LEONHARDUS EULERUS

MATHEMATICUS ACUTISSIMUS

AD AUCTOREM.

JAM ante quidem, *maximi feci Theoriam Tuam aquarum fluentium, propter veram & genuinam Methodum, quam Tu,* Vir Excellentissime, *primus atque solus aperuisti ad hujus generis Problemata solide pertractanda. Nunc vero, perlecta altera Tuarum Meditationum parte, penitus obstupui fœcundissima principiorum Tuorum applicatione ad perplexissima Problemata resolvenda, quo utilissimo pariter ac profundissimo invento Nomen Tuum celeberrimum apud posteros perpetuo erit sacrum. Obscurissimam autem atque abstrusissimam quæstionem, de pressione quam latera vasorum ab aquis transfluentibus patiuntur, tam distincte & enucleate enodasti, ut nihil amplius in hanc tam difficili re superstit, quod desiderari queat. Ut enim nemo, præter Filium Tuum celeberrimum, hoc argumentum attigit, qui tamen tantum cum totus motus sese jam ad statum permanentem composuerit, pressionem via satis indirecta definivit; Ita Tu statim, methodo genuina patefacta, pressionem in omni aquæ statu accuratissime determinasti, de quo Te dignissimo invento Tibi,* Vir Excellentissime, *ex animo gratulor, & pro communicatione maximas gratias ago.*

DISSER-

DISSERTATIO HYDRAULICA

De Motu Aquarum per vasa aut per canales quamcunque figuram habentes fluentium.

PRÆFATIO.

HYDROSTATICA, quæ agit de aquis stagnantibus in vasis inferius clausis, habet suas leges demonstratas, atque principia ex ratione deducta; unde effectus & phænomena clare & dilucide explicantur: ita ut circa hanc Scientiam vix amplius quid desiderari possit. Aliter se res habet in *Hydraulica*, ubi non tantum de gravitatione aquarum earumque pressionibus agitur, sed præterea motus, qui inde nascitur, si aquæ per datam aperturam possunt effluere, aut si ex uno tubo in alium diversæ amplitudinis transire coguntur, atque alii effectus admirandi, qui eum motum comitantur, demonstrative determinari debent. Hæc certe Scientia, vulgo *Hydraulica* dicta, admodum est ardua, neque

neque adhuc ad leges regulaſque mechanicas revocata habetur. Quicquid Autores ea de re ſcripſerunt, vel ſola nituntur experientia, vel rationibus incertis omnino, parumque ſoliditatis habentibus.

In Opere Hydrodynamico, quod non ita pridem in lucem edidit Filius meus †, felicioribus auſpiciis aggreſſus eſt materiam iſtam, ſed fundamento nixus indirecto, conſervatione ſcilicet virium vivarum, licet veriſſimo atque a me demonſtrato, nondum tamen ab omnibus Philoſophis recepto. Primus ego hanc hypotheſin exhibui in Dynamicis ſolidorum [poſtquam HUGENIUS ſimili principio pro centro oſcillationis determinando uſus eſt] oſtendique eandem conſtanter ex illa hypotheſi ſolutionem elici, quam dant ordinaria principia dynamica ab omnibus Geometris admiſſa *; quæ ſane perpetua ſolutionum utraque via erutarum conformitas, vel ſola ſufficeret ad convincendam Adverſariorum obſtinationem. Directam methodum, qua a priori & per ſola Dynamices principia, inveſtigari poſſit natura motus aquarum ex vaſis per foramina erumpentium, aut per canales non uniformis amplitudinis fluentium, hactenus dedit nemo.

Miratus unde tanta difficultas, ut in fluidis, non æque ac in ſolidis, ſuccedat principiorum dynamicorum applicatio; tandem rem acrius animo volvens, detexi veram difficultatis originem; quam in eo conſiſtere deprehendi, quod pars quædam virium prementium impenſa in formandum *gurgitem*, [a me ita dictum ab aliis non animadverſum] tanquam nullius momenti fuerit neglecta, & inſuper habita, non aliam ob cauſam quam quia gurges conflatur ex quantitate fluidi perexigua, ac veluti infinite parva, qualis formatur quotieſcunque fluidum tranſit ex loco ampliori in anguſtiorem, vel vice verſa ex anguſtiori in ampliorem. In priori caſu fit gurges ante tranſitum, in altero poſt tranſitum.

Demonſtrabo autem ad formandum gurgitem, quantumvis parvam habeat moleculam, requiri tamen vim prementem non

† *Danielis* BERNOULLI Hydrodynamica, ſive de viribus & motibus fluidorum Commentarii. *Argentorati*, 1738.

* Vide Numeros CXXXV, CXXXVI, CXL.

inſenſibilem, nedum infinite parvam, ſed finitam ac determinatam, adeoque neutiquam contemnendam, ſed dignam omnino ut in computum veniat. Nam vis illa ad hunc effectum requiſita, quod mirum videri poteſt, plane non dependet ab extenſione gurgitis, qui major minorve concipi poteſt, modo concipiatur ut valde parvus; ſemper eandem ad ſui formationem abſumit partem virium prementium, manentibus cæteris circumſtantiis.

Quid ſit gurges, ac quomodo formetur, ex ipſa rei tractatione intelligetur; ſimulque patebit formationem gurgitis peragi ſine diſpendio ſenſibili virium vivarum, reſpectu quantitatis earum quæ eſt in totali maſſa aquea. Hinc eluceſſit ratio, cur tuto & ſine errore adhiberi poſſit Theoria virium vivarum in Hydraulicis; etiamſi ad gurgitem non attendant illi qui hac theoria utuntur; dummodo gurgitis exiſtentiam non ignorent, videantque illum nihil derogare virium vivarum conſervationi: ſecus enim contendere non poſſunt, ſe rei veritatem perfecte & ſcientifice conſecutos eſſe.

Diſquiſitionem hanc abſolvam duabus partibus: In prima conſiderabo phænomena aquarum fluentium, & effluentium per vaſa cylindrica aut priſmatica, ſive ſint ſimplicia, ſive ex pluribus compoſita, ut ſunt canales ex variis diverſæ amplitudinis tubis, ſeu ſiphonibus cylindricis coagmentatis. In altera parte, perſcrutabor omnia univerſaliſſime, cujuſcunque ſint figuræ, tam regularis quam irregularis, vaſa perforata, ipſiſque adaptati canales ac tubi.

Ad clariorem rerum intelligentiam, præmitto Definitiones atque Lemmata ſequentia, quorum veritas, cum ex Dynamicis, tum ex Hydroſtaticis eſt manifeſta.

I. Vis *acceleratrix* uniformis eſt, quæ dato corpori, dato tempore, datam velocitatem imprimit.

II. Vis *motrix* eſt, quæ quando agit in corpus quieſcens, illud in motum concitat, aut quæ corpus jam motum vel accelerare, vel retardare, vel ejus directionem mutare poteſt.

III. Vires motrices, ſunt in ratione compoſita, ex ratione maſſarum & virium acceleratricium. Sic ex. gr. ad movendam maſſam duplam, cum vi acceleratrice tripla, aut, quod idem eſt, ad movendam maſſam triplam, cum vi acceleratrice dupla, requiritur vis motrix ſextupla.

IV. Vis motrix diviſa per maſſam, dat vim acceleratricem; per hanc vero diviſa, dat maſſam.

V. Gravitas abſoluta g, ſeu cauſa gravitatis, quæcunque illa ſit, eſt vis acceleratrix, quæ cum animat determinatam maſſam corporis m, producit in illa vim motricem $= gm$. Licebit autem in mente noſtra eam ſeparare a corpore, & ita conſiderare tanquam extrinſecus in corpus ageret: concipimus utique idem illud corpus, gravitatis expers, a vi motrice externa gm eadem lege acceleratum iri, qua acceleratur naturaliter. Illam autem vim gm, tanquam extra materiam exiſtentem, vocare lubet vim motricem *immaterialem*: unde ſi illa aliorſum tranſlata, agat in aliam maſſam M, accelerabitur hæc, vi acceleratrice $= gm : M$.

VI. Vis motrix immaterialis atque invariabilis, agens ſine impedimento in corpus, eodem modo illud accelerat, ſive adhuc quieſcat, ſive jam ſit in motu: cum enim vis illa ſemper comitetur corpus, nullum inter ſe habent motum relativum, adeoque vis motrix eodem modo agit in corpus motum, ac ſi utrumque omnino quieſceret. Hæc cauſa eſt, cur corpora gravia, inter cadendum, continuo & uniformiter accelerantur ſecundum tempora; ſuppoſito ſcilicet intenſitatem vis acceleratricis non mutari inter agendum, hoc eſt, neque augeri neque minui; ſicuti revera vis gravitatis, eandem continuo ſervat intenſitatem, in corpore gravi deſcendente, æque ac ab initio deſcenſus.

VII. *Intenſitas* vis motricis invariabilis, dicitur menſura, ſecundum quam in corpore movendo producitur major minorve vis acceleratrix: Sic gravitas, in corpore verticaliter cadente, majorem habet intenſitatem, quam ea in eodem corpore ſuper plano declivi delabente; in priori enim caſu, major producitur vis acceleratrix quam in altero; in utroque autem gravitas eſt invariabilis.

VIII. *Vis motrix variabilis* eſt, cujus intenſitas mutatur in agendo. Sic ex. gr. vis elaſtri tenſi, ab initio relaxationis majorem habet

habet intenſitatem, per conſequens, majorem imprimit corpori propellendo vim acceleratricem, quam in progreſſu relaxationis. De his hæ habentur Regulæ: Sit ſpatium a corpore percurſum $= x$; maſſa corporis propulſi $= m$; vis motrix in fine ſpatii percurſi $= p$; velocitas acquiſita $= v$; tempus per $x = t$; proinde $dt = \frac{dx}{v}$; erit $\frac{pdt}{m}$, ſeu $\frac{pdx}{mv} = dv$, ideoque $\int pdx = \frac{1}{2} mvv$, id quod notiſſimum eſt.

IX. Partes inferiores aquæ in vaſe aliquo contentæ, premuntur a ſuper incumbente maſſa aquea, ſecundum ſolam profunditatem, quamcunque vas habeat figuram; hoc eſt, ſi maſſa aquea cogitatione dividatur in ſtrata horizontalia infinite parvæ craſſitiei, unumquodque ex illis ſtratis tantumdem premitur, ac ſi illi incumberet cylindrus aqueus ejuſdem altitudinis, quam eſt ea, quæ in vaſe reſpondet profunditati ipſius ſtrati.

X. Hinc recte colligitur: Si amplitudines ſtratorum, eandem craſſitiem infinite parvam habentium, ſint m, m', m'', m''', &c. eorumque adeo ponduſcula propria ſint etiam ut m, m', m'', m''', &c., ſeparari poterunt per mentis abſtractionem, a ſtratis ipſorum gravitationes; ita ut eorum ſola ſuperſit materia ſine pondere: ſed ſi ablatarum gravitationum loco, totidem aliæ ſubſtituantur, quæ junctim premant ſupremam aquæ ſuperficiem, obſervando nimirum in ſingulis hanc analogiam, ut ſit amplitudo cujuſlibet ſtrati ad amplitudinem ſupremæ ſuperficiei, ita gravitatio propria ſtrati ad gravitationem ſubſtituendam: orietur inde in ſingulis ſtratis eadem preſſio, ac ſi manſiſſent in ſtatu ſuo naturali.

XI. Voco *Tranſlationem*, ſubſtitutionem illam mentalem. Ut me explicem, habeat ſtratum aliquod ex inferioribus amplitudinem $= m$, ejus gravitatio, vel ponduſculum proprium $= \pi$; amplitudo ſtrati ſupremi $= h$, erit *gravitatio tranſlata* ad ſuperficiem ſupremam $= \frac{h}{m} \pi$, quæ, cum reliquis omnibus ita *tranſlatis*, conſtituit totam vim motricem immaterialem, qua omnis aqua in vaſe deorſum urgetur, eodem modo ac ſit naturaliter.

MONITUM.

Monere jam convenit in anteceſſum, me, per totam hanc tractationem de motu aquarum fluentium, abſtrahere a conſideratione impedimentorum peregrinorum & accidentalium, quæ alterare poſſunt motum per regulas determinatum. Talia impedimenta ſunt aquarum imperfecta fluiditas, item illarum adhæſio, atque frictio ad latera vaſorum, nimia tuborum gracilitas, foraminum ſeu luminum anguſtia, tenacitas particularum fluidarum, ob quam non facillime a ſe invicem ſecedunt, & quæ ſunt alia ejuſmodi, ad quæ non attendo.

Hoc quoque notari velim, non eſſe abſolutæ neceſſitatis, ut ſemper aquarum ſtrata in ſitu horizontali concipiantur: commodius illa finguntur, perpendicularia ad directionem motus aquæ. Sic ex. gr. cum aqua ex vaſe ampliori, transfluit in tubum anguſtiorem horizontalem, cujus orificii vel luminis area ſit in plano verticali, & ad latus tubi recto; aqua in tubo contenta rectiſſime dividi concipitur in ſtrata verticalia, & plano luminis parallela; eoque magis, quod ipſa natura hunc quaſi ſitum affectat: videmus enim columnam aqueam in tubo aliquo, duas lineas in diametro non multum excedente, habere ambas ſuas ſuperficies extremas diſpoſitas ad ſitum perpendicularem lateribus tubi, quamvis tubus ipſe ſit ad horizontem obliquus, vel omnino horizontalis. Linea conjungens centra gravitatis ſtratorum, ſive ſit recta ut in tubis rectilineis, ſive curva ut in tubis curvilineis, vocabitur *linea centrica*, vel ſimpliciter *centrica*: ſingula quippe ſtrata, quoad materiam in centris ſuis collecta, eum habere motum cenſentur quem ipſa habent ſtrata.

DISSER-

DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ
PARS PRIMA,

Agens de motu aquarum per vaſa & canales cylindricos, qui ex pluribus tubis cylindricis ſibi invicem adataptis ſunt conflati.

I.

Detur primo canalis, (Fig. 1) ABCFDE, compoſitus ex duobus tubis cylindricis, diverſæ amplitudinis AGDE & GBCF, quorum ille fundum GD apertum habeat foramine GF, per quod communicet cum tubo anguſtiori BF. Sit vero totus canalis BE plenus liquore homogeneo, per ſe nullius gravitatis, ſed urgeatur a parte orificii AE, data vi motrice $=p$, quæ, æqualiter premendo, expandatur per totam ſuperficiem liquoris AE; quæritur lex accelerationis, qua liquor per canalem profluet? Suppono autem canalem ſemper manere plenum liquore, quod fit concipiendo ſuppeditari jugiter aliunde novam materiam liquoris, eadem quovis momento velocitate in tubum GE ſubingredientis, ad reſarciendum id quod per alterum orificium GF egreditur in tubum GC, atque ex hoc ipſo per lumen BC in auras dilabitur.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. Fig. 1.

II.

Ex Hydroſtaticis aſſumpſi vim motricem p immaterialem, qua premitur ſuperficies liquoris AE, propagari in inſtanti, ad ſuperficiem GF liquoris in tubo BF contenti; idque ſive ſtagnet liquor in toto canali, ſive fluat; dummodo plenus maneat.

Lll 3 III.

III.

Dum transit liquor ex uno tubo in alterum, mutabitur utique velocitas in ratione reciproca amplitudinum; at nulla mutatio est subitanea, sed successiva & gradualis, procedens per omnes possibiles gradus intermedios a minori ad majorem, vel a majori ad minorem.

IV.

Hinc quando fluit liquor motu parallelo, ita ut quolibet momento, eadem insit velocitas singulis partibus liquoris, in directione ab AE versus GD, antequam partes ipsi GF proximæ, perveniant ad orificium GF, oportet ut per distantiam saltem minimam HG, incipiant accelerari, & accelerando pergant, donec in ipso ingressu GF, acquisiverint velocitatem liquoris per tubum BF fluentis motu pariter parallelo, singulisque partibus communi.

V.

Formatur itaque, pro latitudine indefinite parva HG, aliquis quasi gurges IFGH, ex lato in angustum coarctandus, per quem liquor, continua acceleratione sed tamen per gradus adaucta, perlabi debet, manente portiuncula quam minima liquoris (quæ replet spatiolum IFD) in quiete perpetua.

VI.

Sit curva IMF, terminans gurgitem, cujuscunque naturæ, neque enim necesse est, eum supponere alicujus determinatæ figuræ; mox enim demonstrabo, eandem semper requiri vim motricem, ad id unice destinatam ut liquor per gurgitem cogatur, qualemcunque habeat latitudinem HG, modo sit infinite parva, & cujuscunque sit naturæ linea IMF, quæ connectit extremitates I & F.

VII.

VII.

Nemo putet vim illam motricem [quæ exiguam adeo, imo infinite parvam, portiunculam liquoris per gurgitem protrudit] debere & ipsam esse infinite parvam, adeoque contemni posse. Est enim omnino finitæ quantitatis illa vis motrix; ideo quia si quantitas materiæ movendæ est infinite parva, ex altera parte, vis acceleratrix debet esse infinite magna, ad id nimirum, ut tempusculo infinite parvo, quo liquor percurrit spatiolum HG, generari tamen possit mutatio finita in velocitate, utpote ea quæ fuerat velocitas in H ad eam quæ jam est in G, se habet ut GF ad HI.

VIII.

Neglectio hujus vis motricis, tanquam nullius momenti, in causa fuit, cur nemo ad hunc usque diem extiterit, qui ex principiis staticis & pure mechanicis, dare potuerit leges liquorum per canales non uniformes fluentium; sed quicunque susceperunt illas exacte determinare recurrerunt, meo quidem exemplo, ad principium virium vivarum, de cujus applicatione ad hoc negotium aliaque in solidis æque ac in fluidis, forsan nunquam cogitassent, si me præeuntem non habuissent, quippe qui primus docui, hunc usum derivare ex conservatione virium vivarum. Sed ipse ego non satis contentus indirecta hac methodo, utpote fundata in theoria illarum virium a multis nondum admissa, non destiti inquirere in methodum directam, quæ niteretur unice principiis dynamicis a nemine negatis; donec tandem, post meditationem longiusculam, anno jam 1729 voti compos factus, vidi totius rei cardinem versari in contemplatione gurgitis, antea a nemine animadversi. Nunc itaque inventa mea, Amicis quibusdam privatim explicata, etiam cum publico communicare consultum duco. Hunc in finem, gurgitis generatione jam indicata, inceptum lubet, qua potero perspicuitate, prosequi.

IX.

I X.

Concipiatur abſciſſa HL $= t$, applicata LM $= y$, atque prioris elementum L$l = dt$, dicaturque tubi HE amplitudo AE ſeu HI $= h$, tubi GC amplitudo BC ſeu GF $= m$, liquoris in tubo GC velocitas $= v$, adeoque liquoris in tubo HE velocitas erit $\frac{m}{h} v$; ſunt enim velocitates amplitudinibus reciproce proportionales: ob eandem rationem, erit, in quolibet gurgitis loco, liquoris LMml velocitas $= \frac{m}{y} v$, quod dicatur $= u$. Jam ergo ſit vis acceleratrix, qua animatur ſtratum liquoris L$m = \gamma$; erit, ex natura accelerationis $\gamma dt = udu$, proinde $\gamma y dt = yudu$, hoc eſt, vis motrix qua urgetur ſtratum liquoris LM$ml = yudu$. Hæc vero vis motrix, per § II, generatur a vi motrice partiali in tubo HE exiſtente, & expanſa per totam amplitudinem AE; quæ ut innoteſcat, faciendum eſt ut LM ad HI, ſeu ut y ad h, ita $yudu$ ad $hudu$, erit $hudu$ [tranſlata nempe ipſius $yudu$] vis motrix particularis in tubo HE, quæ producere poteſt vim motricem $yudu$, in gurgitis ſtrato LMml; & integrando per totum gurgitem habetur $\frac{1}{2} h\left(vv - \frac{mm}{hh} vv\right)$ ſeu $\frac{hh - mm}{2h} vv$, quæ deſignat vim motricem requiſitam in tubo HE, ad id unice, ut in gurgite fiat acceleratio neceſſaria ad mutandam velocitatem minorem in majorem, qua opus eſt, ut tranſeat liquor in tubum anguſtiorem GC.

COROLLARIUM I.

Hinc patet naturam curvæ IMF, ut & latitudinem gurgitis HG, non ingredi in vis motricis determinationem, ad generandum motum gurgitis. Datis enim amplitudinibus extremis HI & GF, ſeu h & m, & velocitate v, ſemper habetur vis motrix in tubo HE $= \frac{hh - mm}{2h} vv$, pro motu in gurgite generando.

COROL-

COROLLARIUM II.

Quod ſi, continuante fluxu liquoris, ejus velocitas v in tubo BF maneat ſemper conſtans, manifeſtum eſt, etiam alteram velocitatem in tubo HE manere conſtantem; adeoque vim motricem, vel preſſionem p, nihil amplius conferre ad motum in utroque tubo accelerandum: unde liquet totam illam vim p unice adhiberi ad formandum gurgitem, eumque in ſtatu ſuo conſervandum; erit propterea $p = \frac{hh - mm}{2h} vv$.

COROLLARIUM III.

Fingamus tubum HE, vel GE, eſſe verticaliter erectum inſtar vaſis cylindrici, & communicare cum tubo horizontali GC, atque vim p eſſe ipſum pondus columnæ liquoris contenti GE; ita ut [poſito g deſignare vim naturalem acceleratricem gravium, atque HA vel GA $= a$] habeatur $p = gah$ = ponderi liquoris in GE contenti; unde $gha = \frac{hh - mm}{2h} vv$. Sed ut v determinetur per altitudinem verticalem z, per quam grave aliquod libere delapſum acquirat velocitatem v; faciendum eſt $gdz = vdv$, proinde $gz = \frac{1}{2} vv$; ſubſtituendo igitur gz pro $\frac{1}{2} vv$; habebimus $gha = \frac{hh - mm}{h} \times gz$; unde emergit $z = \frac{hh}{hh - mm} a$, id quod dat hoc Theorema hydraulicum.

X.

THEOREMA.

Sit, (Fig. 2) vas cylindricum AGFE verticaliter erectum, inſtructumque ad fundum tubo cylindrico horizontali FB utrinque aperto: Sit item, tam vas quam tubus, aqua jugiter plenus, ut nimirum tantum aquæ, eadem velocitate quam habet aqua in vaſe, TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. Fig. 2.

 con-

continuo suppeditetur per AE, quantum effluit per lumen BC. Dico velocitatem aquæ effluentis [si illa nascatur ex quiete] convergere citissime, ad eam quæ acquiritur a gravi libere cadente per altitudinem $= \frac{hh}{hh - mm}a$.

Cujus veritas patet ex *Coroll.* 3 præced.

COROLLARIUM I.

Unde si lumen BC sit valde parvum, respectu amplitudinis vasis AE, adeo ut m negligi possit respectu h, prodibit $z = a$; hoc est, velocitas aquæ effluentis ex tubo, erit æqualis ei quam grave libere delapsum ex altitudine EF acquirit: Quod est Theorema notissimum; sed ex principiis dynamicis nondum hucusque demonstratum; præsertim si adfuerit tubus BF adaptatus: cum antea creditum fuerit Theorema valere tantum pro parvo foramine ad F supposito.

COROLLARIUM II.

Quo majus est lumen BC, respectu amplitudinis vasis AE, eo major fit velocitas maxima aquæ effluentis; aucto enim m, augetur valor fractionis $\frac{hh}{hh - mm}$, donec evadente $m = h$, velocitas maxima sit infinita; quod verum esse vel hinc quoque patet, quia tunc & vas & tubus sunt ejusdem amplitudinis, formantque unum continuum tubum reflexum; adeoque vis ponderis aquæ, in parte AF semper plena, continuo accelerat totam massam aqueam, ut tandem ejus velocitas, tempore infinito generata, fiat & ipsa infinita. Nam dicendo longitudinem tubi FC $= b$, massa omnis aquæ in tubo reflexo AGC, erit $= ha + hb$; eaque non aliter accelerabitur, quam corpus aliquod solidum, quod animaretur vi acceleratrice $= \frac{gha}{ha + hb} = \frac{ga}{a + b}$: tale utique corpus, cadendo per tempus infinitum, acquireret velocitatem infinitam.

CO-

COROLLARIUM III.

Si vero m majus esset quam h, id est, si tubus horizontalis amplior esset quam vas verticale; velocitas maxima nunquam & nequidem tempore infinito daretur: foret enim $\frac{hh}{hh - mm}$ negativum; indicio quod, durante fluxu in æternum, acceleratio aquæ effluentis incrementum capere non desinet. Hoc enim in casu, fiet in tubo gurges inversus, respiciens orificium BC, qui, ut ex sequentibus patebit, eam habet naturam, ut vim motricem adjuvet potius quam diminuat, dum sese quasi subducit pressioni a tergo venienti, quo aqua in vase liberius descendere queat.

SCHOLIUM.

Hucusque consideravimus vas & tubum aqua constanter plenum, atque effluentem aquam in maxima sua velocitate, adeoque æquabili seu uniformi; quo fit, ut nulla amplius requiratur vis motrix ad aquam accelerandam, neque per vas, neque per tubum; sed vis motrix p tota usurpetur ad coërcendum gurgitem, qui formatur ante ingressum ex spatio ampliori in angustius. Nunc contemplabimur velocitatem fluxus aquæ tanquam crescentem, atque initium suum a quiete sumentem; ita ut ad accelerationem procurandam, tam in vase quam in tubo, sua pariter peculiaris pars vis motricis p requiratur. Examinabimus primo casum, quo vas cum tubo constanter plenum supponitur.

X I.

Sit x longitudo spatii quam aqua ex quiete in tubo percurrit, erit $\frac{m}{h}x$ longitudo quam eodem tempore percurrit in vase. Sic pariter, existente velocitate in tubo $= v$, erit quoque velocitas in vase $= \frac{m}{h}v$; unde vis acceleratrix in tubo $= \frac{v\,dv}{dx}$,

Mmm 2 eaque

eaque multiplicata per maſſam aquæ mb, dabit vim motricem $= \frac{mbvdv}{dx}$, quæ (per §. 2) translata in vas, dabit æquipollentem $\frac{hbvdv}{dx}$, a qua nimirum illa in tubo $\frac{mbvdv}{dx}$ produci poteſt. Ita quoque vis acceleratrix in vaſe $= \frac{mm}{bb} vdv : \frac{m}{b} dx = \frac{mvdv}{bdx}$, quæ ducta in maſſam ha, dat vim motricem $= \frac{mavdv}{dx}$ ad aquam in vaſe propellendam, atque ſic ſumma trium iſtarum virium motricium per gurgitem, per tubum, & per vas, debet æquare vim motricem totalem p: unde hæc nobis reſultat æquatio $\frac{hh - mm}{2b} vv + \frac{hbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$. Eſto igitur, ut ante, p ipſum pondus columnæ aqueæ $= gha$, & fiat, ut in *Coroll.* 3, §. IX, $gz = \frac{1}{2} vv$, quibus ſubſtitutis, prodibit hæc æquatio $\frac{hh - mm}{b} z + \frac{hbdz}{dx} + \frac{madz}{dx} = ha$; ſeu $(hh - mm) zdx + (hhb + hma) dz = hhadx$, unde $dx = \frac{hhb + hma}{hha - hhz + mmz} dz$, quæ debite tractata & integrata per logarithmos, dabit $x = \left(\frac{hhb + hma}{hh - mm}\right) \times l \left(\frac{hha}{hha - hhz + mmz}\right)$; unde progrediendo ad numeros [aſſumendo $1 = lf$] $z = \left(\frac{hha}{hh - mm}\right) \times \left(1 - 1 : f^{(hh - mm)x : (hhb + hma)}\right)$.

Quod ſi aqua in vaſe [quod, brevitatis gratia, ſine tubo annexo tantum habeat foramen amplitudinis m] animetur gravitate g' diverſa a gravitate naturali g, invenietur $z = \frac{g'hha}{g(hh - mm} \times \left(1 - 1 : f^{(hh - mm)x : (hhb + hma)}\right)$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$; id quod dat caſum maximæ velocitatis, ad quam fluxus

convergit, erit $1 : f^{(hh - mm)x : (hhb + hma)} = 0$, adeoque $z = \frac{hha}{hh - mm}$ pro gravitate naturali g, quod omnino conforme eſt *Coroll.* 3, art. IX; atque ſi præterea m eſt infinite parvum reſpectu ipſius h, provenit $z = a$, prorſus ut habetur in *Coroll.* 1, §. X, quæ methodum egregie confirmant.

X I I.

Expendamus nunc caſum, ubi vas AF [Fig. 2] aqua non manet plenum, ſed pro menſura aquæ efluentis paulatim exinanitur, ejuſque ſuperficies AE continuo deſcendit.

