MECHANICA.

****

N°. CLXXII.

LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à ſon uſage ſur Mer.

DISCOURS

Compoſé à l'occaſion de la Queſtion propoſée par Meſſieurs de l'Académie Roiale des Sciences de Paris,

Pour l'Année 1739.

LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à son usage sur Mer.

I.

DE toutes les Sciences, celles qui apportent le plus d'utilité au public, ce sont sans contredit les Mathematiques & en particulier la Méchanique. L'Histoire ancienne nous apprend combien ARCHIMEDE [pour n'alléguer que ce seul exemple] a produit & exécuté de prodigieux effets, par le moyen des machines, duës à son génie & à ses profondes connoissances de la Méchanique; quoiqu'on en raconte aussi plusieurs faits fabuleux, forgés par des gens qui n'entendoient pas les principes de cette Science; mais par cela même ces faits inventés sont faciles à distinguer des véritables.

I I.

L'Illuſtre *Académie Royale des Sciences* de *France*, toujours attentive à favoriſer le progrés des Sciences, a propoſé, pour le prix de l'année 1739, un ſujet qui regarde la Navigation & le Commerce, conformément à l'intention du généreux Fondateur. Le ſujet en queſtion conſiſte dans la demande, *De donner la meilleure conſtruction du* Cabeſtan, *ou telle autre Machine équivalente.*

I I I.

Il n'eſt pas néceſſaire de donner une ample deſcription du Cabeſtan; étant une machine fort connuë, qui ſert en toutes ſortes d'occaſions ſur Terre & ſur Mer. Cependant le mot de Cabeſtan eſt employé particuliérement dans la Marine: Il ſignifie une machine aſſés ſimple, que VITRUVE appelloit *Ergata*. On ſait, que c'eſt un cylindre, ou un arbre en forme de rouleau vertical, ou érigé à plomb; en quoi il différe d'une autre machine ſemblable nommée *Vireveau* chés les Mariniers, & *Sucula* chés VITRUVE; c'eſt auſſi un cylindre, ou rouleau, mais poſé horizontalement. On place le Vireveau ſur le Tillac des Vaiſſeaux Marchands, où il fait le même effet que le Cabeſtan ſur les Vaiſſeaux de guerre. Dans les grands Vaiſſeaux, on a plus d'une ſorte de Cabeſtan, le grand & le petit. Le grand Cabeſtan, planté ſur le premier pont, & élevé juſqu'à 4 ou 5 pieds de hauteur au deſſus du ſecond, eſt nommé double, à cauſe qu'il ſert à deux étages. Le petit Cabeſtan, ou le Cabeſtan ſimple, eſt poſé ſur le ſecond pont. Leur uſage, & celui du Vireveau, conſiſte à lever les ancres, à tirer, à trainer, ou à élever des fardeaux. Je ne parlerai dans la ſuite que du *Cabeſtan* pris en général, qui fait le ſujet de la queſtion; quoiqu'il ſoit aiſé d'appliquer mes raiſonnemens auſſi au Vireveau, par rapport aux inconvéniens auxquels je tâcherai de rémédier, entant qu'ils ſont communs à ces deux ſortes de machines.

I V.

I V.

Quand on veut ſe ſervir du Cabeſtan, pour lever, par exemple, l'ancre; cela ſe fait lorſque le cordage, ou le cable, attaché par un bout à l'ancre & arrêté par l'autre bout en quelque endroit du cylindre, s'entortille ſur lui en faiſant tourner ou virer le Cabeſtan, par le moyen de deux ou pluſieurs léviers, ou barres, que l'on a fait paſſer par des ouvertures qui percent diamétralement l'arbre du Cabeſtan. Si la réſiſtance eſt bien grande, on y applique quelques fois Six léviers, ſavoir quatre par le haut & deux par le bas.

V.

Avant que de commencer à faire tourner le Cabeſtan, on tortille dabord le cable un tour ou deux ſur l'arbre, afin que le cable ne puiſſe pas gliſſer, quand on le retient un peu ferme par ſon extrémité. C'eſt le frottement qui l'empêche de gliſſer lorſque l'ancre, ou un autre fardeau à élever, commence à réſiſter; & plus la réſiſtance eſt grande, plus auſſi le frottement du cable, s'il gliſſoit, deviendroit grand.

V I.

Si dans cet état le Cabeſtan tourne en rond, par la force des Hommes qui conduiſent les leviers; il eſt viſible, que le cable s'entortillant ſucceſſivement ſur le cylindre, & ſe raccourciſſant ainſi, il doit attirer ou élever ce qui lui eſt attaché & qui réſiſte, ſuppoſé que la réſiſtance puiſſe être vaincue; ou bien il faut que le Vaiſſeau s'approche de l'obſtacle où le cable eſt attaché, en cas que cet obſtacle ſoit immobile.

V I I.

C'eſt ainſi que l'ancre, quand elle eſt encore bien éloignée du Vaiſſeau, attire d'abord le Vaiſſeau, par le raccourciſſement du du cable; jusqu'à ce qu'il réponde presque à plomb sur l'ancre : ce n'est qu'alors, que la verge de l'ancre se redresse, ou s'érige en situation verticale, & qu'avec elle celui des bras de la croisée, qui étoit enfoncé en terre, s'en débarasse, & tournant la pointe de sa patte vers en haut, toute l'ancre se trouve dans un état convenable, pour être tirée hors du fond de la mer; n'y ayant plus d'autre résistance à vaincre que celle de sa pesanteur dans l'eau.

VIII.

On voit bien, que quand le cable est fort long, par exemple, de 100 brasses ou de 600 pieds, il est impossible de le faire rouler sur le Cabestan, tout d'une suite & sans interruption, par les Conducteurs des leviers; parce que tous les tours, qui peuvent être contenus sur l'arbre, s'ils étoient étendus en long, il s'en faudroit beaucoup que leur longueur prise ensemble n'égalât celle du cable entier. Ainsi quand le cable, par les tours réïterés, est parvenu au bout du Cabestan; les Hommes appliqués aux leviers doivent s'arrêter; il faut relever le cable, & faire plusieurs autres petites manœuvres, avant que de pouvoir faire une seconde opération; laquelle finie, il en faut revenir à une troisiéme, après les mêmes manœuvres, ensuite à une quatriéme, cinquiéme &c. jusques à ce qu'on ait achevé d'attirer toute la longueur du cable, ou une telle grande partie, que l'on voudra. Or toutes ces pauses, ces intervalles d'inaction des leviers, ces interruptions, causent une perte considérable du tems, qu'on pourroit employer utilement, & qui est quelquefois nécessaire pour éviter un danger.

IX.

C'est ce qui a occasionné la Proposition où on demande *la meilleure construction du* Cabestan, *ou telle autre Machine équivalente.* Pour avoir devant les yeux tous les inconvéniens auxquels

auxquels est sujet le Cabestan ordinaire, & auxquels on doit trouver des remèdes, il est bon de raporter ici les propres termes de la Proposition. „L'Académie, dit-on, ayant eu avis „ par des Personnes habiles & expérimentées dans la Navigation, que dans les fréquentes manœuvres, où l'on se sert du „ Cabestan, le cordage attaché au poids qu'on veut lever ou „ trainer, se dévide sur l'essieu de cette machine, de maniere „ qu'à chaque tour ce cordage descend de toute sa grosseur, & „ qu'il arrive qu'après plusieurs tours, il parvient au bout du „ Cabestan, & qu'il faut le rehausser [ou choquer], pour éviter qu'il ne s'embarrasse; que par là on ne sauroit se servir „ du Cabestan, qu'on ne soit obligé de choquer plusieurs fois, „ & qu'à chaque fois qu'on choque il faut arrêter le mouvement „ de la machine, prendre des bosses [ou tresses &c.] sur le „ cordage, dévirer le Cabestan, pour mollir [ou lâcher] la „ partie du cordage qui est sur l'essieu, relever le cordage, le „ roidir de nouveau, & enfin ôter les bosses, pour remettre le „ Cabestan en état; que cette opération souvent repétée emporte beaucoup de tems, & dans plusieurs rencontres un tems „ précieux, & qu'elle fait toûjours perdre une partie de l'effort „ déja fait : Considerant d'ailleurs la liaison de la manœuvre du „ Cabestan avec celle des ancres, qu'on ne jette ou qu'on ne „ lève que par son moyen, l'Académie a résolu &c.

X.

Ainsi les inconvénients consistent dans les articles suivans; 1°. le cordage ou le cable se devidant sur l'essieu, ou l'arbre de cette machine, & parvenant, après plusieurs tours, au bout du Cabestan, il doit être *rehaussé* ou *choqué*, pour éviter qu'il ne s'embarrasse. 2°. Il faut *choquer* plusieurs fois, selon que le demande la longueur du cable. 3°. A chaque fois qu'on *choque*, il faut arrêter le mouvement de la machine. 4°. Il faut prendre des *bosses* ou *tresses*, sur le cordage. 5°. Il faut dévirer le Cabestan, pour *mollir* ou *lâcher* la partie du cordage qui est sur

l'arbre.

l'arbre. 6°. Il faut *relever* le cordage. 7°. Le *voidir* de nouveau. 8°. Il faut enfin *ôter* les *bosses*, pour remettre le Cabestan en état : ensorte qu'il y a en tout huit operations ; chacune desquelles ne demandant qu'une minute de tems, il y auroit plus d'un demi-quart d'heure de perdu, pour toutes les huit opérations ensemble : or il faut repéter ces huit opérations chaque fois que les Conducteurs des leviers sont obligés de discontinuer leur travail.

X I.

Le plus grand inconvénient, qui résulte de ces inconvénients particuliers pris ensemble, c'est la perte du tems, & en certaines rencontres la perte d'un tems précieux, que causent toutes ces opérations souvent réitérées ; outre qu'elles font perdre une partie de l'effort déja fait.

X I I.

Je remarque d'abord, que du premier des inconvénients mentionnés dépendent tous les autres, ensorte que si on trouvoit quelque remède, ou quelque moyen pour empêcher que le cable ne parvienne jamais au bout du Cabestan, on voit bien qu'on éviteroit en même tems tout le reste des inconvéniens ; puisqu'on seroit en état de faire tourner le Cabestan sans discontinuer, quelque long que fut le cable.

X I I I.

Mais le moyen de prévenir la descente du cable ne paroît-il pas impossible ? D'autant plus qu'à chaque tour qu'il fait sur l'arbre, il est obligé de descendre de toute sa grosseur en forme d'hélice autour du cylindre ; si bien que plus le cable a de grosseur, plus vite il descendra jusqu'au bout du Cabestan ; & par conséquent il faut plus souvent interrompre le virement du Cabestan, pour faire les opérations fâcheuses qui emportent du tems ; ce qu'on voudroit éviter.

XIV.

X I V.

Supposons, par exemple, que par chaque dix pieds de la longueur du Vaisseau, on donne deux pouces & demi d'épaisseur au grand Cabestan par le haut, suivant la pratique ordinaire ; ensorte que pour un Vaisseau long de 140 pieds, il faudroit que le diamétre de la tête du Cabestan, où le cable se doit rouler, fût à peu près de 3 pieds & la circonférence de $9\frac{1}{2}$ pieds. Donc à chaque tour il se dévide sur son arbre une longueur de $9\frac{1}{2}$ pieds du cable. Or le Maître-cable des grands Vaisseaux a en longueur jusqu'à 120 brasses, ou 720 pieds, ainsi divisant 720 par $9\frac{1}{2}$, on trouve à fort peu près 76, c'est-à-dire, que si on vouloit devider sans interruption toute la longueur de 720 pieds, il faudroit, que la partie cylindrique du Cabestan, sur laquelle se dévide le cable, fût suffisamment longue ou haute pour y admettre 76 tours. Par conséquent cette hauteur devroit être pour le moins égale à l'épaisseur du cable prise 76 fois. Mais un cable, médiocrement gros, peut avoir son épaisseur ou diamétre de 6 pouces, ou d'un demi pied. Ainsi prennant le demi pied 76 fois, on auroit 38 pieds pour la hauteur de la partie cylindrique du Cabestan autour de laquelle s'applique le cable. Si le diamétre du cable étoit de 10 pouces, cette hauteur se trouveroit devoir être de plus de 63 pieds ; hauteur énorme & partant impossible à mettre en pratique.

X V.

Mais comme on ne donne ordinairement à la hauteur de la tête du grand Cabestan que $5\frac{1}{2}$ pieds ; on trouveroit, en divisant 38 par $5\frac{1}{2}$, environ 7, qui marqueroient le nombre de fois qu'il faudroit arrêter la machine, pour répéter à chaque fois toutes les opérations mentionnées dans le Programme. Or puisque [art. 10] ces opérations consument un demi quart d'heure & plus, en répétant cette perte 7 fois, on voit, qu'il y auroit bien une heure de tems employé, seulement aux intermis-

Ll 3 termis-

termiſſions du mouvement de la machine ; & cela pour un cable de *6* pouces de diamétre. En faiſant le même calcul pour un cable, dont l'épaiſſeur ou le diamétre eſt de 10 pouces, le reſultat montrera, que le Cabeſtan eſt obligé de demeurer dans l'inaction, près d'une heure & demie en tout.

X V I.

Il eſt aiſé de concevoir, que les durées totales de l'inaction augmentent en raiſon des diamétres croiſſants des cables, ſuppoſée leur longueur toujours la même. Et réciproquement, plus les diamétres des cables ſont petits, moins auſſi ſeront grandes les pertes du tems conſumé pendant l'inaction totale de la machine. En effet, il eſt évident, ſans que je le diſe, que ſi le cable étoit aſſés menu, pour que toute la longueur de 720 pieds pût être dévidée ſur la hauteur de $5\frac{1}{2}$ pieds de la tête du Cabeſtan, c'eſt-à-dire, que ſi le cable n'étoit quaſi que comme une ficelle de petite épaiſſeur, le mouvement du Cabeſtan pourroit être continué ſans intermiſſion, depuis le commencement du cable juſqu'à ſon bout par ou il eſt amarré à l'ancre, ou à quelque fardeau qu'on veut tirer; parce que la hauteur de la tête du Cabeſtan ſeroit aſſés grande pour y dévider tant de tours du cable, qui étant étendus en long égaleroient toute ſa longueur.

X V I I.

Mais ce ſeroit une fiction faite en l'air, de ſuppoſer des cordes ſi déliées ; puiſqu'il n'eſt pas dans nôtre pouvoir de procurer aux cables telles forces qu'on voudra, pour réſiſter à la rupture, à moins qu'on ne les faſſe d'une juſte groſſeur, que l'expérience ſeule a enſeignée, ſelon les différents uſages qui demandent plus ou moins de force de ténacité dans les cables. Je m'imagine que le moins gros de ceux que l'on employe pour le Cabeſtan, peut avoir deux ou trois pouces de diamétre : encore ceux-là ne ſeroient-ils que pour tirer des fardeaux d'une médio-

médiocre réſiſtance, où la rupture d'un tel cable n'eſt pas à craindre. Cependant un cable de 3 pouces d'épaiſſeur, ſuppoſant toujours ſa longueur de 720 pieds, exigeroit déja, ſuivant les art. 15 & 16 une bonne demi-heure, que dureroient les interruptions priſes enſemble, pour faire les opérations, à chaque fois que le Cabeſtan eſt dans l'inaction.

X V I I I.

Par toutes ces conſidérations, je me ſuis mis à méditer, s'il n'y auroit pas quelque moyen de remédier aux inconvéniens marqués dans la Propoſition, en faiſant enſorte que les Hommes, qui conduiſent les leviers, n'ayent jamais beſoin de s'arrêter, juſqu'à ce que le cable ſoit entiérement attiré & ramené dans le Vaiſſeau, quelque long qu'il ſoit. C'eſt une entrepriſe, qui paroit d'abord impoſſible ; j'ai néanmoins imaginé quelques expédients, qui ſeront ſûrement praticables, pourvû qu'on ne néglige rien dans l'exécution. Je n'expoſerai ici que celui de ces expédiens qui eſt le plus ſimple, & par conſéquent le plus facile à mettre en pratique ; d'autant plus, que je me ſervirai du Cabeſtan fait à l'ordinaire, ſans y rien changer ; ſinon qu'on y doit faire une petite préparation utile à mon deſſein, & que hors du Cabeſtan, à une diſtance convenable, on doit placer une piéce, ou une machine, que je nommerai le *Preſſoir*, qui tiendra ferme à une poutre, à une parois, ou à quelque autre partie ſolide & inébranlable du Vaiſſeau. Voici en quoi conſiſte cette invention.

X I X.

Deſcription de la maniere d'accommoder le Cabeſtan à pouvoir être tourné continuellement & ſans relache, juſqu'à l'entiére attraction du cable.

Comme les frottemens dans les machines ſont ce qu'il y a de plus nuiſible à l'uſage qu'on en veut faire, puiſque ſouvent la la plus grande partie de la force eſt conſumée à ſurmonter les frottements; on a cherché les moyens de les éviter, ou au moins de les diminuer, autant que la nature de la machine le permettoit. Ici je ferai le contraire; je tâcherai, pour obtenir mon deſſein de trouver un frottement, qui ſoit inſurmontable par la réſiſtance du fardeau que le cable doit tirer, trainer, ou élever. C'eſt ainſi qu'on tire un profit de ce qui eſt d'ailleurs un grand inconvénient: c'eſt convertir le mal en bien, le poiſon en remède.

X X.

Une corde étant vers ſon milieu roulée autour d'un cylindre, & tirée par deux puiſſances égales appliquées à ſes extrémités; ces puiſſances reſteront ſans doute en équilibre, n'y ayant aucune raiſon pourquoi l'une prévaudra plûtôt que l'autre. Mais l'expérience montre, que ſi l'une de ces deux puiſſances reçoit une petite augmentation, elle ne fera pas d'abord venir l'autre à elle, parce que cela ne ſe peut faire, ſans mouvoir la corde ſur le cylindre & vaincre ainſi le frottement: il faut donc, que cette augmentation de puiſſance ſoit aſſés grande pour ſurmonter le frottement. Or le frottement lui même prend des accroiſſements, à meſure que la corde fait plus de tours ſur le cylindre. C'eſt de-là que nous voyons la raiſon, pourquoi peu d'hommes ſuffiſent pour tenir le bout du cable qui ſe dévide de deſſus le Cabeſtan, pendant qu'une grande partie du cable, qui tire le fardeau de grande réſiſtance vient s'y entortiller.

X X I.

On ſait que, tout le reſte demeurant le même, la réſiſtance du frottement d'une corde roulée autour d'un cylindre, eſt proportionelle au nombre des tours: ainſi trois tours cauſeront un frottement dont la réſiſtance ſera triple de celle cauſée par le frottement d'un ſeul tour. Ceci doit être auſſi entendu des par-

parties d'un tour entier; en ſorte que ſi la corde embraſſe ſeulement, par exemple, la moitié, ou le tiers, ou le quart de la circonférence du cylindre; la réſiſtance, qu'oppoſe le frottement à la force qui tire la corde d'un côté plus que de l'autre, ſera auſſi la moitié, ou le tiers, ou le quart de la réſiſtance, qui réſulte du frottement que produiroit un tour entier de la corde ſur le cylindre.

X X I I.

En donnant d'abord à la corde un tour, ou plus d'un tour, ou même ſeulement plus de la moitié d'un tour; on conçoit bien que les trois parties de la corde, ſavoir celle qui eſt pliée ſur le cylindre, & les deux autres qui ſont hors du cylindre & étendues en lignes droites, ces trois parties, dis-je, ne peuvent plus ſe trouver ſur un même plan; Car l'épaiſſeur de la corde fait que ſa partie pliée ſur le cylindre doit ſe détourner du plan perpendiculaire à l'axe, dès que cette partie devient plus grande que la demi-circonférence du cylindre; étant viſible, qu'en ce cas, les deux autres parties hors du cylindre, étendues en lignes droites, ſe rencontreront & ſe croiſeront; ce qui ne ſauroit ſe faire, ſans que ces deux portions de la corde ſortent du plan ſur lequel elles étoient, en s'écartant l'une de l'autre de toute l'épaiſſeur de la corde [voyés *Fig.* 1]. A plus forte raiſon la corde pliée ſur le cylindre doit s'écarter d'avantage du plan perpendiculaire à l'axe, quand on la roule pluſieurs fois autour du cylindre. C'eſt là préciſément en quoi conſiſte l'inconvénient, qui fait deſcendre le cable juſqu'au bout du Cabeſtan, & qui entraine après cela tant d'autres incommodités, cauſées par les différentes opérations, qui remettent le Cabeſtan dans l'inaction, autant de fois qu'on les repéte. TAB. LXXXII.

X X I I I.

Mais ſi la corde n'embraſſe que la moitié de la circonférence du cylindre, ou une moindre partie que la moitié [voyés *Fig.* 2 &

& 3], il eſt clair que, dans ces deux cas, les deux portions de la corde ne ſe croiſeront jamais, quelques longues qu'elles ſoient. Ainſi rien n'empêche que la corde ne puiſſe demeurer conſtamment dans le plan du cercle horizontal, dont elle embraſſe un arc, égal ou plus petit que la demi-circonférence; pendant que le cylindre, tournant ſur ſon axe vertical, feroit avancer la partie poſtérieure de la corde, pour ſuppléer ſucceſſivement à la partie pliée ſur l'arc, à meſure qu'elle le quitteroit par devant, ou s'en détacheroit pour s'étendre en ligne droite avec la partie antérieure. De cette maniere, on conçoit aiſément que le cylindre peut tourner continûment, ou ſans interruption, & faire paſſer toute la corde d'une extrémité à l'autre par deſſus l'arc qu'elle embraſſe.

X X I V.

Il s'agit donc de trouver quelque moyen, qui faſſe enſorte; que quand le cercle tourne ſur ſon centre, il entraine avec lui la corde; afin que toujours une nouvelle portion de la tangente ſoit obligée de ſe plier & de s'appliquer ſur un arc égal, & cela nonobſtant la grande réſiſtance d'un fardeau, qui ſeroit attaché à l'extrémité poſtérieure de la corde, quand même cette réſiſtance ſeroit égale à celle d'un poids à lever de 1000, ou de 2000 livres, ou plus grand. Or c'eſt là la grande difficulté, de rendre la preſſion de la corde, pliée ſur l'arc qu'elle embraſſe, aſſés forte, pour que la circonférence du cercle ne puiſſe couler ou gliſſer de deſſous la corde, & laiſſer ainſi le fardeau en arriére, ſans l'avancer la moindre choſe.

X X V.

Vouloir ici imaginer quelque ciment, colle, ou glu, dont on enduiroit toute la corde, afin que chacune de ſes parties, pliée ſucceſſivement ſur l'arc qui lui répond, lui adhère par ſa ténacité, ſi fermement qu'elle ne puiſſe quitter dans ſes points ceux de l'arc qu'elle touche, pendant le tems que chaque point

de

de la corde eſt à parcourir l'arc de la courbure; vouloir, dis-je, imaginer un tel moyen, ce ſeroit trop donner dans le chimérique: on en voit bien la raiſon; ainſi je n'y fais point de réflexion. Mais j'ai d'abord penſé, que l'on réuſſiroit peut-être mieux pour la pratique, en faiſant faire une roue aſſés épaiſſe, mobile autour de ſon centre: on feroit, ſur l'épaiſſeur de la circonférence de cette roue, une entaille tout autour, en forme de canelure ou de ſillon, aſſés large & profonde pour y recevoir ou contenir la corde, juſqu'à environ la moitié de ſa groſſeur, ou un peu plus. On garniroit toute la cavité de ce ſillon de pointes de fer, bien courtes, mais très fortes, toutes perpendiculaires à la circonférence; enſuite on feroit embraſſer à la corde un arc, non plus grand que la demi-circonférence de ce ſillon hériſſé de pointes; on tiendroit le bout antérieur un peu ferme, quand on commenceroit à tourner la roue.

X X V I.

Il eſt aiſé de concevoir, que dès que la corde attachée à quelque corps qu'on veut attirer, ſe bande par l'oppoſition de la réſiſtance, ſa partie courbée, & appliquée ſur l'arc circulaire du ſillon, commence à preſſer cet arc; & la preſſion ſera d'autant plus grande, que le corps à mouvoir fait plus de réſiſtance, ou que la corde eſt plus fortement tendue. De-là il arrive, que les pointes de fer du ſillon, ſur leſquelles eſt preſſée la partie pliée de la corde, s'enfoncent dans les petits interſtices de la corde; ce qui fait que, pendant la circulation du ſillon, chaque pointe enfoncée aide à tranſporter la corde de la partie poſtérieure vers l'antérieure; & comme par le mouvement circulaire de la roue, il y aura toujours de nouvelles pointes, qui ſe préſentent ſucceſſivement à s'inſinuer dans la corde qui va être preſſée ſur le ſillon, pendant que du côté antérieur tout autant de pointes ſe dégageant permettent à la corde de reprendre ſa ſituation rectiligne, que la force d'un homme, qui la recueilleroit en tirant, affecteroit de lui donner; il eſt clair, que de cette maniere, la rotation de la roue autour de ſon axe immo-

bile,

bile, pourroit être perpétuée sans aucune interruption, & attirer cependant un corps attaché à l'extrémité d'une corde, qui auroit telle longueur que l'on voudroit.

XXVII.

J'ai dit que la pression de la corde pliée sur un arc donné augmente avec l'augmentation de la résistance. Il faut savoir, que cette augmentation se fait de part & d'autre en même proportion. Car c'est une vérité déja démontrée par plusieurs Personnes, que la résistance *R* est à la pression *P* comme le rayon de la roue *r* est à la longeur *a* de l'arc que la corde embrasse, c'est-à-dire, que $P = \frac{aR}{r}$. D'où l'on voit, que la pression deviendra plus grande que la résistance, pourvû qu'on prenne un arc plus long que son rayon: ainsi un quart de la circonférence que la corde embrasseroit, seroit plus que suffisant, pour faire que la force de la pression surmontât celle de la résistance. Je fais cette remarque, seulement pour faire sentir qu'on pourroit fortifier l'engrainement des pointes de fer dans les interstices des fibres de la corde, jusqu'à tel dégré, que la résistance ne seroit peut-être pas capable de rompre les ténacités jointes ensemble de toutes les fibres embrochées par les pointes.

XXVIII.

C'est sur une pareille idée, que feu M. HUGUENS, dans la construction de la premiére Horloge à Pendule de son invention, employa une telle roulette en forme de poulie, dont la cavité d'alentour étoit garnie de pointes, destinée à porter la corde chargée par un bout d'un poids de *6* livres; lequel poids, ayant un effort continuel pour descendre, ne descend pas en faisant glisser ou couler précipitamment la corde par dessus la roulette, comme il le feroit sans les pointes qui s'engrainent dans la corde; si bien que le poids, & avec lui la

la corde, ne descend qu'en faisant tourner la roulette, qui ménant avec elle la grande roue dentée sur un axe commun, communique le mouvement à tout le rouage de l'Horloge, jusqu'au balancier réglé par les oscillations du Pendule; ce qui rend la descente du poids fort lente, les pointes enfoncées dans la corde empêchant le poids de se précipiter. Voyés son *Horologium oscillatorium* premiere édit. p. 4. Fig. 1. où la roulette garnie de pointes, est représentée en profil, & marquée par les lettres D D.

XXIX.

On a depuis abandonné cette maniere de former la roulette avec des pointes, & on y a substitué une autre piéce circulaire, qui fait un effêt équivalent: c'est une platine composée de deux plaques rondes, jointes ensemble centralement, & qui laissent autour de la circonférence un interstice entr'elles, pour recevoir la corde selon son épaisseur. Cet interstice va en se retrécissant vers le centre, afin que quand la corde y est une fois admise dedans, elle soit serrée & pincée d'avantage par les flancs des deux plaques, lorsque le poids tire la corde. On voit bien, que plus le poids est pesant, & mieux la corde s'engagera dans l'interstice, & en sera comprimée; ce qui sert à empêcher qu'elle ne glisse par dessus la demi-circonférence supérieure. Mais pour mieux empêcher le glissement, les Ouvriers ont soin de rendre raboteux les deux flancs de la fente ou de l'interstice, par des incisions faites en sautoir, qui élévent de petites éminences tournées obliquement & à contresens de la tension de la corde; a peu près, comme on rend raboteuses les surfaces des limes. Il n'est pas difficile de comprendre la raison, pourquoi on a préferé cette façon de roulette à celle de M. HUGUENS: C'a été, sans doute, pour mieux ménager la corde, laquelle, suivant la structure de la roulette à la HUGUENS, ne peut que souffrir beaucoup à chaque fois qu'on remonte l'Horloge: car il est clair, que c'est alors que la corde reçoit brusquement quantité de piquures de la la part des pointes qui s'y enfoncent, & que brusquement aussi les pointes s'en retirent; par où il arrive nécessairement, que plusieurs des fibres de la corde se déchirent, ne pouvant pas se prêter subitement à ces actions violentes des pointes. Ainsi la corde s'usera bien vite; au lieu qu'elle doit se conserver beaucoup plus longtems, la roulette qui porte la corde étant fabriquée à la maniere d'aujourdhui.

XXX.

Cependant je me suis d'abord imaginé, que de l'idée de Mr. HUGUENS on pourroit tirer plus d'utilité pour nôtre sujet en question: Voici comment. Autour du cylindre, ou de l'arbre du Cabestan, vertical comme il est, on entaillera une cavité, un sillon, dont le plan soit parfaitement horizontal; par conséquent perpendiculaire à l'axe du cylindre: la profondeur & la largeur du sillon répondront à la grosseur du cable, dont on veut se servir; c'est pourquoi si on veut en différentes occasions se servir de cables de différente grosseur, on pourra faire différens sillons tous parallèles les uns aux autres, pour en choisir celui qui convient au cable dont on veut faire usage. On revêtira la surface de chacune de ses cavités d'une lame épaisse de fer, courbée en telle façon, qu'elle s'ajuste exactement à la figure concave du sillon, & qu'elle soit garnie de pointes, un peu longues & serrées les unes auprès des autres; ensorte que le sillon en paroisse hérissé en toute sa circonférence.

XXXI.

Le Cabestan étant préparé ainsi, on conçoit que si on applique sur le sillon une partie du cable prise vers le bout antérieur, laquelle embrasse un arc moindre que la demi-circonférence, ou tout au plus égal à la demi-circonférence; on conçoit, dis-je, que dès qu'on fait tourner le Cabestan, moyennant les leviers, pendant que quelques hommes tiennent un peu

peu ferme le bout antérieur; le cable amarré au fardeau ne sera pas plûtôt bandé par sa résistance, que la pression fera entrer les pointes dans la partie du cable pliée sur cet arc, lesquelles par conséquent entrainent le cable & font suivre le fardeau: ce mouvement pourra durer sans discontinuer, jusqu'à ce que le fardeau soit entiérement attiré; pourvû que, pendant cette manœuvre, les hommes, qui doivent recevoir le cable à mesure qu'il se remet en ligne droite après avoir passé par les pointes, ayent soin de lui aider à s'en dégager, en le tirant un peu; quoique le changement de direction des pointes, causé par le tournoyement du Cabestan, fasse que les pointes se retirent d'elles-mêmes, si elles ne sont pas trop longues, comme on le voit dans les cordes des Horloges décrites par Mr. HUGUENS, où elles s'engrainent & désengrainent d'elles mêmes, à chaque fois qu'elles font le demi-tour supérieur de leur roulette.

XXXII.

Cette manière de se servir du Cabestan seroit exemte de tous les inconvéniens exposés dans le Programme; si elle n'étoit pas accompagnée d'un autre inconvénient, dont on ne fait pas mention. C'est qu'il seroit à craindre que la structure du cable ne se corrompit trop vite, en passant si souvent, & avec tant de force, par les pointes; à peu près comme il arrive au lin qu'on fait passer par le Seran, dont l'usage est de diviser les fibres du lin en plusieurs filamens subtils. Je crois cependant que, vû la différence de l'action du sillon hérissé de pointes, qui ne feroient qu'entrainer le cable, & celle des pointes d'un Seran, qui doit fendre par force les fibres, le cable ne laisseroit pas de durer & de faire d'assés longs services, pourvû que les ficelles, dont il est cablé, fussent bien tortillées. Outre qu'une longue durée du cable n'est pas ce qui devroit le plus être tiré en considération; si d'ailleurs il faisoit l'office souhaité d'éviter les inconvénients marqués, sur-tout pour les Vaisseaux qui appartiennent à un grand Prince, ou à un riche & puissant

puissant Etat, où on ne regarde pas de si près à l'épargne des agrais.

XXXIII.

Quoiqu'il en soit, si on ne juge pas cette maniere assés commode pour être mise en pratique, à cause de la facilité avec laquelle le cable se rongeroit & seroit mis hors d'usage; je veux qu'on omette les pointes, & qu'au lieu d'elles on rende la lame de fer, qui recouvre le sillon, fort raboteuse en forme de lime, comme je l'ai insinué ci-dessus (§. 29.). Il est bien évident, que si l'âpreté seule que rencontre le cable plié & appliqué sur un arc du sillon, étoit suffisante pour entrainer le cable chargé d'un fardeau, on auroit l'effet qu'on desireroit, & le cable seroit beaucoup moins sujet à s'user que par la maniere précédente du sillon garni de pointes. Il faut donc examiner si de ce côté là on peut espérer un bon succès. On sait que deux surfaces raboteuses de deux corps, étant appliquées & pressées l'une sur l'autre, il faut une certaine force, dans la direction de la surface commune où les corps se touchent, pour faire mouvoir l'un, qui seroit mobile, sur l'autre, qui seroit supposé immobile: c'est le frottement qui cause cette difficulté, en résistant au mouvement. On sait de plus, par les raisonnemens & les expériences de M. AMONTONS, que la force, requise pour surmonter le frottement, est proportionnelle à la pression avec laquelle le corps mobile est pressé contre l'immobile: ensorte, qu'en augmentant assés la pression, on pourra augmenter le frottement, à tel dégré qu'on voudra; supposé que tout le reste demeure le même.

XXXIV.

Or pour appliquer cette Théorie à nôtre sujet; voyons jusqu'où ira la pression que souffrira le cable, lorsqu'il embrasse le plus grand arc du sillon qu'il peut embrasser, pour que tout le cable demeure toujours dans un même plan; c'est-à-dire, lorsqu'il embrasse la demi-circonférence du sillon. Nous avons vû (§. 27.)

