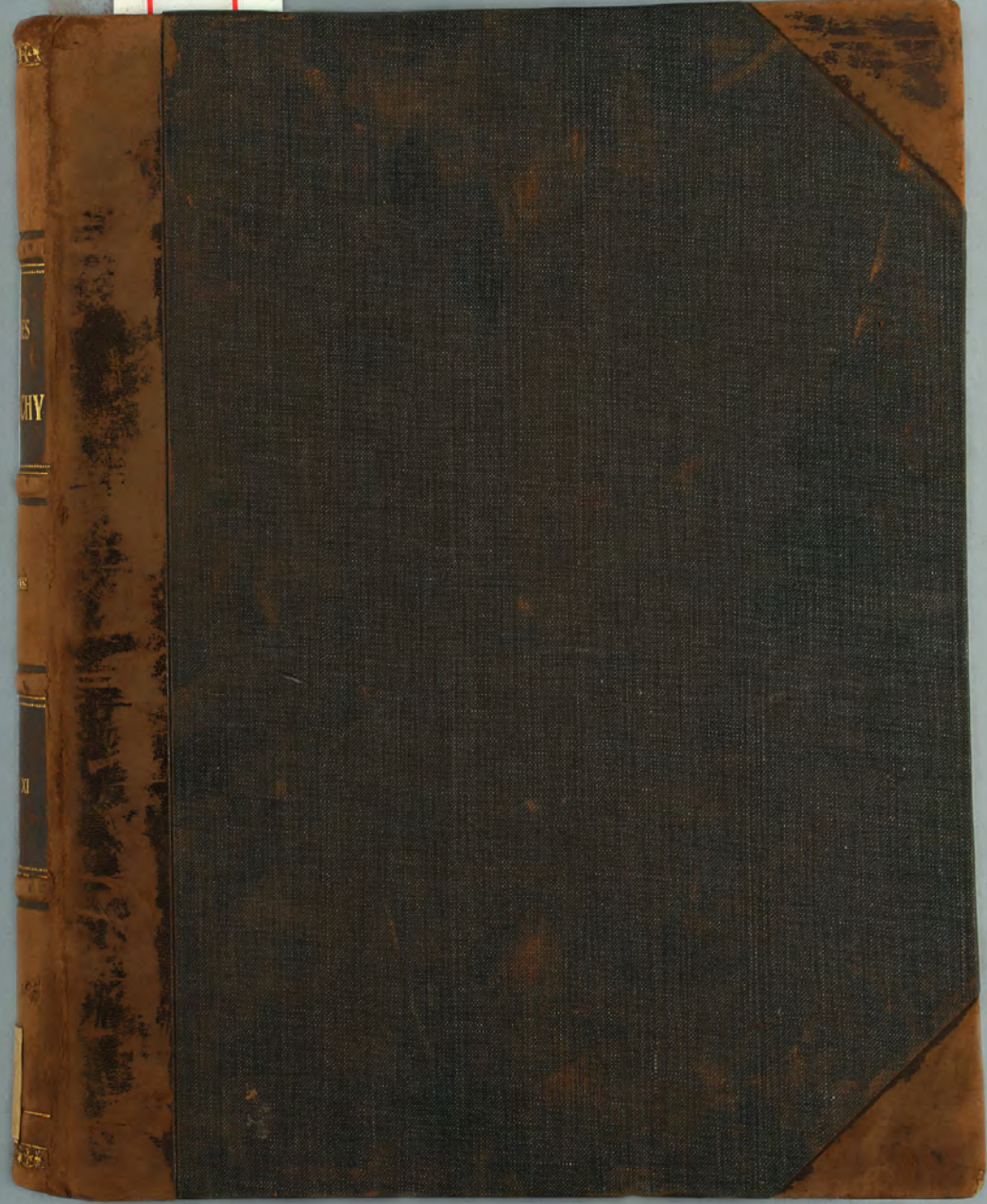




桑木文庫
洋書



物理
08
C
2.11

九州帝國大學理學部
8192
物理學教室

桑木文庫
洋書
0162

理學部 洋 邇及
022232002002118

九州大學藏書



物理
08
C
2.11

801864

ŒUVRES

COMPLETES

D'AUGUSTIN CAUCHY



物理
08
C
2.11

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
25011 Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

I^{re} SÉRIE. — TOME XI.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

M DCCC XCIX



物 理
08
C
2.11



PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

Œuvres de C. — S. 1, t. XI.



物 5
08
C
2.11



III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)



NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

399.

GÉOMÉTRIE. — *Sur quelques théorèmes de Géométrie analytique relatifs aux polynômes et aux polyèdres réguliers.*

C. R., T. XXVI, p. 489 (8 mai 1848).

Considérons, dans un plan ou dans l'espace, divers points situés à la même distance r d'un centre fixe. Si, en prenant ce centre pour origine, on détermine la position de chaque point : 1° à l'aide de coordonnées rectilignes x, y, z ; 2° à l'aide de coordonnées polaires p, q, r , les coordonnées p, q étant les angles formés par le rayon r avec un rayon fixe, nommé *axe polaire*, et par le plan de ces deux rayons avec un plan fixe, ou *plan polaire*, toute fonction entière des coordonnées rectilignes x, y, z sera, en même temps, une fonction entière des sinus et cosinus des angles polaires p, q , par conséquent une fonction entière de chacune des exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les angles $+p, -p, +q, -q$. D'autre part, on sait que les puissances entières et semblables des diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité donnent pour somme n ou zéro, suivant que le degré commun de ces puissances est ou n'est pas un multiple de n . Par suite, si à



une puissance entière de l'exponentielle trigonométrique, dont l'argument est l'angle polaire p ou q , on ajoute les puissances semblables des exponentielles trigonométriques diverses, dont les arguments surpassent l'angle p ou q de quantités égales à des multiples de la $n^{\text{ième}}$ partie de la circonférence, la somme obtenue sera précisément le produit de la puissance donnée par le nombre n , quand cette puissance sera du $n^{\text{ième}}$ degré, ou d'un degré égal à un multiple de n ; la même somme sera nulle dans le cas contraire. Par suite aussi, la moyenne arithmétique entre les diverses puissances dont il s'agit se réduira, dans le premier cas, à la puissance donnée; dans le second cas, à zéro. En partant de ces principes, on établira sans peine les théorèmes que nous allons énoncer.

THEOREME I. — *Si, dans un plan, on prend pour origine des coordonnées le centre d'un polygone régulier de n côtés, et si l'on substitue les coordonnées rectilignes d'un sommet de ce polygone dans une fonction entière de ces coordonnées, d'un degré inférieur à n , la moyenne arithmétique entre les valeurs de cette fonction correspondantes aux divers sommets restera invariable, tandis qu'on fera tourner le polygone autour de son centre, en laissant immobiles les axes coordonnés.*

THEOREME II. — *Si, dans l'espace, on prend pour origine des coordonnées le centre d'un polyèdre régulier, dans lequel n arêtes aboutissent à chaque sommet, et si l'on substitue les coordonnées rectilignes d'un sommet de ce polyèdre dans une fonction entière de ces coordonnées, d'un degré inférieur à n , la moyenne arithmétique entre les valeurs de cette fonction correspondantes aux divers sommets restera invariable, tandis que l'on fera tourner d'une manière quelconque le polyèdre autour de son centre, en laissant immobiles les axes coordonnés.*

De ces deux théorèmes, le premier se déduit très aisément des principes ci-dessus rappelés. Pour démontrer de la même manière le second théorème, dans le cas particulier où le polyèdre donné tourne autour du rayon vecteur mené du centre à l'un des sommets, il suffit de faire coïncider avec ce rayon vecteur l'axe polaire, c'est-

à-dire le rayon fixe à partir duquel se compte l'angle polaire p . Ajoutons que l'on peut aisément passer de ce cas particulier au cas général. En effet, un déplacement déterminé du polyèdre tournant d'une manière quelconque autour de son centre peut toujours être considéré comme le résultat de trois déplacements successifs, dont chacun serait produit par un mouvement de rotation du polyèdre autour de l'un des rayons vecteurs menés du centre aux divers sommets. Ajoutons que, pour obtenir un déplacement déterminé d'un seul de ces rayons vecteurs, il suffirait, en général, d'imprimer successivement, autour de deux autres rayons vecteurs, des mouvements de rotation convenables au polyèdre dont il s'agit.

Certaines grandeurs ou quantités qui dépendent de la direction d'une droite émanant d'un centre fixe se réduisent à des fonctions entières des cosinus des angles formés par cette droite avec deux ou trois axes fixes rectangulaires entre eux. D'ailleurs, ces cosinus ne sont autre chose que des coordonnées rectangulaires d'un point situé sur cette droite à l'unité de distance du centre fixe. Cela posé, les théorèmes I et II entraînent évidemment la proposition suivante :

THEOREME III. — *Concevons que, dans un plan donné ou dans l'espace, on construise une espèce de rose des vents ou de hérisson, en faisant partir du centre d'un polygone ou d'un polyèdre régulier des rayons vecteurs dirigés vers les sommets de ce polygone ou de ce polyèdre. Considérons d'ailleurs une quantité ou grandeur qui varie avec la direction d'une droite tracée dans le plan donné ou dans l'espace à partir du même centre. Enfin, supposons cette grandeur représentée par une fonction entière des cosinus des angles que la droite forme avec deux ou trois axes fixes rectangulaires entre eux. Si le degré de cette fonction est inférieur au nombre des côtés du polygone ou au nombre des arêtes qui, dans le polyèdre, aboutissent à un même sommet, la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de la fonction correspondantes aux diverses directions que présente la rose des vents ou le hérisson ne variera pas quand on fera tourner cette rose ou ce hérisson autour de son centre.*



La grandeur que l'on considère pourrait être, par exemple, le rapport de l'unité au carré du rayon vecteur d'une ellipse, ou la courbure d'une section normale faite dans une surface courbe en un point donné, ou bien encore le rapport de l'unité au carré du rayon vecteur qui joint le centre à un point de la surface dans un ellipsoïde ou dans le système de deux hyperboloïdes conjugués. Dans ces diverses hypothèses, le troisième théorème reproduirait des propositions énoncées dans mes applications géométriques du Calcul infinitésimal, avec quelques propositions analogues récemment données par d'autres auteurs.

La grandeur que l'on considère pourrait être aussi une dilatation linéaire infiniment petite, mesurée en un point donné d'un corps, ou le moment d'inertie du corps autour d'un axe passant par ce point, ou le carré de la pression supportée en ce point par un plan perpendiculaire à une droite donnée, ou la composante normale de cette pression, etc. Dans ces dernières hypothèses, le troisième théorème fournirait des propositions nouvelles. Je citerai, comme exemple, la suivante :

THÉORÈME IV. — *Si, d'un point donné d'un corps solide, on mène des droites aux divers sommets d'un polyèdre régulier qui ait pour centre ce même point, et si l'on détermine successivement les divers moments d'inertie du corps autour de ces droites, la moyenne arithmétique entre ces divers moments d'inertie restera invariable, tandis que l'on fera tourner le polyèdre autour du point donné.*

Supposons, maintenant, que la fonction entière mentionnée dans le premier théorème soit développée suivant les puissances entières positives et négatives de l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument l'angle polaire p . Le degré de cette fonction entière étant inférieur au nombre n des côtés du polygone régulier donné, la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de la fonction se réduira au terme constant du développement obtenu. Donc cette moyenne arithmétique offrira la même valeur, quel que soit n , et

même pour $n = 3$, c'est-à-dire quand le polygone régulier deviendra un triangle équilatéral, si la fonction entière donnée est simplement du second degré.

Considérons encore la fonction entière mentionnée dans le second théorème, et, en prenant pour axe polaire l'un des rayons vecteurs qui joignent le centre du polyèdre donné à l'un des sommets, développons la fonction dont il s'agit suivant les puissances entières positives ou négatives de l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument l'angle polaire q . Le degré de la fonction étant inférieur au nombre des côtés de tout polygone régulier construit avec des sommets du polyèdre renfermés dans un plan perpendiculaire à l'axe polaire, le développement obtenu pourra être réduit à la partie de ce développement indépendante de l'angle q . D'ailleurs, si le polyèdre donné est un tétraèdre, le rayon vecteur mené du centre à l'un des quatre sommets sera perpendiculaire au plan qui renfermera les trois autres, et le polygone construit avec ces derniers sera un triangle équilatéral. Donc les moyennes arithmétiques auxquelles se rapportent les théorèmes II et III ne pourront généralement devenir indépendantes du nombre des faces attribuées au polyèdre régulier, que dans le cas où la fonction entière donnée sera du second degré.

Au reste, il est aisé de s'assurer que, si la fonction entière à laquelle se rapporte le théorème III est du second degré par rapport aux cosinus des angles que forme une droite avec trois axes fixes rectangulaires, la moyenne entre les diverses valeurs de cette fonction deviendra effectivement indépendante du nombre des faces du polyèdre régulier donné. Il y a plus : pour établir cette dernière proposition dans le cas général, il suffira, d'après ce qui vient d'être dit, de la démontrer dans le cas spécial où la fonction donnée se réduit à une fonction de $\cos p$, entière et du second degré, p étant l'angle que forme une droite mobile avec l'axe polaire mené du centre du polyèdre régulier à l'un des sommets ; par conséquent, il suffira d'établir la proposition dont il s'agit dans le cas particulier où la fonction donnée se réduit soit à $\cos p$, soit à $\cos^2 p$. Or, si l'on fait coïncider successivement la droite mobile avec les di-



vers rayons vecteurs menés du centre du polyèdre réguliers aux divers sommets, l'axe polaire étant un de ces rayons vecteurs, la moyenne entre les diverses valeurs de $\cos p$ sera nulle, même pour le tétraèdre, pour lequel la somme des valeurs de $\cos p$ sera

$$1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 0;$$

et la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de $\cos^2 p$ se réduira toujours à la fraction $\frac{1}{3}$; car la somme des valeurs de $\cos^2 p$ sera

Pour le tétraèdre.....	$1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3},$
Pour l'hexaèdre.....	$2 + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3},$
Pour l'octaèdre.....	$2 + 4(0) = 2,$
Pour le dodécaèdre.....	$2 + 6\left(\frac{2}{9}\right) + 12\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{20}{3},$
Pour l'icosaèdre.....	$2 + 10\left(\frac{1}{5}\right) = 4;$

tandis que le nombre des sommets, dans les mêmes polyèdres, coïncidera successivement avec chacun des termes de la suite

$$4, 8, 6, 20, 12.$$

Donc, en définitive, la proposition énoncée subsiste; et par suite la moyenne mentionnée dans le théorème IV sera indépendante du nombre des faces du polyèdre régulier donné.

400.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Rapport sur une Note de M. BRETON, de Champ, relatif à quelques propriétés des rayons de courbure des surfaces.*

C. R., T. XXVI, p. 494 (8 mai 1848).

On sait depuis longtemps que, si, après avoir mené par un point d'une surface courbe deux plans rectangulaires entre eux et normaux

à cette surface, on détermine la courbure de chaque ligne d'intersection, c'est-à-dire le rapport de l'unité au rayon de courbure de cette ligne, la somme des deux courbures obtenues sera une quantité constante, pourvu que l'on affecte de signes différents les courbures dirigées en sens contraire. Ce théorème, énoncé par l'un de nous, dans ses applications géométriques du Calcul infinitésimal, a été généralisé par l'un de nos confrères. M. Babinet a remarqué, en effet, que, si par la normale à une surface courbe on conduit des plans qui comprennent tous entre eux des angles égaux, les courbures des sections contenues dans ces plans fourniront une somme constante, et qu'en outre la courbure moyenne sera indépendante du nombre des plans dont il s'agit. Dans la Note soumise à notre examen, M. Breton, de Champ, prouve que le théorème de M. Babinet continuera de subsister si l'on y remplace la courbure de chaque section par une puissance entière de cette courbure, d'un degré inférieur au nombre des sections données. Il établit aussi quelques autres théorèmes analogues.

Les Commissaires pensent que les théorèmes énoncés par M. Breton, de Champ, peuvent intéresser les personnes qui s'appliquent à l'étude de la Géométrie analytique, et ils proposent à l'Académie de lui voter des encouragements.

401.

GÉOMÉTRIE. — *Note sur quelques propriétés remarquables des polyèdres réguliers.*

C. R., T. XXVI, p. 517 (15 mai 1848).

J'ai montré, dans la dernière séance, la liaison qui existe entre certaines propositions de Géométrie analytique et quelques propriétés des polyèdres réguliers. Je vais indiquer aujourd'hui des moyens faciles d'établir ces mêmes propriétés, et plusieurs autres qui paraissent



sont assez remarquables pour mériter de fixer un instant l'attention des géomètres.

On sait, depuis longtemps, que l'on peut construire cinq polyèdres réguliers convexes, savoir, le tétraèdre, l'hexaèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. On sait que, dans ces divers polyèdres, où le nombre des faces est successivement représenté par chacun des termes de la suite

4, 6, 8, 12, 20,

le nombre des sommets se trouve successivement représenté par chacun des termes de la suite

4, 8, 6, 20, 12.

On sait aussi que le nombre des arêtes est six dans le tétraèdre, douze dans l'hexaèdre et l'octaèdre, trente dans le dodécaèdre et l'icosaèdre.

On sait enfin qu'à chaque angle solide aboutissent trois arêtes dans le tétraèdre, l'hexaèdre et le dodécaèdre réguliers, quatre arêtes dans l'octaèdre et cinq arêtes dans l'icosaèdre.

On peut encore établir facilement la proposition suivante :

THEOREME I. — *Les centres des diverses faces d'un polyèdre régulier quelconque sont les sommets d'un autre polyèdre régulier. D'ailleurs deux polyèdres réguliers, dont l'un a pour sommets les centres des faces de l'autre, sont nécessairement ou deux tétraèdres, ou un hexaèdre et un octaèdre, ou un dodécaèdre et un icosaèdre.*

THEOREME II. — *Dans tout polyèdre régulier, la droite menée du centre à un sommet est perpendiculaire aux plans de divers polygones réguliers auxquels appartiennent tous les sommets situés hors de cette droite.*

Si le polyèdre donné est un tétraèdre, un seul sommet sera situé sur la droite dont il s'agit, les trois autres appartiendront à un triangle équilatéral dont le plan sera perpendiculaire à la droite.

Si le polyèdre donné est un hexaèdre, ou un octaèdre, ou un dodécaèdre, ou un icosaèdre, deux sommets seront les extrémités d'un

même diamètre mené par le centre du polyèdre. Les autres sommets appartiendront à deux triangles équilatéraux, ou à un seul carré, ou à deux triangles équilatéraux et à deux hexagones réguliers, ou enfin à deux pentagones réguliers, dont les plans seront perpendiculaires aux diamètres dont il s'agit.

En partant de ces remarques, on démontrera sans peine une relation curieuse qu'ont entre eux les trois polyèdres dans lesquels trois arêtes aboutissent à chaque sommet, savoir, le tétraèdre, l'hexaèdre et le dodécaèdre réguliers. Cette relation est exprimée par le théorème suivant :

THEOREME III. — *Les sommets de l'hexaèdre ou du dodécaèdre régulier sont en même temps les sommets de deux ou de cinq tétraèdres réguliers.*

Pour établir ce théorème, il suffit de recourir aux considérations suivantes :

Joignez par un diamètre deux sommets opposés d'un cube ou hexaèdre régulier. Les six sommets situés hors de ce diamètre appartiendront à deux triangles équilatéraux, et le tétraèdre qui, ayant pour base un de ces triangles, aura pour sommet l'une des extrémités du diamètre, savoir l'extrémité la plus éloignée de la base, sera évidemment un tétraèdre régulier; car, chacune de ses arêtes étant la diagonale d'une des faces du cube donné, les quatre arêtes seront toutes égales entre elles.

Concevons maintenant que l'on joigne par un diamètre deux sommets opposés A et A' d'un dodécaèdre régulier. Les trois pentagones adjacents au sommet A offriront en outre : 1° trois sommets B, C, D situés aux extrémités des trois arêtes qui partiront du sommet A; 2° six autres sommets E, F, G, H, I, K situés deux à deux sur les périmètres des trois pentagones aux extrémités de six diagonales égales entre elles. De ces neuf sommets, les trois premiers appartiendront à un triangle équilatéral, et les six derniers à un hexagone régulier, les plans de ces deux polygones étant perpendiculaires à la droite AA'. Ce n'est pas tout : les six sommets de l'hexagone EFGHIK, pris de deux



en deux, appartiendront à deux triangles équilatéraux EGI, FHK. J'ajoute que, si l'on donne un de ces deux derniers triangles, EGI par exemple, pour base à un tétraèdre dont le sommet soit A', ce tétraèdre sera régulier. Effectivement les quatre arêtes du tétraèdre dont il s'agit seront toutes égales à l'une quelconque des diagonales qui, dans le dodécaèdre, joindront deux sommets tellement situés que, pour passer de l'un à l'autre, il suffise de parcourir successivement trois arêtes non comprises dans un même plan. D'ailleurs, il est clair que, après avoir ainsi construit un tétraèdre régulier, auquel appartiendront quatre sommets du dodécaèdre, et spécialement le sommet A', il suffira de faire tourner le dodécaèdre autour de la perpendiculaire abaissée de son centre sur une face adjacente au sommet A', pour amener successivement ce sommet dans les positions d'abord occupées par les quatre autres sommets de la même face, et, par suite, pour amener successivement les quatre sommets A', E, G, I dans les positions d'abord occupées par les seize autres sommets du dodécaèdre. Donc les vingt sommets du dodécaèdre seront en même temps les sommets de cinq tétraèdres réguliers.

Supposons à présent que du centre d'un polyèdre régulier on mène des rayons vecteurs aux divers sommets de ce polyèdre. On construira ainsi une espèce de hérisson; et, si l'on considère une grandeur ou quantité dont la valeur dépende de la direction d'une droite émanant du centre du polyèdre, la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de cette quantité correspondantes aux divers rayons vecteurs ne variera pas, lorsqu'un mouvement de rotation imprimée au hérisson l'aura déplacé de manière à substituer les rayons vecteurs l'un à l'autre. Si cette dernière condition n'est pas remplie, la moyenne arithmétique dont il s'agit acquerra en général, après le déplacement du hérisson, une valeur nouvelle. Mais, cette valeur dépendant uniquement du nouvel aspect sous lequel le hérisson se présentera, on pourra, sans l'altérer en aucune manière, supposer que, en vertu du mouvement de rotation, la droite suivant laquelle un des rayons vecteurs était primitivement dirigé est venue s'appliquer sur la direction

du rayon vecteur qui, après le déplacement, forme avec cette droite le plus petit angle. C'est dans cette hypothèse que l'on doit se placer pour établir un lemme énoncé dans la dernière séance, savoir qu'un déplacement déterminé d'un polyèdre régulier tournant autour de son centre peut toujours être considéré comme le résultat de trois déplacements successifs dont chacun serait produit par un mouvement de rotation du polyèdre autour de l'un des rayons vecteurs menés du centre aux sommets.

ANALYSE.

Considérons un polyèdre régulier inscrit à la sphère dont le rayon est l'unité, et traçons sur la surface de la sphère des arcs de grands cercles qui aient pour cordes respectives les diverses arêtes du polyèdre. Cette surface sera partagée en polygones sphériques réguliers, dont le système formera une espèce de réseau; et le point de la surface qui servira de centre à chaque polygone sera le sommet commun de triangles sphériques isocèles qui auront pour bases respectives les divers côtés du polygone. Enfin chaque triangle isocèle se partagera en deux triangles rectangles qui auront pour sommet commun le milieu de sa base. Cela posé, soient

- m le nombre des côtés de chaque face du polyèdre régulier, ou, ce qui revient au même, de chacun des polygones qui composent le réseau tracé sur la surface de la sphère;
- a l'un de ces côtés, ou, en d'autres termes, la base de l'un des triangles sphériques isocèles;
- r l'un des côtés égaux de ce triangle;
- s l'arc de grand cercle qui joint le sommet de l'un des triangles sphériques isocèles au milieu de sa base;
- n le nombre des arêtes qui, dans le polyèdre régulier, aboutissent à chaque sommet.

Dans le triangle sphérique rectangle qui aura pour hypoténuse r , pour côtés $\frac{a}{2}$ et s , les angles opposés à ces derniers côtés seront évi-



demment $\frac{\pi}{m}$ et $\frac{\pi}{n}$. Par suite, on aura

$$(1) \quad \cos \frac{a}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}, \quad \cos r = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{m}}, \quad \cos r = \cos \frac{a}{2} \cos r.$$

De plus, chacun des triangles sphériques isocèles, offrant avec la base a deux côtés égaux à r , donnera

$$(2) \quad \frac{\sin r}{\sin a} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{m}}$$

Remarquons d'ailleurs que l'on aura

Pour le tétraèdre.....	$m = 3,$	$n = 3,$
Pour l'hexaèdre.....	$m = 4,$	$n = 3,$
Pour l'octaèdre.....	$m = 3,$	$n = 4,$
Pour le dodécaèdre.....	$m = 5,$	$n = 3,$
Pour l'icosaèdre.....	$m = 3,$	$n = 5.$

Enfin, l'arc $\frac{a}{2}$, toujours inférieur à un quart de circonférence, étant déterminé par la première des équations (1), les arcs a et $2a$ se déduiront des formules

$$(3) \quad \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1, \quad \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1.$$

A l'aide des formules (1), (2), (3), on reconnaitra immédiatement que l'arc $2(\pi - a)$ dans le tétraèdre, et l'arc a dans chacun des autres polyèdres réguliers, est toujours supérieur à l'arc r . Il y a plus : on aura, pour le tétraèdre,

$$\pi - a = r,$$

et, pour chacun des autres polyèdres réguliers,

$$a > r.$$

D'autre part, il est aisé de reconnaître : 1^o que, si le réseau sphérique, tracé sur la surface de la sphère, tourne autour de l'un de ses

noeuds, c'est-à-dire autour de l'un des sommets du polyèdre régulier donné, le déplacement de l'un quelconque des sommets voisins pourra être mesuré par l'un quelconque des arcs de grand cercle inférieurs à $2a$, ou, quand il s'agira du tétraèdre, à $2(\pi - a)$; 2^o que tout point situé dans l'intérieur d'un des polygones réguliers dont le système compose le réseau sphérique sera séparé d'un ou de plusieurs sommets de ce polygone, par une distance que mesurera un arc de grand cercle inférieur à r . En partant de ces remarques, on démontre aisément le lemme ci-dessus rappelé, et, par suite, les diverses propositions énoncées dans la séance précédente.

Ajoutons que le théorème III permet évidemment de simplifier la démonstration du théorème II de la page 6, ou du moins d'étendre la démonstration donnée pour le cas du tétraèdre au cas où le polyèdre régulier devient un cube ou un dodécaèdre.

402.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions d'une ou de plusieurs variables, et sur les fonctions isotropes.*

C. R., T. XXVI, p. 624 (12 juin 1848).

Considérons d'abord une fonction u d'une seule variable x , et supposons que cette fonction reste continue entre deux valeurs données de la variable. Si, après avoir interposé entre ces deux valeurs d'autres valeurs équidistantes dont le nombre, représenté par $n - 1$, soit très considérable, on cherche les diverses valeurs de la fonction u correspondantes aux $n + 1$ valeurs données de la variable x , la moyenne arithmétique entre ces valeurs de u se transformera, quand le nombre n deviendra infini, en ce que nous nommerons la *valeur moyenne* de la fonction u , et cette valeur moyenne sera le rapport des deux intégrales définies relatives à x , dans lesquelles les fonctions sous le signe \int seront u et l'unité. Pour plus de commodité, je désignerai cette valeur



moyenne de u à l'aide de la lettre caractéristique M , et je placerais au-dessous et au-dessus du signe M les limites de la variable, suivant l'usage adopté pour les intégrales définies.

Concevons maintenant que u représente une fonction de plusieurs variables x, y, \dots , qui reste continue pour les systèmes de valeurs de x, y, \dots comprises entre certaines limites. Le rapport entre les deux intégrales définies, qui, étant relatives à x, y, \dots et prises entre les limites données, renfermeront sous le signe \int la fonction u et l'unité, sera la limite vers laquelle convergera la moyenne arithmétique entre les valeurs de u qui correspondront à des éléments égaux de la seconde intégrale. Pour cette raison, le rapport dont il s'agit sera nommé la *valeur moyenne* de la fonction u .

On doit remarquer le cas particulier où les variables se réduisent, soit à un angle polaire mesuré dans un plan donné, soit à une abscisse mesurée sur un certain axe, et à un angle polaire décrit par un plan qui tourne autour de cet axe. Dans le dernier cas, les éléments de la seconde intégrale ne sont autre chose que les éléments d'une surface sphérique qui a pour centre l'origine des coordonnées. Alors aussi, quand les doubles intégrales sont prises, par rapport à l'abscisse, entre les limites $-1, +1$, et, par rapport à l'angle polaire, entre les limites $-\pi, +\pi$, la moyenne qu'on obtient est la moyenne arithmétique entre les valeurs de la fonction u correspondantes à des éléments égaux et infiniment petits de la surface totale de la sphère. Cette moyenne, d'ailleurs, dépend uniquement de la loi suivant laquelle u varie avec la direction d'une droite mobile menée par l'origine des coordonnées. Elle est, au contraire, indépendante des directions assignées à l'axe des abscisses et au plan polaire; elle demeure donc invariable, tandis qu'on fait tourner cet axe et ce plan, d'une manière quelconque, autour de l'origine. Pour cette raison, la moyenne dont il s'agit sera nommée *moyenne isotropique*.

Si la fonction u dépend seulement d'un angle polaire, la moyenne isotropique entre les diverses valeurs de cette fonction ne sera autre chose que sa valeur moyenne.

Concevons maintenant qu'une certaine grandeur u soit représentée par une fonction des coordonnées rectangulaires de divers points. Cette fonction variera généralement avec les directions des axes coordonnés. D'ailleurs, la direction d'un premier axe pourra être déterminée à l'aide d'une abscisse, mesurée sur une certaine droite, et d'un angle polaire décrit par un plan mobile qui tournerait autour de cette droite. De plus, la direction d'un second axe perpendiculaire au premier pourra être déterminée à l'aide d'un second angle polaire décrit par un plan qui tournerait autour du premier axe. Cela posé, nommons v la moyenne arithmétique entre les valeurs de u correspondantes au second angle polaire, et w la moyenne isotropique entre les diverses valeurs de v . La quantité w sera ce qu'on peut appeler la *moyenne isotropique* entre les diverses valeurs de u .

Dans le cas particulier où la fonction u deviendra indépendante des directions attribuées aux axes coordonnés, nous dirons qu'elle est *isotrope*. Alors, la moyenne isotropique entre les valeurs de la fonction correspondantes aux diverses positions des axes coordonnés ne sera autre chose que la fonction elle-même.

Lorsqu'une grandeur Ω dépend des positions de plusieurs points, elle peut être représentée par une fonction de leurs coordonnées, et, si l'on exprime ces coordonnées, supposées variables, par conséquent relatives à des axes mobiles, en fonction de coordonnées relatives à des axes fixes, cette transformation de coordonnées introduira dans l'expression de la grandeur dont il s'agit, trois angles variables φ, χ, ψ . Alors aussi la moyenne isotropique entre les diverses valeurs de la fonction sera représentée par une intégrale triple, relative à ces trois angles. Mais, avant de passer des axes mobiles aux axes fixes, on pourrait passer des axes mobiles à d'autres axes liés invariablement avec les premiers. Il en résulte que la moyenne isotropique cherchée ne variera pas, si à la fonction donnée des coordonnées primitives on substitue la fonction trouvée des coordonnées nouvelles, en considérant ces dernières coordonnées comme variables, et les trois angles φ, ψ, χ comme constants. Il y a plus : comme cette



proposition subsistera, quels que soient les angles φ, γ, ψ , elle subsistera encore quand on remplacera la fonction trouvée par sa valeur moyenne, relative à un ou à plusieurs des angles dont il s'agit. Ce principe permet d'établir, sur les moyennes isotropiques, un théorème remarquable que nous allons indiquer en peu de mots.

Lorsque la grandeur Ω , qui dépend des positions de plusieurs points, est représentée par une fonction entière de leurs coordonnées, il est facile d'obtenir en termes finis, souvent même, comme on le verra dans mon Mémoire, sans effectuer aucune intégration, la moyenne isotropique entre les diverses valeurs de Ω . Si la grandeur Ω est le produit d'une fonction entière de diverses coordonnées par un facteur qui dépend d'une fonction linéaire des coordonnées d'un seul point, il ne sera plus généralement possible d'obtenir en termes finis l'intégrale triple qui représentera la moyenne isotropique entre les diverses valeurs de Ω . Mais, à l'aide du principe ci-dessus énoncé, on pourra réduire cette intégrale triple à une intégrale simple. Cette proposition, très générale, renferme comme cas particulier le théorème à l'aide duquel Poisson a intégré l'équation du mouvement du son.

Les moyennes isotropiques et les fonctions isotropes jouent un rôle important dans la solution des problèmes de Physique mathématique. Ainsi, par exemple, c'est en remplaçant certaines fonctions par les moyennes isotropiques entre leurs diverses valeurs, que, dans mes *Exercices d'Analyse*, j'ai réduit les équations des mouvements infiniment petits d'un ou de deux systèmes de points matériels à la forme qu'elles acquièrent quand ces systèmes deviennent isotropes. Lorsqu'à un système de points matériels on substitue un système de molécules dont chacune peut, non seulement se déplacer ou tourner sur elle-même, mais encore subir dans les divers sens des condensations ou dilatations diverses, il devient plus difficile d'effectuer la même réduction, et d'obtenir en termes finis les équations des mouvements infiniment petits d'un système isotrope. Toutefois, en s'appuyant sur le théorème général ci-dessus rappelé, on peut encore effectuer la réduction demandée. C'est, au reste, ce que je montrerai dans un prochain

Mémoire, où je substituerai au système des six équations qu'a données M. Laurent, et qui déterminent les mouvements de translation et de rotation des molécules, le système de douze équations qui déterminent, en outre, les six inconnues desquelles dépendent les condensations et dilatations linéaires. On verra que, dans tous les cas, les seconds membres des équations des mouvements infiniment petits des systèmes isotropes renferment uniquement les trois espèces de termes qui se trouvaient déjà dans mes équations différentielles de la polarisation chromatique. Il n'est donc pas étonnant que cette polarisation soit la seule modification qu'imprime à un rayon lumineux son passage à travers un milieu isotrope.

403.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions et sur les fonctions isotropes.*

C. R., T. XXVI, p. 666 (19 juin 1848).

ANALYSE.

Supposons que l'on fasse varier x, y, z, \dots entre les limites

$$x = x_0, \quad x = x_1, \quad y = y_0, \quad y = y_1, \quad z = z_0, \quad z = z_1, \quad \dots,$$

y_0, y_1 pouvant être fonctions de x , et z_0, z_1 fonctions de x, y , etc. Soit d'ailleurs Θ une fonction de x ou de x, y , etc., qui reste continue entre les limites dont il s'agit. La valeur moyenne de Θ entre ces limites sera

$$(1) \quad \text{M} \Theta = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \Theta dx}{\int_{x_0}^{x_1} dx}$$

ou

$$(2) \quad \text{M} \Theta = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \Theta dx dy}{\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} dx dy}$$



Concevons maintenant qu'un système de points matériels A, A, A, ... liés invariablement les uns aux autres, soit mobile, mais assujéti à tourner autour d'un point fixe, et que Θ varie avec les directions de trois axes mobiles liés invariablement au système. Supposons d'ailleurs, pour plus de commodité, ces axes perpendiculaires l'un à l'autre. Θ pourra être considéré comme fonction des neuf angles formés par les trois axes mobiles avec trois axes fixes. Il y a plus : ces neuf angles, liés entre eux par six équations, pourront être réduits à trois angles polaires φ, χ, ψ , ces angles étant ceux que formeront l'un des axes mobiles avec un axe fixe, ou le plan de ces deux axes avec le plan mené par l'un d'entre eux, de manière à renfermer ou deux axes fixes ou deux axes mobiles. Cela posé, si l'on fait, pour abrégér,

$$\alpha = \cos \varphi,$$

les diverses positions que pourra prendre le système de points matériels correspondront toutes à des valeurs des variables

$$\alpha, \chi, \psi,$$

comprises entre les limites

$$\alpha = -1, \quad \alpha = 1, \quad \chi = -\pi, \quad \chi = \pi, \quad \psi = -\pi, \quad \psi = \pi,$$

et la valeur moyenne de Θ entre ces limites sera indépendante des directions assignées aux axes fixes. Si l'on désigne cette moyenne à l'aide de la lettre caractéristique π , alors $\pi\Theta$ sera précisément ce que j'ai nommé la *moyenne isotropique* entre les diverses valeurs de Θ , et l'on aura

$$(3) \quad \pi\Theta = \frac{\int_{\alpha=-1, \chi=-\pi, \psi=-\pi}^{\alpha=1, \chi=\pi, \psi=\pi} \Theta d\psi d\chi d\alpha}{\int_{\alpha=-1, \chi=-\pi, \psi=-\pi}^{\alpha=1, \chi=\pi, \psi=\pi} d\psi d\chi d\alpha},$$

par conséquent,

$$(4) \quad \pi\Theta = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 \Theta d\psi d\chi d\alpha.$$

Si Θ , dépendant uniquement de la direction assignée à un axe fixe,

se réduit à une fonction des seuls angles φ, χ , la formule (4) donnera

$$(5) \quad \pi\Theta = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 \Theta d\chi d\alpha.$$

Enfin, si Θ , dépendant uniquement de la distance assignée à un plan fixe, se réduit à une fonction de l'angle χ , on aura

$$(6) \quad \pi\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta d\chi.$$

Soient maintenant

r, r', r'', \dots les distances de l'origine aux points matériels A, A, A, ... ;
 $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; \dots$ les coordonnées de ces points mesurées sur les axes mobiles;

$x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; \dots$ les coordonnées des mêmes points mesurées sur les axes fixes;

et posons

$$(7) \quad \Theta = F(x, y, z, x', y', z', \dots).$$

Les coordonnées x, y, z seront liées avec les coordonnées x', y', z' par des équations de la forme

$$(8) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'; \end{cases}$$

et, si l'on nomme φ, χ, ψ les angles polaires que forment l'axe des x avec l'axe des x' , et le plan des ax avec les plans des xy et des xy' , on aura

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \varphi, & \beta = \sin \varphi \cos \chi, & \gamma = \sin \varphi \sin \chi, \\ \alpha' = \sin \varphi \cos \psi, & \beta' = -\sin \chi \sin \psi - \cos \varphi \cos \chi \cos \psi, & \gamma' = \cos \chi \sin \psi - \cos \varphi \sin \chi \cos \psi, \\ \alpha'' = \sin \varphi \sin \psi, & \beta'' = \sin \chi \cos \psi - \cos \varphi \cos \chi \sin \psi, & \gamma'' = -\cos \chi \cos \psi - \cos \varphi \sin \chi \sin \psi. \end{cases}$$

Cela posé, en considérant les coordonnées $x, y, z, x', y', z', \dots$ comme



constantes, et les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ comme variables avec φ, χ, ψ , on aura

$$(11) \quad \mathfrak{N}\Theta = \mathfrak{N}F(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \dots).$$

Si, pour éviter l'emploi d'un trop grand nombre de lettres, on écrit, dans la formule (11), x, y, z, x, \dots au lieu de x, y, z, x, \dots , on aura, en considérant les coordonnées x, y, z, x, \dots comme constantes, et les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ comme variables,

$$(12) \quad \mathfrak{N}\Theta = \mathfrak{N}F(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \dots).$$

Mais, puisque la moyenne $\mathfrak{N}\Theta$ est indépendante des directions assignées aux axes fixes, elle ne sera point altérée si l'on passe d'un système d'axes mobiles à un autre système d'axes mobiles liés invariablement aux premiers, sauf à passer ensuite du nouveau système d'axes mobiles à un système d'axes fixes. Donc la formule (12) continuera de subsister si l'on considère dans le second membre, non plus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ comme variables et x, y, z, \dots comme constantes, mais, au contraire, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ comme constantes et x, y, z, x, y, z, \dots comme variables. On aura donc, sous cette condition,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{M}F(x, y, z, x, y, z, \dots) \\ & = \mathfrak{N}F(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \alpha x + \beta y + \gamma z, \dots). \end{aligned} \right.$$

Il y a plus : comme le second membre de l'équation (13) ne variera pas quand on remplacera un système particulier de valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ par un autre, on pourra, sans altérer ce second membre, y substituer à la fonction placée sous le signe \mathfrak{N} la valeur moyenne entre plusieurs valeurs de cette fonction correspondantes à divers systèmes de valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$, et, par suite, sa valeur moyenne relative à un ou à plusieurs des angles φ, χ, ψ , en sorte qu'on aura, par exemple, en appliquant l'opération qu'indique le signe \mathfrak{N} aux seules coordonnées x, y, z, x, y, z, \dots ,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{N}F(x, y, z, x, y, z, \dots) \\ & = \mathfrak{N} \mathfrak{M}_{\substack{\chi=\pi \\ \chi=-\pi}} F(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \dots). \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose, pour abrégér,

$$\bar{\Theta} = F(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \alpha x + \beta y + \gamma z, \dots),$$

alors $\bar{\Theta}$ sera ce que devient Θ , en vertu d'une transformation de coordonnées, et les équations (13), (14), ..., réduites aux deux formules

$$(15) \quad \mathfrak{N}\Theta = \mathfrak{N}\bar{\Theta},$$

$$(16) \quad \mathfrak{N}\Theta = \mathfrak{N} \mathfrak{M}_{\substack{\chi=\pi \\ \chi=-\pi}} \bar{\Theta},$$

entraîneront le théorème que nous allons énoncer.

