N°. CLXXIX.

PROBLEMA

STATICO-DYNAMICUM.

TAB. LXXXVII N°. CLXXIX. *Fig.* 1.

Datum esto Triangulum rectangulum ACB, ex materia non gravi confectum, cujus tribus lateribus accumbant totidem corpora L, M, N, etiam non gravia; ita tamen ut latera, tam Trianguli, quam corporum, in quibus se contingunt, sint lævigatissima & perfecte polita; eum nempe in finem, ut sine ulla frictione, aliave resistentia, super se invicem moveri, vel fluere possint, corpus M super AC, corpus L super AB, & corpus N super CB. Accedat nunc corpori M vis aliqua motrix data, secundum directionem pM normalem ad hypothenusam AC, quo fiet, ut Triangulum ACB incipiat retropelli continuo in alium situm acb; consequenter tria corpora M, L, N, loca quoque sua mutent. Hisce ita positis: Quæritur primo directio motus, tam Trianguli, quam singulorum corporum: Deinde Lex accelerationis singulorum? Ubi quidem ponitur rem ea ratione peragi, ut Triangulum & corpora aliter moveri non possint, quam motu in unoquoque sibi semper parallelo.

SOLUTIO.

Dicatur massa Trianguli ABC $= T$, corporis M $= M$, corporis L $= L$, & corporis N $= N$. Concipiatur jam imprimi corpori M, incumbenti hypothenusæ AC, vim aliquam datam motricem expressam per Mt, sumendam in prolongata pM normali ad AC. Dicatur hæc vis motrix $= m$. Item Trianguli altitudo AB $= a$, basis CB $= b$, hypothenusa AC $= \sqrt{(aa+bb)} = c$. Triangulum ABC hoc modo pressum

a corpore M, animato jam vi motrice m, sese subducens, paulo post veniat in situm proximum abc; ita ut latera lateribus, singula singulis, maneant, per hypothesin, parallela. Primo manifestum est, punctum M mansurum fluendo in Mt prolongata rectæ pM; sicuti etiam ductis ML, MN, normalibus ad AB, CB, corpora L & N repellentur in directionibus prolongatis MLl, MNn, a quibus non deviabunt. Jam vero vis motrix m absoluta decomponi potest in collaterales, secundum directiones Mr & Ms, latera scilicet rectanguli $Mrts$: unde nascitur vis in directione $Mr = \frac{am}{c}$, & altera in directione $Ms = \frac{bm}{c}$; id quod patet ex similitudine triangulorum Mtr, Mts, & ACB. Vis illa prior, secundum directionem Mr, agit simul in Triangulum & corpus adjacens L, eique non obstat corpus N; sed altera vis, secundum directionem Ms, agit etiam simul in Triangulum & corpus adjacens N, ita ut pariter non obstet corpus L. Vis ista motrix m, quæ in solo corpore M existit, & illæ duæ $\frac{am}{c}$, $\frac{bm}{c}$, in quas resolvitur m, diminuuntur utique, agendo in Triangulum & hoc mediante, in corpora L & N. Ut igitur inveniatur, quantum per actionem vis primitivæ m remaneat in corpore M ad progrediendum in sua directione Mt; quantum item virium acquirat tam Triangulum in utraque sua directione collaterali, quam corpus L in directione ML, & corpus N in directione MN; annotandum est, quod Lemmatis loco ponitur, in omni actione duorum corporum se mutuo prementium, oriri quandam vim intermediam, quam voco *immaterialem*, quæ æqualiter agit prorsum & retrorsum; in quo consistit Canon ille, *Quod actio & reactio sunt æquales.* Voco autem *vim* illam *immaterialem*; quia est quasi extra utrumque corpus, atque ad unum non magis pertinet quam ad alterum.

Ordo genuinus nunc postulat, ut, ante omnia, inquiratur in vim istam immaterialem, quæ intercedit inter corpus M, in quo est principium motus, & Triangulum, quod immediate excipit illius actionem, eamque communicat cum corporibus L & N; unde poſtea determinabuntur vires motrices in Triangulo corporibuſque genitæ, ipſæque proin directiones virium acceleratricium, quibus proportionales ſunt velocitates actuales. Sit igitur $x =$ vi immateriali inter corpus M & Triangulum, quæ directe agit & reagit inſtar elateris in directione Mt & Mp. His ita poſitis; remanebit in corpore M vis motrix $= m - x$, in directione pM; Triangulum vero recipit eandem illam vim motricem x in directione Mt; quæ decompoſita in collaterales ſecundum ML & MN, dat eam, ſecundum directionem ML, $= \frac{ax}{c}$, & alteram, ſecundum directionem MN, $= \frac{bx}{c}$. Dividendo autem has vires motrices per ſuas reſpective maſſas movendas, habebimus ſingulorum corporum vires acceleratrices, nimirum $\frac{m - x}{M} =$ vi acceleratrici corporis M, in directione pM. Quia vero vis collateralis $\frac{ax}{c}$ in directione ML movere debet ſimul Triangulum & corpus L, ſicuti etiam altera collateralis $\frac{bx}{c}$ movenda habet ſimul Triangulum & corpus N; erit vis acceleratrix in directione ML $= \frac{ax}{c(T+L)}$, & altera acceleratrix in directione MN $= \frac{bx}{c(T+N)}$. Habebit igitur Triangulum duas vires acceleratrices, in diverſis directionibus ML & MN; quæ ut referantur ad communem directionem Mt corporis M; faciendum eſt, ut ſe habet AC ad AB, ſeu ut c ad a, ita $\frac{ax}{c(T+L)}$ ad quartam $\frac{aax}{cc(T+L)}$; item, ut ſe habet AC ad CB, ſeu c ad b, ita $\frac{bx}{c(T+N)}$ ad quartam $\frac{bbx}{cc(T+N)}$. Significabunt hæ duæ ſimul ſumptæ $\frac{aax}{cc(T+L)} + \frac{bbx}{cc(T+N)}$ vim acceleratricem communem expreſſam per Mq, quæ ſimul denotat

notat

notat vim acceleratricem $\frac{m - x}{M}$ corporis M, in eadem directione: nam corpus M inter movendum, ſemper adjacere ſupponitur hypothenuſæ Trianguli: unde hæc habetur æquatio $\frac{m - x}{M} = \frac{aax}{cc(T+L)} + \frac{bbx}{cc(T+N)}$; adeoque $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$. Ut autem habeatur actualis directio, & quantitas vis acceleratricis ipſius Trianguli; oportet tantum conſtruere novum rectangulum, ſumendo ſuper ML partem $= \frac{ax}{c(T+L)}$, & ſuper MN aliam partem $= \frac{bx}{c(T+N)}$; quæ erunt latera rectanguli, cujus diagonalis, ex M ducta in angulum oppoſitum, deſignabit veram directionem, & vim acceleratricem ipſius Trianguli. Hæc autem diagonalis eſt utique $= \frac{x}{c} \surd \left(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2} \right)$; in quibus omnibus, ſi pro x ſubſtituatur ejus valor inventus $\frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ data erunt ſingula quæſita.

EXEMPLUM I.

Sint corpora L & N æqualia, erit $x = \frac{m}{\frac{(aa+bb)M}{cc(T+L)} + 1} = \frac{m}{\frac{M}{T+L} + 1} = m \times \frac{T+L}{M+T+L}$. Hinc *primo* vis acceleratrix corporis M, in ſua permanente directione Mt; ſeu $\frac{m - x}{M} = \frac{m}{M+T+L}$. 2°. Vis acceleratrix corporis L, in ſua directione invariabili Ll, ſeu $\frac{ax}{c(T+L)} = \frac{am}{cM+cT+cL}$. 3°. Vis acceleratrix corporis N [quod æquale ponitur ipſi L] in ſua conſtante directione Nn, ſeu $\frac{bx}{c(T+N)} = \frac{bm}{cM+cT+cL}$.

4°.

4°. Vis acceleratrix ipſius Trianguli, in directione ML, eſt eadem quæ corporis L, nempe $\frac{am}{cM+cT+cL}$; ejuſdemque Trianguli vis acceleratrix, in directione MN, eſt eadem quæ corporis N, nempe $\frac{bm}{cM+cT+cL}$; unde Trianguli vis acceleratrix actualis, in directione vera diagonalis dicti rectanguli $= \frac{m}{M+T+L}$.

Exemplum II.

Quod ſi jam ambo corpora L & N ſint infinite parva, hoc eſt æqualia o, liquet, eum caſum eſſe quo corpus directe, ſeu perpendiculariter, premit alterum omni vi motrici deſtitutum; cum quo per conſequens vim ſuam motricem partitur, ita ut utrumque accelerari debeat æqualiter, & in eadem directione, habeatque jam tota maſſa in unum coaleſcens eandem vim motricem, quam ante preſſionem habuerat ſolum corpus M: atque hoc eſt, quod docet, in hoc caſu, Regula noſtra generalis.

Fit enim $x = \frac{mT}{M+T}$; item $\frac{m-x}{M} = \frac{m}{M+T}$; ut & Trianguli vis acceleratrix actualis in directione diagonalis, quæ jam eſt ipſa Mt in prolongata $pM = \frac{m}{M+T}$.

Exemplum III.

In caſu, quo ponitur $L = o$ & ſimul $N =$ infinito; idem eſt, ac ſi trianguli baſis CB moveri vel fluere debeat ſuper plano immobili. Tunc erit $x = \frac{m}{\frac{aaM}{ccT}+1} = \frac{mccT}{aaM+ccT}$; hic enim, ob $N = \infty$, evaneſcit $\frac{bbM}{cc(T+N)}$; atque, ob eandem rationem, vera directio & vis acceleratrix Trianguli, parallela baſi CB, erit $= \frac{ax}{cT} = \frac{mac}{aaM+ccT}$: corporis vero M vis acceleratrix

leratrix in directione Mt, quæ eſt $\frac{m-x}{M}$, jam fit $= \frac{aax}{ccT} = \frac{maa}{aaM+ccT}$; unde & ipſæ velocitates actuales, in ſuis propriis directionibus, Trianguli & corporis prementis M, erunt ut $\frac{mac}{aaM+ccT}$ ad $\frac{maa}{aaM+ccT}$; hoc eſt ut c ad a, ſeu ut AC ad AB.

Corollarium.

Hic caſus complectitur etiam Solutionem Problematis olim *Petropoli* ad me miſſi; cujus tum dedi Solutionem aliunde petitam, quam videre eſt in *Comment. Petropol.* Tom. V *. Propoſitio huc redibat. Dato Triangulo rectangulo ABC materiali, in plano verticali, cujus baſis BC horizontalis liberrime fluere poſſit ſuper alio plano horizontali immobili: incumbat vero hypothenuſæ AC corpus aliquod grave M, quod vi ponderis ſui deſcenſum moliatur in directione verticali: unde id eveniet, ut Triangulum ab iſta preſſione retropellatur in directione horizontali CB; interea dum corpus M, quod pariter liberrime fluere poſſe ponitur ſuper AC, deſcendet continuo a puncto M verſus C, adhærens nempe indeſinenter hypothenuſæ AC: Quærebatur itaque, quam habeant rationem celeritates Trianguli retrocedentis, atque corporis M oblique deſcendentis, quamque hoc habiturum ſit directionem actualem, utpote compoſitam ex directione ſecundum hypothenuſam, & ſimul ex ea ſecundum Mt priori normalem. Hoc Problema ex præſenti noſtro principio facillime ſolvitur. Decomponatur enim vis gravitatis ponderis M, cujus directio eſt verticalis, in duas collaterales, unam parallelam hypothenuſæ, alteram eidem normalem. Illa, durante actione, non mutatur; hæc vero agit in Triangulum, ſicuti ſupponitur in præcedentis Problematis ſolutione; unde habebitur celeritas Trianguli ſuper plano horizontali; ut & celeritas corporis M, ſed tantum in directione Mt normali ad hypothenuſam, cum qua componi debet

* N°. CXLVII. pag. 365, *Tom. III.* Confer. Numerum ſequentem.

bet illa, quæ generatur ex cognita vi motrice in directione parallela hypothenusæ: compositione motus rite peracta, dabitur directio & celeritas actualis corporis M.

SCHOLIUM I.

Si Corpus M motu actuali moveatur in directione p M, data velocitate v, impingatque in Triangulum T, quod percussum simul pellat corpora L & N: erunt, posito corpora non esse elastica, velocitates acquisitæ in eadem ratione, quam hic determinavimus pro simplici pressione. Effectus enim percussionis fit pariter per pressionem, sed promptissimam & quasi momentaneam. Erit igitur m, seu vis motrix, consideranda tanquam velocitas v multiplicata per massam M; ut sit ante conflictum quantitas motus $= Mv =$ vi motrici. Posito itaque hic etiam $x =$ vi illi immateriali, quæ in conflictu generabitur; invenietur eodem ratiocinio, quo supra factum $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ hoc est $= \frac{Mv}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$; qui valor substituatur in $v - \frac{x}{M}$, ut habeatur velocitas actualis corporis M, post conflictum, in sua propria directione Mt. Idemque substitutus in $\frac{ax}{c(T+L)}$ & in $\frac{bx}{c(T+N)}$, dabit velocitates actuales corporum L & N, in directionibus suis propriis Ll & Nn: ipsius vero Trianguli T directio, & velocitas actualis, erit quæ ex illis duabus componitur $= \frac{x}{c} \sqrt{\left(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2} \right)}$. Hac occasione, ostendendum est quam facile inveniatur Regula generalis pro communicatione motus duorum corporum, datis velocitatibus sibi mutuo directe occurrentium. Sit enim corpus A, ejusque velocitas a, directe insequens corpus B, cujus velocitas minor b versus eandem plagam; erit corporis A quantitas motus, seu vis

vis motrix $= Aa$, corporis B vis motrix Bb. Ponatur jam vis immaterialis per conflictum genita $= x$; manebit ergo in corpore A, vis motrix $= Aa - x$, & in corpore B producetur vis motrix $= Bb + x$, quæ, divisæ per massas A & B, dabunt utriusque velocitates post ictum $a - \frac{x}{A}$ & $b + \frac{x}{B}$; quæ, si corpora non sunt elastica, debent esse æquales, adeoque $a - \frac{x}{A} = b + \frac{x}{B}$. Unde prodibit $x = \frac{a-b}{A+B}$; quo substituto in alterutro habebitur $\frac{Aa+Bb}{A+B}$, pro velocitate communi, quam ambo corpora habebunt post ictum. Amittit adeoque corpus velocius A aliquem gradum suæ velocitatis, qui erit $a - \frac{Aa+Bb}{A+B} = \frac{(a-b)B}{A+B}$, & corpus tardius B acquiret novum velocitatis gradum, qui utique erit $\frac{Aa+Bb}{A+B} - b = \frac{(a-b)A}{A+B}$. Quod si jam corpora fuerint elastica; desiderenturque eorum velocitates post conflictum; conceptu sane haud difficile est, duplicandos esse effectus oriundos a compressione elaterii, hoc est, a vi illa immateriali x, quæ in utramque partem æqualiter se exerit; ita ut quantum velocitatis destruitur in velociori, & quantum velocitatis additur in tardiori per compressionem, tantundem quoque de novo fiat in utroque corpore per restitutionem elaterii. Erit proinde jactura velocitatis in corpore velociori $A = \frac{(a-b)2B}{A+B}$, & augmentum velocitatis in tardiori $B = \frac{(a-b)2A}{A+B}$; unde, post collisionem peractam, habebit corpus A velocitatem $= a - \frac{(a-b)2B}{A+B} = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B}$, & corporis B velocitas erit $= b + \frac{(a-b)2A}{A+B} = \frac{Bb - Ab + 2Aa}{A+B}$.

