No. CLIX.

RESOLUTIO

Binomii $1 \pm x^n$ *in suos Factores reales duarum dimensionum.*

Sit primo n numerus par, adhibito signo superiori $+$, a cujus quippe resolutione etiam resolutio reliquorum Casuum dependet. Hunc in finem, formo Tabellam sequentem, quæ incipit a simplicissimis & ad magis compositos progreditur, unde aliqua progressionis Lex elucescet.

TAB. I.

1 $1+xx = 1+xx$

2 $1+x^4 = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2})$

3 $1+x^6 = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3})$

4 $1+x^8 = (1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{2})})$

5 $1+x^{10} = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).$
$(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})})$

6 $1+x^{12} = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2}).(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{3})})$

7 $1+x^{14} = (1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).$
$(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$

NB. Litteræ p, q & r determinantur per tres sequentes æquationes $pp+qq+rr=7$
$ppqq+pprr+qqrr=14$
$ppqqrr=7$

1+

9 $1+x^{16} = (1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$

8 $1+x^{18} = (1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx$
$-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx).(1+xx+sx).(1+xx-sx).$

NB. Litteræ p, q, r & s determinantur per compendium ita:

$1+x^{18} = (1+x^6).(1-x^6+x^{12}) = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx$
$-x\sqrt{3}).(1+x^4+pxx).(1+x^4+qxx).(1+x^4+rxx)$

ubi p, q & r sunt tres radices hujus æquationis $z^3 - 3z + 1 = 0$, quarum minima est Chorda decimæ octavæ partis circumferentiæ, media est Chorda $\frac{5}{18}$ circumferentiæ, & maxima negative sumenda est Chorda $\frac{7}{18}$ circumferentiæ. Est vero

$1+x^4+pxx = (1+xx+x\sqrt{(2-p)}).(1+xx-x\sqrt{(2-p)})$
$1+x^4+qxx = (1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)})$
$1+x^4+rxx = (1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)})$

Adeoque

$1+x^{18} = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3}).(1+xx+x\sqrt{(2-p)}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2-p)}).(1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)}).$

SCHOLIUM.

Constructio hujus Tab. I fundatur in hac altera

TAB. II.

3 $1+x^6 = (1+xx).(1-xx+x^4)$

5 $1+x^{10} = (1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8)$

7 $1+x^{14} = (1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12})$

9 $1+x^{18} = (1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16})$

11 $1+x^{22} = (1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16}-x^{18}+x^{20})$

13 $1+x^{26} = (1+xx).(1-xx+$ &c. .)

&c. &c. = &c. &c.)

Ut autem factores compositi $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+$&c. resolvantur in simplices, incipiatur a primo $1-xx+x^4$, qui

O 2 ponatur

ponatur $=(1+xx+px).(1+xx-px)$, unde erit $1-xx+x^4$ $=1+(2-p^2)xx+x^4$, id quod dat $p=\sqrt{3}$; & ſic erit $1-xx$ $+x^4=(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3})$. Ponatur jam $1-xx+x^4-x^6+x^8=(1+xx+px).(1+xx-px).$ $(1+xx+qx).(1+xx-qx)$; quod actu multiplicatum facit

$$\begin{array}{llllll} 1-xx+x^4-x^6+x^8= & 1 & +4xx & +6x^4 & +4x^6 & +x^8, \text{ hinc}, \\ & & -pp & -2pp & -pp & \\ & & -qq & -2qq & -qq & \\ & & & +ppqq & & \end{array}$$

comparatis terminis homogeneis, habetur $4-pp-qq=$ -1, $6-2pp-2qq+ppqq=+1$; ex priori fit $pp+qq$ $=5$, ex poſteriori autem $ppqq=5$, ſeu $pq=\sqrt{5}$ & $2pq$ $=2\sqrt{5}$; proinde $pp\pm 2pq+qq=5\pm 2\sqrt{5}$; extractaque radice $p\pm q=\sqrt{(5\pm 2\sqrt{5})}$, hinc $(p+q).(p-q)$ ſive $pp-qq$ $=\sqrt{5}$, addendo itaque & ſubtrahendo ipſi $pp+qq=5$, oritur $2pp=5+\sqrt{5}$, & $2qq=5-\sqrt{5}$, tandemque $p=\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$ $\sqrt{(5+\sqrt{5})}$ & $q=\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}$. Quibus ſubſtitutis erit $1-xx$ $+x^4-x^6+x^8=(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx-$ $x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}).(1+xx-$ $x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})})$.

NB. Poſſunt valores ipſarum pp & qq determinari hac æquatione $zz-5z+5=0$.

Porro ponatur $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}=$ $(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx$ $-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$; quibus actu multiplicatis, habetur $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}=$

$$\begin{array}{lllllll} 1+ & 6xx & +15x^4 & +20x^6 & +15x^8 & +6x^{10} & +x^{12} \\ & -pp & -4pp & -6pp & -4pp & -pp & \\ & -qq & -4qq & -6qq & -4qq & -qq & \\ & -rr & -4rr & -6rr & -4rr & -rr & \\ & & +ppqq & +2ppqq & +ppqq & & \\ & & +pprr & +2pprr & +pprr & & \\ & & +qqrr & +2qqrr & +qqrr & & \\ & & & -ppqqrr & & & \end{array}$$

Collatis

Collatis terminis homogeneis, emergit $pp+qq+rr=7$, $ppqq+pprr+qqrr=14$, & $ppqqrr=7$. Valores litterarum pp, qq, rr, habentur ſumendo tres radices hujus æquationis z^3 $-7zz+14z-7=0$. Obſervando legem progreſſionis, inveniuntur factores ſequentis $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}$ $+x^{12}-x^{14}+x^{16}$; adhibitis nempe pp, qq, rr, ss, erit illa $=$

$$\begin{array}{lllllllll} 1+ & 8xx & +28x^4 & +56x^6 & +70x^8 & +56x^{10} & +28x^{12} & +8x^{14} & +x^{16} \\ & -pp & -6pp & -15pp & -20pp & -15pp & -6pp & -pp & \\ & -qq & -6qq & -15qq & -20qq & -15qq & -6qq & -qq & \\ & -rr & -6rr & -15rr & -20rr & -15rr & -6rr & -rr & \\ & -ss & -6ss & -15ss & -20ss & -15ss & -6ss & -ss & \\ & & +ppqq & +4ppqq & +6ppqq & +\&c. & +\&c. & & \\ & & +pprr & +4pprr & +6pprr & \&c. & \&c. & & \\ & & +ppss & +4ppss & +6ppss & & & & \\ & & +qqrr & +4qqrr & +6qqrr & & & & \\ & & +qqss & +4qqss & +6qqss & & & & \\ & & +rrss & +4rrss & +6rrss & & & & \\ & & & -ppqqrr & -2ppqqrr & & & & \\ & & & -ppqqss & -2ppqqss & & & & \\ & & & -pprrss & -2pprrss & & & & \\ & & & -qqrrss & -2qqrrss & & & & \\ & & & & +ppqqrrss & & & & \end{array}$$

Ex comparatione homogeneorum prodit $pp+qq+rr+ss$ $=9$, $ppqq+pprr+ppss+qqrr+qqss+rrss=27$, $ppqqrr$ $+ppqqss+pprrss+qqrrss=30$, $ppqqrrss=9$. Quare quatuor Radices hujus æquationis $z^4-9z^3+27zz-30z+9=0$; dabunt valores litterarum pp, qq, rr, ss.

Conjectis iſtis Valoribus litterarum pp, qq, rr, &c. pro quolibet caſu in Tabellam; apparebit illa ut ſequitur.

T A B. III.

Pro caſu
- Tertio $1+x^6$ habetur $z-3=0$
- Quinto $1+x^{10}$ .... $zz-5z+5=0$
- Septimo $1+x^{14}$ .... $z^3-7zz+14z-7=0$
- Nono $1+x^{18}$ .... $z^4-9z^3+27zz-30z+9=0$
- Undecim. $1+x^{22}$ .... $z^5-11z^4+44z^3-77zz+55z$ $-11=0$.

 Gene-

Generaliter vero hos Caſus determinare licet, faciendo ;
$1 + x^{4n+2} = (1+xx).\ (1 - xx + x^4 - x^6 \ldots\ldots x^{4n})$
tum ponendo $1 - xx + x^4 - x^6 \ldots\ldots x^{4n} = (1+xx+px).\ (1+xx-px).\ (1+xx+qx).\ (1+xx-qx).\ (1+xx+rx).\ (1+xx-rx)$. &c. Prodibit obſervata lege progreſſionis, quæ in eo conſiſtit, ut numeri puri præfixi poteſtatibus xx, x^4, x^6 &c. ſint coëfficientes terminorum binomii ad $2n$ elevati, deinde numeri præfixi litteris pp, qq, rr &c. coëfficientes ſint binomii ad $2n-2$ elevati, poſtea numeri ipſis $ppqq$, $pprr$, &c. coëfficientes binomii ad $2n-4$ elevati, & ita porro; hæc æquatio

$$(1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots\ldots x^{4n}) =$$
$$1 + \frac{2n}{1}xx + \frac{2n.2n-1}{1.2}x^4 + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}x^6 + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}x^8 + \&c.$$
$$= P - \frac{2n-2}{1}P - \frac{2n-2.2n-3}{1.2}P - \frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3.}P$$
$$+ Q + \frac{2n-4}{1}Q \qquad + \frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q$$
$$+ R \qquad - \frac{2n-6}{1}R$$
$$+ S$$

Intelligo per P ſummam omnium $pp + qq + rr +$ &c. per Q ſummam omnium productorum ex ſingulis binis $ppqq + pprr + qqrr +$ &c. per R ſummam omnium productorum ex ſingulis ternis $ppqqrr +$ &c. per S ſummam omnium ex ſingulis quaternis $ppqqrrss +$ &c. per T ſummam omnium ex ſingulis quinis $ppqqrrsstt +$ &c. Et ita deinceps.

$$\text{Hinc ponendo}\left.\begin{matrix}\frac{2n}{1}\\ -P\end{matrix}\right\} = -1,\ \left.\begin{matrix}+\frac{2n.2n-1}{1.2}\\ -\frac{2n-2}{1}P\\ +Q\end{matrix}\right\} = +1.$$

+2n.

$$\left.\begin{matrix}+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\\ -\frac{2n-2.2n-3}{1.2}P\\ +\frac{2n-4}{1}Q\\ -R\end{matrix}\right\} = -1,\ \left.\begin{matrix}+\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}\\ -\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3}P\\ +\frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q\\ -\frac{2n-6}{1}R\\ +S\end{matrix}\right\} = +1.\ \&c.$$

Invenientur ſucceſſive ſingula P, Q, R, S, T, &c. poſteriora ex prioribus; erit namque
$P = 2n + 1.$
$Q = (2n-2)P - \frac{2n.2n-1}{1.2} + 1,$
$R = (2n-4)Q - \frac{2n-2.2n-3}{1.2}P + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3} + 1,$
$S =$ &c.

Ut nunc determinentur etiam caſus comprehenſi ſub num. 2, 4, 6, &c. Tab. I, ubi exponens poteſtatis xx eſt numerus pariter par, qui in hactenus pertractatis erat impariter par, conſideranda eſt Tabula ſequens.

T A B. IV.

Pro caſu

- Secundo $1+x^4 = (1+xx+px).(1+xx-px)$
- Quarto $1+x^8 = (1+xx+px).(1+xx-px).$
  $(1+xx+qx).(1+xx-qx)$
- Sexto $1+x^{12} = (1+xx+px).(1+xx-px).$
  $(1+xx+qx).(1+xx-qx).$
  $(1+xx+rx).(1+xx-rx)$
- ⋮
- $2n^o$. $1+x^{4n} = (1+xx+px).(1+xx-px).$
  $(1+xx+qx).(1+xx-qx).$
  $(1+xx+rx).(1+xx-rx).$
  &c. &c.

ad.

adhibendo tot litteras p, q, r &c. quot ſunt unitates in n.

Hoc modo acquiritur per actualem multiplicationem, quod ſequitur in Tab. V.

T A B. V.

$$
\begin{array}{l|l}
2 & 1+x^4 = 1+2xx+x^4 \\
 & \qquad\quad -pp \\
4 & 1+x^8 = 1+4xx+6x^4+4x^6+x^8 \\
 & \qquad\quad -pp-2pp-pp \\
 & \qquad\quad -qq-2qq-qq \\
 & \qquad\qquad\quad +ppqq \\
6 & 1+x^{12} = 1+6xx+15x^4+20x^6+15x^8+6x^{10}+x^{12} \\
\vdots & \qquad\quad -pp-4pp-6pp-4pp-pp \\
\vdots & \qquad\quad -qq-4qq-6qq-4qq-qq \\
\vdots & \qquad\quad -rr-4rr-6rr-4rr-rr \\
\vdots & \qquad\qquad\quad +ppqq+2ppqq+ppqq \\
\vdots & \qquad\qquad\quad +pprr+2pprr+pprr \\
\vdots & \qquad\qquad\quad +qqrr+2qqrr+qqrr \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad -ppqqrr \\
2n & 1+x^{4n} = 1+\frac{2n}{1}xx+\frac{2n.2n-1}{1.2}x^4+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}x^6+\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}x^8+\&c. \\
 & \qquad\quad -P-\frac{2n-2}{1}P-\frac{2n-2.2n-3}{1.2}P-\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3}P \\
 & \qquad\qquad\quad +Q+\frac{2n-4}{1}Q+\frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad -R-\frac{2n-6}{1}R \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +S
\end{array}
$$

Hic ex comparatione homogeneorum patet, coëfficientes terminorum intermediorum ponendos eſſe $=0$, hoc eſt

$$
\left.\begin{matrix} 2n \\ -P \end{matrix}\right\}=0, \quad \left.\begin{matrix} \frac{2n.2n-1}{1.2} \\ -\frac{2n-2}{1}P \\ +Q \end{matrix}\right\}=0,
$$

$$
\left.\begin{matrix} \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3} \\ -\frac{2n-2.2n-3}{1.2}P \\ +\frac{2n-4}{1}Q \\ -R \end{matrix}\right\}=0, \quad \left.\begin{matrix} \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4} \\ -\frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3}P \\ +\frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q \\ -\frac{2n-6}{1}R \\ +S \end{matrix}\right\}=0, \&c.
$$

Hoc pacto inveniuntur P, Q, R, S, T, &c. poſteriora ex prioribus, nempe.

$$P=2n$$

$$Q=(2n-2)P-\frac{2n.2n-1}{1.2}$$

$$R=(2n-4)Q-\frac{2n-2.2n-3}{1.2}P+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3};$$

$$S=\&c.$$

Id ſi ad caſus ſpeciales ſucceſſive applicetur, obtinebitur.

T A B. VI.

$$
\text{Pro caſu}\left\{\begin{array}{ll}
\text{Secundo} & 1+x^4 \ldots z-2=0. \\
\text{Quarto} & 1+x^8 \ldots zz-4z+2=0. \\
\text{Sexto} & 1+x^{12} \ldots z^3-6zz+9z-2=0. \\
\text{Octavo} & 1+x^{16} \ldots z^4-8z^3+20zz-16z+2=0. \\
\text{Decimo} & 1+x^{20} \ldots z^5-10z^4+35z^3-50zz+25z \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -2=0.
\end{array}\right.
$$

Harum æquationum radices dant ſuas reſpective quantitates pp, qq, rr &c.

Quod nunc attinet ad eaſdem illas formulas, adhibito ſigno negativo $-$, & exiſtente n numero pari, liquet eas reſolvi poſſe ut exhibet Tabula ſequens.

TAB. VII.

1	$1 - xx = 1 - xx$ seu $(1+x).(1-x)$
2	$1 - x^4 = (1-xx).(1+xx)$
3	$1 - x^6 = (1-xx).(1+xx+x^4)$
4	$1 - x^8 = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6) = (1-xx).(1+xx).(1+x^4)$
5	$1 - x^{10} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8)$
6	$1 - x^{12} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10})$
	$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4+x^8)$
7	$1 - x^{14} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})$
8	$1 - x^{16} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14})$
	$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4+x^8+x^{12})$
	$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4).(1+x^8)$
9	$1 - x^{18} = (1+xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}+x^{16})$
10	$1 - x^{20} = (1-xx).(1+xx+x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots +x^{16}+x^{18})$
	$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16})$.

Qui casus omnes, ceu liquet, resolvuntur per Methodum ad Tab. III. explicatam.

SCHOLIUM.

Possunt etiam resolvi primo in factores duos dimensionis dimidiæ, & deinde qui gaudet signo $-$ & numero dimensionis pari iterum in duos factores dimensionis dimidiæ, idque iterum donec ad dimensionem imparem perveniatur; atque ita tandem res reducta sit ad resolutionem binomiorum dimensionis imparis, quod negotii post Exemplum aliquod aggrediemur.

Sit ex. gr. $1 - x^{20}$ resolvendum: Ponatur $1 - x^{20} = (1+x^{10}).(1-x^{10}) = (1+x^{10}).(1+x^5).(1-x^5)$; Primus istorum factorum $1+x^{10}$ resolutus est in superioribus, reliqui duo resolventur per nunc tradenda.

TAB. VIII.

Continens resolutionem binomiorum potestatum imparium.

1	$1 \pm x = 1 \pm x$.
2	$1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx)$
3	$1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4)$
4	$1 \pm x^7 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6)$

Hi autem factores resolvuntur simili modo ut supra factum post Tab. III, vel quod commodius est: Fiat $x = yy$, hoc enim modo reducuntur formulæ ad exponentes pares dimensionum, habebitur nempe

1	$1 \pm x = 1 \pm x = 1 \pm yy$
2	$1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx) = (1 \pm yy).(1 \mp yy + y^4)$
3	$1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4) = (1 \pm yy).$
	$(1 \mp yy + y^4 \mp y^6 + y^8)$

Ergo &c.

N°. CLX.

INVESTIGATIO & DEMONSTRATIO THEOREMATIS COTESIANI.

Inter Opuscula postrema *Rogeri* COTESII apud *Cantabrigienses* Professoris, collecta & edita ab ejus Successore *Roberto* SMITH, reperitur aliquod Theorema ad Cyclometriam pertinens, quod SMITHIUS exposuit, sed sine demonstratione, verbis sequentibus.

„ Si quærantur factores Binomii $a^\lambda \pm x^\lambda$, indice λ existente TAB. LXXVIII.
„ quolibet integro; dividatur circuli circumferentia ABCD, N°. CLX.
„ cujus centrum O, in totidem partes æquales AB, BC, *Fig.* 1 & 2.
„ CD, DE, EF, &c. quot sint unitates in 2λ, & ab om-

„ nibus diviſionibus ad punctum quodvis P in O A radio, ſi
„ opus producto, ſitum, ducantur rectæ AP, BP, CP, DP,
„ EP, FP, &c; deinde poſitis $OA = a$, $OP = x$; con-
„ tentum ſub omnibus AP, CP, EP, &c. ſumtis a diviſio-
„ nibus alternis per integrum circuitum, adæquabit $a^{\lambda} - x^{\lambda}$ vel
„ $x^{\lambda} - a^{\lambda}$, prout P fuerit intra vel extra circulum: & conten-
„ tum ſub reliquis BP, DP, FP, &c. in locis reliquis al-
„ ternis, adæquabit $a^{\lambda} + x^{\lambda}$. Exempli gratia, ſi λ ſit 5; divi-
„ datur circumferentia in 10 partes æquales, eritque $AP \times$
„ $CP \times EP \times GP \times IP = OA^5 - OP^5$, exiſtente P in-
„ tra circulum: Et $BP \times DP \times FP \times HP \times KP = OA^5$
„ $+ OP^5$. Similiter ſi λ ſit 6; diviſa circumferentia in 12
„ partes æquales, erit $AP \times CP \times EP \times GP \times IP \times LP$
„ $= OA^6 - OP^6$, exiſtente P intra circulum: Et $BP \times$
„ $DP \times FP \times HP \times KP \times MP = OA^6 + OP^6$.

Hujus Theorematis, haud ſane inelegantis, demonſtrationem ſuppreſſerat COTESIUS, nec eam dederat SMITHIUS. Exhibuit poſtea aliquam PEMBERTONUS, eidem Libro *Coteſiano* * inſertam, ſed tam longam, tam intricatam, ut tædioſum ſit examinare, utrum omnia recte ſe habeant, nulluſque lateat paralogiſmus. Felicioribus vero auſpiciis rem aggreſſus Clariſſimus MOIVREUS, Vir profunde doctus atque in analyticis verſatiſſimus, dedit hujus Theorematis eruendi viam expeditiſſimam, & quidem ad alia hujus generis longiſſime ſe porrigentem, quouſque impar Adverſarius penetrare non poterat. Methodus *Moivreana* petita eſt ex natura Serierum, ut vocat, recurrentium, quæ licet in obſcuriſſimis diſquiſitionibus plerumque magno ſint auxilio, nonnullis tamen iſta operandi methodus non ſatis naturalis eſſe videtur. Quare ſtatim ſuſpicabar perveniri poſſe modo directo, & ſine magno labore, ad veritatem Theorematis *Coteſiani*, ope Seriei univerſalis, quam olim dedi, pro dividendo arcu circulari in partes quotcun-

que

* In *Epiſtola ad amicum de* COTESII *inventis*, Lond. 1722. 4°.

que æquales. Etenim in *Actis Lipſ.* anni 1701, p. 171. * illa Series conſpicitur, ubi poſitis radio circuli $= 1$, chorda arcus dati $= a$, chorda arcus ſubmultipli $= z$, chorda ejus complementi ad ſemicirculum $= \sqrt{(4 - zz)} = y$, erit [ſupponendo arcum dividendum eſſe in partes numero n] æquatio generalis quæ ſequitur $a = zy^{n-1} - \frac{n-2}{1} zy^{n-3}$

$$+ \frac{n-3 . n-4}{1 . 2} zy^{n-5} - \frac{n-4 . n-5 . n-6.}{1 . 2 . 3} zy^{n-7} + \&c.$$

Eſto jam $a = 0$, hoc eſt, ſit vel tota circumferentia, vel dupla circumferentia, vel tripla, vel quadrupla, vel &c. ſecanda in partes numero n; utpote in quibus ſingulis caſibus ſit $a = 0$; erit dividendo per z, hæc æquatio

$$0 = y^{n-1} - \frac{n-2}{1} y^{n-3} + \frac{n-3 . n-4}{1 . 2} y^{n-5} - \frac{n-4 . n-5 . n-6}{1 . 2 . 3} y^{n-7}$$
$$+ \frac{n-5 . n-6 . n-7 . n-8}{1 . 2 . 3 . 4} y^{n-9} - \&c.$$

cujus adeo radices y, ſeu $\sqrt{(4 - zz)}$ determinant non tantum z, ſeu chordam arcus ſubmultipli, ſed etiam chordas hujus arcus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, ſextupli, &c., quia ſinguli hi arcus conſtituunt partes ſimiles circumferentiæ, vel ſimplæ, vel duplæ, vel triplæ, vel quadruplæ, vel quintuplæ, vel ſextuplæ &c. Hoc eſt, ſi æquatio exprimatur per zz ejuſque poteſtates, concipiaturque Polygonum regulare laterum n circulo inſcriptum; deſignabunt radices æquationis quadratum, tum lateris, tum ſingularum diagonalium.

Sit ex. gr. $n = 7$, hoc eſt, ſit Heptagonum circulo inſcriptum, æquatio noſtra univerſalis abit in hanc $0 = y^6 - 5y^4 + 6yy - 1$, & ſubſtituto $4 - zz$ pro yy, prodibit hæc altera $0 = z^6 - 7z^4 + 14zz - 7$, cujus tres radices zz indicabunt quadratum, tum lateris Polygoni, tum utriuſque diagonalium: ſunt enim in Heptagono duo diagonalium reſpective æqualium paria. Vocentur ergo quadratum lateris $= pp$, quadratum diagonalis minoris $= qq$, & quadratum diagonalis majoris $= rr$,

P 3 erit,

* N°. LXIX. pag. 387, *Tom. I.*

erit, ex natura æquationum, $pp+qq+rr=7$, $ppqq+pprr+qqrr=14$, & $ppqqrr=7$. Formetur Tabula ejusmodi æquationum valores ipsarum z determinantium, pro assumtione successiva numeri n; quæ ita se habebit pro imparibus, & pro paribus.

Pro numeris imparibus formabitur

T A B. I.

$$\text{Assumto numero}\begin{cases} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ n=9 \\ n=11 \end{cases}\text{prodibit}\begin{cases} zz-3=0 \\ z^4-5zz+5=0 \\ z^6-7z^4+14zz-7=0 \\ z^8-9z^6+27z^4-30zz+9=0 \\ z^{10}-11z^8+44z^6-77z^4+55zz-11=0 \end{cases}$$

Pro numeris paribus, formabitur hæc altera

T A B. II.

$$\text{Assumto numero}\begin{cases} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ n=12 \end{cases}\text{prodibit}\begin{cases} zz-2=0 \\ z^4-4zz+3=0 \\ z^6-6z^4+10zz-4=0 \\ z^8-8z^6+21z^4-20zz+5=0 \\ z^{10}-10z^8+36z^6-56z^4+35zz-6=0 \end{cases}$$

Ex quibus patet numeros postremos [quibus pro scopo nostro opus habemus] semper æquales esse numeris n quibus respondent in imparibus, semisses vero esse numerorum n quibus respondent in paribus. Unde concludendum, in quolibet Polygono regulari imparium laterum productum ex quadrato lateris omnibusque quadratis diagonalium in semicirculo contentarum, seu, quod tantundem est, productum ex omnibus diagonalibus totius Polygoni duobusque lateribus, esse æquale potentiæ, tot vicibus sumtæ quot sunt latera, radii circuli Polygono circumscripti, cujus potentiæ exponens est numerus laterum minus unitate. Ita si numerus laterum Polygoni sit quilibet impar $2m+1$; voceturque radius circuli Polygono circumscripti $=c$, erit factum illud ex diagonalibus omnibus & duobus lateribus $=(2m+1)\times c^{2m}$.

Concluditur porro productum illud in Polygonis parium laterum, æquari potentiæ, dimidio tot vicibus sumtæ quot sunt latera, radii circuli Polygono circumscripti, cujus exponens est numerus laterum demto binario. Posito namque numero laterum $2m$, dictoque radio $=c$, erit productum $=m\times c^{2m-2}$.

Sciendum autem hic non computari diametrum pro diagonali, etsi omnium diagonalium sit maxima; id quod ex eo venit, quia æquatio superior $0=y^{n-1}-\frac{n-2}{1}y^{n-3}+\frac{n-3.n-4}{1.2}y^{n-5}$ &c, in casu numerorum parium, divisa fuit per y, unde & ipsa $y=0$, seu $\sqrt{(4-zz)}=0$, quæ dat $z=2$, quæque adeo est ex numero radicum, sequestrata fuit. Quod itaque diameter etiam in numerum diagonalium referenda sit, [uti certe referri debet,] oportet tantum multiplicare adhuc $m\times c^{2m-2}$ per $2c$, & ita productum totale erit $=2m\times c^{2m-1}$. Unde generaliter, in numeris paribus æque ac imparibus, res eodem modo se habet, atque in forma Theorematis ita enunciari potest.