THÉORÈME I. — Soient

x, y, z, x, y, z, \dots les coordonnées de divers points;

Θ une fonction de ces coordonnées;

$\bar{\Theta}$ ce que devient Θ quand les axes coordonnés des x, y, z subissent un déplacement déterminé, dont la nature dépend de trois angles polaires φ, χ, ψ .

On aura, en considérant comme variables les seules coordonnées x, y, z, x, y, z, \dots ,

$$\mathfrak{N}\Theta = \mathfrak{N}\bar{\Theta};$$

et même on pourra, dans le second membre de l'équation (15), remplacer la fonction $\bar{\Theta}$ par sa valeur moyenne relative à un ou à plusieurs des trois angles φ, χ, ψ , ou plus généralement par une moyenne quelconque entre plusieurs valeurs de cette fonction.

Corollaire I. — Supposons, pour fixer les idées,

$$\Theta = f(ux + vy + wz),$$

u, v, w étant des paramètres quelconques. La formule (15) donnera

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{N}f[u(\alpha x + \beta y + \gamma z) + v(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) + w(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)] \\ & = \mathfrak{N}f(ux + vy + wz). \end{aligned} \right.$$



D'ailleurs, si l'on pose

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$\frac{u}{k}, \frac{v}{k}, \frac{w}{k}$ seront les cosinus des angles formés par une certaine droite avec les demi-axes des coordonnées positives, et en déplaçant l'axe des x de manière à le faire coïncider avec la droite dont il s'agit, on réduira le trinôme

$$ux + vy + wz$$

à la forme kx . On aura donc encore, en vertu du théorème I,

$$(18) \quad \mathfrak{N} f(ux + vy + wz) = \mathfrak{N} f(kx).$$

Enfin, en prenant pour axe polaire l'axe des x , et considérant α seul comme variable dans la fonction $f(kr\alpha)$, on aura

$$(19) \quad \mathfrak{N} f(kx) = \mathfrak{N} f(kr\alpha),$$

la valeur de r^2 étant

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Donc la formule (16) donnera

$$(20) \quad \mathfrak{N} f[u(\alpha x + \beta y + \gamma z) + v(\alpha'x + \beta'y + \gamma'z) + w(\alpha''x + \beta''y + \gamma''z)] = \mathfrak{N} f(kr\alpha)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(21) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 f[u(\alpha x + \beta y + \gamma z) + v(\alpha'x + \beta'y + \gamma'z) + w(\alpha''x + \beta''y + \gamma''z)] d\psi d\chi d\alpha \\ = 4\pi^2 \int_{-1}^1 f(kr\alpha) d\alpha.$$

Ainsi la formule (20) réduit une intégrale triple à une intégrale simple. Quant à la formule (18), qui réduit une intégrale double à une intégrale simple, elle reproduit précisément le théorème à l'aide duquel M. Poisson a intégré l'équation du son.

Corollaire II. — À l'aide d'une rotation imprimée aux axes coordonnés supposés rectangulaires, on peut les échanger entre eux de

manière à substituer aux axes des x, y, z les axes des y, z, x , ou des z, x, y . Donc l'équation (15) entraîne la suivante :

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{N} F(x, y, z, x, y, z, \dots) = \mathfrak{N} F(y, z, x, y, z, x, \dots) \\ \phantom{\mathfrak{N} F(x, y, z, x, y, z, \dots)} = \mathfrak{N} F(z, x, y, z, x, y, \dots). \end{cases}$$

En vertu de cette dernière équation, on aura, par exemple,

$$(23) \quad \mathfrak{N}(x^2) = \mathfrak{N}(y^2) = \mathfrak{N}(z^2) = \mathfrak{N} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = \frac{r^2}{3},$$

$$(24) \quad \mathfrak{N}(xx_1) = \mathfrak{N}(yy_1) = \mathfrak{N}(zz_1) = \mathfrak{N} \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{3} = \frac{rr_1 \cos(r, r_1)}{3},$$

$$(25) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}(xy, z) = \mathfrak{N}(yz, x) = \mathfrak{N}(zx, y), \\ \mathfrak{N}(xy, z) = \mathfrak{N}(yz, x) = \mathfrak{N}(zx, y). \end{cases}$$

Corollaire III. — À l'aide d'une rotation imprimée à deux axes coordonnés autour du troisième, par exemple aux axes des y et z autour de l'axe des x , on peut changer à la fois les signes des coordonnées mesurées sur ces deux axes, ou bien encore changer à la fois

$$y, y_1, y_2, \dots \text{ en } z, z_1, z_2, \dots$$

et

$$z, z_1, z_2, \dots \text{ en } -y, -y_1, -y_2, \dots$$

On aura donc, en vertu de l'équation (15),

$$(26) \quad \mathfrak{N} F(x, y, z, x, y, z, \dots) = \mathfrak{N} F(x, -y, -z, x, -y, -z, \dots)$$

et

$$(27) \quad \mathfrak{N} F(x, y, z, x, y, z, \dots) = \mathfrak{N} F(x, z, -y, x, z, -y, \dots).$$

En vertu de l'équation (22), on aura

$$(28) \quad \mathfrak{N} F(x, y, z, x, y, z, \dots) = 0,$$

si la fonction $F(x, y, z, x, y, z, \dots)$ change de signe avec les coordonnées mesurées sur les axes de y, z ; et d'ailleurs, les axes des y, z pouvant être remplacés ici par les axes des z, x ou des x, y , il en résulte qu'on aura pour exemple

$$(29) \quad \mathfrak{N}(x) = 0, \quad \mathfrak{N}(xy) = 0, \quad \mathfrak{N}(xyz) = 0, \quad \dots$$



En vertu de l'équation (22), on aura pour exemple

$$(30) \quad \mathfrak{M}(xy, z) = -\mathfrak{M}(x, yz).$$

Soit maintenant

$$(r, r', r'')$$

le volume du parallélépipède construit sur les rayons vecteurs r, r', r'' , ce volume étant pris avec le signe + ou avec le signe -, suivant que le mouvement de rotation de r en r' autour de r'' est direct ou rétrograde; on aura

$$(31) \quad [r, r', r''] = xy, z - x, y, z + x, y, z - x, y, z + x, y, z - x, y, z,$$

et les formules (25), (30) donneront

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(xy, z) &= \mathfrak{M}(x, yz) = \mathfrak{M}(x, yz) \\ &= -\mathfrak{M}(x, yz) = -\mathfrak{M}(x, yz) = -\mathfrak{M}(x, yz) = \frac{1}{2}[r, r', r'']. \end{aligned}$$

On peut encore, du théorème I, déduire la proposition suivante :

THÉORÈME II. — Supposons que

$$\Theta = F(x, y, z, x, y, z, \dots)$$

se réduise à une fonction entière des coordonnées x, y, z, x, y, z, \dots , de points matériels A, A, \dots ; soient toujours r, r', \dots les rayons vecteurs menés de l'origine à ces mêmes points, et, après avoir tracé les parallélogrammes qui ont pour côtés ces rayons vecteurs pris deux à deux, portons sur les perpendiculaires aux plans de ces parallélogrammes les moments linéaires équivalents à leurs surfaces. Enfin soient

$$x', y', z', x'', y'', z'', \dots$$

les coordonnées des extrémités de ces moments linéaires, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$x' = y, z'' - y, z,$$

et désignons toujours par $\bar{\Theta}$ ce que devient Θ en vertu d'une transformation de coordonnées qui introduit dans la valeur de $\bar{\Theta}$ les angles

polaires φ, γ, ψ . La valeur moyenne

$$\frac{\int_{\gamma=-\pi}^{\gamma=\pi} \bar{\Theta}}{\int_{\gamma=-\pi}^{\gamma=\pi} 1}$$

de $\bar{\Theta}$ considéré comme fonction de l'angle polaire γ , se réduira toujours à une fonction entière des seules coordonnées

$$x, x', x'', \dots, x', x'', \dots,$$

et des trois coefficients

$$\alpha, \alpha', \alpha''.$$

Corollaire. — On peut encore déduire immédiatement des théorèmes I et II la proposition suivante :

THÉORÈME III. — Supposons

$$\Theta = F(x, y, z, x, y, z, \dots) f(ux + vy + wz),$$

u, v, w étant trois paramètres quelconques, et $F(x, y, z, x, y, z, \dots)$ une fonction entière des coordonnées x, y, z, x, y, z, \dots . Supposons d'ailleurs, comme ci-dessus,

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

L'intégrale triple qui représentera la moyenne isotropique $\mathfrak{M}\Theta$ pourra être réduite à une intégrale simple, et même on pourra la déduire de l'intégrale simple

$$\mathfrak{M} f(kr) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(kr) da$$

par des différentiations relatives aux seules variables x, y, z .

Je reviendrai, dans un prochain article, sur les théorèmes qui précèdent. J'examinerai aussi les diverses méthodes que l'on peut suivre pour les appliquer à la recherche des mouvements infiniment petits des systèmes isotropes, et je comparerai l'analyse et les formules exposées à ce sujet dans mes *Exercices d'Analyse* et dans le Mémoire lithographié de 1836, avec l'analyse et les formules remarquables de M. Laurent.



J'observerai, en terminant, que les moyennes isotropiques coïncident avec celles qui résultent de la considération des polygones ou des polyèdres réguliers, et qui ont été considérées par M. Breton (de Champ) et par moi-même dans de précédents articles.

404.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les douze équations qui déterminent les mouvements de translation, de rotation et de dilatation d'un système de molécules.*

C. R., T. XXVI, p. 673 (19 juin 1848).

Simple énoncé.

405.

ARITHMÉTIQUE. — *Rapport sur les moyens proposés par les auteurs de divers Mémoires pour la solution des difficultés que présentent le dépouillement et le recensement des votes dans les élections nouvelles.*

C. R., T. XXVI, p. 399 (3 avril 1848).

L'Académie nous a chargés d'examiner les documents et projets présentés par M. d'Avout, capitaine d'état-major, et par M. Auguste-Napoléon Naquet, ainsi que les moyens proposés par ces deux auteurs pour la solution des difficultés inhérentes au dépouillement et au recensement des votes dans les élections nouvelles. Ces difficultés offrent, en effet, une question digne par son importance de fixer l'attention de tous ceux qui s'occupent de calcul et d'opérations arithmétiques. Entrons à ce sujet dans quelques détails, et recherchons comment les opérations relatives aux élections nouvelles pourront

s'exécuter dans les départements populeux, par exemple dans le département de la Seine.

D'après le recensement fait en 1836, le département de la Seine renfermait 1 106 891 habitants. Ce même nombre a dû s'accroître depuis 12 années. Effectivement le décret relatif aux élections, en prenant pour base 1 représentant par 40 000 habitants, attribue au département de la Seine 34 députés, ce qui suppose une population d'environ 34 fois 40 000, ou 1 360 000 habitants. D'ailleurs, il suit des listes de population insérées dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, que, sur 10 000 000 d'habitants, le nombre des individus âgés de 21 ans et plus est de 5 808 267. Il en résulte que, dans le département de la Seine, le nombre des individus âgés de 21 ans et plus est d'environ 789 924. D'ailleurs, le rapport entre les naissances des individus des deux sexes masculin et féminin est, comme l'on sait, supérieur à l'unité, et sensiblement égal au rapport de 17 à 16. D'après ces données, le nombre des hommes âgés de 21 ans et plus, dans le département de la Seine, doit surpasser 394 962, et différer peu de 407 233. Mais pour ne rien exagérer, et attendu qu'il y aura toujours des individus qui négligeront d'user de leurs droits, on peut supposer le nombre des électeurs réduit à 300 000. On obtiendrait un résultat peu différent de celui-ci en ajoutant au nombre des individus qui composent la garde nationale le nombre de ceux qui sont âgés de 55 ans et plus. Remarquons maintenant que chacun des électeurs devra inscrire sur la liste qu'il déposera dans l'urne électorale les noms de 34 candidats. Le scrutin pourra donc produire 300 000 fois 34 ou 10 200 000 noms qui devront être prononcés distinctement par ceux qui seront appelés à faire le dépouillement des votes. Or, dans les élections municipales, on était parvenu à faire le dépouillement de 100 listes composées de 12 noms chacune en une demi-heure environ. D'après cette expérience, une demi-heure semblerait devoir suffire au dépouillement de 1200 noms, et une heure au dépouillement de 2400 noms. Donc 4250 heures, c'est-à-dire environ 177 jours de 24 heures chacun, ou, ce qui revient au même, 354 jours



de 12 heures chacun devraient être employés au dépouillement de 10 200 000 noms. Mais ce n'est pas encore tout, et la difficulté du dépouillement se trouvera notablement accrue, en raison du grand nombre des candidats; en sorte qu'on ne pourra guère appeler plus de 12 ou 15 noms par minute. Cela posé, la longueur de l'opération sera doublée, ou même triplée; et, pour effectuer en un petit nombre de jours un si prodigieux travail, on sera obligé de le partager entre un très grand nombre de personnes, ce qui entraînera un recensement très laborieux.

Doit-on en conclure qu'il est impossible d'imprimer à l'opération électorale le caractère mathématique essentiel à tout calcul qui offre quelque intérêt, à toute opération qui a quelque importance, et qui, pour atteindre le but qu'on se propose en l'exécutant, doit être non seulement praticable, mais encore exacte et porter sa preuve avec elle.

Nous ne le pensons pas, et un heureux précédent vient appuyer notre opinion à cet égard.

En 1841, M. Thoyer, employé à la Banque de France, après avoir imaginé une méthode propre à simplifier notablement le calcul des escomptes des effets admis chaque jour, eut devoir composer un Mémoire à ce sujet, et présenter son travail à l'Académie des Sciences. Une Commission fut nommée pour l'examen du Mémoire de M. Thoyer. Le Rapport que l'un de nous fit au nom de cette Commission proposa l'approbation du Mémoire, et les conclusions du Rapport furent adoptées. Le rapport indiquait d'ailleurs une simplification nouvelle que l'on pouvait apporter aux calculs de M. Thoyer. Depuis cette époque, la Banque de France peut chaque jour se rendre compte de sa situation financière, et le travail long et pénible qu'exigeait autrefois la vérification du calcul des escomptes journalièrement admis devient une opération non seulement praticable, mais facile, et qui se termine en moins d'une demi-heure.

Aujourd'hui ce n'est plus de la Banque de France qu'il s'agit, c'est de la France elle-même. A la vérité, le problème à résoudre est tou-

jours de rendre praticable et facile une grande opération arithmétique. Mais cette opération est devenue colossale, et, au lieu d'intéresser seulement la fortune de quelques citoyens, elle intéresse au plus haut degré tout l'avenir de notre patrie. Il importe à tous que l'on trouve les moyens d'affaiblir et d'annuler, s'il est possible, l'influence que les erreurs involontaires, si difficiles à éviter complètement dans un travail de cette espèce, pourraient exercer sur les élections. Il importe à tous les agents du pouvoir, ainsi qu'à tous les citoyens qui seront appelés soit à faire le dépouillement et le recensement des votes, soit à rédiger et à transmettre aux chefs-lieux de département les procès-verbaux destinés à constater les résultats de ces opérations, qu'aucun d'eux ne puisse être considéré comme étant devenu involontairement la cause de quelques incertitudes.

Pour éviter un si grave inconvénient, deux conditions sont nécessaires :

1^o Il est nécessaire que l'opération électorale, qui naturellement serait très compliquée, devienne très simple et d'une exécution facile. Car ici la simplicité, la facilité d'exécution est une condition indispensable d'exactitude;

2^o Il est nécessaire que l'opération électorale, comme toutes les opérations arithmétiques, comme toutes les opérations de banque ou de commerce, comme toutes celles qui intéressent la fortune des citoyens et le trésor public, porte sa preuve avec elle. Les soins que l'on se donne, les procédés auxquels on a recours pour assurer l'exactitude de ces diverses opérations, ne sauraient être négligés quand il s'agit de constater l'élection des représentants appelés par leurs concitoyens à régler les destinées de la France.

Les moyens que les auteurs des Mémoires soumis à notre examen ont imaginés pour remplir les conditions ci-dessus indiquées consistent principalement dans l'usage de certaines feuilles de pointage, et dans la division du travail entre plusieurs groupes de scrutateurs qui, pris trois à trois, seraient chargés du dépouillement des votes émis en faveur d'un certain nombre de candidats.



Les feuilles de pointage proposées par M. d'Avout se réduisent à des Tables à double entrée. Les deux premières colonnes verticales renferment, avec les noms des divers candidats, des numéros d'ordre indiquant le rang dans lequel ces noms sont sortis. La première colonne horizontale renferme la suite des nombres naturels. Chaque fois que le nom d'un candidat sortirait de l'urne, la première case vide qui suivrait ce nom serait pointée, c'est-à-dire noircie par un point; et le pointage terminé, le chiffre situé au-dessus de la dernière case pointée indiquerait le nombre de voix acquises au candidat dont il s'agit.

Les feuilles de pointage proposées par M. Naquet sont divisées chacune en dix bandes verticales, en tête desquelles s'inscrivent les noms de dix candidats. Chaque bande renferme un grand nombre de points répartis entre plusieurs lignes horizontales superposées, et chaque ligne renferme dix points dont le système est divisé en deux groupes de cinq. Chaque fois que le nom d'un candidat sort de l'urne, on pointe, ou, en d'autres termes, on couvre d'un trait de plume l'un des points qui appartiennent à la bande située au-dessous du nom prononcé, en commençant par les points qui, dans cette bande, sont les plus voisins de ce même nom. Les nombres 20, 40, 60, ..., placés en avant de la seconde, de la quatrième, de la sixième, ... ligne horizontale de points, fournissent, quand le pointage est terminé, le moyen de reconnaître immédiatement le nombre des voix acquises au candidat dont le nom se lit en tête de la bande.

M. d'Avout et M. Naquet ont supposé l'un et l'autre les scrutateurs partagés en groupes de trois, ou autrement dit en trios, dont chacun serait chargé du dépouillement des votes émis en faveur d'un certain nombre de candidats. M. Naquet assigne à chaque trio deux ou trois lettres de l'alphabet; et, afin d'écartier les erreurs, il veut que les scrutateurs qui feront partie d'un même trio se mettent d'accord de 5 en 5 voix.

On ne peut admettre que, dans les grandes villes, à Paris par exemple, le dépouillement des votes se fasse à la mairie de chaque

arrondissement. En effet, supposons un instant que l'on adoptât cette mesure. Alors, dans un arrondissement qui renfermerait 30 000 électeurs, le nombre des noms écrits sur les bulletins, et prononcés à haute voix dans le dépouillement des votes, pourrait s'élever à 30 000 fois 34, c'est-à-dire à plus de 1 000 000. Donc, en supposant que l'on puisse dépouiller 15 noms à la minute, par conséquent 900 noms ou même 1000 noms à l'heure, on aurait besoin de 1000 heures ou de 100 jours à 10 heures de travail par journée, pour effectuer le dépouillement tout entier. Lors même que l'on parviendrait à rendre le dépouillement deux ou trois fois plus rapide, l'opération dont il s'agit serait encore inexécutable. Il sera donc non seulement utile, mais nécessaire, surtout à Paris, d'établir dans chaque arrondissement un assez grand nombre de salles d'élection, dans chacune desquelles le dépouillement s'effectue. M. Naquet avait d'abord proposé de porter à 1000 le nombre des électeurs qui feraient partie de chaque assemblée électorale. Dans un second projet, il propose de faire correspondre à Paris les assemblées électorales aux compagnies de la garde nationale. Alors une même salle d'élection recevrait les électeurs inscrits dans une même compagnie, et tous ceux qui habitent les mêmes rues que ces électeurs. Si l'on admettait cette hypothèse, 3 jours à 10 heures de travail par journée pourraient suffire au dépouillement des votes dans chaque salle d'élection. Le dépouillement pourrait s'effectuer en un ou deux jours, si l'on établissait deux ou trois salles d'élection par compagnie, de manière que chaque salle renfermât 300 ou 400 électeurs.

Les feuilles de pointage sont encore, dans les Mémoires de M. Naquet, appliquées à un usage particulier, que nous allons indiquer en peu de mots.

Pour constater l'exactitude de l'opération qui a pour objet le dépouillement des votes, il est utile de charger des scrutateurs spéciaux du soin de recueillir le nombre des voix perdues. Le travail de ces scrutateurs spéciaux deviendra très facile, si, comme le propose M. Naquet, ils opèrent sur des feuilles de pointage divisées en colonnes verticales, en tête desquelles seraient inscrits les divers





nombres entiers, depuis l'unité jusqu'à 34. Alors il suffira de couvrir d'un trait de plume un point situé dans la colonne en tête de laquelle se lira, par exemple, le nombre 7, toutes les fois que sur une liste manqueront les noms de sept candidats. Si les noms des trente-quatre candidats manquaient à la fois, c'est-à-dire si le bulletin tiré de l'urne était un billet blanc, les scrutateurs devraient pointer, c'est-à-dire couvrir d'un trait de plume un des points situés dans la colonne en tête de laquelle serait écrit le nombre 34.

Le pointage étant terminé sur chacune des feuilles qui indiquent, d'une part le nombre de voix acquises à chaque candidat, d'autre part le nombre des voix perdues, chaque scrutateur devrait joindre à la feuille de pointage sur laquelle il aurait opéré un procès-verbal, qui serait purement et simplement le résumé des faits constatés par cette même feuille. Les trois procès-verbaux rédigés et signés par les scrutateurs qui auraient pris part à une même opération seraient comparés et mis d'accord entre eux. De ces trois procès-verbaux, l'un serait immédiatement communiqué aux électeurs qui voudraient en prendre connaissance, conservé dans la salle d'élection pendant plusieurs jours à la disposition de tous ceux qui désireraient le consulter, et publié par voie d'impression; un autre serait envoyé à la mairie, et le troisième à l'Hôtel de Ville.

A l'aide des procès-verbaux dressés comme on vient de le dire, tout électeur pourrait immédiatement connaître le nombre des voix obtenues par l'un quelconque des candidats dans chaque salle d'élection. On en déduirait sans peine le nombre total des voix acquises à chaque candidat dans les différentes salles.

Le recensement des votes acquis à chaque candidat dans chaque arrondissement pourrait être avec avantage effectué dans chaque mairie le lendemain du dépouillement des votes dans les salles d'élection. Il conviendrait que les résultats de ce recensement fussent rendus publics par voie d'impression. La preuve de l'exactitude de cette opération serait la publication même des procès-verbaux dressés dans les différentes salles d'élection.

Le recensement des votes acquis à chaque candidat dans le département devra, d'après le décret relatif aux élections, être fait à l'Hôtel de Ville. La preuve de l'exactitude de cette opération sera la publication des recensements partiels faits dans chaque mairie.

Observons, d'ailleurs, que les procès-verbaux destinés à constater le nombre des voix perdues fourniraient, comme nous l'avons dit, une dernière preuve de l'exactitude des opérations électorales.

MM. d'Avout et Naquet ont encore examiné et discuté le parti que l'on peut tirer, pour faciliter le dépouillement du scrutin, d'une idée émise par l'un des commissaires. Cette idée, qui consiste à distinguer dans le dépouillement deux sortes de listes, savoir, les listes individuelles déposées dans l'urne par des électeurs qui seront seuls de leur avis, et les listes collectives déposées par des électeurs qui se seront concertés entre eux pour réunir leurs voix sur les mêmes candidats, sera l'objet spécial d'une Note placée à la suite de ce Rapport.

En résumé, les Commissaires pensent que plusieurs des idées émises par MM. d'Avout et Naquet peuvent être utilement appliquées à la simplification du dépouillement du scrutin dans les élections nouvelles.

Nous proposons en conséquence à l'Académie d'engager ces auteurs à poursuivre les recherches qu'ils ont entreprises pour découvrir des moyens propres à rendre plus facile l'opération électorale, et de leur voter des remerciements.

406.

ARITHÉTIQUE. — *Note sur un moyen de rendre plus rapide le dépouillement du scrutin dans les élections nouvelles.*

C. R., T. XXVI, p. 404 (3 avril 1848).

Il existe un moyen simple de rendre plus rapide le dépouillement du scrutin dans les élections nouvelles. Nous allons l'indiquer en peu de mots.



Les listes de candidats déposées dans l'urne électorale par les électeurs seront de deux espèces :

Certaines listes particulières et *individuelles* seront déposées par des électeurs dont chacun sera seul de son avis et n'aura pris conseil que de lui-même. Mais ces listes seront évidemment peu nombreuses, eu égard au nombre total des votants, et elles auront pour effet unique de disséminer des votes sur un grand nombre de candidats, dont la plupart n'auront aucune chance de succès. D'autres listes auront sur les élections une influence marquée et décisive : ce seront les listes *collectives* déposées dans l'urne, non par des individus isolés, mais par des électeurs qui, jaloux de faire un acte sérieux et de ne point perdre leurs voix, se seront concertés entre eux pour porter leurs suffrages sur les mêmes candidats.

Pour réduire à une grande simplicité l'opération si laborieuse du dépouillement, il suffirait de la partager en deux autres qui se rapporteraient, l'une aux listes individuelles, l'autre aux listes collectives.

Le dépouillement des listes individuelles s'exécuterait tout naturellement dans les formes ordinaires. Les résultats de ce dépouillement, dans chaque salle d'élection, seraient constatés par des procès-verbaux qui feraient connaître le nombre des voix acquises à chaque candidat sur les listes individuelles.

Quant aux listes collectives, il ne serait nullement nécessaire d'en faire le dépouillement. Il suffirait que chacune de ces listes, étant ou autographiée, ou lithographiée, ou imprimée, portât en tête, avec le mot *liste collective*, un nombre de cinq chiffres pris au hasard, ce qui permettrait de reconnaître, à mesure qu'ils se présenteraient dans le dépouillement du scrutin, les divers exemplaires d'une même liste. Des numéros d'ordre attribués aux diverses listes indiqueraient l'ordre suivant lequel elles se seraient présentées l'une après l'autre dans l'opération du dépouillement. Des feuilles blanches, divisées en colonnes verticales, en tête desquelles on inscrirait ces numéros d'ordre, seraient placées devant trois scrutateurs spéciaux. Lors-

qu'une liste collective paraîtrait pour la première fois, chacun des trois scrutateurs en question inscrirait, au-dessous du numéro d'ordre, le nombre de cinq chiffres qui servirait à caractériser cette liste; et, au-dessous de ce nombre, dans 34 cases vides, les noms des candidats portés sur la liste. Trois autres scrutateurs marqueraient sur des feuilles de pointage les nombres des voix acquises à chaque liste collective. Lorsque la même liste, caractérisée par le même nombre, reparaitrait, l'un des scrutateurs chargés d'inscrire les noms des candidats sur les feuilles blanches prononcerait à haute voix le numéro correspondant à ce nombre, et chacun des scrutateurs chargés des feuilles de pointage correspondantes aux listes collectives couvrirait d'un trait un des points placés au-dessous de ce numéro, en commençant par les points qui en seraient les plus voisins. En outre, pour éviter toute erreur, le président transmettrait aux trois scrutateurs chargés des feuilles blanches les listes collectives, à chacune desquelles ils appliqueraient le numéro qui lui reviendrait; et ces mêmes scrutateurs auraient soin de poser les uns sur les autres les divers exemplaires de chaque liste et de bien s'assurer qu'ils sont tous semblables entre eux. Enfin, lorsque le dépouillement du scrutin serait terminé, et que les scrutateurs chargés des feuilles de pointage pour les listes collectives auraient inscrit le nombre de voix acquises à chacune de ces listes, les divers paquets dont chacun comprendrait les divers exemplaires d'une même liste seraient successivement, et suivant l'ordre indiqué par les numéros des listes, rapportés au président, qui compterait immédiatement à haute voix le nombre des exemplaires compris dans chaque paquet, puis les ferait passer aux secrétaires, en ayant soin de vérifier avec eux la parfaite identité des divers exemplaires d'une même liste. Le compte fait, par le président, des exemplaires d'une liste devrait évidemment reproduire le nombre des voix acquises à cette liste sur les feuilles de pointage.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les listes collectives déposées dans l'urne électorale n'étaient pas modifiées par les élec-



teurs eux-mêmes. Mais il peut arriver que, dans une liste collective, un électeur remplace un nom par un autre. Pour remédier à cet inconvénient, on pourrait se borner à faire rentrer les listes *collectives modifiées* dans la classe des listes individuelles; mais cet expédient détruirait en grande partie la simplicité de l'opération. Il sera infiniment plus commode et plus simple de constater les divers remplacements comme s'il s'agissait de la conscription militaire, et de charger des scrutateurs spéciaux d'indiquer sur des feuilles de pointage combien de fois chaque candidat aura été ou remplaçant ou remplacé.

Pour se faire une idée de la grande simplification qu'apportera au dépouillement du scrutin la distinction établie entre les listes individuelles et les listes collectives, il suffit d'observer que, en opérant comme on vient de le dire, on remplace généralement la lecture, faite à haute voix, des noms portés sur une liste collective, c'est-à-dire de 34 noms dont chacun doit être prononcé distinctement, par l'énonciation du seul nombre qui caractérise cette liste. Il est donc naturel de croire que le moyen indiqué réduira, pour les listes collectives non modifiées, le temps de l'opération dans le rapport de 34 à l'unité, ou, ce qui revient au même, dans le rapport d'une demi-heure environ à une minute. Il y a plus : la réduction opérée sera, selon toute apparence, plus considérable qu'on ne vient de le dire. Car le nombre qui caractérisera une liste collective se prononcera plus rapidement que le nom d'un candidat, joint aux prénoms, et autres indications qui pourront servir à distinguer ce candidat d'un autre, et que l'on devra énoncer aussi, pour ne pas s'exposer à confondre entre eux des homonymes.

Le pointage des différentes feuilles relatives, soit aux listes individuelles, soit aux listes collectives, soit aux remplacements opérés sur ces dernières listes étant terminé, chaque scrutateur pourra joindre à sa feuille de pointage un procès-verbal qui sera purement et simplement le résumé des faits constatés par cette même feuille. Les trois procès-verbaux rédigés et signés par les scrutateurs qui auraient pris

part à une même opération seraient comparés et mis d'accord entre eux, et l'on ferait de ces trois procès-verbaux l'usage qui a été indiqué dans le Rapport.

A l'aide de ces mêmes procès-verbaux, dont l'un serait immédiatement communiqué aux électeurs, et conservé pendant plusieurs jours dans la salle d'élection, il serait facile de connaître en un instant le nombre des voix obtenues dans cette salle par l'un quelconque des candidats. Supposons, pour fixer les idées, que le nom d'un candidat se trouve à la fois sur trois listes collectives, dont l'une ait réuni 400 suffrages, l'autre 100 suffrages, l'autre 53 suffrages : il est clair que le nombre total des voix acquises à ce candidat sur les listes collectives sera 400 plus 100 plus 53, ou 553. Si d'ailleurs le procès-verbal relatif aux listes individuelles donne à ce candidat 12 suffrages; si enfin les procès-verbaux de remplacement le portent trois fois parmi les remplacés, cinq fois parmi les remplaçants, on devra au nombre 553 ajouter le nombre 12 et la différence 2 des nombres 5 et 3. La somme 553, plus 12 plus 2, ainsi obtenue, ou le nombre 567, sera précisément le nombre total des voix acquises au candidat dont il s'agit.

Nous remarquerons, en finissant, qu'il sera très avantageux de se borner, le jour du dépouillement du scrutin, à remplir et à dresser, dans chaque salle d'élection, les feuilles de pointage, avec les procès-verbaux dont chacun offrira le résumé pur et simple d'une de ces feuilles. Ces premières opérations n'exigeront aucun calcul, puisqu'il suffira de constater sur chaque feuille de pointage le nombre des voix acquises à chaque candidat ou à chaque liste collective, et pourront, en conséquence, s'effectuer très facilement, même au milieu du bruit et du bourdonnement causés par des conversations particulières, et par la présence simultanée d'un grand nombre d'électeurs dans la même salle. A la vérité, l'addition à l'aide de laquelle on pourra déduire des diverses feuilles de pointage le nombre des voix acquises à l'un quelconque des candidats sera encore une opération assez simple, et qui, dans chaque salle d'élection, pourra s'achever en



quelques minutes. Toutefois les additions du même genre, relatives aux divers candidats, et celles qu'exigera le recensement des votes émis dans les diverses salles d'élection, pouvant employer, eu égard au grand nombre des candidats, un temps assez considérable, il conviendra de s'en occuper, non le jour même du dépouillement, mais les jours suivants, ce qui permettra d'effectuer tranquillement et à tête reposée, d'une part dans les salles d'élection, d'autre part dans les mairies et à l'Hôtel de Ville, ces mêmes additions, dans lesquelles il ne sera possible de commettre aucune erreur sans qu'elle soit promptement reconnue et rectifiée, si l'on adopte la marche indiquée dans le Rapport.

407.

ARITHMÉTIQUE. — *Rapport sur les moyens que divers auteurs proposent pour faciliter les opérations relatives aux élections nouvelles.*

C. R., T. XXVI, p. 441 (17 avril 1848).

Dans l'avant-dernière séance, nous avons rendu compte des propositions faites par MM. Naquet et d'Avout pour rendre plus faciles le dépouillement et le recensement des votes dans les élections nouvelles. Les conclusions du Rapport que nous avons lu à ce sujet ont été adoptées par l'Académie. Mais de nouvelles propositions adressées par divers auteurs ont été renvoyées à notre examen; nous allons en rendre compte en peu de mots.

M. Hubert a proposé des feuilles de pointage qui ont beaucoup de rapport avec celles qu'avait présentées M. Naquet. Dans le système de M. Hubert, les points, remplacés par des ovales ou espèces d'ellipses, deviennent plus apparents; chaque scrutateur est chargé du dépouillement des votes émis en faveur de cinq candidats dont les noms sont écrits sur une planche, au-dessus les uns des autres; enfin la feuille de pointage se transforme en un cahier dont chaque feuillet se divise

en cinq parties correspondantes aux cinq candidats, et présente, à la suite du nom de chaque candidat, cent points au plutôt cent ovales répartis entre dix lignes superposées. Le scrutateur pointe et numérote les feuillets placés en avant du nom d'un candidat, à mesure que ce nom sort de l'urne. Lorsque le dépouillement du scrutin est terminé, l'inspection seule du dernier feuillet, et du numéro qu'il porte, fait immédiatement connaître le nombre total des voix acquises au candidat dont il s'agit. Supposons, par exemple, que le dernier feuillet soit le quatrième, et qu'il indique 42 votes acquis à un candidat. On en conclura que le nombre de voix acquises à ce candidat est inférieur à 400 et précisément égal à 342.

Ce procédé a l'avantage de restreindre en surface l'étendue des feuilles qui doivent être simultanément parcourues par les yeux des scrutateurs. Mais à côté de cet avantage se trouverait l'inconvénient devant lequel M. Naquet s'est arrêté, savoir, de trop augmenter le nombre des scrutateurs.

