mathcal{E}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{2}\right)} ((f(z))) &= \frac{1}{2}\mathop{\mathrm{M}}_{p=\frac{\pi}{2}}^{p=\frac{3\pi}{2}}(P) + \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} f(iy)\,dy. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Si, pour des valeurs croissantes de R, les quatre valeurs moyennes de la fonction p correspondantes aux demi-circonférences qui s'appuient sur l'axe des x, ou sur l'axe des y, convergent vers des limites fixes, alors, en désignant par Ω_y, Ω_{-y}, Ω_x, Ω_{-x} ces mêmes limites, on tirera des formules (11)

$$\left\{\begin{aligned} {}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(0)}^{(\pi)} ((f(z))) &= \frac{1}{2}\Omega_y + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \\ {}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(0)} ((f(z))) &= \frac{1}{2}\Omega_{-y} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

et des formules (12)

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} {}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}((f(z))) &= \frac{1}{2}\Omega_x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{i}y)\,dy, \\ {}_{(0)}^{(\infty)}\mathcal{E}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{2}\right)}((f(z))) &= \frac{1}{2}\Omega_{-x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{i}y)\,dy. \end{aligned}\right.$$

Au reste, on peut déduire les formules (12) des formules (11), et les formules (14) des formules (13), en remplaçant $f(z)$ par $f(\mathrm{i}z)$.

Les formules (13), appliquées à la détermination de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, fournissent les valeurs de plusieurs intégrales données par Euler, Laplace, etc., et d'une multitude d'autres.

Si l'on supposait la surface S comprise entre deux courbes, et terminée : 1° par un contour extérieur PQR; 2° par un contour intérieur pqr; alors, en nommant S_1 la surface enveloppée par le contour extérieur PQR, et S_0 la surface enveloppée par le contour intérieur pqr, on aurait évidemment $S = S_1 - S_0$, et la somme des résidus de $f(z)$, relatifs à des valeurs de z qui correspondraient à des points renfermés dans l'aire S, serait, eu égard à la formule (3), la différence entre les rapports $\frac{(S_1)}{2\pi}$, $\frac{(S_0)}{2\pi}$. Donc, en désignant cette somme de résidus par $\mathcal{E}((f(z)))$, on aurait

$$(15)\quad \mathcal{E}((f(z))) = \frac{(S_1) - (S_0)}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Supposons, pour fixer les idées, la surface S comprise entre les circonférences décrites de l'origine comme centre avec les rayons R et $r_0 < R$, et posons

$$(16)\quad u = r_0 e^{p\mathrm{i}}, \qquad v = Re^{p\mathrm{i}}, \qquad P_0 = u\,f(u), \qquad P = v\,f(v).$$

Alors, à la place de la formule (6), on obtiendra la suivante :

$$(17)\quad {}_{(r_0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((f(z))) = \mathfrak{M}(P) - \mathfrak{M}(P_0).$$

Concevons maintenant que l'on attribue à la fonction $f(z)$ des formes particulières, et supposons d'abord

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - t},$$

t étant la coordonnée réelle ou imaginaire d'un certain point T. On aura, si le point T est extérieur à la surface S,

$$(18)\quad \mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{E}\frac{((\varphi(z)))}{z - t},$$

et, si le point T est intérieur à la surface S,

$$(19)\quad \mathcal{E}((f(z))) = \mathcal{E}\frac{((\varphi(z)))}{z - t} + \varphi(t).$$

Dans cette hypothèse, l'équation (17), jointe aux formules (16), donnera

$$(20)\quad \varphi(t) = {}_{(r_0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{((\varphi(z)))}{t - z} + \mathfrak{M}\frac{v\,\varphi(v)}{v - t} + \mathfrak{M}\frac{u\,\varphi(u)}{t - u}.$$

D'ailleurs, le module de t étant, par hypothèse, supérieur au module de u et inférieur au module de v, les deux rapports $\frac{v}{v - t}$, $\frac{u}{t - u}$ seront développables, le premier suivant les puissances ascendantes nulles et positives de la variable t, le second suivant les puissances descendantes et négatives de la même variable. Donc, *si $\varphi(z)$ est une fonction dont la valeur, quand elle demeure finie, soit toujours unique et déterminée, et si le rapport différentiel de $\varphi(z)$ à la variable z dépend uniquement de cette variable, alors pour un module de t compris entre deux limites données r_0, R, la fonction $\varphi(t)$ pourra être décomposée en trois parties dont la première sera exprimée par le résidu intégral*

$$(21)\quad {}_{(r_0)}^{(R)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{((\varphi(z)))}{t - z},$$

tandis que les deux dernières auront pour développements deux séries toujours convergentes, ordonnées l'une suivant les puissances ascendantes, l'autre suivant les puissances descendantes de la variable t. D'ailleurs, *le* *résidu* (21) *sera une somme de fractions simples, qui offriront, avec des numérateurs constants, des dénominateurs représentés ou par les diverses valeurs du binôme* $t - z$, *correspondantes à celles des racines de l'équation*

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0,$$

dont les modules seront compris entre les limites r_0, R, *ou par des puissances de* $t - z$, *si quelques-unes des racines dont il s'agit deviennent égales entre elles.* Cela posé, il est clair que l'équation (5) fournit simultanément la théorie de la décomposition des fractions rationnelles, ou même des fonctions transcendantes en fractions simples, la série de Taylor avec le théorème sur la convergence de cette série, et le théorème de M. Laurent.

Soit maintenant τ une valeur particulière de t, et supposons qu'après avoir remplacé, dans la formule (20), la fonction $\varphi(z)$ par $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, on intègre les deux membres par rapport à t, à partir de $t = \tau$. Alors, en passant des logarithmes aux nombres, on trouvera

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(\tau)} = e^{T_0 - T}\,\Pi, \tag{22}$$

T, T_0 étant les sommes des deux séries convergentes ordonnées, la première suivant les puissances ascendantes et positives, la seconde suivant les puissances descendantes et négatives de t, et Π étant un produit déterminé par la formule

$$\Pi = \left(\frac{t}{\tau}\right)^m \left(\frac{t - z_{\prime}}{\tau - z_{\prime}}\right)^{m_{\prime}} \left(\frac{t - z_{\prime\prime}}{\tau - z_{\prime\prime}}\right)^{m_{\prime\prime}} \cdots \left(\frac{\tau - z'}{t - z'}\right)^{m'} \left(\frac{\tau - z''}{t - z''}\right)^{m''} \cdots, \tag{23}$$

dans laquelle $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, ... d'une part, et z', z'', ... de l'autre, désignent les valeurs de z qui vérifient comme racines, d'une part la première, d'autre part la seconde des équations

$$\varphi(z) = 0, \qquad \frac{1}{\varphi(z)} = 0, \tag{24}$$

et qui, d'ailleurs, offrent des modules compris entre les limites r_0, R,

tandis que $m_{\prime}$ représente le nombre des racines égales à $z_{\prime}$; $m_{\prime\prime}$ le nombre des racines égales à $z_{\prime\prime}$; ..., m' le nombre des racines égales à z'; ... et m la différence entre les deux nombres qui expriment, pour les deux équations dont il s'agit, combien il existe de racines égales ou inégales qui offrent des modules inférieurs à r_0. Ajoutons que les valeurs de T et T_0 peuvent être facilement déterminées à l'aide des formules

$$T = \mathfrak{M}\left[\frac{v\,\varphi'(v)}{\varphi(v)}\,\mathrm{l}\frac{1 - \frac{t}{v}}{1 - \frac{\tau}{v}}\right], \qquad T_0 = \mathfrak{M}\left[\frac{u\,\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,\mathrm{l}\frac{1 - \frac{u}{t}}{1 - \frac{u}{\tau}}\right]. \tag{25}$$

La formule (22) est féconde en résultats qui paraissent dignes d'attention, surtout lorsqu'on l'applique aux fonctions à double période et, en particulier, aux fonctions elliptiques. On doit remarquer le cas où l'on suppose $r_0 = 0$, $R = \infty$. Alors, en effet, comme je l'expliquerai plus en détail dans un prochain article, on déduit immédiatement de cette formule, non seulement une décomposition des fonctions elliptiques en facteurs simples que l'on peut combiner entre eux par voie de multiplication, de manière à reproduire les beaux théorèmes de M. Jacobi, mais encore un grand nombre de résultats du même genre et qui semblaient plus difficiles à obtenir.

J'examinerai aussi ce qui arrive quand on suppose

$$f(z) = \chi(z)\int_a^t e^{z(t-\mu)}\,\varphi(\mu)\,d\mu \tag{26}$$

ou

$$f(z) = \chi(z)\int_t^b e^{z(t-\mu)}\,\varphi(\mu)\,d\mu, \tag{27}$$

t étant une variable réelle comprise entre les limites a, b. On verra, dans cette hypothèse, les formules ci-dessus établies reproduire et même étendre les théorèmes énoncés dans le second Volume des *Exercices de Mathématiques* (pages 344 et suivantes) (1), relativement

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 397 et suiv.

au développement des fonctions en séries dont les divers termes dépendent des diverses racines d'une équation transcendante; et l'on remarquera que, pour démontrer facilement ces théorèmes, il est utile d'appliquer à la détermination du produit $zf(z)$ une intégration par parties, attendu que l'on a, par exemple,

$$z\int_a^t e^{z(t-\mu)}\varphi(\mu)\,d\mu = e^{z(t-a)}\varphi(a) - \varphi(t) + \int_a^t e^{z(t-\mu)}\varphi'(\mu)\,d\mu. \tag{28}$$

Ajoutons que, si l'on pose $\chi(z) = 1$ dans les formules (26) et (27); si d'ailleurs la fonction $\varphi(\mu)$ reste finie entre les limites $\mu = a$, $\mu = b$, on tirera immédiatement des équations (14), jointes à la formule (28), les deux équations

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^t e^{y(t-\mu)i}\varphi(\mu)\,dy\,d\mu, \tag{29}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_t^b e^{y(t-\mu)i}\varphi(\mu)\,dy\,d\mu \tag{30}$$

et, par suite, la formule

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b e^{y(t-\mu)i}\varphi(\mu)\,dy\,d\mu, \tag{31}$$

qui peut être utilement substituée à celle de Fourier, eu égard à l'avantage qu'elle possède de ne renfermer qu'une seule exponentielle trigonométrique.

483.

Analyse. — *Memoire sur l'application du calcul des résidus à la décomposition des fonctions transcendantes en facteurs simples.*

C. R., T. XXXII, p. 267 (25 février 1851).

§ I. — *Formules générales.*

Soient x, y les coordonnées rectangulaires; r, p les coordonnées polaires, et

$$z = x + y\mathrm{i} = re^{p\mathrm{i}}$$

la coordonnée imaginaire d'un point mobile Z. Supposons que ce point soit renfermé entre les deux circonférences décrites de l'origine comme centre avec les rayons r_0, R, ou, en d'autres termes, que le module r de z reste compris entre les limites r_0, R. Soit $\varphi(z)$ une fonction de z, qui, pour un module de z inférieur à R, soit toujours continue quand elle ne devient pas infinie; et admettons encore que le rapport différentiel de la fonction $\varphi(z)$ à la variable imaginaire z dépende uniquement des variables réelles x, y; puis, en supposant les équations

$$\varphi(z) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0, \tag{2}$$

résolues par rapport à z, nommons $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, ... celles des racines de l'équation (1), et z', z'', z''', ... celles des racines de l'équation (2) qui offrent des modules compris entre les limites r_0, R. Soient d'ailleurs $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, $m_{\prime\prime\prime}$, ... ou m', m'', m''' les nombres entiers qui expriment combien l'équation (1) ou (2) offre de racines égales au premier, au deuxième, au troisième, ... terme de la suite $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, ... ou de la suite z', z'', z''', ..., et nommons m la différence entre les deux nombres qui indiquent, pour les équations (1) et (2), combien il existe de racines égales ou inégales qui offrent des modules inférieurs à r_0. Enfin, en nommant ζ une valeur particulière de z, posons, pour abréger,

$$u = r_0 e^{p\mathrm{i}}, \tag{3}$$

$$v = Re^{p\mathrm{i}}, \tag{4}$$

$$U = \mathfrak{M}\left[\frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,\mathrm{l}\frac{1-\frac{u}{z}}{1-\frac{u}{\zeta}}\right], \tag{5}$$

$$V = \mathfrak{M}\left[\frac{v\varphi'(v)}{\varphi(v)}\,\mathrm{l}\frac{1-\frac{z}{v}}{1-\frac{\zeta}{v}}\right]. \tag{6}$$

L'équation (22) de la page 213 donnera

$$(7) \qquad \varphi(z) = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^m} z^m \frac{\left(\frac{z - z_{\prime}}{\zeta - z_{\prime}}\right)^{m_{\prime}} \left(\frac{z - z_{\prime\prime}}{\zeta - z_{\prime\prime}}\right)^{m_{\prime\prime}} \cdots}{\left(\frac{z - z'}{\zeta - z'}\right)^{m'} \left(\frac{z - z''}{\zeta - z''}\right)^{m''} \cdots} e^{U-V}.$$

Si l'on suppose en particulier $r_0 = 0$, on aura

$$U = 0,$$

et la formule (7) deviendra

$$(8) \qquad \varphi(z) = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^m} z^m \frac{\left(\frac{z - z_{\prime}}{\zeta - z_{\prime}}\right)^{m_{\prime}} \left(\frac{z - z_{\prime\prime}}{\zeta - z_{\prime\prime}}\right)^{m_{\prime\prime}} \cdots}{\left(\frac{z - z'}{\zeta - \zeta'}\right)^{m'} \left(\frac{z - z''}{\zeta - \zeta''}\right)^{m''} \cdots} e^{-V},$$

m étant le nombre des racines nulles de l'équation (1); puis, en réduisant ζ à zéro, on trouvera

$$(9) \qquad \varphi(z) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m} z^m \frac{\left(1 - \frac{z}{z_{\prime}}\right)^{m_{\prime}} \left(1 - \frac{z}{z_{\prime\prime}}\right)^{m_{\prime\prime}} \cdots}{\left(1 - \frac{z}{z'}\right)^{m'} \left(1 - \frac{z}{z''}\right)^{m''} \cdots} e^{-V},$$

la valeur de V étant

$$(10) \qquad V = \mathfrak{M}\left[\frac{v\,\varphi'(v)}{\varphi(v)} \, \mathrm{l}\left(1 - \frac{z}{v}\right)\right].$$

Dans les formules (8) et (9),

$$z_{\prime}, \quad z_{\prime\prime}, \quad z_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots \qquad \text{et} \qquad z', \quad z'', \quad z''', \quad \ldots$$

représentent celles des racines des équations (1) et (2) qui offrent des modules inférieurs à la quantité R supposée constante, ou, en d'autres termes, les racines qui correspondent à des points renfermés dans le cercle décrit de l'origine comme centre avec le rayon R. Si à ce cercle on substituait le contour d'une certaine aire S, et si, en conséquence, on faisait coïncider $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, ..., z', z'', z''', ... avec les racines de l'équation (1) ou (2) correspondantes à des points renfermés dans l'aire S, alors on devrait supposer, dans la formule (4), R fonction de p, et dans la formule (8), V déterminé en fonction de z, non plus

par l'équation (6), mais par la suivante

$$(11) \qquad V = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \, \mathrm{l} \frac{1 - \frac{z}{v}}{1 - \frac{\zeta}{v}} \, dv,$$

l'intégrale étant étendue au contour entier de l'aire S, et le point mobile Z étant supposé parcourir ce contour avec un mouvement de rotation direct autour de S. On aurait, sous les mêmes conditions, dans la formule (9),

$$(12) \qquad V = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \, \mathrm{l}\left(1 - \frac{z}{v}\right) dv.$$

Il est bon d'observer qu'on tire de l'équation (10), en développant $\mathrm{l}\left(1 - \frac{z}{v}\right)$ suivant les puissances ascendantes de z,

$$(13) \qquad V = -z\,\mathfrak{M}\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} - \frac{z^2}{2}\mathfrak{M}\frac{\varphi'(v)}{v\,\varphi(v)} - \frac{z^3}{3}\mathfrak{M}\frac{\varphi'(v)}{v^2\varphi(v)} - \ldots.$$

Si $\varphi(z)$ est ou une fonction paire, ou une fonction impaire de z, c'est-à-dire si l'une des fonctions $\varphi(z)$, $z\varphi(z)$ demeure inaltérée, tandis que la variable z change de signe, alors $\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}$ sera une fonction impaire de v, et les coefficients des puissances impaires de z s'évanouiront dans la formule (13), qui sera réduite à

$$(14) \qquad V = -\frac{z^2}{2}\mathfrak{M}\frac{\varphi'(v)}{v\,\varphi(v)} - \frac{z^4}{4}\mathfrak{M}\frac{\varphi'(v)}{v^3\varphi(v)} - \ldots.$$

Pareillement, si, θ étant une racine primitive de l'équation binôme

$$\theta^n = 1,$$

le rapport $\frac{\varphi(\theta z)}{\varphi(z)}$ se réduit à θ, ou à une autre racine primitive de la même équation, la fonction $\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ ne variera pas quand on remplacera z par θz, et le développement de V renfermera seulement les puissances de z dont les exposants sont des multiples de n, en sorte qu'on aura

$$V = -\frac{z^n}{n}\,\mathfrak{M}\,\frac{\varphi'(\rho)}{\rho^{n-1}\varphi(\rho)} - \frac{z^{2n}}{2n}\,\mathfrak{M}\,\frac{\varphi'(\rho)}{\rho^{2n-1}\varphi(\rho)} - \ldots. \tag{15}$$

Enfin, si le rayon vecteur R, mené à un point quelconque du contour de l'aire S, varie dans un certain rapport k, indépendant de p, ce contour se dilatera en demeurant semblable à lui-même; et si, pour des valeurs infiniment grandes de k, V devient infiniment petit, l'équation

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\,z^m\,\frac{\left(1-\frac{z}{z_{,}}\right)^{m_{,}}\left(1-\frac{z}{z_{,,}}\right)^{m_{,,}}\cdots}{\left(1-\frac{z}{z'}\right)^{m'}\left(1-\frac{z}{z''}\right)^{m''}\cdots} \tag{16}$$

transformera la fonction $\varphi(z)$ en une fraction dont chaque terme sera le produit d'un nombre infini de facteurs. Ajoutons que, si l'aire S est celle d'un cercle, la fraction dont il s'agit devra être réduite à ce qu'on peut nommer sa *valeur principale*, c'est-à-dire à la limite vers laquelle elle converge, tandis que l'on fait décroître indéfiniment le nombre des facteurs simples admis dans les deux termes, en faisant croître indéfiniment le rayon R du cercle et, par suite, le nombre des racines $z_{,}$, $z_{,,}$, ..., z', z'', ... dont les modules sont inférieurs à R.

Si celles des racines de l'équation (1) ou (2) qui diffèrent de zéro sont toutes inégales, les formules (9) et (16) donneront simplement

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\,z^m\,\frac{\left(1-\frac{z}{z_{,}}\right)\left(1-\frac{z}{z_{,,}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{z}{z'}\right)\left(1-\frac{z}{z''}\right)\cdots}\,e^{-V}, \tag{17}$$

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\,z^m\,\frac{\left(1-\frac{z}{z_{,}}\right)\left(1-\frac{z}{z_{,,}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{z}{z'}\right)\left(1-\frac{z}{z''}\right)\cdots}. \tag{18}$$

Si d'ailleurs la fonction $\varphi(z)$ reste toujours finie pour des valeurs finies de z, les racines z', z'', ... disparaîtront, et les équations (17), (18)

se réduiront aux formules

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\,z^m\left(1-\frac{z}{z_{,}}\right)\left(1-\frac{z}{z_{,,}}\right)\cdots e^{-V}, \tag{19}$$

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\,z^m\left(1-\frac{z}{z_{,}}\right)\left(1-\frac{z}{z_{,,}}\right)\cdots. \tag{20}$$

Les principes que nous venons d'établir s'appliquent immédiatement aux fonctions inverses des intégrales qui renferment sous le signe $\int$ des fonctions rationnelles d'une variable z. Pour qu'ils puissent être appliqués aux fonctions inverses des intégrales qui renferment sous le signe $\int$ des fonctions irrationnelles, par exemple des radicaux, il faut commencer par substituer à ces radicaux des fonctions continues. On y parvient sans peine en opérant comme il suit.

Si, en nommant r et p le module et l'argument de la variable imaginaire

$$z = x + y i = r e^{p i},$$

on désigne par μ un nombre quelconque fractionnaire ou même irrationnel, et par ϖ l'angle qui, étant renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, vérifie la formule

$$\operatorname{tang}\varpi = \operatorname{tang} p,$$

l'une des valeurs de la fonction irrationnelle qu'on obtiendra en élevant la variable z à la puissance du degré μ sera toujours représentée par l'un des trois produits

$$r^{\mu} e^{\mu\varpi i}, \quad e^{\mu\pi i} r^{\mu} e^{\mu\varpi i}, \quad e^{-\mu\pi i} r^{\mu} e^{\mu\varpi i},$$

savoir, par le premier, si la partie réelle x de z est positive; par le second, si l'on a $x < 0$, $y > 0$; par le troisième, si l'on a $x < 0$, $y < 0$. Cela posé, soit s une fonction assujettie : 1° à varier avec z par degrés insensibles; 2° à représenter toujours une des puissances de z du degré μ; et supposons que, pour une certaine valeur de z, s se réduise à celle des puissances de z du degré μ, qui se trouve représentée par le produit

$$\theta r^{\mu} e^{\mu\varpi i}, \tag{21}$$

θ étant une valeur de l'exponentielle $e^{h\mu\pi i}$ correspondante à une certaine valeur entière, positive, nulle ou négative, de h. Alors, z venant à varier par degrés insensibles avec x et y, il suffira évidemment, pour obtenir s, de multiplier le produit (21) par le facteur $e^{\mu\pi i}$, toutes les fois que, x venant à changer de signe, le rapport $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} p$ passera de $+\infty$ à $-\infty$, et par le facteur $e^{-\mu\pi i}$, toutes les fois que, x venant à changer de signe, le rapport $\frac{y}{x}$ passera de $-\infty$ à $+\infty$.

Si l'on suppose, par exemple, $\mu = \frac{1}{2}$, s sera une racine de l'équation

$$s^2 = z;$$

θ sera l'une des quantités 1, -1, i, $-i$; et si, pour une certaine valeur de z, on a

$$s = \theta r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\varpi}{2} i},$$

alors, z venant à varier par degrés insensibles, on devra, pour obtenir une valeur de s qui varie elle-même par degrés insensibles, multiplier le produit $\theta r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\varpi}{2} i}$ par i, toutes les fois que le rapport $\frac{y}{x}$ passera de $+\infty$ à $-\infty$, et par $-i$, toutes les fois que ce rapport passera de $-\infty$ à $+\infty$.

§ II. — *Applications.*

Pour montrer une application fort simple des formules ci-dessus établies, supposons d'abord

$$\varphi(z) = \sin \pi z.$$

Les diverses racines de l'équation $\varphi(z) = 0$ seront toutes inégales et de la forme $\pm n$, n étant un nombre entier quelconque. De plus, le nombre m des racines nulles étant réduit à l'unité, on aura

$$m = 1, \qquad \varphi'(z) = \pi \cos \pi z, \qquad \varphi'(0) = 1;$$

puis, en supposant le module R de la variable auxiliaire $v = Re^{pi}$ compris entre les limites n, $n+1$, et prenant

$$a_n = \pi \mathcal{M} \frac{\cot \pi v}{v^{n-1}} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cot \pi v}{v^{n-1}} \, dp,$$

on tirera de la formule (19) du § I

$$\sin \pi z = \pi z \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{2}\right)(1 - z)(1 + z)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-V} \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin \pi z = \pi z (1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) e^{-V}, \tag{2}$$

la valeur de V étant

$$V = -\frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{4} a_4 z^4 - \ldots.$$

Si n et par suite R deviennent infiniment grands, a_2, a_4, ... deviendront infiniment petits, et, en posant $n = \infty$, on aura $V = 0$; par conséquent

$$\sin \pi z = \pi z (1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9}\right) \cdots \tag{3}$$

On trouverait de la même manière

$$\cos \pi z = (1 - 4z^2)\left(1 - \frac{4z^2}{9}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25}\right) \cdots \tag{4}$$

Si, d'ailleurs, n', n'' étant deux nombres entiers, on désigne à l'aide de la notation

$$\prod_{n=-n'}^{n=n''} \tag{5}$$

le produit des diverses valeurs de $f(n)$ correspondantes aux valeurs entières, positives, nulle et négatives de n, comprises entre les limites $n = -n'$, $n = n''$, et si l'on réduit la factorielle

$$\prod_{n=-\infty}^{n=\infty} f(n) \tag{6}$$

à sa *valeur principale*, c'est-à-dire à celle qu'acquiert l'expression (5) quand, après avoir posé $n'' = n'$, on fait converger n' vers la limite ∞, on pourra présenter l'équation (4) sous la forme

$$\cos \pi z = \prod_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{n + \frac{1}{2}}\right). \tag{7}$$

Ajoutons que l'on peut déduire immédiatement de l'équation (1) ou (3), non seulement la formule (7), mais encore la suivante

$$(8)\qquad \frac{\sin\frac{\pi(a-z)}{b}}{\sin\frac{\pi a}{b}} = \prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(1-\frac{z}{a+nb}\right),$$

la factorielle qui renferme le second membre étant supposée réduite à sa valeur principale. Il y a plus : en partant ou de la formule (8) ou des formules générales établies dans le § I, on pourra représenter une fonction entière ou même rationnelle quelconque de $\sin z$ et de $\cos z$ par une factorielle qui sera le produit d'une infinité de facteurs simples, ou par le rapport de deux produits de cette espèce.

Observons encore que, si l'on pose

$$s = \sin z, \qquad t = \cos z,$$

s et t, considérés comme fonctions de z, seront simplement deux variables assujetties : 1° à varier avec z par degrés insensibles; 2° à vérifier, quel que soit z, les deux équations

$$(9)\qquad ds = t\,dz,$$

$$(10)\qquad s^2 + t^2 = 1;$$

3° à prendre, pour $z = 0$, les valeurs particulières

$$(11)\qquad s = 0, \qquad t = 1;$$

et que, pour obtenir la décomposition des fonctions s, t en facteurs simples, il suffira de leur appliquer les formules établies dans le § I, après avoir déduit la périodicité de ces fonctions, les racines des équations $\sin z = 0$, $\cos z = 0$, et l'indice de périodicité 2π de la variable z, des principes exposés dans les *Comptes rendus* de 1846, relativement à l'intégration curviligne des équations différentielles.

Appliquons maintenant nos formules à quelques-unes des transcendantes nouvelles qui représentent les fonctions inverses des intégrales

curvilignes des équations différentielles, par exemple aux fonctions elliptiques; et, pour fixer les idées, supposons que $\varphi(z)$ se réduise à ce qu'on nomme le *sinus de l'amplitude* de la variable z, en sorte qu'on ait

$$\varphi(z) = \sin \operatorname{am} z.$$

Comme je l'ai remarqué dans le Mémoire du 12 octobre 1846, ce sinus sera, non pas la valeur de s que détermine la formule

$$(12)\qquad z = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

dans laquelle on suppose k renfermé entre les limites 0, 1, mais la valeur de s que fournira l'intégration de l'équation différentielle

$$(13)\qquad ds = t\,dz,$$

si l'on assujettit s et t : 1° à varier avec z par degrés insensibles; 2° à vérifier généralement l'équation finie

$$(14)\qquad t^2 = (1-s^2)(1-k^2s^2);$$

3° à prendre, pour $z = 0$, les valeurs particulières

$$(15)\qquad s = 0, \qquad t = 1.$$

Cela posé, faisons

$$K = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-k^2x^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad K' = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-k^2x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il suffira d'appliquer à la détermination de s les principes établis dans les *Comptes rendus* de 1846, comme je l'avais fait dans les Mémoires dont ces *Comptes rendus* offrent des extraits, pour reconnaître : 1° que s reprend la même valeur quand on remplace z par $\pm nK \pm n'K'i + z$, n, n' étant deux nombres entiers dont le premier est pair, ou par $\pm nK \pm n'K'i - z$, n étant impair; 2° que t se réduit à $+1$ dans le premier cas, à -1 dans le second. Il en résulte que l'équation

$$s = 0 \tag{16}$$

a pour racines les valeurs de z comprises dans la formule

$$\pm nK \pm n'K'\mathrm{i},$$

n, n' étant deux nombres entiers quelconques. On prouvera de même que l'équation

$$\frac{1}{s} = 0 \tag{17}$$

a pour racines les valeurs de z de la forme

$$\pm nK \pm (n' + \tfrac{1}{2})K'\mathrm{i};$$

et l'on conclura aisément de l'équation (13) que chacune des racines trouvées est une racine simple de l'équation (1) ou (2). Cela posé, la formule (20) du § I donnera

$$\sin\operatorname{am} z = z \frac{\Pi\left(1 - \dfrac{z}{nK + n'K'\mathrm{i}}\right)}{\Pi\left[1 - \dfrac{z}{nK + (n' + \frac{1}{2})K'\mathrm{i}}\right]}, \tag{18}$$

chacune des factorielles indiquées par la lettre Π étant le produit de tous les facteurs finis semblables à celui qui est mis en évidence, et qui correspondent à des valeurs entières de n, n', positives, nulle ou négatives, et chaque factorielle étant d'ailleurs réduite à sa valeur principale.

On transformerait de la même manière en factorielles ou en rapports de factorielles les autres fonctions elliptiques, et même des fonctions rationnelles de ces fonctions. C'est, au reste, ce que j'expliquerai dans un nouvel article, où je donnerai d'autres applications des formules établies dans le § I.

484.

Analyse mathématique. — *Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par* M. Puiseux *et intitulé :* Recherches sur les fonctions algébriques.

C. R., T. XXXII, p. 276 (25 février 1851).

Parmi les fonctions implicites d'une variable réelle ou imaginaire, celles qui représentent les racines réelles d'équations algébriques, et que l'on peut désigner, pour ce motif, sous le nom de *fonctions algébriques*, méritent d'être particulièrement étudiées. Les propriétés de ces fonctions et de leurs intégrales définies sont l'objet spécial des recherches de M. Puiseux. D'ailleurs, comme le reconnait l'auteur lui-même, ces recherches se trouvent, sur plusieurs points, intimement liées à celles que l'un de nous a publiées à diverses époques et qui ont été l'objet de divers Mémoires. Nous serons donc obligés de rappeler quelques-uns des résultats obtenus dans ces Mémoires. On pourra ainsi mieux apprécier le caractère et l'importance des résultats nouveaux auxquels M. Puiseux est parvenu.

Concevons que, la lettre i désignant une racine carrée de -1, l'on fasse correspondre à chaque valeur imaginaire d'une variable

$$z = x + \mathrm{i}y$$

un point Z dont x et y représentent les coordonnées rectangulaires. Si l'on nomme *fonction continue* de z celle qui, obtenant, pour chaque valeur de z, une valeur unique et finie, varie par degrés insensibles avec la variable z, ou, ce qui revient au même, avec la position du point mobile Z, une fonction de z, qui restera continue, tandis que le point Z décrira une courbe continue PQR, ne pourra, pendant le mouvement du point Z, ni devenir infinie, ni changer brusquement de valeur; et l'on pourra en dire autant de toute fonction u qui restera continue, tandis que le point Z se mouvra d'une manière continue, sans sortir d'une aire S comprise dans un contour donné. D'ailleurs, en s'appuyant sur les principes exposés par l'un de nous dans divers Mémoires (¹), on peut démontrer que, si l'on résout une équation algébrique

$$f(u, z) = 0$$

dont le premier membre soit une fonction entière de u et de z, par rapport à u, l'une quelconque u_g des racines obtenues u_1, u_2, u_3, ... sera fonction continue de z, dans le voisinage de toute valeur de z qui ne rendra pas la racine u_g infinie ou équivalente à une autre racine u_h de l'équation algébrique donnée.