(§. 27.) que la pression étant nommée P, la résistance du fardeau à tirer R, la longueur de l'arc du sillon embrassé par le cable a, le rayon de la circonférence r; on aura $P = \frac{aR}{r}$. Supposé donc que a signifie la demi-circonférence, qui est au rayon r, selon la proportion d'ARCHIMEDE, comme 22 à 7, il en viendra $P = \frac{22}{7} R$: ce qui fait voir que la pression de la portion du cable courbée sur la moitié du sillon, seroit $3\frac{1}{7}$ fois plus grande que la résistance du fardeau qui bande le cable. Donnons, par exemple, à cette résistance une force équivalente à un poids de 2100 livres, comme si c'étoit une ancre à tirer du fond de la mer, pesant vingt-un quintaux, ou plus, parce qu'elle perd dans l'eau une partie de sa pesanteur; nous aurons $\frac{22}{7} R = \frac{22.2100}{7}$ liv. $= 6600$ livres. Ainsi la pression du cable, exercée sur la demi-circonférence, seroit équivalente à un poids de *66* quintaux. Cela veut dire, que si la portion du cable, qui embrasse la demi-circonférence, venoit à être étendue en ligne droite horizontale sur un sillon pareillement horizontal, & que ce morceau du cable fût chargé d'un poids de *66* quintaux, il en résulteroit un frottement, pour surmonter lequel, il faudroit précisément la même force, qu'il faudroit à l'ancre, pour resister & pour n'être pas entrainée par le mouvement circulaire du Cabestan.

XXXV.

Ce calcul suppose, que la pression du cable sur le sillon est uniforme dans toute la longueur de l'arc embrassé par le cable; cependant il est clair, qu'elle est plus grande du côté du fardeau; qu'elle va ensuite en diminuant jusques à la fin de la courbure, où le cable commence à quitter le sillon pour reprendre la direction rectiligne; c'est là où sont les Hommes, qui tiennent en tirant le garant, ou le bout du cable qui se dévide de dessus le Cabestan. Or ces Hommes n'employent pour tirer qu'une force fort médiocre, par exemple, une force de 300 livres.

vres. Ainſi en appliquant nôtre règle $P = \frac{22}{7} R$, où R ſignifie préſentement la tenſion du cable, ou la force de 300 livres; on trouvera $\frac{22}{7} R = \frac{22.300}{7} = 943$ livres, pour la plus petite preſſion, ſi elle étoit uniforme par toute la longueur de l'arc embraſſé par le cable; prenons donc la moyenne arithmétique entre la plus grande preſſion 6600℔ & la plus petite 943℔, nous aurons 3771℔, ou à peu près 38 quintaux. C'eſt le poids eſtimé raiſonnablement, dont on doit ſuppoſer chargée la portion du cable qui embraſſe la demi-circonférence du ſillon, comme étendue en ligne droite horizontale, & couchée ſur un pareil ſillon horizontal, pour que cette charge produiſe à peu près la même force de frottement, que produiroit la preſſion cauſée par la réſiſtance du fardeau ſur le demi-circuit du ſillon.

XXXVI.

C'eſt pourquoi, il eſt à ſavoir, ſi la charge, ou la preſſion de 38 quintaux ſeroit ſuffiſante, pour faire enſorte qu'une force de 21 quintaux de réſiſtance du fardeau, moins celle de 3 quintaux, qu'employent les Hommes qui tiennent en tirant le garant en ſens contraire; c'eſt-à-dire, qu'une force de 18 quintaux ne puiſſe pas ſurmonter la force du frottement; car ſi elle la ſurmontoit, on auroit beau virer le Cabeſtan, ſon ſillon ne feroit que couler ſous le cable & laiſſeroit le fardeau en arrière ſans l'entrainer. On penſera, ſans doute, qu'on peut augmenter la *ſcabroſité* du ſillon ou le rendre plus raboteux; puiſque le ſuccès dépend entièrement de cette circonſtance; juſqu'à ce qu'il le ſoit aſſes pour rendre le frottement inſurmontable par la réſiſtance du fardeau. Mais ne retomberions-nous pas dans cet autre inconvénient, que nous voudrions éviter auſſi; qui eſt que par une trop grande âpreté du ſillon, il ſeroit à craindre; que le cable ne fut pas de longue durée; parce qu'il ſeroit rongé trop vite en paſſant ſouvent ſur un ſillon ſi rude, comme nous l'avons remarqué par rapport au ſillon garni de pointes.

XXXVII.

XXXVII.

Pour prévenir donc la promte corruption du cable, je vois bien qu'il eſt abſolument néceſſaire de ne pas rendre le ſillon trop mordant, en le rendant extrêmement raboteux & très rude: mais d'un autre côté, je vois auſſi que, s'il n'eſt que médiocrement rude, il pourra arriver que la ſimple preſſion $\frac{aR}{r}$, qui réſulte par la ſeule courbure du cable, ne ſoit pas aſſez forte pour cauſer ſur le ſillon un frottement, ou plûtôt une diſpoſition au frottement, inſurmontable par la réſiſtance du fardeau; car autrement le Cabeſtan mis en mouvement feroit gliſſer le ſillon ſous le cable, ſans l'entrainer, ſans avancer le fardeau.

XXXVIII.

Le remède à cela ſeroit, ſans doute, de faire enſorte que, quelque douce que ſoit l'âpreté du ſillon, il fut pourtant rendu diſpoſé à un frottement aſſés conſidérable, pour n'être pas ſurmonté par la réſiſtance du fardeau. On obtiendra ce remède en augmentant ſuffiſamment la preſſion $\frac{aR}{r}$ [produite naturellement par la courbure du cable] d'une autre preſſion extérieurement appliquée par quelque artifice. Car M. AMONTONS ayant démontré que la force du frottement eſt proportionnelle à la grandeur de la preſſion; il eſt inconteſtable que la moindre *ſcabroſité* des ſurfaces de deux corps qui ſe touchent, eſt capable de produire une diſpoſition au frottement, qui réſiſtera à une très grande force; pourvû que la preſſion de l'un des corps contre l'autre ſoit auſſi grande qu'il le faut. Mais le moyen d'inventer & d'exécuter une nouvelle preſſion paroit difficile, pour ne pas dire impoſſible; d'autant plus qu'il faudra employer hors du cable quelque corps, quelque machine, qui preſſe fortement l'arc extérieur du cable courbé. Cette machine doit demeurer toujours immobile au même endroit,

Nn 2 par

par rapport au Vaiſſeau, pendant que le Cabeſtan tourne : ainſi, ſi le cable doit être entrainé, à méſure que le ſillon circule, il eſt viſible que la machine elle même demeurant immobile, cauſera un grand frottement contre le cable ; mais un frottement en ſens contraire à celui que l'on veut procurer ſur le ſillon dans la concavité du cable. La force de ce frottement extérieur contraire, provenant de la machine, détruiroit donc une partie de l'effet que devroit produire l'effort augmenté du frottement intérieur du ſillon : On perdroit d'un côté, ce qu'on auroit gagné de l'autre.

XXXIX.

Le ſeul moyen, qui reſte, d'éviter cette incommodité, ſera d'inventer quelque artifice, avec lequel on conſtruira cette machine, que je nommerai *Preſſoir*, qui ne fera que preſſer le cable par dehors, avec tant d'effort que l'on voudra, ſans aucun frottement ſenſible, pendant que le cable coule ſous le Preſſoir, avec le ſillon qui circule. Et c'eſt ce que je me flatte d'avoir trouvé ; il ne tient qu'à le mettre en exécution : étant fort ſimple, il plaira par ſa ſimplicité. Voici en quoi il conſiſte.

XL.

TAB. LXXXII. Soit [*Fig. IV.* *] ABC l'arc extérieur du cable plié, & couché juſqu'à la moitié de ſon épaiſſeur dans le creux du ſillon. On fera faire trois ou pluſieurs roulettes bien ſolides, dont les eſſieux D, E, F ſoient ſur un arc DEF concentrique à l'arc ABC, & enchaſſés dans leurs chappes DG, EH, FI, qui tiennent ferme & fixe à une piece de fer LM ſolidement fabriquée

* La planche qui porte les Figures IV & V, doit être conſiderée comme ſur un plan horizontal, parce que le cercle ABCKYZ repréſente la ſection horizontale & perpendiculaire à l'arbre du Cabeſtan vertical. On a donné à cette ſection une épaiſſeur, pour y repréſenter le ſillon, qui doit admettre dans ſon creux la moitié de la groſſeur du cable.

quée en arc pareillement concentrique avec ABC. On aura la machine appellée le *Preſſoir*, qui venant à être preſſée, avec un effort, autour de l'arc LM, vers le centre, enſorte que l'arc extérieur du cable ABC reçoive cette preſſion, qui ſera communiquée & tranſmiſe juſques ſur le ſillon ; il eſt évident, que quand le cable ſe meut avec le ſillon, qui tourne de A en B, de B en C, il fera tourner auſſi les roulettes autour de leurs eſſieux, en ſens contraire, ſuivant l'ordre des nombres 1, 2, 3, 4. De cette maniere, les roulettes preſſeront le cable ſans aucun frottement ; nonobſtant que le corps du Preſſoir demeure toujours au même endroit, & que le cable preſſé aille ſon chemin, ſuivant l'ordre des lettres A, B, C, entrainé, comme il eſt, par le mouvement circulaire du Cabeſtan, que je ſuppoſe ſe faire en ce même ſens de A en B, de B en C, &c. Ainſi, voilà augmentée la preſſion du cable ſur le ſillon, autant qu'il ſuffira, pour rendre le frottement de l'un contre l'autre inſurmontable par la réſiſtance du fardeau, quelque grande que ſoit celle-ci. Car puiſque les accroiſſemens du frottement ſont proportionés à ceux des forces avec leſquelles les corps s'entrefrottans ſont preſſés l'un ſur l'autre ; on conçoit aiſément que le frottement, que nous ſouhaittons avoir, peut-être augmenté à l'infini ; ſuppoſé que la matiere, ſur laquelle s'applique la preſſion, ſoit aſſés ſolide pour n'être pas ſujette à la rupture.

XLI.

Mais voyons de quelle maniére on peut obtenir & effectuer une telle preſſion appliquée par déhors ſur la piece LM, que j'appelle le *joug* du preſſoir. Je m'imagine, que le plus commode ſeroit d'employer pour cela des vis, un cric, ou une autre machine de cette nature, qui moyennant une force motrice médiocre, qui la fait agir, peut produire une preſſion énorme. Prenons, par exemple, que ce ſoit un cric, fait à l'ordinaire, NP (*Fig. V.*), dont la baſe VP de l'étui ; qui

qui renferme la tige dentée, soit appuyée & attachée fortement à une poutre, à une parois, ou à une autre partie solide & inébranlable du Vaisseau. La tête de la tige T soit étendue en arc *lm*, dont la cavité puisse être appliquée sur la convexité du joug LM, lorsqu'on fait sortir la tige en tournant la manivelle X, jusqu'à ce que *lm* vienne se joindre sur LM. Il vaudra peut-être mieux, que d'abord tout le pressoir tienne ferme à la tête de la tige, en faisant souder l'arc *lm* sur le joug LM, de sorte que la tige du cric & le joug ne soit que d'une seule piece; à laquelle si on pratique ensuite les roulettes de la maniére susdite, on aura toute la machine prête à servir dans le besoin.

X L I I.

Car supposé, que le cric soit bien appuyé & affermi à son lieu fixe & solide, où il pourra demeurer pour toûjours; quand on veut le mettre en usage, il n'y a qu'à faire sortir la tige de son étui, moyennant la manivelle, jusqu'à ce que les roulettes viennent à toucher la convexité du cable plié sur le sillon. Ensuite on continuera de tourner la manivelle avec force, plus ou moins, jusqu'à ce qu'il en resulte une pression suffisante sur le cable, & de celui-ci sur le sillon raboteux, qui produise entr'eux une disposition à un frottement si grand, qu'il devienne invincible par la résistance du fardeau. Le pressoir parvenu à ce degré de pression, on arrêtera la manivelle en la liant sur l'étui, pour l'empêcher de rebrousser, & les Hommes destinés à conduire les leviers, commenceront à faire virer le Cabestan. Que si on s'aperçoit que le cable ne se tient pas comme collé sur le sillon, depuis A jusqu'en C, pendant que le Cabestan tourne en ce sens; mais qu'il reste en arriére, ou qu'il ne suit pas le mouvement du Cabestan avec la même vitesse; ce sera une marque que la pression n'est pas encore assés forte, ou qu'elle s'est relâchée de son intensité: c'est à quoi on remédiera sur le champ, en avançant un peu la manivelle; car il ne faudra que très peu pour serrer beaucoup d'avantage le cable, entre les

les roulettes & le sillon. Et de ce serrement augmenté dépend l'augmentation nécessaire de la pression, pour procurer au cable la disposition requise au frottement, afin de le rendre insurmontable par l'effort opposé du fardeau. C'est dans cette considération, que je l'appelle *disposition au frottement*, plûtôt que *frottement* lui même; puisqu'en effet le frottement ne doit pas se faire actuellement: sans cela, on n'obtiendroit pas le but que nous souhaittons; le fardeau resteroit en arriére, & le Cabestan tourneroit en glissant sous le cable sans l'attirer.

X L I I I.

Suivant cette Théorie l'arc ABC, que l'on veut que le cable embrasse, pourroit être, à ce qu'il semble, une aussi petite portion que l'on voudra, de toute la circonférence du sillon; en rendant par récompense la pression extérieure d'autant plus grande que l'arc ABC est pris plus petit. Mais dans la pratique, on rencontre ordinairement des circonstances, qui exigent des limites à ce que la théorie paroit permettre généralement & dans toute son étendue. Ainsi, ici, on pourroit prendre l'arc ABC si petit, qu'on seroit necessité d'employer une pression si violente, si énorme, qu'on ne trouveroit nulle matiere, ni pour le Cabestan, ni pour le Pressoir, ni pour le cric assés ferme, ou assés solide, pour soutenir cette grande pression, sans se rompre ou sans se deranger. C'est donc l'expérience, qui doit aprendre les justes bornes. Ce sont les habiles Ouvriers, qui mettront en exécution ce que l'expérience leur aura enseigné de plus convenable. Je me contente d'en avoir donné l'idée générale.

X L I V.

Avant que de finir ce petit Discours, il est bon de répondre à une difficulté qu'on pourroit faire; mais qui n'est qu'apparente. C'est qu'on pensera peut-être, que cette nouvelle pression

preſſion extérieure provenant de la force du cric, que l'on ajoute à celle qui ſe fait naturellement par le cable, quand il eſt plié ſur l'arc du ſillon, augmentera de beaucoup la peine & le travail de ceux qui conduiſent les leviers. Mais ſi on fait attention au point où ces preſſions tendent, on verra que la difficulté ceſſera dans le moment. Car il eſt viſible, que l'une & l'autre de ces preſſions donnent dans tous les points de l'arc ABC du ſillon, perpendiculairement à la circonférence; & partant, que par toute l'étendue de l'arc ABC elles ſont dirigées vers le centre du mouvement circulaire: elles ne reſiſteront donc en rien à l'action des leviers, ſi ce n'eſt en-tant, que le pivot d'en bas & la cheville d'en haut du Cabeſtan en ſouffrent quelque frottement de plus contre la circonférence des trous dans leſquels ils tournent: mais il en influe ſi peu contre la force avec laquelle on conduit les leviers, qu'il ne mérite point de conſidération; ſur-tout ſi les leviers ont une juſte longueur, & que la cheville, auſſi bien que le pivot & la crapaudine ſoient de fer ou de cuivre bien poli & huilé: outre qu'on a aujourd'hui différens moyens, comme on ſait, de diminuer ces petits frottemens. En tout cas, un ou deux Hommes de plus, qu'on appliquera aux leviers, feront plus que ſuffiſants pour reparer la perte de force, s'il y en avoit.

X L V.

Une autre difficulté plus eſſentielle, ſeroit la crainte qu'on pourroit avoir, que toute la grande preſſion du cric, venant d'un ſeul côté, & réunie toute entiére ſur le pivot & la cheville, ces deux parties ne fuſſent jamais aſſés ſolides, pour pouvoir ſoutenir un effort ſi énorme, ſans être expoſées au danger de rompre. Cependant je crois qu'on trouvera le moyen de leur procurer toute la ſolidité requiſe. Quoiqu'il en ſoit, on pourra prévenir ce danger, en faiſant faire un autre Preſſoir, muni de ſon cric, ſemblable en tout au premier, & en appliquant ce ſecond Preſſoir ſur les bords du ſillon KYZ, vis à vis &

à

à l'oppoſite du premier Preſſoir; enſorte que ces deux Preſſoirs antagoniſtes s'oppoſent mutuellement à leurs efforts, pendant que le premier ne laiſſe pas de preſſer le cable de toute ſa force; il eſt évident que le pivot & la cheville n'en ſouffriront aucune atteinte, & n'auront par conſéquent beſoin d'autre ſolidité, que de celle qui eſt requiſe pour l'uſage ordinaire du Cabeſtan.

X L V I.

Enfin, ce que j'ai dit ſur le frottement du pivot & de la cheville du Cabeſtan, doit être auſſi entendu de celui que ſouffrent les eſſieux, ou goujons des roulettes D, E, F; puiſqu'il eſt clair, que ces eſſieux ſont preſſés vers le joug LM par l'action du cric, avec autant de force qu'elle preſſe le cable vers le centre du ſillon, la preſſion & la contrepreſſion étant toujours égales, comme le ſont l'action & la réaction, ſuivant le principe général de la méchanique. Il en eſt de même des eſſieux des roulettes du Preſſoir antagoniſte, ſi on trouve à propos d'y en mettre un. C'eſt pour cela, que je n'en dis plus rien, non plus que de cette partie de la force qui eſt employée à plier à tout moment le cable, à meſure qu'il s'en préſente une nouvelle portion prête à ſubir le Preſſoir; la partie de force employée à cela eſt ſans doute employée en pure perte, par rapport au fardeau à tirer. Or c'eſt un mal général & néceſſaire, auquel eſt ſujet l'uſage du Cabeſtan fait à l'ordinaire, auſſi bien que le nôtre. Ce n'eſt pas à ce mal qu'on demande du remède: il faudroit trouver l'art de faire des cables parfaitement flexibles; mais on ne trouvera jamais cet art.

F I N.

N°. CLXXIII.

SOLUTIO
PROBLEMATIS CATENARII
GENERALITER CONCEPTI,

Per Methodum HERMANNI † *ab errore repurgatam.*

PROBLEMA PRÆLIMINARE LEMMATICUM.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 1. T*Res potentiæ in* A, C, H *sustinent punctum* B *in æquilibrio, agentes secundum directiones* BA, BC, BH *positione datas: datur potentia in* H; *quæruntur potentiæ in* A & C, *& earum differentia; seu, quod tantundem est, quæruntur tensiones filorum, earumque differentiæ?*

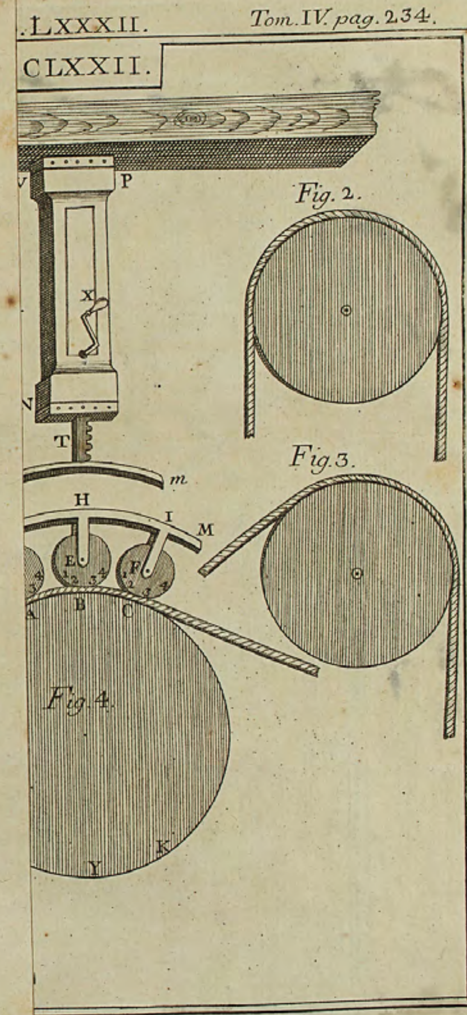
SOLUTIO.

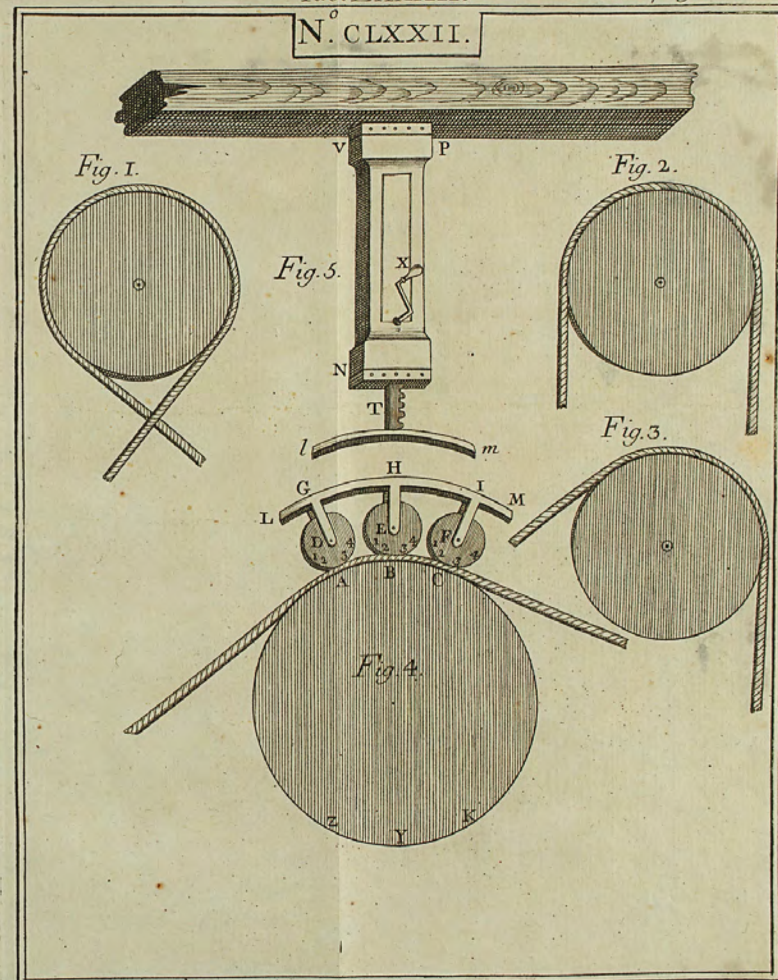
Producantur CB & HB, & assumtis BA & BD æqualibus, agantur AG & DF perpendiculares in HG, ut & AE perpendicularis in DF. Sit potentia in H $=f$, tensio fili BC $=t$, tensio fili BA $=T$. Ex Mechanicis patet $f:t=$ sinus anguli ABD [qui sit $=c$] : $\frac{AG}{AB}$. Hinc $t=\frac{f.AG}{c.AB}$. Item $f:T=c:\frac{DF}{AB}$, unde $T=\frac{f.DF}{c.AB}$; adeoque $T-t=\frac{f.(DF-AG)}{c.AB}=\frac{f.DE}{c.AB}$. *Q. E. I.*

COROLLARIUM.

Si angulus ABD infinite parvus, ita ut arcus AD, centro B descriptus, pro recta perpendiculari ad BA & BD haberi pos-

† *Phoronomia*, Lib. I. Cap. III. & *Append.* §. V.




N°. CLXXII.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
V
P
X
N
T
l
m
G
H
I
L
M
D
E
F
A
B
C
Z
Y
K

possit; erit [ob E

quo substituto in $\frac{f}{c}$

$= \frac{f.\,BF.\,AD}{c.\,AB.\,BD} = [$

Applicatio

Quod hic est B
MN, vel ds; D
repræsentat tension
que $T - t$ hoc e

jam est $\frac{g\,ds.\,dv}{c.\,ds} =$

$= \frac{g\,dv}{c}$, unde g

ut in Prop. seqq.

do per dx, & divic

Hic jam utrob
integrale; adeoqu
que transitur ad
mogeneitatem ob

prorsus est eadem
ne Problematis se
ibi. *Q. E. F.*

Sit jam Caten
centrum C, *in r*

possit; erit [ob BD: BF = AD: DE] $DE = \frac{BF \times AD}{BD}$, quo substituto in $\frac{f.\,DE}{c.\,AB}$, provenit $T - t$ [$= \frac{f.\,DE}{c.\,AB}$] $= \frac{f.\,BF.\,AD}{c.\,AB.\,BD} =$ [ob $c = \frac{AD}{BD}$] $\frac{f.\,BF}{AB}$.

Applicatio hujus ad figuram Catenariæ.

Quod hic est BF, vel BG, ibi est Nm, vel dx; AB est MN, vel ds; DF vel AG est Mm, vel dv; f est gds, T repræsentat tensionem Catenæ in M, t tensionem in N; adeoque $T - t$ hoc est $dt = \frac{gds.\,dx}{ds} = gdx$; & quia T [$\frac{f\,DF}{c.\,AB}$] jam est $\frac{gds.\,dv}{c.\,ds} = \frac{gdv}{c}$, oportet ut $\int gdx$, seu T, vel t, sit $= \frac{gdv}{c}$, unde $\frac{gdv}{\int gdx} = c =$ [per naturam anguli contactus ut in Prop. seqq. ostendetur] $\frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dx}{ds}}$; multiplicando per dx, & dividendo per dv, erit $\frac{gdx}{\int gdx} = \frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$. TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 2.

Hic jam utrobique habetur differentiale divisum per suum integrale; adeoque ambo integrantur per Logarithmos, indeque transitur ad numeros; & ita habebo [assumto aab ad homogeneitatem observandam] $\int gdx = \frac{aab}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$. Quæ prorsus est eadem æquatio ad quam diversissima via in Solutione Problematis sequentis perveni. Quare reliqua perficiuntur ut ibi. *Q. E. F.*

PROBLEMA.

Sit jam Catena MND *uniformiter crassa, & gravis versus centrum* C, *in ratione data quacunque distantiarum.*

SOLUTIO.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXII. *Fig.* 2. In ductas tangentes duas infinite propinquas ME, Ne, agantur ex C duæ normales CE, Ce. Et vocentur CD $= a$, PM $= x$, N$m = dx$, M$m = dv$, P$p = dz$, MN $= ds$, gravitas variabilis data lege $= g$. Primo patet angulum FMe esse mensuram amplitudinis arculi elementaris MN, seu quantitatem anguli contactus in M. Jam, ob triangula similia MNm, CMe, erit $ds : dv = a + x : \frac{(a+x).\,dv}{ds} =$ CE, & $ds : dx = a + x : \frac{(a+x).\,dx}{ds} =$ ME. Differentietur CE, non quidem actu, sed præponendo tantum litteram characteristicam d, ut tanto commodius pateat, quomodo instituenda sit integratio ut succedat, quem in finem scribo F$e = -d((a+x).\frac{dv}{ds})$; præmitto autem signum $-$, quia CM & CE alterne crescunt vel decrescunt. Sic ergo angulus FMe seu $\frac{\mathrm{F}e}{\mathrm{MF}}$

$$= \frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dx}{ds}} = c.$$

Sed ex * Theoremate nuper demons-

monstrato, oportet $\frac{gds \times (a+x) \times \frac{dv^2}{ds^2}}{c}$ facere quantitatem constantem; quæ homogeneitatis conservandæ gratia dicatur $= aab$. Et ita, multiplicando per c vel ejus valorem, habetur $gds \times (a+x) \times \frac{dv^2}{ds^2} = + aab \times \frac{-d((a+x)\times\frac{dv}{ds})}{(a+x)\times\frac{dx}{ds}}$. Nunc statim video, si denominator membri posterioris mutatur in aliquam potentiam quantitatis post litteram d positæ in numeratore, fore tunc fractionem integrabilem, quod alias non ita facile patuisset. Hoc fine separo $\frac{dx}{ds}$ per multiplicationem & divido per $(a+x) \times \frac{dv^2}{ds^2}$. Quo facto, habebo $gdx = aab \times \frac{-d((a+x)\times\frac{dv}{ds})}{(a+x)^2 \times \frac{dv^2}{ds^2}}$, quod est manifeste integrabile; integretur ergo, & prodibit $\int gdx = aab \times \frac{1}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$, seu reducendo

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 3. * Theorema ad cujus demonstrationem hic provocatur ita demonstraveram: Curva MND concipiatur ut polygonum infinitilaterum, cujus tria latuscula sint MN, NO, OR, quorum puncta N, O trahantur viribus g, γ ad punctum datum C vergentibus; prolongentur lineæ directionum CN, CO ad G, H; & duo latuscula ON, RO ad S, T; vocentur anguli externi MNS, NOT, qui nihil aliud sunt quam anguli contactus, vel eorum sinus, a, α; sitque sinus anguli MNG $= b$, sinus anguli ROH $= \beta$; tensio fili NO $= t$. Erit, ex Staticis, $a : b = g : t$ & $\alpha : \beta = \gamma : t$, adeoque $\frac{bg}{a} = t = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$; unde $\frac{a}{bg} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$. Dicantur porro sinus angulorum GNO $= e$, & HON $= \varepsilon$. Habetur, ex Trigonometricis, $e : \varepsilon =$ CO : CN, proinde $e \times$ CN $= \varepsilon \times$ CO; ex quo fluit $\frac{a}{ebg \times \mathrm{CN}} = \frac{\alpha}{\varepsilon\beta\gamma \times \mathrm{CO}}$. Quoniam itaque est uniformis relatio inter angulos & lineas ad punctum O pertinentes, quæ est inter eas ad punctum N pertinentes; oportet ut $\frac{a}{ebg \times \mathrm{CN}}$ vel $\frac{\alpha}{\varepsilon\beta\gamma \times \mathrm{CO}}$ sit quantitas constans per totam curvam. Hinc, cum in solutione Problematis sit a vel $\alpha = c$, e vel $\varepsilon = \frac{dv}{ds}$, g vero, vel $\gamma = gds$; & præterea ob angulos MNS vel NOT infinite parvos, censeatur sinus anguli MNG $=$ sinui ang. ONG, vel sinus ROH $=$ sinui NOH, hoc est, $b = e$, vel $\beta = \varepsilon$; erit utique [invertendo terminos fractionis, & scribendo $a + x$ pro CN vel CO] $\frac{\frac{dv^2}{ds^2} \times gds \times (a+x)}{c} =$ constanti. *Q. E. D.*

$(a+x).\, dv. \int g\,dx = aabds$. Porro quia g datur per x, dabitur quoque [ſaltem per quadraturas] $\int g\,dx$; vocetur itaque $\int g\,dx = X$; unde $(a+x) \times X \times dv = aabds$, & $(a+x)^2 \times X^2 \times dv^2 = a^4 bb \times ds^2 = a^4 bb \times (dx^2 + dv^2)$; ſeparatiſque dv & dx, prodibit $\frac{aabdx}{\sqrt{((a+x)^2 \times X^2 - a^4 bb)}} = dv = \frac{a+x}{a}\, dz$, quare $dz = \frac{a^3 bdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times X^2 - a^4 bb)}}$. *Q. E. I.*

COROLLARIUM I.

Quod ſi g ſit inverſe ut aliqua potentia diſtantiarum; hoc, eſt, ſi $g = \frac{ac^n}{(a+x)^n}$; adeoque $\int g\,dx$ ſeu $X = \frac{ac^n}{(1-n)}(a+x)^{1-n}$; abibit formula generalis in hanc,

$$dz = \frac{(1-n)\, aabdx}{(a+x)\sqrt{(c^{2n}.\,(a+x)^{4-2n} - (1-n)^2\, aabb)}},$$

quæ diverſa eſt ab ea quæ invenitur per Methodum *Hermannianam*.

COROLLARIUM II.

Exiſtente vero $x = 0$, prodit $\int g\,dx$ ſive $X = \frac{ac^n}{1-n} a^{1-n}$; proinde verus & correctus valor ipſius X, erit $\frac{ac^n}{1-n} \times ((a+x)^{1-n} - a^{1-n})$. Quare habebitur correcta formula pro caſu præcedente hæc,

$$dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times \frac{c^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{1-n} - a^{1-n})^2 - aabb)}}$$

$$= \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{2-n} - a^{1-n}(a+x))^2 - aabb)}}$$

Quia

Quia autem in caſu quo a, vel diſtantia centri eſt infinita, videtur aliquid abſurdi provenire, utpote $dz = \frac{bdx}{\sqrt{-bb}}$, quod eſt imaginarium; res ita eſt tractanda.

Conjiciatur $(a+x)^{2-n}$ in ſeriem, & habebitur $(a+x)^{2-n} = a^{2-n} + \frac{2-n}{1} a^{1-n} x + \&c$, a qua ſubtrahatur $a^{1-n}.\,(a+x)$, ſeu $a^{2-n} + a^{1-n} x$; remanebit $(1-n)\, a^{1-n} x$; nam reliqui termini in caſu $a = \infty$ omnes evaneſcunt: adeoque jam erit $dz = \frac{bdx}{\sqrt{(c^{2n} a^{1-2n} xx - bb)}}$; ubi porro ſi arbitraria c ſumatur æqualis a, fiet $dz = \frac{bdx}{\sqrt{(xx - bb)}}$, quæ eſt æquatio pro Catenaria vulgari: plane ut fieri debet.

COROLLARIUM III.

Manente diſtantia centri finita, ſi $n = 0$, hoc eſt ſi gravitas g ſit uniformis; qui caſus eſt *Hermannianus* *, erit $dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; cujus integratio generaliter non dependet [quantum hactenus notum eſt] ab arcu circulari; proinde curva non erit algebraïca, multo minus Hyperbola, ut perperam invenit HERMANNUS. Hinc ſi $a = \infty$, erit $dz = \frac{bdx}{\sqrt{(xx - bb)}}$; iterum pro Catenaria vulgari; ut par eſt.

COROLLARIUM IV.

Si manente iterum diſtantia centri finita, ſit $n = 1$; hoc eſt ſi gravitas g ſit inverſe ut diſtantia; oritur $dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{(\frac{00cc}{00} - aabb)}}$; quod nihil indicat: cui incommodo ut occurratur, animadvertendum eſt, id ex eo venire,

* *Phoronomia*, pag. 46, & 382.

venire, quod in hoc casu $\int g\,dx$ algebraïce non possit integrari, qui casus per consequens excipi debet a generali expressione $\int g\,dx = X = \frac{ac^n}{(1-n)}((a+x)^{1-n} - a^{1-n})$. Sed integratio instituenda est per Logarithmos; nempe $g\,dx$ fit $\frac{ac\,dx}{a+x}$, proinde $\int g\,dx = acl(a+x)$, vel correcte $\int g\,dx$. seu $X, = acl(a+x) - acla = acl\left(\frac{a+x}{a}\right)$. Quo substituto in formula universali, emergit $dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times (acl\frac{a+x}{a})^2 - a^4 bb)}}$

Corollarium V.