T H E O R E M A.

In Polygono regulari quocunque, cujus numerus laterum $=$ n; *& radius circuli circumscripti* $=$ c; *factum ex omnibus diagonalibus & binis lateribus contiguis, tanquam etiam diagonalibus consideratis, erit* $=\mathrm{n}\,\mathrm{c}^{\mathrm{n}-1}$, *hoc est, æquale potentiæ radii [cujus exponens* n $-$ 1 *] tot vicibus sumtæ quot sunt unitates in* n.

Hoc Theorema viam sternit ad demonstrandum Theorema *Cotesianum*; quod nunc suscipimus, præmittendo Lemma sequens.

L E M-

L E M M A.

TAB. LXXVIII. N°. CLX. Fig. 3.

Sit in circulo ACE, *cujus centrum* O, *chorda qualibet* AC *ad extremitatem diametri* AE *ducta, sitque punctum* P *datum & invariabile in diametro, a quo tendat recta* PC: *dico fore* $PC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

D E M O N S T R A T I O.

Demisso perpendiculo CI, habetur $PC^2 = AC^2 + AP^2 - 2AP \times AI = AC^2 + AP^2 - \frac{2AP}{2AO} \times AI \times AE = AC^2 + AP^2 - \frac{AP}{AO} \times AC^2 = \frac{AO - AP}{AO} \times AC^2 + AP^2 = AP^2 + \frac{OP}{AO} \times AC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$. *Q. E. D.*

COROLL. I. Hinc etiam ducta CE chorda complementi ad semicirculum; erit $PC^2 = EP^2 - \frac{OP}{OE} \times CE^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

COROLL. II. Proinde $(PC^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2$; ut & $(-PC^2 + EP^2) \times \frac{OE}{OP} = CE^2$.

COROLL. III. Nec non $(EP^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4OE^2$.

His ita demonstratis, sit ut in præcedentibus $AC = z$, $CE = y$, $OA = OE = 1$, $OP = x$; & præterea $PC = t$, $AP = 1 - x = g$; erit $zz = \frac{1}{x} \times (tt - gg)$. Hoc valore ipsius zz successive substituto in æquationibus Tabularum primæ & secundæ, prodibit, retentis primo & ultimo termino quibus opus habemus, ac neglectis intermediis in quibus variabilis

riabilis *tt* reperitur, pro Polygonis imparium & parium laterum Tabula sequens.

T A B. III.

Pro imparibus.

$$\text{Posito}\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ n=9 \\ n=11 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{n}tt - \frac{1}{x}gg - 3 = 0. \\ +\frac{1}{nn}t^4 \ldots + \frac{1}{xx}g^4 + \frac{5}{x}gg + 5 = 0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6 \ldots - \frac{1}{x^3}g^6 - \frac{7}{xx}g^4 - \frac{14}{x}gg - 7 = 0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8 \ldots + \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{9}{x^3}g^6 + \frac{27}{xx}g^4 + \frac{30}{x}gg + 9 = 0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10} \ldots - \frac{1}{x^5}g^{10} - \frac{11}{x^4}g^8 - \frac{44}{x^3}g^6 - \frac{77}{xx}g^4 - \frac{55}{x}gg - 11 = 0 \end{array}\right.$$

T A B. IV.

Pro paribus.

$$\text{Posito}\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ n=12 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{x}tt - \frac{1}{x}gg - 2 = 0 \\ +\frac{1}{xx}t^4 \ldots + \frac{1}{xx}g^4 + \frac{4}{x}gg + 3 = 0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6 \ldots - \frac{1}{x^3}g^6 - \frac{6}{xx}g^4 - \frac{10}{x}gg - 4 = 0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8 \ldots + \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{8}{x^3}g^6 + \frac{21}{xx}g^4 + \frac{20}{x}gg + 5 = 0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10} \ldots - \frac{1}{x^5}g^{10} - \frac{10}{x^4}g^8 - \frac{36}{x^3}g^6 - \frac{56}{xx}g^4 - \frac{35}{x}gg - 6 = 0 \end{array}\right.$$

In duabus his Tabulis videre est, coëfficientes numerales esse eosdem qui conspiciuntur in Tab. I, & II, cujus quidem necessitas ex constructione ipsarum Tabularum statim apparet; hoc tantum discrimine, quod ibi sint signa alternantia, hic vero contigua. Nunc in hoc substituantur valores ipsius gg, ejusque po-

poteſtatum, qui ſunt $gg = 1 - 2x + xx$, $g^4 = 1 - 4x + 6xx - 4x^3 + x^4$, $g^6 = 1 - 6x + 15xx - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$, $g^8 = 1 - 8x + 28xx - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$, $g^{10} = 1 - 10x + 45xx - 120x^3 + 210x^4 - 252x^5 + 210x^6 - 120x^7 + 45x^8 - 10x^9 + x^{10}$, & ſic porro. Quo facto mutabitur Tabula præcedens in hunc alteram.

TAB. V.

Pro imparibus

$$\text{Poſito}\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ \\ n=9 \\ \\ n=11 \\ \\ \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}gg + 3 = (1 + x + xx) : x \\ \frac{1}{xx}g^4 + \frac{5}{x}gg + 5 = (1 + x + xx + x^3 + x^4) : xx \\ \frac{1}{x^3}g^6 + \frac{7}{xx}g^4 + \frac{14}{x}gg + 7 \\ \quad = (1 + x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) : x^3 \\ \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{9}{x^3}g^6 + \frac{27}{xx}g^4 + \frac{30}{x}gg + 9 \\ = (1 + x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8) : x^4 \\ \frac{1}{x^5}g^{10} + \frac{11}{x^4}g^8 + \&c. \ldots \\ = (1 + x + xx + \ldots\ldots x^{10}) : x^5 \end{array}\right.$$

TAB. VI.

Pro paribus.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ \\ n=12 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}gg + 2 = (1 + xx) : x \\ \frac{1}{xx}g^4 + \frac{4}{x}gg + 3 = (1 + xx + x^4) : xx \\ \frac{1}{x^3}g^6 + \frac{6}{xx}g^4 + \frac{10}{x}gg + 4 = (1 + xx + x^4 + x^6) : x^3 \\ \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{8}{x^3}g^6 + \frac{21}{xx}g^4 + \frac{20}{x}gg + 5 \\ \quad = (1 + xx + x^4 + x^6 + x^8) : x^4 \\ \frac{1}{x^5}g^{10} + \frac{10}{x^4}g^8 + \ldots = (1 + xx + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) : x^5 \end{array}\right.$$

Cum

Cum igitur in Tab. III, æquationum termini ultimi & invariabiles deſignent productum omnium radicum $\frac{1}{x}tt$, hoc eſt, omnium quadratorum linearum PC ex puncto fixo P ductarum in angulos ſingulos Polygoni in alterutro ſemicirculo contentos, diviſo quolibet quadrato per x, vel, quod idem eſt, productum linearum ipſarum ad ſingulos angulos totius Poligoni ductarum, exceptis tamen illis [vel una in Polygono imparium laterum, vel utraque in Polygono parium laterum] quæ ad angulos diametro contiguos ducuntur, diviſa interim unaquaque linea per $\sqrt{x}$, vel quod perinde eſt, diviſo producto ipſo per x elevatum ad ſemi-numerum omnium linearum ad angulos totius Polygoni [exceptis diametro contiguis] eductarum. Hinc ergo liquet, ſi omiſſis x, xx, x^3, &c. quæ dividunt tt, t^4, t^6, &c. ab una parte & ab altera parte ipſa illa producta, utpote utrobique ejuſdem dimenſionis, ſumantur producta illa, & æquentur quantitatibus iſtis cuique numero n competentibus $1 + x + xx + x^3$ &c. pro imparibus, & $1 + xx + x^4 + x^6$ &c. pro paribus; fore, pro quolibet numero impare $2m + 1$, productum omnium linearum in angulos ductarum, excepta ea quæ in angulum diametro contiguum ducitur, $= 1 + x + xx + x^3 \ldots + x^{2m}$, & pro quolibet numero pari $2m$, factum ex lineis in omnes Polygoni angulis ductis, exceptis iis quæ in utrumque angulum diametro contiguum ducitur, eſſe $= 1 + xx + x^4 + x^6 \ldots\ldots + x^{2m-2}$. Ut vero valor habeatur duorum horum productorum completorum, quæ nempe fiunt multiplicando lineas eductas in angulos Polygoni prorſus omnes, nihil aliud agendum, quam ut, pro imparibus lateribus, factum ex lineis PC multiplicetur adhuc per eam quæ deeſt, nempe per PA ſeu $1 - x$, & ita habebitur $(1 + x + xx + x^3 \ldots\ldots + x^{2m}) \times (1 - x) = 1 - x^{2m+1}$; pro paribus autem, ut factum ex iiſdem lineis PC multiplicetur porro per ambas quæ deſunt, nempe per PA & PE, hoc eſt, per $1 - x$ & $1 + x$, ſeu

TAB. LXXVIII. N°. CLX. *Fig.* 2.

per

per $1 - xx$; ſicque obtinebitur $(1 + xx + x^4 + x^6 \ldots\ldots + x^{2m-2}) \times (1 - xx) = 1 - x^{2m}$. Ex qua utraque æquatione perſpicitur, quod ſi ad Polygoni regularis [laterum ſive parium ſive imparium] angulos ſingulos, ex puncto quodam in diametro per angulum quendam tranſeunte ſumto, ducantur totidem rectæ; erit exiſtente numero laterum vel angulorum quocunque $= n$, & diſtantia puncti $= x$, productum ex omnibus iſtis rectis $= 1 - x^n$. Id quod primam conſtituit partem Theorematis *Coteſiani*. Altera ex prima facillime fluit: Ecce quomodo. Diviſis bifariam ſingulis arcubus quos ſubtendunt latera Polygoni, novum concipiatur Polygonum duplo plurium laterum, ad cujus angulos ſingulos rurſus eductæ ſunt rectæ; harum ergo productum erit $= 1 - x^{2n}$; quod ſi dividatur per productum prius $1 - x^n$, prodibit productum linearum alternatim ſumtarum $= 1 + x^n$, quarum prima cadit perpendiculariter in latus primum prioris Polygoni. Quæ pars eſt altera Theorematis prædicti. *Q. E. D.*

PRO-

N°. CLXI.

PROBLEMA.

Æquationes differentiales incompletas cujuscunque gradus reddere completas, hoc eſt, *eas transformare in alias*, *in quibus nulla differentialis ſupponatur conſtans.*

Confer. TAYLOR *de Method. increm.* p. 8.

Poſita dx conſtante,

Sit $dy = z\,dx$ erit $\frac{dy}{dx} = z$

$ddy = dzdx = t\,dx^2$ $\frac{dz}{dx} = t$

$d^3y = dtdx^2 = v\,dx^3$ $\frac{dt}{dx} = v$

$d^4y = dvdx^3 = r\,dx^4$ $\frac{dv}{dx} = r$

$d^5y =$ &c.

Differentiando, poſitis omnibus variabilibus, emerget

$$dz = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$$

$$dt = d\left(\frac{dz}{dx}\right) = d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right) = \&c.$$

$$dv = d\left(\frac{dt}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right)\right) = \&c.$$

$$dr = d\left(\frac{dv}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right)\right)\right) = \&c.$$

&c. = &c.

Hinc,

Hinc, pro incompletis dy, ddy, d^3y, &c. ſubſtituantur completa, ut ſequitur.

Incompl. Compl.

$$dy = dy = dy$$
$$ddy = dzdx = (dxddy - dyddx) : dx$$
$$d^3y = dtdx^2 = dx^2 . d((dxddy - dyddx) : dx^3)$$
$$= (1dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - 1dxdyd^3x) : dx^3$$
$$d^4y = dvdx^3 = dx^3 . d(\tfrac{1}{dx} . d((dxddy - dyddx) : dx^3))$$
$$= \left.\begin{matrix} (dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y + 15dxddx^2ddy - 15ddx^3dy \\ - 4dx^2d^3xddy + 10dxddxd^3xdy \\ - dx^2d^4xdy \end{matrix}\right) : dx^4$$
$$d^5y = drdx^4 = \&c.$$

SCHOLIUM.

Hujus Regulæ eſt uſus in transformandis differentialibus conſtantibus in alias conſtantes. Ex. gr. Si dy debeat eſſe conſtans, hoc tantum agendum, ut deleantur termini in quibus reperiuntur ddy, d^3y, d^4y, &c. Ita quoque ſi quævis functio, ex differentialibus ſolis, vel ex differentialibus & finitis compoſita, fieri debeat conſtans, ex. gr. ſi deſideretur ut fiat conſtans elementum curvæ, hoc eſt $\surd(dx^2 + dy^2)$; nam ex hac ſuppoſitione ſequitur $dxddx + dyddy = 0$; adeoque ſi in formulis noſtris completarum pro ddy ſubſtituatur $-dxddx : dy$, & quod inde provenit, ſi in æquatione aliqua incompleta, ubi dx ſupponitur conſtans, ſubſtituatur porro pro ddy; ejuſque differentiale pro d^3y, & ita deinceps quouſque opus eſt, reſultabit æquatio in qua erit $\surd(dx^2 + dy^2)$ conſtans. Vel, quod eodem recidit, & clarius intelligitur, mutetur ſtatim propoſita æquatio incompleta, ubi dx conſtans, in æquationem completam; ſubſtituendo ſcilicet pro incompletis ddy, d^3y, &c. eorum reſpondentes completos, qui ſunt $(dxddy - dyddx) : dx$, $(dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - dxdyd^3x) : dx^2$, &c. deinde in æquatione completa, quæ inde emergit, ſupponatur aliquod ex differentialibus compoſitum conſtans, ex. gr. quod ſupra aſſumſimus $\surd(dx^2 + dy^2)$, & quod vocemus $= dv$, unde fluit $ddy = -dxddx : dy = -dxddx : \surd(dv^2 - dx^2)$, $d^3y = (-ddx^2 - dxd^3x) : dy$ &c. Hos itaque valores in æquatione completa oportet ſurrogare pro ddy, d^3y, &c. & inde lucrabimur novam æquationem, in qua conſtans erit dv, ſeu $\surd(dx^2 + dy^2)$, & quæ proin propoſitæ [ubi dx erat conſtans] eſt æquivalens. Similiter, ſi velimus propoſitam mutare in aliam, in qua ſit ex. gr. ydx ſeu elementum areæ conſtans, erit $dydx + yddx = 0$, adeoque $dy = -yddx : dx$; $ddy = (-dydxddx + yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2 =$ [ſcribendo pro dy ejus valorem $-yddx : dx$] $(2yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2$; $d^3y = \&c.$ Vel, quod hic præſtat, ut eliminemus ddx, d^3x, &c. erit $ddx = -dxdy : y$, $d^3x = (2dy^2dx - ydxddy) : yy$. Quod ſi igitur, in æquatione completa, ſubſtituamus pro ddy, d^3y, &c. eorum valores in ddx, d^3x, &c. vel pro ddx, d^3x, &c. eorum valores in dy, ddy, &c. expreſſos, acquiremus utroque modo æquationem in qua erit ydx conſtans, loco propoſitæ, ubi erat dy conſtans.

N°. CLXII.

REDUCTIO

Æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ *ad æquationem differentialem primi gradus, ubi ſupponitur* $ddx = 0$.

Ponatur $y = tx^a$, adeoque $dy = x^a dt + atx^{a-1} dx$; & $ddy = x^a ddt + 2ax^{a-1} dxdt + (aa - a)tx^{a-2} dx^2$, quibus in propoſita ſubſtitutis, mutabitur illa in hanc (A)...
$$t^m x^{am}(x^a ddt + 2ax^{a-1} dxdt + (aa - a)tx^{a-2} dx^2)$$
$$= qx$$

$= qx^n dx^p (x^a\, dt + atx^{a-1}\, dx)^{2-p}$. Poſito autem $dx = xzdt$, erit ddx ſeu $0 = xzddt + xdzdt + xzzdt^2$, unde $ddt = -dzdt : z - zdt^2$. Subſtituto hoc valore in A habebitur [rite procedendo] hæc altera æquatio (B).. $t^m x^{am+a}((2a-1)zdt^2 + (aa-a)tzzdt^2 - dzdt : z) = qx^{n+p+2a-pa} z^p dt^2 (1+atz)^{2-p}$. Ut nunc littera x evaneſcat, ejus exponentes ſunt ponendi æquales, nempe $am+a = n+p+2a-pa$; unde emergit $a = (n+p):(m+p-1)$, atque reſultabit, dividendo per dt, æquatio differentialis primi gradus, conſtans tantum ex duabus indeterminatis z & t, earumque differentialibus primis, quæ erit hæc (C)...$(2a-1)t^m zzdt + (aa-a)t^{m+1}z^3 dt - t^m dz = qz^{p+1} dt(1+atz)^{2-p}$. Ubi ſi quocunque modo, per ſeparationem indeterminatarum, vel aliter, haberi poteſt relatio inter z & t, habebitur etiam ea inter x & y. Facto enim $x = c^{\int zdt}$, & $y = tx^a = tx^{(n+p):(m+p-1)} = tc^{(n+p)\int zdt:(m+p-1)}$, obtinetur quæſitum.

Corollarium I.

Si $m+p=1$, erit $a=\infty$, adeoque etiam $y = tx^a = tx^\infty = \infty$. Hinc in hoc caſu Problema non ſolvitur per hanc methodum, ſed ſolvi poteſt, ſi æquatio propoſita ita mutatur, ut dy ſit conſtans; quod fieri poteſt.

Corollarium II.

Si $n+p=0$, hoc eſt, ſi $n=-p$, erit $y = tx^0 = t$, & $a=0$. Unde inventa æquatio in hanc abit $-t^m zzdt - t^m dz = qz^{p+1} dt$, vel $-t^m dz = (t^m zz + qz^{p+1})dt$. Ubi ſi præterea $p=1$, fit æquatio ſeparabilis & ſimul integrabilis, nem-

pe hæc $-dz:zz = dt + qdt:tm$, quæ integrata dat $b+1:z = t + \frac{q}{1-m}t^{1-m}$, unde $z = (1-m):((1-m)t + qt^{1-m} + bm - b)$; quare æquatio propoſita in hanc abiens $y^m ddy = qdxdy : x$ conſtrui poteſt ſumendo $y=t$, & $x = c^{\int((1-m)dt:((1-m)t+qt^{1-m}+bm-b))}$; vel ſimpliciter ſumendo $x = c^{\int((1-m)dy:((1-m)y+qy^{1-m}+bm-b))}$.

Si exponens eſt logarithmicabilis, prodit æquatio algebraïca. Ex. gr. Si $m=-1$, erit $x = c^{\int(2dy:(2y+qyy-2b))}$, adeoque $lx = \int(2dy:(2y+qyy-2b))$ = alicui Logarithmo, excepto tamen caſu quo $2b$ aſſumitur $= -1:q$, hoc enim caſu fit $\int(\frac{2}{q}dy:(yy+\frac{2}{q}y+\frac{1}{qq})) = -\frac{2}{q}:(y+\frac{1}{q})$ = quantitati algebraïcæ.

Corollarium III.

In eodem caſu quo $n+p=0$, ſi præterea $p=2$, adeoque $n=-2$, & ſi $m=-1$; ita ut æquatio noſtra generalis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ abeat in hanc $yddy = qx^{-2}dx^2 dy^0$ ſeu $xxddy = qydx^2$; mutata æquatio per Regulam dat $-t^{-1}dz = (t^{-1}zz + qz^3)dt$, vel $-dz:zz = (1+qtz)dt$, quæ integrari poteſt ſequenti modo: Ponatur $tz = v$, unde $t = v:z$ & $dt = (zdv - vdz):zz$; quibus ſurrogatis, erit $dz:zz = (1+qv)(zdv - vdz):zz$, vel $\frac{dz}{z} = \frac{1+qv}{-1+v+qvv}dv$ $= \frac{1}{2}\times\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv + \frac{1}{2}\times\frac{dv}{-1+v+qvv} = \frac{1}{2}(\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv + \frac{dv}{(qv+\alpha).(v+\beta)}) = \frac{1}{2}\times(\frac{1+2qv}{-1+v+qvv}dv + \frac{\varepsilon dv}{qv+\alpha} + \frac{\eta dv}{v+\beta})$, unde habetur $lfz = \frac{1}{2}(l(-1+v+qvv) + \frac{\varepsilon}{q}l(v+\frac{\alpha}{q})$

$+\eta l(v+\beta))$; & $fz = (-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}} \times (v+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q} \times (v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$: vel propter $v = tz$, $fz = (-1+tz+qttzz)^{\frac{1}{2}} \times (tz+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q} \times (tz+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, quæ eſt æquatio terminis finitis conſtans. Ergo &c. Pro conſtructione ponatur $f = 1$, erit $z = (-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}} \times (v+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q} \times (v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, & $dz = (tdv - vdt) : tt$ [propter $v = tz$]; ergo etiam habebitur zdt in meris v & dv; adeoque etiam $x = c^{\int zdt}$ & $y = t$.

ALITER ET GENERALIUS PRO HOC CASU.

Ex æquatione (B) patet, exiſtente $n+p=0$, faciendum eſſe $am+a = 2a - pa$, quod cum dividi poſſit per a, ita ut tantum ſit $m+p = 1$, relinquitur utique a arbitrarium; adeoque, omni in caſu ubi $n+p=0$, & $m+p=1$; id quod facit $p = 1-m$ & $n = m-1$. Æquatio noſtra inventa C. . . . . $(2a-1)t^{m}zzdt + (aa-a)t^{m+1}z^{3}dt - t^{m}dz = qz^{p+1}dt$ $(1+atz)^{2-p}$, quæ mutatur in hanc (D). . . . $(2a-1)t^{m}$ $zzdt + (aa-a)t^{m+1}z^{3}dt - t^{m}dz = qz^{2-m}dt(1+atz)^{1+m}$, permittit a liberum; quod proinde ita ſumere licet, ut æquatio fiat integrabilis. In caſu ergo propoſito $y^{-1}ddy = qx^{-2}dx^{2}$, ubi $n+p=0$, $m=-1$, $n=-2$, $p-2$; lubet deſtruere, in æquatione D, terminum primum $(2a-1)t^{m}zzdt$, faciendo $2a-1=0$ ſeu $a=\frac{1}{2}$; hoc enim dat $-\frac{1}{4}z^{3}dt - t^{-1}dz = qz^{3}dt$, hoc eſt, reductione peracta, $-4dz : z^{3}$ $(4q+1)tdt$; quod integrando habetur $4 : zz + b^{2} = (4q+1)tt$, ſeu $4 = (4q+1)ttzz - bbzz$; unde $z = 2 : \sqrt{((4q+1)tt - bb)}$. Cum itaque $x = c^{\int zdt}$, hoc eſt, $lx = \int zdt$, ſeu $dx : x = zdt$, erit $\int(dx:x) = \int zdt = \int(2dt : \sqrt{((4q+1)tt - bb)})$; adeoque integrando per Logarithmos, erit $lfx = \frac{2}{\sqrt{(4q+1)}} \times l(t+\sqrt{(tt}$

$-\frac{bb}{4q+1})) =$ [ponendo $\frac{bb}{4q+1} = ee$] $\frac{2e}{b} \times l(t+\sqrt{(tt-ee)})$; atque $fx = (t+\sqrt{(tt-ee)})^{2e:b}$. Porro quia $y = tx^{a} = tx^{1:2}$ $= t\sqrt{x}$, prodibit $y = \frac{t}{\sqrt{f}}(t+\sqrt{(tt-ee)})^{e:b}$. Ut nunc æquatio habeatur per x & y expreſſa, eliciatur valor ipſius t, ope primæ æquationis $fx = (t+\sqrt{(tt-ee)})^{2e:b}$. Quod ſic fit: $(fx)^{b:2e} = t+\sqrt{(tt-ee)}$, adeoque $(fx)^{b:2e} - t = \sqrt{(tt-ee)}$ quadrando $(fx)^{b:e} - 2(fx)^{b:2e}t + tt = tt - ee$; hinc $t = ((fx)^{b:e}$ $+ee) : 2(fx)^{b:2e}$. Hoc valore ſubſtituto in altera æquatione $y = t\sqrt{x}$; prodibit $y = ((fx)^{b:e} + ee)\sqrt{x} : 2(fx)^{b:2e}$; vel $2yf^{b:2e}x^{b:2e-1:2} = f^{b:e}x^{b:e} + ee$, vel etiam $y = \frac{1}{2}f^{b:2e}x^{b:2e+1:2}$ $+\frac{1}{2}eef^{-b:2e}x^{-b:2e+1:2}$; ſed quia $b:e = \sqrt{(4q+1)}$, & $ee = bb:(4q+1)$, ſubſtituantur hi valores; eritque $y = \frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}$ $x^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}+\frac{1}{2}} + \frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}x^{-\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}+\frac{1}{2}}$. Aut, quia f & b ſunt arbitrariæ, poſſunt pro coëfficientibus $\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}$ & $\frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\sqrt{(+q+1)}}$ poni duæ litteræ ſimplices a & c; & habebitur $y = ax^{\frac{1}{2}+\sqrt{(q+\frac{1}{4})}} + cx^{\frac{1}{2}-\sqrt{(q+\frac{1}{4})}}$.

COROLL. IV.

In fine *Coroll.* 2, ubi inventum eſt $lx = \int(2dy:(2y+qyy-2b))$, ſi ſumatur $b=0$, erit $lx = \int(2dy:(2y+qyy)) = lfy - l(+2qy)$ $= l(fy:(2+qy))$, adeoque $x = fy:(2+qy)$, & reductis ſuppletisque homogeneis, $2x+qyx = fy$. Ex quo patet curvam eſſe poſſe Hyperbolam. Quod ſi vero relinquatur b arbitrarium, erit $lx = \int(2dy:(2y+qyy-2b) = \int(\frac{2}{q}dy:(yy+\frac{2}{q}y-\frac{2}{q}b))$ $= \int\frac{\alpha dy}{y+f} + \int\frac{\beta dy}{y+g} = \alpha l(y+f) + \beta l(y+g)$; adeoque aſſumta nova arbitraria erit $nx = (y+f)^{\alpha} \times (y+g)^{\beta}$. Sed per Calculum inveniuntur $\alpha = 1:\sqrt{(1+2bq)}$, $\beta = -1:\sqrt{(1+2bq)}$;

R 2 $f =$

$f = \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}, g = \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$. Hinc æquatio generaliſſima $nx = (y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{1:\sqrt{(1+2bq)}} \times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{-1:\sqrt{(1+2qb)}}$, vel quod eodem recidit, debite reducendo $(nx)^{\sqrt{(1+2bq)}} \times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}) = y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$, vel demum omnia multiplicando per q, & ponendo a pro $n^{\sqrt{(1+2bq)}}$, erit $ax^{\sqrt{(1+2bq)}} \times (qy + 1 + \sqrt{(1+2bq)}) = qy + 1 - \sqrt{(1+2bq)}$; quæ ergo generaliter ſatisfacit huic æquationi $ddy : y = qdxdy : x$. Porro quia q afficitur per arbitrariam b, poteſt $\sqrt{(1+2bq)}$ conſiderari ut arbitrarium: vocetur ergo c, & ſic æquatio inventa abit in hanc ſimpliciſſimam $ax^c(qy + c + 1) = qy - c + 1$.