Cela posé, concevons que l'on ait déterminé, dans le plan des xy, les diverses positions C, C′, C″, ... du point Z correspondantes aux diverses valeurs de z pour lesquelles l'équation algébrique donnée acquiert ou des racines infinies ou des racines égales; et traçons dans le même plan un contour fermé PQR qui serve de limite à une aire S dont les deux dimensions soient infiniment petites. Enfin, admettons que le point mobile Z décrive ce contour en partant de la position P, et tournant autour de l'aire S avec un mouvement de rotation direct, et que, pendant ce mouvement, la fonction u varie d'une manière continue, sans cesser de satisfaire à l'équation algébrique

$$f(u, z) = 0.$$

A l'instant où le point mobile Z, après avoir décrit le contour entier, reprendra sa position initiale P, la fonction u reprendra évidemment sa valeur primitive, si les *points isolés* C, C′, C″, ... sont tous extérieurs à l'aire S. Si, au contraire, l'un des points isolés C, C′, C″, ..., le point C par exemple, est intérieur au contour qui limite l'aire S, alors, au moment où le point mobile Z reprendra sa position initiale P, la fonction u acquerra généralement une valeur nouvelle. Donc alors, si la valeur initiale de u est une certaine racine u_g de l'équation algébrique, la valeur finale de u sera une autre racine u_h de la même équation. En d'autres termes, une révolution du point mobile Z autour

(¹) *Voir* les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 109 et suiv., et les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVIII, p. 121 (*Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XII et S. I, T. VIII, p. 151).

du point isolé C sur une aire S, dont les deux dimensions seront infiniment petites, aura pour effet de substituer à la racine u_g une autre racine u_h; et, comme u_g peut être une racine quelconque de l'équation algébrique, il est clair qu'en vertu de la révolution dont il s'agit les diverses racines se trouveront substituées les unes aux autres, et, par conséquent, échangées entre elles suivant le mode indiqué par une certaine *substitution*. D'ailleurs une substitution quelconque peut toujours être décomposée en *facteurs* ou *substitutions circulaires* dont elle est le produit [*voir* les *Comptes rendus*, année 1845, t. XXI, p. 600 (¹)]. Donc les racines u_1, u_2, u_3, ..., eu égard aux échanges opérés entre elles pendant la révolution du point mobile Z autour du point isolé C, peuvent être distribuées, comme le dit M. Puiseux, en un certain nombre de *systèmes circulaires*.

Au reste, M. Puiseux ne s'est pas borné à déduire des principes établis par l'un de nous les diverses conséquences que nous venons d'énoncer : il a encore, et c'est là surtout ce qui constitue la nouveauté et l'importance de son travail, déterminé les substitutions qui expriment les échanges opérés entre les diverses valeurs de u, pendant la révolution du point mobile Z autour d'un point isolé C, correspondant à des racines égales de l'équation algébrique donnée. Le mode de détermination employé par M. Puiseux s'appuie sur une proposition qui peut être énoncée dans les termes suivants : *Les valeurs de u qui deviennent égales entre elles quand le point Z coïncide avec le point C, acquièrent généralement, dans le voisinage de ce point, des accroissements infiniment petits; et, dans la recherche de celles qui se trouvent échangées entre elles, quand le point Z tourne autour du point C, on peut, sans inconvénient, réduire les accroissements dont il s'agit à des valeurs approchées, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur vis-à-vis les infiniment petits d'ordre moindre.* Ajoutons que, *si plusieurs valeurs de u deviennent infinies quand le point Z coïncide avec le point C, on pourra, dans le voisinage du même point,*

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 286.

déduire la substitution qui indiquera les échanges à opérer, de la considération des valeurs approchées de u, dans lesquelles on négligera les quantités infiniment grandes d'un ordre moindre vis-à-vis des quantités infiniment grandes d'ordre supérieur. D'ailleurs, au lieu de recourir à cette seconde proposition, on peut, quand plusieurs valeurs de u deviennent infinies pour une valeur donnée c de z, décomposer, comme l'a fait M. Puiseux, la fonction u en deux, dont l'une soit une fonction entière de z, et l'autre une fonction nouvelle v qui acquière des valeurs égales, mais finies, pour $z = c$.

M. Puiseux ne s'est pas borné à rechercher les propriétés des fonctions algébriques d'une variable imaginaire : il s'est encore proposé de déterminer les diverses valeurs de leurs intégrales définies et d'appliquer à cette détermination les principes généraux établis par l'un de nous dans les Mémoires déjà cités. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Le Mémoire publié en août 1825 [1], sur les intégrales définies prises en des limites imaginaires, détermine leur nature et met en évidence leurs principales propriétés. D'après ce qui est dit dans ce Mémoire, si l'on fait varier, par degrés insensibles, une fonction donnée $f(z)$ de la variable imaginaire

$$z = x + iy,$$

entre deux valeurs extrêmes z_0, z_1, la valeur de l'intégrale définie $\int f(z)\,dz$, prise entre ces limites, pourra dépendre en général, non seulement de ces valeurs extrêmes, mais encore de la série des valeurs intermédiaires, successivement attribuées à la variable z, par conséquent de la série des positions successivement occupées par le point mobile Z dont les coordonnées sont x et y, ou, ce qui revient au même, de la ligne droite ou courbe tracée par ce dernier point. Chaque forme particulière assignée à cette ligne déterminera une valeur correspondante de l'intégrale définie (page 21). Mais, sous certaines conditions, deux valeurs de l'intégrale, correspondantes à deux

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

lignes distinctes, pourront être égales entre elles, et il suffira pour cela que la fonction $f(x)$ reste continue, tandis que la première ligne se modifiera par degrés insensibles, de manière à se transformer finalement en la seconde (page 5). A la vérité, dans le Mémoire de 1825, les deux lignes dont il s'agit sont censées renfermées dans l'intérieur du rectangle dont une diagonale a pour extrémités les points correspondants aux valeurs extrêmes de z. Mais la démonstration du théorème énoncé est indépendante de cette circonstance particulière, qui n'est plus mentionnée dans les Mémoires publiés en 1846. Ainsi, par exemple, dans le Mémoire du 3 août 1846 (*Comptes rendus*, t. XXIII, p. 253) [1], il est dit expressément que, *si une intégrale définie étant étendue à tous les points du contour qui enveloppe une certaine aire* S, *ce contour vient à varier, la valeur de l'intégrale ne sera point altérée, quand la fonction sous le signe $\int$ restera finie et continue en chacun des points successivement occupés par le contour variable.* Comme on est libre de faire varier seulement une portion du contour donné, il est clair que le théorème ici énoncé subsiste pour un contour quelconque fermé ou non fermé. On peut ajouter, avec M. Puiseux, qu'il ne cessera pas de subsister, si le contour donné se transforme en une ligne courbe du genre de celles qui sont mentionnées dans les *Comptes rendus* de 1846 (séance du 12 octobre, p. 703) [2] et *qui se coupent elles-mêmes en un ou plusieurs points.*

Lorsque la fonction sous le signe $\int$ reste continue dans le voisinage d'un point quelconque situé à l'intérieur de l'aire S, on est libre de faire varier cette aire de manière à la rendre infiniment petite avec le contour qui l'enveloppe et avec l'intégrale $\int f(z)\,dz$ étendue à tous les points de ce contour. Donc, alors, *cette intégrale, étendue à tous les points du contour donné, offre une valeur nulle.*

Concevons maintenant que, l'aire S étant décomposée en plusieurs parties A, B, C, ..., on nomme (S) la valeur qu'acquiert l'intégrale $\int f(z)\,dz$, lorsque le point mobile Z, après avoir parcouru le contour

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. X, p. 72.
(2) *Ibid.*, S. I, T. X, p. 169.

de l'aire S avec un mouvement de rotation direct autour de cette aire, revient à sa position primitive, et (A), (B), (C), ... ce que devient (S) quand, au contour de l'aire (S), on substitue le contour de l'aire A, ou B, ou C, ..., *on aura*

$$(S) = (A) + (B) + (C) + \ldots,$$

pourvu que la fonction $f(z)$ *reste finie en chaque point de chaque contour.* [*Voir* les *Comptes rendus* de 1846, séance du 21 septembre, p. 563 (¹).]

D'autre part, comme il est dit dans le Mémoire du 21 septembre 1846, *la fonction* $f(z)$ *peut devenir discontinue dans le voisinage de certaines valeurs de* z *correspondantes à certains points* Q, R, ... *de l'aire* S, *soit en devenant infinie, soit en changeant brusquement de valeur. Dans le premier cas, les points* Q, R, ... *sont nécessairement des points isolés* P′, P″, ... *Dans le second cas, ils sont contigus les uns aux autres et situés sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes* O′O″..., *dont les longueurs peuvent être finies. Cela posé, on pourra généralement partager l'aire* S *en éléments* A, B, C, ... *et* a, b, c, ..., *les uns finis, les autres infiniment petits, les éléments finis* A, B, C, ... *étant choisis de manière que la fonction* $f(z)$ *reste finie en chaque point de chacun d'entre eux, et les éléments infiniment petits* a, b, c, ... *étant ou des surfaces qui s'étendront infiniment peu dans tous les sens autour des points isolés, ou des surfaces infiniment étroites, dont chacune renfermera dans son intérieur une des courbes* O′O″... *ou une portion de l'une de ces courbes. Ce partage étant opéré, la formule ci-dessus rappelée donnera*

$$(S) = (a) + (b) + (c) + \ldots,$$

puisque les intégrales correspondantes à des éléments finis A, B, C, ... *de l'aire* S *s'évanouiront; et la détermination de l'intégrale* (S) *se trouvera réduite à la détermination des intégrales singulières* (a), (b), (c), ..., *dont les valeurs, quand elles seront finies, sans être nulles, se*

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. X, p. 142.

déduiront du calcul des résidus, s'il s'agit d'éléments qui renferment les points isolés P′, P″, ..., *ou, dans le cas contraire, d'équations analogues aux formules établies ci-dessus* (*voir* le Mémoire du 21 septembre, p. 560, 561 et 562) (¹). Dans le Mémoire dont ce passage est extrait, et dont une partie seulement a été insérée dans les *Comptes rendus*, les intégrales singulières étaient dites du *premier* ou du *second ordre*, suivant que l'aire dont le contour était décrit par le point mobile Z offrait une dimension ou deux dimensions infiniment petites. Les intégrales que M. Puiseux nomme *élémentaires* ne sont autre chose que des intégrales singulières du premier ordre.

Les principes que nous venons de rappeler permettent de fixer aisément la valeur de l'intégrale $\int f(z)\,dz$ étendue au contour d'une aire quelconque S, ou même à une ligne de forme quelconque. Ainsi, en particulier, la méthode déduite de ce principe, dans le Mémoire du 26 octobre 1846, permet de réduire la détermination des intégrales curvilignes à la détermination d'intégrales rectilignes, non seulement dans le cas où $f(z)$ serait une fonction explicite de z, mais encore, comme il est aisé de le voir, dans le cas même où $f(z)$ deviendrait une fonction implicite de z. Il y a plus : cette méthode permet de réduire à l'*intégration rectiligne* la détermination des *intégrales curvilignes d'un système quelconque d'équations différentielles*.

Quand on se borne à l'évaluation des intégrales définies de la forme $\int u\,dz$, étendues aux divers points d'une courbe continue, on doit surtout remarquer le cas où u est une fonction algébrique assujettie à vérifier une certaine équation

$$f(u, z) = 0$$

et à varier avec z par degrés insensibles; alors, comme il est dit dans le Mémoire du 12 octobre 1846 (²), *si le point mobile* Z, *après avoir effectué une, deux, trois révolutions dans une courbe fermée, revient à sa position primitive* P, *l'intégrale* $\int u\,dz$ *étendue à la courbe entière, et déterminée*

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. X, p. 140, 141.
(²) *Ibid.*, S. I, T. X, p. 153.

après la première, après la deuxième, après la troisième révolution, offrira des valeurs qui ne seront pas généralement égales entre elles. Néanmoins, si, après un certain nombre de révolutions du point mobile, la fonction u reprend la valeur qu'elle avait d'abord, à partir de cet instant les valeurs déjà obtenues de l'intégrale $t = \int u\,dz$ *se reproduiront dans le même ordre, quelle que soit d'ailleurs la position initiale* P *du point mobile* Z. *Donc alors z sera une fonction périodique de t. Quant aux indices de périodicité, ils seront généralement représentés par des intégrales définies qui pourront se déduire d'un théorème précédemment énoncé, savoir que, si la courbe enveloppe d'une certaine aire* S *vient à varier sans cesser de passer par le point* P, *l'intégrale* $\int u\,dz$ *étendue à tous les points de la courbe ne variera pas, pourvu que la fonction u reste finie et continue en chacun des points successivement occupés par la courbe variable.*

Le théorème ici rappelé permet effectivement de réduire la détermination des indices de périodicité à l'évaluation de certaines intégrales singulières du premier ou du second ordre, et cette évaluation même à celle d'intégrales définies rectilignes. Ajoutons que, dans le cas où l'intégrale $\int u\,dz$ acquiert pour certaines positions du point mobile Z des valeurs infinies, les intégrales rectilignes introduites dans le calcul sont généralement du nombre de celles que l'un de nous a nommées *intégrales extraordinaires*.

Après avoir montré comment on peut décomposer l'intégrale $\int u\,dz$ étendue à une courbe quelconque en intégrales élémentaires ou singulières, M. Puiseux s'est proposé de déterminer, pour diverses formes de la fonction u supposée algébrique, les diverses valeurs de l'intégrale avec les divers indices de périodicité. Le cas où la fonction u devient rationnelle avait été déjà complètement traité par l'un de nous dans les Mémoires de 1846. Se réservant d'ailleurs de revenir plus tard sur ces questions (*Comptes rendus* de 1846, page 787) [1], il s'était borné, dans les autres cas, à indiquer la marche à suivre par

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. X, p. 196.

des applications (1) des théorèmes généraux, dont quelques-unes seulement ont été insérées dans les *Comptes rendus*.

M. Puiseux a repris la question au point où les publications déjà faites l'avaient laissée. Après avoir rappelé, en les appliquant aux fonctions algébriques, des théorèmes déjà établis dans les *Comptes rendus* de 1846, il y a joint des propositions nouvelles dignes de remarque. Ainsi, par exemple, en supposant une fonction u de z réduite, par une valeur donnée de z, à une racine déterminée d'une équation algébrique du degré m, et cette même fonction assujettie à varier avec z par degrés insensibles, M. Puiseux prouve que les diverses valeurs de l'intégrale curviligne et définie $\int u\,dz$, prise à partir de $z = c$, peuvent se déduire ou de l'une d'entre elles, ou de celles qu'on en tire quand à la racine donnée on substitue les autres racines, par l'addition d'intégrales curvilignes et définies du même genre, mais relatives à des contours fermés. Ainsi, encore, en supposant que la fonction u reprenne sa valeur initiale après une révolution du point mobile Z sur une courbe fermée qui renferme dans son intérieur tous les points isolés, M. Puiseux démontre que l'intégrale $\int u\,dz$ étendue à cette courbe entière pourra être exprimée à l'aide du résidu de la fonction u relatif à une valeur nulle de z.

Après avoir ainsi développé et perfectionné la théorie générale des intégrales curvilignes des fonctions algébriques et de leur décomposition en intégrales élémentaires, M. Puiseux a consacré la dernière partie de son Mémoire à la détermination du nombre des diverses valeurs que peuvent acquérir ces intégrales, et du nombre des indices de périodicité, ou, autrement dit, des périodes distinctes qui peuvent s'ajouter à ces valeurs. Il observe avec raison qu'ici se présentent plusieurs questions, et en particulier les suivantes :

1° Trouver toutes les périodes distinctes qui appartiennent à une valeur de l'intégrale $\int u\,dz$;

(1) L'une de ces applications, relative aux fonctions elliptiques, et mentionnée aux pages 322, 323, sera reproduite par l'auteur dans un prochain article.

2° Reconnaître si chaque période appartient à toutes les valeurs de l'intégrale, ou seulement à une partie d'entre elles;

3° Déterminer les valeurs de l'intégrale qui restent distinctes lorsqu'on fait abstraction des multiples entiers des périodes.

M. Puiseux est parvenu à résoudre ces questions dans le cas déjà très étendu où l'on suppose une fonction entière de u équivalente à une fonction rationnelle de z.

Il trouve que, dans ce cas, u_1 étant une des valeurs de la fonction u déterminée par une équation algébrique du degré m, l'intégrale prise à partir d'une origine donnée offre m valeurs distinctes auxquelles peuvent s'ajouter des multiples entiers quelconques, positifs ou négatifs, de périodes dont le nombre est généralement égal au produit de $m-1$ par $n-1$, n désignant le nombre des points isolés ou principaux. De plus, en s'appuyant sur l'un des deux théorèmes que nous avons ci-dessus rappelés, il prouve que le second facteur $n-1$ peut être réduit à $n-2$, dans le cas où, u étant développable pour de grands modules de z suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{z}$, le terme proportionnel à la première de ces puissances s'évanouit.

En appliquant ces propositions, ou plutôt les méthodes desquelles on les tire, au cas spécial où l'on a $m=2$, M. Puiseux retrouve, non seulement les périodes et diverses propriétés connues des fonctions elliptiques, ces propriétés étant rendues manifestes par des formules analogues à celles que l'un de nous avait établies dans les Mémoires de 1846, mais encore les périodes connues des fonctions abéliennes.

En résumé, M. Puiseux a non seulement ajouté de nouveaux développements et des perfectionnements nouveaux à la théorie des intégrales curvilignes des fonctions algébriques, mais, de plus, il a mis en évidence, avec beaucoup de sagacité, les lois suivant lesquelles les diverses valeurs d'une fonction algébrique se trouvent échangées entre elles quand la courbe qui dirige l'intégration tourne autour de l'un des points qu'il nomme *points principaux;* enfin, il est parvenu

à déterminer généralement le nombre des valeurs distinctes et le nombre des périodes de certaines intégrales curvilignes, qui sont relatives à une classe très étendue de fonctions algébriques, et qui comprennent comme cas particulier les intégrales elliptiques et abéliennes.

Pour tous ces motifs, vos Commissaires pensent que le Mémoire de M. Puiseux est très digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.*

485.

Physique. — *Rapport sur un Mémoire présenté par M.* Bravais, *et intitulé :* Études sur la Cristallographie.

C. R., T. XXXII, p. 284 (25 février 1851).

Dans un précédent Mémoire que l'Académie, adoptant les conclusions du Rapport présenté par six de ses Membres, a jugé très digne de son approbation, M. Bravais avait considéré le système des points matériels avec lesquels coïncident, dans un cristal quelconque, les centres de gravité des diverses molécules. Partant de la remarque faite par divers auteurs, spécialement par M. Delafosse, que ces centres forment un *système réticulaire*, c'est-à-dire qu'ils se réduisent aux points suivant lesquels des plans équidistants et parallèles se trouvent coupés par deux autres séries de plans équidistants et parallèles, il avait compris la nécessité d'étudier avec beaucoup de soin la nature et les propriétés d'un système réticulaire quelconque, et des *réseaux* dont chacun a pour *nœuds* les points du système renfermés dans l'un des *plans réticulaires*. Il avait facilement reconnu que les trois séries de plans réticulaires partagent l'espace en *parallélépipèdes élémentaires* tous égaux entre eux, et que les nœuds d'un réseau donné sont en même temps les nœuds d'un nombre infini d'autres réseaux dont les *fils* se coupent suivant des angles divers, mais dont les *mailles* sont toujours équivalentes en surface aux mailles du premier; puis, en nommant *axe de symétrie* d'un système réticulaire une droite tellement choisie, qu'il suffise d'imprimer au système autour de cet axe une rotation mesurée par un certain angle pour substituer les divers nœuds les uns aux autres, il avait démontré que l'angle qui sert de mesure à la rotation doit être nécessairement égal, soit à un ou à deux droits, soit au tiers ou aux deux tiers d'un angle droit. Par suite, le rapport de la circonférence entière à l'arc qui mesure la rotation ne pouvait être que l'un des nombres 2, 3, 4, 6; et la symétrie d'un système réticulaire devait être, suivant le langage adopté par M. Bravais, *binaire*, ou *ternaire*, ou *quaternaire*, ou *sénaire*. Enfin, après avoir établi ces principes, l'auteur avait observé qu'ils pouvaient être utilement appliqués à la classification des cristaux; et, en classant les divers systèmes réticulaires, ou plutôt les systèmes de nœuds qu'ils peuvent offrir, d'après le nombre et la nature de leurs axes de symétrie, M. Bravais avait compté sept systèmes distincts, caractérisés par les axes de symétrie que nous avons mentionnés dans notre premier Rapport, savoir les systèmes *terquaternaire, sénaire, quaternaire, ternaire, terbinaire* et *binaire*, et le système *asymétrique*, c'est-à-dire celui qui n'offre aucun axe de symétrie.

Dans le nouveau Mémoire dont nous avons à rendre compte, M. Bravais ne se borne plus à la recherche des propriétés du système réticulaire formé par les centres de gravité des molécules d'un cristal. Pénétrant plus avant dans les profondeurs de la science, il s'occupe aussi des diverses formes que peuvent offrir les molécules cristallines, et de l'influence que ces formes doivent exercer sur la cristallisation. Déjà, dans un Mémoire présenté à l'Académie le 31 août 1840, M. Delafosse avait signalé cette influence, et observé qu'elle suffit pour expliquer de *prétendues exceptions à la loi de symétrie, regardées comme des anomalies constantes dans certaines espèces minérales, telles que la pyrite, la boracite, la tourmaline, le quartz*, etc. Déjà, il avait insisté sur cette considération, que *deux parties d'un cristal géométriquement semblables peuvent avoir des structures ou constitutions moléculaires différentes, et que, dans ce cas, on ne peut plus dire qu'elles sont en tout point identiques*. Déjà le savant professeur, attribuant la formation des cristaux dits *hémiédriques* aux particularités qui caractérisent leur constitution moléculaire, avait cherché, par exemple, l'explication de l'hémiédrie de la boracite dans la forme tétraédrique de la molécule, et de l'hémiédrie du quartz dans une sorte de distorsion d'une molécule rhomboédrique. Mais, en confirmant ce principe, que *la forme de la molécule exerce une influence notable sur la cristallisation*, M. Bravais arrive, en outre, à cette conclusion remarquable que, pour expliquer tous les phénomènes de l'hémiédrie, il suffit d'avoir égard à cette influence et aux effets qu'elle peut produire. Pour établir cette proposition, M. Bravais commence par examiner les divers genres de symétrie que peut offrir une molécule cristalline, considérée comme un système d'atomes, et représentée par un polyèdre dont ces atomes occupent les sommets; puis il recherche les lois suivant lesquelles la symétrie de la molécule se transmet en partie au système réticulaire, formé par les centres de gravité des diverses molécules dont un cristal se compose. Entrons, sur ces deux points, dans quelques détails.

M. Bravais observe d'abord qu'un polyèdre peut offrir trois éléments de symétrie, savoir : l'élément point ou *centre de symétrie*, l'élément ligne ou *axe de symétrie*, et l'élément plan ou *plan de symétrie*.

Le centre de symétrie d'un polyèdre est un point autour duquel les sommets, pris deux à deux, sont rangés sur des diagonales dont ce point est le milieu.

Une droite est un axe de symétrie d'un polyèdre, lorsqu'il suffit d'imprimer à celui-ci, autour de cette droite, une rotation mesurée par un certain angle pour substituer les divers sommets les uns aux autres. Le rapport de la circonférence au plus petit des arcs propres à mesurer la rotation est toujours un nombre entier qui détermine l'*ordre de symétrie de l'axe*. Mais ce rapport peut être l'un quelconque des nombres entiers supérieurs à l'unité; par suite, un polyèdre peut admettre, non seulement comme les systèmes réticulaires, des axes de symétrie *binaire, ternaire, quaternaire* et *sénaire*, mais encore des axes de symétrie *quinaire, septénaire*, etc. Un même polyèdre peut d'ailleurs offrir des axes de symétrie de divers ordres. Deux axes de même ordre sont de *même espèce*, lorsqu'en les substituant l'un à l'autre on ne fait qu'échanger les sommets entre eux; ils sont d'*espèces différentes* dans le cas contraire. Dans un polyèdre donné, le nombre des diverses espèces d'axes de symétrie ne peut surpasser trois, mais il peut être égal à trois. Ainsi, par exemple, dans le cube, un axe de symétrie peut être ou l'axe binaire qui joint les milieux de deux arêtes opposées, ou l'axe ternaire qui représente une diagonale et joint deux sommets opposés, ou enfin l'axe quaternaire qui joint les centres de deux faces opposées et parallèles.

Enfin, un plan de symétrie, dans un polyèdre donné, sera un plan qui divisera le polyèdre en deux parties symétriques, les sommets étant situés deux à deux à égales distances du plan sur des droites qui lui seront perpendiculaires. D'ailleurs les plans de symétrie, comme les axes de symétrie, pourront être de *même espèce* ou d'*espèces différentes;* et, dans un polyèdre donné, le nombre des diverses espèces de plans de symétrie ne pourra surpasser trois, mais il pourra être égal à trois. Ainsi, par exemple, dans le polyèdre qui aurait pour sommets les sommets d'un hexagone régulier, et deux points situés à égales distances du plan de cet hexagone sur une perpendiculaire élevée par le centre, un plan de symétrie pourrait être ou un plan passant par cette perpendiculaire et par un sommet ou par le milieu d'un des côtés de l'hexagone, ou le plan même de l'hexagone dont il s'agit.

Cela posé, M. Bravais démontre les deux propositions suivantes :

S'il existe dans un polyèdre deux plans de symétrie leur intersection sera nécessairement un axe de symétrie.

Un centre de symétrie, un plan de symétrie, et un axe de symétrie d'ordre pair sont trois éléments tellement liés entre eux, que la présence de deux de ces éléments entraîne toujours la présence du troisième.

D'ailleurs, M. Bravais appelle *axe principal* celui qui, dans un polyèdre donné, est parallèle ou perpendiculaire à tous les axes ou plans de symétrie, et désigne, sous le nom de *sphéroédriques*, les polyèdres qui offrent plusieurs axes de symétrie, dont aucun n'est un axe principal.

Cela posé, M. Bravais fait voir que les polyèdres, considérés au point de vue de la symétrie, peuvent être divisés en vingt-trois classes, réparties entre six *groupes* distincts.

Le premier groupe comprend tous les polyèdres *asymétriques*, c'est-à-dire ceux qui ne possèdent ni axes, ni plans, ni centre de symétrie;

Le deuxième groupe comprend tous les polyèdres symétriques, mais dépourvus d'axes de symétrie;

Le troisième groupe, les polyèdres symétriques pourvus d'un axe principal d'ordre pair;

Le quatrième groupe, les polyèdres symétriques pourvus d'un axe principal d'ordre impair;

Le cinquième groupe, des polyèdres sphéroédriques à quatre axes ternaires;

Et le sixième groupe, les polyèdres sphéroédriques à dix axes ternaires.

Après avoir étudié les divers genres de symétrie que peuvent offrir, d'une part, les systèmes réticulaires, d'autre part, les polyèdres qui représentent les molécules des corps, et classés les uns et les autres d'après le nombre et la nature de leurs éléments de symétrie, il restait à examiner comment et jusqu'à quel degré la symétrie d'une molécule peut être transmise par la cristallisation au système réticulaire formé par les centres de gravité des diverses molécules dont se compose un cristal. En d'autres termes, il s'agissait de résoudre le problème suivant :

Les éléments de symétrie d'une molécule étant donnés, déterminer le système cristallin que la réunion de cette molécule à d'autres de même espèce produira au moment de la cristallisation.

M. Bravais observe, à ce sujet, que la cristallisation a pour effet d'amener les diverses molécules à des positions telles, qu'il y ait équilibre, et même un équilibre stable, entre les actions exercées par les unes sur les autres. Cela posé, il fait voir que l'équilibre s'établira plus facilement dans un cristal en voie de formation, si les centres de gravité des molécules se disposent de manière que les axes et plans de symétrie de ces molécules, indéfiniment prolongés, deviennent des axes et plans de symétrie du système réticulaire formé par les centres de gravité. Il se trouve ainsi autorisé à poser la règle suivante :

Parmi les sept systèmes cristallins, les molécules d'une substance donnée adopteront celui dont la symétrie offre le plus grand nombre d'éléments communs avec la symétrie propre au polyèdre moléculaire.

Si plusieurs systèmes cristallins peuvent, en vertu de la règle énoncée, correspondre à une même molécule, ceux qui offriront un plus grand nombre d'éléments de symétrie seront en général compris parmi les autres comme cas particuliers; ils seront donc en nombre moindre, et indiqués avec une probabilité incomparablement plus faible. M. Bravais se trouve ainsi amené à énoncer encore la règle suivante :

Dans le cas où plusieurs systèmes cristallins auraient les mêmes éléments de symétrie communs avec un même polyèdre moléculaire, la cristallisation s'opérera suivant le système de moindre symétrie, c'est-à-dire suivant le système qui laissera le plus grand nombre de termes indéterminés parmi les six éléments constitutifs de son parallélépipède élémentaire.

L'emploi des deux règles générales que nous venons de rappeler permet à M. Bravais, non seulement d'expliquer les divers phénomènes d'hémiédrie observés par les cristallographes, mais encore de déterminer les lois de ces phénomènes et les circonstances dans lesquelles ils doivent se présenter; et ces lois et ces circonstances sont précisément celles que fournit l'observation elle-même. C'est encore

avec le même bonheur que, après avoir déduit de ses recherches antérieures sur les systèmes réticulaires la détermination de ce qu'on appelle la *forme cristalline* (¹), c'est-à-dire du système des faces similaires que présente un cristal, M. Bravais applique son analyse à la réduction du nombre de ces faces, produite par l'hémiédrie. Il fait voir aussi qu'on peut expliquer, par sa théorie, un assez grand nombre de cas de dimorphisme, sans être obligé d'altérer la structure interne des molécules.

En résumé, les Commissaires sont d'avis que le travail soumis à leur examen offre de nouvelles preuves de la sagacité que M. Bravais avait montrée dans ses précédentes recherches, et que ce travail contribue notablement aux progrès de la Cristallographie. Ils pensent, en conséquence, que le nouveau Mémoire de M. Bravais est très digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

486.