Sit jam $n = 2$; id est, sit gravitas reciproce in duplicata ratione distantiarum, quæ est vulgaris hypothesis; mutabitur formula pro potentiis *Coroll.* 2 exhibita, in hanc $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^4 xx}{aa} - aabb)}} = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{(c^4 xx - a^4 bb)}} =$ [assumta $cc = ab$] $\frac{aa\,dx}{(a+x)\sqrt{(xx - aa)}} =$ [faciendo $x = t - a$] $\frac{aa\,dt}{t\sqrt{(tt - 2at)}}$; id quod est integrabile: quod ita perficio. Diviso utroque termino per tt, habeo $\frac{aa\,dt}{t\sqrt{(tt-2at)}} = \frac{aa\,dt : tt}{\sqrt{(1 - 2a:t)}}$. Jam quia numerator est differentiale quantitatis signo radicali inclusæ, patet posse integrari. Ejus namque integrale est $= a\sqrt{(1 - \frac{2a}{t})} = \frac{a\sqrt{(t-2a)}}{\sqrt{t}} = \frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}}$. Unde liquet curvam DNM non habere suum verticem in D, sed supra illud in L, ita ut CL sit dupla ipsius CD. Liquet etiam curvam habere asymtoton: existente enim x infinita, erit z vel $\frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = a$; adeo ut sumto arcu DP = CD, producta rec-

recta CP occurrat curvæ non nisi in distantia infinita: proinde ejus est asymtotos.

Scholium.

Si nulla attentione facta ad correctionem valoris ipsius X in *Coroll.* 2 adhibitam, formulæ expressionem reddere velimus generalissimam; oportet $\int g\,dx$, seu X, augere vel minuere data quavis $\frac{ac^n e}{1-n}$; faciendo $X = \frac{ac^n}{1-n}((a+x)^{1-n} + e)$; quo observato prodibit

$$dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times \frac{aac^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{1-n} + e)^2 - a^4 bb)}}$$

$$= \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{2-n} + (a+x)e)^2 - aabb)}}.$$

Hinc in casu Corollarii tertii, ubi $n = 0$, erit $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(((a+x)^2 + ea + ex)^2 - aabb)}}$, quæ jam comprehendit Hyperbolam æquilateram Hermanni; assumta nimirum $e = 0$. Fit enim hoc modo $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^4 - aabb)}}$; quam æquationem Hyperbolæ convenire demonstrare possumus. Sed hæc est unica curva algebraïca, inter infinitas alias non algebraïcas, quæ Problemati *Hermanniano* satisfaciunt.

Si assumitur $e = -a$, oritur $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; ut supra *Coroll.* 3; ubi Catenariam vulgarem contineri diximus, existente nimirum a infinito.

N°. CLXXIV.

SOLUTIO PROBLEMATIS

Curvaturæ laminæ elaſticæ a pondere appenſo curvatæ.

SUpponitur *primo* Lamina ſine pondere; 2°. æqualiter craſ- ſa, vel potius conſideratur ut linea recta in ſtatu naturali; TAB. LXXXIV. N°. CLXXIV. 3°. in ſingulis ſuis punctis æqualiter fortis. 4°. Extenſiones quorumcunque extendentium eſſe in ratione virium extendentium, quæ eſt Hypotheſis *Leibnitiana*. His præſuppoſitis, ſit AB lamina elaſtica horizontaliter in plano AD infixa, & in ſuo ſtatu naturali; AC eadem incurvata a pondere appenſo P. In quocunque curvæ puncto R ducatur tangens RT, & intelligatur curva diviſa in particulas infinite parvas & æquales A*a*, R*r*. Quoniam nunc pondus P diverſimode vim ſuam exerit in ſingulis curvæ punctis; nimirum in remotioribus majorem, in propioribus minorem, & quidem in ratione diſtantiarum; fit ut *rs* perpendicularis in tangentem RT, quæ denotat extenſionem qua particula R removetur per vim ponderis P a ſtatu naturali RS, ſit ad *ab* extenſionem qua particula A*a* removetur a ſtatu naturali A*b*, ut vis in R ad vim in A. Eſt autem vis in R ad vim in A, ut diſtantia CL ad diſtantiam CG; ideoque CL : CG $=$ *rs* : *ab* $=$ [quia R*r* & A*a* ponuntur æquales] *rs* : R*r* $+$ *a*A : *ab* $=$ [RX, *r*X, & AF, *a*F, ſunt lineæ evolventes curvæ ex cujus evolutione generatur curva CRA; proinde ob ſimilitudinem triangulorum *r*RS, RX*r* & *a*A*b*, AF*a*] *r*R : RX $+$ FA : A*a* $=$ FA : RX. Ergo CL : CG $=$ FA : RX; & proinde CL $\times$ RX $=$ CG $\times$ FA $=$ quantitati conſtanti aa. Sit igitur CL $= x$, LR $= y$;

erit,

erit, ut in Calculo integrali inventum eſt *, RX $= \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dx\,ddy}$; ergo $\frac{x(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dx\,ddy} = aa$; multiplicetur utrumque per $-dx^2 ddy$, & dividatur per $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, habebitur $x\,dx = \frac{-aadx^2ddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorum ergo integralia [quorum poſterius invenitur per Regulas in Calculo integralium exhibitas, ponendo $dy = \frac{dx^2}{dm}$, provenit enim quantitas cujus integrale ſtatim patet] $\frac{1}{2}xx = \frac{-aady}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorumque quadrata $\frac{1}{4}x^4 = \frac{a^4dy^2}{dx^2+dy^2}$, vel $x^4dx^2 + x^4dy^2 = 4a^4dy^2$, & reducta æquatione, ita ut indeterminatæ ſint ſeparatæ, proveniet $\frac{axxdx}{\sqrt{(4a^4-x^4)}} = ady$. Conſtructio itaque curvæ habetur, mediante quadratura ſpatii, cujus natura exprimitur per hanc æquationem $4a^4zz - x^4zz = aax^4$. Et ſic curva quæſita eſt ex ordine primo mechanicarum.

* N°. CXLIX, Lect. XVI, pag. 437, *Tom. III.*

N°. CLXXV.

DE LEGE VIRIUM

Qua fit ut mobile ad centrum deſcendat temporibus quæ ſint ut poteſtates datæ diſtantiarum, a quibus deſcenſum inchoat.

PROBLEMA I.

INvenire legem Virium, quibus mobile in ſingulis locis alicujus rectæ poſitione datæ urgeri oportet, ut ad punctum datum in recta ipſa data perveniat temporibus rationem habentibus ut datæ poteſta-

 tes

tes distantiarum a puncto dato; inchoans motum a quiete, in qualibet distantia a puncto.

Vel, quod eodem redit,

Invenire qua lege virium mobile ad Centrum virium datum attrahi debeat, ut ad illud, ex quacunque distantia motum inchoans, descendat temporibus ordinatim datis, secundum applicatas alicujus ex genere Parabolarum vel Hyperbolarum ad asymtoton.

SOLUTIO.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 1 & 2. Esto C centrum virium; recta A C secundum quam mobile ad C trahitur. Curva CTP determinet tempora ordinatim data, ita nempe ut applicata A P designet tempus descensus per A C, motu inchoato a quiete in A; & quælibet alia applicata B T exprimat tempus per B C, motu pariter a quiete nascente in B. Quæritur curva CVR, cujus applicatæ AR, BV explicent vires quibus mobile in singulis locis A, B, urgendum est.

Sumantur in A C duæ portiones quæcunque AC, αC; quæ separatim positæ [*Fig.* 2.] intelligantur divisæ in particulas infinite parvas totis proportionales, quarum homologæ duæ sint ex. gr. Bb & $\beta\beta$, hoc est ut Bb: $\beta\beta$ = AC. αC = BC: βC. Sint vero curvæ velocitatum ALM, $\alpha\Lambda\mu$, quarum nempe applicatæ BL, $\beta\Lambda$ exprimant velocitates acquisitas in B & β, post descensus per AB & $\alpha\beta$. Quod si itaque faciamus tempuscula per particulas homologas Bb & $\beta\beta$ ubique proportionalia temporibus per totas AC & αC, hoc est [in *Fig.* 1.] ipsis applicatis AP, $\alpha\pi$; habebimus AP : $\alpha\pi = \frac{Bb}{BL} : \frac{\beta\beta}{\beta\Lambda}$ = [ob Bb: $\beta\beta$ = AC: αC] $\frac{AC}{BL} : \frac{\alpha C}{\beta\Lambda}$; unde BL : $\beta\Lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$. Similiter habetur bl: $\beta\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$; adeoque bl: $\beta\lambda$ = BL: $\beta\Lambda$; &, sumendo differentias, erit dBL: $d\beta\Lambda$ = BL: $\beta\Lambda$, hoc est

est incrementa velocitatum per particulas homologas Bb & $\beta\beta$ sunt ut ipsæ velocitates; unde etiam BL × dBL: $\beta\Lambda \times d\beta\Lambda$ = BL²: $\beta\Lambda^2$; est autem [*Fig.* 1.] BV × dBT [BV × $\frac{Bb}{BL}$] : $\beta u \times d\beta\theta$ [$\beta u \times \frac{\beta\beta}{\beta\Lambda}$] = dBL: $d\beta\Lambda$ = BL: $\beta\Lambda$; ideoque BV: βu = $\frac{BL^2}{Bb} : \frac{\beta\Lambda^2}{\beta\beta} = \frac{BL^2}{AC} : \frac{\beta\Lambda^2}{\alpha C}$ = [ob BL : $\beta\Lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$] $\frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$. Sed sumtis CB & C$\beta$ æqualibus ipsis CA & Cα, degenerabunt BV & βu in AR & $\alpha\varrho$; erit itaque etiam AR: $\alpha\varrho = \frac{AC}{AP^2} \cdot \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$; unde si curva data CTP talis sit, ut abscissis quatuor quibuslibet existentibus proportionalibus [AC : αC = BC: βC]; etiam $\frac{AC}{AP^2}$ & $\frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$ sint proportionales ipsis $\frac{BC}{BT^2}$ & $\frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; hoc est, ut $\frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2} = \frac{BC}{BT^2} : \frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; adeoque [ob AC: αC = BC: βC] ut sit AP: $\alpha\pi$ = BT: $\beta\theta$; hæc autem affectio cum competat omni generi Parabolarum & Hyperbolarum ad asymtoton; manifestum est legem virium centripetarum hanc esse ut AR sit ubique proportionalis ipsi $\frac{AC}{AP^2}$; adeoque & ipsam curvam AVR esse ex Parabolarum vel Hyperbolarum genere.

THEOREMA.

Si distantia indeterminata mobilis descendentis ex quiete sumta vocetur x; *tempusque per eam se habeat ut* x^n; *erit vis centripeta ipsi* x *respondens ut* $\frac{x}{x^{2n}}$, *seu ut* x^{1-2n}.

Hoc patet ex analysi præcedente: & vicissim synthetice res facillime demonstrari potest.

PROBLEMA II.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 3.

Invenire curvam AB, *ita ut mobile descendens per quemvis ejus arcum* BA *vi gravitatis suæ, incipiens a quiete, impendat tempus quod sit proportionale datæ cuivis potestati altitudinis correspondentis* AC.

SOLUTIO.

Ex præcedentibus facile habetur. Sit enim $AC = x$, $BC = y$, $AB = s$; exponens potestatis $= n$, vis gravitatis a; erit ergo vis descendendi quæ exercetur secundum tangentem in quolibet puncto $B = \frac{adx}{ds}$. Quæratur igitur curva AB, cujus portio quælibet AB sit proportionalis alicui potestati abscissæ AC, & ita quidem ut $\frac{adx}{ds}$ sit proportionalis ipsi $\frac{AB}{x^{2n}}$: curva enim AB erit, per præcedentem, ea quæ quæritur. Sit itaque AB seu $s = x^m$; adeoque $ds = mx^{m-1}dx$, & $\frac{adx}{ds} = \frac{a}{mx^{m-1}} = \frac{bAB}{x^{2n}} = \frac{bx^m}{x^{2n}}$; unde $ax^{2n} = bmx^{2m-1}$. Ut igitur x utrobique parem habeat dimensionis numerum, oportet ut $2n = 2m - 1$; ex quo sequitur m fore $= n + \frac{1}{2}$: invento itaque exponente m potestatis m abscissæ AC, cui proportionalis esse debet arcus AB, quærenda nunc porro est relatio coordinatarum AC & CB per viam communem. Quia nempe $s = x^{n+\frac{1}{2}}$, erit $ds = (n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}}dx$, & $ds^2 [dx^2 + dy^2] = (n+\frac{1}{2})^2 \times x^{2n-1}dx^2$, adeoque $dy^2 = (n+\frac{1}{2})^2 x^{2n-1}dx^2 - dx^2$, & $dy = dx\sqrt{((n+\frac{1}{2})^2 x^{2n-1} - 1)}$; vel ad supplenda homogenea $(n+\frac{1}{2})c^{n-\frac{1}{2}}dy = dx\sqrt{((n+\frac{1}{2})^2 x^{2n-1} - (n+\frac{1}{2})^2 c^{2n-1})}$, hoc est $c^{n-\frac{1}{2}}dy = dx\sqrt{(x^{2n-1} - c^{2n-1})}$. *Q. E. I.*

COROL-

COROLLARIUM I.

Si $n = 0$, qui casus est tautochronæ *Hugenianæ*, provenit $dy = dx\sqrt{(\frac{c-x}{x})}$; æquatio ad Cycloidem.

COROLLARIUM II.

Si $n = 1$, habetur $dy = dx\sqrt{(\frac{x-c}{c})}$; quod cum integra- TAB. LXXXIII.
ri possit; est enim $y = \frac{2}{3}\times(x-c)\sqrt{\frac{x-c}{c}}$, seu $\frac{2}{3\sqrt{c}}(x-c)^{\frac{3}{2}}$; N°. CLXXV.
patet curvam quæsitam esse algebraïcam, & quidem Parabo- *Fig.* 4.
lam cubicalem secundam; cujus vertex V distat supra initium abcissarum A quantitate $AV = c$; parameter vero $= \frac{9}{4}c$, seu $\frac{9}{4}$ AV: vel vicissim, si parameter ponatur $= p$, erit $AV = \frac{4}{9}p$. Elegans hujus curvæ proprietas; & mirabilis consensus cum Isochronismo *Leibnitiano*, qui eidem curvæ sed contrario situ competit. Notandum tamen descensum per partem VA, utpote qua deficit curva, physice esse impossibilem; quoniam portio curvæ ab V ad A tendens minor esse deberet ipsa recta VA. Quod idem accidit omnibus curvis, quarum initium V supra A cadit, quotiescunque nempe $n > \frac{1}{2}$.

COROLLARIUM III.

Si $n = \frac{1}{2}$; curva AB abit in lineam rectam; quod aliunde ex Demonstratis *Galilæanis* diu notum est.

SOLUTIO ALTERA CLARIOR.

Sit tempus per arcum BA, ex quietis puncto B, ut s^p TAB. LXXXIII.
adeoque s^p ut x^n; unde vis secundum tangentem $[\frac{adx}{ds}]$ erit, N°. CLXXV.
per præc. ut s^{1-2p}. Ex priori comparatione habetur $s = x^{n:p}$ *Fig.* 3.

&

& $ds = \frac{n}{p} x^{(n-p):p} dx$: ex altera vero $s = (\frac{adx}{ds})^{1:(1-2p)}$ $=$ [ſubſtituto valore ipſius ds] $bx^{(p-n):(p-2pp)}$. Ergo, ut dimenſiones ipſius x identificentur, erit $\frac{n}{p} = \frac{p-n}{p-2pp}$; ex quo fluit $p = \frac{2n}{2n+1}$. Jam per viam ordinariam quæratur curva, ita ut $x^n = s^{2n:(2n+1)}$ &c.

N°. CLXXVI.

DE CURVA QUAM DESCRIBIT CORPUS INCLUSUM IN TUBO CIRCULANTE.

L E M M A

Inſerviens Solutioni Problematis ſequentis.

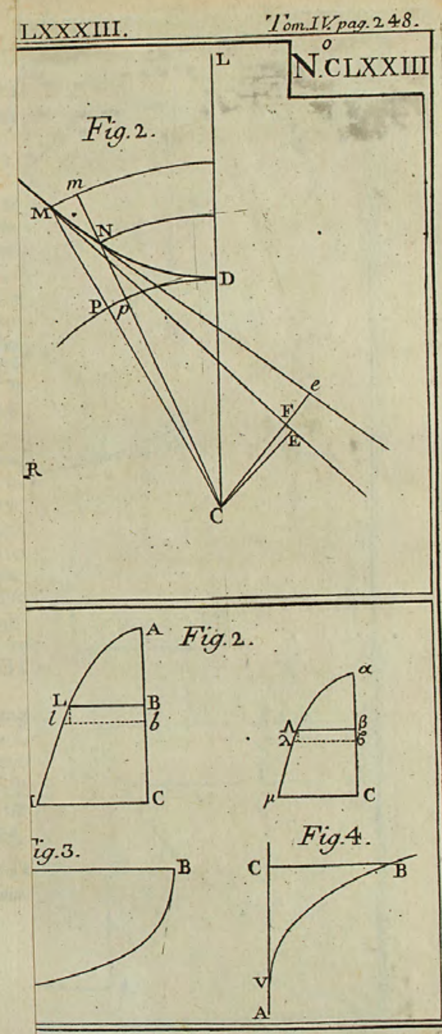
TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 1.

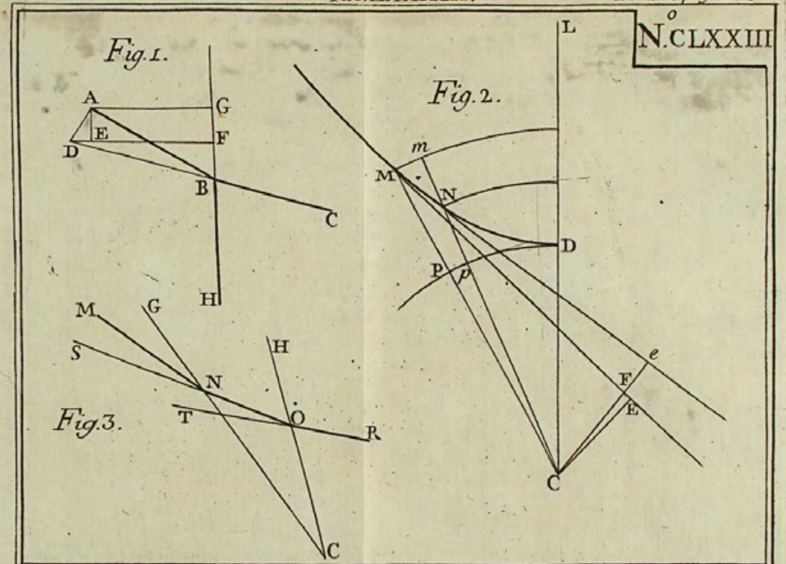
SI ex puncto quodam C ducantur tres rectæ CA, CB, CD, reſecantes ex recta PD partes AB, BD, infinite parvas & inter ſe æquales: Erit, ducta CP perpendiculari ad PD, differentia angulorum ACB & BCD, hoc eſt, ACB—BCD $= \frac{2psds^2}{(pp+ss)^2}$; nominando ſcilicet conſtantem CP $= p$, & variabilem PA $= s$.

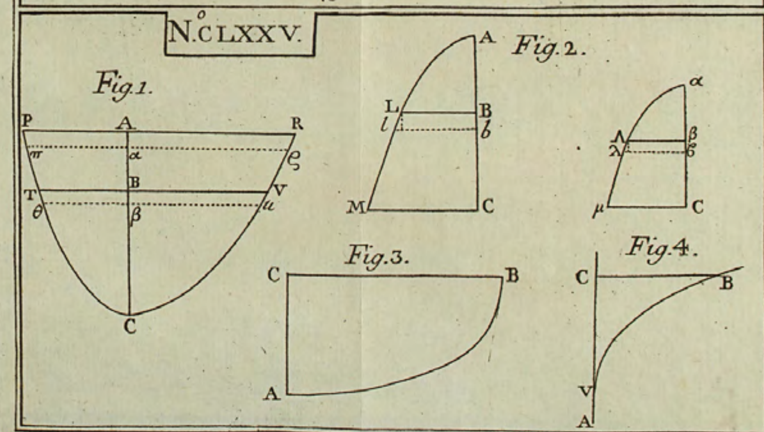
Hujus veritas facile demonſtratur: differentietur enim angulus ACB; aſſumta nempe ds pro conſtante: quo facto prodibit prædicta formula.

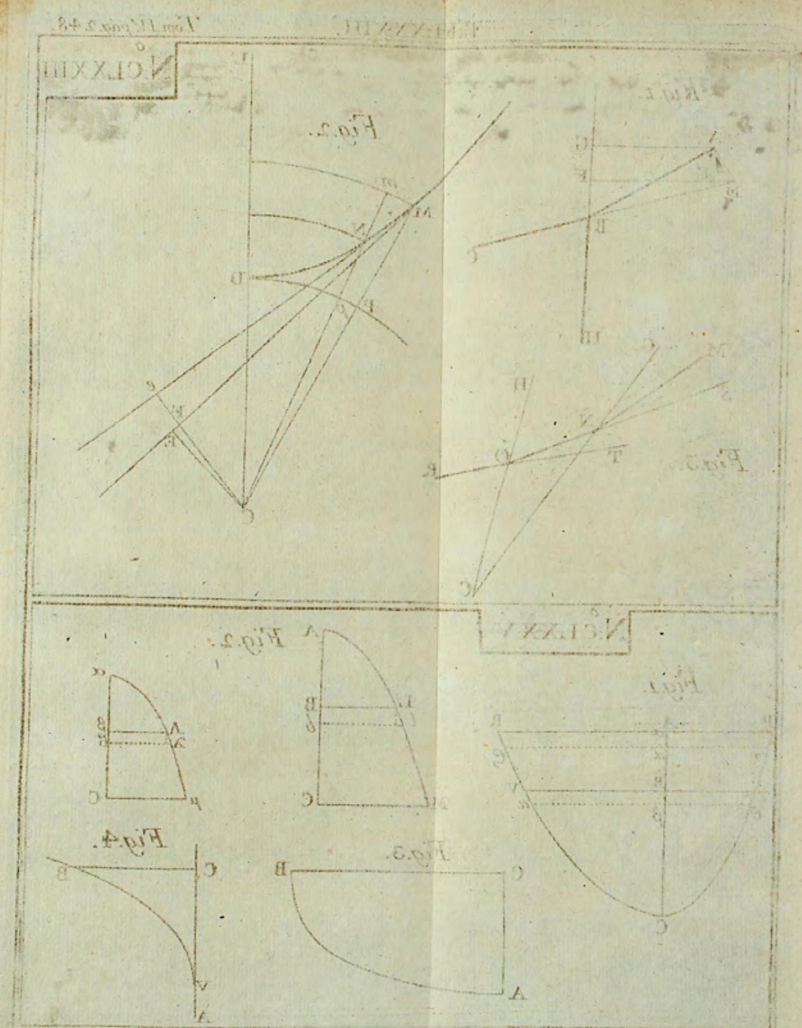
P R O B L E M A.

Determinare curvam, quam deſcribit Corpus incluſum in Tubo, qui in plano horizontali uniformiter movetur, circa aliquem axem in ipſo




N°.CLXXIII
Fig.1.
A G E F D B C H
Fig.2.
L m M N D P p e F E C
Fig.3.
M G S N H T O R C


N°.CLXXV.
Fig.1.
P A R π α ϱ T B V θ β u C
Fig.2.
A L B l b M C
α Λ β λ δ μ C
Fig.3.
C B A
Fig.4.
C B V A



N°. CLXXVI.

ipso tubo sumtum. S
liberrime, & sine u

Sit curva ABE
describit durante
Sintque variabiles
longitudines dicant
quales ACB, BC
la æqualia, quibus
& hæc in tertiam C
CA, CB, arculi
rectæ perpendicular
dicantur autem A

His præmissis,
lineolam AB, temp
moveri, si liberum
æquali percurreret a
Sed, quia tubus sim
tempusculo situm C
lem angulo ACB
reperietur in E, in
tubus vim habet p
ad CD, quæ CD
infinities minorem
vus.

Ductis igitur d
missisque in illas e
tur, vi Lemmatis

quando nempe in

pro s; prodibit e

Jam vero conc
Joan. Bernoulli C

ipso tubo sumtum. Supponitur Corpus in Tubo circulante moveri posse liberrime, & sine ulla frictione.

SOLUTIO.

Sit curva ABE, quam corpus, instar puncti considerandum, describit durante circulatione tubi CA circa axem fixum C. Sintque variabiles tubi positiones CA, CB, CE, quarum longitudines dicantur $= x$, facientes angulos infinite parvos æquales ACB, BCE, qui per consequens exprimant tempuscula æqualia, quibus tubi positio CA pervenit in positionem CB, & hæc in tertiam CE. Fiantque porro, ex centro C & radiis CA, CB, arculi AG, BH, qui more solito concipiantur ut rectæ perpendiculares ad CB, CE; erunt BG vel EH $= dx$; dicantur autem AG vel BH $= dy$, & AB vel BE $= ds$. TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 2.

His præmissis, nunc ita procedo. Postquam corpus percurrit lineolam AB, tempusculo designato per angulum ACB, pergeret moveri, si liberum esset, in eadem directione, & tempusculo æquali percurreret aliam particulam BD æqualem præcedenti AB. Sed, quia tubus simul cum corpore movetur, occupaturus eodem tempusculo situm CE, qui cum CB facit angulum BCE æqualem angulo ACB; ideoque corpus, quod alioquin esset in D, reperietur in E, in æquali distantia a centro C; quoniam scilicet tubus vim habet propellendi corpus in directione DE normali ad CD, quæ CD facere censetur cum CE, angulum DCE infinities minorem angulo BCE, licet hic ipse sit infinite parvus.

Ductis igitur duabus tangentibus proximis BP, ER, demissisque in illas ex centro C normalibus CP, CR; habebitur, vi Lemmatis, differentia angulorum ACB & BCD; quando nempe in formula $\frac{2psds^2}{(pp+ss)^2}$, substituitur $\frac{xdy}{ds}$ pro p, & $\frac{xdx}{ds}$ pro s; prodibit enim BCA — BCD $= \frac{2dydx}{xx}$.

Jam vero concipiendo DF parallelam ipsi CP vel CR;

 evi-

evidens eſt fore $\frac{DF}{ds}$ ſeu $\frac{DF}{BD} = \frac{RQ}{QB} = \frac{d(xdy:ds)}{xdx:ds}$; unde DF $= \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{xdx}$.

Item, propter triangula ſimilia hDB, FDE, erit $dx:ds = DF:DE$; proinde $DE = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xdx^2}$, & $\frac{DE}{CE} = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2}$ = menſuræ anguli DCE. Eſt autem DCE differentia inter angulos BCE & BCD, ſeu inter ACB & BCD, quæ, per Lemma noſtrum, $= \frac{2dydx}{xx}$. Hinc lucramur hanc æquationem $\frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2} = \frac{2dydx}{xx}$, ſeu $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$.

Præterea, ex conditione Problematis, cum ſint anguli ACB, BCE, &c. omnes inter ſe æquales; erunt deſcripto circulo KO, centro C & radio arbitrario $CM = a$, omnes arculi MN, NO, &c. æquales, utpote menſuræ illorum angulorum: Dicatur ergo unuſquiſque arculus $= dz$, unde $a:x = dz:dy$; adeoque $dy = \frac{xdz}{a}$; quo valore ſubſtituto in æquatione $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$, emergit hæc altera $ds^3 d(xxdz:ds) = 2xdx^3 dz$, vel, deleto utrobique dz conſtanti, hæc $ds^3 d(xx:ds) = 2xdx^3$; quæ differentiando actualiter $xx:ds$, & tum dividendo per x, hanc præbet æquationem $2dxds^2 - xdsdds = 2dx^3$. Porro pro ds^2 & pro $dsdds$ ſubſtituantur eorum valores $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{xxdz^2}{aa}$ & $dxddx + \frac{xdxdz^2}{aa}$; quo facto, reſultabit $2dx^3 + \frac{2xxdxdz^2}{aa} - xdxddx - \frac{xxdxdz^2}{aa} = 2dx^3$; quæ reducta, dat hanc ſimplicem æquationem, & quidem integrabilem, $xdxdz^2 = aadxddx$. Integretur ergo, obſervando debitam rectificationem, & habebitur $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$.

Notetur intelligi per b corporis diſtantiam initialem, ſeu minimam a centro C; ubi ſcilicet corpus incipit moveri in directione perpendiculari ad tubum; ita ut initiale incrementum

dx hujus diſtantiæ, pro nihilo ſit cenſendum, reſpectu ſubſequentium dx. Ob hanc rationem, rectificationis gratia, ſcribendum fuit $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$, eum in finem ut utrumque æquationis membrum ſimul evadat $= 0$, ab initio, nempe, ubi $x = b$, & $dx = 0$.

Cæterum æquatio inventa $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$ nobis dat $dz = \frac{adx}{\sqrt{(xx - bb)}}$, ſeu $z = \int \frac{adx}{\sqrt{(xx - bb)}} = a \times \log. (x + \sqrt{(xx - bb)})$, & ita habebimus z datum per logarithmum functionis in x expreſſæ. Quod ſi vero lubeat habere valorem ipſius x datum per functionem aliquam ipſius z; ponamus c eſſe talem numerum ut ſit $lc = 1$; erit per naturam logarithmorum $c^{z:a} = x + \sqrt{(xx - bb)}$, vel $c^{z:a} - x = \sqrt{(xx - bb)}$; unde elicietur $x = \frac{1}{2}c^{z:a} + \frac{1}{2}bbc^{-z:a}$ = [aſſumpta b pro unitate] $\frac{1}{2}(c^{z:a} + c^{-z:a})$.

CONSTRUCTIO CURVÆ.

Ponamus CKT eſſe poſitionem initialem tubi circulantis circa centrum C, & ex puncto K, corpus incipere motum ſuum in curva KBE; quæ eſt determinanda. TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 3.

Quod ut commodiſſime fiat, deſcribatur, centro C & radio CK, circulus KMN; tranſeatque per K Logarithmica Spiralis ſemi-rectangula hg KGH. Capiantur ab utraque parte rectæ CK duo arcus æquales KM, Km, & per puncta M, m, ductæ ex centro C rectæ CM, Cm ſecent Spiralem in punctis G, g. Producatur CG ad L ita ut GL ſit = Cg: Denique bifariam ſecetur CL in B: Dico fore B in curva deſiderata KBE. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Evidens eſt $\frac{z}{a}$ denotare menſuram anguli TCB, quem quælibet positio tubi CB facit cum positione ejusdem initiali CT: cum vero angulus TCB idem sit cum angulo KCM, erit radius a longitudinis arbitrariæ: sumatur ergo ille $= b = 1$; ipseque arcus $KM = z$; quo facto, exprimetur CB, vel $x = \frac{1}{2}c^{z} + \frac{1}{2}c^{-z} = \frac{1}{2}(c^{z} + c^{-z})$. Est autem ex natura Spiralis Logarithmicæ semirectangulæ $CG = c^{z}$, & $Cg = c^{-z}$; adeoque $CG + Cg$, id est, $CL = c^{z} + c^{-z}$, hujusque dimidium, id est, $CB = \frac{1}{2}(c^{z} + c^{-z})$. *Q. E. D.*

Corollarium I.

Quod si arcus uterque KM, Km decrescendo ultra punctum K loca sua inter se permutent, ita ut M perveniat in m, & m in M; patet utique punctum β analogum ipsi B, & hoc ipsum B, æqualiter distare a centro C, & sub æqualibus angulis $KC\beta$, KCB. Unde sequitur ramos ambos curvæ $K\beta$, KB sibi invicem similes esse & æquales.

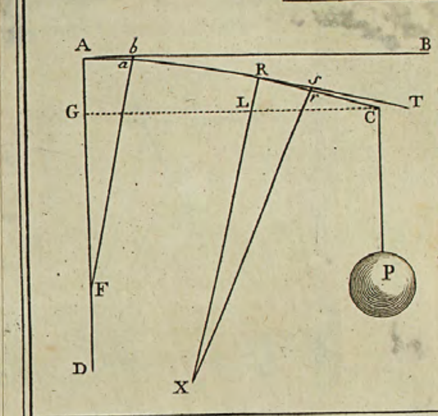
Corollarium II.

Distantia CK initialis a centro C est omnium distantiarum CB vel $C\beta$ minima; proinde tota curva $\varepsilon\beta KBE$ cadit extra circumferentiam MBm, quam tangit in solo puncto K. Res est clara, quia nempe tres rectæ Cg, CK, CB sunt continue geometrice proportionales, per naturam Logarithmicæ Spiralis, & media proportionalis semper minor est semisumma extremarum: Ergo &c.

PRO-

Tab. LXXXIV. Tom. IV. pag. 252.

N°. CLXXIV.



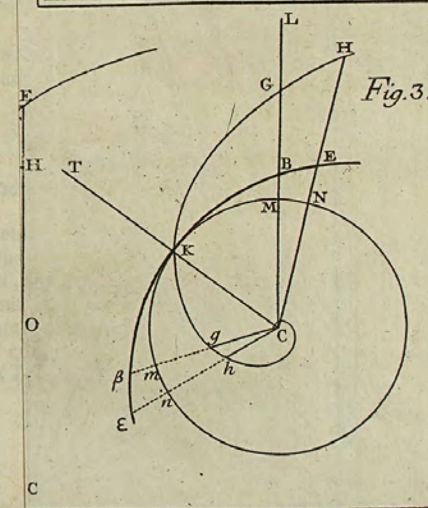


Fig. 3.

UBO CIR.