Nota. Poteſt caſus propoſitus $xddy = qydxdy$ ſine applicatione ad Regulam generalem (quæ applicatio eſt operoſa) facilius ſolvi hoc modo. $\int xddy = xdy - \int dxdy = xdy - ydx + adx$; hoc ergo $= \int qydxdy = \frac{1}{2}qyydx$; & ita res redacta eſt ad differentiales primas. Reliqua per indeterminatarum ſeparationem peraguntur. Poſito $a = 0$, prodit caſus particularis $2x + qyx = fy$. Simili modo caſus proponendi in *Coroll.* 5, 6 & 7, ad differentias primas reducuntur, ſine recurſu ad Regulam noſtram generalem. Sit enim relinquendo m in tota ſua extenſione, $y^m ddy = qdxdy : x$, erit $xddy = qy^{-m}dxdy$; idque ut prius integrando, prodit $\int xddy = xdy - ydx = \frac{q}{1-m}y^{1-m}dx + adx$. Quo reducto fit $(1 - mdy) : (qy^{1-m} + (1-m)y + (1-m)a) = dx : x$. Cætera abſolvuntur ut in *Coroll.* 5, pro caſu $m = 2$.

SCHOLIUM.

Interdum non patet quomodo æquatio ad differentiales primas reducta ſeparationem admittat; ſed ut ſupra monuimus, mutari poteſt æquatio, ante illam reductionem, ut quibuſdam in caſibus

caſibus perveniri poſſit ad differentiales primas, ſine recurſu ad Regulam, ſi nimirum ex invariabili dx fiat variabilis, & viciſſim ex variabili dy fiat invariabilis. Sic generalis noſtra æquatio $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ transformatur hoc modo in hanc, $-y^m ddx = qx^n dx^{p+1} dy^{1-p}$. Si $m = 1$, & $p = 0$, habetur pro priori, $yddy = qx^n dy^2$, quæ ægre reducitur per Regulam, ſed poſita dy invariabili, transformatur in hanc $-yddx = qx^n dxdy$, quæ per conſuetam integrationem dat $-ydx + xdy = \frac{q}{n+1}x^{n+1}dy + ady$. &c. ſeparabilem.

COROLL. V.

Si in æquatione *Coroll.* 2. $y^m ddy = qdxdy : x$, habeatur $m = 2$; ita ut reſolvenda jam ſit $yyddy = qdxdy : x$, erit nunc $lx = \int \frac{-dy}{-y + qy^{-1} + b} = \int \frac{ydy}{yy - by - q} = \int \frac{\alpha dy}{y + f} + \int \frac{\beta dy}{y + g} = \alpha l(y+f) + \beta l(y+g)$, adeoque aſſumpta nova arbitraria n, erit $nx = (y+f)^\alpha \times (y+g)^\beta$. Sed hic per calculum reperiuntur $\alpha = (-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$, $\beta = (\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$, $f = -\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$, $g = -\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}$; unde æquatio generaliſſima pro hoc caſu erit $nx = (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^{(-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}):2\sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}} \times (y - \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb + q}))^{(\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}):2\sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}}$ vel etiam $(nx)^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}} \times (y - \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^{\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)}}$, vel adhuc aliter multiplicando primum factorem membri poſterioris per $(y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^b$, deinde quod provenit, per alterum factorem actu etiam multiplicando, tandemque productum per $(y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb + q)})^b$ iterum dividendo; quo rite obſer-

obſervato, prodibit $nx^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (yy-by-q)^{\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} \times (y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-b}$. Ut fractiones in exponentibus tollantur, eorum ſumantur dupla; eritque $nx^{2\sqrt{(bb+4q)}} = (yy-by-q)^{b+\sqrt{(bb+4q)}} \times (y-\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-2b}$; verum etiam, ut exponentium irationalitas abeat, poſſum arbitrariam b ita ſumere ut $bb+4q$ evadat quadratum perfectum: ſit itaque $b = e - q : e$, unde fit $bb+4q = ee+2q+qq : ee$ & $\sqrt{(bb+4q)} = e+q : e$; quibus ergo ſubſtitutis, habebitur $nx^{2e+2q:e} = (yy-(e-q:e)y-q)^{2e} \times (y+q:e)^{-2e+2q:e}$; vel multiplicando exponentes per $\frac{1}{2}e$, erit $nx^{ee+q} = (yy-(e-q:e)y-q)^{ee} \times (y+q:e)^{-ee+q}$; & fractionibus ſublatis in factoribus, multiplicando æquationem per e^q, prodibit $ne^q\,x^{ee+q} = (eyy-(ee-q)y-eq)^{ee} \times (ey+q)^{-ee+q}$; & [quoniam $eyy-eey+qy-eq = (y-e)\times(ey+q)$, & propter arbitrariam n, pro ne^q ſcribi poteſt a], orietur tandem æquatio ſimpliciſſima hæc $ax^{ee+q} = (y-e)^{ee} \times (ey+q)^q$, reſpondens generaliter huic $yyddy = qdxdy : x$. Quod ſi aſſumatur arbitraria $ee = q$, prodibit $axx = (yy-q)\sqrt{q}$, vel pro arbitraria a ſcribendo $c\sqrt{q}$, reſultat $cxx = yy - q$, æquatio ad Hyperbolam; quæ ergo inter infinitas alias curvas ſatisfacit æquationi propoſitæ $yyddy = qdxdy : x$.

COROLL. VI.

Sit porro in æquatione *Coroll.* 2, $y^m\,ddy = qdxdy : x$, ſit $m = \frac{1}{2}$; adeo ut reſolvenda veniat $ddy\sqrt{y} = qdxdy : x$; erit $lnx = \int \frac{dy}{y+2q\sqrt{y}-b} =$ [poſito $zz = y$] $\int \frac{2zdz}{zz+2qz-b}$ $= \int \frac{\alpha dz}{z+f} + \int \frac{\beta dz}{z+g} = \alpha l(z+f) + \beta l(z+g)$; proinde $nx = (z+f)^\alpha \times (z+g)^\beta$. Dat autem calculus $f = q - \sqrt{(qq+b)}$, $g = q + \sqrt{(qq+b)}$, $\alpha = (-q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}$, $\beta = (q+\sqrt{(qq+b)}) : \sqrt{(qq+b)}$. Hinc fluit $nx = (z+q-\sqrt{(qq+b)})^{(-q+\sqrt{(qq+b)}):\sqrt{(qq+b)}} \times (z+q+\sqrt{(qq+b)})^{(q+\sqrt{(qq+b)}):\sqrt{(qq+b)}}$, vel elevando utrumque ad $\sqrt{(qq+b)}$, erit $(nx)^{\sqrt{(qq+b)}} = (z+q-\sqrt{(qq+b)})^{-q+\sqrt{(qq+b)}} \times (z+q+\sqrt{(qq+b)})^{q+\sqrt{(qq+b)}}$. Quia vero b arbitrarium, erit ipſum $\sqrt{(qq+b)}$ arbitrarium; ponatur ergo $\sqrt{(qq+b)} = e$. Unde emergit $(nx)^e = (z+q-e)^{-q+e} \times (z+q+e)^{q+e}$; reſubſtituendo pro z ejus valorem $\sqrt{y}$, & ſcribendo a pro n^e, prodit tandem æquatio inter x & y, quæ hæc eſt $ax^e = (\sqrt{y}+q-e)^{-q+e} \times (\sqrt{y}+q+e)^{q+e}$; complectens omnes poſſibiles curvas huic æquationi $ddy\sqrt{y} = qdxdy : x$ reſpondentes.

COROLL. VII.

Liceat denique addere hoc *Corollarium*, quo relinquitur m in tota ſua extenſione: ſed ponatur arbitraria $b = 0$, voceturque $1 - m = h$, erit pro caſu *Coroll.* 2. $lnx = \int (hdy : (hy + qy^h)) = \int (hy^{-h}dy : (hy^{1-h}+q)) = \frac{1}{1-h} l(hy^{1-h}+q)$. Hinc ergo aſſumpto a pro n^{1-h} provenit $ax^{1-h} = hy^{1-h} + q$, hoc eſt $ax^m = (1-m)y^m + q$, quæ quidem pro quolibet m reſpondet æquationi $y^m ddy = qdxdy : x$, ſed non omnes poſſibiles curvas complectitur.

RE-

REDUCTIO

æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$
ad genus Parabolarum.

Sit æquatio formulæ propoſitæ reſpondens $y = \alpha x^\beta$; proinde $dy = \alpha\beta x^{\beta-1} dx$, & $ddy = (\alpha\beta\beta - \alpha\beta) x^{\beta-2} dx^2$. His valoribus in propoſita ſurrogatis, orietur $(\alpha^{m+1}\beta\beta - \alpha^{m+1}\beta) x^{\beta m+\beta-2} dx^2 = q\alpha^{2-p}\beta^{2-p} x^{n+p-2+2\beta-\beta p} dx^2$. Ut ambo membra identificentur, æquandi ſunt coëfficientes, ut & exponentes, nimirum:

$$A \ldots \alpha^{m+1}\beta\beta - \alpha^{m+1}\beta = q\alpha^{2-p}\beta^{2-p}.$$
$$B \ldots \beta m + \beta - 2 = n + p - 2 + 2\beta - \beta p.$$

Ex æquatione B habetur $\beta = (n+p):(m+p-1)$, quo ſubſtituto pro β in æquatione A, reſultabit $\alpha = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)}$ & hoc modo fiet $y = \alpha x^\beta = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)} x^{(n+p):(m+p-1)}$. Adeoque $(n-m+1) y^{m+p-1} = (q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p) x^{n+p}$ Q. E. F.

COROLL. I.

Pro caſu ſpeciali $yyddy = xdx^2$, ubi $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 1$, habetur $0y^3 = 3x^3$; proinde $x = 0$, pro qualibet y.

COROLL. II.

Si $m+p = 1$, erit $(n-m+1) = 0x^{n+p} = 0$. Quod eſt contradictio, niſi forſan $n-m+1 = 0$, ſeu $n+1 = m$; adeoque $n+1+p = 1$, unde $p = -n$.

COROLL. III.

Si $n+p = 0$, erit $(n-m+1) y^{m+p-1} = 0$; proinde $y = 0$ pro qualibet x.

PROBLE-

N°. CLXIII.

PROBLEMA.

Rectificare Curvam datam, per aliam formulam quam per $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

SOLUTIO.

SIT curva ABC primo rectangula, hoc eſt, cujus tangentes in punctis extremis A & C ſint ſibi invicem perpendiculares. Sint AF vel NB $= x$, FB vel AN $= y$, arcus AB $= s$, radius oſculi in B ſeu BM $= r$. Sit applicata ultima KC vel AE $= b$; ſit EG perpendicularis ad tangentem BH, adeoque parallela ipſi BM. TAB. LXXVIII. N°. CLXIII *Fig. 1.*

Erit HN $= xdy : dx$, unde HE $= xdy : dx + b - y$. Porro $ds : dx$ = BH : BN = HE : EG; unde EG $= (xdy + (b-y) dx) : ds$. Fiat nunc MB $[r]$: EG $[(xdy + (b-y)dx) : ds] = ds$ ad quartam, erit hæc quarta $= (xdy + (b-y)dx) : r$. Atqui per naturam Reptoriarum [alibi demonſtratam a me] ejus integrale, per totam curvam ABC ſumtum, dat ipſam longitudinem curvæ ABC, ſeu totam s; quod eſt Theorema habens in quibuſdam exemplis elegantes proprietates.

EXEMPLUM I.

Sit curva ABC Elaſtica notiſſima, ſeu Lintearia, cujus natura hæc eſt, ut ſit $y = \int(xxdx : \sqrt{(1-x^4)})$, nominando ſcilicet ultimam applicatam KC vel AE $= b$, & ultimam abſciſſam AK vel EC $= 1$. Notum eſt etiam quemlibet arcum AB eſſe $\int(dx : \sqrt{(1-x^4)})$; invenitur vero $r = 1 : 2x$, quibus ſubſtitutis, prodit $(xdy+(b-y)dx):r=(2x^4dx+2x(b-y)dx\sqrt{(1-x^4)}):\sqrt{(1-x^4)}=2x^4dx:\sqrt{(1-x^4)}+2xdx(b-y)$. Integretur, quoad fieri poteſt; eritque pro arcu A B, quod ſequitur; $2\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})+bxx-yxx+\int xxdy=$ [ob $xxdy=x^4dx:\sqrt{(1-x^4)}$] $3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})+xx(b-y)$; unde tota curva ABC [ubi $b=y$] erit $=3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$, adeoque evadente $x=1$, habebimus hanc proprietatem, ut ſit $\int(dx:\sqrt{(1-x^4)})=3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$.

EXEMPLUM II.

Sit nunc curva A B C generalius expreſſa per $y=\int(x^n dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$; reliquis poſitis ut prius; erit quilibet arcus $AB=\int(dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$, & reperietur $r=1:nx^{n-1}$. Hiſce ſubſtitutis in generali $(xdy+(b-y)dx):r$, prodibit $(xdy+(b-y)dx):r=nx^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})}+nx^{n-1}dx(b-y)$. Quod integratum, quoad fieri poteſt, dabit arcum $AB=n\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})+bx^n-yx^n+\int x^n dy=$ [ob $x^n dy=x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})}$] $(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})+(b-y)x^n$. Unde exiſtente $b=y$, evaneſcet ſecundus terminus $x^n(b-y)$; eritque tota curva ABC $=(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$; proinde evadente $x=1$, erit hæc proprietas, ut ſit ſemper $\int(dx:\sqrt{(1-x^{2n})})=(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$.

COROLLARIUM.

In caſu quo $n=2$, incidimus in exemplum præcedens: ſed ſi $n=1$, erit $\int(dx:\sqrt{(1-xx)})=2\int(xxdx:\sqrt{(1-xx)})$, quod utrumque dependet a circulo; & examinando per communem viam, deprehendentur ambo membra, in ſuppoſitione $x=1$, deſinere

deſinere in quadrantes circulorum æqualium, id quod generalem noſtram methodum mirifice confirmat.

Sit nunc curva ABC obliquangula, hoc eſt, ſit angulus ACE acutus; manente interim angulo CAE recto. TAB. LXXVIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 2 & 3.

Pro hoc caſu, ex puncto C ducta ſit tangens CL, in eamque normalis EL. Ex dato angulo acuto ECL & ex data longitudine CE, dabitur utique CL, quæ dicatur $=t$.

Jam ad faciendum angulum ACE rectum, concipiatur ad extremitatem C adjungi arculum radii infinite parvi, qui centrum habeat in recta EC, ipſique C quam proximum, ita ut coaleſcat cum curva ABC; faciatque hoc pacto angulum rectum cum CA, nempe angulum KCE. Res iſta talem habet faciem ut videre eſt in *Figura* 3; ubi ABC eſt curva propoſita, ad cujus extremitatem C, adjunctus concipitur arculus circuli C*c*, cujus radius infinite parvus CO vel *c*O, ita ut centrum O ſit in ultima applicata *c*E, quæ ab ipſa CE diſtare non cenſetur; ſicuti pariter AB*c* ab ipſa ABC longitudine non differt. Sic itaque A*c*E jam eſt rectus, cum antea alter ACE eſſet acutus; adeoque jam conſiderabimus ABC*c* tanquam curvam in caſu *Fig.* 1. Ut autem habeatur ſumma omnium elementorum $(xdy+(b-y)dx):r$ pro toto arcu ABC*c*, addenda ei eſt ſumma eorum quæ pertinent ad arculum circularem C*c*, quæ ut facile intelligitur æqualis eſt ipſi tangenti CL, hoc eſt $=t$. Hinc longitudo arcus ABC ſeu ABC$c=t+\int((xdy+(b-y)dx):r)$.

EXEMPLUM.

Sit ABC iterum Elaſtica, non integra quidem, ſed tantum ejus portio, cujus altitudo vel ultima applicata KC, vel AE, nominetur iterum b; abſciſſa vero ultima AK, vel EC, quæ antea erat $=1$, nunc ſit $=a$; erit, ex natura Elaſticæ, tangens CL ſeu $t=a\sqrt{(1-a^4)}$; adeoque longitudo curvæ ABC ſeu ABC*c*, hoc eſt, $t+\int((xdy+(b-y)dx):r)=a\sqrt{(1-a^4)}+3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$; ubi notandum integrationem inſti-

 tuendam

tuendam esse, non per totam unitatem, sed tantum per ejus portionem a; atque ita habebimus, evadente $x = a$, hanc proprietatem, ut sit $\int(dx : \sqrt{(1 - x^4)}) = a\sqrt{(1 - a^4)} + 3\int(x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$. Similiter in aliis procedendum.

COROLL. I.

Si a sumitur = toti unitati, evanescit $a\sqrt{(1 - a^4)}$, eritque tantum $\int(dx : \sqrt{(1 - x^4)}) = 3\int(x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$, ut fieri par est; relabimur enim in primum casum supra explicatum.

COROLL. II.

Hinc in omni casu, modo a sit minor unitate, erit $\int(dx : \sqrt{(1 - x^4)}) - 3\int(x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$, hoc est, $\int((dx - 3x^4 dx) : \sqrt{(1 - x^4)}) = a\sqrt{(1 - a^4)}$; adeoque integrabilis, in casu quo x evadit $= a$.

N°. CLXIV.

DE TRANSFORMATIONIBUS ET RECTIFICATIONIBUS CURVARUM.

PROBLEMA I.

Curvas parabolicas cujusvis gradus transformare in alias alius generis curvas algebraicas, ejusdem longitudinis.

SIT numerus potestatis, a qua denominatur Parabola, $= n$; parameter $= 1$; unde æquatio ad Parabolam $x^n = y$; ideoque elementum curvæ $= \sqrt{(nnx^{2n-2} dx^2 + 1dx^2)}$. Jam ut habeantur duæ aliæ coordinatæ quam x^n & x, oportet quadratum elementi curvæ $nnx^{2n-2} dx^2 + 1dx^2$ disponere in duo alia quadrata, quorum latera sunt integrabilia; hæc autem quadrata sunt, $nnx^{2n-2} dx^2 - 2nx^{n-1} dx^2 + dx^2$ & $+ 2nx^{n-1} dx^2$; quorum radices sunt, $\pm nx^{n-1} dx \mp dx$ & $\pm\sqrt{2n}\, x^{n-1} dx^2$; earum ergo integralia $\pm x^n \mp x$ & $\pm \frac{2}{n+1} x^{(n+1):2} \sqrt{2n}$ erunt coordinatæ curvæ novæ ipsi Parabolæ longitudine æqualis.

In Parabola communi, ubi $n = 2$, erunt novæ coordinatæ $\pm xx \mp x$ & $\frac{4}{3} x^{3:2}$, unde si ponatur $xx - x = s$ & $\frac{4}{3} x^{3:2} = t$, reperietur, pro natura curvæ novæ, hæc æquatio [sumta a pro constante ad implendas homogeneas] $81t^4 = \pm 432astt + 144aatt \pm 256as^3$.

PROBLEMA II.

Idem præstare pro curvis hyperbolicis cujusvis gradus, ad asymtoton.

Sit numerus potestatis, a qua denominatur Hyperbola $= n$; latus constans $= 1$; unde æquatio ad Hyperbolam, $y = 1 : x^n$; ideoque elementum curvæ $= \sqrt{(nnx^{-2n-2} dx^2 + 1dx^2)}$. Reliqua faciendo ut supra, reperietur, pro coordinatis novæ curvæ ipsi Hyperbolæ longitudine æqualis, $+ x^{-n} + x$, & $\frac{2}{1-n} x^{(1-n):2} \sqrt{2n}$.

SCHOLIUM.

In Hyperbola communi regula nostra cessat; altera enim ordinata curvæ novæ evadit infinita: unde nihil habetur. Ad hunc defectum resarciendum, en alium modum. Quadratum elementi curvæ, $x^{-4} dx^2 + 1dx^2$, distribui poterit in duo alia quadrata, si ponamus radicem unius esse $- x^{-2}dx + mx^p dx$, ideoque quadratum $x^{-4}dx^2 - 2mx^{p-2}dx^2 + mmx^{2p} dx^2$; si aufe-

auferatur a $x^{-4}dx^2 + 1dx^2$, remanebit $2mx^{p-2}dx^2 - mmx^{2p}dx^2 + 1dx^2$, quod ut fiat quadratum perfectum, oportet duplum rectangulum inter radices partium signo + affectarum æquari parti signo — affectæ, id est $2x^{\frac{1}{2}p-1}\sqrt{2m} = mmx^{2p}$; adeoque, ut tam dimensiones quam coëfficientes ipsius x utrobique sint eædem, erunt $\frac{1}{2}p - 1 = 2p$ & $2\sqrt{2m} = mm$; unde discimus sumendum esse $p = -\frac{2}{3}$ & $m = 2$; ergo radices duorum quadratorum quæsitorum erunt $-x^{-2}dx + 2x^{-\frac{2}{3}}dx$ & $-2x^{-\frac{4}{3}}dx + 1dx$, quarum itaque integralia $x^{-1} + 6x^{1:3}$ & $6x^{-1:3} + x$, seu, usurpando expressiones communes, $1 : x + 6\sqrt[3]{x}$ & $6 : \sqrt[3]{x} + x$, dabunt coordinatas curvæ novæ ipsi Hyperbolæ ordinariæ longitudine æquales.

NB. Hæc Regula etiam porrigitur ad Parabolas & Hyperbolas in genere, cujusvis sint gradus.

PROBLEMA III.

Invenire curvam algebraïcam, cujus partes sint proportionales segmentis circuli.

Posito radio circuli $= 1$, & abscissa super diametro ex centro sumta $= x$, erit elementum spatii circularis, seu differentia duorum semi-segmentorum $= dx\sqrt{(1 - xx)}$; hoc ergo in elementum curvæ alicujus transformandum est, quod sic facio; quadratum elementi $1dx^2 - xxdx^2$ distribuatur in duo quadrata, latera habentia integrabilia; sumendo pro uno $1dx^2 - 2mxxdx^2 + mmx^4dx^2$, & pro altero $2mxxdx^2 - xxdx^2 - mmx^4dx^2$, [hæc enim simul faciunt $1dx^2 - xxdx^2$]; eorum autem latera sunt $\pm 1dx \mp mxxdx$ & $xdx\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, quorum integralia $\pm x \mp \frac{1}{3}mx^3$, & $\frac{2m-1-mmxx}{3mm}\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, erunt coordinatæ quæsitæ.

PRO-

PROBLEMA IV.

Data portione curvæ parabolicæ communis; invenire aliam curvam algebraicam, cum qua juncta illa portio parabolica sit rectificabilis.

Conf. Num. XLIX, Tom. I, *pag.* 251.

Esto proposita portio parabolica AB, vertex A, semi-parameter AD; centro A & semiaxe transverso AD descripta Hyperbola æquilatera DE, facit [ut notum est] spatium ADEC æquale rectangulo sub recta DA & curva AB; huicque per consequens proportionale. Si ergo etiam ad complementum hujus spatii, nempe ad DFE, invenitur curva proportionalis, erit utique inventa, una cum data AB, proportionalis toti spatio, seu rectangulo CF; adeoque rectificabilis. Id autem sic efficitur: Ponatur AD $= a$, DF $= x$; erit FE $= \sqrt{(2ax + xx)}$ & quadratum different. spatii DFE $= 2axdx^2 + xxdx^2$, quod manifeste distribuitur in duo quadrata $2axdx^2$ & $xxdx^2$ latera habentia $dx\sqrt{2ax}$ & xdx integrabilia; quippe quæ sunt $\frac{2}{3}x\sqrt{2ax}$ & $\frac{1}{2}xx$. Si igitur fiat nova curva AG, cujus coordinatæ AH, HG sint $xx : 2a$ & $2x\sqrt{2ax} : 3a$, erit composita GAB rectificabilis, nempe æqualis rectangulo CF diviso per AD.

TAB. LXXVIII. N°. CLXIV. *Fig.* 1.

SCHOLIUM.

Ut habeatur natura curvæ AG, ponatur AH, seu $xx : 2a = r$, & HG seu $2x\sqrt{2ax} : 3a = t$; reperietur hæc æquatio $512ar^3 = 81t^4$, quæ docet curvam AG esse Parabolam cubico-biquadraticam, cujus parameter $= \frac{512}{81}a = 6\frac{26}{81}a = 3\frac{13}{81}$ parametri Parabolæ propositæ. Poterit jam, omissa Hyperbola DE, Problema confici. Est enim BI normalis ad Parabolam æqualis ipsi FA, ideoque centro I, radio IL subtangente, æquali nimirum semi-parametro DA, descriptus arcus LK relinquet BK $= x =$ DF; quocirca si ad parametrum Parabolæ & ad BK sumatur tertia proportionalis AH; erit, ducta applicata, arcus AG quæsitus, qui cum AB æquatur lineæ rectæ IM,

T 2 quæ

quæ habetur prolongando CB, cui occurrit recta IM ad BI perpendicularis; erit enim $IM = \frac{IB \times BI}{LI} = \frac{AC \times CE}{AD}$.

PROBLEMA V.