Mécanique moléculaire. — *Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides.*

C. R., T. XXXII, p. 323 (3 mars 1851).

Si l'on considère un corps homogène comme un système de molécules, et chaque molécule comme un système d'atomes, les coefficients renfermés dans les équations des mouvements vibratoires de ce corps cesseront d'être des quantités constantes. Concevons, pour

(¹) Parmi les théorèmes établis à ce sujet par M. Bravais, nous nous bornerons à rappeler le suivant :

« Quand une face de la forme cristalline n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à un axe de symétrie, le nombre des faces qui composent la forme est double de la somme

$$1 + N_2 + 2N_3 + 3N_4 + 5N_6,$$

N_2, N_3, N_4, N_6 étant les nombres d'axes binaires, ternaires, quaternaires et sénaires que possède le système. »

fixer les idées, que le corps soit un cristal. Les centres de gravité des diverses molécules seront les nœuds d'un système réticulaire, c'est-à-dire les points d'intersection de trois systèmes de plans parallèles à trois plans fixes; et, si l'on nomme a, b, c les longueurs des trois arêtes d'un parallélépipède élémentaire, si d'ailleurs on prend les intersections communes des plans fixes pour axes coordonnés des x, y, z, les coefficients contenus dans les équations d'équilibre ou dans les équations des mouvements vibratoires seront des fonctions périodiques de x, y, z, qui demeureront invariables quand on fera croître ou décroître x d'un multiple de a, y d'un multiple de b, z d'un multiple de c. Par suite, si l'on pose, pour abréger,

$$\alpha = \frac{2\pi}{a}, \qquad \beta = \frac{2\pi}{b}, \qquad \gamma = \frac{2\pi}{c},$$

on pourra développer chaque coefficient en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles trigonométriques

$$e^{\alpha x \mathrm{i}}, \quad e^{6 y \mathrm{i}}, \quad e^{\gamma z \mathrm{i}},$$

i étant une racine carrée de -1. Enfin, si l'on suppose les déplacements atomiques, et par suite les deux membres de chaque équation d'équilibre ou de mouvement, développés en séries du même genre, il suffira d'égaler entre eux, dans ces deux membres, les coefficients des puissances semblables des exponentielles trigonométriques, pour obtenir des équations nouvelles qui seront toutes linéaires et à coefficients constants. Ajoutons que, de ces équations nouvelles, on pourra déduire, par élimination, celles qui détermineront les valeurs moyennes des déplacements atomiques.

Il importe d'observer que, les trois paramètres a, b, c étant très petits, les trois coefficients α, 6, γ offriront des valeurs très considérables, et que, par suite, la dérivée relative à x d'un produit de la forme

$$8 e^{\pm m \alpha x \mathrm{i}},$$

m étant un nombre entier quelconque, se réduira au produit de 8 par

la dérivée relative à x de l'exponentielle $e^{\pm m\alpha x \mathrm{i}}$, et par le facteur $1 \mp \frac{\mathrm{i}}{m\alpha}\frac{D_x 8}{8}$, qui sera, en général, très peu différent de l'unité. En remplaçant ce dernier facteur par l'unité, on n'aura généralement à craindre que des erreurs insensibles, et l'on simplifiera notablement les calculs.

En partant de ces principes, on trouvera, pour exprimer l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides, des équations qui ne pourront devenir homogènes et isotropes, sans acquérir précisément la forme de celles que j'ai obtenues dans la théorie de la lumière. Par suite, si l'on nomme

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

les valeurs moyennes des déplacements infiniment petits d'un atome mesurés au bout du temps t, parallèlement à trois axes rectangulaires des x, y, z, les mouvements vibratoires d'un cristal isotrope seront représentés, dans le cas le plus général, par trois équations de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} D_t^2 \xi = E\xi + F D_x \upsilon + G(D_z \eta - D_y \zeta), \\ D_t^2 \eta = E\eta + F D_y \upsilon + G(D_y \zeta - D_x \xi), \\ D_t^2 \zeta = E\zeta + F D_z \upsilon + G(D_x \xi - D_x \eta), \end{cases}$$

υ étant la dilatation du volume, déterminée par l'équation

$$(2) \qquad \upsilon = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta,$$

et E, F, G étant des fonctions entières de la somme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Pour que les formules (1) se réduisent à des équations homogènes et du second ordre, il est nécessaire que G s'évanouisse, et qu'en outre les fonctions E, F soient de la forme

$$E = h(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2), \qquad F = H,$$

h, H étant des quantités constantes. Alors, à la place des formules (1), on obtient les suivantes

$$
(3) \qquad \begin{cases} D_t^2\xi = h(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\xi + HD_x\upsilon, \\ D_t^2\eta = h(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\eta + HD_y\upsilon, \\ D_t^2\zeta = h(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\zeta + HD_z\upsilon, \end{cases}
$$

entièrement semblables à celles auxquelles j'étais parvenu dans les *Exercices de Mathématiques*.

En terminant cette Note, j'indiquerai un moyen simple d'obtenir, quand elles peuvent être réduites à des fonctions différentielles de ξ, η, ζ, les composantes

$$
\begin{matrix} \mathcal{A}, & \mathcal{F}, & \mathcal{E}, \\ \mathcal{F}, & \mathcal{B}, & \mathcal{D}, \\ \mathcal{E}, & \mathcal{D}, & \mathcal{C} \end{matrix}
$$

des pressions supportées, en un point donné P d'un corps isotrope, et du côté des coordonnées positives, par trois faces parallèles aux plans des yz, des zx et des xy, supposés perpendiculaires l'un à l'autre. En effet, soit p la pression supportée au point P par un élément s de surface, perpendiculaire à la droite qui forme avec les demi-axes des x, y, z positives les angles dont les cosinus sont $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, et nommons δ l'angle formé par la direction de cette pression avec une normale à l'élément de surface s. On aura, d'après ce qui a été dit dans le second Volume des *Exercices de Mathématiques* (t. II, p. 50) (¹),

$$
(4) \qquad p\cos\delta = \mathcal{A}\mathfrak{a}^2 + \mathcal{B}\mathfrak{b}^2 + \mathcal{C}\mathfrak{c}^2 + 2\mathcal{D}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + 2\mathcal{E}\mathfrak{c}\mathfrak{a} + 2\mathcal{F}\mathfrak{a}\mathfrak{b}.
$$

D'autre part, si l'élément de surface s est supposé offrir des dimensions qui soient très considérables quand on les compare aux distances qui séparent deux molécules voisines, et si, dans cette hypothèse, la pression p supportée en un point P de l'élément s varie très peu quand le point P vient à subir un très petit déplacement, les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$; $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$; $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ des pressions supportées au point P par trois plans parallèles aux plans coordonnés des yz, des zx et des xy, pourront être généralement considérées comme des fonctions

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 70.

linéaires des déplacements ξ, η, ζ et de leurs dérivées des divers ordres. Cela posé, le second membre de l'équation (4) pourra être considéré comme une fonction de

$$
\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad D_x, \quad D_y, \quad D_z \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{c},
$$

qui sera linéaire par rapport à ξ, η, ζ, entière par rapport à D_x, D_y, D_z; enfin, homogène et du second degré par rapport à $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Cette fonction, devant d'ailleurs être isotrope, se réduira nécessairement, d'après ce qui a été dit ailleurs, à une fonction entière des sommes

$$
\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c}\zeta, \qquad D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta = \upsilon, \qquad \mathfrak{a}D_x + \mathfrak{b}D_y + \mathfrak{c}D_z,
$$
$$
\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2, \qquad D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,
$$
$$
\mathfrak{a}(D_z\eta - D_y\zeta) + \mathfrak{b}(D_x\zeta - D_z\xi) + \mathfrak{c}(D_y\xi - D_x\eta),
$$

qui sera linéaire par rapport à ξ, η, ζ, et du second degré par rapport à $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Par suite, il faudra que l'on ait

$$
(5) \qquad \begin{cases} p\cos\delta = k(\mathfrak{a}D_x + \mathfrak{b}D_y + \mathfrak{c}D_z)(\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c}\zeta) + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)(K\upsilon + I) \\ \qquad + J(\mathfrak{a}D_x + \mathfrak{b}D_y + \mathfrak{c}D_z)[\mathfrak{a}(D_z\eta - D_y\zeta) + \mathfrak{b}(D_x\zeta - D_z\xi) + \mathfrak{c}(D_y\xi - D_x\eta)], \end{cases}
$$

I étant une quantité constante, et k, K, J étant des fonctions entières de $D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$.

Cela posé, comme les valeurs de $p\cos\delta$, fournies par les équations (4) et (5), devront être égales entre elles, quelles que soient les valeurs des rapports $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$, elles devront encore être égales pour des valeurs quelconques attribuées à $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. On aura donc, par suite,

$$
(6) \qquad \mathcal{A} = kD_x\xi + K\upsilon + I + JD_x(D_z\eta - D_y\zeta), \qquad \ldots
$$

et

$$
(7) \qquad \mathcal{D} = \tfrac{1}{2}k(D_z\eta + D_y\zeta) + \tfrac{1}{2}J[D_y(D_y\xi - D_x\eta) + D_z(D_x\zeta - D_z\xi)], \qquad \ldots.
$$

Si, dans une première approximation, on néglige les termes qui renferment des dérivées de ξ, η, ζ d'un ordre supérieur au premier, les formules (6) et (7) se réduiront aux suivantes

$$
(8) \qquad \mathcal{A} = kD_x\xi + K\upsilon + I, \qquad \mathcal{B} = kD_y\eta + K\upsilon + I, \qquad \mathcal{C} = kD_z\zeta + K\upsilon + I,
$$
$$
(9) \qquad \mathcal{D} = \tfrac{1}{2}k(D_z\eta + D_y\zeta), \qquad \mathcal{E} = \tfrac{1}{2}k(D_x\zeta + D_z\xi), \qquad \mathcal{F} = \tfrac{1}{2}k(D_y\xi + D_x\eta),
$$

k, K, I étant des coefficients constants, et deviendront ainsi semblables à celles que j'ai obtenues dans les *Exercices de Mathématiques* (t. III, p. 327) (¹).

487.

Physique. — *Rapport sur divers Mémoires de M.* Wertheim.

C. R., T. XXXII, p. 326 (3 mars 1851).

L'Académie a soumis à notre examen divers Mémoires de M. Wertheim, qui ont pour objet l'équilibre des corps solides homogènes, la propagation du mouvement dans ces corps, la torsion des verges homogènes, les vibrations des plaques circulaires, et la vitesse du son dans les liquides. La pensée dominante qui a dirigé l'auteur, dans les expériences dont ces Mémoires offrent le tableau et dans les calculs qu'il y exécute, a été de déterminer les coefficients que doivent renfermer les formules générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides homogènes et isotropes, ou plutôt le rapport entre les deux coefficients contenus dans ces formules. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Si l'on considère un corps solide et homogène comme un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, on trouvera, pour représenter l'équilibre ou le mouvement de ce corps, trois équations distinctes. Ces trois équations, que Navier et d'autres auteurs avaient obtenues sous des formes restreintes par certaines conditions qu'ils s'étaient imposées, ont été plus tard données par l'un de nous, dans toute leur généralité. On a pu voir alors qu'elles renferment un grand nombre de coefficients, qui se trouvent aussi contenus dans les valeurs générales des composantes des pressions supportées par trois plans rectangulaires, et relatives

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 379.

soit à l'état d'équilibre, soit à l'état de mouvement. Toutefois ces divers coefficients se réduisent à deux, lorsque, en supposant le système isotrope, on réduit les équations d'équilibre ou de mouvement à des équations aux dérivées partielles, homogènes et du second ordre, en développant les différences finies des déplacements atomiques en séries, et en négligeant, dans les développements obtenus, les termes qui renferment des dérivées d'un ordre supérieur au second.

C'est à déterminer, à l'aide de l'observation, le rapport Θ des deux coefficients que contiennent les équations de l'équilibre ou du mouvement, devenues homogènes et isotropes, que s'est appliqué M. Wertheim dans son *Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes*. Dans les équations de Navier, le rapport Θ se réduisait au nombre 2. D'après les expériences faites par M. Wertheim sur des parallélépipèdes de caoutchouc, ce rapport est plus voisin de l'unité que du nombre 2, quand la dilatation est faible. On pouvait donc croire que le nombre 2 devait être remplacé par le nombre 1. Mais il convenait de vérifier cette induction à l'aide d'expériences plus précises que celles auxquelles le caoutchouc peut être soumis. M. Wertheim y est parvenu, en suivant une méthode indiquée par M. Regnault, et qui consiste dans l'emploi de cylindres creux, dont la cavité intérieure communique avec un tube capillaire de verre. On remplit l'appareil d'eau privée d'air, et l'on mesure les allongements que des charges successivement croissantes font subir au cylindre, ainsi que l'abaissement de l'eau dans le tube capillaire. On connaît de cette manière le changement de volume de la cavité intérieure du cylindre, et l'on en déduit aisément, à l'aide d'une formule donnée dans les *Exercices de Mathématiques*, le rapport cherché.

Le rapport Θ une fois déterminé, on déduit de cette détermination diverses conséquences importantes relatives à la propagation du mouvement dans les corps solides, aux vibrations des plaques circulaires, aux vibrations longitudinales et aux vibrations tournantes des verges cylindriques, etc. On reconnaît, par exemple, que le rapport entre le nombre n des vibrations longitudinales et le rapport n' des vibrations tournantes, dans les verges cylindriques, doit être $\sqrt{\frac{8}{3}} = 1,633, \ldots$, tandis qu'il devrait être $1,581, \ldots$ si l'on supposait $\Theta = 2$. Or l'expérience a donné à Savart, pour valeur de $\frac{n}{n'}$, le nombre $1,666, \ldots$, qui diffère très peu de $1,633, \ldots$ et confirme ainsi les conclusions auxquelles est arrivé M. Wertheim. Ajoutons que M. Wertheim ayant lui-même exécuté de nouvelles expériences sur des verges de fer, de laiton et d'acier fondu, a obtenu pour valeurs de $\frac{n}{n'}$ les nombres $1,635$, $1,621$, $1,636$, qui tous trois coïncident sensiblement avec le nombre $\sqrt{\frac{8}{3}} = 1,633, \ldots$.

Il suit encore de la théorie des corps élastiques qu'une masse illimitée peut propager deux espèces de vibrations, les unes longitudinales, les autres transversales, auxquelles correspondent deux espèces d'ondes dont les vitesses seront entre elles dans le rapport de $\sqrt{3}$ à l'unité, si l'on suppose $\Theta = 2$, et dans le rapport de 2 à 1, si l'on suppose $\Theta = 1$. Or, en faisant vibrer fortement une verge de verre ou de métal de forme quelconque, on obtient, outre le son longitudinal et fondamental, un autre son qui est l'octave grave du premier, et qui est produit par des vibrations transversales. Ce phénomène paraît encore venir à l'appui des conclusions de M. Wertheim.

La seule objection grave que l'on ait opposée à ces conclusions est la suivante.

Si le rapport Θ se réduit effectivement à l'unité, cette réduction doit subsister, quand la pression extérieure, dont ce rapport est supposé indépendant, s'évanouit. Or les formules générales qui ont été données comme propres à représenter les composantes des pressions supportées dans l'état d'équilibre par un plan quelconque ne fournissent des pressions nulles que dans le cas où l'on suppose $\Theta = 2$.

La difficulté que cette objection présente semble insoluble au premier abord. Mais il importe d'observer que les formules qui expriment les conditions d'équilibre, ou les mouvements vibratoires d'un corps solide, et celles qui fournissent les composantes des pressions intérieures, supposent chaque molécule réduite à un seul point. Si l'on suppose, au contraire, chaque molécule composée de plusieurs atomes, alors, suivant la remarque faite par l'un de nous, dès l'année 1839, les coefficients compris dans les équations des mouvements vibratoires cesseront d'être des quantités constantes, et deviendront, par exemple si le corps est un cristal, des fonctions périodiques des coordonnées. Or, en développant ces fonctions et les inconnues elles-mêmes suivant les puissances ascendantes et descendantes des fonctions les plus simples de cette espèce, représentées par des exponentielles trigonométriques convenablement choisies, on obtiendra des équations nouvelles desquelles on déduira, par élimination, celles qui détermineront les valeurs moyennes des inconnues. D'ailleurs les équations définitives, trouvées de cette manière, seront encore des équations linéaires et à coefficients constants, qui ne pourront devenir isotropes et homogènes, sans reprendre la forme obtenue dans la première hypothèse. Mais le rapport entre les deux coefficients que renfermeront alors les équations dont il s'agit ne deviendra pas nécessairement égal à 2, quand les pressions intérieures s'évanouiront, et l'on verra, par suite, disparaître l'objection proposée.

Une des conséquences qu'entraîne la réduction du rapport Θ à l'unité, c'est que la vitesse du son propagé dans une masse solide illimitée et la vitesse du son propagé linéairement dans un filet ou dans une verge de même matière sont entre elles dans le rapport de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ à l'unité. M. Wertheim a trouvé que ce rapport subsistait quand on remplace les solides par des liquides; et, après avoir déterminé expérimentalement la vitesse linéaire du son dans une masse d'eau limitée, il lui a suffi de multiplier cette vitesse par $\sqrt{\frac{3}{2}}$, pour obtenir la vitesse du son dans une masse d'eau illimitée, et reproduire à très peu près le résultat auquel MM. Colladon et Sturm étaient parvenus par une voie toute différente.

En résumé, les Commissaires pensent que, dans les nouveaux Mémoires soumis à leur examen, M. Wertheim, après avoir donné une solution expérimentale d'une question importante qui intéresse à la fois les physiciens et les géomètres, a discuté cette question avec la sagacité qu'il avait déjà montrée dans de précédentes recherches. En conséquence, la Commission est d'avis que ces Mémoires sont dignes d'être approuvés par l'Académie et insérés dans le *Recueil des Savants étrangers*.

488.

Analyse. — *Application du Calcul des résidus à la décomposition des fonctions transcendantes en facteurs simples* (suite).

C. R., T. XXXII, p. 354 (17 mars 1851).

Soient, comme à la page 314, x, y les coordonnées rectangulaires, r, p les coordonnées polaires, et

$$z = x + y\mathrm{i} = r e^{p\mathrm{i}}$$

la coordonnée imaginaire d'un point mobile Z. Supposons que ce point soit renfermé, avec l'origine O des coordonnées, dans une certaine aire S, terminée par un certain contour PQR. Soit, d'ailleurs, $\varphi(z)$ une fonction de z qui demeure toujours continue, quand elle ne devient pas infinie, et admettons encore que le rapport différentiel de la fonction $\varphi(z)$ à la variable z dépende uniquement des variables réelles x, y. Enfin, en supposant les équations

$$\varphi(z) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0, \tag{2}$$

résolues par rapport à z, désignons par la lettre m le nombre des racines nulles de l'équation (1); puis nommons $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, ... celles des autres racines de l'équation (1), et z', z'', z''', ... celles des racines de l'équation (2), qui représentent les coordonnées imagi-

naires de points d'arrêt situés dans l'intérieur de l'aire S. Si chacune des racines $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, ..., z', z'', z''', ... est une racine simple, et si l'on pose, pour abréger,

$$H = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2\ldots m},$$

l'équation (9) de la page 268 donnera

$$\varphi(z) = H z^m \frac{\left(1 - \frac{z}{z_{\prime}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{\prime\prime}}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{z}{z'}\right)\left(1 - \frac{z}{z''}\right)\cdots} e^{-V}, \tag{3}$$

la valeur de V étant déterminée par la formule

$$V = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \,\mathrm{l}\left(1 - \frac{z}{v}\right) dv, \tag{4}$$

dans laquelle l'intégrale relative à v s'étend à tous les points du contour PQR qu'un point mobile est censé parcourir avec un mouvement de rotation direct autour de l'aire S. Il y a plus : pour étendre la formule (3) au cas où les équations (1) ou (2) offrent des racines multiples, il suffira d'admettre que, dans cette formule, plusieurs des racines $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, ..., ou z', z'', z''', ... peuvent devenir égales entre elles.

Si le module de v, c'est-à-dire le rayon vecteur mené de l'origine O des coordonnées à un point quelconque du contour PQR surpasse constamment le module de z, alors

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{z}{v}\right)$$

sera développable suivant les puissances ascendantes de z, et, en posant, pour abréger,

$$h_n = \frac{1}{2\pi n\mathrm{i}} \int \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \frac{dv}{v^n}, \tag{5}$$

on trouvera

$$V = -h_1 z - h_2 z^2 - h_3 z^3 - \ldots. \tag{6}$$

Concevons à présent que le contour PQR soit remplacé par un contour semblable, mais plus étendu $\mathfrak{PQR}$, et que, dans le passage du premier contour au second, le rayon vecteur correspondant à un angle polaire donné varie dans le rapport de 1 à k. Alors, à la place de la formule (5), on obtiendra la suivante :

$$h_n = \frac{1}{2n\pi i} \frac{1}{k^{n-1}} \int \frac{\varphi'(kv)}{\varphi(kv)} \frac{dv}{v^n}. \tag{7}$$

Cela posé, si, en attribuant au nombre k des valeurs infiniment grandes, on peut toujours les choisir de manière que le rapport

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

reste fini en chaque point du contour $\mathfrak{PQR}$, ces valeurs de k rendront infiniment petites les valeurs qu'on obtiendra pour h_n, quand on supposera, dans la formule (7), $n > 1$; et, en nommant h la valeur de h_1 tirée de la même formule, c'est-à-dire, en posant

$$h = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi'(kv)}{\varphi(kv)} \frac{dv}{v}, \tag{8}$$

on trouvera, pour $k = \infty$,

$$V = -hz; \tag{9}$$

par conséquent la formule (3) donnera

$$\varphi(z) = Hz^m \frac{\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdots}{\left(1-\frac{z}{z'}\right)\left(1-\frac{z}{z''}\right)\cdots} e^{hz}. \tag{10}$$

Si la fonction $\varphi(z)$ est paire ou impaire, c'est-à-dire, en d'autres termes, si elle satisfait ou à la condition

$$\varphi(z) = \varphi(-z),$$

ou à la condition

$$\varphi(z) = -\varphi(-z),$$

alors, dans la formule (8), le rapport

$$\frac{\varphi'(kv)}{\varphi(kv)}$$

sera une fonction impaire de v, et, en faisant coïncider le contour PQR avec une courbe ou avec un polygone qui ait pour centre l'origine O, on verra disparaître la constante h, représentée par une intégrale dont les éléments pris deux à deux seront égaux, au signe près, mais affectés de signes contraires. Cette constante étant réduite à zéro, l'équation (10) donnera simplement

$$\varphi(z) = Hz^m \frac{\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdots}{\left(1-\frac{z}{z'}\right)\left(1-\frac{z}{z''}\right)\cdots}. \tag{11}$$

Cette dernière formule comprend, comme cas particulier, l'équation (18) de la page 324.

Si, en attribuant à la constante k une valeur infiniment grande, on peut choisir cette valeur de manière que le rapport

$$\frac{\varphi'(z)}{z^n \varphi(z)}$$

conserve en chaque point du contour $\mathfrak{PQR}$ une valeur finie, alors dans la série

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_n, \quad h_{n+1}, \quad \ldots,$$

les termes qui suivront h_n s'évanouiront pour $k = \infty$, et comme on aura par suite

$$V = h - h_1 z - h_2 z^2 - \ldots - h_n z^n, \tag{12}$$

il est clair qu'à la place de la formule (10) on obtiendra la suivante :

$$\varphi(z) = Hz^m \frac{\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdots}{\left(1-\frac{z}{z'}\right)\left(1-\frac{z}{z''}\right)\cdots} e^{h_1 z + h_2 z^2 + \ldots + h_n z^n}. \tag{13}$$

Dans d'autres articles je montrerai le parti qu'on peut tirer des formules (10), (11), (13) pour établir avec facilité, non seulement des théorèmes déjà connus, et en particulier ceux qui sont relatifs aux fonctions elliptiques, mais encore une multitude d'autres propositions dignes de remarque.

489.

Analyse. — *Mémoire sur la sommation des termes de rang très élevé dans une série simple ou multiple.*

C. R., T. XXXII, p. 389 (24 mars 1851).

§ I. — *Formules générales.*

Quelques propositions établies dans le Tome II des *Exercices de Mathématiques* (¹) permettent de calculer approximativement, dans certains cas, une somme de termes consécutifs de rang très élevé dans une série simple, et transforment la valeur approchée d'une telle somme en une intégrale définie. D'ailleurs, pour opérer de semblables transformations, il suffit de décomposer le terme général d'une série simple en deux facteurs dont l'un converge vers une limite finie, l'autre étant une puissance d'un nombre très considérable. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x. Supposons d'ailleurs qu'il soit possible d'attribuer au nombre l une valeur telle, que le produit

$$x^l f(x)$$

acquière une valeur finie, distincte de zéro, pour des valeurs réelles et infiniment grandes de x. Alors, N étant un nombre très considérable, le produit

$$\mathrm{N}^l f(\mathrm{N}x)$$

se réduira sensiblement à une certaine fonction $\varphi(x)$ de la variable x.

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 268 et suivantes.

Cela posé, concevons que $\nu_{\prime}$, $\nu_{\prime\prime}$ étant deux quantités réelles de même signe, on nomme n l'un quelconque des nombres entiers compris entre les limites

$$n = \nu_{\prime}\mathrm{N}, \qquad n = \nu_{\prime\prime}\mathrm{N}$$

et

$$n_{\prime}, \quad n_{\prime}+1, \quad n_{\prime}+2, \quad \ldots, \quad n_{\prime\prime}$$

ces mêmes nombres. Enfin nommons s la somme des termes correspondants à ces nombres dans la série qui a pour terme général $f(n)$, en sorte qu'on ait

$$s = \overset{n=n_{\prime\prime}}{\underset{n=n_{\prime}}{\mathrm{S}}} f(n); \tag{1}$$

et posons encore

$$n = \nu\mathrm{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathrm{N}} = \alpha.$$

On aura sensiblement, pour de très grandes valeurs de N,

$$\mathrm{N}^l f(n) = \varphi(\nu),$$

par conséquent

$$s = \mathrm{N}^{1-l}\,\mathrm{S}[\alpha\,\varphi(\nu)], \tag{2}$$

la fonction qu'indique le signe S s'étendant à toutes les valeurs de ν comprises dans la suite

$$\frac{n_{\prime}}{\mathrm{N}}, \quad \frac{n_{\prime}}{\mathrm{N}}+\alpha, \quad \frac{n_{\prime}}{\mathrm{N}}+2\alpha, \quad \ldots, \quad \frac{n_{\prime\prime}}{\mathrm{N}}. \tag{3}$$

D'ailleurs, dans l'hypothèse admise, N venant à croître indéfiniment, le premier et le dernier terme de la suite (3) s'approcheront indéfiniment des limites $\nu_{\prime}$, $\nu_{\prime\prime}$, et la somme

$$\mathrm{S}[\alpha\,\varphi(\nu)]$$

de la limite

$$\int_{\nu_{\prime}}^{\nu_{\prime\prime}} \varphi(\nu)\,d\nu.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient* N *un nombre infiniment grand, et* $\nu_{\prime}$, $\nu_{\prime\prime}$ *deux quantités finies, affectées du même signe. Supposons d'ailleurs qu'il soit* *possible de choisir le nombre l de manière que, pour des valeurs réelles et infiniment grandes de x, le produit*

$$x^l f(x)$$

acquière une valeur finie distincte de zéro, et nommons $\varphi(x)$ ce que devient le produit $N^l f(Nx)$ quand N devient infini. Enfin nommons $n_{,}$, $n_{,,}$ ceux des entiers compris entre les limites $\nu_{,}N$, $\nu_{,,}N$ qui sont les plus rapprochés de ces limites. Le rapport de la somme

$$\overset{n=n_{,,}}{\underset{n=n_{,}}{\mathrm{S}}} f(n)$$

à la quantité N^{1-l} se réduira sensiblement, pour de très grandes valeurs de N, à l'intégrale définie

$$\int_{\nu_{,}}^{\nu_{,,}} \varphi(\nu)\, d\nu.$$

On établira de la même manière la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Soient x, y deux variables réelles, $f(x, y)$ une fonction de ces mêmes variables, et N un nombre infiniment grand. Supposons d'ailleurs qu'il soit possible de choisir l'exposant l de manière que, pour des valeurs réelles et infiniment grandes de x, y, le produit*

$$N^l f(Nx, Ny)$$

conserve une valeur finie, et nommons $\varphi(x, y)$ la limite dont cette valeur s'approche indéfiniment pour des valeurs croissantes de N. Soit encore A une aire terminée dans le plan des xy par un certain contour PQR, ou comprise entre deux contours pqr, PQR, et admettons que l'origine des coordonnées soit un point extérieur à l'aire A. Enfin, m, n étant deux nombres entiers quelconques, construisons la série double qui a pour terme général $f(m, n)$, et nommons

$$s = \mathrm{S} f(m, n)$$

la somme des termes de cette série correspondants à celles des valeurs de m et n qui sont de la forme

$$m = \mu N, \qquad n = \nu N,$$

μ et ν étant les coordonnées d'un point situé dans l'intérieur de l'aire A. Le rapport de la somme s à la quantité N^{2-l} se réduira sensiblement à l'intégrale double

$$\iint \varphi(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu,$$

étendue à tous les points de l'aire A.

Il est bon d'observer que la série qui a pour terme général $f(m, n)$ se transformera en une série simple, si l'on attribue successivement au nombre entier n diverses valeurs, en laissant m invariable. Concevons, pour fixer les idées, que, m étant de la forme μN, et N très considérable, la somme

$$s = \mathrm{S} f(m, n)$$

s'étende à toutes les valeurs entières de n comprises entre les limites $\nu_1 N$, $\nu_2 N$, les quantités ν_1, ν_2 pouvant être affectées du même signe ou de signes contraires. Alors, en raisonnant comme dans le théorème I, on trouvera sensiblement pour de grandes valeurs de N

$$\frac{s}{N^{1-l}} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \varphi(\mu, \nu)\, d\nu. \tag{4}$$

Le théorème II pourrait être évidemment étendu au cas où il s'agirait, non plus d'une série double, mais d'une série triple, quadruple, etc. Seulement alors on devrait remplacer les sommes ou intégrales doubles par des sommes ou intégrales triples, quadruples, etc., la quantité N^{2-l} par la quantité N^{3-l} ou N^{4-l}, ..., et l'aire A par ce que nous avons nommé dans d'autres Mémoires un *lieu analytique*.

Si l'on suppose dans le théorème I, ou dans la formule (4), $l = 1$, on trouvera

$$s = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \varphi(\nu)\, d\nu \tag{5}$$

ou

$$s = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \varphi(\mu, \nu)\, d\nu. \tag{6}$$

Pareillement, si l'on suppose dans le second théorème, $\iota = 2$, on trouvera

$$(7) \qquad s = \iint \varphi(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les points de l'aire A; etc.

Les formules (5) et (7) comprennent, comme cas particuliers, celles que j'ai données dans le Tome II des *Exercices de Mathématiques*, et celles qui ont été obtenues en Angleterre par M. Cayley, en Allemagne par M. Eisenstein.

