

444.

CALCUL INTEGRAL. — *Mémoire sur les intégrales continues et les intégrales discontinues des équations différentielles ou aux dérivées partielles.*

C. R., T. XXIX, p. 548 (19 novembre 1849).

Les intégrales d'un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles peuvent fournir pour valeurs générales des inconnues ou des fonctions continues, ou des fonctions discontinues des variables indépendantes. En d'autres termes, ces intégrales peuvent être ou continues ou discontinues. Il importe de ne pas confondre entre elles ces deux espèces d'intégrales, et de rechercher celles qui fournissent la solution de problèmes de Mécanique ou de Physique. Tel sera l'objet de ce nouveau Mémoire.

Considérons d'abord une ou plusieurs équations différentielles, dans lesquelles le temps soit pris pour variable indépendante. On pourra, en augmentant, s'il est nécessaire, le nombre des inconnues, réduire ces équations au premier ordre. Cette réduction étant opérée, pour que l'on puisse déterminer complètement les valeurs générales des inconnues, il sera nécessaire de connaître leurs valeurs initiales. Il y a plus : cette connaissance ne sera suffisante que pour la détermination des intégrales continues, s'il est possible d'obtenir de telles intégrales. Elle deviendra généralement insuffisante, s'il n'est plus possible d'obtenir des intégrales continues, ou si l'on suppose que les valeurs générales des inconnues puissent être des fonctions discontinues du temps. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'intégrer la plus simple de toutes les équations différentielles, savoir celle qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée d'une inconnue dont la valeur initiale est donnée. Cette équation offrira une seule intégrale continue, qu'on obtiendra en égalant la valeur générale de l'inconnue à sa valeur initiale. Mais, si l'on suppose que l'intégrale puisse devenir

discontinue, la valeur générale de l'inconnue pourra être une fonction du temps qui varie par sauts brusques à diverses époques, en se réduisant à une constante entre deux époques consécutives. Donc l'équation différentielle dont il s'agit offrira, non seulement une intégrale continue, mais encore une infinité d'intégrales discontinues.

Concevons maintenant qu'il s'agisse d'intégrer l'équation différentielle qu'on obtient quand on égale la dérivée de l'inconnue à une fonction donnée du temps. Si le temps varie entre des limites telles que cette fonction ne puisse acquérir des valeurs infinies ou indéterminées, l'équation proposée offrira, comme dans le cas précédent, une seule intégrale continue et une infinité d'intégrales discontinues, dont l'une quelconque sera la somme qu'on obtiendra en ajoutant à l'intégrale continue l'une des fonctions discontinues dont la dérivée s'évanouit. Mais, si la fonction donnée devient, à une certaine époque, ou infinie ou indéterminée, l'intégrale finie elle-même pourra se transformer alors en une intégrale discontinue.

Ces diverses conclusions sont précisément celles auxquelles je suis parvenu dans les leçons que j'ai données, à l'École Polytechnique, sur le Calcul infinitésimal (*voir* le résumé de ces leçons, publié en 1823, p. 103) (*).

Généralement, étant donné un système d'équations différentielles du premier ordre entre le temps t pris pour variable indépendante, et diverses inconnues, si les dérivées de ces inconnues sont, en vertu de ces équations différentielles, représentées par des fonctions qui demeurent continues par rapport aux diverses variables, du moins entre certaines limites, on obtiendra, du moins jusqu'à une certaine époque déterminée par les limites dont il s'agit, un système unique d'intégrales continues, avec une infinité d'intégrales discontinues; mais, lorsqu'on dépassera cette époque, le système des intégrales continues pourra se transformer en un système d'intégrales discontinues.

(* OEuvres de Cauchy, S. II, T. IV.

Les observations que nous venons de faire sont évidemment applicables, non seulement à un système d'équations différentielles, mais encore à un système d'équations aux dérivées partielles qui renfermeraient, avec le temps et une ou plusieurs autres variables indépendantes, des inconnues dont on donnerait les valeurs initiales. Pour des équations de cette nature, on obtiendrait généralement un système unique d'intégrales qui demeureraient continues, au moins jusqu'à une certaine époque, et une infinité de systèmes d'intégrales discontinues. Ajoutons que le système unique d'intégrales continues pourra se transformer lui-même en un système d'intégrales discontinues, si les valeurs initiales des inconnues sont représentées par des fonctions discontinues des variables dont ces valeurs dépendent.

Cherchons maintenant quelles sont, parmi les intégrales continues ou discontinues d'un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, celles qu'il convient d'employer dans le cas où ces équations correspondent à un problème de Mécanique ou de Physique, dans le cas, par exemple, où elles représentent les mouvements finis ou infiniment petits d'un nombre déterminé ou indéterminé de points matériels.

Considérons d'abord n points matériels sollicités par des forces données. Le mouvement de ces points sera représenté par $3n$ équations différentielles du second ordre, ou, ce qui revient au même, par $6n$ équations différentielles du premier ordre, qui serviront à déterminer en fonction du temps $6n$ inconnues, savoir les coordonnées de ces points et les vitesses avec lesquelles varieront ces coordonnées. De plus, si le mouvement commence avec le temps, l'état initial du système fournira, pour une valeur nulle du temps, les valeurs correspondantes de toutes les inconnues. Or il est bien vrai que, ces valeurs étant données, les $6n$ équations différentielles, considérées sous un point de vue purement analytique, et abstraction faite du problème de Mécanique auquel elles se rapportent, admettront, non seulement un système unique d'intégrales qui demeureront continues au moins jusqu'à une certaine époque, mais encore une infinité de systèmes

d'intégrales discontinues. Toutefois, il est clair que, parmi ces divers systèmes, un seul pourra résoudre le problème de Mécanique proposé. J'ajoute que ce système unique sera précisément le système des intégrales continues. C'est, en effet, ce que l'on peut démontrer de la manière suivante.

Les mouvements que nous observons dans la nature sont des mouvements continus, en vertu desquels un point matériel ne passe jamais brusquement d'une position à une autre sans passer par une série de positions intermédiaires. Il y a plus : les variations que l'on observe dans les vitesses étant produites par l'action continue des forces appliquées aux points mobiles, les vitesses elles-mêmes varient toujours avec le temps par degrés insensibles, et ne passent jamais d'une valeur donnée ou d'une direction donnée à une autre que d'une manière continue. Si, dans certaines circonstances, par exemple quand les corps se choquent, il semble quelquefois qu'il y a un changement brusque de vitesse, cela tient uniquement à ce que le temps pendant lequel la vitesse passe d'une valeur à une autre, après avoir successivement acquis toutes les valeurs intermédiaires, nous échappe en raison de sa petitesse. Donc, en définitive, les coordonnées des points mobiles et les vitesses de ces points, mesurées dans des directions quelconques, devront toujours être des fonctions continues du temps. Donc, lorsqu'on intégrera les équations différentielles qui représenteront le mouvement d'un nombre déterminé de points matériels, les seules intégrales qui résoudront le problème de Mécanique proposé seront les intégrales continues qui satisferont aux conditions initiales, c'est-à-dire celles qui reproduiront au premier instant les valeurs initiales données des diverses inconnues.

Si l'on considère, non plus un nombre fini et déterminé de points matériels, mais un corps solide ou fluide dans lequel le nombre de ces points devienne indéfini, alors, pour représenter leurs mouvements, on obtiendra, non plus un système d'équations différentielles, mais un système d'équations aux dérivées partielles, dans lesquelles les variables indépendantes pourront être le temps et les coordonnées



rectilignes ou non rectilignes d'un point quelconque, par exemple les coordonnées mesurées sur trois axes rectangulaires. Ajoutons que l'on pourra prendre pour inconnues les déplacements d'un point matériel, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et les vitesses du point projeté sur ces mêmes axes. Enfin, pour être en état de déterminer les valeurs générales de ces inconnues, il sera nécessaire de connaître leurs valeurs initiales. D'ailleurs, ces valeurs initiales pourront être des fonctions continues ou discontinues des coordonnées. Dans le premier cas, on pourrait généralement satisfaire aux équations données par un système d'intégrales continues qui fourniraient, pour les raisons ci-dessus énoncées, l'unique solution du problème de Mécanique auquel se rapporteraient ces équations. Mais il importe d'observer, d'une part, que les corps solides ou fluides, loin de pouvoir être considérés comme étant des masses continues et indéfinies, sont, au contraire, des assemblages de molécules, limités dans tous les sens; d'autre part, qu'au premier instant, et dans le corps donné, les déplacements et les vitesses des molécules supposées réduites à des points matériels, pourront demeurer sensibles entre certaines limites, et passer brusquement, quand on franchira ces limites, d'une valeur sensible à une valeur nulle. Donc, dans le cas général, les valeurs initiales des inconnues devront être supposées fonctions discontinues des coordonnées. Cette hypothèse étant admise, les intégrales déduites des équations proposées et des conditions initiales pourront elles-mêmes devenir toutes discontinues; et c'est précisément ce qui arrivera si les équations données sont homogènes. Il reste à savoir comment, parmi ces intégrales toutes discontinues, on pourra distinguer celles qui résoudront la question de Mécanique proposée. On y parviendra en s'appuyant sur la remarque suivante :

Une fonction discontinue de plusieurs variables indépendantes peut toujours être considérée comme représentant la valeur particulière que prend, pour une valeur nulle d'une variable auxiliaire, une fonction plus générale, mais continue, qui renferme cette variable auxiliaire avec toutes les autres.

En partant de cette remarque, on déterminera aisément les intégrales discontinues qui résoudront un problème de Mécanique dont la solution exigera l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles jointes à certaines conditions initiales. Il suffira de rechercher parmi les valeurs initiales des inconnues celles qui seront représentées par des fonctions discontinues, de considérer ces fonctions comme les valeurs particulières que prennent, pour une valeur nulle d'une variable auxiliaire, d'autres fonctions plus générales, mais continues, puis de résoudre le problème en substituant ces dernières fonctions aux premières, et de réduire, dans la solution trouvée, la variable auxiliaire à zéro.

Observons, d'ailleurs, que l'on simplifiera les formules fournies par l'intégration, en y introduisant les coefficients que j'ai nommés *limitateurs*, et dont chacun, dépendant d'une seule quantité variable, se réduit, suivant qu'elle est positive ou négative, à zéro ou à l'unité.

ANALYSE.

§ I. — *Intégrales continues et discontinues des équations différentielles.*

Considérons d'abord l'équation différentielle

$$(1) \quad D_t s = 0,$$

et soit c la valeur de s qui correspond à une valeur nulle du temps t . L'équation (1) admettra une seule intégrale continue, savoir

$$(2) \quad s = c,$$

et une infinité d'intégrales discontinues comprises dans la formule

$$(3) \quad s = \varpi(t),$$

$\varpi(t)$ étant une fonction de t , qui change brusquement de valeur à diverses époques, en se réduisant à une constante entre deux époques consécutives.

Soit maintenant l , un coefficient *limitateur* qui se réduise à zéro ou

à l'unité, suivant que la variable t est négative ou positive, ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$(4) \quad l_t = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{|t|}} \right).$$

Si, en admettant que les quantités

$$0, \quad t_1, \quad t_2, \quad \dots, \quad t_{n-1}$$

forment une suite croissante, on veut que la fonction $\varpi(t)$ se réduise

à c entre les limites	$t = 0,$	$t = t_1,$
à c_1 entre les limites	$t = t_1,$	$t = t_2,$
.....
à c_{n-1} pour	$t > t_{n-1},$	

il suffira de prendre

$$(5) \quad \varpi(t) = c + (c_1 - c)l_{t-t_1} + (c_2 - c_1)l_{t-t_2} + \dots + (c_n - c_{n-1})l_{t-t_n}.$$

Considérons à présent l'équation différentielle

$$(6) \quad D_t s = f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction qui demeure continue, du moins tant que le temps t ne dépasse pas une certaine limite; et soit toujours c la valeur de s correspondante à $t = 0$. Pour une valeur de t inférieure à la limite dont il s'agit, l'équation (6) offrira une seule intégrale continue, savoir

$$(7) \quad s = c + \int_0^t f(t) dt,$$

et une infinité d'intégrales discontinues, comprises dans la formule

$$(8) \quad s = \varpi(t) + \int_0^t f(t) dt,$$

la valeur de $\varpi(t)$ étant de la nature de celle que détermine l'équation (5).

Si la valeur attribuée à t est supérieure à celle pour laquelle la

fonction $f(t)$ cesse d'être continue, l'intégrale (7) pourra devenir elle-même discontinue. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$f(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

et si d'ailleurs on suppose $t > 1$.

Généralement, étant donné un système d'équations différentielles du premier ordre avec les valeurs initiales des inconnues, on pourra obtenir pour ces équations des intégrales continues ou discontinues. Mais, comme on l'a précédemment expliqué, les intégrales continues seront les seules qu'il conviendra d'employer, quand il s'agira de résoudre un problème de Mécanique ou de Physique.

§ II. — *Intégrales continues et discontinues des équations aux dérivées partielles.*

Considérons d'abord l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad D_x s = \Omega D_x s,$$

Ω étant une quantité positive, et supposons l'inconnue s assujettie à vérifier, pour une valeur nulle du temps t , la condition initiale

$$(2) \quad s = \varphi(x).$$

Si $\varphi(x)$ est une fonction continue de la variable indépendante x , l'équation (1), jointe à l'équation (2), admettra une seule intégrale continue, savoir

$$(3) \quad s = \varphi(x + \Omega t),$$

et une infinité d'intégrales discontinues. Si, au contraire, la fonction $\varphi(x)$ devient discontinue, si l'on suppose, par exemple,

$$(4) \quad \varphi(x) = l_x f(x),$$

$f(x)$ étant une fonction de x toujours continue, et l_x un coefficient limiteur qui se réduise à zéro ou à l'unité, suivant que la variable x

est négative ou positive, alors non seulement la condition initiale, réduite à la forme

$$(5) \quad s = I_x f(x),$$

fournira une valeur discontinue de s , mais l'intégrale (3), réduite à la forme

$$(6) \quad s = I_{x+\Omega t} f(x + \Omega t),$$

deviendra elle-même discontinue. D'ailleurs on pourra satisfaire à la fois à l'équation (1) et à la condition (5), non seulement par l'intégrale (6), mais encore par une infinité d'autres intégrales discontinues, par exemple en prenant

$$(7) \quad s = I_x f(x + \Omega t),$$

ou bien encore

$$(8) \quad s = I_{x+u} f(x + \Omega t),$$

u désignant une fonction de x et de t qui s'évanouisse pour $t = 0$. Au reste, parmi ces intégrales toutes discontinues, celle que fournit l'équation (6) jouira seule d'une propriété remarquable que nous allons indiquer.

La valeur discontinue de $\varphi(x)$, que fournit l'équation (4), peut être considérée comme la valeur particulière que reçoit une fonction continue de x et d'une variable auxiliaire τ , quand on pose $\tau = 0$, par exemple, comme la valeur particulière que reçoit le produit

$$I_x f(x),$$

quand, après avoir posé

$$(9) \quad I_x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\tau + \sqrt{x^2 + \tau^2}} \right),$$

ou bien encore

$$(10) \quad I_x = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\tau}}},$$

on fait évanouir τ . Il en résulte que l'intégrale (6), qui devient dis-

continue, quand on suppose, dans les formules (9) ou (10), $\tau = 0$, se trouve comprise, comme cas particulier, dans une intégrale continue, mais plus générale, qui satisfait à la fois à l'équation (1) et à la condition (5).

En général, lorsque des fonctions inconnues du temps et d'une ou de plusieurs autres variables indépendantes seront déterminées par des équations aux dérivées partielles jointes à un nombre suffisant de conditions initiales, on pourra, si ces conditions ne renferment point de fonctions discontinues, obtenir un système unique d'intégrales continues et une infinité de systèmes d'intégrales discontinues. Si, au contraire, les conditions initiales renferment des fonctions discontinues, on n'obtiendra plus que des systèmes d'intégrales discontinues; mais, parmi ces systèmes, se trouvera du moins un système unique d'intégrales discontinues comprises, comme cas particulier, dans des intégrales continues, desquelles on les déduira en réduisant à zéro une certaine variable auxiliaire. D'ailleurs le système unique dont il s'agit sera précisément celui qui devra être employé, lorsque les équations ou les conditions données se rapporteront à un problème de Mécanique ou de Physique.

Les principes exposés dans ce Mémoire font disparaître les contradictions apparentes des résultats que fournit l'application de diverses méthodes à l'intégration des équations aux dérivées partielles dans les questions de Physique mathématique. C'est ce que nous expliquerons dans de nouveaux articles, où nous appliquerons les mêmes principes à la détermination des lois qui régissent la propagation, la réflexion et la réfraction des mouvements vibratoires dans les corps considérés comme des systèmes de molécules ou de points matériels.

Nous nous bornerons pour l'instant à remarquer que, si, en supposant la fonction $\varphi(x)$ continue, on développe le second membre de la formule (3) en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de t , on obtiendra, pour déterminer s , l'équation

$$(11) \quad s = \varphi(x) + \frac{\Omega t}{1} D_x \varphi(x) + \frac{\Omega^2 t^2}{1.2} D_x^2 \varphi(x) + \dots$$



Si, au contraire, on suppose la fonction $\varphi(x)$ discontinue et déterminée par l'équation (4), $f(x)$ étant une fonction continue de x , le second membre de l'équation (3) ou (6) cessera, en même temps que la fonction $1_{x+\Omega t}$, d'être développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de t . Néanmoins, tant que la série comprise dans le second membre de la formule (11) sera convergente, la fonction de s que présente cette formule continuera de satisfaire pour une valeur quelconque de t à l'équation (1), et pour $t=0$ à la condition (2). Mais, comme dans le voisinage de toute valeur, ou positive ou négative, de x , on tirera de l'équation (4)

$$D_x \varphi(x) = 1_x D_x f(x), \quad D_x^2 \varphi(x) = 1_x D_x^2 f(x), \quad \dots,$$

la formule (11) pourra être réduite à

$$(12) \quad s = 1_x \left[f(x) + \frac{\Omega t}{1} D_x f(x) + \frac{\Omega^2 t^2}{1 \cdot 2} D_x^2 f(x) + \dots \right].$$

Par conséquent, dans l'hypothèse admise, la formule (11) ou (12) fournira le développement en série de la valeur de s déterminée, non plus par l'équation (3) ou (6) analogue à celles qui servent à résoudre les problèmes de Mécanique, mais par l'équation (7).

Si, dans la même hypothèse, on voulait obtenir le développement en série de la valeur de s fournie par l'équation (6), il faudrait se borner à développer le facteur $f(x + \Omega t)$, et ainsi, à la place de la formule (12), on obtiendrait la suivante :

$$(13) \quad s = 1_{x+\Omega t} \left[f(x) + \frac{\Omega t}{1} D_x f(x) + \frac{\Omega^2 t^2}{1 \cdot 2} D_x^2 f(x) + \dots \right].$$

Des remarques semblables s'appliquent aux intégrales en série et aux intégrales en termes finis de l'équation qui représente le mouvement du son dans l'air ou dans un corps solide. Elles donnent l'explication des contradictions apparentes entre les résultats auxquels semblent conduire ces deux espèces d'intégrales, et montrent non seulement comment il arrive que l'intégrale en série semble contre-

dire le phénomène de la propagation du son, indiqué par l'intégrale en termes finis, mais aussi comment l'intégrale en série doit être modifiée pour devenir propre à représenter les vibrations sonores d'un système donné de points matériels.

445.

CALCUL INTÉGRAL. — *Application des principes établis dans la séance précédente à la recherche des intégrales qui représentent les mouvements infiniment petits des corps homogènes, et spécialement les mouvements par ondes planes.*

C. R., T. XXIX, p. 606 (26 novembre 1849).

Comme je l'ai remarqué dans de précédents Mémoires, les mouvements intérieurs des corps considérés comme des systèmes de molécules se trouvent représentés par des équations qui renferment avec les inconnues, et leurs dérivées relatives au temps, leurs différences finies prises par rapport aux coordonnées initiales. Ces équations deviendront linéaires, si les mouvements deviennent infiniment petits, et se transformeront en équations aux dérivées partielles, si les différences finies des inconnues peuvent être développées, à l'aide du théorème de Taylor, en séries convergentes. Enfin, si, un corps étant homogène, ses molécules sont supposées réduites à des points matériels, les équations trouvées seront non seulement linéaires et aux dérivées partielles, mais encore à coefficients constants.

D'autre part, en suivant la méthode indiquée dans mes *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, on pourra réduire l'intégration des équations dont il s'agit à l'intégration de la seule équation caractéristique, ou même à l'évaluation de la seule fonction que j'ai désignée sous le nom de *fonction principale*. Il y a plus : les intégrales fournies par cette méthode, étant continues lorsque les valeurs ini-



tiales des inconnues sont des fonctions continues des coordonnées, fourniront toujours la solution véritable du problème de Mécanique ou de Physique auquel se rapporteront les équations données. Enfin, la fonction principale pouvant être considérée comme formée par l'addition d'un nombre fini ou infini de termes proportionnels à des exponentielles dont chacune offrira pour exposant une fonction linéaire des variables indépendantes, tout mouvement vibratoire infiniment petit d'un corps homogène pourra être censé résulter de la superposition d'un nombre fini ou infini de mouvements partiels du nombre de ceux que j'ai appelés *mouvements simples*.

Parmi les intégrales auxquelles on arrive en opérant comme on vient de le dire, on doit remarquer celles qu'on obtient quand les valeurs initiales des inconnues dépendent seulement de la distance d'un point matériel à un plan fixe. Alors la valeur générale de chaque inconnue se trouve exprimée par une fonction de cette distance et du temps. Donc les divers points matériels que renfermait au premier instant un plan quelconque parallèle au plan donné offrent des vibrations semblables, en vertu desquelles le plan qui les contient oscille, sans cesser d'être parallèle au plan fixe et de manière à entraîner dans son mouvement ces mêmes points. Donc alors le mouvement vibratoire du système donné de points matériels est ce qu'on peut appeler un mouvement par *ondes planes*. Alors aussi les équations données peuvent être remplacées par des équations linéaires aux dérivées partielles qui ne renferment plus que deux variables indépendantes.

Le cas où les équations linéaires données peuvent être réduites, sans erreur sensible, à des équations homogènes, mérite une attention spéciale. Dans ce cas, si les fonctions que renferment les conditions initiales deviennent discontinues, les intégrales trouvées seront elles-mêmes discontinues; et si, d'ailleurs, les mouvements s'exécutent par ondes planes, ces ondes seront déterminées par des plans généralement mobiles, dont chacun, au bout du temps t , séparera les points mis en vibration de points laissés ou rendus au repos. Ajoutons que ces ondes planes, mais limitées, pourront être aisément

représentées dans le calcul à l'aide des coefficients désignés sous le nom de *limitateurs*.

Ce n'est pas tout : si deux corps homogènes sont séparés par une surface plane, un mouvement vibratoire pourra se transmettre de l'un à l'autre, et, pour obtenir les lois de transmission, il faudra joindre aux équations données les formules que fourniront les principes établis dans mon Mémoire *sur les conditions relatives aux limites des corps*. S'il s'agit en particulier de vibrations lumineuses, alors, pour arriver à déduire du calcul les phénomènes de réflexion et de réfraction, on devra recourir au principe de la *continuité du mouvement dans l'éther*. Supposons, pour fixer les idées, qu'un rayon de lumière vienne à tomber sur une surface plane qui sépare l'un de l'autre deux milieux homogènes. Supposons encore que le rayon incident soit un rayon simple, mais tronqué, dans lequel les molécules vibrantes constituent une onde plane terminée par des plans parallèles. A l'onde incidente correspondront des ondes réfléchies et des ondes réfractées, représentées par les différents termes que renfermeront les intégrales des équations données, et ces diverses ondes seront terminées, soit en avant, soit en arrière, par des plans dont les traces sur la surface de séparation seront les mêmes. Ajoutons que les ondes réfléchies ou réfractées seront de deux espèces, et que parmi les rayons correspondants à ces ondes on devra comprendre les *rayons évanescents*, c'est-à-dire ceux dans lesquels les vibrations sont sensiblement nulles à des distances sensibles de la surface réfléchissante ou réfringente.

Dans les formules obtenues comme on vient de le dire, il suffira de jeter les yeux sur les coefficients limitateurs pour reconnaître quelles sont les limites des diverses ondes et leurs vitesses de propagation. S'agit-il, par exemple, des ondes qui constituent les rayons évanescents, on remarquera que les limitateurs relatifs à ces rayons peuvent être réduits aux valeurs particulières qu'acquièrent les limitateurs des ondes incidentes, pour les points situés sur la surface de séparation des milieux donnés. On en conclura que les ondes correspondantes aux rayons évanescents sont terminées par des plans perpendiculaires

à cette surface, et se propagent dans le sens indiqué par une droite perpendiculaire à ces plans, avec la même vitesse que les ondes incidentes.

Quant aux lois de polarisation, elles seront précisément celles que j'ai indiquées dans mes précédents Mémoires, et dont l'exactitude se trouve confirmée par les belles expériences de M. Jamin. Les formules que fournissent ces lois déterminent en même temps la direction des vibrations de l'éther dans la lumière polarisée. Elles vérifient l'assertion de Fresnel. Comme je l'ai déjà dit en 1836, cet illustre physicien a eu raison d'affirmer, non seulement que les vibrations des molécules éthérées sont généralement comprises dans les plans des ondes, mais encore qu'elles s'exécutent dans des plans perpendiculaires à ceux que l'on nomme *plans de polarisation*.

ANALYSE.

§ I. — Sur les coefficients limiteurs.

Les coefficients que nous avons nommés *limiteurs* fournissent un moyen très simple de représenter dans le calcul des fonctions discontinues qui se réduisent entre certaines limites à des fonctions continues données, et s'évanouissent hors de ces limites.

Ainsi, par exemple, l_t désignant un limiteur qui se réduit à zéro ou à l'unité suivant que la variable indépendante t est négative ou positive, pour obtenir une fonction discontinue $\varphi(t)$ qui se réduise à une fonction donnée $f(t)$ entre les limites $t = a$, $t = b > a$, et s'évanouisse toujours hors de ces limites, il suffira de prendre

$$(1) \quad \varphi(t) = l_{t-a} l_{b-t} f(t)$$

ou, ce qui revient au même, il suffira de prendre

$$(2) \quad \varphi(t) = l_t f(t),$$

le limiteur l_t étant déterminé par la formule

$$(3) \quad l_t = l_{t-a} l_{b-t}.$$

Pareillement, si l'on veut obtenir une fonction discontinue $\varphi(x, y)$ de deux coordonnées rectangulaires x, y , qui se réduise à une fonction continue donnée $f(x, y)$, pour tous les points situés à l'intérieur du rectangle compris entre les quatre droites représentées par les équations

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad y = y_1, \quad y = y_2,$$

et s'évanouisse pour tous les points extérieurs à ce rectangle; si d'ailleurs on suppose $x_2 > x_1$ et $y_2 > y_1$, il suffira de prendre

$$(4) \quad \varphi(x, y) = l_{x,y} f(x, y),$$

le limiteur $l_{x,y}$ étant déterminé par la formule

$$(5) \quad l_{x,y} = l_{x-x_1} l_{x_2-x} l_{y-y_1} l_{y_2-y}.$$

En général, si, désignant par x, y, z, \dots diverses variables indépendantes, on représente par $l_{x,y,z,\dots}$ un limiteur qui se réduise à l'unité ou à zéro suivant que les variables x, y, z, \dots sont ou ne sont pas comprises entre certaines limites, alors, pour obtenir une fonction discontinue $\varphi(x, y, z, \dots)$ qui se réduise à une fonction donnée $f(x, y, z, \dots)$ entre les limites dont il s'agit, et s'évanouisse hors de ces limites, il suffira de prendre

$$(6) \quad \varphi(x, y, z, \dots) = l_{x,y,z,\dots} f(x, y, z, \dots).$$

D'ailleurs le limiteur $l_{x,y,z,\dots}$ pourra toujours être considéré comme le produit de plusieurs autres limiteurs analogues à celui que nous avons représenté par l_t . Supposons, pour fixer les idées, que, x, y, z désignant trois coordonnées rectangulaires, la fonction $\varphi(x, y, z)$ doive s'évanouir, pour tous les points non renfermés entre deux surfaces représentées par les deux équations

$$u = u_1, \quad u = u_2,$$

u étant une fonction donnée de x, y, z , et u_1, u_2 deux quantités constantes, dont la seconde surpasse la première. Alors on pourra supposer, dans l'équation (6),

$$(7) \quad l_{x,y,z,\dots} = l_{u-u_1} l_{u-u_2}.$$



Quand on applique l'Analyse à la Mécanique ou à la Physique, les conditions initiales introduisent ordinairement dans le calcul des limiteurs. Ajoutons que les variables réelles dont ces limiteurs dépendent au premier instant se trouvent souvent remplacées, au bout d'un temps quelconque t , par des expressions imaginaires. Il importe de savoir quelles sont les valeurs acquises dans ce cas par les limiteurs. On y parvient en décomposant un limiteur quelconque en facteurs de la forme 1 , ou 1_x , et en ayant d'ailleurs égard à l'observation suivante.

Comme on dit à la page 180, le limiteur 1_x , qui se réduit à zéro ou à l'unité, suivant que la valeur de x , supposée réelle, est négative ou positive, peut être considéré comme la valeur particulière que reçoit une fonction continue de x et d'une variable auxiliaire ι , quand on pose $\iota = 0$. Cette fonction continue pourra être, par exemple,

$$(8) \quad \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\iota}}}$$

ι désignant un nombre infiniment petit. Or, si dans le facteur (8) on pose

$$x = \alpha + \epsilon i,$$

α, ϵ étant deux quantités réelles, on verra l'exponentielle

$$e^{-\frac{x}{\iota}} = e^{-\frac{\alpha}{\iota}} \left(\cos \frac{\epsilon}{\iota} + i \sin \frac{\epsilon}{\iota} \right)$$

converger, pour des valeurs décroissantes du nombre ι , vers une limite nulle ou infinie, suivant que α sera positif ou négatif, et l'on en conclura

$$(9) \quad 1_{\alpha + \epsilon i} = 1_{\alpha}.$$

Ainsi, lorsque la variable x est en partie imaginaire, on peut, dans le limiteur 1_x , réduire cette variable à sa partie réelle. On arriverait encore aux mêmes conclusions si, à l'expression (8), on substituait

une autre fonction de x et de ι , qui eût encore la propriété de se réduire à 1_x pour $\iota = 0$, par exemple l'expression

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\iota + \sqrt{x^2}} \right).$$

§ II. — Sur une certaine classe d'intégrales particulières des équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants.