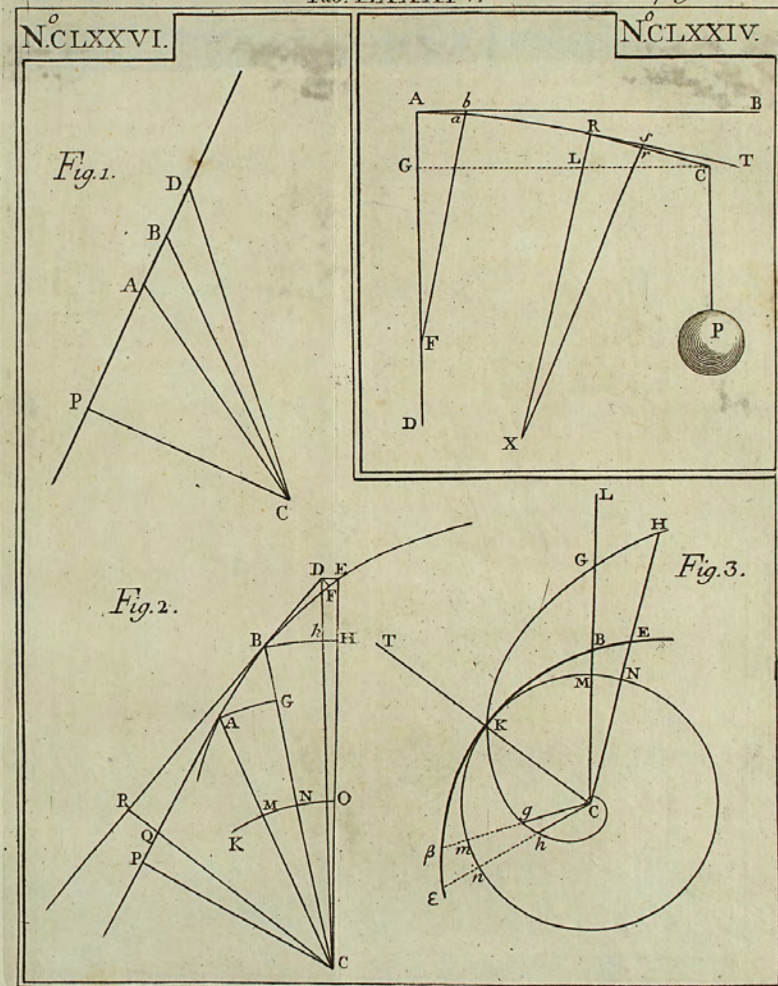
jusdem initia-
ngulo KCM,
ille $= b = 1$;
tur CB, vel
autem ex na-
$= c^z$, & C g
$c^z + c^{-z}$,
$^{-z}$). *Q. E. D.*

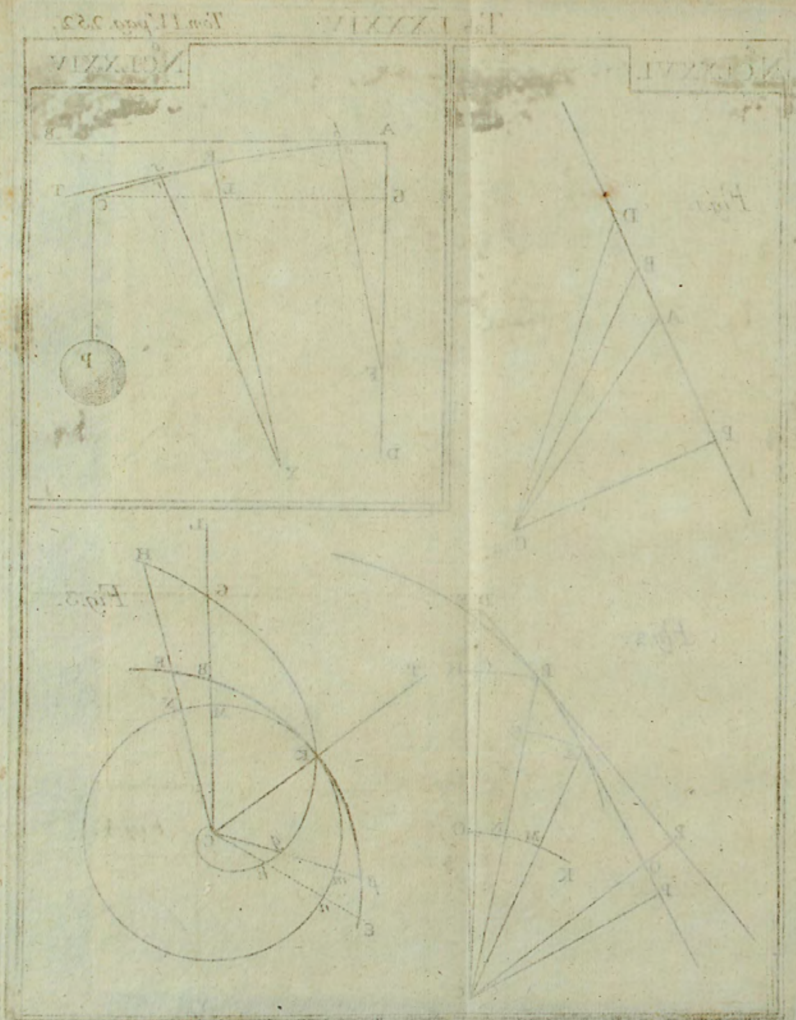
do ultra punc-
erveniat in m,
ipsi B, & hoc
qualibus angulis
urvæ Kβ, KB

I.

um distantiarum
B E cadit extra
ncto K. Res est
B sunt continue
thmicæ Spiralis,
umma extrema-

PRO-





PROP

MECHAN

SIT corpus quo-
ABCD, in qu
do in directione PR
esset, & potentia q
AC, secundum fili
que vi attractum iri
ligetur filum in quov
tur illud punctum in
curtato.

Res est per se cla
longitudines directio
tant in effectu.

De compos

Duæ vires, vel po
quarum directiones &
PB, dicuntur *compo*
C, quæ sola eodem
rectionem PC, quo
vicissim, potentia C
componi dicitur in du

N°. CLXXVII.

PROPOSITIONES VARIÆ MECHANICO-DYNAMICÆ.

I.

SIT corpus quodcunque, vel planum tantum materiale ABCD, in quod agat potentia P, trahendo vel pellendo in directione PR, ex. gr. ope fili, quod in R alligatum esset, & potentia quædam in P applicata ageret in planum AC, secundum fili directionem: dico eodem modo, eademque vi attractum iri AC, si, soluto nodo alligationis R, alligetur filum in quovis alio puncto S vel T; dummodo sumatur illud punctum in eodem filo PR, sive prolongato, sive decurtato. TAB. LXXXV. Fig. 1.

Res est per se clara, & instar Axiomatis habenda; quia longitudines directionum virium, seu potentiarum, nihil mutant in effectu.

II.

De compositione & resolutione virium.

Duæ vires, vel potentiæ, in commune punctum P agentes, quarum directiones & intensitates designentur per rectas PA & PB, dicuntur *componi*, si, iis remotis, substituitur vis tertia C, quæ sola eodem nisu vel conatu agit in P, secundum directionem PC, quo antea egerant simul duæ A & B. Atque vicissim, potentia C, expressa per rectam PC, *resolvi* vel *decomponi* dicitur in duas PA & PB, quæ, remota priori, eun- TAB. LXXXV. Fig. 2.

 dem

dem nisum exerunt in punctum P, in directione PC, quam fecerat sola potentia PC.

III.

TAB. LXXXV. *Fig.* 3.

Sint jam tres potentiæ A, B, & D, repræsentatæ per rectas PA, PB, PD, agentes in punctum P mobile in omnes plagas, quod in æquilibrio servetur a tribus istis potentiis simul agentibus; liquet, ex præcedenti Definitione, unamquamque ex istis tribus potentiis æqualem esse & directe oppositam ei, quæ ex reliquis duabus componitur. Finge enim duas quascunque, ex. gr. PA & PB removeri, earumque loco substitui æquipollentem PC, quæ utique sola resistet potentiæ tertiæ PD, & ambæ punctum P in æquilibrio retinere pergent; adeoque in directum erunt positæ, & altera alteri æqualis erit.

IV.

TAB. LXXXV. *Fig.* 4.

Duo demonstranda jam sunt, 1°. Potentiam PC, compositam, in sensu prædicto, ex potentiis PA & PB, eum habere situm, ut PA sit ad PB sicuti sinus anguli BPC ad sinum anguli APC; seu ut sinus anguli BPD ad sinum anguli APD. 2°. Completo parallelogrammo, cujus latera sint PA, PB, fore ejus parallelogrammi diagonalem ipsissimam PC; quæ & situm & quantitatem potentiæ compositæ designabit.

Demonstrationem utriusque ex natura & proprietate vectis deduco, hunc in modum. Directiones potentiarum PA, PB, & PD, vel PC, quæ utique in communi plano jacebunt, facient ut hoc ipsum planum maneat immotum, etiamsi sollicitatum in tres diversas plagas a P versus D, a P versus A, & a P versus B. Ductis duabus perpendicularibus CE, CF in latera PA, PB, si opus, prolongata; solvatur nodus P, & transferatur potentia A ad punctum E, potentia B ad punctum F, & potentia D ad punctum C, servatis nimirum pristinis suis directionibus. Liquet, ex §. 1, planum etiamnum in æquilibrio mansurum; atque sic considerari potest ECF tanquam

quam vectis inflexus, ubi potentia D, ad C applicanda, vicem subit hypomochlii sustinentis duas reliquas potentias applicatas perpendiculariter ad extremitates brachiorum E & F. Adeoque, ex natura vectis in æquilibrio existentis, erit potentia A ad potentiam B, hoc est, potentia E ad potentiam F, ut longitudo brachii CF ad longitudinem brachii CE. Est vero [sumta PC pro radio, seu sinu toto] sinus anguli CPF ad sinum anguli CPE, ut CF ad CE, seu [ob similitudinem triangulorum CBF, CAE] ut CB ad CA, hoc est ut PA ad PB. Unde sequitur directionem potentiæ compositæ ita secare angulum quem faciunt directiones componentium, ut potentiæ componentes sint in ratione sinuum angulorum partialium alternatim sumtorum; atque adeo directionem potentiæ compositæ coincidere cum diagonali parallelogrammi, cujus latera proportionalia sunt potentiis componentibus. Hæc prima pars est asserti, de situ directionis potentiæ compositæ.

Altera pars demonstranda restat; nimirum si latera parallelogrammi designent potentias ipsas componentes, fore ut ejusdem diagonalis longitudo designet quoque potentiæ compositæ quantitatem, seu intensitatem. Sint igitur tres potentiæ A, B, D, punctum P sollicitantes, illudque in æquilibrio servantes; sintque ipsæ expressæ per longitudines rectarum PA, PB, PD. Quemadmodum itaque potentia PD, in directionem oppositam PC versa, dicitur composita ex potentiis PA & PB, ita eodem sensu, qualibet alia PA prolongata in PG æqualem & oppositam, hæc ipsa PG exprimet potentiam compositam ex potentiis PB & PD. Quare hic etiam, erit potentia PB ad potentiam PD, ut sinus anguli DPG ad sinum BPG; hoc est, ut sinus anguli CPA ad sinum anguli CAP, seu ut CA, vel PB, ad PC; unde longitudo PB ad longitudinem PC, ut potentia PB ad potentiam PD. Ergo etiam PC exprimet potentiam PD, cui æqualis & opposita est illa quæ ex PA & PB componitur. *Q. E. D.* TAB. LXXXV. *Fig.* 5.

V.

V.

SCHOLIUM.

Peccant, qui confundunt compositionem virium cum compositione motuum. Vis enim, vel potentia, utpote consistens in solo nisu, vel conatu, ad motum generandum, nullam sane velocitatem actualem [ne minimam quidem] producit, si corpus in quod agit est immobile. Ubi perfectum est æquilibrium, ibi nullus adest motus. Quî ergo considerari possit motus, in æquilibrii natura explicanda, non video. ARCHIMEDES, aliique ex Veteribus, ad vectis indolem recurrerunt, ut phænomena gravitationum se mutuo in æquilibrio vel quiete retinentium demonstrarent. Nos, eorum exemplum secuti, idem fecimus, dum potentiarum compositionem ad vectis leges, utpote a longo adeo tempore demonstratas atque receptas, reduximus; rejecto nempe explicandi modo recentiorum Geometrarum, ut CARTESII, STEVINI, NEWTONI, VARIGNONII, HERMANNI, aliorumque, qui velocitatem, saltem initialem, in auxilium vocarunt, ad principii elegantissimi veritatem stabiliendam; ubi tamen nulla prorsus adest velocitas, nequidem infinite parva. Quæritur enim, cur tres potentiæ A, B, D, commune punctum D sollicitantes, ea qua dictum est conditione, perfectum inter se servent æquilibrium? Quomodo igitur introduci possit ulla velocitas, ubi perfecta adest quies, non video.

VI.

De viribus motricibus ad vectem applicatis.

TAB. LXXXV. *Fig.* 6. Sit rigida recta, tanquam vectis considerata, mobilis circa punctum fixum C; vehatque secum, dum rotatur circa C, corpus aliquod datum B in loco dato rectæ rigidæ AC, quod sit gravitatis expers. Ad punctum A quodvis in vecte, applicetur vis motrix $= m$, agens in vectem secundum directionem normalem DA. Quæritur vis acceleratrix, quam a vi motrice m acquiret corpus B in arculo Bb?

SOLUTIO.

Dicatur CA $= p$, & CB $= q$. Jam si corpus B esset in ipso loco A, ubi vis motrix applicatur, hoc est, si $q = p$, foret, per vulgarem Legem Dynamicam, vis acceleratrix absoluta $= \frac{m}{B}$, qua cum describeret rotando arculum Aa. Sed si distantia CB a centro rotationis C major minorve est quam distantia CA; oportet sumere, ex natura vectis, momentum, quod habebit vis motrix m in loco vectis B, & quod erit $\frac{pm}{q}$; faciendo scilicet $q : p = m : \frac{pm}{q}$; atque sic $\frac{pm}{q}$ erit vis motrix, qua corpus B immediate urgeri intelligitur; quare dividendo per massam B, habebitur $\frac{pm}{qB} =$ vi acceleratrici absolutæ corporis B, qua describit arculum Bb.

COROLLARIUM.

Dividendo porro inventam vim acceleratricem absolutam $\frac{pm}{qB}$ per distantiam CB, seu per q, habebitur vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{qqB}$, qua nimirum angulus BCb crescendo ampliatur. Mutatis distantia CB & massa B, ita ut illa jam sit $= r$, hæc vero $= E$; erit utique vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{rrE}$. Quod si ergo hæ duæ vires acceleratrices angulares debeant esse æquales, oportet ut sit $\frac{pm}{qqB} = \frac{pm}{rrE}$, adeoque $qqB = rrE$; hoc est, massæ B & E debent esse reciproce proportionales quadratis distantiarum a centro rotationis.

Dico itaque eandem vim motricem requiri in puncto A applicandam, ad id ut angulus AC*a* eadem acquirat incrementa, quocunque in loco locetur corpus *B*; modo ejus massa sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro circulationis C.

VII.

TAB. LXXXV. *Fig.* 7.

Sit nunc vectis CA mobilis circa centrum C, & oneratus pluribus corporibus *B*, *E*, *F* &c. quamcunque rationem inter se habentibus, & in quibuscunque distantiis CB, CE, CF &c. positis. Vis motrix autem *m* applicata in A, secundum directionem DA, sit ea, ut in dato tempusculo vectem AC promoveat ex situ AC in situm *a*C, hoc est, ut angulus AC*a* sit vis acceleratrix angularis. Dico, si sublatis corporibus *B*, *E*, *F* &c. alia totidem substituantur in puncto A locanda, & quidem $\frac{CB^2}{AC^2}\times B$ pro *B*, $\frac{CE^2}{AC^2}\times E$ pro *E*, $\frac{CF^2}{AC^2}\times F$ pro *F*, &c. Dico, inquam, eandem vim motricem *m* imprimere toti massæ collectæ $\frac{CB^2\times B + CE^2\times E + CF^2\times F, \&c.}{AC^2}$ similem vim acceleratricem angularem AC*a*; ita ut, eodem dato tempusculo, vectis ex situ AC veniat in situm *a*C.

Veritas hujus patet ex præcedenti; cum enim eadem vis requiratur in A, ad pellendum corpus *B* per B*b*, quæ requiritur ad pellendum corpus $\frac{CB^2\times B}{AC^2}$, in A locatum, per A*a*, in eodem tempusculo; vocetur illa vis α: & vis alia in A requiritur eadem, ad pellendum corpus *E* per E*e*, quæ requiritur ad pellendum $\frac{CE^2\times E}{AC^2}$, in A locatum, per A*a*; vocetur illa vis β: itemque etiam alia vis in A requiritur eadem, ad propellendum corpus *F* per F*f*, qua opus est ad propellendum corpus $\frac{CF^2\times F}{AC^2}$, in A locatum, per A*a*, quæ vis dicatur γ; omnes itaque vires $\alpha+\beta+\gamma$ vocari possunt *m*. Ergo &c.

Idem

VIII.

Idem quoque valet de vecte plurium brachiorum, quorum unumquodque suum peculiare corpus, sine gravitate consideratum, in extremitate alligatum habeat. Ut si circa punctum C moveatur vectis CA, in communi plano cum brachiis CB, CE, CF &c. onustis corporibus *B*, *E*, *F*, &c. ac angulos invariabiles ACB, ACE, ACF &c. facientibus, adeo ut cum CA transfertur in C*a*, veniant quoque brachia CB in C*b*, CE in C*e*, CF in C*f*, &c. sub angulis BC*b*, EC*e*, FC*f*, &c. singulis æqualibus angulo AC*a*. Constat utique, ex natura vectis, vim motricem *m*, in A applicatam, haud aliter agere in corpora *B*, *E*, *F*, &c. quam si illa essent omnia alligata in ipsa recta AC in distantiis respective æqualibus ipsis CB, CE, CF. Ac proinde nunc etiam vis motrix *m* toti Systemati corporum eandem vim acceleratricem angularem circa centrum C imprimit, quam imprimeret unico corpori in A locando, quod esset æquale $\frac{CB^2\times B+CE^2\times E+CF^2\times F, \&c.}{AC^2}$. Etenim in corporibus *B*, *E*, *F*, &c. gravitatis expertibus, nulla alia vis resistens concipitur, quam quæ ab eorum inertia oritur. Hæc autem semper agit in opposita tendentia ad motum, hoc est, corpora *B*, *E*, *F*, &c. resistunt per inertiam suam in directionibus *b*B, *e*E, *f*F, &c. normalibus ad CB, CE, CF; eodem prorsus modo ac si singula corpora existerent in ipso vecte AC ad æquales a puncto fixo C distantias CB, CE, CF.

TAB. LXXXV. *Fig.* 8.

IX.

Hinc nova deducitur Theoria pro determinatione Centri oscillationis, quæ elegans est, & maxime genuina. Finge in plano verticali lateraliter oscillanti circa punctum suspensionis C [ad hunc namque modum oscillandi omnium figurarum corporearum oscillationes reduci possunt;] finge, inquam, plura corpuscula gravia *B*, *E*, *F* &c. invariabilem inter se situm haben-

TAB. LXXXV. *Fig.* 9.

 tia

tia, in hoc plano ſimul oſculari circa punctum C. Quæritur longitudo Penduli ſimplicis, quod ſit iſochronum oſcillationibus Syſtematis corpuſculorum B, E, F &c?

Per centrum gravitatis A totius Syſtematis ducatur & producatur recta CA, atque etiam agantur rectæ AB, AE, AF, &c. quæ conſiderentur tanquam totidem brachia vectis principalis CA, ita ut ſi tantillum dimoveatur ex ſitu verticali ad intervallum AD, ille mox poſtea ſibi relictus a pondere Syſtematis incipiat oſcillari.

Dicatur gravitas naturalis g, qua animantur corpora B, E, F, &c. adeo ut eorum pondera ſint gB, gE, gF, &c. totiuſque Syſtematis pondus $= g(B+E+F$ &c.$)$ = [nominando M totam maſſam corporum] gM. Separemus jam, in cogitatione noſtra, gravitationes a corporibus, ita ut nihil in ipſis remaneat, præter propriam ſingulorum inertiam, & loco ablatarum virium gravitantium collecta concipiatur in centro gravitatis vis motrix immaterialis æquivalens gM: conſtat utique, ex natura Centri gravitatis, Syſtema corporum non gravium B, E, F, &c. eodem modo ad deſcenſum animari a vi motrice collecta gM, quo modo junctim deſcendunt propriis ſuis ponderibus gB, gE, gF, &c. Tollamus nunc quoque corpora ipſa, & ſubſtituamus pro B corpus aliud in A locandum, quod ſit $= \frac{AB^2 \times B}{CA^2}$; aliudque pro E, quod ſit $= \frac{AE^2 \times E}{CA^2}$, ut & aliud pro F, quod pariter ſit $= \frac{AF^2 \times F}{CA^2}$ &c. Ergo per §. preced. hæc nova corpora collecta in puncto A, in unam coeunt maſſam $= \frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F \&c.}{CA^2}$, quæ igitur eandem acquirit vim acceleratricem angularem circa punctum C, quam habet ipſum Syſtema corporum ſeparatorum.

Iſta autem vis acceleratrix reperitur dividendo vim motricem gM ſeu $g(B+E+F$, &c.$)$, per maſſam concentratam [quam immediate ſollicitat] $\frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F \&c}{CA^2}$. Quo facto habebitur vis acceleratrix $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$.

En itaque Syſtema oſcillans corporum ſeparatorum $B+E+F$ &c. reductum ad Pendulum ſimplex iſochronum longitudinis CA, ſed quod animatur vi acceleratrice $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$. Dudum vero conſtat [quod & ego demonſtravi in *Actis Lipſ.* 1713, p. 79*] duo Pendula ſimplicia a diverſis viribus acceleratricibus agitata fore iſochrona, quando eorum longitudines ipſis his viribus quibus animantur ſunt proportionales. Inſtituendo proin hanc analogiam; Ut ſe habet inventa vis acceleratrix $\frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$ ad vim acceleratricem naturalem g; hoc eſt, ut $(B+E+F$&c.$) \times CA^2$ ad $AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F$ &c. ita erit CA ad quartam $\frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}{(B+E+F\&c.) \times CA}$, cui ſi æqualis ſumatur CO, prodibit hæc ipſa CO æqualis longitudini Penduli ſimplicis naturalis, & iſochroni Pendulo compoſito Syſtematis oſcillantis $B+E+F+$&c. Id quod omnino conforme eſt Regulæ *Hugenianæ*, quamvis elicitæ ex principio indirecto, fundato in æqualitate deſcenſus & aſcenſus communis centri gravitatis, quod redit ad ſuppoſitionem Conſervationis virium vivarum; Conferantur quæ dedi in *Actis Lipſ.* 1714 †, ad uberiorem hujus Regulæ confirmationem, ex fonte maxime genuino atque directo petita; quamquam per methodum ab hac quam hic aperui longe diverſam; haud ingratum fore ratus, ſi eadem veritas ſub multiplici habitu expoſita ſibi ſemper tam pulchre conſtare comperiretur.

* N°. XC. pag. 518, *Tom. I.* † N°. XCVI, pag. 168, *Tom. II.*

X.

De communicatione motus per Vectem.

Sint in plano horizontali duo corpora *A* & *B* perfecte elaſtica, quorum *A* moveatur velocitate a, atque directe impingat in corpus *B* quieſcens. Notum eſt, per regulas communicationis motus, quas demonſtratas dedi in *Diſſertatione mea* Gallice edita pag. 27, & ſeqq.*, fore poſt conflictum velocitatem corporis $A = \frac{aA - aB}{A + B}$, velocitatem vero corporis $B = \frac{2aA}{A+B}$. Quare in caſu, ubi corpora *A* & *B* ſunt æqualia, quieſcet *A* poſt ictum, ejuſque velocitatem integram a accipiet corpus *B*. Quod ſi itaque hoc alligatum eſſet in una extremitate alicujus vectis, vel virgæ rigidæ, mobilis circa alteram extremitatem tanquam circa centrum fixum; manifeſtum ſane eſt corpus *B*, acquiſita ſua velocitate a, circulaturum circa idem illud centrum fixum. At vero generatio motus in corpore *B* ab impulſu orta haud aliter peragitur, quam fit per applicationem alicujus vis motricis in corpus movendum agentis. Statim enim ac corpus *A* attingit corpus *B*, fit prompta compreſſio elaterii interpoſiti inter utrumque corpus *A* & *B*; hoc dum ita peragitur, niſus elaterii, in utramque plagam reſtitutionem affectantis, concitat promtiſſime in motum corpus *B* quod quieſcebat, & redigit ad quietem corpus *A* quod movebatur. Hujuſmodi vis, quæ oritur ex mutua actione corporum in ſe invicem, eſt ex earum numero, quas vocare ſoleo *Vires immateriales* †; quia quaſi extra materiam exiſtentes concipiendæ ſunt, dum non magis pertinent ad corpora moventia, quam ad movenda. Etſi vero colliſio corporum in uno veluti momento abſolvatur; clarum tamen eſt, atque res per ſe loquitur, actionem illam non eſſe inſtantaneam, ſed habere ſuum initium, medium, & finem; tanta tamen rapiditate ſibi ſuccedentes gradus, ut ſenſibus percipi non poſſint.

XI.

* N°. CXXXV. pag. 28, & ſeq. *Tom. III.*
† Vide infra Numerum CLXXIX.

XI.

His probe intellectis, haud ægre patebit, quomodo effici poſſit, ut corpus aliquod in motu conſtitutum, omnem ſuam vim vivam transferat in aliud corpus majus ſeu minus, ita ut, priori illo ad quietem redacto, hoc alterum, quod antea quieverat, nunc ſolum receperit vim omnem quam prius illud habebat. Sit vectis rigidus CG mobilis circa punctum fixum C; TAB. LXXXV. Fig. 10. in extremitate, vel in quolibet alio loco; ſit alligatum corpus elaſticum *G*, in quod impingat aliud corpus elaſticum *F* ipſi *G* æquale, velocitate & in directione FG perpendiculari ad lineam vectis CG. Poſt percuſſionem amittet corpus *F* ſuam velocitatem, cui æqualem GR acquiret corpus percuſſum *G*, cum qua acquiſita velocitate pergeret circulari circa centrum C. Fingamus jam ante allapſum corporis *F* ad *G*, hoc ipſum *G* ſubito tolli, atque pro eo aliud *H* ſubſtitui in alio vectis loco, ubi CH^2 ſit ad CG^2, ut corpus *G* ad corpus *H*; unde $H = \frac{CG^2 \times G}{CH^2}$, vel $CH^2 \times H = CG^2 \times G$. Patet ergo ex §. 6, corpus impingens in punctum G, eundem omnino effectum facere pro acceleratione angulari vectis CG, ſive adſit corpus *G* ſine *H*, ſive adſit corpus *H* ſine *G*; adeoque in utrovis caſu velocitas FG in corpore *F* poſt ictum deſtruetur; conſequenter quicquid erat virium vivarum in corpore *F*, id nunc reperietur, vel in ſolo corpore *G*, vel in ſolo corpore *H*.

Corollarium.

Eodem modo fieri poteſt, ut corpus impellens *F* quantumvis magnum, omnem ſuam vim conſumat in movendo alio corpore quantumvis parvo *P*. Prolongetur namque vectis CG ad P, ita ut CP^2 ſit ad CG^2, ut corpus *F* ad corpus *P*, ponendum in ipſo puncto P. TAB. LXXXV. Fig. 11. Liquet corpus *F*, cum impegerit in punctum G, & quod pergeret velocitate GR, vel FG, ſi corpus *P* non adeſſet; mox omnem motum, adeoque omnem vim

ſuam

ſuam amiſſurum, quam recipiet corpus *P* in puncto P poſitum; acquiretque hoc velocitatem abſolutam P*p*, ita ut velocitas angularis PC*p* prorſus eadem ſit cum GCR quam habuiſſet corpus *F*, ſi cum vecte CG moveri perrexiſſet, ſine annexo corpore *P*.

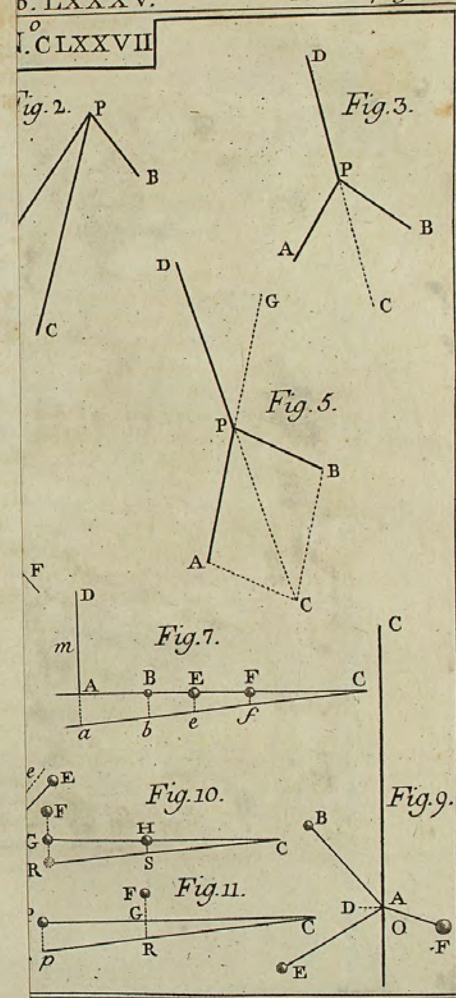
XII.

SCHOLIUM.

Ex his confirmatur vera æſtimatio virium Vivarum, in eo ſita, quod illæ Vires, ſeu facultates agendi, ſint in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata velocitatum. Cum enim TAB. LXXXV. *Fig.* 10. & 11. Vis viva quæ erat in corpore *F*, poſt impulſum in vectem jam tota tranſlata reſideat in corpore *H*; procul dubio, altera alteri æqualis eſt. Atqui corpus *F* eſt ad corpus *H*, ut quadratum CH ad quadratum CG, hoc eſt, ut quadratum celeritatis HS ad quadratum celeritatis GR; ob æqualitatem celeritatum angularium HCS & GCR. Similiter in *Fig.* 11; probatur ex eo, quod vires vivæ corporis *F* & corporis *P* ſunt æquales, utpote altera alterius effectus plenus & adæquatus; fore maſſam corporis *F* ad maſſam corporis *P*, reciproce ut quadratum velocitatis P*p* ad quadratum velocitatis GR. Unde generaliter fluit, corporum Vires vivas, ſeu facultates agendi, habere rationem compoſitam ex ſimplici maſſarum & quadrata velocitatum.

XIII.

Si noſter hic demonſtrandi modus jam tum cognitus fuiſſet, cum vivide ageretur lis inter LEIBNITIUM & PAPINUM de vera æſtimatione Virium vivarum, atque PAPINUS uſque adeo ad incitas redactus fuiſſet, ut concederet LEIBNITIO corpus *A*, cum duobus gradibus velocitatis, idem efficere poſſe, quod quadruplo majus corpus *B*, cum uno gradu velocitatis; modo poſſibile eſſet ita dirigere motum corporis *A*, ut

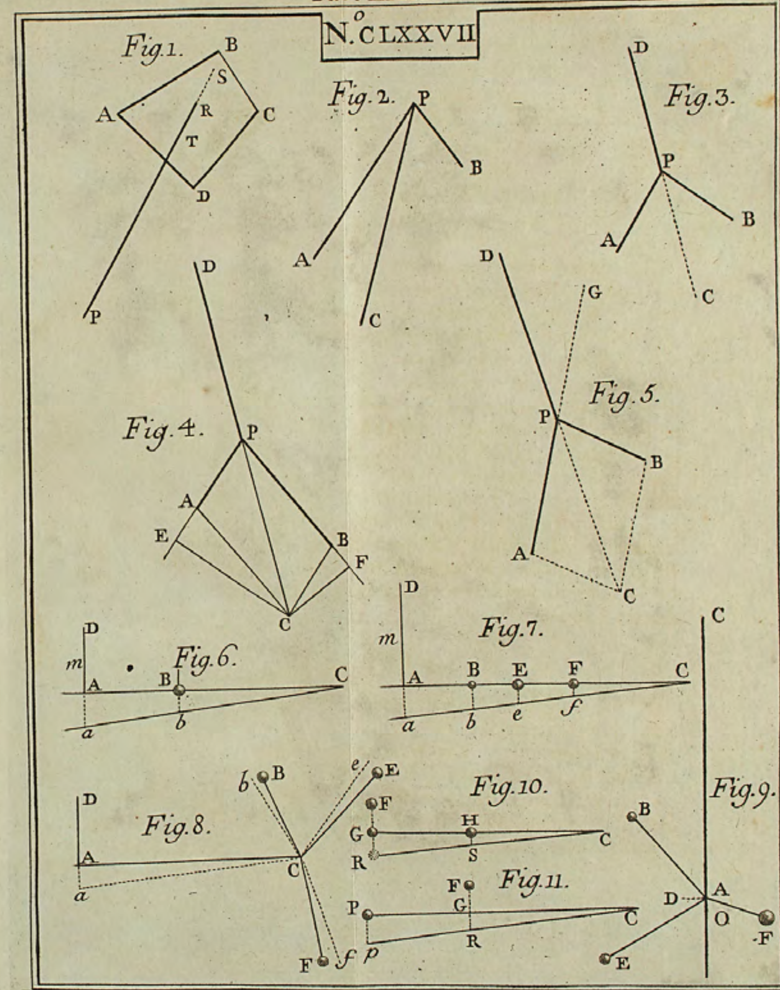


TIONE

o P positum; velocitas an- habuisset cor- annexo cor-

um, in eo si- ratione com- n. Cum enim in vectem jam pio, altera al- *H*, ut quadra- ratum celerita- tatem celerita- *Fig.* 11; pro- corporis *P* sunt & adæquatus; , reciproce ut tis GR. Un- facultates agen- assarum & qua-

cognitus fuisset, & PAPINUM APINUS usque t LEIBNITIO , idem efficere n uno gradu ve- tum corporis *A*, ut



ut poſt conflictum
ret in *B*; quod au
nabatur PAPINU
rum, ſed inæquali
lit, ſemper vel re
imminuta velocitat
omnino erat ridicu
dependeret a poſſib
quid ſit, noſter, i
poteſt, ut corpus
corpus majus vel m
nino idoneus fuiſſet
rium vivarum æſtim

De Ce

Concipe corpus
Syſtema plurium co
vantium, a vi quad
ne Centrum gravita
tali, aut in alio qu
expertia. Duo ſun
vel directio vis imp
nimirum Syſtema gr
cile percipis totum
trahenti, ut ſingula c
tu parallelo directio
dens ex eo, quia il
quam quæ oriunda
tati materiæ ſingular
foret natura gravita
diſcrimine, quod di
tis parallelæ ſint, qu

ut poſt conflictum quieſceret, & omnem ſuam vim transfunderet in B; quod autem cum in praxi effici non poſſit [ſicuti opinabatur PAPINUS] quia duorum corporum perfecte elaſticorum, ſed inæqualium, illud quod alterum quieſcens directe pellit, ſemper vel retro pellitur, ſi minus eſt; vel pergit moveri imminuta velocitate, ſi majus eſt. Subterfugium PAPINI omnino erat ridiculum, quaſi veritas aliqua in abſtrato ſumta dependeret a poſſibilitate, vel impoſſibilitate phyſica. Quicquid ſit, noſter, inquam, demonſtrandi modus, quo actu fieri poteſt, ut corpus aliquod vim ſuam totam transferat in aliud corpus majus vel minus, ita ut nihil in priori remaneat, omnino idoneus fuiſſet ad convincendum PAPINUM de vera Virium vivarum æſtimatione.