Si, pour fixer les idées, on suppose, dans le théorème I,

$$f(x) = \frac{1}{ax + c},$$

les constantes a, c étant réelles ou imaginaires, on trouvera

$$\varphi(x) = \frac{1}{ax},$$

et la formule (5) donnera

$$(8) \qquad s = \frac{1}{a}\int_{\nu_{\prime}}^{\nu_{\prime\prime}} \frac{\nu}{d\nu} = \frac{1}{a}\,\mathrm{l}\left(\frac{\nu_{\prime\prime}}{\nu_{\prime}}\right).$$

Pareillement, si l'on suppose

$$f(x, y) = \frac{1}{ax + by + c},$$

a, b, c étant trois constantes et le rapport $\frac{a}{b}$ étant imaginaire, on trouvera

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{ax + by},$$

et la formule (6) donnera

$$(9) \qquad s = \frac{1}{b}\int_{\nu_{\prime}}^{\nu_{\prime\prime}} \frac{d\nu}{\nu + \frac{a}{b}\mu},$$

$$(10) \qquad s = \frac{\mathrm{l}\left(\nu_{\prime\prime} + \frac{a}{b}\mu\right) - \mathrm{l}\left(\nu_{\prime} + \frac{a}{b}\mu\right)}{b}.$$

Enfin, si l'on suppose

$$f(x, y) = \frac{1}{(ax + by + c)^2},$$

on aura

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{(ax + by)^2},$$

et la formule (7) donnera

$$(11) \qquad s = \iint \frac{d\mu\, d\nu}{(a\mu + b\nu)^2},$$

l'intégrale double étant étendue à tous les points de l'aire A. Si l'aire A est comprise entre deux contours pqr, PQR, et si l'on transforme les coordonnées μ, ν, supposées rectangulaires, en coordonnées polaires, à l'aide d'équations de la forme

$$\mu = r\cos p, \qquad \nu = r\sin p,$$

alors, en nommant $\nu_{\prime}$, $\nu_{\prime\prime}$ les valeurs de ν correspondantes aux deux contours pqr, PQR, on obtiendra pour $\nu_{\prime}$, $\nu_{\prime\prime}$ deux fonctions déterminées de l'angle polaire p, et l'on tirera de la formule (11), avec M. Cayley,

$$(12) \qquad s = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{l}(\nu_{\prime\prime}) - \mathrm{l}(\nu_{\prime})}{(a\cos p + b\sin p)^2}\, dp.$$

On aura donc

$$(13) \qquad s = 0,$$

si le rapport $\frac{\nu_{\prime\prime}}{\nu_{\prime}}$ est constant, c'est-à-dire si les deux courbes sont semblables l'une à l'autre.

Soient d'ailleurs $s_{\prime}$, $s_{\prime\prime}$ les valeurs de s que fournirait la formule (11), si l'on prenait successivement pour A l'aire renfermée dans le contour pqr, puis l'aire renfermée dans le contour PQR. La valeur de chacune des intégrales $s_{\prime}$, $s_{\prime\prime}$ dépendra généralement de l'ordre dans lequel seront effectuées les deux intégrations relatives aux variables μ, ν. Mais, si l'on suppose que cet ordre reste le même dans la détermination de $s_{\prime}$ et de $s_{\prime\prime}$, alors à la formule (11) ou (12), on pourra substituer la suivante :

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\prime\prime} - \mathrm{S}_{\prime}. \tag{14}$$

Cette dernière formule sera d'un usage très commode; elle fournira, par exemple, avec une grande facilité, la valeur de S, si, le contour pqr étant réduit à une circonférence du cercle, le contour PQR est un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes des x et des y.

§ II. — *Application des formules obtenues dans le premier paragraphe.*

Soit $z = x + yi$ la coordonnée imaginaire d'un point mobile Z; soit encore $\varphi(z)$ une fonction de z qui demeure continue tant qu'elle ne devient pas infinie, et admettons que le rapport différentiel de $\varphi(z)$ à z dépende uniquement des variables réelles x, y. Enfin, en supposant les équations

$$\varphi(z) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0 \tag{2}$$

résolues par rapport à z, désignons par l le nombre des racines nulles de l'équation (1); puis nommons $z_\prime$, $z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$, ... celles des autres racines de l'équation (1), et z', z'', z''', ... celles des racines de l'équation (2) qui représentent les coordonnées imaginaires de points situés dans l'intérieur d'une certaine aire S terminée par un certain contour PQR. Si ce contour peut être choisi de manière que, tous ses points étant situés à de très grandes distances de l'origine des coordonnées, le rapport $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ conserve en chacun d'eux une valeur finie, on aura (page 352),

$$\varphi(z) = H z^m \frac{\left(1 - \frac{z}{z_\prime}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{\prime\prime}}\right)\cdots}{\left(1 - \frac{z}{z'}\right)\left(1 - \frac{z}{z''}\right)\cdots} e^{hz}, \tag{3}$$

la valeur de H étant

$$H = \frac{\varphi^{(l)}(0)}{1.2\ldots l}, \tag{4}$$

et la valeur de h étant déterminée approximativement par la formule

$$h = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\frac{dz}{z}, \tag{5}$$

dans laquelle l'intégration s'étend à tous les points du contour PQR qu'un rayon vecteur mobile est supposé parcourir avec un mouvement de rotation direct autour de l'aire S. D'ailleurs la formule (5) sera d'autant plus exacte que le contour dont il s'agit sera plus étendu, et deviendra rigoureuse si l'on substitue au second membre la limite vers laquelle il converge, tandis que la distance de chaque point du contour à l'origine des coordonnées devient infiniment grande.

Concevons à présent que l'on désigne par a, b deux constantes dont le rapport soit imaginaire, et supposons que la fonction $\varphi(z)$, étant doublement périodique, ne varie pas quand la variable z croît de la période a ou de la période b. Soient d'ailleurs

$$\mu_\prime, \quad \nu_\prime; \quad \mu_{\prime\prime}, \quad \nu_{\prime\prime}$$

quatre quantités finies, les deux premières négatives, les deux dernières positives, et

$$m, \quad n$$

deux quantités entières positives, nulles ou négatives. Enfin, supposons que, N étant un nombre infiniment grand, on désigne par $m_\prime$ et $m_{\prime\prime}$ ou par $n_\prime$ et $n_{\prime\prime}$ celles des valeurs de m ou de n, qui, étant renfermées entre les limites $\mu_\prime \mathrm{N}$, $\mu_{\prime\prime}\mathrm{N}$ ou entre les limites $\nu_\prime \mathrm{N}$, $\nu_{\prime\prime}\mathrm{N}$ se rapprochent le plus de ces mêmes limites. On pourra, en désignant par ρ et ς deux quantités finies, comprises entre les limites 0, 1, choisir ces quantités de manière que, pour une valeur de z de la forme

$$z = a(m + \rho) + b(n + \varsigma), \tag{6}$$

le rapport $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ conserve une valeur finie, et, en nommant $z_\prime$, $z_{\prime\prime}$ les valeurs de z que fournira l'équation (6) quand on y posera successivement $n = n_{,}$, $n = n_{,,}$, on trouvera

$$\int_{z_{,}}^{z_{,,}} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \frac{dz}{z} = \int_{z_{,}}^{z_{,}+b} \mathfrak{z} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz, \tag{7}$$

$\mathfrak{z}$ étant une fonction de z déterminée par la formule

$$\mathfrak{z} = \overset{n=n_{,,}-n_{,}-1}{\underset{n=0}{\mathrm{S}}} \frac{1}{z+nb}. \tag{8}$$

Comme on aura d'ailleurs pour $z = z_{,}$

$$\mathfrak{z} = \overset{n=n_{,,}-1}{\underset{n=n_{,}}{\mathrm{S}}} \frac{1}{a(m+\rho)+b(n+\varsigma)},$$

la formule (10) du § I donnera sensiblement, pour de grandes valeurs de N, quand on supposera $z = z_{,}$, ou même $z = z_{,} + \theta b$, θ étant compris entre les limites 0, 1,

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathrm{l}\left(\nu_{,,} + \frac{a}{b}\mu\right) - \mathrm{l}\left(\nu_{,} + \frac{a}{b}\mu\right)}{b}.$$

En conséquence, la formule (18) donnera sensiblement, pour de grandes valeurs de N,

$$\int_{z_{,}}^{z_{,,}} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \frac{dz}{z} = \frac{\mathrm{l}\left(\nu_{,,} + \frac{a}{b}\mu\right) - \mathrm{l}\left(\nu_{,} + \frac{a}{b}\mu\right)}{b} \int_{z_{,}}^{z_{,}+b} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{a\rho}^{a\rho+b} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz;$$

λ sera, au signe près, un nombre entier, et l'on trouvera

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z_{,}}^{z_{,,}} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \frac{dz}{z} = \lambda \frac{\mathrm{l}\left(\nu_{,,} + \frac{a}{b}\mu\right) - \mathrm{l}\left(\nu_{,} + \frac{a}{b}\mu\right)}{b}. \tag{9}$$

Cela posé, concevons que le contour PQN de l'aire S se réduise au

système de quatre droites correspondantes aux quatre valeurs de z qu'on obtient en posant successivement dans la formule (6)

$$n = n_{,}, \qquad n = n_{,,},$$
$$m = m_{,}, \qquad m = m_{,,}.$$

La valeur de h déterminée par l'équation (5) sera la somme de quatre intégrales dont les valeurs se déduiront immédiatement de l'équation (9) et de celle qu'on en tire quand on échange entre elles les lettres μ, ν et les périodes a, b.

Si l'on suppose, en particulier, $m = -m_{,,}$, $n_{,} = -n_{,,}$ et $\frac{m_{,,}}{n_{,,}} = 0$, ou $\frac{1}{0}$, on trouvera $h = 0$, et, par suite, l'équation (3) sera réduite à

$$\varphi(z) = Hz^m \frac{\left(1-\frac{z}{z_{,}}\right)\left(1-\frac{z}{z_{,,}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{z}{z'}\right)\left(1-\frac{z}{z''}\right)\cdots}.$$

Cette conclusion s'accorde avec les résultats obtenus par Abel et par MM. Cayley, Eisenstein, etc.

490.

ANALYSE. — *Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M.* HERMITE, *et relatif aux fonctions à double periode.*

C. R., T. XXXII, p. 442 (31 mars 1851).

Le Mémoire dont nous allons rendre compte a pour objet principal la détermination générale de celles des fonctions à double période qui ne cessent jamais d'être continues tant qu'elles restent finies. Pour faire mieux saisir la pensée de l'Auteur, il convient de jeter d'abord un coup d'œil rapide sur la nature et les propriétés caractéristiques des fonctions à double période.

Supposons que, x, y étant les coordonnées rectangulaires ou obliques d'un point mobile Z, on trace dans le plan des x, y un parallélogramme ABCD, dont les côtés a, b soient parallèles, le premier à l'axe des x, le second à l'axe des y. Divisons d'ailleurs le plan des x, y par deux systèmes de droites équidistantes et parallèles aux axes en une infinité d'éléments tous pareils au parallélogramme ABCD. Enfin soit v une fonction de x, y, qui offre une valeur déterminée pour chacun des systèmes de valeurs de x, y propres à représenter les coordonnées de points situés dans l'intérieur de ce parallélogramme. Une autre fonction u, qui, pour chacun des systèmes dont il s'agit, coïnciderait avec la fonction v, sera ce qu'on doit naturellement appeler une *fonction à double période*, si elle ne varie pas, quand on fait croître ou décroître l'abscisse x d'un multiple de a, ou l'ordonnée y d'un multiple de b; et il est clair que, dans ce cas, u reprendra la même valeur quand on substituera aux coordonnées d'un point situé dans le parallélogramme ABCD les coordonnées d'un point homologue situé de la même manière dans l'un des autres parallélogrammes élémentaires. Si d'ailleurs on veut que la fonction u satisfasse à la condition de rester toujours continue, tant qu'elle ne deviendra pas infinie, il ne suffira pas que cette condition se trouve remplie, quand le point Z sera intérieur au parallélogramme; il sera encore nécessaire que u reprenne la même valeur quand, après avoir placé le point Z sur l'un des côtés du parallélogramme, on le transportera sur le côté opposé, en lui faisant décrire une droite parallèle à l'un des axes coordonnés.

Ajoutons que si la fonction u, supposée doublement périodique, est assujettie à la seule condition de rester finie et continue tant que le point Z est renfermé dans l'intérieur du parallélogramme ABCD, on pourra généralement la développer en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles

$$e^{\alpha x i}, \quad e^{6 y i},$$

les valeurs de α, 6 étant

$$\alpha = \frac{2\pi}{a}, \qquad 6 = \frac{2\pi}{b}.$$

Supposons maintenant que, les coordonnées x, y étant rectangulaires, on nomme z une variable imaginaire liée aux variables x, y par la formule

$$z = x + yi.$$

La position du point mobile Z sera complètement déterminée par la *coordonnée imaginaire* z, et, pour que u soit fonction de x, y, il suffira que u soit fonction de z. D'ailleurs, pour que la fonction de z, désignée par u, soit doublement périodique, il suffira qu'elle reprenne la même valeur quand le point Z, supposé d'abord intérieur au rectangle ABCD, ira prendre la place de l'un quelconque des points homologues situés dans les autres rectangles élémentaires; en d'autres termes, il suffira que u reprenne la même valeur quand on fera croître ou décroître u d'un multiple de a, ou d'un multiple de bi; et cette condition pourra toujours être remplie, quelle que soit la forme de la fonction u pour les points intérieurs au rectangle ABCD.

Ce n'est pas tout : on pourra, aux deux périodes a et bi, supposées l'une réelle, l'autre imaginaire, substituer deux périodes imaginaires assujetties à la seule condition que leur rapport ne soit pas réel. Cela posé, concevons que l'on désigne par a, b, non plus deux quantités réelles, mais deux expressions imaginaires, dont le rapport ne soit pas réel. Pour que u soit une fonction de z doublement périodique, il suffira que u ne varie pas, quand on fera croître ou décroître z d'un multiple de a ou d'un multiple de b. Alors aussi a, b pourront être censés représenter en grandeur et en direction les côtés d'un parallélogramme élémentaire ABCD, et la fonction u sera entièrement connue, quand on la connaîtra pour chacune des valeurs de z correspondantes aux points situés dans l'intérieur de ce parallélogramme.

D'après ce qu'on vient de dire, il est clair que, si a et b représentent les deux périodes de la variable z dans une fonction doublement périodique u, la valeur de u correspondante au cas où le point mobile Z reste compris dans l'intérieur d'un parallélogramme élémentaire ABCD pourra être choisie arbitrairement. Si d'ailleurs cette valeur, arbitrairement attribuée à u, est toujours finie et continue dans l'intérieur du parallélogramme, on pourra, de formules déjà connues, déduire l'expression analytique générale, propre à représenter la valeur de la fonction u supposée doublement périodique, quelle que soit la valeur attribuée à la variable z.

La fonction u, supposée doublement périodique, ne pourra plus être choisie arbitrairement pour les valeurs de z correspondantes aux divers points d'un parallélogramme élémentaire, si elle est assujettie à la condition de rester continue *avec sa dérivée*, pour des valeurs quelconques de z, tant qu'elle ne devient pas infinie (*voir* la Note sur les fonctions de variables imaginaires, p. 301). Cette condition sera remplie, par exemple si u est l'une des fonctions elliptiques, ou même une fonction rationnelle de ces fonctions. Mais il importait de savoir quelle est la forme la plus générale que puisse prendre une fonction doublement périodique, quand on l'assujettit à la condition énoncée. Telle est l'importante question que M. Hermite s'est proposé de résoudre. La solution qu'il en a donnée s'appuie sur des propositions remarquables, déduites en grande partie des principes établis par l'un de nous dans divers Mémoires, et spécialement dans le Tome II des *Exercices de Mathématiques*. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

La variable imaginaire z étant censée représenter les coordonnées imaginaires d'un point mobile Z, désignons par $F(z)$ une fonction doublement périodique de z, qui reste continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infinie; et soient a, b les deux périodes de z assujetties à la seule condition que leur rapport $\frac{a}{b}$ ne soit pas réel. Les quatre points

$$A,\quad B,\quad C,\quad D,$$

dont les coordonnées imaginaires seront

$$z,\quad z+a,\quad z+b,\quad z+a+b,$$

coïncideront avec les quatre sommets d'un parallélogramme élémentaire ABCD, dont les côtés seront représentés, non seulement en grandeur, mais encore en direction, par les deux constantes a, b; et, si l'on pose

$$\zeta = z + at + bt',$$

t, t' étant deux variables réelles, les valeurs de ζ, correspondantes à des valeurs de t, t' comprises entre les limites 0, 1, représenteront les coordonnées imaginaires de points renfermés dans le parallélogramme élémentaire ABCD. Le binôme $z + at$, en particulier, représentera les coordonnées imaginaires d'un point situé sur la droite AB; et si, pour tous les points de cette droite, la fonction de z et de t, représentée par $F(z+at)$, conserve une valeur finie, cette fonction, qui ne varie pas quand on y fait croître ou décroître t d'un nombre entier quelconque, pourra être développée suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'exponentielle

$$e^{2\pi t i}.$$

Soit A_m le coefficient de la $m^{\text{ième}}$ puissance de cette exponentielle dans le développement de $F(z+at)$, m étant positif ou négatif, mais entier. On aura

$$A_m = \int_0^1 e^{-2m\pi t i} F(z+at)\, dt$$

ou, ce qui revient au même,

$$A_m = \int_0^1 \Pi(z+at)\, dt,$$

la valeur de $\Pi(\zeta)$ étant

$$\Pi(\zeta) = e^{\frac{2m\pi(z-\zeta)}{a} i} F(\zeta)$$

et

$$F(z+at) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{2m\pi t i},$$

par conséquent

$$F(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m. \tag{2}$$

D'ailleurs, la nouvelle fonction, désignée ici par $\Pi(\zeta)$, ne variera pas quand on y fera croître ζ de a, et vérifiera évidemment la condition

$$\Pi(\zeta+b) = q^{-2m}\Pi(\zeta), \tag{3}$$

la valeur de q étant

$$q = e^{\frac{\pi b}{a} i}.$$

Enfin, si l'on suppose que la sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étende seulement aux diverses valeurs positives ou négatives de m, la valeur $m = 0$ étant exclue, alors, à la place de la formule (2), on obtiendra la suivante

$$\text{(4)} \qquad F(z) = A_0 + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m,$$

la valeur de A_0 étant

$$\text{(5)} \qquad A_0 = \int_0^1 F(z + at)\, dt.$$

D'autre part, si l'on désigne par $f(z)$ une fonction de z qui demeure continue avec sa dérivée, tant qu'elle reste finie; par (P, Q) la valeur de l'intégrale rectiligne

$$\int f(z)\, dz,$$

étendue à tous les points de la droite qui a pour origine le point P et pour extrémité le point Q; par S l'aire du parallélogramme élémentaire ABCD; enfin, par (S) l'intégrale $\int f(\zeta)\, d\zeta$, étendue à tous les points situés sur le contour de ce parallélogramme, on aura, non seulement

$$(Q, P) = -(P, Q)$$

et, par suite,

$$\text{(6)} \qquad (S) = (A, B) + (B, D) - (C, D) - (A, C),$$

mais encore

$$\text{(7)} \qquad (S) = 2\pi i \,\mathcal{E}\,(f(\zeta)),$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif aux seules valeurs de ζ qui représenteront les coordonnées de points renfermés dans le parallélogramme élémentaire ABCD. Cela posé, comme, en réduisant $f(z)$ à la fonction doublement périodique $F(z)$, on aura évidemment

$$(B, D) = (A, C)$$

et, par suite,

$$(S) = 0,$$

la formule (7) donnera

$$\text{(8)} \qquad \mathcal{E}\,(F(\zeta)) = 0.$$

Si, au contraire, on remplace $f(z)$ par $\Pi(z)$, alors, en ayant égard à la formule (3), on trouvera

$$(B, D) = (A, C), \qquad (C, D) = q^{-2m}(A, B),$$

et, comme on aura

$$(A, B) = \int_z^{z+at} \Pi(\zeta)\, d\zeta = a A_m,$$

on tirera des formules (6) et (7)

$$(S) = a(1 - q^{-2m}) A_m = 2\pi i \,\mathcal{E}\, \Pi(\zeta);$$

par conséquent,

$$\text{(9)} \qquad A_m = \frac{2\pi i}{a} \frac{\mathcal{E}\, \Pi(\zeta)}{1 - q^{-2m}}.$$

Il résulte immédiatement de cette formule, jointe à l'équation (4), que, si, en attribuant à z une valeur de la formule $at + bt'$, et à t, t' des valeurs réelles dont la seconde reste comprise entre les limites 0, 1, on pose

$$\text{(10)} \qquad \theta(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{e^{\frac{2m\pi(z-b)}{a} i}}{1 - q^{-2m}},$$

on aura

$$\text{(11)} \qquad F(z) = A_0 + \frac{2\pi i}{a} \mathcal{E}\, \theta(z + b - \zeta)\, (F(\zeta)),$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif aux seules valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$ de la variable ζ qui vérifieront l'équation

$$\text{(12)} \qquad \frac{1}{F(\zeta)} = 0,$$

et représenteront les coordonnées de points renfermés dans l'intérieur du parallélogramme élémentaire ABCD. D'ailleurs, on tirera de l'équation (10), en y remplaçant m par $-m$,

$$\theta(z) = -\theta(b-z). \tag{13}$$

Supposons maintenant que les valeurs de

$$\zeta = z + at + bt,$$

désignées par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$, se trouvent rangées d'après l'ordre de grandeur des valeurs correspondantes de t'. Soient, d'ailleurs,

$$Z_1,\quad Z_2,\quad \ldots,\quad Z_\mu$$

les points dont $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$ représentent les coordonnées imaginaires. Si, dans le second membre de la formule (11), on attribue à z un accroissement Δz tellement choisi, que le point A′ correspondant à la coordonnée imaginaire $z + \Delta z$ soit renfermé dans l'intérieur de la bande comprise entre la droite AB et la parallèle menée à cette droite par le point Z_1, le terme

$$A_0 = \int_0^1 F(z+at)\,dt$$

ne variera pas; mais, si le point A′ vient à franchir cette parallèle, le terme A_0 prendra un accroissement qui se déduira sans peine des formules (6), (7), et dont la valeur sera

$$-\frac{2\pi i}{a} \mathcal{E}(F(\zeta)),$$

le signe $\mathcal{E}$ se rapportant à la seule valeur ζ_1 de la variable ζ. Dans la même hypothèse, l'expression

$$\frac{2\pi i}{b} \mathcal{E}\, \theta(z+b-\zeta)(F(z)),$$

que renferme le second membre de la formule (11), se trouvera évi-

demment diminuée du terme correspondant à la valeur ζ_1 de ζ, et augmentée du terme correspondant à la valeur $\zeta_1 + b$. Cela posé, il est clair que, si l'on assujettit $\theta(z)$ à vérifier généralement la condition

$$\theta(z+b) = \theta(z) - 1, \tag{14}$$

la formule (11) pourra être étendue au cas où le signe $\mathcal{E}$ serait relatif aux valeurs de ζ qui représenteraient les coordonnées de points renfermés, non plus dans le parallélogramme élémentaire ABCD, mais dans le parallélogramme semblable A′B′C′D′ avec lequel on peut faire coïncider le premier en transportant les côtés parallèlement à eux-mêmes, et substituant au sommet A le sommet A′. Par suite aussi, on pourra, en supposant le terme A_0 réduit à une constante dans la formule (11), admettre que, dans cette formule, le signe $\mathcal{E}$ se rapporte aux seules valeurs de ζ qui vérifient l'équation (12), et sont de la forme

$$\zeta = at + bt', \tag{15}$$

t, t' étant des variables réelles comprises entre les limites 0, 1.

En vertu de la formule (11), considérée sous ce point de vue, toute fonction de z qui, étant doublement périodique, reste continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infinie, se réduit à la somme d'un certain nombre de termes, dont chacun est proportionnel à une fonction de la forme

$$\theta(z - z_1),$$

z_1 étant une valeur particulière de z, ou bien encore à l'une des dérivées de cette même fonction différentiée par rapport à z. Tel est le théorème fondamental obtenu par M. Hermite. Ajoutons que la fonction désignée ici par $\theta(z)$ a évidemment pour dérivée une fonction doublement périodique de z. Si l'on désigne par $\varphi(z)$ cette dérivée, la fonction $\varphi(z)$ restera continue aussi bien que $\theta(z)$, tant qu'elle ne deviendra pas infinie, et, par suite, rien n'empêchera de prendre pour $F(z)$, dans la formule (11), ou la fonction $\varphi(z)$, ou une fonction rationnelle de $\varphi(z)$. En réduisant effectivement $F(z)$ au carré de $\varphi(z)$, M. Hermite obtient une équation qui sert à exprimer ce carré en fonction linéaire de $\varphi(z)$ et de $\varphi''(z)$; il en conclut aisément que le carré de $\varphi'(z)$ est proportionnel au produit des trois facteurs

$$\varphi(z)-\varphi\left(\frac{a}{2}\right),\quad \varphi(z)-\varphi\left(\frac{b}{2}\right),\quad \varphi(z)-\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et la transcendante $\theta(z)$ se trouve ainsi ramenée aux fonctions elliptiques. Par suite aussi, l'on peut réduire à une fonction rationnelle de fonctions elliptiques toute fonction doublement périodique qui reste toujours continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infinie [1].

En partant des formules que nous avons rappelées, et substituant aux périodes a, b les autres périodes qu'on peut introduire dans le calcul, en déplaçant les sommets du parallélogramme élémentaire ABCD, M. Hermite obtient successivement sous diverses formes la valeur de la transcendante $\theta(z)$. D'ailleurs, la comparaison des diverses formes sous lesquelles se présente $\theta(z)$, et de ses divers développements, permet à l'auteur d'établir un grand nombre de propositions nouvelles. L'une de ces propositions, très digne de remarque, est relative à l'intervalle dans lequel reste convergente la série qui représente le développement de la fonction $\theta(z)$ [2].

En résumé, les Commissaires pensent que, dans le travail soumis à leur examen, M. Hermite a donné de nouvelles preuves de la sagacité qu'il avait déjà montrée dans de précédentes recherches. Ils

(1) Déjà en 1844, M. Liouville avait obtenu, par une méthode très différente de celle qu'a suivie M. Hermite, et avait énoncé, en présence de ce dernier, la réduction ici indiquée.

(2) M. Hermite, après avoir fixé l'intervalle dans lequel le développement de la transcendante $\theta(z)$ demeure convergent, prouve que, dans le cas où cet intervalle atteint sa valeur maximum, le rapport entre cet intervalle et le plus petit côté d'un parallélogramme élémentaire ne peut s'abaisser au-dessous de $\sqrt{\frac{3}{4}}$. M. Jacobi, dans une Lettre adressée à M. Hermite, avait énoncé une proposition qui coïncide avec ce théorème, et qui s'appliquait à la transcendante $\Theta(z)$.

pensent que ce travail est très digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le recueil des *Mémoires des Savants étrangers* [1].

491.

Note de M. Augustin Cauchy *relative aux observations présentées à l'Académie par M.* Liouville.

C. R., T. XXXII, p. 452 (31 mars 1851).

Comme je l'ai fait voir dans les *Comptes rendus* de 1843, les formules générales que donne le Calcul des résidus, pour la transforma-

(1) *Remarques de M.* Liouville.

Sans s'opposer aux conclusions du Rapport, M. Liouville croit devoir rappeler qu'il a, lui aussi, trouvé depuis longtemps une théorie générale des fonctions doublement périodiques, dont il a donné incidemment à l'Académie, dès 1844, à propos d'un Mémoire de M. Chasles sur la construction géométrique des amplitudes des fonctions elliptiques, une vue très nette qu'on retrouve au Tome XIX des *Comptes rendus* (page 1261, séance du 9 décembre 1844). « La méthode que j'ai suivie, dit M. Liouville, est si simple dans ses détails, qu'elle pourra, je crois, sans inconvénient, venir après d'autres, même analogues, mais qui n'ont pas, ce me semble, le caractère tout intuitif et élémentaire que j'ai donné à la mienne en m'attachant à aller pas à pas du simple au composé, par la considération continuelle et toujours directe d'un seul principe. J'ai toutefois, on le comprend, un certain intérêt à établir, non pas que mon travail est ancien, cela résulte des *Comptes rendus*, mais que les détails principaux en ont été arrêtés depuis plusieurs années, et ont été communiqués très explicitement à divers géomètres français ou étrangers. Or j'ai chez moi, et je pourrai déposer sur le bureau avant la fin de la séance, une pièce manuscrite qui paraîtra concluante à cet égard. Deux géomètres allemands distingués, MM. Borchardt et Joachimsthal, pendant leur voyage à Paris en 1847, ont bien voulu sacrifier quelques heures pour entendre l'exposition de ma doctrine, et M. Borchardt a rédigé les Leçons que j'étais ainsi conduit à faire. J'avais permis à M. Borchardt de montrer cette rédaction à qui il voudrait, et j'ai su de lui qu'elle a été mise sous les yeux de M. Jacobi. Pressé par le temps, je n'avais pu parler des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce. Mais cela importe peu. La classification des fonctions bien déterminées doublement périodiques, d'après le nombre des valeurs irréductibles par les périodes, mais d'ailleurs égales ou inégales, qui les rendent infinies; la démonstration de ce théorème capital, que toute fonction de ce genre qui a moins de deux infinis doit se réduire à une simple constante; la proposition importante aussi, que le nombre des racines qui annulent la fonction est toujours précisément égal au nombre des infinis de cette fonction, et que, de plus, les sommes tion et le développement des fonctions, peuvent être utilement appliquées à la recherche des propriétés des fonctions elliptiques. Il y a plus : comme je l'ai remarqué en 1844 (Tome XIX des *Comptes rendus*, page 1378) [1], l'une de ces formules fournit le principe fondamental invoqué par M. Liouville pour les fonctions doublement périodiques, et le généralise même, en montrant que toute fonction $F(z)$ de z, qui, offrant une dérivée unique pour toute valeur de z, varie avec z par degrés insensibles et ne devient jamais infinie, se réduit néces-

des valeurs de la variable, relatives à ces deux circonstances d'une fonction nulle ou infinie, sont toujours égales entre elles aux multiples près des périodes; l'expression des fonctions à n infinis par des sommes ou par des produits de fonctions à deux infinis; la théorie détaillée des fonctions à deux infinis et leur réduction aux fonctions elliptiques, qui sont dès lors l'élément unique des fonctions doublement périodiques à un nombre d'infinis limité; les théorèmes sur l'addition et sur la transformation directe ou inverse, rendus pour ainsi dire aussi simples que le problème d'Algèbre de former une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent pour des valeurs données : tout cela, c'est-à-dire la partie essentielle de mon travail, est dans le manuscrit de M. Borchardt, que je communiquerai dans quelques instants à l'Académie. »

M. Liouville a, en effet, avant la fin de la séance, déposé sur le bureau le manuscrit de M. Borchardt. Nous transcrivons la Table des matières que M. Borchardt a placée en tête.

Première Partie. — *Théorie générale.*

1. Une fonction doublement périodique qui ne devient jamais infinie est impossible.
2. Une fonction doublement périodique et à un seul infini est impossible.
3. Fonctions doublement périodiques et à deux infinis. Leurs propriétés fondamentales.
4. Fonctions doublement périodiques et à plusieurs infinis. Leur développement en sommes et en produits de fonctions doublement périodiques et à deux infinis.
5. Leur développement en produits de fonctions périodiques et à trois infinis, lorsque le nombre des infinis est pair.
6. Leur développement en fractions de la forme $\frac{M + N\varphi'(z)}{L}$, $\varphi(z)$ représentant une fonction doublement périodique et à deux infinis, $\varphi'(z)$ son coefficient différentiel, et L, M, N des fonctions entières de $\varphi(z)$.

Seconde Partie. — *Applications.*

7. Détermination du coefficient différentiel des fonctions doublement périodiques et à deux infinis. Théorème de l'addition pour les mêmes fonctions. Cas particulier du $\sin \operatorname{am} z$.
8. Transformation du $\sin \operatorname{am} z$. Expressions en forme d'une somme et d'un produit.
9. Transformation inverse du $\sin \operatorname{am} z$. Formule d'Abel. Formule de M. Jacobi.