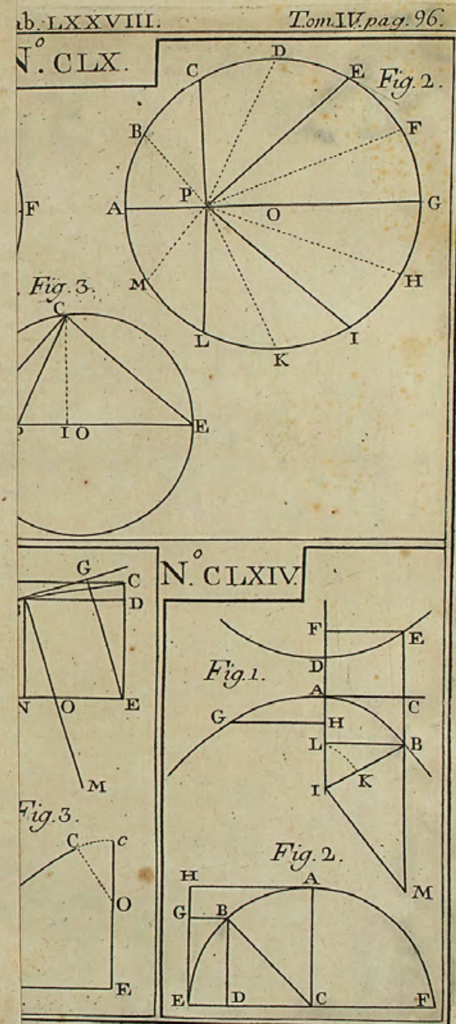
Invenire curvam algebraïcam, cum qua datus arcus circuli sit rectificabilis.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXIV. *Fig.* 2. Sit semi-circulus EAF, centrum C, perpendicularis CA, arcus datus AB: qui multiplicatus per $\frac{1}{2}$ CA producit sectorem CAB. Ductis AH & BG parallelis diametro occurrentibus perpendiculari EH; quæremus curvam algebraïcam, quæ multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA producat spatium AHGB: evidens enim est illam curvam satisfacturam, quippe quæ cum arcu AB conjuncta, & multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA, producit rectilineum CAHGBC. Illam autem invenimus hoc modo: Sit CA $= a$, CD $= x$, erit differentiale spatii AHGB $= (ax - xx)\, dx : \sqrt{(aa - xx)}$, adeoque elementum curvæ quæsitæ $= (2x - 2xx : a)\, dx : \sqrt{(aa - xx)}$; cujus quadratum $(4xx - \frac{8x^3}{a} + \frac{4x^4}{aa})\, dx^2 : (aa - xx)$ distribuendum est duas partes latera habentes integrabilia. Ponantur pro lateribus quæsitis $(mx\sqrt{(1 : a)} + nxx\sqrt{(1 : a^3)})\, dx : \sqrt{(a - x)}$ & $(px\sqrt{(1 : a)} + qxx\sqrt{(1 : a^3)})\, dx : \sqrt{(a + x)}$; horumque quadrata $(mmxx : a + 2mnx^3 : aa + nnx^4 : a^3)\, dx^2 : (a - x)$ & $(ppxx : a + 2pqx^3 : aa + qqx^4 : a^3)\, dx^2 : (a + x)$ in unam summam collecta

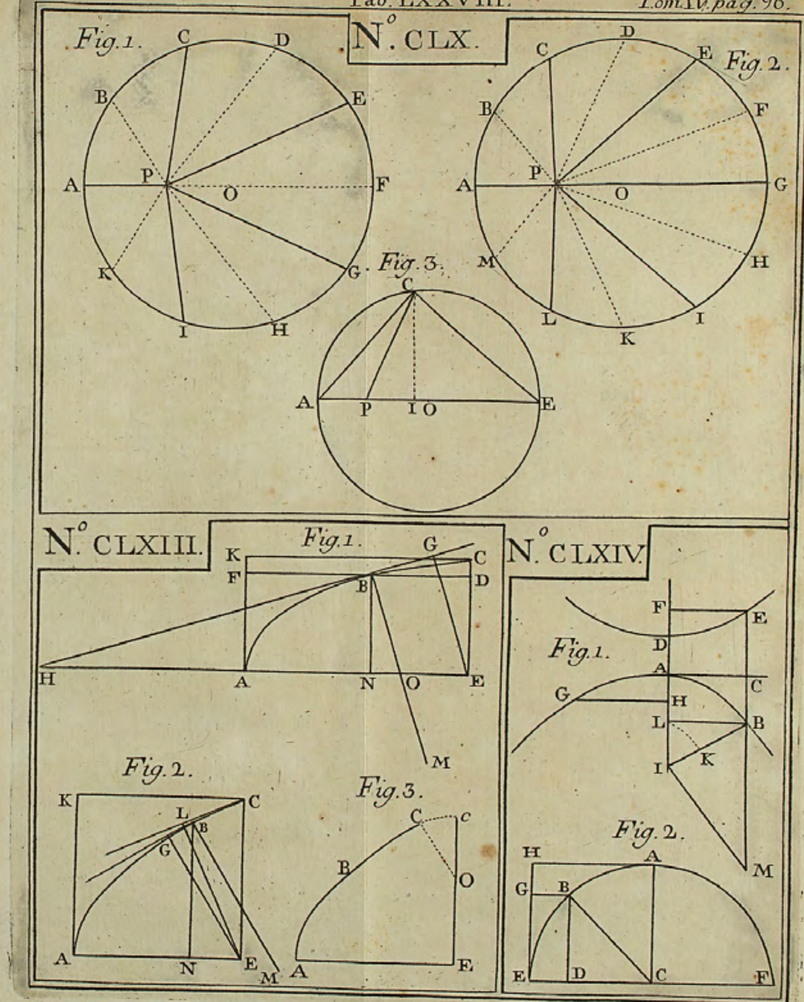
$$\left.\begin{array}{l} +mmxx + 2mnx^3 : a + nnx^4 : aa \\ \qquad + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + nnx^5 : a^3 \\ +ppxx + 2pqx^3 : a + qqx^4 : aa \\ \qquad - ppx^3 : a - 2pqx^4 : aa - qqx^5 : a^3 \end{array}\right\} dx^2 : (aa - xx)$$

debent æquari quadrato elementi curvæ quæsitæ $(4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa)\, dx^2 : (aa - xx)$; ideoque si omisso denominatore communi $aa - xx$, æquationes instituantur inter terminos pari utrobique dimensione ipsius x affectos, nempe $mm + pp = 4$

$2mn$



Tab. LXXVIII. Tom. IV. pag. 96.



ET

$2mn + mm$
& $nn - qq$
tione, repe
$+ 32nn$. Q
que membro
$+ 32nn$; extr
diviso utroq
que $n = \surd$
rum litteraru
nimirum $q =$
ut si n & q sin
vice versa ;
$(\mp x \surd (2 :$
$\pm xx \surd (2 : a$
quæsitæ, qu
$2x) : 15a \surd a$
dabunt ipsas
braïcam quæ

Hæc ergo
CAHGB
lineæ rectæ.
arcu, seu qua

Sit jam E
curvæ quæsita
ut distribui p
natur pro lat
$\surd (2a - x)$
quadrata si
$2ppxx + 4pqx$
$- ppx$
$+ nnx$

Joan. Bern

$2mn + mm + 2pq - pp = -8$, $nn + 2mn + qq - 2pq = 4$, & $nn - qq = 0$, quibus reductis incipiendo a postrema æquatione, reperietur tandem hæc æquatio $n^8 + 24n^4 + 16 = 8n^6 + 32nn$. Quæ ut porro reduci possit, subtrahendum est ab utroque membro $32n^4$ & remanebit $n^8 - 8n^4 + 16 = 8n^6 - 32n^4 + 32nn$; extracta utrobique radice, provenit $n^4 - 4 = (2n^3 - 4n)\sqrt{2}$; diviso utroque per $nn - 2$, habebitur $nn + 2 = 2n\sqrt{2}$, adeoque $n = \sqrt{2}$; unde si per calculum quærantur valores reliquarum litterarum, patebit omnes inter se & ipsi n fore æquales; nimirum $q = p = m = n = \sqrt{2}$; hoc tamen cum discrimine ut si n & q sint affirmativæ, reliquæ m & p debeant esse negativæ, vel vice versa; $q = -p = -m = n = \pm\sqrt{2}$; erunt itaque $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})\,dx : \sqrt{(a - x)}$ & $\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)}\,dx : \sqrt{(a + x)}$ differentiales coordinatarum curvæ quæsitæ, quarum ergo integrales $(\pm 4aa \pm 2ax \mp 6xx)\sqrt{(2a - 2x)} : 15a\sqrt{a}$, & $(\pm 12aa \mp 6ax \pm 2xx)\sqrt{(2a + 2x)} : 5a\sqrt{a}$ dabunt ipsas coordinatas, adeoque etiam ipsam curvam algebraïcam quæsitam. *Q. E. F.*

Hæc ergo curva, una cum arcu AB, erit æqualis spatio CAHGB diviso per $\frac{1}{2}a$, æquali $2a - \frac{2a + x}{a}\sqrt{(aa - xx)} =$ lineæ rectæ. Unde in casu CD = CE, erit compositum ex arcu, seu quadrante AE, & curva, æquale diametro.

ALITER.

Sit jam ED $= x$; erit, per prius dicta, quadratum elementi curvæ quæsitæ $(4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa)dx^2 : (2ax - xx)$; quod ut distribui possit in duas partes latera habentes integrabilia, ponatur pro lateribus quæsitis $(mx\sqrt{(1:a)} + nxx\sqrt{(1:a^3)})\,dx : \sqrt{(2a - x)}$ & $(px\sqrt{(1:a)} + qxx\sqrt{(1:a^3)})\,dx : \sqrt{x}$, quorum quadrata si in unam colligantur summam provenit

$$\frac{\begin{array}{l} 2ppxx + 4pqx^3 : a + 2qqx^4 : aa \\ \quad - ppx^3 : a - 2pqx^4 : aa - qqx^5 : a^3 \\ \quad + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + nnx^5 : a^3 \end{array}}{2ax - xx}\,dx^2 = \frac{4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa}{2ax - xx}\,dx^2$$

institutis æquationibus inter terminos homogeneos, pervenitur ad hanc æquationem $n^4 + 2n^3\sqrt{2} + 4nn + 4n\sqrt{2} + 4 = 0$; cujus radix est $n = -\sqrt{2}$; reliquis factis, ut supradictum, reperietur iterum $q = -p = -m = n = \pm\sqrt{2}$. Erunt itaque $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{(2a - x)}$ & $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{x}$ differentiales coordinatarum curvæ quæsitæ, quarum ergo integrales $(\mp 8aa \mp 2ax \mp 2xx)\sqrt{(4a - 2x)} : 5a\sqrt{a}$ & $(\mp 10ax \pm 6xx)\sqrt{2x} : 15a\sqrt{a}$ dabunt coordinatas ipsas, hoc est curvam quæsitam, quæ cum arcu BE erit $=$ spatio CBGE diviso per $\frac{1}{2}a = \frac{a+x}{a}\sqrt{(2ax - xx)} =$ lineæ rectæ. Unde in casu $ED = EC$, erit arcus, seu quadrans AE, cum curva, æqualis diametro, ut ante.

N°. CLXV.

DE EVOLUTIONE

SUCCESSIVA ET ALTERNANTE

Curvæ cujuscunque in infinitum continuata, tandem Cycloidem generante;

SCHEDIASMA CYCLOMETRICUM.

TAB. LXXVIII N°. CLXV. SIT curva quælibet ADB, cujus tangentes in A & B ad se invicem perpendiculares, atque ideo oppositis coordinatis parallelæ; productis itaque axe CA & tangente BF in infinitum, evolvi intelligatur ADB, incipiendo evolutionem in A; quæ inde describitur AEF, evolvatur quoque incipiendo a fine F, & inde descripta FGH porro evolvatur initio facto ab H, & sic fiat in infinitum alterna evolutio, inchoando quamlibet evolutionem a puncto in quo præcedens finitur. Dico post evolutiones in infinitum continuatas, curvas tunc postremo generatas fore Cycloides identicas, qualiscunque fuerit primitiva curva ADB, ex qua reliquæ generantur. Et quidem tam

tam promte convergunt ad Cycloidem, ut, post paucas evolutiones, ab ea sensibiliter non discrepent generatæ per evolutionem.

Hujus rei veritas attente consideranti facile patebit.

Sit nunc ADB quadrans circuli, cujus longitudo dicatur $= a$, radius CA vel $CB = 1$; dicantur etiam $AEF = b$, $HIK = c$, $MNO = e$, $QRS = f$, &c. Ex puncto quolibet D ducta tangente DE, agantur etiam tangentes EG, GI, IL, LN, &c. quæ alternatim ad se invicem erunt parallelæ, DE, GI, LN &c. ut & EG, IL, LP &c. constituuntque angulos rectos in, E, G, I, L &c.

Ponatur $AD = z$, erit $1 : dz = ED : dAE = GE : dHG = IG : dHI = LI : dMC = NL : dMN =$ &c. Sunt autem ex natura evolutionis, rectæ ED, IG, NL, &c. æquales arcubus respective sumtis AD, HG, ML, &c. Et rectæ GE, LI, PN, &c. $=$ FE, KI, ON &c. hoc est $= b - AE$, $c - HI$, $e - MN$ &c. Hinc invenitur $AE = \frac{zz}{1.2}$, $HG = bz - \frac{z^3}{1.2.3}$, $HI = \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$, $ML = cz - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$, $MN = \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$, $QP = ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$, $QR = \frac{ezz}{1.2} - \frac{ez^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}$ &c. His in ordinem digestis, sequentes duas formo Tabellas, quarum prior servit pro curvis, quæ tangunt inferiorem parallelam CQ, altera pro iis, quæ tangunt superiorem BS.

TAB. I.

$$AE = \frac{zz}{1.2}$$
$$HI = \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$$
$$MN = \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$$
$$QR = \frac{ezz}{1.2} - \frac{cz^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}$$
&c. = &c.

TAB. II.

$$AD = z$$
$$HG = bz - \frac{z^3}{1.2.3}$$
$$ML = cz - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$$
$$QP = ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$$
&c. = &c.

Abeunte D in B; fiet $z = a$; quo ſubſtituto ubique, habebitur AEF ſeu b, HIK ſeu c, MNO ſeu e, QRS ſeu f, &c. earumque evolutæ, ADB, HGF, MLK, QPO &c. unde ſequentes duæ conduntur Tabulæ.

TAB. III.

$$AEF = b = \frac{aa}{1.2}$$
$$HIK = c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$$
$$MNO = e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3..6}$$
$$QRS = f = \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3....8}$$
&c. $= g =$ &c.

TAB. IV.

$$ADB = a$$
$$HGF = ba - \frac{a^3}{1.2.3}$$
$$MLK = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$$
$$QPO = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3...7}$$
&c. = &c.

Quod ſi jam appropinquare lubeat ad determinandam veram rationem diametri ad circumferentiam Circuli, ſumo aliquam ex curvis TAB. III determinatis, tanquam veram Cycloïdem conſiderando, utpote a qua poſt paucas evolutiones nihil fere diſcrepat: deinde ſubſtituo ſucceſſive valores ipſarum b, c, e &c. donec perveniam ad curvam quam ſeligo, ex. gr. ad QRS, quæ poſt ſeptimam evolutionem producitur; & ſic oriuntur longitudines ſingularum curvarum per quadrantes circulares expreſſæ, ut videre eſt in ſequenti Tabella.

TAB. V.

$$AEF = b = aa \times \frac{1}{1.2}$$
$$HIK = c = a^4 \times \frac{5}{1.2.3.4}$$
$$MNO = e = a^6 \times \frac{61}{1.2.3..6}$$
$$QRS = f = a^8 \times \frac{1385}{1.2.3....8}$$

Cum itaque QRS habeatur pro ſemi-Cycloide, cujus baſis eſt erecta perpendicularis QT = CB = 1, & proinde ST diameter circuli ejus generatoris, cujus diametri duplum = QRS; erit QT : 2ST [QRS] = ut ſemicircumferentia ad 2 diametros = ADB : 2AC. Adeoque $1 : a^8 \times \frac{1385}{1.2.3....8} = a : 2$;

unde sequitur $a^9 = \frac{2 \times 1.2.3.4 \ldots 8}{1385} = \frac{16128}{277}$; atque extracta radice nonæ potestatis, fit $a = \frac{135}{86}$, seu $4a = \frac{270}{43}$, hoc, est, circumferentia continet radium $6\frac{12}{43}$, ipsumque adeo diametrum $3\frac{6}{43}$ vicibus, quod monstrat rationem paulo minorem *Archimedea*, quæ est $3\frac{1}{7}$, vel $3\frac{6}{42}$. Per logarithmos calculus est facilior.

SCHOLIUM.

Potest autem facilius indagari ratio inter circumferentiam circuli & diametrum, sine extractione radicum, & sine comparatione Cycloidis: Considerando nimirum, post evolutiones multoties repetitas, tandem longitudines curvarum utriusque ordinis convergere ad sensibilem æqualitatem. Quocirca si æquatio instituatur inter curvas utriusque ordinis, sat bene a prima remotas, quarum una ex altera generatur, ex. gr. QRS ex QPO, dabitur statim ratio inter quadrantem circularem ejusque radium quam proxime; etenim valor generatæ expressus per a ad potestatem elevatam cujus exponens æqualis est numero curvarum, semper una tantum dimensione major est, quam valor curvæ generantis, seu immediate præcedentis.

Condenda est in hunc finem Tabula VI, ex supputatione curvarum Tab. IV, exhibitarum; eaque ita se habet, ut monstrat Tabula sequens.

TAB. VI.

$$\mathrm{ADB} = a$$

$$\mathrm{HGF} = ba - \frac{a^3}{1.2.3} = a^3 \times \frac{2}{1.2.3}$$

$$\mathrm{MLK} = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} = a^5 \times \frac{16}{1.2.3.4.5}$$

$$\mathrm{QPO} = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3 \ldots 7} = a^7 \times \frac{272}{1.2.3 \ldots 7}.$$

Ponamus

Ponamus itaque QRS = QPO, & habebimus $a^8 \times \frac{1385}{1.2.3 \ldots 8} = a^7 \times \frac{272}{1.2.3 \ldots 7}$; unde dividendo per a^7, & reducendo numeros ad unam partem, obtinemus statim $a = \frac{2176}{1385}$, adeoque $2a = \frac{4352}{1385}$, & sic erit semicircumferentia ad radium, sive tota circumferentia ad diametrum, ut 4352 ad 1385. Ut pateat quam parum abludat a proportione *Archimedea*, fiat ut 22 ad 7, ita 4352 ad quartum, qui erit $1384\frac{8}{11}$, hoc est $\frac{3}{11}$ unitatis minor quam 1385, adeoque nostra analogia tantillo minor est, quam *Archimedea*. Scimus autem *Archimedeam* [utpote justo majorem] in excessu peccare; nostra igitur proprius ad veram accedit.

Si quis vellet Tabulas nostras 5^{am} & 6^{am} per aliquot adhuc gradus continuare, perveniret statim ad numeros rationis incredibili modo veris appropinquantis.

Volumus autem utramque Tabulam una curva augere, quod, quomodo fiat, facile patet ex lege progressionis litterarum b, c, e, f, g, &c. atque lubet binas istas Tabulas conflare in unam Tab. VII extensam ad decimam curvam a quadrante circuli ADB inclusive sumpto. Ubi notandum, curvam ipsam ADB vocari I; AEF, II; HGF, III; HIK, IV, MLK, V; & ita sequentes. Tabula VII, quæ inde formatur, hæc est.

TAB.

TAB. VII.

Curva $\mathrm{I} = a$

$\ldots\ldots \mathrm{II} = b = \frac{aa}{1.2}$

$\ldots\ldots \mathrm{III} = ba - \frac{a^3}{1.2.3}$

$\ldots\ldots \mathrm{IV} = c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$

$\ldots\ldots \mathrm{V} = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$

$\ldots\ldots \mathrm{VI} = e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3\ldots6}$

$\ldots\ldots \mathrm{VII} = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3..7}$

$\ldots \mathrm{VIII} = f - \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3..8}$

$\ldots \mathrm{IX} = fa = \frac{ea^3}{1.2.3} + \frac{ca^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ba^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{a^9}{1.2.3\ldots9}$

$\mathrm{X} = g = \frac{faa}{1.2} - \frac{ea^4}{1.2.3.4} + \frac{ca^6}{1.2.3\ldots6} - \frac{ba^8}{1.2.3\ldots8} + \frac{a^{10}}{1.2.3\ldots10}$

$\mathrm{XI} = ga - \frac{fa^3}{1.2.3} + \frac{ea^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ca^7}{1.2.3\ldots.7} + \frac{ba^9}{1.2.3\ldots9} - \frac{a^{11}}{1.2.3\ldots11}$

$\mathrm{XII} = h = \frac{gaa}{1.2} - \frac{fa^4}{1.2.3.4} + \frac{ea^6}{1.2.3\ldots6} - \frac{ca^8}{1.2.3\ldots8} + \frac{ba^{10}}{1.2.3\ldots10} - \frac{a^{12}}{1.2.3\ldots12}$

Generatio & continuatio hujus Tabulæ fiet manifesta, modo attendatur ad progressionem litterarum, *b*, *c*, *e* &c. & unius cujusque constructio ex præcedentibus. Aliquid laboris requiritur ad supputandos singularum litterarum valores; reperi autem [salvo errore calculi] fore eos, ut sequitur in hoc adjecto laterculo.

TAB.

TAB. VIII.

Curva $\mathrm{I} = a = a(1)$

$\ldots \mathrm{II} = b = a^2(\frac{1}{1.2})$

$\ldots \mathrm{IV} = c = a^4(\frac{5}{24}) = a^4(\frac{5}{1.2.3.4})$

$\ldots \mathrm{VI} = e = a^6(\frac{61}{1.2.3\ldots6})$

$\ldots \mathrm{VIII} = f = a^8(\frac{1385}{1.2.3\ldots.8})$

$\ldots \mathrm{X} = g = a^{10}(\frac{50521}{1.2.3\ldots.10})$

$\ldots \mathrm{XII} = h = a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3\ldots..12})$.

Ex his facile supputantur curvæ intermediæ numerorum imparium: Erunt namque ordine, ut sequens monstrat laterculus.

TAB. IX.

Curva $\mathrm{III} = a^3(\frac{2}{1.2.3})$

$\ldots \mathrm{V} = a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5})$

$\ldots \mathrm{VII} = a^7(\frac{272}{1.2.3\ldots7})$

$\ldots \mathrm{IX} = a^9(\frac{7936}{1.2.3\ldots..9})$

$\ldots \mathrm{XI} = a^{11}(\frac{353792}{1.2.3\ldots\ldots11})$

Disponendo nunc ambos laterculos secundum ordinem curvarum, prodit

TAB.

TAB. X.

Curva I $= a(1)$

.... II $= a^2 \left(\frac{1}{1.2}\right)$

.... III $= a^3 \left(\frac{2}{1.2.3}\right)$

.... IV $= a^4 \left(\frac{5}{1.2.3.4}\right)$

.... V $= a^5 \left(\frac{16}{1.2.3.4.5}\right)$

.... VI $= a^6 \left(\frac{61}{1.2.3\ldots6}\right)$

.... VII $= a^7 \left(\frac{272}{1.2.3\ldots7}\right)$

.... VIII $= a^8 \left(\frac{1385}{1.2.3\ldots\ldots8}\right)$

.... IX $= a^9 \left(\frac{7936}{1.2.3\ldots\ldots9}\right)$

.... X $= a^{10} \left(\frac{50521}{1.2.3\ldots\ldots10}\right)$

.... XI $= a^{11} \left(\frac{353792}{1.2.3\ldots\ldots\ldots11}\right)$

.... XII $= a^{12} \left(\frac{2702765}{1.2.3\ldots\ldots\ldots12}\right)$

.... XIII $= a^{13} \left(\frac{22368256}{1.2.3\ldots\ldots\ldots13}\right)$

.... XIV $= a^{14} \left(\frac{199360981}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots14}\right)$

Videamus nunc, quam promte convergant longitudines curvarum ad æqualitatem, & inde appropinquetur mira celeritate ad veram rationem inter quadrantem circuli & radium; id quod fit æquando fucceffive fingularum valores cum valore proxime infequentis. Ponatur itaque

I =

I = II. hoc eft, $a = aa\left(\frac{1}{1.2}\right)$. unde $a:1$ feu ratio quadrantis ad radium $= 2:1$, jufto major.

II = III. h. e. $a^2\left(\frac{1}{2}\right) = a^3\left(\frac{2}{1.2.3}\right)$: unde $a:1 = 3:2$, jufto minor.

III = IV. h. e. $a^3\left(\frac{2}{1.2.3}\right) = a^4\left(\frac{5}{1.2.3.4}\right)$. unde $a:1 = 8:5$..major.

IV = V. h. e. $a^4\left(\frac{5}{1.2.3.4}\right) = a^5\left(\frac{16}{1.2.3.4.5}\right)$. unde $a:1 = 25:16$..minor.

V = VI. h. e. $a^5\left(\frac{16}{1.2.3.4.5}\right) = a^6\left(\frac{61}{1.2.3\ldots6}\right)$. unde $a:1 = 96:61$..major.

VI = VII. h. e. $a^6\left(\frac{61}{1.2.3\ldots6}\right) = a^7\left(\frac{272}{1.2.3\ldots7}\right)$. unde $a:1 = 427:272$..minor.

VII = VIII. h. e. $a^7\left(\frac{272}{1.2.3\ldots7}\right) = a^8\left(\frac{1385}{1.2.3..8}\right)$. unde $a:1 = 2176:1385$..major.

VIII = IX. h. e. $a^8\left(\frac{1385}{1.2.3..8}\right) = a^9\left(\frac{7936}{1.2.3..9}\right)$. unde $a:1 = 12456:7936$..minor.

IX = X. h. e. $a^9\left(\frac{7936}{1.2.3..9}\right) = a^{10}\left(\frac{50521}{1.2.3\ldots10}\right)$. unde $a:1 = 79360:50521$..major.

X = XI. h. e. $a^{10}\left(\frac{50521}{1.2.3..10}\right) = a^{11}\left(\frac{353792}{1.2.3\ldots11}\right)$. unde $a:1 = 555731:353792$..minor.

XI = XII. h. e. $a^{11}\left(\frac{353792}{1.2.3\ldots11}\right) = a^{12}\left(\frac{2702765}{1.2.3\ldots12}\right)$. unde $a:1 = 4245504:2702765$.major.

XII = XIII. h. e. $a^{12}\left(\frac{2702765}{1.2.3\ldots12}\right) = a^{13}\left(\frac{22368256}{1.2.3\ldots13}\right)$. unde $a:1 = 35135945:22368256$.min.

XIII = XIV. h. e. $a^{13}\left(\frac{22368256}{1.2.3\ldots13}\right) = a^{14}\left(\frac{199360981}{1.2.3\ldots14}\right)$. unde $a:1 = 313155584:199360981$.maj.

&c. = &c.

Sumendo antecedentium quadrupla, habebimus rationes appropinquantes circumferentiæ ad radium, vel faciendo, ut quilibet confequens ad quadruplum antecedentis, ita radius, qui ponatur = 10, 000, 000, ad quartum, qui dabit numerum partium circumferentiæ, ad verum celeriter accedentem. Fiat itaque

1°. 1 : 8 = 10, 000, 000 : 80, 000, 000, qui numerus juſto major eſt.
2°. 2:12 = 10, 000, 000: 60, 000, 000, qui juſto minor eſt.
3°. 5:32 = 10, 000, 000: 64, 000, 000, juſto major.
4°. 16:100 = 10,000,000:62,500,000, juſto minor.
5°. 61:384 = 10, 000, 000 : 62, 950 , 820, juſto major.
6°. 272:1708 = 10, 000,000 : 62, 794, 117, juſto minor.
7°. 1385:8704 = 10, 000, 000 : 62, 844, 766, juſto major.
8°. 7936:49860 = 10, 000, 000: 62, 827, 621, juſto minor.
9°. 50521:317440 = 10, 000, 000: 62,833, 277, juſto major.
10°. 353792:2222924 = 10, 000, 000: 62, 831, 381, juſto minor.
11°. 2702765:16982016 = 10, 000, 000 : 62, 832, 011, juſto major.
12°. 22368256:140543780 = 10,000,000:62,831, 800, juſto minor.
13°. 199360981:1252462336 = 10,000,000:62,831,871, juſto major.

N°. CLXVI.

PROBLEMA.

In ſuperficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta breviſſimam.

SOLUTIO *.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1. SIT AE $=x$, EB $=y$, & a puncto B erigi intelligatur recta B$b=z$, normalis ad planum AEB & ſuperficiei curvæ occurrens in b, & detur æquatio quævis exprimens relationem trium coordinatarum x, y, z, qua relatione natura ſuperficiei determinatur.