Notandum, si moveatur ante conflictum corpus B in plagam contrariam, idem est ac si dicatur esse b negativum; mutanda per consequens sunt signa terminorum, in quibus reperitur b. Atque sic prodibit, post ictum in corporibus non elasticis, communis velocitas $= \frac{Aa - Bb}{A + B}$. Sed in elasticis, velocitas corporis $A = \frac{Aa - Ba - 2Bb}{A + B}$, & corporis B velocitas $= \frac{-Bb + Ab + 2Aa}{A + B}$. Quæ omnia pulchre conspirant cum Regulis motuum dudum exhibitis, tum a nobis, tum ab aliis, sed per diversas omnino vias erutis.

SCHOLIUM II.

Ad nostram hanc Theoriam quoque spectat Theorema NEWTONI, propositum in *Princ. Mathematicis Philos. Natur.* Vid. Coroll. IV. Legis III. Libro primo præmissum, quod ita sonat: *Commune gravitatis Centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium [exclusis actionibus & impedimentis externis] commune Centrum gravitatis, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.*

Etsi hoc Theorema, elegantissimum quidem, in generali sensu sit propositum; demonstratio tamen NEWTONI minime est generalis. Lector quippe attentus examinaturus longam ratiocinationis *Newtonianæ* deductionem, percipiet, sine magna difficultate, supponi in illa demonstratione, concursum fieri non nisi duorum corporum una vice, mox alia vice duorum aliorum, vel unius eorum, cum tertio; percipiet, inquam, nullo in loco, per totum sermonem, in considerationem trahi casum, quo tria plurave corpora, eodem momento simul, in diversis directionibus in se invicem impingunt; cujus casus neglectio relinquit sane demonstrationem NEWTONI longe imperfectissimam; quæ vix particulam præstat ejus quod promittitur in Propositione generali. Qui defectus ut suppleatur, alia via ineunda est, quam quæ a NEWTONO est tentata. Hanc in rem, nostra idea de viribus immaterialibus inter corpora sibi invicem collidentia concipiendis commodissime adhibetur. Postquam enim ostendimus illas

illas vires nihil aliud esse, quam pressiones, seu vires motrices subitaneas, effectus suos in momento absolventes; res utique referri poterit ad ordinariæ Dynamices principia; ubi duntaxat debito modo applicanda est Propositio illa generalis, cum a nobis, tum ab aliis, dudum demonstrata, quæ hæc est:

Si dati corporis ABC centrum gravitatis O, sollicitetur a pluribus potentiis, seu viribus motricibus, quarum directiones & quantitates, designentur per rectas datas OD, OE, OF, OG &c. sitque punctum P centrum commune gravitatis punctorum D, E, F, G, instar ponderum æqualium consideratorum; Dico rectam OP fore directionem, secundum quam movebitur centrum gravitatis O corporis ABC, & quidem motu sibi semper parallelo, sive accedendo versus P, sive ab eodem recedendo, prout vires motrices sunt vel trahentes vel pellentes. TAB. LXXXVII. N°. CLXXIX. Fig. 2.

Nunc quidem non est ex instituto nostro, generalem facere applicationem hujus Propositionis, ad demonstrandum Theorema *Newtonianum*, in omni extensione sumtum; sufficit indicasse rei fundamentum, ut alii, quibus vacat & volupe est, laboris & calculi molestiam subeant.

N°. CLXXX.

CONTINUATIO TRACTATIONIS

De descensu corporis gravis, super hypothenusa Trianguli rectanguli mobilis super plano horizontali immobili.

Videatur Numerus CXLVII, pag. 365 & seq. *Tom. III.*

SEnsus hujus Problematis, cujus Solutio a me petebatur, in hoc consistebat, quod ita sonat: „Sit ACK triangulum materiale, rectangulum in K, quod super plano horizontali DH, „sine omni frictione, moveri possit. Sit etiam corpus grave m, „quod super hypothenusa AC positum sua gravitate descendat, „pariter sine frictione; quo fiet ut, descendente corpore m, TAB. LXXXVII. N°. CLXXX.

 „Trian-

„ Triangulum jugiter ab eo preſſum retrocedere cogatur. Quæ- „ ritur tum corporis, tum Trianguli velocitas; tum etiam via „ AP, quam corpus ex motu compoſito deſcribit, atque utriuſ- „ que Lex accelerationis?

Solutio, quam ſtatim exhibueram in *Comment. Petrop.* Tom. V. pag. 11 & ſeq. anno ſcilicet 1730, placuit Eruditis, deditque quibuſdam, ut audio, occaſionem ſolvendi Problema in majori extenſione. Solutiones autem eorum, quæ nuſquam adhuc extant, quantum ſcio, nondum vidi. Aſſumſeram in ſolutione mea hypothenuſam AC eſſe lineam rectam; deinde velocitatem initialem utriuſque, tam corporis, quam Trianguli, eſſe nullam; hoc eſt, utrumque incipere motum ſuum a quiete; contentus equidem tractaſſe Problema ſub ea, qua proponebatur, conditione, neque tum cogitans de conditionum amplificatione. Nunc ſupperadduntur duæ conditiones, quæ Problema reddunt generalius: prima hæc eſt, ut pro recta hypothenuſa AC ſubſtituatur linea curva qualiſcunque data: conditio altera, ut corpus m habeat velocitatem initialem datam, quando incipit deſcendere. Id quod facit duo nova Problemata; quibus ut ſatisfacerem, non operoſum mihi fuit obſervare Formulas meas, pro determinatione virium acceleratricium corporis & Trianguli, accommodari poſſe ad præſens negotium. Ibi enim demonſtratum dedi, quod vis acceleratrix corporis m, in directione hypothenuſæ, ſit $= \frac{gacM}{ccM - bbm}$, & vis acceleratrix Trianguli, in directione horizontali, ſit $= \frac{gabm}{ccM - bbm}$, ubi ſupponitur $g =$ vi acceleratrici naturali corporum gravium, item a, b, & $c =$ tribus lateribus Trianguli, nimirum altitudini, baſi, & hypothenuſæ, tandemque $M =$ aggregato maſſarum Trianguli & corporis m.

Cum autem, ob rectitudinem hypothenuſæ, conſtans maneat ejus inclinatio ad horizontem, ubicunque in illa reperiatur corpus m; patet hujus corporis vim acceleratricem, in directione hypothenuſæ, fore uniformem, per totum decurſum ſuper hypothenuſa.

Aliter

Aliter ſe res habet, ſi hypothenuſa non eſt linea recta, ſed curva: tunc enim inclinatio ejus ad horizontem eſt variabilis. Unde variabilis etiam erit vis acceleratrix, in decurſu corporis m per hypothenuſam curvililineam; ut & altera vis acceleratrix ipſius Trianguli in directione horizontali; utpote quæ etiam variabilis fiet. Hoc non obſtante, inſervire poſſunt noſtræ Formulæ ad determinandas iſtas vires, pro quolibet deſcenſu ſuper hypothenuſa curvilinea. Analyſis noſtra infiniteſimalis huic negotio ſuccurrit. Ecce quomodo.

Ponamus Triangulum rectangulum AKC, mobile ſuper plano horizontali DH, habere pro hypothenuſa lineam curvam quamcunque datam AEC, ſuper qua deſcendens corpus grave m pervenerit jam ad E, percurſurum porro particulam Ee, quæ tanquam elementum curvæ pro recta cenſetur. Ductis igitur applicatis EN, en, ad axem AK, huicque parallela EF; ſit $AN = x$, $NE = y$, Nn vel $EF = dx$, $eF = dy$, $Ee = dr$; habebimus Triangulum rectangulum EFe, cujus hypothenuſa eſt lineola recta Ee, quam dum percurrit corpus grave m, conſiderari poterit [durante hoc tempuſculo, quod vocetur dt] Triangulum EFe, tanquam repræſentans partem figuræ triangularis rectilineæ AKC, mobilis ſuper plano immobili horizontali DH. Hinc, ſi in Formulis, pro caſu vulgari in *Commentariis Petropolit.* ſoluto, ſubſtituantur pro a, b, c, earum repræſentantes dx, dy, dr, prodibunt $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2}$ & $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2}$; quæ, durante tempuſculo dt, exprimunt vires acceleratrices; prior nempe corporis m deſcendendi per lineolam Ee, & altera ſyſtematis M, retrocedendi in directione horizontali DH.

Determinatis ita viribus acceleratricibus, reliqua omnia inde dependent. Dicatur enim, brevitatis gratia, vis acceleratrix inventa $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2} = A$, & altera $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2} = B$; item velocitas, qua corpus m percurrit Ee vel $dr = u$; & velocitas, quam tum habebit Triangulum in directione horizontali $= v$, tempuſculum quo incrementa velocitatum du & dv generannerantur $= dt$; unde ex Principiis Dynamicis fluunt ſequentia. 1°. $Adt = du$, & $Bdt = dv$; adeoque $A : B = du : dv$; unde $dv = \frac{Bdu}{A}$; 2°. Ob $dt = \frac{dr}{u}$, erit $\frac{Adr}{u} = du$, ſeu $Adr = udu$; id quod dat $u = \sqrt{\int 2Adr}$, & differentiando, $du = \frac{Adr}{\sqrt{\int 2Adr}}$. 3°. Subſtituto hoc valore habebimus $\frac{Bdu}{A}$, ſeu $dv = \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, ipſamque proin $v = \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

Ordo nunc poſtulat, ut determinemus viam ipſam, quam corpus m motu complicato ſequitur inter deſcendendum; hoc eſt lineam veram ABP quam actualiter deſcribit. Hunc in finem, reſolvenda eſt velocitas per Ee, in velocitatem verticalem per EF, & horizontalem per Fe; faciendo itaque, ut ſe habet Ee ad EF, ſeu ut dr ad dx, ita u ſeu $\sqrt{\int 2Adr}$ ad quartam $\frac{dx\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati per EF; ſic pariter ut dr ad dy, ita $\sqrt{\int 2Adr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati in directione horizontali; quæ velocitas eſt relativa ad mobilitatem Trianguli mixtilinei AKC. Ut vero habeatur velocitas realis, ſeu abſoluta, qua ſcilicet corpus m, reſpectu plani horizontalis immobilis, progreditur a plaga H ad plagam D, auferenda erit v, ſeu velocitas Trianguli, quæ eſt $\int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, retrocedens in plagam contrariam a D verſus H, una cum ipſo corpore m; quo facto, habebimus corporis m velocitatem abſolutam, in directione horizontali HD $= \frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

His præmiſſis, natura lineæ quæſitæ ABP determinatur hunc in modum. Concipiamus Triangulum mobile AKC, in ſuo ſitu initiali, aliudque ſimile Triangulum, ſed immobile, accumbens & congruens cum priori AKC exiſtente in ſitu initiali; in hoc Triangulo immobili fingamus deſcriptam eſſe lineam ABP, cujus naturam quærimus. Sint in ea applicatæ proximæ BN, vel $bn = z$, differentialis $bh = dz$: eritque proin dx ad dz, ut velocitas per dx ad velo-

citatem per dz; hoc eſt, ut $\frac{dx\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; unde emergit æquatio $dz\sqrt{\int 2Adr} = dy\sqrt{\int 2Adr} - dr\int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m actualiter deſcribit in plano verticali immobili, quod ſuper DH erectum concipitur, & congruens cum plano mobili AKC in ſitu initiali. Diviſa æquatione per $\sqrt{\int 2Adr}$, prodit valor ipſius $dz = dy - \frac{dr}{\sqrt{\int 2Adr}} \times \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$ generaliſſime pro qualibet linea AEC, ſive recta ſit, ſive curva.

COROLLARIUM I.

Si fuerint A & B quantitates conſtantes, incidimus in caſum Trianguli rectilinei AKC, reſoluti in *Commentariis* citatis. Revera hoc docebit æquatio inventa, quæ nunc hanc faciem induit $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}}$ vel [ſimplici integratione denominatoris $\sqrt{\int 2dr}$ adhibita] hanc $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{2r}}$; cui æquivalet iſta $dz = dy - \frac{B}{A} \times dr$. Quæ porro integrata ſimpliciter, dat, in terminis finitis, hanc æquationem $z = y - \frac{Br}{A}$, quæ evidenter monſtrat lineam ABP eſſe rectam. Ut autem pateat eandem eſſe cum illa quam dedimus in *Comment. Coroll.* 11 *; ponamus puncta E, B, N, perveniſſe ad loca infima C, P, K; & ita erit $z =$ PK; $y =$ CK, ſeu b; $r =$ AC, ſeu c, & cum præterea per *Coroll.* 1, ſit $B : A = bm : cM$; erit PK $=$ CK $- \frac{bm \times AC}{cM}$; adeoque CK $-$ PK, ſeu CP, $= \frac{bm \times AC}{cM} =$ [ob AC $= c$] $\frac{bm}{M} =$ [ob CK $= b$] $\frac{m}{M} \times$ CK; quod prorſus conſpirat cum *Coroll.* 2 loci citati.

* Pag. 370, Tom. III.

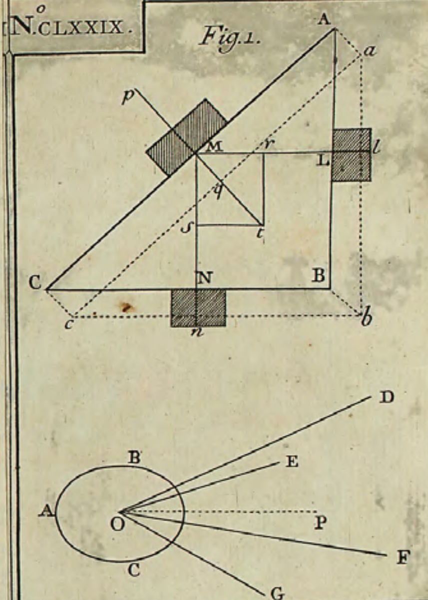
COROLLARIUM II.

Posito eodem casu Trianguli rectilinei AKC; ut inveniatur æquatio inter coordinatas AN & NB, hoc est, inter x & z, exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m realiter describit; id tantum agendum est, ut in æquatione modo ante inventa $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{2r}}$, substituantur valores quantitatum dy, dr, r, & $\frac{B}{A}$; nempe $\frac{bdx}{a}$ pro dy, $\frac{cx}{a}$ pro r, $\frac{cdx}{a}$ pro dr, & $\frac{bm}{cM}$ pro $\frac{B}{A}$: quo facto, & reductione peracta, prodibit $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, ubi per simplicem integrationem quantitatis $\frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, mutaretur æquatio in hanc $adz = bdx - \frac{bmdx}{M}$: rursusque simpliciter integrando, haberetur $az = bx - \frac{bmx}{M}$; seu $z = \frac{bx}{a} - \frac{bmx}{aM}$; quæ æquatio, respectu habito ad valorem litterarum, est eadem cum inventa $z = y - \frac{Br}{A}$, per quam denotari vidimus lineam ABP esse rectam.