Considérons un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants. Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, que, dans ces équations, les variables indépendantes soient le temps t et trois coordonnées rectangulaires x, y, z . Parmi les intégrales particulières qui vérifieront ces équations, on devra distinguer celles qu'on obtiendra en supposant que les valeurs initiales des inconnues dépendent uniquement de la distance du point (x, y, z) à un plan fixe. Soient α, ϵ, γ les cosinus des angles formés par une perpendiculaire à ce plan avec les demi-axes des coordonnées positives, et prenons

$$(1) \quad \iota = \alpha x + \epsilon y + \gamma z.$$

Supposons, d'ailleurs, que les intégrales cherchées doivent être continues ou du moins comprises, comme cas particulier, dans des intégrales continues, et, par conséquent, de la nature de celles qui résolvent les questions de Mécanique ou de Physique. Dans cette hypothèse, les inconnues, offrant des valeurs initiales qui dépendront de la seule variable ι , dépendront, au bout du temps t , des seules variables ι, t ; et, pour réduire les équations proposées à ne plus renfermer que ces deux variables, il suffira d'y substituer à D_x, D_y, D_z leurs valeurs tirées des formules symboliques

$$(2) \quad D_x = \alpha D_{\iota}, \quad D_y = \epsilon D_{\iota}, \quad D_z = \gamma D_{\iota}.$$

Si les équations proposées correspondent aux mouvements vibratoires infiniment petits d'un système de points matériels, les intégrales particulières dont nous venons de parler représenteront ce



qu'on peut appeler des *mouvements par ondes planes*. Si, de plus, les équations proposées sont homogènes, chaque onde plane pourra être limitée, en avant et en arrière, par des plans mobiles parallèles au plan fixe que représente l'équation

$$(3) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Concevons, pour fixer les idées, que les équations données se réduisent à celle qu'on nomme l'*équation du son*, c'est-à-dire à la formule

$$(4) \quad D_t^2 z = \Omega^2 (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) z,$$

Ω étant une quantité positive et constante. Si les valeurs initiales de l'inconnue z et de sa dérivée $D_t z$ dépendent uniquement de la distance du point (x, y, z) au plan fixe représenté par l'équation (3), ou, en d'autres termes, de la variable x , en sorte qu'on ait, pour $t = 0$,

$$(5) \quad z = \varphi(x), \quad D_t z = \Phi(x),$$

la valeur générale de z dépendra des seules variables x, t ; et, comme on tirera de l'équation (4), jointe aux formules (2),

$$(6) \quad D_x^2 z = \Omega^2 D_x^2 z,$$

on trouvera définitivement

$$(7) \quad z = \frac{\varphi(x + \Omega t) + \varphi(x - \Omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\Phi(x + \Omega \tau) + \Phi(x - \Omega \tau)}{2} d\tau.$$

Si les valeurs initiales de z et $D_t z$, savoir $\varphi(x)$ et $\Phi(x)$, se réduisent aux valeurs correspondantes de deux fonctions continues données $f(x)$ et $F(x)$, entre les limites

$$(8) \quad x = a, \quad x = b > a,$$

et s'évanouissent hors de ces mêmes limites, on aura

$$(9) \quad \varphi(x) = l_x f(x), \quad \Phi(x) = l_x F(x),$$

la valeur du limiteur l_x étant déterminée par la formule

$$(10) \quad l_x = l_{x-a} l_{b-x}.$$

Alors aussi l'équation (7) donnera

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{l_{x+\Omega t} f(x + \Omega t) + l_{x-\Omega t} f(x - \Omega t)}{2} \\ &+ \int_0^t \frac{l_{x+\Omega \tau} F(x + \Omega \tau) + l_{x-\Omega \tau} F(x - \Omega \tau)}{2} d\tau. \end{aligned} \right.$$

Des deux termes que renferme le second membre de la formule (10), le premier s'évanouira, et le dernier, réduit à une quantité constante, deviendra indépendant des variables x, t , quand les limites a, b ne comprendront pas entre elles la somme $x + \Omega t$, ou la différence $x - \Omega t$. Donc la valeur de z , déterminée par le système des équations (10) et (11), ne sera variable avec x et t , que dans l'épaisseur de l'onde plane terminée par les plans mobiles correspondants aux deux équations

$$(12) \quad x = a - \Omega t, \quad x = b - \Omega t,$$

ou bien encore de l'onde plane terminée par ceux que représentent les formules •

$$(13) \quad x = a + \Omega t, \quad x = b + \Omega t.$$

Ajoutons que ces deux ondes, avec les plans qui les terminent et qui sont parallèles au plan fixe représenté par l'équation (3), se mouvront en sens inverses avec des vitesses de propagation représentées par la quantité positive Ω .

Si à l'équation (4) on substitue la suivante

$$(14) \quad D_t^2 z + \Omega^2 (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) z = 0,$$

l'équation (6) deviendrait

$$(15) \quad D_t^2 z + \Omega^2 D_x^2 z = 0,$$

et l'on devrait, dans la formule (11), remplacer Ω par Ωi . Mais, comme on aurait [voir la formule (9) du § I]

$$(16) \quad l_{x \pm \Omega t} = l_x,$$

et, par suite, eu égard à l'équation (10),

$$(17) \quad l_1 \pm \Omega t = l_2,$$

la valeur de x serait réduite à

$$(18) \quad x = l_1 \frac{f(x + \Omega t) + f(x - \Omega t)}{2} + l_2 \int_0^t \frac{F(x + \Omega \tau) + F(x - \Omega \tau)}{2} d\tau.$$

Cela posé, la valeur de x s'évanouirait toujours en dehors de l'onde terminée par les plans fixes que représentent les équations (8), et, cette onde étant immobile, sa vitesse de propagation serait réduite à zéro.

En général, étant donné un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants entre diverses inconnues, le temps t et les coordonnées rectangulaires x, y, z , si l'on élimine toutes les inconnues à l'exception d'une seule, on se trouvera conduit à une équation caractéristique de la forme

$$(19) \quad F(D_x, D_y, D_z) x = 0.$$

Si les équations données sont homogènes, l'équation caractéristique sera elle-même homogène, et si d'ailleurs les valeurs initiales des diverses inconnues dépendent uniquement de la distance r du point (x, y, z) à un plan fixe, alors, à la place de la formule (6) ou (15), on obtiendra la suivante :

$$(20) \quad F(D_r, \alpha D_x, \beta D_y, \gamma D_z) x = 0.$$

Enfin, si l'on suppose qu'au premier instant les diverses inconnues s'évanouissent en dehors de l'onde plane terminée par les plans que représentent les équations (8), alors, en opérant comme ci-dessus et ayant égard aux principes établis dans le § I, on reconnaîtra que cette onde plane se décompose généralement en plusieurs ondes de même espèce, qui se propagent avec des vitesses correspondantes aux diverses racines ω de l'équation

$$(21) \quad F(\omega, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et représentées, aux signes près, par les parties réelles de ces mêmes racines.

Au reste, ainsi que je l'ai remarqué dans le préambule de ce Mémoire, les principes ici appliqués à la propagation des mouvements vibratoires et, en particulier, des mouvements par ondes planes dans un système de points matériels, s'appliquent avec le même succès à la détermination de la transmission de ces mouvements, quand ils passent d'un système à un autre, par exemple à la recherche des lois de la réflexion et de la réfraction lumineuse. C'est d'ailleurs ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article.

446.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur les systèmes d'équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles, à coefficients périodiques, et sur les intégrales élémentaires de ces mêmes équations.*

C. R., T. XXIX, p. 641 (3 décembre 1849).

Je viens aujourd'hui appeler l'attention des géomètres sur une nouvelle branche de Calcul intégral qui me paraît devoir contribuer aux progrès de la Mécanique moléculaire, et qui a pour objet l'intégration des équations linéaires à coefficients périodiques.

J'appellerai fonction périodique d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y, z, \dots celle qui ne sera point altérée quand on fera croître ou décroître ces variables de quantités représentées par des multiples de certains paramètres a, b, c, \dots , en faisant varier x d'un multiple de a , y d'un multiple de b , z d'un multiple de c, \dots . Des équations linéaires à coefficients périodiques ne seront autre chose que des équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles, dans lesquelles les diverses dérivées des inconnues auront pour coefficients des fonctions périodiques des variables x, y, z, \dots ou de

variables représentées par des fonctions linéaires de x, y, z, \dots . Enfin, j'appellerai *paramètres trigonométriques* les quotients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ qu'on obtiendra en divisant la circonférence 2π par les paramètres donnés a, b, c, \dots .

Dans les équations linéaires et à coefficients périodiques auxquelles on se trouve conduit par la Mécanique moléculaire, les coefficients sont, en général, fonctions des coordonnées, mais indépendants du temps t ; et alors on peut obtenir des intégrales particulières qui fournissent pour les inconnues des valeurs représentées par des produits dont un seul facteur renferme le temps, ce facteur étant une exponentielle dont l'exposant est proportionnel à t . Ces intégrales particulières sont ce que nous appellerons des *intégrales élémentaires*. Lorsque l'exponentielle dont il s'agit sera une exponentielle trigonométrique, les intégrales élémentaires deviendront *isochrones*, c'est-à-dire qu'elles fourniront, pour valeurs des inconnues, des fonctions périodiques du temps.

Les intégrales élémentaires seront généralement imaginaires ou symboliques; mais elles ne cesseront pas, pour cela, d'être applicables à la solution des problèmes de Mécanique ou de Physique. Car, si l'on réduit les valeurs symboliques des inconnues à leurs parties réelles, ces parties réelles satisferont encore aux équations données.

Une propriété remarquable d'une fonction périodique de x, y, z, \dots , c'est qu'elle peut être développée en série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles trigonométriques dont chacune a pour argument le produit d'une variable par le paramètre trigonométrique correspondant. Dans chaque terme de la série, le facteur constant est exprimé par une intégrale définie multiple, les intégrations étant effectuées à partir de zéro jusqu'à des limites représentées par les paramètres a, b, c, \dots . Le terme constant de la série est la valeur moyenne de la fonction. D'ailleurs, il est important d'observer que, si une fonction périodique u renferme avec les variables indépendantes x, y, z, \dots d'autres quantités h, k, \dots , la valeur moyenne de u , considérée comme fonction

de h, k, \dots , pourra changer de forme ou devenir discontinue quand on changera les valeurs de h, k (¹).

Ces principes étant admis, on peut développer en séries les intégrales élémentaires des équations linéaires à coefficients périodiques, en réduisant, dans une première approximation, les valeurs des inconnues à celles qu'on obtient quand on substitue à chaque coefficient périodique sa valeur moyenne. Alors, à la place des équations données, se présentent des équations auxiliaires à coefficients constants, auxquelles on satisfait en supposant les diverses inconnues proportionnelles à une seule *exponentielle caractéristique*, dont l'argument est fonction linéaire des variables indépendantes; puis, en admettant que les séries obtenues soient convergentes, on trouve, pour valeurs définitives des inconnues, des produits de deux facteurs dont l'un est une exponentielle caractéristique propre à vérifier le système des équations auxiliaires, l'autre facteur de chaque produit étant un coefficient périodique.

Il est bon d'observer que, à la recherche des intégrales élémentaires propres à vérifier les équations linéaires données, on pourra, si l'on veut, substituer la recherche des coefficients périodiques renfermés dans ces intégrales, ces coefficients devant eux-mêmes satisfaire à d'autres équations linéaires qu'il sera facile d'obtenir.

Observons enfin que les diverses exponentielles caractéristiques, propres à vérifier le système des équations auxiliaires, seront immédiatement fournies par l'*équation caractéristique* correspondante au système dont il s'agit.

(¹) Ainsi, par exemple, la fonction périodique

$$\frac{he^{\alpha x^2}}{k + he^{\alpha x^2}}$$

a pour valeur moyenne zéro, ou l'unité, suivant que le module de k est supérieur ou inférieur au module de h .

447.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les vibrations infiniment petites des systèmes de points matériels.*

C. R., T. XXIX, p. 643 (3 décembre 1849).

Les principes exposés dans le précédent Mémoire sont particulièrement applicables à la détermination des mouvements vibratoires et infiniment petits des milieux cristallisés et de l'éther renfermé dans ces milieux. En effet, comme l'ont remarqué les minéralogistes, les centres de gravité des molécules d'un corps cristallisé composent un système *réculaire* divisé en cases ou cellules par trois systèmes de plans rectangulaires ou obliques, mais parallèles à trois plans fixes. Un tel système jouit de propriétés diverses étudiées avec soin par M. Bravais, et doit être censé renfermer des molécules similaires, dont les atomes correspondants occupent, dans les diverses cellules, des positions semblables. Par suite aussi, les atomes du fluide éthéré doivent être distribués de la même manière dans toutes les cellules. Cela posé, les équations linéaires qui représenteront les mouvements vibratoires, infiniment petits et simultanés, d'un cristal homogène et du fluide éthéré qu'il renferme, seront évidemment des équations linéaires à coefficients périodiques. Si, dans ce cristal, les plans réculaires divisent l'espace en rhomboïdes dont chacun ait pour arêtes trois paramètres désignés par a , b , c , les divers coefficients seront des fonctions périodiques de coordonnées parallèles à ces arêtes, et ces fonctions ne seront point altérées quand on fera croître ou décroître chaque coordonnée d'un multiple du paramètre qui lui correspond. Si d'ailleurs ces coordonnées sont obliques, rien n'empêchera de prendre pour variables indépendantes, outre le temps, des coordonnées rectangulaires, dont les coordonnées obliques seront évidemment fonctions linéaires.

Ces principes étant admis, pour obtenir ce qu'on peut appeler les *mouvements vibratoires élémentaires*, ou d'un milieu cristallisé, ou de

l'éther qu'il renferme, il suffira de rechercher les intégrales élémentaires des équations aux dérivées partielles et à coefficients périodiques qui représentent ces mouvements. Dans le cas particulier où ces coefficients diffèrent peu de leur valeur moyenne, on déduira, des calculs indiqués dans le précédent Mémoire, la proposition suivante :

THEOREME. — *Dans un milieu homogène et cristallisé, un mouvement vibratoire et infiniment petit de l'éther, représenté par un système d'INTEGRALES A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES, diffère, sous un seul rapport, d'un mouvement qui s'exécute dans le vide, c'est-à-dire d'un mouvement simple et par ondes planes. La seule différence consiste en ce que les coefficients de l'exponentielle caractéristique dans les valeurs symboliques des diverses inconnues se réduisent, dans le vide, à des constantes, et dans un milieu cristallisé à des fonctions périodiques. Par suite, lorsqu'il s'agit d'un mouvement durable et persistant, la seule différence consiste en ce que les amplitudes et les directions des vibrations atomiques qui, dans le vide, restent les mêmes pour tous les atomes, avec le mode de polarisation, varient dans un milieu cristallisé, quand on passe dans la même cellule d'un atome à un autre, quoiqu'elles reprennent les mêmes valeurs, quand on passe d'un atome situé dans une cellule donnée à l'atome qui, dans une autre cellule, occupe la même place.*

Dans un autre article, j'examinerai les diverses conséquences qui peuvent se déduire des intégrales élémentaires, appliquées à l'étude des divers phénomènes que présente la théorie de la lumière.

448.

OPTIQUE. — *Démonstration simple de cette proposition que, dans un rayon de lumière polarisé rectilignement, les vibrations des molécules sont perpendiculaires au plan de polarisation.*

C. R., T. XXIX, p. 645 (3 décembre 1849).

Faisons tomber sur la surface de séparation de deux milieux isophanes un rayon polarisé, dans lequel les vibrations de l'éther soient

parallèles à cette surface, et par conséquent transversales. Ces vibrations ne pourront donner naissance qu'à d'autres vibrations transversales; et, par suite, les vibrations non transversales venant à manquer, la réflexion et la réfraction produiront seulement deux rayons à vibrations transversales, l'un réfléchi, l'autre réfracté. J'ajoute que le rayon réfléchi ne pourra disparaître sous aucune incidence. Car, s'il disparaissait, alors, en vertu du *principe* de la continuité du mouvement dans l'éther, le rayon réfracté ne pourrait être que la continuation du rayon incident, prolongé à travers le second milieu. Or cela ne saurait arriver, quand, les deux milieux étant de natures diverses, l'indice de réfraction ne se réduit pas à l'unité. Donc alors la réflexion ne peut faire disparaître un rayon incident, dans lequel les vibrations sont parallèles à la surface réfléchissante. Mais un rayon que la réflexion ne peut faire disparaître est précisément ce qu'on nomme un *rayon polarisé dans le plan d'incidence*. Donc un rayon dans lequel les vibrations de l'éther sont parallèles à une surface sur laquelle il tombe, et, en conséquence, perpendiculaires au plan d'incidence, est polarisé dans ce plan. Donc les vibrations du fluide éthéré, dans un rayon polarisé rectilignement, sont perpendiculaires au plan de polarisation.

449.

C. R., T. XXIX, p. 689 (10 décembre 1849).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie la suite de ses recherches sur l'intégration des équations linéaires à coefficients périodiques. Il considère spécialement les *intégrales élémentaires*, qui fournissent pour les inconnues des valeurs représentées par des produits de deux facteurs, dont l'un est une *exponentielle caractéristique*, propre à vérifier un certain système d'*équations auxiliaires*, linéaires, mais à coefficients constants, tandis que l'autre facteur est un coefficient périodique. L'auteur observe que l'exponentielle caractéristique ici

mentionnée diffère généralement de celle qu'on obtiendrait si, dans les équations linéaires données, on réduisait chaque coefficient périodique à sa valeur moyenne. Cette observation est surtout utile dans les problèmes de Mécanique et de Physique.

450.

MÉCANIQUE MOLÉCULAIRE. — *Mémoire sur les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther contenu dans un corps cristallisé.*

C. R., T. XXIX, p. 728 (17 décembre 1849).

Dans ce Mémoire, après avoir reproduit les équations qui représentent les mouvements finis ou infiniment petits d'un double système de molécules, je considère en particulier le cas où les équations obtenues sont linéaires et à coefficients périodiques, et je fais voir comment de celles-ci on peut déduire d'autres équations linéaires, mais à coefficients constants. Ces dernières équations, que je nomme *auxiliaires*, peuvent d'ailleurs être censées déterminer les *valeurs moyennes* des inconnues que renferment les équations proposées. Mais, comme j'en fais la remarque, elles sont généralement distinctes de celles auxquelles on parviendrait si, dans les équations proposées, on remplaçait chaque coefficient périodique par sa valeur moyenne. Cette observation, très importante dans la Physique mathématique, explique à elle seule un grand nombre de phénomènes relatifs aux théories du son et de la lumière, par exemple, les singulières influences des milieux cristallisés sur les vibrations de l'éther. Elle montre comment il arrive que ces milieux peuvent tantôt éteindre la lumière, tantôt produire les divers phénomènes lumineux, et, en particulier, la polarisation chromatique. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans d'autres articles qui offriront le développement des principes posés dans celui-ci.

451.

MÉCANIQUE MOLÉCULAIRE. — *Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels.*

C. R., T. XXIX, p. 761 (24 décembre 1849).

Dans le Mémoire lithographié sous la date d'août 1836, et dans celui que j'ai présenté à l'Académie le 17 juin 1839 (1), j'ai recherché ce que deviennent les équations des mouvements infiniment petits d'un ou de deux systèmes homogènes de points matériels, quand elles acquièrent la propriété de ne pouvoir être altérées, tandis que l'on fait tourner les axes coordonnés autour de l'origine, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand les systèmes donnés deviennent *isotropes*. Mais, dans cette recherche, les coefficients que renfermaient les équations linéaires données étaient supposés réduits à des quantités constantes; et, comme j'en ai fait la remarque, cette supposition n'est pas toujours conforme à la réalité. Dans un grand nombre de problèmes de Physique et de Mécanique, les équations linéaires auxquelles on se trouve conduit renferment des coefficients, non plus constants, mais périodiques. Il est vrai qu'alors l'intégration des équations linéaires à coefficients périodiques peut être ramenée à l'intégration d'autres équations linéaires à coefficients constants, savoir de celles que j'ai désignées sous le nom d'*équations auxiliaires*, et qui déterminent les *valeurs moyennes* des inconnues. Mais, la forme de ces équations auxiliaires étant plus générale que celle des équations primitives, il devient nécessaire de généraliser les formules qui s'en déduisent, et spécialement celles qui représentent les mouvements infiniment petits des systèmes isotropes. Ajoutons qu'on peut obtenir aisément ces dernières formules sans le secours du Calcul intégral, en s'appuyant sur quelques théorèmes fondamentaux, relatifs aux *fonc-*

(1) Voir le Tome VIII des *Comptes rendus* (*Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. IV, p. 417) et le Tome I des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (*Ibid.*, S. II, T. XII).

tions isotropes de coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire aux fonctions qui ne sont pas altérées, quand on fait tourner les axes coordonnés autour de l'origine. Parmi ces théorèmes nous nous bornerons à citer le suivant.

THÉORÈME. — *Une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires de trois points dépend uniquement des quantités variables qui représentent les distances de ces points à l'origine et leurs distances mutuelles, et de la somme alternée qui représente, au signe près, le volume du tétraèdre dont ces distances sont les arêtes.*

Remarquons, d'ailleurs, que le carré du volume d'un tétraèdre étant une fonction entière des carrés des six arêtes, on pourra réduire toute fonction isotrope des coordonnées rectangulaires de trois points à une fonction de six quantités variables. Ajoutons qu'une telle fonction deviendra *hémitrope*, si elle change de signe avec les coordonnées elles-mêmes.

Quand on veut appliquer le théorème que nous venons d'énoncer à la recherche des conditions d'*isotropie* d'un système de points matériels, il convient de remplacer les trois équations qui déterminent les déplacements d'un point quelconque, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, par l'équation unique qui détermine, pour le même point, le déplacement mesuré parallèlement à un quatrième axe arbitrairement choisi. En opérant ainsi, on se trouve immédiatement conduit aux équations que j'ai mentionnées dans la séance du 14 novembre 1842, et qui représentent avec tant de précision les phénomènes de polarisation et de dispersion circulaires produits par l'huile de térébenthine, l'acide tartrique, etc.

452.

C. R., T. XXX, p. 2 (7 janvier 1850).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie la suite de ses recherches sur les mouvements vibratoires des systèmes de molécules, et sur la

théorie de la lumière. Les principales conséquences de ces recherches, spécialement celles qui se rapportent à la polarisation circulaire et aux phénomènes rotatoires produits par l'huile de térébenthine, l'acide tartrique, etc., seront développées dans un prochain article.

453.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les perturbations produites dans les mouvements vibratoires d'un système de molécules par l'influence d'un autre système.*

C. R., T. XXX, p. 17 (14 janvier 1850).

Les équations différentielles qui représentent l'équilibre ou le mouvement d'un système de points matériels, celles-là mêmes auxquelles j'étais parvenu dans le Mémoire présenté à l'Académie le 1^{er} octobre 1827, peuvent être appliquées, non seulement à la théorie du son et des corps élastiques, mais encore, ainsi que je l'ai montré dès l'année 1829, à la théorie de la lumière. Ces équations aux différences mêlées deviennent linéaires lorsque les mouvements sont infiniment petits et se transforment, quand on développe les différences finies des inconnues, à l'aide du théorème de Taylor, en équations aux dérivées partielles. D'ailleurs, lorsque le système de points matériels donné est homogène, on peut, dans une première approximation, supposer les coefficients des diverses dérivées réduits à des quantités constantes; et alors les mouvements simples ou élémentaires, représentés par les équations dont il s'agit, sont précisément de même nature que les mouvements vibratoires du fluide éthéré dans un rayon simple de lumière.

Concevons à présent que les atomes ou points matériels dont se compose un système homogène donné soient mis en présence d'autres atomes moins nombreux qui appartiennent à un second système pareillement homogène. Les équations linéaires et aux dérivées partielles,

qui représenteront un mouvement vibratoire et infiniment petit du premier système, cesseront d'être des équations à coefficients constants. Mais, dans beaucoup de cas, les coefficients seront périodiques, et c'est ce qui arrivera en particulier si l'on considère les mouvements de l'éther contenu dans un corps cristallisé. Or, comme je l'ai remarqué dans un précédent Mémoire, les valeurs moyennes de plusieurs inconnues, assujetties à vérifier des équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients périodiques, sont déterminées par d'autres équations linéaires, mais à coefficients constants, savoir par celles que j'ai nommées *équations auxiliaires*. En partant de ce principe, on reconnaît que les actions exercées sur les atomes de l'éther par les molécules des corps produisent, dans les mouvements vibratoires du fluide lumineux, des perturbations analogues à celles que subit le mouvement d'une planète autour du Soleil, en vertu de l'action exercée sur elle par une autre planète. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

Si l'on suppose qu'une seule planète se meuve autour du Soleil, l'orbite qu'elle décrira sera une courbe plane, et même une ellipse, dans laquelle le rayon vecteur mené du Soleil à la planète tracera des aires proportionnelles au temps. Cette ellipse pourra d'ailleurs, dans certains cas particuliers, se réduire à un cercle ou s'aplatir indéfiniment.

Si maintenant on suppose qu'une seconde planète se meuve autour du Soleil, elle produira, dans le mouvement de la première, des inégalités ou perturbations de deux espèces, savoir des inégalités périodiques qui s'évanouiront, à des époques équidistantes, sans modifier les éléments de l'ellipse décrite, et des inégalités séculaires qui altéreront sensiblement les éléments du mouvement elliptique.

Or ces divers phénomènes se reproduisent en petit dans la théorie de la lumière. En effet, considérons les mouvements vibratoires du fluide éthéré. Si ce fluide est isolé, ses vibrations pourront être représentées par des équations linéaires à coefficients constants, et alors chaque molécule décrira une courbe plane. Dans le cas le plus général,



cette courbe plane sera une ellipse, et le rayon vecteur mené du centre de l'ellipse à la molécule d'éther décrira des aires proportionnelles au temps. Alors on obtiendra ce qu'on nomme la *polarisation elliptique*. D'ailleurs l'ellipse pourra, dans certains cas particuliers, se transformer en un cercle, ou s'aplatir indéfiniment, de manière à se réduire à son grand axe, et alors la polarisation elliptique se transformera en polarisation *circulaire* ou *rectiligne*. Ajoutons que, dans tout mouvement lumineux qui ne s'éteindra point pour des valeurs croissantes du temps ou de la distance à un plan fixe, les ellipses décrites par les diverses molécules du fluide éthéré seront toutes semblables les unes aux autres et comprises dans des plans parallèles.

Concevons, maintenant, que l'éther mis en vibration soit renfermé dans un autre corps, par exemple dans un milieu cristallisé. Les courbes décrites par les molécules de l'éther seront encore à très peu près des courbes planes, et même des ellipses. Mais les éléments du mouvement elliptique ne seront plus les mêmes que dans le cas où l'éther était à l'état d'isolement. D'ailleurs, les perturbations produites dans les éléments du mouvement elliptique seront de deux espèces. Les unes, analogues aux égalités périodiques des mouvements planétaires, seront elles-mêmes périodiques. Seulement elles seront représentées par des fonctions périodiques, non plus du temps, comme en Astronomie, mais des coordonnées d'un atome. Si, d'ailleurs, le mouvement vibratoire de l'éther n'est pas du nombre de ceux qui s'éteignent pour des valeurs croissantes du temps ou de la distance à un plan fixe, alors, dans le passage d'un atome à un autre, deux éléments de ce mouvement vibratoire resteront invariables, savoir la *longueur d'une ondulation lumineuse* ou, en d'autres termes, l'*épaisseur d'une onde plane* et la *durée des vibrations*. Quant aux perturbations non périodiques, elles seront analogues aux inégalités séculaires des mouvements des planètes, et altéreront les deux éléments dont il s'agit.

J'ajouterai ici une remarque importante.

La plupart des phénomènes que présente la théorie de la lumière,

par exemple la propagation des ondes lumineuses dans les corps isophanes ou dans les milieux doués de la double réfraction, la dispersion des couleurs produite par le prisme, la diffraction des rayons transmis à travers une petite ouverture, la réflexion et la réfraction opérées par la surface d'un corps peuvent être déduits de l'intégration d'équations linéaires à coefficients constants; et j'étais en réalité parvenu, non seulement à les en déduire, mais encore à tirer du calcul les lois de ces phénomènes avec assez de bonheur pour que les prévisions de l'analyse aient été jusqu'ici confirmées par l'expérience. Toutefois, il restait à expliquer quelques autres phénomènes, particulièrement la polarisation chromatique produite par certains liquides, tels que l'huile de térébenthine et l'acide tartrique, ou même par ces liquides solidifiés, comme le montrent les belles expériences faites récemment par M. Biot. Or les principes que je viens d'énoncer permettent de rattacher ces phénomènes si remarquables aux actions directes exercées par les molécules des corps sur les atomes de l'éther, et à une distribution particulière de ces atomes déterminée par ces mêmes actions. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un nouvel article.

Je remarquerai, en finissant, que les mêmes principes fournissent encore l'explication de la différence qui existe entre la vitesse du son donnée par la formule newtonienne et la vitesse déterminée par l'expérience.

ANALYSE.

Considérons les équations qui représentent les mouvements vibratoires et infiniment petits de deux ou de plusieurs systèmes de molécules coexistants dans un même lieu. Ces équations, linéaires et aux différences mêlées, pourront souvent se transformer, comme je l'ai dit ailleurs, en équations aux dérivées partielles et à coefficients *périodiques*, qui renfermeront, avec les diverses inconnues, leurs dérivées des divers ordres, prises par rapport aux temps t et aux coordonnées rectangulaires ou obliques x, y, z d'un point quelconque, les coeffi-



cients de chaque inconnue et de ses dérivées étant eux-mêmes des fonctions périodiques de x, y, z .

Concevons, pour fixer les idées, que chaque coefficient soit une fonction périodique des coordonnées x, y, z , qui ne change pas de valeur quand on fait croître ou décroître ces coordonnées de quantités représentées par des multiples des trois paramètres a, b, c , savoir x d'un multiple de a, y d'un multiple de b, z d'un multiple de c ; et posons

$$\alpha = \frac{2\pi}{a}, \quad \beta = \frac{2\pi}{b}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{c}.$$

Un coefficient quelconque K pourra être développé en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives, nulles ou négatives des exponentielles trigonométriques

$$e^{2\alpha x}, \quad e^{\beta y}, \quad e^{\gamma z},$$

de sorte qu'on aura

$$(1) \quad K = S e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z} k_{l, l', l''},$$

la sommation qu'indique le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives des quantités l, l', l'' ; et, pour satisfaire aux équations données, il suffira de développer, non seulement chaque coefficient K , mais encore chaque inconnue u , en une série de même forme, en posant, par exemple,

$$(2) \quad u = S e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z} u_{l, l', l''},$$

puis d'égaliser entre eux, dans les deux membres de chaque équation, les coefficients des puissances semblables des exponentielles

$$e^{2\alpha x}, \quad e^{\beta y}, \quad e^{\gamma z}.$$

En opérant ainsi, et supposant que, dans le développement de chaque inconnue, on néglige les termes où la somme de valeurs numériques des trois quantités l, l', l'' surpasse un nombre donné, on obtiendra des équations linéaires et aux dérivées partielles, qui

pourront être substituées avec avantage aux équations proposées, puisque les coefficients qu'elles renfermeront ne seront plus des fonctions périodiques de x, y, z , mais des quantités constantes.

Considérons, en particulier, un mouvement vibratoire et infiniment petit de l'éther dans un milieu cristallisé, et nommons ξ, η, ζ les déplacements d'un atome d'éther, mesurés parallèlement aux axes des x, y, z , supposés rectangulaires. D'après ce qui a été dit dans le Mémoire présenté à la séance du 17 décembre, on pourra supposer ce mouvement représenté par trois équations de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} (D_x^2 - G)\xi = D_x(D_x H\xi + D_y H\eta + D_z H\zeta), \\ (D_y^2 - G)\eta = D_y(D_x H\xi + D_y H\eta + D_z H\zeta), \\ (D_z^2 - G)\zeta = D_z(D_x H\xi + D_y H\eta + D_z H\zeta), \end{cases}$$

les valeurs de u, v, w étant

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z,$$

et G, H désignant deux fonctions entières de u, v, w . Si, d'ailleurs, le milieu cristallisé dont il s'agit offre trois axes de symétrie parallèles aux axes rectangulaires des x, y, z , alors G, H seront des fonctions périodiques de ces coordonnées, et resteront invariables quand on fera croître x d'un multiple de a, y d'un multiple de b, z d'un multiple de c , les quantités positives a, b, c désignant les trois dimensions d'un *parallélépipède élémentaire*. Cela posé, les fonctions périodiques G, H et les inconnues

$$\xi, \eta, \zeta$$

pourront être développées en séries ordonnées suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{2\alpha x}, \quad e^{\beta y}, \quad e^{\gamma z}.$$

Ajoutons que, dans une première approximation, on pourra réduire chaque série à son premier terme, c'est-à-dire à la *valeur moyenne* de G, H, ξ, η ou ζ , représentée par G_0, H_0, ξ_0, η_0 ou ζ_0 , et qu'alors à la

place des formules (3) on obtiendra les équations

$$(4) \quad \begin{cases} (D_x^2 - G_0)\xi_0 = D_n(D_n H_0 \xi_0 + D_v H_0 \eta_0 + D_w H_0 \zeta_0), \\ (D_x^2 - G_0)\eta_0 = D_n(D_n H_0 \xi_0 + D_v H_0 \eta_0 + D_w H_0 \zeta_0), \\ (D_x^2 - G_0)\zeta_0 = D_n(D_n H_0 \xi_0 + D_v H_0 \eta_0 + D_w H_0 \zeta_0), \end{cases}$$

qui seront linéaires comme les premières, mais à coefficients constants.