[1] *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 378.

sairement à une constante. Enfin, les formules dont il s'agit fournissent directement les diverses conséquences que notre Confrère annonce avoir déduites du principe ici mentionné.

Ainsi, en particulier, des formules que j'ai établies dans le Mémoire lithographié du 27 novembre 1831, comme propres à déterminer, non seulement la somme des fonctions semblables de celles des racines d'une équation transcendante, qui peuvent représenter les coordonnées imaginaires de points renfermés dans un contour donné, mais encore le nombre de ces racines, on en conclut immédiatement que, si, la fonction $F(z)$ étant doublement périodique, on attribue successivement à z les diverses valeurs qui expriment les coordonnées imaginaires de points renfermés dans le parallélogramme élémentaire dont les côtés sont représentés en grandeur et en direction par les deux périodes, celles de ces valeurs qui rendront la fonction $F(z)$ nulle seront en même nombre que celles qui la rendront infinie.

Quant à la méthode d'exhaustion qu'a employée M. Liouville, et qui consiste à retrancher successivement d'une fonction donnée $f(z)$ d'autres fonctions qui deviennent infinies en même temps qu'elle, pour certains systèmes de valeurs attribuées à la variable z, de manière à obtenir, pour reste définitif, une fonction $\varpi(z)$ qui offre une valeur toujours finie ou même constante pour des valeurs finies de z, c'est précisément la méthode dont j'ai fait usage pour établir, dans le premier Volume des *Exercices de Mathématiques*, les principes fondamentaux du Calcul des résidus. La méthode d'exhaustion est encore celle à laquelle j'ai eu recours, dans les *Annales* de M. Gergonne, pour la détermination d'un très grand nombre d'intégrales définies, spécialement des intégrales dont les limites sont $-\infty$ et $+\infty$.

Je joindrai ici la démonstration très simple du théorème relatif aux valeurs d'une variable qui rendent nulle ou infinie une fonction à double période.

Soit $F(z)$ une fonction, doublement périodique, qui reste continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infinie. Soient encore a, b les deux périodes de la variable z; nommons S l'aire du parallélogramme élémentaire ABCD, dont les côtés sont représentés en grandeur et en direction par les périodes a, b; enfin, soit (S) la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{F'(z)}{F(z)} dz,$$

étendue à tous les points du contour ABCD. Il est clair que (S) sera la somme de quatre intégrales rectilignes, qui, prises deux à deux, seront égales, au signe près, mais affectées de signes contraires. On aura donc $(S) = 0$. Mais, d'autre part, si, parmi les valeurs de z qui représentent les coordonnées imaginaires de points situés dans l'intérieur du parallélogramme élémentaire, celles qui rendent la fonction $F(z)$ nulle sont en nombre égal à n, et celles qui la rendent infinie, en nombre égal à n'; on aura

$$(S) = 2\pi i \mathcal{E}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = 2\pi i (n - n').$$

Donc l'équation (S) donnera

$$n = n' \quad (^1).$$

492.

Analyse mathématique. — *Sur les fonctions monotypiques et monogènes.*

C. R., T. XXXII, p. 484 (7 avril 1851).

Nommons z une variable imaginaire qui sera censée représenter l'*ordonnée imaginaire* d'un point mobile Z. Une fonction u de cette variable pourra offrir, pour chaque valeur de z, une ou plusieurs valeurs distinctes. J'appellerai *type* une expression analytique $f(z)$ propre à représenter, pour chaque position du point mobile Z, une

[1] M. Hermite, auquel je faisais part de cette démonstration, tirée du Calcul des résidus, m'a dit l'avoir déjà remarquée, et donnée au Collège de France dans une Leçon.

seule des valeurs de u, et choisie de manière qu'étant données deux valeurs différentes $f(z_{\prime})$, $f(z_{\prime\prime})$ du même type on puisse passer par degrés insensibles de l'une à l'autre en faisant varier z par degrés insensibles. Une fonction *monotypique*, ou à un seul type, restera évidemment continue, tant qu'elle ne deviendra pas infinie. Si d'ailleurs une fonction monotype offre, pour chaque position du point Z, une dérivée unique (page 301), elle sera ce que je nommerai une fonction *monogène*. Ces définitions étant admises, on déduira sans peine du calcul des résidus diverses propriétés remarquables des fonctions monotypiques et monogènes; je me bornerai ici à en indiquer quelques-unes.

Soient, comme ci-dessus,

z l'ordonnée imaginaire d'un point mobile Z, et

$f(z)$ une fonction monotypique et monogène de z.

Soient de plus

$S_{\prime}$ l'aire comprise dans un contour fermé pqr;

$S_{\prime\prime}$ l'aire comprise dans un contour plus étendu PQR qui enveloppe le premier de toutes parts;

$S = S_{\prime\prime} - S_{\prime}$ l'aire comprise entre les deux contours;

$Z_{\prime}, Z_{\prime\prime}, \ldots$ les points situés entre les deux contours, et correspondants à des ordonnées imaginaires qui vérifient l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0; \tag{1}$$

$z_{\prime}, z_{\prime\prime}, \ldots$ ces mêmes ordonnées. Enfin, représentons par

$$(S_{\prime}), \quad (S_{\prime\prime})$$

les valeurs de l'intégrale

$$\int f(z)\, dz$$

étendue à tous les points des contours pqr, PQR, et par

$$[z_{\prime}], \quad [z_{\prime\prime}], \quad \ldots$$

les valeurs de la même intégrale étendue à des contours infiniment petits et fermés, dont chacun enveloppe et renferme dans son intérieur un seul des points $Z_{\prime}$, $Z_{\prime\prime}$, ... En posant, pour abréger, $(S) = (S_{\prime\prime}) - (S_{\prime})$, on aura (t. XXIII, p. 253) (¹)

$$(S) = (S_{\prime\prime}) - (S_{\prime}) = [z_{\prime}] + [z_{\prime\prime}] + \ldots. \tag{2}$$

Supposons, pour fixer les idées, que les contours pqr, PQR se réduisent à des cercles dont les rayons soient r_0, R, et les contours qui enveloppent les points $Z_{\prime}$, $Z_{\prime\prime}$, ... à des cercles décrits du rayon ρ. Alors, en posant, pour abréger,

$$u = r_0 e^{p i}, \qquad v = R e^{p i}, \qquad \zeta = \rho e^{p i},$$

on tirera de la formule (2)

$$\mathfrak{M}[v f(v)] = \mathfrak{M}[u f(u)] + \sum \mathfrak{M}[\zeta f(z_{\prime} + \zeta)], \tag{3}$$

le signe $\sum$ indiquant une somme de termes pareils à celui qui est mis en évidence et correspondants aux diverses racines $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, ... de l'équation (1).

Si, dans la formule (3), on remplace $f(u)$ par $\frac{f(u)}{u-z}$, elle donnera

$$f(z) = \mathfrak{M}\frac{v f(v)}{v-z} + \mathfrak{M}\frac{u f(u)}{z-u} + \sum \mathfrak{M}\frac{\zeta f(z_{\prime}+\zeta)}{z - z_{\prime} - \zeta}. \tag{4}$$

En vertu de la formule (4), *la fonction $f(z)$, supposée monotypique et monogène, pour des modules de z compris entre les limites r_0, R, sera la somme de plusieurs termes, dont les deux premiers seront développables en deux séries convergentes ordonnées, l'une suivant les puissances entières et positives, l'autre suivant les puissances entières et négatives de z. De plus, si z ne coïncide avec aucune des racines $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, ... de l'équation* (1), *il suffira de supposer le module ρ de ζ inférieur aux modules des différences $z - z_{\prime}$, $z - z_{\prime\prime}$, ... pour réduire le troisième, le quatrième, ... des termes qui composent la fonction $f(z)$ à des expressions immédiatement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et négatives de ces mêmes différences.*

(¹) *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. X, p. 72.

Supposons maintenant que les modules r_0, ρ de u et de ζ deviennent infiniment petits, et le module K de v infiniment grand : la quantité $f(\zeta)$ deviendra infiniment grande, tandis que chacune des quantités $f(u)$, $f(v)$ pourra ou demeurer finie, ou devenir infiniment grande ou infiniment petite. D'ailleurs, comme je l'ai remarqué dans mon Calcul différentiel, l'ordre d'une quantité infiniment petite peut être un nombre quelconque rationnel ou irrationnel, et il est clair que la même remarque peut être appliquée à l'ordre d'une quantité infiniment grande. D'autre part, si, en considérant r_0, ρ et $\frac{1}{R}$ comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on développe les rapports

$$\frac{v f(v)}{v-z}, \quad \frac{u f(u)}{z-u}, \quad \frac{\zeta f(\zeta)}{z - z_{\prime} - \zeta}$$

en progressions géométriques, chacun d'eux pourra être décomposé en deux parties, dont la première sera une fonction entière ou du moins rationnelle de z, équivalente à la somme des n ou $n-1$ premiers termes de la progression, tandis que la seconde partie, représentée par l'un des rapports

$$\frac{z^n}{v^{n-1}(v-z)}, \quad \frac{u^n}{z^{n-1}(z-u)}, \quad \frac{\zeta^n}{(z-z_{\prime})^{n-1}(z-z_{\prime}-\zeta)}, \tag{5}$$

sera une quantité infiniment petite de l'ordre n. Enfin, si l'on nomme P l'un des produits qu'on obtient en multipliant respectivement ces trois rapports par les facteurs

$$f(v), \quad f(u), \quad f(\zeta), \tag{6}$$

on aura toujours

$$\mathfrak{M}(P) = 0, \tag{7}$$

quand la fonction P restera finie pour des valeurs infiniment petites de $\frac{1}{R}$, ou de r_0, ou de ρ. Cela posé, il suit de l'équation (4) que *la fonction $f(z)$, supposée monotypique et monogène, sera certainement rationnelle, si, en attribuant à la variable z, ou à un accroissement Δz*

de cette variable, des valeurs infiniment petites ou infiniment grandes du premier ordre, on voit toujours les ordres des valeurs infiniment grandes que $f(z)$ peut acquérir, se réduire à des nombres finis. Alors en effet on pourra, dans chacune des expressions (5), attribuer au nombre entier n une valeur assez considérable, pour que chacun des trois produits, représentés par P dans la formule (7), acquière une valeur finie, ou même infiniment petite.

La fonction $f(z)$ pourrait cesser d'être rationnelle, sans cesser d'être monotypique et monogène. C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'on supposait

$$f(z) = e^z \quad \text{ou} \quad f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Dans des cas semblables, on pourra encore, à l'aide du premier des théorèmes ci-dessus énoncés, remplacer $f(z)$ par la somme d'une ou de plusieurs séries convergentes. Mais les modules des valeurs infiniment grandes de la fonction seront des quantités infiniment grandes d'un ordre infini. Ainsi, en particulier, si l'on considère z comme un infiniment petit du premier ordre, le module de $e^{\frac{1}{z}}$ sera une quantité infiniment grande d'un ordre infini.

493.

Analyse mathématique. — *Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par* M. Puiseux, *et intitulé :* Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques.

C. R., T. XXXII, p. 493 (7 avril 1851).

Dans un précédent Mémoire, sur lequel s'est portée à juste titre l'attention des géomètres, M. Puiseux avait résolu d'importantes questions d'Analyse, relatives à la détermination des fonctions algébriques et des intégrales définies qui renferment ces fonctions sous le signe $\int$. Ainsi par exemple, il était parvenu à reconnaître de

quelle manière les diverses valeurs d'une fonction algébrique se trouvent échangées entre elles dans le voisinage d'une valeur de la variable pour laquelle cette fonction devient discontinue. Ainsi encore, en supposant que u représente une fonction algébrique de z, il avait montré comment les diverses valeurs de l'intégrale curviligne

$$t = \int u\,dz$$

peuvent se déduire de l'une d'entre elles, ou de celles qu'on en tire quand, à une valeur donnée de la fonction u, on substitue l'une quelconque des autres valeurs que cette fonction peut acquérir. Ainsi, enfin, il avait déterminé, pour une classe très étendue de fonctions algébriques, le nombre des périodes distinctes qui peuvent être ajoutées à l'intégrale curviligne t, sans que la variable z, considérée comme fonction de t, change de valeur.

Dans le nouveau Mémoire dont nous avons à rendre compte, M. Puiseux généralise encore les résultats qu'il avait précédemment obtenus, et, en considérant une fonction algébrique u de forme quelconque, il parvient à reconnaître si chaque période de l'intégrale curviligne

$$t = \int u\,dz$$

appartient à toutes les valeurs de l'intégrale, ou seulement à une partie d'entre elles. L'analyse à l'aide de laquelle il résout cette question est fondée sur un théorème très remarquable, dont M. Puiseux donne une démonstration rigoureuse et dont voici l'énoncé :

Une fonction algébrique de z, qui reste toujours continue, tant qu'elle ne devient pas infinie, est nécessairement une fonction rationnelle.

Ce théorème, duquel se déduisent des conséquences nombreuses et importantes, comme on peut le voir, non seulement dans le Mémoire soumis à notre examen, mais encore dans les belles recherches que M. Hermite a présentées, à la dernière séance, sur les équations résolubles par radicaux, permet à M. Puiseux de prouver que chacune des constantes, auxquelles on peut donner le nom de *périodes*, appartient effectivement à toutes les valeurs de l'intégrale curviligne $t = \int u\,dz$, lorsque l'équation qui détermine la fonction algébrique u est *irréductible*. De plus, en s'appuyant sur le théorème dont il s'agit et sur les principes exposés dans son précédent Mémoire, M. Puiseux établit diverses propositions dignes de remarque, à l'aide desquelles on peut reconnaître si une équation entre deux variables est irréductible, ou déterminer le degré des équations irréductibles dans lesquelles elle se partage, et même trouver chacune de ces dernières équations.

En résumé, les Commissaires sont d'avis que les nouvelles recherches de M. Puiseux sur les fonctions algébriques constituent, ainsi que les précédentes, un véritable progrès dans l'Analyse mathématique. Ils pensent, en conséquence, que le Mémoire soumis à leur examen est très digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le *Recueil des Mémoires des savants étrangers*.

494.

Mathématiques. — *Rapport sur un travail présenté à l'Académie par M.* Koralek, *et relatif aux logarithmes des nombres.*

C. R., T. XXXII, p. 610 (28 avril 1851).

Dans le travail que nous avons été chargés d'examiner, M. Koralek s'est proposé d'indiquer des moyens faciles d'obtenir, avec sept chiffres, d'une part, le logarithme décimal d'un nombre donné, d'autre part, le nombre correspondant à un logarithme donné.

La méthode suivie par l'auteur est fondée sur un ingénieux emploi de la formule qui sert à développer la différence entre les logarithmes de deux nombres en une série ordonnée suivant les puissances du rapport qu'on obtient quand on divise la différence des deux nombres par leur somme.

L'auteur observe que, dans le cas où la différence des deux nombres

est la quatre-vingt-quinzième partie du plus petit, on peut substituer à la différence des logarithmes le produit du module des Tables par le rapport dont il s'agit, puisqu'alors l'erreur commise est inférieure à la moitié d'un dix-millionième, par conséquent à la moitié d'une unité décimale du septième ordre. En s'appuyant sur cette observation, M. Koralek prouve aisément qu'on peut réduire la recherche du logarithme d'un nombre quelconque à la recherche des logarithmes des nombres

$$2, \quad 3, \quad 7, \quad 11, \quad 13;$$

puis il tire de la même observation des valeurs approchées de ces derniers logarithmes, et les légères corrections que ces valeurs approchées doivent subir se déduisent immédiatement de la formule qu'il a prise pour point de départ.

Une méthode inverse de celle qu'il a suivie dans la détermination des logarithmes ramène M. Koralek de ces logarithmes aux nombres eux-mêmes.

Les Tables de logarithmes sont depuis longtemps fort répandues, et leur usage habituel ne présente pas de difficultés sérieuses; mais les procédés suivis par M. Koralek peuvent être utilement employés par ceux qui voudraient s'exercer à trouver les logarithmes de nombres donnés, ou les nombres correspondants à des logarithmes donnés, sans avoir sous les yeux des Tables de logarithmes. D'ailleurs, le travail soumis à notre examen montre que l'auteur a une grande habitude des calculs numériques, et les Commissaires pensent que l'Académie doit l'encourager à employer son talent au calcul des Tables des diverses transcendantes dont la détermination peut concourir au progrès des Sciences mathématiques.

495.

C. R., T. XXXII, p. 704 (12 mai 1851).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie un Mémoire dans lequel il établit les conditions sous lesquelles subsistent les principales formules du Calcul des résidus, et démontre en particulier la proposition suivante :

Deux contours fermés, dont le second enveloppe le premier de toutes parts, étant tracés dans un plan, soient

S_0 l'aire terminée par le premier contour;
S l'aire terminée par le second;
x, y les coordonnées rectilignes de l'un quelconque des points renfermés entre les deux contours;
$f(z)$ une fonction de la variable $z = x + yi$, qui reste *monotypique* et *monogène* pour tous les points dont il s'agit;
$z_{,}, z_{,,}, \ldots$ celles des valeurs de z, correspondantes à ces points, qui vérifient l'équation $\frac{1}{f(z)} = 0$;
(S_0) ou (S) la valeur qu'acquiert l'intégrale $\int f(z)\,dz$ quand on l'étend au contour entier de l'aire S_0 ou S, en supposant qu'un point mobile décrive ce contour avec un mouvement de rotation direct.

Si, en considérant l'une quelconque des différences $z - z_{,}$, $z - z_{,,}$, ... comme infiniment petite du premier ordre, on obtient toujours pour $f(z)$ une quantité infiniment grande d'un ordre fini, non seulement, pour un très petit module de $z - z_{,}$ ou $z - z_{,,}$, ..., la fonction $f(z)$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de $z - z_{,}$ ou $z - z_{,,}$, ..., les puissances négatives étant en nombre fini, mais de plus on aura

$$(S) - (S_0) = 2\pi i \mathcal{E}(f(z)),$$

le signe $\mathcal{E}$ indiquant le résidu intégral de $f(z)$, relatif aux valeurs $z_{,}$, $z_{,,}$, ... de la variable z.

496.

C. R., T. XXXII, p. 789 (26 mai 1851).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie un Mémoire sur les valeurs principales et générales des intégrales curvilignes, dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ devient infinie en un point de la portion de courbe donnée. Il examine ensuite spécialement ce qui arrive quand l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la fonction sous le signe $\int$ offre des racines multiples. Il montre, dans cette hypothèse, les conditions sous lesquelles les valeurs principales des intégrales curvilignes demeurent finies, et détermine ces valeurs elles-mêmes, ainsi que les valeurs générales, dans le cas où les conditions énoncées se vérifient.

497.

C. R., T. XXXIII, p. 649 (15 décembre 1851).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie une Note sur le module principal du rapport

$$\frac{\Pi(t+z)}{z}.$$

498.

C. R., T. XXXIII, p. 709 (29 décembre 1851).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie une méthode nouvelle pour la détermination des mouvements des corps célestes. Cette méthode, plus simple encore que celle qu'il avait exposée dans le

Tome XX des *Comptes rendus* (pages 774 et suivantes) (¹), sera développée par l'Auteur dans les prochaines séances. On verra qu'il est souvent possible de réduire à quelques heures des calculs qui, dans l'état actuel de la science, demeuraient impraticables, ou qui, du moins, auraient exigé plusieurs années de travail. Ainsi, par exemple, la nouvelle méthode permettra de calculer directement chacune des perturbations à longues périodes des mouvements planétaires, avec une exactitude et une facilité d'autant plus grandes que ces perturbations seront d'un ordre plus élevé.

499.

C. R., T. XXXIV, p. 9 (5 janvier 1852).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie un Mémoire sur le développement des fonctions en séries limitées.

Il arrive souvent qu'un procédé analytique fournit le développement d'une fonction en une série divergente dont les premiers termes forment une suite rapidement décroissante. Souvent aussi, dans cette hypothèse, on obtient une valeur très approchée de la fonction en limitant la série, et l'arrêtant après un certain terme. D'ailleurs il importe de savoir, non seulement si cette limitation est légitime, mais encore quel est le terme auquel on doit s'arrêter, et quel est le degré d'approximation. M. Cauchy fait voir que, dans un grand nombre de cas, il suffit, pour résoudre ces diverses questions, de recourir à la considération des *valeurs moyennes* des fonctions et de leurs *modules principaux*. Il y a plus : cette considération permet de développer les restes qui complètent les séries limitées, en d'autres séries non limitées et convergentes, à l'aide desquelles on peut déterminer les valeurs de ces mêmes restes.

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. IX, p. 129 et suivantes.

Ajoutons que les diverses formules, obtenues comme on vient de le dire, s'appliquent très utilement à la détermination des mouvements des corps célestes.

500.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur le développement des quantités en séries limitées.*

C. R., T. XXXIV, p. 70 (19 janvier 1852).

Lorsqu'une quantité ne peut être calculée directement, on peut recourir, pour la déterminer, à un développement en série. Mais les séries que l'on suppose illimitées et prolongées indéfiniment ne peuvent être admises dans le calcul qu'autant qu'elles sont convergentes. D'ailleurs la détermination d'une quantité à l'aide d'une série convergente devient laborieuse et même impraticable, lorsque les termes de cette série décroissent très lentement; or c'est là précisément ce qui arrive dans un grand nombre de cas, et surtout quand il s'agit de calculs dans lesquels entrent des fonctions périodiques, ainsi que nous allons l'expliquer.

Souvent, dans les applications de l'Analyse mathématique, particulièrement en Astronomie, on rencontre une ou plusieurs fonctions du sinus et du cosinus d'un angle p, et la solution des problèmes exige le développement d'une telle fonction en une série ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'angle p, ou, ce qui revient au même, en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'*exponentielle trigonométrique* dont l'angle p est l'*argument*. Or le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ puissance est représenté par une intégrale définie, ou mieux encore par une *moyenne isotropique* relative à l'argument p; et, quoique cette moyenne isotropique puisse, en général, être développée par des procédés divers en série convergente, toutefois, lorsque l'exposant n a une valeur considérable, il arrive fréquemment que les séries convergentes obtenues offrent des sommes dont la détermination, même approximative, exigerait le calcul de plusieurs milliers de termes. J'ai cherché les moyens de parer à un si grave inconvénient, et j'y suis parvenu en remplaçant les séries illimitées par des séries limitées convergentes ou même divergentes. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Pour qu'une fonction donnée Z de l'exponentielle trigonométrique z soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de z, il suffit que cette fonction Z reste *monodrome, monogène* et *finie* dans le voisinage de la valeur 1 attribuée au module de z. Sous cette condition, le coefficient A_n de z^n dans le développement sera la moyenne isotropique entre les diverses valeurs du produit $z^{-n}Z$, et cette moyenne isotropique ne variera pas si, après avoir remplacé le module 1 de z par un autre module r, on fait varier celui-ci entre deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure à l'unité, mais tellement choisies que la fonction Z ne cesse pas d'être monodrome et monogène. Ces deux limites du module r sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire de la forme

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{a},$$

lorsque Z est une fonction réelle de l'angle p; et je prouve que leur considération fournit précisément le moyen de développer le coefficient A_n, quand n est un très grand nombre, en une série convergente ou divergente, mais qui décroît très rapidement dans ses premiers termes. Je montre, de plus, comment, après avoir prolongé cette série jusqu'à un terme numériquement insensible, ou, si elle est divergente, jusqu'à son plus petit terme qu'il est facile de reconnaître, on peut la compléter par un reste qui est généralement de l'ordre du dernier des termes conservés, et que j'apprends à développer en une série nouvelle, toujours convergente; enfin, je montre comment on peut fixer à l'avance le terme auquel on doit s'arrêter ou dans la première série, ou du moins dans la seconde, pour obtenir, avec une approximation donnée, la valeur cherchée du coefficient A_n.

Jusqu'à présent, nous avons supposé qu'il s'agissait de développer

une fonction périodique suivant les puissances ascendantes d'une seule exponentielle trigonométrique z. Si, la fonction proposée renfermant deux exponentielles de ce genre, par exemple z et z_1, on était forcé de la développer suivant leurs puissances ascendantes, alors, après avoir trouvé le coefficient A_n de z^n, il resterait encore à développer A_n suivant les puissances ascendantes de z_1, et à déterminer, par exemple, dans ce développement le coefficient A_{n,n_1} de $z_1^{n_1}$ ou le coefficient $A_{n,-n_1}$ de $z_1^{-n_1}$. Or ce dernier problème est lui-même du nombre de ceux dont la solution, quand n_1 est un très grand nombre, semble exiger un travail immense. Je fais voir qu'on peut encore le résoudre, à l'aide de séries limitées, convergentes ou même divergentes, mais rapidement décroissantes dans leurs premiers termes, et complétées par des restes qui se développent en séries convergentes. Je montre aussi qu'on peut fixer à l'avance le terme auquel on doit s'arrêter, soit dans la série limitée, soit dans le développement du reste, pour obtenir, avec une approximation donnée, la valeur cherchée du coefficient A_{n,n_1} ou $A_{n,-n_1}$.

Le principe sur lequel je m'appuie pour développer en séries limitées les coefficients A_n et A_{n,n_1} ou $A_{n,-n_1}$ me paraissant digne de quelque attention, je l'indiquerai ici brièvement.

On sait que l'on détermine avec la plus grande facilité le reste qui complète une progression géométrique même divergente. D'ailleurs une intégration relative à une variable peut transformer une suite constamment croissante, et, par conséquent, divergente, en une suite qui, avant de croître, commence par décroître, et décroisse même très rapidement dans ses premiers termes. Cela posé, pour obtenir le reste propre à compléter une série divergente qui décroît très rapidement dans ses premiers termes, il suffit évidemment de transformer ses divers termes, de manière qu'ils soient produits par une intégration définie appliquée aux termes correspondants d'une progression géométrique. Or une semblable transformation est précisément celle qu'opèrent les formules auxquelles on est conduit par le calcul des résidus et par la considération des moyennes isotropiques. Il était donc naturel de s'attendre à ce que l'emploi de ces formules permît, dans les applications de l'Analyse mathématique, de tirer des séries limitées, même divergentes, des déterminations sûres et rapides, que souvent les séries illimitées et convergentes ne pouvaient donner.

Le principe général que je viens de rappeler est spécialement applicable à la solution de divers problèmes d'Astronomie. On sait, en effet, que le calcul des perturbations des mouvements planétaires suppose le développement de la fonction nommée *perturbatrice* en une série ordonnée suivant les cosinus d'arguments représentés par des fonctions linéaires des multiples des anomalies moyennes. On sait aussi que la partie constante d'un argument quelconque, et le coefficient du cosinus de cet argument, sont très difficiles à déterminer par les méthodes ordinaires, lorsque les multiples des anomalies moyennes deviennent très considérables; et cette circonstance est précisément celle qui, jusqu'à ces derniers temps, rendait à peu près impraticable le calcul des perturbations d'un ordre très élevé. Toutefois, depuis quelques années, on est parvenu à déterminer des perturbations de ce genre, soit, comme l'a fait M. Le Verrier, dans son Mémoire sur la grande inégalité de Pallas, en ayant recours à une double interpolation qui concerne le système de deux variables, soit, comme je l'ai fait moi-même, dans les *Comptes rendus* de 1845 (t. XX, p. 774 et suiv.) [1], en recourant aux théorèmes généraux que j'avais établis à cette époque et à une interpolation simple. On peut même, comme je l'ai montré dans le Mémoire du 2 juin 1845, déterminer directement, par de nouvelles formules, et sans interpolation d'aucune espèce, les perturbations à longues périodes avec une exactitude d'autant plus grande qu'elles sont d'un ordre plus élevé. Mais, en soumettant à un nouvel examen mes formules de 1845, j'ai reconnu qu'elles peuvent être avantageusement remplacées par les formules plus simples que je donne aujourd'hui.

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. IX, p. 124.

ANALYSE.

Soit $\mathfrak{R}$ une fonction donnée du sinus et du cosinus de l'argument p. Soit encore

$$Z = \mathfrak{F}(z)$$

ce que devient la fonction $\mathfrak{R}$ quand on y pose

$$z = e^{pi} = 1_p.$$

Supposons enfin que Z, considérée comme fonction de z, reste *monodrome* et *monogène* dans le voisinage du module 1 attribué à la variable z. Alors Z sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de la variable z, et, en nommant A_n le coefficient de z^n dans cette série, on aura

$$A_n = \mathfrak{M}(z^{-n}Z), \tag{1}$$
$$A_{-n} = \mathfrak{M}(z^n Z). \tag{2}$$

Il y a plus : les formules (1), (2) continueront de subsister si, en remplaçant le module 1 de z par un autre module r, on pose, en conséquence,

$$z = r e^{pi} = r_p, \tag{3}$$

et si d'ailleurs on fait varier le module r entre deux limites

$$a < 1, \qquad a' > 1$$

tellement choisies, que la fonction Z ne cesse pas d'être, entre ces limites, monodrôme et monogène.

Soient maintenant

$$z_{,} = a e^{\alpha i} \qquad \text{et} \qquad z' = a' e^{\alpha' i}$$

les valeurs de z correspondantes aux modules a, a', et pour lesquelles la fonction Z cesse d'être monodrome et monogène. A ces valeurs de z correspondront ordinairement des valeurs nulles ou infinies de la fonction Z qui deviendra infiniment petite ou infiniment grande pour une valeur infiniment petite de la différence $z - z_{,}$ ou $z - z'$. C'est ce qui arrivera, par exemple, si $\mathfrak{K}$ est de la forme

$$\mathfrak{K} = \frac{R}{P^s Q^t \ldots}, \tag{4}$$

$P, Q, \ldots, R$ désignant des fonctions entières de $\sin p$, $\cos p$, et s, t, ..., des exposants positifs quelconques. Alors, pour obtenir $z_{,}$ et z', il suffira de résoudre par rapport à la variable z les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad \ldots, \tag{5}$$

et de chercher parmi leurs racines celles qui offriront les modules les plus voisins de l'unité ([1]). Si, pour fixer les idées, on suppose que $z_{,}$ soit racine de l'équation

$$P = 0,$$

la fonction Z de z pourra être présentée sous la forme

$$Z = (1 - z_{,} z^{-1})^{-s} F(z), \tag{6}$$

$F(z)$ étant une fonction qui restera monodrome et monogène dans le voisinage de la valeur $z_{,}$ attribuée à la variable z, et si, parmi les racines des équations (5),

$$z_{\prime\prime} = \mathrm{b}\, e^{6\iota}$$

est celle qui offre le module immédiatement inférieur au module a de $z_{,}$, la fonction $F(z)$ restera généralement monodrome et monogène entre les limites b et a′ du module r de la variable z.

Considérons maintenant, d'une manière spéciale, le cas où la fonction Z est de la forme indiquée par l'équation (6), la fonction $F(z)$ étant monodrome et monogène entre les limites

$$r = \mathrm{b} < \mathrm{a}, \qquad r = \mathrm{a}',$$

et cherchons dans ce cas la valeur de A_{-n}.