Finge aquam in tubo horizontali percurriſſe longitudinem x, proinde ex eo effluxiſſe [ſuppono enim vas & tubum ab initio plenum eſſe] quantitatem aquæ $= mx$, hoc eſt = cylindro aqueo, cujus baſis eſt m & longitudo x. Quod ſi igitur in EF, ſumatur pars $EI = \frac{m}{h} x$, perſpicuum eſt, horizontalem HI, eſſe locum ſuperficiei ſupremæ, ad quam aqua deſcendit in vaſe, poſtquam aquæ pars mx effluxit per tubum. Reſtabit ergo in vaſe columna aquea $GI = ha - mx$, cujus pondus $g(ha - mx)$ jam eſt id ipſum quod vocavimus p. Sic itaque vis acceleratrix aquæ reſtantis in vaſe [quæ in §. XI generaliter inventa eſt $= \frac{mvdv}{hdx}$] ſi ducatur in maſſam aqueam, quæ nunc eſt $ha - mx$, habebimus vim motricem $= \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx)$, quæ competit aquæ per vas detrudendæ; unde jam colligendo tres vires per gurgitem, per tubum, & per vas, aggregatumque æquando ipſi p, hoc eſt, ipſi $g(ha - mx)$ lucrabimur hanc æquationem $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{hbvdv}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = g(ha - mx)$; ubi ſubſtituendo gdz pro vdv, & gz pro $\frac{1}{2} vv$, ut fecimus in *Coroll.* 3, §. IX, mutabitur noſtra æquatio in hanc aliam $\frac{hh - mm}{h} z + \frac{hbdz}{dx} + \frac{mdz}{hdx}(ha - mx) = ha - mx$; & multiplicando per hdx in hanc, $(hh - mm) zdx + hhbdz + mdz(ha - mx) = (hha - hmx)$

dx. Quæ vera est æquatio, ex qua si eruatur valor ipsius z, habebitur altitudo, per quam grave libere delapsum acquiret velocitatem quæsitam, nempe æqualem illi quam habebit aqua in tubo, postquam quantitas mx ex eo effluxit.

Potest autem æquatio inventa, in qua indeterminatæ permixtæ reperiuntur, per regulas nostras, ope Lemmatis mox sequentis integrari; atque ita innotescet valor ipsius z in terminis finitis. Interim hoc loco ei negotio diutius non est immorandum: sufficit mihi Problema reduxisse ad æquationem differentialem, utendo principiis pure mechanicis, quod an a quoquam alio ante me præstitum fuerit, haud recordor me unquam vidisse. Sciendum vero ipsissimam hanc æquationem inveniri per methodum virium vivarum; ita ut, & hoc nomine, usus illarum atque bonitas sese commendet contra Adversarios.

COROLLARIUM I.

Ut determinetur maxima velocitas liquoris effluentis, tum & ea in vase descendentis, ponendum est tantum $dz = 0$: quo facto, æquatio nostra suppeditabit $(hh - mm)z = hha - hmx$, proinde $z = \frac{hha - hmx}{hh - mm}$, quod cum adhuc ipsum x incognitum in se contineat, nihil quidem determinat, nisi valor ipsius z simul etiam ex æquatione generali eruatur.

COROLLARIUM II.

Si m sit valde parvum respectu ipsius h; æquatio generalis hanc induit formam $zdx + bdz = adx$; unde $dx = \frac{bdz}{a-z}$: quod dat $z = a - a : f^{x:b}$. Ergo ut in hoc casu z sit *maximum*, oportet x esse infinitum, & tunc fiet $z = a$; quod quidem ex ipso $dx = \frac{bdz}{a-z}$, seu ex $dx\,(a - z) = bdz$ statim colligi potest; faciendo enim propter maximum z ipsum $dz = 0$, erit etiam $a - z = 0$, ac proinde $z = a$. Unde iterum

rum liquet, in vase amplissimo, aquam per angustissimum tubum effluentem statim acquirere velocitatem maximam, ac postea semper æquabilem, atque æqualem ei quam grave libere cadens ex altitudine vasis acquireret, ut supra in *Coroll.* 1, §. X, invenimus; hoc quippe in casu, vas considerari potest tanquam semper plenum, quia, ob vasis infinitam quasi amplitudinem, respectu habito ad tubi angustiam, requireretur utique tempus etiam quasi infinitum, antequam in illo descendat aqua sensibiliter.

XIII.

Ecce nunc alium casum: Sit tubus [qui ab initio ante fluxum usque ad C aqua plenus ponitur,] indefinite continuatus, ita scilicet, ut descendente aqua in vase, nihil extra tubum effluere possit, sed semper quicquid liquoris ex vase descendit in tubum, id una cum eo quod jam inesse supponitur, junctim propulsum intra tubum fluere cogatur. Quæritur lex accelerationis & velocitas ipsa, pro quolibet spatio intra tubi cavitatem percurso? Vis acceleratrix in tubo hic etiam, ut in §. XI ostensum est, erit $= vdv : dx$; sed massa aquæ propellendæ nunc est $= mb + mx$, per quam vis acceleratrix $vdv : dx$ multiplicata, dat vim motricem in tubo $(mbvdv + mxvdv) : dx$, quæ translata ad amplitudinem vasis, dat vim motricem æquipollentem in vase $= (hbvdv + hxvdv) : dx$. Atque sic, conjunctis tribus viribus motricibus per gurgitem, per tubum & per vas; iisque æquatis vi motrici totali p, prodibit, pro vase semper pleno ab affluente nova aqua, hæc æquatio $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p = gha$ [conf. §. XI]: sed pro vase nihil novi liquoris accipiente, hæc altera $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = p = g(ha - mx)$, [conf. §. XII]: substituto gz pro $\frac{1}{2}vv$, æquatio prior dat hanc $(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx)dz = hhadx$; posterior vero hanc

(hh

$(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx - mmx)dz = (hha - hmx)dx$. Utraque autem æquatio integrari poteſt per Lemma ſupra promiſſum, quod nunc demonſtro.

XIV.

LEMMA.

Sit æquatio integranda, [& quidem ſine neceſſitatè ſeparandi indeterminatas] $\alpha zdx + (\beta + \gamma x)dz = (\varepsilon + \theta x)dx$; ſcribo y pro $\beta + \gamma x$, unde $dx = dy : \gamma$, & æquatio mutatur in hanc $\frac{\alpha}{\gamma} zdy + ydz = (\varepsilon + \theta x)dx$; qua multiplicata per $y^{\alpha:\gamma - 1}$ habebitur $\frac{\alpha}{\gamma} zy^{\alpha:\gamma - 1}dy + y^{\alpha:\gamma}dz = (\varepsilon + \theta x)dx \times y^{\alpha:\gamma - 1} = (\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma}(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1}\gamma dx$. Integrando prodibit $y^{\alpha:\gamma}z = \int((\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma}(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1}\gamma dx) = \frac{1}{\alpha}(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\varepsilon + \theta x) - \int(\frac{\theta}{\gamma\alpha}(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma}\gamma dx) = \frac{1}{\alpha}(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha}(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha}\beta^{\alpha:\gamma} + \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha}\beta^{\alpha:\gamma + 1}$. Notetur hic duos poſtremos terminos datos adjectos eſſe, more ſolito, ad rectificandam æquationem; ut nimirum evaneſcente x, etiam evaneſcat z. Dividatur nunc æquatio per $y^{\alpha:\gamma}$, hoc eſt $(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma}$, & emerget valor verus ipſius z, nempe $z = \frac{1}{\alpha}(\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha}(\beta + \gamma x) + (\frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha}\beta^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha}\beta^{\alpha:\gamma}) \times (\beta + \gamma x)^{-\alpha:\gamma}$.

XV.

Ut igitur hujus applicatio fiat ad priorem æquationem $(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx)dz = hhadx$, erit hic $\alpha = hh - mm$, $\beta = hhb + hma$, $\gamma = hh$, $\varepsilon = hha$ & $\theta = 0$, quibus ſurrogatis obtinebitur $z = \frac{hha}{hh - mm} - \frac{hha}{hh - mm}(hhb + hma)^{(hh - mm):hh} \times (hhb + hma + hhx)^{(-hh + mm):hh}$, vel quod idem eſt $z = \frac{hha}{hh - mm} \times (1 - (\frac{hb + ma}{hb + ma + hx})^{(hh - mm):hh})$. Sin vero ad poſteriorem, ubi $\alpha = hh - mm$, $\beta = hhb + hma$, $\gamma = hh - mm$, $\varepsilon = hha$, $\theta = -hm$, reſultat $z = \frac{hha - hmx}{hh - mm} + \frac{hm}{2(hh - mm)^2} \times (hhb + hma + hhx - mmx) + (\frac{-hm}{2(hh - mm)^2} \times (hhb + hma)^2 - \frac{hha}{hh - mm}(hhb + hma)) \times (hhb + hma + hhx - mmx)^{-1}$, quibus in ordinem digeſtis, rite procedendo, emerget tandem $z = (\frac{hhax - \frac{1}{2}hmxx}{hhb + hma + hhx - mmx})$.

Corollarium I.

Si m reſpectu h eſt valde parvum, habebitur pro vaſe ſemper pleno $z = \frac{ax}{b + x}$; pariter pro altero caſu prodit $z = \frac{ax}{b + x}$ quod quidem omnino ita evenire debet; quia enim, ob m infinite parvum, aqua tempore infinito opus habet ad effluendum, antequam ſuprema ejus ſuperficies in vaſe ampliſſimo ſenſibiliter deſcendat; patet utique perinde eſſe ac ſi ſemper plenum maneret vas, ac proinde hi duo caſus in eundem prorſus recidunt.

Corollarium II.

Si $b = 0$, hoc eſt, ſi in tubo horizontali indefinite longo FB, ab initio fluxus nihil aquæ continetur; erit pro caſu vaſis ſemper pleni $z = \frac{hha}{hh - mm} \times (1 - (\frac{ma}{ma + hx})^{(hh - mm):hh})$; ſed pro altero caſu nihil novi liquoris accipientis, erit $z =$

$\frac{bbax - \frac{1}{2}bmxx}{bma + bbx - mmx}$. In hoc poſtremo caſu hoc quoque notari dignum eſt, quod eo momento, quo ſuperficies liquoris ad fundum uſque vaſis deſcenderit, id quod fit ſumendo $x = \frac{b}{m}a$; futurum ſit $z = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, velocitas aquæ in tubo, poſt totalem vaſis depletionem, erit ea quam grave acquireret cadendo ex dimidia vaſis altitudine.

X V I.

De Canali trium pluriumve Tuborum.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 3.

Sit nunc (Fig. 3) canalis AL, conſtans tribus tubis AD, GC, BL, ac totus aqua plenus: Sitque vis motrix p, quæ expanſa uniformiter per ſuperficiem AE, eandem premat vel urgeat. Quæritur acceleratio & velocitas actualis, qua cum aqua ex tubo BL erumpit?

Ante omnia hic notandum, duos fieri gurgites breviſſimos, unum in tranſitu per GF, alterum in tranſitu per BK, qui ſinguli ſuam propriam requirunt vim motricem, transferendam ad amplitudinem AE, quibus dein addendæ ſunt vires motrices columnarum aquearum in ſingulis tubis contentarum, poſt tranſlationem earum virium ad amplitudinem AE: quo facto, ſumma omnium earum virium tranſlatarum æquanda eſt vi motrici totali p, unde reſultabit æquatio quæſita.

X V I I.

Sint igitur longitudines tuborum $AG = a$, $GB = b$, $BM = c$; eorumque amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$. Dicatur hic etiam velocitas in tubo ultimo $BL = v$, velocitas in tubo ſecundo $GC = u = \frac{n}{m}v$. Erit itaque, per ratiocinium §. IX adhibitum, vis motrix in ſuperficie AE, requiſita pro formando gurgite per $GF = \frac{hh - mm}{2h}uu = $ [ſubſtituendo valorem ipſius uu qui eſt $\frac{nn}{mm}vv$] $\frac{hhnn - mmnn}{2hmm}vv$; item vis motrix in tubo GC requiſita pro gurgite per BK $= \frac{mm - nn}{2m}vv$, hæc vero tranſlata ad amplitudinem AE, faciendo ut m ad h, ita $\frac{mm - nn}{2m}vv$ ad $\frac{hmm - hnn}{2mm}vv$, dat vim motricem in tubo primo AD, ad gurgitem producendum per BK, adeoque ambæ vires ſimul ſumptæ $\frac{hhnn - mmnn}{2hmm}vv + \frac{hmm - hnn}{2mm}vv$, hoc eſt $\frac{hhmm - mmnn}{2hmm}vv$, ſeu $\frac{hh - nn}{2h}vv = p$. Atque ita determinata eſt velocitas fluxus per tres tubos, poſtquam illa ad æquabilitatem pervenit.

C O R O L L A R I U M.

Hinc patet aquam per tres tubos eodem modo moveri, ac ſi, ſecundo remoto, tertius immediate primo eſſet adaptatus; poſito ſcilicet, fluxum ad ſummam & æquabilem velocitatem perveniſſe: imo porro nunc liquet, quotquot ſupponantur tubi, vires motrices per gurgites ſingulos tranſlatas ad tubum primum, & junctim ſumptas, æquivalere vi motrici unicæ in tubo primo adhibendæ ad gurgitem unicum, qui fieret, adaptando immediate tubum ultimum ad tubum primum; adeoque eandem, in utroque caſu, ſequi æquabilem velocitatem, ad quam convergit fluxus, ſive tranſeat aqua per totum canalem ex omnibus tubis compoſitum, ſive tantum omiſſis intermediis per primum & ultimum ſibi invicem immediate connexos. Omnia igitur, quæ ſupra de æquabili velocitate per duos tubos demonſtravimus, applicanda ſunt ad canalem ex quot libuerit tubis conſtantem.

X V I I I.

Conſideranda nunc venit acceleratio per canalem multorum tubo-

tuborum, quando nimirum fluxus aquæ incipit a quiete; primo tamen tubo ſemper pleno exiſtente, per affluxum novæ aquæ deſcendenti eadem velocitate ſuccedentis. Hanc in rem, nihil aliud faciendum, quam ut vis motrix pro maſſa aquea protrudenda per ſingulos tubos ſumpta, transferatur ad amplitudinem tubi primi; aggregatum harum virium motricium tranſlatarum, ſi addatur ad vim motricem per gurgites, hoc eſt, per illum unicum qui fieret ſi ultimus tubus immediate primo adaptetur; habebitur vis omnium, quæ æqualis eſt facienda ipſi p.

X I X.

Ut hanc regulam applicemus ad canalem trium tuborum, quorum longitudines ſint a, b, c; amplitudines h, m, n: ſitque x longitudo ſpatii quam aqua in tubo ultimo, ſeu tertio, ex quiete incipiens percurrit, & v velocitas acquiſita in hoc tubo. Erit, ad imitationem operationis §. XI, $\frac{n}{m}x$ longitudo quam aqua eodem tempore percurrit in tubo ſecundo, & $\frac{n}{m}v$ ejus velocitas acquiſita. Item $\frac{n}{h}x$ longitudo percurſa in tubo primo, & $\frac{n}{h}v$ velocitas acquiſita. Hinc vis acceleratrix in tubo tertio $= \frac{vdv}{dx}$, eaque multiplicata per maſſam aqueam in hoc tubo nc, dabit vim motricem $= \frac{ncvdv}{dx}$, quæ tranſlata in tubum primum, dabit æquipollentem $= \frac{hcvdv}{dx}$. Sic quoque vis acceleratrix in tubo ſecundo $= \frac{nn}{mm}vdv : \frac{n}{m}dx = \frac{nvdv}{mdx}$, quæ ducta in maſſam aquæ mb tubi ſecundi, dat vim motricem $\frac{nbvdv}{dx}$, quæ tranſlata in tubum primum, gignit $\frac{hnbvdv}{mdx}$. Sic tandem etiam vis acceleratrix in tubo primo $=$

$\frac{nn}{hh}vdv:$

$\frac{nn}{hh}vdv : \frac{n}{h}dx = \frac{nvdv}{hdx}$, ducta in maſſam tubi primi ha; dat vim motricem aquæ in tubo primo $= \frac{navdv}{dx}$, quæ cum jam ſit in tubo primo, ulterius non eſt transferenda; tres illæ vires ſunt igitur $\frac{hcvdv}{dx}$, $\frac{hnbvdv}{mdx}$, $\frac{navdv}{dx}$, quarum ſumma addita ad vim per gurgites, habebitur $\frac{hh - nn}{2h}vv + (hc + \frac{hnb}{m} + na)\frac{vdv}{dx} =$ vi totali p.

X X.

Sint nunc quatuor tubi, quorum longitudines a, b, c, e; amplitudines h, m, n, q, ſitque x longitudo in ultimo tubo percurſa, v velocitas acquiſita in ultimo tubo. Ad obſervandam uniformitatem, & legem progreſſionis ab uno tubo ad alterum, incipiam a primo, in quo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx$, eſt enim velocitas $= \frac{q}{h}v$, & elementum velocitatis $= \frac{q}{h}dv$, ut & elementum ſpatii percurrendi $= \frac{q}{h}dx$; habetur itaque ex lege accelerationis, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx = \frac{qvdv}{hdx}$ eamque multiplicando per maſſam aquæ movendæ, hæc oritur vis motrix $hqavdv : hdx$, quæ quia jam eſt in primo tubo, non indiget ulteriori tranſlatione; ſed in tubo ſecundo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{mm}vdv : \frac{q}{m}dx = \frac{qvdv}{mdx}$, ducta in maſſam aqueam mb, dat vim motricem in tubo ſecundo $mqbvdv : mdx$, quæ tranſlata in tubum primum, dat æquipollentem $= hqbvdv : mdx$; eodem modo vis motrix tranſlata ex tubo tertio in primum, erit $hqcvdv : ndx$, & vis motrix tranſlata ex quarto in primum $= hqevdv : qdx$. Omnes ergo ſimul ſumptæ $= \frac{hqavdv}{hdx} + \frac{hqbvdv}{mdx} + \frac{hqcvdv}{ndx} + \frac{hqevdv}{qdx}$

$=$

$=\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}+\frac{e}{q}\right)\times\frac{hqvdv}{dx}$. Ergo generaliter pro quocunque tuborum numero, quorum longitudines ſint a, b, c, . . . π, & amplitudines h, m, n, . . . ω, erit ſumma omnium virium motricium in tubum primum tranſlatarum $=\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}+\frac{e}{q}\ldots+\frac{\pi}{\omega}\right)\times\frac{h\omega vdv}{dx}$; cui ſi addatur vis motrix $\frac{hh-\omega\omega}{2h}vv$, pro gurgitibus univerſis, emerget vis motrix totalis ponenda æqualis ipſi p; unde reſultat hæc æquatio $\frac{hh-\omega\omega}{2h}vv+\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots\ldots+\frac{\pi}{\omega}\right)\times\frac{h\omega vdv}{dx}=p$; vel ſcribendo gz pro $\frac{1}{2}vv$, hæc altera $\frac{hh-\omega\omega}{h}z+\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots+\frac{\pi}{\omega}\right)\times\frac{h\omega dz}{dx}=\frac{1}{g}p$, vel $(hh-\omega\omega)zdx+\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots\ldots+\frac{\pi}{\omega}\right)hh\omega dz=\frac{h}{g}pdx$.

COROLLARIUM I.

Si longitudines a & π tuborum primi & ultimi, nec non ongitudines intermediorum manent invariabiles, primi nempe per continuum affluxum & ultimi per effluxum, erit ſeries $\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots\ldots+\frac{\pi}{\omega}$ conſtans, quæ vocetur M, & $p=gha$; unde hæc æquatio prodit $\frac{hh-\omega\omega}{h}z+\frac{Mh\omega dz}{dx}=ha$, vel $(hh-\omega\omega)zdx+Mhh\omega dz=hhadx$; cujus x conſtruitur per logarithmos in z datos, ipſum vero z, per numerales datos in x.

COROLLARIUM II.

Quod ſi vero, nulla affluente aqua nova, depleatur primus tubus, effluente nimirum per ultimum datæ longitudinis; ſicuti fieret

fieret, ſi primus tubus inſtar vaſis verticaliter erecti, contineret liquorem proprio ſuo pondere preſſum, dum per canalem horizontalem quem reliqui conſtituunt expelleretur: erit, ſi x vocetur ſpatium per ultimum tubum ex quiete percurſum, altitudo liquoris reſtantis in vaſe cylindrico $=a-\frac{\omega x}{h}$, adeoque a ſerie $\frac{a}{h}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\ldots\ldots+\frac{\pi}{\omega}$, auferendum jam eſt $\frac{\omega x}{hh}$ & pro $\frac{1}{g}p$ ſcribi debet $ha-\omega x$; id quod dat hanc æquationem $(hh-\omega\omega)zdx+Mhh\omega dz-\omega\omega xdz=(hha-h\omega x)dx$; quæ, per *Lemma* §. XIV, poteſt integrari.

COROLLARIUM III.

Porro ſi tubus ultimus ſit indefinite prolongatus, ita ut aquæ ſuperficie ſuprema deſcendente in vaſe, aqua ex tubo ultimo non quidem effluat, ſed in eo continuo magis magiſque protrudatur; ſcribendum eſt in ſerie, non tantum $a-\frac{\omega x}{h}$ pro a; ſed etiam $\pi+x$ pro π, & ita, pro hoc caſu, acquiremus hanc alteram æquationem $(hh-\omega\omega)zdx+Mhh\omega dz-\omega\omega xdz+hhxdz=(hha-h\omega x)dx$. Quæ per idem *Lemma* integrabilis eſt.

COROLLARIUM IV.

Si computando vas ipſum pro primo tubo, habeatur $\frac{a}{h}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}\ldots=\frac{\pi}{\omega}$, hoc eſt, ſi longitudines tuborum, quorum numerus ſit N, ubique ſint proportionales ſuis reſpective amplitudinibus; generalis noſtra æquatio mutatur in hanc $(hh-\omega\omega)zdx+Nha\omega dz=\frac{1}{g}hpdx$.

COROLLARIUM V.

Si vero, excepto vaſe vel tubo primo, habeatur $\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ldots = \frac{\pi}{\omega}$, ſitque numerus reliquorum tuborum $= N$, erit utique $(hh - \omega\omega) z dx + h a \omega dz + \frac{Nbh\omega dz}{m} = \frac{1}{g} hp dx$.

COROLLARIUM VI.

Eſto nunc numerus tuborum infinitus, ſed unuſquiſque eorum, excepto primo, longitudinis infinite parvæ, ita ut omnes ſimul ſumpti repræſentent canalem conoidicum truncatum, cujus amplitudo antica $= m$, & poſtica $= \omega$, qualis eſt (Figura 4) RSTV, qui ſi concipiatur ſectus duobus planis proximis sr, tv, ipſis SR, TV, parallelis, erit $srvt$ unus ex iſtis tubulis, habens pro longitudine rv elementum longitudinis RV totius canalis, & pro amplitudine planum sr. Unde ut habeatur ſumma ſeriei $\frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$, integrari debet $\frac{vr}{sr}$, quod in pluribus exemplis fieri poteſt algebraice, ex. gr. ſi ST ſit linea recta, hoc eſt, ſi SRVT ſit conus decurtatus ordinarius: Item ſi ST ſit arcus Hyperbolæ cujuſvis generis ad aſymptotum RV.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. Fig. 4.

XXI.

Illuſtremus rem ipſam in priori exemplo. Sit nempe SRVT conus decurtatus, cujus amplitudo antica $SR = m$, poſtica $TV = \omega$; proinde earum ſemidiametri ut $\sqrt{m}$ & $\sqrt{\omega}$: Porro dicatur ejus abſciſſa $Vv = t$; ejus elementum $vr = dt$; ſemidiameter amplitudinis $tv = y$; totaque tubi longitudo $RV = L$, invenietur $y = (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega}) : L$; ipſa vero amplitudo sr, quæ eſt ut yy, $= (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2 : L^2$; quare

quare $\frac{vr}{sr} = \frac{L^2 dt}{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}$; cujus integrale debito modo rectificatum $= \frac{Lt}{t\sqrt{m\omega} - t\omega + L\omega}$, adeoque per totum canalem RSTV, ſumendo nempe Vv, ſeu $t = VR = L$, habetur integrale quæſitum $= \frac{L}{\sqrt{m\omega}} = \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$. Atque ſic æquatio noſtra generalis §. XX, $(hh - \omega\omega) z dx + (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) hh\omega dz = \frac{h}{g} p dx$, dabit, pro canali ſeu tubo conico, cujus longitudo L, & duæ amplitudines extremæ ſunt m & ω, exiſtente vaſis altitudine a & amplitudine h, hanc æquat. $(hh - \omega\omega) z dx + h a \omega dz + \frac{hhL\omega dz}{\sqrt{m\omega}} = \frac{1}{g} hp dx$.

XXII.

Pro caſu *Coroll.* 1, §. XX, erit quoque $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz = hha dx$, ubi $M = \frac{a}{h} + \frac{L}{\sqrt{m\omega}}$. Pro caſu *Coroll.* 2, §. ejuſdem, erit ſumpto pro M eodem, $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz - \omega\omega x dz = (hha - h\omega x) dx$. Pro caſu *Coroll.* 3, intelligendum eſt tubum conicum, in extremitate ſibi adjunctum habere tubum cylindricum indeterminatæ longitudinis, & quidem amplitudinis ω, ita ut in eo aqua propulſa ſemper contineatur, atque percurrat ab initio motus ſpatium x; erit tunc $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz - \omega\omega x dz + hhx dz = (hha - h\omega x) dx$.

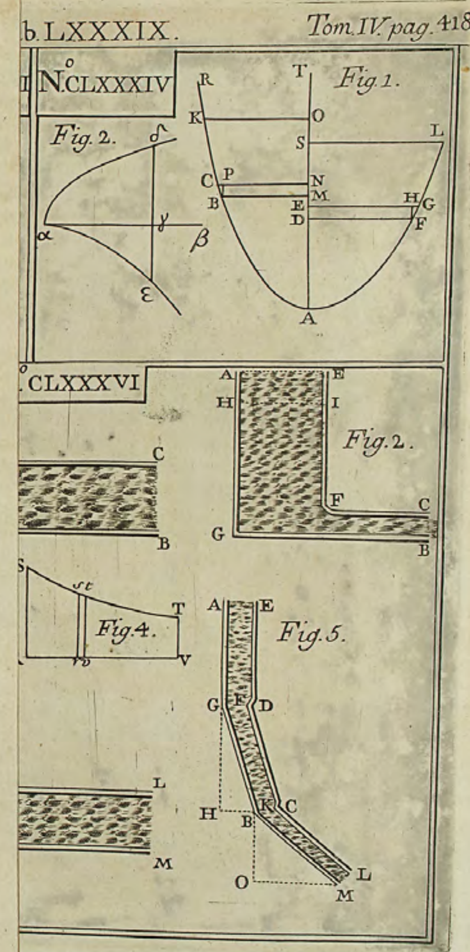
XXIII.

SCHOLIUM GENERALE.