Eſto jam linea quæſita lbc, a cujus ſingulis punctis l, b, c cadere intelligantur in ſubjectum planum AEB normales lL, bB, cC, formantes projectionem [curvæ quæſitæ] LBC. Concipiatur planum IBb, cujus ſectio communis cum plano AEB,

quæ

* *Hanc Solutionem communicavit Auctor cum Cl.* KLINGENSTIERNA *in Univerſitate* Upſalenſi *Matheſeos Profeſſore ſub finem Anni* 1728, *quam ipſe* KLINGENSTIERNA *poſtea ita in chartam conjecit, ut hic extat.*

quæ eſt recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC, quare planum IBb curvam quæſitam lbc ſtringet in elemento bc.

Concipiatur etiam planum bGI ſuperficiem curvam tangens in b, & occurrens plano AEB in communi ſectione GI, ac plano IBb in communi ſectione bI, quæ [quia utrumque planorum bGI & IBb curvam quæſitam ſtringit in elemento bc] erit productio ejuſdem elementi bc, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur BE, donec ſectioni IG occurrat in G, & a puncto G demittatur ad BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum IBb. A puncto H demittatur in rectam bI normalis Hh, & a puncto b in rectam cC normalis be. His factis, dicatur EF $=$ BD $=dx$, DC $=dy$, BC $=be=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=ds$, $ce=dz$, ſubtangens BG, quæ ex natura ſuperficiei datur in x, y & z, $=T$.

Fundamentum Solutionis ſequentis in eo conſiſtit, quod planum per tria curvæ quæſitæ puncta infinite propinqua tranſiens, rectum ſit ad planum quod ſuperficiem curvam tangit. Quærendi itaque ſunt duo anguli: unus quem planum contingens bGI facit cum plano IBb; alter vero, quem planum per tria curvæ quæſitæ puncta tranſiens facit cum eodem plano IBb. Inventis his angulis, ſtatuenda eſt eorum ſumma æqualis angulo recto, & habebitur æquatio Problemati ſatisfaciens.

Hunc in finem ita procedendum: Ob ſimilitudinem triangulorum CBD, BGH, eſt CB $[ds]$: BD $[dx]$ $=$ BG $[T]$: GH; unde GH $=Tdx:ds$.

Ob ſimilitudinem eorundem triangulorum BCD, GBH, eſt BC $[ds]$: CD $[dy]$ $=$ GB $[T]$: BH; unde BH $=Tdy:ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum ceb, bBI, eſt ce $[dz]$: eb $[ds]$ $=$ bB $[z]$: BI; unde BI $=zds:dz$.

Ex BI $[zds:dz]$ ſubtrahatur BH $[Tdy:ds]$, & relinquitur IH $=zds:dz-Tdy:ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum bce, IHh, eſt bc $[\sqrt{(ds^2+dz^2)}]$: ce $[dz]$ $=$ IH $[\frac{zds}{dz}-\frac{Tdy}{ds}]$: Hh; unde Hh

$=[z$

$= [\frac{zds}{dz} - \frac{Tdy}{ds}] \times dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)} = (zds^2 - Tdydz) : ds\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$.

Jam quia GH normalis eſt ad planum I B b & H b normalis ad rectam b I, quæ eſt ſectio communis planorum I B b & b G I, erit triangulum H b G in plano ad utrumque planorum I B b & b G I recto; adeoque, ob angulum G H b rectum, b H : H G = radius : tang. anguli inclinationis H b G. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis H b G $= \frac{HG}{Hb} = \frac{Tdx\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{zds^2 - Tdydz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæſitæ lbc puncta infinite propinqua tranſiens facit cum plano I B b, ita inveſtigatur.

TAB. LXXIX N°. CLXVI. Fig. 2, & 3. In projecta L B C [*Fig.* 2, concipienda eſt ut portio infinite parva ſuperficiei cylindroïdicæ, plicatæ in linea b B, ita ut L B & B C ſint duo elementa curvæ L B C, quæ eſt baſis cylindroïdis] ſint tria puncta L, B, C, quorum diſtantiæ L B, B C ſint æquales & infinite parvæ; ſintque in curva quæſita lbc tria puncta correſpondentia l, b, c, per quæ tranſeat dictum planum. Producantur L B ad ϵ [*Fig.* 3], & lb ad β, ut fiant Bϵ = B C, & $b\beta = bc = bp$, factiſque reliquis, ut in figura, & poſitis L B = B C = ds conſtantibus, erit $fe = -ddz$, & ob ſimilitudinem triangulorum bce, fcp, bc [$\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$] : bc [ds] $= fc$ [$-ddz$] : cp; unde $cp = -dsddz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Ut inveniatur $p\beta$, ſeu quæ ipſi æqualis cenſeri debet, Cϵ, ſit [*Fig.* 3] curva projecta L B C, B C = ds, B D = dx, C D = dy, tangens ad B recta Bϵ, in quam a puncto C cadat normalis Cϵ & a puncto ϵ in C D normalis ϵO.

Ob ſimilitudinem triangulorum B C D, ϵ C O, erit B D [dx] : B C [ds] = C O [ddy] : Cϵ. Ergo Cϵ $= dsddy : dx = p\beta$.

Jam quia cp & $c\beta$ normales ſunt ad bc, quæ eſt communis ſectio plani I B b ſeu C B b, & plani per tria puncta l, b, c, tranſeuntis, erit triangulum $cp\beta$ in plano ad utrumque iſtorum pla-

planorum recto, adeoque ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp : p\beta$ = radius : tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta$, $= \frac{p\beta}{cp} = \frac{dsddy : dx}{-dsddz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}} = \frac{-ddy\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{dxddz}$.

Quoniam igitur, per fundamentum Solutioni præmiſſum, angulus $pc\beta$ + angulo H b G [*Fig.* 1] = angulo recto; erit productum tangentium iſtorum angulorum = quadrato radii = 1. Unde ducta tangente anguli $pc\beta$, modo inventa, $-ddy\sqrt{(ds^2 + dz^2)} : dxddz$ in tangentem anguli H b G, quæ ſupra inventa erat $Tdx\sqrt{(ds^2 + dz^2)} : (zds^2 - Tdydz)$, habetur æquatio Problemati ſatisfaciens; $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} \times \frac{-ddy\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{dxddz} = 1$, vel $(ds^2 + dz^2)\, Tddy = (Tdzdy - zds^2)\, ddz$.

S C H O L I U M I. *

Hic eſt animadvertendum, quod Cl. KLINGENSTIERNA omiſit, poſſe ſcil. ſuperficiem curvam datam etiam conſiderari ſectam planis parallelis ipſi A E per puncta B tranſeuntibus & plano A E B perpendicularibus, quæ ſectiones facient in ſuperficie curva, alias lineas curvas datas, quarum ſubtangentes ad ſingula puncta B ſpectantes dicantur $= \theta$. Unde mutatis T in θ, dy in dx, & ddy in ddx, prodibit hæc alia æquatio Problemati ſatisfaciens $(ds^2 + dz^2)\,\theta ddx = (\theta dzdx - zds^2)\, ddz$; aut quia $-dxddx = dyddy$, prodibit multiplicando per $-Tdx : dy$, $(ds^2 + dz^2)\,\theta Tddy = (-\theta Tdzdx^2 : dy + Tzdxds^2 : dy)\, ddz$. Eſt autem, quod facile demonſtrari poteſt generaliter pro quacunque curva in ſuperficie ad lubitum deſcripta, ſemper $\frac{\theta dy + Tdx}{\theta T} = \frac{dz}{z}$, adeoque $\theta Tdz = \theta zdy + Tzdx$; unde ſubſtituto valore ipſius θTdz, in æquatione ultimo inventa, reſultabit $(ds^2 + dz^2)\,\theta Tddy = (-\theta zdx^2 - Tzdx^3 : dy + Tzdx$ TAB. LXXIX N°. CLXVI. Fig. 1.

* *Scholii hujus, ut & ſequentium ſunt ipſius Authoris verba.*

$Tzdxds^2 : dy)ddz =$ [ſubſtituendo dy^2 pro $ds^2 - dx^2$]; $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$. Ponantur porro loco θT & z, eorum proportionales $\theta dy + Tdx$ & dz; abit æquatio in hanc $(ds^2 + dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, hoc eſt, $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel $= \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$.

Nota. Eadem æquatio immediate deducitur etiam ex primo inventa $(ds^2 + dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$. Hanc enim multiplicando per θ, & poſtea pro θTdz ſubſtituendo ejus valorem $\theta zdy + Tzdx$, oritur $(ds^2 + dz^2)\theta Tddy = (\theta zdy^2 + Tzdydx - \theta zds^2)ddz =$ [ob $dy^2 - ds^2 = -dx^2$] huic $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$, ſcriptoque $\theta dy + Tdx$ & dz pro θT & z, quibus ſunt proportionales; habebitur $(ds^2 + dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, & proinde $\frac{dzddz}{ds^2+ds^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ut ante.

Pro tribus coordinatis x, y, z, ſcribatur t, x, y; ſitque æquatio naturam ſuperficiei curvæ exprimens, ut facit Cel. EULERUS *, hæc $Pdx = Qdy + Rdt$; erit [ponendo $dt = 0$] $Pdx = Qdy$, adeoque $P : Q = dy : dx = y : T$, unde $T = Qy : P$; ponendo nunc $dx = 0$, erit $Qdy = -Rdt$, id eſt, $-R : Q = dy : dt = y : \theta$, hinc $\theta = -Qy : R$. Quare in formula mea $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ſi pro x, y, z, T, θ, ſcribatur reſpective $t, x, y, Qy : P, -Qy : R$, & pro ds, quod mihi conſtans ſupponitur, ponatur $\sqrt{(dt^2 + dx^2)}$, prodibit $\frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx} = \frac{dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

Si in æquatione mea priori $(ds^2 + dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$ litteræ *Eulerianæ* adhibeantur, & pro T ſcribatur $Qy : P$, emergit æquatio paulo ſimplicior $\frac{Qddx}{Qdxdy - Pdt^2 - Pdx^2} = \frac{ddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

In

* *Comment. Acad. Petrop.* Tom. III. pag. 110 ſeqq.

In altera vero, modo ſupra expoſita, $(ds^2 + dz^2)\theta ddx = (\theta dzdx - zds^2)ddz$, adhibitis rurſus litteris *Eulerianis*; ut pro θ ſcribendo $-Qy : R$, reſultat æquatio parum differens a præcedente $\frac{Qddt}{Qdtdy + Rdt^2 + Rdx^2} = \frac{ddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

Quod ſi conferantur membra priora harum duarum æquationum, redibit æquatio naturam ſuperficiei curvæ exprimens, $Pdx = Qdy + Rdt$, plane ut fieri oportuit: ſunt enim illæ duæ æquationes æquivalentes.

SCHOLIUM II.

Methodus hactenus explicata ſolvendi Problema de Linea breviſſima ducenda in ſuperficie data, inſervit etiam Solutioni aliorum hujuſmodi Problematum difficiliorum, ad quæ communes methodi mere analyticæ ægrius forſan, aut plane non pertingent. Ex. gr. proponatur hoc

PROBLEMA.

Ducere in ſuperficie data lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum oſculans datam habeat inclinationem ad planum tangens ſuperficiem datam in eodem puncto.

Voco autem *planum oſculans*, quod tranſit per tria curvæ quæſitæ puncta infinite ſibi invicem propinqua.

SOLUTIO.

Si inclinationis angulus ſit omnino rectus, coincidit hoc Problema cum præcedente: eſt enim curva quæſita ipſa breviſſima, pro qua dedimus æquationem. Sit vero nunc angulus ille inclinationis obliquus, cujus tangens data ſit $= n$. Conſtat ex Theoremate meo in *Actis Lipſ.* 1722, menſ. Jul. publicato *, ſi duorum angulorum tangentes ſint a & b, fore tangentem eorum ſummæ $= (a+b) : (1 - ab)$, ſumta nimirum unitate pro ſi-

 nu

* N°. CXXVII. pag. 527, 528. *Tom. II.*

nu toto, ſeu tangente anguli ſemirecti. Quandoquidem igitur angulus noſter inclinationis oſtenſus eſt, in Solutione præcedenti, conſtare ex duabus partibus, quarum una pro tangente habet $Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}:(zds^2-Tdydz)$ quæ vocetur $=a$, alterius vero tangens $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}:dxddz$, quæ dicatur b; quibus ſubſtitutis in $(a+b):(1-ab)$, & quod provenit æquando ipſi n, habebitur $\left(\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2-Tdydz}+\frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}\right):$ $\left(1+\frac{Tddy\times(ds^2+dz^2)}{zds^2ddz-Tdydzddz}\right)=n$, ſeu $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2-Tdydz}+\frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}$ $=\frac{nzds^2ddz-nTdydzddz+nTddy\times(ds^2+dz^2)}{zds^2ddz-Tdydzddz}$.

Reducto priori membro ad communem denominatorem, & poſterioris utroque termino per dx multiplicato, ita ut utrumque membrum etiam habeat communem denominatorem; quo proin neglecto, orietur $(Tdx^2ddz-zds^2ddy+Tdydzddy)$ $\times\sqrt{(ds^2+dz^2)}=nzds^2dxddz-nTdydxdzddz+nTdxddy$ $\times(ds^2+dz^2)$. Quæ æquatio ſi tractetur ut ſupra factum in *Nota* poſt *Scholium* I, eruetur, operatione rite peracta, hæc altera æquatio: $(\theta dxdyddz+Tdx^2ddz-\theta dxdzddy\pm Tdzdyddy)$ $\sqrt{(ds^2+dz^2)}=n\theta dx^2dzddz-nTdxdydzddz+(n\theta dyddy$ $+nTdxddy)\times(ds^2+dz^2)$. Utraque igitur harum duarum æquationum ſatisfacit Problemati.

COROLLARIUM.

Dantur caſus ſpeciales, in quibus æquatio ſupra inventa $(ds^2$ $+dz^2)Tddy=(Tdzdy-zds^2)ddz$ ad differentias primas reduci poteſt. Sit v. gr. ſuperficies curva data ejus naturæ, ut omnes illius ſectiones, planis ad rectam AE normalibus factæ, ſint lineæ rectæ ordinatis EB parallelæ, cujus generis ſuperficies *Cylindroidicæ* appellari poſſunt. Hoc caſu ſubtangens T evadit infinita; adeoque zds^2 infinite parva, reſpectu $Tdzdy$. Deleta itaque zds^2, & reliquis æquationis terminis per T diviſis, oritur æquatio $(ds^2+dz^2)ddy=dzdyddz$; unde $ddy:dy=dzddz:$ (ds^2+dz^2); & multiplicando per 2, $2ddy:dy=2dzddz:(ds^2+dz^2)$, ſumtiſque integralibus per Logarithmos $lndy^2=l(ds^2+dz^2)$, factoque tranſitu ad numeros, $ndy^2=ds^2+dz^2$. Quoniam in hoc caſu z datur per x & conſtantes, ponatur $dz=pdx$, intelligendo per p quantitatem utcunque datam in x & conſtantibus, & pro ds^2 ſcribatur ejus valor dx^2+dy^2, & mutatur æquatio inventa in hanc: $ndy^2=dx^2+dy^2+ppdx^2$ vel $(n-1)$ $dy^2=(1+pp)dx^2$, extractaque radice quadrata $dy\sqrt{(n-1)}$ $=dx\sqrt{(pp+1)}$. Jam manifeſtum eſt, membrum hujus æquationis poſterius $dx\sqrt{(pp+1)}$ deſignare elementum arcus curvæ, cujus coordinatæ ſunt x & $\int pdx$, ſeu z; id eſt curvæ generatricis Cylindroidis. Si itaque arcus ille dicatur A, erit $dy\sqrt{(n-1)}$ $=dx\sqrt{(pp+1)}=dA$, ſumtiſque integralibus $y\sqrt{(n-1)}$ $=A$; id eſt ordinata curvæ projectionis eſt ad arcum curvæ generatricis Cylindroidis ut 1 ad $\sqrt{(n-1)}$, ſeu in ratione conſtante; quod aliunde non difficulter colligitur, & bonitatem Solutionis præcedentis confirmat.

SCHOLIUM III.

Poteſt perveniri modo elegantiori ad æquationem noſtram ſupra inventam $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2}=\frac{\theta ddx-Tddy}{\theta dx-Tdy}$, ſine operoſa ſupputatione anguli inclinationis HbG quem nimirum facit planum tangens ſuperficiem curvam bIG cum plano bBI. Hunc in finem, adhibita imaginatione, conſulendæ ſunt ambæ Figuræ 1&2, ubi ſubjectum planum in quo eſt curva projectionis LBC vocabo *horizontale*; planum vero ſtringens curvam quæſitam in elemento bc, nempe bIB, plus ultra continuatum nominabo *verticale*; planum denique tranſiens per tria puncta proxima cbl, hoc eſt, planum trianguli $c\beta b$, dicam, ut prius, *Planum oſculans*. Nunc quia planum oſculans debet eſſe perpendiculare ad planum tangens ſuperficiem curvam, & quia $c\beta$ eſt perpendicularis ad utriuſque plani communem ſectionem $b\beta$, erit lineola $c\beta$ perpendicularis ad ipſum planum tangens ſuperficiem. Quod ſi itaque $c\beta$ continuetur deorſum verſus, donec occurrat

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1, & 2.

 plano

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 4. plano horizontali in puncto P, a quo ſi ad extremitates ſubtangentium G & M, ducantur rectæ PG & PM, habentur duo triangula PcG & PcM, rectangula in puncto ſublimi c; eſt enim planum McG tangens ſuperficiem, ad quod normalis eſt cP; adeoque ang. PcG = recto = ang. PcM. Hinc $PG^2 - cG^2 = Pc^2 = PM^2 - cM^2$. Eſt vero $cG^2 = CG^2 + cC^2$ & $cM^2 = CM^2 + cC^2$, quibus valoribus ſubſtitutis & deleto communi Cc^2, erit $PG^2 - CG^2 = PM^2 - CM^2$. Ductis nunc PR parallela ipſi MC, ſeu perpendiculari ad GC productam [angulus quippe GCM eſt rectus], & PS parallela ipſi GC, ſeu perpendiculari ad MC productam; eſt utique $PG^2 - CG^2 = PC^2 + 2\,CG \times CR$, & $PM^2 - CM^2 = PC^2 + 2\,CM \times CS$, unde $CG \times CR = CM \times CS$, & $CS : CR = CG : CM$, hoc eſt, latera parallelogrammi rectanguli RS ſunt ipſis ſubtangentibus reciproce proportionalia. Ex quo fluit quod tangens anguli RCP $\left[\frac{RP}{RC} = \frac{CS}{CR}\right] = \frac{CG}{CM} = \frac{T.}{\theta}$.

Porro intelligatur in *Fig.* 2, in plano verticali latuſculum pc continuari deorſum in planum horizontale cui occurrat in puncto V [*Fig.* 4]. Erit ductis cV & CV; 1°. cVP triangulum rectangulum in V & ſimile ipſi $cp\beta$, quia utraque PV & $p\beta$ ſunt horizontales in communi plano jacentes, adeoque parallelæ; eſt enim planum cVP nihil aliud quam continuatio plani $cp\beta$. 2°. CV eſt continuatio elementi BC, ſeu tangens curvæ projectionis LBC. Ut itaque inveniatur angulus RCV, hoc eſt [in *Fig.* 1] angulus BCD, cujus tangens $= \frac{BD}{DC} = \frac{dx}{dy}$; ſic procedo. Angulus CVP eſt rectus, quod probe imaginando facile patet, & cum cVP ſit etiam rectus, erit, ob commune latus PV, tangens anguli VcP ad tangentem VCP ut VC ad Vc = [ob triangulum rectangulum cCV ſimile triangulo rectangulo, *Fig.* 2, bcc] $ec : bc = dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Quia itaque

itaque tangens anguli VcP ſeu $pc\beta = \frac{p\beta}{pc} =$ [ut ſupra inventum] $-ddy\sqrt{(ds^2 + dz^2)} : dx\,ddz$, habemus tangentem anguli $VCP = -ddy(ds^2 + dz^2) : dz\,dx\,ddz$. Jam vero ex cognitis tangentibus duorum angulorum RCP & VCP invenitur, ope Theorematis mei in *Act. Lipſ.* 1722 * exhibiti, tangens anguli ex illis compoſiti RCV, ſeu ejus qui huic ad verticem eſt oppoſitus BCD; quique pro tangente habet $\frac{dx}{dy}$, nempe erit tangens anguli $RCV = \frac{T}{\theta} + \frac{-ddy(ds^2 + dz^2)}{dz\,dx\,ddz} : \left(1 + \frac{Tddy.(ds^2 + dz^2)}{\theta\,dz\,dx\,ddz}\right)$ ſeu $= \frac{Tdz\,dx\,ddz - \theta\,ddy.(ds^2 + dz^2)}{\theta\,dz\,dx\,ddz + Tddy.(ds^2 + dz^2)}$, adeoque $\frac{dx}{dy} = \frac{Tdz\,dx\,ddz - \theta\,ddy.(ds^2 + dz^2)}{\theta\,dz\,dx\,ddz + Tddy(ds^2 + dz^2)}$, quæ reducta dat $\frac{dz\,ddz}{ds^2 + dz^2} = \frac{\theta\,dy + T\,dx}{-\theta\,dx + T\,dy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel $\left[\text{ob } \frac{ddy}{dx} = -\frac{ddx}{dy}\right] = \frac{\theta\,ddx - Tddy}{\theta\,dx - T\,dy}$; ut per priorem modum.

Coroll. I.

In caſu Cylindroidum, ubi alterutra ſubtangentium, ex. gr. CM, exiſtit infinita, habebit CR ad RP rationem infinitam, hoc eſt, angulus RCP evaneſcit, unde tantum faciendum eſt $\frac{dx}{dy} =$ tangenti anguli $VCP = \frac{-ddy.(ds^2 + dz^2)}{dz\,dx\,ddz}$; id quod ſtatim dat $\frac{dz\,ddz}{ds^2 + dz^2} = \frac{-dy\,ddy}{dx^2}$, ſeu $= \frac{ddx}{dx}$. Quæ eſt eadem æquatio quæ habetur in ſuperiori Corollario, niſi quod hic ſit x quod ibi eſt y. Reliqua perficiuntur ut ibi.

Coroll. II.

In caſu Conoïdum, ubi Cc eſt axi parallela, per quam & per ipſam axem tranſeunt plana cCG, plana autem baſi parallela formant in ſuperficie curva circulos; unde hic iterum ſubtangentes CM evadunt infinitæ. Quare etiam faciendum eſt

* N°. CXXVII, pag. 527, Tom. II.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5.

[vid. *Fig.* 5] $\frac{BD}{CD}$ = tangenti anguli VCP. Eſt vero hic [ſumta $-dz$, quia, creſcentibus x & y, ipſa z decreſcere ſupponitur] $ec : bc$ [$= -dz : \sqrt{(ds^2+dz^2)}$] = tangens anguli V$c$P : tangent. anguli VCP. Sed tangens anguli VcP, ſeu $pc\beta$, [$= \frac{p\beta}{pc}$] = [ut inferius docebitur] $\frac{(yddx+2dydx)\times\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{-dyddz}$.

*p. 120 l. 6 inf.

Hinc ergo tangens anguli VCP $= \frac{(yddx+2dydx).(ds^2+dz^2)}{dydzddz}$ $= \frac{BD}{CD} = \frac{ydx}{dy}$; ex cujus reductione emergit $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{yddx+2dydx}{ydx}$. Integrando per logarithmos, indeque tranſeundo ad numeros, prodit $yydx = b\sqrt{(ds^2+dz^2)}$. Adeo ut hic pariter non opus ſit operoſa illa inventione anguli plani tangentis ſuperficiem & plani verticalis.

Applicatio ejuſdem methodi ad Superficies Conoidicas, ſeu tales, quæ converſione curvæ cujuſcunque datæ circa axem poſitione datum generantur.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5.

Sit vertex Conoidis, a; curva quæſita lbc. A vertice a, & ſingulis curvæ quæſitæ punctis l, b, c, &c. cadere intelligantur in ſubjectum planum ad axem Conoidis aA rectum, perpendiculares aA, lL, bB, cC &c. formantes (*Fig.* 5) projectionem verticis A, & projectionem curvæ quæſitæ LBC. Centro A, radio arbitrario AK = 1, deſcribatur in dicto plano ad axem Conoidis aA recto circulus KEF, & ducantur rectæ ABE, ACF, projectæ LBC occurrentes in punctis infinite propinquis B, C, & peripheriæ KEF in E, F. Concipiatur planum IBb, cujus ſectio communis cum plano BAK, quæ eſt recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC; quare planum ipſum IBb curvam quæſitam lbc ſtringet in elemento bc. Concipiatur etiam planum bGI Conoidem tangens in b, & occurrens plano BAK in communi ſectione GI, ac plano IBb in communi ſectione bI, quæ quia utrumque planorum bGI & IBb curvam quæſitam ſtringit in elemento bc, erit productio

ductio ejuſdem elementi bc, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur AE donec ſectioni IG occurrat in G, eritque angulus AGI rectus. A puncto G demittatur ad rectam BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum IBb; a puncto H demittatur in rectam bI normalis Hh, & jungatur Gh; tandemque a puncto c demittatur in bB normalis ce. Quibus factis, dicatur arcus KE $= x$, EF $= dx$, AB $= y$, DC $= dy$, BD $= ydx$, BC $= \sqrt{(dy^2+yydx^2)} = ds$, B$b$ $= z$, $be = -dz$, ſubtangens BG ex natura Conoidis data, $= T$.

Ob ſimilitudinem Triangulorum CDB, BHG, erit CB [ds] : BD [ydx] = BG [T] : GH; unde GH $= Tydx : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum CDB, IHG, erit CD [dy] : BD [ydx] = GH [$\frac{Tydx}{ds}$] : HI, unde HI $= Tyydx^2 : dsdy$.

Ob ſimilitudinem triangulorum bec, HhI, erit bc [$\sqrt{(ds^2+dz^2)}$] : be [$-dz$] = HI [$\frac{Tyydx^2}{dsdy}$] : Hh; unde Hh $= -Tyydx^2dz : dsdy\sqrt{(ds^2+dz^2)}$.

Jam quia GH normalis eſt ad planum IBb, & Hh normalis ad rectam bI, quæ eſt ſectio communis planorum IBb & bGI, erit triangulum HhG in plano ad utrumque planorum IBb & bGI recto, adeoque ob angulum GHh rectum, hH : HG = radius : tang. anguli inclinationis HhG. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis HhG $= \frac{HG}{Hh} = \frac{Tydx : ds}{-Tyydx^2dz : dsdy\sqrt{(ds^2+dz^2)}} = \frac{-dy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{ydxdz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæſitæ lbc puncta infinite propinqua tranſiens facit cum plano IBb, ita inveſtigatur. [Vid. *Fig.* 7 & 6, quæ concipienda eſt inſtar *Fig.* 2 portio infinite parva ſuperficiei cylindroidicæ].

In projecta LBC, ſint tria puncta L, B, C, quorum diſtantiæ LB, BC, ſint æquales & infinite parvæ; ſintque in curva quæſita lbc tria correſpondentia puncta l, b, c, per quæ tranſeat dictum planum. Producantur LB ad $\mathfrak{c}$, & lb ad β, TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 6 & 7

ut

ut fiant Bς = BC, & $b\beta = bc = bp$. Factis reliquis ut in Figura, poſitiſque LB = BC = ds conſtantibus, erit $lg = bm = -dz$, & $me = fc = -ddz$.