X I V.

De Centro ſpontaneo rotationis.

Concipe corpus aliquod, quantivis voluminis, vel etiam Syſtema plurium corporum, inter ſe invariabiles diſtantias ſervantium, a vi quadam externa impelli; ita quidem ut commune Centrum gravitatis maneat in eodem ſemper plano horizontali, aut in alio quocunque plano, ſi corpora eſſent gravitatis expertia. Duo ſunt caſus conſiderandi: aut enim tendentia, vel directio vis impellentis tranſit per Centrum gravitatis, [ſi nimirum Syſtema grave eſſet]; aut non tranſit. Si tranſit, facile percipis totum Syſtema ita obſecuturum vi pellenti, vel trahenti, ut ſingula ejus puncta incipiant pergantque moveri motu parallelo directioni potentiæ motricis. Ratio hujus eſt evidens ex eo, quia illi potentiæ nulla alia reſiſtentia opponitur, quam quæ oriunda eſt ex inertia, proportionali utique quantitati materiæ ſingularum Syſtematis partium: haud ſecus ac ipſa foret natura gravitatis, quæ hic abeſſe ſupponitur; hoc ſolo diſcrimine, quod directiones partium gravium alicujus Syſtematis parallelæ ſint, quomodocunque moveantur; heic vero, ubi nulla ponitur gravitas, unaquæque ex partibus Syſtematis, diverſam habens directionem motus, exercet ſuam reſiſtentiam inertiæ ſecundum eandem ſuam peculiarem directionem; id quod fit, ſi directio potentiæ motricis non tranſit per punctum ubi alias eſſet Centrum gravitatis.

X V.

Iſtum caſum alterum, qui altioris eſt indaginis, reſolvendum aggredior; retento nomine *Centri gravitatis*; etſi Syſtema corporum a gravitate liberum eſſe ſupponitur. Hunc ad finem, concipe planum horizontale tranſiens per Centrum gravitatis totius Syſtematis: in hoc plano ſit linea directionis, ſecundum quam potentia motrix agat ad movendum Syſtema corporum; atque ad iſtam lineam directionis ex Centro gravitatis ductam & utrimque productam intellige perpendicularem. Finge nunc porro ex ſingulis corpuſculis minimis totius Syſtematis ductas eſſe rectas verticales ad planum horizontale, ut ſingula quæque corpuſcula transferantur in ipſa puncta in quibus illæ verticales plano inſiſtunt. Perſpicis, haud dubie, planum iſtud tali projectione oneratum corpuſculis particularibus, eodem prorſus modo agitatum iri a vi motrice, ac ſit ipſum totum Syſtema in ſtatu ſuo naturali: ita enim ſimili projectione uti ſolemus in inveſtigatione Centri oſcillationis; ſed quæ projectio fingenda eſt fieri in plano verticali, tranſeunte per Centrum gravitatis & per punctum ſuſpenſionis.

X V I.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 12. Sit igitur planum horizontale projectionis AHOI, in quo firmiter hæreant, vel reſideant, Syſtematis corpuſcula projecta *K*, *L*, *M*, *N*, &c. commune Centrum gravitatis in C habentia, per quod tranſeat recta ABO perpendicularis ad directionem vis motricis DA, pellentis totum Syſtema a D verſus A, una cum ipſo plano, quod mobile ſuppono. In directione DA

ſumatur punctum A pro puncto applicationis potentiæ motricis [nam per §. 1, in quolibet puncto directionis ſumi poteſt]; eo ipſo itaque conſiderari etiam poteſt hoc punctum A tanquam hypomochlium, ſeu fulcrum, reſpectu reliquarum potentiarum in vectem ACO agentium, ſicuti docent principia vulgaris Mechanicæ. Illæ reliquæ potentiæ ſunt, quæ oriuntur a reſiſtentiis inertiæ corpuſculorum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. a potentia DA movendorum, circa punctum aliquod immobile B in vecte AO, quod id ipſum eſt quod determinari debet.

X V I I.

Tale autem punctum immobile B alicubi in vecte AO exiſtere debere, ex eo manifeſtum eſt, quod vis motrix in A extra Centrum gravitatis C perpendiculariter ad vectem applicatur; quo utique fit ut Syſtema corporum non poſſit moveri motu parallelo: ad hoc enim requireretur, ut vis motrix in ipſo centro gravitatis C applicaretur. Incipiet itaque moveri motu rotationis: ergo dabitur in vecte AO punctum aliquod B, quod erit Centrum rotationis initialis, adeoque ab initio immotum, dum reliqua omnia totius Syſtematis puncta in motum cientur. Hæc ita fiunt ab initio gyrationis, quod notanter dico; poſtea enim, cum in motum ſenſibilem Syſtema erumpit, ipſum quoque hoc Centrum abripitur, propter naſcentem vim centrifugam corporum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. quemadmodum fieri cernimus in projectilibus, quæ provolitant gyrando, impetu concepto a vi quadam impreſſa in puncto diverſo a centro gravitatis.

X V I I I.

Hoc cum ita ſe habeat, Theoria noſtra valebit iis præſertim in occaſionibus, ubi agitur de motibus non in longum excurrentibus; ut in tremulationibus, item in vibrationibus, vel oſcillationibus minimis. In his ergo & ſimilibus, opus eſt, ante omnia, ut probe determinetur Centrum rotationis ſpontaneum B; voco *ſpontaneum*, quia a natura ſponte quaſi eligitur, pro diverſitate circumſtantiarum; ita ut non ſit in poteſtate noſtra illud ponere pro lubitu. Datur tamen criterium, unde cognoſcere poſſumus, qua conditione gaudere debeat punctum B, ad id ut unicum maneat ſtabile, dum reliqua omnia puncta plani horizontalis de loco ſuo dimoventur. Hoc vero criterium in eo conſiſtit, quod debeat eſſe æquilibrium inter preſſiones, quas punctum B patitur ab utroque latere, reſpectu vectis AO; hoc eſt, quod quantum hoc punctum urgetur in directione perpendiculari ad AO verſus unam plagam, tantundem ſimul retro urgeatur verſus plagam oppoſitam; ſcilicet utrumque per vires ex inertia corporum reſultantes.

X I X.

Ponamus nunc potentiam motricem DA promovere punctum A in a, circa Centrum rotationis B, quo ipſo fiet ut corpuſcula M, L, K, N, &c. promoveantur ad m, l, k, n, in directionibus perpendicularibus ad BM, BL, BK, BN; ita ut velocitates eorum initiales, deſignatæ per lineolas Mm, Ll, Kk, Nn, &c. futuræ ſint proportionales radiis BM, BL, BK, BN. Sunt autem reſiſtentiæ ab inertia oriundæ, conjunctim ut maſſæ & velocitates initiales, hoc eſt, ut $BM \times M$, $BL \times L$, $BK \times K$, $BN \times N$; adeoque, exempli gratia, corpus M renititur rotationi, vi ſuæ inertiæ expreſſa per $BM \times M$, idque in directione MH normali ad BM. Ex hac reſiſtentia reſultat aliqua vis impreſſionis [quæ vocetur P], qua centrum B urgetur normaliter ad AB, & quidem hic in eandem plagam qua tendit vis motrix DA. Ut autem determinetur quantitas hujus preſſionis, demitto in directionem inertiæ MH perpendicularem AH, atque ſumto A pro fulcro in vecte inflexo HAB, cujus unum brachium eſt AH, alterum AB; erit momentum vis inertiæ $BM \times M$ in H applicatæ $= AH \times BM \times M$; cui æquale eſſe debet momentum preſſionis P applicatæ in

in B. Ergo $P = \frac{AH \times BM \times M}{AB}$. Sunt vero [ducta MF perpendicularis ad BA,] duo triangula AHE, FBM, inter ſe ſimilia, adeoque $AH : AE = BF : BM$, unde $AH \times BM = AE \times BF$, erit igitur $P = \frac{AE \times BF \times M}{AB} =$ [ob $AE = AB - EB$] $\frac{AB \times BF \times M - EB \times BF \times M}{AB} = BF \times M - \frac{EB \times BF \times M}{AB} = BF \times M - \frac{BM^2 \times M}{AB}$. Simili modo idem de ſingulis reliquis preſſionibus demonſtratur; quare ſumma omnium preſſionum in punctum B exercitarum [quarum quædam affirmativæ, quædam negativæ ſunt, ut ſe mutuo in æquilibrio teneant] erit cenſenda $= 0$; hoc eſt, $\int P = \int BF \times M - \int \frac{BM^2 \times M}{AB} = 0$, [NB, intelligo per præfixum $\int$ ſummam collectam ex hujuſmodi functionibus ſingulorum corporum M, L, K, N, &c.].

X X.

Notum eſt ex natura Centri gravitatis, nominando S ſummam omnium corporum totius ſyſtematis, fore $\int BF \times M = BC \times S$; adeoque etiam $BC \times S - \int \frac{BM \times M}{AB} = 0$; unde ſequitur $BC \times S = \int \frac{BM^2 \times M}{AB}$; proinde $AB = \frac{\int (BM^2 \times M)}{BC \times S}$. Hinc videmus centrum ſpontaneum rotationis B eo in loco fore, ubi Syſtema M, L, K, N, &c. tanquam Pendulum grave conſideratum, atque ſuſpenſum ex puncto B, habeat centrum oſcillationis in A; hoc eſt, cui iſochronum ſit Pendulum ſimplex longitudinis BA. Aut quia, demonſtrante jam HUGENIO, Pendula compoſita eam habent proprietatem, ut punctum ſuſpenſionis & Centrum oſcillationis poſſint converti, poterit Syſtema M, L, K, N, &c. ſumi pro Pendulo compoſito oſcillationis circa punctum ſuſpenſionis A; habebitque Centrum oſcillatiocillationis in B; quod itaque erit ipſiſſimum quod quærimus Centrum ſpontaneum rotationis. *Q. E. I.*

XXI.

Ejuſdem puncti determinatio ex alio principio.

Fingamus primo in vecte per centrum gravitatis C tranſeunte, ſumi punctum B ad lubitum pro fulcro fixo, ex quo procedant brachia ad corpora Syſtematis alliganda BM, BL, BK, BN, &c. Ponamus dein corpora Syſtematis *M*, *L*, *K*, *N* &c. omnino tolli, eorumque loco totidem alia ſubſtitui in unam maſſam colligenda, atque directe opponenda vi motrici DA, quæ maſſa a vi motrice eadem velocitate angulari moveatur circa fulcrum B, qua ante ſubſtitutionem Syſtema ipſum *M*, *L*, *K*, *N*, &c. circa B moveretur. Ex §. 8 patet maſſam illam in A ſubſtituendam, in qua ſola vis motrix DA eandem excitat vim acceleratricem angularem, quam excitaret in Syſtemate corporum; patet, inquam, maſſam ſubſtituendam debere eſſe æqualem huic $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$.

XXII.

Jam vero, ſi locus fulcri B non ex noſtro arbitrio ponitur, ſed ſi rei naturæ relinquitur cura eligendi fulcrum, circa quod potentia motrix queat circumvolvere Syſtema, omni qua poteſt fieri facilitate; hoc ſane tunc fieri manifeſtum eſt, cum Centrum circulationis vel rotationis ad eum ſe componit locum B, ex quo oritur maſſa ſubſtituenda, quæ omnium poſſibilium ſit minima; utpote quæ potentiæ motrici opponit obſtaculum facillime ſuperandum. Ecce quem facio calculum: Sit data $AC = a$, quæſita $CB = x$, $CM = m$, $CL = l$, $CK = k$, $CN = n$. His poſitis, maſſa ſubſtituenda $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$ erit, per proprietatem Centri

tri gravitatis $= \frac{BC^2 \times S + CM^2 \times M + CL^2 \times L + CK^2 \times K + CN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$ $= \frac{xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{(a+x)^2}$; quæ, ut ſit minima, oportet eam differentiare, & æquare zero; quo facto, prodibit $2xSdx(a+x)^2 - (xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.).(a+x)2dx = 0$, ſeu $xS(a+x) = xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$ &, facta reductione, $axS = mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$); unde $x = \ldots\ldots \frac{mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{aS}$; & $a + x$, ſeu $AB = a + \frac{mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{aS}$; id quod rurſus indicat punctum B eſſe Centrum oſcillationis Syſtematis *M*, *L*, *K*, *N*, &c. circa punctum A oſcillantis.

XXIII.

SCHOLIUM.

En ergo inſigne exemplum Naturæ operantis per modum ſimpliciſſimum; ut quaſi ex inſtinctu ſapientiæ agere videatur. Quem quidem modum, licet indirectum, a Filio quoque meo *Daniele* obſervatum fuiſſe intellexi, poſtquam dudum hæc ſcripſeram. Interim quamvis cauſæ finales ex phyſicis proſcribantur vulgo, mirari tamen ſatis non poſſumus, quod Naturæ effectus, ex legibus pure mechanicis explicati, conſpirent ſemper cum generaliſſimo Canone metaphyſico, qui nobis dictat, *Naturam nihil facere fruſtra; ſemper agere per viam breviſſimam; nihil de vi ſua prodigere præter neceſſitatem ad producendum aliquem effectum; quæ poſſunt fieri per pauca nunquam a Natura fieri per plura*, &c. Quis autem auſit eo dementiæ procedere ut cogitet, nedum dicat, omnia quæ ita fiunt ſecundum leges Mechanico-Dynamicas, etſi videantur promanare ex prudentiæ conſilio, non tamen niſi fortuito caſui mirabilem iſtum concentum eſſe attribuendum? Dicamus potius Ens perfectiſſimum tanta perfectione, tanta arte te & induſtria condidiſſe hoc Univerſum; ut undique elucerent in phænomenis veſtigia Omnipotentiæ conjunctæ cum Sapientia perfectiſſima. In quibuſdam nexus neceſſitatem non percipimus, ob imbecillitatem noſtram; in quibuſdam aliis rationem aliquam ejus reddere poſſumus. Sic, in caſu noſtro hucuſque pertractato, pronum eſt conjicere, ſi Centrum rotationis B in alio loco ſumeretur & figeretur, quam qui locus ſponte a natura ſe prodit, id futurum eſſe, ut vis aliqua ex effectu inertiæ corporum reſultans, ab uno latere vectis fortior quam ab altero, ſuſtineri debeat a puncto rotationis B, a cujus exceſſu, qui influit quoque in punctum A, fit ut corpus ſubſtituendum in hoc puncto majus eſſe debeat; cum in finem ut reſiſtat vi motrici BA, non tantum æquipollenter inertiæ Syſtematis, ſed etiam ei vi quæ punctum B plus premit ab una parte quam ab altera. Hoc autem, cum non ſit metuendum a Centro ſpontaneo; certe nulla alia reſiſtentia in A opponitur vi motrici DA, quam quæ originem habet a ſola inertia corporum M, L, K, N, &c.

Hoc præterea notare debemus, hujuſmodi Principium metaphyſicum caute tractandum eſſe in rebus mere phyſicis vel mechanicis; atque tunc tantum adhibendum, confirmationis gratia, quando jam conſtat de rei veritate ex cauſis mere dynamicis; uti in hoc noſtro Exemplo vidimus. Quod ſi enim duæ pluresve eſſent prærogativæ, quæ æquali jure admitti poſſent, ſed diverſos darent effectus; quamnam ergo ex illis diceremus eligi a Natura, ita ut præſtantiſſimum eligeret? Certe tale quid contingit in materia præſenti: nam quamvis verum ſit rotationem circa Centrum oſcillationis fore celerrimam; ſed ſi nobis perſuaderemus Centrum ſpontaneum rotationis fore in eo puncto, circa quod Syſtema corporum eadem vi rotatum faciat ut Centrum commune gravitatis [quod utique in recta linea movebitur] moveatur celerrime; inveniretur, facto computo, Centrum ſpontaneum fore in loco diverſo a Centro oſcillationis. Confugiendum igitur erit ad ſolutionem noſtram directam, ex Principio pure dynamico deductam, per quam ſtabilietur hypotheſis prior.

XXIV.

XXIV.

Agendum nunc eſſet de iis caſibus, ubi plures potentiæ motrices, in diverſis locis applicatæ, Syſtema ad rotandum incitarent; conabor vero hoc paucis abſolvere. Directiones potentiarum illarum ſunt, vel parallelæ, vel non parallelæ. Si prius, habebunt omnes communem perpendicularem ductam ex Centro gravitatis C Syſtematis pro vecte ſumendam, adeoque conſiderando omnia puncta A tanquam totidem puncta gravitantia perpendiculariter ad vectem in ratione potentiarum motricium quas repræſentant, ac tum in Centro gravitatis horum punctorum gravitantium omnes potentias in unam colligendo, clare intelligimus, ex natura Centri gravitatis Centrum ſpontaneum rotationis B in eodem fore loco, eodemque ritu rotatum iri totum Syſtema, ſicuti fieret, ſi potentiæ diſperſim agerent. Quod ſi directiones potentiarum non ſunt parallelæ; poſſunt, per vulgarem Regulam compoſitionis virium, omnes in unam transformari, tum potentiam, tum directionem; ad quam dein ducta perpendiculari ex Centro gravitatis C totius Syſtematis, habebimus Caſum ſimplicem, dilucide ſatis explicatum.

XXV.

De motu corporum irregularium, ex percuſſione, vel colliſione aliorum producto.

Auctores, qui de communicatione motus tractant, haud aliter conſiderant corpora quam ſi eſſent ſphærica, vel ita ſaltem poſita, ut directio impulſionis tranſeat per Centra gravitatis corporum impellentis & impulſi; quo quidem caſu, evidens eſt corpora, poſt impulſum, motum iri ſine rotatione. De hac enim, ſi quæ accidit rotatio, ne cogitarunt quidem; unice ſolliciti de velocitate determinanda, ſecundum rectas lineas parallelas inter ſe, quas ſupponunt deſcribi a ſingulis punctis corporis impulſi,

pulsi. Lubet vero Exemplum proponere, quo patefiet, qua lege debeat moveri corpus ab alterius incursu, tendente, non per Centrum gravitatis, sed in directione quæ Centrum illud ab alterutro latere relinquit. Esto corpus percutiendum figuræ
TAB. LXXXVI. *Fig.* 13. cujuscunque FDGE, aliudque HLD, quod moveatur in directione RD, occurrens quiescenti FDGE in puncto contactus D, ubi utriusque corporis superficies habent communem tangentem MN, quam trajiciat recta perpendicularis TDE. Liquet ergo in collisione oriri, per compressionem corporum, potentiam motricem immaterialem, quæ ab una parte propellit corpus FDGE in directione DE, repellit vero alterum HLD in directione DT.

XXVI.

Ponamus ambo corpora esse elastica, atque per Centrum gravitatis C ducta sit BCA perpendicularis ad DE. Ex Theoria in præcedentibus exposita sequitur, potentiam motricem in D excitatam, considerari posse tanquam applicatam in puncto A; hoc itaque sumto pro puncto suspensionis, ex quo nimirum figura FDGE instar Penduli suspensa intelligitur, cujus Centrum oscillationis sit in B, quod utique datum erit, ob datam figuram, & datum punctum suspensionis A. Dico itaque hoc punctum B fore Centrum spontaneum rotationis initialis, circa quod corpus percussum primo momento gyrari incipiet: Id quod primum est. Secundo, si corpus impellens DHL eo momento, quo incurrit in FDGE, ita situm est ut recta DT normalis ad tangentem transeat per Centrum gravitatis corporis DHL; hoc sane, post peractam impulsionem, retinebit parallelismum in motu suo, id est, plane non rotabitur: sin vero DT non transit per Centrum gravitatis, subibit corpus DHL etiam rotationem, cujus Centrum spontaneum simili modo determinatur, ut factum est in priori.

XXVII.

XXVII.

Ut nunc determinemus velocitates corporum post collisionem ortas; tres distinguendi sunt casus. 1°. Aut transit recta TDE per ambo Centra gravitatis corporum. 2°. Aut transit tantum per alterutrum, ex. gr. per Centrum gravitatis corporis HLD, relinquens extra se Centrum gravitatis C corporis FDGE. 3°. Aut transit per neutrum. Quod ad primum attinet casum, nulla adest difficultas; utpote qui casus est vulgaris, dudum resolutus; etenim ambo corpora movebuntur, post ictum, motu parallelo in partibus sine rotatione, & ita quidem ut si massa corporis HLD perpendiculariter impingentis in directione TD dicatur $= A$, ejusque velocitas ante ictum $= a$, & massa corporis FDGE $= B$, ejusque velocitas ante ictum [si quam habet in eadem directione DE præcedens] $= b$, minor quam a; futura sit post ictum velocitas corporis $A = \frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$; in eandem partem, si hæc quantitas est affirmativa; sed in contrariam, si negativa: & velocitas corporis B post ictum $= \frac{2aA - bA + bB}{A+B}$; id quod docent vulgares Regulæ de communicatione motus traditæ pro corporibus elasticis. Vide *Dissertationem meam* hac de re Gallice editam p. 26. * Si corpus B ante ictum quiescit, [ut hic, brevitatis gratia, supponimus] erit, ut patet, velocitas post ictum, corporis $A = \frac{aA - aB}{A+B}$, & illa corporis $B = \frac{2aA}{A+B}$. Quod si corpus A, vel HLD, oblique feriat corpus B, secundum directionem RD, decomponendus est hic motus, more solito, in collaterales RT & TD, illum parallelum tangenti MN, hunc eidem perpendicularem: atque tum, si velocitas perpendicularis TD vocetur a, prodibunt eædem formulæ pro velocitatibus post ictum orituris; ubi nihil aliud præterea agendum, quam ut cum illa velocitate post ictum, pro corpore A oblique

 que

* N°. CXXXV, pag. 28. & seqq. *Tom. III.*

que feriente, rurſus componatur velocitas parallela, quam habebat ante ictum.

XXVIII.

Videamus autem porro, quid ſit faciendum pro duobus reliquis caſibus, hactenus a nemine conſideratis; ubi nimirum recta TDE, perpendicularis ad communem tangentem MDN, non tranſit, per Centra gravitatis utriuſque corporis, aut ſaltem ſi per alterutrum non tranſit. Interim, ut brevitati conſulamus, lubet ſupponere corpus percutiendum FDGE, cujus maſſam vocavimus *B*, quieſcere ante ictum, ejuſque Centrum gravitatis C eſſe extra rectam DE, in qua directione percutitur, non attendendo ad directionem, in qua movetur corpus *A*, ſeu HLD, ante ictum; ſive id fiat oblique per RD, ſive normaliter per TD; neque etiam attendendo an tranſeat, an non tranſeat recta TD per Centrum gravitatis corporis HLD. Quare ante omnia determinari debet locus Centri rotationis B, circa quod nempe corpus percuſſum FDGE rotari incipit; quod utique ſecundum Theoriam noſtram, erit in recta AC perpendiculari ad lineam directionis motus initialis DAE: nam quia vis motrix, a compreſſione orta inter utrumque corpus, agit in percuſſum ſecundum rectam DA normalem ad CA; poteſt conſiderari illa vis, veluti applicata ad extremitatem A vectis ACB. Proinde per §. 20, punctum rotationis B, erit in Centro oſcillationis corporis FDGE ſuſpenſi ex puncto dato A: hinc ergo dabitur longitudo AB, quæ vocetur *L*.

XXIX.

Velocitatem initialem puncti A, in directione AE, venabimur ſequenti modo. Fingamus corpus percutiendum FDGE diviſum in infinita corpuſcula minima, quale unum eſt *m*; ad quæ ſingula, ex puncto rotationis B, ductæ intelligantur rectæ B*m*, omnino ut fecimus in §. 16, pro Syſtemate ex pluribus corpuſculis conflato. Hæ rectæ erunt inſtar totidem brachiorum vectis principalis AB, quorum unumquodque ſecum vehit ſuum ſibi alligatum corpuſculum *m*. Quare ſi ſublato toto corpore FDGE, ei ſubſtituamus in puncto A collocandum corpus aliud, quod ſit æquale ſummæ omnium $Bm^2 \times m$, diviſæ per AB^2 [id quod in hunc modum $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$ exprimi poteſt]; erit per §. 8, hoc corpus $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$ collective ſumtum, atque in puncto A locandum, æquipollens figuræ corporeæ FDGE; hoc eſt, acquiret illud a potentia motrice eandem velocitatem, quam ab initio acquireret punctum A, in ipſa figura circa B rotanda. Quod ſi directio RD corporis incurrentis HLD talis ſit, ut per decompoſitionem in collaterales DT & RT, illa DT tranſeat per Centrum gravitatis ipſius corporis; nulla fiet in illo rotatio; nulla proin facienda ſubſtitutio, ſed corpus ipſum impingens jam faciet, cum priori illo ſubſtituto $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$, neceſſariam compreſſionem, ut inde reſultet vis motrix, quæ ei dabit velocitatem eandem, quam ab illa vi acquireret ab initio rotationis punctum A figuræ percuſſæ FDGE. Sin vero directio TD non tranſeat per Centrum gravitatis corporis impingentis HLD; tunc utique pro hoc etiam facienda eſt ſubſtitutio alius corporis, ſimili modo quo facta eſt pro corpore impulſo; atque ita res redacta erit ad caſum ordinarium duorum corporum ſe mutuo centraliter impellentium.

XXX.

Ex hoc vero quod puncta A & B eam inter ſe habent relationem, ut, uno exiſtente puncto ſuſpenſionis, alterum ſit Centrum oſcillationis in corpore FDGE, mutari poteſt formula $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$, quæ ex infinitis terminis componitur, in aliam ſimplicem, uno tantum termino conſtantem; nempe ſic. Sumto B pro puncto ſuſpenſionis, erit, ut jam dictum eſt, punctum A Centrum oſcillationis; ergo ex demonſtratis $BA = \int \frac{Bm^2 \times m}{BC \times B}$ [nominando ſcilicet *B* maſſam corporis FDGE]; ac proinde $\int(Bm^2 \times m) = BA \times BC \times B$. Dividendo utrumque per AB^2, habebitur $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2} = \frac{BC \times B}{BA}$. Hinc ſi fiat BA ad BC, ita corpus *B* ad quartum; erit hoc corpus quartum, id ipſum quod quæritur ſubſtituendum pro corpore FDGE, quod nimirum, a corpore percutiente centraliter percuſſum in directione DAE, omnino eandem velocitatem acquiret, qua cum corpus FDGE ad rotandum circa B incitaretur.

XXXI.

Idem quoque obſervari debet, ſi pro corpore incurrente HLD, quod ſupra vocavimus *A*, ſubſtituere velimus aliud ſimplex, quod priori ſubſtituto incurrens eidem eandem iterum velocitatem imprimet: concipiendo enim in figura corporis HLD litteras α, β, γ analogas litteris A, B, C, id eſt, idem cum hiſce ſignificantes; facile intelligimus corpus ſubſtituendum pro corpore *A*, vel HLD, fore $= \frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$. Dico itaque ſi hoc corpus elaſticum $\frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$, velocitate & directione RD, impingat in alterum illud pariter elaſticum & quieſcens $\frac{BC \times B}{BA}$, habeatque utrumque figuram globi, eam inde præciſe velocitatem impreſſum iri quieſcenti, quam acquireret corpus FDGE in puncto A, ad rotandum circa punctum B. Vocetur illa velocitas $= V$, eritque puncti A velocitas angularis $= \frac{V}{AB} =$ velocitati angulari Centri gravitatis C: unde ſequitur velocitatem abſolutam hujus centri fore $= \frac{CB \times V}{AB}$. Eſt enim velocitas abſoluta puncti A ad abſolutam velocitatem Centri gravitatis C, ut AB ad CB.

XXXII.

Finge jam, in ipſo percuſſionis momento punctum B reddi immobile, infixo axiculo, ita tamen, ut tota figura FDGE liberrime circulari poſſit circa punctum illud B; utique facile percipies id futurum eſſe, ut, peracta percuſſione, poſtquam corpora impellens & impulſum jam iterum a ſe invicem ſunt ſeparata, quod breviſſimo fit tempuſculo, Centrum gravitatis C, ſua ſemel acquiſita velocitate $\frac{CB \times V}{AB}$, continuo circulari pergat circa B, ſimul cum ſingulis reliquis punctis corporis impulſi; quorum unumquodque eam habebit velocitatem abſolutam, quæ proportionalis eſt diſtantiæ ab axiculo in B infixo. Quid autem fiet, ſi remoto nunc axiculo, figura circulans FDGE in libertatem reſtituitur? Hoc ſane futurum prævideo, ut more projectilium [a quorum gravitate abſtrahitur] Centrum gravitatis C protinus incipiat moveri ſecundum directionem rectilineam, in qua tunc reperitur, & quidem celeritate uniformi, ſicuti jam dudum demonſtratum eſt; atque ita, perſeverante rotatione, ſingula reliqua puncta deſcribent curvas cycloïdales, inter quas illa, quæ ab ipſo puncto B deſcribitur, eſt Cyclois ordinaria *Hugeniana*, habens pro tangente initiali ipſam BA; cæteræ vero omnes ſunt Cycloïdes, vel contractæ, vel protractæ, prout a puncto C vel plus vel minus diſtant quam punctum B. Sed nolo nimius eſſe in his, quæ quilibet ſua attentione aſſequi poteſt.

Hoc interim notatu dignum eſt, duplicem jam conſiderandum eſſe motum angularem uniformem in uno eodemque corpore FDGE; unum nempe circa Centrum gravitatis C, dum hoc Centrum movetur motu æquabili in recta ipſi DE parallela; alterum vero circa Centrum rotationis B, quod pariter motu æquabili fertur ſuper Cycloïde ordinaria, cujus maxima altitudo do $=2BC$, vel quæ Cycloïs deſcribitur a circulo, cujus radius $=BC$, dum hic circulus rotatur ſuper recta BP etiam parallela ipſi DE.

Poſſibilitas & veritas duorum horum motuum angularium atque uniformium, in eodem corpore ſimul exiſtentium, [quorum alter alteri æqualis eſt] patebit attente conſideranti proprietatem Cycloïdis ordinariæ.

XXXIV.

Ex data velocitate motus progreſſivi Centri gravitatis C in recta ipſi DE parallela, atque ex data velocitate motus angularis circa C, determinari poteſt locus puncti B; atque ex his locus puncti A, ubi vis motrix applicanda eſt, ut tales duo motus [datam proportionem inter ſe obſervantes] in corpore FDGE generari poſſint. Contemplatio iſta fortaſſis uſum ſuum habere poteſt in Phyſica cœleſti. Vulgaris opinio eſt, nullum eſſe nexum, nullam dependentiam neceſſariam inter motum diurnum & motum annuum Planetarum: motus iſti, ad ſenſum quidem uniformes vel æquabiles, tamen in unoquoque Planeta apparent tales vel tales eſſe ex fortuito naturæ eventu: nam etiamſi, quod ſpectat ad motus annuos circa Solem, hanc obſervent legem neceſſariam, ut eorum tempora periodica ſint in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum; nulla tamen hactenus ratio ex naturæ legibus allegari potuit, cur hic vel ille Planeta revolutiones ſuas diurnas peragat tali potius tempore, quam alio; cur ex. gr. Terra, quæ anni ſpatio orbitam ſuam abſolvit, opus habet 24 horis pro una gyratione circum-centrali: Jupiter vero, qui quinquies circiter longius abeſt a Sole, & cujus maſſa pluſquam millies ſuperat Terram, atque 12 propemodum annorum tempore ſemel circuitum facit circa Solem, non omnino tamen decem horas impendat in unam revolutionem circa ſuum centrum.

XXXV.

XXXV.

Non putem hujus rei aptiorem cauſam aſſignari poſſe, quam dicendo, in ſingulis Planetis, utriuſque hujus motus relationem ad ſe invicem originem habere a primitiva applicatione potentiæ motricis; a qua quippe ſola uterque motus produci potuit. Finge enim Planetam FDGE, quamcunque habeat figuram, ab initio exiſtentiæ ſuæ accepiſſe impulſum in directione DE. Quod ſi hæc directio forte tranſiiſſet per Centrum gravitatis C; facile percipis, ex iſto impulſu nullum alium motum ſubſecuturum, quam progreſſivum ſecundum eandem directionem, ſine omni rotatione: adeoque talis Planeta, ſi quis eſſet, careret motu diurno. Sed ſi primordialis directio DE per Centrum gravitatis C non tranſiiſſet; intelligis utique ex ante dictis, præter motum progreſſivum, alterum inſuper circulantem circa C æque ac circa aliud quoddam B produci debuiſſe.

XXXVI.

Verum, & hoc præterea facile perſpicimus, motum hunc rotationis vel tardiorem eſſe, vel celeriorem, prout recta DE vel propius, vel remotius a centro C diſtiterit. Ut igitur detegamus, in quolibet Planeta, cauſam ſui motus diurni, hujuſque celeritatis; id certe aliunde peti non poteſt, quam ex ipſis phænomenis. Hunc in finem, per Centrum gravitatis C ductam fingamus rectam BCA normalem ad DAE; in hac BA indagandum eſt punctum B, quod ſit Centrum initiale rotationis; ex quo cognito, cognoſcetur punctum A, ubi potentia motrix applicanda fuerit. Ex conſideratione Cycloïdis vulgaris *Hugenianæ*, quam punctum B deſcribere debet, haud difficulter vidi, inſtituendam eſſe hanc analogiam: *Ut ſe habet circuli peripheria* p *ad radium* r, *ita longitudo* L *viæ, quam Planeta percurrit in ſua orbita circa Solem, durante una revolutione circa ſuum Centrum gravitatis C, ſe habebit ad quartam CB.* Erit itaque $CB = \frac{rL}{p}$.

 Reli-

Reliqua nunc ſponte fluunt: nempe ex dato jam puncto ſuſpenſionis B & Centro gravitatis C, invenietur Centrum oſcillationis A Planetæ FDGE ex puncto B ſuſpenſi; atque id ipſum punctum A erit quod quæritur [per §. 28]; ubi ſcilicet potentia motrix applicata dedit Planetæ ambos motus, annuum & diurnum, ea lege ſe habentes, quam docet experientia. Qua quidem ratione explicare voluimus, quo pacto poſſibile ſit, ut in quolibet Planeta uterque motus ex uno eodemque principio originem ſuam traxerit; ac proinde non ſit fortuito caſui adſcribendum [ut hactenus creditum eſt], quod iſti duo motus hanc & non aliam inter ſe ſervent proportionem, reſpectu temporum periodicorum.

XXXVII.