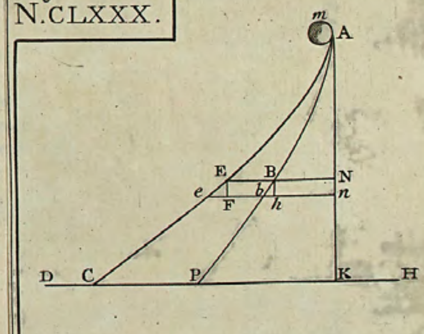
COROLLARIUM III.

Quod si vero, in æquatione $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$; integretur $\frac{dx}{\sqrt{2x}}$ in tota sua latitudine, ita ut fiat $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} - \sqrt{2q}$; auferendo scilicet a simplici integrali $\sqrt{2x}$ adhuc arbitrarium aliquod constans $\sqrt{2q}$; emerget inde $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times (\sqrt{2x} - \sqrt{2q})$; seu $adz = bdx - \frac{bmdx}{M} \times \frac{bmdx\sqrt{2q}}{M\sqrt{2x}}$; quod simpliciter integratum, dat hanc æquationem alge-

N°. CLXXIX.



N°. CLXXX.



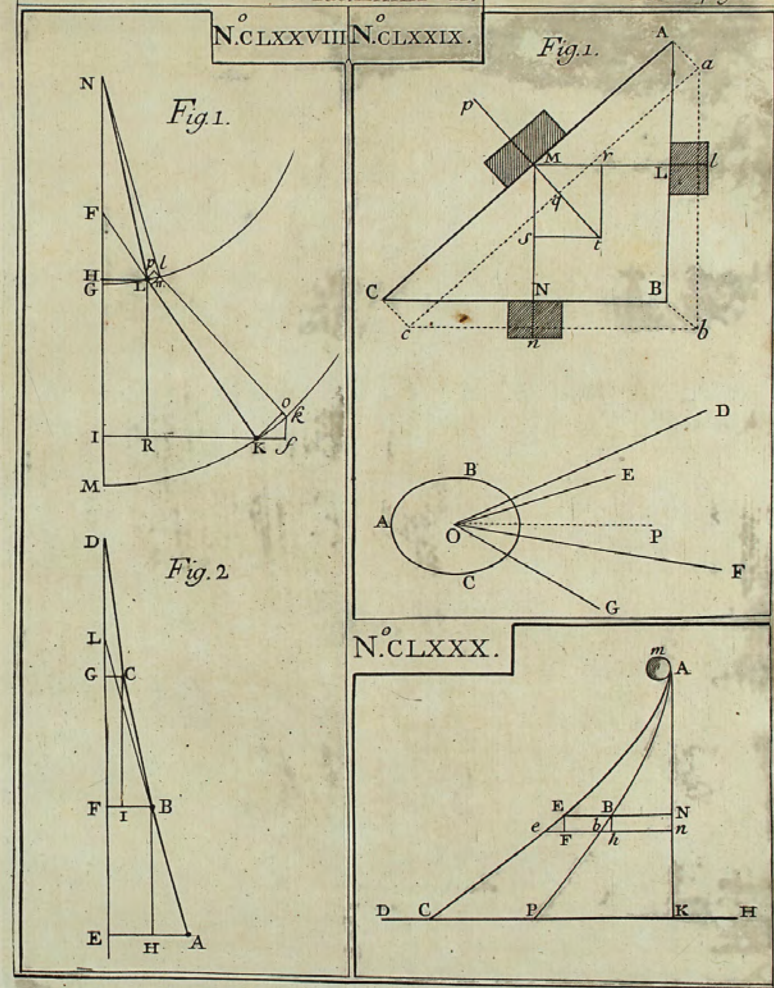
I.

C; ut inveniatur
ſt, inter x & z,
realiter deſcribit;
odo ante inventa
valores quantita-
$\frac{x}{a}$ pro r, $\frac{c\,dx}{a}$ pro
peracta, prodibit
ſimplicem integra-
uatio in hanc adz
ando, haberetur az
æquatio, reſpectu
inventa $z = y$ —
P eſſe rectam.

I I I.

$- \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$,
at $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x}$
ali $\sqrt{2x}$ adhuc ar-
de $adz = bdx$ —
$= bdx - \frac{bmdx}{M}$
hanc æquationem
alge-

Tab. LXXXVII. Tom. IV. pag. 346.



algebraicam $az =$

metria, & posito

dat aaM^2zz —

$(aMz - bTx)$

Observabunt A

æquationem esse a

rectam, in casu q

Ponamus igitur v

sed eam esse, qua

casu simplici a me

partem respondent

tem nominemus =

pus m incipiat mo

eo momento, que

co, inquam, fore

tur prædictam Para

PROBLE

Ge.

Vide Princip. P

Numeru

T*Endat vis gra*

tum datum q

quiritur tum Medii

ex densitate, & veloc.

in data quavis linea c

resistentia ipsa in loci

Confer *Acta Lips.* 1713

algebraicam $az = bx - \frac{bmx}{M} + \frac{2bm\sqrt{qx}}{M}$; quæ liberata ab aſymmetria, & poſito T pro maſſa Trianguli quæ eſt $M - m$, dat $aaM^2 zz - 2abMTxz + bbT^2 xx = 4bbmmqx$; ſeu $(aMz - bTx)^2 = 4bbmmqx$.

Obſervabunt Analyſtæ, ſi calculum inire voluerint, hanc æquationem eſſe ad Parabolam; quæ autem degenerat in lineam rectam, in caſu quo aſſumta $q = 0$.

Ponamus igitur velocitatem initialem corporis m non eſſe nullam, ſed eam eſſe, quam acquireret in directione hypothenuſæ, in caſu ſimplici a me olim ſoluto, poſtquam ſuper ea percurriſſet partem reſpondentem altitudini verticali $= q$; quam velocitatem nominemus $= v$: Dico, ſi hac velocitate initiali v, corpus m incipiat moveri ſuper hypothenuſa Trianguli rectilinei; eo momento, quo ipſum Triangulum eſt adhuc in quiete: dico, inquam, fore ut corpus m, ſuo motu vero continuo, ſequatur prædictam Parabolam.

N°. CLXXXI.

PROBLEMA NEWTONIANUM

Generaliter conceptum & ſolutum.

Vide Princip. Phil. Nat. *Lib.* 2. *Prop.* 10. p. 252. Edit. 3.

aut

Numerum LXXXVII. pag. 481. *Tom. I.*

Tendat vis gravitatis data quacunque lege variabilis, ad punctum datum quodcunque; ſitque reſiſtentia qualiſcunque. Requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis [ſi nimirum reſiſtentia ex denſitate, & velocitate, quocunque modo detur], quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas, & Medii reſiſtentia ipſa in locis ſingulis.

Confer *Acta Lipſ.* 1713. pag. 121. & ſeq. aut Numerum XC, pag. 542 & ſeq. *Tom. I.*

Typus Solutionis Analyticæ.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig. 1.*

Sit diſtantia $= x =$ XC, Cc $= ds$, bc $= dy$, Cb $= dx$; velocitas in C $= v$, vis centralis $= fx$: Erit vis tangentialis $= \frac{fdx}{ds}$; vis normalis $= \frac{fdy}{ds}$. Sit item reſiſtentia $= R$; denſitas $= D$; radius evolutæ $= r =$ CO; angulus contactus $= c = \frac{\text{Cc}}{\text{CO}} = \frac{ds}{r}$. Erit vis centrifuga $=$ vi normali, hoc eſt, $\frac{vv}{r} = \frac{fdy}{ds}$; unde $vv = \frac{frdy}{ds} = \frac{fdy}{c}$. Ergo jam inventa eſt velocitas, ex data vi centrali & natura curvæ.

Porro ex natura accelerationis patet, fore [ſumtis ſignis ſuperioribus pro aſcenſu, & inferioribus pro deſcenſu] $fdx \pm Rds = - vdv = - \frac{1}{2} d(\frac{fdy}{c})$. Unde invenitur $R = \frac{fdx + \frac{1}{2} d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds}$. Adeoque etiam reſiſtentia habetur ex data vi & natura curvæ, & quidem independenter a lege denſitatis. NEWTONUS autem, non putans hoc fieri poſſe, determinandam ſuſcepit primo denſitatem, atque ex ea & ex velocitate poſtea quæſivit reſiſtentiam: quæ via, cum ſit inverſa & parum naturalis, illum præcipitem dedit in calculum longe operoſiſſimum & abſtruſum; etiamſi caſus quem proponit ſit particulariſſimus.

Ipſa vero denſitas D nunc nullo labore obtinetur. Ponatur enim $R = v^n D$, hoc eſt, reſiſtentia proportionalis non tantum quadrato velocitatis [ut ſupponit NEWTONUS] ſed cuicunque dignitati velocitatis multiplicatæ per denſitatem. Erit utique $D = \frac{R}{v^n} = \frac{fdx + \frac{1}{2} d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds(\frac{fdy}{c})^{\frac{1}{2}n}} = \frac{c^{\frac{1}{2}n} fdx}{\mp ds(fdy)^{\frac{1}{2}n}} \mp \frac{\frac{1}{2-n} d((\frac{fdy}{c})^{\frac{2-n}{2}})}{ds}$.

Hinc etiam tempus t facillime deducitur: nam $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$; adeoque $t = \int \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$.

Eſto

Eſto exemplum NEWTONI [v. p. 254, aut pag. 485 *Tom. I.*] ubi curva PFQ eſt ſemicirculus; vis tendens perpendiculariter ad horizontem uniformis, adeoque invariabilis; TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig. 2.* $\frac{dx}{ds} = \frac{\text{AC}}{\text{AQ}}$; $\frac{dy}{ds} = \frac{\text{HC}}{\text{AQ}}$; $c = \frac{ds}{r} = \frac{\text{HI}}{\text{AQ}}$. Unde $v = \sqrt{\frac{fdy}{c}} = \sqrt{\frac{fdy \times \text{AQ}}{\text{HI}}} = \sqrt{f \times \text{HC}}$. Hoc eſt, ob datam f, erit velocitas v ut $\sqrt{\text{CH}}$; ſicuti habet NEWTONUS, p. 256. l. 4. *

Porro $R = \frac{fdx + \frac{1}{2} d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds} = \frac{f \times \text{MI} + \frac{1}{2} d(f \times \text{HC})}{\mp \text{HI}} = \frac{f.(\text{MI} + \frac{1}{2}\text{MI})}{\mp \text{HI}}$ $=$ [ſumtis proportionalibus in terminis finitis] $\frac{f \times (\text{AC} + \frac{1}{2}\text{AC})}{\mp \text{AQ}} = \frac{3f \times \text{AC}}{\mp 2\text{AQ}}$. Adeoque $R : f = 3\text{AC} : \mp 2\text{AQ}$, ut NEWTONUS ibidem [ſed in prima Editione errabat †, nec animadvertit errorem, niſi me monente]. Ideoque tantum deſcenſus eſt poſſibilis phyſice.

Denſitas ita habetur $D = \frac{R}{vv} = \frac{3f.\text{AC} : \mp 2\text{AQ}}{\text{CH}}$, adeoque, ob datas f & AQ, erit D ut $\frac{\text{AC}}{\text{CH}}$; ſicuti NEWTONUS invenit, p. 255, l. ult., & p. 256, l. 1 ‡, ſed via inverſa quæſivit primo, quod noſtra naturali via ultimo datur ſponte.

Poterat etiam tempus determinari, quia nempe $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\text{HI}}{\sqrt{\text{CH}}}$. Hinc $t = \int \frac{\text{HI}}{\sqrt{\text{CH}}} = \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \frac{adx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$. cujus quantitatis integratio pendet a rectificatione curvæ Lemniſcatæ, ut olim docui in conſtructione Iſochronæ Paracentricæ §. Atque ex formula $t = \int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ patet tempus per arcum FH eſſe æquale tempori ſemi-oſcillationis Penduli ſuſpenſi ex

cen-

* pag. 488. Col. 2. lin. 1. & 2. *Tom: I.*
† *Tom. I.* pag. 487. Col. 1. lin. 6, 5, 4 à fine.
‡ Ibid. Col. 1 & 2.
§ N°. XIX. pag. 120. *Tom. I.*

centro A, & deſcribentis arcum HF; concipiendo figuram inverſam, ſive ſemi-peripheriam PFQ deſcriptam infra diametrum PQ.

Sit nunc curva propoſita Spiralis Logarithmica, inque ejus umbilico ſit centrum virium, quod unicum eſt exemplum a NEWTONO prolatum curvarum, in quibus centrum virium in diſtantia eſt finita. Hoc autem Exemplum per methodum noſtram eſt facillimum. Quia enim radius evolutæ Spiralis eſt PO,
TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig.* 3. [Vid. Fig. NEWT. pag. 275, vel 276] erit angulus contactus, ſeu $c = \frac{ds}{PO} = \frac{dy}{x}$. Hinc formula noſtra generalis ...

$R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d\left(\frac{fdy}{c}\right)}{\mp ds}$ mutatur in hanc, $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(fx)}{\mp ds} = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds}$ comprehendentem omnia quæ NEWTONUS octo paginis operoſe pertractat *. Ponatur primo $f = x^m$; ſitque ratio conſtans ds ad dx, ut 1 ad q; habebitur $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds} = \frac{(3+m).qx^m}{\mp 2}$. Hinc reſiſtentia eſt proportionalis vi centrali. Velocitas $v\left[\frac{fdy}{c}\right] = \sqrt{fx} = \sqrt{x^{m+1}}$. Ponatur porro D, ſeu $\frac{R}{v^n}$, ſeu $\frac{(3+m).qx^{\overline{(2m-mn-n):2}}}{\mp 2} = \frac{1}{x} = x^{-1}$; faciendum erit $\frac{2m - mn - n}{2} = -1$, unde $n = \frac{2m+2}{m+1} = 2$. Ergo manente $f = x^m$, & $D = \frac{1}{x}$, ſupponendo cum NEWTONO reſiſtentiam eſſe in duplicata ratione velocitatum, & ſimplici denſitatum, corpus ſemper gyrari poteſt in Spirali Logarithmica; quæ eſt Propoſitio NEWTONI, ſed in omni amplitudine ſumta, quam ipſe nimis reſtrinxit præter neceſſitatem. Vid. *Act. Lipſ.* 1713, pag. 125 †.

Co-

* *Tom. I.* pag. 495, & ſeq. † N°. XC. pag. 548, *Tom. I.*

COROLLARIUM I.

Quia vis centrifuga $\frac{vv}{r} = \frac{fdy}{ds}$; erit $fdy = \frac{vvds}{r} =$ [in hoc caſu] $\frac{vvdy}{x}$; adeoque $f = \frac{vv}{x}$. Hoc eſt velocitas in loco quovis deſcenſus [ſi m eſt affirmativum, vel etiam negativum, ſed $\lessdot 3$] aut aſcenſus [ſi m eſt negativum & ſimul $\gtrdot 3$] ea ſemper eſt, qua cum corpus, in medio non reſiſtente, eadem vi centripeta gyrari poteſt in circulo ad eandem a centro diſtantiam. Vide *Coroll.* 1. NEWT. pag. 277 †. Confer *Act. Lipſ.* 1713, pag. 126 *.

COROLLARIUM II.