Concevons, à présent, que l'on procède à une seconde approximation, en conservant dans chaque développement, non seulement le terme indépendant des exponentielles trigonométriques

$$e^{\alpha x}, e^{\beta y}, e^{\gamma z},$$

mais encore les termes proportionnels à leurs premières puissances positives ou négatives, et en posant, par exemple,

$$(5) \quad \xi = \xi_0 + \xi_x e^{\alpha x} + \xi_y e^{\beta y} + \xi_z e^{\gamma z} + \xi_{-x} e^{-\alpha x} + \xi_{-y} e^{-\beta y} + \xi_{-z} e^{-\gamma z},$$

Remarquons, d'ailleurs, que α, β, γ étant très petits, et α, β, γ très considérables, les équations identiques de la forme

$$D_x^2 (u_x e^{\alpha x}) = (D_x + \alpha i)^2 u_x,$$

$$D_y^2 (u_y e^{\beta y}) = (D_y + \beta i)^2 u_y,$$

$$\dots\dots\dots$$

se réduiront sensiblement aux suivantes

$$D_x^2 (u_x e^{\alpha x}) = (\alpha i)^2 u_x,$$

$$D_y^2 (u_y e^{\beta y}) = (\beta i)^2 u_y,$$

$$\dots\dots\dots$$

quand on considérera des mouvements simples ou même des mouvements vibratoires produits par la superposition de mouvements simples dans lesquels les longueurs d'ondulation surpasseront notablement les paramètres a, b, c . Enfin, en ayant recours à un artifice de calcul imaginé par M. Sarrus, désignons, à l'aide de la notation

$$\int^{\alpha} K, \text{ ou } \int^{\beta} K, \text{ ou } \int^{\gamma} K,$$

ce que devient une fonction entière K de u, v, w quand on y remplace u par αi , ou v par βi , ou w par γi . La seconde approximation fournira, pour la détermination simultanée de vingt et une inconnues

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0; \\ \xi_x, \eta_x, \zeta_x; \xi_y, \eta_y, \zeta_y; \\ \xi_{-x}, \eta_{-x}, \zeta_{-x}; \xi_{-y}, \eta_{-y}, \zeta_{-y};$$

d'abord trois équations de la forme

$$(6) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi_0 = G_0 \xi_0 + D_n(D_n H_0 \xi_0 + D_v H_0 \eta_0 + D_w H_0 \zeta_0) \\ + \int^{\alpha} [G_{-x} \xi_x + D_n(D_n H_{-x} \xi_x + D_v H_{-x} \eta_x + D_w H_{-x} \zeta_x)] \\ + \int^{\beta} [G_{-y} \xi_y + D_n(D_n H_{-y} \xi_y + D_v H_{-y} \eta_y + D_w H_{-y} \zeta_y)] \\ + \int^{\gamma} [G_{-z} \xi_z + D_n(D_n H_{-z} \xi_z + D_v H_{-z} \eta_z + D_w H_{-z} \zeta_z)] \\ + \int^{\alpha} [G_x \xi_x + D_n(D_n H_x \xi_x + D_v H_x \eta_x + D_w H_x \zeta_x)] \\ + \int^{\beta} [G_y \xi_y + D_n(D_n H_y \xi_y + D_v H_y \eta_y + D_w H_y \zeta_y)] \\ + \int^{\gamma} [G_z \xi_z + D_n(D_n H_z \xi_z + D_v H_z \eta_z + D_w H_z \zeta_z)] \end{cases}$$

puis dix-huit équations de la forme

$$(7) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi_x = \int^{\alpha} [G_0 \xi_x + D_n(D_n H_0 \xi_x + D_v H_0 \eta_x + D_w H_0 \zeta_x) \\ + G_x \xi_0 + D_n(D_n H_x \xi_0 + D_v H_x \eta_0 + D_w H_x \zeta_0)], \\ D_x^2 \eta_x = \int^{\alpha} [G_0 \eta_x + D_n(D_n H_0 \xi_x + D_v H_0 \eta_x + D_w H_0 \zeta_x) \\ + G_x \eta_0 + D_n(D_n H_x \xi_0 + D_v H_x \eta_0 + D_w H_x \zeta_0)], \\ D_x^2 \zeta_x = \int^{\alpha} [G_0 \zeta_x + D_n(D_n H_0 \xi_x + D_v H_0 \eta_x + D_w H_0 \zeta_x) \\ + G_x \zeta_0 + D_n(D_n H_x \xi_0 + D_v H_x \eta_0 + D_w H_x \zeta_0)], \end{cases}$$

savoir les équations (7) et celles qu'on en déduira en y remplaçant, non seulement l'indice α par l'un quelconque des indices $\beta, \gamma, -\alpha, -\beta, -\gamma$, mais encore la condition \int^{α} par celles des conditions $\int^{\beta}, \int^{\gamma}, \int^{-\alpha}, \int^{-\beta}, \int^{-\gamma}$ qui se rapportera au nouvel indice. Il y a plus : dans l'hypothèse admise, on pourra négliger les premiers



membres des formules (7) vis-à-vis des seconds membres, et réduire ainsi ces formules aux suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} \begin{aligned} & \begin{matrix} n=21 \\ | \\ \end{matrix} [G_0 \xi_x + D_n(D_n H_0 \xi_x + D_v H_0 \eta_x + D_w H_0 \zeta_x)] \\ & = -G_x \xi_0 - D_n(D_n H_x \xi_0 + D_v H_x \eta_0 + D_w H_x \zeta_0), \end{aligned} \\ \begin{aligned} & \begin{matrix} n=21 \\ | \\ \end{matrix} [G_1 \eta_x + D_n(D_n H_0 \xi_x + D_v H_0 \eta_x + D_w H_0 \zeta_x)] \\ & = -G_x \eta_0 - D_n(D_n H_x \xi_0 + D_v H_x \eta_0 + D_w H_x \zeta_0), \end{aligned} \\ \begin{aligned} & \begin{matrix} n=21 \\ | \\ \end{matrix} [G_2 \zeta_x + D_n(D_n H_0 \xi_x + D_v H_0 \eta_x + D_w H_0 \zeta_x)] \\ & = -G_x \zeta_0 - D_n(D_n H_x \xi_0 + D_v H_x \eta_0 + D_w H_x \zeta_0). \end{aligned} \end{cases}$$

En résumé, les équations des vibrations lumineuses propagées à travers un milieu cristallisé pourront être représentées dans une première approximation par les équations (3), et dans une seconde approximation par les équations (6), (8), etc., jointes aux formules (5). Or les équations (6), (8) étant linéaires et à coefficients constants, on pourra les vérifier en supposant les diverses inconnues toutes proportionnelles à une même *exponentielle caractéristique*, et, en opérant ainsi, on arrivera aux conclusions énoncées dans le préambule de ce Mémoire.

De plus, on pourra choisir les fonctions de u, v, w , représentées par

$$\begin{array}{ccc} G_0, & H_0; & \\ G_x, & H_x; & G_y, & H_y; \\ G_{-x}, & H_{-x}; & G_{-y}, & H_{-y}; \end{array}$$

de manière que les équations (6), ou plutôt celles qu'on en déduit en éliminant les inconnues

$$\begin{array}{ccc} \xi_x, & \eta_x, & \zeta_x; & \xi_0, & \eta_0, & \zeta_0; & \xi_y, & \eta_y, & \zeta_y; \\ \xi_{-x}, & \eta_{-x}, & \zeta_{-x}; & \xi_{-0}, & \eta_{-0}, & \zeta_{-0}; & \xi_{-y}, & \eta_{-y}, & \zeta_{-y}, \end{array}$$

à l'aide des formules (8), etc., deviennent isotropes; et, en opérant ainsi, on retrouvera précisément les trois équations que j'ai données dans le Mémoire du 14 novembre 1842 pour représenter la polarisa-

tion chromatique produite par l'huile de térébenthine, l'acide tartrique, etc.

454.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la propagation de la lumière dans les milieux isophanes.*

C. R., T. XXX, p. 33 (21 janvier 1850).

Comme je l'ai remarqué dans le Mémoire présenté à la dernière séance, les vibrations infiniment petites de l'éther, dans un milieu homogène dont les molécules restent sensiblement immobiles et, spécialement dans un corps cristallisé, peuvent être représentées par trois équations linéaires à coefficients périodiques qui déterminent les déplacements d'un atome, mesurés parallèlement à trois axes fixes. D'ailleurs ces équations linéaires à coefficients périodiques peuvent être remplacées par trois autres équations pareillement linéaires, mais à coefficients constants, que j'ai nommées *équations auxiliaires*, et qui déterminent les *valeurs moyennes* des inconnues. Enfin ces trois équations auxiliaires, qui ont pour premiers membres les dérivées du second ordre des valeurs moyennes des inconnues différenciées par rapport au temps, pourront être remplacées par une seule équation, qui aura pour premier membre la dérivée du second ordre d'un déplacement mesuré parallèlement à un axe quelconque.

Cela posé, si l'on veut déterminer les lois de la propagation de la lumière dans un milieu homogène, et spécialement dans un milieu cristallisé, on devra surtout rechercher la forme que prennent dans ce milieu les trois équations auxiliaires dont nous venons de parler, ou, ce qui revient au même, l'équation unique qui peut leur être substituée. En effet, la différence entre le déplacement d'un atome d'éther, mesuré parallèlement à un axe quelconque, et la valeur moyenne de ce déplacement, se composera de termes périodiques



dont chacun, étant proportionnel au sinus ou au cosinus d'un angle très considérable, changera de signe sans changer de valeur numérique, quand on franchira des intervalles comparables aux dimensions des *parallélépipèdes élémentaires*, dont l'assemblage constitue un corps cristallisé. Or, ces dimensions étant insaisissables, il est naturel d'en conclure que, dans la théorie de la lumière, l'influence des termes périodiques sur les effets produits restera insensible, et qu'on pourra la négliger, au moins dans une première approximation, en tenant compte seulement des termes qui représenteront les valeurs moyennes des inconnues.

Remarquons encore que les trois équations auxiliaires auxquelles on parviendra, en partant des formules générales établies dans le précédent Mémoire, pourront être censées déterminer les dérivées du second ordre des valeurs moyennes des inconnues, différenciées par rapport au temps, en fonctions linéaires de ces mêmes inconnues et de leurs dérivées des divers ordres, prises par rapport aux coordonnées. On pourra donc exprimer par une fonction linéaire du même genre la dérivée du second ordre qu'on obtient en différenciant deux fois de suite par rapport au temps la valeur moyenne d'un déplacement mesuré parallèlement à un axe quelconque. Nommons Ω cette dernière fonction linéaire. Pour que le milieu donné soit *isophane*, ou, en d'autres termes, pour que la propagation de la lumière dans ce milieu s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, il suffira que la fonction Ω soit *isotrope*, c'est-à-dire qu'elle reste invariable quand on déplacera les axes coordonnés, en leur imprimant un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine. Alors on se trouvera précisément ramené aux équations générales que j'ai données pour représenter les vibrations de l'éther dans les milieux isophanes (séance du 14 novembre 1842). Il y a plus : il sera facile d'assigner aux coefficients renfermés dans la fonction Ω des valeurs telles, que le milieu isophane ait la propriété de produire la polarisation chromatique, en faisant tourner dans un certain sens les plans de polarisation des rayons lumineux qui le traversent. En conséquence, pour expliquer

cette propriété rotatoire de certains milieux isophanes, il n'est pas nécessaire de recourir à certaines hypothèses imaginées par divers auteurs ou par moi-même, ni d'introduire dans la Mécanique moléculaire des forces polarisées, c'est-à-dire variables avec les directions dans lesquelles elles s'exercent, ou des actions ternaires. Il suffit d'admettre qu'un atome d'éther étant mis en présence d'un atome d'un corps, ces deux atomes exercent l'un sur l'autre une action proportionnelle à leurs masses et à une fonction de leur distance, puis de joindre à l'hypothèse d'une action binaire entre les atomes de l'éther et les atomes d'un corps, la supposition d'un arrangement spécial de ces derniers atomes. Parmi les conditions auxquelles cet arrangement doit satisfaire, l'une est celle qu'admettent les physiciens et les minéralogistes, et que manifestent les belles expériences de M. Pasteur, savoir que la forme cristalline du corps isophane donné ne puisse être superposée à son image vue dans un miroir.

Ce n'est pas tout : si la fonction ci-dessus désignée par Ω est isotrope, non d'une manière absolue, mais par rapport à l'axe des x , c'est-à-dire si elle reste invariable, quand on déplace les axes des y et des z , en leur imprimant un mouvement de rotation quelconque autour de l'axe des x , le milieu donné sera isophane, non plus d'une manière absolue, mais par rapport à l'axe dont il s'agit, et la propagation du mouvement de l'éther autour de cet axe s'effectuera en tous sens suivant les mêmes lois. Alors on obtiendra, pour représenter les vibrations lumineuses, des équations que l'on trouvera dans ce Mémoire. D'ailleurs ces dernières équations pourront ou continuer de subsister, ou changer de forme quand on changera les signes des coordonnées parallèles à l'axe des y . Dans le premier cas, elles coïncideront avec celles que j'ai données dans le Mémoire lithographié d'août 1836. Dans le second cas, elles devront s'accorder avec celles que M. d'Ettingshausen annonce avoir obtenues, en s'occupant des cristaux à un axe optique (voir le Tome XXIV des *Comptes rendus*, page 802), et qui renferment, a-t-il dit, comme cas particulier, les équations différentielles (à deux variables indépendantes) auxquelles



M. Mac-Cullagh a été conduit par diverses inductions dans un Mémoire lu à l'Académie royale d'Irlande en février 1836.

ANALYSE.

§ I. — Sur les vibrations de l'éther dans un milieu homogène dont les molécules restent sensiblement immobiles.

Considérons un mouvement vibratoire et infiniment petit de l'éther dans un milieu homogène dont les molécules restent sensiblement immobiles, et spécialement dans un milieu cristallisé. Nommons

m la masse d'un atome d'éther;

x, y, z les coordonnées initiales et rectangulaires de cet atome;

et soient, au bout du temps t ,

ξ, η, ζ les déplacements du même atome, mesurés parallèlement aux axes des x, y, z .

Enfin, en supposant que le milieu cristallisé offre des axes de symétrie parallèles aux axes coordonnés, nommons ξ_0, η_0, ζ_0 les valeurs moyennes des déplacements ξ, η, ζ . La recherche des lois suivant lesquelles s'effectuera la propagation du mouvement vibratoire de l'éther pourra être réduite à l'intégration des trois équations auxiliaires qui détermineront les trois inconnues ξ_0, η_0, ζ_0 . D'ailleurs ces équations auxiliaires pourront être réduites, dans une première approximation, aux formules (4) de la page 208, par conséquent à des équations de la forme

$$(1) \quad D_x^2 \xi_0 = X, \quad D_y^2 \eta_0 = Y, \quad D_z^2 \zeta_0 = Z,$$

X, Y, Z étant non seulement des fonctions linéaires de ξ_0, η_0, ζ_0 , mais encore des fonctions symboliques de

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z;$$

et, dans une seconde approximation, aux formules que fournira l'éli-

mination des dix-huit inconnues

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_x, & \eta_x, & \zeta_x; & \xi_0, & \eta_0, & \zeta_0; & \xi_y, & \eta_y, & \zeta_y; \\ \xi_{-x}, & \eta_{-x}, & \zeta_{-x}; & \xi_{-0}, & \eta_{-0}, & \zeta_{-0}; & \xi_{-y}, & \eta_{-y}, & \zeta_{-y} \end{array}$$

entre les équations (6) et (8) des pages 209, 210. Ajoutons que, si le mouvement vibratoire dont il s'agit, ou les mouvements simples dont la superposition peut le reproduire offrent des longueurs d'ondulation notablement supérieures aux trois dimensions d'un parallélépipède élémentaire du milieu cristallisé, les équations auxiliaires fournies par la seconde approximation, ou même par les approximations ultérieures, pourront encore être représentées généralement par les formules (1). Seulement, si l'on se borne à la première approximation, les formules (1), réduites aux équations (4) de la page 208, satisferont à cette condition particulière, que les neuf coefficients symboliques des trois inconnues ξ_0, η_0, ζ_0 dans les fonctions linéaires X, Y, Z se réduiront à six, ces fonctions étant alors de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} X = \epsilon \xi_0 + u \eta_0 + \epsilon \zeta_0, \\ Y = u \xi_0 + \epsilon \eta_0 + v \zeta_0, \\ Z = \epsilon \xi_0 + v \eta_0 + u \zeta_0, \end{cases}$$

tandis que, dans la seconde approximation et dans les approximations ultérieures, les neuf coefficients dont il s'agit seront généralement distincts les uns des autres.

Soient maintenant

a, b, c les coordonnées d'un point fixe R situé à l'unité de distance de l'origine O des coordonnées;

x le déplacement de l'atome m , mesuré au bout du temps t , dans une direction parallèle à celle de la droite OR;

x_0 la valeur moyenne de x .

On aura

$$(3) \quad x = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

$$(4) \quad x_0 = a\xi_0 + b\eta_0 + c\zeta_0,$$

et de l'équation (4), jointe aux formules (1), on tirera

$$(5) \quad D_1^2 u_0 = aX + bY + cZ.$$

En d'autres termes, on aura

$$(6) \quad D_1^2 u_0 = \Omega,$$

pourvu que Ω désigne une fonction linéaire, non seulement de ξ, η, ζ , mais encore de a, b, c , et en même temps une fonction symbolique de D_x, D_y, D_z . Sous ces conditions, l'équation (6) sera une formule générale propre à représenter les vibrations infiniment petites de l'éther dans tout milieu homogène et cristallisé, qui offrira trois axes de symétrie rectangulaires entre eux.

Parmi les milieux homogènes et cristallisés, on doit distinguer ceux qui sont *isophanes*, soit d'une manière absolue, soit par rapport à un axe fixe. Il importe de rechercher ce que devient la formule (6) pour de semblables milieux. Pour y parvenir, il suffit de s'appuyer sur quelques propositions relatives aux fonctions isotropes, et en particulier sur celles qui seront énoncées dans le paragraphe suivant.

§ II. — Sur les fonctions isotropes des coordonnées de divers points.

Soient

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad \dots$$

les coordonnées rectilignes de divers points P, P_1, P_2, \dots . Une fonction Ω de ces coordonnées sera dite *isotrope*, si on ne l'altère pas en faisant subir aux coordonnées de chaque point les changements de valeurs qui résultent d'un mouvement de rotation quelconque imprimé aux axes des x, y et z autour de l'origine O . Cela posé, on établira aisément la proposition suivante :

THÉORÈME I. — Une fonction Ω des coordonnées rectilignes de divers points dépend uniquement des distances de ces points à l'origine, de leurs distances mutuelles et du sens dans lequel se meuvent des rayons vecteurs dont chacun est assujéti à passer constamment par l'origine et à décrire,

dans un ordre déterminé, les faces latérales d'un tétraèdre qui a pour base le triangle formé avec trois quelconques des points donnés.

Lorsque les coordonnées deviennent rectangulaires, le premier théorème entraîne immédiatement les propositions suivantes :

THÉORÈME II. — Les positions de divers points P, P_1, P_2, \dots étant rapportés à trois axes rectangulaires, une fonction isotrope Ω de leurs coordonnées

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad \dots$$

dépendra uniquement des trinômes de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{ou} \quad xx + yy + zz,$$

et des sommes alternées de la forme

$$S(\pm xy, z_1) = xy_1 z_1 - xy_2 z_1 + x_1 y_2 z_1 - x_1 y_2 z_2 + x_2 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_2.$$

THÉORÈME III. — Les coordonnées

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2$$

de trois points P, P_1, P_2 étant supposées rectangulaires, si une fonction isotrope Ω de ces coordonnées est en même temps une fonction linéaire, non seulement des coordonnées du point P , mais encore des coordonnées du point P_1 , on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \Omega = & E(x, x_1 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \\ & + F(x x_1 + y y_1 + z z_1)(x x_2 + y y_2 + z z_2) \\ & + K(xy, z_1 - x y_2 z_1 + x_1 y_2 z_2 - x_1 y_2 z_2 + x_2 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_2), \end{cases}$$

E, F, K étant trois fonctions de la somme $x^2 + y^2 + z^2$.

Supposons maintenant que la fonction Ω soit isotrope, non plus d'une manière absolue, mais par rapport à l'axe des x , c'est-à-dire qu'elle reste invariable quand on déplace les axes des y et des z en leur imprimant un mouvement de rotation quelconque autour de l'axe des x . Alors, par des raisonnements semblables à ceux qui servent à démontrer les premier, deuxième et troisième théorèmes, on établira

des théorèmes analogues, et, à la place de la formule (1), on obtiendra l'équation suivante

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= [Gx + H(yz + sz) + K(yz - yz)]x, \\ &+ [Lx + M(yz + sz) + N(yz - yz)](yz + sz), \\ &+ P(yz + sz) + Q(yz - yz) + Rx(yz - yz). \end{aligned} \right.$$

G, H, K, L, M, N, P, Q, R étant des fonctions de x et de $y^2 + z^2$.

§ III. — Sur les vibrations de l'éther dans les milieux isophanes.

Revenons à la formule (6) du § I. Si, pour abréger, l'on écrit simplement ξ , η , ζ , ε au lieu de ξ_0 , η_0 , ζ_0 , ε_0 , cette formule donnera

$$(1) \quad D_1^2 \varepsilon = \Omega,$$

la valeur de ε étant

$$(2) \quad \varepsilon = a\xi + b\eta + c\zeta.$$

D'ailleurs Ω sera une fonction linéaire, non seulement des coordonnées a , b , c du point fixe R situé à l'unité de distance de l'origine O, mais encore des déplacements moyens ξ , η , ζ , et en même temps une fonction symbolique de

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z.$$

Cela posé, pour que l'équation (1) devienne propre à représenter les mouvements de l'éther dans un milieu isophane, il suffira évidemment que la fonction de

$$u, v, w; \quad a, b, c; \quad \xi, \eta, \zeta,$$

désignée par Ω , devienne isotrope. De cette remarque, jointe au théorème III du § II, on conclura sans peine que le milieu donné sera isophane, si l'équation (1) se réduit à la formule

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1^2 \varepsilon &= E(a\xi + b\eta + c\zeta) \\ &+ F(aD_x + bD_y + cD_z)(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) \\ &+ K[a(D_x\eta - D_y\zeta) + b(D_x\zeta - D_z\xi) + c(D_y\xi - D_x\eta)]. \end{aligned} \right.$$

E, F, K étant trois fonctions symboliques de $D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$. Cette dernière formule devant subsister, quelle que soit la position du point R sur la surface de la sphère décrite du point O comme centre avec le rayon 1, il en résulte qu'après avoir substitué à ε sa valeur $a\xi + b\eta + c\zeta$ on pourra évaluer entre eux dans les deux membres les coefficients de a , b , c . On obtiendra ainsi les trois équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1^2 \xi &= E\xi + Fuv + K(D_x\eta - D_y\zeta), \\ D_1^2 \eta &= E\eta + Fv\upsilon + K(D_x\zeta - D_z\xi), \\ D_1^2 \zeta &= E\zeta + Fw\upsilon + K(D_y\xi - D_x\eta), \end{aligned} \right.$$

la valeur de υ étant

$$(5) \quad \upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta,$$

c'est-à-dire les équations différentielles du mouvement de l'éther dans les milieux isophanes (voir le Tome XV, page 916) (*).

Si le milieu dans lequel l'éther est contenu devait être isophane, non plus d'une manière absolue, mais seulement autour de l'axe des x , alors, en partant de l'équation (2) du paragraphe précédent, on obtiendrait, non plus la formule (3), mais la suivante

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1^2 \varepsilon &= aG\xi + H(b\eta + c\zeta) + K(b\zeta - c\eta) \\ &+ [Lx + M(bD_y + cD_z) + N(cD_y - bD_z)](D_y\eta + D_z\zeta) \\ &+ P(bD_y + cD_z)\xi + [aQ + R(bD_y + cD_z)](D_x\eta - D_y\zeta). \end{aligned} \right.$$

G, H, K, L, M, N, P, Q, R étant des fonctions symboliques de D_x et de $D_y^2 + D_z^2$; puis on en conclurait

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1^2 \xi &= G\xi + L(D_y\eta + D_z\zeta) + Q(D_x\eta - D_y\zeta), \\ D_1^2 \eta &= H\eta + K\zeta + PD_y\xi \\ &+ (MD_y - ND_z)(D_y\eta + D_z\zeta) + RD_y(D_x\eta - D_y\zeta), \\ D_1^2 \zeta &= H\zeta - K\eta + PD_z\xi \\ &+ (MD_z + ND_y)(D_y\eta + D_z\zeta) + RD_z(D_x\eta - D_y\zeta). \end{aligned} \right.$$

Si l'on veut que ces dernières formules restent inaltérables, quand on remplace le demi-axe des y positives par le demi-axe des y négatives

(*) *Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. VII, p. 207.

tives, on devra réduire à zéro les coefficients symboliques K, N, Q, R, et alors on retrouvera les formules obtenues dans le Mémoire d'août 1836 (page 69).

455.

C. R., T. XXX, p. 114 (28 janvier 1850).

M. AUGUSTIN CAUCHY dépose sur le Bureau un exemplaire du *Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels*, qui doit paraître prochainement dans le Recueil des *Mémoires de l'Académie*.

456.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les vibrations de l'éther dans les milieux qui sont isophanés par rapport à une direction donnée.*

C. R., T. XXX, p. 93 (4 février 1850).

§ I. — *Des conditions auxquelles satisfait une fonction des coordonnées rectilignes de divers points, quand elle est isotrope par rapport à l'un des axes coordonnés.*

Soient

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad \dots$$

les coordonnées rectilignes de divers points P, P₁, P₂, Une fonction Ω de ces coordonnées sera *isotrope* par rapport à l'axe des x , si on ne l'altère pas en faisant subir aux coordonnées $y, z; y_1, z_1; y_2, z_2; \dots$ les changements de valeurs qui résultent d'un mouvement de rotation imprimé aux axes des y et des z autour de l'origine O des coordonnées.

En partant de cette définition, l'on établit sans peine les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Si une fonction Ω des coordonnées $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$ de divers points P, P₁, P₂, ... est isotrope par rapport à l'axe des x , elle dépendra uniquement des abscisses x, x_1, x_2, \dots de ces mêmes points, de leurs distances à l'axe des x , des angles que formeront entre elles ces distances, ou leurs projections sur un plan perpendiculaire à l'axe des x , enfin du sens dans lequel se mouvront des rayons vecteurs assujettis à passer constamment par l'origine et à décrire les angles dont il s'agit.*

THÉORÈME II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si les coordonnées sont rectangulaires, la fonction Ω dépendra uniquement des abscisses x, x_1, x_2, \dots des sommes de la forme*

$$y^2 + z^2 \quad \text{ou} \quad yy_1 + zz_1,$$

et des binômes de la forme

$$yz_1 - y_1z.$$

THÉORÈME III. — *Les mêmes choses étant posées que dans les théorèmes I et II, et les points P; P₁, P₂ étant au nombre de trois, si Ω doit être une fonction linéaire, non seulement des coordonnées x, y, z , du point P₁, mais encore des coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P₂, on pourra prendre pour Ω l'un quelconque des produits*

$$x_1 x_2, \quad y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad y_1 z_2 - y_2 z_1,$$

$$x_1 (yy_2 + zz_2), \quad x_1 (y_2 z_1 - y_1 z_2),$$

$$x_2 (yy_1 + zz_1), \quad x_2 (y_1 z_2 - y_2 z_1),$$

$$(yy_1 + zz_1)(yy_2 + zz_2), \quad (y_2 z_1 - y_1 z_2)(y_1 z_2 + z_2 z_1),$$

$$(yy_1 + zz_1)(y_2 z_1 - y_1 z_2), \quad (y_2 z_1 - y_1 z_2)(y_2 z_1 - y_1 z_2),$$

ou bien encore la somme de ces produits respectivement multipliés par des fonctions quelconques des deux quantités variables x et $y^2 + z^2$.

Corollaire I. — Comme on a identiquement

$$(yy_1 + zz_1)(yy_2 + zz_2) - (y_2 z_1 - y_1 z_2)(y_2 z_1 - y_1 z_2) = (y^2 + z^2)(y_1 y_2 + z_1 z_2)$$

et

$$(yy_1 + zz_1)(y_2 z_1 - y_1 z_2) - (y_2 z_1 - y_1 z_2)(yy_2 + zz_2) = (y^2 + z^2)(y_2 z_1 + y_1 z_2),$$



il en résulte que, des onze produits mentionnés dans le théorème III, les deux derniers peuvent être omis sans inconvénient, ce qui permet de réduire la fonction Ω à la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega = & [Gx + H(yy_1 + zz_1) + K(yz_1 - y_1z)]x_1 \\ & + [Lx_1 + M(yy_1 + zz_1) + N(yz_1 - y_1z)](yy_1 + zz_1) \\ & + P(y_1y_1 + z_1z_1) + Q(y_1z_1 - y_1z) + Rx_1(y_1z - yz_1), \end{aligned} \right.$$

G, H, K, L, M, N, P, Q, R étant des fonctions de x et de $y^2 + z^2$.