([1]) Lorsque $P, Q, \ldots, R$ sont des fonctions réelles de $\cos p$ et $\sin p$, la racine z' est conjuguée à $\frac{1}{z_{,}}$, de sorte qu'on a

$$z' = \mathrm{a}\, e^{-\alpha\iota}, \qquad \mathrm{a}' = \frac{1}{\mathrm{a}}.$$

Si d'abord on suppose la fonction $F(z)$ réduite à l'unité, on aura simplement

$$A_{-n} = \mathfrak{M}[z^n (1 - z_{,} z^{-1})^{-s}] = [s]_n, \tag{7}$$

la valeur $[s]_n$ étant

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

Si au contraire $F(z)$ diffère de l'unité, on aura

$$A_{-n} = \mathfrak{M}[z^n (1 - z_{,} z^{-1})^{-s} F(z)]. \tag{8}$$

Or un moyen très simple de calculer, dans cette dernière hypothèse, la valeur de A_{-n} et de la développer en une série dont les termes successifs décroissent très rapidement pour de grandes valeurs de n, sera évidemment de développer, sous le signe $\mathfrak{M}$, la fonction $F(z)$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $z - z_{,}$. En supposant que le développement de cette fonction soit convergent, on trouvera

$$F(z) = F(z_{,}) + \frac{z - z_{,}}{1} F'(z_{,}) + \frac{(z - z_{,})^2}{1.2} F''(z_{,}) + \ldots; \tag{9}$$

par conséquent l'équation (8) donnera

$$A_{-n} = [s]_n z_{,}^n \left\{ F(z_{,}) - \frac{[1-s]_1}{n+1} z_{,} F'(z_{,}) + \frac{[1-s]_2}{(n+1)(n+2)} z_{,}^2 F''(z_{,}) - \ldots \right\}, \tag{10}$$

et il est clair que, pour de très grandes valeurs de n, les premiers termes de la série renfermée entre les parenthèses dans la formule (10) décroîtront très rapidement avec ceux de leurs facteurs qui dépendent de n, c'est-à-dire avec les termes de la suite

$$1, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad \ldots.$$

Mais, le plus souvent, les séries que renferment les formules (9), (10) seront divergentes, et par suite ces formules devront être rejetées.

Toutefois, dans ce cas-là même, pour obtenir encore avec une grande facilité la valeur de A_{-n}, quand n sera un très grand nombre, il suffira encore de développer $F(z)$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $z - z_,$, mais en limitant la série et en opérant comme il suit.

L'équation (8) subsistera pour tout module de z renfermé entre les limites a, a'. Si d'ailleurs $F(z)$ conserve une valeur finie pour $z = 0$, et si l'on nomme u une variable distincte de z, mais dont le module, supérieur à celui de z, soit encore renfermé entre les limites a, a', on aura

$$(11) \qquad F(z) = \mathfrak{M}\frac{u\,F(u)}{u-z},$$

la lettre $\mathfrak{M}$ indiquant une moyenne isotropique relative à l'argument de la variable u. Enfin, en désignant par m un nombre entier quelconque, on aura

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{u-z} &= \frac{1}{(u-z_,)-(z-z_,)} \\ &= \frac{1}{u-z_,} + \frac{z-z_,}{(u-z_,)^2} + \ldots + \frac{(z-z_,)^{m-1}}{(u-z_,)^m} + \frac{(z-z_,)^m}{(u-z_,)^m(u-z)}. \end{aligned} \right.$$

Donc, si l'on pose, pour abréger,

$$(13) \qquad \upsilon_m = (-1)^m 1.2\ldots m\, z_,^m\, \mathfrak{M}\frac{u\,F(u)}{(u-z_,)^{m+1}}$$

et

$$(14) \qquad \rho_m = \mathfrak{M}\mathfrak{M}\frac{z^{n+m}(1-z_,z^{-1})^{m-s}\,u\,F(u)}{(u-z_,)^m(u-z)},$$

la formule (8) donnera

$$(15) \quad A_{-n} = [s]_n z_,^n \left\{ 1 + \frac{[1-s]_1}{n+1}\upsilon_1 + \ldots + \frac{[1-s]_{m-1}}{(n+1)\ldots(n+m-1)}\upsilon_{m-1} \right\} + \rho_m.$$

Or, à l'aide des formules (13), (14), (15), on déterminera facilement d'abord les valeurs de υ_m et de ρ_m, puis la valeur de A_{-n}. Ainsi la détermination du coefficient A_{-n} résultera du calcul des divers termes

de la série limitée, comprise entre parenthèses dans la formule (5), et de l'évaluation du reste ρ_m. Ajoutons que, pour obtenir le développement de ce reste en une série convergente, il suffira de développer le rapport

$$\frac{u}{u-z}$$

en progression géométrique à l'aide de la formule

$$(16) \qquad \frac{u}{u-z} = 1 + \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} + \ldots,$$

et que la méthode ici appliquée à la détermination du coefficient A_{-n} s'appliquera encore avec la même facilité à la détermination du coefficient A_n. Il reste à dire comment les valeurs de υ_m et de ρ_m se modifient, quand $F(z)$ devient infinie pour $z = 0$. C'est ce que nous expliquerons dans un autre article. Nous montrerons aussi comment des principes exposés dans ce Mémoire on peut déduire le développement d'une fonction en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de deux exponentielles trigonométriques.

501.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur le développement des quantités en séries limitées* (suite).

C. R., T. XXXIV, p. 121 (26 janvier 1852).

Soit toujours Z une fonction de z qui reste monodrome et monogène, tandis que le module r de z varie entre les limites

$$a < 1, \qquad a' > 1.$$

Comme on l'a dit, le coefficient A_{-n} de z^{-n} dans le développement de Z suivant les puissances ascendantes et descendantes de z sera déterminé par la formule

$$A_{-n} = \mathfrak{M}(z^n Z). \tag{1}$$

Soient d'ailleurs

$$z_{,} = \mathrm{a}e^{\varpi i}, \qquad z' = \mathrm{a}'e^{\varpi i}$$

les valeurs de z, correspondantes aux modules a, a', pour lesquelles la fonction Z cesse d'être monodrome et monogène; et supposons, pour fixer les idées,

$$Z = (1 - z_{,}z^{-1})^{-s} F(z),$$

s étant un exposant positif quelconque, et $F(z)$ une fonction qui reste monodrome et monogène pour des valeurs du module r comprises entre les limites b et a'. On aura

$$A_{-n} = \mathfrak{M}[z^n(1 - z_{,}z^{-1})^{-s} F(z)]; \tag{2}$$

et, si $F(z)$ est développable suivant les puissances positives de z, on aura

$$A_{-n} = [s]_n z_{,}^n \left\{ 1 + \frac{[1-s]_1}{n+1} \upsilon_1 + \ldots + \frac{[1-s]_{m-1}}{(n+1)\ldots(n+m-1)} \upsilon_{m-1} \right\} + \rho_m, \tag{3}$$

les valeurs de υ_m et ρ_m étant données par les formules (13) et (14) de la page 394.

Si, au contraire, en développant $F(z)$ suivant les puissances entières de z, on obtient un développement qui renferme les deux espèces de puissances positives et négatives, alors, en nommant u, v deux variables dont les modules u, v, compris entre les limites b, a', soient, le premier inférieur, le second supérieur au module de z, on devra remplacer la formule (11) de la page 394, par la formule plus générale

$$F(z) = \mathfrak{M}\frac{v F(v)}{v - z} - \mathfrak{M}\frac{u F(u)}{u - z}. \tag{4}$$

[*Voir*, dans le Tome XXXII des *Comptes rendus*, la formule (20) de la page 212 et la page 311 du présent Volume.] Alors aussi la formule (3) continuera de subsister si l'on détermine les valeurs de υ_m

et de ρ_m, non plus à l'aide des équations (13) et (14) de la page 394, mais à l'aide des formules

$$\upsilon_m = (-1)^m 1.2.3\ldots m\, z_{,}^m \left[\mathfrak{M}\frac{v F(v)}{(v - z_{,})^{m+1}} - \mathfrak{M}\frac{u F(u)}{(u - z_{,})^{m+1}} \right], \tag{5}$$

$$\rho_m = \mathfrak{M}\mathfrak{M}\frac{z^{n+m}(1 - z_{,}z^{-1})^{m-s} v F(v)}{(v - z_{,})^m (v - z)} - \mathfrak{M}\mathfrak{M}\frac{z^{n+m}(1 - z_{,}z^{-1})^{m-s} u F(u)}{(u - z_{,})^m (u - z)}. \tag{6}$$

D'ailleurs, en différentiant m fois par rapport à z l'équation (4), et posant ensuite $z = z_{,}$, on tirera de cette équation, jointe à la formule (5),

$$\upsilon_m = (-1)^m z_{,}^m F^{(m)}(z_{,}). \tag{7}$$

En conséquence, l'équation (3) donnera

$$\left\{ \begin{aligned} A_{-n} = [s]_n z_{,}^n \Big\{ 1 - &\frac{[1-s]_1}{n+1} z_{,} F'(z_{,}) + \ldots \\ &+ \frac{[1-s]_{m-1}}{(n+1)\ldots(n+m-1)} (-z_{,})^{m-1} F^{(m-1)}(z_{,}) \Big\} + \rho_m. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

La formule (8) fournit un moyen facile, surtout lorsque n est un très grand nombre, d'obtenir la valeur du coefficient A_{-n}. Lorsque la série, dont cette formule offre, entre parenthèses, les premiers termes, est convergente, il suffit d'attribuer au nombre m une valeur infinie, pour reproduire l'équation (10) de la page 393. Mais, dans ce cas-là même, il est avantageux de recourir, pour la détermination de A_{-n}, à la formule (8), en déduisant de l'équation (6) la valeur exacte ou approchée du reste ρ_m. Ajoutons que, à l'aide des formules (6) et (8), on peut atteindre, dans la détermination de A_{-n}, tel degré d'approximation que l'on voudra. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

On peut, à l'aide de divers procédés, et particulièrement en recherchant les modules principaux des fonctions renfermées sous le signe $\mathfrak{M}$, déduire de la formule (6) une quantité δ_m, sinon égale, du moins supérieure au module ρ_m. Cela posé, pour que l'erreur commise dans la détermination du coefficient A_{-n} s'abaisse au-dessous d'une unité décimale d'un certain ordre, il suffira de négliger, dans la formule (8), le reste ρ_m, en attribuant au nombre m, s'il est possible, une valeur telle, que la valeur correspondante de δ_m soit inférieure à cette unité décimale. Lorsqu'il deviendra impossible de satisfaire à cette condition, on devra recourir à une évaluation approximative du reste ρ_m. On pourra, par exemple, développer ρ_m en série convergente et limitée à l'aide de la formule (6) jointe aux suivantes

$$(9)\qquad \frac{u}{u-z} = -\frac{u}{z} - \frac{u^2}{z^2} - \ldots - \frac{u^{l-1}}{z^{l-1}} - \frac{u^l}{z^{l-1}(z-u)},$$

$$(10)\qquad \frac{v}{v-z} = 1 + \frac{z}{v} + \frac{z^2}{v^2} + \ldots + \frac{z^{l-1}}{v^{l-1}} + \frac{z^l}{v^{l-1}(v-z)},$$

et l'on trouvera ainsi

$$(11)\qquad \rho_m = (-1)^m \frac{[s]_n [1-s]_m}{[n+1]_m} z_,^{n+m} [v_0 + v_1 + \ldots + v_{l-1} + u_1 + \ldots + u_{l-1}] + \varsigma_l,$$

les valeurs de u_l, v_l et ς_l étant déterminées par les formules

$$(12)\qquad u_l = \frac{n+m}{s+n-1} \cdots \frac{n+m-l+1}{s+n-l} z_,^{-l} \mathfrak{M} \frac{u^l F(u)}{(u-z_,)^m},$$

$$(13)\qquad v_l = \frac{s+n}{n+m+1} \cdots \frac{s+n+l-1}{n+m+l} z_,^l \, \mathfrak{M} \frac{v^{-l} F(v)}{(v-z_,)^m},$$

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varsigma_l = {} & \mathfrak{M}\mathfrak{M} \frac{z^{n+m+l}(1-z_, z^{-1})^{m-s} v^{1-l} F(v)}{(v-z_,)^m (v-z)} \\ & + \mathfrak{M}\mathfrak{M} \frac{z^{n+m-l+1}(1-z_, z^{-1})^{m-s} u^l F(u)}{(u-z_,)^m (z-u)}. \end{aligned} \right.$$

A l'aide de divers procédés, et spécialement en recherchant les modules principaux des fonctions renfermées sous le signe $\mathfrak{M}$, on pourra déduire de la formule (14) une quantité ε_l, sinon égale, du moins supérieure au module de ς_l; et alors, pour que l'erreur commise dans la détermination de ρ_m s'abaisse au-dessous d'une unité décimale d'un certain ordre, il suffira de négliger ς_l dans la formule (11), en attribuant au nombre l une valeur telle, que ε_l soit inférieur à cette unité décimale.

Il est bon d'observer que la valeur de ς_l, déterminée par la formule (14), se réduit, pour $l=0$, à la valeur de ρ_m fournie par l'équation (6). Par suite aussi on peut prendre pour δ_m ce que devient ς_l quand l s'évanouit. Donc, en définitive, la détermination du coefficient A_{-n}, avec un degré d'approximation donné, pourra être ramenée à la détermination d'une limite ε_l supérieure au module de ς_l, et de la valeur que devra prendre le nombre l pour que cette limite s'abaisse au-dessous d'une quantité donnée.

Reste maintenant à indiquer les procédés les plus simples qui puissent servir à la solution de ces deux derniers problèmes. C'est ce que nous essayerons de faire dans un prochain article.

502.

Analyse mathématique. — *Sur les restes qui complètent les séries limitées.*

C. R., T. XXXIV, p. 156 (2 février 1852).

Les formules que j'ai données dans les précédents articles permettent de développer une moyenne isotropique de la forme

$$\mathfrak{M}(z^n Z)$$

en une série limitée dont les termes décroissent très rapidement quand n est un très grand nombre, et d'exprimer les restes qui complètent ces mêmes séries à l'aide de moyennes isotropiques relatives aux arguments de deux variables z et u ou z et v. On peut alors déterminer sans peine, sinon des valeurs exactes de ces restes, du moins des limites supérieures à leurs modules, en s'appuyant sur quelques propositions générales que je vais énoncer.

Théorème I. — *Soit* $f(z, u)$ *une fonction des variables* z, u *qui demeure monodrome, monogène et finie dans le voisinage d'un certain module* r *de la variable* z, *et d'un certain module* u *de la variable* u.

Désignons d'ailleurs à l'aide de la notation $\Lambda f(z, u)$ *le plus grand des modules que puisse acquérir la fonction* $f(z, u)$, *lorsqu'on fait varier les arguments de* z *et* u, *entre les limites* $-\pi$, $+\pi$, *sans altérer les modules* r *et* u. *Soit enfin* K *la plus petite valeur que puisse acquérir le module* $\Lambda f(z, u)$ *considéré comme fonction des modules* r *et* u, *quand on fait varier ceux-ci entre des limites telles, que la fonction* $f(z, u)$ *ne cesse pas d'être monodrome, monogène et finie. Le module de la moyenne isotropique*

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}\, f(z, u)$$

sera inférieur au module $\Lambda f(z, u)$, *et, à plus forte raison, au module* principal K.

Théorème II. — *Soit* $f(z)$ *une fonction de* z *qui demeure monodrome, monogène et finie dans le voisinage d'un certain module* r *attribué à la variable* z. *Soient encore*

$$a_n, \quad a_{-n}$$

les coefficients des puissances

$$z^n, \quad z^{-n},$$

dans le développement de $f(z)$ *suivant les puissances ascendantes et descendantes de* z. *Si* a_n, a_{-n} *se réduisent à des quantités positives, le module de* $\mathfrak{M}\, f(z)$ *sera inférieur à la quantité positive* $f(r)$. *Si les coefficients* a_n, a_{-n} *ne se réduisent pas à des quantités positives, alors, en désignant par* a_n, a_{-n} *leurs modules respectifs, et par* $\varphi(z)$ *la somme de la série que l'on forme en remplaçant, dans le développement de* $f(z)$, *chaque coefficient par son module, on obtiendra, pour module de* $\mathfrak{M}\, f(z)$, *une quantité positive inférieure au module de* $\mathfrak{M}\, \varphi(z)$, *et, à plus forte raison, à* $\varphi(r)$.

Ajoutons qu'il sera facile de développer $f(z)$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de z, si $f(z)$ est le produit d'une constante par divers facteurs dont les uns soient de la forme

$$(1 - z_{,} z^{-1})^{\mu},$$

et les autres de la forme

$$(1 - z' z)^{\nu},$$

$z_{,}$, z' étant des quantités géométriques dont les modules a, a', multipliés par le module r de z, offrent des produits inférieurs à l'unité. Alors, en effet, le développement de $f(z)$ résultera immédiatement de la multiplication des développements des divers facteurs en séries ordonnées suivant les puissances descendantes ou ascendantes de z.

Il est aisé de voir comment les propositions que je viens de rappeler s'appliquent à la détermination approximative des restes qui complètent les séries limitées, spécialement des restes désignés par ρ_m et par ς_t dans les deux précédents articles, et de limites supérieures aux modules de ces mêmes restes. Ainsi, par exemple, on déduira sans peine de ces propositions, jointes aux formules que contient le premier article, les théorèmes suivants :

Théorème III. — *Soit*

$$Z = (1 - z_{,} z^{-1})^{-s}\, F(z),$$

s étant une quantité positive, le module a *de* $z_{,}$ *étant inférieur à l'unité, et la fonction* $F(z)$ *étant développable, pour un module* r *de* z *compris entre les limites* 1 *et* a, *en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de* z. *Soit encore*

$$A_{-n} = \mathfrak{M}(z^n Z)$$

le coefficient de z^{-n} *dans le développement de* Z *en série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de* z. *Si le coefficient de* z^m *dans le développement de* $F(z)$ *est le produit de* $z_{,}^m$ *par une quantité positive, on aura*

$$A_{-n} = 8_0 + 8_1 + \ldots + 8_{m-1} + \theta_m 8_m, \tag{1}$$

la valeur de 8_m *étant*

$$8_m = (-1)^m \frac{[s]_n [1-s]_m}{(n+1)\ldots(n+m)} z_{,}^{n+m} F^{(m)}(z_{,}), \tag{2}$$

et θ_m *désignant un nombre compris entre les limites* 0, 1. *En d'autres termes, on aura*

$$A_{-n} = 8_0 + 8_1 + \ldots + 8_{m-1} + \rho_m, \tag{3}$$

la valeur de ρ_m *étant donnée par la formule*

$$\rho_m = \theta_m 8_m. \tag{4}$$

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si le coefficient de z^m dans le développement de* F(z) *est le produit de $z_{\prime}^m$ par une quantité géométrique, et si l'on nomme* $\Phi(z)$ *ce que devient* F(z) *lorsqu'à cette quantité géométrique on substitue son module, alors l'équation* (3) *continuera de subsister, pourvu qu'à la formule* (4) *on substitue la suivante :*

$$\rho_m = (-1)^m \theta_m \frac{[s]_n [1-s]_m}{(n+1)\dots(n+m)} z_{\prime}^{n+m} \Phi^{(m)}(z_{\prime}).$$

Parmi les applications que l'on peut faire de la formule (1), on doit remarquer celle qui se rapporte au cas où l'on aurait

$$F(z) = (1 - z'z)^{-s},$$

z' étant conjugué à $z_{\prime}$. Alors, en posant

$$z_{\prime} = a e^{\alpha i}, \qquad z' = a e^{-\alpha i}$$

et

$$\lambda = \frac{a^2}{1-a^2},$$

on trouverait

$$\aleph_m = (-1)^m \frac{[s]_n [s]_m [1-s]_m}{[n+1]_m (1-a^2)^s} \lambda^m z^n.$$

Si, dans cette même hypothèse, on posait

$$z = e^{pi},$$

on aurait

$$Z = [1 - 2a\cos(p-\alpha) + a^2]^{-s}.$$

Donc, si l'on nomme A_{-n} le coefficient de e^{-npi} dans le développement de l'expression

$$[1 - 2a\cos(p-\alpha) + a^2]^{-s},$$

on aura

$$A_{-n} = \frac{[s]_n a^n e^{n\alpha i}}{(1-a^2)^s}\Big[1 - \frac{s}{1}\,\frac{1-s}{n+1}\lambda + \frac{s(s+1)}{1.2}\,\frac{(1-s)(2-s)}{(n+1)(n+2)}\lambda^2 - \dots$$
$$+ (-1)^m \theta_m \frac{s(s+1)\dots(s+m-1)}{1.2\dots m}\,\frac{(1-s)\dots(m-s)}{(n+1)\dots(n+m)}\lambda^m\Big],$$

la lettre λ désignant le rapport $\frac{a^2}{1-a^2}$, et θ_m étant un nombre compris

entre les limites 0, 1. Il importe d'observer que la formule ici obtenue ne subsiste pas seulement dans le cas où, le rapport λ étant inférieur à l'unité, la série comprise entre parenthèses dans le second membre est convergente. Cette formule subsiste aussi dans le cas où, le rapport θ étant supérieur à l'unité, la série devient divergente, et elle permet encore, dans ce dernier cas, d'obtenir avec facilité, quand n est un très grand nombre, une valeur très approchée du coefficient A_{-n}.

503.

Analyse mathématique. — *Sur le changement de variable indépendante dans les moyennes isotropiques.*

C. R., T. XXXIV, p. 159 (2 février 1852).

Il est souvent utile de remplacer, dans une moyenne isotropique, une variable indépendante par une autre. On y parvient, dans un grand nombre de cas, en s'appuyant sur la proposition suivante :

Théorème. — *Soient*

$$f(z) \quad \text{et} \quad u = \varphi(z)$$

deux fonctions qui demeurent monodromes, monogènes et finies dans le voisinage d'une certaine valeur k attribuée au module r de la variable

$$z = re^{pi}.$$

Soient encore ρ et ϖ le module et l'argument de la fonction u, en sorte qu'on ait

$$u = \rho e^{\varpi i};$$

puis, en attribuant au module ρ une valeur particulière h, concevons que l'on détermine z à l'aide de la formule

$$(1) \qquad \varphi(z) = he^{\varpi i},$$

et substituons la valeur de z exprimée en fonction de ϖ, c'est-à-dire l'une des racines de l'équation (1), *dans la formule*

$$\Theta = \frac{\mathrm{D}_\varpi \,\mathrm{l}(z)}{i} = \frac{d\,\mathrm{l}(z)}{d\,\mathrm{l}\,u}. \tag{2}$$

Si la racine substituée est telle, que la partie réelle de Θ soit toujours positive, et que la courbe DEF, *dont l'affixe variable est cette racine même, enveloppe le pôle, c'est-à-dire le point dont l'affixe est nulle; si, d'ailleurs, l'arc de la courbe croît par degrés insensibles avec l'argument ϖ, et si cette courbe se ferme au moment où l'arc ϖ se trouve augmenté d'une circonférence entière; si enfin les fonctions $\mathrm{f}(z)$, $\varphi(z)$ restent monodromes, monogènes et finies dans le voisinage de toute valeur de z propre à représenter l'affixe d'un point situé entre la courbe* DEF *et le cercle décrit de l'origine comme centre avec le rayon k; alors, pour transformer la moyenne isotropique*

$$\mathfrak{M}\,\mathrm{f}(z)$$

relative à l'argument de la variable z et correspondante au module h de z en une moyenne isotropique relative à l'argument de la variable u et correspondante au module h de u, il suffira de multiplier, sous le signe $\mathfrak{M}$, la fonction $\mathrm{f}(z)$ par le facteur Θ.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de rappeler que, si, une courbe fermée étant tracée dans le plan des affixes, on nomme $\mathfrak{F}(z)$ une fonction de la variable z, on pourra, sans altérer la valeur de l'intégrale $\int \mathfrak{F}(z)\,dz$, étendue au périmètre entier de la courbe, faire varier la forme de la courbe par degrés insensibles, entre les limites indiquées par deux contours extrêmes, pourvu qu'entre ces limites la fonction $\mathfrak{F}(z)$ ne cesse pas d'être monodrome, monogène et finie. Cela posé, concevons que l'on fasse coïncider successivement la courbe variable avec le cercle qui a le pôle pour centre et k pour rayon, puis avec la courbe DEF, en posant d'ailleurs

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\mathrm{f}(z)}{iz}:$$

les deux valeurs qu'on obtiendra successivement pour l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(z)\,dz,$$

étendue au périmètre entier du cercle ou de la courbe DEF, seront évidemment les deux moyennes isotropiques indiquées dans le théorème I, attendu qu'on aura

$$\frac{\mathrm{D}_p z}{iz} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{D}_\varpi z}{iz} = \Theta.$$

Pour montrer une application très simple du théorème ci-dessus énoncé, posons

$$\mathrm{f}(z) = u^n \,\mathrm{F}(z),$$

la fonction u étant déterminée par l'équation

$$u = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{3}$$

et concevons que, la fonction $\mathrm{F}(z)$ étant monodrome, monogène et finie, il s'agisse de substituer la variable indépendante u à la variable indépendante z dans la moyenne isotropique

$$s = \mathfrak{M}\left[\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^n \mathrm{F}(z)\right], \tag{4}$$

relative à l'argument p de la variable z. On vérifiera l'équation (3) de manière à remplir les conditions énoncées dans le théorème, si l'on prend

$$z = u\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}\right),$$

le module h de u étant supérieur à l'unité. Cela posé, on trouvera

$$\Theta = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc, en vertu du théorème, on aura encore

$$s = \mathfrak{M}\left\{u^n\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{F}\left[u\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}\right)\right]\right\}, \tag{5}$$

le signe $\mathfrak{M}$ étant relatif à l'argument ϖ de la variable u. Si, pour fixer les idées, on prend $F(z) = 1$, les formules (4) et (5) donneront l'une et l'autre

$$s = \left[\frac{1}{2}\right]_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

Le théorème ci-dessus établi peut être utilement appliqué à la solution d'un grand nombre de questions diverses. Il fournit, par exemple, le moyen de développer une fonction implicite d'une variable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de cette variable. Dans le cas où le développement trouvé renferme seulement les puissances ascendantes de la variable, ce développement coïncide avec la série de Lagrange.

Le théorème énoncé offre encore, ainsi que nous le montrerons dans une autre séance, le moyen de déterminer facilement les coefficients des termes dont les rangs sont indiqués par de très grands nombres dans le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de deux exponentielles trigonométriques, et, par suite, les perturbations planétaires d'un ordre très élevé.

504.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur l'application du Calcul infinitésimal à la détermination des fonctions implicites.*

C. R., T. XXXIV, p. 265 (23 février 1852).

Soient z une variable réelle ou imaginaire, et

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

n fonctions implicites de cette variable, déterminées par un système de n équations distinctes. Supposons, d'ailleurs, que l'on connaisse les valeurs particulières $u_0, v_0, w_0, \ldots$ de $u, v, w, \ldots$ correspondantes

à une certaine valeur z_0 de la variable z. Un moyen de résoudre les équations données sera de développer $u, v, w, \ldots$ suivant les puissances ascendantes de la différence $z - z_0$. Mais ce développement ne pourra s'effectuer que sous certaines conditions qu'il importe de mettre en évidence. Ayant recherché ces conditions, j'ai reconnu que, pour les découvrir, il convient de substituer au système des équations données le système de celles qu'on en déduit à l'aide d'une première différentiation; et je suis ainsi parvenu à établir sur les fonctions implicites et sur leurs développements en série des théorèmes généraux qui paraissent dignes de remarque. Entrons à ce sujet dans quelques détails, en commençant par ceux qui concernent un système d'équations différentielles.

Représentons par

$$\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W}, \quad \ldots$$

n fonctions de $z, u, v, w, \ldots$ qui restent monodromes [1], monogènes et finies, dans le voisinage des valeurs $z_0, u_0, v_0, w_0, \ldots$ attribuées à $z, u, v, w, \ldots$; et concevons d'abord que l'on assujettisse $u, v, w, \ldots$ à la double condition de vérifier, quel que soit z, les équations différentielles comprises dans la formule

$$\frac{dz}{\mathfrak{z}} = \frac{du}{\mathfrak{v}} = \frac{dv}{\mathfrak{V}} = \frac{dw}{\mathfrak{W}} = \ldots \tag{1}$$

et de se réduire à $u_0, v_0, w_0, \ldots$ pour $z = z_0$. Si $\mathfrak{z}$ ne s'évanouit pas quand on prend

$$z = z_0, \qquad u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0, \qquad \ldots,$$

alors, à l'aide des théorèmes établis dans mon Mémoire de 1835 [2] sur l'intégration des équations différentielles, on prouvera qu'il est possible de satisfaire, au moins quand le module de la différence $z - z_0$ ne dépasse pas une certaine limite, aux deux conditions énon-

(1) Une fonction de z est *monodrome*, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à z, quand elle reste continue et offre une valeur unique pour chaque valeur de z; la même fonction est *monogène*, quand sa dérivée est *monodrome*.

(2) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XII.

cées, par des valeurs de $u, v, w, \ldots$ qui seront développées en séries convergentes, et qui représenteront les *intégrales générales* des équations différentielles données. Il y a plus : on peut affirmer ([1]) que, dans l'hypothèse admise, ces intégrales générales seront les seules

([1]) On peut effectivement démontrer cette assertion comme il suit.

Considérons d'abord le cas particulier où, les variables $u, v, w, \ldots$ étant réduites à la seule variable u, on a $z_0 = 0$. Supposons encore que, la fonction monodrome et monogène $\mathfrak{Z}$ conservant, pour des valeurs nulles de z et u, une valeur finie distincte de zéro, la fonction monodrome et monogène $\mathfrak{U}$ s'évanouisse, quel que soit z, pour $u = 0$. Je dis qu'alors

$$u = 0$$

sera la seule valeur de u qui, sans cesser d'être continue, remplira la double condition de s'évanouir avec z, et de vérifier, au moins pour tout module de z inférieur à une certaine limite, l'équation différentielle

$$du = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}}\,dz. \tag{a}$$

Pour le prouver, il suffit d'observer que, dans l'hypothèse admise, l'équation différentielle donnée pourra être présentée sous la forme

$$du = Pu\,dz, \tag{b}$$

P étant une fonction qui, pour un très petit module de z, acquerra une valeur finie, sensiblement égale à celle de la fonction dérivée $D_u \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}}$. En effet, remplaçons l'équation (a) par l'équation (b); et soit, s'il est possible,

$$u = \varphi(z)$$

une fonction de z qui, s'évanouissant avec z sans être constamment nulle, varie avec z par degrés insensibles et vérifie, au moins pour un très petit module de z, l'équation (b). Si l'on nomme r le module z, et $\mathfrak{u}$ le module de $\varphi(z)$, $\mathfrak{u}$ sera infiniment petit en même temps que r; et l'on pourra par suite attribuer au module r une valeur $\mathfrak{r}$ assez petite pour que la valeur correspondante $\mathfrak{u}$ du module $\mathfrak{u}$ surpasse celles qu'on obtiendrait en supposant $r < \mathfrak{r}$. Cela posé, si l'on applique une intégration rectiligne aux deux membres de l'équation (b), on en tirera, non seulement

$$\mathfrak{u} = \operatorname{mod} \int_0^z Pu\,dz,$$

mais encore

$$\mathfrak{u} < \mathfrak{p}\mathfrak{r}\mathfrak{u},$$

$\mathfrak{p}$ étant la plus grande valeur que puisse acquérir le module de P, tandis que le module r de z varie entre 0, $\mathfrak{r}$. Donc, si $\mathfrak{u}$ diffère de zéro, on aura

$$1 < \mathfrak{p}\mathfrak{r}. \tag{c}$$

Mais, dans l'hypothèse admise, $\mathfrak{p}$ sera, pour de très petites valeurs de $\mathfrak{r}$, une petite quan-

valeurs de $u, v, w, \ldots$ qui, variant avec z par degrés insensibles, rempliront, pour un module suffisamment petit de $z - z_0$, les deux conditions énoncées. Enfin, comme les divers termes des séries obtenues seront des fonctions monodromes, monogènes et finies de la variable z, on pourra en dire autant des valeurs trouvées des variables $u, v, w, \ldots$ ou même d'une fonction monodrome, monogène et finie de ces variables.

tité finie distincte de zéro, sensiblement égale au module qu'acquerra la fonction dérivée $D_u \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{U}}$ pour une valeur nulle de z. Donc, en assignant à $\mathfrak{r}$ une valeur suffisamment petite, on reconnaîtra que la formule (c) doit être rejetée, en sorte qu'il est impossible d'attribuer à $\mathfrak{u}$ et à $\varphi(z)$ des valeurs distinctes de zéro.