Quia D, in ſuppoſitione NEWTONI, fit $= \frac{(3+m).q}{\mp 2x} = \frac{(3+m).qds}{\mp 2xds} = \frac{(3+m).dx}{\mp 2xds} = \frac{(3+m)\times OS}{\mp 2SP \times OP}$; manifeſtum eſt, ob datum $\frac{3+m}{\mp 2}$, denſitatem eſſe ut $\frac{OS}{SP \times OP}$; ceu habet NEWTONUS ibid. Coroll. 2 †. Conf. *Act. Lipſ.* loco cit.

COROLLARIUM III.

$R : f = \frac{(3+m).qx^m}{\mp 2} : x^m = \frac{(3+m).q}{\mp 2} : 1 = \frac{(3+m).qds}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)dx}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)}{\mp 2} OS : OP$. Et in caſu particulari NEWTONI, ubi $m = -2$; erit $R : f = \mp \frac{1}{2} OS : OP$; ut quidem habet NEWTONUS ibid. Coroll. 3 †. Sed non animadvertit deſcenſum tantum eſſe poſſibilem. Confer *Act. Lipſ.* loco cit.

COROL-

† *Tom. I.* pag. 497. * N°. XC. pag. 549, *Tom. I.*

Corollarium IV.

Fiat refiftentia $= \frac{3+m}{+\frac{1}{2}} f$; fiet $OS = OP$; & Spiralis conveniet cum linea recta PS: velocitas vero cum femper fit in Spirali $= \sqrt{x^{m+1}} = x^{(m+1):2}$; erit etiam in hac linea recta velocitas ut $x^{(m+1):2}$. Adeoque, in cafu NEWTONI, ubi $m = -2$, Velocitas illa ut $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Vide Coroll. 4 NEWT. pag. 277 †.

Corollarium V.

Cum in velocitatis expreffione $v = x^{(m+1):2}$ non ingrediatur littera q, quæ fpeciem Spiralis diftinguit; evidens eft, in fingulis Spiralibus Logarithmicis cujufcunque fpeciei, effe velocitates æquales in diftantiis æqualibus. Quod itaque independenter a Corollario præcedente demonftravimus, fecus ac fecit NEWTONUS: Vide ejus Coroll. 5, p. 277 & 278.* Patet etiam per fe, tempora per fingulas Spirales effe ad fe invicem, ut longitudines Spiralium. Vid. *Act. Lipf.* ejufdem an. p. 127 **.

Reliqua NEWTONI Corollaria pari modo per noftra examinari poffunt.

Corollarium VI.

Si $m = -1$, erit velocitas $v = \sqrt{x^0} =$ conftanti, adeoque uniformis; & tempora per quofvis arcus erunt ipforum arcuum longitudinibus proportionales. Vid. *Act. Lipf.* 1713, p. 126 **.

Propofitio NEWTONI XVI, p. 280 ‡ difcrepat nunc ab ea quam in prima editione habuerat, edoctus eam falfam effe, ficuti

† *Tom. I*, pag. 497. * *Tom. I.* pag. 498. ** N°. XC. pag. 550, *Tom. I.*
‡ *Tom. I*, pag. 500.

ficuti monftravi in *Act. Lipf.* 1713, pag. 125, Confect. 3 †. in hac vero, quam in editionibus pofterioribus fubftituit, fruftra vult vim centripetam debere effe *reciproce* ut dignitatem quamlibet diftantiæ; cum generalius dicere potuiffet, *five reciproce*, *five directe*. Nam monftravimus hic, fi denfitas fit diftantiis reciproce proportionalis, poffe femper effe $f = x^m$, ubi m denotat exponentem quemcunque, five affirmativum, five negativum.

Problema IV NEWTONI, *p.* 281, ubi proponitur invenienda & vis centripeta & medii refiftentia, qua corpus in data Spirali, data velocitatis lege, revolvi poteft: cujus Solutionem ipfam non exhibet, fed modum tantum indicat, quo eo perveniri poffe putat; ad cujus veftigia fi Solutionem tentare vellemus, multum temporis & fudoris impendendum effet. Noftra vero methodo rem ludendo peragemus. Nam v feu $\sqrt{\frac{fdy}{c}}$ cum fit æquale $\sqrt{fx}$, erit $\frac{vv}{x} = f$: ergo jam determinavimus vim centripetam. Nunc valor ipfius f, ut & valor ipfius df, qui eft $= \frac{2vxdv - vvdx}{xx}$ fubftituatur in $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds}$ $= \frac{3fxxdx + x^3 df}{\mp 2xxds} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; prodibit $R = \frac{vvdx + vxdv}{\mp xds}$ $=$ [quia $dx = qds$] $\frac{qvv}{\mp x} + \frac{vdv}{\mp ds}$. Data igitur, per hypothefin, v in x, datur f & R. Quorfum igitur tot intricatiffimæ ambages?

Problema V NEWTONI, ubi ex data lege vis centripetæ, invenienda eft medii denfitas ad defcribendam datam Spiralem. NEWTONUS prolixitate non neceffaria, confugit ad inquifitionem retardationis velocitatis. Nos ita facile rem abfolvimus. Quia $vv = fx$, vel $v = \sqrt{fx}$, habetur velocitas ex data vi centripeta.

 Et

† N°. XC, pag. 548, 549, *Tom. I.*

Et quia NEWTONUS ſupponit $vvD = R$, quam invenimus $= \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; erit utique $D = \frac{R}{vv} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2fx^3 ds} =$ [differentiando actu & ſubſtituendo qds pro dx] $\mp \frac{3q}{2x} \mp \frac{df}{2fds}$.

SCHOLIUM.

Videmus hæc duo Problemata nihil fere laboris requirere; ſi rite tractentur; ſed NEWTONUS præpoſtera methodo uſus, neſcio quid magni laboris metuens, vadum non tentavit.

N°. CLXXXII.

PROBLEMA BALLISTICUM.

I.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 1. *Data velocitate initiali, expreſſa per* AC, *alicujus mobilis gravis, quod ex* A *verticaliter in altum exploditur, in medio uniformiter denſo; Quæritur altitudo* AK *ad quam aſcendit; item tempus quod tam in aſcenſum quam in deſcenſum impendit.*

SOLUTIO.

II.

Sit CGM Parabola, ſeu ſcala velocitatum; cujus nempe applicatæ CA, GI, gi &c. deſignent velocitates mobilis gravis in punctis A, I, i &c. ſi aſcenderet in vacuo, ſeu in medio non reſiſtente. Sit etiam curva CEF [quam Logarithmicam eſſe ex *Diſſertatione mea de Motu* † patet] ſcala velocitatum ejuſdem mobilis, ſi expers gravitatis cum velocitate initiali AC

† N°. CXXXV. Cap. XIII. pag. 74, & 75, *Tom. III.*

AC verticaliter aſcenderet; adeo ut applicatæ EN, en, FB, &c. exprimant velocitates reſiduas in punctis N, n, B, &c. Sit tandem curva CHK, ſcala velocitatum mobilis gravitate præditi, in medio uniformiter denſo verticaliter aſcendentis, cum velocitate initiali AC: ita ut applicatæ CA, HL, hl, &c. deſignent velocitates reſiduas in punctis A, L, l &c.

III.

Per duo quævis puncta proxima R, S, ducantur axi AB parallelæ, ſecantes curvas prædictas in punctis H, G, E, & h, g, e, ex quibus deductæ intelligantur applicatæ HL, GI, EN, & hl, gi, en, quarum priores ſecent Se in punctis P, Q, T.

Dicantur nunc AC $= n$, AM $= a$, FB $=$ unitati $= 1$, AB $= b$, ſubtangens Logarithmicæ CEF $= c$, velocitas HL $=$ GI $=$ EN $= v$; ſubtangens Logarithmicæ, quæ reſpondet Logarithmis in Tabulis vulgaribus *Vlacquianis* proſtantibus $= q = 4342945$. Erit, ſumendo Logarithmos ex iſtis Tabulis, $q : c = lv : \frac{clv}{q} =$ BN, & $q : c = ln : \frac{cln}{q} =$ BA. Eſt vero EN, ſeu $v : c =$ ET [dv]: Te ſeu Nn [$\frac{cdv}{v}$], adeoque $\frac{\text{Nn}}{\text{EN}} = \frac{cdv}{vv} =$ tempuſculo per Nn; integrando $\frac{c}{1} - \frac{c}{v} = t$ BN [intelligo per t BN tempus per BN] & $\frac{c}{1} - \frac{c}{n} = t$ BA; hinc $\frac{c}{v} - \frac{c}{n} = t$ AN. Porro vocetur R reſiſtentia medii, quando mobile gravitatis expers eſt in N; & G vis gravitatis ejuſdem mobilis gravitate præditi, cum aſcendit in vacuo: erit $\frac{R.\,cdv}{vv} = dv$ [quia nempe decrementa vel incrementa velocitatum, ſunt reſiſtentiis vel viribus motricibus in tempuſcula ductis proportionalia]; adeoque $R = \frac{vv}{c}$.

IV.

Nunc $AC^2 : IG^2$ [$= nn : vv$] $= AM$ [a] $: MI$[$\frac{avv}{nn}$]. Ergo $Ii = Qg = \frac{2avdv}{nn}$, & $\frac{Ii}{GI} = \frac{2adv}{nn} = t\,Ii$; integrando $\frac{2av}{nn} = t\,IM$, unde $\frac{2a}{n} = t\,AM$. Jam quia $\frac{G.2adv}{nn} = dv$; habetur $G = \frac{nn}{2a}$. Ut nunc pro aſcenſu determinetur $t\,AK$, indeque ipſa curva CHK; notetur, ſummam virium $G+R$ retardare mobile aſcendens; voceturque $KL = z$, & Ll vel $Ph = dz$. Erit $\frac{dz}{v} = t\,Ll$, & $\frac{(G+R).dz}{v} = dv$; adeoque $\frac{vdv}{dz} = G+R = \frac{nn}{2a} + \frac{vv}{c}$. Hinc $dz = \frac{2acvdv}{nnc + 2avv}$, quæ exprimit naturam curvæ CHK, ope Logarithmorum conſtruendæ. Verum $t\,Ll$ [$\frac{dz}{v}$] $= \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$, & $t\,LK = \int \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$, cujus integratio dependet a rectificatione arcus circularis, qui habet radium $= n\sqrt{\frac{c}{2a}}$, & tangentem $= v$, ut notum eſt. Sumta itaque HL, vel v, æquali ipſi CA, vel n; prodibit tempus per totam AK. Ut autem hoc tempus comparari queat cum tempore per AM aſcenſus in vacuo $= \frac{2a}{n}$, ſequentia ſunt obſervanda.

V.

Concipio medium uniformiter denſum, tanquam ex corpuſculis æqualibus & elaſticis, per ſpatium æqualibus interſtitiolis a ſe invicem diſſeminatis conſtans; cujus naturæ aërem eſſe valde eſt probabile. Oſtendi autem in *Diſſertatione mea de Legibus communicationis motus*, Cap. XII, §. 13 †, corpus conoidicum ADB [vid. Fig. ibid.] quod in tali medio ſecundum directionem axis

† pag. 72, *Tom. III.*

axis ID [vertice D antrorſum verſo] velocitate n moveri incipit in linea horizontali, vel in quacunque recta, ſi ſit gravitatis expers, percurriſſe ſpatium $= Cxxln : 17371780 \int \frac{xdx^3}{ds^2}$ [ponendo poſt integrationem $x = IA$], quando eo uſque pervenit, ut velocitas reſidua ſit ad velocitatem initialem, ut 1 ad n. Intelligo autem per C, longitudinem cylindri recti aërei eandem cum Conoïde baſin, eandemque quantitatem materiæ, ſeu [ſi ponderoſa eſſe ſupponatur] idem pondus habentis; per ln intelligo Logarithmum ipſius n ex Tabulis uſitatis deſumtum; item per ds, intelligo elementum curvæ, ex cujus revolutione generatur. Si Conoïdes ADB ſit hæmiſphærium, cujus radius $= v$, erit [in caſu quo x evadit $= r$] $\int \frac{xdx^3}{ds^2} = \frac{1}{4} rr$, adeoque $Cxxln : 17371780 \int \frac{xdx^3}{ds^2} = Crrln : 17371780 \times \frac{1}{4} rr = \frac{Cln}{4342945}$.

VI.

Poſito nunc hemiſphærium eſſe ex ferro, & hoc eſſe 7000^{es} gravius vel denſius aëre; erit C, ſeu longitudo cylindri aërei æque gravis & ejuſdem baſis cum hemiſphærio $= \frac{2}{3} r \times 7000 = 4667 r$. Ut autem habeatur C pro tota Sphæra, intelligatur alterum hemiſphærium poſterius, quod ab aëre allabente intactum manet, incorporari [ut ita dicam] in anteriori; ita ut hoc evadat duplo denſius: patet hoc hemiſphærium, duplo denſius quam ferrum, percurrere, eodem tempore, eandem viam quam integer globus ferreus; ergo prædictus numerus ſumendus tantum eſt duplus, vel pro radio r ſimpliciter ſcribenda eſt diameter globi, quæ vocetur D, atque ita erit $C = 4667 D$. Hinc $\frac{Cln}{4342945} = \frac{4667 D \times ln}{4342945}$.

Sit ex. gr. $n = 2$, hoc eſt, ſi ſcire velimus, quouſque globus ferreus in linea horizontali moveri debeat, ut ab aëris reſiſtentia amittat dimidium ſuæ velocitatis initialis, in quo caſu

$ln = l2 = 0.\ 3010300$; facto calculo prodibit $\frac{4667\,D \times ln}{4342945} = 3235\,D$. In diſſertatione mea inveni $3700\,D$ pro globo plumbeo.

VII.

Sed ut ad rem redeam; invenienda eſt ante omnia c, vel ſubtangens Logarithmicæ CEF; quod fit faciendo, ut ln ad AB [$Cxx\,ln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^2}$, quæ pro globo ferreo eſt $\frac{4667\,D\,ln}{4342945}$] ita ſubtangens Logarithmicæ Tabularum, ſeu 4342945, ad ſubtangentem quæſitam c, quæ per conſequens $= 4667\,D$. Quia

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2. itaque per §. IV, $t\,LK = \int \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$; ſcribatur pro c ejus valor $4667\,D$, & habebitur $t\,LK = \int \frac{9334\,aDdv}{4667\,nnD + 2avv}$. Hoc ut conſtruatur, ſit deſcriptus quadrans circuli DXY, cujus radius $OD = n\sqrt{\frac{c}{2a}} = n\sqrt{\frac{4667\,D}{2a}}$; & in tangente DZ ſumatur DV $= v$; erit, ducta OV, arcus $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,LK$. Hinc ſi DV, vel v, fit æqualis velocitati initiali $AC = n$, dabit $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,AK$. Eſt autem, per §. IV, tempus per AM in vacuo $= \frac{2a}{n}$. Adeoque $t\,AM : t\,AK = \frac{2a}{n} : DX \times \frac{2a}{nn} = n : DX = DV : DX =$ [quia $OD : DV = n\sqrt{\frac{c}{2a}} : n = \sqrt{c} : \sqrt{2a} = c : \sqrt{2ac}$, ſumto radio $O\Delta = c$, & tangente $\Delta U = \sqrt{2ac}$] $= \Delta U : \Delta\xi$. Quod ſi vero comparare lubeat tempus per AK in medio reſiſtente, ad tempus per datam altitudinem IM in vacuo, erit $t\,IM : t\,AK = \frac{2av}{nn} : DX \times \frac{2a}{nn} = v : DX = GI : DX$.