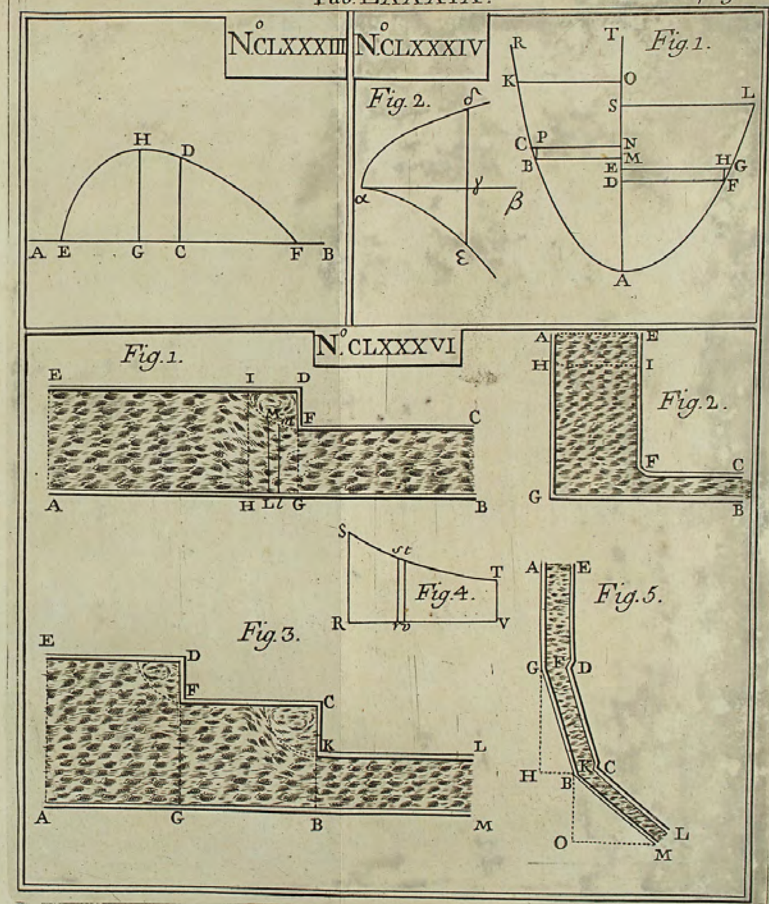
Poſſent ex his derivari plura alia Corollaria, utilia non minus quam curioſa & elegantia. Nam quæ ad hanc ſpectant materiam, omne ſuum fundamentum habent in jam traditis & explicatis; licet id non indicaverim expreſſis verbis: ex. gr. ſupposuimus quidem aquam, aliumve liquorem, in primo duntaxat tubo tanquam in vase gravitare, indeque urgeri per canalem situm horizontalem habentem, per quem dum movetur aqua, destituitur quasi sua propria gravitate. Interim si in ipso canali, seu in tubis qui illum componunt, retineat quoque gravitatem suam, sive totalem, sive saltem partem, sicuti accideret si tubi non essent horizontales, sed vel verticales, vel diversimode inclinati ad horizontem; id nullam prorsus habet difficultatem: potest enim aquæ propria gravitas ex quolibet tubo per §. II, transferri in vas vel in tubum primum, adeo ut aqua in reliquis tubis considerari possit tanquam destituta gravitate; sed translatæ gravitationes, una cum pondere aquæ in vase vel tubo primo junctim sumptæ, spectari queant pro eo quod vocavimus p, seu vim motricem fundamentalem, a qua fluxus totius massæ aqueæ generatur. Ut scilicet si canalis EGBL (*Fig.* 5) constaret tribus tubis diversæ amplitudinis AD, GC, BL, quorum primus AD haberet amplitudinem AE vel GD, alter GC, amplitudinem GF vel BK, tertius BL amplitudinem BK vel ML: primus vero esset verticalis, secundus faceret cum horizonte angulum GBH, tertius angulum BMO: Sint amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$; vis gravitatis seu acceleratrix naturalis $= g$, & vis motrix in tubo AD aqua pleno $= gh \times AG$. Item $GB : GH = g : \frac{g \times GH}{GB} =$ vi acceleratrici liquoris in tubo GC. Item $BM : BO = g : \frac{g \times BO}{BM} =$ vi acceleratrici aquæ in tubo BL. Hinc $\frac{g \times GH}{GB} \times m \times GB$, seu $gm \times GH$ dabit vim motricem aquæ tubi secundi, similiter $gn \times BO$ dat vim motricem aquæ in tubo tertio. Sed transferendæ jam sunt vires motrices ex tubis obliquis GC & BL in verticalem, faciendo $m : h = gm \times GH : gh \times GH$, & $n : h = gn \times BO : gh \times BO$. Hunc itaque in modum, considerari potest aqua universa in tubis tanquam carens gravitate, sed ejus loco pressa prima columna AD vi motrice expansa uniformiter

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 5.

per



in primo duntaxat
rgeri per canalem
m movetur aqua,
rim si in ipso cana-
neat quoque gravi-
tem, sicuti accide-
verticales, vel di-
m prorsus habet dif-
as ex quolibet tubo
num, adeo ut aqua
destituta gravitate;
re aquæ in vase vel
pro eo quod voca-
, a qua fluxus to-
nalis EGBL (*Fig.* 5)
AD, GC, BL,
AE vel GD, alter
amplitudinem BK
cundus faceret cum
BMO: Sint am-
; vis gravitatis seu
in tubo AD aqua
$\frac{\times GH}{GB}$ = vi accele-
BO = g : $\frac{g \times BO}{BM}$
$\frac{g \times GH}{GB} \times m \times GB$, seu
cundi, similiter $gn\times$
io. Sed transferen-
GC & BL in ver-
$\times GH$, & $n : h$ =
dum, considerari po-
gravitate, sed ejus
expansa uniformiter
per



N°. CLX

per ſuperficiem
=[ob AG+
ſit *A*] *gh* × *A*
que ſimiles ad
Nota; ſi u
erit, pro eo a
negativa, erit
ſumma ſuperat
bo, *A* erit exc
tubo altior eſt
ficies aquæ in t
ſecundum quam
cunque. Huc
poſitum, ante
ceptum.

PROB

ABCD eſt
lindricus, cujus p
per orificium GC
ita tantum, ut pars
penetret uſque ad
lentem preſſionem
concepto, pertinget
altitudo MP vel
valet?

Dicatur pars t
mitus aqua plena =
amplitudo tubi G
cumdans, & deor
tum HI ingredi &
HL ſuperincumbe

per ſuperficiem AE, quæ vis eſſet $= gh(AG + GH + BO)$ $=$ [ob $AG + GH + BO =$ toti altitudini verticali canalis, quæ ſit A] $gh \times A = p$. Atque ita reduximus hunc caſum alioſque ſimiles ad Methodum noſtram generalem.

Nota; ſi unus pluresve ex tubis oblique ſurſum dirigatur; erit, pro eo aut pro iis, vis motrix translata in tubum primum negativa, eritque ſumenda pro A exceſſus quo affirmativarum ſumma ſuperat ſummam negativarum, aut viciſſim. Uno verbo, A erit exceſſus vel defectus quo ſuperficies aquæ in primo tubo altior eſt humiliorve ſupra horizontalem, quam eſt ſuperficies aquæ in tubo ultimo. Hoc inſervit determinationi legis ſecundum quam liquores oſcillantur in tubis recurvis qualibuſcunque. Huc etiam refer Problema ſequens a Filio mihi propoſitum, ante ſex ſeptemve annos, ſed paulo generalius conceptum.

XXIV.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

ABCD eſt vas aqua plenum uſque ad EF; GI eſt tubus cylindricus, cujus pars KI aqua pariter plena eſt: Obducto pollice ſuper orificium GO, tubus immergitur aquæ in vaſe contentæ, ſed ita tantum, ut pars tubi MI, major quam KI, intra aquam externam penetret uſque ad MN: Remoto nunc pollice, aſcendet [ob prævalentem preſſionem aquæ externæ] ſuperficies KL, atque ab impetu concepto, pertinget ſupra ſuperficiem EF uſque ad PQ. Quæritur altitudo MP vel NQ, quouſque nempe aqua in tubo aſcendere valet? TAB. XC. Fig. 6.

SOLUTIO.

Dicatur pars tubi immerſa $HM = a$, pars ejus HK primitus aqua plena $= b$ minor quam a, amplitudo vaſis $EF = h$, amplitudo tubi GO, vel $HI = m$. Jam vero aqua tubum circumdans, & deorſum nitens ſuo pondere, per orificium apertum HI ingredi & aſcendere conatur, propellendo partem aquæ HL ſuperincumbentem. Actionem iſtam, atque effectum hoc modo concipio. Sit ad orificium HI adaptatus alius tubus deorſim ſpectans, amplitudinis vaſis EF $=h$, & altitudinis HM $=a$. Sit hic tubus plenus aqua, ſed tali aqua, quæ levitaret, hoc eſt, quæ ſurſum niteretur, & quidem tanta vi præciſe quanta deorſum gravitat aqua [cujus loco illa in tubo per mentis fictionem ſubſtituitur] in vaſe altitudinis MH: proinde erit vis motrix aquæ in hoc fictitio tubo ſurſum tendentis $=gha$, & ſic, hujus reſpectu, erit vis motrix in tubo HO aquæ HL negativa $=gmb$, quæ translata in tubum fictitium dat gbb, quæ utpote contraria ipſi gha, ab hac ſubducenda eſt, & relinquet $gha - ghb$, ſeu $gh(a-b)$ pro vi motrice quam vocavimus p; cui igitur æquandæ ſunt vires motrices, quæ a fluxu generantur per gurgitem formandum ad ingreſſum HI, per tubum HO fluendo, & per tubum fictitium aſcendendo. Hinc, ſi x vocetur ſpatium ab aqua intra tubum HO percurſum, incipiendo a KL, adeoque ſpatium quod ſuperficies aquæ in tubo fictitio percurrit aſcendendo $=\frac{m}{h}x$; ad imitationem ratiocinii §. XIII, habebimus vim acceleratricem in tubo HO $=\frac{vdv}{dx}$, quæ, multiplicata per maſſam aquæ ſurſum pellendæ $mb+mx$, dat vim motricem in hoc tubo $=(mb+mx)\frac{vdv}{dx}$, transferendam in tubum fictitium, ut inde habeamus vim motricem æquipollentem $=(hb+hx)\frac{vdv}{dx}$. Et cum præterea in tubo fictitio [in quo aqua aſcendit velocitate $\frac{m}{h}v$ per ſpatium $\frac{m}{h}x$] vis motrix propria, non amplius transferenda, ſit $=(ha-mx)\frac{mvdv}{hdx}$, quibus ergo binis viribus, addita porro ea quæ ad formandum gurgitem requiritur, obtinebimus vim motricem totalem $\frac{hh-mm}{2b}vv+(hb+hx)\frac{vdv}{dx}+(ha-mx)\frac{mvdv}{hdx}$. Verum quia hic p eſt $=gh(a-\frac{m}{h}x-b-x)$ ſeu $g(ha-hb-mx-hx)$, reſultabit

reſultabit æquatio pro determinanda velocitate v, nempe hæc $\frac{hh-mm}{2b}vv+(hb+hx+ma-\frac{mm}{h}x)\frac{vdv}{dx}=g(ha-hb-mx-hx)$; qua reducta, ſcriptoque gz pro $\frac{1}{2}vv$, fiet $(hh-mm)zdx+(hhb+hhx+hma-mmx)dz=(hha-hhb-hmx-hhx)dx$, quæ per *Lemma* §. XIV eſt integrabilis. Si vas AC, vel tubus fictitius, eſt amplitudinis per quam magnæ, [qui Problematis tacitus eſt ſenſus] emergit æquatio multo ſimplicior [neglectis nempe terminis in quibus m reperitur, cæteriſque per hh diviſis] ſcilicet hæc $zdx+(b+x)dz=(a-b)dx-xdx$; quæ integrata dat $(b+x)z=(a-b)x-\frac{1}{2}xx$, unde ſi $z=0$, hoc eſt, ſi ſuperficies KL ceſſat aſcendere, id quod fit, quando ad maximam, quouſque aſcendere poteſt, altitudinem PQ pervenit; oportet ut tunc etiam $(a-b)x-\frac{1}{2}xx$ ſit $=0$, quocirca $a-b=\frac{1}{2}x$, ſeu $x=2a-2b$; ergo KP $=2$KM.

XXV.

Idem Problema ſolvi poteſt facilius, ſi conſideretur tanquam
caſus §. XIII. Concipiendo ſcilicet in *Fig.* 2 vas AF aqua ple- TAB.
num ab initio fluxus habere altitudinem $=a=$ MH in *Fig.* 6, LXXXIX. N°.
& tubum FC, qui in *Fig.* 2 eſt horizontalis, jam eſſe verticali- CLXXXVI
ter erectum, atque indefinite continuatum, in quo pars infima *Fig.* 2.
longitudinis $b=$ HK, in *Fig.* 6, ſit ab initio aqua plena. Jam TAB. XC.
ergo, ſi a prævalente preſſione columnæ aqueæ in vaſe, aqua in *Fig.* 6.
tubo ſupra b aſcendit per ſpatium $=x$, & proin in vaſe deſcendit per ſpatium $\frac{m}{h}x$, habebimus vim motricem in vaſe oriundam a pondere ſuperſtitis aquæ $=g(ha-mx)$, ac vim motricem in tubo verticali, priori oppoſitam, a pondere totius aquæ in tubo exiſtentis venientem $=g(mb+mx)$, quæ translata in vas dat $g(hb+hx)$, a priori $g(ha-mx)$ ſubtrahendum, & ita relinquetur $p=g(ha-hb-hx-mx)$, cui æquari debet ſumma trium virium motricium a motu generandarum per gurgitem, per tubum & per vas, ut inveni-

 mus

mus §. XIII; quo facto, hæc ſuppeditatur æquatio $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{(bbvdv + bxvdv)}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = p = g(ha - hb - hx - mx)$; quæ, conjunctis conjungendis, hanc habebit formam $\frac{hb - mm}{2b} vv + (hb + hx + ma - \frac{mmx}{h}) \frac{vdv}{dx}, = g(ha - hb - hx - mx)$, prorſus eandem quam modo ſupra invenimus.

XXVI.

Ex Theoria noſtra hucuſque expoſita, reddi poteſt ratio phyſica [quam nec NEWTONUS, nec quiſquam alius recte dedit, ex principiis nempe pure dynamicis] cur ſcilicet corpus cylindricum ſolidum, quod uniformiter movetur, baſi ſua antrorſum verſa, in fluido continuo infinito ejuſdem cum corpore denſitatis, offendat reſiſtentiam æqualem ponderi corporis cylindrici; poſito nimirum, velocitatem corporis eſſe æqualem illi quam grave, libere cadendo, ex altitudine æquali lateri cylindri poſſet acquirere. Ex pluribus, quæ mihi ſunt, demonſtrationibus, hanc dare lubet Theoriæ noſtræ Hydraulicæ in hoc ſcripto ſtabilitæ innixam.

TAB. XC. *Fig.* 7. Sit (Fig. 7) cylindrus RMNS, qui moveatur ſecundum directionem lateris MN, in fluido ſtagnante, æque denſo, continuo & infinito. Dicatur velocitas cylindri $= v$, latus MN $= a$, baſis ſeu amplitudo NS $= h$. Fingamus loco cylindri ſolidi eſſe tubum MS eadem materia fluida plenum, & per hunc tubum quieſcentem [ubi præter figuram nihil aliud conſidero] fluere, continua & æquabili velocitate v, integrum cylindrum fluidum, ita ut tubus ſemper plenus maneat, & quantum per NS effluit, tantundem per MR eadem promptitudine reſarciatur per novum affluxum; attendenti fit ſtatim manifeſtum, cylindrum hunc fluidum, in effluxu per NS, eandem prorſus offendere vim reſiſtentem, ab allapſu ad fluidum ſtagnans externum & motui oppoſitum, quam offenderet ipſe cylindrus ſolidus; quia cylindrus fluidus, dum movetur per tubum, haberi

poteſt

poteſt pro ſolido, cæteræque omnes circumſtantiæ ſunt pares. Videndum ergo eſt ſolum modo, quanta ſit reſiſtentia quam patitur fluidum egrediens in ipſo egreſſus momento. Verum evidens eſt, hanc reſiſtentiam oriri a gurgite TNSV, qui formatur pone orificium tubi NS; cujus gurgitis figura hæc eſſe debet, ut, in diſtantia quantumvis parva, habeat aſymptoton FG perpendicularem ad directionem axis tubi; propterea quoniam, ob decreſcentem promptiſſime & omnino evaneſcentem motum fluidi egreſſi, amplitudines gurgitis viciſſim accreſcere, ac breviſſimo tempore veluti in infinitum dilatari debent: ſuppono enim fluidum ex tubo egrediens non eſſe permiſcibile cum altero extra ſtagnante. Hinc per ea quæ §. IX demonſtrata ſunt, & quia ultima velocitas in gurgite eſt $= v$; erit vis per gurgitem $= \frac{1}{2} hvv$: adeoque, ob conſtantem velocitatem in tubo, erit per *Coroll.* 2 §. IX, $\frac{1}{2} hvv = p = gha$, hoc eſt $\frac{1}{2} vv = ga$; hinc ſcribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, erit $z = a$. Oporret ergo velocitatem requiſitam fluidi in tubo, ad id ut fiat reſiſtentia æqualis ponderi cylindrici, eam eſſe debere, quam acquireret grave libere cadens ex altitudine $= a$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Ex demonſtrata hac fundamentali proprietate [antea nondum ſatis accurate ſtabilita] ſequuntur ultro omnia, quæ de reſiſtentiis fluidorum continuorum & non elaſticorum vulgo traduntur: Scilicet reſiſtentiæ, in hujuſmodi fluidis, perpendiculariter in plana oppoſita corporum exercitæ, ſunt in ratione compoſita ex duplicata velocitatis relativæ & ſimplici denſitatis fluidi. Ex hoc denique reliqua deducuntur.

XXVII.

De preſſione fluidi in fundum vaſis cylindrici (ſine annexo tubo) per foramen effluentis.

Eſto [Fig. 8) vas cylindricum AF fluido conſtanter plenum, cujus amplitudo AE $= h$, longitudo AG vel EF $= a$, am- TAB. XC. *Fig.* 8.

plitudo

plitudo foraminis GB $= m$. Habeat fluidum in egressu, postquam aliquandiu jam effluxit, velocitatem $= v$, ideoque in ipso vase velocitatem $= \frac{m}{b} v$. Sit GL longitudo cylindri cujus basis m, qui cylindrus designet quantitatem fluidi jam egressi $= x$. Sit nunc porro velocitas post futura $= u$, & longitudo prædicti cylindri fluidi ulterius egressuri $= y$; adeoque longitudo totalis tam egressi quam egressuri $= x + y$. Concipiamus autem fluidum carere omni gravitate, ac proin nullam aliam habere vim premendi fundum, quam eam quæ a motu pendet: Hæc vis offendit resistentiam æqualem ab oppositione fundi, ob æqualitatem inter actionem & reactionem. Resistentia vero invenitur, si more solito quæratur vis retardatrix, quæ velocitatem columnæ fluidi imminuit, illaque multiplicata per massam columnæ, id est, per ha, dabit resistentiam vel pressionem in fundum. Rem ita perago: Æquatio §. XI exposita $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$, in præsenti casu [ubi longitudo tubi, utpote absentis, $b = 0$, & pondus columnæ fluidi in vase $p = 0$] mutatur in hanc æquationem particularem $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{mavdv}{dx} = 0$; & ponendo u pro v in hanc similem $\frac{hh - mm}{2h} uu + \frac{maudu}{dx} = 0$.

XXVIII.

Per reductionem, & scribendo dy pro dx [nunc enim x est constans, dum $x + y$ est longitudo indeterminata & variabilis cylindri fluidi egredientis) provenit æquatio sub hac forma $\frac{hh - mm}{2h} dy + \frac{madu}{u} = 0$; atque integrando $\frac{hh - mm}{2h} (x + y) + malu = malv + \frac{hh - mm}{2h} x$. Hoc ita scribo adjiciendo duos postremos terminos constantes, rectificationis gratia, eum in finem, ut evanescente y & incipiente u ab v ipsa

ipsa æquatio fiat identica. Habebitur itaque $mal\left(\frac{u}{v}\right) = -\left(\frac{hh - mm}{2h}\right) y$; unde transeundo ad numeros, & ponendo $1 = lf$, oritur $uu = vvf^{-(hh - mm)y : hma}$.

XXIX.

Differentiando probe inventam hanc æquationem [sumpto nimirum v pro constante,] habebitur $udu = -vvdy \left(\frac{hh - mm}{2hma}\right) : f^{(hh - mm)y : hma}$. Est autem in vase vis acceleratrix negativa, hoc est, abit illa in vim retardatricem $-\frac{mudu}{hdy}$; quæ itaque erit $= vv\left(\frac{hh - mm}{2hha}\right) : f^{(hh - mm)y : hma}$.

XXX.

Hæc vis, quæ nobis usui est in primo tantum momento post abolitionem vel cessationem suppositam gravitatis quam antea columna fluidi in vase verticaliter erecto habebat, erit utique $y = 0$, & $vv = 2gz$; adeoque vis illa inventa erit $= gz \left(\frac{hh - mm}{hha}\right)$, vid. Art. XI, ubi $z = \left(\frac{hha}{hh - mm}\right) \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)x : hma})$, ac proinde multiplicando per massam fluidi ha, habetur resistentia vel pressio in fundum $= gha(1 - 1 : f^{(hh - mm)x : hma})$ a solo motu fluidi oriunda; cui si præterea addatur pondus columnæ fluidi gha, quod in situ verticali constanter agit in fundum, seu moveatur fluidum seu quiescat, prodibit pressio totalis $= gha + gha(1 - 1 : f^{(hh - mm)x : hma})$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$, erit pressio totalis $= gha + gha : f^{\circ} = 2gha$. Est enim $f^{\circ} = 1$. Si vero $x = 0$, pressio fundi erit $= gha$

$+gha\,(1 - 1) = gha$; quod vel hinc quoque patet verum esse, quia ab initio fluxus, solum pondus cylindri fluidi agit in fundum, postea, crescente x, crescit etiam pressio; ita tamen ut nunquam attingat $2gha$, nedum excedat; tametsi eo propinquet data quavis quantitate propius.

SCHOLIUM.

Ne quis autem credat, ponderosum liquorem in vase aliter forsan premere fundum, cum ipse movetur, quam cum quiescit: non obstante quod contrarium facile pateat attendenti ad naturam virium immaterialium, ut est gravitatis causa extra corpus considerata, quæ vires agunt in instanti per totam massam animandam, adeoque eodem modo agunt, eandemque pressionem exercent in obstaculum, ac si liquor gravis ei incumbens quiesceret. Probabo tamen per calculum rei veritatem in nostro casu. Statim utique liquet, liquorem gravem descendendo in vase accelerari; debet autem ejus vis motrix, quantacunque illa sit, duas habere partes, quarum una destinatur ad vim retardatricem a fundo oppositam contra ponderandam, altera vero pars residua impenditur in accelerationem descensus actualis. Hæc vero posterior illa ipsa est, quæ habetur ex æquatione §. XI petenda, nempe $z = \frac{hha}{hh - mm} \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)\,x : hma})$, quam differentiando, & per g multiplicando, habebimus $g\,dz = v\,dv = \frac{h}{m}\,g\,dx : f^{(hh - mm)\,x : hma}$; idcirco vis acceleratrix residua in vase, seu $\frac{mv\,dv}{h\,dx} = g : f^{(hh - mm)\,x : hma}$; cui si addatur vis quam destruit retardatrix supra inventa $g\,(1 - 1 : f^{(hh - mm)\,x : hma})$, faciunt simul vim acceleratricem $= g$, ideoque passionem a pondere oriundam $= gha$, hoc est $=$ ipsi ponderi. *Q. E. D.*

Atque ita procedendum erit in reliquis casibus, ubi unus pluresve tubi adaptati sunt vasi, ut scilicet, ante omnia, quæratur vis retardatrix ad fundum alicujus ex tubis datis, supponendo fluidum

dum subito amittere suam gravitatem, atque tum vi retardatrici inventæ addatur pressio a solo pondere fluidi proveniens, [considerando illud tanquam in quiete constitutum & stagnans] atque propagata, vel immediate ad primum fundum, vel mediate per præcedentes tubos, ad quodcunque cupimus fundum.

APPENDIX.

Adumbratio calculi instituendi, pro determinandis singulari modo velocitatibus aquæ per plures tubos ex uno in alterum fluentis, acsi seorsim per singulos solitarios effluerent; atque hinc inveniendis pressionibus in fundum singulorum exercitis.

In antecessum monere oportet, nos hic supponere canalem compositum ex variis tubis ad se invicem adaptatis, qualemcunque habentibus situm, verticalem, horizontalem, vel inclinatum. Supponimus porro, canalem aquæ constanter plenum esse, fluxumque pervenisse ad æquabilitatem; dum tantum liquoris effluit ex quolibet tubo, quantum necesse est ad suppeditandum tubo proxime inferiori, ut adeo unusquisque constanter plenus esse, atque singuli ita considerari queant, ac si essent solitarii & seorsim positi.

Sit longitudo tubi primi & supremi $= a$, secundi proxime inferioris $= b$, tertii $= c$, &c. amplitudo primi $= h$, secundi $= m$, tertii $= n$, quarti $= q$, &c. foramen tubi primi $=$ amplitudini tubi secundi $= m$, foramen secundi $= n$, foramen tertii $= q$, &c. Gravitas naturalis $= g$, gravitas naturalis in diversis directionibus obliquis $= \gamma', \gamma'', \gamma'''$, &c. Sit vero gravitas, ex actione mutua in tubis adaptatis oriunda, pro vase seu tubo primo $= g'$, pro secundo $= g''$, pro tertio $= g'''$, &c.; Longitudo cylindri aquei egressi per foramen primum $= x'$, ea per secundum $= x''$, per tertium $= x'''$, &c. altitudo unde grave naturale delapsum acquirit velocitatem aquæ egredientis per

 fora-

foramen primum $= z'$, ea quæ per ſecundum $= z''$, per tertium $= z'''$, &c.

His itaque poſitis, & reliquis ut ſunt in Scripto hydraulico; habetur utique pro tubis ad ſe invicem adaptatis per translationem virium, & quidem pro canali duorum tuborum $gha + \gamma' hb = g'ha + g''hb$, vel $ga + \gamma' b = g'a + g''b$; pro canali trium tuborum $ga + \gamma' b + \gamma'' c = g'a + g''b + g'''c$. Has æquationes voco fundamentales.

Porro clarum eſt haberi $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, &c: Item $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$, &c: Habentur autem per §. XI, æquationes ſequentes, pro tubis ſolitariis verticaliter erectis.

Pro tubo primo, $g(hh - mm) z' dx' + ghmadz' = g'hhadx'$

. . . . ſecundo, $g(mm - nn) z'' dx'' + gmnbdz'' = g''mmbdx''$

. . . . tertio, $g(nn - qq) z''' dx''' + gnqcdz''' = g'''nncdx'''$,

& ita deinceps.

Nota ſi quis ex tubis eſſet horizontalis, in æquatione fundamentali evaneſceret γ ad ipſum pertinens, ſic ex. gr. ſi tres eſſent tubi, quorum primus tantum verticalis, ſed reliqui duo horizontales, foret æquatio fundamentalis hæc, $ga = g'a + g''b + g'''c$, ſin vero omnes tres eſſent verticales, hæc haberetur fundamentalis $g(a + b + c) = g'a + g''b + g'''c$. Quod nunc in hac inveſtigatione palmarium eſt, oportet definire vires gravitatum g', g'', g''', &c. ex mutua actione gravitatis naturalis reſultantium, unde poſtea tam velocitates, quam preſſiones in fundo tuborum innoteſcent. Hoc autem ita perago. Ad imitationem operationis adhibitæ in §. XI, invenietur pro ſingulis tubis ut ſequitur.

Pro tubo primo $z' = \frac{g'}{g} \left(\frac{hha}{hh - mm} \right) \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)x' : hma})$

Pro tubo ſecundo $z'' = \frac{g''}{g} \left(\frac{mmb}{mm - nn} \right) \times (1 - 1 : f^{(mm - nn)x'' : mnb})$

Pro tubo tertio $z''' = \frac{g'''}{g} \left(\frac{nnc}{nn - qq} \right) \times (1 - 1 : f^{(nn - qq)x''' : nqc})$

Atque ſic porro.

Quo-

Quoniam itaque z', z'', z''', ut &, x', x'', x''' per ſe invicem dantur, eſt enim $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, atque $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$; ſubſtituantur valores ſingulorum z & x per unum expreſſos, & habebuntur tot æquationes, una pauciores, quot ſunt tubi, vel quot ſpecies gravitatis g', g'', g''', &c. nempe ex. gr. pro tribus, ſervato z' ad quod reliqua z'', z''' ſunt reducenda, ut & x'', x''' ad ſervatum x': habebuntur hæ duæ æquationes:

z' vel $\frac{g'}{g} \left(\frac{hha}{hh - mm} \right) \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)x' : hma}) = \frac{nn}{mm} z''$

vel $\frac{nng''}{mmg} \left(\frac{mmb}{mm - nn} \right) \times (1 - 1 : f^{\frac{mm - nn}{mnb} \times \frac{n}{m} x'}})$, idemque illud primum etiam $= \frac{qqg'''}{mmg} \left(\frac{nnc}{nn - qq} \right) \times (1 - 1 : f^{\frac{nn - qq}{nqc} \times \frac{q}{m} x'})$.

Sed cum tres ſint quærendæ gravitatis ſpecies g', g'', g''', alia adhuc requiritur æquatio ad determinationem Problematis. Hæc autem peti debet ex æquatione fundamentali $ga + \gamma' b + \gamma'' c = g'a + g''b + g'''c$, aut [ſiquidem duo tubi ſupponuntur horizontales] ex hac tantum $ga = g'a + g''b + g'''c$, evaneſcunt enim γ', γ''.

Faciamus applicationem, brevitatis gratia, ad caſum ſimpliciſſimum, duorum tuborum aqua conſtanter plenorum, quorum primus ſit verticalis, alter horizontalis; ponamuſque fluxum perveniſſe ad uniformitatem, hoc eſt, x', x'', &c. eſſe $= \infty$. Prodibit una æquatio ex z' petita $g' \left(\frac{hha}{hh - mm} \right) = \frac{nng''}{mm} \left(\frac{mmb}{mm - nn} \right)$, altera vero ex fundamentali $ga = g'a + g''b$; ex quibus rite procedendo, elicitur $g' = \frac{gnn(hh - mm)}{mm(hh - nn)}$ & $g'' = \frac{ghha(mm - nn)}{mmb(hh - nn)}$.