Ob ſimilitudinem triangulorum fmb, cpf, eſt $bf[\surd(ds^2+dz)] : fm[ds] = fc[-ddz] : cp$. Unde $cp = -dsddz : \surd(ds^2+dz^2)$.

Ut inveniatur $p\beta$, ſeu quæ ipſi æqualis eſſe cenſeri debet, Cς, ſit in *Fig.* 7. curva projecta LBC, centrum A, tangens ad C recta CP, & tangens ad B recta BO, in quas a centro A cadant perpendiculares AP & AO, & in OB productam normalis Cς.

Ob ſimilitudinem triangulorum BCD, BAO, eſt CB $[ds]$: BD $[ydx]$ = BA $[y]$: AO; unde AO = $yydx : ds$, ſumtisque differentiis, poſita ds conſtante, dAO, ſeu oP $= (yyddx + 2ydxdy) : ds$.

Ob ſimilitudinem eorundem triangulorum BCD, BAO, eſt BC $[ds]$: CD $[dy]$ = AB $[y]$: BO; unde BO = $ydy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum BoP, BCβ, eſt Bo ſeu $\beta o[\frac{ydy}{ds}] : oP[\frac{yyddx+2ydxdy}{ds}]$ = BC $[ds]$: Cς. Eſt itaque C$\varsigma = p\beta = (ydsddx + 2dxdyds) : dy$.

Jam quia cp & $c\beta$ [*Fig.* 6] normales ſunt ad bc, quæ eſt communis ſectio plani IBb, ſeu CBb, & plani per tria puncta l, b, c, tranſeuntis, erit triangulum $cp\beta$ in plano ad utrumque iſtorum planorum recto, adeoque, ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp : p\beta$ = radius: tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta = \frac{p\beta}{cp} = \frac{(ydsddx + 2dxdyds) : dy}{-dsddz : \surd(ds^2+dz^2)} = (yddx + 2dydx)\surd(ds^2+dz^2) : -dyddz$.

Quoniam itaque angulus $pc\beta$ + angulus HbG = angulo recto, erit productum tangentium = quadrato radii = 1; unde ducta tangente modo inventa anguli $pc\beta$, $(yddx + 2dydx).\surd(ds^2+dz^2) : -dyddz$, in tangentem anguli H$b$G, quæ ſupra inventa erat $-dy\surd(ds^2+dz^2) : ydxdz$; habetur æquatio

tio $(yddx + 2dydx).(ds^2+dz^2) : ydxdzddz = 1$, vel $\frac{yddx+2dydx}{ydx} = \frac{dzddz}{ds^2+dz^2}$, vel $\frac{yyddx+2ydydx}{yydx} = \frac{1}{2} \times \frac{2dzddz}{ds^2+dz^2}$. Sumtiſque integralibus per Logarithmos, $lyydx = lb + l\surd(ds^2+dz^2)$; factoque ad numeros tranſitu, $yydx = b\surd(ds^2+dz^2)$; quæ æquatio exprimit naturam projectionis LBC.

$y = r$ $dx = d\varphi$

$r^2 d\varphi = C ds$

Quia z per naturam Conoidis datur in y & conſtantibus, ponatur $dz = pdy$, intelligendo per p quamcunque functionem ipſius y. In æquatione inventa $yydx = b\surd(ds^2+dz^2)$, pro dz ſcribatur pdy, & pro ds^2 ſubſtituatur ejus valor $dy^2 + yydx^2$, quo facto habebitur $dx = \frac{bdy}{y}\surd\frac{1+pp}{yy-bb}$; in qua æquatione, quia ſeparatæ ſunt indeterminatæ, conſtrui poteſt curva projectionis LBC per quadraturas; quo peracto, ſi e ſingulis punctis L, B, C, &c. erigantur normales, Ll, Bb, Cc, &c, ſuperficiei Conoidicæ datæ occurrentes in punctis l, b, c, &c, ſignabitur in dicta ſuperficie curva quæſita lbc. *Q. E. F.*

EXEMPLUM PRIMUM.

Si Conoides datum fuerit ſuperficies plana, plano projectionis ABK parallela, erit z conſtans, adeoque $dz = pdy = 0$; conſequenter $p = 0$, & æquatio generalis $dx = \frac{bdy}{y}\surd\frac{1+pp}{yy-bb}$ mutatur in hanc, $dx = \frac{bdy}{y\surd(yy-bb)}$, vel [multiplicando per b] $bdx = \frac{bbdy}{y\surd(yy-bb)}$. Membrum poſterius $\frac{bbdy}{y\surd(yy-bb)}$ eſt elementum arcus circuli, cujus radius = b & ſecans = y; qui arcus ſi dicatur A, erit [poſito radio AK (*Fig.* 5.) qui arbitrarius & pro unitate ſumtus eſt, = b] $x = A$. Quia igitur y ſemper eſt ſecans anguli x vel A, patet lineam quæſitam eſſe rectam, quæ circulum, cujus radius eſt b, tangit. TAB. LXXIX. N°. CLXVI. Fig. 5.

EXEMPLUM II.

Sit Conoides datum Conus, cujus axis ſit ad radium baſeos ut n ad 1, eritque $z = ny$, $dz = pdy = ndy$, adeoque $p = n$, & æquatio ad projectam $dx = \frac{bdy\sqrt{(1+nn)}}{y\sqrt{(yy-bb)}}$, ſeu $\frac{bdx}{\sqrt{(1+nn)}} = \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$; ſumtiſque integralibus $\frac{bx}{\sqrt{(1+nn)}} = \int \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$ = arcui circuli, cujus radius b, & ſecans y. Qui ſi dicatur A, habetur $bx : \sqrt{(1+nn)} = A$, vel [poſito iterum $AK = 1 = b$] $x : \sqrt{(1+nn)} = A$. Hæc æquatio ita conſtrui poteſt.

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 8. Centro A [*Fig.* 8,] radio $AL = b$ deſcribatur circulus LEF, quem tangat in L recta LD. E centro A educta utcunque ſecante AED, quæ circumferentiæ LEF occurrat in E, & tangenti LD in D, capiatur angulus LAF ad angulum LAE ut $\sqrt{(1+nn)}$ ad 1, & producatur AF quantum opus in B. Centro A, radio AD, deſcribatur arcus circuli DB rectæ AFB occurrens in B. His factis, erit punctum B ad projectam quæſitam LBC.

COROLLARIUM.

Si $\sqrt{(1+nn)}$ fuerit numerus rationalis, erit curva projectionis LBC algebraica. Id quod evenit, quoties ſumto pro r numero quocunque, integro vel fracto, fuerit $n = (1-rr) : \pm 2r$ vel $n = \pm 2r : (1-rr)$; quemadmodum patet, ponendo per methodum *Diophanteam* $\sqrt{(1+nn)} = r + n$, & $\sqrt{(1+nn)} = 1 + rn$.

EXEMPLUM III.

Sit Conoides datum Sphæra, cujus radius $= a$, & centrum in A. Per naturam Sphæræ $z = \sqrt{(aa-yy)}$, adeoque $dz = -ydy : \sqrt{(aa-yy)}$ & $p = -y : \sqrt{(aa-yy)}$. Quo valore

lore

lore in æquatione generali ſubſtituto, mutatur illa in hanc, $dx = abdy : y\sqrt{(yy-bb)}.\sqrt{(aa-yy)}$ *.

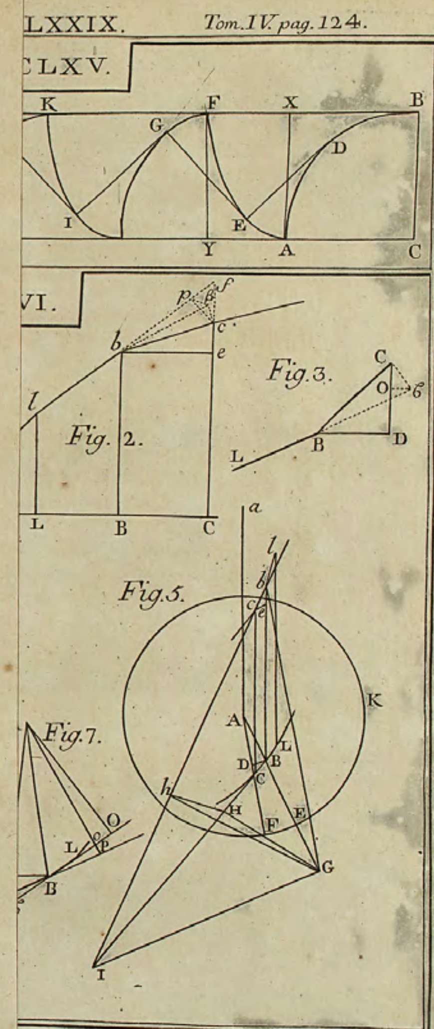
Ut membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy-bb)}.\sqrt{(aa-yy)}$ ad formam ſimpliciorem reducatur, ponatur $y = ab : u$, adeoque $dy = -abdu : uu$, & invenietur, factis ſubſtitutionibus, $abdy : y\sqrt{(yy-bb)}\sqrt{(aa-yy)} = -udu : \sqrt{(aa-uu)}.\sqrt{(uu-bb)}$. Ponatur porro $uu = cv$, & $2udu = cdv$, quibus ſubſtitutis, habebitur $-udu : \sqrt{(aa-uu)}.\sqrt{(uu-bb)} = -\frac{1}{2}dv : \sqrt{(aa : c - v)}.\sqrt{(v - bb : c)} = -\frac{1}{2}dv : \sqrt{(-aabb : cc + (aa+bb)v : c - vv)}$. Ulterius ſit $-v + (aa+bb) : 2c = t$, & $-dv = dt$, ſubductoque calculo invenietur $-\frac{1}{2}dv : \sqrt{(-aabb : cc + (aa+bb)v : c - vv)} = \frac{1}{2}dt : \sqrt{((aa-bb)^2 : 4cc - tt)}$ Hinc, ex æquo, $dx = \frac{1}{2}dt : \sqrt{((aa-bb^2) : 4cc - tt)}$, & multiplicando utrumque membrum per $(aa-bb) : c$, $(aa-bb)dx : c = (aa-bb)dt : 2c\sqrt{((aa-bb)^2 : 4cc - tt)}$, ſumtiſque integralibus $(aa-bb)x : c = \int (\frac{aa-bb}{2c}dt : \sqrt{((\frac{aa-bb}{2c})^2 - tt)}$ = arcui circuli, cujus radius $= (aa-bb) : 2c$ & ſinus rectus $= t$; qui arcus ſi dicatur A, habetur $(aa-bb)x : 2c = A$, vel [ponendo radium arbitrarium AK [1] = radio $(aa-bb) : 2c$] $2x = A$.

* Ex ea æquatione immediate deduci poteſt [inſuper habito intricatiſſimo qui hic ſequitur calculo] curvam quæſitam breviſſimam in ſuperficie ſphærica eſſe circulum maximum. Quia enim membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy-bb)}.\sqrt{(aa-yy)}$ eſt proportionale differentiali arcus circuli maximi, cujus ſinus eſt $n\sqrt{(aa-yy)} : y$ [ubi per n intelligo $ab : \sqrt{(aa-bb)}$], ſicuti experiri volenti patebit; ac quia ipſum $n\sqrt{(aa-yy)} : y$ proportionale eſt tangenti arcus meridiani inter punctum b & E [Vid. *Fig.* 5,] intercepti; curva breviſſima cbl in ſuperficie ſphærica debet eſſe ejus naturæ, ut ſinus arcus KE ſit ad tangentem arcus Eb in conſtanti ratione. Liquet autem ex Trigonometria ſphærica hoc competere cuilibet circulo maximo, qui in puncto K oblique ſecat circulum KE pro baſi ſumtum. Eſt enim ubique ut ſinus totus ad tangentem obliquitatis, ita ſinus arcus indeterminati KE ad tangentem arcus correſpondentis Eb. Ergo curva breviſſima in ſuperficie ſphærica eſt arcus circuli maximi. *Q. E. D.*

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 9. Ad ductum hujus calculi curva projectionis quæsita hoc modo construeretur: Centro A, radio $AK = (aa - bb) : 2c$, descripto circulo KEF, eductaque utcunque recta AE, fiat arcus $KF = 2KE$, eritque FG a puncto F ad radium AK normaliter ducta $= t$. Hinc si in AE, producta si opus, capiatur $AB = y =$ [per constructionem] $ab : u =$ [constr.] $ab : \sqrt{cv}$ $=$ [constr.] $ab : \sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct)}$, erit punctum B in curva projectionis quæsita. Sed cum curva hæc sit algebraïca, quemadmodum ex constructione patet, convenit æquationem algebraïcam inter coordinatas rectangulas AH, HB investigare. Dicantur in hunc finem $AH = p$, $HB = q$. Ob angulum FAK bisectum per rectam ANE, est $FA + AG\ [(aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4a - tt)}] : FG\ [t] = AG\ [\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] : GN$; unde $GN = t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})$. Ob similitudinem triangulorum AGN, AHB, est $AG\ [\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] : GN\ [t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})] = AH\ [p] : HB\ [q]$; unde ductis in se mediis & extremis, ac dividendo utrumque productum per $\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$, habebitur $q = pt : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})$; proinde $q\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc + tt)} = pt - aaq : 2c + bbq : 2c$. Si utrumque hujus æquationis membrum ad quadratum evehatur, invenietur, deletis quæ se destruunt, $ct = (aa - bb)pq : (pp + qq)$. Ob triangulum rectangulum AHB, erit $AB^2\ (yy = aabb : (\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct))] = AH^2\ [pp] + HB^2\ [qq]$, quod reducendo dat $ct = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$; unde habetur æquatio relationem coordinatarum p & q exprimens: $(aa - bb)pq : (pp + qq) = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$, seu $pp + qq = 2((aa - bb)pq + aabb) : (aa + bb)$; quæ æquatio pertinet ad Ellipsin DBE, cujus semiaxis major

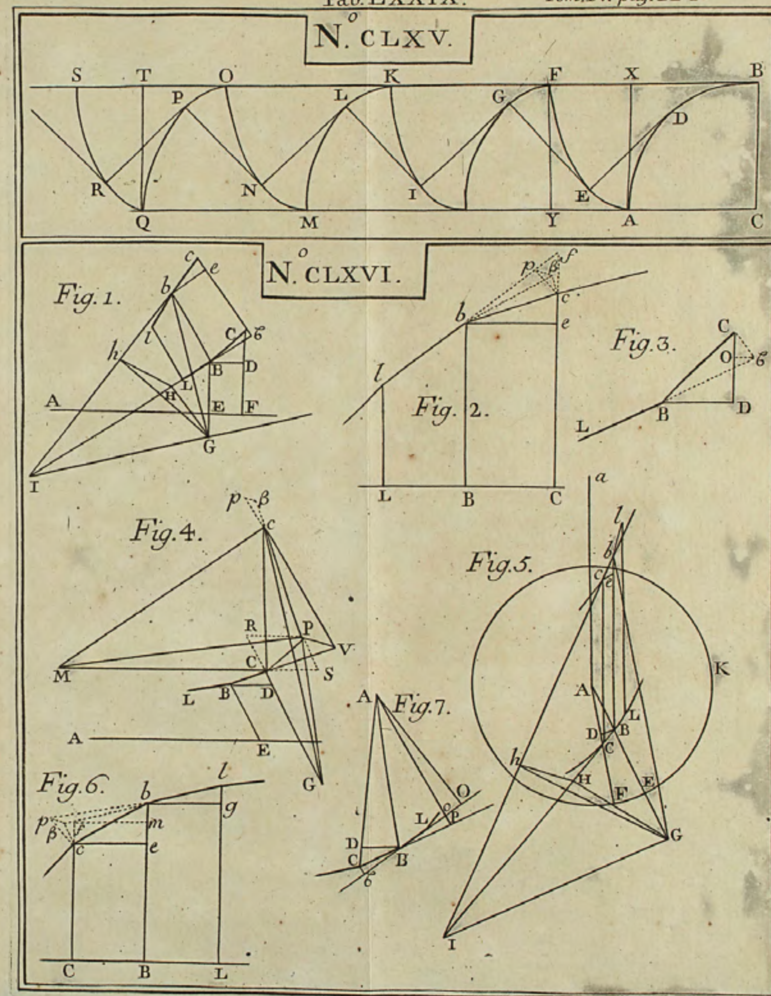
TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 10. $AD = a$, minor $AE = b$, coordinatæ rectangulæ $AH = p$, $HB = q$, existente angulo DAH semirecto.

Demissa enim BC normali ad AD, dictisque $AC = x$, $BC = y$, erit $x + y = q\sqrt{2}$, & $x - y = p\sqrt{2}$, & exterminando q & p, ex æquatione



A
hoc mo-
: $2c$, def-
fiat arcus
normali-
, capiatur
$ab : \sqrt{cv}$
B in cur-
gebraica ,
tionem al-
nveſtigare.
angulum
$(aa - bb)$:
$aa - bb)^2$:
$- tt) : ((aa$
nilitudinem
$4cc - tt)]$:
$aa - bb)^2$:
n ſe mediis
$(aa - bb)^2$:
$aa - bb)^2$:
$- aaq : 2c$
ad quadra-
$(aa - bb)pq$:
erit AB^2
$HB^2 [qq]$,
$qq)$; unde
exprimens :
$pp + qq)$,
$aa + bb)$;
niaxis major
$AH = p$,

$= x$, $BC = y$,
zp, ex æqua-
tione



tione $pp+2$
$aayy+bbx$

Æquatio

Solutione Ce
p. 227 public
pro x scribat
ubi pro t scri
ut supra, pdz

Sed hanc
deduxit. Si
perficies curv
Problematis
ad Problema
pro Conoidi

Sit Cono
sit ad basin
Superficies A
meridianos A
a punctis P,
ducantur tan
in punctis L
bus; unde d
nissimæ, v.
haberi possun
haberi, quo
est.

Planum t
aliquantulum
constituat un
similiter ele
cum triangu

tione $pp + qq = 2((aa - bb)pq + aabb) : (aa + bb)$, habetur $aayy + bbxx = aabb$.

SCHOLIUM.

Æquatio generalis $dx = \frac{bdy}{y} \sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$ probe convenit cum Solutione Cel. *Jac.* BERNOULLI in *Act. Erud. Lipſ.* an. 1698, p. 227 publicata. Si enim in ejus formula $\int (atdx : xx \sqrt{(xx - aa)})$, pro x ſcribatur y, & pro a, b, erit illa $\int btdy : yy \sqrt{(yy - bb)}$, ubi pro t ſcribatur ejus valor $y \sqrt{(dy^2 + dz^2)} : dy$, & pro dz, ut ſupra, pdy, habetur $\int \frac{bdy}{y} \sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$.

Sed hanc ſolutionem Vir laudatus alio ſine dubio fundamento deduxit. Si enim methodum habuiſſet ad omnis generis ſuperficies curvas ſeſe extendentem, utique generalem ſolutionem Problematis a Fratre provocatus dediſſet. Methodus ſequens ad Problema generaliter conceptum ægre extenditur, quamvis pro Conoidibus ſatis ſit expedita.

Sit Conoides datum ACEBDA, cujus axis AB rectus ſit ad baſin circularem ECD, ſitque linea quæſita KPIG. Superficies ACEA dividatur in ſectores infinitos, ducendo meridianos APN, AI*f*, AGF, &c. infinite propinquos, & a punctis P, I, G, &c. ubi hi meridiani ſecant curvam KPIG, ducantur tangentes PL, IL, GL, &c. occurrentes axi AB in punctis L, L, L, &c. infinite parum a ſe invicem diſtantibus; unde duo puncta quævis L, L, ubi duæ tangentes viciniſſimæ, v. g. GL & IL axi occurrunt, pro uno eodemque haberi poſſunt, & conſequenter figura LGIL pro triangulo haberi, quod ſimiliter de reliquis LIPL, &c. intelligendum eſt.

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 11. & 12.

Planum trianguli GLI concipiatur circa IL tanquam axem aliquantulum elevari, donec cum triangulo ſequente ILP conſtituat unum idemque planum GLP. Planum hoc GLP ſimiliter elevari intelligatur circa rectam PL ut axem, donec cum triangulo ſequente in eodem plano exiſtat, atque hoc tamdiu continuetur, donec LGIPKL in planum ſit reducta [Vid. *Fig.* 12]. His ita factis, manifeſtum eſt lineam KOPIG in planum reductam fore lineam rectam quippe in plano breviſſimam. Hinc per naturam lineæ rectæ angulus GLI æqualis eſt differentiæ angulorum LIK, LGK; angulus ILP = LPK — LIK, &c. id eſt, angulus quem tangentes proximæ, v. g. GL & IL comprehendunt in puncto axis L, ubi concurrere cenſendæ ſunt, æqualis eſt differentiæ anguli LGI vel LIP, quem tangens LG vel LI facit cum curva KPIG in G vel I.

Ex hoc fundamento natura curvæ KPIG ita inveſtigatur. Per punctum quodcunque in curva aſſumtum G, [*Fig.* 11] ducatur pars circuli paralleli Gg, meridianis AGF & AIf intercepta. A punctis G & g ducantur ad axem AB normales GH, gH, & a punctis F, f ad centrum baſeos B rectæ FB, fB. Dicatur radius baſeos BC = BF = 1, applicata GH $= x$, arcus circumferentiæ baſeos CF $= z$, cujus elementum fF $= dz$, arculus meridiani I$g = ds$, & tangens GL vel IL $= t$.

Ob ſimilitudinem ſectorum BFf, HGg, eſt BF [1] : HG [x] = Ff [dz] : Gg. Ergo G$g = xdz$. Hinc angulus GLI = Gg : GL $= xdz : t$.

Anguli LIG complementum ad ſemicirculum eſt angulus GIg, cujus tangens eſt ad radium ut Gg ad gI; quare poſito radio = BC = 1, erit tangens anguli GIg, ſeu quod idem eſt, ſigno tantum mutato, tangens anguli LGI = — Gg : gI $= - xdz : ds$. Ergo elementum anguli LGI $= - d\left(\frac{xdz}{ds}\right) : \left(1 + \frac{xxdz^2}{ds^2}\right)$. Sed per fundamentum ſupra adſtructum, angulus GLI = elemento anguli LGI, ergo habetur æquatio $\frac{xdz}{t} = - d\left(\frac{xdz}{ds}\right) : \left(1 + \frac{xxdz^2}{ds^2}\right)$ ſeu quia $x : t = dx : ds$, $\frac{dxdz}{ds} = - d\left(\frac{xdz}{ds}\right) : \left(1 + \frac{xxdz^2}{ds^2}\right)$.

Pro integranda hac æquatione, ponatur $xdz : ds = v$, & facta

facta ſubſtitutione habebitur $vdx : x = - dv : (1 + vv)$, ſeu $- dx : x = dv : (v + v^3) = (dv + 3vvdv) : (v + v^3) - 3vdv : (1 + vv)$; ſumtiſque integralibus per Logarithmos $l(a : x) = l(v + v^3) - \frac{1}{2} l(1 + vv) = lv - \frac{1}{2} l(1 + vv)$, unde $a : x = v : \sqrt{(1 + vv)}$, & $a : \sqrt{(xx - aa)} = v =$ [ſubſtituto ejus valore] $xdz : ds$; tandemque $dz = ads : x\sqrt{(xx - aa)}$.

IDEM PROBLEMA.

Ducere lineam breviſſimam in ſuperficie curva quavis data.

Per methodum de maximis & minimis.

SOLUT. Concipiantur in plano horizontali AEC, ex ſingulis curvæ quæſitæ punctis a, b, c, demitti perpendiculares aA, bB, cC in puncta A, B, C. &c. quæ forment curvam projectionis, cujus duo elementa contigua quævis repreſententur per AB, BC. Per A & B ductæ ſint AE, BD tanquam elementa abſciſſarum, & EB, DC prioribus perpendiculares tanquam elementa applicatarum curvæ projectionis. Porro punctum B in elemento EB prolongato fluere intelligatur in locum proximum Ϭ, cui reſpondeat in ſuperficie curva punctum β; ſecetur autem ipſa ſuperficies per planum verticale tranſiens per rectam EBF, ſectio illa formabit curvam, quæ, ob datam ſuperficiem, & ipſa curva dabitur. Sit itaque ſubtangens puncto B vel E [quod perinde eſt quia BE eſt elementum infinite parvum, ſubtangens vero finita] reſpondens $= T$: Et dicantur AE $= f$, BD $= g$, EB $= m$, DC $= n$, elementum verticalis Bb, hoc eſt, Bb — A$a = c$, elementum verticalis Cc, hoc eſt Cc — B$b = e$; Erit elementum curvæ quæſitæ $ab = \sqrt{(ff + mm + cc)}$, & $bc = \sqrt{(gg + nn + ee)}$. Debet itaque $\sqrt{(ff + mm + cc)} + \sqrt{(gg + nn + ee)}$ eſſe minimum: quare differentiando [poſitis AE, & BD ſeu f & g conſtantibus] habetur $\frac{mdm + cdc}{\sqrt{(ff + mm + cc)}} + \frac{ndn + ede}{\sqrt{(gg + nn + ee)}} = 0$. Unde quia $m + n$, ut & $c + e$ ſunt conſtantes, proinde $dn = - dm$ & $de =$

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 13.

—

$-dc$, erit $\frac{mdm + cdc}{\sqrt{(ff+mm+cc)}} = \frac{ndm + edc}{\sqrt{gg+nn+ee)}}$. Ut vero dm & dc eliminari possint, quærenda est eorum ratio, quod sic fit: Dicatur B$b = z$, liquet esse $T : z =$ B$\mathfrak{G}$ seu $dm : \mathfrak{G}\beta -$ Bb seu dc; adeoque $dc = zdm : T$; quod substituendo in æquatione inventa, eamque per dm dividendo, & multiplicando per T, prodibit $\frac{mT + cz}{\sqrt{(ff+mm+cc)}} = \frac{nT + ez}{\sqrt{(gg+nn+ee)}}$, ubi nondum reperitur uniformis progressus ab elementis A E, & E B ad elementa B D, D C, quia utrique æquationis membro communia sunt T & z; quocirca eam dispono hunc in modum $T \times \left(\frac{n}{\sqrt{(gg+nn+ee)}} - \frac{m}{\sqrt{(ff+mm+cc)}}\right) = z \times \left(\frac{-e}{\sqrt{(gg+nn+ee)}} + \frac{c}{\sqrt{(ff+mm+cc)}}\right)$. Hic in factoribus infinitesimalibus manifesta observatur uniformitas; uterque enim denotat differentiam fractionum uniformium ex similibus elementis compositarum scribendo itaque pro n, g, e, has, quas repræsentant, dy, dx, dz, habebimus $T \times d\left(\frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}\right) = z \times -d\left(\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}\right)$, in qua æquatione nihil adhuc constans suponitur, ideoque liberum est aliquod elementum ad lubitum assumere tanquam invariabile. Assumamus ergo quod in Scripto *Klingenstierniano* assumsi constans $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, seu ds, ut æquatio exprimatur hoc modo $T \times d\left(\frac{dy}{\sqrt{(ds^2+dz^2)}}\right) = z \times -d\left(\frac{dz}{\sqrt{(ds^2+dz^2)}}\right)$ quæ fractionibus actu differentiatis, in hanc abit $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{Tddy + zddz}{Tdy + zdz}$, æquivalentem ei quam dedi in Additionibus ad prædictum scriptum, utcalculare volenti patebit. Quod si vero pro constanti assumatur ipsum AB, seu elementum curvæ quæsitæ, hoc est, $\sqrt{(ds^2+dz^2)}$, æquatio emergit simplicissima, nempe hæc: $Tddy = -zddz$. Sed quæ nihilominus ad differentias primas generaliter reduci nequit.