VIII.

Notandum eſt, ex natura Parabolæ MGC [in *Fig.* 1], quadratum

dratum velocitatis GI in vacuo, ſemper eſſe proportionale altitudini IM, ad quam aſcendere poteſt; adeoque $\frac{vv}{IM} = \frac{nn}{AM} = \frac{nn}{a}$ TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 1. & 2.
$=$ conſtanti; quæ dicatur $= e$. Quare jam erit, pro medio reſiſtente, $t\,LK$ ſeu $\int \frac{9334\,aDdv}{4667\,nnD + 2avv} = \int \frac{9334\,Ddv}{4667\,eD + 2vv}$. Hinc [*Fig.* 2] quadrantis DXY radius OD, ſeu $n\sqrt{\frac{4667\,D}{2a}} = \sqrt{\frac{4667\,eD}{2}} = \sqrt{2334\,eD} =$ conſtanti. Sit igitur velocitas initialis, hoc eſt, AC [*Fig.* 1] vel DV [*Fig.* 2] in medio reſiſtente infinite magna, quo ipſo arcus DX abit in quadrantem DXY, quia ſecans OXV evadit parallela tangenti DV; unde $t\,IM : t\,AK = IG : DXY$, hoc eſt, ut finitum IG ad finitum DXY: eſt enim quadrans DXY finitus, ob radium OD finitum, ut pote $= \sqrt{2334\,eD}$.

Hinc patet veritas Paradoxi; globum ſcilicet in aëre uniformiter reſiſtente ſurſum exploſum, quamvis infinita velocitate, impendere tantum tempus finitum per totam altitudinem, ad quam aſcendere poteſt.

COROLLARIUM I.

Per §. III, $t\,AB = \frac{c}{1} - \frac{c}{n}$ in medio reſiſtente, ſed ſine gravitate; & per §. IV, $t\,AM = \frac{2a}{n}$ in vacuo, ſed cum gravitate. Ergo $t\,AB : t\,AM = \frac{c}{1} - \frac{c}{n} : \frac{2a}{n} = nc - c : 2a =$ [in caſu globi ferrei] $(n - 1) \times 4667\,D : 2a =$ [in caſu quo præterea $n = 2$] $4667\,D : 2a$.

Hinc ſi diameter globi ſit 3 poll. ſeu $\frac{1}{4}$ ped., & ſit a, ſeu altitudo AM, ad quam hic globus in vacuo aſcendere poſſet $= 1000$ ped.; erit $t\,AB : t\,AM :: \frac{4667}{4} : 2000 = 4667 : 8000$. Supponendo igitur, ut HUGENIUS determinavit, grave in vacuo deſcendere $15\frac{1}{12}$ ped. menſuræ Pariſinæ in uno minuto ſecundo, requirentur [ad aſcendendum ad altitudinem 1000 ped. Pariſ.]

85

$8\frac{1}{6}$ secunda quam proxime: Faciendo itaque $8000 : 4667 = 8\frac{1}{6} : 4\frac{3}{4}$, paulo plus; prodibunt paulo plus quam $4\frac{3}{4}$ minuta secunda, quibus mobile gravitatis expers, aut globus 3 poll. Parif. in horizonte motus indiget, donec a resistentia aëris amiserit dimidium velocitatis initialis, qua cum ascendere posset in vacuo, ad altitudinem mille pedum.

COROLLARIUM II.

Supra §. IV inventum est Ll, vel $dz = \frac{2acvdv}{nnc + 2avv} =$ [substitutis pro nn, vv & $2vdv$, earum proportionalibus AM, IM, & Ii; & vocando IM $= y$, I$i = dy$] $\frac{cdy}{c + 2y}$; cujus integrale [sumtis Logarithmis ex Tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}cl(c+2y) - \frac{1}{2}clc}{4342945} =$ KL. Hinc tota AK $= \frac{\frac{1}{2}cl(c+2a) - \frac{1}{2}clc}{4342945} = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$ $=$ [in præsenti casu] $\frac{4667Dl(4667D + 2000) - 4667Dl(4667D)}{8685890}$ $=$ [supposito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{1166\frac{3}{4}l3166\frac{3}{4} - 1166\frac{3}{4}l1166\frac{3}{4}}{8685890}$ $= \frac{1166\frac{3}{4} \times 3.5006138 - 1166\frac{3}{4} \times 3.0669778}{8685890} =$ $\frac{1166\frac{3}{4} \times 433636}{868589} = \frac{4667 \times 108409}{868589} = \frac{505944803}{868589} = 582\frac{3}{8}$ ped. Parif. quam proxime.

Atque ita patet globum nostrum ferreum, non multo plus quam ad dimidiam altitudinem in aëre ascendere, ad quam totam ascenderet in vacuo.

IX.

Pergimus nunc ad determinandum descensum ex altitudine KA, quem mobile grave finito ascensu inchoare debet. Sit curva KVγ scala velocitatum, cujus scilicet applicatæ Ϭv, βV, Aγ

denotent velocitates acquisitas mobilis gravis descendendo in punctis Ϭ, β, A. Per simile ratiocinium; quo usus sum in §. IV, conficitur, differentiam virium $G - R$ accelerare mobile cadens. Vocetur nunc K$\beta = z$, & Ϭβ vel v$\alpha = dz$; erit [reliquis manentibus] $G - R = \frac{nn}{2a} - \frac{vv}{c} = \frac{vdv}{dz}$; unde $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv} = \frac{acdv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} - \frac{acdv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}} =$ [substituendo pro nn, vv, $2vdv$, earum proportionales AM, IM, Ii] $\frac{cdy}{c - 2y}$; cujus integrale [sumendo Logarithmos ex tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}clc - \frac{1}{2}cl(c - 2y)}{4342945} = \frac{clc - cl(c - 2y)}{8685890} =$ Kβ. Hinc elegantia fluunt Corollaria.

COROLLARIUM I.

Existente MI $=$ MA, hoc est, si $y = a$, habetur K$\beta = \frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquisita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In nostro exemplo, ubi $c = 1166\frac{3}{4}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890} = \frac{1166\frac{3}{4}l1166\frac{3}{4} - 1166\frac{3}{4}l - 833\frac{1}{3}}{8685890} =$ impossibili, quia Logarithmus quantitatis affirmativæ ad Logarithmum quantitatis negativæ transgredi non potest, quin transeat per lo qui est $= -$ infinito; atque adeo quin ultra infinitum [sit venia dicto] globus descendat. Unde colligitur, globum nostrum nunquam recuperare posse, recidendo, velocitatem suam initialem, etiamsi in infinitum descenderet.

COROLLARIUM II.

Sit autem $2y = c$; prodit $\frac{clc - clo}{8685890} =$ infinito $=$ Kβ. Unde si $y = \frac{1}{2}c$, hoc est, in nostro casu, si y vel MI $= 4667 \times \frac{1}{2}D$ $= \frac{4667}{8}$ ped. $= 583\frac{3}{8}$ ped. aut circiter $=$ KA [quæ in Co-

 roll.

roll. 2, §. VII, inventa eſt $= 582\frac{5}{8}$ ped.] habebit globus maximam ſuam poſſibilem velocitatem, ad quam autem nunquam pertingit, ſed data quavis quantitate propius accedit. Hinc ſumta MI $= 583\frac{5}{8}$ ped. erit ducta GR parallela ipſi MA, aſymtotos ſcalæ velocitatum KVγ.

COROLLARIUM III.

Sed ut inveniatur ipſa velocitas maxima *ad quam non*, fiat $MA : MI = AC^2 : IG^2$; hoc eſt, $1000 : 583\frac{5}{8} = nn : \frac{4667}{8000} nn = 160000 : 93340$, quorum radices ſunt quam proxime ut 40 ad $30\frac{1}{2}$. Dico itaque velocitatem initialem, eſſe ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 40 ad $30\frac{1}{2}$, ſeu ut 80 ad 61.

X.

Quod attinet ad tempus deſcenſus, illud ita determinatur. Per §. VIII, $\beta\mathfrak{C}$, ſeu $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv}$, proinde $\frac{dz}{v}$ ſeu $t\mathfrak{C}\beta$

$$= \frac{2acdv}{nnc - 2avv} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c} \times dv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}} + \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c} \times dv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac} \times dv}{n\sqrt{2ac} + 2av} + \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac} \times dv}{n\sqrt{2ac} - 2av} = \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times 2adv}{n\sqrt{2ac} + 2av} + \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times 2adv}{n\sqrt{2ac} - 2av}.$$

Hinc integrando, adhibitis Logarithmis ex Tabulis, $tK\beta =$

$$\frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times l(n\sqrt{2ac} + 2av) - \frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times l(n\sqrt{2ac} - 2av)}{4342945} = \frac{\frac{\sqrt{2ac}}{2nn} \times l\,\frac{+2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}.$$

XI.

Ut autem inveniatur commode tempus deſcenſus per totam KA, quærendus primo eſt valor ipſius v in puncto A, hoc eſt Aγ.

Quod

Quod ſic facio. Per *Coroll.* 2, §. VII, $AK = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$, & per §. VIII, $K\beta = \frac{clc - cl(c-2y)}{8685890}$, ut igitur $K\beta$ fiat æqualis ipſi KA, ponendum eſt $\frac{clc - cl(c-2y)}{8685890} = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$; unde $2lc = l(c-2y) + l(c+2a)$: reducendo Logarithmos ad numeros, habetur $cc = (c-2y) \times (c+2a) = cc + 2ac - 2cy - 4ay$. Hinc $y = \frac{ac}{c+2a} = MI$. Faciendo nunc $MA : MI = AC^2 : IG^2$, ſeu $a : \frac{ac}{c+2a} = nn : \frac{nnc}{c+2a} = IG^2 = vv$ in puncto $A = (A\gamma)^2$; erit $A\gamma = n\sqrt{\frac{c}{c+2a}}$. Quod ſi itaque hic valor ſubſtituatur pro v, in formula quæ in §. præced. exprimit $tK\beta$, prodibit $tKA = \ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \mathrm{Log.}\frac{2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}{-2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}}{4342945} = \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}ac} \times \mathrm{Log.}\frac{\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}{-\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}}{4342945}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}ac} \times \mathrm{Log.}\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}{-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}}{4342945} \ldots\ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}ac} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))}{4342945}.$$

Hoc jam comparetur cum tempore per AM in vacuo, quod per §. IV eſt $= \frac{2a}{n}$, eritque $tAM : tKA = \frac{2a}{n} : \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times (l\,\&c.}{4342945} = 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))$. Applicetur hæc analogia ad propoſitum caſum, ubi $a = 1000$ ped., & $c = 4667\,D = \frac{4667}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped.; & habebitur $tAM : tKA = 8685890 \times \sqrt{2000} :$

$\sqrt{1166}$

$\sqrt{1166\tfrac{3}{4}} \times (l(\sqrt{2000} + \sqrt{3166\tfrac{3}{4}}) - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{3166\tfrac{3}{4}})) = 868589 \times \sqrt{800000} : \sqrt{4667} \times (l(\sqrt{2000} + \sqrt{3166\tfrac{3}{4}}) - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{3166\tfrac{3}{4}})) = 776808096 : \sqrt{4667} \times (l\,101\tfrac{21}{70} - l\,11\tfrac{61}{70}) = 776808096 : 9311065 \times \sqrt{4667} = 776808096 : 636074871 = 258936032 : 212024957.$

XII.

Quia itaque, per *Coroll.* I §. VII, tAM, hoc eſt, tempus aſcenſus in vacuo ad 1000 ped. eſt quam proxime $8\tfrac{1}{2}$ ſecundorum; fiat ut 258936032 ad 212024957, ita $8\tfrac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 6\frac{177920957}{258936032}$, hoc eſt, quam proxime $6\tfrac{17}{25}$ ſecund. pro tempore deſcenſus per KA.

XIII.

Reſtat ut determinemus quoque in numeris, pro caſu propoſito, tempus aſcenſus in aëre per AK. Hunc in finem, quæratur, ex Tabulis tangentium, angulus ΔOV [*Fig.* 2] faciendo ut OΔ ad ΔU, ſeu per § VII, ut c ad $\sqrt{2ac}$, ita ſinus totus ad tangentem anguli ΔOU; adeoque, in noſtro caſu, ut $\frac{4667}{4}$ ad $\sqrt{2333500}$, ſeu ut 4667 ad 6110 ita 10000000 ad 13070495 tang. ΔOU, qui per conſequens erit 52 gr. 38 min. Suppoſita nunc Archimedis ratione diametri ad peripheriam, ut 7 ad 22, unde radius ad quadrantem ut 7 ad 11: Fiat 7 ad 11 = 10000000 : 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro $90 : 52\tfrac{38}{60} = 15714286 : 9189947\tfrac{7}{27}$ = numero partium arcus 52 gr. 38 min. pro radio = 10000000. Nunc tandem fiat ΔU.$\Delta\xi$ [= DV : DX] = $13070495 : 9189947\tfrac{7}{27}$ = tAM [$8\tfrac{1}{6}$ ſecund.] : tAK aſcenſus in aëre, quod tempus erit $= 5\tfrac{3}{4}$ ſecund. quam proxime. Ergo ambo tempora aſcenſus & deſcenſus in aëre ſimul ſumta $= 5\tfrac{3}{4} + 6\tfrac{17}{25} = 12\tfrac{85}{100}$ ſec. Quia autem in vacuo tempus aſcenſus & deſcenſus ſimul eſſet $= 16\tfrac{1}{3}$ ſec., patet reſiſtentiam aëris facere ut recidat globus noſter $3\tfrac{67}{100}$ ſec. citius quam recideret, ſi aër nihil reſiſteret.

XIV.

Mutata jam a ſucceſſive, ſumendo eam modo majorem, modo minorem, poterit per eandem methodum, inveniri tempus in aëre reſiſtente, tam pro aſcenſu quam pro deſcenſu, pro unaquaque a, adeoque etiam tempus totius curvæ, quam mobile grave aſcendendo & deſcendendo inſumit. Quæ omnia ſi in Tabellam conjiciantur, poterit eam conſulendo, ex obſervato tempore, quo globus exploſus in Terram recidit, determinari non tantum quouſque aſcenderit, ſed etiam quantum temporis pro aſcenſu, quantum item pro deſcenſu inſumſerit: quod olim ab aliquo deſiderabatur.

Scholium.

Hæc ita determinantur, intelligendo medium eſſe rarum & elaſticum in quo globus movetur: quale medium aërem eſſe, & uniformiter ſe ita habere in omnes partes, ſuppoſuimus in præcedentibus. Quod ſi autem nunc ſupponere lubet, medium in quo movetur globus non eſſe elaſticum, ſed compoſitum eſſe ex particulis, quæ ad allapſum non reſiliant; atque oporteat invenire, in hoc caſu, omnia quæ pro priori ſunt in præcedentibus inventa.

Lemma I.

Si Corpus cylindricum vel priſmaticum M *qualecunque moveatur, baſi alterutra antrorſum verſa, velocitate V; quod occurrat, in directione perpendiculari ad baſin, particulis vel globulis quieſcentibus* m, m, m; *quarum omnium ſimul ſumtarum maſſa vocetur m. Quæritur velocitas, tam corporis cylindrici vel priſmatici* M, *quam particularum* m, m, m, *poſt factum impulſum?* Tab. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 3.

SOLUTIO.