Corollaire II. — Si, dans la formule (1), on remplace G par G + Lx, H par H + Mx, K par K + Nx, on aura, pour déterminer Ω , la formule

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega = & [Gx + H(yy_1 + zz_1) + K(yz_1 - y_1z)]x_1 \\ & + [Lx_1 + M(yy_1 + zz_1) + N(yz_1 - y_1z)](xx_1 + yy_1 + zz_1) \\ & + P(y_1y_1 + z_1z_1) + Q(y_1z_1 - y_1z) + Rx_1(y_1z - yz_1). \end{aligned} \right.$$

Corollaire III. — L'équation (2), ainsi qu'on devait s'y attendre, comprend, comme cas particulier, la formule (1) du précédent Mémoire (page 217), à laquelle on la réduit, en posant

$$G = P = E, \quad H = N = 0, \quad L = Fx, \quad M = F, \quad Q = Kx, \quad R = K.$$

§ II. — *Sur les vibrations de l'éther dans des milieux qui sont isophanes par rapport à une direction donnée.*

Supposons que les vibrations de l'éther s'exécutent dans un milieu qui soit isophane par rapport à l'axe des x . Ces vibrations pourront se déduire de la formule (1) (page 217), dont le second membre Ω sera une fonction linéaire, non seulement des coordonnées a, b, c d'un point fixe situé à l'unité de distance de l'origine, mais encore des déplacements ξ, η, ζ d'un atome d'éther mesurés parallèlement aux axes des x, y, z , et en même temps une fonction symbolique de

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z.$$

Cette fonction de $u, v, w; a, b, c; \xi, \eta, \zeta$ devant d'ailleurs être iso-

trope par rapport à l'axe des x , il suffira, pour l'obtenir, de remplacer dans le second membre de la formule (2) du § I, x, y, z par $u, v, w; x_1, y_1, z_1$ par a, b, c , et x_1, y_1, z_1 par ξ, η, ζ . Alors le trinôme

$$xx_1 + yy_1 + zz_1$$

se trouvera évidemment remplacé par le suivant

$$u\xi + v\eta + w\zeta$$

ou, ce qui revient au même, par la quantité

$$(1) \quad v = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta,$$

qui représente la dilatation du volume de l'éther au point (x, y, z) . Cela posé, la formule (1) de la page 217 donnera

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} D_x^2 v = & [Ga + H(bD_y + cD_z) + K(cD_y - bD_z)]\xi \\ & + [La + M(bD_y + cD_z) + N(cD_y - bD_z)]v \\ & + P(b\eta + c\zeta) + Q(b\zeta - c\eta) + Ra(D_z \eta - D_y \zeta), \end{aligned} \right.$$

la valeur de v étant

$$(3) \quad v = a\xi + b\eta + c\zeta.$$

Si, après avoir substitué cette valeur de v dans la formule (2), on égale entre eux, dans les deux membres, les coefficients de a, b, c , alors, en posant, pour abrégér,

$$(4) \quad \Xi = D_z \eta - D_y \zeta,$$

on obtiendra les équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} D_x^2 \xi = & G\xi + Lv + R\Xi, \\ D_x^2 \eta = & P\eta + Q\zeta + (HD_y - KD_z)\xi + (MD_y - ND_z)v, \\ D_x^2 \zeta = & P\zeta + Q\eta + (HD_z + KD_y)\xi + (MD_z + ND_y)v. \end{aligned} \right.$$

Ainsi qu'on devait s'y attendre, les équations (5) comprennent, comme cas particulier, les formules (4), page 219, auxquelles on les réduit en posant

$$G = P = E, \quad H = N = 0, \quad L = FD_x, \quad M = F, \quad Q = KD_x, \quad R = K.$$

Si l'on veut que le second membre de la formule (1) satisfasse à la condition de rester inaltérable quand on remplace le demi-axe des y positives par le demi-axe des y négatives, on devra supposer

$$K = 0, \quad N = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Alors les équations (5), réduites à la forme

$$(6) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = G\xi + L\upsilon, \\ D_x^2 \eta = P\eta + D_y(H\xi + M\upsilon), \\ D_x^2 \zeta = P\zeta + D_z(H\xi + M\upsilon), \end{cases}$$

s'accorderont avec les formules obtenues dans le Mémoire lithographié de 1836, page 69.

Si dans les calculs qui précèdent on prenait pour point de départ, non plus l'équation (2), mais l'équation (1) du § I, alors, à la place des formules (5), on obtiendrait les suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = G\xi + L(D_y \eta + D_z \zeta) + R(D_z \eta + D_y \zeta), \\ D_x^2 \eta = P\eta + Q\zeta + (HD_y - KD_z)\xi + (MD_y - ND_z)(D_y \eta + D_z \zeta), \\ D_x^2 \zeta = P\zeta - Q\eta + (HD_z + KD_y)\xi + (MD_z + ND_y)(D_y \eta + D_z \zeta). \end{cases}$$

Dans un prochain article, je dirai comment les formules (5) ou (7) s'appliquent à la détermination des vibrations de l'éther dans les cristaux à un axe optique.

457.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Note sur la différence de marche entre les deux rayons lumineux qui émergent d'une plaque doublement réfringente à faces parallèles.*

G. R., T. XXX, p. 97 (4 février 1850).

Supposons qu'un rayon lumineux simple tombe sur une plaque à faces parallèles. Nommons c l'épaisseur de la plaque;

τ l'angle d'incidence;

τ' l'angle de réfraction;

ω la vitesse de propagation des ondes incidentes;

ω' la vitesse de propagation des ondes réfractées.

On aura

$$(1) \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \tau'}{\sin \tau}.$$

Soient, maintenant,

h une longueur mesurée, dans l'intérieur de la plaque, sur la direction du rayon réfracté;

t le temps qu'emploie une onde réfractée à parcourir la longueur h ;

s le chemin parcouru par une onde incidente pendant le temps t ;

s' la projection de la longueur h sur le rayon incident, ou, ce qui revient au même, la distance entre les plans des ondes incidente et émergente menées par les extrémités de la longueur h .

On aura évidemment

$$h = c \sec \tau', \quad t = \frac{h}{\omega'}, \quad s = \omega t;$$

par conséquent,

$$(2) \quad s = h \frac{\omega}{\omega'} = h \frac{\sin \tau}{\sin \tau'}$$

et

$$(3) \quad s' = h \cos(\tau - \tau') < s.$$

Donc l'onde émergente sera en retard sur une onde incidente qui aurait conservé, pendant le temps t , la vitesse de propagation ω , la différence de marche étant

$$(4) \quad s - s' = h \left[\frac{\sin \tau}{\sin \tau'} - \cos(\tau - \tau') \right] = h \frac{\sin(\tau - \tau')}{\sin \tau'} \cos \tau' = c \frac{\sin(\tau - \tau')}{\sin \tau'}.$$

Concevons maintenant que la plaque donnée soit doublement réfringente, et, en nommant τ' l'angle de réfraction ordinaire, désignons par τ'' l'angle de réfraction extraordinaire. Les deux ondes émergentes qui répondront aux deux rayons réfractés ordinaire et extraordinaire

seront en retard sur une onde incidente qui aurait conservé, pendant le temps z , la vitesse de propagation ω , la différence de marche étant représentée dans la réfraction ordinaire par le produit

$$c \frac{\sin(\tau - \tau')}{\sin \tau'}$$

et dans la réfraction extraordinaire par le produit

$$c \frac{\sin(\tau - \tau'')}{\sin \tau''}$$

Done la différence de marche entre les deux rayons émergents, extraordinaire et ordinaire, sera représentée par le produit

$$c \left[\frac{\sin(\tau - \tau'')}{\sin \tau''} - \frac{\sin(\tau - \tau')}{\sin \tau'} \right],$$

et, si l'on nomme δ cette différence de marche, on aura

$$\delta = c \frac{\sin \tau \sin(\tau' - \tau'')}{\sin \tau' \sin \tau''}$$

En appliquant cette formule très simple au cas où l'on considère une plaque de cristal de roche taillée perpendiculairement à l'axe optique, et nommant δ_0 la valeur de δ correspondante à une valeur nulle de τ , on trouve sensiblement dans une première approximation

$$(6) \quad \delta^2 = \delta_0^2 \cos^2 \tau' + \varepsilon^2 \sin^2 \tau',$$

$\frac{\varepsilon}{c}$ étant la différence entre les indices de réfraction extraordinaire et ordinaire. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article où je comparerai mes formules avec celles qu'ont proposées MM. Airy et Mac-Cullagh.

458.

C. R., T. XXX, p. 161 (18 février 1850).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente un Mémoire sur les *fonctions dont les développements en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable satisfont à certaines conditions dignes de remarque.*

459.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur un Mémoire relatif au développement de l'exponentielle e^x en produit continu*; par M. FEDOR THOMAS.

C. R., T. XXX, p. 162 (18 février 1850).

Euler a fait voir que les sinus, les cosinus et les fonctions dans lesquelles ils se transforment, quand on remplace les arcs supposés réels par des variables imaginaires, peuvent être changés en produits composés d'un nombre infini de facteurs, chaque facteur étant du premier degré par rapport à la variable que l'on considère. De plus, M. Jacobi a décomposé certaines transcendentes en produits de facteurs binômes qui sont encore en nombre infini, mais de degrés représentés par les nombres entiers 1, 2, 3, Enfin, dans un Mémoire sur les propriétés de certaines factorielles (voir les *Comptes rendus*, Tome XIX, page 1069) ⁽¹⁾, l'un de nous a observé que l'on peut, sous certaines conditions, décomposer en facteurs binômes de cette espèce les fonctions qui se développent en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une variable. Alors, n étant un nombre entier quelconque, les divers facteurs sont de la forme

$$1 \pm N x^n,$$

N étant un coefficient qui varie avec l'exposant n ⁽²⁾.

⁽¹⁾ *Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 311.

⁽²⁾ Si, pour fixer les idées, on décomposait en facteurs de cette forme l'exponen-

M. Fedor Thoman, en cherchant à développer en facteurs l'exponentielle e^x , a supposé que chaque facteur était, non plus de la forme

$$1 \pm Nx^n,$$

mais de la forme

$$(1 \pm x^n)^N;$$

et, en partant de cette supposition, il a obtenu deux formules distinctes dans chacune desquelles l'exposant N se déduit généralement et directement de l'exposant n . D'ailleurs, de ces deux formules, M. Thoman tire aisément une troisième équation, en vertu de laquelle l'exponentielle e^x se décompose en facteurs de la forme

$$\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right)^N,$$

n étant un entier dont les facteurs premiers sont impairs et inégaux entre eux. Ajoutons que de cette troisième équation il déduit un développement remarquable de la variable x en une série dont le terme général est proportionnel à l'arc qui a pour tangente x^n .

Les formules établies par M. Thoman supposent implicitement que la valeur numérique de la variable x est inférieure à l'unité. Si cette condition n'était pas remplie, les séries formées avec les logarithmes des divers facteurs de chaque produit cesseraient d'être convergentes, et, par suite, les formules obtenues cesseraient de subsister.

Les nouvelles formules de M. Thoman nous paraissent d'autant plus dignes de l'attention des analystes, que le nombre des fonctions

tielle e^x , on trouverait, en supposant le module de x inférieur à l'unité,

$$e^x = (1+x) \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \dots$$

Dans le second membre de cette dernière équation, les coefficients des diverses puissances de x pourront être aisément déduits les uns des autres, à l'aide des formules (11) du Mémoire cité, en vertu desquelles le $n^{\text{ième}}$ facteur sera de la forme $1 - \frac{x^n}{n}$, lorsque n sera un nombre premier égal ou supérieur à 3. Ajoutons que, pour des valeurs paires ou impaires, mais très considérables de n , le coefficient de x^n sera le produit de $\frac{(-1)^n}{n}$ par un nombre très peu différent de l'unité.

jusqu'ici décomposées en produits de facteurs de forme déterminée est fort restreint. En conséquence, les Commissaires pensent que le Mémoire de M. Fedor Thoman mérite d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

460.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la décomposition des fonctions en facteurs.*

C. R., T. XXX, p. 186 (25 février 1850).

Dans un Mémoire présenté à l'Académie le 18 novembre 1844 ⁽¹⁾, je me suis occupé de la décomposition d'une fonction s de la variable x en facteurs de la forme $1 + Nx^n$, n étant un nombre entier quelconque et N un coefficient qui dépend de l'exposant n . J'ai considéré spécialement le cas où la fonction s peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x , et j'ai indiqué deux méthodes qui sont propres à fournir la décomposition désirée. Or, dans le cas dont il s'agit, ces deux méthodes seront encore applicables, si l'on veut décomposer la fonction s , non plus en facteurs de la forme $1 + Nx^n$, mais en facteurs de l'une des formes

$$(1+x^n)^N, \quad (1-x^n)^N.$$

Parmi les résultats auxquels on parvient en opérant ainsi, on doit distinguer ceux qu'on obtient lorsque, dans le développement de $l(s)$ suivant les puissances entières et positives de x , le coefficient de x^n se décompose en facteurs correspondants aux divers facteurs premiers de l'exposant n . Alors les équations qui fournissent la décomposition de la fonction s en facteurs se simplifient, et comprennent,

⁽¹⁾ *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 311.

comme cas particuliers, les formules remarquables que M. Fedor Thoman a données dans un Mémoire approuvé par l'Académie.

ANALYSE.

Soit s une fonction de x , développable, au moins pour un module de x inférieur à une certaine limite, en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x , en sorte qu'on ait alors

$$(1) \quad s = H_0 + H_1 x + H_2 x^2 + \dots$$

Pour décomposer s en facteurs de la forme $(1+x^n)^k$ ou, ce qui revient au même, pour trouver les valeurs de k_1, k_2, k_3, \dots , propres à vérifier la formule

$$(2) \quad s = H_0 (1+x)^{k_1} (1+x^2)^{k_2} (1+x^3)^{k_3} \dots$$

il suffira de recourir à l'une des méthodes indiquées dans le Mémoire du 18 novembre 1844. Si, pour fixer les idées, on emploie la seconde méthode, alors, en posant, pour abrégé,

$$(3) \quad l \left(1 + \frac{H_1}{H_0} x + \frac{H_2}{H_0} x^2 + \dots \right) = K_1 x + K_2 x^2 + \dots$$

on obtiendra l'équation

$$\begin{aligned} & K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 + \dots \\ &= k_1 l(1+x) + k_2 l(1+x^2) + \dots \\ &= k_1 x + \left(k_2 - \frac{1}{2} k_1\right) x^2 + \left(k_3 + \frac{1}{3} k_1\right) x^3 + \left(k_4 - \frac{1}{2} k_2 - \frac{1}{4} k_1\right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

à laquelle on satisfera en posant

$$(4) \quad K_1 = k_1, \quad K_2 = k_2 - \frac{1}{2} k_1, \quad K_3 = k_3 + \frac{1}{3} k_1, \quad \dots$$

et, par suite,

$$(5) \quad k_1 = K_1, \quad k_2 = K_2 + \frac{1}{2} k_1, \quad k_3 = K_3 - \frac{1}{3} k_1, \quad \dots$$

Or il est clair que les équations (4) et (5) pourront servir à déter-

miner, non seulement les coefficients K_1, K_2, K_3, \dots , lorsqu'on connaîtra les exposants k_1, k_2, k_3, \dots , mais encore les exposants k_1, k_2, k_3, \dots , lorsqu'on connaîtra les coefficients K_1, K_2, K_3, \dots .

Concevons maintenant que, dans le second membre de l'équation (2), l'exposant k_n du binôme $1+x^n$ soit lié à l'exposant n , de telle sorte que k_n se décompose en facteurs correspondants aux divers facteurs premiers de n . Désignons, pour plus de commodité, par a, b, c, \dots les nombres premiers

$$2, 3, 5, \dots$$

a étant égal à 2, et posons

$$(6) \quad n = a^\lambda b^\mu c^\nu \dots$$

$$(7) \quad k_n = N = a_1 b_1 c_1 \dots$$

a_1, b_1, c_1, \dots étant les facteurs de N correspondants aux facteurs $a^\lambda, b^\mu, c^\nu, \dots$ de n . Soit encore

$$(8) \quad m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ étant des entiers quelconques; et, en supposant

$$(9) \quad a_0 = b_0 = c_0 = \dots = 1,$$

nommons M un coefficient variable avec m , et déterminé par le système des équations

$$(10) \quad m M = A_2 B_3 C_4 \dots$$

$$(11) \quad A_2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\alpha} (-1)^{1+\frac{\alpha}{\lambda}} a_2^\lambda a^\lambda, \quad B_3 = \sum_{\mu=0}^{\mu=\beta} b_3^\mu b^\mu, \quad C_4 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\gamma} c_4^\nu c^\nu, \quad \dots$$

On aura, K_m étant égal à M ,

$$(12) \quad K_1 x + K_2 x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{m=\infty} M x^m,$$

M se réduisant à l'unité en même temps que l'exposant m , et le signe S s'étendant, dans la formule (12), à toutes les valeurs entières



et positives de m ; puis on trouvera, sous la même condition, eu égard aux formules (2) et (3),

$$(13) \quad 1\left(\frac{s}{H_0}\right) = \sum_{m=1}^{m=\infty} M x^m,$$

par conséquent,

$$(14) \quad s = H_0 \sum_{m=1}^{m=\infty} M x^m.$$

Or, en vertu de l'équation (10), que l'on peut mettre sous la forme

$$(15) \quad M = \frac{A_x}{a^2} \frac{B_y}{b^2} \frac{C_z}{c^2} \dots,$$

M sera évidemment décomposable en facteurs correspondants aux divers facteurs a^2, b^2, c^2, \dots du coefficient m . Ajoutons que, si l'on pose, pour abrégér,

$$(16) \quad \frac{A_x}{a^2} = \mathfrak{A}_x, \quad \frac{B_y}{b^2} = \mathfrak{B}_y, \quad \frac{C_z}{c^2} = \mathfrak{C}_z, \quad \dots,$$

la formule (15) sera réduite à

$$(17) \quad M = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y \mathfrak{C}_z \dots$$

Réciproquement, si le coefficient M de x^m dans le développement de $1(s)$ se réduit à l'unité pour $m=1$, et se décompose généralement pour $m > 1$ en facteurs $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{C}_z, \dots$ correspondants aux facteurs a^2, b^2, c^2, \dots de m , alors, en attribuant successivement, dans les formules (11), à chacun des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les valeurs 1, 2, 3, ... on déduira de ces formules, jointes aux équations (9), (16) et (7), les valeurs successives de k_1, k_2, k_3, \dots ; et en posant toujours

$$n = a^2 b^2 c^2 \dots,$$

on aura

$$(18) \quad k_n = \left(\mathfrak{A}_x + \frac{\mathfrak{A}_{x-1} + \dots + \mathfrak{A}_{x+1}}{2} \right) \left(\mathfrak{B}_y - \frac{\mathfrak{B}_{y-1}}{b} \right) \left(\mathfrak{C}_z - \frac{\mathfrak{C}_{z-1}}{c} \right) \dots$$

Alors aussi les formules (2) et (14) donneront

$$(19) \quad \sum_{m=1}^{m=\infty} M x^m = (1+x)^{k_1} (1+x^2)^{k_2} (1+x^3)^{k_3} \dots,$$

la valeur générale de k_n étant déterminée par le système des formules (6) et (18).

Exemple I. — Si l'on veut avoir

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} M x^m = x,$$

il suffira que M , en se réduisant à l'unité pour $m=1$, s'évanouisse toujours pour $m > 1$. Alors $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{C}_z, \dots$ se réduiront toujours à l'unité pour des valeurs nulles des indices λ, μ, ν, \dots et à zéro pour des valeurs positives de ces mêmes indices ou de quelques-uns d'entre eux. Donc, par suite, en nommant θ le nombre des facteurs premiers, impairs et inégaux de n , on tirera de la formule (18)

$$k_n = 0, \quad \text{si l'un des facteurs } \mu, \nu, \dots \text{ surpasse l'unité;}$$

$$k_n = (-1)^{\theta} \frac{1}{n}, \quad \text{si } \mu, \nu, \dots, \text{ étant égaux à l'unité, } \lambda \text{ s'évanouit; enfin}$$

$$k_n = (-1)^{\theta} \frac{2^{\lambda-1}}{n}, \quad \text{si } \mu, \nu, \dots, \text{ étant égaux à l'unité, } \lambda \text{ est positif.}$$

Alors aussi l'équation (19), réduite à la forme

$$(20) \quad e^x = (1+x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}(1+x^4)^{\frac{1}{4}}(1+x^5)^{-\frac{1}{5}}(1+x^6)^{\frac{1}{6}} \dots,$$

coïncide avec la première des formules de M. Thoman.

Exemple II. — Si l'on veut avoir

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} M x^m = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{x}{1-x},$$

il suffira que les nombres $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{C}_z, \dots$ se réduisent tous à l'unité, non seulement pour des valeurs nulles, mais encore pour des valeurs positives des indices λ, μ, ν, \dots ; et par suite les formules (18), (19) donneront

$$(21) \quad k_n = \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{b} \right) \left(1 - \frac{1}{c} \right) \dots,$$

$$(22) \quad e^{\frac{x}{1-x}} = (1+x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^3)^{\frac{1}{3}}(1+x^4)^{\frac{1}{4}}(1+x^5)^{\frac{1}{5}}(1+x^6)^{\frac{1}{6}} \dots$$



Si, dans les formules jusqu'ici obtenues, on remplace les binômes de la forme $1 + x^m$ par des binômes de la forme $1 - x^m$, on obtiendra de nouvelles formules analogues à celles que nous avons trouvées. Ainsi, par exemple, en supposant toujours qu'à la valeur de m déterminée par l'équation (8) correspond la valeur de M déterminée par l'équation (17), on obtiendra, au lieu de l'équation (19), la suivante

$$(23) \quad e^{-\sum_{m=1}^{\infty} M x^m} = (1-x)^{k_1} (1-x_2)^{k_2} (1-x_3)^{k_3} \dots,$$

la valeur de k_n étant

$$(24) \quad k_n = \left(\lambda_n - \frac{\lambda_{n-1}}{2} \right) \left(\mu_n - \frac{\mu_{n-1}}{b} \right) \left(\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_{n-1}}{c} \right) \dots$$

La formule (23), dans le cas où l'on pose

$$\sum_{m=1}^{\infty} M x^m = x,$$

fournit la seconde des équations données par M. Thoman.

Il est bon d'observer que les formules (19) et (23) supposent l'une et l'autre la convergence des séries dont les termes généraux sont

$$M x^m \quad \text{et} \quad k_n x^n.$$

461.

ASTRONOMIE. — *Rapport sur un Mémoire intitulé : Méthode pour calculer les éléments des planètes, ou plus généralement des astres dont les orbites sont peu inclinées à l'écliptique, fondée sur l'emploi des dérivées, relatives au temps, des trois premiers ordres de la longitude géocentrique et du premier ordre de la latitude; par M. YVON VILLARCEAU.*

C. R., T. XXX, p. 426 (15 avril 1850).

On sait que, dans le mouvement elliptique d'une planète autour du

Soleil, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique dépendent du temps t et de trois éléments, qui sont le demi grand axe, l'excentricité et l'époque du passage de la planète au périhélie. Si à ces trois premiers éléments on joint la longitude du périhélie mesurée dans le plan de l'orbite, la longitude du nœud ascendant mesurée dans le plan de l'écliptique et l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de l'écliptique, on obtiendra le système des six éléments du mouvement elliptique de la planète.

D'autre part, le mouvement effectif de la planète se trouve lié à son mouvement apparent vu de la Terre par trois équations de condition qui renferment avec les deux derniers éléments sept quantités variables, savoir : les distances de la planète au Soleil et à la Terre, sa longitude et sa latitude géocentriques, sa longitude mesurée dans le plan de son orbite et la longitude héliocentrique de la Terre. De ces quantités variables, trois seulement sont inconnues, savoir : la longitude de la planète mesurée dans le plan de son orbite et les distances de la planète au Soleil et à la Terre. Enfin, de ces trois inconnues, les deux premières peuvent être considérées comme fonctions du temps et des quatre premiers éléments. Donc, si l'on élimine, entre les trois équations de condition, la distance de la planète à la Terre, les deux équations restantes pourront être censées ne renfermer d'autres inconnues que les six éléments. Le système de ces deux équations pourra donc servir à déterminer les six éléments, si l'on en tire trois systèmes semblables, en l'appliquant à trois observations distinctes. Si les trois observations se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, le système des formules obtenues sera équivalent à celui auquel on parviendrait en joignant aux deux équations ici mentionnées leurs dérivées du premier et du second ordre, fournies par des différentiations relatives au temps. Il en résulte qu'on pourra réduire la détermination des six éléments et, par suite, d'une inconnue quelconque, à la détermination des longitude et latitude géocentriques de la planète et de leurs dérivées du premier et du second ordre.



Concevons en particulier que l'on prenne pour inconnue la distance r de la planète au Soleil. Pour réduire la détermination de cette inconnue à celle des longitude et latitude géocentriques et de leurs dérivées du premier et du second ordre, il faudra commencer par éliminer les six éléments de l'orbite entre les deux équations de condition ci-dessus indiquées et leurs dérivées du premier et du second ordre. Or on évitera cette élimination, si aux équations dont il s'agit on substitue les trois équations différentielles du mouvement de la planète qui ne renferment aucun élément, et si, après y avoir exprimé les coordonnées rectangulaires de la planète par rapport au centre du Soleil pris pour origine, en fonction de la distance de la planète à la Terre, ou de la projection ρ de cette distance sur le plan de l'écliptique, on élimine entre les trois équations trouvées les dérivées de ρ du premier et du second ordre. En effet, en opérant ainsi, on obtiendra entre les inconnues ρ et r une équation unique, de laquelle on pourra chasser à volonté l'inconnue ρ ou l'inconnue r , à l'aide de la formule trigonométrique déduite de la considération du triangle qui a pour sommets la planète, le Soleil et la Terre. On retrouvera de cette manière l'équation connue qui s'abaisse au septième degré, quand on la débarrasse d'un facteur étranger à la question.

En résumé, la détermination des éléments de l'orbite d'une planète peut être réduite à la détermination des valeurs qu'acquiescent à une époque donnée ses longitude et latitude géocentriques et leurs dérivées du premier et du second ordre, et à la résolution d'une équation du septième degré. Toutefois, cette réduction suppose que la planète se meut hors du plan de l'écliptique. Si elle décrivait une orbite renfermée dans ce même plan, il n'y aurait plus lieu à considérer ni la longitude du nœud ascendant, ni l'inclinaison; par suite, les éléments inconnus du mouvement elliptique seraient au nombre de quatre seulement; et en même temps les équations de condition par lesquelles le mouvement effectif de la planète se trouve lié à son mouvement apparent vu de la Terre se réduiraient à deux. Donc, en éliminant entre ces deux équations la distance de la planète à la Terre, on

obtiendrait une équation unique qui pourrait être censée ne renfermer d'autres inconnues que les quatre éléments. Pour déduire de cette équation unique les quatre éléments dont il s'agit, il faudrait la transformer en quatre équations diverses, en l'appliquant successivement à quatre observations distinctes. Si d'ailleurs ces quatre observations se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, le système des formules obtenues sera équivalent à celui auquel on parviendrait en joignant à l'équation ici mentionnée ses dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre, fournies par des différentiations relatives au temps. Il en résulte que, dans l'hypothèse admise, on pourra réduire la détermination des quatre éléments, et, par suite, d'une inconnue quelconque, à la détermination de la longitude géocentrique de la planète et de ses dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre.

Concevons, en particulier, que l'on prenne pour inconnue la distance r de la planète au Soleil. Pour réduire la détermination de cette inconnue à celle de la longitude géocentrique et de ses dérivées des trois premiers ordres, il faudra commencer par éliminer les quatre éléments entre l'équation de condition ci-dessus indiquée et ses dérivées des trois premiers ordres. Or on évitera cette élimination, si à l'équation dont il s'agit on substitue : 1° les deux équations différentielles du mouvement de la planète qui ne renferment aucun élément; 2° les dérivées du premier ordre de ces mêmes équations, et si, après y avoir exprimé les coordonnées rectangulaires de la planète par rapport au centre du Soleil pris pour origine en fonction de la distance ρ de la planète à la Terre, on élimine la première dérivée de r et les dérivées de ρ des trois premiers ordres, entre les quatre équations trouvées et la dérivée de la formule trigonométrique déduite de la considération du triangle qui a pour sommets la planète, le Soleil et la Terre. En effet, en opérant ainsi, on obtiendra entre les inconnues r et ρ une équation unique de laquelle on pourra chasser, à l'aide de la formule trigonométrique, ou l'inconnue ρ ou l'inconnue r . On se trouvera conduit, de cette manière, à une équation en r ou en ρ .

qui sera du dix-huitième degré et s'abaissera au dix-septième, quand on la débarrassera d'un facteur étranger à la question.

Ainsi, quand l'orbite de la planète que l'on considère est comprise dans le plan de l'écliptique, on obtient, pour déterminer la distance r de la planète au Soleil, non plus l'équation connue du septième degré qui devient insuffisante, et laisse indéterminée la valeur de cette distance, mais une équation du dix-septième degré.

Si l'orbite de la planète, sans être rigoureusement comprise dans le plan de l'écliptique, est très peu inclinée sur ce plan, alors, en opérant comme dans le cas où l'inclinaison est nulle, on obtiendra entre les inconnues r et ρ une équation qui renfermera, outre la longitude géocentrique de la planète et ses dérivées des trois premiers ordres, la latitude géocentrique et sa dérivée du premier ordre; et cette dernière équation, qui mérite d'être remarquée, sera celle qu'a donnée M. Villarceau, dont nous venons précisément d'indiquer la méthode. En éliminant l'inconnue ρ entre cette dernière et la formule trigonométrique déduite de la considération du triangle qui a pour sommets les trois astres, l'auteur obtient, comme dans le cas précédent, une équation en r réductible au dix-septième degré.

M. Villarceau a indiqué deux cas particuliers, dans lesquels la nouvelle équation se trouve notablement simplifiée. Ces cas sont celui où la planète est stationnaire en longitude, et celui où on l'observe à l'époque de l'opposition. Dans le premier cas, l'équation finale en ρ peut être aisément résolue à l'aide d'une élégante construction donnée par M. Binet.

Quant à la détermination des dérivées des longitude et latitude géocentriques, M. Villarceau l'effectue à l'aide de la formule générale d'interpolation donnée par l'un de nous en 1835.

Enfin M. Villarceau, pour ne laisser aucun doute sur l'utilité de sa nouvelle formule, l'a spécialement appliquée, en terminant son Mémoire, au calcul des éléments corrigés de l'orbite de la planète Iris.

Les Commissaires pensent que le Mémoire de M. Villarceau est

digne de l'approbation de l'Académie; ils proposeraient de l'insérer dans la collection des *Savants étrangers*, si l'auteur ne l'avait destiné à un autre Recueil.

462.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Note sur l'intensité de la lumière dans les rayons réfléchis par la surface d'un corps transparent ou opaque.*

C. R., T. XXX, p. 465 (22 avril 1850).

Les derniers Mémoires de M. Arago sur la Photométrie ont naturellement reporté mon attention vers les formules analytiques propres à fournir l'intensité de la lumière réfléchie par la surface d'un corps transparent ou opaque. Or, en comparant les résultats jusqu'ici énoncés par notre illustre confrère à ceux que donnent les formules, j'ai vu avec satisfaction qu'il y avait un accord parfait entre les uns et les autres. Je me bornerai aujourd'hui à citer, à l'appui de cette assertion, deux exemples qui me paraissent dignes de remarque.

Diverses inductions ont conduit les physiciens à prendre pour mesure de l'intensité de la lumière, dans un rayon doué de la polarisation rectiligne, le carré de l'amplitude des vibrations moléculaires du fluide éthéré. Ce principe étant admis, si l'on décompose un rayon polarisé rectilignement en deux autres dont les plans de polarisation soient rectangulaires entre eux, les intensités de la lumière dans les rayons composants seront à l'intensité de la lumière dans le rayon résultant comme les carrés des cosinus des angles que les plans de polarisation des deux premiers rayons formeront avec le plan de polarisation du dernier. Si d'ailleurs le rayon résultant tombe perpendiculairement sur la surface d'un cristal doublement réfringent et à un seul axe optique, les rayons composants pourront être censés coïncider avec ceux qui subiront, à leur entrée dans le cristal, la double réfraction ordinaire et la double réfraction extraordinaire.

Donc, par suite, si un rayon de lumière tombe perpendiculairement sur la surface d'une plaque cristallisée, la portion de cette lumière qui subira la réfraction ordinaire sera proportionnelle au carré du cosinus de l'angle formé par la section principale du cristal avec le plan de polarisation du rayon incident. Cette loi que Malus a donnée, et que confirment les expériences de M. Arago, est donc, ainsi que l'a remarqué Fresnel, un corollaire des principes sur lesquels repose la théorie des ondulations.