M. Augier suppose qu'on remet à chaque électeur, avec sa carte, un bulletin divisé en cases, sur lesquelles s'inscrivent les noms des candidats, puis qu'à l'aide d'une machine à découper on sépare chaque bulletin en bandes dont chacune contient un seul nom, puis enfin que l'on attache ensemble, et que l'on compte, après les avoir réunies par centaines, les bandes qui portent le même nom. Il est vrai que ce mode de dépouillement paraîtrait avantageux sous un certain rapport, puisqu'il dispenserait de lire les bulletins avant qu'ils fussent découpés. Mais la Commission observe qu'il faudrait les lire après, et que ce mode d'opération peut prêter à des erreurs ou des fraudes qu'il ne serait pas possible de discerner; ce qu'a reconnu l'auteur lui-même.

MM. Vuillemet et Sabran avaient d'abord remplacé les feuilles de pointage par un Tableau unique dans lequel le nom de chaque candidat était suivi de trois ou quatre dizaines de points que renfermaient trois ou quatre colonnes verticales. Ces colonnes étaient censées correspondre aux unités, dizaines, centaines, etc. Le pointage



s'exécutait, pour chaque candidat, à l'aide de trois ou quatre épingles qui s'appliquaient successivement sur les divers points, et qui s'enfonçaient dans un tapis étendu sous le Tableau. La position de ces épingles indiquait, à chaque instant, le nombre des voix déjà obtenues par le candidat. Enfin, des numéros d'ordre placés dans la première colonne verticale en avant des noms des candidats facilitaient la recherche de ces mêmes noms.

L'usage des épingles offrant quelques inconvénients sous le rapport de la stabilité, MM. Vuillermet et Sabran y ont substitué plus tard des chevilles qui s'enfoncent dans des planchettes en bois percées de trous. Enfin, à ces planchettes ils substituent maintenant un mécanisme semblable à celui dont on se sert pour compter les points au jeu de billard. Seulement ils emploient trois ou quatre dizaines de boules diversement colorées, et correspondantes aux unités, dizaines, centaines, etc. A l'aide de ce mécanisme, comme à l'aide de la planchette, on connaît à chaque instant, sans aucune addition, le nombre des voix acquises à chaque candidat. Les auteurs supposent d'ailleurs que deux ou trois personnes chargées de la même opération s'arrêtent de 25 en 25 bulletins, pour s'assurer qu'elles marchent d'accord. En cas d'erreur, elles n'auraient à vérifier que le travail relatif aux 25 derniers bulletins.

Ce dernier procédé procure, en réalité, une économie de place; mais ce serait aux dépens de l'économie de temps, et d'ailleurs la mobilité des boules pourrait devenir une cause d'incertitude.

En résumé, les Commissaires proposent à l'Académie de remercier les auteurs des divers Mémoires de leurs Communications.

408.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Rapport sur un Mémoire de M. GORINI, relatif aux résidus des puissances d'un même nombre.*

C. R., T. XXVI, p. 443 (17 avril 1848).

L'Académie nous a chargés, M. Lamé et moi, d'examiner un Mémoire de M. Gorini relatif à la formation des périodes de résidus que fournissent les puissances d'une même base, dans le cas où le module est lui-même une puissance d'un nombre premier.

L'auteur du Mémoire désigne sous le nom de *périodes arithmétiques* et de *périodes géométriques* les deux espèces de périodes auxquelles on arrive en cherchant les résidus qu'on obtient quand on divise par le module les divers termes d'une progression arithmétique qui commence par zéro, ou d'une progression géométrique qui commence par l'unité. Il prouve que, dans le cas où le module est, par exemple, le carré d'un nombre premier p , la période géométrique relative à une base donnée se décompose en périodes arithmétiques correspondantes à des indices qui forment eux-mêmes une progression arithmétique dont la différence est $p - 1$. En partant de ce principe, il indique un moyen facile de ramener la recherche des résidus correspondants au module p^2 à la recherche des résidus correspondants au module p .

En résumé, les Commissaires pensent que le Mémoire de M. Gorini peut être lu avec intérêt par les personnes qui s'occupent de la théorie des nombres, et ils proposent à l'Académie de voter à l'auteur des encouragements.

409.

ARITHMÉTIQUE. — *Note sur le recensement des votes dans les élections générales.*

C. R., T. XXVI, p. 469 (1^{er} mai 1848).

Une question a été débattue au sujet des élections du département



de la Seine. Il s'agissait de trouver un mode de recensement rapide et sûr, à l'aide duquel on pût, des procès-verbaux qui donnaient les résultats du dépouillement des votes dans chaque arrondissement électoral, déduire avec facilité les noms des candidats appelés à représenter le département dans l'Assemblée nationale. Or cette question peut être aisément et promptement résolue, à l'aide d'un procédé très simple, qui serait applicable, dans tous les départements, à des élections nouvelles, comme aux élections déjà faites, et que je vais exposer en peu de mots.

Pour mieux fixer les idées, je choisirai comme exemple le département de la Seine, divisé en quatorze arrondissements, et je supposerai séparément recueillis, comme dans les dernières élections, les votes de l'armée et de la garde nationale mobile qui, prises en masse, peuvent alors être censées former un quinzième arrondissement électoral. Je supposerai encore que les quinze arrondissements électoraux doivent concourir à la nomination de trente-quatre représentants, et que les élections se font par scrutin de liste.

Cela posé, je remarquerai d'abord que, après la clôture du scrutin, et avant même que le dépouillement s'effectue, les feuilles d'émargement et la supputation des bulletins retirés de chaque urne constatent le nombre des votants dans chacun des quinze arrondissements électoraux.

D'autre part, le dépouillement des votes, dans chaque arrondissement électoral, fournit une liste de candidats que l'on peut classer dans l'ordre indiqué par le nombre des suffrages obtenus, le rang d'un candidat étant plus ou moins élevé sur cette liste, suivant que le nombre des votes émis en sa faveur est plus ou moins considérable. Concevons que les quinze listes ainsi dressées dans les quinze arrondissements soient comparées entre elles. Si les noms des trente-quatre premiers candidats sont les mêmes sur ces quinze listes, ces noms seront précisément ceux des représentants élus. Dans le cas contraire, on pourra opérer de la manière suivante.

Effectuez le recensement général des votes pour les trente-quatre

premiers candidats de la liste relative à l'un des arrondissements les plus populeux, et, après avoir supputé le nombre total des suffrages favorables à chacun d'eux, cherchez la quinzième partie du plus petit des trente-quatre nombres ainsi trouvés. Réunir au moins dans l'un des quinze arrondissements électoraux un nombre de suffrages supérieur à cette quinzième partie sera évidemment une condition nécessaire pour qu'un candidat puisse être élu. Or les quinze listes correspondantes aux quinze arrondissements feront immédiatement connaître les divers candidats pour lesquels cette condition sera remplie. Cela posé, il est clair qu'il suffira d'étendre à ces divers candidats le recensement général, puis de porter leurs noms sur une liste définitive, en les classant dans l'ordre indiqué par le nombre total des suffrages acquis à chacun d'eux. Les trente-quatre premiers noms inscrits sur cette liste définitive seront ceux des trente-quatre représentants élus par le département.

Le mode de recensement que nous venons d'exposer offre l'avantage incontestable de réduire à un petit nombre les noms portés sur la liste définitive, et parmi lesquels on doit chercher ceux des candidats élus.

Au reste on peut atteindre ce but, et même obtenir une réduction plus forte encore dans le nombre des candidats portés sur la liste définitive, en apportant au procédé dont il s'agit l'une des modifications que nous allons indiquer.

1° En augmentant d'un quart ou même d'un tiers le nombre des candidats que l'on choisit en tête de la liste d'un arrondissement très populeux, pour leur appliquer le recensement général, c'est-à-dire en portant ce nombre de 34 à 42, ou même à 45, on ne pourra qu'augmenter, et généralement on augmentera le nombre des suffrages acquis à celui de ces candidats qui deviendra le 34^e en vertu du recensement général, et, par suite, la quinzième partie de ce nombre. Par une conséquence nécessaire, on ne pourra que diminuer, et généralement on diminuera le nombre des candidats portés sur la liste définitive.



2° Après avoir appliqué le recensement général aux 34, ou aux 42, ou aux 45, ... premiers candidats inscrits sur la liste d'un arrondissement très peuplé, et classé ces candidats dans l'ordre déterminé par le nombre total des suffrages acquis à chacun d'eux, cherchez celui de ces mêmes candidats qui occupera le 34^e rang, puis divisez le nombre des votes qui lui ont été favorables par le nombre total des votants. Vous obtiendrez pour quotient un certain rapport, et vous pourrez vous contenter d'admettre dans la liste définitive les seuls candidats qui, dans chaque arrondissement, auront réuni un nombre de suffrages supérieur au produit du nombre des votants par le rapport dont il s'agit.

Pour faire mieux saisir par un exemple les principes ci-dessus exposés, je les appliquerai aux dernières élections du département de la Seine.

Le deuxième arrondissement était l'un de ceux où le nombre des votants était le plus considérable. D'ailleurs, en appliquant le recensement général des votes aux quarante-deux premiers candidats fournis par la liste de cet arrondissement, on obtenait pour le candidat qui, en vertu de ce recensement, devenait le 34^e, 104871 suffrages. Mais la quinzième partie de 104871 est de 6991,4. Donc aucun candidat ne pouvait être élu sans réunir, au moins dans l'un des quinze arrondissements électoraux, plus de 6991 suffrages. Cette seule condition réduisait déjà certainement à un très petit nombre les candidats parmi lesquels on devait chercher les représentants élus. Elle se trouvait évidemment remplie pour 34 des 42 premiers candidats du second arrondissement, savoir, pour ceux qui, dans le recensement général, avaient réuni un nombre de suffrages égal ou supérieur à 104871. Nous ignorons si, outre ces trente-quatre candidats, il s'en trouvait quelques autres qui, remplissant la même condition, dussent pour ce motif leur être adjoints sur la liste définitive. Mais ce qu'il y a de certain, c'est que les trente-quatre candidats dont il s'agit ont été précisément les trente-quatre représentants élus. Si quelque autre candidat a réuni, dans l'un des quinze arrondissements électoraux,

plus de 6991 suffrages, le recensement général lui a donné un nombre de suffrages inférieur à 104871.

Les trois procédés que nous avons indiqués pour la formation d'une liste définitive dans laquelle on doit chercher les noms des candidats élus supposent, tous les trois, que l'on connaît les résultats du dépouillement des votes dans les quinze arrondissements électoraux. Ces procédés devraient être légèrement modifiés, si, comme il arrive assez souvent, on commençait à effectuer le recensement aussitôt que l'on connaît la plus grande partie des votes. Dans ce cas, par exemple, on pourrait substituer à la quinzième partie du nombre total des suffrages obtenus par un candidat la quinzième partie du nombre des suffrages émis en sa faveur et déjà connus. L'unique effet de cette substitution serait de diminuer un peu le quotient trouvé, par conséquent de faire subir une légère augmentation au nombre des candidats dont les noms seraient portés sur la liste définitive.

410.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions et sur les fonctions isotropes (suite).*

C. R., T. XXVII, p. 6 (3 juillet 1848).

ANALYSE.

Soient A, A, A, \dots plusieurs points matériels, et $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \dots$ les coordonnées de ces points mesurées sur trois axes rectangulaires des x, y, z . Si l'on déplace ces axes, en les faisant tourner autour de l'origine, sans altérer les positions des points matériels dans l'espace, les coordonnées x, y, z seront remplacées par des trinômes de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \quad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

les neuf coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ étant liés à trois angles



polaires φ, ψ, χ par les formules

$$(1) \begin{cases} \alpha = \cos \varphi, & \delta = \sin \varphi \cos \gamma, & \gamma = \sin \varphi \sin \chi, \\ \alpha' = \sin \varphi \cos \psi, & \delta' = -\sin \gamma \sin \psi - \cos \varphi \cos \gamma \cos \psi, & \gamma' = \cos \gamma \sin \psi - \cos \varphi \sin \gamma \cos \psi, \\ \alpha'' = \sin \varphi \sin \psi, & \delta'' = \sin \gamma \cos \psi - \cos \varphi \cos \gamma \sin \psi, & \gamma'' = -\cos \gamma \cos \psi - \cos \varphi \sin \gamma \sin \psi. \end{cases}$$

Soient maintenant

$$(2) \quad \Theta = \bar{\theta}(x, y, z, x', y', z', \dots)$$

une fonction des coordonnées $x, y, z, x', y', z', \dots$ et

$$(3) \quad \bar{\Theta} = \bar{\theta}(ax + \delta y + \gamma z, \alpha'x + \delta'y + \gamma'z, \alpha''x + \delta''y + \gamma''z, ax + \delta y + \gamma z, \dots)$$

ce que devient Θ en vertu du déplacement des axes qui correspond aux angles polaires φ, γ, ψ . Ainsi que nous l'avons remarqué dans la dernière séance, la moyenne isotropique relative à la variation des coordonnées

$$x, y, z, x', y', z', \dots$$

sera la même pour les deux fonctions $\Theta, \bar{\Theta}$, en sorte qu'on aura, en considérant φ, γ, ψ comme constants,

$$(4) \quad \mathfrak{M} \Theta = \mathfrak{M} \bar{\Theta}.$$

Il y a plus : on pourra, dans le second membre de l'équation (4), substituer à la fonction $\bar{\Theta}$ une moyenne entre diverses valeurs de cette fonction correspondantes à diverses valeurs de φ, γ, ψ , par exemple la valeur moyenne

$$\frac{\chi = \pi}{\chi = -\pi} \bar{\Theta}$$

de $\bar{\Theta}$ considéré comme fonction de χ . On aura donc encore

$$(5) \quad \mathfrak{M} \Theta = \mathfrak{M} \frac{\chi = \pi}{\chi = -\pi} \bar{\Theta}.$$

Supposons maintenant que Θ soit le produit de deux facteurs dont le premier $F(x, y, z, x', y', z', \dots)$ soit une fonction quelconque des coordonnées des divers points A, A', A'', \dots et le second $f(ux + vy + wz)$



une fonction quelconque du trinôme

$$ux + vy + wz,$$

dans lequel les trois coordonnées x, y, z d'un nouveau point B sont multipliées par trois coefficients quelconques u, v, w , en sorte qu'on ait

$$(6) \quad \Theta = F(x, y, z, x', y', z', \dots) f(ux + vy + wz).$$

Si l'on pose

$$(7) \quad k^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$\frac{u}{k}, \frac{v}{k}, \frac{w}{k}$ seront les cosinus des angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par une certaine droite OK; et, si en déplaçant les axes coordonnés on fait tourner l'axe des x autour de l'origine de manière qu'il vienne s'appliquer sur la droite OK, on aura

$$(8) \quad \alpha = \frac{u}{k}, \quad \alpha' = \frac{v}{k}, \quad \alpha'' = \frac{w}{k}$$

et

$$(9) \quad \bar{\Theta} = F(ax + \delta y + \gamma z, \alpha'x + \delta'y + \gamma'z, \alpha''x + \delta''y + \gamma''z, \dots) f(kx).$$

Par suite, si l'on pose

$$(10) \quad \Omega = \frac{\chi = \pi}{\chi = -\pi} F(ax + \delta y + \gamma z, \alpha'x + \delta'y + \gamma'z, \alpha''x + \delta''y + \gamma''z, \dots),$$

on aura

$$(11) \quad \frac{\chi = \pi}{\chi = -\pi} \bar{\Theta} = \Omega f(kx),$$

et la formule (5) donnera

$$(12) \quad \mathfrak{M} \Theta = \mathfrak{M} \Omega f(kx).$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de Ω .

Pour y parvenir, nous rappellerons d'abord que, $f(\hat{x}, y, \dots)$ étant



une fonction entière de plusieurs variables x, y, z, \dots , on a (Volume II des *Exercices de Mathématiques*, page 167) (1)

$$(13) \quad f(a, b, c, \dots) e^{ax+by+cz+\dots} = f(D_x, D_y, D_z, \dots) e^{ax+by+cz+\dots}$$

Si, dans cette dernière formule, on échange entre elles les lettres $x, y, z, \dots, a, b, c, \dots$, on obtiendra la suivante

$$(14) \quad f(x, y, z, \dots) e^{ax+by+cz+\dots} = f(D_a, D_b, D_c, \dots) e^{ax+by+cz+\dots}$$

qui fournit des résultats donnés dans mes *Exercices d'Analyse*; puis, en réduisant après les différentiations a, b, c, \dots à zéro, on obtiendra la formule générale

$$(15) \quad f(x, y, z, \dots) = f(D_a, D_b, D_c, \dots) e^{ax+by+cz+\dots}$$

qui fournit des résultats donnés par M. Laurent. Or, si dans l'équation (15) on remplace x par $\cos \chi$ et y par $\sin \chi$, on aura

$$(16) \quad f(\cos \chi, \sin \chi) = f(D_a, D_b) e^{a \cos \chi + b \sin \chi};$$

puis, en posant, pour abrégér,

$$h = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

et ayant égard à la formule

$$\int_{\chi=-\pi}^{\chi=\pi} e^{a \cos \chi + b \sin \chi} d\chi = \int_{\chi=-\pi}^{\chi=\pi} e^{\sqrt{2h} \cos \chi} d\chi = 2\pi \left(1 + \frac{h}{1.2} + \left(\frac{h}{1.2}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

on trouvera

$$(17) \quad \Re f(\cos \chi, \sin \chi) = f(D_a, D_b) \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{16} + \dots \right)$$

D'ailleurs, il est clair que parmi les quantités

$$h, D_a h, D_b h, D_a^2 h, D_a D_b h, D_b^2 h, D_a^3 h, \dots$$

les seules qui ne s'évanouiront pas avec a et b seront

$$D_a^2 h = 1, \quad D_b^2 h = 1.$$

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 208.

Donc, si l'on nomme

$$\nabla, \nabla', \nabla'', \dots$$

diverses fonctions linéaires et homogènes de D_a, D_b, \dots , tout produit symbolique de la forme

$$(18) \quad \nabla \nabla' \nabla'' \dots h^n$$

s'évanouira, pour des valeurs nulles de a, b , à moins que le nombre des facteurs symboliques $\nabla, \nabla', \nabla'', \dots$ ne soit double de n . Ajoutons que, dans ce dernier cas, l'expression (18) se réduira toujours à une fonction entière de quantités de la forme $\nabla \nabla' h$, et qu'on aura, par exemple,

$$(19) \quad \nabla \nabla' \nabla'' \nabla''' h^2 = 2(\nabla \nabla' h \nabla'' \nabla''' h + \nabla \nabla'' h \nabla' \nabla''' h + \nabla \nabla''' h \nabla' \nabla'' h).$$

Cela posé, désignons par

$$\nabla, \nabla', \nabla'', \dots$$

ce que deviennent, eu égard aux formules (1), les trois binômes

$$\xi y + \gamma z, \quad \xi' y + \gamma' z, \quad \xi'' y + \gamma'' z,$$

quand on y remplace $\cos \chi$ par D_a et $\sin \chi$ par D_b . Soient encore

$$\nabla, \nabla', \nabla'', \nabla''', \nabla'''' \dots$$

ce que deviennent $\nabla, \nabla', \nabla''$ quand on y remplace x, y, z par x, y, z , ou par x', y', z', \dots . La formule (10) donnera

$$(20) \quad \Omega = F(\alpha x + \nabla, \alpha' x + \nabla', \alpha'' x + \nabla'', \alpha x + \nabla, \dots) \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{16} + \dots \right)$$

Or, en vertu de cette dernière formule, et des remarques ci-dessus énoncées, Ω se réduit à une fonction des quantités

$$\alpha, \alpha', \alpha'', x, x', x'', \dots$$

et des produits symboliques de la forme

$$\nabla, \nabla h, \nabla' \nabla h, \nabla'' \nabla h, \dots$$



∇ , ∇' , ∇'' pouvant n'être pas distincts de ∇ , ∇' , ∇'' . D'ailleurs on trouvera

$$(21) \quad \begin{cases} \nabla \nabla h = (1 - \alpha^2)(yy + zz), \\ \nabla' \nabla h = -\alpha\alpha'(yy + zz) + \alpha^2(yz - y'z'), \\ \dots \end{cases}$$

Donc, si l'on pose, pour abrégér,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \dots,$$

c'est-à-dire, si l'on désigne par r , r' , ... les distances des points A, A', ... à l'origine des coordonnées, on trouvera

$$(22) \quad \begin{cases} \nabla \nabla h = (1 - \alpha^2)[rr' \cos(r, r') - \alpha x x'], \\ \nabla' \nabla h = -\alpha\alpha'[rr' \cos(r, r') - \alpha x x'] + \alpha^2(yz - y'z'), \\ \dots \end{cases}$$

puis on en conclura

$$(23) \quad \begin{cases} \nabla^2 h = (1 - \alpha^2)(r^2 - x^2), \\ \nabla' \nabla h = -\alpha\alpha'(r^2 - x^2), \\ \dots \end{cases}$$

D'autre part, si l'on désigne par x' , y' , z' les coordonnées de l'extrémité du moment linéaire dont la valeur numérique est celle de la surface du parallélogramme construit sur les rayons vecteurs r et r' , on aura

$$x' = yz' - y'z,$$

et par suite, la seconde des formules (22) deviendra

$$(24) \quad \nabla' \nabla h = -\alpha\alpha'[rr' \cos(r, r') - \alpha x x'] + \alpha^2 x'.$$

Cela posé, la formule (20), jointe aux formules (22), (23), (24), fournira évidemment pour Ω une fonction entière des seules coordonnées

$$x, x', x'', \dots, x', \dots,$$

mesurées sur l'axe des x et des trois coefficients

$$\alpha, \alpha', \alpha'',$$

conformément au théorème II de la page 28. Il est vrai que la valeur trouvée pour Ω renfermera encore les rayons vecteurs r , r' , ... et les cosinus des angles (r, r') , ... Mais ces rayons vecteurs et ces angles sont des quantités qui ne varient pas, tandis que l'on déplace les axes coordonnés.

Si, dans la valeur de Ω déterminée comme on vient de le dire, on substitue les valeurs de α , α' , α'' , fournies par les équations (8), elle se réduira simplement à une fonction entière de

$$x, x', x'', \dots, x', \dots$$

Soit

$$\tilde{f}(x, x', x'', \dots, x', \dots)$$

cette fonction entière. L'équation (12) donnera

$$(25) \quad \Re \Theta = \Re \tilde{f}(x, x', x'', \dots, x', \dots) f(kx).$$

Or, pour déduire de cette dernière équation la valeur de $\Re \Theta$, il suffira de recourir à un nouveau déplacement des axes coordonnés, mais à un déplacement dans lequel les valeurs de α , α' , α'' ne seront plus celles que déterminent les formules (8). On tirera ainsi de la formule (25), en considérant, dans le second membre, α , β , γ comme seules variables,

$$(26) \quad \Re \Theta = \Re \tilde{f}(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \dots) f[k(\alpha x + \beta y + \gamma z)].$$

Cela posé, considérons d'abord le cas particulier où l'on aurait

$$f(x) = e^x.$$

Alors l'équation (26) donnera

$$(27) \quad \Re \Theta = \tilde{f}\left(\frac{x D_x + y D_y + z D_z}{k}, \dots, \frac{x' D_x + y' D_y + z' D_z}{k}, \dots\right) \Re e^{k(\alpha x + \beta y + \gamma z)}.$$

Mais, en posant, pour abrégér,

$$(28) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R = \frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2kr},$$

on aura précisément

$$\Re e^{k(\alpha x + \beta y + \gamma z)} = R.$$



Donc la formule (27) donnera

$$(29) \quad \mathfrak{N}\Theta = \mathfrak{F}\left(\frac{x D_x + y D_y + z D_z}{k}, \dots, \frac{x' D_x + y' D_y + z' D_z}{k}, \dots\right) R.$$

Ainsi, dans le cas particulier dont il s'agit, l'intégrale triple qui représente la valeur de $\mathfrak{N}\Theta$ pourra être exprimée en termes finis. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que le second membre de l'équation (29) se réduira simplement à une fonction des rayons vecteurs r, r', r'', \dots , menés de l'origine aux points dont les coordonnées sont

$$x, y, z, \quad x', y', z', \quad x'', y'', z'', \quad \dots, \quad x, y, z,$$

et des cosinus des angles compris entre ces rayons vecteurs.

Lorsque la fonction $f(x)$ ne se réduira pas à une exponentielle, on pourra, en vertu des formules connues, la transformer en une somme d'exponentielles. Il y a plus : si l'on suppose la fonction

$$\mathfrak{F}(x, x', x'', \dots, x', \dots)$$

réduite à l'unité, la formule (26) donnera simplement

$$\mathfrak{N}\Theta = \mathfrak{N} f[k(ax + \beta y + \gamma z)] = \mathfrak{N} f(kr\alpha)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(30) \quad \mathfrak{N}\Theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(kr\alpha) dx;$$

et il est aisé de s'assurer que, dans le cas général, on pourra, en partant de la formule (26), réduire la détermination de $\mathfrak{N}\Theta$ à la détermination de l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(kr\alpha) dx,$$

et de celles qu'on en déduit quand on remplace la fonction $f(x)$ par l'une des fonctions

$$\int f(x) dx, \quad \iint f(x) dx^2, \quad \dots$$

Ajoutons que chacune de ces fonctions, et même chacune des inté-

grales desquelles dépendra la valeur de $\mathfrak{N}\Theta$, pourra être transformée en une intégrale simple.

411.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Nouveau Mémoire sur les douze équations qui déterminent les mouvements de translation, de rotation et de dilatation de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

C. R., T. XXVII, p. 12 (3 juillet 1848).

Dans ce nouveau Mémoire, je commence par former les équations qui déterminent, dans un système moléculaire, d'une part, les déplacements du centre de gravité de chaque molécule, d'autre part, les dilatations et condensations de cette molécule, et, par suite, sa rotation autour de son centre de gravité. J'examine, en particulier, ce qui arrive quand les mouvements deviennent infiniment petits et le système moléculaire isotrope; puis je considère spécialement les quatre inconnues qui représentent : 1° la dilatation ν du volume du système moléculaire, en un point donné, que je fais d'abord coïncider avec le centre de gravité d'une molécule; 2° les trois variations atomiques que subit la dilatation ν , quand on passe du centre de gravité de la molécule à trois points séparés de ce centre par une distance très petite prise pour unité, en suivant trois directions parallèles aux axes coordonnés.

Au reste, je développerai, dans un autre article, les formules que renferme mon nouveau Mémoire, et que je viens d'indiquer.



412.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Théorèmes divers sur les fonctions différentielles et sur les valeurs moyennes des fonctions.*

C. R., T. XXVII, p. 37 (10 juillet 1848).

Les méthodes que j'ai données dans les précédents Mémoires pour la détermination des valeurs moyennes des fonctions peuvent encore être simplifiées, dans leurs applications, à l'aide de divers théorèmes que je vais indiquer.

§ I. — *Théorèmes relatifs aux fonctions différentielles.*

Soient

x, y, z, \dots diverses variables;
 s_1, s_2, \dots, s_m diverses fonctions de ces variables;
 s l'une quelconque de ces fonctions,

et

$$(1) \quad \delta = s_1 s_2 \dots s_m$$

le produit de ces mêmes fonctions. Soit enfin

$$(2) \quad \nabla = a D_x + b D_y + c D_z + \dots$$

une fonction linéaire et homogène des caractéristiques D_x, D_y, D_z, \dots .
 On aura, d'une part,

$$(3) \quad \nabla s = a D_x s + b D_y s + c D_z s + \dots$$

et, d'autre part,

$$(4) \quad D_x s = s \left(\frac{D_x s_1}{s_1} + \frac{D_x s_2}{s_2} + \dots + \frac{D_x s_m}{s_m} \right).$$

Or, de ces deux formules, dont la dernière continue de subsister,

quand on y remplace la variable x par l'une quelconque des autres variables y, z, \dots , on déduit aisément la proposition suivante :

THEOREME I. — *Soient*

x, y, z, \dots diverses variables;
 s_1, s_2, \dots, s_m diverses fonctions de ces variables;
 s le produit de ces mêmes fonctions;

∇ une fonction linéaire et homogène des caractéristiques D_x, D_y, D_z, \dots ;
 on aura

$$(5) \quad \nabla s = s \left(\frac{\nabla s_1}{s_1} + \frac{\nabla s_2}{s_2} + \dots \right).$$

THEOREME II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, soient*

$$\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_n$$

diverses fonctions linéaires et homogènes des caractéristiques D_x, D_y, D_z, \dots . Soit encore

$$(6) \quad \square = \nabla_1 \nabla_2 \dots \nabla_n$$

le produit des facteurs symboliques $\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_n$. Concevons enfin que le produit \square soit décomposé en produits partiels, en sorte qu'on ait

$$(7) \quad \square = \square_1 \square_2 \dots \square_m,$$

chacun des facteurs $\square_1, \square_2, \dots, \square_m$ étant le produit partiel de plusieurs des facteurs symboliques $\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_n$, et pouvant se réduire à l'un de ces derniers facteurs ou même à l'unité. La fonction différentielle $\square s$ sera équivalente à la somme des divers produits de la forme

$$(8) \quad \square_1 s_1 \square_2 s_2 \dots \square_m s_m$$

correspondants aux divers systèmes de valeurs que peuvent acquérir, dans la formule (7), les facteurs symboliques $\square_1, \square_2, \dots, \square_m$.

Exemple. — Soit $n = 2$, en sorte qu'on ait

$$\square = \nabla_1 \nabla_2;$$

alors, dans le second membre de la formule (7), on pourra supposer



ou l'un des facteurs $\square_1, \square_2, \dots, \square_m$ équivalent à \square , c'est-à-dire au produit $\nabla_1 \nabla_2$, et tous les autres à l'unité, ou deux facteurs respectivement égaux à ∇_1 et à ∇_2 , chacun des autres étant réduit à l'unité. Donc alors on aura, si $m = 2$,

$$\nabla_1 \nabla_2 (s_1 s_2) = s_1 \nabla_1 \nabla_2 s_2 + s_2 \nabla_1 \nabla_2 s_1 + \nabla_1 s_1 \nabla_2 s_2 + \nabla_1 s_2 \nabla_2 s_1;$$

si $m = 3$,

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_2 (s_1 s_2 s_3) &= s_2 s_3 \nabla_1 \nabla_2 s_1 + s_3 s_1 \nabla_1 \nabla_2 s_2 + s_1 s_2 \nabla_1 \nabla_2 s_3 \\ &+ s_1 (\nabla_1 s_2 \nabla_2 s_3 + \nabla_1 s_3 \nabla_2 s_2) + s_2 (\nabla_1 s_3 \nabla_2 s_1 + \nabla_1 s_1 \nabla_2 s_3) \\ &+ s_3 (\nabla_1 s_1 \nabla_2 s_2 + \nabla_1 s_2 \nabla_2 s_1), \end{aligned}$$

.....
Corollaire. — Si, dans le produit partiel

$$\square_1 s_1 \square_2 s_2 \dots \square_m s_m,$$

on échange entre eux les facteurs symboliques $\square_1, \square_2, \dots, \square_m$, on obtiendra des produits partiels de la même forme, qui seront, en général, distincts les uns des autres. On doit seulement excepter le cas où chacun des facteurs symboliques échangés entre eux se réduirait à l'unité. Or, concevons que, dans le second membre de la formule (7), les facteurs symboliques, réduits à l'unité, soient en nombre égal à l . En joignant au produit partiel

$$\square_1 s_1 \square_2 s_2 \dots \square_m s_m$$

ceux qu'on en déduira par des échanges opérés entre les facteurs symboliques $\square_1, \square_2, \dots, \square_m$, on obtiendra un nombre total de produits partiels évidemment égal à $1.2.3\dots m$, si l se réduit à zéro. Si l cesse de s'évanouir, alors, en échangeant entre eux les facteurs symboliques qui se réduiront à l'unité, on obtiendra $1.2.3\dots l$ produits partiels qui ne seront pas distincts l'un de l'autre. Donc alors le nombre des produits partiels distincts qui se déduiront l'un de l'autre, par des échanges opérés entre les facteurs symboliques, sera égal au rapport

$$\frac{1.2.3\dots m}{1.2\dots l} = m(m-1)\dots(l+1).$$

D'ailleurs tous ces produits deviendront égaux entre eux, si l'on a

$$s_1 = s_2 = \dots = s_m.$$

Cela posé, le théorème II entraîne évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME III. — Soient

s une fonction quelconque des variables x, y, z, \dots ;

$\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_n$ des fonctions linéaires et homogènes des caractéristiques D_x, D_y, D_z, \dots ;

$\square = \nabla_1 \nabla_2 \dots \nabla_n$ le produit de ces fonctions linéaires.

Soient enfin

$\square_1, \square_2, \dots, \square_m$ des facteurs symboliques dont le produit soit \square , chacun de ces facteurs pouvant être ou l'unité, ou l'un des facteurs $\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_n$, ou le produit de quelques-uns de ces derniers facteurs;

l le nombre de ceux des facteurs symboliques $\square_1, \square_2, \dots, \square_m$ qui se réduisent à l'unité.

La fonction différentielle $\square s^m$ sera équivalente à la somme des divers produits de la forme

$$(9) \quad (l+1)(l+2)\dots m \square_1 s \square_2 s \dots \square_m s$$

correspondants aux divers systèmes de valeurs des facteurs symboliques

$$\square_1, \square_2, \dots, \square_m.$$

Exemples. — Si l'on pose successivement $\square = \nabla$, et $\square = \nabla \nabla_1, \dots, \nabla, \nabla_1, \dots$ étant des fonctions linéaires des caractéristiques D_x, D_y, D_z, \dots , le théorème III fournira les équations

$$\begin{aligned} \nabla s^m &= m s^{m-1} \nabla s, \\ \nabla_1 \nabla s^m &= m(m-1) s^{m-2} \nabla s \nabla_1 s + m s^{m-1} \nabla_1 \nabla s, \end{aligned}$$

.....
Corollaire. — Supposons que, dans le théorème III, on remplace s par $s - \zeta$; ζ étant indépendant de x, y, z, \dots ; on conclura de ce



théorème que la fonction symbolique $\square(s - \zeta)^m$ est équivalente à la somme des produits de la forme

$$(10) \quad (l+1)(l+2)\dots m \square_1(s - \zeta) \square_2(s - \zeta) \dots \square_m(s - \zeta).$$

Si d'ailleurs on pose après les différentiations $\zeta = s$, le produit (10) s'évanouira toutes les fois qu'un ou plusieurs des facteurs symboliques $\square_1, \square_2, \dots, \square_m$ se réduiront à l'unité, par conséquent toutes les fois que l différera de zéro, et se réduira, si $l = 0$, au produit

$$(11) \quad 1.2.3\dots m \square_1 s \square_2 s \dots \square_m s.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème III, si l'on détermine la valeur de la fonction

$$\square \frac{(s - \zeta)}{1.2\dots m},$$

en effectuant les différentiations sans faire varier ζ , et en posant après les différentiations $\zeta = s$, on trouvera cette valeur égale à la somme des produits de la forme

$$\square_1 s \square_2 s \dots \square_m s.$$

On peut encore déduire aisément du théorème III la proposition suivante :

THÉORÈME V. — Soient

s_1, s_2, \dots, s_m diverses fonctions linéaires des variables x, y, z, \dots ;

$\delta = s_1 s_2 \dots s_m$ le produit de ces fonctions;

\circ une fonction homogène des caractéristiques D_x, D_y, D_z, \dots

Le rapport $\frac{\circ \delta}{\delta}$ sera équivalent, si \circ est du second degré, à la somme des produits de la forme

$$\frac{\circ(s_1 s_2)}{s_1 s_2},$$

s_1, s_2 pouvant être remplacées par deux quelconques des facteurs $s_1,$

s_2, \dots, s_m ; si \circ est du troisième degré, à la somme des produits de la forme

$$\frac{\circ(s_1 s_2 s_3)}{s_1 s_2 s_3},$$

s_1, s_2, s_3 pouvant être remplacées par trois quelconques des facteurs $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$; etc.

Corollaire. — Si l'on remplace successivement \circ par \circ^2, \circ^3, \dots la recherche des rapports

$$(12) \quad \frac{\circ \delta}{\delta}, \frac{\circ^2 \delta}{\delta}, \frac{\circ^3 \delta}{\delta}, \dots$$

se trouvera réduite par le théorème V à celle des rapports de la forme

$$(13) \quad \frac{\circ(s_1 s_2)}{s_1 s_2}, \frac{\circ^2(s_1 s_2 s_3)}{s_1 s_2 s_3}, \frac{\circ^3(s_1 s_2 s_3 s_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4}, \dots$$

On aura d'ailleurs

$$(14) \quad \begin{cases} \circ^2(s_1 s_2 s_3 s_4) = 1.2[\circ(s_1 s_2)\circ(s_3 s_4) + \circ(s_1 s_3)\circ(s_2 s_4) + \circ(s_1 s_4)\circ(s_2 s_3)], \\ \circ^3(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) = 1.2.3[\circ(s_1 s_2 s_3)\circ(s_4 s_5) + \dots], \\ \dots \end{cases}$$

§ II. — Théorèmes relatifs aux valeurs moyennes des fonctions.

Les théorèmes établis dans le § I permettent de simplifier les formules obtenues dans le Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions. Ainsi, en particulier, à l'aide de ces théorèmes, on peut réduire la formule (29) de la page 56 à l'équation que nous allons indiquer.