ANI-

N°. CLXVII.

ANIMADVERSIONES
in. Cl. Georgii CHEYNÆI
Fluxionum Methodum inversam,

Editam *Londini* 1703.

Pag. 2. PRima [methodus regrediendi ad Fluentes, ubi Fluxiones vinculo adficiuntur] *coincidit cum ea qua* NEWTONUS *utitur*.

Hæc methodus etiam a nobis aliisque frequenter in usum vocatur, & cuivis in hisce leviter versato obvia est, neque adeo NEWTONO peculiaris censeri debet.

Ibid. *Sit, v. gr. Fluxio data* $\mathrm{d}z^{\theta} \times \dot{z}(e + fz^{\eta})^{\lambda}$; *pone* $y = (e + fz^{\eta})^{\lambda}$ *&c.* Conferatur cum pag. 12.

Cum palam sit Fluentem hujus Fluxionis $x^m dx \times (a + bx)^n$ semper terminis numero finitis exprimi posse, modo m sit numero integro & positivo, vel nihilo æqualis; Auctoris exemplum facile ad nostram formulam reducitur, ponendo $z^{\eta} = x$, habebitur enim $Dz^{\theta}dz \times (e + fz^{\eta})^{\lambda} = \frac{D}{\eta} x^{(\theta - \eta + 1) : \eta} dx \times (e + fx)^{\lambda}$; unde statim patet Fluentem quæsitam fore terminabilem, si $(\theta - \eta + 1) : \eta$ vel, addita unitate, si $(\theta + 1) : \eta$ est numero integro & affirmativo æqualis. Alio modo quæsita Fluens fiet terminabilis, si quantitas sub vinculo dividatur per z^{η}, & multiplicetur iterum quæ extra vinculum per $z^{\eta\lambda}$; sic enim erit $Dz^{\theta}dz \times (e + fz^{\eta})^{\lambda} = Dz^{\theta + \eta\lambda} dz \times (ez^{-\eta} + f)^{\lambda}$, quæ posterior, tractata ut ante factum, ad nostram formulam reducitur, ponendo nunc $z^{-\eta} = x$; nam sic prodibit $Dz^{\theta + \eta\lambda} dz \times (ez^{-\eta} + f)^{\lambda} = -\frac{D}{\eta} x^{(-\theta - 1 - \lambda\eta - \eta) : \eta} dx \times (ex + f)^{\lambda}$;

ergo

ergo iterum si $(\theta + 1 + \lambda\eta + \eta) : -\eta$ vel, addita unitate, si $(\theta + 1 + \lambda\eta) : -\eta$ eſt numero integro & poſitivo æqualis; erit Fluens quæſita terminabilis. Atque hæ duæ conditiones a nobis facile negotio erutæ, $(\theta + 1) : \eta$ & $(\theta + 1 + \lambda\eta) : -\eta$, quibus Fluens quæſita terminis numero finitis exprimitur, ſi nimirum numeri illi, vel alteruter, ſunt integri & affirmativi, ſunt ipſiſſimæ illæ ab Auctore poſt longas ratiocinationes & operationes inventæ. Vid. pag. 12. Quod ſi vero neuter ex numeris iſtis ſit numerus integer & affirmativus, tunc quantitas $(e + fx)^\lambda$ vel $(ex + f)^\lambda$ in Seriem ſolvenda eſt, & poſtea facile obtinebitur Fluens per Seriem infinitam.

Pag. 5. *Ad hoc exemplum procedendum in trinomialibus . . . . . Sit iterum Fluxio data* $dz^{\theta}\dot{z} \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta})^\lambda$; *ponatur* $y = (e + fz^\eta + gz^{2\eta})^\lambda$.

Fluxiones trinomiales facile reducuntur ad binomiales, ponendo primo $z^\eta = x$, id quod facit $Dz^\theta dz \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta})^\lambda = \frac{D}{\eta} x^{(\theta + 1 - \eta) : \eta} dx \times (e + fx + gxx)^\lambda$; deinde tollendo ſecundum terminum quantitatis ſub vinculo, nempe ponendo $x = y - f : 2g$; quo facto erit $\frac{D}{\eta} x^{(\theta + 1 - \eta) : \eta} dx \times (e + fx + gxx)^\lambda = \frac{D}{\eta} (y - f : 2g)^{(\theta + 1 - \eta) : \eta} dy \times (-ff : 4g + e + gyy)^\lambda$; nunc ergo ſi $(\theta + 1) : \eta$ eſt numerus integer & poſitivus, poterit Fluxio diſtribui in tot Fluxiones binomiales quot ſunt unitates in $(\theta + 1 - \eta) : \eta$; quod ſi vero numerus ille non ſit integer vel non poſitivus, quantitates, quæ extra vinculum, & quæ intra illud, in Series conjiciendæ ſunt, ex quibus duabus Seriebus inter ſe multiplicatis Fluentes terminorum elicitæ, dabunt Seriem novam pro Fluente quæſita.

Pag. 6. *Secunda methodus, quæ in hoc conſiſtit, ut conjiciatur in Seriem pars Fluxionis datæ, inque eam ducatur pars vinculo excluſa; indeque . . . ad Fluentes fiat retrogreſſus* &c.

Hæc methodus etiam mihi dudum fuit familiaris, eamque olim

communicavi cum *Marchione* HOSPITALIO, in *Lectionibus* meis in uſum ejus conſcriptis ſuper Calculo differentialium & integralium.*

Pag. 8. *Prodibit quotus, qui . . . . dabit Fluentem quæſitam, una cum abrumpendi conditionibus.*

Has abrumpendi conditiones in hac terribili Serie non video; quæcunque Series abrumpitur, oportet ut, termino aliquo in ea exiſtente nullo, ſequentes omnes pariter in nihilum recidant; hoc autem idem in hac Serie accidere nullum apparet indicium.

Pag. 10. *Potuiſſe* [in æquatione aſſumpta cum coefficientibus indeterminatis, cujus Fluxio cum propoſita Fluxione comparatur] *exponentes terminorum extra vinculum aſſumi diverſos ab hic aſſumptis, modo ſemper exponens primi termini non fuiſſet aſſumptus minor quam* $\theta - \eta + 1$.

Fallitur hic Cl. Auctor: poteſt enim exponens primi termini quantumvis minor aſſumi, quam $\theta - \eta + 1$, modo interim exponens vinculi debite augeatur; id quod Auctor non animadvertiſſe videtur. Ita ſi, ex. gr. pro exponente primi termini aſſumatur $\theta - 2\eta + 1$, & pro exponente vinculi $\lambda + 2$, reſultabunt utique [contra quod Auctor putat] termini cum primo termino Fluxionis datæ comparandi. Ut rei veritas pateat; eſto ergo aſſumta æquatio hæc, $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. $\times (e + fz^\eta)^{\lambda + 2} =$ Fluenti quæſitæ. Hujus aſſumtæ æquationis capiatur Fluxio, & ita poſtea exprimatur, ut exponens vinculi ſit λ, quod fit multiplicando Fluxionem ipſius $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. per quadratum ipſius $e + fz^\eta$, id eſt per $ffz^{2\eta} + 2efz^\eta + ee$, ipſum vero $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1}$ + &c. per $fz^\eta + e$; Erit Fluxione æquata cum Fluxione data, eaque reducta

$$\left.\begin{matrix}(\theta - 2\eta + 1) \times Adff \\ (\lambda + 2) \times \eta \times Adff\end{matrix}\right\} z^\theta \left\{\begin{matrix} +(\theta - 3\eta + 1) \times Bdff \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times 2Adef \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Adef \end{matrix}\right\} z^{\theta - \eta} \left\{\begin{matrix} +(\theta - 4\eta + 1) \times Cdff \\ +(\theta - 3\eta + 1) \times 2Bdef \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times Adee \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Cdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdef \end{matrix}\right\} z^{\theta - 2\eta}, \text{ \&c.}$$

* N°. CXLIX Lect. XLIX. pag. 526. *Tom. III.*

$= dz^{\theta}$; comparatis terminis homologis erit $A = 1 : (\theta + \lambda\eta + 1)ff$, $B = (2\theta + \lambda\eta - 2\eta + 2) \times Ae : (-\theta - \lambda\eta + \eta - 1)f$, $C =$ &c.

Pag. 14. *Te minime latet* $\phi(x+1) = \frac{\dot{x}}{x+1}$. *Est enim* $l(x+1) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ *&c. adeoque* $\phi\, l(x+1) = \dot{x} - x\dot{x} + x^2\dot{x}$ *&c.* $= \dot{x} \times (1 + x - x^2 -$ *&c.*$) = \dot{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{\dot{x}}{x+1}$.

Hoc non opus habet tanta demonstratione per Series, immediate enim fluit ex natura Logarithmicæ, ut ego jam olim ostendi. Vid. *Act. Erud.* 1697, pag. 127 in fine *.

Pag. 15. *Sit Fluxio universalis data* $rx^m l^n x\dot{x}$

Hujus Fluxionis Fluentem, jam ante plures annos per varias methodos inveni, quas tum temporis cum Ampl. LEIBNITIO, aliisque, communicavi. Cæterum pleraque quæ in hac pagina & sequentibus habentur de exponentialibus, videntur ex meis promanasse quæ in *Act. Lips.* 1697, m. Martii de hac materia publicavi †. Exempla enim mea fere omnia hic ab Auctore nostro repetuntur, ut & ipsa hæc Series $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} =$ &c. pro quadratura particularis alicujus spatii curvæ hujus $x^x = y$.

Pag. 25 & 26. *Si pars transcendentalis Fluxionis datæ fractio fuerit, v. g.* $\frac{p\dot{z}}{qz}$ [*ubi* p *&* q *significant quantitates ex* z *& cognitis quomodocunque, & sine vinculis aut radicalitatibus, compositas;*] *in qua Fluxio indeterminatæ* z *in omnes terminos numeratoris ducitur; res semper ad Logarithmos & exponentiales redit: semper enim est* $F : \frac{p\dot{z}}{qz} = \frac{pz}{qz} lz = lz^{\frac{pz}{qz}}$.

Perfunctorie hæc nimis tractantur; debuisset Cl. Auctor ostendere, quomodo fractiones rationales Fluxionum ad Logarithmos & exponentiales reducuntur; neque sufficit dicere, quod

* N°. XXXVI. pag. 181, 182. *Tom. I.* † N°. XXXVI. pag 179. *Tom. I.*

quod $F : \frac{p\dot{z}}{qz} = \frac{pz}{qz} lz$; si enim per p & q utrobique easdem quantitates intelligat, assertum non est verum: Si vero p & q in Fluente aliæ sint intelligendæ quam p & q in Fluxione, dicendum ergo fuisset, quomodo illæ ex hisce datis inveniantur: deinde falsum quoque est quod hujusmodi Fluxiones semper ad Logarithmos & exponentiales reducantur; interdum enim ad arcus Circuli redeunt, qui utique ad Logarithmos [reales] reduci non possunt, quinimo interdum habent Fluentes finitas determinabiles absolute. Sed hanc materiam Ampl. LEIBNITIUS & ego jam occupavimus, & methodos nostras dedimus in *Actis Lips.* 1702, m. Maii, & 1703, m. Januar. *

Pag. 34. *Ut vero eorum usum in exponentialibus secundi gradus.... ostendam, sit æquatio* $a^y = x^{x^x}$.

De hisce ego primus egi, quantum scio, in citat. Act. 1697, mens. Mart. †

Pag. ead. *Erit* $y\,la = x^x lx$. *Item* $l(x^x lx) = l(y\,la)$. *Sed* $l(x^x lx) = x\,lx + llx$. *Item* $l(y\,la) = ly + l : la$. *Quare* $ly = \frac{xlx + l : la}{l : la}$.

Errat hic Cl. Auctor; nam cum sit $xlx + l : lx = ly + l : la$, erit utique $ly = x\,lx + l : lx - l : la$, vel, si mavis, $ly = x\,lx + l : \frac{lx}{la}$; non vero $ly = \frac{xlx + l : lx}{l : la}$. Omnia igitur quæ sequuntur, ad hoc Problema $a^y = x^{x^x}$ pertinentia, sunt etiam erronea, adeoque corrigi debent.

Pag. 37. *Verba ipsius* NEWTONI *ut pote commodissima ex loco citato prius huc transferam.*

Quod revera verba NEWTONI transtulerit tantum, ipsas vero operationes non inspexerit attente, ex eo patet, quod errores, sive typographicos, sive calculi, apud WALLISIUM

A a 3 com-

* N°. LXX. pag. 393. *Tom. I* † N°. XXXVI. pag. 179. *Tom. I.*

commissos ipse nunc repetierit, neque eos correxerit, quos sic corriges: pag. 40, l. *9*; pag. 41, l. 5; & pag. 42, l. 1; pro az^{λ} scrib. az^{ν}. pag. 42, l. *6*; pro $+zr$ scrib. $-zr$, & pro $\frac{3zzr}{8d}$ scrib. $\frac{3zzr}{4d}$.

Pag. 46. *Altera* NEWTONI *Methodus.....: coincidit cum ea publicata a Cl.* LEIBNITIO, Actis Lipsiæ, Aprilis 1693, *hoc est, ad minimum* 17 *annis postquam erat a* NEWTONO *reperta.*

Non qui primus reperit, sed qui primus publicavit, laudem a publico primus meretur: interim quasi vero & ipse Cl. LEIBNITIUS non diu antea repertam habere potuisset hanc Methodum, antequam eam publicasset. Nulla est igitur consequentia: *Methodus hæc* 17 *annis reperta est a* NEWTONO, *antequam a* LEIBNITIO *publicata; Ergo* NEWTONUS *prior est inventor* LEIBNITIO. Quid si enim LEIBNITIUS eam invenisset 18 annis priusquam publicasset? esset utique primus Inventor & primus Publicator.

Pag. 50. *Methodus a Cl. Viro* Joh. BERNOULLIO Actis Lipsiæ 1694 * *prodita, qua Fluxionis datæ Fluens per Seriem infinitam, generalem quidem, terminis tamen plerumque maxime implicitis, obtinetur.*

Non video terminos per methodum meam multo magis implicitos obtineri quam per alias Methodos ab Auctore recensitas, quarum tamen nulla tam generalis est quam mea; imo in nonnullis casibus simpliciores reddit terminos. Sed quæcunque sit methodi meæ implicatio, miror quod Auctor noster non eadem usus sit facilitate in excusanda hac implicatione meæ Methodi per ipsius universalitatem, qua usus est circa aliquam Methodum sui popularis Cl. CRAIGII, quam, cum plerumque in *calculi molem immanem* deducat, laudat tamen, quod *laborem penset methodi ipsius universalitas*; licet in universalitate meæ multum cedat. Vid. pag. 123. Sic quod in me extraneo

* N°. XXI. pag. 125. *Tom. I.*

neo displicet & extenuatur, idem illud in conterraneo placet & extollitur.

Ibid. *Seriem ipsam generalem sic investigabis; sit* z y *expressio generalis pro Fluxionibus primis quibuscunque &c.*

Alias præterea habeo vias ad illam investigandam, quæ etiam valent pro Fluxionibus superioribus: de his, ante *9* & 10 annos, communicavi cum Ampl. LEIBNITIO.

Pag. 52. *Fietque* $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{rr} + \frac{ax^3}{r^3} + \frac{ax^4}{r^4}$ &c.

Hæc Series eodem modo expressa habetur in *Actis Lips.* 1694, pag. 438. Sed vitiata est per typothetam, corrigi itaque debet; ut eam jam correxi in *Actis* anni sequentis pag. *96* in *Erratis*; nempe sic $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{2rr} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4x^4}$ &c. Auctor itaque repetendo eundem errorem, ostendit se exemplum ex *Actis* nude exscripsisse, neque calculum ipsum perfecisse.

Pag. ead. *Sit jam* z y v *expressio generalis pro transcendentibus vel exponentialibus primi gradus (ubi* y *est quantitas algebraica ex indeterminatis & constantibus quomodocunque composita,* v *vero quantitas geometrice irrationalis quæcunque).*

Non opus est pro hoc casu novum inire calculum ad novam Seriem fabricandam, jam enim continetur in mea quam dedi pro $\int y\,dz$. Nam adeo generalis est, ut per y non tantum quantitas algebraïca ex indeterminatis & constantibus quomodocunque composita, sed etiam talis intelligi possit, quæ partim ex constantibus & indeterminatis algebraïcis, partim ex geometrice irrationalibus utcunque sit composita. Sic itaque pro applicatione universalis expressionis ydz ad hunc casum $\int yv\,dz$; aliud nihil faciendum est, quam ut in mea Serie universali $\int ydz = zy - \frac{z^2 dy}{1.2.dz} + \frac{z^3 ddy}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4 d^3y}{1.2.3.4.dz^3} +$ &c. loco y, dy, d^2y, d^3y, &c. ponantur eorum valores, qui hic sunt yv, $vdy + ydv$, $vddy + 2dydv + yddv$, $vd^3y + 3dvddy + 3ddvdy + yd^3v$, &c. ex quorum substitutione provenit statim Series quam Auctor habet; & hoc per se adeo manifestum est, ut mirer

mirer eum, præter omnem necessitatem, voluisse aliunde quærere quod ante oculos erat jam pene factum.

Pag. 56. *Iisdem methodis quantitatem quamcunque ad potestatem indeterminatam elevabis.*

Ego aliam methodum magis naturalem habeo ad potestatem indeterminatam elevandi quantitatem quamcunque & hæc methodus non eget neque Logarithmis neque infinitesimalibus; sed illam per Algebram ordinariam ex natura numerorum figuratorum erui, & jam ante 12 annos communicavi cum *Marchione* HOSPITALIO *, antequam adhuc scirem tale quid a NEWTONO aliove præstitum esse.

P. 59. *Omnia hæc hactenus tradita sunt, nisi paucula exempla Methodorum* Newtonianarum...... *Omnia in hisce, vel per hanc [aut non absimiles methodos] ab aliis [intra hosce, viginti quatuor annos proxime elapsos] edita, esse solum eorundem ab Ipso diu antea cum amicis vel publico communicatorum repetitiones, aut non difficilia Corollaria.*

Hæc in laudem Amplissimi NEWTONI, Magistri & popularis sui, merito dixit; modo id non sit in extenuationem aliorum & Exterorum imprimis: vereor ne plus NEWTONO tribuat, quam ipse sibi arrogaturus sit NEWTONUS. Alias miseri nos omnes sumus, quibus nihil nec inventi, nec posthac inveniendi, reliquit; aut qui quicquid fecimus, aliud nihil fecimus, quam nectere repetitiones quasdam, aut ad summum non difficilia Corrollaria quædam eorum quæ diu antea NEWTONUS cum amicis suis communicaverat. Certe si vel maxime hoc fecissemus, an ideo minus quam NEWTONUS horum inventorum Auctores dicendi essemus; quippe qui cum non fuerimus ex numero illorum amicorum, quibuscum communicavit; nec ipse nisi ante paucos annos sua reperta publicaverit; necesse habuimus illa nostro marte & nostra industria eruere; adeo ut hac in parte nihil NEWTONO debeamus: quamvis ceterum de publico eum præclare meritum lubentes confiteamur.

† N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, Tom. III.

Pag. 63. *Ille enim* [CRAIGIUS] *primus omnium (quod sciam) publico harum* [Transcendentium quadraturarum] *exempla impertivit, in* Phil. Transf. Dec. 1697.

Harum Exemplum etiam ego, eodem anno 1697, eodemque mense Decembri in *Ephemeridibus Gallicis* †, & ex illis postea excerptum in *Actis Lipsiens.* 1698, pag. 54 l. 4, publico impertivi, postquam, diu ante, hujusmodi curvæ transcendentales a me aliisque fuissent consideratæ: adeo ut Cl. CRAIGIUS non primus omnium earum exempla publicaverit.

Pag. 65. *Fluentes... a Fluxionibus per sectiones præcedentes datæ, interdum determinata quantitate a vera deficiunt, interdum eandem determinata quantitate excedunt.... Rem ipsam sic explorabis; pone ipsam Fluentem per methodos supra traditas repertam* $= o$, *& habebis signum; iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur* $= o$, *& obtinebis ipsam quantitatem demendam vel addendam Fluenti repertæ, prout signum innuerit.*

Omnino superfluum est ponere Fluentem $= o$, neque signum ullo modo ab ista positione dependet: quid si enim ex ea ambo signa prodeant, utrum tunc eligendum erit? Sumamus Exemplum ipsum tertium Auctoris, ubi $-\frac{30abx^{3:2}+75bc}{28aa} \times (c - ax^{3:2})^{2:5} = A$ [prout nimirum ab Auctore scribitur; sed male; invenio enim $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c - ax^{2:3})^{2:5} = A$.] Posito itaque $A = o$, verum quidem est, quod tunc diviso per $(c - ax^{3:2})^{2:5}$ proveniat $x = +(75c:30a)^{2:3}$; sed etiam non minori jure dividi potest per $(-30abx^{3:2} + 75bc):28aa$ & tunc provenit $x = +(c:a)^{2:3}$; nam per substitutionem hujus valoris, æque ac illius, degenerat A in nihilum. Quod si nunc hæc duo signa diversa essent, ut revera sunt, si ponatur vera æquatio $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c - ax^{2:3})^{2:5} = A = o$;

* N°. XL, pag. 209, Tom. I.

nam uno modo obtinebitur $x = -(75c : 30a)^{3:2}$, & altero $x = +(c:a)^{3:2}$. Utrum ergo nunc ſignum +, an — eligetur? Unde patet criterium Auctoris, ad explorandum quid addendum demendumve ſit areæ, ut vera obtineatur, nihil omnino valere, utpote ſæpiſſime ſibi ipſi non conſtans; quod magis ex ipſa concluſione Auctoris pateſcit, quando colligit, *Quare vera quadratura, erit* $A = \frac{-30abx^{3:2} + 75bc}{28aa}(c - ax^{3:2})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$; poſito enim $x = 0$ [in quo caſu area evaneſcere deberet,] provenit tamen $A = +\frac{75bc^{7:5}}{28aa} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod eſt manifeſte abſurdum. Verus autem modus explorandi quid Fluenti inventæ addendum demendumve ſit, ad habendam veram aream, in hoc conſiſtit, ut *ponatur indeterminata quantitas qua Fluens illa exprimitur* $= 0$, *& quæ inde provenit quantitas adjiciatur ſub ſigno contrario ad Fluentem repertam.* Secundum hanc Regulam, tertium exemplum Auctoris ita eſt corrigendum: $\frac{-30abx^{2:3} - 75bc}{28aa} \times (c - ax^{2:3})^{2:5} = A$; pone indeterminatam $x = 0$, fietque $A = -\frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod dat quantitatem ſub ſigno [contrario] + addendam Fluenti antea repertæ. Quare vera quadratura erit $A = \frac{-30abx^{2:3} - 75bc}{28aa} \times (c - ax^{2:3})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$. Eodem modo vera quadratura exempli ſecundi, a variis erroribus Auctoris repurgata, hæc eſt: $A = (\frac{3x^2}{10d^2e^2} + \frac{9ccx}{35d^2e^4} + \frac{27c^4}{140d^2e^6}) \times (e^2x - c^3)^{4:3} - \frac{27c^8}{140d^2e^{6}}$.