Concevons maintenant qu'un rayon lumineux, doué de la polarisation rectiligne, rencontre, sous une incidence quelconque, une plaque isophane à faces parallèles. Après avoir été réfracté par la surface extérieure de la plaque, il sera réfléchi, au moins en partie, par la surface intérieure, une autre partie pouvant constituer, après une réfraction nouvelle, un rayon émergent. D'ailleurs, en ayant égard à l'existence des rayons évanescents que fera naître la réflexion opérée par la surface intérieure, on pourra établir les lois de cette réflexion, et ces lois seront celles que fourniront les formules renfermées dans les Mémoires que j'ai présentés à l'Académie le 9 décembre 1839⁽¹⁾ et le 2 janvier 1849 (voir p. 95). Or il résulte de ces formules : 1° que, si le rayon réfracté par la surface extérieure forme, avec la normale à cette surface, un angle dont le sinus surpasse l'unité divisée par l'indice de réfraction de la plaque, le rayon émergent disparaîtra; 2° que, dans le cas où cette disparition a lieu, la réflexion du rayon réfracté opérée par la surface intérieure ne fait pas varier l'intensité de la lumière. Donc alors on peut affirmer que la réflexion est totale; ce qui s'accorde, d'une part, avec la locution généralement admise, et, d'autre part, avec les expériences de M. Arago.

Ajoutons que, si l'on décompose le rayon réfracté en deux autres qui soient polarisés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, la différence de marche entre les deux rayons composants se déduira sans peine, quand la réflexion sera totale, des

⁽¹⁾ *Œuvres de Cauchy*, S. 1, T. V, p. 43.

formules établies dans le Mémoire du 2 janvier 1849. Il sera d'ailleurs facile d'apprécier le degré de confiance que pourront mériter ces formules, en comparant, comme M. Jamin se propose de le faire, les résultats qu'elles donnent à ceux que lui ont fournis de nouvelles expériences faites avec beaucoup de soin.

ANALYSE.

Concevons qu'un rayon de lumière, doué de la polarisation rectiligne, rencontre la surface qui sépare un milieu isophane, dans lequel il se meut, d'une lame d'air juxtaposée, de manière à former avec la normale à cette surface un angle τ supérieur à l'angle λ de réflexion totale. Si l'on nomme δ l'anomalie du rayon réfléchi, c'est-à-dire la différence entre les phases de deux rayons composants qui seraient polarisés⁽¹⁾, l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan; alors, en appelant ε le coefficient très petit qu'ont déterminé les expériences de M. Jamin, et qu'il a nommé *coefficient d'ellipticité*, on aura

$$\frac{\tan \frac{\delta}{2}}{\cos \tau} = \varepsilon + \frac{\sin^{\frac{1}{2}}(\tau - \lambda) \sin^{\frac{1}{2}}(\tau + \lambda)}{\sin^2 \tau}.$$

Si le coefficient ε s'évanouit, ou si on le néglige, on aura simplement

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{\sin^{\frac{1}{2}}(\tau - \lambda) \sin^{\frac{1}{2}}(\tau + \lambda)}{\sin \tau \tan \tau}.$$

Cette dernière formule, qui se trouve déjà inscrite dans le Mémoire du 9 décembre 1839, s'accorde avec une formule équivalente donnée par Fresnel.

⁽¹⁾ Le rayon *polarisé dans un plan* est celui dans lequel les vibrations des molécules étherées sont dirigées suivant des droites perpendiculaires à ce plan.

463.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Rapport sur une Note relative aux anneaux colorés de Newton; par MM. F. DE LA PROVOSTAYE et PAUL DESAINS.*

C. R., T. XXX, p. 498 (29 avril 1850).

On sait que la superposition des divers rayons lumineux, successivement réfléchis par les deux surfaces qui terminent une lame d'air très mince, comprise entre deux lentilles de verre, produit des anneaux colorés. On sait encore que ces anneaux, observés par Newton, étaient attribués, par ce grand géomètre, à des accès de facile réflexion et de facile transmission que les molécules lumineuses subissaient périodiquement. On sait enfin que cette doctrine singulière des accès, à laquelle Newton s'est vu obligé de recourir, parce qu'il admettait l'hypothèse de l'émission, se trouve heureusement remplacée, dans le système des ondulations, par la théorie des interférences, qui fournit une explication simple et naturelle du phénomène des anneaux colorés et de ses diverses circonstances. Toutefois il restait à éclaircir une difficulté grave et un point sur lequel l'expérience semblait n'être pas d'accord avec la théorie. Lorsqu'on observe, sous diverses incidences, les anneaux formés entre deux lentilles de verre, et que l'on détermine, pour un anneau donné, l'épaisseur de la lame d'air comprise entre ces lentilles, on trouve que cette épaisseur varie avec l'angle d'incidence. Or, en vertu de la théorie des interférences, l'épaisseur dont il s'agit doit être proportionnelle à la sécante de l'angle τ formé par le rayon lumineux qui traverse la lame d'air avec la normale aux deux surfaces sensiblement parallèles qui la terminent. D'autre part, dans la formule que Newton a déduite de ses expériences, l'angle τ se trouve remplacé par un autre angle dont le sinus est à $\sin \tau$ dans un rapport constant égal à

$$\frac{106 + \frac{1}{5}}{107}$$

0 désignant l'indice de réfraction du verre. Fresnel et Herschel ont recherché les causes de cette différence. Mais les explications qu'ils en ont données sont sujettes à de graves objections, et les auteurs du travail soumis à notre examen sont parvenus à lever complètement la difficulté, en prouvant que le désaccord énoncé n'existe pas. Ils ont observé, sous diverses incidences, les anneaux formés entre deux verres par une lumière homogène provenant de la combustion de l'alcool salé. L'inclinaison leur était donnée par un théodolite de Gambey, et le système des deux verres, placé sur un support horizontal, était mis en mouvement par une vis micrométrique dont l'axe était perpendiculaire au plan du cercle vertical du théodolite. Ils amenaient successivement la partie la plus sombre de chaque anneau noir sous le fil vertical de la lunette; et la marche de la vis, qui permettait de mesurer jusqu'à $\frac{2}{100}$ de millimètre, leur faisait connaître les diamètres réels des anneaux. Les diamètres, ainsi trouvés, ont pu être facilement comparés d'une part à ceux que déterminait la théorie des interférences, d'autre part à ceux qui se déduisaient de la formule indiquée par Newton. Or il est résulté des observations faites par MM. de la Provostaye et Desains que l'expérience et la théorie des ondulations s'accordent parfaitement jusqu'aux dernières limites où il leur a été possible d'apercevoir nettement les anneaux colorés, c'est-à-dire depuis l'incidence perpendiculaire jusqu'à l'incidence de $85^{\circ}21'$. Au contraire, les diamètres déduits de la formule de Newton diffèrent sensiblement, quand l'incidence devient considérable, des diamètres observés. Ainsi, en particulier, sous l'incidence de $85^{\circ}21'$, le diamètre du septième anneau noir, exprimé en millièmes de millimètre, était, d'après l'observation, 47,53; d'après les formules fournies par la théorie des interférences, 47,55; et d'après la formule de Newton, 40,11 seulement.

En résumé, les Commissaires pensent que le travail de MM. F. de la Provostaye et Desains, en rectifiant une erreur appuyée sur l'autorité même de Newton, a fait complètement disparaître une objection grave contre la théorie des ondulations lumineuses. Ils proposent, en con-

séquence, à l'Académie d'approuver ce travail et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*.

464.

Mémoire sur un système d'atomes isotrope autour d'un axe, et sur les deux rayons lumineux que propagent les cristaux à un axe optique.

C. R., T. XXXI, p. 111 (29 juillet 1850).

Dans ce Mémoire, l'auteur applique les formules générales qu'il a établies, dans la séance du 4 février, à la détermination du mode de polarisation des deux rayons lumineux que propage un cristal à un axe optique. Il prouve que, dans le cas où les deux rayons sont peu inclinés à l'axe et dirigés suivant la même droite, ils sont, comme l'a supposé M. Airy, polarisés elliptiquement, les ellipses décrites par les atomes d'éther dans chacun d'eux étant à très peu près semblables, mais disposées de manière que leurs grands axes se coupent à angle droit. Il montre aussi que, dans le cas général, les rayons dont la direction est perpendiculaire à l'axe optique sont doués de la polarisation elliptique, les ellipses décrites par les atomes d'éther pouvant se réduire à des cercles ou à des portions de droites. Il serait à désirer que les physiciens examinassent sous ce point de vue les cristaux à un axe optique, en recherchant si quelqu'un d'entre eux ne transmettrait pas, dans les directions perpendiculaires à l'axe, des rayons polarisés elliptiquement.

465.

Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière à la surface extérieure d'un corps transparent qui décompose un rayon simple doué de la polarisation rectiligne, en deux rayons polarisés circulairement en sens contraires.

C. R., T. XXXI, p. 112 (29 juillet 1850).

Dans ce Mémoire, l'auteur détermine, à l'aide des méthodes générales qu'il a précédemment exposées, les intensités et le mode de polarisation des rayons réfléchis et des deux rayons réfractés par la surface extérieure d'un corps transparent, en appliquant spécialement ses formules au cas où le corps dont il s'agit décompose un rayon simple en deux rayons doués de la polarisation circulaire.

466.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Rapport sur un Mémoire de M. JAMIN, relatif à la double réfraction elliptique du quartz.*

C. R., T. XXXI, p. 112 (29 juillet 1850).

Lorsqu'un rayon de lumière, doué de la polarisation rectiligne, rencontre, sous l'incidence perpendiculaire, la surface extérieure d'une plaque de cristal de roche taillée perpendiculairement à l'axe optique, un prisme analyseur décompose le rayon émergent en deux rayons colorés, dont les teintes sont complémentaires et varient, quand le prisme analyseur vient à tourner. Ce phénomène remarquable, découvert en 1811 par M. Arago, devint bientôt l'objet de recherches approfondies. M. Biot reconnut que l'azimut d'un rayon simple et complètement polarisé était dévié par la plaque de cristal de roche, tantôt à droite, tantôt à gauche, le sens de la rotation étant déterminé par la nature spéciale de la plaque employée. Il reconnut encore que l'angle



de rotation était proportionnel à l'épaisseur de la plaque, mais variable avec la réfrangibilité, et réciproquement proportionnel, pour des rayons de réfrangibilités diverses, aux carrés des longueurs d'ondulation. Il restait à donner une explication du phénomène. Une idée heureuse et neuve s'offrit au génie de Fresnel. Il trouva que, pour rendre compte de l'expérience, il suffisait d'attribuer à la plaque de cristal de roche le pouvoir de décomposer le rayon incident en deux autres rayons polarisés circulairement, mais en sens contraires, et propagés avec des vitesses inégales. Effectivement, la superposition de deux semblables rayons reproduit à chaque instant un rayon doué de la polarisation rectiligne, mais polarisé suivant une droite mobile qui tourne autour du rayon en décrivant un angle proportionnel au chemin parcouru.

Lorsque la plaque de cristal de roche est terminée par des faces non plus perpendiculaires, mais parallèles à l'axe optique, le phénomène que nous venons de rappeler disparaît, du moins sous l'incidence perpendiculaire; mais il reparaît peu à peu sous les incidences obliques, ou bien encore quand les faces qui terminent la plaque sont inclinées sur l'axe. Pour expliquer ces faits, M. Airy a généralisé l'hypothèse admise par Fresnel, et supposé que le cristal de roche décompose un rayon doué de la polarisation rectiligne, mais oblique à l'égard de l'axe du cristal, en deux rayons doués de la polarisation elliptique, mais propagés avec des vitesses inégales, dans lesquels les atomes d'éther décrivent deux ellipses semblables entre elles, les grands axes de ces ellipses étant perpendiculaires l'un à l'autre, et l'un de ces grands axes étant perpendiculaire à l'axe optique. La superposition de ces deux derniers rayons reproduit à chaque instant un nouveau rayon polarisé elliptiquement, dont il suffit de reconnaître les éléments pour être en état de déterminer la différence entre les phases des deux rayons composants et le rapport entre les deux axes de l'ellipse correspondante à chacun d'eux. M. Airy a d'ailleurs suffisamment justifié son hypothèse, à l'aide d'expériences dont les résultats se sont accordés avec elle.

Quant à la loi suivant laquelle les deux paramètres qui déterminent la nature du rayon résultant varient avec l'inclinaison de ce rayon par rapport à l'axe optique du cristal, elle a été d'abord recherchée par M. Mac-Culagh. Cet auteur a reconnu que, pour obtenir la loi énoncée par M. Biot, il suffisait d'introduire deux termes du troisième ordre, avec des coefficients égaux au signe près, mais affectés de signes contraires, dans les équations aux dérivées partielles du second ordre, qui peuvent représenter, non pas un mouvement vibratoire quelconque, mais un rayon simple propagé au travers d'un cristal à un seul axe optique, dans le cas où l'on prend pour variable indépendante, outre le temps, une seule coordonnée mesurée dans la direction de ce rayon. M. Mac-Culagh a d'ailleurs constaté l'accord de la formule en termes finis à laquelle il est parvenu avec deux expériences de M. Airy. Ajoutons que l'un de nous a déduit de la théorie des actions moléculaires des formules qui, dans le cas où il s'agit de rayons peu inclinés sur l'axe optique du cristal de roche, s'accordent sensiblement, au moins sous certaines conditions, avec les hypothèses et les formules de MM. Airy et Mac-Culagh.

M. Jamin a pensé, avec raison, qu'il serait utile d'appliquer à l'étude de la double réfraction produite par le cristal de roche les procédés à l'aide desquels il avait déterminé, d'une manière si précise, la nature des rayons réfléchis par la surface d'un corps isophane et constaté les lois de cette réflexion.

En conséquence, il a étudié avec soin le mode de polarisation du rayon émergent d'une plaque de cristal de roche taillée perpendiculairement à l'axe optique, dans le cas où le rayon incident est doué de la polarisation rectiligne, et en admettant que la forme de l'ellipse décrite par un atome d'éther dans un rayon peu incliné à l'axe optique est très peu modifiée par la réfraction à l'émergence. Les résultats que M. Jamin a déduits de ses observations s'accordent avec les formules que nous avons ci-dessus mentionnées et sont renfermés dans plusieurs Tableaux auxquels les physiciens attacheront certainement beaucoup de prix.



En résumé, les Commissaires sont d'avis que le nouveau Mémoire de M. Jamin est digne, comme ses Mémoires précédents, d'être approuvé par l'Académie, et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers*.

467.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Sur les rayons de lumière réfléchis et réfractés par la surface d'un corps transparent.*

C. R., T. XXXI, p. 160 (5 août 1850).

Comme je l'ai remarqué dans d'autres Mémoires, le principe de la continuité du mouvement dans l'éther fournit le moyen de calculer les éléments des rayons de lumière réfléchis ou réfractés par la surface extérieure ou intérieure d'un corps transparent ou opaque.

Concevons, pour fixer les idées, que la réflexion et la réfraction soient opérées par la surface extérieure d'un corps transparent. Supposons que cette surface soit plane, et rapportons les différents points de l'espace à trois axes rectangulaires x, y, z . Enfin, concevons que, le corps transparent étant situé du côté des x positives, on prenne sa surface extérieure pour plan des y, z , et faisons tomber sur cette surface un rayon simple dont la direction soit celle d'une droite fermée dans le plan des x, y .

Nommons

τ l'angle d'incidence, et soient, dans le rayon incident,

T la durée d'une vibration atomique;

l la longueur d'ondulation;

ξ, η, ζ les déplacements effectifs d'un atome d'éther mesurés, au bout du temps t , parallèlement aux axes des x, y, z ;

$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ les déplacements symboliques du même atome.

Le mouvement simple correspondant au rayon incident sera caractérisé par l'exponentielle

$$e^{i\pi(x+yy-zt)}$$

les valeurs de u, v, s étant déterminées par les formules

$$u = k \cos \tau, \quad v = k \sin \tau, \quad k = \frac{2\pi}{T} l, \quad s = \frac{2\pi}{T} l,$$

et i étant l'une des racines carrées de -1 . D'ailleurs la réflexion et la réfraction opérées par la surface extérieure du corps transparent donneront naissance : 1° à deux rayons réfléchis, l'un visible, l'autre évanescent; 2° à trois rayons réfractés, dont les deux premiers se réduiront souvent à un seul, le troisième étant évanescent. Cela posé, concevons que les déplacements effectifs d'un atome et le coefficient de x dans l'exponentielle qui caractérise un mouvement simple, c'est-à-dire les quantités représentées par

$$\xi, \eta, \zeta, u,$$

quand il s'agit du rayon incident, deviennent

$$\left. \begin{array}{ll} \xi_1, \eta_1, \zeta_1, u_1, & \text{pour le rayon réfléchi visible;} \\ \xi_0, \eta_0, \zeta_0, u_0, & \text{pour le rayon réfléchi évanescent;} \\ \xi', \eta', \zeta', u', & \text{pour les rayons réfractés visibles;} \\ \xi'', \eta'', \zeta'', u'', & \text{pour le rayon réfracté évanescent.} \end{array} \right\}$$

On aura

$$u_1 = -u;$$

et, si l'on désigne chaque déplacement symbolique à l'aide d'un trait horizontal superposé au déplacement effectif correspondant, les équations de condition relatives à une valeur nulle de x se réduiront sensiblement aux formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi} + \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}' - \bar{\xi}'' = \bar{\xi}_0 - \bar{\xi}_e, \quad u(\bar{\xi} - \bar{\xi}_1) - u'\bar{\xi}' - u''\bar{\xi}'' = u_0\bar{\xi}_0 - u_e\bar{\xi}_e, \\ \bar{\eta} + \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}' - \bar{\eta}'' = \bar{\eta}_0 - \bar{\eta}_e, \quad u(\bar{\eta} - \bar{\eta}_1) - u'\bar{\eta}' - u''\bar{\eta}'' = u_0\bar{\eta}_0 - u_e\bar{\eta}_e, \\ \bar{\zeta} + \bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}' - \bar{\zeta}'' = \bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_e, \quad u(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1) - u'\bar{\zeta}' - u''\bar{\zeta}'' = u_0\bar{\zeta}_0 - u_e\bar{\zeta}_e. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, le rayon réfléchi visible offrant des vibrations transversales

comme le rayon incident, on aura, non seulement

$$(2) \quad u\bar{\xi} + v\bar{\eta} = 0,$$

mais encore

$$(3) \quad u\bar{\xi}_1 - v\bar{\eta}_1 = 0;$$

et l'on trouvera, au contraire, pour le rayon réfléchi évanescant,

$$(4) \quad \frac{\bar{\xi}_e}{u_e} = \frac{\bar{\eta}_e}{v}, \quad \xi_e = 0.$$

Ajoutons que, u' étant égal à u dans tout corps isophane qui produit la réfraction simple, et peu différent de u dans les corps doublement réfringents, on pourra, dans une première approximation, supposer les formules (1) réduites aux suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{\xi} + \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}' - \bar{\xi}'' = \bar{\xi}_e - \bar{\xi}_c, & u(\bar{\xi} - \bar{\xi}_1) - \frac{u' + u''}{2}(\bar{\xi}' + \bar{\xi}'') = u_e \bar{\xi}_e - u_c \bar{\xi}_c, \\ \bar{\eta} + \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}' - \bar{\eta}'' = \bar{\eta}_e - \bar{\eta}_c, & u(\bar{\eta} - \bar{\eta}_1) - \frac{u' + u''}{2}(\bar{\eta}' + \bar{\eta}'') = u_e \bar{\eta}_e - u_c \bar{\eta}_c, \\ \bar{\xi} + \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}' - \bar{\xi}'' = \bar{\xi}_e - \bar{\xi}_c, & u(\bar{\xi} - \bar{\xi}_1) - \frac{u' + u''}{2}(\bar{\xi}' + \bar{\xi}'') = u_e \bar{\xi}_e - u_c \bar{\xi}_c. \end{cases}$$

Enfin, les formules

$$(6) \quad \frac{u' + u''}{2}(\bar{\xi}' + \bar{\xi}'') + v(\bar{\eta}' + \bar{\eta}'') = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\bar{\xi}_e}{u_e} = \frac{\bar{\eta}_e}{v}, \quad \xi_e = 0,$$

qui se vérifieront complètement, si le corps donné est isophane et produit la réfraction simple, seront encore sensiblement exactes dans le cas contraire. Or il est clair que les douze équations (3), (4), (5), (6), (7) suffiront à déterminer, sur la surface extérieure du corps transparent, les valeurs des douze inconnues

$$\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\xi}_1', \bar{\xi}_1'', \bar{\eta}_1', \bar{\eta}_1'', \bar{\xi}_e, \bar{\eta}_e, \bar{\xi}_c, \bar{\xi}_c', \bar{\eta}_c', \bar{\xi}_c''.$$

en fonctions linéaires des déplacements symboliques

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\xi}',$$

dont les deux premiers sont liés entre eux par la formule (2). On trouvera en particulier

$$(8) \quad \bar{\xi}_1 = \frac{u - \frac{u' + u''}{2}}{u + \frac{u' + u''}{2}} \bar{\xi}, \quad \bar{\xi}' + \bar{\xi}'' = \frac{2u}{u + \frac{u' + u''}{2}} \bar{\xi}$$

et

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{\xi}_1' = \frac{u' + u''}{u' + u'' + v^2 + \varepsilon v^2} \left(u + \frac{u' + u''}{2} \right) u - \frac{u' + u''}{2} \bar{\xi}, \\ \bar{\xi}' + \bar{\xi}'' = \frac{k^2}{u' + u'' + v^2 + \varepsilon v^2} \left(u - \frac{u' + u''}{2} \right) u + \frac{2u}{u + \frac{u' + u''}{2}} \bar{\xi}. \end{cases}$$

la valeur de ε étant

$$\varepsilon = \frac{u_e + u_c'}{u_e u_c' - v^2}.$$

Il est bon d'observer que, dans ces diverses formules, u_e, u_c' seront deux quantités algébriques, la première négative, la seconde positive. Au contraire, u, u', u'' seront trois quantités géométriques respectivement égales au produit du facteur symbolique i par trois quantités positives. Ajoutons que, si l'on nomme l, l' les longueurs d'ondulation dans les deux rayons réfractés et τ, τ' les angles de réfraction correspondants, on aura

$$u' = k' \cos \tau', \quad u'' = k'' \cos \tau'', \quad v = k' \sin \tau' = k'' \sin \tau'',$$

les valeurs de k', k'' étant

$$k' = \frac{2\pi}{l'} i, \quad k'' = \frac{2\pi}{l''} i.$$

Lorsque le corps donné produit la réfraction simple, on a

$$u' = u'' = \frac{u' + u''}{2}.$$



Alors aussi, les rayons réfractés se réduisant à un seul, on peut, dans les formules (8), (9), poser

$$\xi^r = 0, \quad \zeta^r = 0,$$

et par suite les équations (8), (9) coïncident avec celles que nous avons obtenues dans de précédents Mémoires.

Lorsque le corps donné ne produit pas la réfraction simple, les formules (8), (9) sont seulement approximatives. Alors aussi les inconnues renfermées dans les équations (1) sont au nombre de quinze; et, pour déterminer ces quinze inconnues, il suffit de joindre aux équations (3), (4), (5) les six équations linéaires qui fournissent, pour chacun des trois rayons réfractés, les rapports entre les trois déplacements symboliques comparés deux à deux.

Supposons, par exemple, que le corps donné soit du nombre des corps isophanes qui décomposent un rayon incident en deux rayons polarisés circulairement en sens contraires. Alors, en posant

$$k^2 = u^2 + v^2, \quad k'^2 = u'^2 + v'^2,$$

et choisissant k, k' , de manière que les rapports $\frac{k'}{u}, \frac{k''}{u'}$ soient positifs, on obtiendra, pour représenter les deux rayons réfractés visibles, deux équations de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\bar{\xi}^r}{v} = \frac{\bar{\eta}^r}{-u} = \frac{\bar{\zeta}^r}{-k^2 \bar{\gamma}^r}, \\ \frac{\bar{\xi}^r}{v} = \frac{\bar{\eta}^r}{-u'} = \frac{\bar{\zeta}^r}{-k'^2 \bar{\gamma}^r}; \end{cases}$$

et, des formules (1), jointes aux formules (3), (4), (7) et (10), on déduira immédiatement les valeurs des quinze inconnues

$$\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1; \quad \bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}'; \quad \bar{\xi}^r, \bar{\eta}^r, \bar{\zeta}^r; \quad \bar{\xi}_e, \bar{\eta}_e, \bar{\zeta}_e; \quad \bar{\xi}_e, \bar{\eta}_e, \bar{\zeta}_e.$$

Si l'on veut, en particulier, déterminer les inconnues

$$\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1; \quad \bar{\xi}', \bar{\zeta}'; \quad \bar{\xi}^r, \bar{\zeta}^r,$$

desquelles on déduit aisément toutes les autres, alors on pourra com-

mencer par tirer des formules (8) et (9) les valeurs approchées de

$$\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1; \quad \bar{\xi}' + \bar{\xi}^r, \bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^r;$$

puis on déduira des formules

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{\xi}^r - \bar{\xi}' = -i \frac{2v}{k^2 + k'^2} (\bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^r), \\ \bar{\zeta}^r - \bar{\zeta}' = i \frac{k^2 + k'^2}{2v} (\bar{\xi}' + \bar{\xi}^r) \end{cases}$$

les valeurs correspondantes de

$$\bar{\xi}^r - \bar{\xi}', \quad \bar{\zeta}^r - \bar{\zeta}';$$

et, après avoir tiré des équations (8), (9), (11) les valeurs des six inconnues

$$\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1; \quad \bar{\xi}', \bar{\zeta}'; \quad \bar{\xi}^r, \bar{\zeta}^r,$$

on corrigera les inconnues

$$\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^r, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}' + \bar{\xi}^r,$$

en déterminant leurs corrections, indiquées par l'emploi de la lettre caractéristique δ , à l'aide des formules

$$(12) \quad \delta \bar{\xi}_1 = \delta(\bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^r) = -i \frac{k^2 + k'^2}{4v} \frac{u' - u'}{u + \frac{u' + u'}{2}} (\bar{\xi}' + \bar{\xi}^r),$$

$$(13) \quad \delta \bar{\xi}_1 = -i \frac{u' u' - v^2}{u \frac{u' + u'}{2} + v^2} \frac{u'' - u'}{u + \frac{u' + u''}{2}} \frac{v}{k^2 + k'^2} (\bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^r),$$

$$(14) \quad \delta(\bar{\xi}' + \bar{\xi}^r) = i \frac{u(u' + u') + k^2}{u \frac{u' + u'}{2} + v^2} \frac{u'' - u'}{u + \frac{u' + u''}{2}} \frac{v}{k^2 + k'^2} (\bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^r).$$

Enfin, après avoir ainsi corrigé les valeurs des inconnues

$$\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1$$

et celles des sommes

$$\bar{\xi}' + \bar{\xi}^r, \quad \bar{\zeta}' + \bar{\zeta}^r,$$

on déterminera les différences

$$\bar{\xi}' - \bar{\xi}, \quad \bar{\zeta}' - \bar{\zeta}$$

à l'aide des formules

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{\xi}' - \bar{\xi} = -i \frac{2v}{k' + k''} (\bar{\zeta}' + \bar{\zeta}) - \frac{u'^2 - u''^2}{4k'k''} (\bar{\xi}' + \bar{\xi}), \\ \bar{\zeta}' - \bar{\zeta} = i \frac{k' + k''}{2v} (\bar{\xi}' + \bar{\xi}) + \frac{u'^2 - u''^2}{4k'k''} (\bar{\zeta}' + \bar{\zeta}). \end{cases}$$

Il est bon d'observer que, dans les formules (8), (9), (12), (13), (14), (15), les valeurs des deux quantités

$$\varepsilon, \quad u' - u''$$

sont très petites, et que, dans le calcul des inconnues déterminées à l'aide de ces formules, les erreurs commises sont de même ordre que les carrés de ces deux quantités. Ajoutons que, dans ces diverses formules, on peut aisément introduire, à la place des lettres

$$u, \quad v, \quad u', \quad u'', \quad k, \quad k', \quad k'',$$

les angles τ, τ', τ'' . C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un nouvel article.

Les formules (12) et (13) méritent d'être remarquées. Les valeurs qu'elles fournissent pour $\partial \bar{\zeta}'$, et $\partial \bar{\xi}'$, sont proportionnelles, la première à $\bar{\zeta}$, la seconde à $\bar{\xi}$, tandis que les valeurs de $\bar{\zeta}$, et de $\bar{\xi}$, fournies par les équations (8) et (9), sont respectivement proportionnelles à $\bar{\zeta}'$ et à $\bar{\xi}'$. D'ailleurs, les valeurs de $\partial \bar{\zeta}'$, et $\partial \bar{\xi}'$, disparaissent quand on a $u' = u''$, c'est-à-dire quand les deux rayons réfractés se réduisent à un seul. Donc, dans ce cas, un rayon incident, polarisé suivant le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, conservera après la réflexion le mode de polarisation qu'il offrait primitivement. Mais il résulte des formules (12) et (13) qu'il en sera autrement si le corps donné est doublement réfringent, et qu'alors un rayon incident polarisé, par exemple dans le plan d'incidence, donnera naissance à un rayon réfléchi doué de la polarisation elliptique. D'ailleurs, ce rayon

réfléchi pourra être considéré comme résultant de la superposition de deux rayons simples, l'un très sensible et polarisé dans le plan d'incidence, l'autre peu sensible et polarisé perpendiculairement à ce plan. Ajoutons que ce dernier rayon sera d'autant plus brillant que le module de la différence $u' - u''$ sera plus considérable.

Le phénomène que je viens d'indiquer devra évidemment se produire encore quand un rayon simple sera réfléchi, sous une incidence voisine de l'incidence normale, par la surface extérieure du cristal de roche taillé perpendiculairement à son axe. Alors aussi un rayon incident, polarisé dans le plan d'incidence ou dans un plan perpendiculaire, donnera naissance à un rayon réfléchi, doué de la polarisation elliptique, le rapport du petit axe de l'ellipse au grand axe étant proportionnel à la différence entre les vitesses de propagation des deux rayons polarisés circulairement par le cristal en sens contraires.

468.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Sur les rayons de lumière réfléchis et réfractés par la surface d'un corps transparent et isophane.*

C. R., T. XXXI, p. 225 (19 août 1850).

Dans l'avant-dernière séance, j'ai appliqué les principes que j'avais précédemment établis, à la réflexion et à la réfraction de la lumière opérées par la surface extérieure d'un corps transparent. Je vais aujourd'hui développer les conséquences de mon analyse, dans le cas spécial où le corps transparent est *isophane*.

Les corps transparents et isophanes sont de deux espèces. Il en est à travers lesquels peuvent se propager des rayons lumineux simples, doués de la polarisation rectiligne. Il est d'autres corps isophanes qui possèdent ce qu'on a nommé le *pouvoir rotatoire*, et dont la structure se prête à la propagation simultanée de rayons lumineux simples polarisés circulairement en sens contraires. Ajoutons que, pour expliquer



les phénomènes de réflexion et de réfraction, il est nécessaire de tenir compte, non seulement des rayons visibles réfléchis ou réfractés, mais encore d'autres rayons que nous appelons *évanescents*, que la théorie met en évidence et qui échappent à l'observateur, parce qu'ils deviennent insensibles à de très petites distances des surfaces réfléchissantes ou réfringentes.