Supposons que, en conservant les notations adoptées dans le précédent Mémoire, on pose, en outre,

$$s = \frac{1}{2} r^2,$$

$$\circ = \frac{1}{2} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)$$

et

$$\square = \bar{x} \left(\frac{xx + yy + zz}{k} D_x, \dots, \frac{x^2 x + y^2 y + z^2 z}{k} D_x, \dots \right).$$



L'équation (29) de la page 56 pourra être réduite à

$$(1) \quad \pi \theta = \left[1 + \frac{1}{1.2} \frac{\circ}{D_1} + \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{\circ}{D_2} \right)^2 + \dots \right] \square R,$$

sous la condition que les différentiations indiquées par les caractéristiques D_1, D_2, D_3 soient appliquées seulement à la fonction de x, y, z désignée par \square , comme si $r^2 = 2s$ était indépendant de x, y, z . Ajoutons que la formule (1) pourra encore être présentée sous la forme symbolique

$$(2) \quad \pi \theta = e^{\frac{\circ}{D}} \square R.$$

413.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules.*

C. R., T. XXVII, p. 93 (24 juillet 1848).

La plupart des résultats que j'ai obtenus jusqu'à ce jour dans les problèmes de Physique mathématique, et que je suis heureux d'avoir vu accueillir avec tant de bienveillance par les géomètres, étaient déduits ou des propriétés générales des mouvements simples ou de la considération de corps dont les molécules étaient supposées réduites à des points matériels. Il est vrai que les formules fournies par cette hypothèse représentaient une grande partie des phénomènes, et que, dans beaucoup de cas, on pouvait en déduire avec précision, non seulement les résultats d'expériences déjà faites, mais aussi les résultats d'expériences à faire. Il est vrai encore que les prévisions du calcul à cet égard ont été généralement confirmées par l'observation, spécialement par les belles expériences de M. Jamin sur les propriétés de la lumière réfléchie par un métal et sur la polarisation incomplète des rayons lumineux réfléchis par la surface extérieure d'un corps isopane. Toutefois il restait à éclaircir quelques points dans la solu-

tion des questions que l'on pouvait résoudre en réduisant les molécules des corps à de simples points matériels; et, d'autre part, plusieurs phénomènes peuvent dépendre des mouvements relatifs des divers atomes qui constituent les molécules des corps, ou de ce que M. Ampère nommait les *vibrations atomiques*.

Déjà, dans plusieurs Mémoires présentés à l'Académie par divers auteurs et par moi-même, il a été question des vibrations atomiques. On doit surtout remarquer les observations importantes consignées à ce sujet dans plusieurs Mémoires de M. Laurent, et les formules qu'il a obtenues dans ses recherches sur les mouvements infiniment petits d'un système de sphéroïdes. Mais, à ma connaissance, on n'a pas encore établi les équations générales des mouvements infiniment petits d'un système de molécules dont chacune est considérée comme un système d'atomes. On peut, il est vrai, regarder les douze équations que j'ai présentées à l'Académie dans les séances précédentes, comme offrant une première approximation dans la recherche de ces derniers mouvements. Mais ces douze équations, qui déterminent les mouvements de translation et de rotation des molécules avec leurs dilatations dans les divers sens, supposent que, la position d'un atome étant rapportée au centre de gravité de la molécule dont il fait partie, on développe les déplacements relatifs de cet atome suivant les puissances ascendantes de ses coordonnées relatives, et que l'on réduit ensuite chaque développement à ses deux premiers termes.

Par les motifs que je viens d'exposer, il m'a paru nécessaire d'entreprendre de nouvelles recherches sur les corps considérés comme des systèmes de molécules ou même comme des systèmes de points matériels. Les résultats de mon travail formeront l'objet de plusieurs Mémoires que je me propose de présenter successivement à l'Académie. Les propositions et les formules qui s'y trouveront établies me semblent propres à éclaircir les principales difficultés qui peuvent subsister encore sur les divers points de la Physique mathématique. D'ailleurs je n'hésiterai pas à faire un appel aux physiciens et aux géomètres en les priant de m'aider de leurs lumières, et de voir eux-



mêmes si les difficultés leur paraissent effectivement résolues. M. Laurent a déjà bien voulu me promettre d'être sévère pour mes formules, et de me signaler les objections qu'il rencontrerait. J'espère que, dans l'intérêt de la science, mes illustres confrères, et spécialement ceux qui se sont plus particulièrement occupés de la théorie de la lumière, ne refuseront pas de me rendre le même service. J'aurai souvent, comme par le passé, l'occasion d'indiquer à l'avance les résultats d'expériences à faire; et, par conséquent, mes travaux pourront n'être pas sans influence sur les progrès de la Physique expérimentale.

Dès aujourd'hui j'ai l'honneur de présenter à l'Académie deux nouveaux Mémoires dont le premier est relatif aux équations générales des mouvements infiniment petits d'un système de molécules. Le second a pour objet les conditions qui se rapportent aux limites des corps, et, en particulier, les lois de la réflexion et de la réfraction des rayons lumineux.

Le premier de ces deux Mémoires diffère surtout de ceux que j'ai présentés à l'Académie dans des dernières séances, en un point qu'il importe de signaler. Dans ceux-ci douze inconnues propres à exprimer les mouvements de translation et de rotation des molécules et leurs dilatations dans les divers sens étaient déterminées par douze équations aux différences mêlées en fonction de quatre variables indépendantes qui représentaient les coordonnées et le temps. Au contraire, dans mon nouveau Mémoire, les trois inconnues seulement, savoir, les trois déplacements d'un atome mesurés parallèlement aux axes coordonnés, se trouvent déterminées par trois équations aux différences mêlées en fonction de sept variables indépendantes, savoir du temps et de six coordonnées dont trois fixent la position d'une molécule dans l'espace, tandis que les trois autres fixent la position de l'atome par rapport au centre de gravité de la molécule.

Après avoir obtenu, dans le cas général, les équations dont il s'agit, je donne les formules auxquelles elles se réduisent quand le système de molécules devient isotrope.

Pour ne pas trop allonger cet article, je me bornerai à extraire

ici de mon Mémoire les équations définitives auxquelles je parviens quand les diverses molécules sont semblables entre elles. Je renverrai à une autre séance l'examen des conséquences importantes qu'entraînent ces équations, des intégrales qui les vérifient, et des phénomènes que ces intégrales représentent.

ANALYSE.

Considérons un système de molécules, chaque molécule étant elle-même composée d'atomes que l'on suppose sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Soient d'ailleurs

m, m_1, m_2, \dots les masses des diverses molécules;

m', m'', \dots les masses des atomes qui composent la molécule m ;

m_1', m_1'', \dots les masses des atomes correspondants de la molécule m_1 ;

Rapportons les positions des centres de gravité des diverses molécules à trois axes rectangulaires des x, y, z que nous ferons passer par une origine fixe, et les positions des divers atomes qui composent une molécule m à trois axes des x', y', z' menés parallèlement aux trois premiers par le centre de gravité de m . Soient, au premier instant,

x, y, z et $x+x, y+y, z+z$ les coordonnées rectangulaires des centres de gravité des molécules m et m_1 ;

x', y', z' et $x'+x', y'+y', z'+z'$ les coordonnées rectangulaires des atomes m', m'' rapportées au centre de gravité de m ;

r' la distance des atomes m' et m'' ;

r , la distance des atomes m' et m_1' ;

$m'm'' f(r')$ l'action mutuelle des atomes m', m'' , la fonction $f(r')$ étant positive quand les atomes s'attirent, négative quand ils se repoussent.

Posons d'ailleurs

$$f(r') = \frac{f(r')}{r'}$$

Supposons enfin que le système moléculaire parte d'un état d'équi-



libre, et que, au premier instant, les diverses molécules soient semblables entre elles et semblablement orientées.

On aura non seulement

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

mais encore

$$r^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2.$$

Soient, d'autre part, au bout du temps t ,

ξ, η, ζ les déplacements absolus de l'atome m' mesurés parallèlement aux axes des x, y, z , dans un mouvement infiniment petit.

Ces déplacements pourront être considérés comme des fonctions du temps t et des six coordonnées x, y, z, x', y', z' dont les trois dernières varieront entre les limites fort restreintes déterminées par les dimensions des molécules; et, si l'on pose

$$\begin{aligned} u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z, \quad u' = D_x', \quad v' = D_y', \quad w' = D_z', \\ \nu = u\xi + v\eta + w\zeta, \quad \nu' = u'\xi + v'\eta + w'\zeta, \end{aligned}$$

ν et ν' représenteront au bout du temps t , et autour de l'atome m' , la condensation de volume: 1° du système moléculaire; 2° de la molécule m . Cela posé, si l'on fait, pour abrégier,

$$\omega = xu + yv + zw, \quad \omega' = x'u' + y'v' + z'w',$$

puis

$$G' = Sm^s(e^{\omega} - 1)f(r'), \quad H' = Sm^s\left(e^{\omega} - \frac{\omega^2}{2}\right)\frac{f'(r')}{r'},$$

le signe S indiquant une somme de termes semblables et qui correspondront aux divers atomes m^s, m^s, \dots , c'est-à-dire aux divers atomes compris dans la molécule m et distincts de m' , puis enfin

$$G = SS m^s(e^{\omega + \omega'} - 1)f(r), \quad H = SS m^s\left[e^{\omega + \omega'} - \frac{(\omega + \omega')^2}{2}\right]\frac{f'(r)}{r},$$

le double signe SS indiquant une double somme de termes semblables qui correspondront aux divers atomes

$$m^s, m^s, m^s, \dots, m^s, m^s, m^s, \dots,$$

compris dans les molécules m, m, \dots distinctes de m ; on aura, pour déterminer ξ, η, ζ en fonction des sept variables t, x, y, z, x', y', z' , trois équations dont la première sera

$$(1) \begin{cases} (D_t' - G - G')\xi = D_u(D_u H \xi + D_v H' \eta + D_w H' \zeta) \\ \quad + (D_u + D_u)[(D_u + D_u)H \xi + (D_v + D_v)H \eta + (D_w + D_w)H \zeta]. \end{cases}$$

Pour obtenir les deux autres équations, il suffira d'échanger entre eux les axes des x, y, z en même temps que les lettres correspondantes à ces axes; par conséquent, il suffira de remplacer dans le premier membre de la formule (1) ξ par η ou par ζ , et de remplacer en même temps dans le premier terme du second membre le facteur symbolique D_u par D_v ou D_w , puis, dans le second terme, le facteur symbolique $D_u + D_u$ par $D_v + D_v$ ou $D_w + D_w$. Lorsque le système de molécules sera homogène dans toute son étendue, les coefficients G, G', H, H' deviendront indépendants des valeurs attribuées aux trois coordonnées x, y, z .

Considérons maintenant d'une manière spéciale le cas où le système moléculaire deviendrait isotrope. Alors les coefficients

$$G', H', G, H$$

devront être remplacés par les moyennes isotropiques

$$\mathfrak{R}G', \mathfrak{R}H', \mathfrak{R}G, \mathfrak{R}H,$$

et, si l'on pose, pour abrégier,

$$h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}, \quad h' = \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2}, \quad h_i = uu' + vv' + ww',$$

on conclura des principes établis dans mes précédents Mémoires sur les valeurs moyennes des fonctions, que $\mathfrak{R}G', \mathfrak{R}H'$ se réduisent à des fonctions de h, h' , et $\mathfrak{R}G, \mathfrak{R}H$ à des fonctions de h, h', h_i .

Cela posé, si l'on fait, pour abrégier,

$$E = \mathfrak{R}G + \mathfrak{R}G' + D_h \mathfrak{R}H + D_{h'} \mathfrak{R}H',$$

on verra l'équation (1) se réduire, pour un système isotrope de molé-



cules, à la formule

$$(2) \left\{ \begin{aligned} (D_1^2 - E)\xi &= u' D_1^2 \mathcal{R} H' \psi' \\ &+ [u(D_h + D_h) + u'(D_h + D_h)] [(D_h + D_h) \mathcal{R} H \psi + (D_h + D_h) \mathcal{R} H' \psi]. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons que de cette formule on en déduira deux autres semblables à l'aide d'un échange opéré entre les trois axes coordonnés.

Si chaque molécule est composée d'un très grand nombre d'atomes, alors pour se former une idée des résultats auxquels conduiront les équations du mouvement, on pourra, dans une première approximation, opérer comme si les coefficients

$$G, H, G', H', E,$$

qui sont indépendants des coordonnées x, y, z , étaient aussi indépendants des coordonnées x', y', z' . En opérant ainsi, on déduira de l'équation (2), jointe aux deux équations de même forme, deux équations séparées entre les deux inconnues ψ, ψ' , puis une équation caractéristique à laquelle satisferont toutes les inconnues. D'ailleurs cette équation caractéristique sera vérifiée quand on égalera chaque inconnue au produit d'un facteur constant par une exponentielle de la forme

$$e^{ux+vy+wz+u'x'+v'y'+w'z'-st},$$

u, v, w, u', v', w', s étant, non plus des symboles de différentiation, mais des constantes réelles ou imaginaires. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$s = si, \quad u = ui, \quad v = vi, \quad w = wi, \quad u' = u'i, \quad v' = v'i, \quad w' = w'i,$$

i étant une racine carrée de -1 , et s, u, v, w, u', v', w' des constantes réelles, et si dans cette même hypothèse on détermine $k, k', \epsilon, \epsilon'$ à l'aide des formules

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad k'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2,$$

$$k\epsilon = ux + vy + wz, \quad k'\epsilon' = u'x' + v'y' + w'z',$$

ϵ, ϵ' représenteront des longueurs mesurées perpendiculairement à

deux espèces d'ondes planes qui devront être soigneusement distinguées l'une de l'autre. Enfin, si l'on pose

$$k = \frac{2\pi}{T}, \quad k' = \frac{2\pi}{T'}, \quad s = \frac{2\pi}{T''},$$

l, l' seront les épaisseurs de ces deux espèces d'ondes planes, tandis que T représentera la durée des vibrations moléculaires; et il est clair que l'équation caractéristique établira une relation, non plus seulement entre les deux constantes s, k , mais entre les trois constantes s, k, k' et le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux espèces d'ondes.

Dans un autre article, je dirai comment je suis parvenu à la formation des équations (1) et (2), comment on peut obtenir leurs intégrales générales, et quel rapport ces équations et ces intégrales ont avec les recherches de quelques auteurs sur les mouvements moléculaires ou atomiques, particulièrement avec les inductions ou les calculs que renferment les Notes et Mémoires de M. Ampère et de M. Laurent.

414.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps, et, en particulier, sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière.*

C. R., T. XXVII, p. 99 (24 juillet 1848).

Ce Mémoire, dont l'extrait lu à la dernière séance sera imprimé dans le prochain *Compte rendu*, a pour objet la recherche des conditions qui se rapportent aux limites des corps, spécialement de celles qui déterminent la réflexion et la réfraction des mouvements simples dont la superposition reproduit les diverses espèces de mouvements infiniment petits. Suivant une première loi, si un mouvement simple, en rencontrant une surface plane, donne naissance à des mouvements



réfléchis ou réfractés, ces divers mouvements seront toujours de la nature de ceux que l'auteur a nommés mouvements *correspondants*. D'ailleurs les mouvements réfléchis et réfractés peuvent être, ou du nombre de ceux qui se propagent sans s'affaiblir, ou du nombre de ceux qui s'éteignent en se propageant. Dans le premier cas, ils doivent offrir des ondes planes qui s'éloignent de la surface réfléchissante ou réfringente. Dans le second cas, les vibrations moléculaires doivent diminuer avec la distance à la surface. La loi précédente suffit pour déterminer la direction des ondes planes, liquides, sonores, lumineuses qui peuvent être réfléchies ou réfractées par la surface de séparation de deux milieux.

Quant aux lois qui déterminent les directions et les amplitudes des vibrations moléculaires, elles peuvent se déduire, quand chaque milieu renferme un seul système de molécules, et sous la condition énoncée dans un précédent Mémoire (*Comptes rendus* de 1843) du principe de l'égalité entre les pressions exercées par les deux milieux sur la surface de séparation. Si chaque milieu est un corps qui renferme, outre ses molécules propres, les molécules de l'éther ou fluide lumineux, on devra, au principe dont il s'agit, joindre le principe de la *continuité du mouvement dans l'éther*. D'ailleurs, l'équation caractéristique relative au double système de molécules offrira deux espèces de racines dont les unes disparaîtront avec les molécules du corps, les autres avec les molécules de l'éther; et dans une première approximation l'on pourra obtenir les phénomènes dépendants des mouvements infiniment petits du corps, à l'aide du principe relatif aux pressions, en tenant compte seulement des racines de première espèce, puis les phénomènes dépendants des mouvements infiniment petits de l'éther, à l'aide du principe de la continuité de mouvement, en tenant compte seulement des racines de seconde espèce.

415.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur de nouveaux théorèmes relatifs aux valeurs moyennes des fonctions, et sur l'application de ces théorèmes à l'intégration des équations aux dérivées partielles que présente la mécanique moléculaire.*

C. R., T. XXVII, p. 105 (31 juillet 1848).

Simple énoncé.

416.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur un Mémoire de M. LAURENT, relatif aux équations d'équilibre et de mouvement d'un système de sphéroïdes sollicités par des forces d'attraction et de répulsion mutuelles.*

C. R., T. XXVII, p. 105 (31 juillet 1848).

L'un de nous a donné, dans un Mémoire lithographié en 1836, ainsi que dans le premier Volume des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, les équations générales du mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction et de répulsion mutuelles, en déduisant ces mêmes équations des formules qu'il avait obtenues dans un travail présenté à l'Académie le 1^{er} octobre 1827. Il a, de plus, fait remarquer : 1^o la forme symbolique à laquelle on peut réduire les équations dont il s'agit, en exprimant les termes qu'elles renferment à l'aide de deux fonctions caractéristiques; 2^o les réductions nouvelles qu'on peut faire subir aux équations symboliques trouvées, dans le cas où leur forme devient indépendante de la direction attribuée à deux des axes coordonnés supposés rectangulaires, ou même à ces trois axes simultanément. Enfin il a donné les équations analogues auxquelles on parvient quand on considère deux systèmes de points matériels qui se pénètrent mutuellement; et



même, dans un Mémoire présenté à l'Académie le 4 novembre 1839, il a considéré le cas plus général où les points matériels donnés appartiennent à trois ou à un plus grand nombre de systèmes, en remarquant d'ailleurs que ces divers systèmes peuvent être, par exemple, les diverses espèces d'atomes dont se composaient les molécules d'un corps cristallisé. Dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte, M. Laurent considère non plus un système de points matériels, mais un système de sphéroïdes sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles, et il recherche les équations du mouvement d'un semblable système. M. Poisson s'était déjà occupé de cette question; mais les formules qu'il avait obtenues se rapportaient spécialement au cas particulier où les dimensions des sphéroïdes, comparées aux distances qui les séparaient, étaient assez petites pour qu'on pût négliger certains termes; et d'ailleurs, ce que n'avait pas fait M. Poisson, M. Laurent déduit les actions mutuelles de deux sphéroïdes des actions exercées par les éléments de l'un sur les éléments de l'autre.

Après avoir établi les six équations générales qui déterminent le mouvement du centre de gravité de chaque sphéroïde, et son mouvement de rotation autour de ce même centre, M. Laurent considère spécialement le cas où ces deux mouvements deviennent infiniment petits; il trouve qu'elles peuvent alors se réduire à des équations linéaires symboliques analogues à celles que nous avons rappelées ci-dessus, et qui expriment les mouvements d'un ou deux systèmes de molécules. Les inconnues comprises dans les équations dont il s'agit représentent, comme on devait s'y attendre, les déplacements infiniment petits du centre de gravité d'un sphéroïde, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et les rotations infiniment petites de ce sphéroïde autour de trois droites menées par le même centre parallèlement à ces axes.

M. Laurent s'est encore proposé de résoudre, pour un système de sphéroïdes, le problème résolu par l'un de nous pour un ou deux systèmes de points matériels, en recherchant ce que deviennent les équations

propres à représenter les mouvements infiniment petits du système, dans le cas où ces équations prennent une forme indépendante des directions des axes coordonnés. Il a prouvé que, pour arriver à ce dernier cas, il suffit de remplacer le second membre de chaque équation, considéré comme une fonction explicite des coordonnées des divers points, par une intégrale triple qui renferme cette même fonction sous le signe \int , et qui se rapporte aux trois angles introduits par une transformation de coordonnées. Mais, comme, dans l'évaluation de cette intégrale, l'auteur a négligé certains termes, les équations définitives auxquelles il est parvenu ne sont pas les plus générales que l'on puisse obtenir en considérant des milieux isotropes. En recherchant quelle est la nature des milieux auxquels correspond la forme des équations données par M. Laurent, le rapporteur a reconnu qu'elle correspond au cas où, le système donné se composant de molécules non seulement semblables, mais semblablement orientées dans l'état initial, le mouvement est indépendant du mode d'orientation.

En intégrant les équations trouvées, M. Laurent a obtenu les lois des mouvements simples que ces équations peuvent représenter, ainsi que les vibrations et rotations des molécules dans les mouvements dont il s'agit.

Enfin, en terminant son Mémoire, il a observé que des six équations du mouvement on peut déduire deux équations séparées entre deux inconnues dont l'une est précisément la condensation de volume du système donné.

En résumé, dans le Mémoire dont nous venons de rendre compte, M. Laurent a donné de nouvelles preuves de la sagacité qu'il avait déjà montrée dans des recherches favorablement accueillies par les géomètres. Nous pensons, en conséquence, que ce Mémoire, comme les précédents, est digne d'être approuvé par l'Académie, et que l'Académie doit engager l'auteur à continuer ses recherches sur ce sujet difficile abordé par lui avec beaucoup de talent.



417.

CALCUL INTÉGRAL. — Démonstration et applications de la formule

$$F(k) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} D_i^{\frac{n-1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \underset{\alpha, \beta, \gamma, \dots}{M} F(\omega \sqrt{t}).$$

C. R., T. XXVII, p. 133 (7 août 1848).

Dans cette formule, qui permet de résoudre d'importantes questions d'Analyse et de Physique mathématique, par exemple d'intégrer généralement les équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires et à coefficients constants, on a

$$\omega = u\alpha + v\beta + w\gamma + \dots,$$

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2 + \dots,$$

$$p^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots;$$

de plus, n désigne le nombre, supposé impair, des variables u, v, w, \dots , et t une variable auxiliaire que l'on réduit définitivement à l'unité; enfin $F(k)$ est une fonction paire de k , développable suivant les puissances ascendantes de k^2 , et la moyenne indiquée par le signe M s'étend à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, pour lesquelles p demeure compris entre deux limites infiniment voisines de l'unité.

418.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie les Notes et Mémoires dont les titres suivent :

C. R., T. XXVII, p. 162 (14 août 1848).

PREMIÈRE NOTE. — Sur la surface caractéristique et la surface des ondes, correspondantes à des équations homogènes de degré pair entre les coor-

données et le temps, considérées comme enveloppes de deux plans mobiles, dont les deux équations sont représentées par la seule formule

$$ax + by + cz = t^2,$$

t étant lié à x, y, z ou à x, y, z par une équation homogène.

SECONDE NOTE. — Sur la surface mobile dont l'équation est de la forme

$$h + x(x-a) + y(y-b) + z(z-c) = \frac{1}{2}t^2,$$

t étant donné en fonction de x, y, z par une équation caractéristique, et sur la valeur ρ que prend le rayon de courbure moyenne de cette surface, c'est-à-dire la moyenne géométrique entre ses rayons de courbure principaux, quand on choisit les paramètres h, a, b, c , de manière que les points correspondants aux coordonnées a, b, c et x, y, z se confondent avec un seul point situé sur sa surface caractéristique, le point qui répond aux coordonnées x, y, z étant situé sur la surface des ondes.

PREMIER MÉMOIRE. — Intégration générale des équations homogènes, linéaires et à coefficients constants, d'un ordre quelconque, et intégration spéciale de l'équation

$$F(D_x, D_y, D_z) \varpi = 0,$$

que résout la fonction principale ϖ déterminée par la formule

$$\varpi = \underset{\lambda, \mu, \nu}{M} \int \frac{s^{m-1}}{F(s, x, y, z)} \frac{\rho^2 \varpi(x + \lambda t, y + \mu t, z + \nu t)}{t^3},$$

ρ étant le rayon de la surface des ondes, correspondant au point de la surface caractéristique dont les coordonnées sont x, y, z , et ρ le rayon de courbure mentionné dans la seconde Note. D'ailleurs, dans la formule précédente, on a

$$\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

et l'on suppose que, à chaque valeur de s , fournie par l'équation

$$F(s, x, y, z) = 0,$$



correspond une valeur de d^2s constamment positive. Ajoutons que, en vertu de cette formule, l'intégrale générale d'une équation homogène, linéaire, à coefficients constants et à quatre variables indépendantes, se trouve exprimée par une intégrale définie double, de laquelle on voit sortir immédiatement les lois des phénomènes.

SECOND MÉMOIRE. — *Démonstration du théorème fondamental suivant lequel une inconnue déterminée, comme fonction principale, par une équation linéaire, homogène, à coefficients constants, à quatre variables indépendantes x, y, z, t , et rigoureusement nulle au premier instant en dehors d'une certaine enveloppe invariablement liée à un point pris pour origine, n'a de valeur au bout du temps t que dans l'intérieur de la même enveloppe qu'un mouvement de translation aurait déplacée avec l'origine en faisant coïncider cette dernière avec un point quelconque de la surface des ondes.*

419.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie les Notes et Mémoires dont les titres suivent :

C. R., T. XXVII, p. 197 (21 août 1848).

PREMIER MÉMOIRE. — *Intégration générale de l'équation homogène du second ordre*

$$D_1^2 \varpi = F(D_x, D_y, D_z, \dots) \varpi,$$

à laquelle on satisfait, quand le nombre n des variables x, y, z, \dots est impair, en prenant

$$\varpi = \frac{\frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \prod_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^{\rho=1} \int_0^1 D_i^{-\frac{1}{2}} \left[t^{\frac{m-2}{2}} e^{\lambda \sqrt{t}} \varpi(x + \alpha_1 \sqrt{t}, y + \alpha_2 \sqrt{t}, \dots) \right],$$

$\alpha, \xi, \dots, \lambda$ étant liés aux variables auxiliaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ par des équations linéaires que donne le calcul, la valeur de ρ étant

$$\rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2}.$$

et t devant être réduit à l'unité, après les différentiations indiquées par la caractéristique D_i .

PREMIÈRE NOTE. — *Sur la fonction appelée principale dans les recherches présentées à la dernière séance (*)*.

DEUXIÈME NOTE. — *Détermination de l'intégrale singulière*

$$\iiint \dots I \Gamma(x, \xi, \gamma, \dots, t) dx d\xi d\gamma \dots dt,$$

I étant la partie réelle de l'expression

$$i(\varepsilon - \omega i)^{-m+1},$$

dans laquelle i désigne une racine carrée de l'unité négative, ε un nombre infiniment petit, et ω une fonction donnée des m variables x, ξ, γ, \dots . Réduction du calcul à la recherche des systèmes de valeurs de x, ξ, \dots, t qui vérifient les équations simultanées

$$\omega = 0, \quad \frac{D_x \omega}{x} = \frac{D_\xi \omega}{\xi} = \dots$$

Examen spécial de la valeur \mathfrak{A} que prend l'intégrale, dans le cas où, les intégrations étant effectuées entre des limites voisines de l'un de ces systèmes, on a

$$\omega = st - \varkappa t, \quad \varkappa = \alpha \lambda + \xi \mu + \gamma \nu + \dots$$

(*) Cette fonction est distincte de celle qui a été désignée sous le même nom dans d'autres Mémoires. Si l'on adopte l'ancienne définition, la formule et la proposition énoncées dans la dernière séance devront être appliquées, non plus à la fonction principale ϖ , mais à sa dérivée de l'ordre $n-2$, prise par rapport à t ; donc alors, en supposant toutes les nappes de la surface caractéristique réelles et convexes, on aura

$$D_i^{n-2} \varpi = \sum_{\lambda, \mu, \nu}^{\zeta=1} \int_0^1 \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{t^\alpha} \rho^{\beta-2} \varpi(x + \lambda t, y + \mu t, z + \nu t),$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque de l'espace; ε étant, au bout du temps t , le rayon de la surface des ondes, qui forme avec les demi-axes des coordonnées positives les angles dont les cosinus sont λ, μ, ν ; les coordonnées x, y, z étant celles du point correspondant de la surface caractéristique, et les valeurs de ρ, ζ étant celles que nous avons indiquées. Alors aussi $\frac{\rho^{\beta-2}}{t^\alpha}$ sera précisément le rayon de courbure de la surface caractéristique au point (x, y, z) .



s étant une fonction homogène du premier degré en x, y, z, \dots , et, de plus,

$$f(x, y, z, \dots) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - \dots}}$$

SECONDE MÉMOIRE. — *Intégration générale de l'équation homogène et du degré n .*

$$F(D_x, D_y, D_z, \dots) \varpi = 0,$$

dans laquelle le coefficient de $D_x^n \varpi$ est supposé réduit à l'unité, quel que soit le nombre m des variables x, y, z, \dots . Examen spécial du cas où m est impair.

TROISIÈME NOTE. — *Explication des contradictions qui se manifestent dans plusieurs cas entre les intégrales par séries des équations différentielles, ou aux dérivées partielles, et leurs intégrales en termes finis. Examen spécial du cas où les intégrales en séries disparaissent, quoique les intégrales en termes finis subsistent.*

420.

C. R., T. XXVII, p. 225 (28 août 1848).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie un *Mémoire sur la fonction principale assujettie à vérifier l'équation de l'ordre n*

$$F(D_x, D_y, D_z, \dots) \varpi = 0,$$

et à s'évanouir avec ses dérivées relatives à t d'un ordre inférieur à $n - 1$ pour une valeur nulle de t . Lorsque, le coefficient de $D_x^n \varpi$ étant l'unité, $F(t, x, y, z, \dots)$ se réduit à une fonction homogène de t ou de t^2 et de u , la lettre u désignant une fonction de x, y, z, \dots homogène ou non homogène et du second degré, la question peut être ordinairement ramenée au cas où la fonction u est de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots$$

Alors, si l'équation donnée est homogène, la fonction principale ϖ se déterminera par la formule

$$D_x^{n-2} \varpi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \mathbf{M}_{x_1, x_2, \dots, x_m}^{\beta=1} \int \frac{s^{n-1} t^{\frac{m-3}{2}}}{(\delta)^{\frac{1}{2}}} \left[t^{\frac{m-2}{2}} \varpi(x + x_1 t \sqrt{t}, y + x_2 t \sqrt{t}, \dots) \right],$$

t devant être réduit définitivement à l'unité, m désignant le nombre des variables x, y, z, \dots , et s ce que devient la fonction $F(t, x, y, z, \dots)$ quand on y remplace t par s et $x^2 + y^2 + z^2 + \dots$ par l'unité.

421.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie deux Notes sur les objets ici indiqués :

C. R., T. XXVII, p. 356 (9 octobre 1848).

PREMIÈRE NOTE. — *Sur l'intégrale*

$$s = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}} dx}{(a+bx)^m} = \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2} \varphi d\varphi}{(a+b \cos \varphi)^m},$$

dans laquelle i désigne une racine carrée de l'unité négative; et détermination de cette intégrale, pour des valeurs impaires de m , à l'aide de la formule

$$s = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{a}{(a^2 + b^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

SECONDE NOTE. — *Sur la transformation d'une fonction $\varpi(x, y, z, \dots)$ de m variables x, y, z, \dots en une intégrale de l'ordre m relative à m variables auxiliaires λ, μ, ν, \dots , et qui dépend d'une fonction nouvelle de x, y, z, \dots dont le degré se réduit au second.*

OEvres de C. — S. 1, t. XI.

11



Solution de ce problème à l'aide de la formule

$$\omega(x, y, z, \dots) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \iiint \dots \frac{\varepsilon \omega(\lambda, \mu, \nu, \dots) d\lambda d\mu d\nu \dots}{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \dots)^{\frac{m+1}{2}}},$$

dans laquelle ε désigne un nombre infiniment petit, m un nombre impair, et ρ^2 une fonction de x, y, z, \dots du second degré, déterminée par l'équation

$$\rho^2 = (x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 + (z - \nu)^2 + \dots$$

Ajoutons que la formule subsiste pour tout système de valeurs de x, y, z, \dots représentées par des valeurs de λ, μ, ν, \dots comprises entre les limites des intégrations.

122.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie trois Notes sur les objets ici indiqués :

C. R., T. XXVII, p. 373 (16 octobre 1848).

PREMIÈRE NOTE. — Démonstration du théorème suivant lequel l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{p^i} \Gamma(re^{p^i}) dr$$

reste invariable, tandis que l'argument p de la variable imaginaire

$$z = re^{p^i}$$

varie entre des limites entre lesquelles la fonction $F(z)$ demeure finie et continue, cette fonction étant d'ailleurs tellement choisie, que le produit $z f(z)$ s'évanouisse pour une valeur nulle et pour une valeur infinie du module r de z .

DEUXIÈME NOTE. — Application du théorème établi dans la Note précé-

dente à l'évaluation des intégrales

$$A = \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^m (1+x)^n + (1+x)^m (1-x)^n}{(\cos \theta + \alpha i \sin \theta)^{m+n}} \frac{dx}{1-x^2},$$

$$B = \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^m (1+x)^n - (1+x)^m (1-x)^n}{i(\cos \theta + \alpha i \sin \theta)^{m+n}} \frac{dx}{1-x^2},$$

dans lesquelles m, n désignent deux nombres entiers ou fractionnaires, ou même irrationnels, et θ un arc renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; détermination de ces intégrales à l'aide des formules

$$A = \frac{2^{m+n} \Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cos(m-n)\theta,$$

$$B = \frac{2^{m+n} \Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \sin(m-n)\theta.$$

TROISIÈME NOTE. — Sur une fonction $\Pi(r)$ de la variable r liée aux m variables x, y, z, \dots par l'équation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \dots,$$

et sur la transformation de cette fonction, pour le cas où $\Pi(r)$ est une fonction paire de r , en une intégrale multiple qui dépend de la fonction linéaire

$$s = \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots,$$

à l'aide de la formule

$$\Pi(r) = \frac{1}{\Gamma(m-1)} \frac{\rho^{-1}}{\alpha, \beta, \gamma, \dots} \Gamma^{(m-1)}(s),$$

dans laquelle on a

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots$$

et

$$f(r) = D_r \int_0^r \frac{r^2 - \tau^2}{(r^2 - \tau^2)^{\frac{m-3}{2}}} \Pi(\tau) d\tau.$$



423.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente des recherches analytiques sur les objets ici indiqués :

C. R., T. XXVII, p. 433 (3o octobre 1848).

Nouveau Mémoire sur l'équation linéaire et de l'ordre n

$$F(D_x, D_y, D_z, \dots)\varpi = 0,$$

$F(t, x, y, z, \dots)$ étant une fonction entière et homogène de t et des m variables x, y, z, \dots , et en même temps une fonction entière de t^2 , dans laquelle le coefficient de t^n se réduit à l'unité. Intégration de cette équation, dans le cas où m est un nombre impair, à l'aide de la formule

$$D_t^{n-2}\varpi = k \prod_{\lambda, \mu, \nu, \dots}^{c-1} M \prod_{\alpha, \beta, \gamma, \dots}^{p-1} M \int \frac{s^{n-1} t \nu^{m-2} \sqrt{\nu^2} D_\nu^{m-2} [\nu^{m-1} \Pi(st\nu)]}{(F(s, \alpha, \beta, \gamma, \dots))_s},$$

dans laquelle on a

$$k = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\pi}{2^{m-1} \left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \right]^2},$$

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots, \quad \sigma^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \dots, \quad \frac{1}{\nu} = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \dots$$

et

$$\Pi(s) = \varpi(x + \lambda s, y + \mu s, z + \nu s, \dots),$$

$\varpi(x, y, z, \dots)$ étant la valeur initiale de la dérivée de l'ordre $n - 1$ de la fonction principale ϖ , c'est-à-dire la valeur de $D_t^{n-1}\varpi$ correspondante à $t = 0$.

PREMIÈRE NOTE. — *Sur une transformation de l'intégrale obtenue dans le Mémoire précédent, et sur la réduction de cette intégrale à la forme*

$$D_t^{n-2}\varpi = \prod_{\lambda, \mu, \nu, \dots}^{c-1} M \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \dots}^{p-1} M k_s t \nu^{m-2} \sqrt{\nu^2} D_\nu^{m-2} [\nu^{m-1} \Pi(\nu t)],$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs positives de s et de α qui

vérifient les équations

$$F(s, \alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0, \quad s = 1,$$

et la valeur de k_s étant déterminée par la formule

$$\frac{1}{2} k_s = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^m \pi^{\frac{m-3}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int \int \dots \frac{d\beta d\gamma \dots}{\sqrt{[D_x F(1, \alpha, \beta, \gamma, \dots)]^2}},$$

dans laquelle les intégrations s'étendent à toutes les valeurs de β, γ, \dots , pour lesquelles on a $s = 1$. Conditions sous lesquelles s'effectue la réduction ici indiquée.

SECONDE NOTE. — *Application de l'intégrale obtenue dans le Mémoire au cas où l'équation donnée devient isotrope, c'est-à-dire au cas où la fonction $F(t, x, y, z, \dots)$ dépend uniquement des variables*

$$t \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots},$$

et où l'intégrale trouvée se réduit à

$$D_t^{n-2}\varpi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \prod_{\lambda, \mu, \nu, \dots}^{c-1} M D_t^{\frac{m-3}{2}} \left[t^{\frac{m-2}{2}} \int \frac{s^{n-1} t \Pi(st\sqrt{t})}{(F(s, \lambda, \mu, \nu, \dots))_s} \right],$$

devant être réduit à l'unité, après les différentiations.

424.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie les quatre Notes suivantes :

C. R., T. XXVII, p. 499 (13 novembre 1848).

PREMIÈRE NOTE. — *Application de la formule donnée, dans la séance du 3o octobre (p. 84), au cas particulier où l'on a*

$$\varpi(x, y, z, \dots) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots},$$



et où l'intégrale trouvée se réduit à

$$D_t^{m-1} \varpi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} \mathcal{M}_{\alpha, \beta, \gamma, \dots}^{p=1} \int \int \int \dots \int \frac{s^{m-1} D_s^{\frac{m-2}{2}} [\omega^{m-2} f(\omega)]}{(F(s, \alpha, \beta, \gamma, \dots))_s},$$

les valeurs de ρ^2 , ω et ν étant

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots, \quad \omega = \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + st, \quad \nu = \frac{1}{2} \omega^2.$$

DEUXIÈME NOTE. — *Démonstration de la formule*

$$\varpi(x, y, z, \dots) = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \int \int \int \dots \int \varpi(\lambda, \mu, \nu, \dots) \frac{\varepsilon d\lambda d\mu \dots}{(\varepsilon^2 + \zeta^2)^{\frac{m+1}{2}}},$$

m désignant un nombre impair, ε un nombre infiniment petit, la valeur de ζ^2 étant

$$\zeta^2 = (x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 + (z - \nu)^2 + \dots$$

et les intégrations étant effectuées entre les limites, hors desquelles la fonction sous le signe \int s'évanouit. Usage de cette formule dans l'intégration de l'équation homogène dont elle fournit l'intégrale générale déduite de l'intégrale particulière qu'offre la Note précédente.