Ex Regulis communicationis motus patet, velocitatem corporis M, & particularum, m, m, m, post impulsum esse $= \frac{MV}{M+m}$.

COROLLARIUM I.

Decrementum velocitatis corporis $M = V - \frac{MV}{M+m} = \frac{mV}{M+m}$.

COROLLARIUM II.

In casu quo m infinities minus quam M; erit decrementum velocitatis $= \frac{mV}{M}$.

LEMMA II.

TAB. LXXXVIII N°. CLXXXII Fig. 1. *Sit nunc fluidum vel medium non elasticum, compositum ex moleculis per totam longitudinem* AB *æqualibus intervallulis disseminatis; in quo moveatur corpus cylindricum* M, *secundum directionem perpendicularem ad basin in* AB.

Sit C longitudo cylindri hujus fluidi, qui contineat quantitatem materiæ æqualem ipsi corpori cylindrico M, cujus longitudo sit L; adeo ut densitas fluidi sit ad densitatem corporis cylindrici M, ut L ad C. Unde si $C \times m$ exprimat cylindrum fluidi æquale corpori cylindrico M, atque si Nn sit intervallulum, quo strata particularum fluidi a se invicem distant, exprimet $\mathrm{Nn} \times m$ massulam unius strati particularum, quibus corpus cylindricum M una vice occurrit. Quando itaque corpus cylindricum M [a cujus gravitate abstrahitur] pervenerit in N, ubi velocitas residua sit EN; erit decrementum velocitatis $\mathrm{ET} = \frac{mV}{M} = \frac{\mathrm{Nn} \times m \times V}{M} = \frac{\mathrm{Nn} \times \mathrm{EN} \times m}{M}$. Quia autem ET : Te

[Nn]

$[\mathrm{Nn}] = \mathrm{EN}$: subtangentem curvæ velocitatum CEF; habetur subtangens $= \frac{\mathrm{EN} \times \mathrm{Nn}}{\mathrm{ET}} = \frac{\mathrm{EN} \times \mathrm{Nn} \times M}{\mathrm{Nn} \times \mathrm{EN} \times m} = \frac{M}{m}$. Hinc patet scalam, seu curvam velocitatum CEF, in hoc casu, esse Logarithmicam, cujus subtangens $= \frac{M}{m} =$ [ob $C \times m = M$] $\frac{C \times m}{m} = C$.

LEMMA III.

Invenire rationem resistentiæ plani in fluido moti, in directione perpendiculari ad planum, ad resistentiam superficiei alicujus conoïdicæ, ejusdem cum plano amplitudinis, & in eodem fluido motæ, secundum directionem axis perpendicularis ad planum, & eadem velocitate.

Sit DO curva aliqua, ex cujus revolutione circa axem DP, generetur superficies conoïdica, quam tangat in vertice D planum DF, in quod allabatur fluidum, secundum directionem ad planum perpendicularem, & parallelam axi DP. Vocetur R resistentia absoluta, quam planum a fluido allabente patitur. Sint duæ applicatæ proximæ OP, op, super DP; & aliæ OF, of, super DF; voceturque DF, vel $\mathrm{PO} = x$, adeoque Ff, vel $\mathrm{Oq} = dx$; & elementum curvæ $\mathrm{Oo} = ds$. Erit vis resistentiæ super $\mathrm{Ff} = R\,dx$. Est vero hæc vis [per decompositionem virium] ad vim qua filum fluidi OF agit normaliter super Oo, ut Oo ad Oq, seu ut ds ad dx; adeoque vis qua premitur normaliter elementum $\mathrm{Oo} = \frac{R\,dx^2}{ds}$. Resolvatur hæc porro in duas laterales, quarum una perpendicularis ad axem, altera eidem parallela; fiatque iterum ut ds ad dx, ita $\frac{R\,dx^2}{ds}$ ad $\frac{R\,dx^3}{ds^2}$; erit hæc vis, qua urgetur elementum Oo, a filo allabente fO, secundum eandem directionem parallelam axi DP. Quia autem annulus a revolutione elementi Ff circa axem DP genitus, est ad zonulam eadem revolutione elementi Oo descriptam,

TAB. LXXXVIII N°. CLXXXII Fig. 4.

scriptam,

criptam, ut xdx ad xds, & cum resistentia super annulum sit ad resistentiam super zonulam, ut resistentia super Ff ad resistentiam super Oo; faciendum est $Rdx : \frac{Rdx^3}{ds^2} = Rxdx . \frac{Rxdx^3}{ds^2}$; adeoque integrando $\frac{1}{2} Rxx : R\int \frac{xdx^3}{ds^2} = xx : 2\int \frac{xdx^3}{ds^2}$, dabit rationem resistentiæ super circulum cujus radius DF, ad resistentiam super superficiem conoïdicam, ab arcu DO revolvendo descriptam.

COROLLARIUM I.

Si DO est circulus, cujus radius $= a$, Conoïde hoc casu existente Sphæra; erit sumta DP, vel $x = a$, $2\int \frac{xdx^3}{ds^2} = 2 \times \frac{\frac{1}{2}aax^2 - \frac{1}{4}x^4}{aa} = xx - \frac{x^4}{2aa} = \frac{1}{2}aa$; adeoque, in hoc exemplo, resistentia in planum ad resistentiam in Sphæram, hoc est xx seu $aa : \frac{1}{2}aa = 2 : 1$; Unde patet veritas Propositionis 34, Lib. II, NEWT. *Princip. Philos. Nat.* pag. 298, Edit. secundæ; quæ ita sonat. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur, erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri.*

COROLLARIUM II.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 1. Hinc quoque evidens, curvam velocitatum CEF pro globo esse Logarithmicam, cujus subtangens erit dupla subtangentis Logarithmicæ, quæ inservit pro cylindro, adeoque illa $= 2C$, quia hæc $= C$, per *Lem. II.* Nam generalissime sumtis, tam velocitatibus, quam decrementis velocitatum æqualibus duorum corporum, in eodem vel diversis fluidis motorum, quibus resistitur in ratione f ad Φ, erit, vocando spatiola percursa dz & dy, dum æqualia patiuntur decrementa in velocitatibus v æquali-

æqualibus, $\frac{fdz}{v} = dv = \frac{\Phi dy}{v}$; adeoque $dz : dy = \Phi : f =$ [in hoc exemplo] $2 : 1$, unde $dz = 2dy$. Est vero $dv : dz$ [$2dy$] $= v$: subtangentem [$\frac{2vdy}{dv}$] in una curva velocitatum, & $dv : dy = v$: subtangentem [$\frac{vdy}{dv}$] in altera. Quare constat propositum.

LEMMA IV.

Ut nunc inveniatur longitudo viæ, quam Sphæra percurrere debet in medio non elastico, ita ut velocitas residua sit ad velocitatem initialem, ut 1 *ad* n; *Quæratur id primo generaliter pro quolibet corpore conoïdico?*

Illud sic peragitur: Quia resistentia in planum, est ad resistentiam in superficiem conoïdicam ejusdem cum plano amplitudinis, ut xx ad $2\int \frac{xdx^3}{ds^2}$; erit, per ea quæ in *Coroll.* præced. dicta sunt, $2\int \frac{xdx^3}{ds^2} : xx =$ subtangens curvæ velocitatum pro cylindro, quæ est C, per *Lemma* II, ad subtangentem curvæ velocitatum pro Conoïde, quæ adeo erit $= \frac{Cxx}{2\int \frac{xdx^3}{ds^2}}$. Fiat itaque ut subtangens Tabularum, quæ est 4342945, ad $\frac{Cxx}{2\int \frac{xdx^3}{ds^2}}$, ita ln, seu Logarithmus ipsius n ex Tabulis sumtus, ad quartum $\frac{Cxxln}{8685890\int \frac{xdx^3}{ds^2}}$ quod erit æquale spatio quæsito AB. Ex quo patet, hoc AB esse duplum ejus quod in *Dissertatione mea de Motu* inventum est, & supra in §. V adhibitum pro Conoïde in medio elastico progrediente; adeoque pro globo in medio non elastico erit jam $AB = \frac{2Cln}{4342945}$.

His ita præmissis, omnia quæ in sequentibus paragraphis determinata sunt pro medio elastico, mutatis mutandis, facile accommodantur ad medium non elasticum. Hunc in finem percurram omnes eodem, ut ibi sunt, ordine paragraphos.

(V I.)

Valor ipsius C manet hic pro globo ferreo, nempe $= 4667 D$; sed $AB = \frac{2 Cln}{4342945} = \frac{9334 Dln}{4342945}$. Hinc longitudo viæ quam percurrere debet globus ferreus, ita ut dimidium velocitatis suæ initialis amittat, erit $= 6470\, D$: sed pro globo plumbeo invenietur $7400\, D$.

(V I I.)

Quia, per *Lemma* IV, AB in medio non elastico, inventa est dupla ipsius AB in medio elastico; liquet ex operatione in hoc paragrapho instituta, fore c, seu subtangentem curvæ CEF, etiam duplam subtangentis illius curvæ, in casu medii elastici, adeoque jam $c = 9334\, D$. Ergo in determinationibus reliquis, ubicunque reperitur c, scribendum est ejus duplum. Et sic habebitur $t\,LK = \int \frac{18668\, a D dv}{9334 mn D + 2avv}$. Ad hujus constructionem, sit descriptus quadrans circuli DXY, cujus radius OD $= n \sqrt{\frac{9334 D}{2a}}$; & reliqua fiant ut in §. VII præscriptum; unde determinabitur $t\,AK$.

TAB. LXXXVII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2.

(V I I I.)

Cum itaque $n : \sqrt{a} = GI : \sqrt{IM}$; erit OD, seu $n\sqrt{\frac{9334 D}{2a}}, = GI \sqrt{\frac{9334 D}{2 IM}} = GI \sqrt{\frac{4667 D}{IM}} =$ [sumta IM $= 15 \frac{1}{12}$ ped. quam grave in vacuo cadens uno secundo emetitur, & substituto pro D ejus valore $= \frac{1}{4}$ ped.] $GI \sqrt{\frac{4667}{60\frac{1}{3}}} =$

GI√

$GI \sqrt{\frac{14001}{181}} = GI \times \frac{1592}{181}$. Fiat itaque ut radius ad quadrantem, hoc est, $7 : 11 = \frac{1592}{181} \times GI$ seu OD : DXY; habebitur $DXY = \frac{17512}{1267} \times GI = t\,AK$, in casu quo n, seu velocitas explosionis est infinita. Quia itaque $GI : DXY = t\,IM : t\,AK$, faciendum est $GI : \frac{17512}{1267} \times GI$ [$= 1267 : 17512$] $= 1$ sec. $13\frac{5}{6}$ sec. Ergo in aëre non elastico, globus ferreus noster, explosus velocitate infinita, impenderet in totum ascensum $13\frac{5}{6}$ secunda. Sed in aëre elastico [simili operatione observata] inveniretur pro tempore totius ascensus tantum $9\frac{4}{5}$ secund.

COROLLARIUM I.

Quia, per *Lemma* IV, globus sine gravitate duplum spatium percurrit, in medio non elastico, ejus quod percurrit in medio elastico, ad eandem jacturam velocitatis initialis faciendam; & cum globus noster ferreus [per *Coroll.* 1. §. VIII super.] indigeat $4\frac{1}{4}$ secund. ad id ut velocitas residua sit redacta ad dimidium velocitatis initialis in aëre elastico; indigebit idem ille globus $9\frac{1}{2}$ secund. in aëre non elastico, ad amittendum dimidium velocitatis initialis.

COROLLARIUM II.

Ad inveniendam totam altitudinem AK, ad quam ascendere potest globus noster ferreus, in aëre non elastico; sumamus ejus valorem, in hoc *Corollario* §. VIII datum $\frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$, qui, in hoc casu quo $c = 9334\, D$, est $= \frac{9334 Dl(9334 D + 2000) - 9334 Dl 9334 D}{8685890}$ $=$ [supposito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{2333\frac{1}{2}\, l\, 4333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}\, l\, 2333\frac{5}{6}}{8685890}$ $= \frac{2333\frac{1}{2} \times 2688310}{8685890} = \frac{4667 \times 2688310}{17371780} = \frac{1254634277}{1737178} = 722\frac{1}{4}$

ped.

ped. Pariſ. quam proxime. Hinc apparet globum noſtrum $277\frac{1}{4}$ ped. infra totam altitudinem mille pedum aſcendere.

(IX.)

Pro determinando deſcenſu, habetur hic iterum $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv} = \frac{cdy}{c - 2y} = \frac{clc - cl(c - 2y)}{8685890} = K\beta$. Sed recordandum pro c ſumendum eſſe duplum, nempe $= 9334\,D = 2333\frac{1}{2}$ ped. Pariſ.

Corollarium I.

Exiſtente $MI = MA$, hoc eſt ſi $y = a$, habetur $K\beta = \frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquiſita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In noſtro exemplo, ubi $c = 2333\frac{1}{2}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890} = \frac{2333\frac{1}{2}l2333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}\,l\,333\frac{1}{2}}{8685890} = 2270$ proxime. Ergo $K\beta$ ſumenda eſt $= 2270$ ped. Hoc eſt, ſi globus infra A ceciderit 2270 ped. $- 964\frac{1}{2}$ ped., vel $1305\frac{1}{2}$ ped., recuperaverit tunc ſuam velocitatem initialem.

Corollarium II.

Pro maxima velocitate, quam nunquam decidendo attingit, ſed tamen data quavis propius accedit; ponendum eſt iterum $2y = c = 9334\,D = \frac{9334}{4}$ ped., adeoque $y = \frac{9334}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped. Hoc eſt, MI ſumenda eſt dupla in aëre non elaſtico, ejus quæ inventa eſt pro elaſtico.

Corollarium III.

Ipſa velocitas maxima *ad quam non* habetur, faciendo $MA : MI = AC^2 : IG^2$, hoc eſt $1000 : 1166\frac{3}{4} = nn : \frac{4667}{4000}nn =$

$40000 : 46670$, quorum radices ſunt quam proxime ut 200 ad 216, ſeu ut 25 ad 27. Dico itaque velocitatem initialem eſſe ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 25 ad 27.

(X.)

Tempus deſcenſus ita determinatur: Supra in §. hujus numeri, inventum eſt $tK\beta = \frac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \log.\frac{2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}$. Quod & hic valet, conſiderando c ut duplum.

(XI.)

Tempus deſcenſus per totam KA habetur ex §. hujus numeri. $tAM : tKA = 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l\sqrt{2a} + \sqrt{(c + 2a)} - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c + 2a)})$. Applicetur hoc ad præſentem caſum, ubi $a = 1000$ ped. & $c = 2333\frac{1}{2}$ ped., & habebitur $tAM : tKA = 8685890 \times \sqrt{2000} : \sqrt{2333\frac{1}{2}} \times (l\sqrt{(2000 + \sqrt{4333\frac{1}{2}})} - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{4333\frac{1}{2}})) = 8685890 \times \sqrt{4000000} : \sqrt{46670} \times (l\sqrt{(2000 + \sqrt{4333\frac{1}{2}})} - l(-\sqrt{2000} + 4333\frac{1}{2})) = 1737178000 : 216\frac{1}{30} \times (l110\frac{1}{5} - l21\frac{1}{10}) :: 1737178000 : 1554300856 = 217147250 : 194287607$.

(XII.)