Cela posé, concevons que, un corps transparent et isophane étant terminé par une surface plane, on fasse tomber sur cette surface un rayon simple doué de la polarisation rectiligne. Si le corps ne possède pas le pouvoir rotatoire, la réflexion et la réfraction donneront naissance à deux rayons réfléchis et à deux rayons réfractés, l'un visible, l'autre évanescence. Alors aussi les lois de la réflexion et de la réfraction seront fournies, dans une première approximation, par les formules de Fresnel, qui supposent que le rayon réfléchi est toujours doué, comme le rayon incident, de la polarisation rectiligne. Observons que ces formules, qui contiennent les angles d'incidence et de réfraction, peuvent être censées renfermer, avec l'angle d'incidence, un seul élément, savoir celui qu'on nomme l'*indice de réfraction*. Ajoutons que, en vertu des formules de Fresnel, un rayon réfléchi sous l'angle qui a pour tangente l'indice de réfraction devra toujours être complètement polarisé dans le plan d'incidence. Dans la réalité, il en est autrement. Lorsqu'un rayon simple doué de la polarisation rectiligne tombe sur la surface extérieure d'un corps transparent et isophane, la réflexion donne généralement naissance à un rayon doué de la polarisation elliptique; et si, afin de mieux observer les phénomènes, on substitue la lumière solaire à la lumière diffuse, comme l'a fait M. Jamin, les résultats des expériences devenues plus exactes seront conformes, non aux formules de Fresnel, mais à celles que j'ai données en 1839, et qui renferment, avec les angles d'incidence et de réfraction déjà contenus dans les anciennes formules, un nouvel élément, savoir celui que M. Jamin appelle le *coefficient d'ellipticité*.

Les nouvelles formules que renferme le présent Mémoire se rapportent au cas où le corps transparent et isophane que l'on considère

est un corps qui possède le pouvoir rotatoire. Alors les lois de la réflexion et de la réfraction des rayons lumineux diffèrent de celles que j'ai données en 1839, et la théorie, devant l'expérience, indique de nouveaux phénomènes qui semblent d'autant plus dignes d'attention qu'ils n'ont pas encore été, du moins à ma connaissance, observés par les physiciens. Parmi les phénomènes dont il s'agit, on doit surtout remarquer ceux qui sont relatifs à la réflexion de la lumière. Disons en peu de mots en quoi ils consistent.

Lorsqu'un rayon simple, et doué de la polarisation rectiligne, tombe sur une surface plane qui termine un corps transparent et isophane, ce rayon peut toujours être censé résulter de la superposition de deux rayons simples polarisés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan. De ces deux rayons superposés, chacun continue d'être, après la réflexion, polarisé rectilignement quand le corps donné ne possède pas le pouvoir rotatoire. Seulement alors la phase d'un rayon primitivement polarisé dans le plan d'incidence est toujours augmentée d'une demi-circonférence, tandis que la phase d'un rayon primitivement polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence est augmentée d'un arc qui varie avec l'incidence; cet arc se réduisant à zéro pour l'incidence perpendiculaire, à une demi-circonférence environ pour l'incidence rasante, et croissant dans l'intervalle avec l'angle d'incidence. Ajoutons que l'arc dont il s'agit croît très lentement dans le voisinage des incidences perpendiculaire et rasante, et que, par suite, il peut être censé s'élever de la limite zéro à la limite π , tandis que l'angle d'incidence varie entre deux limites très rapprochées l'une de l'autre. Le même arc acquiert la valeur moyenne $\frac{\pi}{2}$, pour l'incidence appelée *principale*, dont la tangente se réduit sensiblement à l'indice de réfraction. Cela posé, il est clair que, si le plan de polarisation d'un rayon incident forme un angle aigu avec le plan d'incidence, le rayon réfléchi sera doué de la polarisation rectiligne dans le voisinage de l'incidence perpendiculaire ou rasante et de la polarisation elliptique dans le voi-

sinage de l'incidence principale. Mais cette polarisation elliptique du rayon réfléchi sera uniquement due à la différence entre les phases qu'acquerront après la réflexion les deux rayons superposés l'un à l'autre dans le rayon incident, et polarisés l'un dans le plan d'incidence, l'autre dans un plan perpendiculaire.

Il en sera tout autrement si le corps isophane donné possède le pouvoir rotatoire. Alors les formules qui représenteront les lois de la réflexion et de la réfraction renfermeront, outre l'angle d'incidence, deux angles de réfraction qui correspondront aux deux rayons réfractés, polarisés circulairement en sens contraires, et un coefficient d'ellipticité. Ces formules pourront donc être censées renfermer, avec l'angle d'incidence, non plus un seul élément, mais trois éléments, savoir : le coefficient d'ellipticité dont il s'agit, et deux indices de réfraction ou, ce qui revient au même, la différence entre ces deux indices et l'indice de réfraction moyen. Alors aussi la réflexion d'un rayon simple polarisé dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan donnera généralement naissance, non plus à un rayon qui reproduira le même mode de polarisation, mais à un rayon doué de la polarisation elliptique. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Concevons d'abord que le rayon incident soit polarisé dans le plan d'incidence. Alors le rayon réfléchi sera doué lui-même de la polarisation rectiligne et polarisé dans le plan d'incidence si l'angle de réfraction moyenne se réduit à la moitié d'un angle droit. Mais, si l'angle de réfraction moyenne diffère d'un demi-droit, le rayon réfléchi sera doué de la polarisation elliptique et résultera de la superposition de deux rayons polarisés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan. D'ailleurs de ces deux rayons superposés, le premier sera très sensible, et le même, à très peu près, que si le corps isophane possédait le pouvoir rotatoire dont il est doué, l'indice de réfraction moyenne demeurant invariable. Au contraire, le dernier des deux rayons superposés sera peu sensible, et présentera des vibrations atomiques dont l'amplitude sera proportionnelle à la différence entre les deux indices de réfraction.

Concevons maintenant que le rayon incident soit polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence; alors le rayon réfléchi sera doué lui-même de la polarisation rectiligne, mais polarisé dans un plan qui formera un angle aigu avec le plan d'incidence, si l'angle d'incidence se réduit à l'incidence principale, dont la tangente est à très peu près l'indice de réfraction moyenne. D'ailleurs, dans ce cas particulier, l'azimut du rayon réfléchi par rapport au plan d'incidence offrira une tangente proportionnelle à la différence entre les deux indices de réfraction, et réciproquement proportionnelle au coefficient d'ellipticité. Si l'angle d'incidence diffère notablement de l'incidence principale, le rayon réfléchi sera doué de la polarisation elliptique, et résultera de la superposition de deux rayons polarisés l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan. D'ailleurs, de ces deux rayons superposés, le second sera généralement très sensible, et le même, à très peu près, que si le corps isophane perdait le pouvoir rotatoire dont il est doué, l'indice de réfraction moyenne demeurant invariable. Au contraire, le premier des deux rayons superposés sera peu sensible, et présentera des vibrations atomiques dont l'amplitude sera proportionnelle à la différence entre les deux indices de réfraction.

D'après ce qu'on vient de dire, la surface extérieure d'un corps doué du pouvoir rotatoire offre cette singulière propriété, qu'elle transforme par réflexion, sous l'incidence principale, un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence en un rayon polarisé dans une direction oblique à ce plan. Ce fait nouveau, que l'Analyse nous révèle, piquera sans doute la curiosité des physiciens. Il sera intéressant de voir si les prévisions de la théorie se trouvent, sur ce point encore, confirmées par l'expérience.

ANALYSE.

Considérons un corps transparent et isophane qui possède le pouvoir rotatoire. Supposons d'ailleurs ce corps terminé par une surface plane que nous prendrons pour plan de yz , le corps étant situé du



côté des x positives, et faisons tomber sur cette surface un rayon lumineux simple, dont la direction soit comprise dans le plan des xy . Les lois de la réflexion et de la réfraction seront fournies par les équations (1), (3), (4), (7) et (10) du précédent Mémoire, qui suffiront pour déterminer les valeurs des quinze inconnues qu'elles renferment, en fonctions linéaires des trois déplacements symboliques

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta},$$

dont les deux premiers sont liés entre eux par l'équation (2). Il est bon d'observer que des équations (1), jointes aux équations (2), (4) et (7), on déduira immédiatement les formules

$$(1) \quad \bar{\zeta} + \bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta}' + \bar{\zeta}'' \quad u(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1) = u'\bar{\zeta}' + u''\bar{\zeta}'';$$

$$(2) \quad k^2(\bar{\xi} + \bar{\xi}_1) = k'^2\bar{\xi}' + k''^2\bar{\xi}'';$$

$$(3) \quad \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}' - \bar{\eta}'' = \varepsilon v(\bar{\xi} + \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}' - \bar{\xi}''),$$

la valeur de ε étant

$$\varepsilon = \frac{u_e + u'_e}{u_e u'_e - v^2},$$

et que le premier membre de la formule (3), multipliée par v , sera équivalent à

$$u'\bar{\zeta}' + u''\bar{\zeta}'' - u(\bar{\xi} - \bar{\xi}_1),$$

en sorte qu'on aura

$$(4) \quad (u + \varepsilon v^2)\bar{\xi} - (u - \varepsilon v^2)\bar{\xi}_1 = (u' + \varepsilon v^2)\bar{\xi}' + (u'' + \varepsilon v^2)\bar{\xi}''.$$

Si des équations (2) et (4) on élimine $\bar{\xi}'$ et $\bar{\xi}''$, à l'aide des formules (10) du précédent Mémoire, on trouvera

$$(5) \quad k^2(\bar{\xi} + \bar{\xi}_1) = i v (k'\bar{\zeta}' - k''\bar{\zeta}'')$$

et

$$(6) \quad (u + \varepsilon v^2)\bar{\xi} - (u - \varepsilon v^2)\bar{\xi}_1 = i v \left(\frac{u' + \varepsilon v^2}{k'} \bar{\zeta}' - \frac{u'' + \varepsilon v^2}{k''} \bar{\zeta}'' \right).$$

Les quatre équations (1), (5), (6) suffiront évidemment pour déter-

miner les valeurs des quatre inconnues

$$\bar{\xi}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}', \bar{\zeta}''$$

en fonctions linéaires de $\bar{\xi}$ et de $\bar{\zeta}$.

Concevons maintenant que l'on nomme u, u_1 les déplacements atomiques mesurés dans le plan d'incidence, suivant une direction parallèle au plan des ondes, et qu'à ces déplacements effectifs correspondent les déplacements symboliques \bar{u}, \bar{u}_1 . Si l'on attribue aux quantités u, u_1 les mêmes signes qu'aux quantités ξ, ξ_1 , les deux rapports $\frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{u}_1}{u_1}$ pourront être supposés égaux au rapport

$$\frac{v}{k} = \sin \tau,$$

τ étant l'angle d'incidence, et les formules (5), (6) donneront

$$(7) \quad k(\bar{u} + \bar{u}_1) = i(k'\bar{\zeta}' - k''\bar{\zeta}''),$$

$$(8) \quad \frac{u + \varepsilon v^2}{k} \bar{u} - \frac{u - \varepsilon v^2}{k} \bar{u}_1 = i \left(\frac{u' + \varepsilon v^2}{k'} \bar{\zeta}' - \frac{u'' + \varepsilon v^2}{k''} \bar{\zeta}'' \right).$$

Il est bon d'observer qu'on tire des équations (1)

$$(9) \quad 2u\bar{\zeta} = (u + u')\bar{\zeta}' + (u + u'')\bar{\zeta}'', \quad 2u\bar{\zeta}_1 = (u - u')\bar{\zeta}' + (u - u'')\bar{\zeta}''.$$

Pareillement, on tire des équations (7) et (8)

$$(10) \quad 2u\bar{u} = i(U'\bar{\zeta}' - U''\bar{\zeta}''), \quad 2u\bar{u}_1 = i(V'\bar{\zeta}' - V''\bar{\zeta}''),$$

les valeurs de U', V' étant déterminées,

$$U' = \frac{k'}{k}(u - \varepsilon v^2) + \frac{k}{k'}(u' + \varepsilon v^2), \quad V' = \frac{k'}{k}(u + \varepsilon v^2) - \frac{k}{k'}(u' + \varepsilon v^2),$$

et U'', V'' étant ce que deviennent U', V' quand on y remplace u' et k' par u'' et k'' .

En vertu des formules (1), (7), (8) la valeur de chacune des inconnues

$$\bar{u}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}', \bar{\zeta}''$$

se composera de deux parties, l'une proportionnelle à \bar{z} , l'autre à $\bar{\zeta}$. On pourra d'ailleurs calculer séparément ces deux parties, en supposant d'abord $\bar{\zeta} = 0$, puis ensuite $\bar{z} = 0$; ce qui revient à substituer successivement au rayon incident les deux rayons qui, étant superposés l'un à l'autre, le reproduisent, et qui sont polarisés rectilignement, l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre dans ce même plan.

Adoptons cette marche, et supposons d'abord le rayon incident polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence. Alors, les vibrations atomiques étant renfermées dans le plan d'incidence, on aura $\zeta = 0$. Par suite, on pourra supposer $\bar{\zeta} = 0$, et les formules (1), (9) donneront

$$(11) \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{z}' + \bar{z}''; \quad (u + u')\bar{z}' + (u + u'')\bar{z}'' = 0,$$

puis on conclura de ces dernières, jointes aux équations (10),

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\bar{z}''}{u + u''} &= \frac{\bar{z}'}{-u - u'} = \frac{\bar{\zeta}_1}{u' - u''} = \frac{2u\bar{\zeta}_1}{U'(u + u') + U''(u + u'')} \\ &= \frac{2u\bar{\zeta}_1}{V'(u + u') + V''(u + u'')} \end{aligned} \right.$$

Supposons, en second lieu, que le rayon incident soit polarisé dans le plan d'incidence. Alors, les vibrations atomiques étant perpendiculaires à ce plan, on aura $z = 0$. Par suite, on pourra supposer $\bar{z} = 0$, et les formules (7), (10) donneront

$$(13) \quad k\bar{\zeta}_1 = i(k'\bar{\zeta}' - k''\bar{\zeta}''), \quad U'\bar{\zeta}' = U''\bar{\zeta}''$$

puis on conclura de ces dernières, jointes aux équations (9),

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\bar{\zeta}''}{U''} &= \frac{\bar{\zeta}'}{U'} = \frac{i\bar{\zeta}_1}{\frac{k''}{k}U'' - \frac{k'}{k}U'} = \frac{2u\bar{\zeta}_1}{U''(u + u') + U'(u + u'')} \\ &= \frac{2u\bar{\zeta}_1}{U''(u - u') + U'(u - u'')} \end{aligned} \right.$$

Les formules (12) et (14) suffisent pour déterminer les lois de la

réflexion et de la réfraction opérées par la surface d'un corps transparent et isopane. En vertu de ces formules, les lois spéciales de la réflexion seront fournies, si le rayon incident est polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, par les deux équations

$$(15) \quad \bar{\zeta}_1 = \frac{V'(u + u'') + V''(u + u')}{U''(u + u'') + U'(u + u')} \bar{z}, \quad \bar{\zeta}_1 = i \frac{2u(u' - u'')}{U''(u + u'') + U'(u + u')} \bar{z},$$

et, si le rayon incident est polarisé dans le plan d'incidence, par les formules

$$(16) \quad \bar{\zeta}_1 = i \frac{\frac{k'}{k}U'' - \frac{k''}{k}U'}{U''(u - u'') + U'(u + u')} 2u\bar{z}, \quad \bar{\zeta}_1 = \frac{U''(u - u'') + U'(u - u')}{U''(u + u'') + U'(u + u')} \bar{z}.$$

Lorsque, dans ces formules, on introduit à la place de $v, u, u', u'', k, k', k''$ les angles et les indices de réfraction, on se trouve immédiatement conduit aux conclusions énoncées dans le préambule. C'est, au reste, ce que nous expliquerons plus en détail dans un autre article.

469.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Mémoire sur la réflexion et la réfraction des rayons lumineux à la surface extérieure ou intérieure d'un cristal.*

C. R., T. XXXI, p. 257 (26 août 1850).

Lorsqu'un rayon simple tombe sur la surface extérieure ou intérieure d'un cristal à un ou deux axes optiques, la propagation du mouvement de l'éther donne naissance à divers rayons réfléchis ou réfractés, les uns visibles, les autres évanescents. Alors aussi les principes établis dans mes précédents Mémoires suffisent pour déterminer les lois de la réflexion et de la réfraction. Mais, comme la marche suivie dans l'application de ces principes peut avoir une influence notable sur la longueur des calculs et sur la forme plus ou moins compliquée des



équations définitives auxquelles on parvient, il sera très utile d'indiquer une méthode qui permette d'obtenir facilement ces équations sous une forme élégante et simple tout à la fois. C'est ce que nous allons essayer de faire en peu de mots.

Nous supposons, dans un cristal à un ou deux axes optiques, les positions des divers points rapportées à trois axes rectangulaires fixes et liés invariablement à ce cristal. Alors, pour tout mouvement simple propagé dans une direction donnée, et correspondant à un rayon lumineux visible ou évanescent, les trois équations différentielles qui représenteront les mouvements infiniment petits de l'éther feront immédiatement connaître les rapports entre les trois déplacements effectifs d'un atome d'éther mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et les différences entre leurs phases, ou, en d'autres termes, les rapports invariables des trois déplacements symboliques qui correspondront à ces déplacements effectifs. Cela posé, un rayon simple, lumineux ou évanescent, propagé dans une direction donnée, se trouvera complètement déterminé quand on connaîtra un seul des déplacements symboliques correspondants à ce rayon. Donc la détermination de deux rayons visibles et d'un rayon évanescent, propagés dans des directions données, pourra être réduite à la détermination de trois inconnues. On ne doit pas même excepter le cas où, le cristal devenant isophane, les deux espèces de rayons visibles se réduiraient à un seul, puisqu'alors les trois déplacements symboliques correspondants à un seul rayon seraient liés entre eux par une seule équation linéaire qui en laisserait deux indéterminés.

D'autre part, lorsqu'un rayon de lumière simple tombe sur la surface extérieure ou intérieure qui termine un cristal à un ou deux axes optiques, chacun des rayons réfléchis ou réfractés, visibles ou évanescents, répond à un mouvement simple caractérisé par une exponentielle qui, sur la surface réfléchissante ou réfringente, doit offrir la même valeur pour tous les rayons dont il s'agit. Ce principe permet de déduire immédiatement, de la direction du rayon incident supposée connue, non seulement les directions des normales aux plans des

ondes réfléchies ou réfractées, mais encore d'autres directions qu'on ne doit pas confondre avec celles-ci, savoir, les directions que suivent les rayons réfléchis ou réfractés, et qui sont généralement obliques par rapport aux plans dont il s'agit.

Cela posé, la recherche des lois suivant lesquelles un rayon simple sera réfléchi ou réfracté par la surface extérieure ou intérieure d'un cristal pourra être évidemment réduite à la détermination de six inconnues, trois de ces inconnues étant relatives aux rayons réfléchis, et trois autres aux rayons réfractés. Donc six équations de condition suffiront pour déterminer toutes les inconnues. Or, pour obtenir ces six équations, il suffira d'exprimer que la somme des déplacements symboliques de chaque espèce correspondante aux divers rayons propagés dans chaque milieu conserve la même valeur quand on passe d'un des milieux donnés à l'autre, non seulement sur la surface donnée, mais encore sur cette surface déplacée et transportée parallèlement à elle-même à une distance infiniment petite.

Dans le cas particulier où le milieu réfringent est un corps isophane, non doué du pouvoir rotatoire, les six équations trouvées reproduisent les formules de réflexion et de réfraction que j'ai obtenues en 1839, et qui supposent connu, outre l'indice de réfraction, un paramètre très petit, savoir, le coefficient d'ellipticité. Dans le cas général, les six équations trouvées renferment avec ce coefficient d'autres paramètres pareillement très petits, et, pour déduire de ces équations les valeurs des six inconnues, il convient de commencer par éliminer les valeurs des deux inconnues qui sont relatives aux rayons évanescents. Alors, en négligeant, comme on peut le faire sans erreur sensible, les quantités comparables aux paramètres dont nous venons de parler, on obtient quatre équations qui suffisent pour déterminer les quatre inconnues correspondantes aux rayons visibles réfléchis ou réfractés, et qui renferment, outre le coefficient d'ellipticité, deux autres coefficients très petits dépendants de la nature des rayons évanescents.

Parmi les formules auxquelles on parvient en opérant comme on vient de le dire, on doit remarquer celles qui concernent la réflexion

et la réfraction opérée par la surface extérieure des cristaux à un seul axe optique. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Les physiciens ont d'abord admis que les lois de la propagation de la lumière, dans les cristaux à un seul axe optique, dépendaient de deux paramètres, savoir, des indices de réfraction ordinaire et extraordinaire. Si l'on tient compte uniquement de ces deux paramètres, les surfaces des ondes correspondantes aux deux espèces de rayons propagés à travers le cristal seront la surface d'un ellipsoïde qui aura pour axe de révolution un diamètre de la sphère. C'est même en cela que consiste le théorème de Huygens. Mais les résultats que fournit le calcul ont une plus grande généralité. D'après les formules auxquelles j'arrive, la propagation de la lumière, dans un cristal à un axe optique, lors même que ce cristal ne possède pas le pouvoir rotatoire, peut dépendre d'un assez grand nombre de paramètres, et le nombre de ces paramètres s'élève encore à sept dans le cas où l'on réduit les équations aux dérivées partielles à l'homogénéité. Dans ce dernier cas, des deux rayons visibles, un seul qu'on doit appeler le *rayon ordinaire*, offre des vibrations perpendiculaires à l'axe optique, et la surface des ondes correspondantes à ce rayon ne peut être que la surface d'une sphère ou d'un ellipsoïde. Pour l'autre rayon, qu'on doit appeler *extraordinaire*, la surface des ondes est celle d'un sphéroïde de révolution, qui peut se réduire à un ellipsoïde. D'ailleurs les deux surfaces d'ondes correspondantes aux deux rayons visibles ont toujours, l'une et l'autre, le même axe de révolution.

En appliquant mes formules à la réflexion et à la réfraction opérées par un cristal taillé perpendiculairement à l'axe optique, mais non doué du pouvoir rotatoire, j'arrive à cette conclusion qu'un rayon incident, composé de molécules étherées dont les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence, est réfléchi et réfracté suivant les lois très simples données par Fresnel, pour le cas où le milieu réfringent est isophane. Seulement, si la surface des ondes correspondantes au rayon ordinaire était une surface d'ellipsoïde, l'angle de réfraction devrait être remplacé, dans les formules de Fresnel, par l'angle com-

pris entre l'axe optique et la normale au plan des ondes réfractées. Ajoutons que, si le rayon incident offre des vibrations comprises dans le plan d'incidence, les lois de la réflexion et de la réfraction seront fournies par des formules nouvelles, que l'on trouvera dans mon Mémoire, et qui sont distinctes, non seulement des formules de Fresnel, mais aussi de celles que j'ai données en 1839.

ANALYSE.

Supposons que, les points de l'espace étant rapportés à trois axes rectangulaires, un corps réfringent soit terminé par une surface plane qui coïncide avec le plan des yz , le corps lui-même étant situé du côté des x positives, et faisons tomber sur cette surface un rayon simple. La propagation du mouvement de l'éther donnera généralement naissance, d'une part, à deux rayons réfléchis, l'un visible, l'autre évanescent, d'autre part, à trois rayons réfractés, dont deux sont visibles. Cela posé, en adoptant les notations des pages 248 et 249, et posant, pour abrégé,

$$\begin{aligned} X &= \bar{\xi} + \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}' - \bar{\xi}'' & \mathcal{X} &= a(\bar{\xi} - \bar{\xi}_1) - a'\bar{\xi}' - a''\bar{\xi}'' \\ Y &= \bar{\eta} + \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}' - \bar{\eta}'' & \mathcal{Y} &= a(\bar{\eta} - \bar{\eta}_1) - a'\bar{\eta}' - a''\bar{\eta}'' \\ Z &= \bar{\zeta} + \bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}' - \bar{\zeta}'' & \mathcal{Z} &= a(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1) - a'\bar{\zeta}' - a''\bar{\zeta}'' \end{aligned}$$

on aura, pour $x = 0$,

$$(1) \quad \begin{cases} X = \bar{\xi}_e - \bar{\xi}_e, & Y = \bar{\eta}_e - \bar{\eta}_e, & Z = \bar{\zeta}_e - \bar{\zeta}_e, \\ \mathcal{X} = a_e \bar{\xi}_e - a_e \bar{\xi}_e, & \mathcal{Y} = a_e \bar{\eta}_e - a_e \bar{\eta}_e, & \mathcal{Z} = a_e \bar{\zeta}_e - a_e \bar{\zeta}_e. \end{cases}$$

D'ailleurs on aura rigoureusement

$$(2) \quad \frac{\bar{\xi}_e}{a_e} = \frac{\bar{\eta}_e}{v}, \quad \bar{\zeta}_e = 0$$

et sensiblement, sinon exactement,

$$(3) \quad \frac{\bar{\xi}_e}{a_e} = \frac{\bar{\eta}_e}{v}, \quad \bar{\zeta}_e = 0.$$

On peut ajouter que les quantités u_e, u'_e , dont la première sera positive, la seconde étant négative, offriront de très grandes valeurs numériques. Cela posé, en éliminant les inconnues relatives aux rayons évanescents, on tirera des équations (1) quatre formules qui pourront être sensiblement réduites aux suivantes

$$(4) \quad \begin{cases} Y = \lambda v X, & \mathcal{Y} = \mu v X, \\ Z = 0, & \mathcal{Z} = \nu v X, \end{cases}$$

$\lambda, \mu - 1$ et ν étant trois coefficients très petits dont les valeurs seront

$$(5) \quad \lambda = \frac{1}{u_e} + \frac{1}{u'_e}, \quad \mu - 1 = \frac{u_e}{u_e - u'_e} \left(\frac{u'_e \bar{n}'_e}{v \bar{v}'_e} - 1 \right), \quad \nu = \frac{u_e}{u_e - u'_e} \frac{\bar{v}'_e}{\bar{v}_e}.$$

Lorsque le milieu réfringent donné est isophane, alors, les formules (3) étant exactes, les formules (5) donnent

$$(6) \quad \mu = 1, \quad \nu = 0,$$

et les équations (4), réduites aux suivantes

$$(7) \quad Y = \lambda v X, \quad \mathcal{Y} = v X, \quad Z = 0, \quad \mathcal{Z} = 0,$$

coïncident avec celles que nous avons obtenues dans les précédents Mémoires, savoir, avec les formules (1), (2), (3) de la page 260.

Lorsque le milieu réfringent est un cristal à un axe optique, mais non doué du pouvoir rotatoire, alors, en supposant ce cristal taillé perpendiculairement à l'axe optique, on a

$$\bar{\xi}' = 0, \quad \bar{\eta}' = 0, \quad \bar{\zeta}' = 0, \quad \bar{v}'_e = 0,$$

par conséquent

$$\nu = 0,$$

et les formules (4) donnent

$$(8) \quad Y = \lambda v X, \quad \mathcal{Y} = \mu v X, \quad Z = 0, \quad \mathcal{Z} = 0.$$

Donc alors un rayon simple composé de molécules d'éther dont les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence continue d'être

réfléchi et réfracté suivant les lois données par les deux formules

$$(9) \quad Z = 0, \quad \mathcal{Z} = 0,$$

desquelles on tire

$$(10) \quad \bar{\xi}'_1 = \frac{u - u'}{u + u'} \bar{\xi}, \quad \bar{\xi}' = \frac{2u}{u + u'} \bar{\xi},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(11) \quad \bar{\xi}'_1 = \frac{\sin(\tau' - \tau)}{\sin(\tau' + \tau)} \bar{\xi}, \quad \bar{\xi}' = \frac{2 \sin \tau' \cos \tau'}{\sin(\tau' + \tau)} \bar{\xi},$$

τ, τ' étant les angles formés par la surface réfringente avec les plans des ondes incidentes et réfractées. Or les formules (11) coïncident précisément avec celles que Fresnel a obtenues pour le cas où, le milieu réfringent étant isophane, le rayon incident est polarisé dans le plan d'incidence.

Ajoutons que, si le rayon incident est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, les lois de la réflexion et de la réfraction à la surface du cristal donné se déduiront non plus des formules (11), mais des deux premières des formules (8).

470.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — Détermination des trois coefficients qui, dans la réflexion et la réfraction opérées par la surface extérieure d'un cristal, dépendent des rayons évanescents.

C. R., T. XXXI, p. 297 (2 septembre 1850).

Comme je l'ai remarqué dans la dernière séance, les six équations qui suffisent à la détermination des lois de la réflexion et de la réfraction opérées par la surface extérieure ou intérieure d'un corps transparent se réduisent à quatre, quand on élimine les inconnues correspondantes aux rayons évanescents. Ces quatre équations sont

analogues à celles que j'avais précédemment obtenues en supposant le corps isophane, et j'ai reconnu d'ailleurs que, pour passer de cette supposition particulière au cas général, il suffit de modifier légèrement trois des quatre équations relatives aux corps isophanes, en égalant leurs seconds membres non plus à zéro, mais aux produits d'un facteur unique par trois coefficients très petits. Ces coefficients peuvent être aisément calculés quand les déplacements effectifs des molécules d'éther sont exprimés en fonction de trois coordonnées x , y , z relatives à trois plans, dont le premier coïncide avec la surface réfringente, l'un des deux autres étant le plan d'incidence. Toutefois, quand le corps transparent cesse d'être isophane, quand il est, par exemple, un cristal à un ou à deux axes optiques, il est naturel de prendre pour plans coordonnés, non plus la surface réfringente et le plan d'incidence, mais des plans qui soient indépendants de cette surface et fixes de position par rapport aux axes optiques. Il importe de voir ce que deviennent alors les trois coefficients ci-dessus mentionnés, et comment ils varient avec les directions de la surface réfringente, du plan d'incidence et du rayon incident. Remarquons d'ailleurs que, ces coefficients devant être très petits, il suffira d'en obtenir des valeurs approchées qui renferment un petit nombre de chiffres. La détermination de ces valeurs est l'objet du présent Mémoire. Pour plus de simplicité, j'ai réduit les équations différentielles du mouvement de l'éther à l'homogénéité, en négligeant les termes du troisième ordre et des ordres supérieurs ou, ce qui revient au même, en réduisant à zéro, dans ces équations, des paramètres dont les expériences démontrent l'extrême petitesse. Je suis ainsi parvenu à des résultats qui me paraissent dignes de quelque attention, et que je vais indiquer en peu de mots.

Le coefficient d'ellipticité, désigné par la lettre λ , dépend uniquement de la direction de la surface réfringente, mais il varie généralement avec cette direction dans les cristaux à un ou à deux axes optiques. Il est d'ailleurs la différence entre deux termes qui correspondent aux deux rayons évanescents propagés dans l'air et dans le

cristal donné. Ajoutons que, de ces deux termes, le premier est constant, et que le second a pour carré, dans les cristaux à un axe optique, une fonction paire, entière et du second degré de a^2 , a étant le cosinus de l'angle formé avec l'axe optique par une droite normale à la surface réfringente.

Le coefficient désigné par $(\mu - 1)^e$ est le produit de deux facteurs. Le premier de ces facteurs est l'inverse de la somme des deux termes dont la différence fournit le coefficient d'ellipticité. Le second facteur dépend, non seulement de la direction de la surface réfringente, mais encore de la direction du plan d'incidence, et se réduit au cosinus de l'angle formé par la trace de ce plan sur la surface réfringente avec une certaine droite dont la direction se rapproche beaucoup de celle de la normale à la surface et varie avec elle.

Enfin, le coefficient désigné par ν^e est le produit de deux facteurs analogues à ceux dont nous venons de parler, les deux facteurs étant les mêmes de part et d'autre, à cela près que, pour obtenir le second facteur du coefficient ν^e , on doit remplacer la trace du plan d'incidence sur la surface réfringente par la perpendiculaire au plan d'incidence. C'est du moins la conclusion à laquelle on parvient dans le cas où l'angle d'incidence n'est pas très petit. Dans le cas contraire, on doit diviser le second facteur par l'unité augmentée d'un terme proportionnel à $\mu - 1$.