TROISIÈME NOTE. — *Sur l'intégrale*

$$K = \int_a^{a'} \mathcal{E} \frac{f(x, t)}{(F(x, t))_x} dt,$$

t' étant inférieure à t'' , et $F(x, t)$ étant une fonction entière des variables x, t , dont le degré soit n par rapport à chacune des variables.

Examen du cas où la fonction $F(x, t)$ s'évanouit hors des limites

$$x = -\varepsilon, \quad x = \varepsilon,$$

ε étant un nombre très petit, et où les n racines de l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

résolue par rapport à t , sont des fonctions réelles, distinctes et continues de t entre les limites $x = -\varepsilon, x = \varepsilon$. Transformation de l'intégrale K , dans cette hypothèse, à l'aide de la formule

$$K = - \int_{-1}^1 \mathcal{E} \frac{t_r f(x, t)}{(F(x, t))_t} dx,$$

t_r désignant un coefficient qui s'évanouit, quand t est situé hors des limites t', t'' , et qui, dans le cas contraire, se réduit à $+1$ quand $D_x t$ est positif, à -1 quand $D_x t$ est négatif.

QUATRIÈME NOTE. — *Application des formules données dans la Note précédente à la délimitation des intégrales des équations homogènes. Accord des résultats ainsi obtenus, dans le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et où les variables indépendantes sont au nombre de quatre, avec les conclusions énoncées par M. BLANCHET dans la Note du 20 décembre 1841. Application des formules à la délimitation des ondes propagées dans les systèmes de molécules dont les mouvements sont représentés par des équations à sept variables indépendantes.*

425.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie diverses recherches sur les objets ci-après indiqués :

C. R., T. XXVII, p. 525 (20 novembre 1848).

Mémoire sur les fonctions discontinues. Examen spécial d'une fonction discontinue $\varpi(x, y, z, \dots)$ qui se réduit à une fonction continue $\Pi(x, y, z, \dots)$ quand les variables x, y, z, \dots demeurent comprises entre des limites réelles et constantes $x = x', x = x'', y = y', y = y'', \dots$ et qui s'évanouit toujours dans le cas contraire. Détermination de la fonction discontinue $\varpi(x, y, z, \dots)$, considérée comme valeur particulière d'une fonction continue, quand les va-



riables x, y, z, \dots deviennent imaginaires. Démonstration du théorème suivant lequel $\varpi(x, y, z, \dots)$ se réduit alors à $\Pi(x, y, z, \dots)$ quand les parties réelles de x, y, z, \dots sont toutes comprises entre les limites ci-dessus indiquées, et à zéro dans le cas contraire.

PREMIÈRE NOTE. — *Application des principes établis dans le Mémoire précédent à l'intégration de l'équation homogène*

$$F(D_x, D_y, D_z, \dots)\varpi = 0.$$

Vitesse de propagation des ondes planes représentée, au signe près, par la valeur de s tirée des formules

$$F(s, \alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots = 1,$$

quand cette valeur est réelle; et par la partie réelle de s , quand s devient imaginaire.

DEUXIÈME NOTE. — *Détermination générale de la fonction principale qui vérifie l'équation homogène.* Ondes courbes et très minces, considérées comme des enveloppes d'ondes planes. Nappes diverses des ondes courbes. La dérivée de l'ordre $n - 2$ de la fonction principale est rigoureusement nulle en dedans de la plus petite nappe, en dehors de la plus grande nappe, et entre les nappes elles-mêmes, quand les diverses nappes offrent des surfaces d'ellipsoïde semblables entre elles.

Cette proposition se vérifie encore lorsque, toutes les valeurs de s étant réelles, on néglige les quantités comparables au cube de l'épaisseur des ondes.

TROISIÈME NOTE. — Si l'on fait abstraction du cas spécial traité dans la Note précédente, la dérivée de l'ordre $n - 2$ de la fonction principale sera généralement nulle, en dedans de la plus petite nappe; mais elle ne s'évanouira rigoureusement en dehors de la plus grande nappe que dans le cas où toutes les valeurs de s seront réelles.

426.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie des recherches nouvelles sur les objets ci-après indiqués :

C. R., T. XXVII, p. 537 (27 novembre 1848).

PREMIER MÉMOIRE. — *Démonstration de plusieurs théorèmes généraux d'Analyse et de Calcul intégral.*

PREMIÈRE NOTE. — *Sur les coefficients limitateurs considérés comme valeurs particulières de fonctions continues d'une ou de plusieurs variables.* Avantages que présente, dans la solution des problèmes de Mécanique ou de Physique, l'emploi du limiteur L_x assujéti à se réduire sensiblement, pour une valeur réelle de la variable x , ou à zéro ou à l'unité, suivant que cette valeur est négative ou positive.

SECOND MÉMOIRE. — *Sur les équations discontinues auxquelles on est conduit en cherchant à résoudre les problèmes les plus généraux d'Analyse ou de Calcul intégral.* Emploi du limiteur L_x dans la transformation de ces équations et dans la détermination de leurs intégrales.

DEUXIÈME NOTE. — *Sur les phénomènes représentés par les intégrales des équations discontinues, et en particulier sur les ondes planes que représentent les intégrales en termes finis des équations discontinues aux dérivées partielles.* Détermination directe des limiteurs que renferment ces dernières intégrales. Application de ces mêmes intégrales à la détermination des lois de réflexion et de réfraction de la lumière.

TROISIÈME NOTE. — *Sur le développement en série des intégrales des équations discontinues.* Les fonctions que renferment ces intégrales, et qui s'y trouvent multipliées par les coefficients limitateurs, peuvent être, sous certaines conditions, développées en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes du temps; mais on ne saurait en dire autant des coefficients limitateurs auxquels on doit conserver toujours leurs formes primitives.



427.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie diverses Notes et Mémoires sur les objets ci-après indiqués :

C. R., T. XXVII, p. 572 (4 décembre 1848).

NOTE. — Sur les diverses formes qu'on peut assigner au limiteur l_x , en prenant, par exemple,

$$l_x = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}} \quad \text{ou} \quad l_x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\varepsilon + \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} \right),$$

ε désignant un nombre infiniment petit. On trouve alors

$$l_x + l_{-x} = 1.$$

Alors aussi, pour une valeur de x imaginaire et de la forme $x = \alpha + \beta i$, le limiteur l_x se réduit sensiblement ou à zéro ou à l'unité, suivant que la partie réelle α de x est négative ou positive.

PREMIER MÉMOIRE. — Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$D_x^2 z = (a^2 l_{-x} + b^2 l_x) D_t^2 z,$$

dans laquelle on suppose l'inconnue z assujettie à vérifier, pour une valeur nulle de t , les deux conditions

$$z = \varpi(x), \quad D_t z = 0.$$

Détermination de l'inconnue z à l'aide de la formule

$$z = u l_{-x} + v l_x,$$

la valeur de u étant

$$u = \frac{1}{2} l_{x-at} \varpi(x+at) + \frac{1}{2} l_{-x+at} \varpi(x-at) \\ + \frac{1}{2} \frac{b-a}{b+a} l_{x+at} \varpi(-x-at) + \frac{a}{b+a} l_{x+at} \varpi\left(b \frac{x+at}{a}\right),$$

et v étant ce que devient u quand on y remplace b par $-a$, a par $-b$,

et l_x par l_{-x} . Application de la formule trouvée, et des formules analogues, à la Physique mathématique.

DEUXIÈME MÉMOIRE. — Dans ce Mémoire, on démontre le théorème suivant :

Soient u, v deux fonctions entières de m variables x, y, z, \dots , toutes deux homogènes, mais l'une u du premier degré, l'autre v du second. Supposons d'ailleurs que la fonction v reste toujours positive et que les carrés des coefficients des variables dans la fonction u donnent pour somme l'unité. Soit encore $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots}$, et concevons que, dans le cas où l'on assujettit les variables x, y, z, \dots à la condition $v = 1$, on nomme H la valeur maximum de u , et V le produit des m racines positives de l'équation qui fournit les maxima et minima de r . Enfin, nommons A le produit des $m-1$ racines positives de l'équation qui fournit les maxima et minima de r , dans le cas où les variables x, y, z, \dots sont assujetties à vérifier simultanément les deux conditions $u = 0, v = 1$. On aura généralement

$$AH = V.$$

Application de ce théorème et d'autres propositions analogues : 1° à la Géométrie; 2° à l'intégration des équations homogènes.

TROISIÈME MÉMOIRE. — Sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement, et en particulier sur les vibrations de l'éther dans un corps solide ou fluide dont chaque molécule est considérée comme un système d'atomes.

428.

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie des recherches nouvelles sur les objets ci-après indiqués :

C. R., T. XXVII, p. 596 (11 décembre 1848).

NOTE. — Sur les fonctions isotropes de plusieurs systèmes de coordonnées rectangulaires, et spécialement sur celles de ces fonctions qui sont en



même temps hémitropes, et qui changent de signe avec les coordonnées parallèles à un seul axe. Toute fonction développable suivant les puissances entières des coordonnées, lorsqu'elle est hémitrope, se compose de termes qui sont tous de degré impair, et doit renfermer au moins trois systèmes de coordonnées.

PREMIER MÉMOIRE. — *Sur les actions ternaires, ou, en d'autres termes, sur les modifications que l'action mutuelle de deux atomes peut subir en présence d'un troisième atome.* Influence du platine réduit en éponge sur la combinaison de l'oxygène et de l'hydrogène. Influence d'un atome d'un corps sur l'action mutuelle de deux atomes d'éther. Il suffit de tenir compte de cette dernière influence, dans la recherche des formules qui expriment les mouvements infiniment petits du fluide étheré, puis de réduire les formules trouvées à des équations isotropes, pour retrouver précisément les équations différentielles de la polarisation chromatique. Accord des résultats ainsi obtenus avec les expériences de M. Pasteur.

SECOND MÉMOIRE. — *Sur les lois de la polarisation des rayons lumineux dans les cristaux à un ou à deux axes optiques.* Il suffit de supposer les atomes d'éther distribués isotropiquement autour de chaque atome du corps, puis de tenir compte de l'influence exercée par chaque atome du corps sur les actions mutuelles des atomes d'éther, pour retrouver la conclusion qui se déduit des expériences de Fresnel, savoir, que les vibrations lumineuses dirigées suivant un des trois axes d'élasticité, et comprises dans le plan d'une onde passant par le deuxième ou le troisième axe, offrent dans l'un ou l'autre cas la même vitesse de propagation.

429.

C. R., T. XXVII, p. 621 (18 décembre 1848).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente à l'Académie un Mémoire sur les trois espèces de rayons lumineux qui correspondent aux mouvements

simples du fluide étheré. Les principaux résultats auxquels l'auteur parvient sont par lui indiqués dans les termes suivants :

1° Ceux des rayons lumineux qui se propagent sans s'affaiblir offrent des vitesses de propagation dont les carrés sont les racines réelles d'une équation du troisième degré. Les deux premières racines de cette équation répondent aux rayons jusqu'ici observés par les physiciens. Elles deviennent égales entre elles, dans les milieux isophanes, lorsque les rayons observés se réduisent à un seul. Elles sont distinctes, mais peu différentes l'une de l'autre, dans les cristaux à un ou deux axes optiques, et dans les corps isophanes qui font tourner le plan de polarisation. Elles deviennent imaginaires dans les métaux et les corps opaques.

2° Les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière se déduisent de deux principes fondamentaux. Le premier consiste en ce que les mouvements simples incident, réfléchis et réfractés sont des mouvements *correspondants* (p. 71 et 72). Le second est le principe de la *continuité du mouvement dans l'éther*. En vertu de ce dernier principe, les déplacements infiniment petits ξ , η , ζ d'un atome d'éther, mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires des x , y , z , à une distance infiniment petite de la surface de séparation de deux milieux, devront conserver la même valeur quand on passera du premier milieu au second; et l'on devra encore en dire autant des dérivées de ξ , η , ζ , prises par rapport à une coordonnée qui serait perpendiculaire à la surface réfléchissante, par exemple des trois dérivées $D_x \xi$, $D_x \eta$, $D_x \zeta$, si cette surface est perpendiculaire à l'axe des x . On obtient de cette manière six équations de condition, qui suffisent dans le cas où les équations différentielles du mouvement de l'éther peuvent être réduites sensiblement à des équations du second ordre. Dans le cas contraire, de nouvelles conditions, que l'on devra joindre aux précédentes, se déduiraient encore immédiatement du principe énoncé. Ajoutons que, dans chaque milieu, le déplacement ξ , η ou ζ se composera de diverses parties correspondantes aux divers rayons incident, réfléchis ou réfractés.



3° En opérant comme on vient de le dire, on obtient précisément les formules que j'ai données pour déterminer le mode de polarisation et l'intensité des rayons lumineux réfléchis ou réfractés par la surface d'un corps transparent ou opaque. Ces formules, dans une première approximation, et dans le cas particulier où il s'agit d'un corps transparent dont la surface polariserait complètement un rayon réfléchi sous une certaine incidence, se réduiraient aux formules de Fresnel, et se trouvent d'ailleurs vérifiées par les expériences de M. Jamin.

4° Les expériences qui vérifient mes formules vérifient en même temps l'existence du troisième rayon lumineux dont les propriétés sont mises en évidence par l'analyse de laquelle ces formules se tirent. Le calcul montre que le troisième rayon de lumière disparaît quand la lumière incidente est ou polarisée dans le plan d'incidence, ou propagée dans une direction parallèle ou perpendiculaire à la surface réfléchissante, et qu'il s'éteint dans chaque milieu à une distance notable de cette surface. Si, après avoir déterminé le coefficient d'extinction du troisième rayon, on divise l'unité par ce coefficient, le quotient obtenu changera de valeur dans le passage du premier au second milieu, à moins que la surface réfléchissante ne polarise complètement la lumière réfléchie sous une certaine incidence; et si l'on multiplie la différence entre les deux valeurs trouvées par la caractéristique du rayon réfracté, le produit sera précisément le coefficient très petit que renferment les formules relatives aux corps transparents et vérifiées par M. Jamin.

5° L'existence du troisième rayon semble encore indiquée par d'autres phénomènes, spécialement par la perte de lumière observée dans les rayons réfléchis sous des incidences obliques, et par un fait remarquable dont nous devons la connaissance à M. Arago, savoir que la lumière disséminée par une surface hors de la direction de la réflexion régulière est polarisée perpendiculairement au plan d'émergence.

430.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mécanique moléculaire.*

C. R., T. XXVIII, p. 2 (2 janvier 1849).

Des savants illustres, dont plusieurs sont membres de cette Académie, m'ayant engagé à réunir en un corps de doctrines les recherches que j'ai entreprises et poursuivies depuis une trentaine d'années, sur la Mécanique moléculaire et sur la Physique mathématique, j'ai cru qu'il était de mon devoir de répondre, autant que je le pouvais, à leur attente, et de réaliser prochainement le vœu qu'ils m'avaient exprimé. Il m'était d'autant moins permis de résister à leur désir, qu'en y accédant je remplis, en quelque sorte, un acte de piété filiale, puisque ce désir était aussi le vœu d'un tendre père, qui, joignant, jusqu'en ses derniers jours, l'amour de l'étude et la culture des Lettres à la pratique de toutes les vertus, s'est endormi du sommeil des justes, et s'est envolé vers une meilleure patrie. Pressé par tous ces motifs, je me propose de publier bientôt un Traité de Mécanique moléculaire où, après avoir établi les principes généraux sur lesquels cette science me paraît devoir s'appuyer, j'appliquerai successivement ces principes aux diverses branches de la Physique mathématique, surtout à la théorie de la lumière, à la théorie du son, des corps élastiques, de la chaleur, etc. Pour ménager les instants de l'Académie, je me bornerai à lui offrir, et à insérer dans les *Comptes rendus*, de courts extraits de mes recherches, spécialement relatifs aux questions qui, en raison de leur nouveauté ou de leur importance, me sembleront plus propres à exciter la curiosité des physiciens et des géomètres.

Je commencerai aujourd'hui, en déduisant des principes exposés dans les séances du 24 juillet et du 18 décembre 1848, les équations du troisième rayon lumineux, dont l'existence, comme j'en ai fait la remarque, peut être considérée comme déjà constatée par les phénomènes que présentent la réflexion et la réfraction de la lumière.



ANALYSE.

Les divers points de l'espace étant rapportés à trois axes rectangulaires des x, y, z , et deux milieux étant séparés l'un de l'autre par le plan des yz perpendiculaire à l'axe des x , concevons que les déplacements infiniment petits d'une molécule d'éther, supposée réduite à un point matériel, soient représentés, dans le premier milieu, par ξ, η, ζ , dans le second milieu, par ξ', η', ζ' . Supposons d'ailleurs que, dans une première approximation, les équations aux dérivées partielles, propres à exprimer les mouvements infiniment petits de l'éther, puissent être, sans erreur sensible, réduites à des équations du second ordre. Alors, en vertu du principe de la continuité du mouvement dans l'éther, on aura, pour $x = 0$,

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \xi', & \eta = \eta', & \zeta = \zeta', \\ D_x \xi = D_x \xi', & D_x \eta = D_x \eta', & D_x \zeta = D_x \zeta'. \end{cases}$$

Dans chacune de ces équations de condition, le déplacement relatif à chaque milieu sera la somme des déplacements mesurés dans les divers mouvements incident, réfléchis et réfractés.

Concevons, pour fixer les idées, que chacun des milieux donnés soit un milieu isophane qui ne fasse pas tourner les plans de polarisation des rayons simples. Les équations des mouvements infiniment petits de l'éther dans le premier milieu seront

$$(2) \quad (D_x^2 - E)\xi = FD_x \nu, \quad (D_x^2 - E)\eta = FD_y \nu, \quad (D_x^2 - E)\zeta = FD_z \nu,$$

E, F désignant des fonctions entières de la somme $D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$, et ν étant la dilatation du volume de l'éther déterminée par la formule

$$(3) \quad \nu = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta.$$

Si les équations (2) peuvent être réduites, sans erreur sensible, à des équations homogènes du second ordre, F deviendra constant, et l'on aura

$$(4) \quad E = \Omega^2 (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2),$$

Ω désignant la vitesse de propagation des ondes planes à vibrations transversales. Ajoutons que les constantes F et Ω^2 changeront généralement de valeurs, quand on passera du premier milieu au second.

Supposons maintenant qu'un mouvement simple de l'éther, à vibrations transversales, se propage dans le premier milieu, situé du côté des x négatives. Après être parvenu jusqu'à la surface réfléchissante, ou, en d'autres termes, jusqu'au plan des yz , ce mouvement simple, qui constituera un rayon simple de lumière, donnera naissance, dans chaque milieu, à deux autres mouvements simples, par conséquent à deux autres rayons simples réfléchis ou réfractés. D'ailleurs, ces divers mouvements simples seront du nombre de ceux que nous avons nommés *mouvements correspondants*. Ajoutons que, dans chaque milieu, l'un des deux nouveaux rayons réfléchis ou réfractés sera un rayon ordinaire à vibrations transversales, tandis que l'autre sera le troisième rayon lumineux, et ne restera sensible qu'à une très petite distance du plan des yz .

Concevons à présent que, afin de mettre en évidence les déplacements des atomes d'éther mesurés dans les divers rayons simples, on se serve des lettres ξ, η, ζ pour désigner les déplacements relatifs au rayon incident, puis des indices \cdot et \prime , joints à ces mêmes lettres pour indiquer les déplacements relatifs aux deux nouveaux rayons, en plaçant ces indices en bas ou en haut de chaque lettre, suivant qu'il s'agit des rayons réfléchis ou réfractés, et en conservant l'indice \cdot pour le troisième rayon lumineux, qui s'éteint à une très petite distance de la surface réfléchissante. Alors, à la place des formules (1), on obtiendra les suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} \xi + \xi_{\cdot} + \xi_{\prime} = \xi' + \xi'' & D_x \xi + D_x \xi_{\cdot} + D_x \xi_{\prime} = D_x \xi' + D_x \xi'', \\ \eta + \eta_{\cdot} + \eta_{\prime} = \eta' + \eta'' & D_x \eta + D_x \eta_{\cdot} + D_x \eta_{\prime} = D_x \eta' + D_x \eta'', \\ \zeta + \zeta_{\cdot} + \zeta_{\prime} = \zeta' + \zeta'' & D_x \zeta + D_x \zeta_{\cdot} + D_x \zeta_{\prime} = D_x \zeta' + D_x \zeta''. \end{cases}$$

Si le rayon incident est polarisé dans le plan d'incidence, ou, en d'autres termes, si les vibrations des atomes d'éther sont perpendiculaires à ce plan et parallèles à la surface réfléchissante, il suffira



de faire coïncider le plan d'incidence avec le plan des xy , pour que ζ_x, ζ_y s'évanouissent, et alors les deux dernières des conditions (5), réduites à la forme

$$(6) \quad \zeta + \zeta' = \zeta'', \quad D_x \zeta + D_x \zeta' = D_x \zeta'', \quad *$$

fourniront précisément les formules de réflexion et de réfraction données par Fresnel pour ce cas particulier. Si, au contraire, le rayon incident offre, pour les molécules d'éther, des vibrations renfermées dans le plan d'incidence ou parallèles à ce plan, alors, en supposant toujours que celui-ci coïncide avec le plan des xy , on déduira des quatre premières d'entre les conditions (5), non seulement les propriétés des rayons ordinaires réfléchis et réfractés, comme je l'ai fait dans le 1^{er} Volume des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (¹), mais encore les propriétés du troisième rayon, c'est-à-dire du rayon qui s'éteint à une très petite distance de la surface réfléchissante, soit dans le premier, soit dans le second milieu, et l'on obtiendra ainsi les conclusions suivantes :

Soit T la durée d'une vibration moléculaire dans le rayon incident. Supposons d'ailleurs que l'épaisseur d'une onde plane, ou, ce qui revient au même, la longueur d'une ondulation soit représentée par l dans le rayon incident, et par l' dans le rayon réfracté ordinaire. Soit encore τ l'angle d'incidence, τ' l'angle de réfraction, et posons

$$s = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{l}, \quad k' = \frac{2\pi}{l'}, \quad \Omega = \frac{s}{k}, \quad \Omega' = \frac{s}{k'}.$$

Représentons par $-\Omega^2, -\Omega'^2$ les valeurs négatives des deux sommes $\Omega^2 + F, \Omega'^2 + F'$, la lettre F' désignant ce que devient la constante F quand on passe du premier milieu au second; et, en supposant Ω, Ω' positifs, prenons

$$k_x = \frac{s}{\Omega}, \quad k_x' = \frac{s}{\Omega'}.$$

Enfin, en admettant toujours que, dans le rayon incident, les vibra-

(¹) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. XI.

tions des molécules d'éther soient parallèles au plan des xy , posons

$$u = k \cos \tau, \quad u' = k' \cos \tau', \quad v = k \sin \tau = k' \sin \tau', \\ u_x = \sqrt{k^2 + v^2}, \quad u_x' = -\sqrt{k'^2 + v^2}, \\ \theta = \frac{k'}{k} = \frac{\sin \tau}{\sin \tau'};$$

θ sera ce qu'on nomme l'indice de réfraction, et les équations symboliques du rayon incident pourront être réduites à la forme

$$(7) \quad \bar{\zeta} = \bar{u} \sin \tau, \quad \bar{\eta} = \bar{u} \cos \tau, \quad \bar{u} = \Pi e^{i(\mu x + \nu y - s t)},$$

Π désignant un paramètre imaginaire et i une racine carrée de -1 . De plus, les équations symboliques du troisième rayon, c'est-à-dire du rayon qui s'éteint à très petite distance de la surface réfléchissante, pourront être réduites, dans le premier milieu, à la forme

$$(8) \quad \bar{\zeta}_e = \frac{u_x}{k_x} \bar{u}_e, \quad \bar{\eta}_e = \frac{v}{k_x} \bar{u}_e i, \quad \bar{u}_e = \Pi e^{i(\mu x + (\nu y - s t) i)},$$

et dans le second milieu, à la forme

$$(9) \quad \bar{\zeta}_e' = \frac{u_x'}{k_x'} \bar{u}_e', \quad \bar{\eta}_e' = \frac{v}{k_x'} \bar{u}_e' i, \quad \bar{u}_e' = \Pi e^{i(\mu x + (\nu y - s t) i)}.$$

Ajoutons que les quantités u_e et $-u_e$ représenteront évidemment les coefficients d'extinction du troisième rayon dans le premier et dans le second milieu.

Soient maintenant \bar{I}, \bar{I}' les coefficients de réflexion et de réfraction des rayons ordinaires, réfléchis et réfractés. Soient, en outre,

$$(10) \quad \bar{I}_e = \frac{\bar{H}}{\bar{H}}, \quad \text{et} \quad \bar{I}_e' = \frac{\bar{H}'}{\bar{H}'}$$

les coefficients de réflexion et de réfraction du troisième rayon dans le premier et dans le second milieu. Les quatre premières des formules (5) donneront

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{I} &= \frac{(v^2 - uu')(v^2 + u_x u_x') - (u' + u)(u_x + u_x')v^2 i}{(v^2 + uu')(v^2 + u_x u_x') - (u' - u)(u_x - u_x')v^2 i} \\ \bar{I}' &= \frac{kk'(v^2 + u_x u_x')}{(v^2 + uu')(v^2 + u_x u_x') - (u' - u)(u_x - u_x')v^2 i} \frac{2u}{u + u'} \end{aligned} \right.$$



et, de plus,

$$(12) \quad \frac{\bar{I}_x}{k^2} = \frac{\bar{I}^r}{k_y} = \frac{k^r k_y}{v^2 + u_x u^r} \frac{k'^2 - k^2}{kk'} \frac{v}{u_x - u^r} \frac{\bar{I}^r}{k}$$

Les conséquences importantes qui se déduisent des formules (11) et (12), dont les deux premières coïncident avec les équations obtenues dans le 1^{er} Volume des *Exercices d'Analyse* [voir les formules (56) de la page 174] (*), seront développées dans un prochain article.

431.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Note sur les rayons lumineux simples et sur les rayons évanescents.*

C. R., T. XXVIII, p. 25 (8 janvier 1849).

Étant donné un système de molécules, supposées réduites à des points matériels, j'ai appelé *mouvement simple* du système tout mouvement infiniment petit, dans lequel les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires, sont les parties réelles de trois variables imaginaires, respectivement égales aux produits de trois constantes imaginaires par une même exponentielle, dont l'exposant imaginaire est une fonction linéaire des coordonnées et du temps. J'ai, de plus, nommé *déplacements symboliques* les trois variables imaginaires, dont les déplacements effectifs sont les parties réelles. Enfin, j'ai observé que l'exponentielle variable à laquelle les déplacements symboliques sont proportionnels, est le produit d'un facteur réel par une exponentielle trigonométrique; et ce facteur réel, et l'argument de l'exponentielle trigonométrique, sont ce que j'ai appelé le *module* et l'*argument* du mouvement simple. Cela posé, il est facile de reconnaître que tout mouvement simple d'un système de molécules est un mouvement par ondes planes, les diverses

(*) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. XI.

molécules se mouvant dans des plans qui sont parallèles entre eux, sans être nécessairement parallèles aux plans des ondes. Un mouvement simple est *durable et persistant*, lorsque son module est indépendant du temps, et alors chaque molécule décrit une ellipse qui peut se réduire à un cercle ou à une portion de droite. Un tel mouvement se propagera sans s'éteindre, et les ellipses décrites seront toutes pareilles les unes aux autres, si le module se réduit constamment à l'unité. Mais, si le module ne se réduit à l'unité que pour les points situés dans un certain plan, alors l'amplitude d'une vibration moléculaire, c'est-à-dire le grand axe de l'ellipse décrite par une molécule, décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance de la molécule au plan dont il s'agit croîtra en progression arithmétique.

Dans la théorie de la lumière, à un mouvement simple durable et persistant du fluide éthéré correspond ce qu'on nomme un *rayon lumineux simple*. La *direction* du rayon est celle dans laquelle le mouvement se transmet à travers une très petite ouverture faite dans un écran. Le rayon lui-même est représenté à chaque instant par la courbe que dessinent, en vertu de leurs déplacements, les molécules primitivement situées sur sa direction. Si les molécules décrivent des cercles ou des ellipses, le rayon sera *polarisé circulairement* ou *elliptiquement*, et représenté par une espèce d'hélice ou de spirale à double courbure. Cette hélice se changera en une courbe plane, si les vibrations moléculaires sont rectilignes; et, dans ce cas, le rayon *polarisé rectilignement* deviendra ce que nous appelons un *rayon plan*.

Le *module* et l'*argument* d'un rayon lumineux simple ne sont autre chose que le module et l'argument du mouvement simple qui lui correspond. Si le module se réduit constamment à l'unité, le rayon se propagera sans s'affaiblir. Si le module diffère généralement de l'unité, l'amplitude des vibrations lumineuses décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance à un plan fixe croîtra en progression arithmétique, et alors le rayon de lumière deviendra ce que nous appellerons un *rayon évanescent*. La lumière que renferme



un rayon évanescant peut être, dans un grand nombre de cas, perçue par l'œil. Telle est; en particulier, la lumière verte transmise par voie de réfraction à travers une feuille d'or très mince. Telle est encore la lumière transmise à travers les faces latérales d'un prisme de verre qui a pour bases deux triangles rectangles, et fournie par un rayon émergent qui rase la face de sortie, dans le cas où le rayon réfracté forme, avec la normale à cette dernière face, un angle supérieur à l'angle de réflexion totale. Alors, comme je l'ai dit en 1836 (Tome II, page 349) ⁽¹⁾, le rayon émergent s'éteint graduellement, tandis que le rayon incident forme un angle de plus en plus petit avec la face d'entrée.

Les coefficients des trois coordonnées dans l'exponentielle qui caractérise un rayon simple, c'est-à-dire dans l'exponentielle à laquelle les déplacements symboliques des molécules d'éther sont proportionnels, méritent une attention particulière. Quand le milieu que l'on considère est un milieu isophane ordinaire, qui ne produit pas la polarisation chromatique, les rayons simples qui peuvent s'y propager sont de deux espèces. Pour certains rayons, les trois déplacements symboliques de chaque molécule sont proportionnels aux trois coefficients dont il s'agit. Pour d'autres rayons, si l'on multiplie respectivement les trois coefficients par les trois déplacements symboliques, la somme des produits obtenus devra se réduire à zéro. D'ailleurs, dans les milieux isophanes, les directions des rayons lumineux sont généralement perpendiculaires aux plans des ondes. Cela posé, on peut affirmer que, dans ces milieux, les vibrations des molécules d'éther seront ordinairement *longitudinales*, c'est-à-dire perpendiculaires aux plans des ondes, pour les rayons simples d'une espèce, et *transversales*, c'est-à-dire comprises dans les plans des ondes, pour les rayons de l'autre espèce, quand ces rayons se propageront sans s'affaiblir, ou, ce qui revient au même, quand leurs modules se réduiront constamment à l'unité. Mais, quand les modules seront généralement distincts de

⁽¹⁾ *Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. IV, p. 207

l'unité, les rayons simples propagés par les milieux isophanes cesseront d'offrir des vibrations longitudinales ou transversales, en devenant ce que nous appelons des *rayons évanescents*. Alors aussi le rayon évanescant, qui tiendra la place d'un rayon à vibrations longitudinales, sera un rayon simple composé de molécules dont les vibrations s'exécuteront dans des plans perpendiculaires aux traces des plans des ondes sur le plan fixe correspondant au module 1.

Le troisième rayon de lumière, réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux, est précisément l'un de ceux que nous appelons *évanescents*; et, pour expliquer les phénomènes de la réflexion et de la réfraction lumineuses, il est nécessaire de tenir compte de ce troisième rayon. C'est ce qu'avait vu M. George Green dès l'année 1837; il avait même cherché à déduire de cette idée les lois de la réflexion de la lumière, en appliquant à la détermination des mouvements de l'éther seul la méthode donnée par Lagrange dans la *Mécanique analytique*, ou, ce qui revient au même, en faisant coïncider les équations de condition relatives à la surface de séparation des deux milieux avec celles qu'on obtient quand on égale entre elles les pressions exercées par les deux milieux sur cette surface. Mais, comme je l'ai déjà dit, au principe de l'égalité entre ces pressions on doit, dans la théorie de la lumière, substituer le principe de la *continuité du mouvement dans l'éther*; et alors, en opérant comme je l'ai fait dans la dernière séance, on arrive directement et promptement à résoudre le problème, dont la solution est donnée par des formules nouvelles qui comprennent, comme cas particulier, celles de Fresnel. En vertu de ces formules nouvelles, le troisième rayon est un rayon évanescant, dirigé de manière à raser la surface réfléchissante ou réfringente, et composé de molécules qui décrivent des ellipses comprises dans le plan d'incidence, les plans des ondes étant à la fois perpendiculaires au plan d'incidence et à la surface dont il s'agit. Si, d'ailleurs, on conçoit sur une membrane placée tout près de la surface réfléchissante ou réfringente l'image de ce troisième rayon, cette image n'offrira une lumière représentée par une fraction sensible de la lumière



incidente que dans une épaisseur très petite. Mais cette très petite épaisseur ne sera peut-être pas une raison suffisante pour que l'on doive désespérer de rendre le troisième rayon sensible à l'œil, surtout si l'on réfléchit à l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes, qui très probablement doit être, pour un grand nombre d'entre elles, inférieur à $\frac{1}{10}$ ou même à $\frac{1}{100}$ de seconde sexagésimale.

432.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière, et sur de nouveaux rayons réfléchis et réfractés.*

C. R., T. XXVIII, p. 57 (15 janvier 1849).

D'expériences faites en 1816 sur deux faisceaux de lumière polarisée, dont l'origine est la même, et dont le système produit le phénomène des interférences, ou cesse de le produire, suivant que les plans de polarisation sont obliques l'un à l'autre ou perpendiculaires entre eux, Fresnel avait conclu que, dans les rayons lumineux, les vibrations sont transversales, et qu'en conséquence elles ne font pas varier la densité de l'éther. Plus tard, en s'appuyant, d'une part sur les conclusions que nous venons de rappeler, d'autre part sur des inductions et des hypothèses plus ou moins vraisemblables, cet illustre physicien est parvenu à découvrir, pour la réflexion de la lumière à la surface des corps transparents, des formules qui s'accordent assez bien avec l'expérience. Toutefois, cet accord n'est pas complet. Ainsi, par exemple, suivant les formules de Fresnel, la lumière réfléchie serait, comme Malus l'avait trouvé, entièrement polarisée dans le plan d'incidence, sous un certain angle; et cet angle, conformément à la loi découverte par M. Brewster, aurait pour tangente l'indice de réfraction. Or les expériences de divers physiciens, particulièrement celles de M. Biot et de M. Airy, ont démontré que les corps très réfringents, entre autres le diamant, ne polarisent complètement, sous aucune

incidence, la lumière réfléchie par leur surface. Les formules de Fresnel ne pouvaient donc être qu'approximatives, et devaient être remplacées par des formules plus générales, qu'il importait de rechercher.

Mais, pour arriver à ces formules générales, il devenait nécessaire de donner pour base aux recherches ultérieures sur la lumière les principes mêmes de la Mécanique rationnelle. Tel est l'objet de plusieurs Mémoires que j'ai publiés à partir de l'année 1829. Ainsi, en particulier, dans la séance du 12 janvier 1829, après avoir établi et intégré les équations des mouvements infiniment petits d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, je déduisais des intégrales obtenues les conclusions suivantes :

« 1° Si un système de molécules est tellement constitué, que l'élasticité de ce système soit la même en tous sens, un ébranlement produit en un point quelconque se propagera de manière qu'il en résulte deux ondes sphériques animées de vitesses constantes, mais inégales. De ces deux ondes la première disparaîtra, si la dilatation initiale du volume se réduit à zéro; et alors, si l'on suppose les vibrations des molécules primitivement parallèles à un plan donné, elles ne cesseront pas d'être parallèles à ce plan.