Quia itaque tAM, hoc eſt tempus aſcenſus, in vacuo, ad 1000 ped. eſt $8\frac{1}{6}$ ſecund. proxime; Fiat, ut 217147250 ad 194287607, ita $8\frac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 7\frac{66651374}{217147250}$, hoc eſt $7\frac{2}{7}$ proxime; adeoque globus noſter, in aëre non elaſtico, impendit in deſcenſum $7\frac{2}{7}$ ſecunda quam proxime.

(XIII.)

Determinandum nunc reſtat tempus aſcenſus, in aëre non elaſtico. Per methodum in §. hujus numeri, faciendum eſt ut c ad $\sqrt{2ac}$, ita ſinus totus ad tangentem anguli Δ O U. Adeoque in hoc caſu ut $\frac{9334}{4}$ ad $\sqrt{4667000}$, ſeu ut 4667 ad 4321, ita 10000000 ad 9258624 = tang. Δ O U; qui angulus ergo erit 42 gr. 48 minuta. Fiat nunc ut radius ad quadrantem, ſeu ut 7 ad 11, ita 10000000 ad 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro 90 : $42\frac{48}{60}$ = 15714286 : 7473016 = numero partium arcus 42 gr. 48 minut. pro radio 10000000. Nunc tandem fiat $\Delta U : \Delta \xi$ [= DV : DX] = 9258624 : 7473016 = tAM ($8\frac{1}{6}$ ſec.) : tAK, tempus aſcenſus in aëre non elaſtico, quod tempus erit $= 6\frac{3}{5}$ ſecund. quam proxime. Ergo ambo tempora aſcenſus & deſcenſus, in aëre non elaſtico, ſimul ſumta $= 6\frac{3}{5} + 7\frac{2}{7} = 13\frac{31}{35}$ ſec. Unde patet, globum noſtrum, in aëre non elaſtico, morari circiter uno ſecundo diutius quam in aëre elaſtico.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2.

N°. CLXXXIII.

DE

OSCILLATIONIBUS PENDULI

In medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatis.

PROBLEMA.

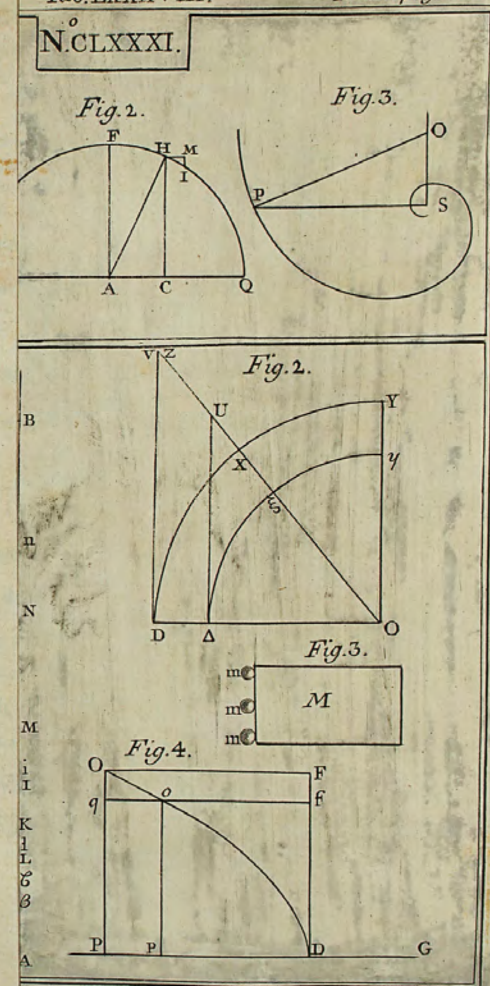
Grave a quocunque dato puncto in Cycloïde inverſa deſcendens, & reſiſtentiam patiens proportionalem ſimplici velocitati, quæritur quouſque ab altera parte in eadem Cycloïde aſcendere poſſit?

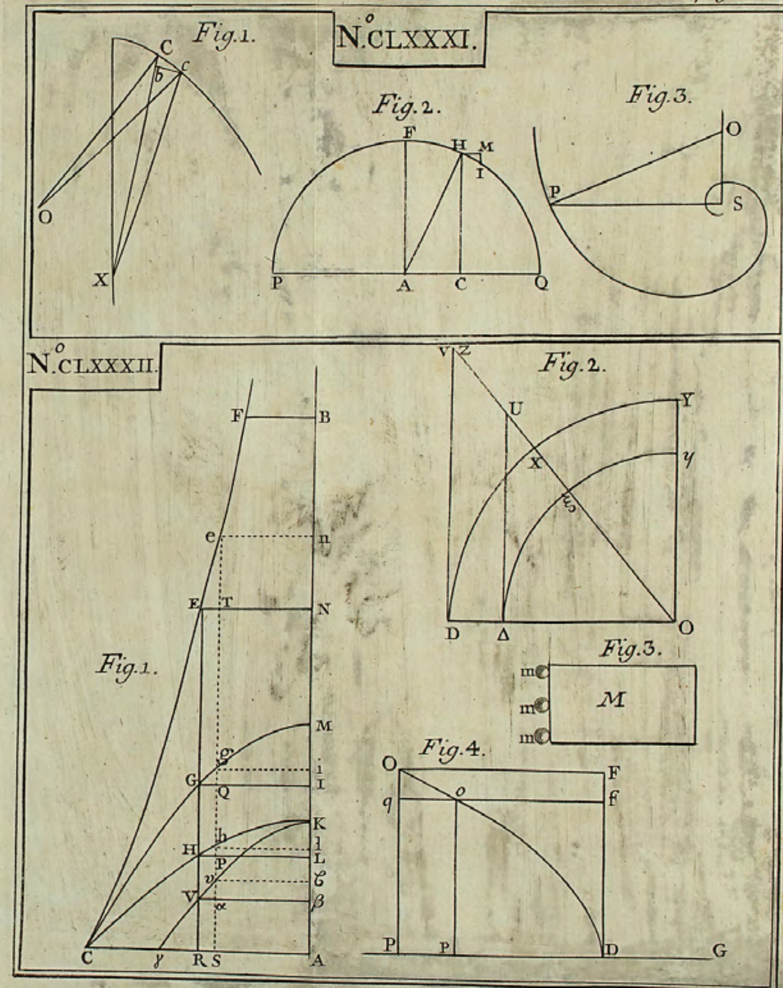
SOLUTIO.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIII.

Sit Cycloïs in rectam lineam AB extenſa, cujus punctum medium C, repræſentet punctum infimum Cycloïdis. Sit initium deſcen-

Tab. LXXXVIII. *Tom. IV. pag. 374.*




N°CLXXXI.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
N°CLXXXII.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
M
Fig. 4.

descensus in E, &
cujus applicatæ C
in punctis G, C
quælibet CG=
proportionalis est
$= gv$. Quibus
$sds - gvds +$
Ad separatione

$zds + sdz$, &

aut integrando ls

$= \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1}$

Restat igitur integ

$z = t + \frac{1}{2}g$, erit

$= \frac{\frac{2g}{4-gg}}{1 + \frac{4}{4-gg}}$

dius $= 1$, & tan

erit $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} A$

= [substituto pr

$\frac{1}{2} l(vv - gsv +$

$\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}} A + \frac{1}{2}$

integrata proposita

gens arcus $A =$

$= (\frac{2v}{s} - g) \times$

descensus in E, & finis ascensus in F: concipiatur curva EHDF; cujus applicatæ GH, CD &c. designent velocitates acquisitas, in punctis G, C, &c. Dicantur CE $= \alpha$, CF $= \beta$; abscissa quælibet CG $= s$, GH $= v$; vis a gravitate oriunda, quæ proportionalis est distantiæ CG, etiam dicatur $= s$, resistentia $= gv$. Quibus positis, patet naturam curvæ hac æquatione $sds - gvds + vdv = 0$ exprimi.

Ad separationem instituendam, ponatur $v = zs$, & $dv = zds + sdz$, & mutabitur æquatio in hanc $\frac{ds}{s} + \frac{zdz}{zz - gz + 1} = 0$ aut integrando $ls + \int \frac{zdz}{zz - gz + 1} =$ const. Est vero $\frac{zdz}{zz - gz + 1} = \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} + \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; & $\int \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} = \frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$: Restat igitur integranda $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$. Hunc in finem, ponatur $z = t + \frac{1}{2}g$, erit $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1} = \frac{\frac{1}{2}gdt}{tt + 1 - \frac{1}{4}gg} = \frac{2gdt}{4tt + 4 - gg}$

$$= \frac{\frac{2g}{4 - gg}dt}{1 + \frac{4}{4 - gg}tt}.$$

Descripto itaque arcu circuli, cujus radius $= 1$, & tangens $= \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}}$, qui arcus dicatur A; erit $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}}A = \int \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; cui addatur $\frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$ $=$ [substituto pro z ejus valore $\frac{v}{s}$) $\frac{1}{2}l(\frac{vv}{ss} - \frac{gv}{s} + 1) = \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) - ls$, cui porro addatur ls; habebitur $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}}A + \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) =$ const. pro æquatione integrata propositæ $sds - gvds + vdv = 0$. Quia autem tangens arcus $A = \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2z - g}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2v - gs}{s\sqrt{(4 - gg)}}$ $= (\frac{2v}{s} - g) \times \frac{1}{\sqrt{(4 - gg)}}$, addo [pro rectificanda æquatione

integra-

integrata] $\frac{g}{\surd(4-gg)}B$; intelligo autem per B, arcum cujus tangens $=\frac{g}{\surd(4-gg)}$, & ſimul ſubtraho $l\alpha$: hoc nempe modo fiet, ut vera æquatio integrata ſit $\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)+\frac{1}{2}l(vv-gsv+ss)-l\alpha=0$; quia in caſu quo G cadit in E, id eſt quo $v=0$, tota evaneſcit. Hinc quia in puncto C, ubi $s=0$, tangens arcus A eſt infinita, erit arcus ipſe $A=$ quadranti circuli; qui vocetur Q & habebitur $\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(+Q+B)+lv-l\alpha=0$; adeoque in puncto C, erit $lv=l\alpha-\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(+Q+B)$. Simili modo invenitur, mutatis mutandis, pro aſcenſu, $lv=l\beta+\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(+Q-B)$. Quoniam autem ultima velocitas deſcenſus $=$ primæ velocitati aſcenſus, erit $l\alpha-\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(+Q+B)=l\beta+\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(+Q-B)$, & facta reductione $l\beta=l\alpha-\frac{g}{\surd(4-gg)}\times 2Q$, vel $=l\alpha-\frac{2g}{\surd 4-gg}\times Q$; adeoque $l\alpha-l\beta$, ſeu $l\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2gQ}{\surd(4-gg)}$.

Corollarium I.

Velocitas in puncto infimo C $=\frac{\alpha}{n^{g(Q+B):\surd(4-gg)}}$; ponendo ſcilicet n, pro numero cui reſpondet unitas pro Logarithmo.

Corollarium II.

Ex æquatione ipſa $sds-gvds+vdv=0$, habetur ſupponendo $dv=0$, velocitas maxima $=\frac{s}{g}$.

Corol-

Corollarium III.

Hinc in æquatione generali inventa $\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)+\frac{1}{2}l(vv-gsv+ss)-l\alpha=0$; ponatur $\frac{s}{g}$ pro v, & mutabitur illa in hanc $\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)+\frac{1}{2}l(\frac{ss}{gg}-ss+ss)-l\alpha=\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)+l\frac{s}{g}-l\alpha=\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)+ls-lg-l\alpha=0$; unde $ls=lg\alpha-\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)$ & $s=\frac{g\alpha}{n^{g(A+B):\surd(4-gg)}}$.

Quia vero, in caſu maximæ velocitatis, arcus A pro tangente habet $(\frac{2}{g}-g)\times\frac{1}{\surd(4-gg)}=\frac{2-gg}{g\surd(4-gg)}$, vocetur hic arcus C, & prodibit s, ſeu CG, cui maxima velocitas GH reſpondet, $=\frac{g\alpha}{n^{g(C+B):\surd(4-gg)}}$. Ergo ipſa velocitas maxima GH, ſeu $\frac{s}{g}=\frac{\alpha}{n^{g(C+B):\surd(4-gg)}}$. Unde maxima velocitas GH, ad ultimam velocitatem CD $=\frac{\alpha}{n^{g(C+B):\surd(4-gg)}}:\frac{\alpha}{n^{g(Q+B):\surd(4-gg)}}=\frac{1}{n^{gC:\surd(4-gg)}}:\frac{1}{n^{gQ:\surd(4-gg)}}=1:\frac{1}{n^{g(Q-C):\surd(4-gg)}}$. Ex quo fluit, illas duas velocitates habere conſtantem rationem, ubicunque deſcenſus initium ſumat; quod quidem aliunde jam patet; ſcilicet ex ſimilitudine omnium curvarum EHDF.

N°. CLXXXIV.

DE CORPORIS GRAVIS ASCENSU ET DESCENSU PER ARCUS ÆQUALES; IN MEDIO RESISTENTE.

PROBLEMA.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV Fig. 1.

AD axem verticalem AO *construere curvam* AFL, *ejus naturæ, ut mobile sua gravitate descendens per arcum quemvis* AK *curvæ datæ* ABKR, *ad punctum imum* A *impetu concepto, ascendat per arcum* AL *æqualem semper arcui* AK; *idque in medio resistente secundum quadrata velocitatum.*

LEMMA.

Existente $n =$ numero unitatis, seu $ln = 1$, erit $d(n^{fq:h}) = \frac{f}{h} n^{fq:h} dq$.

Patet ex calculo exponentialium.

SOLUTIO.