Ut uſus noſtræ Regulæ clarius pateat, ſumamus pro exemplo duplicem motum Terræ, annuum & diurnum; ex quorum comparatione inveniendus ſit locus A, ubi vis motrix primitive applicata, potuerit producere ambos hos motus in Globo terreſtri. Supponamus autem Terram perfecte ſphæricam, atque ex materia homogenea conflatam; quo fiet ut ejus Centrum gravitatis C ſit in ipſo centro Globi. Dicatur $\frac{p}{r}$ ratio peripheriæ circuli ad radium, ipſa vero ſemidiameter Terræ dicatur $= R$. Erit, ex Aſtronomorum ſententia, ſemidiameter orbitæ Terræ circa Solem $= 22000\,R$ [Supponimus enim orbitas planetarias eſſe circulares, vel parum a circulis diſcrepantes] adeoque circumferentia orbitæ Terræ $= \frac{22000pR}{r}$. Eſt vero tempus revolutionis annuæ ad tempus revolutionis diurnæ [hoc eſt, neglecta fractione, 365 ad 1] ut circumferentia orbitæ annuæ $\frac{22000pR}{r}$ ad L, ſeu ad longitudinem viæ una revolutione diurna emenſæ; erit ergo $L = \frac{22000pR}{365r} = \frac{4400pR}{73r}$, ac proinde, per Regulam noſtram, $\frac{rL}{p}$, ſeu CB $= \frac{4400\,R}{73}$.

Su-

Sumendo nunc, vi Regulæ *Hugenianæ* [vid. *Horol. oſcill.* fol. 142.] duas quintas tertiæ proportionalis ad CB & radium R, habebitur CA $= \frac{2 \times 73\,R}{5 \times 4400} = \frac{73\,R}{11000} = \frac{1}{150}\,R$, quam proxime.

Dico itaque ſi Globus aliquis [Terram repræſentans] confectus ex materia homogenea, quieſcens primo, poſtea in motum agitetur a quacunque vi motrice applicata perpendiculariter ad diſtantiam a Centro quæ ſit ſeſquicenteſima pars radii; dico, inquam, hunc Globum duos inde motus acquiſiturum, unum progreſſivum, alterum circulantem, qui accurate ſatis reſpondebunt motui annuo & diurno Telluris.

Corollarium.

Videmus hinc, punctum B, quod ſupra §. 18 nominavimus Centrum ſpontaneum rotationis tam procul a Terra exiſtere, ut CB, ſeu ejus diſtantia a centro, ſit $= \frac{4400\,R}{73} =$ circiter 60 diametris Terræ; atque adeo pertingat uſque ad regionem Lunæ. Quod an ſit inter raro contingentia numerandum; an vero ex neceſſitate aliqua phyſica, effectui Lunæ attribuenda, conſequatur; de eo diſpiciant Phyſici. Fortaſſis reperient aliquam rationem a motu & diſtantia Lunæ repetendam, cur motus annuus & diurnus Terræ eam inter ſe habeant relationem quam habent; ita ut aliam habere non poſſint.

XXXVIII.

Scholium.

Simili calculo ſupputantur diſtantiæ illæ CB & CA pro reliquis Planetis, quorum conſtat ratio inter tempora unius revolutionis circa Solem & unius revolutionis circa axem. Sic inveni pro Marte, cujus ſemidiameter M ad ſemidiametrum Terræ R ſtatuitur ab hodiernis Aſtronomis ut 3 ad 5, ita ut M ſit

=

$= \frac{3}{5} R$; inveni, inquam, pro Planeta Martis CB $= \frac{41930 M}{501}$, ſeu $84M$ quam proxime, & CA $= \frac{1}{418} M$ quam proxime.

Jupiter, qui omnium maximus eſt Planeta, habet ſemidiametrum N decuplo majorem ſemidiametro Terræ R, hoc eſt, $N = 10R$; pro hoc autem invenitur, Regulæ meæ ductu, CB $= \frac{2288N}{2103} = \frac{11}{10} N$ quam proxime, & per Theorema *Hugenianum*, CA $= \frac{2 \times 2103 N}{5 \times 2288} = \frac{2103 N}{5720} = \frac{7N}{19}$ quam proxime. Mirum hic eſt Centrum ſpontaneum rotationis primitivæ tam parum abeſſe a centro ipſo Globi Jovialis, ut ejus diſtantia ſuperet ſemidiametrum Jovis vix decima ſui parte, vel una tantum ſemidiametro Terræ; cum in minoribus Planetis, Terra nempe & Marte, diſtantia illa in priore quinquies duodenis, in altera ſepties duodenis vicibus ſuam reſpective ſemidiametrum omnino excedat.

Quod attinet ad Saturnum & Mercurium; hac de re pro illis nihil aſſerere poſſumus, quoniam eorum revolutiones circa axes ſuos hactenus ſunt ignotæ: neque etiam quicquam decernere volumus de Venere, ob incertam ejus atque dubiam revolutionis diurnæ durationem; dum aliqui illam ſtatuunt 23 horarum, alii vero, ut BIANCHINUS, totidem dierum.

Cæterum ſilentio non prætereundum eſt, Planetas fuiſſe hic conſideratos ut nudos, atque liberos a circumfuſis atmoſphæris; cum autem probabiliter ſinguli Planetæ, ſaltem primarii, ut Terra, ſuas habeant atmoſphæras, quæ, ſimul cum Planetis quos ambiunt, circumrotantur, atque ita cum illis conſtituant ſinguli unam continuam maſſam; non videtur dubitari poſſe, quin aliter ſe habeant loca punctorum B & A, quam a nobis determinata ſunt: an autem ab acceſſione atmoſphæræ magna & ſenſibilis oritura eſſet differentia, merito dubitamus, ob raritatem materiæ atmoſphærarum, uſque adeo rareſcentis aſcendendo a ſuperficie Planetarum per regiones altiſſimas, ut omnis ejus quantitas collectim ſumta tantum non pro nihilo reputari poſſit, reſpectu habito ad molem ingentem materiæ denſiſſimæ, ex qua conſtant Planetæ: id quod facile per calculum demonſtrari poſſet, ſed brevitati ſtudendum eſt. In eadem ſententia fuiſſe NEWTONUM patet ex ejus *Principiis Phil. Natural. p.* 470. Edit. ſecundæ; ubi hæc habet verba: *Globus aëris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius Terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones, ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra.*

XXXIX.

Ad clariorem intelligentiam eorum quæ ſequuntur, præmittendum eſt hoc

LEMMA.

Data, in oſcillationibus minimis, relatione inter vires acceleratrices & excurſiones a puncto quietis; invenire longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni oſcillationibus illis.

SOLUTIO.

Eſto ſemi-Cycloïs ABD inverſa, cujus vertex D; evoluta AFE eſt etiam ſemi-Cycloïs ipſi DBA æqualis. Notum eſt ultimum radium evolutionis DE eſſe pariter æqualem ſemi-Cycloïdi ABD, & eſſe longitudinem Penduli ſimplicis, cujus ſemi-oſcillatio minima eſt iſochrona deſcenſui corporis gravis per ſemi-Cycloïdem, vel per arcum BCD, incipiendo deſcendere a quocunque puncto B. Notum eſt denique, vim acceleratricem tangentialem corporis deſcendentis, in quolibet puncto B, eſſe ad vim acceleratricem naturalem, in puncto A, ſecundum tangentem verticalem, ut ſe habet longitudo arcus BD ad longitudinem ſemi-Cycloïdis ABD, ſeu rectæ ED. Eſto jam alicubi corpus quoddam C, ab aliqua cauſa conſtitu- TAB. LXXXVI. *Fig.* 14.

 tum

tum in motu oscillatorio, ita ut, pro quavis assumta excursione t a puncto quietis, data sit ejus competens vis acceleratrix γ, proportionalis utique excursioni t; lubeatque jam invenire longitudinem Penduli simplicis, corporis C oscillationibus isochroni. Ad hoc obtinendum, fingamus excursionem t esse portiunculam DC infimam Cycloïdis quærendæ, ita ut vertex D sit in puncto quietis, a quo fiunt excursiones. Erit igitur, per prædictam proprietatem Cycloïdis, ut vis acceleratrix γ in loco C, ad vim acceleratricem naturalem g in initio Cycloïdis A, ita longitudo excursionis t, seu DC, ad ABD, quæ erit longitudo quæsita Penduli simplicis isochroni $ED = \frac{gt}{\gamma}$.

X L.

De corporum aquæ insidentium oscillationibus, & de invenienda longitudine Penduli simplicis oscillationibus illis isochroni.

De corporibus humido insidentibus jam aliquid scripsit ARCHIMEDES, quod extat inter ejus Opuscula; ubi id tantum egit, ut definiret situm, quem quædam solida, præsertim Conoidea Parabolica, in aqua stagnante acquirere debent, ut in quiete permaneant; ad eundemque redeant, si ex isto situ nonnihil fuerint deturbata. Hujus rei natura nititur duobus Principiis, quorum unum est, quod Centrum gravitatis solidi insidentis sit in eadem recta verticali cum Centro gravitatis voluminis aquei, cujus spatium occupat solidum insidens. Hujus Principii veritas haud longe est petenda, & fere per se patet. Alterum vero Principium, quod demonstrari potest, in hoc consistit, ut intervallum duorum planorum horizontalium, per duo illa Centra gravitatis transeuntium, sit vel minimum, vel maximum; nempe minimum, si Centrum gravitatis solidi fuerit altius Centro gravitatis voluminis aquei, uti si solidum est ex materia homogenea; maximum vero intervallum erit, si gra-

Centrum gravitatis solidi fuerit profundius quam Centrum gravitatis voluminis aquei, id quod contingere potest, in casibus ubi materia solidi est heterogenea, seu non uniformiter densa.

X L I.

Concipiamus igitur, in aqua stagnante, corpus aliquod solidum CAEB specifice levius quam aqua; quod suo pondere demersum hæreat, usque ad superficiem primo horizontalem AB: sit vero G, Centrum gravitatis totius corporis CAEB; quod, ut rem generalissime pertractemus, supponimus quomodocunque heterogeneum. Intelligatur jam planum aliquod verticale transiens per Centrum gravitatis G; cujus plani sectio in superficie corporis formet curvam CAEB. Clarum est, ex Staticis, rectam verticalem EGI, ductam per Centrum gravitatis G corporis solidi, transituram quoque esse per punctum O, quod foret Centrum gravitatis voluminis aquei, cujus spatium occupatur a parte corporis immersa AEB. Vis enim aquæ corpus sursum pellere nitens, concentrata in O, debet esse æqualis, & directe opposita vi ponderis in G collectæ, & corpus deorsum urgenti; alioquin corpus in æquilibrio subsistere non posset. TAB. LXXXVI. *Fig.* 15.

X L I I.

PROBLEMA I.

Moveatur corpus paulisper circa punctum G, ita ut recta GOI ex situ verticali Gi inclinetur, faciatque cum ea angulum acutissimum IGi; quo fiet ut etiam planum sectionis aquæ AIB, quod erat horizontale, jam faciat cum nova sectione aIb angulum acutissimum, & quidem æqualem angulo IGi. Corpus vero nunc sibi relictum remeabit ad situm quietis & ultra, [præsertim si G fuerit infra O;] atque motu reciproco formabit oscillationes. Quæritur longitudo Penduli simplicis, quod faciat cum illis oscillationes contemporaneas?

SOLU-

S O L U T I O.

Hoc Problema excogitatum primo, atque ſolutum ab ingenioſiſſimo noſtro EULERO [cujus autem analyſin ipſam hactenus nondum vidi] ex meis principiis ſolvitur ſequentem in modum. Ante omnia obſervo, corpus CAEB, inter oſcillandum, ſemper occupare volumen aqueum æquale dato; ut nimirum eadem ſemper ſervetur ratio inter volumen partis immerſæ & volumen corporis totius; quod ſane ex æquilibrii natura manifeſtum eſt.

Hinc ſequitur, volumen aqueum ungulæ AIa, inter plana AI & aI contentæ, eſſe æquale alteri volumini BIb, quod ex aqua emerſit.

Quod ſi jam o, in recta verticali Gi, fuerit Centrum gravitatis voluminis aquei, exiſtente ſcilicet corpore in ſtatu quietis, ſeu æquilibrii; erit ducta GI perpendiculari ad AB, ſumtaque GO $=$ Go, erit, inquam, punctum O Centrum gravitatis voluminis aquei aEb; ipſaque Oo, ob parvitatem anguli OGo, haberi poteſt pro horizontali linea, quæ producta, tranſibit per ω Centrum gravitatis voluminis aquei aEb, quod occupat corpus in ſitu inclinato. A determinatione hujus puncti ω dependet Problematis ſolutio.

In hunc finem, poſito angulo acutiſſimo AIa, vel BIb, vel oGO $= n$; erit O$o = n \times$ Go. Concipiatur totum volumen aqueum a corpore occupatum [quod dicatur V] diviſum in ſtrata verticalia parallela plano AEB vel aEb; quo ipſo, utraque ungula reſolvetur in ſtratula triangularia acutiſſima, habentia ſingula ſuos angulos acutos æquales ipſi AIa, vel BIb. Quare, ſi in unoquoque ſtratulorum, latus illud quod ipſi AI eſt parallelum dicatur y; ut &, ab altera parte, in unoquoque ſtratulorum latus illud quod ipſi IB eſt parallelum, vocetur z; ipſa vero craſſities communis ſtratulorum nominetur dx; erunt utique ſingula ſtratula ipſi AIa parallela $= \frac{1}{2} nyydx$, & pariter ab altera parte ſingula ipſi BIb parallela $= \frac{1}{2} nzzdx$; unde contentum ungulæ inter plana AI & aI $= \frac{1}{2} n\int yydx$, & contentum alterius ungulæ inter BI & bI $= \frac{1}{2} n\int zzdx$.

Porro,

Porro, nominando g vim gravitatis naturalis, qua corpora animantur; atque V volumen AEB vel aEb, quod corpus occupat in aqua; erit utique pondus ejus aquæ, quæ hoc volumen repleret, $= gV =$ [per Legem Hydroſtaticam] ponderi ipſius corporis aquæ inſidentis; tanta enim vi gV ab aqua ambiente ſurſum urgetur corpus, quanta ipſum ſuo pondere nititur deorſum; quæ cauſa eſt, ut, cum duo Centra gravitatis o voluminis aquei & G totius corporis reſpondent ſibi mutuo in eadem recta verticali Go, ſervetur æquilibrium. Videndum itaque eſt, quid fiat, ſi recta conjungens centra ex ſitu verticali Go paululum inflectatur in ſitum obliquum GO. Hic quidem ſtatim obvium fit, punctum O, etſi ſit centrum voluminis AEB, non tamen eſſe Centrum voluminis nunc occupati aEb; utpote cujus Centrum erit alicubi in ω, prolongando ſcilicet lineolam oO, ut modo ſupra jam innui. Eſt vero pondus ungulæ aqueæ AIa $= \frac{1}{2} gn\int yydx$, & pondus ungulæ BI$b$ [ſi nempe aqua eſſet plena] $= \frac{1}{2} gn\int zzdx$.

Intelligatur nunc ſuper GI [quæ tranſit per Centrum gravitatis O voluminis uniformiter denſi AEB] erectum eſſe planum perpendiculare plano ſectionis AEB, vel aEb; erit, ex principio Statico, O$\omega \times gV$ [quatenus volumen AEB venit in ſitum aEb] $=$ momento ponderis voluminis aquei, reſpectu plani ſuper EI erecti. Hoc autem momentum eſt æquale ſummæ momentorum partium, hoc eſt, momento voluminis totius AEB, plus momento ungulæ AIa, minus momento ungulæ BIb. Quia vero volumen aqueum AEB habet ſuum Centrum gravitatis O in ipſo plano ſuper GI perpendiculari; erit ejus momentum $= 0$, atque alterum momentum ipſius BIb, utpote priori AIa oppoſitum, adeoque hujus reſpectu negativum, fiet affirmativum, ob negationem negativi.

Ungulæ momentum habetur, ſumendo aggregatum momentorum, quod fit ex momentis ſingulorum ſtratorum triangularium, quorum unumquodque momentum ſtrati in ungula AIa eſt $= \frac{2}{3}$ AI $\times \frac{1}{2} gn$ AI$^2\, dx = \frac{1}{3} gn$ AI$^3\, dx = \frac{1}{3} gny^3 dx$; ac pariter unumquodque momentum ſtrati in altera ungula BI$b = \frac{1}{3} gnz^3 dx$. Hinc igitur O$\omega \times gV = \frac{1}{3} gn\int y^3 dx + \frac{1}{3} gn\int z^3 dx = \frac{1}{3} gn\int (y^3 + z^3) dx$,

adeoque

adeoque $O\omega = \frac{n\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$; & $Oo + O\omega$, ſeu $o\omega = nGo + \frac{n\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$.

Inventa hoc modo diſtantia $o\omega$; ducatur porro verticalis ωR, occurrens in R horizontali GR ductæ ex puncto G, quod conſiderari poteſt inſtar puncti ſuſpenſionis Penduli inverſi, circa quod tota figura ſolida CAEB ſuas oſcillationes facit: ita ut $o\omega$ deſignet excurſionem Centri gravitatis ω voluminis aquei a corpore occupati, interea dum Oo eſt excurſus, ipſius puncti O, quatenus in corpore oſcillante eundem ſemper locum occupat, atque ad punctum ſtabile o hinc inde reciprocando tendit. Patet enim motum puncti G, ſi quem haberet ſurſum vel deorſum verſus, debere eſſe infinities minorem, quam eſt motus oſcillatorius Centri gravitatis o in directione horizontali Oo; qui motus jam ipſe tardiſſimus eſt, utpote qui ſupponitur facere oſcillationes minimas tempore finito. Quod cum ita ſit, habebimus vectem rectangularem oGR, ſuper hypomochlio G, ad cujus brachii horizontalis GR extremitatem R, applicari intelligitur tota vis voluminis aquei gV ſurſum tendens in directione verticali $R\omega$.

Inſtituendo itaque, ex natura vectis, hanc analogiam: Ut ſe habet longitudo brachii Go, ad longitudinem brachii GR, ſeu $o\omega$, ſeu $n.Go + \frac{n\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$, ita erit vis ponderis gV punctum R ſurſum urgentis ad $gnV + \frac{gn\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$, ſive ad $\frac{gnV}{Go} \times \left(Go + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}\right)$; id quod erit vis motrix [quæ pro vi ponderis gV ſubſtituenda eſt] applicanda in o horizontaliter ad reſtituendum corpus inſidens oblique ad ſitum æquilibrii verticalem.

Reſtat ut inveſtigetur, ex iſta vi motrice, vis acceleratrix; quod peragitur, ſi concipiatur corpus CAEB reſolutum in particulas minimas p, quarum ſingularum denſitas propria dicatur δ, ita ut δp ſignificet quantitatem materiæ ſingulis particulis competentem [hoc ita facio quia ſupponitur corpus inſidens eſſe heterogeneum, ſeu non uniformiter denſum]; ſit vero denſitas aquæ, utpote uniformiter denſæ $= 1$. Dicatur porro r diſtantia particulæ cujuſlibet ab axe per punctum G tranſeunte, circa quem corpus inſtar Penduli inverſi oſcillatur. Hinc ſi, loco totius corporis, intelligamus in puncto o concentratam eſſe quantitatem materiæ, quæ ſit $= \frac{\int rr\delta p}{Go^2}$, concludimus ex §. 8 hanc maſſam concentratam a vi motrice eodem modo oſcillaturam, ac facit corpus ipſum CAEB. Quare ſi dividatur vis illa motrix quæ eſt $\frac{gnV}{Go} \times \left(Go + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}\right)$ per quantitatem materiæ $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix horizontalis $= \frac{gnV \times Go}{\int rr\delta p} \times \left(Go + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}\right)$. Cognita jam vi acceleratrice horizontali, & data longitudine excurſionis Oo, quæ eſt $= na$ ſeu $n.Go$, facile invenimus, ex natura Cycloïdis, longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni cum corpore in aqua lateraliter oſcillante; faciendo ſcilicet tantum hanc analogiam [per *Lemma* ad §. 39]: Ut ſe habet vis acceleratrix $\frac{gnV \times Go}{\int rr\delta p} \times \left(Go + \frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}\right)$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excurſionis $n.Go$ ad quartam, quæ erit $\frac{3\int rr\delta p}{3V.Go + \int(y^3+z^3)\,dx}$ = longitudini Penduli ſimplicis iſochroni.

XLIII.

ALITER.

Ex puncto O, in quo maſſa materiæ $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$ concentrata ponitur, erigatur verticalis OS, atque ſecundum hanc directionem vis motrix ſurſum trahens eam maſſam habetur, faciendo, ex natura vectis, ut Oo ad ωo, ita vis voluminis aquei collecta in in ω, hoc eſt, gV, ad $\frac{gV.\omega o}{Oo}$ = [ſubſtituendo pro Oo & ωo eorum valores] $gV + \frac{g\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$. Et ſic res reducta eſt ad conſiderationem Penduli ſimplicis inverſi, cujus longitudo eſt Go, vel GO, punctum ſuſpenſionis G, corpus in o vel O ſurſum gravitans $= \frac{\int rr\delta p}{Go^2}$, gravitatio ipſa, ſeu vis motrix, ſurſum tendens $= gV + \frac{g\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$. Quare, dividendo hanc vim motricem per maſſam corporis $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix, qua hoc corpus animatur, $= \frac{gV \times Go^2 + \frac{g}{3}Go.\int(y^3+z^3)dx}{\int rr\delta p}$. Jam vero, per Propoſitionem ſupra citatam §. 9, quam demonſtravi in *Actis Lipſ.* 1713, p. 79, * duo nimirum Pendula ſimplicia a diverſis viribus acceleratricibus agitata eſſe iſochrona, ſi habuerint longitudines ſuis viribus acceleratricibus quibus animantur proportionales. Proinde dicendo, ut ſe habet corporis noſtri $\frac{\int rr\delta p}{Go^2}$ vis acceleratrix $\frac{gV \times Go^2 + \frac{1}{3}g \times Go \times \int(y^3+z^3)dx}{\int rr\delta p}$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo Go ad $\frac{3\int rr\delta p}{3V \times Go + \int(y^3+z^3)dx}$, quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni; prorſus ut ante.

COROLLARIUM.

Si corporis CAEB Centrum gravitatis G eſt altius quam Centrum gravitatis o voluminis aquei; id quod neceſſario fieret, ſi corpus eſſet homogeneum; evadit Go negativa: quo caſu gravitatio, ſeu vis motrix corpus ſurſum urgens, exprimenda eſt per $gV - \frac{g\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$; atque ita accidere poteſt ut valor ejus fiat omnino negativus, quando ſcilicet $\frac{\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$ ſupe-

* N°. XC, pag. 518, *Tom. I.*

ſuperat ipſum V; quod ubi contingit, viſibile utique eſt corpus, tantillum inclinatum ex ſtatu æquilibrii, non poſſe reſtitui, ſed prorſus præceps ſubverſum iri.

XLIV.

SCHOLIUM.

Gravitatio, ſeu vis motrix qua corpus inter oſcillandum ſurſum urgetur, eſt forſan illa ipſa, quæ ab EULERO noſtro, in litteris ſuis die 30 Julij, 1738, ad me datis, vocatur *vis firmitatis reſiſtens inclinationi corporis*: revera enim formula mea $gV + \frac{g\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$, vel, quæ eodem recidit, $\frac{gV}{Go} \times (Go + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V})$ nihil differt ab *Euleriana*, $M(GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V})$; ubi M idem denotat quod apud me gV; nempe pondus Corporis oſcillantis, vel, quod perinde eſt, voluminis aquei a corpore occupati; niſi quod diſcrimen aliquod utrobique obſervetur, dum apud me hoc pondus gV vel M diviſum conſpicitur per Go vel GO, apud EULERUM vero non item; quod forſan per inadvertentiam ſubſcribere omiſit: in qua conjectura eo magis confirmor, quia alias vis firmitatis compararetur cum pondere multiplicato per lineam, quæ ſunt res inter ſe incomparabiles: talis autem incongruentia non reperitur in mea expreſſione, in qua quippe linea $Go + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}$, diviſa per lineam Go, dat numerum, quiſquis ille ſit; qui indicat, quoties ſumendum ſit pondus gV, vel M, ut fiat æquale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oſcillatione oriundæ & ſurſum tendenti. Atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo; quæ utique non ſunt aſyſtata.

X L V.

P R O B L E M A II.

Corpore dato oſcillante verticaliter in aqua, hoc eſt, ſurſum deorſum alternatim aſcendente & deſcendente per excurſiones minimas; invenire ejuſdem oſcillationum legem; ſeu determinare longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni.

Cum primum mihi proponeretur Problema præcedens, de corporibus in fluido lateraliter vel horizontaliter oſcillantibus, protinus incidi in hoc alterum Problema de eorundem oſcillationibus verticalibus determinandis; quod etſi ſit ſolutu multo facilius priori, non tamen minus curioſum & utile deprehendi. Solutionem meam communicavi cum Exc. EULERO; qui deinde & ſuam perſcripſit cum mea apprime conſpirantem. Ecce nunc viam ſolvendi quam inieram.

S O L U T I O.

Monendum eſt in anteceſſum, hic non venire in conſiderationem, utrum corpus aquæ inſidens, ſit ex materia per totum homogenea, an heterogenea; modo totius gravitas ſpecifica habeat rationem datam ad gravitatem ſpecificam aquæ. Sit

TAB. LXXXVI. Fig. 16. igitur in vaſe, ſi vis, cylindrico ABCD [neque enim figura vaſis aliquid ad rem facit] ſufficiens quantitas aquæ, in qua ſuſpenſum hæreat in æquilibrio corpus GHLM; ſitque tunc aquæ ſuperficies EF in altitudine BE vel CF. Quo poſito, duo ſunt caſus expendendi; vel enim vas ſatis eſt anguſtum, ut ſuperficies EF comparari poſſit cum area ſectionis HM quam corpus format in ſuperficie EF; vel vas tantæ eſt amplitudinis, ut ſuperficies EF infinities quaſi ſuperet aream HM. Prior caſus ſolutus dabit, per Corollarium, ſolutionem poſterioris.

Sit igitur area ſectionis $HM = a$, area vaſis amplitudinis $EF = b$, maſſa corporis $= M$, vis gravitatis, qua corpora naturaliter ad accelerationem animantur, $= g$; adeoque corporis pondus,

pondus, ſeu vis motrix qua ad deſcenſum ſollicitatur, $= gM$. Hæc vis, exiſtente corpore in æquilibrio, deſtruitur a vi contraria & æquali, quam aqua exercet ſurſum in corporis partem demerſam; hæcque vis aquæ, per Principium Hydroſtaticum, æqualis eſt ponderi aquæ, quæ in volumine a corpore occupato contineri poteſt. Dicatur hoc volumen $= V$.

Concipe jam corpus GL ex ſitu æquilibrii elevari verticaliter ad parvam altitudinem expreſſam per $EN = x$; quo ipſo deſcendet ſuperficies EF per altitudinem EP, quæ erit $= \frac{ax}{b-a}$; oportet enim ut $EN \times HM$ ſit $= EP \times (EF - HM)$. Hinc $NP = \frac{ax}{b-a} + x = x(\frac{b}{b-a})$; quod multiplicatum per HM, ſeu a, dabit $HM \times NP = ax \times (\frac{b}{b-a}) =$ decremento voluminis aquei. Perſpicuum autem eſt, ex Hydroſtaticis, quod quanta pars voluminis in aqua occupati per aſcenſum corporis amittitur, tanta viciſſim pars deſtructæ vis motricis in corpore recuperetur.

Faciendo itaque, ut ſe habet volumen V ad decrementum voluminis $ax \times (\frac{b}{b-a})$, ita vis motrix totalis gM ad quartum $\frac{gMax}{V} \times (\frac{b}{b-a})$, quod erit $=$ vi motrici, quæ diviſa per maſſam corporis M, dat vim acceleratricem $= \frac{gax}{V} \times (\frac{b}{b-a})$, proportionalem ipſi x, ſeu diſtantiæ a ſitu æquilibrii: unde ſtatim patet oſcillationes eſſe tautochronas. Sed ut determinetur longitudo Penduli ſimplicis iſochroni; inſtituenda eſt hæc altera analogia [per *Lemma* ad §. 39]: Ut vis acceleratrix inventa $\frac{gax}{V} \times (\frac{b}{b-a})$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita x, ſeu diſtantia a ſitu æquilibrii, ad quæſitam longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni; quæ proin longitudo erit $= \frac{(b-a)V}{ab} = \frac{V}{a} - \frac{V}{b}$.

Co-

COROLLARIUM.

Hinc ſponte fluit caſus alter, ubi nimirum vas eſt ampliſſimum; quo caſu $\frac{V}{b}$ evaneſcet juxta $\frac{V}{a}$; unde longitudo Penduli fiet $= \frac{V}{a}$; ex quo hæc elegans elicitur conſtructio. Super baſi a, ſeu HM, erigatur ſolidum cylindricum, ſeu priſmaticum æquale volumini aqueo HLM; eritque altitudo illius ſolidi cylindrici æqualis longitudini Penduli ſimplicis iſochroni.

XLVI.

SCHOLIUM.

Poteſt hæc proprietas habere aliquam utilitatem in Nauticis. Ut ſi Navis quædam onuſta in Portu ad anchoram alligata hæreat, eaque incipiat a maris criſpatione acquirere [ut fieri ſolet] exiguum motum ſubſultantem ſurſum deorſum; Obſervator quiſpiam ſtans in littore, atque ad manus habens Pendulum, quod nunc elongando, nunc abbreviando, ita moderetur, donec fiat iſochronum; habebit Penduli ſui longitudinem; quam ſi multiplicaverit per aream ſectionis Navis, ſeu ſupremæ ſuperficiei voluminis aquei, quam ipſa Navis occupat in aqua, reſultabit productum, ex. gr., in pedibus cubicis expreſſum; atque ſic cognito pondere unius pedis cubici aquæ, innoteſcet pondus totius voluminis aquæ quam Navis in mari occupat, hoc eſt, pondus ipſius Navis, una cum omnibus oneribus contentis. Detracto igitur pondere Navis vacuæ omniumque utenſilium [quod ſemel exploraſſe ſuffecerit,] monſtrabit reſiduum quanti ponderis ſint merces contentæ, & quæcunque inſunt onera acceſſoria ſimul ſumta.

XLVII.

De Oſcillationibus Corporum titubantium ſuper ſuperficie aliqua immobili.

Alia datur ſpecies oſcillationum tautochronarum minimarum, quas

quas

quas obſervamus in corporibus convexis gravibus, atque incumbentibus alicui ſuperficiei immobili quam tangunt in unico puncto. Intelligimus namque iſtius modi corpus fore in æquilibrio poſitum, quamdiu ejus Centrum gravitatis eſt in recta verticali, quæ tranſit per punctum contactus: ſtatim vero ac tantillum dimovetur ex hoc ſitu, quem pono corpus ſponte acquiſiviſſe ab actione ſuæ gravitatis, perſpicuum eſt, ad eundem ſitum poſt titubationes multas ultro citroque faciendas, more oſcillationum, eſſe rediturum, inibique iterum in æquilibrio manſurum. Jam igitur determinanda eſt longitudo Penduli ſimplicis titubationibus illis, ſive oſcillationibus, iſochroni.

XLVIII.

PROBLEMA III.

Eſto corpus grave, cujus ſectio verticalis, tranſiens per Centrum gravitatis G, ſit curva qualiſcunque LMAN: incumbatque corpus plano horizontali PH in puncto A, ita ut AG TAB. LXXXVI.
ſit verticalis, ſeu ad angulos rectos cum horizontali PH; quo *Fig.* 17.
fiet, ut corpus maneat in æquilibrio. Quod ſi nunc tantillum rotetur corpus, per arculum minimum Ab, cadente puncto b in B, in quo jam tanget planum horizontale PH; evidens eſt corpus in hoc ſtatu ſubſiſtere non poſſe, ſed alterutrum fieri, ut, vel porro præceps rotando labatur verſus H, vel remeet ad priſtinum ſitum, & ultra nonnihil verſus P, unde eundo & redeundo ſæpius oſcillationes faciet; qui noſter eſt caſus, quem determinare debemus. Prius fieret, hoc eſt, præcipitaretur corpus, ſi centrum C circuli oſculantis curvam MAN in puncto A, eſſet infra centrum gravitatis G; poſterius vero fiet ſi C eſt ſupra G, prouti hic ſupponimus.

XLIX.

Finge jam corpus rotari per arculum minimum Ab, & cadere punctum b in B; quo motu exiguo puncta C & G deſcribent

bent duas lineolas horizontales CE & GF: quarum illa CE æqualis erit ipsi Ab vel AB; hæc vero GF, quamvis revera sit arculus nascens alicujus Cycloïdis protensæ, in qua punctum G est infimum, & F supra G ascendit, sed infinities minus quam est longitudo GF, ita ut GF pro recta horizontali sumi possit, quæ erit ad CE vel AB, ut se habet AG ad AC; id quod patet ex natura generationis Cycloïdalium. Quare ducta recta AE transibit per punctum F, facietque angulum CAE æqualem angulo contactus bAB; considerando nempe circulum osculatorem, ut Polygonum infinitorum laterum. Porro puncta F & B conjungantur per rectam FB, quæ ad curvedinem nascentem GF erit normalis in F; atque ex F demittatur FD parallela verticali AC. Dicantur autem AG $= a$, AC $= b$, AB vel CE $= x$; proinde GF vel AD $= \frac{ax}{b}$, BD $= x - \frac{ax}{b} = \left(\frac{b-a}{b}\right) x$.

L.

Sit item vis acceleratrix naturalis $= g$, massa totius corporis $= M$, adeoque pondus seu vis motrix absoluta $= gM$; quæ collecta in Centro gravitatis translato in F, nisum exerit ad redescendendum per curvedinem FG, qui nisus consistit in vi motrice oriunda ex vi absoluta gM, & quæ invenitur per decompositionem, faciendo, Ut se habet FB ad DB, ita erit gM ad $\frac{gM \times DB}{FB} =$ [quia FB æqualis censeri potest ipsi FD, vel AG, ob differentiam inassignabilem] $\frac{gM \times DB}{AG} = gM \times \left(\frac{b-a}{ba}\right) x$ = vi motrici qua corpus urgetur ad descendendum per arculum FG.

LI.