Au cas spécial que nous venons d'examiner, substituons maintenant le cas le plus général où, le nombre n des variables $u, v, w, \ldots$ étant quelconque, on aurait encore $z_0 = 0$, et où, la fonction monodrome et monogène $\mathfrak{Z}$ conservant, pour des valeurs nulles de $z, u, v, w, \ldots$, une valeur finie, distincte de zéro, les fonctions monodromes et monogènes $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \ldots$ s'évanouiraient toutes, quel que soit z, pour des valeurs nulles de $u, v, w, \ldots$. Alors, par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, et en substituant au module de u la somme des modules de u, de v, de w, $\ldots$, on prouverait encore qu'il n'est pas possible, dans l'hypothèse admise, de satisfaire aux équations différentielles

$$du = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}}\,dz, \qquad dv = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{Z}}\,dz, \qquad dw = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}}\,dz, \qquad \ldots, \tag{d}$$

par des valeurs de $u, v, w, \ldots$ qui s'évanouissent avec z, sans être constamment nulles, et varient avec z par degrés insensibles dans le voisinage d'une valeur nulle de z.

Considérons enfin le cas où, les valeurs particulières $z_0, u_0, v_0, w_0, \ldots$ de $z, u, v, w, \ldots$ étant distinctes de zéro, ainsi que la valeur correspondante de $\mathfrak{Z}$, les fonctions $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \ldots$ seraient, au moins dans le voisinage de ces valeurs particulières, des fonctions monodromes, monogènes et finies; et soient alors

$$u = \varphi(z), \qquad v = \chi(z), \qquad w = \psi(z), \qquad \ldots$$

les intégrales générales des équations (d), déduites de ces équations à l'aide de la méthode que renferme le Mémoire de 1835. On pourra encore affirmer qu'il n'existe point d'autre système d'intégrales générales, c'est-à-dire qu'on ne saurait trouver d'autres valeurs de $u, v, w, \ldots$ qui, variant avec z par degrés insensibles, remplissent la double condition de vérifier les équations (d), quel que soit z, et de se réduire à $u_0, v_0, w_0, \ldots$ pour $z = z_0$; et, pour le démontrer, il suffira de raisonner comme dans le cas précédent, en substituant aux variables

$$z, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

les différences

$$z - z_0, \quad u - \varphi(z), \quad v - \chi(z), \quad w - \psi(z), \quad \ldots,$$

dont chacune pourra être, pour plus de commodité, représentée par une seule lettre.

Pour abréger, nous nommerons désormais fonction *synectique* une fonction d'une ou de plusieurs variables qui restera monodrome, monogène et finie, dans le voisinage d'un système quelconque de valeurs finies attribuées à ces mêmes variables. Cette définition étant admise, on déduira immédiatement des principes que nous venons d'établir la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient z une variable réelle ou imaginaire et*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

n fonctions de z assujetties : 1° à varier avec z par degrés insensibles, en vérifiant les n équations différentielles comprises dans la formule

$$\frac{dz}{\mathfrak{Z}} = \frac{du}{\mathfrak{U}} = \frac{dv}{\mathfrak{V}} = \frac{dw}{\mathfrak{W}} = \ldots, \tag{1}$$

où $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, … représentent des fonctions synectiques de z, u, v, w, …; 2° à prendre les valeurs particulières et finies u_0, v_0, w_0, … pour une certaine valeur particulière et finie z_0 de la variable z. On pourra satisfaire à ces deux conditions, au moins pour des modules peu considérables de la différence $z - z_0$, par un système unique de valeurs de u, v, w, …; et ces valeurs, qui représenteront les intégrales générales, seront des fonctions monodromes, monogènes et finies de z, tant que le module ρ de la différence $z - z_0$ n'atteindra pas une certaine limite λ. D'ailleurs, cette limite λ, que nous appellerons le module principal *de la différence $z - z_0$, sera le plus petit de ceux pour lesquels se vérifiera ou l'équation* caractéristique

$$\mathfrak{Z} = 0, \tag{2}$$

ou l'une des équations

$$\frac{1}{u} = 0, \quad \frac{1}{v} = 0, \quad \frac{1}{w} = 0, \quad \ldots \tag{3}$$

Concevons maintenant que Ω désigne une fonction synectique des variables z, u, v, w, …. On conclura encore des principes ci-dessus exposés que, si l'on substitue dans Ω les valeurs de u, v, w, …, fournies par les intégrales générales, le résultat de cette substitution sera une fonction monodrome, monogène et finie de z, tant que le module ρ de $z - z_0$ n'atteindra pas la limite λ, pour laquelle l'une des équations

$$\mathfrak{Z} = 0, \quad \frac{1}{\Omega} = 0$$

pourra être vérifiée. Alors aussi, en vertu du théorème général sur la convergence des développements ordonnés suivant les puissances ascendantes d'une variable, Ω sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la différence $z - z_0$. Mais cette dernière série cessera généralement d'être convergente, à partir de l'instant où le module ρ atteindra la limite λ.

Pour le prouver, il suffit d'observer que, si la différence $z - z_0$ acquiert, avec le module λ, un argument tel, que la valeur correspondante de z vérifie ou l'équation

$$\frac{1}{\Omega} = 0,$$

ou l'équation

$$\mathfrak{Z} = 0,$$

on obtiendra, en général, une valeur infinie, dans le premier cas, pour Ω, et, dans le second cas, pour la dérivée de Ω considérée comme fonction de z, c'est-à-dire pour la somme

$$D_z\Omega + D_u\Omega\, D_z u + D_v\Omega\, D_z v + D_w\Omega\, D_z w + \ldots,$$

qui, eu égard à l'équation (1), peut être présentée sous la forme

$$\frac{\mathfrak{Z}\, D_z\Omega + \mathfrak{U}\, D_u\Omega + \mathfrak{V}\, D_v\Omega + \mathfrak{W}\, D_w\Omega + \ldots}{\mathfrak{Z}},$$

et devient généralement infinie avec $\frac{1}{\mathfrak{Z}}$. En conséquence, on peut énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le theorème I, si l'on transforme une fonction synectique Ω des variables z, u, v, w, … en une fonction de la seule variable z, par la substitution des valeurs* *de u, v, w, ..., qui représentent les intégrales générales des équations différentielles comprises dans la formule* (1), *Ω considérée comme fonction de z restera monodrome, monogène et finie jusqu'au moment où le module ρ de la différence $z - z_0$ atteindra le plus petit de ceux pour lesquels pourra se vérifier l'une des équations*

$$(4) \qquad \mathfrak{Z} = 0, \qquad \frac{1}{\Omega} = 0.$$

Ajoutons que, jusqu'à ce moment, la fonction Ω sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $z - z_0$, et que la série obtenue deviendra généralement divergente si le module ρ devient supérieur à la limite indiquée.

Concevons à présent que u, v, w, ... soient assujetties à varier avec z par degrés insensibles, de manière à vérifier, non plus le système de n équations différentielles, mais les n équations finies

$$(5) \qquad U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0, \qquad \ldots,$$

U, V, W, ..., étant des fonctions synectiques des variables z, u, v, w, ... Supposons d'ailleurs que l'on connaisse les valeurs particulières u_0, v_0, w_0, ... de u, v, w, ..., correspondantes à une certaine valeur particulière z_0 de z. La résolution des équations (5) pourra être réduite à la recherche de valeurs de u, v, w, ..., qui satisfassent à la double condition de vérifier les équations différentielles

$$(6) \qquad dU = 0, \qquad dV = 0, \qquad dW = 0, \qquad \ldots,$$

et de prendre pour $z = z_0$ les valeurs particulières u_0, v_0, w_0, ... D'ailleurs, si l'on représente par $\mathfrak{Z}$ la *résultante*

$$\mathrm{S}(\pm \mathrm{D}_u U \, \mathrm{D}_v V \, \mathrm{D}_w W \ldots)$$

formée avec les divers termes du Tableau

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{D}_u U, & \mathrm{D}_v U, & \mathrm{D}_w U, & \ldots, \\
\mathrm{D}_u V, & \mathrm{D}_v V, & \mathrm{D}_w V, & \ldots, \\
\mathrm{D}_u W, & \mathrm{D}_v W, & \mathrm{D}_w W, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

on tirera des équations (6), résolues par rapport à du, dv, dw, ..., d'autres équations de la forme

$$(7) \qquad du = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}} dz, \qquad dv = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{Z}} dz, \qquad dw = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}} dz, \qquad \ldots,$$

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, ... étant ainsi que $\mathfrak{Z}$ des fonctions monodromes, monogènes et finies de z, u, v, w, ..., et il est clair que le système des équations (7) pourra être remplacé par la formule (1).

Cela posé, les théorèmes I et II entraineront évidemment les propositions suivantes :

Théorème III. — *Soient z une variable réelle ou imaginaire, et*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

n fonctions de z assujetties à varier avec z par degrés insensibles, en vérifiant les n équations finies

$$(5) \qquad U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0, \qquad \ldots,$$

dans lesquelles U, V, W, ... représentent des fonctions synectiques de z, u, v, w, ... Supposons d'ailleurs que l'on connaisse des valeurs particulières et finies u_0, v_0, w_0, ... de u, v, w, ..., correspondantes à une certaine valeur particulière et finie z_0 de la variable z, et posons, pour abréger,

$$\mathfrak{Z} = \mathrm{S}(\pm \mathrm{D}_u U \, \mathrm{D}_v V \, \mathrm{D}_w W \ldots).$$

On satisfera aux équations (5) *par un système unique de valeurs u, v, w, ..., qui seront des fonctions monodromes, monogènes et finies de z, jusqu'au moment où le module ρ de la différence $z - z_0$ atteindra le plus petit de ceux pour lesquels pourra se vérifier ou l'équation*

$$\mathfrak{Z} = 0,$$

ou l'une des équations

$$\frac{1}{u} = 0, \qquad \frac{1}{v} = 0, \qquad \frac{1}{w} = 0, \qquad \ldots.$$

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si l'on transforme une fonction synectique Ω des variables z,*

$u, v, w, \ldots$ en une fonction de la seule variable z, par la substitution des valeurs trouvées de $u, v, w, \ldots$; Ω, considérée comme fonction de z, restera monodrome, monogène et finie jusqu'au moment où le module ρ de la différence $z - z_0$ atteindra le plus petit de ceux pour lesquels pourra se vérifier l'une des équations

$$\mathfrak{D} = 0, \qquad \frac{1}{\Omega} = 0.$$

Ajoutons que, jusqu'à ce moment, la fonction Ω sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $z - z_0$, et que la série deviendra divergente, si le module ρ dépasse la limite indiquée.

Nous appellerons *équations synectiques* des équations finies ou des équations différentielles dont les premiers membres ne renfermeront que des fonctions synectiques des variables et de leurs dérivées. Cela posé, les théorèmes que nous venons d'énoncer se trouveront tous compris dans le suivant :

Théorème V. — *Si Ω désigne une fonction de z déterminée par un système d'équations synectiques, et acquiert la valeur finie Ω_0 pour une certaine valeur particulière et finie z_0 de la variable z, cette fonction restera monodrome, monogène et finie jusqu'au moment où le module de la différence $z - z_0$ atteindra le plus petit de ceux pour lesquels pourra se vérifier l'une des équations de condition*

$$\Omega = \frac{1}{0}, \qquad D_z\Omega = \frac{1}{0};$$

et, jusqu'à ce moment, Ω pourra être représentée par la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $z - z_0$. La même série deviendra généralement divergente, quand le module de cette différence dépassera la limite indiquée.

Lorsque la fonction Ω est simplement une fonction synectique de z, alors, en vertu du théorème V, elle est toujours développable suivant les puissances ascendantes de z, et, par conséquent, on peut toujours

considérer une fonction synectique comme une fonction entière de z, composée d'un nombre fini ou infini de termes. Telles sont, par exemple, les fonctions e^{az}, $\cos az$, etc.

On peut appliquer les théorèmes que nous venons d'énoncer même à la détermination ou au développement d'une inconnue Ω déterminée, en fonction de z, par un système d'équations simultanées qui ne seraient pas synectiques. Pour y parvenir, il suffira de transformer les équations données en équations synectiques. Or il est ordinairement facile d'atteindre ce but, à l'aide des procédés que fournit l'Analyse algébrique, et en augmentant, s'il est nécessaire, le nombre des inconnues.

Ainsi, par exemple, les équations non synectiques

$$u = \mathrm{l}(z), \qquad u = z^{\frac{1}{2}}, \qquad u = \arcsin z$$

pourront être remplacées par les équations synectiques

$$e^u = z, \qquad u^2 = z, \qquad \sin u = z,$$

et l'équation non synectique

$$v = \mathrm{A}z^a + \mathrm{B}z^b + \ldots + \mathrm{H}z^h,$$

où $a, b, \ldots, h$ sont des exposants quelconques, pourra être remplacée par le système des deux équations synectiques

$$v = \mathrm{A}e^{au} + \mathrm{B}e^{bu} + \ldots + \mathrm{H}e^{hu}, \qquad e^u = z.$$

505.

Analyse mathématique. — *Rapport sur de nouvelles recherches relatives à la série de* Lagrange, *et présentées à l'Académie, par M.* Félix Chio, de Turin.

C. R., T. XXXIV, p. 304 (1er mars 1852).

M. Félix Chio, de Turin, a présenté successivement à l'Académie deux Mémoires sur la série de Lagrange. Le premier a été honoré de l'approbation de l'Académie, qui en a voté l'impression dans le *Recueil des Savants étrangers*. Dans ce premier Mémoire, l'auteur, après avoir rappelé le théorème général, établi par l'un de nous, sur la convergence du développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable, avait appliqué ce théorème ([1]) à la série à l'aide de laquelle Lagrange exprime l'une des racines d'une équation algébrique ou transcendante, puis il avait déduit de son analyse le caractère propre de cette racine, dans le cas où elle est réelle. Il avait ainsi reconnu l'inexactitude d'une proposition énoncée dans la Note XI de la *Résolution des équations numériques* (édition de 1802, page 227), savoir que la racine dont il s'agit est la plus petite, abstraction faite du signe, et il avait substitué à cette assertion de Lagrange une proposition nouvelle qui mérite d'être remarquée.

Dans le Mémoire dont nous avons aujourd'hui à rendre compte, M. Félix Chio considère un cas spécial traité par Lagrange, dans les *Mémoires de Berlin* de 1768, savoir le cas où, l'équation à résoudre étant présentée sous la forme

$$u - x + \mathrm{f}(x) = 0, \tag{1}$$

et le paramètre u étant réel, la fonction $\mathrm{f}(x)$ est elle-même réelle et de la forme

$$\mathrm{f}(x) = Ax^a + Bx^b + \ldots + Hx^h.$$

Dans ce cas, le terme général de la série, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{\mathrm{D}_u^{n-1}[\mathrm{f}(u)]^n}{1.2\ldots n},$$

([1]) En appliquant ce même théorème, dans mes *Exercices d'Analyse*, à la série de Lagrange, et en supposant cette série ordonnée suivant les puissances ascendantes d'un paramètre variable, j'ai dit qu'elle demeure convergente quand le module du paramètre est inférieur au plus petit de ceux qui introduisent des racines égales dans l'équation donnée. Cette proposition est exacte. Mais il convient d'ajouter, avec M. Chio, que la série de Lagrange demeure convergente, quand le module du paramètre est inférieur au plus petit de ceux qui rendent égales deux racines dont l'une est précisément la somme de la série. Telle est, en effet, la conséquence qui se déduit naturellement du simple énoncé du théorème général.

se transforme en un polynôme dont les divers termes ajoutés les uns aux autres reproduisent cette expression même. Or, si l'on substitue à celle-ci ou les divers termes dont elle est la somme, ou seulement celui de ces termes qui offre le plus grand module, on obtiendra, dans la première hypothèse, une série multiple, dans la seconde hypothèse, une série simple, mais distincte de la série de Lagrange. La nouvelle série simple dont nous venons de parler est précisément celle que Lagrange a substituée à sa propre série, dans les Mémoires de 1768. Lagrange a supposé que ces deux séries simples doivent être toutes deux à la fois ou convergentes ou divergentes. Mais, comme l'observe très bien M. Chio, cette supposition ne saurait être généralement admise, et, pour que les résultats qu'on en tire ne soient pas erronés, il est nécessaire que le polynôme $\mathrm{f}(x)$ satisfasse à certaines conditions. En recherchant ces conditions, M. Chio a été conduit à de nouveaux théorèmes qui concernent les séries simples ou multiples et qui nous paraissent dignes d'être signalés. Nous allons les indiquer en peu de mots.

Concevons que le terme général u_n d'une série simple

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots$$

soit décomposé en plusieurs parties qui offrent toutes le même argument. Soient

$$N = \varphi(n)$$

le nombre de ces parties, et T_n celle qui offre le plus grand module. Le module de u_n sera compris entre les modules de T_n et du produit NT_n. Or, de cette seule remarque, il résulte immédiatement que, si N est le terme général d'une série dont le module soit l'unité, les séries simples dont les termes généraux sont u_n et T_n seront toutes deux convergentes, ou toutes deux divergentes en même temps que la série multiple produite par la décomposition du terme général u_n en plusieurs parties. A l'aide de ce théorème, M. Chio prouve aisément que la règle de convergence donnée par Lagrange dans les Mémoires de 1768 fournit des résultats exacts, lorsque, dans le polynôme

$$f(x) = Ax^a + Bx^b + \ldots + Hx^h,$$

les coefficients

$$A,\quad B,\quad \ldots,\quad H$$

sont des quantités de même signe, et que les exposants

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad h$$

sont, ou tous négatifs, ou tous positifs, mais supérieurs à l'unité, leurs valeurs numériques étant rationnelles ou irrationnelles; ou tous entiers et positifs, l'un d'eux pouvant être nul. Sous ces conditions, et en supposant que les deux exposants a, h soient le plus petit et le plus grand, abstraction faite des signes, M. Chio démontre que la valeur numérique du rapport

$$\frac{f(u+x)}{x}$$

offre un minimum correspondant à une valeur de x comprise entre les limites

$$\frac{u}{h-1},\quad \frac{u}{a-1},$$

dans le cas où a diffère de zéro, ou bien entre les limites

$$\frac{u}{h-1},\quad \frac{u}{0} = \infty,$$

dans le cas où a s'évanouit; puis, en nommant R le minimum dont il s'agit, M. Chio fait voir que la règle donnée par Lagrange peut être réduite au théorème dont voici l'énoncé :

La série de Lagrange sera convergente ou divergente, suivant que l'on aura

$$R < 1 \quad \text{ou} \quad R > 1.$$

Ajoutons que la valeur de x correspondante au minimum R est fournie par l'équation

$$f(u+x) = x f'(u+x), \tag{2}$$

qui, comme le remarque M. Chio, et comme on peut aisément le démontrer ([1]), offre une seule racine réelle comprise entre les limites ci-dessus indiquées.

M. Chio a pensé qu'il ne serait pas sans intérêt de comparer les résultats que nous venons de mentionner avec ceux que l'un de nous a consignés dans le Mémoire *Sur divers points d'Analyse* ([2]), présenté à l'Académie en 1827. Suivant les principes qui s'y trouvent exposés, et que l'Auteur a reproduits ou même développés dans un autre Mémoire lu à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831 ([3]), pour savoir si la série de Lagrange est convergente ou divergente, il suffit de calculer un certain module R du rapport

$$\frac{f(u+x)}{x},$$

savoir, celui qui a reçu le nom de *module principal*, et qui correspond à une certaine racine de l'équation (2); puis, de voir si ce module principal est inférieur ou supérieur à l'unité. D'ailleurs, lorsque, la variable x étant imaginaire et de la forme

$$x = \mathrm{X}e^{pi},$$

la fonction $f(x)$ se réduit au polynôme

$$Ax^a + Bx^b + \ldots + Hx^h$$

et remplit les conditions précédemment indiquées, le module principal du rapport

$$\frac{f(u+x)}{x}$$

offre les caractères énoncés dans le Mémoire de 1831 (tome II des *Exercices*, page 45), en sorte qu'*il est tout à la fois un module maximum relativement à l'angle p, et un module minimum relativement à* X;

([1]) *Voir* la seconde des Notes jointes à ce Rapport.

([2]) Tome VIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*. (*Œuvres de Cauchy*, S. I, T. II.)

([3]) Tome II des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (*Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XII).

et, de ce double caractère, il résulte nécessairement que la règle générale donnée dans le Mémoire sur divers points d'Analyse s'accorde avec celle à laquelle M. Chio réduit la règle particulière donnée par Lagrange, pour le cas spécial traité par le grand géomètre dans les Mémoires de 1768.

M. Chio ne s'est point borné à établir les théorèmes que nous avons rappelés et les conditions sous lesquelles la règle de Lagrange pouvait être admise : il a encore mis en évidence leur utilité, en appliquant sa méthode à divers exemples. Il a considéré en particulier le cas où, la fonction $f(x)$ étant proportionnelle à $\sin x$, on développe le rayon vecteur mené du Soleil à une planète qui se mouvrait seule autour de cet astre, en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'excentricité de l'orbite, et il a fait voir comment, dans ce cas, on peut déduire de ses théorèmes une démonstration rigoureuse de la règle de convergence que Laplace a obtenue en supposant l'anomalie moyenne réduite à un angle droit. Mais, après avoir ainsi retrouvé le résultat de Laplace, il a remarqué, avec raison, que la règle donnée par Lagrange ne résout pas la question de savoir si la série qui représente, pour une valeur quelconque de l'anomalie moyenne, le développement du rayon vecteur, est convergente ou divergente. Ici, en effet, les conditions sous lesquelles la règle de Lagrange peut être admise ne sont pas remplies, attendu que dans la série

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

qui représente le développement de $\sin x$, les coefficients des diverses puissances de x sont alternativement positifs et négatifs.

Aux divers résultats que nous venons de signaler, et qui forment l'objet principal du Mémoire dont nous avons à rendre compte, M. Chio a joint quelques observations nouvelles qui confirment les conclusions auxquelles il était parvenu dans son premier Mémoire. Il remarque aussi que les raisons qui ne permettent pas d'admettre le théorème énoncé par Lagrange dans la Note XI de la *Résolution des*

équations numériques suffisent pour établir l'inexactitude d'un théorème analogue (on pourrait même dire équivalent) qu'Euler a donné, dès l'année 1770, dans un Mémoire dont le titre est *Observationes circa radices æquationum*, et qui concerne une équation dont les racines sont réciproques des racines de l'équation traitée par Lagrange.

En résumé, les Commissaires sont d'avis que le Mémoire soumis à leur examen fournit de nouvelles preuves de la sagacité avec laquelle M. Félix Chio sait traiter des questions importantes et délicates. Ils pensent que ce Mémoire mérite, comme le précédent, d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

506.

Notes jointes au Rapport et rédigées par le rapporteur.

C. R., T. XXXIV, p. 309 (1er mars 1852).

NOTE PREMIÈRE.

Sur la série de Lagrange, et sur la règle de convergence que Lagrange a énoncée dans les Mémoires de Berlin de 1768.

La série de Lagrange est celle qu'on obtient quand on développe, suivant les puissances ascendantes du paramètre t, celle des racines de l'équation

$$(1) \qquad z - k - t\,f(z) = 0$$

qui se réduit à la constante k pour une valeur nulle de t, ou bien encore une fonction $F(z)$ de cette racine. Si l'on nomme Θ_n le coefficient de t^n dans cette série, on aura, pour $n > 0$, dans la première hypothèse,

$$(2) \qquad \Theta_n = \frac{1}{1.2\ldots n} D_k^{n-1}[f(k)]^n,$$

et, dans la seconde,

$$\Theta_n = \frac{1}{1.2\ldots n} D_k^{n-1} \{F'(k)[f(k)]^n\}. \tag{3}$$

D'ailleurs on ne diminue pas la généralité de l'équation (1) en réduisant le paramètre t à l'unité, et l'équation elle-même à la forme

$$z - k - f(z) = 0. \tag{4}$$

Alors la série de Lagrange est précisément celle qui a pour terme général Θ_n.

En recherchant les conditions de convergence de cette série dans les *Mémoires de Berlin* de 1768, Lagrange a considéré spécialement le cas où, la constante k étant réelle, la fonction $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = Az^a + Bz^b + \ldots + Hz^h. \tag{5}$$

Dans ce cas, en développant la $n^{\text{ième}}$ puissance de $f(k)$ et en effectuant les différentiations indiquées dans le second membre de la formule (2) ou (3), on obtient pour Θ_n un certain polynôme. Nommons T_n celui des termes de ce polynôme qui forme la plus grande valeur numérique, ou, mieux encore, le plus grand module; et soit $\mathcal{R}$ la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes du nombre entier n, le module de $T_n^{\frac{1}{n}}$. D'après la règle énoncée par Lagrange, dans les Mémoires de 1768, *la série dont le terme général est Θ_n sera convergente quand on aura $\mathcal{R} < 1$, divergente quand on aura $\mathcal{R} > 1$.*

Cette règle serait exacte si on l'appliquait, non plus à la série de Lagrange, mais à celle dont le terme général est T_n.

En conséquence, la règle de Lagrange pourra être admise, quand les séries dont les termes généraux sont Θ_n et T_n offriront le même module $\mathcal{R}$. Alors elles seront, généralement, toutes deux à la fois, ou convergentes ou divergentes.

Concevons maintenant que, les modules des coefficients

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad H,$$

étant représentés par

$$\text{A}, \quad \text{B}, \quad \ldots, \quad \text{H},$$

on pose, pour abréger,

$$\varphi(z) = \text{A}z^a + \text{B}z^b + \ldots + \text{H}z^h. \tag{6}$$

Le nombre ci-dessus désigné par $\mathcal{R}$ sera précisément le module qu'acquerra le rapport

$$\frac{\varphi(k+z)}{z}, \tag{7}$$

pour une certaine valeur de z déterminée par l'équation

$$D_z \frac{\varphi(k+z)}{z} = 0. \tag{8}$$

D'autre part, en vertu du théorème général sur les développements ordonnés suivant les puissances ascendantes d'une variable, celle des racines de l'équation (1) qui se réduit à k pour $t = 0$ sera, pour des valeurs croissantes du module de t, développable suivant les puissances ascendantes de t, jusqu'au moment où la racine dont il s'agit pourra devenir égale à une autre racine de la même équation. Il y a plus : si l'on nomme R le *module principal* qu'acquerra en ce moment le rapport

$$\frac{f(z)}{z-k},$$

la série dont le terme général est Θ_n sera non seulement convergente quand on aura $R < 1$, mais encore divergente quand on aura $R > 1$. Ajoutons que le module principal R sera en même temps un module de la fonction

$$\frac{f(z)}{z-k}$$

correspondant à une valeur de z déterminée par l'équation

$$D_z \frac{f(z)}{z-k} = 0,$$

et un module de la fonction

$$\frac{f(k+z)}{z} \tag{9}$$

correspondant à une valeur de z déterminée par l'équation

$$D_z \frac{f(k+z)}{z} = 0. \tag{10}$$

Comparons à présent l'une à l'autre les deux règles de convergence ci-dessus énoncées. On conclura immédiatement de leur comparaison que la première, c'est-à-dire la règle donnée par Lagrange dans les Mémoires de 1768, ne peut être exacte, si le module $\mathcal{R}$ du rapport $\frac{\varphi(k+z)}{z}$ ne se réduit au module principal R du rapport $\frac{f(k+z)}{z}$, et la fonction $\varphi(z)$ à la fonction $f(z)$. Or cette réduction ne peut avoir lieu que dans le cas où les coefficients

$$A,\quad B,\quad \ldots,\quad H$$

offrent tous le même argument, et telle est aussi la première des conditions auxquelles M. Chio a cru devoir, pour que la règle de Lagrange pût être admise, assujettir la fonction $f(z)$.

Nous ferons ici une observation qui n'est pas sans importance. Si l'on nomme r le module, et p l'argument de la variable z, en sorte qu'on ait

$$z = r_p = r e^{pi},$$

le module du rapport

$$\frac{f(k+z)}{z},$$

correspondant à une valeur quelconque de z, dépendra des deux variables r, p, et le *module principal* R du même rapport pourra être ou un maximum relatif à p et un minimum relatif à r, ou un minimum relatif à p et un maximum relatif à r. De ces deux caractères, le premier sera celui qui conviendra effectivement au module R dans un cas très étendu que nous allons rappeler.

Concevons que, dans le rapport

$$\frac{f(k+z)}{z},$$

on fasse varier l'argument p de z, et désignons à l'aide de la notation

$$\Lambda \frac{f(k+z)}{z}$$

le module *maximum maximorum* du même rapport, considéré comme fonction de p. Supposons d'ailleurs que ce module, qui devient infini pour $r=0$, et qui commence par décroître avec $\frac{1}{r}$, acquière une valeur minimum pour une certaine valeur de r, et que, jusqu'à ce moment, la fonction $f(k+z)$ reste, avec sa dérivée, fonction continue de z. Alors, en vertu des principes que j'ai posés dans le Mémoire *Sur divers points d'Analyse* [1], et qui se trouvent développés dans un autre Mémoire lu à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831 [2], la valeur minimum de l'expression

$$\Lambda \frac{f(k+z)}{z}$$

sera précisément le module principal R du rapport

$$\frac{f(k+z)}{z}.$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si, la constante k étant positive, on suppose

$$f(z) = z^a,$$

l'exposant a étant lui-même positif, mais supérieur à l'unité. Alors le module maximum du rapport

$$\frac{(k+z)^a}{z},$$

(1) Tome VIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences* (*Œuvres de Cauchy*, S. I, T. II).
(2) *Voir* le Tome II des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (*Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XII).

considéré comme fonction de p, savoir

$$\Lambda \frac{(k+z)^a}{z} = \frac{(k+r)^a}{r} = \left(1+\frac{k}{r}\right)^a r^{a-1},$$

deviendra infini : 1° pour $r=0$; 2° pour $r=\infty$, et acquerra, pour

$$r=\frac{k}{a-1},$$

la valeur minimum

$$R=\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}k^{a-1},$$

qui sera le module principal du rapport

$$\frac{(k+z)^a}{z}.$$

Mais on ne pourra plus en dire autant, si l'exposant a est compris entre les limites 0, 1; et alors la quantité

$$\frac{(k+r)^a}{r} = \left(1+\frac{k}{r}\right)^a \frac{1}{r^{1-a}}$$

décroîtra sans cesse avec $\frac{1}{r}$, tandis que r variera entre les limites 0, ∞. Dans cette dernière hypothèse, pour obtenir le module principal R, on devra commencer par déterminer, non plus le module maximum, mais le module minimum du rapport

$$\frac{(k+z)^a}{z},$$

considéré comme fonction de p. Ce module minimum, qui se réduira, pour $r<k$, à la quantité

$$\frac{(k-r)^a}{r} = \left(\frac{k}{r}-1\right)^a \frac{1}{r^{1-a}},$$

et pour $r>k$, à la quantité

$$\frac{(r-k)^a}{r} = \left(1-\frac{k}{r}\right)^a \frac{1}{r^{1-a}},$$

décroîtra d'abord avec $\frac{1}{r}$ entre les limites $r=0$, $r=k$; puis il croîtra, pour des valeurs croissantes de r, jusqu'à ce qu'il acquière la valeur maximum

$$R=\frac{a^a}{(1-a)^{1-a}}\frac{1}{k^{1-a}}$$

correspondante à la racine r de l'équation

$$D_r \frac{(r-k)^a}{r} = 0,$$

et à la racine z de l'équation

$$D_z \frac{(k+z)^a}{z} = 0.$$

Donc alors le module principal du rapport $\frac{(k+z)^a}{a}$ sera un minimum relatif à p, et un maximum relatif à r.