Fingamus mobile pervenisse ad B delapsum ex K, & postea ascendens ab A pervenire ad F, iturum ad L usque; ita ut tam AK sit æqualis AL, quam AB æqualis AF. Sit itaque AK $=$ AL $= a$, AO $= b$, AS $= c$, invariabiles pro quolibet descensu & ascensu, sed variabiles pro mutatione initii & finis. Sit porro AB $=$ AF $= s$, BC $=$ FG $= ds$; AM $= x$, MN $=$ BP $= dx$, AD $= z$, DE $=$ FH $= dz$: velocitas in B $= v$, velocitas in F $= V$; vis gravitatis naturalis $= g$, vis resistentiæ in B $= \frac{vv}{2e}$, vis resistentiæ in F $= \frac{VV}{2e}$. Erit

æquatio pro descensu $2gdx - \frac{vvds}{e} = - 2vdv$, & pro ascensu $2gdz + \frac{VVds}{e} = - 2VdV$; quæ ita disponantur $2vdv - \frac{vvds}{e} = - 2gdx$, & $2VdV + \frac{VVds}{e} = - 2gdz$. Ut autem harum duarum æquationum partes priores, litteras v & V quæ velocitates significant continentes, integrare possimus, easque adeo terminis finitis exprimere, multiplicemus priorem æquationem per $\frac{1}{n^{s:e}}$ & alteram per $n^{s:e}$; prodibunt hæ duæ integrabiles $\frac{2vdv - \frac{vvds}{e}}{n^{s:e}} = \frac{-2gdx}{n^{s:e}}$, & $2n^{s:e} VdV + \frac{1}{e} n^{s:e} VVds = - 2gn^{s:e} dz$; sumtis enim integralibus, emergent $\frac{vv}{n^{s:e}} = - 2g\int \frac{dx}{n^{s:e}}$ & $n^{s:e} VV = - 2g\int n^{s:e} dz$; cujus veritas exploratur per Lemma præmissum. Sed ut vv & VV evanescant in punctis K & L, addendæ sunt ad valores inventos debitæ quantitates constantes, hunc in modum $\frac{vv}{n^{s:e}} = 2g\int \frac{db}{n^{a:e}} - 2g\int \frac{dx}{n^{s:e}}$, & $n^{s:e} VV = 2g\int n^{a:e} dc - 2g\int n^{s:e} dz$; ubi per $\int \frac{db}{n^{a:e}}$ & $\int n^{a:e} dc$, intelligo functiones constantes eodem modo compositas ex AK, AO, & ex AL, AS, ut sunt variabiles $\int \frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e} dz$ compositæ ex AB, AM & ex AF, AD. Quia vero in puncto infimo A est $s = 0$, ideoque $n^{s:e} = 1$; ipsæque functiones $\int \frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e} dz$ evanescunt; atque v evadit $= V$; erit $2g\int \frac{db}{n^{a:e}} = 2g\int n^{a:e} dc$. Hoc vero cum contingat pro quolibet puncto initiali K & finali L; licebit jam conſiderare a, b, & c tanquam variabiles; unde habebimus differentiando $\frac{db}{n^{a:e}} = n^{a:e} dc$; proinde $dc = \frac{db}{n^{2a:e}}$, ſeu $ldc = ldb - \frac{1}{e} \times 2a$. Reponantur nunc pro litteris a, b & c, priſtinæ aſſumtæ s, x & z, habebimus $ldz = ldx - \frac{1}{e} \times 2s$; id quod naturam curvæ quæſitæ AFL determinat ex data curva AK. Ex his habetur conſtructio curvæ quæſitæ AFL: Quia enim $dc = \frac{db}{n^{2a:e}}$, hoc eſt, $dz = \frac{dx}{n^{2s:e}}$, erit $\sqrt{(FG^2 - FH^2)} = HG = dv = \sqrt{(ds^2 - dz^2)} = \sqrt{(ds^2 - \frac{dx^2}{n^{4s:e}})}$. Atqui, ob datam curvam ABKR, datur dx per ds: ſit itaque $dx = S ds$; Unde $dz = \frac{S ds}{n^{2s:e}}$, & $dy = ds \sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$, ipſæque adeo coordinatæ $AD = z = \int \frac{S ds}{n^{2s:e}}$ & $DF = y = \int ds \sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$.

Sed facile conſtruitur $n^{2s:e}$ ejuſque quadratum $n^{4s:e}$, ſumendo tantum in Logarithmica communi [cujus nempe ſubtangens $= 1$] applicatam, quæ diſtat a prima applicata, ſive ab unitate, intervallo $= 2s : e$, erit enim illa $= n^{2s:e}$, & altera applicata quæ diſtat duplo intervallo $= 4s : e$, erit $n^{4s:e}$. Hinc
TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV. *Fig.* 2. formando ſuper communi axe $\alpha\beta$, in quo abſciſſa $\alpha\gamma$ capiatur $= s$, duas curvas $\alpha\delta$ & $\alpha\varepsilon$, quarum unius $\alpha\delta$ applicata $\gamma\delta$ ſit $= \int \frac{S ds}{n^{2s:e}}$, & alterius $\alpha\varepsilon$ applicata $\gamma\varepsilon$, ſit $= \int ds \sqrt{(1 - \frac{SS}{n^{4s:e}})}$. Dico, $\gamma\delta$ & $\gamma\varepsilon$ dare coordinatas curvæ quæſitæ.

SCHO-

SCHOLIUM. I.

In caſibus particularibus conſtructio ſæpe facilior redditur. Sic ſi Linea data ACK ſit ipſa recta verticalis ANO; æquatio generalis ſupra inventa $ldz = ldx - \frac{2s}{e}$, abit in hanc $ldz = ldx - \frac{2x}{e}$, quæ differentiata, ſumendo dz pro conſtante, dat $0 = \frac{ddx}{dx} - \frac{2dx}{e}$; quo multiplicato per $\frac{dz}{dx}$, erit $\frac{dz\,ddx}{dx^2} = \frac{2dz}{e}$ atque integrando $\frac{a}{e} - \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{e}$; unde $adx - edz = 2zdx$; hoc eſt, $dx = \frac{edz}{a - 2z} = \frac{\frac{1}{2}edz}{\frac{1}{2}a - z} =$ [ponendo $\frac{1}{2}a - z = t$] $\frac{-\frac{1}{2}edt}{t}$, adeoque $x = -\frac{1}{2}\,alt$; ex quo patet x, ſeu arcum AF, eſſe proportionalem Logarithmo negativo abſciſſæ TD, faciendo $AT = \frac{1}{2}a$. Hæc autem proprietas convenit Tractoriæ *Hugenianæ*; quæ ſuam convexitatem habet verſus ſuperiora, eſtque recta tranſiens per T & applicatis parallela, Tractoriæ aſymtotos. Nam $dt : dx = t : \frac{1}{2}e =$ tangenti conſtanti.

SCHOLIUM II.

Ope *Lemmatis* hiſce præmiſſi, ſolvi poteſt Problema a Fratre meo propoſitum [vid. *Act. Lipſ.* 1697, p. 115*] ſine aſſumtione novarum indeterminatarum. Separandæ nimirum proponantur indeterminatæ hujus æquationis $ady = ypdx + by^n q dx$ [ubi a & b quantitates datas & conſtantes, n poteſtatem quamvis literæ y, p & q quantitates utcunque datas per x denotant.] Tranſponatur terminus ſecundus, ut habeatur $ady - ypdx = by^n q dx$, vel [diviſo per y^n] $ay^{-n}dy - y^{1-n}pdx = bqdx$; porro dividendo utrumque membrum per $c^{(1-n)\int pdx:a}$, c denotante numero unitatis, ſeu $lc = 1$; prodibit hæc altera

* Vide Solutionem Auctoris noſtri, N°. XXXV, pag. 175, *Tom. I.*

æquatio $\frac{ay^{-n}dy - y^{1-n}pdx}{c^{(1-n)\int pdx:a}} = \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx:a}}$; ita enim membrum prius absolute integrari poteſt, & habebitur $\frac{ay^{1-n}}{(1-n)c^{(1-n)\int pdx:a}} = \int \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx:a}} = X$, ſeu alicui functioni datæ ipſius x. Erit proinde $y^{1-n} = \frac{1-n}{a} \times c^{(1-n)\int pdx:a}X$. *Q. E. F.*

N°. CLXXXV.

DU PENDULE COMPOSÉ

Dans un milieu reſiſtant.

Calcul pour déterminer la viteſſe ou la réſiſtance d'un Pendule rectiligne, compoſé de deux globes A & B, qui ſe mouvroient dans un milieu qui réſiſteroit comme le quarré de la viteſſe.

SOLUTION.

On ſuppoſe que a & b ſoient les diſtances de A & B au point de ſuſpenſion ou d'appui, & x & s les abſciſſes & les arcs du cercle que décrit A. Soient nommées la gravité abſolue $=g$, la viteſſe de $A=v$; $c=$ au nombre dont le Logarithme eſt 1, c'eſt-à-dire, $lc=1$; $\frac{1}{m}$ & $\frac{1}{n}$ ſoient les intenſités des réſiſtances des globes A, B.

Soit f la force immaterielle, miſe entre les deux verges qui enfilent les deux globes A & B, deſquels le premier A eſt conçu comme le plus proche du point d'appui, & B le plus éloigné; enſorte que le globe A, étant retardé par la verge du globe B, ſans lequel il deſcendroit plus vite, & le globe B, étant accelerė par la preſſion du globe A, ſans lequel il deſcendroit moins vite; il ſe fait entre le globe A & la verge du globe B, une eſpece de compreſſion, comme s'il-y-avoit un reſſort entre deux; l'effort donc de ce reſſort à écarter les deux verges, doit être contrebalancé par les deux verges, qui tendent à ſe rapprocher juſqu'a l'entiere coincidence: c'eſt cet effort du reſſort que j'appelle la force immaterielle $=f$.

TYPE DU CALCUL.

La force acceleratrice du globe $A = \frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$

La force acceleratrice du globe $B = \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB}$.

Or afin que les deux verges deſcendent ou circulent conjointément, il faut que ces deux forces acceleratrices ſoient comme les longueurs des verges, c'eſt-a-dire il faut que $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB} = a : b$. Par cette analog ie, on trouve $f = \frac{gAB(bb-ab)dx}{(aaA+bbB)ds} + \frac{bABvv(mbb-nab)}{mna(aaA+bbB)}$. Mais on ſait que la force acceleratrice, multipliée par l'élement de l'eſpace à parcourir ds, donne vdv; ainſi ſubſtituant cette valeur de f, dans l'équation $gdx - \frac{vvds}{m} - \frac{fds}{A} = vdv$, on trouvera $gdx - \frac{vvds}{m} - \frac{gmnaB(bb-ab)dx - bBvv(mbb-nab)ds}{mna(aaA+bbB)} = vdv$; ce qui étant demelé & reduit en ordre, il viendra $\frac{(gaaA+gabB)dx}{aaA+bbB} = \frac{(na^3A+mb^3B)vvds}{mna(aaA+bbB)} + vdv$. Pour abreger; nommons $\frac{g(aaA+abB)}{aaA+bbB} = L$, & $\frac{na^3A+mb^3B}{mn(a^3A+abbB)} = R$, cela nous donnera cette equation $Ldx = Rvvds + vdv$. Pour l'integrer, on poſera $c^{2Rs} = z$: par conſequent $2Rs = lz$, & $Rds = \frac{dz}{2z}$, Donc $Ldx = \frac{vvdz}{2z} + vdv$; multipliez

le

le ſecond membre par $2z$, & le premier par ſon egal $2c^{2Rs}$, il viendra $2Lc^{2Rs}dx = vvdz + 2zvdv$; ainſi en l'integrant, on aura $2L\int c^{2Rs}dx = vvz = vvc^{2Rs}$; ce qui donne $vv = 2Lc^{-2Rs}\int c^{2Rs}dx$. Il n'y a donc qu'à remettre les valeurs de L & R; ce qui étant exécuté, on obtiendra finalement $vv = \frac{2g(aaA + abB)}{aaA + bbB} c^{-2(na^3A + mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} \times \int c^{2(na^3A + mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} dx$.

SCHOLIE I.

Il faut remarquer qu'un corps peſant, qui tombe dans un milieu réſiſtant, le long d'une courbe qui touche une ligne horizontale dans ſon plus bas point, s'accelere depuis le commencement de ſa chute juſqu'à un certain terme, avant que d'arriver au point le plus bas de ſa deſcente; ce terme paſſé le corps grave commence à ſe retarder: il faut donc ſavoir que la valeur trouvée de vv, n'eſt que pour la viteſſe du corps quand il a paſſé ce terme. Donc, pour avoir la valeur de vv, pour quand le corps n'eſt pas encor arrivé au terme de la plus grande viteſſe, il faut dans l'opération du calcul mettre par tout $-vdv$ au lieu de vdv: ainſi la derniere équation à integrer ſera celle ci $2Lc^{2Rs}dx = vvdz - 2zvdv$; mais pour la rendre intégrable, il faut diviſer le ſecond membre par zz, & le premier par ſon égal c^{4Rs}, & on aura $2Lc^{-2Rs}dx = \frac{vvdz - 2zvdv}{zz}$; dont l'intégrale eſt $2L\int c^{-2Rs}dx = -\frac{vv}{z} = -vvc^{-2Rs}$; d'où on tire $vv = -2Lc^{2Rs} \times \int c^{-2Rs}dx$: en ſubſtituant comme auparavant les valeurs de L & R, on aura maintenant $vv = \frac{2g(aaA + abB)}{aaA + bbB} \times c^{2(na^3A + mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} \times \int c^{-2(na^3A - mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} dx$.

SCHO-

SCHOLIE II.

On remarquera encor, que par la gravité abſolue g on n'entend pas la gravité naturelle, comme elle anime les corps terreſtres dans le vuide, mais la gravité ſpécifique des corps diminuée de celle du milieu réſiſtant: car c'eſt cette gravité diminuée qui doit être cenſée animer les corps plongés dans un milieu peſant lui-même. Ainſi donc, dans cette ſolution, on ſuppoſe que les deux globes A, B ſont faits d'une même matiere, par exemple l'un & l'autre de fer, ou l'un & l'autre de plomb; mais ſi l'un étoit de fer & l'autre de plomb, il y auroit à conſiderer deux differents g, que l'on déſigneroit par g & g', l'un pour le globe A & l'autre pour le globe B. Cette ſuppoſition rendroit le Probléme un peu plus difficile, & la formule plus longue.

SCHOLIE III.

Si on veut déterminer le Centre d'oſcillation de nôtre Pendule compoſé de deux globes A, B, oſcillant dans un milieu réſiſtant; c'eſt-à-dire, ſi on veut trouver la longueur d'un Pendule ſimple, qui ſoit iſochrone avec le Pendule compoſé; il y a deux cas à conſiderer: En ſuppoſant 1°. que le Pendule ſimple faſſe ſes oſcillations dans le vuide, ou dans un milieu ſans réſiſtance. 2°. Que le Pendule ſimple oſcille dans le même milieu réſiſtant, dans lequel oſcille le compoſé.

Le premier cas eſt fort facile, car il n'y a qu'à prendre la quatriéme proportionnelle de la force accélératrice du premier globe, laquelle force a été trouvée ci-deſſus $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$, de la force accélératrice naturelle ſur un arc ſemblable, qui eſt $\frac{Gdx}{ds}$, en nommant G la gravité naturelle abſoluë, & de la longueur du premier rayon a; & ainſi on aura la longueur cher-

chée

chée du Pendule ſimple $= \frac{Gadx:ds}{gdx:ds - vv:m - f:A}$, où on ſubſtituera les valeurs trouvées de f & de vv.

Quant au ſecond cas, le Probléme eſt indéterminé : car la longueur cherchée du Pendule ſimple ſynchrone avec le composé, dépend de la quantité de matiere, de la groſſeur de ſon globe, & partant auſſi de l'intenſité de la réſiſtance. Pour plus de facilité du calcul, ſuppoſons que le troiſiéme globe, que nous voulons employer pour le Pendule ſimple ſynchrone, ſoit de même matiere que les deux autres globes, & qu'il ait la même groſſeur que le globe A; par conſéquent auſſi la même intenſité de réſiſtance $\frac{1}{m}$. Cela poſé, nommons la longueur cherchée du Pendule ſimple $= y$. Sa viteſſe ſera $= \frac{yu}{a}$, & ſa réſiſtance dans le même milieu $= \frac{yyuu}{aam}$; donc la force accélératrice $= \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam}$; ainſi, par la nature du ſynchroniſme, on aura cette analogie $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam} = a : y$; ce qui nous fournit cette équation quarrée $\left(\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}\right) y = \frac{gadx}{ds} - \frac{yyuu}{am}$; d'où l'on déduira la valeur cherchée de y; dans laquelle il faudra ſubſtituer les valeurs trouvées de f & de v, pour avoir le tout en termes connus.

N°. CLXXXVI.

JOHANNIS BERNOULLI HYDRAULICA

Nunc primum detecta ac demonſtrata directe ex fundamentis pure mechanicis.

ANNO 1732.