Hinc omnia reliqua derivantur, nempe $z' = \frac{hhnna}{mm(hh - nn)}$ & $z'' = \frac{hha}{hh - nn}$, prorſus conſentanea iis quæ ſupra demonſtrata dedimus. Item preſſiones in fundum cujuſlibet tubi facillime eruuntur; quia enim ſinguli tubi conſiderari poſſunt tanquam eſſent ſolitarii, adhiberi debet formula, quam invenimus

Ppp 3 ſupra

ſupra pro tubo primo & unico, ſcribendo tantum litteras quæ cuilibet alii tubo, tanquam unico ſeu ſolitario conſiderato, conveniunt. Cum itaque pro illo unico inventa ſit preſſio totalis $= gha + gha(1 - 1 : f^{(bb - mm)x : bma})$, ſcribendum hic erit pro tubo primo, preſſio totalis $= g'ha + gha \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x' : bma})$; pro ſecundo $= g''mb + gmb(1 - 1 : f^{(mm - nn)x'' : mnb})$; pro tertio $= g'''nc + gnc \times (1 - 1 : f^{(nn - qq)x''' : nqc})$, atque ſubſtitutis valoribus ipſarum g', g'', g''', vel quia applicationem facimus ad duos tantum tubos, & quidem ubi $x = \infty$, nonniſi valores ipſarum g' & g'' ſubſtitui debent; qui ſunt $g' = gnn(hh - mm) : mm(hh - nn)$ & $g'' = ghha(mm - nn) : mmb(hh - nn)$, habebitur preſſio prima $= 2gha \times \frac{nn(hh - mm)}{mm(hh - nn)}$, & preſſio ſecunda $= \frac{2ghha}{m} \times \frac{mm - nn}{hh - nn}$. Si præterea $h = \infty$, ſed m & $n =$ finito, erit preſſio prima $= 2gha \times \frac{nn}{mm} = \infty$, ut fieri par eſt, ſed preſſio ſecunda $= \frac{2ga}{m} \times (mm - nn) =$ finito.

Hac methodo probe obſervata, invenientur pro 5 tubis gravitates $g', g'', g''', g^{IV}, g^{V}$, ut ſequitur

$$
\begin{aligned}
g' &= ghhssa(hh - mm) : hhmma(hh - ss)\\
g'' &= ghhssa(mm - nn) : mmnnb(hh - ss)\\
g''' &= ghhssa(nn - qq) : nnqqc(hh - ss)\\
g^{IV} &= ghhssa(qq - rr) : qqrrd(hh - ss)\\
g^{V} &= ghhssa(rr - ss) : rrsse(hh - ss)
\end{aligned}
$$

Ex hoc laterculo, plus ſatis elucet lex progreſſionis pro quocunque numero tuborum. Adeoque in canali conoidico truncato [*Fig.* 9] FB, vaſi cylindrico AF adaptato, qui canalis conſideratur tanquam conflatus ex innumeris tubis infinite parvæ longitudinis, invenietur, pro qualibet amplitudine NO, ſpecies gravitatis,

TAB. X C. *Fig.* 9.

vitatis, qua ſtratum aquæ infinite parvæ craſſitiei animatur, quando ad æquabilem fluxum pervenerit: dicendo enim amplitudinem NO $= y$, craſſitiem ſtrati aquei $= dx$, reliquaſque litteras adhibendo, quas hactenus uſurpavimus, erit gravitas animans hoc ſtratum $= \frac{ghh\omega\omega a \times 2y\,dy}{y^4 dx(hh - \omega\omega)} = \frac{ghh\omega\omega a \times 2dy}{y^3 dx(hh - \omega\omega)}$. Proin pondus ipſum hujus ſtrati, ſeu preſſio qua urgetur, prodibit ſi multiplicatur per quantitatem materiæ $y\,dx$, erit igitur hæc preſſio $= \frac{ghh\omega\omega a \times 2dy}{yy(hh - \omega\omega)}$. Huic autem addendæ ſunt preſſiones omnium ſtratorum ſequentium, ab O uſque ad extremum B, ſed per translationem ad locum O collectæ, ſicuti poſtulat methodus noſtra ab initio expoſita. Hunc in finem ponatur tantiſper y conſtans, & alia amplitudo variabilis RS $= t$, erit hujus ſtrati $t\,dx$ preſſio $= \frac{ghh\omega\omega a \times 2dt}{tt(hh - \omega\omega)}$ quæ transferatur ad locum invariabilem NO, faciendo ut t ad y, ita $\frac{ghh\omega\omega a \times 2dt}{tt(hh - \omega\omega)}$ ad $\frac{ghh\omega\omega ay \times 2dt}{t^3(hh - \omega\omega)}$, cujus integrale debite correctum dat $\frac{ghh\omega\omega ay}{\omega\omega(hh - \omega\omega)} - \frac{ghh\omega\omega ay}{tt(hh - \omega\omega)}$; ubi nunc ponendo $t = y$, habetur $\frac{ghha(yy - \omega\omega)}{y(hh - \omega\omega)} =$ preſſioni totali, qua nimirum aqua in NO comprimitur. Ut igitur reperiatur z, altitudo cylindri aquei cujus baſis eſt y, & pondus æquale huic preſſioni, faciendum eſt $gyz = \frac{ghha(yy - \omega\omega)}{y(hh - \omega\omega)}$, unde $z = \frac{hha(yy - \omega\omega)}{yy(hh - \omega\omega)}$. Ad hanc itaque altitudinem NM, hærebit aqua in fiſtula in loco N inſerta. Notandum vero, canalem FPBG conſiderari tanquam habentem diametros amplitudinum maximæ FP & minimæ CB ſatis parvas reſpectu longitudinis PB, ut nimirum hoc modo tangens curvaturæ FNG, in quolibet puncto N, faciat angulum acutiſſimum cum horizontali PB, ne alias, ex alliſione aquæ inter movendum ad canalis latus nimis curvum FNC, oriatur nova vis preſſionis [quam hic tanquam accidentalem neglex imus] quæ priori ſuperveniens, augeret

geret altitudinem NM; quemadmodum id revera accidit, ſi canalis FB deſinit in laminam perforatam foramine amplitudinis ω, cui laminæ aqua perpendiculariter impingens augere poteſt compreſſionem in partibus foramini vicinis; in remotioribus augmentum illud minus fit ſenſibile, variatque prout poſtulat curvatura gurgitis, quam autem a peculiari qualitate aquæ, aliuſve liquoris transfluentis dependere exiſtimo, adeoque generaliter indeterminabilem.

DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ

PARS SECUNDA,

Continens Methodum directam & univerſalem ſolvendi omnia Problemata Hydraulica, quæcunque de aquis per canales cujuſcunque figuræ fluentibus formari ac proponi poſſunt.

I.

CAnalis eſto qualiſcunque ſive, ſit rectus, ſive curvus, ſive ſit continuus, ſive compoſitus ex pluribus tubis cylindricis, ſive denique ſit verticalis, ſive pro parte horizontalis, ſive in partibus ſuis diverſis diverſimode inclinatus. Plenus ſit hic canalis aqua, aliove liquore gravi, homogeneo, & fluidiſſimo. Incipiat autem pergatque accelerando [quantum & quouſque poteſt] fluere, & ita quidem, ut canalis conſtanter plenus maneat, ſuccedente ſcilicet aliunde aqua nova, quæ elabentem ex imo orificio ſingulis momentis reſarciat, influendo per ſummum orificium, ea cum velocitate qua ſuprema ſuperficies ſubſideret, ſi influxus ſubito ceſſaret. Hæc conditio additur facilioris calculi gratia; valet enim methodus, ſi nihil novi liquoris aquei ſubintraret, ad omnimodam uſque vaſis canaliſve depletionem. Quæritur primo velocitas liquoris effluentis, pro data qualibet quantitate liquoris, jam egreſſi? Quæritur deinde quantum latera canalis in ſingulis locis a transfluente liquore premantur; vel, quod eodem recidit, ad quantam altitudinem verticalem, liquor ejuſdem generis cum transfluente ſuſpenſus hærere debeat in fiſtula in aliquo loco inſerta, & verticaliter erecta?

II.

Detur itaque canalis (Fig. 10.) qualiſcunque ECce; recta verticalis AB, tanquam abſciſſarum axis conſiderata, ad quam ordinatim applicatæ AEe, PFf, TNn, BCc; quarum partes Ee, Ff, Nn, Cc, deſignent amplitudines ſeu ſectiones horizontales canalis. Concipiatur liquor in eo contentus, diviſus in ſtrata horizontalia infinite parvæ craſſitudinis FMmf, NLln, &c. quorum puncta intermedia, ſeu centra gravitatis G, H, V, I, &c. faciant lineam, ſive rectam, ſive curvam, GHVI, quam vocabo *lineam centricam* ſeu ſimpliciter *centricam*; quæ utique data erit, ob datas curvas EFC, efc, quæ ex Figura data canalis determinantur. TAB. XC. Fig. 10.

Sit amplitudo prima Ee $= h$, amplitudo ultima Cc $= \omega$, amplitudo aliqua intermedia Ff $= y$, alia intermedia Nn $= r$, craſſities ſingulorum ſtratorum PR vel TS $= dt$. Erunt ſtrata ipſa Fm $= y\,dt$, Nl $= r\,dt$. Sit porro aliqua recta indeterminata ID, tangens centricam in I, quæ dicatur x, = longitudini cylindri obliqui liquoris effluentis in directione ipſius ID, cujus cylindri eſt baſis Cc, & qui contineat quantitatem liquoris jam egreſſi. Velocitas liquoris eo ipſo momento elabentis $= v$. Sit gravitas qua corpora naturaliter animantur $= g$. Nominando jam elementa lineæ centricæ Hh, &c,: $= ds$, erunt gravitates, quibus animantur ſtrata in directionibus Hh, Vu, &c:, $= \frac{g\,dt}{ds}$, adeoque pondera, vel vires motrices ipſorum ſtratorum in iſtis directionibus $= \frac{gydt^2}{ds}$, $\frac{grdt^2}{ds}$ &c.; ipſæ vero vires motrices abſolutæ, ſecundum directionem verticalem $= gydt$, $grdt$, & ita porro.

I I I.

Transferendo has vires abſolutas (per Princip. Hydroſt. ut in Parte prima oſtenſum eſt) ad amplitudinem primam h; erunt illæ pro ſingulis $ghdt$; erit ergo integrando per omnes dt, hoc eſt, per totam altitudinem AB [quæ dicatur $= a$] $gha =$ preſſioni totali ad Ee verticaliter applicandæ, & æquipollenti ſummæ virium motricium abſolutarum in ſtratis omnibus. Et hæc preſſio totalis gha, ad amplitudinem primam applicanda, eſt ea quæ mihi vocari ſolet p.

Sit jam tangens in I lineæ centricæ GHI ad ſuam ſubtangentem verticalem, ut α ad 1; & tangens in G ad ſuam ſubtangentem, ut ζ ad 1; tangens autem in quolibet puncto intermedio H ad ſuam ſubtangentem, ut ds ad dt: Erit utique, per decompoſitionem motus, v ſeu velocitas actualis in I liquoris effluentis ad ſuam ſubvelocitatem verticalem, etiam ut α ad 1, adeoque ſubvelocitas illa $= \frac{v}{\alpha}$. Pariter nominando u velocitatem actualem in H ſecundum Hh, erit ejus ſubvelocitas $= \frac{udt}{ds}$. Verum, ut inveniatur velocitas actualis u, notandum eſt, ſtratorum ſubvelocitates, eſſe in ratione reciproca ſuarum amplitudinum, ad id ut tranſmittant eodem tempuſculo elementari, quantitates æquales liquoris; faciendo itaque $y : \omega = \frac{v}{\alpha} : \frac{v\omega}{\alpha y}$, erit $\frac{v\omega}{\alpha y} =$ ſubvelocitati ſtrati Fm. Faciendo nunc porro $dt : ds = \frac{v\omega}{\alpha y} : \frac{v\omega ds}{\alpha y dt}$, erit $\frac{v\omega ds}{\alpha y dt} = u$, ſeu velocitati actuali ſtrati Fm in directione Hh. Hinc velocitas actualis ſtrati primi, amplitudini Ee contigui, [ubi y ponitur h, & $ds : dt = \zeta : 1$] erit $= \frac{\zeta\omega v}{\alpha h}$.

Haud aliter ratiocinandum, pro inveniendo progreſſu actuali ſtrati Fm in directione Hh. Nam nominando dx progreſſum momentaneum ſtrati ultimi Cc in directione ID; erit ejus ſubprogreſſus in directione verticali $= \frac{dx}{\alpha}$; ſunt autem hic etiam ſubprogreſſus ſtratorum in reciproca ratione amplitudinum: faciendo itaque $y : \omega = \frac{dx}{\alpha} : \frac{\omega dx}{\alpha y}$, erit $\frac{\omega dx}{\alpha y} =$ ſubprogreſſui ſtrati Fm. Proinde etiam faciendo $dt : ds = \frac{\omega dx}{\alpha y} : \frac{\omega dx ds}{\alpha y dt}$; erit $\frac{\omega dx ds}{\alpha y dt} =$ progreſſui actuali ſtrati Fm, in directione ſui motus Hh.

I V.

Exiſtente jam aqua in motu, ſtrata ejus diverſimode in ſe mutuo agunt urgendo & reſiſtendo, ac viribus quidem diverſis, pro diverſitate circumſtantiarum, tam loci quam celeritatis. Vocetur itaque tantiſper γ, vis acceleratrix indeterminata, quæ ex actione mutua oritur, & u velocitas acquiſita, quam aliquod ſtratum Fm habet in directione Hh; adeoque $\gamma ds = udu$, unde $\gamma = \frac{udu}{ds}$. Ducatur hoc in maſſam ſtrati ydt, & prodibit ejus vis motrix $\gamma y dt = \frac{yudu dt}{ds}$ in directione Hh. Ut autem ea habeatur in directione verticali a qua hæc produci queat, faciendum eſt $dt : ds = \frac{yudu dt}{ds} : yudu$, quæ erit vis motrix requiſita in directione verticali; quæ ergo tranſlata ad amplitudinem primam h, dat æquipollentem $hudu$. Integretur hæc ut habeatur $\frac{1}{2}huu$, quod per debitam correctionem, accommodandum eſt ad omnia ſtrata, in toto canali ECce contenta, atque ſimul ſumpta. Proinde [ob velocitatem ſtrati ultimi $= v$, & primi $= \frac{\zeta\omega v}{\alpha h}$] correctum integrale $= \frac{h}{2}(vv - \frac{\zeta\zeta\omega\omega}{\alpha\alpha hh} vv)$ ſeu $\frac{vv(\alpha\alpha hh - \zeta\zeta\omega\omega)}{2\alpha\alpha h} =$ vi verticali ad Ee applicandæ æquipollenti, a qua ſcilicet ſingula ſtrata vim ſuam particularem ſe mutuo urgendi obtinent, ad id tantum ut niſum ſuum con-

 ſer-

ſervent, eo momento quo aqua effluit velocitate v, quod cum fiat, non ſucceſſive, ſed in inſtanti indiviſibili, & a ſola figura canalis pendeat, poterit hæc vis ex tranſlatione orta, vocari *vis* vel *potentia ſtatica*, aut ſi magis arrideat, *potentia hydroſtatica*, utpote quæ in ſolo niſu conſiſtit tranſeundi ab uno ſtrato in locum proxime inferioris, nulla facta attentione ad vim acceleratricem actualem.

V.

Quærenda porro eſt vis altera, quæ naſcitur ex acceleratione actuali liquoris transfluentis. Hunc in finem, pono cujuſlibet ſtrati Fm progredientis vim acceleratricem actualem $= \gamma'$, erit [ob progreſſum actualem ultimi ſtrati Cc per ſpatiolum dx] progreſſus ſtrati Fm $= \frac{\omega\, dx\, ds}{\alpha y\, dt}$, adeoque $\frac{\gamma' \omega\, dx\, ds}{\alpha y\, dt} = u'du'$ $=$ [Art. III.] $\frac{\omega\omega v\, dv\, ds^2}{\alpha\alpha yy\, dt^2}$, unde $\gamma' = \frac{\omega v\, dv\, ds}{\alpha y\, dx\, dt}$, & vis motrix actualis in directione Hh ſtrati, ſeu $\gamma' y\, dt = \frac{\omega v\, dv\, ds}{\alpha\, dx}$, adeoque vis motrix verticalis, ex qua illa produci poteſt $= \frac{\omega v\, dv\, ds^2}{\alpha\, dx\, dt}$, quæ translata ad primam amplitudinem h, dat æquipollentem $= \frac{h\omega v\, dv\, ds^2}{\alpha y\, dx\, dt}$; quod ut integretur per totam longitudinem axis AB reſpondentem toti canali, pro quolibet ſtrato, & pro qualibet acquiſita velocitate v, debent hic non tantum h & ω, ſed etiam $\frac{v\,dv}{\alpha\,dx}$, conſiderari tanquam conſtantes; & ita integrando, habebimus $\frac{h\omega v\, dv}{\alpha\, dx} \int \frac{ds^2}{y\,dt} =$ vi alteri, ex actuali accelerationis liquoris effluentis oriundæ, quam vocari liceat *vim hydraulicam*, ad diſtinctionem *vis hydroſtaticæ*, quæ in ſolo niſu vel preſſione in inſtanti exercita conſiſtit, idque ſingulis momentis, quomodocunque liquor moveatur.

VI.

VI.

Hæ duæ vires, *hydroſtatica* & *hydraulica*, componunt vim totalem, quæ nimirum generatur ab actione vis primitivæ p, quæ inventa eſt Art. III $= gha$. Æquando itaque hanc, cum aggregato illarum duarum Art. IV & V inventarum, obtinebimus æquationem generaliſſimam, pro determinatione velocitatis quacum liquor quovis momento effluit, quæ æquatio hæc eſt $\frac{vv(\alpha\alpha hh - \mathsf{G}\mathsf{G}\omega\omega)}{2\alpha\alpha h} + \frac{h\omega v\, dv}{\alpha\, dx} \int \frac{ds^2}{y\,dt} = gha$. Ubi notandum per $\int \frac{ds^2}{y\,dt}$ intelligi ſummam omnium $\frac{ds^2}{y\,dt}$ quæ continentur non tantum inter Cc & Ff, ſed omnino inter extremas ab una ad alteram omnes comprehendendo.

VII.

Quod ſi lubeat exprimere æquationem per z, ſeu altitudinem unde corpus naturali gravitate g præditum delabendo acquirat velocitatem quæſitam v; ſcribendum tantum eſt, per principia dynamica, $2gz$ pro vv & gdz pro $v\,dv$; id quod dabit hanc æquationem $\frac{gz(\alpha\alpha hh - \mathsf{G}\mathsf{G}\omega\omega)}{\alpha\alpha h} + \frac{gh\omega\, dz}{\alpha\, dx} \int \frac{ds^2}{y\,dt} = gha$, vel reductione peracta hanc $(\alpha\alpha hh - \mathsf{G}\mathsf{G}\omega\omega) z\, dx + \alpha hh\omega\, dz \times \int \frac{ds^2}{y\,dt} = \alpha\alpha hha\, dx$, vel quia $\int \frac{ds^2}{y\,dt}$, ſumendum per totam axis longitudinem, ut conſtans, adeoque ut datum ſupponi poteſt, ſaltem per quadraturas, nominetur illud M; eritque æquatio ad hanc formam reducta $(\alpha\alpha hh - \mathsf{G}\mathsf{G}\omega\omega) z\,dx + \alpha Mhh\omega\, dz = \alpha\alpha hha\, dx$. Ex reſolutione hujus æquationis, invenietur z in quantitatibus datis per x, & conſtantes M, a, h, ω, α, G.

COROLLARIUM I.

Exiſtente effluxus velocitate uniformi, ad quam ſenſibiliter

 per-

pervenitur citiſſime, & quaſi uno ictu oculi, ut in ſuo loco hujus ſcripti demonſtrabitur; evaneſcit dz: quo igitur neglecto, prodit æquatio algebraïca hæc $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)z = \alpha\alpha hha$, unde quæſita $z = \frac{\alpha\alpha hha}{\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega}$.

COROLLARIUM II.

Hinc duo vaſa vel duo canales, qualeſcunque habeant figuras, licet a ſe invicem diverſiſſimas, modo eandem habeant altitudinem verticalem a, ut & amplitudines ſupremam & infimam, ſeu primam & ultimam, h & ω, in eadem ratione, ac præterea α & β utrobique ſibi proportionales; effluet aqua ex utroque canali, ſeu vaſe, velocitate æquali, poſtquam venerit utrobique ad uniformitatem.

COROLLARIUM III.

Si linea centrica GHI eſt linea recta, ſive ſit verticalis ſive obliqua, erit $\beta = \alpha$, & $ds : dt = \alpha : 1$; proinde $ds = \alpha dt$, & $\int\frac{ds^2}{ydt}$ ſeu $M = \alpha\alpha\int\frac{dt}{y}$, id quod æquationem generalem $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mhh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$ mutat in hanc $(hh - \omega\omega)zdx + \alpha hh\omega dz\int\frac{dt}{y} = hhadx$. Qualiſcunque autem ſit ſitus centricæ rectilineæ, ſive verticalis ſive obliquus, erit in caſu effluxus uniformis ſemper $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$.

COROLLARIUM IV.

Quod ſi manente figura canalis vel vaſis, ut & utraque ejus amplitudine ſumma & ima Ee, Cc; fiat tantilla mutatio in directione liquoris influentis & effluentis; poteſt illa mutatio, etſi fere ſit inſenſibilis, producere mutationem inſignem in velocitate; ut ex. gr. ſi in *Figura* 11, vaſi vel canali ECce adaptentur

tentur margines vel labra Emne & Cpqc, tantillæ altitudinis verticalis Em, cp, ut amplitudines mn, pq, maneant eædem cum prioribus Ee, Cc, ipſaque tota canalis altitudo ſenſibiliter non augeatur; nemo facile crediderit, quanta hinc in effectu futura ſit velocitatis mutatio. Quoniam enim nunc aqua influit & effluit, non amplius oblique ſed verticaliter, ob directionem labrorum verticalem, quæ ideo etiam dat ſitum verticalem tangentibus extremis lineæ centricæ, facitque $\alpha = \beta = 1$; manifeſtum eſt æquationem generalem $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mhh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$, nunc ſubito aſſumere hanc faciem $(hh - \omega\omega)zdx + Mhh\omega dz = hhadx$, atque pro velocitate uniformi fore $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$; quod monere operæ prætium duxi, ne alioquin, ſi in experimentis capiendis ad minimas circumſtantias, quæ nullius eſſe momenti videntur, non ſatis accurate attenditur, & inde quod provenit cum noſtris minus recte quadrare falſo apparet, ne, inquam, theoria noſtra ſtatim erroris ſuſpecta habeatur. Sicuti accidit aliquando Cl. POLENO, Viro alias in experimentalibus induſtrio & circumſpecto, qui viſurus quas diverſas quantitates aquæ, dato tempore, emitterent diverſæ amplitudinis lumina, eidem vaſi aqua pleno admota, ſumpſerat ad hoc negotium varias laminas non admodum ſpiſſas, unamquamque peculiaris amplitudinis foramine pertuſam, ut nunc hac nunc illa obtegeret aperturam in fundo vaſis factam: contigit autem, ni fallor forte fortuna, ut cum aliqua ex illis laminis experimentum bis repetierit, & poſtea pluries de induſtria; ubi ſemper attonitus obſervavit unam eandemque illam laminam, per ſuum idem foramen, modo majorem, modo minorem aquæ copiam eodem tempore emiſiſſe, prout una vel altera ejus laminæ facies extrorſum ſpectaret: tandem foraminis forma curatius examinata fuit, atque tum obſervatum figuram foraminis, licet in tenui lamina inſculpti, non fuiſſe exacte cylindricam, ſed inſtar conuli truncati, baſin unam habentis tantillum ampliorem quam alteram: quod jam ſufficiebat ad detegendam rationem, cur extrorſum hiante baſi ampliore forami-

TAB. XC. *Fig.* 11.

foraminis, aqua largius effluxerit quam in ſenſu contrario; idque duplicem ob cauſam; nam & craſſior fuit vena aquea exiliens, & major ejus velocitas, ceu patet ex formula noſtra $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, ubi palam eſt, valorem hujus fractionis eſſe majorem, ſi major fuerit ω, reliquis b & a manentibus, & contra fore minorem, ſi ω minor fuerit.

COROLLARIUM V.

In caſu quo $\alpha b = \beta\omega$, ſeu ubi $\alpha : \beta = \omega : b$; habebitur $M\omega dz = \alpha a dx$, proinde $z = \frac{\alpha a x}{M\omega}$; unde liquet, creſcente effluxu x in infinitum, etiam z in infinitum creſcere; adeoque velocitatem nunquam ad uniformitatem convergere. Quod ſane apparet quoque ex ipſa formula *Coroll.* 1, eſt enim $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega} =$ [in hoc caſu] $\frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \alpha\alpha bb} = \frac{a}{0} = \infty$.

VIII.

SCHOLIUM I.

Notandum, in canalibus & tubis non admodum amplis & ſufficienter longis, hoc communiter obſervari, ſicuti jam innui in Præfatione *, quod ſtrata F m (Fig. 10) in fluxu conſtituta, ex ſitu horizontali ſe facile componunt ad ſitum perpendicularem lateribus, ſeu potius lineæ centricæ G H I; quod utique ex motu ſupremæ ſuperficiei E e [ſi nullus alius liquor ſuccedit] ut ex. gr. in tubis barometricis & aliis ejuſmodi ſiphonibus non ultra unam duaſve lineas in diametro habentibus, luculenter patet; ſive hoc fiat ob adhæſionem fluidi ad latera, quæ circumcirca in ambitu ſtratorum æquabilis eſſe debet, ut quam commodiſſime fluidum moveatur & ſine notabili frictione, ſive id contingat aliam ob cauſam phyſicam, hujus loci non eſt inquirere: ſufficit hoc loco inſinuare, hanc circumſtantiam nihil offi-

TAB. XC. *Fig.* 10.

* pag. 396.

officere noſtræ Theoriæ. Nam quia, per legem generalem, centrum gravitatis corporum quacunque de cauſa in motum concitatorum, eodem modo eademque velocitate in ſua directione inchoata movetur, ac ſi univerſa eorum materia in ipſo centro gravitatis eſſet concentrata; poterit ſane materia cujuſlibet ſtrati F m conſiderari tanquam congeſta in centro gravitatis H vel h. Cum igitur, in canalibus oblongis ac non admodum amplis, quælibet eorum modica portio ſumi poſſit pro quaſi cylindrica vel priſmatica; evidens eſt unumquodque ſtratum F m, leviſſimam ob cauſam, ſitum ſuum horizontalem F f mutare poſſe in r s perpendicularem ad H h, manente interim H h ejuſdem longitudinis, & quantitate ſtrati novi r t o s æquali ſtrato F M m f. Concipiamus igitur quo pacto ſingula reliquorum ſtratorum N l [ſine ulla alia mutatione, ſive in velocitate, ſive in directione ſecundum V u] ſe componere poſſint in ſitum perpendicularem ad latera canalis, ſeu potius ad lineam centricam. Quod ſi jam porro attendimus quid fieret, ſi obturaretur exitus C c, ejuſque loco aperiretur in latere canalis foramen c d ejuſdem amplitudinis cum C c; haud difficulter intelligimus, aquam per aperturam c d ſub eadem obliquitate ad c d erumpere debere, ſub qua erumpebat per C c, ejuſque adeo directionem b g fore horizontalem. Cum præterea apertura c d ponatur æqualis amplitudini C c, & conatus erumpendi per C c jam detorqueatur verſus d c [per vulgarem legem hydroſtaticam,] oportet ſane velocitatem aquæ per c d effluentis, eandem fore quam determinavimus pro C c. Unde & hoc colligitur, ſi ad foramen c d adaptaretur novus canalis horizontalis, in quo nempe linea centrica horizontalis ſit, fore ut motus & velocitas aquæ per eum fluentis & effluentis eodem modo ſe habeat, ac ſe haberet, ſi idem ille novus canalis [clauſo c d] ad C c adaptaretur ſecundum directionem I D, ſed in quo aqua fluens deſtituta ſupponi deberet propria ſua gravitate. Adeo ut ſtratorum pondera ad amplitudinem E e tranſlata hic etiam faciant eandem ſummam gha, æque ac ſi abeſſet novus canalis, ac proin in generali æquatione expreſſa [Art. VII],

 ($\alpha\alpha$

$(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)z\,dx + \alpha Mhh\omega\,dz = \alpha\alpha hha\,dx$, nihil aliud mutandum ſit quam ut M, ſeu $\int \frac{ds^2}{y\,dt}$, nunc exprimat ſummam omnium $\frac{ds^2}{y\,dt}$, quæ in ambobus continentur canalibus. Velocitas vero uniformis utrobique, tam in ſimplici quam in combinato canali, erit eadem; [quia terminus, in quo reperitur M, in caſu uniformitatis evaneſcit;] utpote ſemper ea quæ habetur per $z = \frac{\alpha\alpha hha}{\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega}$.