» 2° Si un système de molécules est tellement constitué, que l'élasticité reste la même en tous sens autour d'un axe parallèle à une droite donnée, dans toutes les directions perpendiculaires à cet axe, les équations du mouvement renfermeront plusieurs coefficients dépendants de la nature du système, et l'on pourra établir entre ces coefficients une relation telle, que la propagation d'un ébranlement primitivement produit en un point du système donne naissance à trois ondes dont chacune coïncide avec une surface du second degré. De plus, si l'on fait abstraction de celle des trois ondes qui disparaît avec la dilatation du volume quand l'élasticité redevient la même en tous sens, les deux ondes restantes se réduiront au système d'une sphère et d'un ellipsoïde de révolution, cet ellipsoïde ayant pour axe de révolution le diamètre de la sphère. »

L'accord de ces conclusions avec le théorème d'Huygens sur la double réfraction de la lumière dans les cristaux à un seul axe optique était un motif de croire que l'on pourrait arriver à déduire de la Mécanique moléculaire l'explication des phénomènes lumineux, et transformer ainsi le système des ondulations en une théorie mathématique de la lumière. Cette croyance put s'appuyer sur une base plus solide encore et plus étendue, lorsque, ayant considéré les mouvements par ondes planes, je parvins à déduire de mes formules, non seulement les vibrations transversales de l'éther admises par Fresnel et la polarisation dans les cristaux à un axe optique ⁽¹⁾, mais encore les lois générales de la polarisation produite par un cristal quelconque (31 mai 1830), la forme connue de la surface des ondes (14 juin 1830), les lois de la dispersion des couleurs (*Bulletin de Ferrussac*, 1830, et *Nouveaux Exercices*), le phénomène des ondes et les lois de la diffraction (*Comptes rendus*, séance du 9 mai 1836), enfin les propriétés des rayons évanescents, qui, en pénétrant dans les corps opaques, s'éteignent graduellement, et de telle sorte que l'intensité de la lumière décroît en progression géométrique pour des profondeurs croissantes en progression arithmétique (séance du 11 avril 1836, et Mémoire lithographié, août 1836). D'autres recherches, indiquées ou publiées dans l'année 1836 (voir en particulier les *Nouveaux Exercices*, les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et le Mémoire lithographié), étaient relatives à la réflexion et à la réfraction opérées par la surface d'un corps transparent, ou même d'un corps opaque, et spécialement d'un métal. Mais, quoique les formules auxquelles ces recherches m'avaient conduit s'accordassent assez bien avec l'expérience, elles n'offraient pas encore toute la précision qu'on pouvait espérer d'atteindre, et demeuraient comparables, pour le degré d'exactitude, aux formules de Fresnel, avec lesquelles elles coïncidaient dans le cas où les corps étaient diaphanes. D'ailleurs, elles n'étaient pas suffisamment démontrées. Pour obtenir des formules

⁽¹⁾ D'après ce que m'a dit, à cette époque, M. Blanchet, les lois de la polarisation par les cristaux à un axe optique avaient déjà été déduites par lui de mes formules.

plus exactes, et que l'on pût appliquer avec une entière confiance, il était indispensable de rechercher quelles étaient, pour la lumière transmise d'un milieu dans un autre, les conditions relatives à la surface de séparation des deux milieux. Or cette question était d'autant plus épineuse, qu'ici l'on se trouvait naturellement induit en erreur par la méthode même ordinairement employée pour l'établissement de semblables conditions. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Dans l'Hydrostatique et dans la théorie des corps élastiques, les conditions relatives à la surface de séparation de deux milieux sont celles qu'on obtient en égalant entre elles les pressions intérieure et extérieure supportées par la surface en un point quelconque. Le principe de l'égalité entre ces pressions conduit d'ailleurs au même résultat que la formule générale d'équilibre ou de mouvement donnée par Lagrange dans la *Mécanique analytique*. Cela posé, on peut être, au premier abord, tenté d'appliquer le principe ou la formule dont il s'agit à la théorie de la lumière. Mais cette application ne serait pas légitime. En effet, supposons, pour fixer les idées, que l'on mette en présence l'une de l'autre deux masses de fluide éthéré, comprises dans deux corps solides ou fluides séparés par une surface plane. La pression supportée par un élément infiniment petit de cette surface sera la résultante des actions exercées à travers l'élément par les molécules du corps et de l'éther situés d'un certain côté, sur les molécules du corps et de l'éther situés de l'autre côté. Or, supposons que la résultante des actions exercées par les molécules de l'éther soit très petite vis-à-vis de la résultante des actions exercées par les molécules de chaque corps, et concevons qu'un mouvement infiniment petit soit transmis d'un corps à l'autre, à travers la surface de séparation. Alors, dans une première approximation, on pourra, il est vrai, faire abstraction des molécules d'éther, et déduire du principe d'égalité entre les pressions intérieure et extérieure les conditions relatives à la surface qui devront être jointes aux équations des mouvements vibratoires et infiniment petits des corps donnés. Mais on ne pourra pas, en faisant abstraction des molécules des corps, appliquer



le principe énoncé aux seules molécules d'éther; car cela reviendrait à effacer, dans les équations de condition obtenues, les termes sensibles, et à y conserver uniquement ceux qui peuvent être négligés sans inconvénient.

Il faut donc de toute nécessité, quand il s'agit de la théorie de la lumière, remplacer la méthode de Lagrange par une méthode nouvelle, ou, ce qui revient au même, remplacer le principe d'égalité entre les pressions extérieure et intérieure par un nouveau principe. Effectivement, les lois de la réflexion et de la réfraction lumineuses peuvent être déduites de la méthode nouvelle que j'ai développée dans les *Comptes rendus* de 1839, ou, mieux encore, du nouveau principe exposé dans l'article qui a été lu à la séance du 24 juillet 1848, et qui doit paraître prochainement dans le *Recueil des Mémoires de l'Académie*. Suivant ce nouveau principe, lorsque la lumière se propage dans un milieu donné, ou se transmet d'un milieu dans un autre à travers la surface qui sépare ces deux milieux, il doit y avoir, en général, *continuité du mouvement dans l'éther*, c'est-à-dire que les déplacements moléculaires mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et les dérivées de ces déplacements prises par rapport aux variables indépendantes, ou, du moins, celles de ces dérivées dont les valeurs ne sont pas déterminées par les équations des mouvements infiniment petits, doivent être généralement des fonctions continues de ces variables, ou, en d'autres termes, varier par degrés insensibles avec les coordonnées et le temps. On se trouve immédiatement conduit à ce principe, dès l'instant où l'on admet que les mouvements infiniment petits de l'éther peuvent être représentés, dans chaque milieu, par des équations linéaires aux dérivées partielles, et à coefficients constants: attendu que la continuité d'une fonction dans le voisinage d'une valeur attribuée à une variable indépendante est une condition nécessaire de l'existence d'une valeur correspondante de la dérivée.

Cela posé, concevons que, deux milieux étant séparés l'un de l'autre par une surface plane, on prenne un axe perpendiculaire à cette sur-

face pour axe des x , puis la surface elle-même pour plan des y, z ; et supposons qu'un rayon simple de lumière, propagé dans le premier milieu, vienne tomber sur la surface dont il s'agit. Si, comme il est naturel de le croire, le rayon de la sphère d'activité sensible d'une molécule d'éther est très petit par rapport à une longueur d'onde lumineuse, le rayon incident se propagera, en se modifiant, à travers la surface de séparation des deux milieux, et donnera naissance à des rayons réfléchis et réfractés. D'ailleurs, les lois de la réflexion et de la réfraction pourront se déduire des équations qui représenteront les mouvements infiniment petits de l'éther dans les deux milieux, jointes au principe de la continuité du mouvement dans l'éther. Si, dans une première approximation, les équations des mouvements infiniment petits peuvent être réduites à des équations aux dérivées partielles, qui soient du second ordre, non seulement par rapport au temps, mais encore par rapport aux coordonnées, alors, en vertu du principe énoncé, les déplacements moléculaires et leurs dérivées du premier ordre prises par rapport à l'abscisse x , devront, à des distances infiniment petites de la surface de séparation, conserver les mêmes valeurs, quand on passera d'un milieu à l'autre. D'ailleurs, un déplacement, mesuré dans chaque milieu parallèlement à un axe fixe, sera la somme des déplacements mesurés parallèlement au même axe dans les divers rayons, savoir: dans les rayons incidents et réfléchis, s'il s'agit du premier milieu, et, s'il s'agit du second, dans les rayons réfractés.

Si les équations des mouvements infiniment petits pouvaient être sensiblement réduites, non plus au second ordre, mais au quatrième ordre, au sixième, etc., alors, parmi les dérivées des déplacements moléculaires, relatives à l'abscisse x , celles qui devraient, à des distances infiniment petites de la surface réfléchissante et réfringente, conserver les mêmes valeurs quand on passerait d'un milieu à l'autre, ne seraient plus seulement les dérivées du premier ordre, mais les dérivées d'un ordre inférieur au quatrième, au sixième, etc.

Une première loi de réflexion et de réfraction, qui, dans la théorie



de la lumière, se déduit du principe de la continuité du mouvement dans l'éther, et qui se déduirait aussi, dans la théorie des corps élastiques, du principe de l'égalité entre les pressions intérieure et extérieure supportées par la surface de séparation de deux milieux, c'est que des mouvements simples, incident, réfléchis et réfractés sont toujours du nombre de ceux qui ont été nommés *mouvements correspondants*. Ajoutons que des mouvements simples, réfléchis et réfractés, mais durables et persistants, doivent toujours offrir, quand ils se propagent sans s'affaiblir, des ondes planes que leur vitesse de propagation éloigne de plus en plus de la surface réfléchissante ou réfringente, et quand ils s'affaiblissent en se propageant, des vibrations moléculaires dont l'amplitude diminue en progression géométrique, tandis que la distance à la surface croît en progression arithmétique. La loi que nous venons de rappeler suffit pour déterminer les directions des ondes planes, liquides, sonores, lumineuses, etc., qui peuvent être réfléchies ou réfractées par la surface de séparation de deux milieux. Dans la théorie de la lumière, elle fournit immédiatement : 1° quand on considère des corps isophanes, l'égalité des angles d'incidence et de réfraction et le théorème de Descartes, qui réduit à une quantité constante le rapport des sinus d'incidence et de réfraction; 2° quand on considère des corps doublement réfringents, les règles établies par Malus et par M. Biot pour la détermination des rayons réfléchis par la seconde surface des cristaux à un ou à deux axes optiques.

Au reste, la loi ici rappelée n'est pas la seule qui se déduise de la continuité du mouvement dans l'éther. Ce principe fournit encore, avec une grande facilité, les diverses circonstances de la réflexion et de la réfraction lumineuses, par exemple les directions et les amplitudes des vibrations de l'éther, ou, en d'autres termes, le mode de polarisation et l'intensité de la lumière réfléchié ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque. On arrive ainsi, en particulier, aux formules établies par les corps isophanes et transparents, dans les *Comptes rendus* de 1839 (séances des 1^{er} et 8 avril, du 24 juin,

du 1^{er} juillet, du 25 novembre et du 2 décembre) et reproduites dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. Ces formules qui, comme on le voit, se déduisent directement des principes fondamentaux de la Mécanique moléculaire, sont précisément celles qui ont été vérifiées par les expériences de M. Jamin. Elles renferment, avec l'angle d'incidence et l'indice de réfraction, les coefficients d'extinction de deux rayons *évanescents*, qui, propagés dans le premier et dans le second milieu le long de la surface de séparation, n'offrent de lumière sensible qu'à de très petites distances de cette surface. Ces deux rayons évanescents, dont chacun tient la place d'un mouvement à vibrations longitudinales, influent nécessairement sur la production des phénomènes de réflexion et de réfraction lumineuses; et si, après avoir fait cette remarque, dans son Mémoire du 11 décembre 1837, M. Green n'a pas obtenu définitivement les véritables lois de ces phénomènes, cela nous paraît tenir principalement à ce qu'il a cru pouvoir appliquer à l'éther considéré isolément la formule générale du mouvement donnée par Lagrange.

Il est bon d'observer que les carrés des vitesses avec lesquelles les ondes lumineuses se propagent dans un milieu donné sont généralement fournies par une équation du troisième degré, qui offre deux racines égales, quand ce milieu devient isophane. Si la troisième racine correspondante au troisième rayon, ou, ce qui revient au même, au rayon évanescents, se réduisait à zéro pour chacun des milieux donnés, les deux rayons évanescents propagés le long de la surface de séparation disparaîtraient, et les formules de la réflexion et de la réfraction lumineuses se réduiraient aux formules de Fresnel. Ainsi les formules de Fresnel sont, dans la théorie de la lumière, ce que sont en Astronomie les lois de Kepler, ou, en d'autres termes, les formules du mouvement elliptique auxquelles on parvient en faisant disparaître les planètes perturbatrices. La lumière réfléchié, qui, suivant les formules de Fresnel, peut toujours être complètement polarisée sous un certain angle, ne pourra plus l'être, en vertu des nouvelles formules, que dans le cas particulier où les coefficients



d'extinction des deux rayons évanescents deviendraient égaux entre eux. Dans le cas contraire, si l'on décompose un rayon incident polarisé rectilignement en deux rayons plans, renfermés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre dans le plan perpendiculaire, les nœuds de ces derniers seront inégalement déplacés par la réflexion, et il en résultera entre les deux rayons une différence de phases qui sera surtout sensible quand la tangente de l'angle d'incidence se rapprochera beaucoup de l'indice de réfraction. Enfin, dans une première approximation, cette différence de phases, diminuée de π , sera la somme de deux angles positifs, mais inférieurs à π , dont les tangentes trigonométriques seront les produits qu'on obtient quand on multiplie le sinus d'incidence par la tangente de la somme ou de la différence entre les angles d'incidence et de réfraction, et par un très petit coefficient ε . Ajoutons que, si l'on nomme l la longueur d'ondulation dans le rayon incident, $k = \frac{2\pi}{l}$ la caractéristique de ce rayon, et k_r , k'' les coefficients d'extinction des rayons évanescents sous l'incidence perpendiculaire dans le premier et dans le second milieu, le coefficient très petit ε se réduira sensiblement à la différence $\frac{k}{k_r} - \frac{k}{k''}$, et qu'en conséquence, si ε est positif, k'' sera inférieur au rapport $\frac{k}{\varepsilon}$. De cette remarque, jointe aux formules établies dans la séance du 8 janvier, on déduit aisément une limite inférieure à l'amplitude des vibrations lumineuses dans le rayon évanescents que propage un milieu correspondant à une valeur positive de ε . Supposons, pour fixer les idées, que dans le rayon incident la longueur d'ondulation l ait la valeur moyenne d'un demi-millième de millimètre, et que ce rayon, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, soit réfléchi sous un angle de 45° par une plaque de réalgar. On aura sensiblement, d'après M. Jamin, $\varepsilon = 0,00791$, l'indice de réfraction étant 2,454; et, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, le rayon évanescents propagé dans la plaque sera un rayon *filiforme*, ou, en d'autres termes, un rayon d'une très petite épaisseur, dans lequel l'amplitude des vibrations

lumineuses décroîtra très rapidement avec la distance à la surface. On pourra d'ailleurs calculer une limite inférieure de cette amplitude, et l'on reconnaîtra que, si on la représente par l'unité dans le rayon incident, elle surpassera, sur la surface même, la fraction 0,295; puis à des distances égales à $\frac{1}{100}$ ou à $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire au centième ou au dixième d'une longueur d'ondulation, les fractions 0,133 et 0,000105. Remarquons en outre qu'une épaisseur égale à $\frac{1}{10}$, vue à une distance d'un décimètre, sous-tendra un angle très peu différent d'une seconde sexagésimale, et par conséquent supérieur, d'après les observations d'Herschel, au diamètre apparent de Sirius.

Une dernière observation, qui n'est pas sans importance, c'est que, dans le cas où les équations des mouvements infiniment petits de l'éther sont réduites non plus au second ordre, mais au quatrième, au sixième, etc., la théorie précédente fournit de nouveaux rayons réfléchis et réfractés. Ces nouveaux rayons, dont les directions forment généralement avec la normale à la surface réfléchissante des angles très petits, correspondent aux diverses racines de l'équation qui sert à déduire de la durée des vibrations moléculaires la longueur des ondulations prise pour inconnue. Les formules que j'ai obtenues dans les *Nouveaux Exercices*, et qui expriment les lois de la dispersion des couleurs, permettent de fixer aisément les directions et les intensités de ces nouveaux rayons, ainsi que je l'expliquerai dans un prochain article.

433.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Rapport concernant un *Memoire de M. JAMIN sur la réflexion de la lumière à la surface des corps transparents.*

C. R., T. XXVIII, p. 121 (22 janvier 1849).

Lorsqu'un rayon de lumière, propagé dans un certain milieu, dans l'air par exemple, tombe sur la surface extérieure d'un corps transpa-



rent, on voit paraître de nouveaux rayons qui se propagent à partir de cette surface, et que l'on nomme *réfléchis* ou *réfractés*. Or il importe de connaître et de constater, non seulement les diverses circonstances de la réflexion et de la réfraction lumineuses, mais encore les lois de ces deux phénomènes. Sous ce double rapport, les nouvelles expériences et recherches de M. Jamin nous paraissent devoir être rangées parmi celles qui peuvent efficacement contribuer au progrès de la science. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

On sait qu'un rayon de lumière offre ce qu'on appelle la polarisation rectiligne, circulaire ou elliptique, lorsqu'il est du nombre de ceux que l'on considère, dans le système des ondulations, comme renfermant des molécules d'éther dont chacune décrit une portion de droite, un cercle ou une ellipse. On sait encore qu'un rayon polarisé rectilignement disparaît lorsqu'on l'observe dans un azimut convenablement choisi, à travers un analyseur, par exemple à travers une plaque de tourmaline ou un prisme de Nicol. On sait, enfin, que la couleur communiquée à un rayon polarisé rectilignement qui traverse d'abord une lame biréfringente d'une épaisseur convenable, spécialement une lame de chaux sulfatée, puis un analyseur, se modifie quand la polarisation devient elliptique ou circulaire. C'est à l'aide de ce dernier moyen, joint à l'emploi de la lumière solaire, que M. Jamin est parvenu à reconnaître l'étendue et la généralité d'un phénomène jusqu'ici observé par les physiciens dans un petit nombre de cas seulement. D'une expérience faite par Malus en 1808, il résultait qu'une plaque de verre polarise complètement, dans le plan d'incidence, la lumière réfléchie par sa surface sous un angle de 57° .

En substituant au verre un grand nombre de substances diverses, M. Brewster trouva que chacune d'elles polarisait complètement la lumière réfléchie sous un angle dont la tangente était l'indice de réfraction. Toutefois M. Biot et d'autres physiciens montrèrent que la polarisation devient incomplète quand la réflexion est produite par la surface d'un corps très réfringent, du diamant par exemple; et,

dans la lumière réfléchie par ce dernier corps, M. Airy reconnut les caractères de la polarisation elliptique. Il résulte des expériences de M. Jamin que ce genre de polarisation est généralement produit par la réflexion de la lumière à la surface de presque tous les corps, non seulement de ceux qui sont très réfringents, mais aussi de ceux qui réfractent peu la lumière, et du verre en particulier, sous des incidences ordinairement peu différentes de l'angle considéré par M. Brewster. Les exceptions à cette règle sont extrêmement rares; et si, jusqu'à présent, on n'a pas reconnu la polarisation elliptique dans les rayons réfléchis par les corps dont le pouvoir réfringent est peu considérable, cela tient surtout à ce que, pour une certaine incidence, la lumière transmise au travers de l'analyseur échappait à l'œil en raison d'une trop faible intensité.

Après avoir constaté la polarisation incomplète des rayons réfléchis par la plupart des corps transparents, M. Jamin a voulu mesurer avec exactitude les effets de la réflexion. Pour y parvenir, il a fait construire un nouvel appareil d'une précision remarquable. Dans cet appareil, un rayon solaire, polarisé par un prisme de Nicol dans un certain azimut, se transforme, quand il est réfléchi sous une incidence convenable, en un rayon doué de la polarisation elliptique, et, par conséquent, décomposable en deux rayons plans, qui, polarisés, le premier dans le plan d'incidence, le second dans un plan perpendiculaire, offrent des nœuds distincts et des phases inégales; puis la différence de phases entre les deux rayons composants se trouve détruite par un compensateur (1) à plaques croisées qui glissent l'un sur l'autre, et se mesure à l'aide d'une vis micrométrique. Le rayon réfléchi étant alors réduit à un rayon plan, l'observateur le reçoit sur un analyseur à l'aide duquel il détermine son azimut.

(1) On sait que M. Babinet a formé le compensateur, ici utilisé par M. Jamin, en taillant sous le même angle, dans un cristal de quartz, deux prismes à base triangulaire, qui offrent, le premier des arêtes parallèles, le second des arêtes perpendiculaires à l'axe optique, et en substituant le système de ces deux prismes superposés au système de deux plaques croisées, mais à épaisseurs constantes, dont M. Biot avait signalé les propriétés.



M. Jamin remarque, avec raison, qu'il est utile de donner au rayon incident fourni par le polarisateur un azimut peu différent d'un angle droit, et que cette dernière condition, supposée remplie, augmente considérablement l'exactitude des résultats déduits de l'observation. Dans toutes les expériences de M. Jamin, l'azimut du rayon incident était de 84° .

Après avoir étudié, comme on vient de le dire, les effets de la réflexion produite sous des incidences diverses par un grand nombre de corps, M. Jamin n'a rencontré que deux substances qui lui aient paru offrir le phénomène de la polarisation complète, savoir : la ménilite, et l'alun taillé perpendiculairement à l'axe de l'octaèdre qui représente sa molécule intégrante. Pour toutes les autres substances, l'angle d'incidence qui avait pour tangente l'indice de réfraction était, non pas un angle de polarisation complète, mais, à très peu près, un angle de polarisation maximum.

Lorsqu'un rayon simple et polarisé rectilignement, après avoir été réfléchi sous une incidence quelconque par un des corps transparents qui sont aptes à produire le phénomène de la polarisation complète, est décomposé en deux rayons polarisés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, la différence de phases entre le premier et le second des deux rayons composants peut être, comme l'on sait, représentée, au signe près, ou par une demi-circonférence π , ou par une circonférence entière 2π , suivant que l'incidence adoptée est inférieure ou supérieure à l'angle de polarisation. Si, à un corps qui polarise complètement la lumière, on substitue un métal, la différence de phases dont il s'agit variera par degrés insensibles, depuis l'incidence normale jusqu'à l'incidence rasante, en passant d'une manière continue de la limite π à la limite 2π (voir le Tome II des *Comptes rendus*, p. 428). Enfin, si la lumière est réfléchie par une substance transparente quelconque, alors, comme le constatent les expériences de M. Jamin, la différence de phases, sensiblement stationnaire dans le voisinage de l'incidence rasante ou normale, passera de la limite π à la limite 2π , tandis que l'angle d'incidence variera

entre deux valeurs extrêmes qui, pour les corps peu réfringents, seront toutes deux très voisines de l'angle de polarisation maximum. Ajoutons que les expériences de M. Jamin, après lui avoir donné des valeurs positives de la différence des phases pour la plupart des substances employées, ont fourni pour trois d'entre elles des valeurs négatives.

Ce changement de signe dans la différence des phases est d'autant plus remarquable qu'il n'était pas prévu. Les trois substances pour lesquelles il a été constaté par M. Jamin sont le silex résinite, l'hyalite et la fluorine, qui, toutes trois, offrent un indice de réfraction peu différent de 1,43.

Parlons maintenant des conséquences importantes qui se déduisent, sous le rapport théorique, des expériences de M. Jamin.

En partant de la notion des vibrations transversales de l'éther, déduite d'expériences qu'il avait faites avec M. Arago, et de quelques hypothèses plus ou moins vraisemblables, Fresnel était parvenu à découvrir, pour la réflexion et la réfraction de la lumière à la surface des corps transparents, des formules qui supposaient l'existence d'un angle de polarisation complète. D'autre part, lorsque l'on conserve, conformément aux indications de l'Analyse mathématique, la notion des vibrations transversales dans les rayons lumineux, et que, en même temps, on substitue aux hypothèses admises par Fresnel les principes de la Mécanique moléculaire, spécialement le principe de la continuité du mouvement dans l'éther, tel qu'il a été défini dans la précédente séance, on arrive aux formules que l'un de nous a établies dans l'année 1839 (Tomes VIII et IX des *Comptes rendus*, séances du 1^{er} avril et du 25 novembre), et qui comprennent, comme cas particulier (Tome VIII, p. 471), les formules de Fresnel. Enfin, si, à l'aide des nouvelles formules, on détermine la différence de phases entre les deux rayons composants dont le système peut être substitué à un rayon réfléchi doué de la polarisation elliptique, cette différence, diminuée de π , se réduira, dans une première approximation, à la somme de deux angles positifs, mais inférieurs à π , dont les tangentes trigono-



métriques seront

$$\varepsilon \sin \tau \operatorname{tang}(\tau + \tau'), \quad \varepsilon \sin \tau \operatorname{tang}(\tau - \tau'),$$

τ étant l'angle d'incidence, τ' l'angle de réfraction, et ε un coefficient très petit. Ajoutons que si, λ étant la longueur d'ondulation dans le rayon incident, on pose $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on aura sensiblement

$$\varepsilon = \frac{k}{k''} - \frac{k}{k'}$$

k_p , k'' étant les coefficients d'extinction des rayons évanescents, sous l'incidence normale, dans l'air et dans le corps donné.

Or, après avoir opéré comme il a été dit ci-dessus, et reconnu que la polarisation incomplète de la lumière réfléchi par la plupart des corps ne permet plus en général d'appliquer aux phénomènes de la réflexion sous une incidence quelconque les formules de Fresnel, M. Jamin a voulu comparer les résultats de ses expériences avec ceux que fournissent les nouvelles formules. Ici, comme dans ses précédentes recherches, la théorie s'est accordée avec l'observation d'une manière inespérée. Ainsi, par exemple, le rayon incident étant réfléchi par le sulfure d'arsenic sous une incidence variable de 50° à 85° , le rapport de la différence de phases produite par la réflexion à une demi-circonférence a varié de 1,018 à 1,979; et, dans une trentaine d'expériences correspondantes à autant d'incidences diverses, la différence entre les nombres fournis par l'observation et la théorie a presque toujours été inférieure à 0,01.

Il est utile de le remarquer, les nouvelles formules renferment seulement, avec l'angle d'incidence, deux constantes qui dépendent de la nature du corps soumis à l'expérience, savoir, l'indice de réfraction et le coefficient ε , nommé *coefficient d'ellipticité* par M. Jamin. La constance de ces deux coefficients a été diversement établie. La constance du premier ou de l'indice de réfraction est la loi de Descartes, établie d'abord par l'expérience, puis confirmée par la théorie. La constance du second, indiquée d'abord et prévue par la théorie, se trouve aujourd'hui confirmée par les expériences de M. Jamin.

d'hui confirmée par les expériences de M. Jamin. Ajoutons que les données fournies par ces expériences ont permis à M. Jamin de déterminer, à l'aide de la réflexion seule, et avec une grande exactitude, les indices de réfraction des substances qu'il avait employées.

D'après ce qui a été dit plus haut, ε ou le coefficient d'ellipticité est la différence de deux fractions qui offrent un numérateur commun et qui ont pour dénominateurs les coefficients d'extinction du rayon évanescent dans l'air et dans le corps soumis à l'expérience. Par suite, ε s'évanouira, et la polarisation sera complète sous une certaine incidence, si les coefficients d'extinction mesurés dans l'air et dans le corps sont égaux. Dans le cas contraire, ε sera positif ou négatif, avec la différence de phases produite par la réflexion, suivant que le premier des coefficients d'extinction, mesuré dans l'air, sera supérieur ou inférieur au second. Dans les *Comptes rendus* de 1839 (2^e semestre), la l'application faite à la page 729 des formules générales données à page 687 (1) supposait implicitement que le coefficient d'extinction mesuré dans l'air devient infini, et, dans cette hypothèse particulière, ε ne pouvait être que positif. M. Jamin ayant prouvé par ses expériences que ε devient négatif pour certaines substances, il faut en conclure que le coefficient d'extinction du rayon évanescent dans l'air conserve une valeur finie, et qu'en conséquence l'intensité de la lumière dans ce rayon n'est pas rigoureusement nulle.

Remarquons encore que si la lumière, au lieu de passer de l'air dans un premier ou dans un second corps diaphane, était transmise du premier corps au second, la valeur de ε correspondante à cette troisième hypothèse se déduirait immédiatement des valeurs de ε relatives aux deux premières et s'évanouirait, si ces valeurs étaient égales, en donnant naissance au phénomène de la polarisation complète des rayons réfléchis sous une certaine incidence. Il serait bon de vérifier, par des observations directes, ces conséquences de la théorie. Ce serait là un nouveau sujet de recherches sur lequel nous appellerons volontiers l'attention de M. Jamin.

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. V, p. 40-59.

En résumé, les Commissaires sont d'avis que le Mémoire soumis à leur examen peut contribuer efficacement aux progrès de la science, non seulement en raison de la précision des méthodes d'expérimentation employées par l'auteur, mais aussi à cause des résultats qu'ont donnés les expériences, et de l'appui qu'elles apportent à la théorie de la lumière, en confirmant les lois de réflexion que fournissent les principes de la Mécanique moléculaire. Ils pensent, en conséquence, que le Mémoire de M. Jamin est très digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

434.

C. R., T. XXVIII, p. 161 (5 février 1849).

M. AUGUSTIN CAUCHY présente une Note sur la détermination simultanée de l'indice de réfraction d'une lame ou plaque transparente, et de l'angle compris entre deux surfaces planes qui terminent cette plaque.

435.

ANALYSE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUES. — *Mémoire sur les fonctions discontinues.*

C. R., T. XXVIII, p. 277 (26 février 1849).

Dans les problèmes d'Analyse et de Mécanique, les valeurs des inconnues peuvent être souvent représentées par des fonctions continues des variables indépendantes. C'est ce qui arrive par exemple en Astronomie, quand on détermine les mouvements des corps célestes, puisque les coordonnées qui fixent la position d'un astre à une époque quelconque sont évidemment des fonctions continues de ses coordonnées initiales et du temps.

Ce n'est pas tout : la plupart des questions que l'on résout en intégrant des équations différentielles ou aux dérivées partielles,

par exemple les problèmes qui, dans la Physique mathématique, se ramènent à l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants, semblent, au premier abord, ne devoir introduire dans le calcul que des fonctions continues. En effet, comme je l'ai remarqué dans un précédent Mémoire, supposer qu'une inconnue est déterminée par une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants, c'est supposer implicitement que cette inconnue est une fonction continue des variables indépendantes, attendu que la continuité d'une fonction dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à une variable indépendante est une condition nécessaire de l'existence d'une valeur correspondante de la dérivée.

Toutefois, pour qu'un problème de Physique, qui exige l'intégration de certaines équations linéaires, puisse être complètement résolu, il est nécessaire de joindre aux équations dont il s'agit la connaissance de l'état initial des corps que l'on considère et les conditions relatives aux limites de ces mêmes corps. Or cet état initial et ces limites peuvent introduire dans le calcul des fonctions discontinues. Ainsi, en particulier, si les équations proposées représentent les vibrations infiniment petites d'un système de molécules réduites à des points matériels, le mouvement pourra résulter d'un ébranlement initial primitivement circonscrit dans des limites très resserrées. Or il est clair que, dans ce cas, les déplacements des molécules et leurs vitesses initiales, considérés comme fonctions des coordonnées, pourront varier d'une manière continue entre les limites dont il s'agit, mais deviendront généralement discontinues quand on atteindra ces limites, qu'on ne pourra dépasser sans que les mêmes fonctions passent tout à coup d'une valeur sensible à une valeur nulle.

Les fonctions discontinues, ainsi introduites dans le calcul par la considération de l'état initial d'un système de points matériels, se retrouvent dans les intégrales des équations qui représentent le mouvement du système. Seulement les variables indépendantes que contenaient ces fonctions y sont remplacées par de nouvelles quantités



variables, quelquefois même par des expressions imaginaires. De plus, il peut arriver que les intégrales obtenues soient exprimées, non en termes finis, mais en séries qui renferment, avec les fonctions discontinues, leurs dérivées des différents ordres.

Eu égard à ces diverses circonstances, les fonctions discontinues donnent naissance, dans les problèmes de Mécanique et de Physique, à des difficultés graves ou à des contradictions apparentes et à de singuliers paradoxes qu'il importe de signaler et d'éclaircir. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Une première difficulté est de savoir ce que devient une fonction discontinue de variables réelles, qui s'évanouit hors de certaines limites, quand ces variables sont remplacées par des expressions imaginaires, et surtout ce que deviennent alors les limites dont il s'agit.

Une seconde difficulté réside dans la contradiction apparente qui existe, pour l'ordinaire, entre les intégrales exprimées en termes finis quand elles renferment des fonctions discontinues, et les développements de ces mêmes intégrales en séries convergentes.

Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une colonne d'air renfermée dans un cylindre infiniment étroit dont l'axe soit pris pour axe des abscisses, et que le mouvement soit occasionné par un déplacement primitif et infiniment petit des molécules situées dans le voisinage du point pris pour origine. Alors, au bout du temps t , le déplacement d'une molécule d'air correspondante à l'abscisse x sera représenté par l'intégrale de l'équation linéaire que l'on nomme *équation du son*; et l'on conclura de cette intégrale exprimée en termes finis que le mouvement se propage, dans la colonne d'air, de part et d'autre de l'origine, avec deux vitesses de propagation égales entre elles, mais dirigées en sens opposés. Ajoutons que, si l'on développe la même intégrale suivant les puissances ascendantes de t , on obtiendra une intégrale en série qui paraîtra satisfaisante encore à toutes les données du problème, et qui néanmoins entraînera des conclusions contraires à celles que nous venons d'énoncer. En effet, dans l'intégrale en série, chacune des puissances de t se trouvera multi-

pliée par une fonction de x , qui s'évanouira pour toute valeur de x sensiblement différente de zéro; par conséquent, la somme de la série s'évanouira au bout du temps t , comme au premier instant, pour tout point situé à une distance notable de l'origine; d'où il semblera légitime de conclure que les molécules d'air primitivement déplacées vibreront, mais sans que leur mouvement de vibration se propage en passant de ces molécules à d'autres. Ainsi, tandis que l'intégrale en termes finis indique des vibrations sonores qui se propagent avec une vitesse constante, l'intégrale en série semble indiquer les vibrations stationnaires.

Les difficultés que nous venons de signaler et toutes les difficultés analogues disparaîtraient, si l'état initial d'un système était représenté, non plus à l'aide d'une ou de plusieurs fonctions discontinues, mais à l'aide de fonctions continues dont chacune offrir, pour des valeurs quelconques, réelles ou même imaginaires des variables indépendantes, une valeur différente de zéro. C'est donc à la discontinuité des fonctions introduites dans le calcul que tiennent les difficultés dont il s'agit. Il est naturel d'en conclure que, pour éclaircir les points douteux et pour faire cesser les contradictions, il suffira de rétablir la continuité. On y parvient en considérant les fonctions discontinues comme des valeurs particulières de fonctions plus générales, mais continues, desquelles on les tire en réduisant à zéro un paramètre spécial.

Il importe d'observer que les fonctions discontinues introduites dans le calcul par la considération de l'état initial d'un système ne cessent généralement d'être continues que pour certaines valeurs des variables qu'elles renferment. Ainsi, par exemple, il arrive souvent qu'une fonction discontinue d'une ou de plusieurs variables se confond entre des limites données de ces variables avec une certaine fonction continue, et passe brusquement, hors de ces limites, d'une valeur sensible à une valeur nulle. Il y a plus : une fonction discontinue qui ne satisfait pas à de telles conditions peut ordinairement se partager en plusieurs autres qui remplissent des conditions ana-



logues; et, par suite, on peut se borner à établir la théorie des fonctions discontinues dans le cas particulier que nous venons d'indiquer. Ajoutons que, dans ce cas, la fonction discontinue peut être considérée comme équivalente au produit de la fonction continue donnée par un coefficient qui se réduise toujours à l'unité entre les limites proposées, et à zéro en dehors de ces limites. Ce coefficient, que j'appellerai *limitateur*, peut être regardé lui-même, ou comme une fonction discontinue, ou comme la valeur particulière que prend une fonction continue quand on fait évanouir un paramètre spécial. En conséquence, il suffira de considérer les coefficients limitateurs, non seulement pour retrouver, mais aussi pour résoudre toutes les difficultés que présente la théorie des fonctions discontinues. On conçoit d'ailleurs que cette considération permet de surmonter plus aisément les obstacles, en débarrassant les questions relatives à la discontinuité d'une circonstance qui leur est étrangère, savoir, de la forme particulière attribuée à chaque fonction discontinue entre des limites données, et en attirant l'attention du calculateur sur un coefficient qui suffit à caractériser ces limites au delà desquelles cesse la continuité. En opérant ainsi, on établit sans peine les propriétés des fonctions discontinues, considérées comme représentant des valeurs particulières de fonctions plus générales, mais continues; et l'on arrive, par exemple, aux propositions que nous allons énoncer.

THEOREME I. — *Si une fonction discontinue de la variable x s'évanouit pour des valeurs réelles de cette variable situées hors de limites données a , b , la même fonction, quand la variable x deviendra imaginaire, s'évanouira toutes les fois que la partie réelle x sera située hors de ces limites.*

THEOREME II. — *Si une fonction discontinue de plusieurs variables indépendantes x , y , z , ... s'évanouit pour des valeurs réelles de ces variables situées hors de certaines limites données et constantes, la même fonction, quand les variables deviendront imaginaires, s'évanouira toutes les fois que leurs parties réelles seront situées hors de ces limites.*

La considération des limitateurs permet de faire disparaître la con-

tradiction qui, dans les problèmes de Physique mathématique, semble exister entre les résultats déduits des intégrales en termes finis et des intégrales en séries. En effet, supposons une fonction discontinue représentée par le produit d'un limitateur et d'une fonction continue. Si l'on fait subir aux variables indépendantes des accroissements très petits, on pourra, en général, développer, suivant les puissances ascendantes de ces accroissements, la fonction continue, mais non pas le limitateur, et, en multipliant par ce dernier les divers termes du développement trouvé, on obtiendra une série équivalente à la fonction discontinue. On peut, de cette manière, développer en série convergente chacune des fonctions discontinues que renferme l'intégrale de l'équation en termes finis de l'équation du son, et l'on retrouve alors une intégrale en série qui s'accorde complètement avec l'autre intégrale.

Dans le problème du son, un ébranlement primitivement circonscrit entre des limites très resserrées donne naissance à un mouvement qui se propage dans l'espace avec une vitesse constante et réelle. Alors aussi la vitesse de propagation est fournie par une équation du second degré, qui offre deux racines réelles égales au signe près. Dans d'autres problèmes de Physique mathématique, par exemple dans la théorie de la lumière, les vitesses de propagation des mouvements vibratoires, ou même les carrés de ces vitesses, vérifient des équations qui sont d'un degré supérieur au second, et qui peuvent admettre des racines imaginaires. On peut demander si les mouvements correspondants à ces racines imaginaires sont ou ne sont pas du nombre de ceux qui se propagent dans l'espace. La réponse à cette question se déduit aisément du premier des théorèmes précédemment énoncés. On arrive ainsi à la proposition suivante :

THEOREME III. — *Lorsqu'un ébranlement, primitivement circonscrit entre des limites très resserrées, donne naissance à un ou à plusieurs mouvements vibratoires, représentés par les intégrales d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants, si l'équation à*



laquelle satisfont les vitesses de propagation supposées réelles offre aussi des racines imaginaires, le mouvement correspondant à une racine imaginaire sera ou ne sera pas du nombre de ceux qui se propagent dans l'espace, suivant que la partie réelle de la racine imaginaire sera sensible ou nulle; et, dans le premier cas, la vitesse de propagation du mouvement vibratoire sera précisément représentée par la valeur numérique de cette partie réelle.