Ces propositions entraînent avec elles des conséquences importantes, par exemple celle-ci. Lorsque le cristal donné offre un seul axe optique, et que sa surface extérieure n'est pas perpendiculaire à cet axe, un rayon incident, renfermé dans le plan d'incidence, donne généralement naissance à des rayons réfléchis et réfractés dont la nature varie, tandis que ce plan tourne autour de la normale à la surface. Alors, si l'angle d'incidence se réduit à l'incidence principale, le rayon réfléchi sera renfermé dans un plan qui pourra ne pas coïncider avec le plan d'incidence, si celui-ci n'est pas parallèle à l'axe optique.

ANALYSE.

Supposons qu'un rayon simple de lumière, correspondant à une longueur d'ondulation désignée par λ , rencontre, sous l'incidence τ , la surface extérieure d'un corps transparent, par exemple d'un cristal à un ou à deux axes optiques, et rapportons les positions des divers points de l'espace à trois axes coordonnés rectangulaires, dont les directions soient liées invariablement, non plus à celles du plan d'incidence et de la surface du cristal, mais aux directions des axes optiques. Soient d'ailleurs

$$\xi_e, \eta_e, \zeta_e \quad \text{et} \quad \xi'_e, \eta'_e, \zeta'_e$$

les déplacements des molécules d'éther, mesurées parallèlement aux axes des x, y, z , pour les rayons évanescents propagés dans l'air et dans le cristal. Indiquons à l'ordinaire, à l'aide d'un trait superposé aux déplacements effectifs, les déplacements symboliques correspondants. Enfin soit

$$e^{i\pi(x+iy+iz)-st}$$

l'exponentielle propre à caractériser le mouvement simple correspondant au rayon incident. Lorsqu'on passera du rayon incident aux rayons réfléchis ou réfractés, on obtiendra des valeurs nouvelles, non seulement du coefficient u , comme dans le précédent Mémoire, mais encore des coefficients v, w , qui cesseront de se réduire constamment, l'un au produit

$$k \sin \tau = \frac{2\pi \sin \tau}{\lambda},$$

l'autre à zéro. Cela posé, soient

$$u, v, w \quad \text{et} \quad u', v', w'$$

ce que deviendront les coefficients

$$u, v, w$$

quand on passera du rayon incident aux deux rayons évanescents. Concevons d'ailleurs que les axes x, y, z forment : 1° avec la nor-

male à la surface du cristal; 2° avec la trace du plan d'incidence sur cette surface; 3° avec la perpendiculaire au plan d'incidence des angles dont les cosinus soient représentés, dans le premier cas, par a, b, c , dans le deuxième cas, par a', b', c' , dans le troisième cas, par a'', b'', c'' . On aura, non seulement

$$(1) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, & a'_1 a'_2 + b'_1 b'_2 + c'_1 c'_2 = 0, & a''_1 a''_2 + b''_1 b''_2 + c''_1 c''_2 = 0, \end{cases}$$

mais encore

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 u_e + b_1 v_e + c_1 w_e = a'_1 u'_e + b'_1 v'_e + c'_1 w'_e = k \sin \tau, \\ a_2 u_e + b_2 v_e + c_2 w_e = a'_2 u'_e + b'_2 v'_e + c'_2 w'_e = 0. \end{cases}$$

Ajoutons que, si l'on pose

$$(3) \quad k_e = \sqrt{u_e^2 + v_e^2 + w_e^2}, \quad k'_e = \sqrt{u'_e^2 + v'_e^2 + w'_e^2},$$

k_e, k'_e seront très grands par rapport au module de k . Donc les rapports $\frac{k}{k_e}, \frac{k}{k'_e}$ seront sensiblement nuls, et les formules (2) fourniront, pour les rapports

$$\frac{u_e}{k_e}, \frac{v_e}{k_e}, \frac{w_e}{k_e},$$

ainsi que pour les rapports

$$\frac{u'_e}{k'_e}, \frac{v'_e}{k'_e}, \frac{w'_e}{k'_e},$$

des valeurs α sensiblement proportionnelles aux différences

$$b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad c_1 a_2 - c_2 a_1, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

qui se réduiront elles-mêmes aux quantités

$$a, \quad b, \quad c$$

si l'on suppose, comme on peut le faire, les signes a, b, c choisis de manière que l'on ait

$$(4) \quad S(\pm ab, c) = 1.$$



Enfin, si la direction indiquée par les angles dont les cosinus sont a , b , c , est celle de la normale menée à la surface du cristal et prolongée à partir de cette surface dans l'intérieur du cristal, on conclura de ce qui précède que l'on a sensiblement

$$(5) \quad \frac{u_e}{k_e} = \frac{v_e}{k_e} = \frac{w_e}{k_e} = 1, \quad \frac{u'_e}{k'_e} = \frac{v'_e}{k'_e} = \frac{w'_e}{k'_e} = -1,$$

par conséquent

$$(6) \quad \frac{au_e + bv_e + cw_e}{k_e} = 1, \quad \frac{au'_e + bv'_e + cw'_e}{k'_e} = -1.$$

Cela posé, les valeurs des coefficients très petits désignés par λ , $\mu - 1$, ν dans le précédent Mémoire se réduiront à très peu près à celles que détermineront les formules

$$(7) \quad \lambda = \frac{1}{au_e + bv_e + cw_e} + \frac{1}{au'_e + bv'_e + cw'_e} = \frac{1}{k_e} - \frac{1}{k'_e},$$

$$(8) \quad \mu - 1 = \frac{k_e}{k_e + k'_e} \left(\frac{au'_e + bv'_e + cw'_e}{a'u'_e + b'v'_e + c'w'_e} \frac{a_e \bar{\xi}_e + b_e \bar{\eta}_e + c_e \bar{\zeta}_e}{a_e \bar{\xi}_e + b_e \bar{\eta}_e + c_e \bar{\zeta}_e} - 1 \right),$$

$$(9) \quad \nu = \frac{k_e}{k_e + k'_e} \frac{a_e \bar{\xi}_e + b_e \bar{\eta}_e + c_e \bar{\zeta}_e}{a_e \bar{\xi}_e + b_e \bar{\eta}_e + c_e \bar{\zeta}_e},$$

et l'on devra d'ailleurs, dans les diverses formules de ce Mémoire, substituer partout à la lettre ν le produit $k \sin \tau$. Faisons voir maintenant comment on peut réduire les seconds membres des formules (7), (8), (9) à des fonctions de l'angle d'incidence τ , et des neuf quantités a , b , c , a' , b' , c' , a'' , b'' , c'' , dont six pourront être éliminées en vertu des équations (1).

Supposons un moment que le rayon caractérisé par l'exponentielle

$$e^{hx+iy+wz-st}$$

et par les déplacements symboliques $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ se propage, non plus dans l'air, mais dans le cristal donné. Les équations différentielles des mouvements infiniment petits de l'éther fourniront, entre ces dépla-

cements symboliques, trois équations linéaires et homogènes qui renfermeront, avec $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ les coefficients u , v , w , s .

On pourra d'ailleurs déduire de ces équations linéaires : 1° en éliminant $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, une *équation caractéristique*

$$(10) \quad F(s, u, v, w) = 0,$$

en vertu de laquelle s deviendra fonction de u , v , w ; 2° en éliminant s , les rapports de $\bar{\eta}$ et $\bar{\zeta}$ à $\bar{\xi}$ exprimés en fonctions de u , v , w , en sorte qu'on aura

$$(11) \quad \frac{\bar{\xi}}{\bar{\nu}} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\nu}} = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\psi}},$$

$\bar{\nu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\psi}$ étant trois fonctions déterminées de u , v , w . Remarquons, en outre, que l'équation (10) sera généralement du troisième degré par rapport à s^2 et que, en conséquence, la résolution de cette équation fournira trois valeurs de s^2 . A ces trois valeurs correspondront trois systèmes de valeurs des fonctions $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\psi}$, et aussi trois rayons simples de natures diverses. Ces trois rayons seront les deux rayons visibles et le rayon évanescant.

Considérons maintenant, d'une manière spéciale, le rayon évanescant, et soient

$$u'_e, v'_e, w'_e; \quad \bar{\xi}_e, \bar{\eta}_e, \bar{\zeta}_e; \quad \bar{\nu}'_e, \bar{\nu}'_e, \bar{\psi}'_e$$

ce que devient, pour ce rayon, les coefficients et fonctions

$$u, v, w; \quad \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}; \quad \bar{\nu}, \bar{\nu}, \bar{\psi}.$$

Les formules (10) et (11) donneront

$$(12) \quad F(s, u'_e, v'_e, w'_e) = 0,$$

$$(13) \quad \frac{\bar{\xi}_e}{\bar{\nu}'_e} = \frac{\bar{\eta}_e}{\bar{\nu}'_e} = \frac{\bar{\zeta}_e}{\bar{\psi}'_e}.$$

D'ailleurs, dans une première approximation, les équations différentielles des mouvements infiniment petits peuvent être supposées homogènes; et, lorsqu'on admet cette hypothèse, comme nous le ferons ici, la fonction de s , u , v , w , représentée par $F(s, u, v, w)$,



devient elle-même homogène, et l'on peut encore supposer homogènes les fonctions de u, v, w représentées par $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$. Cela étant, et K_e ayant la valeur que détermine la seconde des formules (3), l'équation (12) donnera

$$(14) \quad F\left(\frac{s}{K_e}, \frac{u_e}{K_e}, \frac{v_e}{K_e}, \frac{w_e}{K_e}\right) = 0;$$

puis, en combinant l'équation (14) avec la seconde des formules (5), on trouvera sensiblement

$$(15) \quad F\left(\frac{s}{K_e}, -a, -b, -c\right) = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(16) \quad F\left(\frac{s}{K_e}, a, b, c\right) = 0,$$

attendu que, dans l'hypothèse admise, on a généralement

$$F(s, -u, -v, -w) = F(s, u, v, w).$$

L'équation (15) ou (16), résolue par rapport à $\frac{s}{K_e}$, fournira, pour ce rapport, et par suite pour $\frac{1}{K_e}$, trois valeurs dont l'une sera très voisine de zéro. Cette dernière est précisément celle qui devra être employée dans les formules (7), (8) et (9).

Concevons à présent que l'on combine les formules (8) et (9) avec la formule (13); on trouvera

$$(17) \quad \mu - 1 = \frac{k_e}{k_e + K_e} \left(\frac{a u_e + b v_e + c w_e}{a u_e + b v_e + c w_e} \frac{a \vartheta_e + b \vartheta'_e + c \vartheta''_e}{a \vartheta_e + b \vartheta'_e + c \vartheta''_e} - 1 \right)$$

et

$$(18) \quad \nu = \frac{k_e}{k_e + K_e} \frac{a \vartheta_e + b \vartheta'_e + c \vartheta''_e}{a \vartheta_e + b \vartheta'_e + c \vartheta''_e}.$$

D'ailleurs on aura

$$\begin{aligned} & a \vartheta_e + b \vartheta'_e + c \vartheta''_e \\ &= a u_e + b v_e + c w_e + a_e (\vartheta_e - u_e) + b_e (\vartheta'_e - v_e) + c_e (\vartheta''_e - w_e); \end{aligned}$$

puis on en conclura, eu égard à la première des formules (2),

$$(19) \quad \begin{cases} a_e \vartheta_e + b_e \vartheta'_e + c_e \vartheta''_e \\ = k \sin \tau + \frac{a_e (\vartheta_e - u_e) + b_e (\vartheta'_e - v_e) + c_e (\vartheta''_e - w_e)}{K_e} k_e. \end{cases}$$

Enfin, comme la formule (13) serait réductible à la suivante

$$\frac{\vartheta_e}{u_e} = \frac{\vartheta'_e}{v_e} = \frac{\vartheta''_e}{w_e},$$

si au cristal donné on substituait un corps isophane, on pourra généralement supposer $\vartheta_e, \vartheta'_e, \vartheta''_e$ réduits à des fonctions homogènes de u_e, v_e, w_e qui soient, non seulement du premier degré, mais encore fort peu différentes de u_e, v_e, w_e . Cela posé, en ayant égard aux équations (1), (2), (5), et en nommant $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ce que deviennent $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ quand on y remplace u, v, w par a, b, c , on tirera sensiblement des formules (17) et (18),

$$(20) \quad \mu - 1 = - \frac{k_e K_e}{k_e + K_e} \frac{a_e \mathfrak{A} + b_e \mathfrak{B} + c_e \mathfrak{C}}{k \sin \tau},$$

$$(21) \quad \nu = - \frac{k_e K_e}{k_e + K_e} \frac{a_e \mathfrak{A} + b_e \mathfrak{B} + c_e \mathfrak{C}}{k \sin \tau - (a_e \mathfrak{A} + b_e \mathfrak{B} + c_e \mathfrak{C}) K_e}.$$

Si, pour abrégér, on pose

$$(\mu - 1) k \sin \tau = m, \quad \nu k \sin \tau = n,$$

m, n seront précisément les coefficients très petits désignés dans le précédent Mémoire par les produits $(\mu - 1)v, \nu v$, et l'on aura

$$(22) \quad m = - \frac{k_e K_e}{k_e + K_e} (a_e \mathfrak{A} + b_e \mathfrak{B} + c_e \mathfrak{C}),$$

$$(23) \quad n = - \frac{k_e K_e}{k_e + K_e} \frac{a_e \mathfrak{A} + b_e \mathfrak{B} + c_e \mathfrak{C}}{1 + \left(1 + \frac{K_e}{k_e}\right) \frac{m}{k \sin \tau}}.$$

Lorsque l'angle d'incidence τ n'est pas très petit, la formule (23) se réduit sensiblement à la suivante :

$$(24) \quad n = - \frac{k_e K_e}{k_e + K_e} (a_e \mathfrak{A} + b_e \mathfrak{B} + c_e \mathfrak{C}).$$



Mais cette réduction ne pourra plus être admise si τ est assez petit pour que le produit $k \sin \tau$ soit comparable à la valeur numérique de m .

Il est bon d'observer que les quantités ici désignées par λ , ψ , ϱ diffèrent généralement très peu des cosinus a , b , c des angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par une droite normale à la surface du cristal donné. Par suite, si l'on pose

$$\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \psi^2 + \varrho^2},$$

ϱ sera voisin de l'unité, et la droite qui formera, avec les mêmes demi-axes, les angles dont les cosinus seront

$$\frac{\lambda}{\varrho}, \quad \frac{\psi}{\varrho}, \quad \frac{\varrho}{\varrho},$$

aura une direction très rapprochée de celle de la normale; par suite encore, si l'on pose

$$h = a\lambda + b\psi + c\varrho, \quad h_1 = a_1\lambda + b_1\psi + c_1\varrho, \quad h_2 = a_2\lambda + b_2\psi + c_2\varrho,$$

les quantités h , h_1 , h_2 , qui représenteront sensiblement les cosinus des angles formés par la nouvelle droite avec cette normale, avec la trace du plan d'incidence sur la surface réfringente et avec la perpendiculaire au plan d'incidence, seront trois quantités très voisines, la première de l'unité, les deux autres de zéro. D'ailleurs les formules (22) et (23) donneront sensiblement

$$(25) \quad m = -\frac{k_e k'_e}{k_e + k'_e} h_1,$$

$$(26) \quad n = -\frac{k_e k'_e}{k_e + k'_e} \frac{h_2}{1 + \left(1 + \frac{k'_e}{k_e}\right) \frac{m}{k \sin \tau}},$$

et l'on aura, à très peu près, pour des valeurs finies de l'angle τ ,

$$(27) \quad n = -\frac{k_e k'_e}{k_e + k'_e} h_2.$$

Les valeurs de λ , m , n , fournies par les équations (7), (25) et (27).

sont indépendantes de l'angle d'incidence τ . Les coefficients de h , h_1 , h_2 , dans les deux dernières, sont, en outre, ainsi que λ , indépendants de la direction du plan d'incidence, et dépendent uniquement de la direction suivant laquelle on a taillé le cristal donné pour obtenir la surface réfringente.

Si le cristal donné offre un seul axe optique, la fonction désignée par $F(s, a, v, \omega)$ deviendra une fonction homogène de s^2 , a^2 et $v^2 + \omega^2$. Par suite, la valeur de $\frac{1}{k_e}$, tirée de la formule (16), sera réduite à une fonction de a . Alors aussi l'on aura

$$(28) \quad \frac{\bar{v}'_e}{v'_e} = \frac{\bar{v}'_e}{v'_e}.$$

On pourra donc supposer

$$v'_e = a'_e, \quad v''_e = v'_e, \quad \lambda = a, \quad \psi = b,$$

et l'on en conclura

$$h_1 = a_1(\lambda - a), \quad h_2 = a_2(\lambda b - a),$$

en sorte que les formules (25) et (26) donneront

$$(29) \quad \begin{cases} m = -\frac{k_e k'_e}{k_e + k'_e} (\lambda b - a) a_2, \\ n = -\frac{k_e k'_e}{k_e + k'_e} \frac{(\lambda - a) a_1}{1 + \left(1 + \frac{k'_e}{k_e}\right) \frac{m}{k \sin \tau}}. \end{cases}$$

En conséquence, dans les cristaux à un axe optique, les coefficients de λ , m , n sont liés par les formules (7) et (29) aux quantités a , a' , a'' , τ , c'est-à-dire à l'angle d'incidence et aux angles formés avec l'axe optique : 1° par la normale à la surface réfringente du cristal; 2° par la trace du plan d'incidence sur cette surface; 3° par la perpendiculaire au plan d'incidence. Ajoutons que les quantités k'_e , λ peuvent facilement être exprimées en fonctions de a et des sept coefficients que renferment, dans les cristaux à un axe optique, les équations des mouvements infiniment petits de l'éther, réduites à l'homogé-

néité. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un nouvel article.

471.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Mémoire sur les équations différentielles du mouvement de l'éther dans les cristaux à un et à deux axes optiques.*

C. R., T. XXXI, p. 338 (9 septembre 1850).

La méthode dont je me suis servi pour établir les équations différentielles des mouvements infiniment petits de l'éther dans un corps isopane peut s'appliquer aussi à la recherche de ces équations, quand le corps, cessant d'être isopane, se transforme, par exemple, en un cristal doublement réfringent. On doit surtout remarquer le cas où l'on peut tracer dans ce cristal trois plans principaux et rectangulaires entre eux, dont chacun le divise en deux parties symétriques. Les équations différentielles que j'obtiens alors renferment un grand nombre de paramètres, qui sont encore au nombre de quinze, quand on réduit ces équations à l'homogénéité. Mais, si des trois coefficients déterminés dans la séance précédente, et relatifs aux rayons évanescents, le dernier est constamment nul, les quinze paramètres dont il s'agit seront réduits à neuf, et l'équation de la surface des ondes renfermera six paramètres seulement. Alors le cristal admettra généralement, comme l'expérience le montre, deux axes optiques renfermés dans l'un des plans principaux. Il y a plus : si le cristal est symétrique autour d'un axe, celui-ci sera l'axe optique unique, et dans ce cas les neuf paramètres ci-dessus mentionnés se réduiront à quatre, trois d'entre eux étant renfermés dans l'équation de la surface des ondes, réduite elle-même au système d'un ellipsoïde et d'une sphère, ou plus généralement de deux ellipsoïdes qui offriront le même axe de révolution.

J'ajouterai ici une remarque qui n'est pas sans intérêt. Supposons

que l'on fasse tomber un rayon simple de lumière sur la surface extérieure d'un cristal doué d'un seul axe optique et taillé parallèlement à cet axe. Supposons d'ailleurs le plan d'incidence perpendiculaire à l'axe optique, et le rayon incident renfermé dans le plan d'incidence, ou, en d'autres termes, polarisé perpendiculairement à ce plan. En vertu des formules obtenues dans la séance précédente, ce rayon devrait être, sous l'incidence principale, transformé par la réflexion en un rayon renfermé ou non dans le plan d'incidence, suivant que le dernier des coefficients correspondants aux rayons évanescents sera ou ne sera pas égal à zéro. J'ai été curieux de savoir si, dans le cas indiqué, le rayon réfléchi sortait effectivement du plan d'incidence et s'il éprouvait une déviation sensible. Les expériences que nous avons exécutées, M. Soleil fils et moi, pour résoudre cette question, en appliquant à cette recherche le goniomètre de M. Babinet, muni de prismes de Nicol, nous ont convaincus que la déviation, si elle existe, est très faible, et ne peut guère s'élever au delà d'un degré, ou même d'un demi-degré. Les réflexions opérées sous l'incidence principale, et pour des rayons renfermés dans le plan d'incidence, par des surfaces quelconques de cristaux à un ou à deux axes optiques, nous ont paru aussi ne pas produire de déviation sensible. Si j'avais à ma disposition un appareil qui permit d'atteindre une grande précision, spécialement l'appareil de M. Jamin, je n'hésiterais pas à en user pour répéter nos expériences. Car, ainsi que je l'expliquerai plus en détail dans un autre Mémoire, il est très important, sous le rapport théorique, de savoir si la déviation existe, ou si elle n'offre qu'une valeur qui puisse être négligée dans les calculs.

ANALYSE.

Supposons qu'un mouvement infiniment petit du fluide étheré se propage dans un cristal. Représentons, au bout du temps t , par ξ , η , ζ les déplacements d'une molécule d'éther, mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires des x , y , z , et posons, pour abréger,

$$s = D_x, \quad u = D_y, \quad v = D_z, \quad w = D_t.$$

D'après ce qui a été dit dans un précédent Mémoire, les équations différentielles d'un mouvement infiniment petit de l'éther pourront être supposées réduites à la forme

$$(1) \quad s^2 \xi = \alpha, \quad s^2 \eta = \beta, \quad s^2 \zeta = \gamma,$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires et homogènes de ξ, η, ζ , qui seront en même temps des fonctions entières de u, v, w , composées d'un nombre fini ou infini de termes. De plus, si l'on nomme ε le déplacement d'une molécule d'éther, mesuré parallèlement à un nouvel axe qui forme avec ceux des x, y, z des angles dont les cosinus soient a, b, c , on aura

$$(2) \quad \varepsilon = a\xi + b\eta + c\zeta;$$

par conséquent, en vertu des formules (1),

$$(3) \quad s^2 \varepsilon = \delta,$$

la valeur de δ étant donnée par la formule

$$(4) \quad \delta = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Ajoutons que les équations (1) et (3) continueront de subsister si l'on y considère les lettres $\xi, \eta, \zeta, \varepsilon$ comme représentant, non plus des déplacements effectifs des molécules éthérées, mais les déplacements symboliques correspondants, et même, si l'on y considère, en outre, s, u, v, w comme représentant, non plus les symboles de dérivation D, D_1, D_2 , mais les coefficients des variables indépendantes dans l'exponentielle caractéristique

$$e^{i(u x + v y + w z - t)}$$

correspondante à un mouvement simple de l'éther.

Si maintenant on veut attribuer au cristal donné la faculté de propager de la même manière et suivant les mêmes lois les mouvements simples de l'éther de part et d'autre de chacun des trois plans coordonnés, il suffira évidemment d'assigner à la fonction de $a, b, c, u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ désignée par δ une forme telle que la valeur de ε déterminée

par la formule (3) demeure invariable après un changement opéré dans le sens suivant lequel se mesurent les coordonnées parallèles à un seul axe, ou, ce qui revient au même, dans le signe de ces coordonnées. Mais, si l'on change, par exemple, le signe des coordonnées parallèles à l'axe des x , on devra changer a en $-a$, u en $-u$, et ξ en $-\xi$. Donc un tel changement devra laisser inaltérable la valeur de δ , et cette valeur ne devra pas non plus être altérée, si l'on change simultanément ou b en $-b$, v en $-v$, η en $-\eta$, ou bien c en $-c$, w en $-w$, ζ en $-\zeta$.

D'autre part, la valeur de δ , dans l'équation (3), est nécessairement une fonction linéaire homogène, non seulement de a, b, c , mais encore de ξ, η, ζ . Donc elle se compose de neuf parties respectivement égales aux produits

$$(5) \quad \begin{cases} a\xi, & b\xi, & c\xi, \\ a\eta, & b\eta, & c\eta, \\ a\zeta, & b\zeta, & c\zeta, \end{cases}$$

multipliés par neuf fonctions entières de u, v, w . Or, des neuf produits compris dans le Tableau (5), trois, savoir,

$$a\xi, \quad b\eta, \quad c\zeta,$$

restent invariables quand on change simultanément le sens dans lequel se mesurent les coordonnées parallèles à un axe quelconque. Donc, pour que la condition ci-dessus énoncée soit remplie, il faudra que, dans la valeur de δ , ces trois produits se trouvent multipliés par trois fonctions paires de u, v, w . Quant aux deux produits

$$b\xi, \quad c\eta,$$

ils changeront de signe quand on changera les signes des coordonnées parallèles à l'axe des y ou des z , mais resteront invariables quand on changera les signes des coordonnées parallèles à l'axe des x . Donc, dans la valeur de δ , ces produits devront être multipliés par des fonctions paires de u , qui soient en même temps des fonctions impaires de v et de w . En d'autres termes, les produits $b\xi, c\eta$ devront être, dans la valeur de δ , multipliés par le produit vw et par des fonctions

paire de u, v, w . Pareillement on devra, dans la valeur de s , multiplier les produits

$$c\xi, a\zeta$$

par le produit wu et par des fonctions paires de u, v, w ; enfin les produits

$$a\eta, b\xi$$

par le produit uv et par des fonctions paires de u, v, w . Donc, pour que le cristal donné ait la faculté de propager de la même manière et suivant les mêmes lois les mouvements simples de l'éther de part et d'autre de chacun des plans coordonnés, il suffira que la valeur de s soit de la forme

$$(6) \quad \begin{cases} s = a\xi\xi + b\eta\eta + c\zeta\zeta \\ \quad + uv(b\eta\xi + c\zeta\eta) + wu(c\eta\xi + a\zeta\eta) + uv(a\eta\eta + b\zeta\zeta), \end{cases}$$

$\xi, \eta, \zeta, \eta, \xi, \zeta, \eta, \xi, \zeta$ étant des fonctions entières et paires de u, v, w , par conséquent des fonctions entières de u^2, v^2, w^2 .

La valeur de s étant ainsi déterminée, on pourra en conclure immédiatement la forme que devront prendre, dans l'hypothèse admise, les équations (1). Pour y parvenir, il suffira de réduire, dans la formule (3), jointe aux équations (4) et (6), deux des cosinus a, b, c à zéro et le troisième à l'unité. En prenant successivement pour celui-ci a, b et c , on obtiendra les trois équations

$$s^2\xi = \xi\xi + uv\eta\eta + uw\zeta\zeta, \quad \dots,$$

que l'on peut écrire comme il suit :

$$(7) \quad \begin{cases} (s^2 - \xi) \xi = u(v\eta\eta + w\zeta\zeta), \\ (s^2 - \eta) \eta = v(w\eta\xi + u\zeta\zeta), \\ (s^2 - \zeta) \zeta = w(u\eta\xi + v\zeta\eta). \end{cases}$$

Telles sont les formules qui paraissent devoir représenter généralement le mouvement de la lumière dans un cristal divisible en deux parties symétriques par l'un quelconque de trois plans rectangulaires entre eux.

Si l'on veut réduire à l'homogénéité les équations (7), comme on peut généralement le faire dans une première approximation, les coefficients

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{R}'$$

réduits à des constantes, représenteront six paramètres distincts, tandis que les coefficients ξ, η, ζ , réduits à des fonctions linéaires et homogènes de u^2, v^2, w^2 , renfermeront neuf autres paramètres. Donc alors les équations (7) renfermeront quinze paramètres. Ces quinze paramètres peuvent d'ailleurs être réduits à neuf dans les équations (7) et à six dans l'équation de la surface des ondes, sous la condition que nous avons indiquée dans le préambule, et que nous examinerons de nouveau dans un autre article.

472.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE.

C. R., T. XXXI, p. 422 (16 septembre 1850).

M. Augustin Cauchy présente à l'Académie un Mémoire *sur la réflexion et la réfraction opérées par la surface extérieure d'un cristal à un ou deux axes optiques*, et démontre la propriété que possède une telle surface de transformer, sous certaines conditions, un rayon simple renfermé dans le plan d'incidence et réfléchi sous l'incidence principale, en un rayon doué de la polarisation elliptique.

473.

C. R., T. XXXI, p. 509 (7 octobre 1850).

M. Augustin Cauchy dépose sur le bureau un exemplaire de son Mémoire *sur les lois de la réflexion et de la réfraction opérées par la sur-*

face extérieure d'un cristal à un ou à deux axes optiques. Ce Mémoire doit paraître dans le XXIII^e Volume des *Mémoires de l'Académie*.

474.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Mémoire sur un nouveau phénomène de réflexion.*

C. R., T. XXXI, p. 532 (14 octobre 1850).

Supposons qu'un corps transparent étant terminé par une surface plane, on fasse tomber sur cette surface un rayon simple de lumière dont le plan de polarisation soit perpendiculaire au plan d'incidence. Si le corps donné est isopane, le rayon réfléchi sera lui-même polarisé rectilignement et perpendiculairement au plan d'incidence. Mais, en vertu des principes exposés dans un précédent Mémoire, il en sera autrement si le corps, cessant d'être isopane, est, par exemple, un cristal à un ou deux axes optiques. Alors, en effet, un rayon doué de la polarisation rectiligne et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence pourra être transformé par la seule réflexion en un rayon polarisé dans un nouveau plan, ou même doué de la polarisation elliptique. Ce singulier phénomène subsiste d'ailleurs sous certaines conditions que le calcul met en évidence; et, en admettant, comme l'expérience l'indique (page 281), que le dernier des coefficients relatifs aux rayons évanescents s'évanouit, j'établis la proposition suivante :

THÉORÈME. — *La réflexion opérée par la surface extérieure d'un cristal à un ou à deux axes optiques transforme un rayon doué de la polarisation rectiligne, et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, en un rayon polarisé lui-même perpendiculairement à ce plan, quand les deux rayons réfractés se réduisent à un seul, ou bien encore quand le plan d'incidence renferme les directions des vibrations lumineuses dans l'un des rayons réfractés. Dans toute autre hypothèse, la réflexion trans-*

forme un rayon polarisé rectilignement dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence en un rayon polarisé dans un nouveau plan, ou même doué de la polarisation elliptique.

Le phénomène sera surtout sensible pour l'incidence correspondante au minimum d'amplitude des vibrations de l'éther mesurées dans le rayon réfléchi parallèlement au plan d'incidence. Alors l'angle d'incidence, réduit à ce qu'on peut appeler l'*incidence principale*, aura pour tangente une quantité peu différente du rapport entre les sinus des angles formés par la surface réfringente avec les plans des ondes incidentes et réfractées.

Des expériences que nous avons exécutées, M. Soleil fils et moi, en faisant usage de l'appareil de M. Jamin, nous ont paru confirmer les prévisions de la théorie, et manifester la polarisation elliptique dans le cas énoncé. Celles que nous avons dû considérer comme les plus concluantes ont été faites avec la lumière solaire.

Mon Mémoire contient les formules qui fournissent les lois du phénomène. Il paraîtra prochainement dans le *Recueil des Mémoires de l'Académie*.