I X.

De Preſſionibus quas ſuſtinent latera canalis a liquore transfluente.

Ut recte clareque percipiamus, in quo conſiſtat vis illa quæ exeritur in latera canalis, dum in illo fluit liquor; ſciendum eſt illam vim nihil aliud eſſe, quam quæ originem habet a vi compreſſionis, qua nimirum partes fluidi ſibi invicem contiguæ, ex. gr. EFfe & CFfc, una ad alteram adigitur, unde in ipſo contactu Ff per actionem & reactionem gignitur vis intermedia, quam vocare ſoleo *immaterialem*; quia quaſi extra partes ſe invicem prementes, inter utramque tamen intermedia reſidet, atque ad unam non magis pertinet quam alteram. Hujus vis proprium eſt urgere partem liquoris præcedentem *antrorſum*, ſeu ea verſus qua tendit, ſequentem vero *retrorſum* ſeu ea verſus unde venit; facereque ut pars liquoris ſequens, quæ a viribus tranſlatis propellitur, atque pars liquoris præcedens, cui aliquid accelerationis imprimere debet, acquirant in ipſo contactu æqualitatem virium acceleratricium; quemadmodum idem contingere dudum * monuimus in corporibus ſolidis, quæ diverſis viribus acceleratricibus ſeorſim animata, quando in ſe mutuo agere incipiunt, oritur in eorum contactu vis intermedia *immaterialis* ad utrumque corpus communi jure ſpectans, quæ ita

* Nis. CLXXVII, pag. 262, & CLXXIX, pag. 333, 340.

ita temperet utriuſque vim acceleratricem particularem, unam diminuendo, alteram augendo, ut inde in tota maſſa, combinata ex duobus iſtis corporibus, reſultet una communis vis acceleratrix.

X.

Id vero diſcriminis eſt in agendi modo, quod in corporibus ſolidis directe in ſe invicem agentibus, vis illa immaterialis agat prorſum & retrorſum, inſtar elaſtri alicujus rectilinei quod inter utrumque corpus poſitum ſeſe expandere conatur: ſed in partibus fluidi in ſe mutuo agentibus, vis immaterialis intercedens conſiderari debeat tanquam aura elaſtica, quæ, non tantum in partes oppoſitas, ſed in omnes plagas circumfuſas ſeſe exerit: ex quo nunc facile intelligitur, ab hac ipſa vi immateriali provenire preſſionem, de qua hic eſt quæſtio, quæ nempe exercetur in latera canalis, & quæ viciſſim ab hiſce coërceri debet, dum agit libere antrorſum & retrorſum in partes liquoris quibus interjacet.

X I.

Reſtat igitur ut, ſecundum datam hanc ideam de vi immateriali, ejus quantitatem vel menſuram determinemus. Sit illa ubilibet in Ff quærenda, quam dicamus $= \pi$. Nunc ita procedo: Finge tantiſper partem canalis EFfe [durante fluxu] ſubito auferri, manente reliqua CFfc in ſtatu ſuo cum omnibus ſuis circumſtantiis, atque eodem momento ad amplitudinem Ff apponi novam vim motricem ipſi π æqualem. Concipis utique hoc modo effluxum liquoris ex truncato canali egredientis acceleratum iri [ſaltem in primo temporis momento] perinde ac ſi integer manſiſſet canalis. Quare jam conſiderabo canalem reſiduum CFfc tanquam canalem integrum, cujus ſuprema ſeu prima amplitudo eſt y, ſeu Ff, amplitudo alia intermedia Nn variabilis $= r$, ſtratumque adjacens Nl $= r\,dt$. Hinc ſi [Art. IV] pro b ſubſtitut y, habebo $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{2\alpha\alpha y}$ = vi hydroſta-

TAB. XC. *Fig.* 10.

 ticæ:

ticæ: quod enim in primo puncto G dicebatur $\mathfrak{G}$, id in puncto H est $ds:dt$, ratio ſcilicet tangentis ad ſubtangentem, & [Art. V] $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$ = vi hydraulicæ; ubi in integratione ſupponitur r continuari ab ω uſque ad y.

XII.

Aggregatum harum duarum virium, hydroſtaticæ & hydraulicæ, æquari deberet vi primitivæ p, quæ hic eſſet [Art. III & VI] gyt, ſi nimirum hæc ſola ageret in liquorem in canali truncato contentum; ſed quia π conjunctim agit cum gyt, oportet ſane hanc inſtituere æquationem $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt} = gyt + \pi$. Ex qua ſtatim emergit valor quæſitus ipſius π: Tranſpoſito enim gyt, prodit $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx} \times \int\frac{ds^2}{rdt} - gyt = \pi$; ubi quoque monendum, in integratione $\int\frac{ds^2}{rdt}$ variabile r ſumi debere a B uſque ad P; unde pro qualibet aſſumpta y dabitur $\int\frac{ds^2}{rdt}$, dicatur ergo hoc $= N$, eritque $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{Ny\omega v dv}{\alpha dx} - gyt = \pi$. Quoniam igitur ex reſolutione æquationis generalis [Art. VII] habetur valor ipſius vv ſeu $2gz$, is in hac ſubſtitutus dabit valorem ipſius π in g, & quantitatibus mere linearibus; ſcilicet hunc $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2:dt^2)}{\alpha\alpha y} + \frac{gNy\omega dz}{\alpha dx} - gyt = \pi$.

XIII.

Quod ſi nunc porro ſcire lubeat, ſi fiſtula aliqua, utrinque aperta, in loco quolibet f canali inſeratur, erigaturque ad ſitum verticalem, quouſque in illa liquor aſcendere debeat, ob hanc preſſionem π, quæ facit ut aſcendat: attendere convenit, quod π æquivalet ponderi alicujus cylindri ex liquore gravitate naturali

rali g animato confecti, qui pro baſi habet amplitudinem Ff ſeu y, & pro altitudine illam ipſam liquoris in fiſtula hærentis; unde hæc altitudo erit $= \frac{\pi}{gy}$, ad quam ſuſpenſus hærebit liquor in fiſtula, invariabiliter quidem, poſtquam velocitas liquoris effluentis ad ſenſibilem uniformitatem pervenerit; ſed antequam hoc fiat [fit autem in momento quaſi] aſcendere perget liquor in fiſtula, donec acquiſiverit locum ſuum ſtabilem, quando nempe liquor effluens non amplius ſenſibiliter acceleratur.

XIV.

Accidit, in quibuſdam caſibus, ut valor ipſius π evadat negativus, quando ſcilicet in illo quantitates negativæ $\frac{-vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} - gyt$ prævalent affirmativis $\frac{1}{2}vvy + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$; aut jam exiſtente velocitate in ſua uniformitate, ita ut $dv = 0$, quando $\frac{vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} + gyt$ majus eſt quam $\frac{1}{2}vvy$: id quod contingere poteſt, non tantum in illis caſibus ubi αy minus eſt quam $\frac{\omega ds}{dt}$, ſed etiam in illis ubi αy majus quam $\frac{\omega ds}{dt}$, modo interim gyt ſat magnum ſit ut ejus exceſſus ſupra $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$ ſuperet prioris defectum. Quocunque autem modo id fiat, palam eſt in ejuſmodi caſibus compreſſionem converti in relaxationem, qua fit, ut latera canalis circa Ff, non tantum plane non extrorſum premantur, ſed omnino introrſum [ſi laterum rigiditas non impediat] contrahantur. Unde ſequitur, per fiſtulam canali implantatam, ſed ex alto ad imum demiſſam verticaliter, ubi hiet in vaſculum liquore plenum, poſſe liquorem quaſi per ſuctionem ſurſum attolli ad altitudinem $= \frac{\pi}{gy}$.

X V.

S C H O L I U M II.

Hactenus non attendimus ad caufas quafdam particulares & acceſſorias [non ſemper locum habentes] quæ alterare poſſunt, ſeu preſſiones, ſeu ſuctiones π noſtra methodo determinatas. Inter tales cauſas hæc præcipue occurrit, quæ facit ut aqua in motu conſtituta, offendens in via ſuperficiem immobilem, ei per allapſum imprimat vim, quæ vocatur *vis reſiſtentiæ fluidorum*, proportionalis utique partim quadrato velocitatis, partim quadrato ſinus obliquitatis incidentiæ, ut notum eſt. Eo ipſo itaque hæc vis fit inſenſibilis in canalibus anguſtioribus oblongis: in iis enim, ob FM fere parallelam ipſi hH, quæ eſt directio motus fluidi cum venit ad Ff, ſicuti in quolibet alio loco Nn, directio Vu fere parallela eſt ipſis NL, nl, ſinus incidentiæ pro nullo reputari poteſt. In canali ex tubis cylindricis conflato, ſinus ille prorſus nihil eſt, quia directio fluidi omnino eſt parallela lateribus cylindrorum, per totam canalis longitudinem. Alia inſuper cauſa acceſſoria, quæ turbare poſſet effectum a preſſione π oriundum, reperitur in canali valde incurvato, in quo quippe liquor celeriter fluens acquirit vim centrifugam [de qua alibi egimus], hæc vis centrifuga majorem redderet preſſionem π quam revera eſt, in parte convexa canalis, ſed minorem in parte concava ejuſdem. Quocirca, ſi cui volupe eſſet experimentum inſtituere ope fiſtulæ canali implantandæ; inſertio facienda eſſet neque in convexitate, neque in concavitate curvedinis, ſed a latere, ita ut fiſtula exeat ex canali perpendiculariter ad planum convexitatis & concavitatis, & deinde, ſi planum illud non ſit horizontale, ut fiſtula quantum opus inflectatur, donec ſitum verticalem obtineat.

XVI.

X V I.

Corollaria generalia circa velocitates & preſſiones.

In effluxu liquoris uniformi & æquabili, æquatio generalis [Art. VI] mutatur, ob $dv = 0$, in hanc $\frac{vv(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)}{2\alpha\alpha h} = gha$, ſeu $vv = \frac{2\alpha\alpha ghha}{\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega}$. Unde hoc elegans Theorema deducitur: Si duo ſint vaſa vel canales, habentes æquales altitudines verticales, æqualeſque amplitudines tam ſupremas quam infimas, qualeſcunque de cætero figuras habeant canales, & quantumvis diſſimiles inter ſe, dummodo earum centricæ ita ſint comparatæ, ut ratio inter α & β in uno ſit eadem quæ eſt inter α & β in altero vaſe & canali: Dico ex utroque [ſubintellige jugiter pleno exiſtente] liquorem, poſtquam ad æquabilem effluxum pervenerit, effluxurum utrobique eadem velocitate. Quod ſane patet ex ipſo valore ipſius vv qui eſt $\frac{2\alpha\alpha ghha}{\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega}$; utpote in quo amplitudines intermediæ haud reperiuntur. Sint ex. gr. duo vaſa cujuſcunque figuræ ABCD, EFGH [*Fig.* 12], quorum lineæ centricæ ſint rectæ, & quidem nil refert an ſint verticales an obliquæ, aut una magis minuſve obliqua quam altera, in omnibus enim his caſibus erit utrobique ſemper $\alpha = \beta$, dummodo habeant illa duo vaſa æquales altitudines verticales a, item æquales amplitudines extremas $AD = EH = h$, & $BC = FG = \omega$, aut quod ſufficit, modo ſit $AD : EH = BC : FG$; ſintque illa vaſa conſtanter plena aqua, aliove liquore homogeneo, in quibus nempe utrobique eſt eadem gravitas g naturalis animans ſtrata; erit velocitas maxima & uniformis aquæ per BC effluentis æqualis velocitati maximæ & uniformi aquæ effluentis per FG. In tali enim caſu, habetur utrobique [Art. VI] ob $dv = 0$, & $\alpha = \beta$, habetur, inquam, $(hh - \omega\omega) z = hha$; adeoque $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$; conformiter *Co-*

TAB. XC. *Fig.* 12.

rollario

rollario 2 Art. VII, & ut alias, in prima Parte, pro vaſe cylindrico tantum invenimus. Manifeſtum interim eſt valorem $\frac{bba}{bb - \omega\omega}$ pro data altitudine a utriuſque vaſis eſſe eundem, ſi ratio inter b & ω utrobique ſit eadem, hoc eſt, ſi AD : EH = BC : FG. Notandum autem nos hic abſtrahere a contractione venæ aqueæ, quæ aliquouſque ultra orificium obſervari ſolet, in illis præcipue vaſis, quæ ſubito in foramen deſinunt in fundo latiori apertum, ſecus ac fit in illis figuram EFGH habentibus, & quaſi in tubum cylindricum convergentibus, in quibus nulla conſpicitur ſenſibilis venæ contractio. Interim, ſi ejus quoque habenda eſſet ratio; conſiderari deberet vas tanquam continuatum ad maximam venæ contractionem, ubi contrahi ceſſat: atque tunc amplitudo venæ contractæ eſſet ſumenda pro ipſo foramine inferiori ω, hujuſque diſtantia ab amplitudine ſumma pro vera altitudine verticali.

X V I I.

TAB. XC. Fig. 12. Si jam ſtantibus iiſdem conditionibus, ut in præcedenti, duorum vaſorum æque altorum ABCD, EFGH [*Fig.* 12] & in extremitatibus æque amplorum, atque centricas rectas habentium; habeant præterea adhuc tertiam amplitudinem alicubi LM, NO ſibi mutuo æqualem, & ab orificiis BC, FG æqualiter diſtantem: erit non tantum velocitas maxima [per præced.] utrobique æqualis, ſed etiam preſſiones in LM & in NO æquales erunt; adeoque in fiſtulis iis in locis inſertis atque in ſitum verticalem inflexis, aqua utrobique ad altitudinem eandem ſuſpenſa hærebit. Patet veritas hujus ex æquatione [Art. XII] quæ, ob $\alpha = \beta = \frac{ds}{dt}$, in caſu velocitatis uniformis abit in hanc ſimpliciorem $\frac{vv(yy - \omega\omega)}{2y} - gyt = \pi$, vel (ſcribendo $2gz$ pro vv) in hanc $\frac{gz(yy - \omega\omega)}{y} - gyt = \pi$, in qua, quia pro utroque vaſe ſunt eadem z, y, ω, g, t, debet utique reſultare idem valor

valor ipſius π, proindeque etiam ipſius $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} - t$ $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)} - t.$

X V I I I.

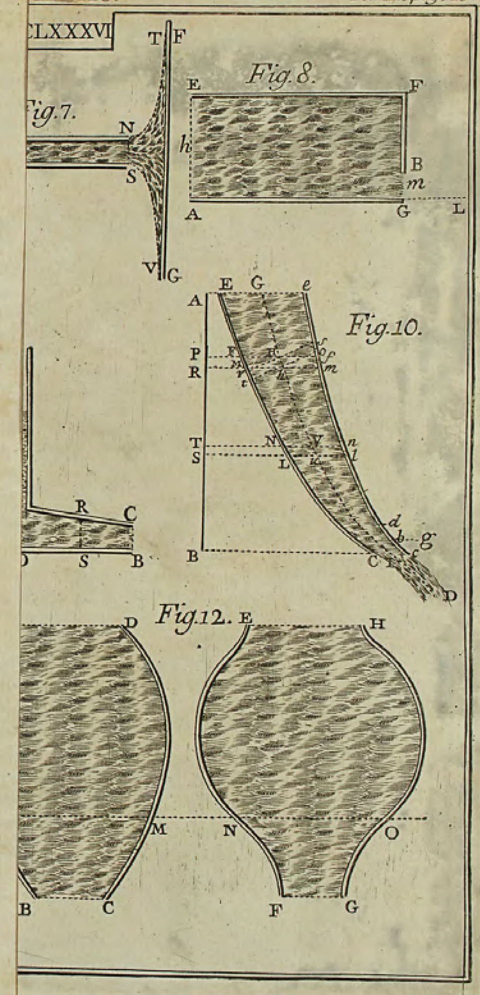
Hinc ſi omnes LM, NO in æqualibus diſtantiis verticalibus a BC, FG, eſſent æquales; id quod fieret, ſi vaſa illa duo ABCD, EFGH eſſent ex. gr. conoidica truncata ejuſdem generis, unum rectum, alterum ſcalenum, in hoc caſu non ſolum velocitates uniformes quibus aqua ex utroque vaſe efflueret forent æquales, ſed etiam preſſiones in ſingulis altitudinibus æqualibus forent æquales, adeoque etiam ſuſpenſiones aquæ in fiſtulis hærentibus haberent in utroque vaſe eandem altitudinem.

X I X.

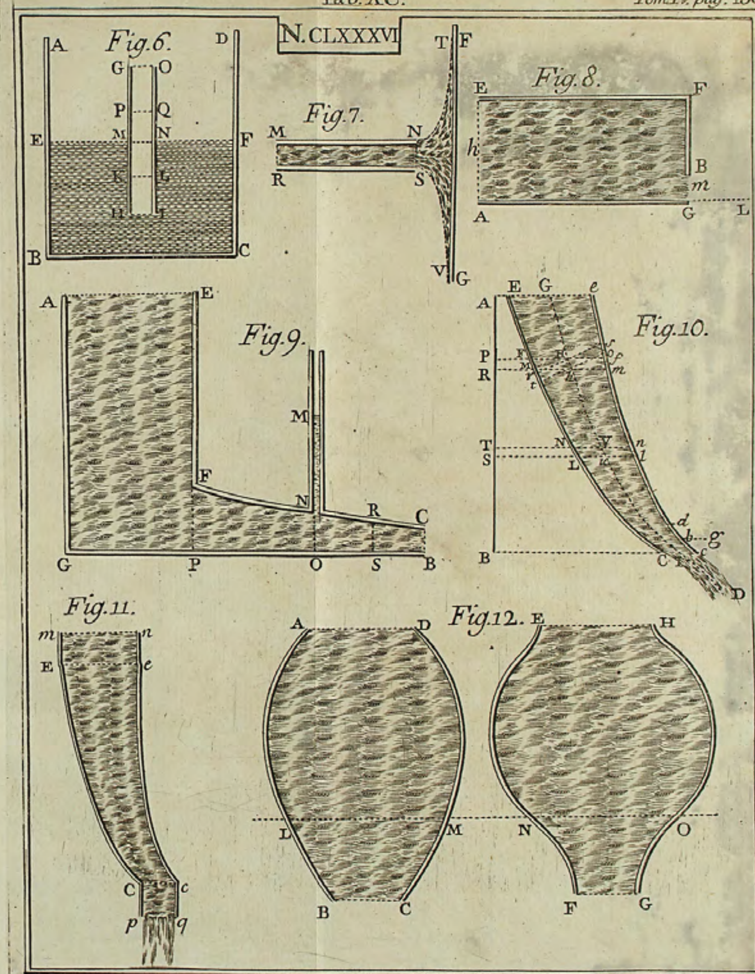
Quoniam æquatio Art. VII inventa pro velocitate generaliter determinanda, ſive jam ſit æquabilis, ſive nondum æquabilis, dat $dx = \frac{\alpha Mbb\omega dz}{\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + \beta\beta\omega\omega z}$, ſubſtituatur hic valor in æquatione pro preſſionibus π [Art. XII] & $2gz$ pro vv, habebimus $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha y} + \frac{(\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + \beta\beta\omega\omega z)gNy}{\alpha\alpha Mbb}$ $- gyt = \pi$: hinc altitudo liquoris in fiſtula, ſeu $\frac{\pi}{gy}$ $= \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N(\alpha\alpha bba - \alpha\alpha bbz + \beta\beta\omega\omega z)}{\alpha\alpha Mbb} - t$; quæ adeo, pro quacunque determinata z, exprimit generaliter altitudinem liquoris in fiſtula. Hinc, quod curioſum eſt, invenitur ſtatim altitudo illa initialis, hoc eſt, ea quæ obſervaretur in fiſtula primo momento quo orificium inferius aperiretur & liquor in procinctu eſſet exeundi. Cum enim, primo temporis momento, ſit adhuc $z = 0$, erit certe [deletis z] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t.$

XX.

Ante hanc demonſtrationem, potuiſſet aliquis dubius hærere, annon forte, in momento quo orificium BC aperitur, & antequam liquor in actualem motum erumpat, annon, inquam, preſſiones in quolibet loco LM adhuc eædem ſint, ſaltem per momentum temporis, quæ modo ante fuerant, cum orificium BC eſſet adhuc clauſum vel obturatum. Verum trita & vulgaris lex hydroſtatica ubique recepta docet, pro caſu vaſis obturati in BC, liquorem, in fiſtula alicubi in circumferentia ſtrati alicujus LM inſerta & verticaliter erecta, hærere ſuſpenſum in altitudine $= a - t$, hoc eſt, in eodem horizonte cum ſuperficie ſuprema AD liquoris in vaſe contenti. Nunc autem videmus rem aliter ſe habere, in caſu orificii clauſi BC, & aliter in caſu aperti ejuſdem, etiamſi liquor nondum actualiter effluat. Quia enim N, tanquam pars, minor eſt quam tota M, erit $\frac{Na}{M}$ minor quam a, adeoque etiam $\frac{Na}{M} - t$ minor quam $a - t$. Unde patet, in primo inſtanti quo aperitur orificium BC, liquorem jam aliquid quaſi amittere, vel potius remittere de ſua gravitate, quod impendit non ad premendum latera, ſed ad propellendum liquorem; adeo ut latera vaſis non amplius tam graviter premat, quam fecerat ante aperturam factam. Interim etiam hic monendum, me abſtrahere a cauſis acceſſoriis, quæ inventam altitudinem in fiſtula $\frac{Na}{M} - t$ poſſent alterare. Ex. gr. figuræ vaſis aliquid dandum eſt: Si enim eſſet valde amplum & ſubito convergeret in anguſtum foramen, tunc ſine dubio noſtra Theoria poſſet abludere ab eo quod experientia monſtraret: Ratio eſt quia
TAB. XC. *Fig.* 10. Theoria ſupponit, ſtrata Fm, Nl, [*Fig.* 10] eam diſpoſitionem ad motum affectare [etiamſi nondum actu moveantur] ut per totum decurſum amplitudines Ff, Nn &c. conſervent ſitum horizontalem, undique ad latera uſque extenſum, atque inſuper linea centrica GHI tranſeat ubique per puncta media G,



iquis dubius hærere,
C aperitur, & ante-
nnon, inquam, pres-
sint, saltem per mo-
, cum orificium BC
rum trita & vulgaris
o casu vasis obturati
cumferentia strati ali-
erere suspensum in al-
rizonte cum superficie
Nunc autem videmus
BC, & aliter in casu
ctualiter effluat. Quia
ta M, erit $\frac{Na}{M}$ minor
uam $a - t$. Unde pa-
m BC, liquorem jam
tere de sua gravitate,
, sed ad propellendum
s tam graviter premat,
terim etiam hic monen-
quæ inventam altitudi-
Ex. gr. figuræ vasis ali-
plum & subito conver-
bio nostra Theoria pos-
nstraret: Ratio est quia
Fig. 10] eam dispositio-
m actu moveantur] ut
Nn &c. conservent fi-
usque extensum, atque
que per puncta media
G,



G, H, V, I;
latera paulatim,
vel divergunt,
cet; sed in aliis
quod pro exitu
bile est, strata
sed aliquousque
perfecte fluidi,
nimam, quæ si
rum parte liquor
te dispositione a
gurges continuu
fere NEWTON
quam indicavit.
esse consideranda
illam internam g
concepit NEW
vel constitutioni
biente, si posset
suspensi altitudo
jam sit in motu,

Cum vero no
vase peramplo gu
superficies ambien
que ad meditulliu
pendiculariter pe
sursum inflexa sit v
fistula hoc unicu
loco lineæ centri
sæ illæ accessoriæ
supra [Art. XV
randum, ut salte

G, H, V, I; quod quidem iis in vasis & canalibus, quorum latera paulatim, neque subito, ad orificium inferius convergunt vel divergunt, accurate satis ita obtinere debet ut Theoria docet; sed in aliis valde amplis & desinentibus in fundum amplum, quod pro exitu habet foramen angustum, in hisce, ut probabile est, strata se non extendunt per totas vasis amplitudines, sed aliquousque tantum, prout id requirit qualitas liquoris non perfecte fluidi, sed magis minusve tenacis, ut a frictione minimam, quæ sit possibilis, patiatur resistentiam; relicta nimirum parte liquoris prope latera vasis in quiete, vel sine sufficiente dispositione ad motum. Unde fieri potest ut, in tali vase, gurges continuus seu aliqua quasi cataracta generetur, qualem fere NEWTONUS concepit, quamvis non ea necessaria lege quam indicavit. Intelligitur ex dictis, in hujusmodi vasis non esse considerandam eorum figuram externam & artificialem, sed illam internam gurgitis continui a natura formati, non qualem concepit NEWTONUS, sed quæ optime convenit qualitati vel constitutioni liquoris. In hujus ergo gurgitis superficie ambiente, si posset implantari fistula, observaretur liquoris in illa suspensi altitudo omnino semper ut regula nostra postulat, sive jam sit in motu, sive moveri incipiat liquor in vase.

X X I.

Cum vero non possit facile sensibus observari, quousque in vase peramplo gurges vel cataracta terminetur, seu ubinam ejus superficies ambiens existat; securius erit, si fistula intra vas usque ad meditullium, hoc est, usque ad lineam centricam perpendiculariter penetret; ac dein pars altera fistulæ extra vas sursum inflexa sit verticalis. Hoc enim modo altitudo liquoris in fistula hoc unicum monstrat, quanta sit liquoris compressio in loco lineæ centricæ quem orificium fistulæ attingit, & ubi causæ illæ accessoriæ effectum compressionis alterantes, de quibus supra [Art. XV] egimus, jam nihil officiunt. Id tamen curandum, ut saltem portio fistulæ intra liquorem vasis intrudenda da ſit ſatis gracilis, ne alioquin nimia ejus craſſities libero motui liquoris aliquid impedimenti objiciat. His probe obſervatis, non dubito accuratiſſime obſervatum iri ſequentia; 1°. Generalem altitudinem liquoris in fiſtula fore [Art. XII. & XIII.] $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N\omega dz}{\alpha dx} - t$, durante adhuc effluxus acceleratione; 2°. ſed ceſſante ſenſibili acceleratione, ubi nempe velocitas pervenerit ad ſenſibilem uniformitatem, fore $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} - t$; 3°. altitudinem initialem fore [Art. XIX] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t$.

XXII.

Applicatio Theoriæ noſtræ ad Exempla vaſorum & canalium ſemper plenorum.

Sit vaſis alicujus linea centrica in ſitu verticali. Pro hoc caſu faciliori, ubi $\alpha = \varsigma = 1$, habetur [Art. VII] $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{(bb - \omega\omega)x : Mbb\omega})$; id quod invenitur ex reductione æquationis ibi traditæ, & huic caſui applicatæ $(bb - \omega\omega) \times zdx + Mbb\omega dz = bbadx$, poſito ſcilicet $lf = 1$; adeoque exiſtente $x = \infty$, hoc eſt, in caſu æquabilis effluxus ſeu velocitatis uniformis, erit $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; unde fluit Theorema Art.

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. Fig. 13. XVI jam demonſtratum. Sit igitur vas ABCD (Fig. 13) cujuſcunque figuræ, cujus centrica vel altitudo verticalis $= a$, habeatque ſibi adaptatum canalem CK conflatum ex pluribus tubis, ex. gr. tribus cylindricis CG, FI, HK in ſitu horizontali poſitis: Sit amplitudo ſuprema AD [ad quam vas cum tubis jugiter plenum ſupponitur] $= b$, amplitudines CE $= m$, FG $= n$, HI $= q$, & foramen ultimi tubi $= \omega$. Dico fore ſemper $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, adeo ut nec figura vaſis, nec multitudo tu-

borum,

borum, nec eorum amplitudines in conſiderationem veniant], modo prima b & ultima ω ſint datæ, ut & data ſit altitudo vaſis a. Neque etiam ſcire attinet, utrum gurges, vel cataracta ſeſe extendat per totam vaſis capacitatem, an tantum partem aliquam ejus circa lineam centricam occupet. Res eſt clara per Art. XV, quia canalis CK ſupponitur horizontalis, adeoque eadem ſemper eſt velocitas uniformis, quæ eſſet ſi foramen ω immediate ad CE eſſet adaptatum, ope laminæ alicujus perforatæ ad aperturam CE applicandæ.