Quærenda est insuper vis acceleratrix, ex principio nostro explicato in §§. 8 & 9. Resolvendo scilicet [sicuti jam aliquoties in hoc scripto fecimus] corpus LMAN in particulas minimas p, easque multiplicando per rr, quadrata suarum respective distantiarum ab axe rotationis perpendiculari ad sectionis planum LMAN, qui axis successive transit in singula puncta lineolæ infinite parvæ AB, quorum quodlibet inservit pro fulcro immobili, circa quod per momentum corpus aliquantillum gyratur; ita ut axis tanquam in situ invariabili considerari possit. Aggregatum igitur istorum productorum divisum per quadratum distantiæ Centri gravitatis F vel G, hoc est, $\frac{\int rrp}{aa}$ dabit corpus in Centro gravitatis concentrandum, & pro corpore dato LMAN substituendum, ad quod vis motrix $gM \times \left(\frac{b-a}{ba}\right) x$ applicata eandem accelerationem pareret, quam producit in corpore dato. Atque ita dividendo vim motricem per massam corporis substituendi, habebimus vim acceleratricem $= gM \times \left(\frac{b-a}{ba}\right) x : \frac{\int rrp}{aa} = gM \times \left(\frac{ba-aa}{b\int rrp}\right) x$. Faciendo itaque, per *Lemma* ad §. 39, hanc analogiam, Ut se habet inventa vis acceleratrix $gM \times \left(\frac{ba-aa}{b\int rrp}\right) x$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita longitudo excursionis GF, seu $\frac{ax}{b}$, ad longitudinem quæsitam Penduli simplicis isochroni, quæ ergo reperietur $= \frac{\int rrp}{M \times (b-a)}$.

Corollarium.

Si $b = a$, foret longitudo Penduli isochroni infinita, adeoque corpus ex puncto contactus A in punctum contactus B rotando inflexum, indigeret tempore infinito ad redeundum in pristinum situm; hoc est, plane non moveretur sponte. Quod vel ex eo quoque prævideri poterat, quia, centro circuli osculatoris C coalescente cum Centro gravitatis G, non potest corpus regre-

regredi, neque etiam præceps prolabi: ergo manebit immotum, ficuti fequitur ex eo quod jam fupra §. 48 innuimus.

L I I.

EXEMPLUM I.

Efto corpus propofitum fegmentum Sphæræ, cujus radius fit ipfum b, fpectetque ejus vertex deorfum in quo tangat planum fuper quo titubare debet; habeatque fegmentum pro altitudine, quamcunque y. Invenio [falvo errore calculi] longitudinem Penduli fimplicis ifochroni ofcillationibus hujus fegmenti, hoc eft, $\frac{\int rrp}{M \times b - a)} = \frac{40bby - 6y^3}{60bb - 60by + 15yy}$. Si fegmentum fphæricum abit in Sphæram totam, feu fi $y = 2b$; erit Penduli longitudo $= \frac{32b^3}{0bb} = \infty$, adeoque infinita, ut fieri par eft: Sphæra enim tota in omni fitu quiefcere debet. Pendulum quippe longitudinis infinitæ, requirit tempus infinitum ad unicam ofcillationem faciendam, hoc eft, omnino quiefcit. Si vero fegmentum fit hæmifphærium, feu fi $y = b$; prodibit longitudo Penduli $= \frac{34b}{15} = 2\frac{4}{15}b$; quod per experientiam verificari poterit.

L I I I.

EXEMPLUM II.

Pro altero exemplo proponatur Conoïdes parabolicum, per revolutionem Parabolæ ordinariæ generatum, cujus parameter fit $= 2b$, altitudo a vertice inverfo, feu puncto infimo $= y$. Calculus monftrabit quod $\frac{\int rrp}{M \times (b - a)} = \frac{4by + 3yy}{6b - 4y} =$ longitudini Penduli ifochroni. Si $6b = 4y$; feu $y = \frac{3}{2}b$, quo cafu Centrum gravitatis Conoïdis coincidit cum centro circuli ofculatoris; erit longitudo Penduli infinita; adeoque hic pariter Conoïdes nonnihil inclinatum manebit in quiete; per confequens non

non ofcillabitur. Quod quidem in genere ita fiet, quotiefcunque fit $b = a$: tunc enim femper eft $\frac{\int rrp}{M.(b - a)} =$ infinito. Quod fi, in hoc exemplo, effet $y = b$, feu æqualis femi-parametro, haberetur longitudo Penduli ifochroni $= \frac{7}{2}b = 3\frac{1}{2}b$.

L I V.

SCHOLIUM.

Problema generalius propofitum folvi poteft, fupponendo nempe fuperficiem PH, cui incumbit corpus LMAN, non effe planam, fed quamcunque aliam datam, concavam inftar patellæ, fuper qua immobili ofcillationes corporis titubantis determinandæ fint per longitudinem Penduli fimplicis ifochroni.

In hoc cafu, ante omnia notandum, lineolam CE non effe æqualem ipfi AB; fed eam haberi, fi prolongetur in mente verticalis AC ad punctum O, ita ut AO fit radius ofculi fectionis fuperficiei PH in puncto contactus A: tunc enim ducta BO, abfcindet ex horizontali CE veram longitudinem CE. Quare fi dicatur $AO = c$, quæ data eft, ob datam curvedinem lineæ PAH in puncto A; erit, retentis reliquis denominationibus, AO : AB = CO : CE, hoc eft $c : x = c - b : \frac{c - b}{c}x =$ CE. Faciendo porro AC : CE = AG : GF, feu $b : \frac{c - b}{c}x = a : \frac{ac - ab}{bc}x =$ GF = AD. Hinc BD $= x - \frac{ac - ab}{bc}x = \frac{bc - ac + ab}{bc}x$.

Operando nunc in reliquis, ut factum eft in §§. 50 & 51; invenietur longitudo Penduli fimplicis ifochroni $= \frac{(c - b)\int rrp}{M \times (bc - ac + ab)}$.

L V.

Hæc formula generalis complectitur utique præcedentem fpecialem;

cialem : nam ſi ſuperficies concava habet radium oſculatoris in A infinitum, eadem eſt ac ſi in A eſſet plana : verum in hoc caſu, ubi b evaneſcit juxta c, formula noſtra generalis mutatur in hanc $\frac{\int rrp}{M\times(b-a)}$, quæ prorſus eſt eadem, quam invenimus pro plano horizontali PH.

Denique examinandum, an & qua conditione ſuperficies PAH poſſit eſſe convexa, ut ſuper ea oſcillari queat corpus LMAN. In hunc finem, ponendum tantum eſt c negativum; habebitque expreſſio generalis hanc formam $\frac{(-c-b)\int rrp}{M\times(-bc+ac+ab)}$, vel, mutatis ſignis in utroque termino, hanc $\frac{(c+b)\int rrp}{M\times(bc-ac-ab)}$; unde patet, modo $bc-ac$ ſit majus quam ab, ſeu c majus quam $\frac{ab}{b-a}$, corpus poſſe oſcillari. Secus vero, ſi c minus fuerit quam $\frac{ab}{b-a}$, ultro ſequitur corpus inclinatum non poſſe oſcillando ad priſtinum ſitum redire; ſed protinus præcipitatum iri : quod quidem ſemper ita eveniet, quotieſcunque valor formulæ in uno, vel altero, ſive convexitatis, ſive concavitatis, evadit negativus.

L VI.

De Pendulo luxato, & de ejus reductione ad Pendulum ſimplex iſochronum.

Huc pertinent *Pendula*, quæ vocari poſſunt *luxata*. En eorum naturam : Finge Syſtema corporum, vel quamcunque figuram corpoream RSLT, quæ habeat ex Centro gravitatis C prodeuntem rectam CRB rigidam, ſeu inflexilem, ita ut eundem ſemper ſitum ſervet cum partibus figuræ RSLT, dum oſcillatur. Ad extremitatem B concipe alligatum filum, flexile, ſeu inflexile, nil refert; modo, ſi ſit inflexile, habeat in B articulationem, cujus

TAB. LXXXVI. *Fig.* 18.

ope

ope inflecti poſſit in angulum OBC, inſtar baculi circa medium luxati in duas partes. Altera extremitate ex puncto fixo O ſuſpenſa, concitari intellige corpus RSLT in motum oſcillatorium minimum : habebis, quod voco, *Pendulum luxatum*. Quæritur longitudo Penduli ſimplicis, quod ſit cum luxato iſochronum ?

P R Æ P A R A T I O.

Sit OV recta verticalis ducta per punctum ſuſpenſionis O, atque jam oſcillando perveniſſe ponatur Pendulum luxatum in ſitum OBRSLT; ubi ſtatim video, ob impetum corporis id fieri, ut ſitus partis BC cadat extra ſitum partis OB. Concipiatur ergo pars rigida CB, producta donec ſecet verticalem OV in puncto A; quod erit punctum ſuſpenſionis, circa quod Pendulum inſtar ordinarii oſcillatur, quamvis agitatum a vi motrice nondum cognita, & quæ eſt quærenda, ut Pendulum noſtrum, ex A ſuſpenſum, comparari poſſit cum longitudine Penduli ſimplicis iſochroni. In hunc finem conſiderentur ſequentia.

1°. Pondus totius maſſæ ita agit, ac ſi in Centro gravitatis C eſſet concentratum; adeoque ſi maſſa corporis RSLT dicatur $= M$, & gravitas ſeu vis acceleratrix naturalis $= g$; erit vis motrix immaterialis in C applicanda $= gM$.

2°. Vis iſta gM [ducta verticali CH, & prolongata BC ad D] impenditur tota in tenſionem rectæ rigidæ BC, non obſtante quod ejus directio verticalis CH differat a directione CD : nam, ob angulum HCD acutiſſimum, vis tenſionis cenſetur æqualis vi motrici gM.

3°. Ab altera parte filum OB, ob angulum ABO pariter acutiſſimum, eadem vi reſiſtit qua tenditur; unde punctum luxationis B, trahitur & retrahitur viribus æqualibus.

4°. Ex directionibus propriis virium in C & B, quarum illa eſt ſecundum verticalem CH, hæc vero ſecundum BO deduci debent per decompoſitionem vires normales ad BC in C & B. Ductis itaque horizontalibus DV, CE, BF, & AN normali

ad

ad OB; erit vis motrix normalis in $C = \frac{DH}{DC} \times gM = \frac{CE}{CA} \times gM = \frac{BF}{AB} \times gM$; altera vero normalis in $B = \frac{AN}{AB} \times gM$; adeoque vis normalis in C ad vim normalem in B, ut $\frac{BF}{AB} \times gM$ ad $\frac{AN}{AB} \times gM$, ut BF ad AN, ut OB ad OA.

5°. Habemus hoc modo vectem BC, cujus duæ extremitates C & B urgentur normaliter; ſed contrario ſenſu, hoc eſt, ob angulum acutiſſimum CAE, tanquam horizontaliter in directione CE & in directione FB; illa ad verticalem, hæc a verticali OV tendendo.

6°. Hæ duæ vires normales, quarum una reſpectu alterius eſt negativa, habebunt commune centrum æquilibrii in D infra C; quod ita debet eſſe comparatum, ut ſit vis normalis in C ad vim normalem in B, ut BD ad CD. Ex tribus igitur præmiſſis, invenitur quartum, faciendo nempe per diviſionem rationum, ut ſe habet vis normalis in C minus vi normali in B, ad hanc vim normalem in B, ita $BD - CD$, ſeu BC, ad CD. Adeoque etiam [n. 4.] $OB - OA : OA = BC : CD$. Verum, ob angulos O & ABO acutiſſimos, cenſetur $OB - OA = AB$, & ſic habebitur $AB : OA = BC : CD$; unde $CD = \frac{OA \times BC}{AB}$.

7°. Quod ſi jam removeantur vires normales, quæ ſunt in C & B, illæque ambæ applicentur ſub ſuis directionibus ad centrum æquilibrii D; ita ut inde reſultet unica vis motrix $= \frac{BF}{AB} \times gM - \frac{AN}{AB} \times gM =$ (angulo FAB — ang. ABN) $\times gM$ = angulo FOB $\times gM$. Hæc certe vis motrix normaliter applicata in D, atque tendens ad verticalem OV, eodem modo urgebit corpus RSLT, ac facerent duæ illæ vires ſeorſim applicatæ in C & B.

8°. Habemus ergo caſum in ſuperioribus explicatum [§. 18] de natura Centri rotationis; ubi nimirum demonſtravi, ſi corpus aliquod, vel ſyſtema corporum firmiter inter ſe cohærentium, urgeatur a vi quadam motrice, cujus directio non tranſeat per Centrum gravitatis corporis vel ſyſtematis corporum, id futurum eſſe, ut rotari incipiat circa punctum quodpiam, quod manebit immobile, quodque ideo vocavi *Centrum rotationis ſpontaneum*. Hujus naturam talem eſſe oſtendi [§. 16, & ſeqq.], ut ſumto puncto applicationis vis motricis normalis ad rectam per Centrum gravitatis tranſeuntem pro puncto ſuſpenſionis, Centrum illud ſpontaneum fiat ſimul Centrum oſcillationis corporis vel ſyſtematis corporum; per conſequens vice verſa, ut notum eſt, ſi Centrum ſpontaneum pro puncto ſuſpenſionis ſumatur, ut punctum applicationis vis motricis normalis evadat ſimul Centrum oſcillationis.

9°. Hinc concludimus, punctum A, quod modo ſupra [ante n. 1] vidimus debere conſiderari in Pendulo luxato tanquam punctum ſuſpenſionis Penduli ordinarii circa A oſcillantis, ſimul fore Centrum ſpontaneum, quatenus corpus RSLT urgetur a vi motrice normaliter in D applicata. Duplex iſta conſideratio manu ducet ad æquationem quæſitam, ut ſequitur.

SOLUTIO.

His ita præparatis, dicantur $OB = a$, $BC = b$, $AB = x$, adeoque $OA = a - x$; vis acceleratrix naturalis, qua ſcilicet corpora gravia naturaliter accelerantur, $= g$; maſſa corporis $RSLT = M$; ejuſque pondus, ſeu vis motrix in directione verticali $= gM$.

Hinc [n. 6] $CD = \frac{OA \times BC}{AB} = \frac{(a - x).b}{x} = \frac{ab}{x} - b$; cui addendo AC, ſeu $b + x$, habetur tota $DA = \frac{ab}{x} + x$. Jam vero, ex natura Centri ſpontanei rotationis A, & ex demonſtratis *Hugenianis*, erit eadem $DA = b + x + \frac{\int ttp}{(b + x)M}$;

 adeo-

adeoque $\frac{ab}{x} + x = b + x + \frac{\int ttp}{(b+x)M}$, proinde $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttp}{(b+x(M}$.

Ut nunc commodius exprimatur $\int ttp$, per quod intelligitur aggregatum omnium productorum, quæ fiunt multiplicando ſingulas particulas minimas p corporis M per quadrata tt diſtantiarum ſuarum a recta per Centrum gravitatis C tranſeunte & parallela axi rotationis; notandum eſt, ſi corpus RSLT ſuſpenderetur ex puncto B, tanquam fixo ſuppoſito, fore ejus Centrum oſcillationis G datum, & ita quidem ut $BC \times CG \times M = \int ttp$, quæ eſt generalis proprietas Pendulorum ordinariorum jam ab HUGENIO demonſtrata.

Dicatur itaque $CG = c$, eritque $\int ttp = bcM$, quo ſubſtituto in æquatione modo ante inventa $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttb}{(b+x)M}$, prodibit $\frac{ab}{x} - b = \frac{bcM}{(b+x)M}$, quæ reducta dat $xx = (a - b - c)x + ab$, unde $x = -\frac{1}{2}(a - b - c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)}$.

Supereſt ut determinemus longitudinem Penduli ſimplicis luxato iſochroni; id quod peragitur in modum ſequentem. Conſiderare ſtatim jam licet ABC ut vectem rigidum, cujus hypomochlium fixum eſt in A, quique urgetur duabus viribus motricibus abductis, una in C verticaliter deorſum tendente, altera in B contrario niſu tendente verticaliter ſurſum; illa prior in C eſt ipſa vis ponderis $= gM$, hæc altera vero in $B = \frac{a-x}{a} gM$ [per n. 4]; ſunt enim vires verticales ipſis normalibus proportionales.

Subſtituatur nunc, loco vis motricis quæ eſt in B, alia in punctum C; quæ, ex natura vectis, idem cum illa habeat momentum; faciendo nempe ut ſe habet AC ad AB, ſeu ut $b + x$ ad x, ita $\frac{a-x}{a} gM$ ad $\frac{ax - xx}{ab + ax} gM$; erit hæc vis ſubſtituenda in C pro illa in B; atque ita habebitur in C unica vis motrix

$= gM - (\frac{ax - xx}{ab + ax}) gM = \frac{ab + xx}{ab + ax} gM$; auferendo ſcilicet ſubſtituendam $\frac{ax - xx}{ab + ax}$ a priori gM, utpote ei contrariam.

Quod ſi nunc hanc vim motricem $\frac{ab + xx}{ab + ax} gM$ dividamus per maſſam in C concentrandum, ſicuti docuimus in nova noſtra Theoria de Centro oſcillationis in Pendulis ordinariis (§. 9) expoſita, obtinebimus $\frac{ab + xx}{ab + ax} gM : \frac{(b + x)^2 M + bcM}{(b+x)^2}$, ſeu $\frac{(b+x) \times (ab + xx) g}{a(b+x)^2 + abc}$ = vi acceleratrici maſſæ in C concentratæ.

Tandem, ex notiſſimo illo Theoremate, a nobis quoque dudum * demonſtrato, quod nempe longitudines Pendulorum ſimplicium iſochronorum ſint proportionales viribus acceleratricibus quibus animantur: dicendum eſt, Ut ſe habet inventa vis acceleratrix $\frac{(b+x) \times (ab + xx) g}{a(b+x)^2 + abc}$ ad vim acceleratricem naturalem g, hoc eſt. ut $(b+x) \times (ab + xx)$ ad $a(b+x)^2 + abc$, ita longitudo AC, ſeu $b + x$, ad quartam $\frac{a(b+x)^2 + abc}{ab + xx}$, quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo luxato.

In hac expreſſione, ſubſtituendus jam eſſet valor ipſius x ſupra inventus; ſed operatio nimis longa foret: quare per compendium procedamus. Vidimus, ab initio Solutionis, DA duplici modo expreſſam, ſcilicet $DA = \frac{ab}{x} + x = \frac{ab + xx}{x}$, & paulo poſt $DA = b + x + \frac{\int ttb}{(b+x)M} =$ [ob $\int ttb = bcM$] $b + x + \frac{bc}{b+x} = \frac{(b+x)^2 + bc}{b+x}$; ac proinde $\frac{ab + xx}{x} = \frac{(b+x)^2 + bc}{b+x}$; unde ſequitur fore $(b+x)^2 + bc : ab + xx$

* N°. XC. pag. 518. *Tom. I.*

$= b+x : x$; adeoque ſi in longitudine noſtra $\frac{a(b+x)^2+abc}{ab+xx}$, tam in numeratore quam denominatore, pro $(b+x)^2+bc$ & $ab+xx$ ſcribantur eorum proportionales $b+x$ & x; prodibit fractio æquivalens $\frac{ab+ax}{x}$ = longitudini quæſitæ.

Nunc demum pro x ſubſtituatur valor inventus $\frac{1}{2}(a-b-c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-b-c)^2+4ab)}$, & reſultabit $\frac{ab+ax}{x}$ ſeu $a+\frac{ab}{x}$

$$= a + \frac{2ab}{a-b-c+\sqrt{((a-b-c)^2+4ab)}} = a + \frac{2ab(a-b-c\mp\sqrt{((a-b-c)^2+4ab))}}{-4ab} = a - \tfrac{1}{2}(a-b-c \mp \sqrt{((a-b-c)^2+4ab)}) = \tfrac{1}{2}(a+b+c) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{((a-b-c)^2+4ab)}$$

= longitudini Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo luxato *Q. E. I.*

NOTA. Ut paulo ſimplicius exprimatur hæc longitudo; ſcribi poteſt una littera e pro $b+c$, nempe pro data BG; & erit longitudo quæſita $= \frac{1}{2}(a+e) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-e)^2+4ab)}$.

COROLLARIUM I.

Si $a = 0$; fit longitudo quæſita $= \frac{1}{2}(b+c) \pm \frac{1}{2}(b+c) = b+c$, vel $= 0$. Prior $b+c$ manifeſte ſatisfacit; hoc enim in caſu, puncto B abeunte in punctum ſuſpenſionis, Pendulum luxatum mutatur in Pendulum ordinarium compoſitum, cui utique reſpondet Pendulum ſimplex iſochronum habens, per hypotheſin, longitudinem $= b+c = e$. Alter vero valor $= 0$, hic eſt inutilis.

COROLLARIUM II.

Si $a = b+c$; erit longitudo Penduli ſimplicis luxato iſochroni $= a \pm \sqrt{ab}$.

COROL-

COROLLARIUM III.

Si $b = 0$, quo caſu $c = \infty$; erit longitudo quæſita $\frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c) = a$, vel $= c$; ubi prior a ſola ſatisfacit; quod per ſe clarum eſt: in hoc quippe caſu punctum luxationis B, exiſtens in ipſo Centro gravitatis C, facit ut, inter oſcillandum, quælibet recta conjungens in corpore duo puncta moveatur motu ſibi ſemper parallelo; & proinde tantundem eſt, ac ſi tota corporis maſſa eſſet in Centro gravitatis concentrata; ita ut Pendulum non differat a Pendulo ſimplici, cujus longitudo $= a$. Interim alter valor $c = \infty$, tanquam huc non quadrans, rejici debet.

LVII.

SCHOLIUM.

Concipiamus jam partem OB ſupra punctum luxationis B eſſe etiam rigidam; eamque oneratam novo pondere datæ figuræ, cujus Centrum gravitatis ſit in puncto aliquo dato P in ipſa recta OB aſſumto. Methodus noſtra determinandi longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni, etiam ad hunc caſum porrigitur. Nam, pro corpore in P collocato, cujus maſſa dicatur $= m$, ſubſtitui poteſt aliud collocandum & concentrandum in puncto B (per §. 9); vocetur autem maſſa illius corporis ſubſtituenda in B $= \mu$, vis itaque motrix, quæ erat in P, $= gm$, nunc erit in P ſupponenda $= \frac{OP}{OB} \times gm$. Hoc modo fit, ut recta OB eadem vi ad motum angularem incitetur, ſive maſſa m in P locanda agitetur per vim motricem gm, ſive in B locetur maſſa μ, & urgeatur per vim motricem $\frac{OP}{OB} \times gm$. Habemus igitur vectem BC, oneratum duobus ponderibus in C & in B, quorum corpora, vel maſſæ corporum, ſunt M & μ, quæ ut unum ſyſtema conſiderari debent; vis motrix in C

 $= gM$

$= gM$, altera in B $= \frac{OP}{OB} \times gm - gM$, five $gM - \frac{OP}{OB} \times gm$, prout una vel altera prævalet. Atque ita res reducta erit ad caſum præcedentem: Sufficit veſtigia monſtraſſe, iis quibus animus eſt plenariam tentare ſolutionem.

Poſſemus ſi res tanti eſſet, extendere hoc negotium ad Pendula, in quibus duo, imo plura adeſſent puncta luxationum; ſed talia relinquimus calculatoribus, qui otio abundant.

L V I I I.

De Pendulis ſympathicis.

Hoc nomine voco bina Pendula a communi quodam corpore gravi agitata, ita ut unum ſine altero moveri non poſſit. Ad clariorem rei intelligentiam, concipe corpus grave, vel ſyſtema corporum quotcunque, per cujus Centrum gravitatis C trajectus ſit paxillus tenuiſſimus in ſitu horizontali ACB, cujus duo brachia ſint datæ longitudinis, nempe AC $= a$, & BC $= b$; unde totius paxilli longitudo $= a + b = c$. Ad extremitates A & B annexa ſint duo fila flexilia, aut etiam rigida, ſed tunc habentia in A & B luxationes, ita ut cum recta AB horizontali in angulos poſſint inflecti, prout res poſtulabit.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 19.

Sint fila verticaliter erecta AD $= m$, BE $= n$; atque ſuſpenſa ex punctis fixis D & E, ita ut corpus grave vel Syſtema corporum ſuſtentetur a duabus potentiis quas opponunt fila AD & BE. Finge jam paxillum AB, ex ſitu quietis dimoveri paululum in plano DABE, & acquirat ſitum proximum ab; haud ægre percipis, mox inde oriri motum oſcillatorium in eodem plano DABE, rectamque ab tam parum ſuper AB elevari, ut cenſeri poſſit in eadem ſemper horizontali ultro citroque inſtar ſerræ reciprocari.

Ex quo motu parallelo ſingulorum corporis punctorum oppido patet, oſcillationes eodem modo fieri, ſive diffuſum ſit corporum ſyſtema, ſive concentratum ſupponatur in ſuo Centro gravitatis C. Quare

Quare ſi maſſa, vel quantitas materiæ collectæ in C, dicatur $= M$, vis acceleratrix naturalis $= g$; erit pondus, vel vis motrix abſoluta $= gM$. Hinc, ex natura vectis, vis motrix quam ſuſtinet filum AD $= \frac{BC}{AB} \times gM = \frac{b}{c} \times gM$, & ea quam ſuſtinet filum BE $= \frac{AC}{AB} \times gM = \frac{a}{c} \times gM$. Sit nunc excurſio A$a$ vel B$b = x$, erit, ob angulos ADa, BEb acutiſſimos, vis motrix, qua retrahitur punctum a verſus ſuum ſitum æquilibrii in A $= \frac{BC}{AB} \times gM \times \frac{Aa}{aD} = \frac{b}{c} \times gM \times \frac{x}{m}$; pariterque vis motrix qua retrahitur punctum b verſus ſuum ſitum æquilibrii in $B = \frac{a}{c} \times gM \times \frac{x}{n}$. Quia autem duæ iſtæ vires retrahentes conſpirant ad reſtituendum paxillum cum pondere in ſitum æquilibrii, quod eſt in C; habebimus totalem vim motricem ſecundum horizontem agentem $= \frac{gM}{c} \times x \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$, quæ diviſa per quantitatem materiæ movendæ, hoc eſt, per maſſam M, dat vim acceleratricem $= \frac{gx}{c} \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$

Inſtituendo igitur, per noſtram Regulam in ſuperioribus oſtenſam, hanc analogiam: Ut ſe habet vis acceleratrix inventa $\frac{gx}{c} \times (\frac{b}{m} + \frac{a}{n})$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excurſionis Aa vel Bb, vel x, ad quartam $\frac{c}{\frac{b}{m} + \frac{a}{n}}$, hoc eſt ad $\frac{mnc}{ma + nb}$; erit hæc æqualis longitudini Penduli ſimplicis Pendulo noſtro ſympathico iſochroni. *Q. E. I.*

C O R O L L A R I U M I.

Si filorum longitudines AD & BE ſunt æquales, id eſt, ſi $m = n$ fiet $\frac{mnc}{ma + nb} = \frac{mc}{a + b} = m$; ut quidem fieri prævideri pote-

poterat: ambæ enim partes Penduli ſympathici nil aliud ſunt quam Pendulum ſimplex, ſibi ipſi utique iſochronum.

COROLLARIUM II.

*E*xiſtente longitudine fili BE valde magna, reſpectu alterius AD; ita ut cenſeri poſſit $n = \infty =$ infinita; fiet $\frac{mnc}{ma + nb} = \frac{mc}{b} = \frac{ma + mb}{b} = \frac{ma}{b} + m$. Quod ſi præterea $a = b$, hoc eſt, ſi Centrum gravitatis C fuerit in medio intervalli filorum; erit longitudo Penduli ſimplicis iſochroni $= 2m$, ſeu dupla longitudinis fili AD.

COROLLARIUM III.

Cæterum generaliter verum eſt longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni, ſemper conſiſtere mediam inter longitudines fili longioris BE & brevioris AD; ſeu, quod eodem recidit, fore ſemper $m > \frac{mnc}{ma + nb} > n$; cujus demonſtrationem, ob facilitatem non addo. Hinc patet ratio denominationis *Penduli ſympathici*: cum enim Pendulum longitudinis minoris AD, ſi independenter a majori oſcillari deberet, majorem haberet ad oſcillandum vim acceleratricem, & viciſſim minorem, ſi alterum per ſe ſolum oſcillaret; qua de cauſa, quaſi ipſa natura hoc obſervare videtur, ut ad oſcillationes mutuo conſenſu ſimultaneas faciendas, Pendulum brevius AD aliquid de vi ſua acceleratrice amittat, alterum longius BE acquirat; quo, veluti ex compacto, ſimul eant redeantque ſine impedimento.

LIX.

NOTA. Quod ſupra in Scholio ad §. 57, monuimus, ad hoc quoque genus Pendulorum ſympathicorum feliciter accommodari poteſt; etiamſi alias res videatur difficultatis plena.

Poſito

Poſito namque fila AD, BE, quæ ſuſtinent paxillum AB cum pondere in C, eſſe rigida, proptereaque, ut inflecti poſſint circa A & B, gaudere ibi articulationibus, ſeu punctis luxationum: hactenus eſt caſus quem modo ſolitum dedimus. Sed ſi jam porro velimus inſidere filis rigidis pondera data, quorum Centra gravitatis ſint in locis datis p, q; hic caſus, etſi pluſculum difficultatis in ſe contineri videtur, reduci tamen poteſt ad Pendula ſympathica pura, ſine ponderibus p & q conſiderata.

Nam ſi, ut fecimus in §. 37, tollamus corpora p & q, eorumque loco ſubſtituamus duo alia, in punctis A & B locanda & concentranda, ſecundum legem in §. 9 expoſitam, habeantque debitam ſuam vim motricem; ut nimirum fila eadem vi incitentur ad motum angularem circa centra D & E, qua incitarentur, ſi corpora in p & q manerent.

Quo facto, habebimus paxillum AB oneratum Syſtemate trium corporum in A, B, & C, una cum ipſorum viribus motricibus datis, in quarum communi Centro gravitatis tria iſta corpora collecta dabunt caſum ſimplicem binorum Pendulorum ſympathicorum; atque ſic quæſito erit ſatisfactum. *Q. E. F.*

N°. CLXXVIII.

DE PENDULIS MULTIFILIBUS.

PROBLEMA.

DAto Pendulo NLK *circa punctum* N *oſcillante, quod compoſitum ſit duobus filis* NL, LK, *cum appenſis duobus ponderibus* L, K, *quæ eodem tempore ad ſitum verticalem* NGM *perveniant, deſcribendo arcus* LG, KM, *quorum ille, nempe* LG, *erit utique circularis, hic vero* KM *induet curvaturam quam exigit motus: Quæritur Lex oſcillationis, ſuppoſitis filorum* NL, LK *longitudinibus æqualibus?* TAB. LXXXVII. N°. CLXXVIII. Fig. 1.

ANALYSIS.

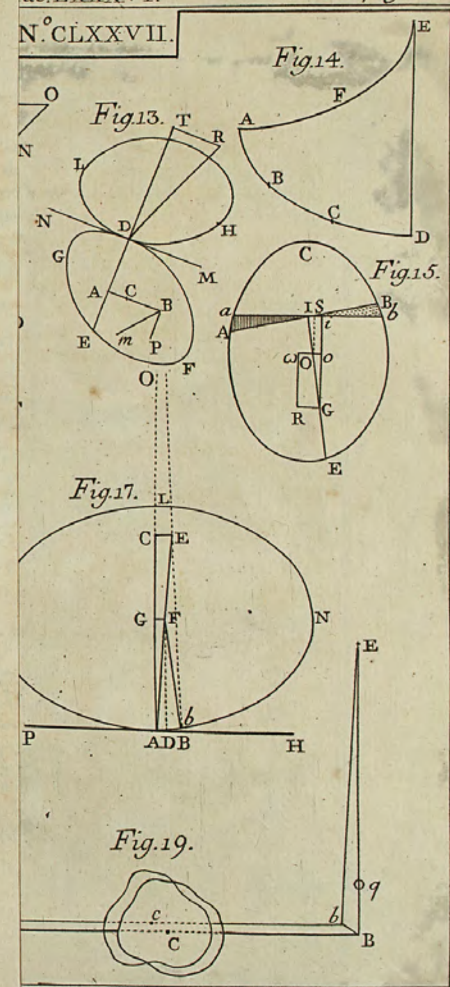
I.

Sit corpus L $= a$, ejus pondus [ſupponendo vim gravitatis $= g$] $= ga$; corpus K $= b$, ejus pondus $= gb$; vis tenſionis fili LK $= T$; ductiſque ad axem verticalem NM perpendicularibus LH, KI, ſit GH $= y$, MI $= q$; arcus GL $= r$, Ll $= dr$, MK $= s$, Kk $= ds$, HL $= e$, IK $= ne$; ſupponendo ſcilicet HL ad IK ut 1 ad n; quæ ratio utique conſtans erit, ſi oſcillationes ſint minimæ: ſed primo rem conſiderabimus generaliter. Porro ſit NL $=$ LK $= c$, & prolongando KL donec ſecet verticalem NM in F, ductiſque in kl elementis normalibus Lp, Ko, ſit $lp = dx = ko$. Dicatur velocitas in L $= v$, & velocitas in K $= u$.

I I.

Faciendum nunc eſt $dr : dy = ga : \frac{gady}{dr}$; quæ erit æqualis vi ponderis L ſecundum lL. Eſt $dr : dx = T : \frac{Tdx}{dr}$ æquale vi oppoſitæ a fili LK tenſione oriundæ, adeoque $\frac{gady - Tdx}{dr}$ æqualis vi motrici corporis L ſecundum lL; unde dividendo per maſſam a, habetur vis acceleratrix $= \frac{gady - Tdx}{adr}$. Hinc ergo, ex Principio Dynamico, $\frac{gady - Tdx}{a} = vdv$; integrando, prodit $gy - \frac{1}{a}\int Tdx = \frac{1}{2}vv$. Simili modo invenitur $gq + \frac{1}{b}\int Tdx = \frac{1}{2}uu$. Verum, ob iſochrona elementa lL, kK; erit $vv : uu = dr^2 : ds^2$; adeoque $dr^2 : ds^2 = gy - \frac{1}{a}\int Tdx : gq + \frac{1}{b}\int Tdx$; ex quo reperietur $T = \frac{gab}{dx} \times d\left(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2}\right)$.