Dans un prochain article, nous appliquerons les principes qui viennent d'être exposés à la détermination des intégrales discontinues qui expriment, non seulement les mouvements vibratoires propagés dans un premier milieu en vertu d'un ébranlement initial circonscrit entre des limites très resserrées, mais encore les mouvements correspondants, réfléchis et réfractés par une surface plane qui sépare ce premier milieu d'un autre; et nous verrons comment ces divers mouvements répondent aux divers termes contenus dans ces intégrales, comment, par exemple, dans la théorie de la lumière, les divers rayons incident, réfléchis et réfractés, se trouvent représentés par les termes proportionnels aux divers limitateurs.

436.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les rayons réfléchis et réfractés par des lames minces et sur les anneaux colorés.*

C. R., T. XXVIII, p. 333 (12 mars 1849).

On sait qu'un rayon lumineux simple, doué de la polarisation circulaire ou elliptique, peut toujours être décomposé en deux autres rayons doués de la polarisation rectiligne, et renfermés dans des plans qui se coupent à angle droit. De plus, dans un rayon plan, c'est-à-dire doué de la polarisation rectiligne, le déplacement absolu d'une molécule éthérée en un point quelconque est le produit qu'on

obtient en multipliant la *demi-amplitude* d'une vibration moléculaire par le cosinus d'un certain angle appelé *phase*. Enfin, si un rayon plan se propage d'un point à un autre dans un milieu isophane, cette propagation aura pour effet d'ajouter à la phase un accroissement proportionnel à la distance entre les deux points; et, si, le même rayon étant réfléchi ou réfracté par une surface plane qui sépare ce premier milieu d'un second, les vibrations de l'éther sont parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence, la réflexion ou la réfraction, en faisant croître la phase d'une quantité donnée, fera aussi varier l'amplitude des vibrations de l'éther dans un rapport donné.

Cela posé, concevons qu'un rayon simple de lumière, propagé dans l'air, tombe sur une lame mince transparente, isophane, et à faces parallèles. Ces deux faces feront subir au rayon dont il s'agit des réflexions et réfractions successives. Si, d'ailleurs, ce rayon fait partie d'un système ou faisceau de rayons de même nature, qui émanent d'une source commune de lumière située à une très grande distance, et qui se trouvent, par suite, composés de molécules dont les vibrations, semblables entre elles, s'exécutent par ondes planes, alors, des divers points situés sur les deux faces de la lame mince, s'échapperont des rayons émergents, dont chacun sera produit par la superposition de plusieurs rayons réfléchis ou réfractés. Considérons en particulier un rayon simple qui, primitivement propagé dans l'air suivant une certaine direction, et polarisé dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, émerge en un point donné A de la lame mince. On pourra, en s'appuyant sur les principes établis dans les précédents Mémoires, déterminer, non seulement les accroissements successifs de la phase dus à la propagation du rayon dans l'air et dans la lame transparente, ainsi qu'aux réflexions et aux réfractions qu'il aura subies en rencontrant les deux faces de cette lame, mais encore les coefficients constants par lesquels l'amplitude des vibrations moléculaires devra être successivement multipliée, en vertu de ces réflexions et de ces réfractions; puis, en superposant au rayon ainsi déterminé les rayons de même nature qui, au sortir de la lame,



prendront la même direction, on obtiendra ce qu'on appelle le *rayon émergent* au point A.

On simplifie notablement les calculs quand on emploie, pour caractériser chaque rayon simple et doué de la polarisation rectiligne, non plus deux quantités réelles, savoir l'amplitude des vibrations moléculaires et l'angle appelé *phase*, mais une seule expression imaginaire, savoir le déplacement symbolique d'une molécule, ou, en d'autres termes, le produit qu'on obtient quand on multiplie la demi-amplitude d'une vibration moléculaire par l'exponentielle trigonométrique dont la phase est l'argument. Alors on reconnaît que, pour obtenir d'un seul coup les modifications diverses imprimées à un rayon plan, 1° par sa propagation dans l'air ou dans la lame mince, 2° par les diverses réflexions ou réfractions dues aux faces qui la terminent, il suffit de multiplier le déplacement symbolique et primitif d'une molécule éthérée par divers facteurs ou *coefficients de propagation* respectivement proportionnels aux espaces mesurés dans l'air, ou dans la lame mince, sur les diverses parties du rayon plan, puis par les divers *coefficients de réflexion* ou de *réfraction* qui correspondent aux diverses rencontres du rayon avec les deux faces de la lame mince. Alors aussi, pour obtenir immédiatement le rayon émergent en un point donné de la lame mince, il suffit de recourir à la sommation d'une progression géométrique.

La même méthode s'applique, avec un égal succès, à la détermination des rayons qui émergent d'une couche d'air très mince, comprise entre deux plaques isophanes, dont l'une est transparente, l'autre transparente ou opaque, par exemple entre deux plaques de verre, ou entre une plaque de verre et une plaque de métal.

Enfin les formules ainsi obtenues peuvent être appliquées avec avantage à la détermination, sinon complètement rigoureuse, du moins très approximative, des anneaux colorés que produit une couche d'air très mince, comprise entre une lentille et un miroir de verre ou de métal, ou entre deux lentilles superposées. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un nouvel article.

ANALYSE.

Concevons, pour fixer les idées, qu'une lame d'air terminée par deux faces planes et parallèles soit comprise entre deux milieux isophanes, le premier transparent, le second transparent ou opaque. Faisons tomber sur la première face de cette lame un faisceau de rayons lumineux propagés par ondes planes dans le premier milieu, en vertu d'un mouvement simple de l'éther, et polarisés ou parallèlement, ou perpendiculairement au plan d'incidence. Un rayon simple OA, compris dans le faisceau dont il s'agit, et propagé dans une direction déterminée, sera successivement transformé, par les deux faces de la lame d'air, en une série de nouveaux rayons réfléchis et réfractés. Cela posé, nommons A le point où le rayon incident OA rencontre la première face de la lame d'air, et A_n le point où ce rayon, transformé par des réflexions ou réfractions successives, sort de la lame, après l'avoir traversée n fois en divers sens, et en prenant une direction nouvelle A_nO_n. Soient d'ailleurs, à une époque donnée, par exemple au bout du temps t,

z le déplacement absolu d'une molécule d'éther, dans le rayon incident OA au point A;

z_n le déplacement absolu d'une molécule d'éther, dans le rayon émergent A_nO_n au point A_n;

z̄ et z̄_n les déplacements symboliques correspondants aux déplacements absolus z et z_n, c'est-à-dire les expressions imaginaires dont les déplacements absolus z et z_n représentent les parties réelles.

Soient encore

l, l' les longueurs d'ondulation du rayon simple dans l'air et dans le premier milieu;

c l'épaisseur de la lame d'air;

τ l'angle aigu formé par une droite normale aux deux faces de la lame avec l'un quelconque des rayons

$$AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n,$$



qui traversent obliquement cette lame dans toute son épaisseur en passant de la première face à la seconde, ou de la seconde face à la première;

τ l'angle aigu formé par la même normale avec le rayon incident OA ou avec le rayon émergent $O_n A_n$;

\bar{I}, \bar{I}' les coefficients de réflexion et de réfraction du rayon simple A, A_1 , ou $A_2 A_1, \dots$, qui passe de la lame d'air dans le premier des deux milieux adjacents à cette lame, sous l'incidence τ ;

\bar{I}, \bar{I}' les coefficients de réflexion et de réfraction du rayon AA, ou $A_2 A_1, \dots$ qui passe de la lame d'air dans le second des milieux adjacents à cette lame, sous l'incidence τ ;

(\bar{I}), (\bar{I}') les coefficients de réflexion et de réfraction du rayon incident OA qui passe du premier milieu dans l'air, sous l'incidence τ ; $2h$ la projection de l'une quelconque des longueurs égales

$$AA_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n,$$

sur la direction du rayon incident OA;

P le coefficient de propagation commun des divers rayons

$$AA_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n,$$

qui traversent la lame d'air dans toute son épaisseur;

P' le coefficient de propagation d'un rayon incident OA, entre les points O et A, dans le cas où le point O est choisi de manière que l'on ait

$$OA = h,$$

Posons, d'ailleurs,

$$k = \frac{2\pi}{l}, \quad k' = \frac{2\pi}{l'}, \quad K = \frac{P}{P'}.$$

Il est facile de prouver que l'on aura

$$P = e^{\frac{hcl}{\cos \tau}}, \quad K = e^{hcl \cos \tau},$$

i étant une racine carrée de -1 . De plus, pour obtenir au bout du temps t le déplacement symbolique \bar{x}_a d'une molécule d'éther qui

coïncide avec le point A_n dans le rayon émergent $A_n O_n$, il suffira évidemment, si le point A_n est situé sur la première face de la lame d'air, de multiplier le déplacement symbolique \bar{x} d'une molécule d'éther qui coïncide avec le point A dans le rayon incident OA, par le produit des divers facteurs

$$(\bar{I}'), P, \bar{I}, P, \bar{I}, P, \bar{I}, P, \dots, \bar{I},$$

ou, ce qui revient au même, par le produit

$$\bar{I}(\bar{I}')^{\frac{n}{2}-1} \bar{I}'^{\frac{n}{2}} P^n,$$

dans lequel n sera un nombre pair.

Soient maintenant CA la trace du plan d'incidence OAC sur la première face de la lame d'air, et C le point où cette trace coupe le plan mené par le point O perpendiculairement au rayon incident OA. Comme les diverses molécules d'éther comprises dans ce dernier plan seront toutes à la fois déplacées de la même manière, il est clair que, pour obtenir au bout du temps t le déplacement symbolique de la molécule qui coïncidera ou avec le point O dans le rayon incident OA, ou avec le point C dans un rayon parallèle SC, il suffira de diviser le déplacement symbolique \bar{x} par le coefficient de propagation II correspondant à la longueur OA. Soit d'ailleurs C_n le point où le rayon SC, transformé par des réfractions et réflexions successives, sortira de la lame d'air dans une certaine direction $C_n S_n$, après avoir traversé n fois cette même lame en sens divers. Pour que le point C_n coïncide avec le point A, il suffira évidemment que la longueur CA devienne équivalente à la longueur AA_n , ou, ce qui revient au même, que la longueur OA se réduise au produit de la longueur h par le nombre n ; et, comme alors on aura

$$II = P'^n,$$

le déplacement symbolique d'une molécule d'éther sera exprimé, au bout du temps t : 1° au point C, et dans le rayon incident SC, par le

rapport

$$\frac{\bar{x}}{p^n};$$

2° au point A, et dans le rayon émergent C_nS_n, par le produit

$$\bar{V}(\bar{I})\bar{I}^{n-1}\bar{I}^n p^n \frac{\bar{x}}{p^n} = \bar{V}(\bar{I})\bar{I}^{n-1}\bar{I}^n K^n \bar{x}.$$

Si, dans ce dernier produit, on attribue successivement à n les valeurs

$$2, 4, 6, 8, \dots,$$

on obtiendra les divers termes d'une progression géométrique dont la somme sera

$$\frac{\bar{V}(\bar{I})\bar{I}K^n}{1 - \bar{I}K^2}.$$

Enfin, si à cette somme on ajoute le déplacement symbolique

$$(\bar{I})\bar{x}$$

d'une molécule d'éther qui coïncide avec le point A dans le rayon réfléchi en ce point par la première face de la lame d'air, on obtiendra le déplacement symbolique d'une molécule éthérée dans le rayon émergent formé par la superposition de tous les rayons simples qui sortiront de la lame d'air au point A. Donc ce dernier déplacement symbolique sera le produit de \bar{x} par la somme

$$(1) \quad (\bar{I}) + \frac{\bar{V}(\bar{I})\bar{I}K^2}{1 - \bar{I}K^2}.$$

Par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, on prouvera encore que, si les deux milieux adjacents à la lame d'air sont tous deux transparents, les divers rayons simples qui sortiront de cette lame au point A, produiront, par leur superposition, un rayon émergent dans lequel le déplacement symbolique d'une molécule d'éther sera le produit de \bar{x} par le rapport

$$(2) \quad \frac{\bar{V}(\bar{I})\bar{I}p}{1 - \bar{I}K^2}.$$

Les valeurs des coefficients

$$\bar{I}, \bar{I}', \bar{V}, \bar{I}', (\bar{I}), (\bar{V}),$$

renfermés dans les expressions (1) et (2), se déduisent sans peine des formules établies dans les précédents Mémoires, spécialement dans le Mémoire du 2 janvier dernier (p. 95); et d'abord on conclut immédiatement de ces formules, que l'on a dans tous les cas

$$\bar{V}(\bar{I}) = (1 + \bar{I})[1 + (\bar{I})],$$

ce qui réduit l'expression (1) à la suivante :

$$(3) \quad \frac{(\bar{I}) + [1 + \bar{I} + (\bar{I})]\bar{I}K^2}{1 - \bar{I}K^2}.$$

Soient, d'autre part,

$$u = k \cos \tau, \quad u' = k' \cos \tau', \quad v = k \sin \tau = k' \sin \tau'.$$

On aura, en supposant le rayon incident polarisé dans le plan d'incidence,

$$\bar{I} = \frac{u - u'}{u + u'} = \frac{\sin(\tau' - \tau)}{\sin(\tau' + \tau)}, \quad \bar{I}' = \frac{2u}{u + u'} = \frac{2 \sin \tau' \cos \tau}{\sin(\tau' + \tau)},$$

$$(\bar{I}) = -\bar{I}.$$

Si, au contraire, le rayon incident est renfermé dans le plan d'incidence, les valeurs de \bar{I} , \bar{I}' seront fournies par les formules (11) de la page 99, dont la première déterminera (\bar{I}) au lieu de \bar{I} , quand on changera les signes de u , u' , et le signe de la différence $u - u'$ ou $u' - u$.

Quant aux valeurs de \bar{I} , et \bar{I}' , on les déduira de celles de \bar{I} et \bar{I}' en remplaçant le premier des deux milieux adjacents à la lame d'air par le second.

Comme on l'a remarqué ci-dessus, lorsque le rayon incident est polarisé dans le plan d'incidence, \bar{I} et (\bar{I}) vérifient la condition

$$(4) \quad (\bar{I}) = -\bar{I}.$$

Cette même condition se vérifie encore quand, le rayon incident étant renfermé dans le plan d'incidence, le premier des milieux adjacents



à la lame d'air est de nature telle, que la première face de la lame d'air polarise complètement la lumière réfléchie sous un certain angle; et, dans le cas contraire, la condition (4) se vérifie au moins approximativement. Or, en vertu de cette condition, l'expression (3) se réduit au rapport

$$(5) \quad \frac{\bar{I}K^2 - \bar{I}}{1 - \bar{I}K^2}$$

Si la lame d'air est comprise entre deux milieux de même nature, on aura

$$\bar{I} = \bar{I}, \quad \bar{I}' = I',$$

et, par suite, l'expression (5) se trouvera réduite au produit

$$(6) \quad \bar{I} \frac{K^2 - 1}{1 - I^2 K^2}$$

Ce produit s'évanouira, quand on aura $K = \pm 1$, et, par suite,

$$kc \cos \tau = n\pi, \quad c = \frac{1}{2}nl \sec \tau,$$

n étant un nombre entier. Donc alors le rayon émergent en un point quelconque de la première face de la lame d'air disparaîtra complètement.

437.

CALCUL INTEGRAL. — *Recherches nouvelles sur les séries et sur les approximations des fonctions de très grands nombres.*

C. R., T. XXIX, p. 42 (16 juillet 1849).

L'Astronomie mathématique, sujet principal de mon cours à la Faculté des Sciences, a naturellement rappelé mon attention sur les séries à l'aide desquelles on détermine les valeurs des inconnues dans les mouvements planétaires, par conséquent sur les règles générales de la convergence des développements des fonctions explicites ou

implicites, et sur les limites des restes qui complètent ces développements quand on les arrête après un certain nombre de termes. Les réflexions que j'ai faites à ce sujet m'ont fourni la solution de quelques difficultés qui n'étaient pas sans importance, et m'ont permis de perfectionner encore en plusieurs parties la théorie des suites, ainsi que je vais le dire en peu de mots.

Je rappellerai d'abord que, si l'on désigne par u_n le terme général d'une série simple

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots,$$

par r_n le module de u_n , et par l le module de la série, c'est-à-dire la limite ou la plus grande des limites vers lesquelles converge $(r_n)^{\frac{1}{n}}$ pour des valeurs croissantes de n , la série sera convergente, quand on aura $l < 1$, divergente, quand on aura $l > 1$. Si, en désignant par

$$z = re^{i\theta}$$

une variable dont le module soit r et l'argument θ , on pose

$$u_n = a_n z^n,$$

alors en nommant k le module de la série

$$(2) \quad a_0, a_1, a_2, \dots,$$

dont le terme général est a_n , on trouvera

$$l = kr,$$

et par suite la série

$$(3) \quad a_0, a_1 z^k, a_2 z^{2k}, \dots$$

sera convergente quand on aura $r < \frac{1}{k}$, divergente quand on aura $r > \frac{1}{k}$. Ajoutons que, si $f(z)$ désigne une fonction explicite de z qui, avec sa dérivée $f'(z)$, demeure fonction continue de r et de θ , pour tout module r de z inférieur à une certaine limite r , $f(z)$ sera développable, pour un tel module, en une série de la forme (3), et qu'alors



on aura précisément

$$v = \frac{1}{k},$$

si à la valeur v du module r on peut joindre une valeur de l'argument p tellement choisie, que la fonction

$$f(z) \text{ ou } f'(z)$$

devienne infinie.

Je prouve encore que, si $F(z)$ étant avec sa dérivée $F'(z)$ fonction continue de z et de divers paramètres s, t, \dots , on fait varier ces paramètres par degrés insensibles, la valeur de z déterminée par l'équation

$$F(z) = 0$$

restera généralement fonction continue de s, t, \dots jusqu'au moment où l'on aura

$$F'(z) = 0.$$

De ces diverses propositions, on peut aisément déduire les règles de la convergence et les modules des séries qui représentent les développements des fonctions implicites d'une seule variable. On en conclut, par exemple, que si $\varpi(z)$ désigne une fonction toujours continue de z une racine

$$u = s + z$$

de l'équation

$$(4) \quad u - t \varpi(u) = s$$

ou

$$(5) \quad z - t \varpi(s + z) = 0$$

pourra être développée par la formule de Lagrange en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de t , jusqu'au moment où le module θ de t acquerra une valeur Θ qui permettra de vérifier simultanément l'équation (5) et la suivante

$$(6) \quad 1 - t \varpi'(s + z) = 0,$$

et que, jusqu'à ce moment, toute fonction continue de z sera elle-

même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de t . On en conclut aussi que les séries propres à représenter les développements de z et de u , suivant les puissances ascendantes de t , auront précisément pour module le rapport $\frac{\theta}{\Theta}$.

Ce n'est pas tout : si l'on nomme v celle des racines de l'équation (4) qui se réduit à s pour $t = 0$, et $f(z)$ une fonction continue de z , on aura, en vertu de la formule de Lagrange,

$$(7) \quad f(v) = f(s) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n t^n,$$

la valeur de T_n étant

$$(8) \quad T_n = \frac{1}{1, 2, \dots, n} D_s^{n-1} \{f(s) [\varpi(s)]^n\}.$$

Si d'ailleurs on nomme r et p les valeurs de r et p tirées des équations (5), (6), et correspondantes au module θ de t , alors, en attribuant à

$$z = r e^{ip}$$

un module r égal ou inférieur à r , on pourra remplacer la formule (8) par la suivante

$$T_n = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} z f(s + z) \left[\frac{\varpi(s + z)}{z} \right]^n dp;$$

et en posant, pour abrégier,

$$z f(s + z) = f(z), \quad \frac{\varpi(s + z)}{z} = Z,$$

on aura

$$(9) \quad T_n = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} Z^n f(z) dp.$$

Soient maintenant

$$R, \Re$$

les modules maxima maximorum de

$$Z \text{ et } f(z),$$

considérés comme fonctions de p ; le module de T_n sera, en vertu de la formule (10), inférieur au rapport

$$\frac{R^n \Re}{n},$$

qui se réduira simplement à

$$\frac{\Re}{n} \theta^{-n}$$

si l'on suppose $r = r$; et par suite, si, dans la série de Lagrange, on conserve seulement la somme des n premiers termes, la somme des termes négligés offrira un module inférieur au rapport

$$\frac{\Re \left(\frac{\theta}{\theta} \right)^n}{n \left(1 - \frac{\theta}{\theta} \right)}$$

θ étant le module de t . Il reste à trouver une limite plus approchée de l'erreur commise, en déterminant d'une manière approximative la valeur d'une intégrale de la forme

$$(10) \quad s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z^n f(z) dp,$$

dans le cas où n est un très grand nombre et où l'on attribue à z un module pour lequel se vérifie la condition

$$(11) \quad Z = 0.$$

On y parviendra comme il suit.

Supposons d'abord $f(z) = 1$. Alors l'équation (10) donnera

$$(12) \quad s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z^n dp.$$

Concevons que, dans cette dernière formule, on pose $r = r$ et $p = p + \varphi$.

On aura

$$(13) \quad s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z^n d\varphi.$$

Décomposons l'intégrale (13) en deux parties, dont l'une soit prise entre des limites très rapprochées $-\sigma$, $+\sigma$, l'autre étant représentée par ω ; nous aurons

$$(14) \quad s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} Z^n d\varphi + \omega,$$

σ étant un arc très petit. Supposons d'ailleurs que, pour $r = r$, $p = p$, on ait, non seulement

$$Z = R, \quad Z' = 0,$$

mais encore

$$\frac{1}{2} D_p l(Z) = -a, \quad \frac{1}{2.3} D_p^2 l(Z) = b;$$

on trouvera, pour une très petite valeur numérique de φ ,

$$(15) \quad l(Z) = l(R) - a\varphi^2 + b\varphi^3,$$

ξ étant très peu différent de b . Ajoutons que, R étant le module *maximum maximorum* de Z considéré comme fonction de p , la partie indépendante de i dans a sera nécessairement positive. Cela posé, la formule (15) donnera

$$Z = R e^{-a\varphi^2} e^{b\varphi^3},$$

et l'on aura, par suite,

$$(16) \quad s = \frac{R^n}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-na\varphi^2} e^{nb\varphi^3} d\varphi + \omega.$$

Supposons à présent σ tellement choisi, que, pour de grandes valeurs de n , les deux produits

$$(17) \quad n\sigma^2, \quad n\sigma^3$$

soient le premier très grand, le second très petit. Alors, comme il est facile de le voir, on aura sensiblement

$$(18) \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-na\varphi^2} e^{nb\varphi^3} d\varphi = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{na}}.$$

De plus, dans le second membre de la formule (16), le dernier terme ω deviendra très petit par rapport au premier, si le module *maximum*

maximorum de Z répond à une valeur unique de z , et si d'ailleurs n est assez grand pour que le module de Z^n , entre les limites $-\sigma$, $+\sigma$ de p , surpasse toujours le module de Z^n hors de ces limites. Donc alors la valeur de s , déterminée par la formule (16), pourra être réduite à la forme

$$(19) \quad s = \frac{R^n}{2\sqrt{na\pi}}(1 + \delta),$$

δ désignant une quantité qui s'évanouira avec $\frac{1}{n}$, et dont le module restera compris entre des limites qu'il sera facile de calculer.

Si le même module *maximum maximorum* de Z correspondait à deux ou plusieurs valeurs distinctes, par exemple à deux valeurs conjuguées de z , alors, dans le second membre de la formule (19), il faudrait au rapport

$$(20) \quad \frac{R^n}{2\sqrt{na\pi}}$$

substituer la somme des rapports de cette forme correspondants à ces valeurs de z . Cette somme serait, pour l'ordinaire, le double de la partie indépendante de i , dans chaque rapport.

Enfin, si à la formule (12) on substitue la formule (10), on devra multiplier le rapport (20) par le module \bar{a} de $f(z)$ correspondant aux valeurs r et p de r et de p .

Ajoutons que les produits

$$n\omega^2, \quad n\omega^3$$

deviendront, le premier très grand, le second très petit, pour de très grandes valeurs de n , si l'on pose

$$\omega = \frac{c}{n^2},$$

c , μ étant deux nombres dont le second soit compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

438.

CALCUL INTEGRAL. — *Mémoire sur l'intégration d'un système quelconque d'équations différentielles, et, en particulier, de celles qui représentent les mouvements planétaires.*

C. R., T. XXIX, p. 65 (23 juillet 1849).

Les développements en séries qui vérifient un système d'équations différentielles ne peuvent évidemment représenter les intégrales de ce système que dans le cas où les séries sont convergentes; et c'est seulement quand on a démontré leur convergence qu'une question de Physique ou de Mécanique par laquelle on a été conduit à ces équations différentielles peut être censée mathématiquement résolue. Toutefois, dans l'Astronomie, la convergence des séries qui représentent le mouvement troublé d'une planète n'est point établie par le calcul. Seulement on a remarqué que les formules obtenues s'accordaient assez bien avec les résultats de l'observation, et l'on en a conclu naturellement que les séries étaient convergentes, mais sans pouvoir dire quelle était la durée du temps pendant lequel la convergence subsisterait. Il m'a paru important de faire disparaître ces incertitudes et de rechercher une méthode à l'aide de laquelle on pût non seulement obtenir, sous une forme nouvelle et simple, les intégrales générales d'un système d'équations différentielles, mais encore calculer aisément des limites des erreurs que l'on commet, quand on arrête ces séries après un certain nombre de termes. Tel est l'objet du nouveau travail que je présente à l'Académie. Je me contenterai d'indiquer ici quelques-uns des résultats les plus remarquables, me réservant d'y ajouter, dans les prochaines séances, de plus amples développements.

Soient données, entre le temps t et les variables x , y , z , ..., des équations différentielles de la forme

$$D_t x = X, \quad D_t y = Y, \quad D_t z = Z, \quad \dots,$$



X, Y, Z, ... étant des fonctions données de x, y, z, ..., t. Soient encore

$$s = f(x, y, z, \dots, t)$$

une fonction donnée de x, y, z, ..., t, et

$$x, y, z, \dots, s$$

ce que deviennent

$$x, y, z, \dots, s$$

au bout du temps τ . Pour déterminer ζ en fonction de x, y, z, ..., t et τ , il suffira d'intégrer l'équation caractéristique, c'est-à-dire l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$D_t \zeta + \square \zeta = 0,$$

dans laquelle on a

$$\square \zeta = X D_x \zeta + Y D_y \zeta + \dots$$

et d'assujettir ζ à vérifier, pour $t = \tau$, la condition

$$\zeta = \phi,$$

ϕ désignant la fonction $f(x, y, z, \dots, \tau)$ que l'on déduit de

$$s = f(x, y, z, \dots, t)$$

en y remplaçant t par τ . Cela posé, faisons, pour abrégér,

$$\nabla \phi = - \int_t^\tau \square \phi dt;$$

si la valeur de $\tau - t$ est assez petite pour que la somme de la série, dont le terme général est $\nabla^n \phi$, soit convergente, on aura

$$(1) \quad \zeta = \phi + \nabla \phi + \nabla^2 \phi + \dots$$

Soient d'ailleurs

θ un nombre qui varie entre les limites 0, 1;
u, v, w, ... des fonctions de θ , qui s'évanouissent avec θ et se réduisent, pour $\theta = 1$, aux constantes a, b, c, ..., en conservant toujours des modules égaux ou inférieurs à ceux de a, b, c, ...;

U, V, W, ... ce que devient X, Y, Z, ... quand on attribue à x, y, z, ..., t les accroissements u, v, w, ..., $\theta(\tau - t)$.

Enfin, en supposant les modules de a, b, c, ... et de $\tau - t$ assez petits pour que les fonctions U, V, W ne cessent pas d'être continues, prenons

$$(2) \quad \theta = \frac{U}{D_\theta u} + \frac{V}{D_\theta v} + \dots,$$

et nommons ρ ce que devient le module de l'exponentielle

$$(3) \quad e^{\int_\theta^1 \theta dt}$$

quand on attribue aux variables u, v, w, ... et aux constantes a, b, c, ... des arguments tels que le module ρ devienne un maximum maximorum. La série que renferme le second membre de la formule (1) sera convergente, quand le module de $\tau - t$ sera inférieur au produit de $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{1}{e}$, e étant la base des logarithmes hyperboliques. Ajoutons qu'il sera utile de choisir les modules des variables u, v, w, ... et des constantes a, b, c, ... de manière à rendre le module ρ le plus petit possible.

439.

CALCUL INTEGRAL. — Suite des recherches sur l'intégration d'un système d'équations différentielles, et transformation remarquable de l'intégrale générale de l'équation caractéristique.

C. R., T. XXIX, p. 103 (30 juillet 1849).

Considérons les notations adoptées dans le précédent article; supposons toujours les variables x, y, z, ... liées au temps t par les équations différentielles

$$D_t x = X, \quad D_t y = Y, \quad \dots$$



X, Y étant des fonctions données de x, y, z, ..., t. Soient encore

$$s = f(x, y, z, \dots, t)$$

une fonction donnée de ces diverses variables, et

$$x, y, z, \dots, \zeta$$

ce que deviennent

$$x, y, z, \dots, s$$

au bout du temps τ . Enfin posons, pour abrégé,

$$\begin{aligned} s &= f(x, y, z, \dots, \tau), \\ \square s &= X D_x s + Y D_y s + \dots, \\ \nabla s &= - \int_{\tau}^t \square s dt. \end{aligned}$$

Lorsque la série dont le terme général est $\nabla^n s$ sera convergente, on aura (p. 142)

$$(1) \quad \zeta = s + \nabla s + \nabla^2 s + \dots$$

D'ailleurs le terme général $\nabla^n s$ de la série peut être transformé avec avantage, et ramené à une forme digne de remarque, à l'aide d'un artifice de calcul que nous allons indiquer.

Soient

$$\varphi(u), \quad \chi(u)$$

deux fonctions de la variable

$$u = re^{i\theta},$$

et supposons que ces fonctions restent continues pour un module r de u inférieur à une certaine limite. On aura, pour toute valeur de r inférieure à cette limite, non seulement

$$(2) \quad \varphi(0) = \mathfrak{M} \varphi(u),$$

la notation $\mathfrak{M} \varphi(u)$ désignant la moyenne isotropique entre les diverses valeurs de $\varphi(u)$ considéré comme fonction de p , c'est-à-dire l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) dp,$$

mais encore, en intégrant par parties,

$$(3) \quad \mathfrak{M} [u \varphi'(u) \chi(u)] = - \mathfrak{M} [u \varphi(u) \chi'(u)].$$

Soient maintenant

$$U, V, \dots$$

ce que deviennent les fonctions

$$X, Y, \dots$$

lorsqu'on y remplace t par une variable θ comprise entre les limites t et τ , et que l'on attribue aux variables x, y, \dots des accroissements désignés par u, v, \dots . Supposons d'ailleurs chacun de ces accroissements décomposé en n éléments, en sorte qu'on ait

$$(4) \quad \begin{cases} u = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \\ v = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

et, après avoir écrit θ_n au lieu de θ dans U, V, \dots , prenons

$$(5) \quad K_n = D_u U + D_v V + \dots - \frac{U}{u_n} - \frac{V}{v_n} - \dots,$$

$$(6) \quad \varphi_n = f(x + u, y + v, \dots, \tau).$$

Enfin, soit K_m ce que devient K_n quand on remplace dans les formules (4) et (5) le nombre n par le nombre m , et θ_n par θ_m . Si les éléments

$$u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n; \dots$$

offrent des modules tellement choisis, que pour ces modules, ou pour des modules plus petits, les fonctions

$$U, V, \dots, \varphi_n$$

ne cessent jamais d'être continues, on aura, en vertu des formules (1) et (2),

$$(7) \quad \nabla^n \varphi = \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{\theta_1} \dots \int_{\tau}^{\theta_{n-1}} \mathfrak{M} [K_1 K_2 \dots K_n \varphi_n] d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n,$$

le signe \Re indiquant la moyenne isotropique entre les diverses valeurs du produit

$$K_1 K_2 \dots K_n$$

correspondantes aux diverses valeurs des arguments de

$$u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n; \dots$$

Si, comme il arrive souvent dans les questions de Mécanique, on a identiquement

$$(8) \quad D_x X + D_y Y + \dots = 0,$$

la valeur de K_n fournie par l'équation (5) sera réduite à

$$(9) \quad K_n = - \left(\frac{U}{u_n} + \frac{V}{v_n} + \dots \right).$$

Ajoutons que dans tous les cas, lorsque, n étant un très grand nombre, les éléments de u, v, \dots seront très petits, on pourra négliger la somme $D_u U + D_v V + \dots$ vis-à-vis de la somme $\frac{U}{u_n} + \frac{V}{v_n} + \dots$, et réduire ainsi, sans erreur sensible, la formule (5) à la formule (9).

Lorsque les fonctions X, Y, \dots seront indépendantes de t , la formule (7) donnera simplement

$$(10) \quad \nabla^n s = \frac{(t-\tau)^n}{1.2 \dots n} \Re [K_1 K_2 \dots K_n \varphi_n].$$

Les formules (7) et (10) permettent de calculer aisément des limites supérieures à l'erreur que l'on commet, dans la valeur de ζ , quand on arrête, après un certain nombre de termes, la série qui a pour terme général $\nabla^n s$. C'est, au reste, ce que nous expliquerons plus en détail dans un autre article.

440.

CRISTALLOGRAPHIE. — *Rapport sur un Mémoire de M. BRAVAIS relatif à certains systèmes ou assemblages de points matériels.*

C. R., T. XXIX, p. 133 (6 août 1849).

Parmi les applications que l'on a faites de la Géométrie, l'une des plus remarquables est la science nouvelle créée, vers la fin du dernier siècle, par l'auteur de l'*Essai sur la Cristallographie*. Après avoir observé que les cristaux sont des assemblages de molécules similaires, notre illustre Haüy a recherché les lois suivant lesquelles les diverses molécules d'un corps se trouvent réunies et juxtaposées dans un même cristal. Aux observations que l'auteur avait faites, sont venues se joindre des observations nouvelles; et, enrichies par les fécondes méditations des minéralogistes, la science qu'il avait fondée a pu se perfectionner et s'étendre en participant aux progrès de la Physique moléculaire. Toutefois, M. Bravais a pensé que la Cristallographie pouvait subir encore des perfectionnements, et il est effectivement parvenu à découvrir, dans certains systèmes de points matériels, des propriétés qui sont dignes de remarque, et des caractères qui peuvent être utilement employés à la classification des cristaux. L'étude de ces propriétés, de ces caractères, est l'objet spécial du Mémoire dont nous avons en ce moment à rendre compte. Essayons d'en donner une idée en peu de mots.

Considérons trois séries de plans tellement disposés, que les divers plans d'une même série soient parallèles entre eux et équidistants, sans être jamais parallèles à aucun plan d'une autre série. L'assemblage des points suivant lesquels se couperont tous ces plans formera ce qu'on peut appeler un *système réticulaire*, et ce système, suivant la remarque déjà faite par divers auteurs, spécialement par M. Delafosse, sera éminemment propre à représenter le système des points avec les-



quels coïncident, dans un cristal quelconque, les centres des diverses molécules. D'ailleurs ces trois séries de plans, dont chacun est appelé, par M. Bravais, *plan réticulaire*, partageront l'espace en *parallélépipèdes élémentaires*, tous égaux entre eux; et les divers points du système, compris dans un même plan réticulaire, formeront un *réseau* dont les *mailles*, les *fils* et les *nœuds* seront, d'une part, les parallélogrammes élémentaires qui serviront de bases aux parallélépipèdes; d'autre part, les droites sur lesquelles se mesureront les côtés de ces parallélogrammes, et les points d'intersection de ces droites ou les sommets des parallélogrammes dont il s'agit. M. Bravais appelle *paramètres* les longueurs des arêtes d'un parallélépipède élémentaire adjacentes à un même sommet; il nomme *tétraèdre élémentaire* un tétraèdre construit sur ces trois arêtes, et *triangle élémentaire* un triangle qui a pour côtés deux côtés adjacents d'un parallélogramme élémentaire.

Cela posé, M. Bravais commence par établir, tantôt à l'aide de la Géométrie, tantôt à l'aide d'une analyse tout à la fois élégante et simple, les propriétés générales des réseaux. Il prouve, en particulier, que les nœuds d'un réseau donné sont en même temps les nœuds d'un nombre infini d'autres réseaux, dont les fils se coupent sous des angles divers, mais dont les mailles sont toujours équivalentes en surface aux mailles du premier. Il prouve encore que, parmi les triangles élémentaires correspondants à ces divers réseaux, il en existe un, mais un seul, qui offre trois angles aigus, et que ce triangle, auquel il donne le nom de *triangle principal*, a pour côtés les trois plus petits paramètres que l'on puisse obtenir en joignant l'un à l'autre les nœuds du réseau donné.

Après avoir établi les propriétés des réseaux, M. Bravais a recherché celles des assemblages ou systèmes réticulaires. Il a reconnu d'abord que les nœuds dont se compose un système réticulaire peuvent être fournis, d'une infinité de manières différentes, par les intersections de trois séries de plans parallèles, auxquels correspondent des parallélépipèdes élémentaires de formes diverses, mais égaux en volume.