Passons maintenant du cas particulier où l'on a $f(z)=z^a$ au cas plus général où la fonction $f(z)$ est déterminée par l'équation (5); et concevons que les coefficients A, B, ..., H, offrant tous le même argument, aient pour modules respectifs les quantités positives

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \mathrm{H}.$$

Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, que la constante k soit positive; alors le module *maximum maximorum* du rapport

$$\frac{f(k+z)}{z}$$

sera, pour une valeur quelconque de r, si chacun des exposants a, b, ..., h est nul ou positif,

$$\frac{\varphi(k+r)}{r},$$

et, pour une valeur de r inférieure à k, si chacun des exposants a, b, ..., h est nul ou négatif,

$$\frac{\varphi(k-r)}{r}.$$

Si, dans la première hypothèse, l'un au moins des exposants a, b, ..., h surpasse l'unité, le rapport

$$\frac{\varphi(k+r)}{r}$$

deviendra infini : 1° pour $r=0$; 2° pour $r=\infty$, et acquerra entre ces limites une valeur minimum R, qui sera précisément le module principal du rapport

$$\frac{\mathrm{f}(k+z)}{z}.$$

Ajoutons que, dans la seconde hypothèse, le rapport

$$\frac{\varphi(k-r)}{r}$$

deviendra infini : 1° pour $r=0$; 2° pour $r=k$, et acquerra entre ces limites une valeur minimum R, qui sera encore le module principal du rapport

$$\frac{\mathrm{f}(k+z)}{z}.$$

Ainsi, lorsque, la constante k étant positive en même temps que les rapports mutuels des coefficients A, B, ..., H, les exposants

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h$$

sont ou tous positifs, l'un d'eux étant supérieur à l'unité, ou tous négatifs, le module principal R du rapport $\frac{\mathrm{f}(k+z)}{z}$ est tout à la fois un *maximum maximorum* relatif à l'argument p de z, et un minimum relatif au module r de z. Alors, pour savoir si la série de Lagrange est convergente ou divergente, on peut se servir de la règle très simple à laquelle M. Chio réduit celle que Lagrange a donnée dans les Mémoires de 1768. Telle est aussi la conclusion à laquelle M. Chio est parvenu, avec cette seule différence que les principes sur lesquels il s'est appuyé l'ont obligé de restreindre sa démonstration, dans la première hypothèse, au cas où les exposants a, b, ..., h surpassent tous l'unité, ou sont tous entiers, l'un d'eux pouvant se réduire à zéro.

NOTE DEUXIÈME. *

Sur le module principal du rapport

$$\frac{\mathrm{f}(k+z)}{z},$$

k étant une constante positive, et $\mathrm{f}(z)$ une somme de termes proportionnels à diverses puissances de z.

Soit

$$z = r_p = r e^{p\,\mathrm{i}}$$

une variable dont les lettres p, r représentent l'argument et le module. Supposons d'ailleurs que, la fonction $\mathrm{f}(z)$ étant de la forme

$$\mathrm{f}(z) = Az^a + Bz^b + \ldots + Hz^h,$$

les coefficients A, B, ..., H offrent tous le même argument; et, en nommant A, B, ..., H leurs modules, prenons

$$\varphi(z) = \mathrm{A}z^a + \mathrm{B}z^b + \ldots + \mathrm{H}z^h.$$

Enfin, désignons par k une constante positive. Si les exposants a, b, ..., h sont tous positifs, ou tous négatifs, l'un d'eux pouvant être nul, le module *maximum maximorum* du rapport

$$\frac{\mathrm{f}(k+z)}{z},$$

considéré comme fonction de p, correspondra évidemment, dans la première hypothèse, à une valeur nulle de p, ou, ce qui revient au même, à la valeur r de z; et, dans la seconde hypothèse, à la valeur π de p, ou, ce qui revient au même, à la valeur $-r$ de z. De plus, comme on l'a remarqué dans la Note précédente, ce module *maximum maximorum*, qui se réduit à une fonction de r, acquerra une valeur minimum $\mathfrak{R}$, dans la première hypothèse, pour une certaine valeur de r comprise entre les limites 0, ∞, si l'un au moins des exposants a, b, ..., h surpasse l'unité; et, dans la seconde hypothèse, pour une valeur de r comprise entre les limites 0, k. Enfin, il est clair que la valeur attribuée à r devra vérifier, dans le premier cas, la formule

$$\mathrm{D}_r \frac{\mathfrak{f}(k+r)}{r} = 0,$$

qui pourra être réduite à l'équation

$$\mathrm{D}_r \frac{\varphi(k+r)}{r} = 0, \tag{1}$$

et, dans le second cas, la formule

$$\mathrm{D}_r \frac{\mathfrak{f}(k-r)}{r} = 0,$$

qui pourra être réduite à l'équation

$$\mathrm{D}_r \frac{\varphi(k-r)}{r} = 0. \tag{2}$$

Considérons, pour fixer les idées, le cas où, chacun des exposants $a, b, \ldots, h$ est nul ou positif, un ou plusieurs d'entre eux étant supérieurs à l'unité. Alors le module du rapport

$$\frac{\mathfrak{f}(k+r)}{r}$$

acquerra une valeur minimum $\mathcal{R}$, qui sera en même temps le *module principal* du rapport

$$\frac{\mathfrak{f}(k+z)}{z}$$

pour une valeur positive de r, représentée par une racine de l'équation (1). D'ailleurs, cette équation pourra être réduite à

$$\mathcal{S} = 0, \tag{3}$$

la valeur de $\mathcal{S}$ étant déterminée par la formule

$$\mathcal{S} = \mathrm{A}[(a-1)r-k](k+r)^{a-1} + \ldots + \mathrm{H}[(h-1)r-k](k+r)^{h-1}. \tag{4}$$

Or, supposons les exposants

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h$$

rangés d'après leur ordre de grandeur. L'exposant h sera, dans l'hypothèse admise, supérieur à l'unité. De plus, eu égard à la formule (4), le premier membre $\mathcal{S}$ de l'équation (1) sera négatif, quand on prendra

$$r \leqq \frac{k}{h-1};$$

mais il deviendra positif quand on prendra

$$r \geqq \frac{k}{a-1}, \qquad \text{si l'on a } a > 1,$$

ou du moins quand on prendra

$$r = \frac{k}{1-1} = \infty, \qquad \text{si l'on a } a < 1.$$

Cela posé, soit s un nombre supérieur à l'unité, mais compris entre les limites a, h. L'équation (1) offrira certainement une ou plusieurs racines positives de la forme

$$r = \frac{k}{s-1}, \tag{5}$$

savoir, plusieurs si, s venant à décroître à partir de la limite supérieure h, le polynôme $\mathcal{S}$ peut passer, non seulement du négatif au positif, mais encore du positif au négatif, et une seule dans le cas contraire. Or ce dernier cas est seul admissible. Soit, en effet,

$$\rho = \frac{k}{\varsigma - 1}$$

une racine positive de l'équation (1), et multiplions le polynôme $\mathcal{S}$ par le facteur

$$\frac{s-1}{(k+r)^{\varsigma-1}}.$$

Si, dans le polynôme $\mathcal{S}$, on considère un terme quelconque, par exemple le suivant

$$\mathrm{C}[(c-1)r-k](k+r)^{c-1},$$

ce terme, multiplié par le facteur susdit, deviendra, eu égard à la formule (5),

$$C k^{c-\varsigma+1}(c-s)\left(\frac{s}{s-1}\right)^{c-\varsigma}. \tag{6}$$

D'ailleurs le nombre ς, supérieur à l'unité, sera ou ne sera pas inférieur à c. Dans la première hypothèse, $c-\varsigma$ sera positif, et l'expression (6) croîtra en même temps que chacune des quantités

$$c-s, \qquad \frac{s}{s-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{s}},$$

tandis que s, supposé très voisin de ς, décroîtra, en s'éloignant de ς et se rapprochant de l'unité. Il en sera encore de même si l'on a $\varsigma=c$. Enfin, si l'on a $\varsigma>c$, l'expression (6), devenue négative, croîtra pour des valeurs décroissantes de sa valeur numérique. Elle croîtra donc encore, si s, supposé très voisin de ς, vient à décroître, en s'éloignant de ς et se rapprochant de c, puisque alors les quantités

$$s-c, \qquad \left(\frac{s}{s-1}\right)^{c-\varsigma}=\left(1-\frac{1}{s}\right)^{\varsigma-c}$$

décroîtront l'une et l'autre. Donc, si chacun des exposants $a, b, \ldots, h$ est nul ou positif, un ou plusieurs d'entre eux étant supérieurs à l'unité, le rapport $\frac{(s-1)\mathcal{S}}{(k+r)^{\varsigma-1}}$ croîtra pour des valeurs de s décroissantes et voisines de ς. Donc alors, s venant à décroître, ce rapport et le polynôme $\mathcal{S}$ lui-même ne pourront passer du positif au négatif; d'où il suit que l'équation (6), résolue par rapport à r, offrira une seule racine positive comprise entre les limites

$$\frac{k}{h-1}, \quad \frac{k}{a-1},$$

si l'on a $a>1$, et entre les limites

$$\frac{k}{h-1}, \quad \infty,$$

si l'on a $a<1$.

En raisonnant comme on vient de le faire, on prouvera encore que, si les exposants $a, b, \ldots, h$ sont tous négatifs, l'équation (2), résolue par rapport à r, offrira une seule racine positive comprise entre les limites

$$\frac{k}{1-a}, \quad \frac{k}{1-h};$$

et l'on reconnaîtra ainsi, dans tous les cas, l'exactitude de la proposition énoncée par M. Chio et rappelée dans le Rapport.

507.

Analyse mathématique. — *Troisième Note annexée au Rapport sur de nouvelles recherches relatives à la série de Lagrange, et présentées à l'Académie, par* M. Félix Chio, *de Turin* (¹).

Sur les équations trinômes.

C. R., T. XXXIV, p. 345 (8 mars 1852).

Supposons l'inconnue z assujettie à vérifier une équation trinôme de la forme

$$Az^a+Bz^b+Cz^c=0. \tag{1}$$

Si, en représentant par g l'un des six termes de la suite

$$a-b, \quad b-c, \quad c-a, \quad b-a, \quad c-b, \quad a-c,$$

et par G le terme correspondant de la suite

$$\frac{A}{B}, \quad \frac{B}{C}, \quad \frac{C}{A}, \quad \frac{B}{A}, \quad \frac{C}{B}, \quad \frac{A}{C},$$

on pose

$$Z=-Gz^g,$$

(¹) *Voir* p. 415 de ce Volume.

on déduira immédiatement de l'équation (1) une autre équation de la forme

$$Z = 1 + \mathrm{H} Z^h.$$

Ajoutons que, si dans cette dernière on remplace la lettre Z par z, et les lettres H, h par d'autres lettres t, a, on obtiendra l'équation trinôme

$$z = 1 + t z^a, \tag{2}$$

dans laquelle t, a pourront être des paramètres quelconques. Ainsi, l'on peut toujours réduire de six manières différentes la résolution de l'équation (1) à la résolution de l'équation (2), comprise elle-même, comme cas particulier, dans la formule plus générale

$$z = k \pm t z^a, \tag{3}$$

dont nous allons un instant nous occuper.

Considérons, pour fixer les idées, le cas où, l'exposant a étant réel, la constante k est positive, et nommons R le module principal du rapport

$$\frac{(k+z)^a}{z}.$$

Si l'on développe, en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de t, celle des racines de l'équation (3) qui se réduit à k, pour $t = 0$, *la série obtenue sera convergente quand le module de t sera inférieur à* $\frac{1}{R}$. *La même série deviendra divergente quand le module de t surpassera* $\frac{1}{R}$. Ajoutons que, dans cette série, le coefficient Θ_n de t^n sera donné par la formule

$$\Theta_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \mathrm{D}_t^{n-1} k^{na}. \tag{4}$$

Quant au module principal R, il sera déterminé par la formule

$$R = \frac{a^a}{(a-1)^{a-1}} k^{a-1}, \qquad \text{si l'on a } a > 1, \tag{5}$$

et par la formule

$$R = \frac{a^a (1-a)^{1-a}}{k^{1-a}}, \qquad \text{si l'on a } a < 1. \tag{6}$$

Remarquons, au reste, que la règle de convergence relative au développement de la racine z de l'équation (2) peut se déduire non seulement du théorème général sur la convergence des séries, mais encore des formules que fournit le Calcul des résidus, et qui servent à transformer les fonctions en intégrales définies. En transformant ainsi Θ_n, on trouvera, si l'on suppose $a > 1$,

$$\Theta_n = \frac{1}{n} \mathfrak{M} \frac{(k+z)^{na}}{z^{n-1}}, \tag{7}$$

la lettre $\mathfrak{M}$ indiquant une moyenne isotropique relative à l'argument p de z, et, si l'on suppose $a < 1$,

$$\Theta_n = (-1)^n \frac{\sin n\pi a}{n\pi} \int_k^\infty \frac{(r-k)^{na}}{r^n} dr. \tag{8}$$

Or il suffira d'appliquer à la détermination approximative de ces valeurs de Θ_n, dans le cas où le nombre n sera très grand, les principes exposés dans le Mémoire *Sur divers points d'Analyse*, pour retrouver la règle de convergence précédemment énoncée.

Lorsqu'on suppose $a = 2$, la formule (3) se réduit à l'équation du second degré

$$z = k + t z^2, \tag{9}$$

et la formule (5) donne

$$R = 4k.$$

Donc, si l'on développe suivant les puissances ascendantes de t celle des racines de l'équation (9) qui se réduit à k pour $t = 0$, la série obtenue sera convergente jusqu'au moment où le module de t atteindra la limite supérieure $\frac{1}{4k}$. En d'autres termes, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence sera

$$\operatorname{mod} 4kt < 1. \tag{10}$$

On arriverait directement à la même conclusion en observant que, si l'on représente par $z_{,}$ la racine dont il s'agit, on aura

$$z_{,} = \frac{1-\sqrt{1-4kt}}{2t}. \tag{11}$$

J'indiquerai ici, en terminant, un moyen simple de résoudre une question soulevée par M. Ménabréa, dans un Mémoire qui a pour titre : *Observations sur la série de Lagrange*. Si, dans l'équation (9), on décompose le paramètre k en deux parties h, l, cette équation deviendra

$$z = h + l + tz^2. \tag{12}$$

Nommons $z_{,,}$ celle de ses racines qui, développée en série par la formule de Lagrange, fournit un développement dont h est le premier terme. La racine $z_{,,}$ se confondra, pour une valeur nulle, ou pour une valeur très petite de l, avec la racine $z_{,}$ déterminée par la formule (11), et l'on aura

$$z_{,,} = z_{,} \tag{13}$$

jusqu'au moment où l'une des deux séries dont les sommes sont représentées par $z_{,}$, $z_{,,}$ cessera d'être convergente. D'ailleurs, comme on l'a vu, la première de ces deux séries sera convergente, tant que la condition (10) sera vérifiée. Quant à la seconde série, il suffira évidemment, pour l'obtenir, de développer suivant les puissances ascendantes de α celle des racines de l'équation

$$z = h + \alpha(l + tz^2), \tag{14}$$

qui se réduit à la constante h, pour une valeur nulle de α, puis de poser ensuite $\alpha = 1$. On aura en conséquence

$$z_{,,} = \frac{1-\sqrt{1-4ht\alpha-4lt\alpha^2}}{2t\alpha}, \tag{15}$$

α devant être réduit à l'unité, quand on aura développé le radical suivant les puissances ascendantes de α. Il reste à trouver sous quelle

condition le développement ainsi obtenu sera convergent. Or, pour y parvenir, il suffira de décomposer en facteurs simples la quantité renfermée sous le radical, c'est-à-dire le trinôme

$$1 - 4ht\alpha - 4lt\alpha^2,$$

considéré comme fonction de α. En effectuant cette décomposition, on trouvera

$$1 - 4ht\alpha - 4lt\alpha^2 = [1 - 2(ht+s)\alpha][1 - 2(ht-s)\alpha], \tag{16}$$

la valeur de s^2 étant

$$s^2 = h^2t^2 + lt; \tag{17}$$

puis on conclura des formules (15), (16) que la condition de convergence du développement dont la somme est $z_{,,}$ se réduit à la formule

$$\operatorname{mod} 2(ht+s) < 1, \tag{18}$$

la valeur de s étant fournie par l'équation (17) et choisie de manière que le module de la somme $ht + s$ surpasse, s'il ne l'égale pas, le module de la différence $ht - s$. Donc, en définitive, l'équation (13) subsistera, tant que les valeurs attribuées aux paramètres h et l seront renfermées entre les limites que leur assigne le système des conditions (10) et (18). Ainsi se trouve résolue, par un calcul direct, et sans qu'il soit nécessaire de recourir aux théorèmes généraux sur la convergence des séries, la question posée par M. Ménabréa, dans le Mémoire cité (page 24). Ajoutons que cette solution fait disparaître les difficultés et les objections auxquelles diverses applications de ces théorèmes semblaient donner lieu.

508.

C. R., T. XXXV, p. 297 (30 août 1852).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie une *nouvelle méthode pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, sous des* *conditions données relatives aux limites des corps.* Cette méthode, spécialement applicable aux questions de Physique mathématique, sera développée par l'auteur dans les prochaines séances.

509.

C. R., T. XXXV, p. 322 (6 septembre 1852).

M. Augustin Cauchy présente la suite de ses *Nouvelles recherches relatives à l'intégration des équations aux dérivées partielles, sous des conditions données.*

510.

C. R., T. XXXV, p. 341 (13 septembre 1852).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie de *Nouvelles recherches où les principes établis dans les Mémoires précédents sont particulièrement appliqués à la théorie des calorifères cylindriques.*

511.

C. R., T. XXXV, p. 588 (26 octobre 1852).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie un Mémoire *sur plusieurs nouveaux théorèmes d'Analyse algébrique.* Ces théorèmes seront exposés et développés dans les prochaines séances.

512.

C. R., T. XXXV, p. 940 (27 décembre 1852).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie divers Mémoires *sur le mouvement de rotation d'un corps solide et en particulier d'un corps*

pesant autour d'un point fixe. Les conclusions, auxquelles l'auteur a été conduit par son analyse, seront exposées et développées dans une prochaine séance.

513.

C. R., T. XXXVI, p. 13 (3 janvier 1853).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie la suite de ses recherches *sur la rotation d'un corps solide et en particulier d'un corps pesant autour d'un point fixe.*

514.

Analyse mathématique. — *Sur les clefs algébriques.*

C. R., T. XXXVI, p. 70 (10 janvier 1853).

Considérons n polynômes $A, B, C, \ldots$ dont les divers termes soient proportionnels à certains facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et concevons qu'en suivant les règles de la multiplication algébrique on multiplie ces divers polynômes l'un par l'autre. Dans le nouveau polynôme résultant de cette multiplication, chaque terme sera proportionnel à l'un des produits que l'on peut former avec les facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pris n à n; et l'on pourra d'ailleurs supposer que, dans chacun de ces produits, on a conservé la trace de l'ordre dans lequel les multiplications diverses ont été successivement effectuées. On pourra aussi concevoir que, dans le nouveau polynôme, on substitue à chacun de ces produits un nombre déterminé, ou plus généralement une quantité déterminée, deux quantités distinctes pouvant être substituées à deux produits distincts, dans le cas même où ces deux produits ne diffèrent entre eux que par l'ordre dans lequel sont rangés les divers facteurs. Ces conventions étant admises, nous désignerons les facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sous le nom de *clefs*, et les polynômes $A, B, C, \ldots$ qui les renferment, sous le nom de *facteurs symboliques* du produit $ABC\ldots$ définitivement obtenu. Les substitutions ou *transmutations*, qui consisteront à remplacer les produits des clefs prises n à n par certaines quantités, seront indiquées à l'aide du signe $\simeq$ que j'ai déjà employé dans un autre Mémoire; et il est clair que du système de ces transmutations dépendront la valeur et les propriétés du produit $ABC\ldots$. Ajoutons qu'il suffira généralement d'intervertir l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs $A, B, C, \ldots$ du produit $ABC\ldots$ pour altérer la valeur de ce même produit.

Les clefs algébriques, telles que je viens de les définir, permettent de résoudre avec une grande facilité des questions d'Analyse ou de Mécanique, dans lesquelles l'application des méthodes ordinaires entraînerait de longs et pénibles calculs. C'est ce que je me propose de montrer, avec quelques détails, dans une suite de Mémoires que j'aurai l'honneur de présenter successivement à l'Académie. Pour donner une idée des résultats auxquels on est ainsi conduit, je me bornerai aujourd'hui à deux exemples. Je commencerai par faire voir que la théorie des clefs résout généralement le problème de l'élimination des inconnues entre plusieurs équations linéaires ou non linéaires; puis je montrerai comment s'introduisent dans le calcul trois clefs, correspondantes aux trois dimensions de l'espace, qui fournissent le moyen d'obtenir sous une forme très simple la solution d'un grand nombre de problèmes de Géométrie et de Mécanique.

Analyse.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'éliminer n inconnues $x, y, z, \ldots$ entre n équations dont les premiers membres sont des fonctions linéaires et homogènes de ces inconnues, les seconds membres étant réduits à zéro. Soient d'ailleurs $A, B, C, \ldots$ ce que deviennent ces premiers membres, quand on y remplace les n inconnues $x, y, z, \ldots$ par n clefs correspondantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Enfin, concevons qu'après avoir multiplié ces clefs n à n, en tenant compte de l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées, on convienne, 1° de remplacer par zéro chaque produit dans lequel entre deux ou plusieurs fois une même clef; 2° de substituer toujours deux quantités égales aux signes près, mais affectées de signes contraires, à deux produits qui se déduisent l'un de l'autre à l'aide d'un échange opéré entre deux clefs. En d'autres termes, supposons que les n clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ soient assujetties aux transformations de la forme

$$\alpha^2 \simeq 0, \quad \beta^2 \simeq 0, \quad \ldots, \quad \beta\alpha \simeq -\alpha\beta, \quad \ldots$$

et à celles qui en dérivent. L'équation résultante de l'élimination des inconnues $x, y, z, \ldots$ entre les équations données sera

$$ABC\ldots = 0.$$

On démontre aisément ce théorème, en partant de cette remarque très simple, que les facteurs symboliques $A, B, C, \ldots$ jouissent des mêmes propriétés que possèdent les clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Concevons à présent qu'il s'agisse d'éliminer l'inconnue x entre deux équations dont les degrés m et m' donnent pour somme le nombre n. Pour y parvenir, il suffira de recourir encore à l'intervention des n clefs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ assujetties aux conditions ci-dessus énoncées. En effet, en supposant ces clefs écrites à la suite les unes des autres dans l'ordre qu'indique l'alphabet, et le premier membre de chaque équation ordonné suivant les puissances ascendantes, ou suivant les puissances descendantes de x, cherchez tous les facteurs symboliques que l'on peut former en remplaçant, dans le premier membre de la première équation, les diverses puissances de x par $m+1$ termes consécutifs de la suite des clefs. Soient $A, B, C, \ldots$ les facteurs symboliques ainsi obtenus, et $A', B', C', \ldots$ ce que deviennent ces facteurs quand on remplace la première équation par la seconde. L'équation résultante de l'élimination sera la formule symbolique

$$ABC\ldots A'B'C'\ldots = 0.$$

On pourra d'ailleurs, sans altérer l'équation résultante, intervertir arbitrairement l'ordre des facteurs symboliques

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ A',\ B',\ C',\ \ldots.$$

Pour montrer une application de ces formules, supposons qu'il s'agisse d'éliminer x entre les deux équations

$$a + bx + cx^2 = 0,$$
$$a' + b'x + c'x^2 = 0.$$

Alors il suffira d'introduire dans le calcul quatre clefs distinctes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

et, en posant

$$A = a\alpha + b\beta + c\gamma, \qquad B = a\beta + b\gamma + c\delta,$$
$$A' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \qquad B' = a'\beta + b'\gamma + c'\delta,$$

on obtiendra pour équation résultante la formule symbolique

$$AA'BB' = 0.$$

On aura d'ailleurs, en vertu des propriétés ci-dessus assignées aux clefs α, β, γ, δ,

$$AA' = (bc' - b'c)\beta\gamma + (ca' - c'a)\gamma\alpha + (ab' - a'b)\alpha\beta,$$
$$BB' = (bc' - b'c)\gamma\delta + (ca' - c'a)\delta\beta + (ab' - a'b)\beta\gamma,$$

par conséquent,

$$AA'BB' = K\alpha\beta\gamma\delta,$$

la valeur de K étant

$$K = (ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ca' - c'a)^2,$$

et, puisque la quantité qu'on doit substituer au produit $\alpha\beta\gamma\delta$ peut être arbitrairement choisie, l'équation résultante sera simplement

$$K = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ca' - c'a)^2 = 0.$$

Au reste, comme je l'expliquerai dans une prochaine séance, la théorie des clefs peut être appliquée de diverses manières à l'élimination, et réduit à de simples multiplications un grand nombre d'opérations algébriques, par exemple la division algébrique, la recherche du plus grand commun diviseur de deux fonctions entières, etc. Elle fournit aussi, comme je le ferai voir, des démonstrations très rapides des théorèmes sur les résultantes algébriques, et des méthodes très expéditives pour la résolution des équations linéaires ou non linéaires, à une ou plusieurs inconnues.

Concevons, maintenant, que l'on trace dans l'espace trois axes coordonnés rectangulaires ou obliques des x, y, z, qui partent d'un point fixe O; et soient

$$\overline{r},\ \overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z}$$

des quantités géométriques qui représentent : 1° le rayon vecteur mené de l'origine O à un autre point A; 2° les projections de ce rayon vecteur sur les axes. La première de ces quatre quantités géométriques sera la somme des trois autres, en sorte qu'on aura

$$\overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}.$$

Soient d'ailleurs h, i, j ce que deviennent les quantités géométriques $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ quand, la longueur de chacune d'elles étant réduite à l'unité, elles se mesurent toutes trois dans les directions des coordonnées positives. En nommant x, y, z les projections algébriques du rayon vecteur $\overline{r}$ sur les axes coordonnés, on aura

$$\overline{x} = \mathrm{h}x, \qquad \overline{y} = \mathrm{i}y, \qquad \overline{z} = \mathrm{j}z$$

et, par suite,

$$\overline{r} = \mathrm{h}x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}z.$$

Pareillement, si A' est un second point distinct de A, et si l'on nomme $\overline{r'}$, x', y', z' ce que deviennent $\overline{r}$, x, y, z quand on substitue le second point au premier, on aura

$$\overline{r'} = \mathrm{h}x' + \mathrm{i}y' + \mathrm{j}z'.$$

Si, maintenant, on multiplie l'une par l'autre les valeurs précédentes de $\bar{r}$ et de $\bar{r}'$, en suivant les règles de la multiplication algébrique, le résultat de l'opération ne pourra évidemment acquérir un sens déterminé qu'en vertu d'une convention nouvelle servant à définir ce qu'on doit entendre par le produit de deux quantités géométriques dirigées dans l'espace suivant des droites quelconques. Concevons, pour fixer les idées, que l'on traite les trois quantités géométriques h, i, j comme des clefs auxquelles on attribuerait les propriétés précédemment énoncées. Les carrés et les produits de ces quantités géométriques devront satisfaire aux six équations symboliques

$$\mathrm{h}^2 = 0, \quad \mathrm{i}^2 = 0, \quad \mathrm{j}^2 = 0,$$
$$\mathrm{ji} = -\mathrm{ij}, \quad \mathrm{hj} = -\mathrm{jh}, \quad \mathrm{ih} = -\mathrm{hi},$$

et l'on aura, par suite,

$$\bar{r}\bar{r}' = \mathrm{ij}(yz' - y'z) + \mathrm{jh}(zx' - z'x) + \mathrm{hi}(xy' - x'y).$$

Or les trois différences

$$yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y$$

sont les projections algébriques du moment linéaire de la longueur $\bar{r}'$ transportée parallèlement à elle-même, de manière qu'elle parte, non plus du point O, mais du point A. Donc le produit $\bar{r}\bar{r}'$ représentera ce moment linéaire, si l'on assujettit les quantités géométriques h, i, j, non seulement aux six équations symboliques ci-dessus écrites, mais encore aux trois suivantes :

$$\mathrm{ij} = \mathrm{h}, \quad \mathrm{jh} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{hi} = \mathrm{j}.$$

Alors on aura simplement

$$\bar{r}\bar{r}' = \mathrm{h}(yz' - y'z) + \mathrm{i}(zx' - z'x) + \mathrm{j}(xy' - x'y).$$

Le produit $\bar{r}\bar{r}'$, déterminé par la formule précédente, est ce qu'on peut appeler le *produit angulaire* des longueurs $\bar{r}$ et $\bar{r}'$. Il change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs, et représente alors le moment linéaire de la longueur $\bar{r}$ mesurée à partir du point A'. Si l'on

considérait ce même produit comme propre à représenter, non plus une longueur, mais une surface, il deviendrait ce que M. de Saint-Venant a nommé *produit géométrique*, dans un Mémoire où il a déduit de la considération de ce point des conséquences qui méritent d'être remarquées.

Dans un autre article, j'expliquerai les avantages que présente, en Mécanique, l'emploi des trois clefs h, i, j, quand on veut substituer, ce qui est souvent utile, des axes mobiles à des axes fixes.

Je remarquerai, en finissant, que la théorie des *imaginaires*, prise au point de vue sous lequel je l'ai envisagée dans mon *Analyse algébrique*, et la théorie des *quaternia* de M. Hamilton, sont des cas spéciaux de la théorie des clefs auxquels on arrive, en supposant l'une des clefs réduite à l'unité. Ainsi, en particulier, l'expression imaginaire

$$a + b\mathrm{i}$$

pourrait être considérée comme un facteur symbolique, dans lequel la première clef se réduirait à l'unité, la seconde clef i étant assujettie à la condition

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

FIN DU TOME XI DE LA PREMIÈRE SÉRIE.