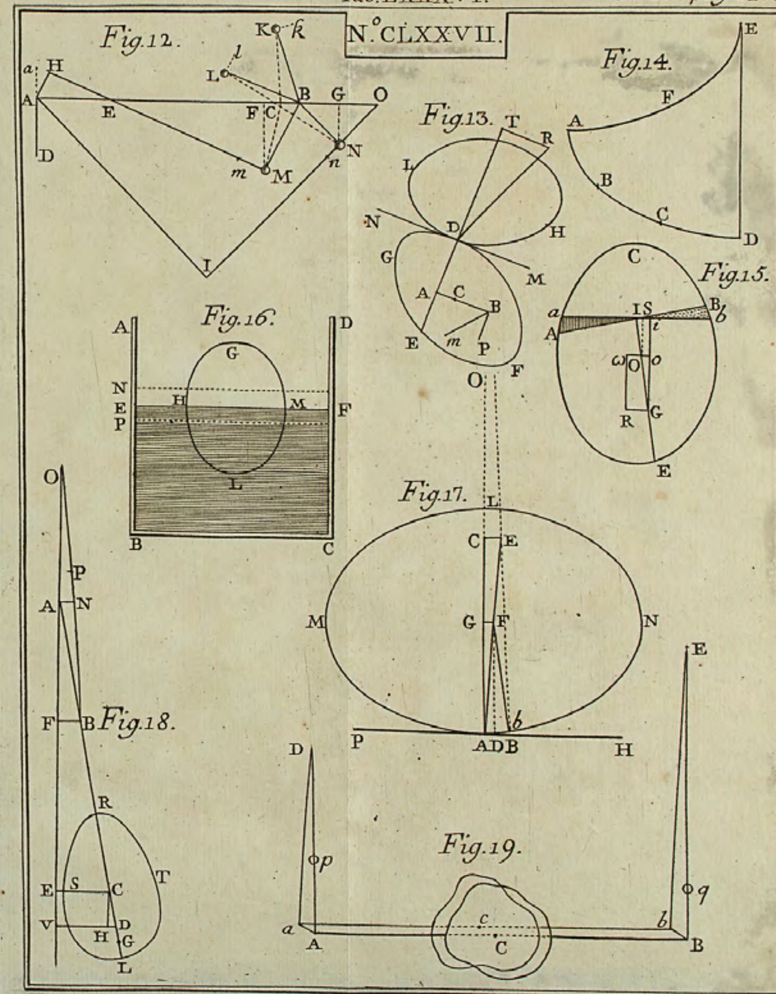
III.



vim gravita-
s $= g b$; vis
lem NM per-
$= q$; arcus GL
$= e$, IK $= ne$;
æ ratio utique
rimo rem con-
$= c$, & pro-
, ductisque in
$x = k o$. Di-

erit æqualis vi
$\frac{dx}{dr}$ æquale vi
$\frac{dy - Tdx}{dr}$ æqua-
dendo per maſ-
Hinc ergo, ex
rando, prodit
$gq + \frac{1}{b}\int T dx$
K; erit $vv : uu$:
$: gq + \frac{1}{b}\int T dx$;

III.



Hoc ita ſe hab
corpora L, K, dura
va, ut MKk, eſt
ab una parte ſollici
ne obliqua KL, ab
verticali; quærendu
tione normali ad k
$\sqrt{(ds^2 - dx^2)}] =$
tem concavam curva
$= gb : \frac{gb\sqrt{(ds^2 -}}{ds}$
væ. Hæ autem du
eſſe æquales; quia
$\frac{T\sqrt{(ds^2 - dx^2)}}{ds} = gb$
Æquando ambos va
$ad\left(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2}\right) =$
$\int dx \sqrt{\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}}.$

Hæc æquatio det
lationem ad circulum
gem oſcillationum
nendo ſcilicet arcus
quam minimos; no
cum HL, MK cu
&c. hoc eſt, unam p
ne, erit HG ſeu $y =$
$- \mathrm{NI} = \mathrm{NL} + \mathrm{L}$

III.

Hoc ita se habet, quando ambæ curvæ sunt datæ, quibus corpora L, K, durante motu inhærere coguntur: sed si altera curva, ut MKk, est libere describenda a pondere K, utpote quod ab una parte sollicitatur ad descensum a tensione T in directione obliqua KL, ab altera vero parte a vi ponderis in directione verticali; quærendum est quanta vi hinc inde urgeatur in directione normali ad kK. Hoc fine, faciendum est Kk : Ko $[= ds : \surd(ds^2 - dx^2)] = T : \frac{T\surd(ds^2 - dx^2)}{ds}$ = vi normali ad partem concavam curvæ, & porro Kk : Kf $[= ds : \surd(ds^2 - dq^2)] = gb : \frac{gb\surd(ds^2 - dq^2)}{ds}$ = vi normali ad partem convexam curvæ. Hæ autem duæ vires directe oppositæ debent sibi mutuo esse æquales; quia curva MKk libere describitur; erit itaque $\frac{T\surd(ds^2 - dx^2)}{ds} = \frac{gb\surd(ds^2 - dq^2)}{ds}$; unde denuo $T = gb\surd\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}$. Æquando ambos valores ipsius T, prodit nova æquatio $ad\left(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2}\right) = dx\surd\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}$, vel $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \int dx\surd\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2}$.

IV.

Hæc æquatio determinat naturam curvæ MKk, ejusque relationem ad circulum GLl. Quod si jam invenire lubeat Legem oscillationum minimarum Penduli flexilis NLK, supponendo scilicet arcus GL, MK infinite parvos, seu, si mavis, quam minimos; notare convenit, in hoc casu confundi GL cum HL, MK cum IK, NL cum NH, FL cum FH, &c. hoc est, unam pro altera sumi posse. Ex hac consideratione, erit HG seu $y = \frac{HL^2}{2NL} = \frac{ee}{2c}$; item MI, seu q = NM − NI = NL + LK − NI = NL + LK − NH − LR

 = [ob

$= [$ob $NL - NH = GH = \frac{HL^2}{2NL}$ & $LK - LR = \frac{RK^2}{2LK}] \frac{ee}{2c} + \frac{(n-1)^2 . ee}{2c} = \frac{(nn - 2n + 2) ee}{2c}$. Porro, ob isochronos arcus GL, MK, erit dr ad ds, seu Ll ad Kk, ut GL ad MK, hoc est, ut HL ad IK seu ut 1 ad n: quare $ds = ndr$: ponendo itaque $nndr^2$ pro ds^2, prodibit $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{nnay - aq}{a + nnb}$; ubi si pro y & q substituantur valores modo inventi, habebitur idem $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{(n-1). aee}{c.(a + nnb)}$. Et sic æquatio in fine articuli præcedentis mutatur in hanc $\frac{(n-1). aee}{c.(a + nnb)} = \int dx \sqrt{(\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2})} = [$quia dq^2 & dx^2 evanescunt juxta $ds^2] \int dx$.

V.

Restat igitur ut quæratur valor ipsius dx, seu pl, seu ok; quod sic fit. $KL : LF = KR : LH = n - 1 : 1$; unde $LF = \frac{1}{n-1} KL = \frac{c}{n-1}$. Et, quia triangulum LFN in N & L est acutissimum, censetur $LF + FN = NL = LK = c$; proinde $FN = c - \frac{c}{n-1} = \frac{(n-2). c}{n-1}$. Sed LF ad FN, hoc est $\frac{c}{n-1}$ ad $\frac{(n-2). c}{n-1}$, seu 1 ad $n - 2$, ut sinus anguli FNL seu $\frac{HL}{NL}$ seu $\frac{e}{c}$, ad sinum anguli FLN, qui per consequens est $= \frac{(n-2). e}{c}$: angulus vero $FLN =$ ang. pLl, quia uterque est complementum anguli NLp; adeoque etiam $\frac{(n-2). e}{c} =$ sinui anguli $pLl = \frac{pl}{Ll} = \frac{dx}{dr} = \frac{dx}{de}$; est enim [ob arcum GL minimum] $dr = de$; propterea $\frac{(n-2). ede}{c} = dx$;

& integrando $\frac{(n-2). ee}{2c} = \int dx = [$per præced.$] \frac{(n-1). aee}{c.(a + nnb)}$. Reductione peracta, emergit hæc æquatio $nnb = 2nb + a$, unde $n = 1 \pm \sqrt{(\frac{a+b}{b})}$.

COROLLARIUM.

Si pondera a & b sint æqualia; erit $n = 1 \pm \sqrt{2}$. Ubi notandum radicem affirmativam $1 + \sqrt{2}$ esse sumendam, cum pondera ad eandem partem verticalis NM constituuntur; sed negativam affirmative sumtam $-1 + \sqrt{2}$; cum pondera constituuntur ad partes diversas ipsius NM.

VI.

Superest ut determinetur longitudo Penduli simplicis, quod Pendulo flexili NLK sit isochronum. Pro hoc opus est, ut sumatur valor vis acceleratricis corporis L artic. 1°. inventæ $= \frac{gady - Tdx}{adr}$, ubi [art. 4.] $y = \frac{ee}{2c}$, proinde $dy = \frac{ede}{c}$; $T = gb$ [art. 3 & 4], $dr = de$ [art. 5], $dx = \frac{(n-2). ede}{c}$ [ibid.], quæ si substituantur, reperietur vis acceleratrix ponderis $L = \frac{ge(a - nb + 2b)}{ac}$; eaque si dividatur per e, seu per longitudinem viæ describendæ GL, vel HL; habetur intensitas vis acceleratricis $= \frac{g(a - nb + 2b)}{ac}$. Sit nunc D, longitudo quæsita Penduli simplicis agitandi per naturalem vim gravitatis g, & semi-oscillationes per arcus minimos z peragentis; erit, ut constat, ejus vis acceleratrix $= \frac{gz}{D}$; cujus intensitas [dividendo per z] habetur $= \frac{g}{D}$. Oportet itaque has duas intensitates esse æquales, ut obtineatur mutuus isochronismus, unde

unde $\frac{a - nb + 2b}{ac} = \frac{1}{D}$; adeoque $D = \frac{ac}{a - nb + 2b}$; & in caſu ponderum a & b æqualium, erit $D = \frac{c}{3 - n}$; vel ſubſtituendo pro n ejus valorem inventum $1 + \sqrt{2}$ pro ponderibus ad eaſdem verticalis partes conſtitutis, provenit $D = \frac{c}{2 - \sqrt{2}}$; ſed exiſtentibus ad partes oppoſitas pro n ſcribendo $1 - \sqrt{2}$ dabitur $D = \frac{c}{2 + \sqrt{2}}$. *Quæ omnia erant invenienda.*

Idea ſolutionis pro Pendulis trifilibus, quadrifilibus, ſeu quibuſcunque multifilibus.

I.

Vocentur nunc pondera incipiendo a ſupremo, A, B, C, D, &c. ſitque arcus GL, vel recta HL, quæ ei æqualis cenſetur $= e$, reliquæ ordine ſequuntur ne, me, pe, &c.; adeo ut illi arcus, vel rectæ ad verticalem perpendiculares, procedant ut numeri, n, m, p, quorum valores ſunt quærendi.

II.

Erit, ut ſupra invenimus §. 4, prima HG $= \frac{ee}{2c}$, ſecunda IM $= \frac{(1 + (n - 1)^2)ee}{2c}$, ita quoque tertia $= \frac{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2)ee}{2c}$, quarta $= \frac{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2 + (p - m)^2)ee}{2c}$, & ita conſequenter; altitudines ſcilicet punctorum L, K, &c. ſupra puncta infima G, M, &c.

III.

Arcus curvarum GL, MK, &c. etſi revera non ſint circulares, excepto primo, quando tamen ſunt minimi, habentur pro circularibus, qui nempe curvas in punctis infimis oſculantur. Horum circulorum oſculantium inveniantur radii, quia iis in hoc ſcrutinio opus eſt; quod ſic fit. Radius primi arcus GL, quod per ſe patet, $= c$; radius ſecundi MK $= \frac{IK^2}{2IM} =$ (vid. §. 2 hujus) $\frac{nnc}{(1 + (n - 1)^2)}$; radius tertii $= \frac{mmc}{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2)}$; radius quarti $= \frac{ppc}{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2 + (p - m)^2)}$; radius quinti $=$ &c.

IV.

Ex his determinantur valores elementorum dx, quæ ſpectant ad duos quoſlibet arcus immediate ſe mutuo excipientes; nempe ſicuti $l p$, aut [quod idem eſt, ducta $l\pi$ ad LK normali] $L\pi$ vel $ok = \frac{(n - 2).ede}{c}$ [vid. ſupra §. 5], quod exprimit dx, pertinens ad arcum primum GL & ſecundum MK; ita quoque inveniuntur valores elementorum dx, pro arcuum paribus ſequentibus; nempe pro ſecundo & tertio, pro tertio & quarto &c. adhibendo ſucceſſive modum quem adhibui in prædicto §. 5. Fingamus itaque [ne opus habeamus figuram per plures arcus continuare] ipſum arcum GL & arcum MK repræſentare arcum ſecundum & tertium: Erit HL $= ne$, & IK $= me$; radiuſque circuli oſculatoris in G $=$ NL $=$ [per præced.] $\frac{nnc}{1 + (n - 1)^2}$. Faciendo nunc [ut ſupra §. 5] KL : LF $=$ KR : LH, quod nunc eſt $= m - n : n$, unde LF $= \frac{n}{m - n}$ KL $= \frac{nc}{m - n}$, adeoque NF, ſeu NL $-$ LF $= \frac{nnc}{1 + (n - 1)^2}$

$-\frac{nc}{m-n}$. Porro quia LF ad FN, ut ſinus anguli FNL ad ſinum anguli FLN $= pLl = Ll\pi$; prodibit ſinus anguli $Ll\pi$, hoc eſt $\frac{L\pi}{Ll}$, ſeu $\frac{dx}{nde} = \frac{FN}{LF} \times$ ſin. FNL $= \left(\frac{nnc}{1+(n-1)^2} - \frac{nc}{m-n} \times\right) \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc} : \frac{nc}{m-n} = \frac{(m-n)e}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc}$ quare $dx = \frac{(mn-nn)ede}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)ede}{c} = \frac{(mn-2nn+2n-2)ede}{c}$, pro arcu ſecundo & tertio. Simili modo inveniemus procedendo $dx \frac{(pm-2mm+2mn-2nn+2n-2)ede}{c}$, pro arcu tertio & quarto. Atque ita deinceps.

V.

Jam vero quadrata velocitatum in punctis L, K, &c. eodem momento naſcentium ſe habent [ſicuti invenitur ex Conſervatione virium vivarum æque ac, ſed difficilius, ex Principiis Staticis] ex. gr. ſi tria ſunt fila, totidemque pondera A, B, C, quadratum velocitatis ponderis $A = \frac{(Ay+Bq+Ct)}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $B = \frac{(Ay+Bq+Ct)nn}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $C = \frac{(Ay+Bq+Ct)mm}{A+Bnn+Cmm}$, &c. nominando ſcilicet HG, IM, &c. y, q, t &c.; adeoque erunt vires acceleratrices ponderis $A = \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $B = \frac{g.nd(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $C = \frac{g.md(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$; ac proin intenſitas [quæ invenitur dividendo ſingulas vires acceleratrices per longitudinem ſuæ viæ deſcribendæ, videlicet per e, ne, me] prodit pro unaquaque $= \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede}$, adeoque eadem in ſingulis.

V I.

V I.

Hactenus tenſiones filorum non ſunt conſideratæ; ideoque videndum nunc erit, quomodo vires acceleratrices, indeque earum intenſitas eliciatur ex tenſionibus, quæ cum vi gravitatis motum ponderum temperant. Intenſitas hoc modo elicita, & comparata cum eadem articulo præcedente inventa, dabit numerorum n & m rationem quæſitam ad unitatem; id autem hoc pacto peragitur. Animadverto primo, ob ponderum motum lentiſſimum, eorum vires centrifugas nihil conferre ad augendas vires tenſionum in filis. Secundo, ob filorum NL, LK, &c. infinite parum a rectitudine ſitus deflectentium, unumquodque ex filis eam pati tenſionem, quæ æquipollet vi abſolutæ ponderum omnium quæ ſuſtinet: ita ergo tenſio primi NL $= A+B+C$, tenſio ſecundi LK $= B+C$, tenſio tertii $= C$; atque ſic in aliis Pendulis multifilibus.

V I I.

Ob fili primi NL ſitum perfecte perpendicularem ad arcum GL, tenſio hujus fili, nec contribuit, nec officit vi motrici ponderis primi A in directione tangentis in L. Sed vis motrix hujus ponderis habetur, ſi a vi tangentiali ab ipſa ejus gravitate oriunda, ſubducatur vis tangentialis a tenſione fili ſecundi LK derivata: vis illa prior a gravitate oriunda eſt, ex natura Cycloïdis quam arcus GL oſculatur, $= \frac{gA}{c}$; vis altera ex tenſione fili LK ſecundum tangentem derivata $= \frac{L\pi}{Ll} \times (B+C) =$ [art. 4 hujus] $\frac{(n-2).ge}{c} \times (B+C)$; ergo vis motrix ponderis, vel potius maſſæ A, in directione tangentis $= \frac{ge}{c} \times A - \frac{(n-2).ge}{c} \times (B+C)$; dividendo igitur per maſſam A, provenit vis acceleratrix, iterumque per e, oritur ejus intenſitas

tas $= \frac{g}{c} - \frac{(n-2)g}{c} \times \left(\frac{B+C}{A}\right)$; quæ itaque = intenſitati §. 5 hujus inventæ, $\frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede}$ = [ſcribendo pro y, q, t, eorum valores art. 2°. hujus inventos] $\frac{g.(A+(m-2n+2)B+(2m-2n+2+mm-2mn)C)}{c(A+Bnn+Cmm)}$.

VIII.

Porro habetur vis motrix ponderis ſecundi B in directione tangentis in K, ſi ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tenſione fili ſecundi LK derivata, & ab aggregato auferatur vis tangentialis a tenſione fili tertii oriunda. Verum vis illa prima a pondere B in directione tangentis invenitur, ex natura Cycloïdis quam arcus MK oſculatur, radii oſculatoris in §. 3 hujus, $= \frac{e(1+(n-1)^2)gB}{nc}$; vis altera tangentialis a tenſione fili ſecundi derivata in arcu ſecundo [ope dx in §. 4 hujus] $= \frac{e(n-2)\times(gB+gC)}{nc}$; vis tertia tangentialis a tenſione fili tertii oriunda [ope ejuſdem dx] $= \frac{e(mn-2nn+2n-2)gC}{nc}$: aggregatum duarum priorum mulctatum poſteriori, dabit vim motricem corporis ſecundi $B = \frac{ge((n-1)B+(2n-m-1)C)}{c}$; quod ſi ergo dividatur per maſſam B, & per longitudinem arcus MK $= ne$; prodibit intenſitas vis acceleratricis corporis $B = \frac{g((n-1)B+(2n-m-1)C)}{ncB}$, quæ itaque eidem §. 5 hujus æquatur.

IX.

Denique vis motrix corporis tertii C, in directione tangentis arcus tertii obtinetur, ſi ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tenſione fili tertii oriunda.

Eſt

Eſt autem vis illa prior tangentialis a gravitate dependens = $\frac{e(1+(n-1)^2+(m-n)^2)gC}{mc}$ [vid. §. 3 hujus]. Et vis altera tangentialis a tenſione fili tertii proveniens $= \frac{e(mn-2nn+2n-2)gC}{mc}$. Summa harum duarum virium, dat vim motricem corporis tertii $c = \frac{ge(m-n)C}{c}$. Hoc ergo, diviſum per maſſam corporis C, & per longitudinem arcus $= me$, dat intenſitatem vis acceleratricis corporis $C = \frac{g(m-n)}{mc}$. Quæ per conſequens etiam æqualis erit intenſitati inventæ §. 5 hujus.

X.

Comparando itaque duas quaſcunque ex tribus hiſce intenſitatibus, quæ æquales, tam inter ſe, quam illi art. 5°, eſſe debent, cum ipſa illa articuli 6; habebuntur duæ æquationes, quarum ope littera m exterminari poteſt; & reſultabit æquatio ſolam incognitam n continens: quæ hæc eſt, ſalvo errore calculi: $nAAC - (2nn-6n+4)ABC + (n-2)ABB - (2nn-5n+2)ACC = (n^3-4nn+4n)(B^3+2BBC+BCC)$. Hujus autem radice n inventa, erit $m = \frac{nA}{(n-2)\times(B+C)}$.

XI.

Notandum poſſe omnino negligi conſiderationem intenſitatis, prout ea art. 5° fuit eruta, ex principio Conſervationis virium vivarum. Siquidem intenſitas ex tenſione filorum tribus modis expreſſa art. 7, 8, & 9, ex duplici comparatione primæ cum ſecunda, & primæ cum tertia, vel ſecundæ cum tertia, ſubminiſtrat duas æquationes pro duabus incognitis n & m; ex quibus, per exterminationem ipſius m, reſultabit tertia alteram tantum incognitam n continens; quæ ſi rite tractetur, dabit nobis eandem æquationem quam §. præced. invenimus.

XII.

Si tria pondera A, B, C ſunt æqualia, mutatur æquatio generalis in hanc ſpecialem, pro Pendulo trifili ponderum æqualium, $4n^3 - 12nn + 3n + 8 = 0$; eritque tunc $m = \frac{n}{2n - 4}$.

XIII.

Si vero pondus C ſit $= 0$; incidemus in æquationem Penduli bifilis; quam jam invenimus in ſuperiori §. 5, quod bonitatem methodi indicat.

XIV.

Si $A = 0$, habebitur Pendulum bifile, ſed ubi filum ſuperius eſt duplum inferioris; & in hoc caſu erit $n = 2$; quod quidem per ſe clarum eſt, ſine calculo; ſed $m = \frac{2A}{0 \times (B + C)} = 0$; hoc eſt, linea IK, etſi infinite parva, tamen infinities major eſſe debet quam HL; vel etiam poteſt n eſſe $= 0$, & tunc etiam erit $m = 0$; adeoque quieſcet Pendulum.

XV.

Si tandem $B = 0$, erit iterum Pendulum bifile, ſed cujus filum inferius eſt duplum ſuperioris; quo caſu, erit $n = \frac{5}{4} + \frac{A}{4C} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} + \frac{5A}{8C} + \frac{AA}{16CC})}$; & $m =$ &c.

XVI.

Penduli ſimplicis cum trifili iſochroni longitudo, invenitur generaliter $= \frac{mc}{m - n}$; cognitis ergo n & m, cognoſcitur quoque longitudo quæſita.

Typus

Typus alterius Solutionis PROBLEMATIS *de multifilibus Pendulis.*

Sit Pendulum quotcunque ponderum ex. gr. trium A, B, C, ſuſpenſum ex puncto D, cujus ſitus quietis ſit recta verticalis DE, ſitus quæſitus ab initio oſcillationis ABCD. Ductis horizontalibus AE, BF, CG; ſint AE $= x$, BF $= y$, CG $= 1$: ſintque longitudines filorum AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$. Demiſſis perpendicularibus BH, CI; erunt AH $= x - y$, BI $= y - 1$. TAB. LXXXVII N°. CLXXVIII *Fig.* 2.

I.

Ex natura oſcillationum minimarum patet, Pendulo multifili eundem ſitum ABCD conciliari, ſive producatur ab oſcillationibus lateralibus, ſive a gyrationibus conicis circa axem verticalem DE. Etenim, pro priori effectu requiritur, ut vires acceleratrices ponderum A, B, C, quibus ad E, F, G tendunt, ſint ſemper diſtantiis AE, BF, CG proportionales, ad id ut fiat acceſſus ſimultaneus ad axem DE; pro altero effectu pariter oportet ut vires centrifugæ, quibus pondera A, B, C, retrahuntur ab axe DE, ad id præciſe ut ſitum gyrationis conſervent, ſint quoque proportionales iiſdem diſtantiis AE, BF, CG. Quare ſitus Penduli ABCD, qui inſervit oſcillationibus ſimultaneis, inſerviet etiam gyrationibus ſimultaneis. Lubet itaque huic poſteriori ideæ tanquam faciliori inhærere, quæ nos ducet ad breviorem & clariorem ſolvendi modum.

II.

Tenſio fili AB ſola reſiſtit vi ponderis A in directione verticali, & ejuſdem vi centrifugæ in directione horizontali, quæ vires ſe habent ut BH ad HA, ſeu [quia BH in longitudine quam minimum differt a BA] ut BA ad HA. Faciendo itaque $a : x - y = A : \frac{x - y}{a} \times A$; erit $\frac{x - y}{a} \times A$ æqualis vi

 cen-

centrifugæ ponderis A. Cum autem vires centrifugæ, in gyrationibus ſimultaneis, ſint in ratione compoſita radiorum & maſſarum; faciendum eſt $xA : yB = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{a} \times \frac{y}{x} B$; erit hæc, ſeu $\frac{xy-yy}{ax} B$ æqualis vi centrifugæ ponderis B ab ipſius gyratione oriundæ. Ob eandem rationem, habetur $xA : 1C = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{ax} \times C =$ vi centrifugæ ponderis C a gyratione provenienti.

I I I.

Nunc vero, a reactione tenſionis fili B A, eædem vires laterales, quæ agunt in A ſurſum trahendo, agunt quoque in B retrahendo deorſum. Ponderi itaque B, addenda eſt vis ponderis A in directione BH verticali, ejuſque vi centrifugæ propriæ, addenda quoque vis centrifuga corporis A, ut habeatur vis totalis, qua corpus B trahitur in directione verticali, $= B + A$, & altera totalis centrifuga in directione horizontali $= \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. His autem reſiſtit tenſio fili B C, quæ, decompoſita in vim verticalem, & vim horizontalem, dat hanc analogiam: CI, vel CB, vel b: IB, vel FB — FI, vel FB — GC, vel $y - 1 = B + A : \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Hinc emergit prima æquatio $(byy + axy - bxy - ax)\, B = (bxx - axy - bxy + ax)\, A$.

I V.

Simili modo invenitur corporis C vis verticalis totalis $= C + B + A$; atque vis horizontalis æqualis tribus viribus propriis horizontalibus centrifugis corporum C, B, A; hoc eſt, $= \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$; & quia iſtis viri-

viribus reſiſtit tenſio fili A C, erit hic etiam faciendum: DG, ſeu DC, ſeu c: GC, ſeu $1 = C + B + A : \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Unde reſultat ſecunda æquatio, $(cx - cy - ax)\, C + (cxy - cyy - ax)\, B = (cxy - cxx + ax)\, A$.

V.

Ex comparatione harum duarum æquationum, dabuntur valores ipſarum x & y, & ita inventum erit quod quæritur. Ergo &c. Ad hoc autem nihil reſtat aliud quam calculus.

V I.

Ex his jam perſpicitur uniformitas methodi, pro quocunque numero filorum & ponderum. Etenim quærendæ ſunt tantum, per §. 2, ſingulorum ponderum vires propriæ centrifugæ; deinde, pro quolibet pondere, ejus vis propria centrifuga, addenda eſt ſummæ omnium corporum inferiorum virium centrifugarum, & ita habebitur vis totalis, qua pondus illud retrahitur ab axe DE in directione horizontali. Vis autem totalis, qua idem pondus verticaliter deorſum trahitur, eſt æqualis ſummæ omnium ponderum inferiorum, uſque ad pondus propoſitum incluſive ſumtorum. Quo facto, inſtituatur hæc analogia: Ut ſumma omnium illorum ponderum inferiorum, ad ſummam earundem virium centrifugarum, ita fili proxime ſuperioris longitudo, ad differentiam diſtantiæ ponderis ab axe, & diſtantiæ ponderis proxime ſuperioris; unde reſultat æquatio. Atque ita tot habebuntur æquationes, quot erunt litteræ incognitæ, una nimirum pauciores quam ſunt pondera vel fila; ex quarum æquationum comparatione determinantur incognitæ.

V I I.

In ſolutione Problematis, pro numero majori ponderum & filo-

filorum, continetur etiam ſolutio pro numero minori. Sic ſi ex. gr. ex Pendulo trifili velimus facere bifile, ponendum tantum eſt in duabus æquationibus $B = 0$, & $b = 0$; quod primam æquationem mutat in hanc $y = 1$, & alteram in hanc $(cx - cy - ax)\, C = (cxy - c^x x + ax)\, A$; quæ, ſi porro pro y ſcribatur 1, dat $(cx - c - ax)\, C = (cx - cxx + ax)\, A$; atque, in caſu ubi $c = a$, prodit $-cC = (2x - xx)\, A$, id quod dat $x = 1 \pm \surd(\frac{A+C}{A})$, ut invenimus priori modo.

VIII.

Pendulum ſimplex, quod gyrando, vel oſcillando, ſit iſochronum Pendulo multifili gyranti, vel oſcillanti, invenitur facillime; prolongando tantum filum infimum AB, donec occurrat axi in L: dico enim AL, ſeu $\frac{ax}{x-y}$, fore longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo ACBA. Res eſt manifeſta; nam filum AB, eodem modo tenditur a ſolo pondere A, ac filum prolongatum AL ab eodem tenderetur: ergo utrobique idem motus in pondere A generabitur, hoc eſt, ambo Pendula, & ſimplex LA, & compoſitum multifile DCBA, ſunt iſochrona.

IX.

Ex hac noſtra Theoria, jam non eſt difficile invenire æquationem pro natura curvæ Catenæ oſcillantis, vel gyrantis; idque ſive uniformiter, ſive non uniformiter Catena ſit gravis. Concipiatur enim ABCD tanquam polygonum infinitorum laterum, & ſumatur, a puncto infimo in axe E, pars quælibet finita EF pro abſciſſa $= z$, ipſique reſpondens applicata FB $= y$; conſidero jam FG tanquam elementum abſciſſæ $= dz$, adeoque IB $= -dy$, & elementum curvæ BC $= dt$; dicendo nempe arcum curvæ AB $= t$. Scribo autem $-dy$, quia creſcentibus abſciſſis decreſcunt applicatæ.

Sit porro ponduſculum elementi catenæ BC in puncto B collectum $= pdt$, ubi per p intelligo functionem datam arcus AB. Conſtat vero ex §. 2, vim propriam centrifugam cujuſque ponderis B eſſe $= \frac{AH}{AB} \times \frac{FB}{AE} \times B =$ [ob AH : AE = AB : AL] $\frac{AB}{AB} \times \frac{FB}{AL} \times B = \frac{FB}{AL} \times B =$ [dicendo longitudinem Penduli ſimplicis LA $= L$] $\frac{y}{L} \times pdt$. Quare ſumma omnium virium centrifugarum ab A uſque ad B, hoc eſt, $\int \frac{ypdt}{L}$, ſe habet ad ſummam omnium ponderum, hoc eſt ad $\int pdt$, ut IB ad BC, ſeu ut $-dy$ ad dt: unde emergit hæc æquatio $\frac{dt}{L} \int ypdt = -dy \int pdt$; vel etiam, quia, ob infinite parvas applicatas, non differunt longitudine arcus curvæ t ab abſciſſis z, & dt a dz, æquatio ita ſcribi poteſt [ſervando p ſicuti pro functione arcus t, ita pariter pro functione abſciſſæ z] $\frac{dz}{L} \int ypdz = -dy \int pdz$.

COROLLARIUM.

Si Catena ſit uniformiter gravis, id eſt, ſi $p = 1$, habebitur pro natura curvæ quæſitæ, hæc æquatio $dz \int ydz = -Lzdy$. Ex qua ſi quocunque modo conſtrui poſſit curva, dabit ea curvedinem Catenæ uniformiter gravis, in quolibet ſitu proximo axi, & oſcillantis vel gyrantis in tempore ſimultaneo cum Pendulo ſimplici, cujus longitudo $L =$ tangenti vel ſubtangenti curvæ in puncto infimo Catenæ.

Solutio brevior, & ſimplicior, ex natura oſcillationum petita.

I.

Tenſio fili AB = ponderi A; fili BC $= A + B$, fili CD $= A + B + C$; & ſic porro, ſi plura eſſent fila & pondera.

II.

Retentis iiſdem denominationibus, ut ſupra; Tenſio fili AB, qua retrahitur pondus A verſus B, eſt ad vim motricem, qua urgetur horizontaliter verſus E, ut AB ad AH: adeoque ea vis motrix $= \frac{x-y}{a} \times A$.

III.

Tenſio fili BC, eſt ad vim qua pondus B verſus F urgetur, ut BC ad BI: ergo ea vis erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B)$. Sed ea non eſt ipſa vis motrix ponderis B verſus F; quia enim tenſio fili præcedentis BA tantundem deorſum oblique trahit pondus B, quantum ſurſum trahit pondus A; hæc ita decompoſita facit etiam ſecundum horizontalem $\frac{x-y}{a} \times A$, quæ priori $\frac{y-1}{b} \times (A+B)$ eſt contraria; adeoque ipſa vis motrix ponderis B, erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B) - \frac{x-y}{a} \times A$, qua nimirum B verſus F urgetur.

IV.

Idem etiam de ſingulis ſuperioribus ponderibus intelligendum, ſi plura eſſent. Quare vis motrix ponderis C verſus G, erit $= \frac{1}{c} \times (A+B+C) - \frac{y-1}{b} \times (A+B)$.

V.

Vires iſtæ motrices diviſæ per ſua reſpective pondera, quæ movenda habeat, dabunt eorum vires acceleratrices; nempe vis acceleratrix ponderis $A = \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{A}$ ſeu $\frac{x-y}{a}$; ponderis B $= \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{B}) - \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{B}$; ponderis $C = \frac{1}{c} \times (\frac{A+B+C}{C}) - \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{C})$: & ſic porro.

VI.

Verum, ob ponderum iſochroniſmum, debent hæ vires acceleratrices, poni proportionales diſtantiis, vel ſpatiis percurrendis AE, BF, CG, &c. hoc eſt, debent earum intenſitates eſſe æquales. Quamobrem, diviſæ per diſtantias ſuas, erunt omnes inter ſe æquales, nempe $\frac{x-y}{ax} = \frac{y-1}{by} \times (\frac{A+B}{B}) - \frac{x-y}{ay} \times \frac{A}{B} = \frac{1}{c \times 1} \times (\frac{A+B+C}{C}) - \frac{y-1}{b \times 1} \times (\frac{A+B}{C})$; & ita porro. Unde patet tot haberi æquationes, quot ſunt litteræ incognitæ. *Q. E. I.*

COROLLARIUM I.

Hac methodo, quæ omnium eſt naturaliſſima, pari facilitate determinatur curvatura Catenæ oſcillantis, qua id peregimus per præcedentem methodum. Cum enim tenſio cujuſlibet elementi Catenæ ſit $= \int p\,dt$, quæ dat vim trahendi B ad F $= \frac{-dy}{dt} \int p\,dt$, hujuſque differentiale $d(\frac{-dy}{dt} \int p\,dt) =$ vi motrici; quam dividendo per elementum ponderis $p\,dt$, habetur vis acceleratrix; iterumque per diſtantiam y, habetur intenſitas $\frac{d(\frac{-dy}{dt} \int p\,dt)}{y\,p\,dt} =$ conſtanti $\frac{1}{L}$; adeoque $d(\frac{-dy}{dt} \int p\,dt) = \frac{y\,p\,dt}{L}$; atque integrando $-dy \int p\,dt = \frac{dt}{L} \times \int y\,p\,dt$, ut prius.

COROLLARIUM II.

Si tria ſint pondera æqualia, ut & fila æqualia. Invenietur hæc æquatio $4x^3 - 12xx - 15x + 2 = 0$: cujus radix dat EA, eaque inventa habetur FB. Vel etiam reducetur quæſtio ad hanc æquationem $4y^3 - 12yy + 3y + 8 = 0$; cujus radix dat FB, & ex hac fluit EA.