Il prouve que, parmi les tétraèdres élémentaires correspondants à un système réticulaire, c'est-à-dire à un système donné de nœuds, il existe un *tétraèdre principal*, dans lequel chaque angle dièdre est ou un angle aigu, ou un angle droit, l'une des bases de ce tétraèdre ayant pour côtés les deux plus petits paramètres que l'on puisse obtenir en joignant l'un à l'autre les nœuds donnés. Enfin M. Bravais nomme *axe de symétrie* d'un système réticulaire une droite tellement choisie, qu'il suffise d'imprimer au système autour de cet axe une rotation mesurée par un certain angle pour substituer les divers nœuds les uns aux autres; puis il démontre que l'angle qui sert de mesure à la rotation doit être nécessairement égal soit à un ou à deux droits, soit au tiers ou aux deux tiers d'un angle droit. Donc le rapport de la circonférence entière à l'arc qui mesure la rotation ne peut être que l'un des nombres 2, 3, 4, 6; et la symétrie est nécessairement, suivant le langage adopté par M. Bravais, *binnaire*, ou *ternaire*, ou *quaternaire*, ou *sénaire*. D'autre part, il est clair que, si un système de nœuds tourne autour d'un axe passant par un point quelconque, le mouvement de rotation effectif de tout le système autour de cet axe ne différera pas du mouvement apparent de rotation autour d'un axe parallèle passant par un nœud quelconque, aux yeux d'un observateur dont la position coïnciderait avec ce même nœud. Il en résulte immédiatement que, à tout axe de symétrie qui ne passe par aucun nœud d'un système donné correspondent toujours d'autres axes de symétrie parallèles au premier, et passant par les divers nœuds du système. Il est d'ailleurs facile de voir que tout axe de symétrie passant par un nœud donné, coïncide nécessairement, ou avec l'une des arêtes d'un parallélépipède élémentaire qui a ce nœud pour sommet, ou avec l'une des diagonales d'un tel parallélépipède, ou avec la diagonale de l'une de ses faces. Ces principes étant admis, on peut, comme l'a fait M. Bravais, classer les divers systèmes réticulaires, ou plutôt les divers systèmes de nœuds qu'ils peuvent offrir, d'après le nombre et la nature des axes de symétrie qui passent par un nœud donné. L'auteur compte effectivement sept classes d'assem-

blages ou systèmes de nœuds, distinguées les unes des autres par les caractères que nous allons rappeler.

Les systèmes de la première classe, correspondants au premier système cristallin des minéralogistes, offrent quatre axes ternaires, trois axes quaternaires et six axes binaires. Les formes distinctes comprises dans cette classe sont : 1° le cube; 2° le cube centré ou rhomboèdre de 120° , ou octaèdre à base carrée; 3° le tétraèdre régulier, ou octaèdre régulier, ou rhomboèdre de $70^\circ 31' 44''$.

Les systèmes de la seconde classe, correspondants au second système cristallin des minéralogistes, offrent un seul axe quaternaire et quatre axes binaires. Les formes comprises dans cette classe sont : 1° le prisme droit à base carrée; 2° le prisme droit centré à base carrée, ou octaèdre à base carrée.

Les systèmes de la troisième classe offrent un seul axe sénaire et six axes binaires. Cette classe présente d'ailleurs une seule forme, savoir : le prisme droit, qui a pour base un triangle équilatéral.

Les systèmes de la quatrième classe offrent un seul axe ternaire et trois axes binaires. Cette classe présente une seule forme, savoir : un rhomboèdre, dans lequel deux sommets opposés sont les extrémités d'un axe de symétrie ternaire, les six autres sommets étant ceux de deux triangles équilatéraux, dont les plans parallèles entre eux divisent en trois parties égales la diagonale dont il s'agit.

Les systèmes de la troisième et de la quatrième classe correspondent au troisième système cristallin des minéralogistes.

Les systèmes de la cinquième classe, correspondants au quatrième système cristallin des minéralogistes, offrent trois axes binaires. Cette classe présente quatre formes distinctes, savoir : le parallépipède rectangulaire centré ou non centré, et le même parallépipède ayant deux ou six faces centrées.

Les systèmes de la sixième classe, correspondants au cinquième système cristallin des minéralogistes, offrent un seul axe binaire. Cette classe présente deux formes, savoir : le prisme droit centré ou non centré, qui a pour base un parallélogramme.

Les systèmes de la septième classe, correspondants au sixième système cristallin des minéralogistes, sont ceux qui n'offrent aucun axe de symétrie. Cette classe comprend une seule forme, savoir : le prisme oblique, qui a pour base un parallélogramme.

En résumé, si, les divers systèmes cristallins étant caractérisés par le nombre et la nature de leurs axes de symétrie, on range ces systèmes dans l'ordre indiqué par le nombre de ces axes, on obtiendra le Tableau suivant :

	NOMBRE DES AXES DE SYMÉTRIE				NOMBRE TOTAL des axes de symétrie.
	binaires.	ternaires.	quaternaires.	sénaire.	
Système terquaternaire...	6	4	3	»	13
Système sénaire.....	6	»	»	1	7
Système quaternaire.....	4	»	1	»	5
Système ternaire.....	3	1	»	»	4
Système terbinaire.....	3	»	»	»	3
Système binaire.....	1	»	»	»	1
Système asymétrique.....	0	»	»	»	0

En terminant, M. Bravais établit divers théorèmes relatifs aux faces semblables ou plutôt similaires qui se trouvent échangées entre elles quand on fait tourner un système réticulaire autour de l'un quelconque des axes de symétrie.

Les Commissaires pensent que dans ce nouveau travail M. Bravais a donné de nouvelles preuves de la sagacité qu'il avait déjà montrée dans d'autres recherches. En conséquence, ils sont d'avis que le Mé-

moire soumis à leur examen est très digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

441.

ANALYSE ALGÈBRE. — *Sur les quantités géométriques, et sur une méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques de degré quelconque.*

C. R., T. XXIX, p. 250 (3 septembre 1849).

On sait qu'une équation algébrique du degré n offre toujours n racines dont plusieurs peuvent être du nombre de celles que l'on a nommées *imaginaires*. D'ailleurs, la théorie des expressions algébriques appelées *imaginaires* a été, à diverses époques, envisagée sous divers points de vue. Dès l'année 1806, M. l'abbé Buée et M. Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné des expressions imaginaires une interprétation contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées. Plus tard, M. Argand et d'autres auteurs, particulièrement MM. Français, Faure, Mourey, Vallès, etc., ont publié des recherches ⁽¹⁾ qui avaient pour but de développer ou de modifier l'interprétation dont il s'agit. Dans mon *Analyse algébrique*, publiée en 1821 ⁽²⁾, je m'étais contenté de faire voir que l'on peut rendre rigoureuse la théorie des expressions et des équations imaginaires, en considérant ces expressions et ces équations comme *symboliques*. Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$ et de remplacer la théorie

⁽¹⁾ Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Trael, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre.

⁽²⁾ *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. III.

des expressions *imaginaires* par la théorie des quantités que j'appellerai *géométriques*, en mettant à profit les idées émises et les notations employées, non seulement par les auteurs déjà cités, mais aussi par M. de Saint-Venant dans un Mémoire digne de remarque sur les sommes géométriques. C'est ce que j'essaye d'expliquer dans une Note qui s'imprime en ce moment, et qui offrira une sorte de résumé des travaux faits sur cette matière, reproduits dans un ordre méthodique, avec des modifications utiles. Je me bornerai pour l'instant à extraire de cette Note quelques notions relatives aux quantités géométriques, et deux théorèmes sur lesquels s'appuie la méthode nouvelle que je propose pour la résolution des équations de tous les degrés.

§ I. — *Quantités géométriques, définitions, notations.*

Menons dans un plan fixe, et par un point fixe, pris pour origine ou *pôle*, un axe polaire OX. Nous appellerons *quantité géométrique* et nous désignerons par la notation r_p un rayon vecteur tracé dans ce plan, et dont la longueur r sera mesurée dans la direction qui formera, avec l'axe fixe, l'angle polaire p . La longueur r sera la *valeur numérique* ou le *module* de la quantité géométrique r_p , l'angle p en sera l'*argument*. Le point à partir duquel se mesurera la longueur r et le point auquel elle aboutira seront l'*origine* et l'*extrémité* de cette longueur ou quantité géométrique.

Deux quantités géométriques seront dites égales entre elles quand elles offriront la même longueur mesurée dans la même direction ou dans des directions parallèles. Il en résulte que l'équation

$$R_p = r_p$$

entraînera toujours la suivante

$$R = r, \quad P = p + 2k\pi, \quad \cos P = \cos p, \quad \sin P = \sin p,$$

k étant une quantité entière quelconque.

Cela posé, la notion de *quantité géométrique* comprendra, comme



cas particulier, la notation de *quantité algébrique*, positive ou négative, et, à plus forte raison, la notation de *quantité arithmétique* ou de nombre, renfermée elle-même, comme cas particulier, dans la notion de quantité algébrique.

Après avoir défini les quantités géométriques, il est encore nécessaire de définir les diverses fonctions de ces quantités, spécialement leurs sommes, leurs produits et leurs puissances entières, en choisissant des définitions qui s'accordent avec celles que l'on admet dans le cas où il s'agit simplement de quantités algébriques. Or cette condition sera remplie, si l'on adopte les conventions que nous allons indiquer.

Étant données plusieurs quantités géométriques

$$r_p, r_{p'}, r_{p''}, \dots$$

ce que nous appellerons leur *somme*, et ce que nous indiquerons par la notation

$$r_p + r_{p'} + r_{p''} + \dots$$

ce sera la quantité géométrique que l'on obtient quand on porte, l'une après l'autre, les longueurs r, r', r'', \dots dans les directions indiquées par les arguments p, p', p'', \dots , en prenant pour origine de chaque longueur nouvelle l'extrémité de la longueur précédente, et en joignant l'origine de la première longueur à l'extrémité de la dernière. En vertu de cette définition, le module de la somme de deux quantités géométriques est toujours compris entre la somme et la différence de leurs modules. De plus, la somme de plusieurs quantités géométriques aura pour module un nombre qui ne surpassera jamais la somme de leurs modules.

Ce que nous appellerons le *produit* de plusieurs quantités géométriques sera une nouvelle quantité géométrique qui aura pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments.

En vertu de cette définition, le produit de plusieurs sommes de quantités géométriques sera la somme des produits partiels que l'on

peut former avec les divers termes de ces mêmes sommes en prenant un facteur dans chacune d'elles. D'ailleurs on indiquera ce produit à l'aide des notations appliquées aux quantités algébriques.

On aura, par suite.

$$(1) \quad r_p r_{p'} r_{p''} \dots = (r r' r'' \dots)_{p+p'+p'' \dots}$$

La $m^{\text{ème}}$ puissance de la quantité géométrique r_p , m étant un nombre entier quelconque, sera le produit de m facteurs égaux à r_p . Cette puissance sera indiquée par la notation r_p^m , et l'équation (1) donnera

$$r_p^m = (r_p^m)_{mp}.$$

Deux quantités géométriques seront dites *opposées* l'une à l'autre, lorsque leur somme sera nulle, et *inverses* l'une de l'autre, lorsque leur produit sera l'unité.

Enfin, pour les quantités géométriques, comme pour les quantités algébriques, la soustraction, la division, l'extraction des racines ne seront autre chose que les opérations inverses de l'addition, de la multiplication, de l'élevation aux puissances. Par suite, les résultats de ces opérations inverses, désignés sous le nom de *différences*, de *quotients*, de *racines*, seront complètement définis. Ils s'indiqueront d'ailleurs à l'aide des notations usitées pour les quantités algébriques. Ainsi, en particulier, la différence des deux quantités géométriques R_p, r_p s'indiquera par la notation $R_p - r_p$, et leur rapport ou quotient par la notation $\frac{R_p}{r_p}$.

Lorsque, dans une somme ou différence de quantités géométriques, quelques-unes s'évanouiront, on pourra se dispenser de les écrire. Par suite, $+r_p$ et $-r_p$ représenteront la somme et la différence des deux quantités 0, r_p , en sorte qu'on aura

$$+r_p = r_p, \quad -r_p = r_{p+\pi}.$$

Ces définitions étant adoptées, il sera facile de déterminer les diverses racines d'une quantité géométrique, par exemple les ra-

cines $m^{\text{èmes}}$ de l'unité. On reconnaîtra, en particulier, que l'unité a pour racines carrées

$$i_0 = 1 \quad \text{et} \quad i_\pi = -1,$$

pour racines cubiques

$$1 \quad \text{et} \quad \pm i_{\frac{2\pi}{3}},$$

pour racines quatrièmes

$$\pm 1 \quad \text{et} \quad \pm i_{\frac{\pi}{2}},$$

etc.

L'une de ces racines, savoir $i_{\frac{2\pi}{3}}$, est précisément la quantité géométrique que l'on est convenu de désigner par la lettre i . Elle est tout à la fois l'une des racines quatrièmes de l'unité, et l'une des racines carrées de -1 .

Lorsque la quantité géométrique r_p a le pôle pour origine, son extrémité peut être censée avoir pour coordonnées polaires les quantités algébriques r, p , et pour coordonnées rectangulaires les quantités algébriques x, y liées à r, p par les formules

$$x = r \cos p, \quad y = r \sin p.$$

Alors aussi on trouve

$$r_p = x + iy = r(\cos p + i \sin p);$$

puis, en posant $r = 1$,

$$i_p = \cos p + i \sin p.$$

Ajoutons que des formules

$$r_p = x + iy, \quad r_p = x - iy, \quad r_p r_{-p} = r^2$$

on tire immédiatement

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

On a aussi

$$\cos p = \frac{i_p + 1 - p}{2}, \quad \sin p = \frac{i_p - 1 - p}{2i}.$$

§ II. — Fonctions entières; équations algébriques. Méthode nouvelle pour la résolution générale des équations.

Suivant l'usage adopté pour les quantités algébriques, une quantité géométrique pourra quelquefois être désignée par une seule lettre.

Cela posé, soient $z = r_p$ une quantité géométrique variable, et a, b, c, \dots, h des coefficients constants, qui pourront être eux-mêmes des quantités géométriques. Si l'on pose

$$(1) \quad Z = a + bz + cz^2 + \dots + hz^n,$$

Z sera ce que nous appellerons une fonction entière de z , du degré n , et

$$(2) \quad Z = 0$$

sera une équation algébrique. Soient d'ailleurs a, b, c, \dots, h les modules des coefficients a, b, c, \dots, h , et R le module de Z . Pour de très grandes valeurs du module r de z , le rapport $\frac{R}{r^n}$ se réduira sensiblement au nombre h . Donc, par suite, R deviendra infiniment grand avec r , et ne pourra s'évanouir que pour des valeurs finies de r et de z .

Concevons maintenant que le module r de z passe d'une valeur nulle à une valeur très petite, et nommons ρ_α la racine de l'équation linéaire

$$(3) \quad a + bz = 0.$$

Quand on posera $z = r_\alpha$, en prenant r inférieur à ρ , le module du binôme

$$a + bz$$

sera précisément égal à

$$a - br,$$

et le module de Z sera égal ou inférieur à la somme

$$(4) \quad a - br + cr^2 + \dots + hr^n.$$

Donc le module de Z sera inférieur au module a de son premier terme a , si la différence

$$(5) \quad br - cr - \dots - hr^n$$

est positive, ce qui aura toujours lieu, si l'on prend à la fois $r < \rho$ et $r < \nu$, ν étant la valeur de r qui rend cette différence un maximum, et qui coïncide avec la racine positive unique de l'équation

$$(6) \quad b - 2cr - \dots - nr^{n-1} = 0.$$

En résumé, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *La fonction entière Z acquerra un module R inférieur au module a de son premier terme a , si l'on pose $z = r_{\sigma}$, r étant égal ou inférieur au module ρ de la racine ρ_{σ} de l'équation (3) et à la racine positive ν de l'équation (6). Donc a surpassera le plus petit des modules de Z correspondants aux deux suppositions*

$$z = \rho_{\sigma}, \quad z = \nu_{\sigma}.$$

Le théorème précédent ne serait plus applicable à la fonction Z si le coefficient de z dans cette fonction s'évanouissait, ou, en d'autres termes, si cette fonction était de la forme $a + bz^l + cz^m + \dots + hz^n$, l, m, \dots, n étant des nombres entiers. Mais alors on pourrait au théorème I substituer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Soient*

$$(7) \quad Z = a + bz^l + cz^m + \dots + hz^n$$

une fonction entière de la variable $z = r_{\rho}$, et a, b, c, \dots, h les modules des coefficients a, b, c, \dots, h . Supposons d'ailleurs que les nombres l, m, \dots, n forment une suite croissante, et que, les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_{σ} l'une quelconque des racines de l'équation binôme

$$(8) \quad a + bz^l = 0.$$

Enfin, soit ν la racine positive unique de l'équation

$$(9) \quad lb - mc r^{m-l} - \dots - nr^{n-l} = 0.$$

Le module a du premier terme de la fonction Z surpassera le plus petit des modules de Z correspondants aux deux suppositions

$$z = \rho_{\sigma}, \quad z = \nu_{\sigma}.$$

S'il arrivait que la fonction Z offrît, à la suite de son premier terme a , un ou plusieurs autres termes dont les coefficients fussent sensiblement nuls, alors, en se servant du théorème I ou II, pour déterminer un module de Z inférieur à celui de a , on pourrait faire abstraction de ces mêmes termes, sauf à constater ensuite que le module de Z , quand on a égard aux termes omis, reste inférieur au module de a .

Lorsque, en s'appuyant sur le théorème I ou II, on aura fait décroître le module R de Z , en faisant passer la variable z de zéro à une valeur r_{σ} distincte de zéro, il suffira, pour opérer une nouvelle diminution du module R , d'attribuer à la valeur r_{σ} de z un accroissement que nous désignerons par ζ , et d'appliquer le théorème I ou II à Z considéré comme fonction, non plus de la variable z , mais de la variable ζ .

En opérant comme on vient de le dire, on pourra faire décroître sans cesse, et même rapprocher indéfiniment de zéro le module R de la fonction Z . Les valeurs successives de z , qui correspondront aux valeurs décroissantes de R , formeront une série dont le terme général aura pour limite une racine de l'équation (2). Si l'on nomme ζ la différence entre la variable z et cette racine, le rapport $\frac{Z}{\zeta}$ sera une fonction entière de ζ , par conséquent de z , du degré $n - 1$; et en faisant décroître, à l'aide du théorème I ou II, le module de cette nouvelle fonction, on fera converger z vers une nouvelle racine de l'équation (2). En continuant de la sorte, non seulement on conclura des théorèmes énoncés que l'équation (2) admet toujours n racines égales ou inégales, mais encore on obtiendra de ces racines des valeurs aussi approchées que l'on voudra. Ainsi les théorèmes I et II fournissent, pour la résolution d'une équation algébrique de degré quelconque, une *méthode nouvelle* et très générale qui paraît digne d'être remarquée.



Si l'équation donnée se réduisait à l'équation binôme (1) ou (8), la racine unique ou les racines de l'équation se réduiraient au rapport $-\frac{a}{b}$, ou aux racines $n^{\text{ièmes}}$ de ce rapport.

Dans tout autre cas, lorsque l'approximation résultante de l'application de la méthode à la détermination d'une racine sera devenue très considérable, le module désigné par ρ , dans le théorème I, sera généralement très petit, et la méthode nouvelle se confondra simplement avec la méthode *linéaire* ou *newtonienne* fondée sur l'emploi de la seule équation (3), si l'équation (2) n'offre pas plusieurs racines égales à celle vers laquelle convergent les valeurs successives de z .

Lorsqu'on veut se borner à démontrer l'existence des racines des équations algébriques, on peut se contenter d'observer que le module de Z décroît quand on pose $z = r^{\rho}$, en attribuant à r une valeur infiniment petite, et l'on se trouve ainsi ramené à la démonstration que M. Argand a donnée de cette existence, dans le IV^e Volume des *Annales* de M. Gergonne (p. 133 et suiv.).

442.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur quelques théorèmes dignes de remarque, concernant les valeurs moyennes des fonctions de trois variables indépendantes.*

C. R., T. XXIX, p. 341 (1^{er} octobre 1849).

Considérons une fonction de trois coordonnées rectangulaires, et supposons l'intégrale triple, qui renferme cette fonction sous le signe \int , étendue à tous les points situés dans l'intérieur d'une certaine enveloppe; le rapport de cette intégrale triple au volume compris dans la surface enveloppe sera une valeur moyenne de la fonction. Or cette valeur moyenne peut être présentée sous une forme nouvelle et très simple, lorsque la surface enveloppe est du second

degré. D'ailleurs, de la seule inspection de cette forme nouvelle on déduit immédiatement, comme on le verra dans cet article, diverses propriétés remarquables de la valeur moyenne dont il s'agit. On en tire, par exemple, avec la plus grande facilité, une proposition générale qui comprend, comme cas particulier, le théorème bien connu à l'aide duquel on détermine l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur.

ANALYSE.

Soient x, y, z trois coordonnées rectangulaires, et $s, f(x, y, z)$ deux fonctions de x, y, z , dont la première s'évanouisse quand on pose à la fois $x = 0, y = 0, z = 0$. Prenons d'ailleurs

$$(1) \quad s = \iiint f(x, y, z) dx dy dz,$$

l'intégrale triple étant étendue à tous les points situés dans l'intérieur de la surface représentée par l'équation

$$(2) \quad s = 1,$$

et supposons cette surface rencontrée en un seul point par l'un quelconque des rayons vecteurs qui partent de l'origine des coordonnées. Le volume φ , compris dans la surface, sera ce que devient l'intégrale s , quand on réduit la fonction $f(x, y, z)$ à l'unité, et le rapport $\frac{s}{\varphi}$ sera une valeur moyenne de $f(x, y, z)$, savoir, celle qui, d'après les conventions admises dans un précédent Mémoire, devra être désignée par la notation $\int_{z=0}^{z=1} f(x, y, z)$; en sorte qu'on aura identiquement

$$(3) \quad \int_{z=0}^{z=1} f(x, y, z) = \frac{s}{\varphi} = \frac{\iiint f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint dx dy dz}.$$

Concevons maintenant que l'on ait

$$s = F(x, y, z).$$

Comme la valeur moyenne

$$(4) \quad \int_{s=0}^{s=1} f(x, y, z)$$

dépendra uniquement des formes des fonctions indiquées par les lettres f, F , cette valeur ne sera point altérée, si aux variables x, y, z on substitue d'autres variables qui dépendent des premières et leur soient, par exemple, proportionnelles. Donc, si l'on nomme a, b, c des constantes positives, on pourra, dans l'expression (3), remplacer

$$x, y, z \quad \text{et} \quad s = F(x, y, z)$$

par

$$ax, by, cz \quad \text{et} \quad F(ax, by, cz),$$

de sorte qu'en posant

$$\zeta = F(ax, by, cz)$$

on aura identiquement

$$(5) \quad \int_{s=0}^{s=1} f(x, y, z) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=1} f(ax, by, cz).$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — La moyenne entre les diverses valeurs de la fonction $f(x, y, z)$ correspondantes aux divers points du volume terminé par la surface que représente l'équation

$$(6) \quad F(x, y, z) = 1$$

sera aussi la moyenne entre les diverses valeurs de la fonction $f(ax, by, cz)$ correspondantes aux divers points du volume compris dans la surface que représente l'équation

$$(7) \quad F(ax, by, cz) = 1.$$

Enfin, si, en nommant t une variable auxiliaire, on suppose $f(x, y, z)$ choisie de manière que, dans l'intérieur du volume \forall terminé par la surface (6),

$$(8) \quad f(tx, ty, tz)$$

reste fonction continue de t pour tout module de t inférieur à l'unité, alors $f(tx, ty, tz)$ restera, pour un tel module, fonction continue de t , dans l'intérieur du volume terminé par la surface (7), et l'on aura identiquement, en vertu de la formule de Maclaurin,

$$(9) \quad f(ax, by, cz) = e^{axD_x + byD_y + czD_z} f(\alpha, \beta, \gamma),$$

α, β, γ étant de nouvelles variables auxiliaires que l'on devra réduire à zéro, après les différentiations effectuées. Donc, alors, en posant, pour abrégier,

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z,$$

on tirera de la formule (5)

$$(10) \quad \int_{s=0}^{s=1} f(x, y, z) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=1} e^{axD_x + byD_y + czD_z} f(\alpha, \beta, \gamma).$$

Le cas où la surface enveloppe, représentée par l'équation (2) ou (6), se réduit à un ellipsoïde, mérite une attention spéciale. Dans ce cas, en nommant a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, et en les prenant pour demi-axes des x, y, z , on pourra supposer

$$(11) \quad s = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On aura, par suite,

$$(12) \quad \zeta = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = r,$$

r étant le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point (x, y, z) . Donc alors la formule (8) donnera

$$(13) \quad \int_{s=0}^{s=1} f(x, y, z) = \int_{r=0}^{r=1} e^{axD_x + byD_y + czD_z} f(\alpha, \beta, \gamma).$$

D'autre part, si l'on prend

$$k = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}},$$

on aura, en désignant par $f(x)$ une fonction quelconque de la variable x ,

$$(14) \quad \int_{r=0}^{r=1} f(ax + by + cz) = \int_{r=0}^{r=1} f(kx),$$

puis on en conclura

$$(15) \quad \prod_{r=0}^{r=1} e^{ax+by+cz} = \prod_{r=0}^{r=1} e^{kx};$$

et, comme on aura encore

$$\prod_{r=0}^{r=1} e^{kx} = \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2) e^{kx} dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = \frac{3}{4} (1-D_k^2) \frac{e^k - e^{-k}}{k},$$

il est clair que, si l'on pose, pour abrégier,

$$(16) \quad \Pi(k) = \frac{3}{4} (1-D_k^2) \frac{e^k - e^{-k}}{k} = 1 + \frac{1}{5} \frac{k^2}{2} + \frac{1}{5 \cdot 7} \frac{k^4}{2 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} \frac{k^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots,$$

on trouvera définitivement

$$(17) \quad \prod_{r=0}^{r=1} e^{ax+by+cz} = \Pi(k).$$

Par suite, si l'on prend

$$* = (a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2)^{\frac{1}{2}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18) \quad *^2 = a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2,$$

l'équation (13) donnera

$$(19) \quad \prod_{s=0}^{s=1} f(x, y, z) = \Pi(*) f(x, \delta, \gamma)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(20) \quad \prod_{s=0}^{s=1} f(x, y, z) = \left(1 + \frac{1}{5} \frac{*^2}{2} + \frac{1}{5 \cdot 7} \frac{*^4}{2 \cdot 4} + \dots \right) f(x, \delta, \gamma).$$

En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — Si $f(x, y, z)$ est tellement choisie, que $f(x, y, z)$ reste fonction continue de x pour tout module de x inférieur à l'unité, et

pour tout point (x, y, z) situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde, dont l'équation est

$$(21) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

alors, non seulement la série dont le terme général est

$$\frac{1}{5 \cdot 7 \dots (2n+3)} \frac{*^{2n} f(x, \delta, \gamma)}{2 \cdot 4 \dots 2n}$$

sera convergente, mais, de plus, la somme de cette série sera précisément la moyenne entre les diverses valeurs de la fonction $f(x, y, z)$ correspondantes aux divers points situés à l'intérieur de ce même ellipsoïde.

Il est bien entendu qu'en calculant la valeur de l'expression

$$*^{2n} f(x, \delta, \gamma),$$

on devra réduire à zéro, après les différentiations effectuées, chacune des variables auxiliaires x, δ, γ .

Concevons, à présent, que l'on désigne par Θ le premier membre de la formule (20). En vertu de cette formule, jointe à l'équation (18), Θ sera une fonction des trois paramètres a, b, c . Si, d'ailleurs, $f(x, y, z)$ vérifie une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(22) \quad (lD_x^2 + mD_y^2 + nD_z^2) f(x, y, z) = 0,$$

l, m, n étant trois coefficients constants, on aura encore

$$(23) \quad (lu^2 + mv^2 + nw^2) f(x, \delta, \gamma) = 0;$$

et, par suite, on pourra de la valeur de $*^2$, fournie par l'équation (18), éliminer u^2 , ou v^2 , ou w^2 , à l'aide de la formule

$$(24) \quad lu^2 + mv^2 + nw^2 = 0;$$

on pourra, par exemple, à l'équation (18), substituer la suivante :

$$(25) \quad *^2 = \left(a^2 - \frac{l}{n} c^2 \right) u^2 + \left(b^2 - \frac{m}{n} c^2 \right) v^2.$$

Donc alors la quantité Θ se trouvera réduite à une fonction des différences

$$a^2 - \frac{l}{n} c^2, \quad b^2 - \frac{m}{n} c^2.$$

D'ailleurs, ces différences ne seront point altérées, si l'on fait croître ou décroître respectivement les carrés

$$\alpha^2, \quad \beta^2, \quad c^2$$

de quantités de la forme

$$\theta l, \quad \theta m, \quad \theta n,$$

θ désignant un nouveau paramètre. Donc, si l'on pose

$$(26) \quad \Theta = \varpi(a^2, b^2, c^2)$$

et

$$(27) \quad \bar{\Theta} = \varpi(a^2 - \theta l, b^2 - \theta m, c^2 - \theta n),$$

c'est-à-dire si l'on désigne par $\bar{\Theta}$ la moyenne entre les diverses valeurs de $f(x, y, z)$ correspondantes aux divers points situés dans l'intérieur de l'ellipsoïde, dont l'équation est

$$(28) \quad \frac{x^2}{a^2 - \theta l} + \frac{y^2}{b^2 - \theta m} + \frac{z^2}{c^2 - \theta n} = 1,$$

on aura identiquement, au moins pour des valeurs de θ comprises entre certaines limites, $\bar{\Theta} = \Theta$, et

$$(29) \quad \bar{\Theta} - \Theta = 0.$$

D'ailleurs, si dans l'équation (28), qui subsistera certainement pour de très petites valeurs du paramètre θ , on fait varier ce paramètre à partir de $\theta = 0$, alors, en vertu des principes établis dans un précédent Mémoire (*Comptes rendus*, Tome XX, p. 375) (1), elle continuera de subsister, tant que le premier membre $\bar{\Theta} - \Theta$ restera fonction continue de θ . Enfin cette dernière condition sera remplie, si θ varie entre des limites telles que

$$(30) \quad f(x\sqrt{a^2 - \theta l}, y\sqrt{b^2 - \theta m}, z\sqrt{c^2 - \theta n})$$

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. IX, p. 32.

reste fonction continue de θ pour tout point situé dans l'intérieur de la sphère représentée par l'équation

$$(31) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, on n'altérera pas la moyenne entre les diverses valeurs de $f(x, y, z)$, si à l'ellipsoïde représenté par la formule (20) on substitue l'ellipsoïde représenté par la formule (28), en attribuant au paramètre θ une valeur numérique comprise entre zéro et une limite supérieure tellement choisie que, dans l'intervalle, l'expression (30) demeure fonction continue de ce paramètre, pour tout point (x, y, z) dont la distance à l'origine ne surpasse pas l'unité.*

Corollaire I. — $\bar{\Theta}$ devant être, en vertu de la formule (29), égal à Θ , et par suite, indépendant de θ , on en conclura

$$D_{\theta} \bar{\Theta} = 0;$$

puis, eu égard à l'équation (27),

$$l \frac{D_x \bar{\Theta}}{a} + m \frac{D_y \bar{\Theta}}{b} + n \frac{D_z \bar{\Theta}}{c} = 0,$$

par conséquent,

$$(32) \quad l \frac{D_x \Theta}{a} + m \frac{D_y \Theta}{b} + n \frac{D_z \Theta}{c} = 0.$$

Corollaire II. — Des principes ci-dessus rappelés il résulte que, sans altérer la valeur moyenne de $f(x, y, z)$, et, par conséquent, sans détruire l'équation (29), on pourra faire varier, non seulement le paramètre θ , comme il est dit dans le théorème III, mais encore les paramètres a, b, c , pourvu, toutefois, qu'en vertu de ces variations $\bar{\Theta}$ ne cesse pas d'être fonction continue de tous ces paramètres. Ajoutons que cette dernière condition sera remplie, si ces variations sont telles, que l'expression (30) reste fonction continue de a, b, c, θ .

Dans le cas particulier où les coefficients l, m, n se réduisent à l'unité, l'équation (28) se réduit à

$$(33) \quad \frac{x^2}{a^2 - \theta} + \frac{y^2}{b^2 - \theta} + \frac{z^2}{c^2 - \theta} = 1,$$

et les divers ellipsoïdes que représente cette équation pour diverses valeurs de θ sont des ellipsoïdes *homofocaux*, c'est-à-dire que leurs sections principales sont des ellipses qui offrent toujours les mêmes foyers. Alors aussi l'équation (22) se réduit à

$$(34) \quad (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) f(x, y, z) = 0,$$

et l'équation (32) à

$$(35) \quad \frac{D_x \theta}{a} + \frac{D_y \theta}{b} + \frac{D_z \theta}{c} = 0.$$

D'ailleurs on satisfait à l'équation (34) en prenant, par exemple,

$$(36) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{r},$$

ou même, plus généralement,

$$(37) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{r^2},$$

r désignant la distance du point mobile (x, y, z) à un point fixe (x, y, z) , en sorte qu'on ait

$$(38) \quad r^2 = (x - x)^2 + (y - y)^2 + (z - z)^2.$$

Cela posé, le théorème III et son deuxième corollaire entraîneront généralement la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — Soit r la distance d'un point fixe A à un point mobile P , et nommons O le centre d'un ellipsoïde qui ne renferme pas le point P . La moyenne entre les diverses valeurs de $\frac{1}{r}$ correspondantes aux divers points situés dans l'intérieur de l'ellipsoïde ne sera point altérée, si à celui-ci on substitue l'un quelconque des ellipsoïdes *homofocaux* qui ne renferment pas le point P , ou même l'ellipsoïde *homofocal* dont la surface passe par ce point.

Le théorème IV est celui à l'aide duquel on détermine l'attraction exercée par un ellipsoïde sur un point extérieur.

Ajoutons que, si la distance OP , représentée par le radical

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

surpasse la plus grande des distances comprises entre le centre de l'ellipsoïde et les foyers des sections principales, la valeur moyenne Θ de la fonction $\frac{1}{r}$ se déduira aisément de l'équation (20), ou, ce qui revient au même, de la formule

$$(39) \quad \Theta = \left(1 + \frac{1}{5} \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{5 \cdot 7} \frac{\omega^4}{2 \cdot 4} + \dots \right) \frac{1}{r},$$

les valeurs de r et de ω^2 étant déterminées par les formules

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega^2 = (a^2 - b^2)u^2 + (a^2 - c^2)v^2.$$

443.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Rapport sur un Mémoire de M. ROCHE, relatif aux figures ellipsoïdales qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné.

C. R., T. XXIX, p. 376 (8 octobre 1849).

Maclaurin a reconnu qu'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation uniforme, et composée de molécules qui s'attirent mutuellement en raison inverse du carré de la distance, peut satisfaire aux conditions d'équilibre, lorsque sa surface extérieure est celle d'un ellipsoïde de révolution, pourvu que la vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite. A la limite dont il s'agit, répond un seul ellipsoïde. A une valeur plus petite de la vitesse angulaire correspondent deux ellipsoïdes, dont l'un se réduit sensiblement à une



sphère quand la vitesse angulaire est très petite. Laplace a d'ailleurs prouvé que celui-ci est la seule figure d'équilibre qu'on puisse obtenir quand on suppose la vitesse angulaire très petite et la forme du fluide peu différente de la sphère. Quant à l'autre ellipsoïde de Maclaurin, il offre généralement un aplatissement considérable, surtout quand la vitesse angulaire est sensiblement nulle.

Il semblerait naturel d'admettre qu'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation uniforme, doit, dans le cas d'équilibre, offrir toujours pour surface extérieure une surface de révolution. Mais, dans ces derniers temps, M. Jacobi a démontré qu'une telle masse peut se présenter aussi sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Cette proposition nouvelle et remarquable ayant fixé l'attention des géomètres, on a étudié les relations qui existent entre la vitesse angulaire et les trois axes de l'ellipsoïde, ou plutôt les rapports de ces mêmes axes. M. Meyer a fait voir que, pour des valeurs de la vitesse angulaire suffisamment petites, l'ellipsoïde de M. Jacobi subsiste avec les deux ellipsoïdes de Maclaurin. La vitesse angulaire venant à croître, il arrive un moment où l'ellipsoïde de M. Jacobi se confond avec l'un des deux ellipsoïdes de Maclaurin, et ceux-ci finissent par disparaître après être devenus égaux entre eux, quand la vitesse angulaire atteint la limite dont nous avons précédemment parlé.

On peut d'ailleurs, au lieu de faire croître la vitesse angulaire, faire croître le moment de rotation, c'est-à-dire le produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie relatif à l'axe de rotation; et alors on arrive, quand on se borne à considérer les ellipsoïdes de Maclaurin, aux propositions établies par Laplace dans le Tome II de la *Mécanique céleste* et, quand on considère en outre l'ellipsoïde de M. Jacobi, aux résultats donnés par M. Liouville dans un Mémoire que renferme la *Connaissance des Temps* pour l'année 1849.

Dans les travaux que nous venons de rappeler, la masse fluide, douée d'un mouvement de rotation uniforme, était supposée uniquement soumise aux actions mutuelles de ses molécules. Il impor-

taît de voir si la forme d'un ellipsoïde pouvait convenir encore à une telle masse, dans le cas où elle était de plus attirée par un point extérieur très éloigné, doué de la même vitesse angulaire, et tournant dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Laplace, qui s'était occupé de ce dernier problème, ne l'avait résolu que dans un cas très particulier, savoir, quand la masse fluide est sensiblement sphérique et d'ailleurs très petite relativement à la masse du point extérieur. M. Roche a recherché une solution générale de la même question, et il a eu le bonheur de réussir. Nous avons vérifié les calculs qui l'ont conduit aux équations fondamentales du problème, et nous avons trouvé ces équations parfaitement exactes. Il est hors de doute, comme le dit M. Roche, que, dans le cas général, la solution est fournie par des ellipsoïdes dont les axes sont inégaux, le plus petit axe de chaque ellipsoïde étant l'axe de révolution.

M. Roche ne s'est pas borné à établir les formules fondamentales: il a encore discuté ces formules, il en a fait des applications diverses, et, sur notre demande, il a joint au Mémoire primitif des développements nouveaux. Ces développements, que nous déposons sur le bureau de l'Académie, et la discussion des formules fondamentales nous paraissent offrir assez d'intérêt pour demander un examen spécial qui pourra fournir la matière d'un nouveau Rapport. Mais cet examen, relatif en partie à des pièces qui ne nous avaient point été soumises, pouvait entraîner, dans la présentation du Rapport, des retards que nous aurions regrettés, et n'était d'ailleurs nullement nécessaire pour fixer notre opinion sur un travail dont le mérite est incontestable à nos yeux.

En résumé, les Commissaires sont d'avis que M. Roche a résolu avec sagacité une question importante, et que son Mémoire est très digne d'être approuvé par l'Académie.