COROLLARIUM.

Si ω ſit valde parvum reſpectu b, erit $z = a$, ac proinde velocitas aquæ uniformiter effluentis, quæ maxima eſt quam acquirere poteſt, erit æqualis ei quam acquirit corpus grave cadendo ex altitudine $= a$.

XXIII.

Pro invenienda altitudine liquoris in fiſtula implantanda alicubi in canali horizontali CK; notetur in hoc caſu eſſe $t = 0$, quia t ſignificat exceſſum altitudinis verticalis loci ubi fiſtula inſeritur, ſupra altitudinem foraminis per quod liquor egreditur; ſeu, quod idem eſt, t ſignificat altitudinem loci inſertionis fiſtulæ ſupra locum effluxus. Hic autem, ob poſitionem canalis horizontalem, ipſa quoque centrica quaſi horizontalis cenſetur; præſertim ſi ejus tubi ex quibus canalis componitur, non admodum ſunt ampli, ita ut [Art. XXII] ſtrata liquoris per illos fluentis fiant verticalia. Erit igitur altitudo liquoris in fiſtula [Art. XIX], ſeu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} + \frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$; ob $\alpha = \varsigma = \frac{ds}{dt}$. In caſu velocitatis uniformis, ubi (§. præced.) habetur $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; hoc valore ſubſtituto pro

z, eva-

z, evaneſcet terminus poſterior $\frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$ & prior $\frac{z(yy - \omega\omega)}{yy}$ evadet $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$; prodibit igitur altitudo in fiſtula $\frac{\pi}{gy} = \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Conferantur quæ in Partis primæ Appendice † ſub finem jam invenimus, quamvis per aliam viam. Adeoque pro tubo primo CG, ubi y eſt m, erit illa altitudo $= \frac{bba(mm - \omega\omega)}{mm(bb - \omega\omega)}$; pro ſecundo tubo FI, ubi y eſt n, erit illa $= \frac{bba(nn - \omega\omega)}{nn(bb - \omega\omega)}$; pro tertio tubo HK, ubi y eſt q, erit altitudo in fiſtula $\frac{bba(qq - \omega\omega)}{qq(bb - \omega\omega)}$, & ſic porro, quotquot eſſent tubi canalem componentes. Quæ omnia accuratiſſime reſpondent experimentis de hac re ſumptis.

Corollarium.

Altitudo initialis in fiſtula eſt $= \frac{Na}{M}$, ut ſupra inventum eſt pro vaſis ipſis ſine canalibus.

X X I V.

Quod itaque attinet ad altitudinem liquoris in fiſtula inſerenda aliquo in loco ipſius vaſis [& ſi opus producenda uſque ad lineam centricam, quam in poſterum ſemper rectilineam verticalem, alteram vero canali ad vas adaptato ut horizontalem ſupponimus]; ſit locus inſertionis in aliquo puncto ſtrati indeterminati LM, cujus diſtantia ab horizonte infimo $= t$, amplitudo gurgitis [ſi non ſit ipſa LM] quæcunque illa ſit per experientiam capienda $= r$; habebitur altitudo liquoris in fiſtula [per Art. XI huc applicatum] $= \frac{z(rr - \omega\omega)}{rr} + \frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb} - t$, ubi $N = \int \frac{dt}{r}$, contentum inter BE &

† ſupra, pag. 431.

& LM, & $M = \int \frac{lt}{r}$, ſed contentum inter BE & AD [Art. VII]. Pro velocitate liquoris uniformiter effluentis, ubi $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, ſubſtituatur hic valor pro z, & prodibit altitudo in fiſtula $= \frac{bba(rr - \omega\omega)}{rr(bb - \omega\omega)} - t$, [evaneſcit enim terminus in quo N & M habentur]; addita itaque altitudine t, ſeu loci inſertionis, habebitur totalis altitudo ſummitatis liquoris hærentis in fiſtula ſupra horizontem infimum BE $= \frac{bba(rr - \omega\omega)}{rr(bb - \omega\omega)}$. Quod ſi ω infinite parvum reſpectu b & r, erit illa totalis altitudo $= a$, hoc eſt, ſummitas liquoris in fiſtula eſt in eodem horizonte cum ſuprema amplitudine AD: hoc ita evenire debere, vel hinc quoque colligere poſſemus, quia liquor in vaſe quaſi quieſcit. Cæterum initialis altitudo totalis in fiſtula, exiſtente nimirum $z = 0$, hic etiam eſt $= \frac{Na}{M}$. Quæ omnia egregie inter ſe conſpirant.

X X V.

Ponamus nunc canalem horizontalem CK convergere in conum truncatum, ſeu qualemcunque conoïdicum, habereque majorem baſin vaſi obverſam. Erit, pro velocitate uniformi aquæ effluentis, altitudo in fiſtula quovis in loco inter F & H implantata, [nominando amplitudinem FG $= y$] erit, inquam, altitudo illa [ut Art. XXIII expreſſa] $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Hinc ſi minor baſis ſit vaſi applicata, & canalis oblongus non nimis ſubito divergat, ne aqua in illo diffluat, ſed ſtrata ordine inſequentia ſuccedant præcedentibus, ſicuti Theoria rite ſtabilita ſupponit, erit, ob y minus quam ω, preſſio in latera negativa, ac proin mutatur in ſuctionem; qua fit ut, aqua in fiſtula verticaliter deſcendente, & hiante in aquam vaſculo inferiori contentam, attollatur per ſuctionem ad altitudinem $=$

bba

$\frac{bba(\omega\omega - yy)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Quod ſi quoque ω majus ſit quam h, fit numerator & denominator fractionis negativus, ideoque valor ejus rurſus affirmativus, id quod indicat adeſſe preſſionem. Quare exiſtente vaſe ABCD ſemper pleno, quod haberet amplitudinem ſupremam AD minorem orificio canalis conoïdici divergentis, per cujus majorem baſin aqua erumpit, obſervaretur iterum aquam in fiſtula ſurſum erecta continuo & ſine fine aſcenſuram eſſe; in tali enim caſu acceleratio aquæ effluentis nunquam ceſſat, nunquam proin pervenitur ad æquabilitatem velocitatis, quod patet ex generali æquatione [ex Art. VII huc applicata] $(hh - \omega\omega)zdx - Mhh\omega dz = hhadx$; vel clarius ex æquatione Art. XXII expoſita in terminis finitis, $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{(hh - \omega\omega)x : Mhh\omega})$, quæ æquivalet huic $z = \frac{hha}{\omega\omega - hh} \times (f^{(\omega\omega - hh)x : Mhh\omega} - 1)$; ex qua ſtatim liquet, in caſu quo ω majus quam h, evadere $z = \infty$, adeoque velocitatem infinitam, quando x eſt infinitum; ſecus ac fit ſi h majus eſt quam ω.

XXVI.

De brevitate temporis, ab initio effluxus, uſque ad velocitatem ſenſibiliter æquabilem ſeu uniformem.

Etiamſi, accurate loquendo, requiratur tempus infinitum, antequam fluxus aquæ ex vaſis per foramen proſilientis perveniat gradatim ad uniformitatem perfectam & geometricam; Experientia tamen quotidie monſtrat aquam, ex vaſis præſertim amplioribus, quamvis altitudinis vix trium quatuorve pedum, a primo fluxus momento, tanta rapiditate ad maximam ſuam & æquabilem fluxus velocitatem convergere, dum effluit per foramen mediocriter licet anguſtum, ut ſenſibus percipi non poſſint incrementa gradualia velocitatis, per quæ tranſit a quiete ad

ad uniformem & maximam poſſibilem velocitatem quam ſenſibiliter acquirere poteſt. Ut hujus phænomeni rationem reddamus ex noſtra Theoria; conſideremus vas cylindricum vel priſmaticum, ſat magnæ amplitudinis h, & juſtæ altitudinis a; ex quo prorumpat aqua per foramen anguſtum ω in directione horizontali, ſive id fiat immediate ex ipſo vaſe, ſive mediante canali in extremitate orificium ω habente. Supponamus tamen prius, brevitatis gratia, ſcilicet foramen ω in ipſo vaſis latere prope fundum eſſe inſculptum.

XXVII.

Æquatio generalis [Art. VI] pro determinatione velocitatis adhuc creſcentis hæc fuit, $\frac{vv(hh - \omega\omega)}{2h} + \frac{hh\omega vdv}{dx}\int\frac{dt}{y} = gha$, quæ in noſtro caſu, ubi $\int\frac{dt}{y} = \frac{a}{h}$, & $\omega\omega$ juxta hh negligi poteſt, in hanc mutatur $2a\omega vdv = 2ghadx - hvvdx$, ſeu $dx = \frac{2a\omega vdv}{2gha - hvv}$; adeoque elementum temporis $d\theta$, ſeu $\frac{dx}{v}$, erit $\frac{2a\omega dv}{2gha - hvv} = \frac{2a\omega dv : h}{2ga - vv} = \frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}}\left(\frac{dv}{v + \sqrt{2ga}} + \frac{dv}{-v + \sqrt{2ga}}\right)$; integrando habetur $\theta = \frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}} \times l\left(\frac{v + \sqrt{2ga}}{-v + \sqrt{2ga}}\right) =$ [ob $v = \sqrt{2gz}$] $\frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}} \times l\left(\frac{\sqrt{z} + \sqrt{a}}{-\sqrt{z} + \sqrt{a}}\right) =$ [art. XXII] $\frac{a\omega}{h\sqrt{2ga}} \times l((1 + \sqrt{(1 - 1 : f^{hx : a\omega}})) : (1 - \sqrt{(1 - 1 : f^{hx : a\omega}})))$; Eſt enim in hoc caſu $z = a(1 - 1 : f^{hx : a\omega})$. Hinc $\frac{h\sqrt{2ga}}{a\omega}\theta = l((1 + \sqrt{(1 - 1 : f^{hx : a\omega}})) : (1 - \sqrt{(1 - 1 : f^{hx : a\omega}})))$. Tranſeundo a logarithmis ad numeros & rite procedendo, invenietur $f^{hx : 2a\omega} =$ huic fractioni $(f^{h\theta\sqrt{2ga} : a\omega} + 1) : 2f^{h\theta\sqrt{2ga} : 2a\omega}$.

XXVIII.

Verum ex principio dynamico pro lapſu libero gravium, ponendo $C =$ altitudini quam grave libere cadens percurrit tempore dato θ, invenietur $\theta = \sqrt{\frac{2C}{g}}$; substituatur hic valor in fractione modo inventa, & habebitur $f^{bx:2a\omega} =$ huic alteri fractioni $(f^{2b\sqrt{aC}:a\omega} + 1) : 2f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$. Nunc quia amplitudo vasis b valde major supponitur quam amplitudo foraminis ω, & altitudo lapsus liberi C uno secundo horario percurrenda $=$ 15 pedibus, ac præterea, ex natura curvæ logarithmicæ, f major quam binarius; manifestum est, pro qualibet mediocri altitudine vasis a, hunc numerum $f^{2b\sqrt{aC}:a\omega}$ in immensum superare unitatem, ita ut hæc contemni possit in numeratore fractionis nostræ: erit igitur sensibiliter $f^{bx:2a\omega} = f^{2b\sqrt{aC}:a\omega} : 2f^{b\sqrt{aC}:a\omega} = \frac{1}{2}f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$, seu $2f^{bx:2a\omega} = f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$, vel sumendo logarithmos $\frac{bx}{2a\omega} + l\,2 = \frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}$, unde $x = 2\sqrt{aC} - \frac{2a\omega l 2}{b} =$ [ob ω incomparabiliter minus quam b] $2\sqrt{aC} =$ [ponendo $a =$ 4 ped. & $C =$ 15 ped.] $2\sqrt{60}$ ped. $=$ circiter 16 pedibus. Quod si igitur in æquatione $z = a(1 - 1 : f^{bx:a\omega})$, quæ pro quolibet aquæ effluxu longitudinis x determinat velocitatem, substituamus 4 pro a, 16 pro x, 2 pro f [quamvis, quod rem fortius probaret, f majus sit quam 2] & ponamus amplitudinem vasis b esse ad amplitudinem foraminis ω, tantum ut 100 ad 1, habebimus $z = 4(1 - 1 : 2^{400})$, quod ob stupendam parvitatem fractionis $1 : 2^{400}$, non differre censetur a quatuor pedibus, quæ designat altitudinem vasis, & simul illam a qua grave delapsum acquirit velocitatem æqualem ei quam habet effluxus cum pervenerit ad uniformitatem; unde patet uno secundo temporis elapso, aquam effluentem jam habere sensibiliter illam velocitatem uniformem.

Sed ut melius appareat, quanta promptitudine convergat velocitas effluxus ad uniformitatem; videamus quam parum debeat abludere velocitas aquæ effluentis, acquisita post elapsam

deci-

decimam partem unius secundi, a maxima velocitate quam acquirere posset, si effluxus duraret per infinitum temporis spatium. Reducamus pedes ad pollices, & habebimus $a =$ 48 poll. atque reperietur C circiter $=$ 2 poll. unde x seu $2\sqrt{aC}$ circiter $=$ 20 poll. & $f^{bx:a\omega} = f^{2000:48}$, pro quo scribo tantum 2^{40}. Erit itaque $z = a(1 - 1 : 2^{40})$; quod etiamnum, ob imperceptibilem parvitatem fractionis $1 : 2^{40}$, ab ipso a denotante velocitatem uniformem neutiquam differre censendum est.

C O R O L L A R I U M.

Effluxus aquæ ex vasis amplioribus per angusta foramina, potest tuto considerari tanquam æquabilis in momento post motus initium.

XXIX.

Theorema hydraulicum generale directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonstratum per Methodum indirectam virium vivarum.

Ad uberiorem confirmationem bonitatis methodi nostræ directæ & universalis, lubet nunc tradere solutionem indirectam, ex Theoria conservationis virium vivarum eruendam, Propositionis principalis de velocitate aquæ erumpentis ex vase & canali semper pleno, prout illam stabilivimus per æquationem Art. VII traditam.

Concipiamus aquam per Cc [*Fig.* 10] egredientem, dirigi statim ad situm horizontalem, ut considerari possit sine ascensu & sine descensu in suo progressu: Sit vero x longitudo cylindri aquei, secundum directionem obliquam ID, habentis pro basi Cc, qui cylindrus contineat tantam quantitatem aquæ quanta jam egressa est; erit illa quantitas $= \frac{\omega x}{\alpha}$, cujus differentiale $\frac{\omega dx}{\alpha}$ designat particulam aquæ elementarem porro statim egressuram ex TAB. XC. *Fig.* 10.

Ttt 2 Cc,

Cc, poſtquam egreſſa eſt quantitas $\frac{\omega x}{\alpha}$. Sit z altitudo verticalis, ex qua grave aliquod libere delapſum acquirat velocitatem quæſitam, quam nempe debet habere particula illa elementaris aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$; erit, per principium virium vivarum ejus, velocitas $= \surd z$, & ſubvelocitas $= \frac{1}{\alpha} \surd z$, unde ſubvelocitas in G $= \frac{\omega \surd z}{\alpha b}$, ipſa vero velocitas actualis in G in directione tangentis $= \frac{\beta \omega \surd z}{\alpha b}$. Similiter ſubvelocitas in quolibet puncto H $= \frac{\omega \surd z}{\alpha y}$, adeoque ipſa actualis velocitas in H $= \frac{\omega dz \surd z}{\alpha y dt}$.

X X X.

Quoniam autem per ſingulas amplitudines, in toto canali, eodem tempuſculo, eadem quantitas aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ perfluere debet, concipienda eſt talis quantitas elementaris $\frac{\omega dx}{\alpha}$ tanquam collocata ſupra ſupremam Ee, in altitudine verticali $= \frac{\beta\beta \omega \omega z}{\alpha \alpha b b}$, ut convenienti tempore cadere incipiens ſua gravitate perveniat ad amplitudinem Ee, ibique reſarciat, eodem momento & eadem velocitate $\frac{\beta \omega \surd z}{\alpha b}$, particulam ſupremam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſcendentem in canali, atque hoc modo canalis jugiter plenus conſervabitur, prout conditio Problematis id requirit.

X X X I.

Quod ſi igitur ſingulæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſua quæque altitudine $\frac{\beta\beta \omega \omega z}{\alpha \alpha b b}$ collocatæ ſupra Ee fuerint, & jam omnes ſucceſſive delapſæ ſint, per Ee ingreſſuræ, canalem ſemper plenum conſervantes, patet æqualem quantitatem aquæ $\int \frac{\omega dx}{\alpha}$ ſeu $\frac{\omega x}{\alpha}$ per orificium Cc eſſe egreſ-

egreſſam, quam in plano horizontali Cc prolongato moveri concipimus, & ita quidem ut ſingulæ ejus particulæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ habeant ſuam acquiſitam velocitatem $\surd z$. Quare unaquæque ex particulis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ cenſenda eſt deſcendiſſe ex loco primitivo quietis, uſque ad infimum horizontem BCc prolongatum, hoc eſt, ex altitudine $= \frac{\beta\beta \omega \omega z}{\alpha \alpha b b} + AB = \frac{\beta\beta \omega \omega z}{\alpha \alpha b b} + a$. Oportet itaque multiplicare deſcenſus per particulas deſcendentes, ut habeatur $\frac{\beta\beta \omega^3 z dx}{\alpha^3 b b} + \frac{a \omega dx}{\alpha}$; quod integratum dat $\frac{\beta\beta \omega^3}{\alpha^3 bb} \int z dx + \frac{a \omega x}{\alpha} =$ vi vivæ ex deſcenſu univerſo particularum gravium collectæ. Hæc autem æqualis eſſe debet effectui ſuo, qui conſiſtit in aggregato productorum, quæ fiunt ducendo ſingulas particulas in quadrata ſuarum reſpective velocitatum.

X X X I I.

Quocirca particulam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ jam egreſſam ex canali multiplico per quadratum velocitatis ſuæ, quod eſt z, & habebo $\frac{\omega z dx}{\alpha}$, cujus integrale $\frac{\omega}{\alpha} \int z dx$, exprimit vim vivam ex velocitatibus oriundam totius materiæ aqueæ ex canali egreſſæ; cui addenda adhuc eſt ea quam habet omnis materia intra canalem fluens, & quæ reperitur multiplicando ſingula ſtrata $y dt$ per quadratum ſuarum reſpective ultimarum velocitatum $\frac{\omega \omega z ds^2}{\alpha \alpha y y dt^2}$, adeo ut cujuſlibet ſtrati $y dt$ prodeat vis viva ex motu ſuo oriunda $\frac{\omega \omega z ds^2}{\alpha \alpha y y dt^2} \times y dt = \frac{\omega \omega z ds^2}{\alpha \alpha y dt}$: proinde vis viva omnium ſtratorum $= \frac{\omega \omega z}{\alpha \alpha} \int \frac{ds^2}{y dt}$, per totum canalem ſumendorum = [ob datum per magnitudinem datam totius canalis $\int \frac{ds^2}{y dt}$, quod di-

 catur

catur M] $\frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$. Sumendo itaque aggregatum ambarum harum virium vivarum ex motu oriundarum, habebimus vim vivam universi systematis aquei $= \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$.

XXXIII.

Hinc æquando hanc vim ex motu collectam, cum illa quam modo ante ex descensu particularum collegimus; suppeditabitur nobis hæc æquatio $\frac{\beta\beta\omega^3}{\alpha^3 bb}\int z dx + \frac{a\omega x}{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$, quæ differentiata & a fractionibus liberata, hanc præbet, $\beta\beta\omega\omega z dx - \alpha\alpha bb z dx = M\alpha bb\omega dz - \alpha\alpha bb a dx$, vel denique [reductione peracta] hanc $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega) z dx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bb a dx$: omnino ut invenimus per methodum directam [Art. VII].

COROLLARIUM.

Si b vel Ee sit amplitudinis permagnæ respectu ω vel Cc, æquatio inventa abit in hanc $\alpha z dx + M\omega dz = \alpha a dx$, & pro effluxu uniformi in hanc $z = a$. Sin vero Ee non quidem sit valde magnæ amplitudinis respectu Cc, velimus tamen ut aqua nova succedat continuo descendenti intra canalem, non cum velocitate acquisita aliqua, sed ex quiete incipiat succedere, ita ut etiam hoc modo canalis semper plenus conservetur; poterit hoc effectui dari, si ad Ee (*Fig.* 14) adaptatur vas amplissimum sed valde parvæ altitudinis, quod sit aqua plenum. Effluet utique ex illo aqua sumens motum ex quiete, & tamen influens in canalem cum debita velocitate, conservabit jugiter ejus plenitudinem. Res ipsa patet ex figura: Ubi canalis ECce adaptatum habet vas cylindricum amplissimum AQVK, cujus altitudo AK vel QV valde parva supponitur, ita ut altitudinem verticalem AB canalis Ec sensibiliter non augeat, id est, ut KB sumi possit pro AB, & tamen capacitas AV hujus

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 14.

jus vasis cylindrici permagnam aquæ copiam contineat. Quare ut jam velocitas aquæ effluentis per Cc determinetur, non amplius Ee, sed KV, sumenda est pro prima amplitudine b, manente interim altitudine verticali a canalis, quia per hypothesin sensibiliter non differt AB a KB. Hoc pacto, habebimus semper pro velocitate uniformi $z = a$, hoc est, eam velocitatem quam grave acquireret cadendo libere ex altitudine $= a = $ AB, seu KB.

XXXIV.

Exemplum singulare determinandi motus aquæ in canali conoidico verticaliter descendentis, ubi nihil effluit nullaque nova aqua descendenti succedit.

Esto Hyperbola BEG (*Fig.* 15) inter asymptotos orthogonales, unam verticalem AM, alteram horizontalem AH; cujus applicatæ DI, EK, FL, GM, &c. designent amplitudines ipsas canalis conoidici in infinitum continuati, qui generari intelligitur, si alia hyperbola inter easdem asymptotos [cujus applicatæ sunt ut radices hyperbolæ ordinariæ prioris] descripta circa asymptoton verticalem, tanquam circa axem, revolvitur. Concipiatur in loco quocunque canalis dari partitionem aquæ, designatam per aream hyperbolicam DK, a quiete descendere incipientem, & eam descendendo pervenisse in locum quemlibet alium FM; ita ut per consequens FM sit $=$ DK. Quæruntur velocitates in GM, in FL, &c. & velocitas cujuscunque strati intermedii POop?

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 15.

XXXV.

Sit unumquodque rectangulum coordinatarum, hoc est, productum amplitudinis cujusque PO per altitudinem conoidis AO $= aa$; item abscissæ datæ AI $= b$, AK $= c$; descensus quilibet assumptus AL amplitudinis superioris $= x$. Erunt, ex natura

tura hyperbolæ, amplitudo $DI = \frac{aa}{b}$, $EK = \frac{aa}{c}$, $FL = \frac{aa}{x}$, & præterea [ob $DK = FM$] $AM = \frac{cx}{b}$, proinde $GM = \frac{aab}{cx}$; ipſaque area vel potius ſolidum DK vel FM $= aa(lc - lb)$. Erit porro [calculo docente] centri gravitatis areæ DK diſtantia ab horizonte $AH = \frac{c-b}{lc-lb}$, & diſtantia centri gravitatis areæ FM [nota, per aream ſemper ſolidum me intelligere] ab eadem $AH = \frac{x(c-b)}{b(lc-lb)}$. Hinc deſcenſus centri gravitatis ex ſitu DK in ſitum $FM = \frac{(x-b)\times(c-b)}{b(lc-lb)}$, multiplicetur per quantitatem aquæ deſcendentis deſignatam per $aa(lc-lb)$, erit productum $\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b}$ = vi vivæ ex deſcenſu productæ.

XXXVI.

Dicatur jam velocitas in $GM = \sqrt{z}$, erit velocitas in $FL = \frac{b}{c}\sqrt{z}$: Dicatur etiam quælibet $AO = y$, erit $PO = \frac{aa}{y}$, ſtratum $Po = \frac{aady}{y}$, ipſaque ejus velocitas $= \frac{by}{cx}\sqrt{z}$. Hujus ergo quadratum ductum in ſtratum Po dat $\frac{aabbzydy}{ccxx}$ = vi vivæ ſtrati Po, cujus integrale debite correctum [ſumendo a, b, c, z & x pro conſtantibus] $= \frac{aabbz}{2ccxx}yy - \frac{aabbz}{2cc}$ = [in caſu y, ſeu AO, $= \frac{cx}{b}$ ſeu AM] $\frac{1}{2}aaz - \frac{aabbz}{2cc} = \frac{aaz}{2cc}(cc-bb)$ = vi vivæ totius maſſæ aqueæ ex motu oriundæ. Comparando hanc cum præcedente, habebimus

aa

$\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} = \frac{aaz}{2cc}(cc-bb)$; unde per reductionem invenietur $z = \frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ = quadrato velocitatis in GM; adeoque quadratum velocitatis in $FL = \frac{(x-b)2b}{c+c}$, & quadratum velocitatis cujuſcunque ſtrati intermedii Po [pro abſciſſa AO ſeu y] $= \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$.

COROLLARIUM I.

Stratum infimum EK, deſcendens ex quiete in ſitum GM, acquirit majorem velocitatem quam corpus grave libere cadens ex altitudine KM. Eſt enim $\frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ majus quam KM, vel quam $\frac{cx}{b} - b$.

COROLLARIUM II.

Sed ſtratum ſupremum DI deſcendens in locum FL, acquirit minorem velocitatem quam grave cadens libere ex altitudine IL. Nam $\frac{(x-b)2b}{c+b}$ minus eſt quam IL, ſeu quam $x-b$.

COROLLARIUM III.

Partes ergo inferiores maſſæ aqueæ fortius, & ſuperiores ſegnius accelerantur, quam ſi libere deſcenderent a ſola naturali gravitate animatæ. Quod vel hinc quoque citra calculum prævideri poterat, quia partes aquæ in locis anguſtioribus premuntur ab incumbentibus, atque ſic ad majorem accelerationem incitantur; contra vero renituntur partibus iis quæ occupant loca ampliora, atque ita ſuperiores in acceleratione ſua naturali retardantur.

COROLLARIUM IV.

Datur itaque alicubi ſtratum P o intermedium, quod nec incitatur nec retardatur, ſed eodem ritu acceleratur, ac ſi libere deſcenderet. Hoc autem ut determinetur, facio ut AL ad AO, ſeu ut x ad y, ita AI ſeu b ad Aω, quæ erit $\frac{by}{x}$, eritque $\pi\omega$ ſitus primitivus ſtrati P o. Proinde ωO, ſeu $y - \frac{by}{x}$, eſt altitudo per quam deſcendit ſtratum P o. Ut igitur acceleratio hujus ſtrati ſit = naturali, oportet tantum facere $y - \frac{by}{x} = \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$; nunc prodibit $y = \frac{(c+b)x}{2b}$; id quod oſtendit diſtantiam AO eſſe mediam arithmeticam inter AL & AM; ſicuti Aω eſt media arithmetica inter AI & AK: adeoque LO = OM, & Iω = ωK. His itaque in locis, ſtratum intermedium P o tantundem premitur deorſum verſus ab incumbente aqua FO, quantum ſurſum verſus reprimitur ab aqua ſubjecta p M; ita ut haud aliter deſcendat, quam ſi libere deſcenderet a ſola gravitate naturali animatum. Cæterum & hoc quoque obſervandum, in iiſdem his locis fieri maximam aquæ compreſſionem; unde concludimus, ſi in loco ſtrati P o insereretur fiſtula verticaliter, fore ut aqua in illa ad majorem altitudinem a loco inſertionis aſcenderet, quam ſi inſereretur in cujuſlibet alius loci ſtrato inter FL & GM. Etenim altitudo in fiſtula dependet a ſola aquæ compreſſione, ut ex ſupra explicatis patet.

XXXVII.

Collatio hujus ſolutionis per vires vivas, cum ea quæ elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam.

In Scripti hujus hydraulici Parte ſecunda Art. VII* dedimus per

* ſupra pag. 437.

per principia dynamica æquationem generaliſſimam pro determinatione velocitatis, nempe hanc $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$. Sed ibi ſupponitur vas vel canalis ſemper plenus, ſuccedente nimirum continuo liquore novo, eadem velocitate ſeſe adjungente illi qui in ſuprema amplitudine jam jam deſcendit, ipſeque canalis exiſtit datæ & determinatæ altitudinis verticalis. Cum vero, in præſenti exemplo, canalis ſit indefinitæ altitudinis, in quo quippe pars tantum liquore plena FM locum ſuum ſemper mutat, habetque proin altitudinem ſuam LM ſingulis momentis variabilem; adeo ut non ſtatim videatur hujus exempli caſum contineri ſub formula illa inventa Art. VII; cum præſertim nullus novus liquor hic ſuccedat deſcendenti, ſed una eademque ſemper ejus quantitas DK vel FM in canali conſervetur, modo hunc, modo alium locum occupans.