475.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — *Note relative aux rayons réfléchis sous l'incidence principale, par la surface extérieure d'un cristal à un axe optique (communication verbale).*

C. R., T. XXXI, p. 666 (11 novembre 1850).

Supposons qu'un cristal à un axe optique étant terminé par une surface plane on fasse tomber sur cette surface un rayon simple de lumière, dont le plan de polarisation soit perpendiculaire au plan d'incidence. On pourra déduire de la théorie exposée dans mes précédents Mémoires l'*incidence principale*, c'est-à-dire l'incidence pour laquelle la lumière réfléchie et polarisée perpendiculairement au plan



d'incidence devient un minimum. C'est ce que j'ai fait; et, en opérant ainsi, je suis arrivé à cette conclusion remarquable, déjà indiquée par des expériences de M. Seebeck, que dans le cas où la surface extérieure du cristal étant parallèle à l'axe optique, le plan d'incidence est perpendiculaire à cet axe, l'incidence principale a pour tangente l'indice de réfraction ordinaire. De plus, en admettant, comme l'expérience porte à le croire, que le coefficient d'extinction du rayon évanescant est très considérable et indépendant de l'angle formé par la surface réfléchissante avec l'axe optique, et en négligeant les carrés des paramètres très petits compris dans les équations du mouvement de l'éther, j'ai obtenu, pour les variations de l'incidence principale, une fonction homogène du second degré des cosinus des trois angles formés par l'axe optique avec la normale à la surface réfléchissante, la trace de cette surface sur le plan d'incidence et la normale au plan d'incidence. Enfin, en admettant, comme l'expérience l'indique encore, que cette fonction devient un maximum ou un minimum quand, le plan d'incidence étant confondu avec la section principale, la surface réfléchissante est perpendiculaire ou parallèle à l'axe optique, j'obtiens une formule qui s'accorde très bien avec les résultats d'observation donnés par M. Seebeck, dans un Mémoire que renferment les *Annales de Poggendorff*, et que notre confrère M. Regnault a rappelé dans ses Leçons au Collège de France.

476.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — Note sur la réflexion d'un rayon de lumière polarisée à la surface extérieure d'un corps transparent.

C. R., T. XXXI, p. 766 (2 décembre 1850).

Supposons qu'un corps transparent étant terminé par une surface plane on fasse tomber sur cette surface, et sous une incidence quelconque, un rayon de lumière doué de la polarisation rectiligne. Sup-

posons encore que le plan de polarisation coïncide avec le plan d'incidence, ou lui soit perpendiculaire. Si le corps transparent est isophane, le rayon réfléchi sera polarisé dans le même plan que le rayon incident. Ce résultat de l'expérience se trouve, comme l'on sait, d'accord avec la théorie que j'ai donnée. Celle-ci conduit, en outre, à la proposition générale que je vais transcrire.

THÉORÈME. — Le rayon incident étant supposé, comme ci-dessus, polarisé dans le plan d'incidence ou dans un plan perpendiculaire, si le corps transparent donné, au lieu d'être isophane, est un cristal à un ou à deux axes optiques, le rayon réfléchi pourra être généralement considéré comme résultant de la superposition de deux autres rayons polarisés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan. L'un de ces deux derniers ne disparaîtra que dans certains cas spéciaux indiqués par les formules.

Si, pour fixer les idées, on suppose que le corps transparent soit un cristal à un axe optique, qui remplisse les conditions indiquées dans la Note du 11 novembre, les deux rayons qui, d'après le théorème, concourront par leur superposition à former le rayon réfléchi, subsisteront l'un et l'autre, à moins que le plan d'incidence ne soit ou parallèle ou perpendiculaire à la section principale.

Ces conclusions sont conformes à des expériences que M. Soleil fils a faites et à d'autres que nous avons exécutées ensemble avec le goniomètre de M. Babinet muni de prismes de Nicol.

477.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — Note sur les vibrations transversales de l'éther et sur la dispersion des couleurs.

C. R., T. XXXI, p. 842 (23 décembre 1850).

L'un de nos confrères, M. Arago, m'a exprimé le désir de voir la théorie mathématique des divers phénomènes lumineux, et en parti-



culier celle de la dispersion des couleurs, présentée sous une forme simple et facile à saisir. A la vérité, cette dernière théorie se trouve comprise dans les formules que renferme mon Mémoire sur la dispersion, et que j'ai développées dans les Leçons données au Collège de France les 19 et 22 juin 1830. Mais il importait d'en rendre l'étude aisément accessible à tous les amis des sciences. Ayant cherché les moyens de satisfaire ainsi au vœu de notre illustre confrère, j'ai été assez heureux pour réduire à quelques notions et propositions élémentaires, l'analyse à l'aide de laquelle j'ai démontré, d'une part, la légitimité de l'hypothèse des vibrations transversales, attribuées par Young et Fresnel au fluide étheré; d'autre part, les lois de la dispersion des couleurs. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Suivant Young et Fresnel, lorsqu'un rayon de lumière doué de la polarisation rectiligne se propage dans un milieu transparent et isophane, un atome d'éther primitivement situé sur la direction du rayon exécute des vibrations *transversales*, c'est-à-dire perpendiculaires à cette direction et parallèles à un certain axe fixe. En vertu de ces vibrations, le déplacement de chaque atome est proportionnel au sinus, ou bien encore au cosinus d'un angle variable appelé *phase*, et représenté par une fonction linéaire du temps et de la distance qui sépare l'atome d'un plan fixe perpendiculaire au rayon donné. Alors les atomes dont les déplacements sont les mêmes au même instant appartiennent à des plans équidistants et parallèles au plan fixe, qui divisent l'espace en tranches ou *ondes planes*; et, si l'on prend pour axe des abscisses une droite parallèle à la direction du rayon, les coefficients du temps et de l'abscisse d'un atome dans la phase seront équivalents, au signe près, aux rapports qu'on obtient quand on divise la circonférence dont le rayon est l'unité, par la *durée d'une vibration atomique* et par l'*épaisseur d'une onde plane*, ou, en d'autres termes, par la *longueur d'une ondulation*.

D'autre part, un système d'atomes sera ce qu'on a nommé un *système réticulaire*, si ces atomes sont distribués à égales distances les uns des autres sur trois systèmes de droites parallèles aux intersections res-

pectives de trois plans fixes. Alors, autour d'un premier atome, les autres pris deux à deux coïncideront avec les extrémités de droites dont le premier sera le milieu, et deviendront, par rapport à celui-ci, ce qu'on peut appeler des *atomes conjugués*.

Cela posé, on établira sans peine la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si l'on imprime à un système réticulaire d'atomes des vibrations transversales et perpendiculaires à un axe fixe, qui constituent un mouvement par ondes planes, non seulement le déplacement d'un atome variera généralement quand on passera de cet atome à l'un quelconque de deux atomes conjugués, mais, de plus, les variations du déplacement correspondantes aux deux atomes conjugués formeront une somme équivalente, au signe près, au double produit du déplacement du premier atome par le sinus verse de la variation de la phase.*

De ce premier théorème combiné avec le principe de d'Alembert, on déduit immédiatement cette autre proposition :

THÉORÈME II. — *Un mouvement vibratoire infiniment petit, à vibrations transversales et par ondes planes, est du nombre de ceux que peut acquiescir un système réticulaire d'atomes sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle et situés à égales distances les uns des autres sur trois systèmes de droites parallèles à trois axes rectangulaires.*

Ce second théorème suffit pour établir la légitimité de l'hypothèse des vibrations transversales de l'éther dans les rayons lumineux.

Enfin, dans un mouvement à vibrations transversales du système réticulaire, la force capable de produire le mouvement observé de chaque atome se réduit, au signe près, au produit du déplacement de cet atome par le carré du coefficient du temps dans la phase; et si la résultante des actions exercées sur ce premier atome par deux atomes conjugués est projetée sur la direction du déplacement, la projection sera proportionnelle, d'une part, au déplacement du premier atome, d'autre part, au sinus verse de la variation que subit la phase dans le passage du premier atome à l'un des deux autres; d'ailleurs, cette



variation croît proportionnellement au coefficient de l'abscisse dans la phase. Donc, en vertu du principe de d'Alembert, le coefficient du temps et le coefficient de l'abscisse dans la phase sont liés entre eux par une équation qui fait dépendre la *durée des vibrations atomiques* de la *longueur d'ondulation*. Cette équation est précisément celle qui renferme la théorie du phénomène de la dispersion, et qui fait connaître les lois de ce phénomène.

478.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur les fonctions irrationnelles.*

C. R., T. XXXII, p. 68 (20 janvier 1851).

Soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point mobile Z , et posons

$$z = x + iy,$$

i étant une racine carrée de -1 . Le point Z sera complètement déterminé quand on connaîtra la *coordonnée imaginaire* z . Soient encore

$$u, v, w, \dots$$

N variables assujetties à vérifier N équations simultanées

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \dots,$$

U, V, W, \dots étant des fonctions toujours continues de z, u, v, w, \dots . Alors

$$u, v, w, \dots$$

seront des *fonctions irrationnelles* de z , dont chacune, u par exemple, offrira généralement, pour une valeur donnée de z , plusieurs valeurs distinctes u_1, u_2, u_3, \dots .

Soit u_g l'une quelconque de ces valeurs; u_g sera une fonction de z , qui variera, par degrés insensibles, avec la variable z , en demeurant complètement déterminée, tant que z n'atteindra pas une valeur pour

laquelle u_g deviendra ou infini, ou équivalent à un autre terme u_h de la suite

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Soient d'ailleurs c, c', c'', \dots les valeurs réelles ou imaginaires de z qui rempliront l'une de ces dernières conditions, et C, C', C'', \dots les points correspondants à ces mêmes valeurs de z . Si le point mobile Z vient à décrire une courbe continue et fermée, tellement choisie que les points C, C', C'', \dots soient tous extérieurs à cette courbe, u_1, u_2, u_3, \dots resteront, pendant le mouvement du point Z , fonctions continues de z , et chacune de ces fonctions reprendra sa valeur primitive au moment où le point mobile Z reprendra sa position initiale. Si, au contraire, quelques-uns des points C, C', C'', \dots sont intérieurs à la courbe fermée dont il s'agit, un terme u_g de la suite

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

ne reprendra pas toujours la même valeur, quand le point Z reprendra sa position initiale. Cela posé, il semble au premier abord qu'il ne soit pas possible de séparer les unes des autres les diverses valeurs de u considéré comme fonction de z , tant que la valeur de z reste indéterminée. Néanmoins, pour éviter la confusion et rendre faciles à saisir les calculs qui se rapportent aux fonctions irrationnelles, il importait d'effectuer cette séparation. J'y parviens de la manière suivante :

Après avoir déterminé les divers points C, C', C'', \dots correspondants aux valeurs c, c', c'', \dots de la variable z , je trace les prolongements indéfinis $CD, C'D, C''D, \dots$ des rayons vecteurs menés d'un centre fixe O aux points C, C', C'', \dots ; puis, j'assujettis chacune des fonctions

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

à varier avec z par degrés insensibles ou, en d'autres termes, à rester fonction continue de z , tandis que le point Z se meut lui-même par degrés insensibles dans le plan des x, y , sans que jamais il lui soit permis d'atteindre les prolongements $CD, C'D, C''D, \dots$, dont il pourra toutefois s'approcher indéfiniment. Comme, dans un tel mou-

vement, les droites CD, C'D', C''D', ... peuvent être comparées à des obstacles devant lesquels le point mobile s'arrêterait, sans pouvoir jamais les franchir, j'appellerai ces droites *lignes d'arrêt*, et leurs origines C, C', C'', ... *points d'arrêt*. Le point O lui-même sera ce que je nommerai *centre radical*.

Les diverses valeurs de u étant ainsi distinguées les unes des autres, les principes établis dans divers Mémoires que j'ai publiés en 1846, spécialement dans les Mémoires des 12, 19 et 26 octobre (1), s'appliquent avec la plus grande facilité à la recherche des relations qui existent entre les diverses valeurs de l'intégrale rectiligne $\int u dz$, étendue à tous les points d'une ligne droite, et de l'intégrale curviligne $\int u D_s z ds$, étendue à tous les points d'une courbe PQR, dont l'arc, parcouru dans un certain sens, est désigné par s ; et d'abord, en vertu de la formule (15) du Mémoire du 26 octobre, si PQR est une courbe qui ne coupe aucune ligne d'arrêt, l'intégrale

$$s = \int u D_s z ds,$$

étendue à tous les points de la courbe PQR, sera simplement la différence entre les deux valeurs qu'acquiert l'intégrale rectiligne $\int u dz$, quand on l'étend : 1° à tous les points du rayon vecteur OR; 2° à tous les points du rayon vecteur OP. Donc l'intégrale curviligne s ne différera pas de l'intégrale $\int u dz$, étendue à tous les points de la corde PR, si cette corde elle-même ne coupe aucune des lignes d'arrêt.

Supposons, maintenant, que la courbe PQR, dont l'origine est au point P et l'extrémité au point R, coupe successivement les rayons vecteurs

$$OC'D', OC''D', \dots, OC^{(m)}D^{(m)}$$

indéfiniment prolongés; et soient

$$Q', Q'', \dots, Q^{(m)}$$

les points d'intersection. La courbe PQR se trouvera divisée en plusieurs parties, et l'intégrale s en parties correspondantes, dont cha-

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. X, p. 153 à 196.

cune se déterminera immédiatement à l'aide du théorème que je viens de rappeler. Seulement, si, au moment où le point mobile Z part de la position initiale P, la fonction u se confond avec le terme u_g de la suite

$$u_1, u_2, u_3, \dots,$$

et si le point Q' est situé, non sur le rayon vecteur OC', mais sur son prolongement, c'est-à-dire sur une ligne d'arrêt, la même fonction u , supposée continue, se confondra généralement avec un nouveau terme u_h de la suite u_1, u_2, u_3, \dots , après que le point mobile Z aura franchi la position Q', le nombre h se réduisant toujours au nombre g dans le cas où Q' serait un point du rayon vecteur OC'. Cela posé, on pourra généralement énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Supposons que le point mobile Z, en partant de la position P, décrive une courbe continue quelconque PQR, dont l'arc mesuré dans le sens du mouvement soit représenté par s ; et nommons*

$$Q', Q'', \dots, Q^{(m)}$$

les points d'intersection successifs de cette courbe avec les lignes d'arrêt qu'elle rencontre, ou avec les rayons vecteurs dont ces lignes sont les prolongements. Supposons encore que, la fonction irrationnelle u venant à varier avec z d'une manière continue, on nomme

$$u_g, u_h, \dots, u_n$$

ceux des termes de la suite u_1, u_2, u_3, \dots avec lesquels elle coïncide quand le point mobile Z parcourt successivement les portions de courbe

$$PQ', Q'Q'', \dots, Q^{(m)}R;$$

l'intégrale curviligne

$$s = \int u D_s z ds,$$

étendue à tous les points de la courbe PQR, sera la somme des valeurs de l'intégrale rectiligne $\int u dz$ correspondantes aux cordes des portions de courbe dont il s'agit, c'est-à-dire aux droites

$$PQ', Q'Q'', \dots, Q^{(m)}R.$$



Il est important d'observer que la valeur de s , déterminée par le théorème précédent, ne variera pas si l'on fait mouvoir l'extrémité commune Q' des deux cordes PQ' , $Q'Q''$, en rapprochant indéfiniment cette extrémité du point d'arrêt C' , sans lui faire franchir ce dernier point. En effet, supposons le point Q' remplacé par un autre point q' situé sur la droite $Q'C'$, entre Q' et C' . La valeur de l'intégrale $\int u dz$, correspondante à la droite PQ' , sera la somme des valeurs de la même intégrale correspondantes aux droites Pq' , $q'Q'$. Pareillement, la valeur correspondante à la droite $Q'Q''$ sera la somme des valeurs correspondantes aux deux droites $Q'q'$, $q'Q''$; et, comme les deux droites $q'Q'$, $Q'q'$ coïncident, mais sont censées parcourues en sens inverses par un point mobile, les deux intégrales correspondantes à ces droites seront égales, au signe près, mais affectées de signes contraires; et par suite la somme des valeurs de $\int u dz$, correspondantes aux droites PQ' , $Q'Q''$, ne différera pas de la somme des valeurs correspondantes aux deux droites Pq' , $q'Q''$. On prouvera de même que l'on peut, sans altérer la valeur de s , rapprocher indéfiniment le point Q'' du point C'' , ..., le point $Q^{(m)}$ du point $C^{(m)}$. Il y a plus: si les produits

$$(z - c')u, (z - c'')u, \dots, (z - c^{(m)})u$$

conservent des valeurs finies, le premier pour $z = c'$, le second pour $z = c''$, ..., le dernier pour $z = c^{(m)}$, les valeurs de $\int u dz$ correspondantes aux droites

$$PC', C'C'', \dots, C^{(m)}R$$

seront toutes finies, et par suite on pourra sans inconvénient faire atteindre aux points Q' , Q'' , ..., $Q^{(m)}$, devenus mobiles, les positions C' , C'' , ..., $C^{(m)}$ dont ils s'approchent indéfiniment. On peut donc énoncer la proposition suivante:

THÉORÈME II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si les produits*

$$(z - c')u, (z - c'')u, \dots, (z - c^{(m)})u$$

s'évanouissent, le premier pour $z = c$, le second pour $z = c''$, ..., le der-

nier pour $z = c^{(m)}$, l'intégrale curviligne s sera la somme des valeurs de l'intégrale $\int u dz$ correspondantes aux droites

$$PC', C'C'', \dots, C^{(m)}R.$$

En vertu de ce théorème, l'intégrale curviligne s relative à une courbe continue OPR se décompose en intégrales rectilignes, dont une seule dépend de l'origine P de la courbe, une seule de l'extrémité R de la même courbe, les autres intégrales rectilignes étant indépendantes des positions des deux points extrêmes.

Si le point R coïncide avec le point P, la courbe continue PQR sera une courbe fermée. Si, de plus, on a

$$u_n = u_g,$$

la somme des valeurs de $\int u dz$ correspondantes aux deux droites $C^{(m)}P$, PC' sera précisément la valeur correspondante à la droite $C^{(m)}C'$, et l'on obtiendra la proposition suivante:

THÉORÈME III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si la courbe PQR est fermée, en sorte que ses extrémités P, R coïncident, et si de plus la fonction u reprend la même valeur quand le point mobile Z reprend sa position initiale P, l'intégrale curviligne s , devenue indépendante de la position du point P, sera la somme des valeurs de l'intégrale rectiligne $\int u dz$ correspondantes aux droites*

$$C'C'', C''C''', \dots, C^{(m)}C'.$$

Il est bon d'observer que dans chaque intégrale rectiligne on peut introduire à la place de la variable z une variable réelle θ dont les limites soient zéro et l'unité. Ainsi, par exemple, l'intégrale rectiligne $\int u dz$, étendue à tous les points de la droite $C'C''$, ou, en d'autres termes, l'intégrale définie

$$\int_{c'}^{c''} u dz,$$

se réduira simplement au produit

$$(c'' - c') \int_0^1 u d\theta,$$



si l'on pose

$$z = c' + (c'' - c')\theta.$$

Par suite, si l'on nomme z_0, z_1 , les valeurs de z correspondantes aux extrémités P, R de la courbe PQR, et $z', z'', \dots, z^{(m)}$ les valeurs de z correspondantes aux points intermédiaires Q', Q'', ... Q^(m), l'intégrale curviligne $s = \int u D_z z ds$, étendue à tous les points de la courbe, pourra être, en vertu du théorème I, déterminée, non seulement par l'équation

$$s = \int_{z_0}^{z'} u_g dz + \int_{z'}^{z''} u_h dz + \dots + \int_{z^{(m)}}^{z_1} u_n dz,$$

mais encore par la formule

$$s = \int_0^1 \Theta d\theta,$$

la valeur de Θ étant

$$\Theta = (z' - z_0)u_g + (z'' - z')u_h + \dots + (z_1 - z^{(m)})u_n,$$

et la variable z devant être remplacée, dans le facteur u_g par la somme $z_0 + \theta(z' - z_0)$, dans le facteur u_h par la somme $z' + \theta(z'' - z')$, ... dans le facteur u_n par la somme $z^{(m)} + \theta(z_1 - z^{(m)})$. Si d'ailleurs les produits

$$(z - c')u, (z - c'')u, \dots, (z - c^{(m)})u$$

s'évanouissent, le premier pour $z = c'$, le second pour $z = c''$, ... le dernier pour $z = c^{(m)}$, on pourra, dans la valeur de Θ , réduire z à c' , z'' à c'' , ... $z^{(m)}$ à $c^{(m)}$.

Si, les produits $(z - c')u, (z - c'')u, \dots$ cessant de satisfaire à la condition énoncée, u renfermait les termes de la forme

$$\frac{I'}{z - c'}, \frac{I''}{z - c''}, \dots, \frac{I^{(m)}}{z - c^{(m)}};$$

alors, en désignant par v la somme de ces termes, et supposant que la condition énoncée fût remplie dans le cas où la différence $u - v$ serait substituée à la fonction u , on pourrait aisément calculer la valeur de s relative à la fonction u , en la déduisant de la valeur rela-

tive à la fonction $u - v$, et, pour déduire la première de la seconde, il suffirait, d'après ce que j'ai dit ailleurs, d'ajouter à celle-ci plusieurs termes de la forme

$$\pm 2\pi I' i, \pm 2\pi I'' i, \dots,$$

chaque double signe se réduisant au signe + ou au signe -, suivant que le mouvement de rotation du rayon vecteur OZ serait direct ou rétrograde, au moment où le point mobile Z passerait par la position P' ou P'', ...

Enfin, si, pour des valeurs de z voisines de c' , la fonction u se décompose en trois parties, dont l'une soit de la forme

$$\frac{I'}{z - c'},$$

en sorte qu'on ait

$$u = \frac{I'}{z - c'} + \varphi + \chi,$$

les fonctions φ, χ étant telles que les deux produits

$$(z - c')\varphi, (z - c')\chi$$

deviennent, le premier nul, le second infini pour $z = c'$, et le second nul pour une valeur infinie de z ; alors, après avoir débarrassé la fonction u du terme $\frac{I'}{z - c'}$, on pourra, dans la détermination de s , effectuée à l'aide du théorème I, commencer par substituer aux droites PQ', Q'Q'', les droites Pq', q'Q'', q' étant un point situé sur la droite Q'C', à une distance infiniment petite du point C'; puis, afin de réduire à des quantités finies les valeurs des intégrales correspondantes aux droites Pq', q'Q'', on ajoutera à la première intégrale, et l'on retranchera de la seconde la valeur de $\int \chi dz$ correspondante à q'r', r' étant un nouveau point que l'on supposera situé sur le prolongement de C'q', et qui pourra coïncider avec le centre radical, ou s'éloigner à une distance infinie de C'.

En opérant de la même manière dans tous les cas analogues, on réduira la détermination de s à l'évaluation d'intégrales rectilignes,



qui offriront toutes des valeurs finies, et parmi lesquelles deux seulement dépendront des positions des points extrêmes de la courbe donnée PQR.

Les théorèmes énoncés dans cet article supposent évidemment que le rayon vecteur mobile OZ ne peut jamais décrire un angle supérieur à deux droits, tandis que son extrémité Z parcourt, en partie ou en totalité, l'un quelconque des arcs PQ', Q'Q'', ..., Q^mR. Il pourrait arriver que cette condition cessât d'être remplie pour l'un de ces mêmes arcs; mais il serait facile de le partager en deux autres dont chacun satisferait à la condition dont il s'agit.

Dans un autre article, j'appliquerai les théorèmes ci-dessus énoncés à des cas spéciaux: je dirai en même temps quels sont les points de contact et les différences qui existent entre mes recherches, soit anciennes, soit nouvelles, et un Mémoire très remarquable dont M. Puisseux m'a parlé. Ce Mémoire, qu'il se propose de présenter aujourd'hui même à l'Académie, s'appuie, d'une part, sur les propriétés des fonctions irrationnelles traitées par lui dans un précédent Mémoire déjà publié en partie (voir le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. XV, p. 365, année 1850); d'autre part, sur la notion des intégrales rectilignes et curvilignes des équations différentielles, présentée pour la première fois aux géomètres, dans mes Mémoires de 1846.

479.

C. R., T. XXXII, p. 126 (3 février 1851).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie la suite de ses recherches sur les fonctions rationnelles et sur leurs intégrales définies. Dans ce nouveau Mémoire, M. Cauchy applique les principes établis dans la séance du 26 octobre 1846, à la détermination des intégrales curvilignes dans lesquelles la fonction sous le signe \int est une racine d'une équation algébrique quelconque, et détermine dans le cas le plus

général le nombre des indices de périodicité, ou, en d'autres termes, des périodes distinctes qui peuvent être ajoutées à une telle intégrale. Il est ainsi conduit à un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

u étant une fonction donnée de z déterminée par une équation algébrique du degré m, si l'on désigne par u, l'une des valeurs de u, par u₂, u₃, ..., u_n celles dans lesquelles u, peut se transformer en variant avec z par degrés insensibles, par n le nombre total des points d'arrêt, enfin par v le nombre total des substitutions circulaires correspondantes à ces points, et formées avec les termes u₁, u₂, ..., u_n (quelques-unes de ces substitutions pouvant être censées renfermer chacune un seul terme, et se réduire, par suite, à l'unité), le nombre des périodes distinctes qui pourront être ajoutées à l'intégrale $\int u, dz$ prise entre deux limites données (abstraction faite des périodes exprimées par des résidus de la fonction u) sera généralement $(n - 1)u - (v - 1)$.

480.

ANALYSE ALGÈBRE. — Sur les fonctions de variables imaginaires.

C. R., T. XXXII, p. 160 (10 février 1851).

La théorie des fonctions de variables imaginaires présente des questions délicates qu'il importait de résoudre, et qui ont souvent embarrassé les géomètres. Mais toute difficulté disparaîtra si, en se laissant guider par l'analogie, on étend aux fonctions de variables imaginaires les définitions généralement adoptées pour les fonctions de variables réelles. On arrive ainsi à des conclusions, singulières au premier abord, et néanmoins très légitimes, que j'indiquerai en peu de mots.

Deux variables réelles sont dites *fonctions* l'une de l'autre, lorsqu'elles varient simultanément de telle sorte que la valeur de l'une détermine la valeur de l'autre. Si les deux variables sont censées représenter les abscisses de deux points assujettis à se mouvoir sur



une même droite, la position de l'un des points mobiles déterminera la position de l'autre, et réciproquement.

Ajoutons que le rapport différentiel de deux variables réelles est une quantité généralement déterminée, et qui néanmoins peut cesser de l'être pour certaines valeurs particulières des variables. Ainsi, par exemple, le rapport différentiel de y à x deviendra indéterminé pour $x = 0$, si l'on suppose

$$y = x \sin \frac{1}{x}.$$

Concevons maintenant que, x, y étant des variables réelles et indépendantes l'une de l'autre, on pose

$$z = x + yi,$$

i étant une racine carrée de -1 ; z sera ce qu'on nomme une variable imaginaire. Soit

$$u = v + w i$$

une autre variable imaginaire, v et w étant réels. Si, comme l'on doit naturellement le faire, on étend aux variables imaginaires les définitions adoptées dans le cas où les variables sont réelles, u devra être censé *fonction* de z , lorsque la valeur de z déterminera la valeur de u . Or il suffit pour cela que v et w soient des fonctions déterminées de x, y . Alors aussi, en considérant les variables réelles x et y renfermées dans z , ou les variables réelles v et w renfermées dans u , comme propres à représenter les coordonnées rectilignes et rectangulaires d'un point mobile Z ou U , on verra la position du point mobile Z déterminer toujours la position du point mobile U .

Si d'ailleurs on nomme r le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point mobile Z , et p l'angle polaire formé par ce rayon vecteur avec l'axe des x , les coordonnées polaires r et p , liées à x, y par les équations

$$x = r \cos p, \quad y = r \sin p,$$

et à z par la formule

$$z = r e^{pi},$$

seront ce qu'on nomme le *module* et l'*argument* de la variable imaginaire z .

Ces définitions étant adoptées, et u étant une fonction quelconque de la variable imaginaire z , le rapport différentiel de u à z dépendra, en général, non seulement des variables réelles x et y , ou, ce qui revient au même, de la position attribuée au point mobile Z , mais encore du rapport différentiel de y à x , ou, en d'autres termes, de la direction de la tangente à la courbe que décrira le point mobile, lorsqu'on fera varier z . Ainsi, par exemple, comme on aura

$$dz = dx,$$

si le point mobile se meut parallèlement à l'axe des x , et

$$dz = i dy,$$

si le point mobile se meut parallèlement à l'axe des y , le rapport différentiel de u à z sera, dans la première hypothèse.

$$D_x v + i D_x w,$$

et, dans la seconde hypothèse.

$$\frac{D_y v + i D_y w}{i} = D_y w - i D_y v.$$

Ajoutons que, si ces deux valeurs particulières du rapport différentiel de u à z sont égales entre elles, ce rapport deviendra indépendant de la direction suivie par le point mobile et se réduira simplement à une fonction des deux variables x, y .

Dans ce cas particulier, on aura

$$D_x v = D_y w, \quad D_y v = -D_x w;$$

par conséquent

$$D_x^2 v + D_y^2 v = 0, \quad D_x^2 w + D_y^2 w = 0$$

et

$$D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

Done alors la fonction u de z sera en même temps une fonction de x, y



qui vérifiera une équation aux dérivées partielles du second ordre, et représentera une intégrale de cette équation.

C'est ce qui arrivera ordinairement, si les variables imaginaires u et z sont liées entre elles par l'équation qu'on obtient en égalant à zéro une fonction toujours continue de ces deux variables.

Les principes que je viens d'exposer confirment ce que j'ai dit ailleurs sur la nécessité de mentionner la dérivée d'une fonction de z , dans le théorème qui indique les conditions sous lesquelles cette fonction peut être développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z . C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article, où je déduirai des principes dont il s'agit les propriétés diverses des fonctions d'une variable imaginaire et de leurs intégrales définies.

481.

CALCUL INTÉGRAL. — *Addition au Mémoire sur les fonctions irrationnelles, et sur leurs intégrales définies.*

C. R., T. XXXII, p. 162 (10 février 1851).

Le théorème énoncé à la page 301 s'étend au cas même où u est une fonction de z , déterminée, non par une seule équation algébrique, mais par un système de N équations simultanées

$$U=0, \quad V=0, \quad W=0, \quad \dots,$$

dans lesquelles U, V, W, \dots représentent des fonctions algébriques ou transcendentes, mais toujours continues, des N variables

$$u, \quad v, \quad w, \quad \dots$$

et de la variable indépendante z . On peut d'ailleurs supposer que, parmi ces équations, toutes celles qui suivent la première, savoir

$$V=0, \quad W=0, \quad \dots,$$

renferment chacune une seule des variables v, w, \dots avec la variable z ,

et soient en outre semblables entre elles, par conséquent de la forme

$$f(v, z) = 0, \quad f(w, z) = 0, \quad \dots$$

Alors chacune des variables v, w, \dots représentera l'une des racines v_1, v_2, \dots de la seule équation

$$f(v, z) = 0,$$

et la variable u , déterminée en fonction de v, w, \dots, z par la formule

$$U = 0,$$

se réduira simplement à une fonction de z et des racines dont il s'agit. Concevons, pour fixer les idées, que, chacune des variables v, w, \dots se réduisant à l'une des racines de l'équation

$$f(v_g, z) = 0,$$

la première des équations données se réduise elle-même à la formule

$$u = F(z, v, w, \dots),$$

$F(z, v, w, \dots)$ désignant une fonction toujours continue de z, v, w, \dots . Alors u sera de la forme

$$u = F(z, v_g, v_h, \dots),$$

plusieurs des indices g, h, \dots pouvant être égaux entre eux; et en nommant Z le point mobile dont la variable z désigne la coordonnée imaginaire, on obtiendra, pour l'intégrale $\int u dz$ étendue à tout le contour d'une courbe fermée et décrite par le point Z , une valeur indépendante de la position initiale de ce point, si u reprend sa valeur primitive, au moment où le point Z aura parcouru la courbe entière. Ajoutons que la même intégrale se réduira simplement à zéro, si u est une fonction symétrique de v_1, v_2, v_3, \dots , ou même si la fonction u n'est altérée par aucune des substitutions circulaires correspondantes aux points d'arrêt que renferme la courbe, et relatives aux diverses racines v_1, v_2, v_3, \dots de l'équation

$$f(v, z) = 0.$$