XXXVIII.

Interim monſtrabimus, quo pacto, per aliquam mentis fictionem, præſens caſus reduci poſſit ad leges hypotheſeos Art. VII ſtabilitæ. Conſiderandum nempe ſpatium primitivum DEKI ſub ſpecie canalis datæ altitudinis IK, cujus amplitudo ſuperior eſt DI, inferior EK; utraque data & determinata: Jam ex EK dum liquor fluit, occupaturus loca inferiora canalis prolongati; fingo per ſupremam amplitudinem DI ſubingredi fluidum aliquod, tam gravitatis quam omnis inertiæ vel reſiſtentiæ expers, quod, quamvis tale in rerum natura non detur, tamen ita fingi poteſt, ut nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium quod a liquore deſcendente vacuum relinqueretur. Hoc ita præſuppoſito, deſcenderit jam liquor realis ex DK in locum FM: Hujus ſingulorum ſtratorum PO vires, tum hydroſtaticas tum hydraulicas, transfero ad ſupremam amplitudinem DI, ubi premat fluidum fictum, quod occupat ſpatium DFLI, eundemque effectum præſtare debet, quam præſtat vis a gravitate oriunda liquoris realis FM pariter tranſlata ad amplitudinem ſupremam

 DI,

DI, & hæc eſt illa vis quam vocavi p ſeu gha: omnia applicando ad mentem Theoriæ noſtræ in Scripto hoc hydraulico expoſitæ. Atque ſic nullæ aliæ vires in computum venient, quam quæ reſultant a gravitate & motu liquoris realis, fluido ficto nihil omnino contribuente, & nullum alium in finem inſerviente, quam ut tranſmittat vires translatas ad depellendum liquorem realem FM.

XXXIX.

Nihil igitur aliud reſtat, quam ut debita fiat applicatio methodi expoſitæ in Art. IV, & V; cum in finem ut accommodetur ad exemplum propoſitum: ubi ſtatim patet, eſſe $\alpha = \beta = 1$; reliquæ vero litteræ deſignant hic ea quæ ſequuntur, ſcilicet $b =$ DI, $\omega =$ EK, a ſeu altitudo liquoris realis $=$ LM, $M =$ ſummæ omnium $\frac{\mathrm{Oo}}{\mathrm{IO}}$ in altitudine LM contentorum; item $z =$ altitudini ex qua grave libere delapſum acquirit velocitatem v, qua cum liquor realis, ſub initium deſcenſus, vel poſtea fluidum fictum effluit per EK, ac denique $dq =$ progreſſui momentaneo ex amplitudine EK.

XL.

His probe obſervatis, nunc ita procedo: Poſita velocitate per EK $= v$, erit velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$; progreſſus momentaneus per GM $= d(\mathrm{AM}) = \frac{cdx}{b}$, progreſſus per PO $= d(\mathrm{AO}) = \frac{ydx}{x}$, progreſſus per EK ſeu $dq = \frac{cdx}{x}$; qui progreſſus omnes cum debeant eſſe ſimultanei, ſunt utique in ratione reciproca amplitudinum, ſicuti & ipſæ velocitates, adeoque in ratione directa diſtantiarum ab horizontali AH. Quærenda jam eſt, ad imitationem Art. IV [exiſtente hic $\alpha = \beta = 1$] vis hydroſtatica, quæ exprimitur per ſemiſſem amplitudinis

dinis ſupremæ DI multiplicatum per differentiam quadratorum velocitatum maximæ per GM & minimæ per FL. Eſt autem DI $= \frac{aa}{b}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$, & velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, unde tota vis hydroſtatica $= \frac{aa}{2b}\left(\frac{xxvv}{bb} - \frac{xxvv}{cc}\right) = \frac{aaxxvv}{2b^3cc} \times (cc - bb)$.

XLI.

Ad imitationem Art. V, vim hydraulicam ita determino. Vim acceleratricem ſtrati indefiniti Po, quam voco γ', multiplico per ejus progreſſum $\frac{ydx}{x}$, & habebo per principium dynamicum $\frac{\gamma' ydx}{x} = u'du' = \frac{yyvdv}{cc}$; unde vis acceleratrix progreſſiva $\gamma' = \frac{xyvdv}{ccdx}$, & ipſa vis motrix ſtrati Po, hoc eſt, $\gamma'\,\mathrm{Po} = \frac{aaxvdvdy}{ccdx}$, quæ tranſlata ad amplitudinem DI, ſeu ad $\frac{aa}{b}$, facit $\frac{aaxvdvydy}{bccdx}$, quod integratum dat $\frac{aaxvdvyy}{2bccdx} =$ [corrigendo vel ſumendo per omnes yy, quæ ſunt contentæ in intervallo LM] $\frac{aax^3vdv(cc - bb)}{2b^3ccdx} =$ vi hydraulicæ. Aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ erit $\frac{aaxxvv(cc - bb)}{2b^3cc} + \frac{aax^3vdv(cc - bb)}{2b^3ccdx}$ ſeu $\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv + \frac{xvdv}{dx}\right) \times (cc - bb)$, quod virium aggregatum debet eſſe æquale vi primitivæ tranſlatæ ex gravitate ſtratorum oriundæ. Habetur autem vis primitiva tranſlata cujuſlibet ſtrati Po, faciendo ut PO ad DI, ſeu ut AI ad AO, hoc eſt, ut b ad y, ita $g \times \mathrm{Po}$ ſeu $\frac{gaady}{y}$ ad $\frac{gaady}{b}$, quod debite integratum per intervallum LM dat $\frac{gaax(c - b)}{bb}$ pro tota vi primitiva tranſlata.

X L I I.

Lucramur ergo æquationem inter aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ, atque inter vim primitivam translatam, quæ æquatio ita ſe habet $\frac{aaxx}{2bcc}(vv + \frac{xvdv}{dx}) \times (cc - bb) = \frac{gaax(c - b)}{bb}$, unde dividendo per $\frac{aax}{bb}(cc - bb)$ prodit hæc altera $\frac{x}{2bcc}(vv + \frac{xvdv}{dx}) = \frac{g}{c+b}$, vel reducendo, hæc, $xvvdx + xxvdv = \frac{2gbccdx}{c+b}$; atque integrando, & corrigendo debito modo [ut AL, vel x, exiſtente $=$ AI vel $= b$, ipſum v ſit $= 0$] habebitur $\frac{1}{2} xxvv = \frac{2gbccx - 2gbbcc}{c+b}$, aut ſcribendo, ſecundum legem dynamicam, $2gz$ pro vv, & dividendo per g, erit $xxz = \frac{2bccx - 2bbcc}{c+b}$, adeoque $z = \frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$, quod determinat velocitatem per EK; ex qua nunc determinatur velocitas per quamlibet aliam amplitudinem. Faciendo namque ut GM² ad AM², hoc eſt ut cc ad $\frac{ccxx}{bb}$, ſive ut bb ad xx, ita $\frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x - b)2cc}{b(c+b)}$, erit hoc $=$ altitudini, ex qua grave libere cadendo acquirit velocitatem quam habet liquor in puncto infimo M. Faciendo porro ut cc ad xx, ita $\frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x - b)2b}{c+b} =$ altitudini unde grave libere delapſum habebit velocitatem eam quæ convenit liquori in ſupremo puncto L. Ac denique faciendo ut cc ad yy, ita $\frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x - b)2byy}{xx(c+b)}$; indicabit hoc altitudinem ex qua grave libere cadere debet ut acquirat debitam velocitatem, quam liquor habebit in puncto quolibet dato intermedio O. Quæ omnia mirifice conſpirant cum iis quæ invenimus per Theoriam virium vivarum.

XLIII.

X L I I I.

Sed & hoc jam præſtare poſſumus, quod non æque facile præſtari poteſt per vires vivas, ſcilicet invenire quantum liquor inter deſcendendum in quavis ſui parte comprimatur. Vidimus quidem ſupra in *Coroll.* IV, liquorem, poſtquam ex ſitu initiali ſeu primitivo DK deſcendit in ſitum FM, in ſingulis ſuis partibus PO diverſas pati compreſſiones; atque earum maximam eſſe, ubi PO bifariam ſecat LM: verum ejus quantitatem determinare & cum pondere aliquo dato comparare, nedum in aliis locis, cum ſcilicet PO dividit LM in alia quacunque ratione, res eſſet altioris indaginis, ſi quis id ex natura virium vivarum eruere vellet. Per methodum noſtram directam, in capite de preſſionibus expoſitam, haud arduum eſt quæſitum obtinere, etiam pro hoc peculiari exemplo.

X L I V.

Sit itaque indagandum, quanta vi maſſa liquoris FM comprimatur in quolibet loco PO, quam vim quærendam hic etiam vocabo π. Oſtendi Art. XI & XII, ſi portio tantum PM, remoto reſiduo FO, deſcendere pergeret, ſed ita ut non ſolum a propria gravitate, ſed inſuper etiam a π urgeretur, fore ut [ſaltem primo momento] eodem modo acceleraretur, quo accelerari debet tota maſſa FM a ſola ſua gravitate. Secetur IK in ω in ſimili ratione ut ſecta eſt LM in O, ita ut AI : Aω = AL : AO; erit $\pi\omega$ ſitus initialis ipſius P. Et πK = PM. Sit AL ad AO, vel AI ad Aω, ut 1 ad n, proinde AO $= nx$ & A$\omega = nb$. Fingamuſque liquorem in πK contentum deſcendere vi ſuæ gravitatis, ac præterea vi π, quæ in quolibet loco deſcenſus ipſi convenit, ut acceleratio fiat perinde ac ſi tota maſſa DK vi ſola ſuæ gravitatis deſcenderet. Quare quod erat AL, vel x, id nunc eſt AO, vel nx; & quod erat AI, vel b, id nunc eſt nb. Ideoque vires hydroſtaticæ & hydraulicæ invenientur,

tur,

tur, ſi nx pro x, & ndx pro dx, item nb pro b ſcribatur, atque ſic habebitur $\frac{aannxxvv}{2n^3b^3cc}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aaxxvv}{2nb^3cc}(cc - nnbb)$ $=$ vi hydroſtaticæ, nec non $\frac{aan^3x^3vdv}{2n^3b^3ccndx}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}(cc - nnbb) =$ vi hydraulicæ. Vis autem per tranſlationem a gravitate oriunda, quæ erat $\frac{gaax(c - b)}{bb}$, nunc eſt utique $\frac{gaanx}{nnbb}(c - nb)$ vel $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$.

X L V.

Sumendo jam aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ, illudque æquando cum vi primitiva tranſlata ex gravitate oriunda $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$, cui addi debet vis compreſſionis tranſlata ex PO in $\pi\omega$, quæ habetur ſi facimus ut PO ad $\pi\omega$, ſeu ut AI ad AL, hoc eſt, ut b ad x, ita π ad $\frac{x\pi}{b}$, lucramur hanc æquationem $\left(\frac{aaxxvv}{2nb^3cc} + \frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}\right) \times (cc - nnbb) = \frac{gaax}{nbb} \times (c - nb) + \frac{x\pi}{b}$, quæ ordinata hanc induit formam $\frac{aa}{2nbbcc} \times (d(\frac{1}{2}xxvv) \times (cc - nnbb)) = \frac{gaadx}{nb} \times (c - nb) + \pi dx$. Quoniam autem velocitas maſſæ diminutæ PM, ſed preſſæ a vi π, eadem eſſe debet quæ eſt velocitas maſſæ integræ FM, pro qua velocitate modo ſupra invenimus $\frac{1}{2}xxvv = \frac{2gbccx - 2gbbcc}{c + b}$; ſcribamus hujus differentiale, quod eſt $\frac{2gbccdx}{c + b}$ pro $d(\frac{1}{2}xxvv)$, & prodibit $\frac{gaadx}{nb(c + b)}(cc - nnbb) = \frac{gaadx}{nb}(c - nb) + \pi dx$. Dividendo per dx, & tranſponendo obtinebimus $\pi = \frac{gaa(cc - nnbb - (c - nb) \times (c + b))}{nb(c + b)} = \frac{gaa(cn - c - nnb + nb)}{n(c + b)}$. Quocirca ſi ad PO inſeratur fiſtula verticaliter erigenda, ut cognoſca-

gnoſcatur ad quam altitudinem liquor in illa [ſaltem per tempus breviuſculum] ſuſpenſus hærere poſſet, dividendum eſt π per $g \times$ PO, hoc eſt, per $\frac{gaa}{nx}$, ut habeatur $\frac{\pi nx}{gaa} = \frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c + b}$ $=$ altitudini liquoris in fiſtula, ex qua altitudine æſtimanda eſt compreſſio abſoluta liquoris in PO. *Q. E. I.*

X L V I.

Quod ſi porro determinare oporteat punctum O in data qualibet LM, ubi intenſitas compreſſionis ſit maxima, id eſt, ubi liquor in fiſtula maximam obtinebit altitudinem; differentianda eſt quantitas inventa $\frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c + b}$, ſumto n pro variabili, & reliquis pro conſtantibus; quo facto prodibit $c + b - 2bn = 0$, unde reſultat $n = \frac{c + b}{2b}$, adeoque nx ſeu AO $= \frac{(c + b)x}{2b} = \frac{c + b}{2b}$ AL $= \frac{c}{2b}$ AL $+ \frac{1}{2}$ AL $= \frac{1}{2}$ AM $+ \frac{1}{2}$ AL. Unde patet punctum O maximæ compreſſionis eſſe in medio inter M & L; plane ut ſupra in *Coroll.* IV conjectando prævidimus.

X L V I I.

Præterea, ſi in expreſſione $\frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c + b}$ ſubſtituatur valor inventus ipſius n, qui eſt $\frac{c + b}{2b}$, habebitur ipſa liquoris maxima altitudo in fiſtula $\frac{x(c - b)^2}{4b(c + b)}$. Hinc quia $\frac{1}{2}$ LM, ſeu LO $= \frac{x(c - b)}{2b}$, erit LO, ſeu altitudo liquoris in canali ſupra punctum O ubi fiſtula inſeritur, ad altitudinem liquoris in fiſtula $= \frac{x(c - b)}{2b} : \frac{x(c - b)^2}{4b(c + b)} = 2(c + b) : c - b$, ſeu ut duplum ſummæ diſtantiarum primitivarum AK + AI ad earundem ſimplam differentiam, hoc eſt ut 4 Aω ad IK.

X L V I I I.

Cæterum, vel ſola ratio ſana dictat, maſſam liquoris deſcendentis FM in extremitatibus FL & GM nullam pati compreſſionem, adeoque altitudinem in fiſtula tam in L quam in M inſerta debere eſſe nullam. Et hoc ipſum quidem per formulam confirmatur; nam in priori caſu, ubi $n = 1$, mutatur formula $\frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c + b}$ in hanc $\frac{x(c - c - b + b)}{c + b} = 0$; in poſteriori vero, ubi $n = \frac{c}{b}$, eadem mutatur in hanc $\frac{x(cc - cb - cc + cb)}{b(c + b)}$ etiam $= 0$.

X L I X.

S C H O L I U M III.

Hoc exemplum liquoris ſua gravitate deſcendentis in Tuba hyperbolica ad indefinitum continuata, quod ſpeciminis loco fuſius pertractavi, monſtrat quomodo ſit procedendum in aliis ejuſmodi caſibus, ubi liquor intra canalem ſufficienter longum eadem ſemper quantitate delabitur, ita nempe ut nihil inde effluat, nihilque pariter novi liquoris ſubingrediatur. Aperit inſuper aditum ad ſolutionem Problematum de determinando motu oſcillatorio fluidorum in tubis recurvis vel reflexis, cujuſcunque ſint figuræ atque amplitudinis utcunque variantis: In talibus namque tubis ſeu ſiphonibus, dum pars quædam fluidi per unum crus deſcendit, per alterum crus, licet multum diſſimile, pars alia fluidi priori æqualis aſcendit, hoc eſt, negative deſcendit: ita ut perinde ac in tubis continuo deorſum vergentibus eadem ſemper fluidi maſſa conſervetur. Unde ſi, mutatis mutandis quantum ad ſigna in calculo, per eandem methodum quam adhibuimus in allato exemplo procedatur, haud arduum erit pervenire ad ſupputationem velocitatis fluidi tranſfluentis in ſingulis locis, pro quolibet ejus deſcenſu vel aſcenſu: unde omnia reliqua dependent.

L.

L.

De Vaſis quæ interea dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil novi liquoris deſuper influentis accipiunt.

Pro iſtis caſibus vaſorum, quæ emittendo liquorem, ſed nullum alium accipiendo, tandem deplentur atque evacuantur; poſſet adhiberi methodus illa, quam explicui §.XLIV & ſequentibus; ubi agebatur de determinatione motus datæ maſſæ aqueæ intra canalem hyperbolico-conoidicum continuo delabentis, ſcilicet ope fluidi fictitii, quod nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium ab aqua deſcendente vacuum relictum: iſta vero mentis fictione inſuper habita atque neglecta, ſufficiet in rem præſentem æquatio noſtra in §. VII data, $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega) \times z\,dx + \alpha Mhh\omega\,dz = \alpha\alpha hh\,a\,dx$, quam pro vaſis ſemper plenis exiſtentibus valere vidimus. Illa quippe æquatio nullo negotio accommodabitur ad ea quoque vaſa, quæ ob nullum novum liquorem influentem paulatim deplentur, atque adeo in quibus ſuprema liquoris ſuperficies Ee (*Fig.* 10) continuo deſcendit. TAB. XC. *Fig.* 10.

L I.

Ad imitationem ejus quod pro caſu vaſis cylindrici jam ſolutum extat in Parte prima Art. XII*, conſideremus hic vas cujuſcunque figuræ, in quo ſuperne nullus ingrediatur novus liquor, dum ille qui jam ineſt per orificium infimum continuo ductu elabitur. Ponamus itaque ſupremam ſuperficiem deſcendendo ex ſitu Ee perveniſſe in ſitum Ff, ad quod momentum determinanda ſit liquoris effluentis velocitas: quem in finem ipſa amplitudo Ff, ſeu y, licet variabilis ſumenda eſt pro ſuprema amplitudine, cui reſpondet altitudo BP ſeu t, quæ & ipſa variabilis eſt [hoc certe permittit natura tranſlationis virium motricium in fluidis, ut cuilibet attendenti patebit], ipſum vero

* ſupra pag. 405.

vero M ſeu $\int \frac{ds^2}{ydt}$, quod in vaſis conſtanter plenis conſtans erat, nunc eſt variabile; capiendum nempe per altitudinem variabilem B P.

Scribatur ergo in æquatione noſtra yy pro hh, t pro a, & $\frac{ds}{dt}$ pro $\mathfrak{C}$, atque prodibit hæc æquatio, quæ deſideratur; $(\alpha\alpha yy - \omega\omega \frac{ds^2}{dt^2})\, z dx + \alpha yy \omega dz \int \frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha yy t dx$. Ex eo vero quod elementum aquæ elabentis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ = ſtrato deſcendenti; $-ydt$ [pono $-ydt$, quia creſcente x decreſcit t] erit $dx = \frac{-\alpha ydt}{\omega}$. Subſtituendo igitur hunc valorem pro dx, habebit æquatio hanc faciem $(\alpha\alpha yy - \omega\omega \frac{ds^2}{dt^2})\, zdt - \omega\omega y dz \int \frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha yy t dt$; quæ pro vaſis habentibus centricam verticalem, ubi $\alpha = 1$, $ds = dt$, in hanc abit æquationem ſimpliciorem $(yy - \omega\omega)\, z dt - \omega\omega y dz \int \frac{dt}{y} = yy t dt$.

L I I.

Ex hac æquatione exemplum ex prima Parte allegatum [Art. XII], ubi vas ſupponebatur cylindricum, nunc porro ad finem proſequemur, ac quædam notatu digna adjiciemus. Hic igitur viciſſim ponendum eſt h pro conſtante y, atque $\int \frac{dt}{y}$ erit $\int \frac{dt}{h}$, ſive $\frac{t}{h}$, totuſque terminus $\omega\omega y dz \int \frac{dt}{y}$ erit $\omega\omega t dz$; unde æquatio pro caſu cylindri recti hanc formam habebit $(hh - \omega\omega)\, z dt - \omega\omega t dz = hht dt$, quæ, per modum integrandi dudum mihi uſitatum, dat in terminis finitis valorem quæſitum ipſius $z = \frac{hht}{hh - 2\omega\omega} \times (1 - (t:a)^{(hh - 2\omega\omega):\omega\omega})$.

Hinc ſtatim liquet velocitatem, tam initialem quam finalem, eſſe nullam, hoc eſt in caſu quo $t = 0$, vel quo $t = a$: unde colligere eſt alicubi fore velocitatem maximam aquæ, tum effluentis ex vaſe, tum in ipſo vaſe deſcendentis. Ea ut determinetur, quærendum eſt maximum z, quod fiet, quando ſuperficies aquæ in cylindro deſcendit ad eam a baſe diſtantiam t, quæ ſit $= a \left(\frac{\omega\omega}{hh - \omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh - 2\omega\omega)}$, id quod duabus viis invenitur; nempe vel differentiando valorem inventum ipſius z more ſolito; vel quod commodius eſt, ponendo, in præcedente æquatione differentiali $(hh - \omega\omega)\, z dt - \omega\omega t dz = hht dt$, terminum ſecundum $\omega\omega t dz$ = nihilo; unde prodit $z = \frac{hht}{hh - \omega\omega}$; qui comparatus cum invento valore generali $\frac{hht}{hh - 2\omega\omega} (1 - (\frac{t}{a})^{(hh - 2\omega\omega):\omega\omega})$ dabit, ut dixi, $t = a \left(\frac{\omega\omega}{hh - \omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh - 2\omega\omega)}$.

L I I I.

Interim, in caſu particulariſſimo, ubi $hh = 2\omega\omega$, ubi amplitudo vaſis cylindrici ſe habet ad amplitudinem foraminis, ut $\sqrt{2}$ ad 1, hoc incommodi accidit, ut $\frac{hht}{hh - 2\omega\omega} \times (1 - (\frac{t}{a})^{(hh - 2\omega\omega):\omega\omega})$ evadat $= \frac{hht}{0}(1 - 1)$, nec non ut alterum $a \left(\frac{\omega\omega}{hh - \omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh - 2\omega\omega)}$, fiat $= \left(\frac{\omega\omega}{\omega\omega}\right)^{\omega\omega:0}$, ſeu $= 1^{\infty}$; ex quo utroque nihil concludi poteſt. Hoc autem incommodum tollitur per regulam, cum aliqua dexteritate adhibitam, quam olim communicavi cum illuſtri HOSPITALIO, ut videre eſt in Analyſi infinite parvorum, Art. 163. *

Prius enim modo allatum $\frac{hht}{hh - 2\omega\omega} (1 - (\frac{t}{a})^{(hh - 2\omega\omega):\omega\omega})$ invenitur pro præſenti caſu $= -2(a - t)\, l(a - t)$; alterum vero $a \left(\frac{\omega\omega}{hh - \omega\omega}\right)^{\omega\omega:(hh - 2\omega\omega)} = \frac{1}{c}$, aſſumendo ſcilicet a pro unitate, & $lc = 1$; atque hinc utrumque per Logarith-

Xxx 3 micam

* Vid. Nus. LXXI. pag. 401. *Tom. I.*

micam vulgarem, cujus ſubtangens $= a = 1$, facillime conſtruitur.

L I V.

De Clepſydris conficiendis.

Figuras vaſorum aquas per foramen inferius permittentium hucuſque haud aliter tractavimus, quam tanquam datas, ut nimirum erueremus leges ſecundum quas motus aquarum procederet. Nunc vero lubet inquirere ordine inverſo in figuram vaſis ad id requiſitam, ut aquæ ſuprema ſuperficies ſubſidat ſecundum propoſitam aliquam legem; ex. gr. ut uniformi celeritate deorſum feratur; unde ex quantitate deſcenſuum duratio fluxus immediate innoteſcat: qui uſus olim fuit apud Veteres frequentiſſimus Clepſydrarum ad horas dimetiendas inſtitutus. Id autem duobus præcipue modis obtineri poteſt, unus ſcilicet eſt, quo ex quantitate elapſæ aquæ, alter quo ex quantitate aquæ in vaſe adhuc remanente, de temporis ſpatio judicari poteſt. De utroque ſeorſim agemus.

L V.

Conſideremus vaſa ſimpliciora, quæ nimirum habent centricas ſuas verticales, quarumque æquatio [§. L I] hæc erat $(yy - \omega\omega) \times z\,dt - \omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y} = yyt\,dt$; ubi indeterminatæ t & y originem ducunt a loco infimo, ſeu a foramine ω. Quod ſi jam velimus facere ut aqua erumpat velocitate uniformi; ponendum eſt $z =$ conſtanti c; quo poſito, erit $dz = 0$, & ita evaneſcet ſecundus terminus $\omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y}$, reliquique diviſi per dt, dabunt hanc æquationem algebraïcam $(yy - \omega\omega)c = yyt$; unde elicitur $yy = \frac{\omega\omega c}{c-t}$ & $y = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c-t}}$ ſeu $\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega\omega c}{c-t}}}$.

C O R O L L A R I U M I.

Ea igitur eſt vaſis natura & figura, ut generari poſſit ex circumvolutione Hyperbolæ planæ biquadraticæ deſcriptæ inter duas aſymptotos, quarum una verticalis, altera horizontalis, diſtans ab orificio ω altitudine $= c$.

C O R O L L A R I U M II.

Altitudo prima, ſeu t initialis, $= c$, ipſaque amplitudo initialis y eſt infinita: eſt enim tunc $y = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c-t}} = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c-c}} = \infty$.

C O R O L L A R I U M III.

Quantitas aquæ remanentis in vaſe pro quavis altitudine t; ſeu $\int y\,dt$, invenietur integrando riteque corrigendo $\int dt \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c-t}} = 2\omega c - 2\omega\sqrt{(cc - ct)}$. Hinc quantitas totalis aquæ ab initio fluxus $= 2\omega c$; hoc eſt $=$ cylindro aquæ cujus baſis eſt ω & altitudo $2c$.

C O R O L L A R I U M IV.

Quod ſi igitur aquæ effluxuræ ex orificio ω ſubſternatur receptaculum cylindricum capacitatis non minoris quam $2\omega c$; aqua effluxa, in eo receptaculo collecta, æqualibus temporibus æqualiter aſcendet, atque ita, altitudine receptaculi in gradus æquales diviſa, habebitur Clepſydra.

L V I.

S C H O L I U M IV.

Diſſimulandum non eſt hoc genus Clepſydrarum in praxi vix ullum habere poſſe uſum, ob immanem altitudinem quæ danda eſſet vaſi hyperbolico, ut effluxus durare poſſet per temporis ſpatium, etiamſi valde mediocre: quod ex eo ſatis colligi poteſt, quia ſi vas altum eſſet 15 pedes, id eſt, ſi $c = 15$ ped. contineret aquam $2\omega c = 30\omega$, hoc eſt, columnam aqueam cujus

cujus altitudo 30 ped. ſuper baſi ω: cum autem ex orificio ω aqua egrediatur uniformi velocitate debita altitudini 15 pedum, ſitque tempus caſus per hanc altitudinem non niſi unius tantum minuti ſecundi horarii, manifeſtum utique eſt, intra unum minutum ſecundum elabi ex vaſe cylindrum aqueum amplitudinis ω, & longitudinis bis quindecim ſeu triginta pedum, adeoque tantillo tempore totum vas exhauſtum iri. Ut nihil jam dicam de impoſſibilitate ſtructuræ vaſis, quod ſupponit ſupremam ſuam amplitudinem infinitam; cui inconvenienti quidem liceret mederi, prolongando vas ſatis prope ad aſymptoton ſuperiorem horizontalem, ut acquirat amplitudinem multo majorem, quam eſt ea foraminis ω, quæ dein amplitudo circumdari poſſet margine uſque ad aſymptoton aſſurgente.

L V I I.

Commodiori modo parari poteſt Clepſydra, per æquabilem deſcenſum aquei ſtrati ſupremi in ipſo vaſe, cujus adeo inveſtiganda eſt figura ad id apta, ut elabente aqua per orificium ω, ſuperficies aquæ reſiduæ in vaſe æqualibus temporibus æqualiter deſcendat; adeo ut, diviſo axe vaſis verticali in partes æquales, ſuperficies dato temporis intervallo percurrat datum numerum partium in ſcala illa ſumptarum. Duo autem ſunt caſus, quibus intentum obtineri poteſt: aut enim amplitudo luminis ω tam parva eſt, ut nullam habeat rationem ſenſibilem ad amplitudinem in vaſe y; aut amplitudo illa ω ſat magna eſt, ut ſit comparabilis cum qualibet y. Priorem caſum, utpote faciliorem atque in praxi utiliorem, nunc tractabimus; de altero poſtea acturi.

L V I I I.

Patet utique æquationem noſtram $(yy - \omega\omega)\,z\,dt - \omega\omega y dz \times \int \frac{dt}{y} = yytdt$ reduci, in caſu quo ω valde parvum eſt ratione y, ad hos duos terminos duntaxat $yyzdt = yytdt$, unde $z = t$, hoc eſt, in quolibet vaſe habente foramen ω, nimirum aquam ex illo emanare

nare

nare ea velocitate quæ acquiritur a corpore gravi cadente ex altitudine t, quam aqua reſidua in vaſe habet; cujus rei veritatem [a nobis ſcientifice inventam] Scriptores hydraulici ſuperiorum annorum non niſi per experimenta cognitam habebant. Ea vero ſemel ſuppoſita, facile tunc fuit invenire naturam vaſis conoïdici, foramine ω tanquam ejus vertice deorſum ſpectante, quod hunc præſtet effectum, ut quovis momento ſumma ſuperficies y aquæ reſiduæ deſcendat uniformi vel æquabili celeritate. Cum enim velocitates fluidi, in eadem quantitate eodemque tempore per duas diverſas amplitudines transfluentis, ſint in reciproca ratione amplitudinum, faciendum eſt $y : \omega = \sqrt{z} : \frac{\omega\sqrt{z}}{y}$, eritque $\frac{\omega}{y}\sqrt{z}$ deſignans celeritatem ſuperficiei y deſcendentis, quæ celeritas cum debeat eſſe conſtans, ponatur $\frac{\omega}{y}\sqrt{z} = \sqrt{c}$, unde erit $\frac{cyy}{\omega\omega} = z = t$. Sunt autem, in conoidibus rectis, amplitudines nihil aliud quam circuli, quorum areæ y ſunt ut quadrata radiorum, ſeu applicatarum curvæ genitricis quæ ſui revolutione circa axem deſcribit conoides quæſitum. Nominando igitur applicatam in curva genitrice $= s$, & radium orificii ω circularis $= b$; itemque aream circuli ad quadratum radii, ut n ad 1, erit ſane $y = nss$, $yy = nns^4$, $\omega = nbb$, & $\omega\omega = nnb^4$, atque adeo pro æquatione $t = \frac{cyy}{\omega\omega}$, habebitur $t = \frac{cs^4}{b^4}$ ſeu $\frac{b^4 t}{c} = s^4$; quæ oſtendit curvam genitricem conoidis quæſiti eſſe Parabolam biquadraticam, in cujus puncto infimo, ſeu vertice deorſum ſpectante, orificium ω venam aqueam emittens inſculptum eſſe debet.

COROLLARIUM.

Parameter Parabolæ inventæ eſt $b\sqrt[3]{(b:c)}$, ubi c eſt arbitraria; adeoque tam parva aſſumi poteſt ut $b\sqrt[3]{(b:c)}$ fieri poſſit quantumvis magna; eum in finem, ut amplitudines conoidis fiant incomparabiliter majores quam amplitudo foraminis ω. Sic ergo pro lubitu tanta capacitas conciliari poteſt vaſi, foramenque ω tam parvæ amplitudinis fieri, ut effluxus aquæ ſat longo tempore durare queat, antequam vas penitus exhauriatur; ad quod imprimis attenditur in Clepſydrarum ſtructura.

L I X.

Quod nunc ſpectat ad alterum caſum, ubi foramen ω non inſenſibilis adeo amplitudinis ſupponitur, ut termini in æquatione univerſali $(yy - \omega\omega)\, z\,dt - \omega\omega\, y\,dz \int \frac{dt}{y} = yyt\,dt$, in quibus ω reperitur, evaneſcant: oportet ſane ut maneant omnes termini, atque tunc ponatur $\frac{cyy}{\omega\omega}$ pro z, & $\frac{2cy\,dy}{\omega\omega}$ pro dz, in eum ſcilicet finem, ut ſuperficies ſuprema aquæ in vaſe deſcendat celeritate uniformi, quæ celeritas debeatur altitudini arbitrariæ c, quo facto reſultabit æquatio reſolvenda, quæ hæc eſt, nempe $(yy - \omega\omega)\, c\,dt - 2c\,\omega\omega\, dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega t\,dt$. Sunt quædam indicia, ex quibus ſtatim ſuſpicabar dari quandam curvam algebraïcam, quæ huic æquationi in abſtracto ſumptæ reſpondeat; imo poſt brevem indagationem iſta protinus ſe mihi obtulit $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, & pro curva genitrice hæc $s^4 = \frac{b^4(t+3c)}{c}$, quæ rurſus eſt Parabola biquadratica, ſed cujus abſciſſæ t initium ſumunt, non ab ipſo ejus vertice, verum intra eundem in axe, in diſtantia $= 3c$. Interim inventa æquatio $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, quæ quidem in abſtracto ſatisfacit, ideo ſatisfacere non poteſt in hac materia, quia tacitam conditionem non adimplet; quæ conditio in hoc conſiſtit, ut exiſtente $t=0$, tota æquatio in nihilum abeat, ac proin etiam $\int \frac{dt}{y}$ debeat evaneſcere, id quod non fit per æquationem $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$.

Nil

Nil quippe novi eſt, ut quædam propoſitio, quæ in theſi eſt vera, non ſemper quadret in hypotheſi; cum nempe aliquid adimplendum accedit, ad quod, rem ſumendo in genere, attendi neceſſario non requiritur. Vera autem curva genitrix pro quæſita figura vaſis conoidici reperietur, ſi qua arte univerſaliter reſolvi poteſt æquatio $(yy - \omega\omega)\, c\,dt - 2c\,\omega\omega\, dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega t\,dt$; ita ut y per t, vel vice verſa t per y determinetur; ſive id fiat in terminis finitis algebraïcis, vel exponentialibus, ſive demum per quadraturas. Hoc autem negotium, cum hujus loci non ſit, aliis, quibus vacat, perficiendum relinquo.

L X.

S C H O L I U M V.

Opportuna jam datur occaſio examinandi cataractam *Newtonianam*, quam deſcribit Auctor in Editione ſecunda *Princip. Math. Phil. Nat. Prop.* 36. Lib. II. pag. 303 & ſeq. Ubi ſtatim animadvertendum formam quam NEWTONUS tribuit ſuæ cataractæ ABNFEM [vid. *Fig.* 16, quæ *Newtoniana* eſt in loco allegato] prorſus eandem eſſe quam ſupra inveni [§. LV] pro figura Clepſydræ, quæ aquam per orificium ω emittit celeritate uniformi. Notemus jam, quod ipſe NEWTONUS agnoſcit, in tali cataracta quodlibet ſtratum MN, ea cum velocitate deſcendere, quam acquireret ſi libere caderet a puncto dato I per altitudinem IO, nulla alia vi quam ſua naturali gravitate animatum: unde ſequitur ſtrata quidem inter ſe contigua manere deſcendendo, ſed ita tamen, ut in ſe mutuo nullam vim exerceant, nec premendo nec reſiſtendo, æque ac ſi ſingula pondere ſuo ſolitaria deſcenderent. Compreſſio itaque illa, de qua ſupra egi in peculiari capite, nulla erit per totam cataractam *Newtonianam*, neque proin de vi preſſionis, quam vocavi π, vel minimum exercebitur in latera AME, BNF, id quod etiam patebit ex ipſa mea formula quam pro π dedi in §. XII. Si

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 16.

 enim

enim illa ad caſum præſentem applicetur, comperietur, ut dixi, valorem ipſius π eſſe nullum per totam cataractæ altitudinem. Quid ergo hinc concludi debet? Haud dubie hoc, quod ſi latera cataractæ AME, BNF eſſent rigida, inſtar infundibuli, cum quo NEWTONUS comparat illam, atque ſi quocunque in loco, facto foramine, inſeratur fiſtula ad ſitum verticalem erecta, nihil aquæ transfluentis ex cataracta in fiſtulam ſit ingreſſurum & aſcenſurum; ſicuti fieret, ſi premerentur latera ab aqua transfluente. Interim premuntur latera AME, BNF introrſum verſus axem HG a pondere aquarum ſtagnantium in AMEC, BNFD, per ordinariam legem hydroſtaticam, quæ docet preſſiones in ſingulis locis M, N exercitas eſſe proportionales altitudinibus HO. Cum autem latera cataractæ non ſint rigida, & preſſiones iſtæ aquarum ſtagnantium nullas habeant preſſiones ſibi oppoſitas ab aquis transfluentibus; oportet ſane ut aquæ, quæ ſtagnare ponuntur, & continuo premunt, ſortiantur ſuum effectum, hoc eſt, ut ſe ingerant in cataractam, commiſceantque ſeſe cum ipſis aquis fluentibus. Ergo figura cataractæ deſtruetur, turbabitur, aliterque ſecundum noſtram explicationem aquæ deſcendunt.

Ergo explicatio *Newtoniana*, utpote legibus hydroſtaticis adverſa, ſubſiſtere non poteſt.

EPIMETRUM.

De vi per quam vas retrourgetur, dum aqua ex eo erumpit in directione horizontali.

Veritas eſt receptiſſima *Actionem eſſe æqualem reactioni*; hoc eſt, vim quamlibet externam, quæ agit in corpus quoddam aliudve obſtaculum, ſimul quoque agere retrorſum in plagam directe oppoſitam, quemcunque habeat vel inveniat obicem; ſicuti fieri videmus, quando ex. gr. elaſtrum tenſum inter duo corpora poſitum, ſtatim ac ſoluto vinculo relaxari incipit, æquis viribus pellit corpus utrumque, unum antrorſum, alterum retrorſum.

ſum. Nec aliter fieri obſervamus, dum globus ferreus per accenſum pulverem pyrium magna violentia ex tormento bellico exploditur; ſimul etiam ipſum tormentum in contrariam partem repelli, quamvis multo minori impetu, ob ingentem maſſam tormenti reſpectu ipſius globi.

Pari modo, cum videmus aquam explodi ex vaſe in directione horizontali, ſive id fiat immediate per foramen in latere vaſis apertum, ſive mediante aliquo canali ſitum horizontalem habente, concludere debemus adeſſe aliquam vim ſeu potentiam, quæ exploſionem hanc producat, quæ proin æque valide agat premendo retro in latus vaſis foramini extremo canalis directe oppoſitum. Id unum igitur diſpiciendum eſt, ut rite æſtimetur quantitas ſeu menſura illius potentiæ ultro citroque urgentis. Occurrunt menti ſtatim variæ ideæ, quæ primo intuitu videntur deducere ad quæſitum; ſed cum ſingulæ exhibeant ejus rei menſuras a ſe invicem diſcrepantes, incertum eſt, an aliqua ex illis ſit vera, aut potius annon ſingulæ a vero abludant. Quocirca tutiſſima erit via atque certiſſima, quam inibimus, ſi ex ipſis principiis in hac noſtra Theoria hydraulica ſtabilitis immediate eruamus quæſitum.

Hunc in finem, conſideremus quæ ab initio dicta ſunt de translatione virium motricium ſingulorum ſtratorum aqueorum Fm, Nl, (*Fig.* 10) &c. ad amplitudinem communem ſupremam Ee; ubi oſtenſum eſt iſtas vires, ita collectas in unum, præſtare eundem effectum ad expellendum per aperturam Cc liquorem, licet gravitate deſtitutum, idque eadem velocitate ſingulis momentis, qua id fit modo naturali per gravitatem liquoris ſine tranſlatione deſcendentis. Nunc vero clare concipimus, tranſlationem illam ad amplitudinem ſupremam Ee eſſe arbitrariam; ſiquidem ex eodem principio hydroſtatico, quod aſſumſimus, facile colligi poteſt, poſſe transferri vires motrices ſtratorum ſingulorum ad aliam quamcunque aſſumtam amplitudinem ex. gr. ad Ff, quam ut datam ſeu conſtantem conſiderare licet; nec eſt quod dicas, vires ad illam tranſlatas agere tantum premendo ſtrata inferiora, non vero ſuperiora. Nam dum ſtrata

TAB. XC. *Fig.* 10.

ta contigua ita inter se adhærent, ut unum sine altero de loco moveri possit, haud ægre concipimus, quod propulsa massa aquea inferior FCcf etiam superiorem EFfe simul quasi secum trahere, atque cum ea effectum potentiæ prementis in Ff partiri debeat; adeo ut non alia velocitate elapsurus sit liquor per Cc, quam si stratorum vires motrices ad amplitudinem supremam Ee fuissent translatæ.

His probe perceptis, intelligamus jam vires stratorum transferri, non ad amplitudinem supremam Ee, neque ad aliquam intermediam Ff, sed ad infimam Cc, ita ut potentia resultans ex collectione omnium virium stratorum, dum agit immediate tantum in stratum infimum, hoc tamen totam massam aqueam ECce in motum concitare debeat; eadem prorsus lege, ac si vires motrices ad amplitudinem supremam Ee, vel ad aliam quamcunque Ff, fuissent translatæ. Est autem, ex vulgari principio hydrostatico, summa virium motricium ad quamcunque amplitudinem translatarum proportionalis ipsi amplitudini: proinde, faciendo ut Ee ad Cc, seu ut h ad ω, ita gha, seu pondus cylindri aquei cujus basis est Ee & altitudo verticalis AB, ad $g\omega a$, seu ad pondus cylindri cujus eadem est altitudo a seu AB, & basis ω seu Cc: dicatur hoc pondus $= p$, atque sic habemus quantitatem pressionis p, quacum aqua per orificium Cc expellitur, & quæ pellendo antrorsum, simul nititur retrorsum in directione communi.

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 13. Applicatio ut fiat: Esto vas cujuscunque figuræ ABD (*Fig.* 13) instructum canali oblongo CEK, non multum amplo, in situ horizontali jacente. Sit, brevitatis ergo, vasis centrica verticalis, nec refert qualemcunque habeat canalis figuram, sive sit conoïdicus truncatus, sive ex pluribus tubis compositus, cujus extremum orificium in K per quod aqua expellitur $= \omega$. Posito jam vase constanter pleno, vidimus supra, pro determinatione velocitatis v aquæ erumpentis, hanc haberi æquationem $\frac{vv(hh - \omega\omega)}{2h} + \frac{hM\omega v dv}{dx} = gha$; si scilicet vires motrices transferuntur ad supremam amplitudinem h, seu ad AD; unde si eas-

dem transferamus ad amplitudinem infimam ω prodibit $\frac{vv\omega(hh - \omega\omega)}{2hh} + \frac{M\omega\omega v dv}{dx} = g\omega a = p$, seu ponderi cylindri aquei cujus basis est ω & altitudo $= a =$ altitudini aquæ supra horizontalem BK. Finge igitur in vasis pariete BA, superficieculam Bb e regione oppositam & æqualem foramini K, patietur hæc Bb a retroactione potentiæ fluidum expellentis pressionem ipsi similem & $= p$.

Hæc quidem retropressio p in Bb exercita nascitur in tota sua intensitate, statim ac moveri incipit; hoc est, a primo motus momento, ubi velocitas est adhuc infinite parva, usque dum pervenit ad gradum æquabilitatis, vis illa retropressionis constanter est eadem. Qualiscunque enim est v, semper habetur $g\omega a$ seu $p = \frac{vv\omega(hh - \omega\omega)}{2hh} + \frac{M\omega\omega v dv}{dx}$; unde ab initio fluxus, ubi v est $= 0$, seu infinite parva, erit idem $p = \frac{M\omega\omega v dv}{dx}$; ubi vero v pervenerit ad uniformitatem, ita ut dv sit $= 0$, erit pariter $p = \frac{vv\omega(hh - \omega\omega)}{2hh}$. Ex quo sequitur fore $\frac{M\omega\omega v dv}{dx} = \frac{vv\omega(hh - \omega\omega)}{2hh}$, sumendo scilicet in primo termino v pro velocitate initiali, in altero vero v pro velocitate uniformi. Porro vel hinc quoque patet retropressionem nostram esse æqualem ipsi ponderi cylindri aquei habentis basin ω, & altitudinem eam quam habet aqua in vase supra horizontalem BK, quia notissimum principium hydrostaticum docet amplitudinem CE, per quam ingreditur aqua in canalem CK, premi a pondere incumbentis columnæ aqueæ, cujus basis est ipsa CE atque altitudo supremæ superficiei AD supra EC. Posita itaque amplitudine CE $= m$, & altitudine aquæ in vase $= a$; erit pressio quæ urget aquam in canali a CE versus K $= gma$: factoque, ut amplitudo CE ad amplitudinem aperturæ K, hoc est, ut m ad ω, ita gma ad $g\omega a$, erit, per eadem principia hydrostatica, vis $g\omega a$ illa ipsa quæ aquam cogit ad eruptionem per

per orificium ω: huic ergo vis directe opposita ex reactione nascens, agensque in Bb, pariter erit $= g\omega a = p$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Liquet in vasis constanter plenis vim istam retropressionis esse invariabilem, a primo effluxus momento ad æquabilem usque velocitatem, utpote semper $= g\omega a$. Errant igitur qui illam statuunt variabilem, minorem nempe in effluxu tardiori, majorem in velociori, maximam in æquabili.

N°. CLXXXVII.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. Fig. 1. A B *est tubus cylindricus, seu uniformiter amplus & utrinque apertus in* A *&* B. *Sit ille perpendiculariter aliquousque immersus fluido infinito cujus superficies est* LR, *& pars tubi immersa* BC: *Concipiatur totus tubus* AB *eodem fluido plenus, ita ut obducto pollice ad* A *nihil effluere possit. Quæritur nunc, si remoto pollice libertas detur fluido descendendi; quousque infra* LR *sit descensurum, & quousque postea supra* LR *sit iterum ascensurum; hoc est, posito* P *pro termino descensus &* O *pro termino subsequentis ascensus, quæritur longitudo* CP, *ut & longitudo* CO?

SOLUTIO.

Considerandum primo est, partem fluidi in CB contentam nullius esse ponderis, vel potius ejus conatum descendendi a gravitate oriundum destrui a pressione contraria fluidi tubum ambientis; atque ita statim ac aliquid fluidi inter descendendum ex parte prominente AC descendit in partem tubi submersam, illud censendum est protinus amittere suam gravitatem; adeo ut tota vis acceleratrix, singulis momentis, dependeat

deat tantum a pondere ejus partis fluidi quæ in tubo eminente adhuc existit. Unde statim patet descensum fluidi debere accelerari, quamdiu aliquid est in AC; proinde maximam velocitatem fore, cum descenderit ad horizontalem LR; deinde iterum retardari debere, ob prævalentem pressionem fluidi ambientis; donec velocitate penitus destructa in P, cogatur fluidum a pressione externa ambiente rursus ascendere ad O, atque habiturum in C rursus maximam velocitatem: postea ab O altera vice delabetur, sed non ad tantam qua prius profunditatem; mox iterum in altum ascensurum: & ita deinceps continuabit oscillando. Quæritur itaque primus descensus ad P, primusque ascensus subsequens ad O; utpote a quibus omnes reliqui dependent.

Quod attinet ad determinationem descensus; habetur ea per duplicem viam, vel directe ex principiis mechanicis, vel indirecte ex natura virium vivarum. Rem utroque modo ita perago.

PRIMUS MODUS.

Principia mechanica docent, incrementum momentaneum velocitatis haberi, si elementum temporis multiplicetur per vim acceleratricem: elementum autem temporis habetur, dividendo elementum spatii percurrendi per velocitatem acquisitam. Sit itaque tota longitudo tubi $AB = a$, pars immersa $CB = 1$, pars quælibet AE a fluido descendente percursa $= x$, gravitas naturalis, qua scilicet corpora ad descensum naturaliter animantur vel sollicitantur, $= g$. Vocetur velocitas acquisita fluidi delapsi ex A in $E = v$. His ita nominatis, erit pondus fluidi totum tubum adimplentis $= ga$; pondus partis $CB = g \times 1 = g$; pondus partis $CE = g \times CE = ga - g - gx$. Nunc quia pondus partis CB ab æquivalente pressione fluidi ambientis destruitur, restat tantum pondus fluidi CE, quod omne fluidum residuum EB ad descendendum accelerare debet. Erit itaque vis acceleratrix $= \frac{g \times CE}{BE} = \frac{ga - g - gx}{a - x}$; quare $\frac{ga - g - gx}{a - x}$

$\times \frac{dx}{v} = dv$; proinde $vdv = \frac{gadx - gdx - gxdx}{a - x} = gdx - \frac{gdx}{a-x}$; & integrando $\frac{1}{2}vv = gx + gl(a - x) - gla$. [*Nota.* Adjicio hic gla correctionis gratia; ut nimirum exiſtente $x = 0$, ubi velocitas nulla eſt, evaneſcat ejus valor inventus]. Ut itaque ſciatur quouſque liquor in tubo deſcendere debeat, ut iterum v fiat $= 0$; oportet facere $x + l(a - x) - la = 0$; eritque, capiendo AP = radici hujus æquationis, punctum P terminus in quo deſcenſus finitur.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 2. Radix vero x ope Logarithmicæ habetur hoc modo: Sit Logarithmica HCG, cujus ſubtangens = 1 = BC = parti immerſæ tubi. In BC prolongata capiatur BA = longitudini totius tubi, quouſque nempe ab initio plenus eſt liquore, ex A ducta aſymtoto BL parallela AH, occurrens Logarithmicæ in H, atque ex hoc puncto H acta tangenti in C parallela HG, quæ ſecet curvam in G; unde porro ducatur GP aſymtoto BL parallela: erit punctum P terminus ad quem deſcendet fluidum; & in quo deſcenſus finietur. Demonſtratio eſt facilis. Quia enim $AH = lAB = la$, & $PG = -lPB = -l(AB - AP) = -l(a - x)$, & $AH + PG = AP$; erit $la - l(a-x) = x$; unde $x + l(a - x) - la = 0$. Quæ eſt ipſiſſima æquatio conſtruenda. *Q. E. D.*

SECUNDUS MODUS.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 1. Ex Theoria virium vivarum idem invenio hunc in modum. Nominando hic iterum (*Fig.* 1) AB = a, CB = 1, pars indeterminata deſcenſus AE = x. Sit altitudo quædam verticalis z, per quam grave libere deſcendens acquireret velocitatem æqualem illi quam fluidum in tubo delapſum ex A in E acquirit; erit ergo hæc velocitas $= \sqrt{z}$. Abſcindendo autem BF = AE; clarum eſt per deſcenſum fluidi ex A in E, columnam AF eſſe tranſlatam in EB, & tunc ſingulas ejus particulas habere velocitatem $= \sqrt{z}$; quocirca omnis materia fluidi hanc columnam EB conſtituens habebit vim vivam = (a

$(a - x) \times \sqrt{z} \times \sqrt{z} = az - xz$; cui addendæ ſunt particulares vires vivæ collectim ſumtæ ſingularum particularum in ſpatio BF contentarum, quæ, deſcendente fluido ex A in E, ſucceſſive ex orificio B egreſſæ ſunt, quarum utique aggregatum eſt $= \int zdx$. Ergo quantitas vis vivæ totius materiæ in motu conſtitutæ $= az - xz + \int zdx$.

Quia vero hæc vis viva debet eſſe effectus gravitatis partis fluidi ſupra horizontem LR exiſtentis, oportet utique quantitatem illam vis vivæ $az - xz + \int zdx$, tanquam effectum, eſſe æqualem ſuæ cauſæ adæquatæ, hoc eſt, ſummæ productorum quæ fiunt multiplicando ſingulas fluidi deſcendentis particulas per ſuam cujuſque altitudinem, per quam quælibet a gravitate ſua deprimitur. Sumta igitur CD = AE, erit DC deſcenſus columnæ AD, adeoque AD × DC exprimit vim vivam a gravitate oriundam materiæ fluidi in columna AD contentæ, poſtquam deſcendit in ſitum EC, ubi partes inferiores jamjam infra horizontem delapſuræ incipiunt ſuam gravitatem amittere. Quod autem attinet ad particulas fluidi in DC contentas; ſingulæ ſingulares deſcenſus faciunt, antequam ad horizontem LR perveniant, pro earum diverſis diſtantiis ab LR, quæ diſtantiæ cum exprimantur per indeterminatam x, & quælibet particula ei reſpondens per dx; erit productum xdx vis viva cujuſlibet particulæ a gravitate oriunda, adeoque $\int xdx$ ſeu $\frac{1}{2}xx$ = vi vivæ collectim ſumtæ omnium particularum in CD contentarum; quæ ergo addita ad AD × DC, hoc eſt, ad $(a - 1 - x) \times x$ ſeu ad $ax - x - xx$, habebitur vis viva totalis a gravitate oriunda $= ax - x - \frac{1}{2}xx$; per conſequens æqualis inventæ vi vivæ ex motu collectæ $az - xz + \int zdx$. Differentiando itaque provenit $adx - dx - xdx = adz - xdz$, unde $dz = dx - \frac{dx}{a - x}$; rurſuſque integrando $z = x + l(a - x) - la$. Sed z eſt proportionale quadrato velocitatis quæſitæ vv. Ergo vv, ſeu ſi mavis $\frac{1}{2}vv = x + l(a - x) - la$; omnino ut ſuperiori modo directo invenimus, quod

 nempe

nempe quadratum velocitatis fluidi descendentis per altitudinem x, debeat esse proportionale ipsi $x + l(a - x) - la$.

Ut nunc porro determinetur punctum O ad quod, finito descensu, iterum ascendet; advertendum est ante omnia, quod liquor ad supremum usque punctum A esset ascensurus, si particulæ eædem, quæ inter descendendum ex orificio B egressæ fuerant, nunc iterum, inverso ordine, retentis suis velocitatibus acquisitis, singulæ per orificium B subintrarent, & ita quælibet cum præcedentibus junctim in altum protruderetur ab ambientis fluidi pressione; sicuti accidit in omni genere oscillationum, quæ, seposita resistentia, eosdem semper itus & reditus faciunt. Sed quoniam particulæ fluidi egredientes, statim post egressum, intra ambientem liquorem dilabuntur, vel hinc inde divagantur; manifestum est easdem illas particulas suis acquisitis velocitatibus non amplius tubum subingredi, sed eorum loco alias, quæ orificium sine motu obsident, successive in altum rapi, cum præcedenti columna fluidi; quæ particulæ itaque, cum ab initio ingressus nullum adhuc habeant motum, id efficient, ut columna fluidi præcedens cum ipsis adhærentibus segnius ascendat, quam faceret, si particulæ ingrederentur cum aliqua velocitate quæ ascensum juvaret. Hinc ergo liquor non ad A, sed ad punctum aliquod inferius O ascendere valebit. Hujus puncti O altitudo CO supra horizontem ut cognoscatur; concipiamus tantisper particulas ex orificio B dilapsas intra ambientem liquorem, in quo nullam habeant gravitatem, sursum dirigi; adeoque, nulla suæ velocitatis jactura facta, ad horizontem LR pervenire; ex quo postea singulæ, recuperata gravitate, in altum prosiliant, quantum possunt pro sua cujusque velocitate, occupantes ordine locum secundum aliquam curvam LMN. Jam vero, quia quantitas virium vivarum conservari debet, necesse est, ut summa productorum singularum particularum in CO contentarum per suos respective ascensus supra horizontem LR, una cum aggregato productorum quæ fiunt pariter multiplicando singulas particulas in curva LMN

LMN per suos ascensus & distantias ab LR, sit æqualis summæ productorum similium totius columnæ AC: hanc enim liquor habuit ab initio descensus. Quocirca, si a summa productorum columnæ AC auferatur summa productorum particularum LMN, remanebit summa productorum in columna CO, & hinc ipsa altitudo CO innotescet. Nam summa prior $= \frac{1}{2} AC \times AC = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} aa - a + \frac{1}{2}$; altera $= \int z dx = ax - x - \frac{1}{2} xx - az + xz =$ [in casu quo x, seu indeterminata AE fit AP, ubi z evanescit] $ax - x - \frac{1}{2} xx$; adeoque $\frac{1}{2} aa - a + \frac{1}{2} - ax + x + \frac{1}{2} xx =$ summæ productorum in $CO = \frac{1}{2} CO^2$: unde $CO = \surd(aa - 2a + 1 - 2ax + 2x + xx) = 1 + x - a =$ [in eodem hoc casu ubi $x = AP$] CP. Ex quo patet fluidum in tubo ad tantam altitudinem CO ascendere supra horizontem LR, ad quantam profunditatem CP infra LR immediate prius descenderat.

COROLLARIUM.

Cognita CO, cognoscetur, per constructionem supra datam, descensus secundus, & subsequens ascensus secundus: ex hoc postea descensus & ascensus tertii: atque ita porro excursiones singularum oscillationum limitari poterunt.