Pag. 67, 68. *Sit Fluxio infiniteſimalis* $z^r \dot{z} \times (e + fz^{\pm\eta} + gz^{\pm 2\eta} + hz^{\pm 3\eta}$ &c.$)^m$ .... *Si jam velis ut indices terminorum extra vinculum in Fluente augendo procedant, exiſtentibus terminorum ſub vinculo in Fluxione data indicibus affirmativis, capiendus in æquatione aſſumenda primi termini extra vinculum Index* $r+1$, *ſecundi* $r+1+\eta$, *&c. Sin exiſtentibus &c.*

Hæc reſtrictio plane eſt ſuperflua; poteſt enim in quocunque caſu capi in æquatione aſſumenda primi termini extra vinculum index $r + 1 +$ vel — aliquo multiplo ipſius η, qui ſit etiam multiplus maximi indicis, ſive affirmativi, ſive negativi, indeterminatæ ſub vinculo in Fluxione data; modo interim index ipſius vinculi debite augeatur vel minuatur. Sic in exemplo Cl. Auctoris pro Fluxione Trinomiali $Dz^r dz \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta})^m$, poſſum pro indice primi termini extra vinculum in æquatione aſſumenda ponere verb. gr. $r - 4\eta + 1$, & ita æquatio aſſumenda erit $Az^{r-4\eta+1} + Bz^{r-5\eta+1} + Cz^{r-6\eta+1}$, &c. $\times (e + fz^\eta + gz^{2\eta})^{m+2}$: ita pariter in altero exemplo Auctoris $Dz^r dz \times (e + fz^{-\eta} + gz^{-2\eta})^m$; æquatio aſſumenda poterit v. g. eſſe hæc, $Az^{r+4\eta+1} + Bz^{r+5\eta+1} + Cz^{r+6\eta+1}$, &c. $\times (e + fz^{-\eta} + gz^{-2\eta})^{m+2}$. Confer. cum iis quæ ſupra ad pag. 10, annotavi. †

Pag. 71. *Si neutra dediſſet, concludendum fuiſſet Fluxionem datam finitæ Fluentis non fuiſſe capacem.*

Magna quidem confidentia hic, ut etiam alibi, aſſeritur, hanc Methodum ſemper exhibere Fluentes finitas, ſi Fluxiones earum ſint capaces, ſed ejus demonſtrationem nuſquam adhuc vidi. Auctor videtur ita velle ratiocinari; *Quæcunque Fluxio per hanc Methodum non obtinet Fluentem terminis numero finitis expreſſam, illa Fluxio talem Fluentem habere plane non poteſt.* Sed negatur hoc, uſquedum oſtenſum fuerit hanc Methodum ad omnes Fluentes finitas poſſibiles ſeſe extendere. Contrarium potius in exemplo poteſt oſtendi. Sit enim Fluxio duplex binomialis $(8x^4 - a^4)dx \times (a^2 + x^2)^{1:2}$, cujus neutrum membrum neu-

† Supra, pag. 131.

tram habet conditionem, ut ſit $(\theta+1):\eta$, vel $(\theta+\eta\lambda+1):-\eta$ numerus integer & affirmativus, adeoque ſecundum Auctorem non haberet Fluentem finitam; interim tamen habet, ut aliunde ſcimus. Si vero quod extra vinculum eſt ſub vinculum involveretur, & deinde Canoni generali infinitinomiali §. III applicaretur; immanis adeo calculi moles requireretur, ut neſciam an Auctor per eum mihi facile daturus ſit Fluentem quæſitam, quam ego tamen per aliam viam commodiſſime & ſine magno labore dabo: vel etiamſi quod extra vinculum eſt non involvatur ſub illud, ſed ſtatim ad Canonem generalem applicetur; dubito tamen an Series alicubi abrumpatur, ita ut omnes ſequentes termini evaneſcant: nam contingere quidem poteſt ut aliquis terminus evadat nullus, ſed ſequentes nihilo ſecius aliquid efficiunt; unde Fluens non dabitur ſub terminis numero finitis. Sit v. g. Fluxio $dx(aa+4xx)(aa+xx)^{1:2}$, cujus Fluentem finitam eſſe certo ſcio; eſt enim $(aax+x^3)\times(aa+xx)^{1:2}$; ſed ſi ad Canonem generalem applicetur, evaneſcet quidem ſecundus terminus, verum tertius & quartus, quos tentavi, & haud dubie ſequentes, aliquid efficiunt; adeo ut nullæ hic habeantur conditiones abrumpendi: niſi aliquis velit dicere, ideo quoniam ſecundus terminus evaneſcat, in primo termino ſubſiſtendum eſſe, & omnes ſequentes negligendos; quemadmodum revera primus terminus ex Canone generali repertus $(aa+xx)^{3:2}x$ jam ipſam dat Fluentem $(aax+x^3)\times(aa+xx)^{1:2}$ aliunde mihi repertam. Sed ſi hoc neſcirem, quis mihi diceret, aut unde poſſem cognoſcere, omnes terminos poſt ſecundum in infinitum ſumtos ſe mutuo deſtruere, id eſt, ſummam affirmativorum æqualem eſſe ſummæ negativorum. Quid etiam dicemus de $xdx(aa+xx)^{1:2}$, cujus Fluens, ut facile patet, eſt $\frac{1}{3}(aa+xx)^{3:2}$; interim ſi applicetur ad Canonem generalem, quod duobus modis fieri poteſt, exprimendo Fluxionem datam, vel ſic $xdx.1.(aa+x^2)^{1:2}$, vel ſic $dx.$

(o+

$(0+1x^1).(aa+0x+x^2)^{1:2}$; priori modo invenitur $\int(xdx.(aa+xx)^{1:2}) = (aa+xx)^{3:2}\times(\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa}-\frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4}+\frac{5.7}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6}-\frac{5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8}$, &c.), & poſteriori modo = iterum $(aa+xx)^{3:2}\times(\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa}-\frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4}+$ &c.); ubi Fluens non tantum non exprimitur terminis numero finitis; ſed etiam hoc inconveniens ſequitur, quod cujuſcunque magnitudinis ſit x, tamen hæc Series $\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa}-\frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4}+\frac{5.7}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6}-\frac{5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8}+$ &c. ſemper ſit $=\frac{1}{3}$, id eſt, indeterminatum ſit = determinato; quod quomodo cum ſana ratione conciliari poſſit, videat Auctor. Eadem difficultas obvenit circa $xdx(aa+xx)^{-1:2}$, cujus Fluentem ſcimus eſſe $(aa+xx)^{1:2}$ ſeu $\sqrt{(aa+xx)}$; interim per Canonem generalem ſequeretur illam eſſe $=(aa+xx)^{1:2}\times(\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa}-\frac{3}{2.4}.\frac{x^4}{a^4}+\frac{3.5}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6}-\frac{3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8}+$ &c.) id eſt, iterum determinatum æquale indeterminato. Si denique Fluxiones ſupra allatæ ita efferantur, ut indices indeterminatarum evadant negativæ, aliæ novæ difficultates oboriuntur; Fluxio v.g. jam ſupra conſiderata $dx(aa+4xx)\times(aa+xx)^{1:2}$, ſi mutetur in hanc formam $x^3dx(aax^{-2}+4)\times(aax^{-2}+1)^{1:2}$; ejuſdem utique valoris cum priore, & ſi applicetur ad Canonem generalem, habebitur pro Fluente $x^4+0aaxx+a^4:0$ &c. ubi tertius terminus eſt magnitudinis infinitæ, cum tamen ipſa tota Fluens finita tantum ſit: contra ſi ultimum exemplum $xdx\times(aa+xx)^{-1:2}$ transformemus in hanc formam $dx.1.(aax^{-2}+1)^{-1:2}$ habebimus ex Canone generali, pro tota Serie, primum tantum terminum x, reliquis ſingulis in nihilum abeuntibus; unde Fluens foret tantum $=x$, cum tamen ſit $=\sqrt{(aa+xx)}$. Alias difficultates, quas movere poſſem, ſilentio prætereo; interim exemplum ipſum, quod Auctor pag. 70 & 71 proponit, non rite procedit: dicit enim quod $\int(dx \cdot x^{-5:2}(3a - bxx) \cdot (a + bxx + cx^3)^{-1:2})$ Canoni generali applicata det $-2\sqrt{(a - bxx + cx^3)} : x^3$; ego vero aliam Fluentem inveni: certe, quam Auctor tradit, vera Fluens eſſe non poteſt: nam ſi ejus ſumatur Fluxio per methodum directam, provenit $\frac{3cx^3 - 4bxx + 6a}{x^4\sqrt{(a - bxx + cx^3)}}dx$, quæ utique diſcrepat a propoſita $\frac{3a - bxx}{xx\sqrt{(ax - bx^3 + cx^4)}}dx$; contra intentum Auctoris.

Pag. 73. *Ubi obſervandum quod, ſi* r *vel* $\frac{1}{2m-2}$ *fuerit æqualis numero integro & affirmativo. . . . . Series . . . dabit longitudinem* [Parabolæ cujus æquatio $y = x^m$] *terminis numero finitis exprimendam.*

Hoc & plura alia circa Parabolas jam obſervavi & publicavi in *Act. Lipſ.* 1698, pag. 463 & ſeqq. * ubi oſtendi omnem Parabolam abſolute eſſe rectificabilem, aut per ſe, aut conjunctam cum alia; per ſe, ſi exponens Parabolæ ſit $= (1+2p) : 2p$ [ubi per p intelligo numerum integrum quemvis, ſcilicet poſitivum]; cum alia vero, generaliter in omni caſu.

Pag. 81. Caſ. VI. *Sit ratio Radii ad Circumferentiam ab ea deſcriptam* $\frac{a}{b}$; *Eritque* $\frac{b}{a} \times xy\dot{y} = \dot{C}$ [C ſolidum eſt, genitum rotatione plani curvilinei, cujus abſciſſa x, ordinata y] *Ubi Rotationis Axis eſt ſummitatis axis Curvæ tangens, & planum abſciſſæ adjacet.*

Præcipitanter hic agit Auctor, non enim $\frac{b}{a}xydy$, ſed $\frac{b}{a}xydx = dC$; neque hoc tanquam vitium typographicum excuſari poteſt: nam exemplum pag. ſeq. pro Caſu ſexto inſerviens hunc errorem ſupponit, quando habetur $dC = \frac{mb}{a}x^{2m}dx$, & $C =$

* N°. L. pag. 250. *Tom. I.*

$C = \frac{mb}{a} \times \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$; id quod ita corrigi debet; $dC = \frac{b}{a}x^{m+1}dx$ & $C = \frac{b}{a} \times \frac{x^{m+2}}{m+2}$.

Pag. 103. *Sit denique* $S = \frac{2b}{3a}x^{3:2} \times (\frac{1}{4}x^{-1} + 1)^{3:2}$, *ſitque axis rotationis abſciſſa; erit per Caſ. I. Probl. III.* $\dot{S} = \frac{b}{a}x^{1:2}\dot{x}\sqrt{(\frac{1}{4}x^{-1} + 1)} = \frac{b}{a}y\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = \frac{b}{a}y\dot{L}$; *factaque diviſione per* $\dot{L} = \dot{x}\sqrt{(\frac{1}{4}x^{-1} + 1)}$ [*data enim* $\dot{S}$, *datur* $\dot{L}$, *eſt quippe* $\dot{L} = \frac{a\dot{S}}{by}$] *habebitur* $y = x^{1:2}$.

Purus paralogiſmus! miror Cl. Auctorem tam facile deceptum, dum ſupponit quod eſt in quæſtione, quando dicit, factaque diviſione per $dL = dx\sqrt{(\frac{1}{4}x^{-1} + 1)}$; unde enim ſcit quod $dL = dx\sqrt{(\frac{1}{4}x^{-1} + 1)}$? Huc nihil confert quod per parentheſin addit [*data enim* dS, *datur* dL, *eſt quippe* dL $=$ adS : by], nam falſum eſt quod data dS detur dL, niſi ſimul & ipſa y detur; in noſtro vero caſu non datur y, ſed quæritur. Sane hic caſus non tam facile ſolvitur ut Auctor putat; ſi enim rite ad æquationem reducatur; habebitur $dx\sqrt{(x - y + \frac{1}{4})} = dy\sqrt{y}$, ubi indeterminatæ implicantur; adeoque a ſe invicem ſeparandæ ſunt, antequam ſolutionem aggredi liceat; eſt autem ſeparationis negotium unum ex maxime arduis & indaginis abſtruſiſſimæ: patet itaque Auctorem non arte, ſed caſu, in veram incidiſſe Solutionem; quia haud dubie curvam ipſam quærendam $y = x^{1:2}$ ſibi prius propoſuit, & ex ea per methodum directam quæſivit dS, unde facile pervenit ad ipſum S; ad hoc deinde tanquam datum accommodavit ſuum quæſitum, quod ex ipſa ſua formatione jam præcognitum habebat; adeo ut mirum non ſit per paralogiſmum ad veritatem perveniſſe. Sed ut paralogiſmus magis pateat, ſumamus aliud ſimile exemplum, & in-

interim idem ratiocinium Auctoris ſequamur: ſit igitur $S = \int \frac{3b}{2a} x^2 dx \sqrt{(\frac{4}{9} x^{-1} + 1)}$; ſitque axis rotationis abſciſſa; erit per Caſum I, Probl. III, $dS = \frac{3b}{2a} xx dx \sqrt{(\frac{4}{9} x^{-1} + 1)} = \frac{b}{a} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{b}{a} y dL$; factaque diviſione per $dL = dx \sqrt{(\frac{4}{9} x^{-1} + 1)}$ [data enim dS, datur dL; eſt quippe $dL = adS : by$] habebitur $y = \frac{3}{2} x^2$. Eſſet ergo, ſecundum ratiocinium Auctoris, curva quæſita $y = \frac{3}{2} x^2$; interim tamen veram curvam quæſitam eſſe $y = x^{3:2}$, cuilibet periculum facienti patebit.

Pag. 111. *Data, exempli gratia, Chorda unius Arcus, quæratur Chorda alterius Arcus, qui ſit ad priorem ut* 1 *ad* η.

Hoc jam præſtiti in *Act. Lipſ.* 1701, pag. 170 & ſeqq. * per duas Series univerſales, concinniores quam quæ hic ab Auctore exhibetur, & ni fallor jam olim ab ipſo NEWTONO exhibita fuit; & quidem illas meas Series inveni citra ullum Calculum infiniteſimalem, ex ipſis ſcilicet viſceribus & intima natura arcuum & angulorum.

Pag. 113. Prob. X. *Ex data Serie infinita quantitatibus algebraicis exprimenda, valorem ipſius finitum [ſi modo talem habuerit] invenire.*

Omnia hæc Serierum exempla hic tradita, videntur ab Auctore præformata ex valoribus finitis aſſumtis; adeoque minime mirum eſt, ſi per reverſionem iidem valores ex Seriebus eruuntur. Alias Methodi valde inſufficientes ſunt, innumeras enim Series facile proponam, quarum valores [licet finitos] per eas Methodos non determinabuntur: male igitur pro generalibus venditantur.

Pag. 121. *Curvam invenire, cujus in rectam extenſione Curva data, alias finitis terminis non quadrabilis, quadrabitur.*

Hæc methodus, præterquam quod plerumque immanem requirat calculi molem, etiam in caſibus facillimis, ut jam adverſus

* N°. LXIX. pag. 186. ſeq. *Tom. I.* Videatur etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* nec non Numerus CXXVII. pag. 526. *Tom. II.*

verſus Cl. CRAIGIUM animadverti in *Actis Lipſ.* 1695, pag. 64 *, hoc etiam defectu laborat, quod non ſit generalis, ut Auctor noſter putat. Exempla vero duo quæ affert $y = \sqrt{(xx + aa)}$, & $y = \sqrt{(x^m + a^n)}$, per methodum noſtram in loco citato inſinuatam, & in conſtructione curvæ paracentricæ feliciter adhibitam, ut videre eſt in *Actis Lipſ.* 1694, pag. 396 & 397 †, ſine ullo negotio ſolvuntur. Rem in poſteriori exemplo, quod prius continet, oſtendiſſe ſufficiet. $ydx = dx \sqrt{(x^m + a^n)}$; quadratum ejus $x^m dx^2 + a^n dx^2$ dividatur in duo quadrata, quorum latera habeant Fluentes geometrice rationales; puta in $x^m dx^2$ & $a^n dx^2$, quorum latera ſunt $x^{m:2} dx$ & $a^{n:2} dx$, eorumque Fluentes $\frac{2}{m+2} x^{(m+2):2}$, & $a^{n:2} x$, diviſa utraque per $a^{n:2}$, habebuntur $2 x^{(m+2):2} : (m+2) a^{n:2}$, & x, pro coordinatis curvæ quæſitæ, quæ multiplicata per $a^{n:2}$, producit aream propoſitam $\int dx \sqrt{(x^m + a^n)}$; quæ curva eadem eſt cum ea quam Auctor per longum calculum invenit. Quod autem hæc methodus qua Auctor, poſt acutiſſimum CRAIGIUM, utitur, non ſit univerſalis, patet ex iis quæ inſinuavi in *Actis Lipſ.* 1695, pag. 63 & 376 §; præterea hoc incommodi habet, quod plerumque Linea per eam quæranda non ſola ſit cujus extenſione area data quadratur, ſed recta quædam ipſi fere ſemper addenda vel demenda eſt. Sic pro quadratura Circuli, vel potius ſemiſegmenti circularis $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$, invenit quidem Cl. CRAIGIUS arcum itidem circularem; non autem purum, ſed cum recta quadam permixtum: verum per meam methodum, curva quadratrix ſemper pura & ſola obtinetur. Sit, v. g. idem ſemiſegmentum circulare $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$ quadrandum per extenſionem ſolam ſolius alicujus curvæ algebraicæ: Pro hac fiat curva, cujus coordinatæ ſint $(2a^3 - 3ayy + y^3) : 3aa$ &

* N°. XXIII. pag. 136. *Tom. I.*
† N°. XIX. pag. 121. *Tom. I.*
§ Nis. XXIII & XXVI. pag. 137 & 144, *Tom. I.*

& $(2ay - yy)\sqrt{(2ay - yy)} : 3aa$; dico longitudinem hujus curvæ, ductam in radium, fore æqualem semisegmento circulari $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$. Notandum etiam me infinitis aliis modis idem posse præstare; habemus ergo infinitas veras Circuli quadraturas transcendentes, adeoque errat Cl. CRAIGIUS, quando illam uno tantum modo possibilem dicit in suo Tractatu *De figurarum curvilinearum quadraturis* pag. 51. Eodem modo pro quadratura Hyperbolæ $\int dx \sqrt{(x^2 + aa)}$, præter Parabolam ejus quadratricem jam ab HEURAETIO detectam, invenio innumeras alias, inter quas hæc est, cujus coordinatæ sunt $(3aax - x^3) : 3aa$ & $(3aa - xx)\sqrt{(3aa - xx)} : 3aa$, quæ extensa in rectam & multiplicata per a facit spatium = areæ datæ hyperbolicæ $\int dx \sqrt{(xx + aa)}$ †. Cæterum debuisset Cl. CHEYNÆUS hac occasione ostendere methodum transformandi datam curvam algebraïcam in aliam, vel alias algebraïcas diversæ naturæ, sed ejusdem longitudinis; quod Problema, perutile sane, generalissime solvi, aliisque adhuc solvendum proposui in *Diario Gallico*, 1702, mens. Februar. §

† Videatur de hoc argumento Nus. CXXXII, pag. 582, *Tom. II.*
§ N°. LXXII, pag. 406. Vid. N°. LXXIV, pag. 408, & LXXVII ... LXXXIII, pag. 437 ... 452. *Tom. I.*

N°. CLXVIII.

OBSERVATIONES

In Clar. MOIVRÆI *Animadversiones in D.* CHEYNÆI *Tractatum de Fluxionum Methodo inversa*,

Editas *Londini* 1704.

In Præfationem.

Pag. 1. *SI intento quasi digito errores commonstrarem simul & emendarem.*

Non tamen omnes commonstravit.

Pag. 4.

Pag. 4. *Nec in his quadrandis ad* Logarithmos, *vel ad* Logarithmorum Logarithmos, &c. *vel ad Serierum numerum infinitum... confugiendum esse ostendi.*

Imo commode & eleganter ad Logarithmos confugitur, nec tam bene ad Series.

Pag. 5. *Sed hoc idem Theorema* [*Joh.* BERNOULLI pro Fluxionis alicujus datæ Fluente invenienda] *latius producere conatus, id quidem infinities implicatius, ne minimum vero universalius, reddidit.*

Verissime hoc mecum observavit Cl. MOIVRÆUS; idque jam objeci Cl. CHEYNÆO *, sed nihil respondit.

Pag. 10. *Aut erronea, aut nullius momenti asserere non dubito.*

Quæ de Centro Oscillationis habet CHEYNÆUS, ostendunt eum esse parum in concretis versatum, nam pleraque sunt falsa.

In Animadversiones.

Pag. 2. *Hanc inde conclusionem statim deducit, nempe Logarithmi Fluxionem, Fluxioni numeri per ipsum numerum divisæ æquari.*

Hæc conclusio est ipsa mea Regula, quam Cl. CHEYNÆUS ipsissimis fere verbis exscripsit ex *Act. Lips.* 1697, pag. 129, † *Differentiale Logarithmi*, &c. quamque non recte infringere conatur Cel. MOIVRÆUS.

Pag. 3. *Nam pag.* 1. *dicit Fluentem ipsius* $x^m dx$ *esse* $x^{m+1} : (m+1) \pm a^{m+1}$, &c.

Hoc intelligendum est de Fluente in abstracto considerata, eam scil. data qualibet quantitate determinata augeri vel minui posse, prout postea in certa applicatione res exigit.

Pag. ead. *Hoc supposito, dico* $x^{m+1} lx : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$ *non esse ipsius* $x^m dx lx$ *Fluentem absolutam, nam quamvis* $dx : x$ *sit Fluxio Logarithmi ipsius* x, *quando* x *est supra unitatem; tamen* $-dx : x$ *erit Fluxio Logarithmi ejusdem* x, *quando* x *est infra unitatem.*

* N°. præced. pag. 134. & 135. † N°. XXXVI, pag. 183. *Tom. I.*

Imo ego dico esse Fluentem absolutam in abstracto sumtam, sed augendam vel minuendam debite, si ad aream exprimendam applicetur, & semper $dx:x$ sumi potest pro Fluxione Logarithmi ipsius x, non obstante quod x possit esse infra unitatem: in calculo enim perficiendo non respicitur utrum x majus minusve sit unitate, quemadmodum etiam in Analysi ordinaria omnes quantitates signis affirmativis afficiuntur in abstracto, sed Problematis conditio postea hæc omnia limitat.

Pag. 4. *Area erit* $x^{m+1}lx:(m+1)-x^{m+1}:(m+1)^2$, *dum* x *est infra unitatem; quam primum autem* x *fit* $=1$, *erit Area* $1:(m+1)^2$, *non vero* $-1:(m+1)^2$, *ut sequitur ex ipsius calculo: quando autem* x *evadit major unitate, erit Area* $x^{m+1}lx:(m+1)-x^{m+1}:(m+1)^2+2:(m+1)^2$.

Hæc non procedunt: si enim x est infra unitatem, patet lx fore concipiendum ut negativum, adeoque tunc MOIVRÆI expressionem non differre ab ea CHEYNÆI, nisi quod hujus negativa sit, illius affirmativa: sed hoc ideo fit, quia quandiu x est infra unitatem, applicata $x^m lx$ est negativa; quæ per consequens Aream negativam faciat, respectu ejus quæ oritur per applicatas affirmativas, existente scil. x supra unitatem.

Quæ sequuntur sunt mera logomachia: CHEYNÆUS enim Aream sumit, quæ oritur ex differentia affirmativæ & negativæ, & MOIVRÆUS earundem summam.

Pag. 5. *Igitur* $dq=\frac{1}{2}x\,dx$, *& proinde* $q=\frac{1}{4}xx$.

Hic Cl. MOIVRÆUS approbat, quod modo ante in CHEYNÆO improbabat; scil. quod pro Fluente absoluta ipsius dq ponat $\frac{1}{4}xx$, cum possit esse $\frac{1}{4}xx\pm aa$. Sed hæc sunt vitilitigia.

Pag. ead. *Ergo Fluens ipsius* $xv\,\overline{dx}$ *est* $\frac{1}{2}xxv-\frac{1}{4}xx$ [posito scil. $dv=dx:x$]

Atqui eadem Fluens, per Theorema meum universale a CHEYNÆO pag. 50 citatum, invenitur $\frac{1}{2}xxv-\frac{1}{2}xx+(\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\&c.)xx$. Oportet igitur

tur

tur ut hæc Series $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}$ &c. sit $=\frac{1}{4}$: quod satis elegans est. Sic tamen potest inveniri a priori.

$$\text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\&c.\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\&c.\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\&c.=1$$

$$\text{Subtr.}\ \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\&c.=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{4.5.6}+\frac{2}{5.6.7}+\&c=\frac{1}{2}$$

$$\text{Ergo}\ \frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\&c.=\frac{1}{4}\ \ Q.\ E.\ I.$$

Haud absimili modo invenitur $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}$ &c. $=\frac{1}{18}$, & ita porro.

Pag. 7. Ex figura quis concluderet MOIVRÆUM supponere applicatam $x^m v$ fieri infinitam, quando $x=0$. Sed hoc non verum est, nisi quando $m=0$, quo casu curva in ipsam Logarithmicam degenerat, & quando m minor est nihilo. Alias enim, quamdiu m est aliquid, curva habet eam figuram quæ exhibetur *Fig.* 1. aut 2, & quidem *Fig.* 1, si $m>1$, & *Fig.* 2, si $m=$ vel <1. TAB. LXXX. N°. CLXVIII.

Pag. 8. *Sed cum Area NBC incipiat a puncto N, quantitas* $x^{m+1}v:(m+1)-x^{m+1}:(m+1)^2$, *nihil esse debet, cum* x *est* $=1$, &c.

Sed cur Area non æque ab A, quam ab N incipere potest; siquidem ut modo ostendi, curva habet hanc figuram. Itaque quantitas $x^{m+1}v:(m+1)-x^{m+1}:(m+1)^2$ nihil esse debet, cum x est $=0$. Sed posita $x=0$, tota quantitas supra dicta evanescit, seu fit $0-0$. Sciendum enim quantitatem $x^{m+1}v:(m+1)$ evadere 0, non obstante quod v fiat

$= -\infty$, quod ſic probo. Eſt $x^{m+1}v = x^{m+1}lx$, adeoque $x^{m+1}v = lx^{x^{m+1}} =$ [exiſtente $x = 0$] $l0^{0^{m+1}} = l0^{0} = l1 = 0$, ſi ſcil. $m+1 =$ numero poſitivo; alias, ſi $m+1 =$ numero negativo, erit $l0^{0^{m+1}} = l0^{\infty} = l0 = -\infty$, vel ſi $m+1 = 0$, erit $l0^{0^{m+1}} = l0^{0^{0}} = l0^{1} = l0 = -\infty$. Notandum porro, ſi $m =$ numero negativo curvam habere figuram ſimilem ei, quæ exhibetur *Fig.* 3.

TAB. LXXX. N°. CLXVIII.

Pag. ead. *Si jam velis ut Area ab aſymptoto incipiant, Area* AbcR *eſt* $x^{m+1}:(m+1)^2 + x^{m+1}v:(m+1)$.

Hic iterum ſupponit AR eſſe ſemper aſymptoton curvæ CN*c*, contra ea quæ modo obſervavi: & ſi AR eſt aſymptotos, & quidem exiſtente $m =$ vel < -1, falſum tunc eſt aream A*bc*R eſſe $x^{m+1}:(m+1)^2 + x^{m+1}v:(m+1)$, poſito enim $x = 0$, evaderet Area infinita: quod eſt abſurdum.

Pag. 10. *At Regula hæc*, &c. [Pone Fluentem.... repertam $= 0$, & habebis ſignum. Iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur $= 0$, &c. obtinebis ipſam quantitatem demendam vel addendam Fluenti repertæ, prout ſignum innuerit] *locum hic habere non poteſt.*

Sed Cl. MOIVRÆUS non animadvertit Regulam illam eſſe paralogiſticam. *

Pag. ead. *Scribendo enim* 0 *pro* x *in terminis* $x^{m+1}v:(m+1) - x^{m+1}:(m+1)^2$, *Fluens tota deſtruetur.*

Sed ſi $m < 0$, Fluens non deſtrueretur, ſed potius infinita evaderet.

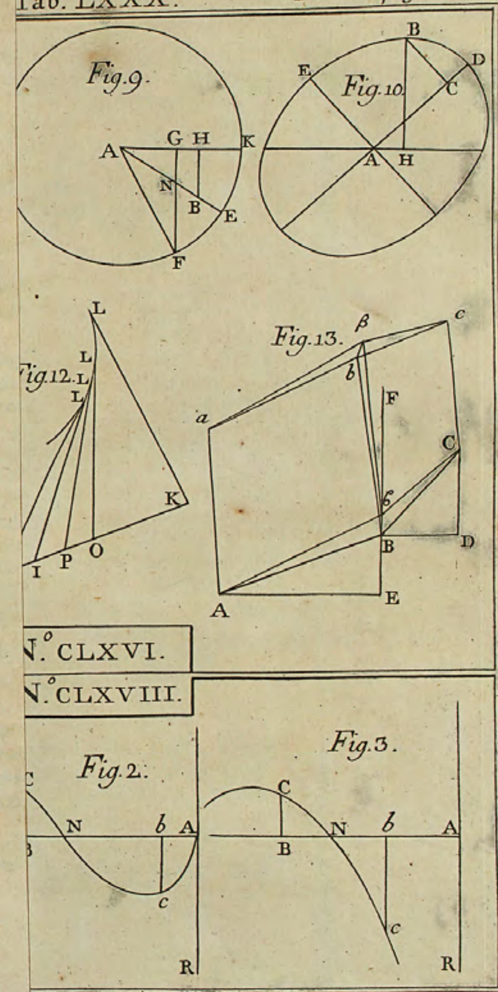
Pag. II. *Probabitur.... quod Fluentes cetera per alternantes defectus & exceſſus in infinitum ſunt corrigendæ.*

Quid ſi autem iſti exceſſus & defectus omnes ſe mutuo deſtruant, erit utique Fluens inventa vera Area quæſita; quod autem ſe mutuo deſtruant patet ex eo quod, poſito $x = 0$,

Fluens

* Vid. N°. præced. pag. 137. animadverſio in pag. 65.

Tab. LXXX. *Tom. IV. pag. 150.*



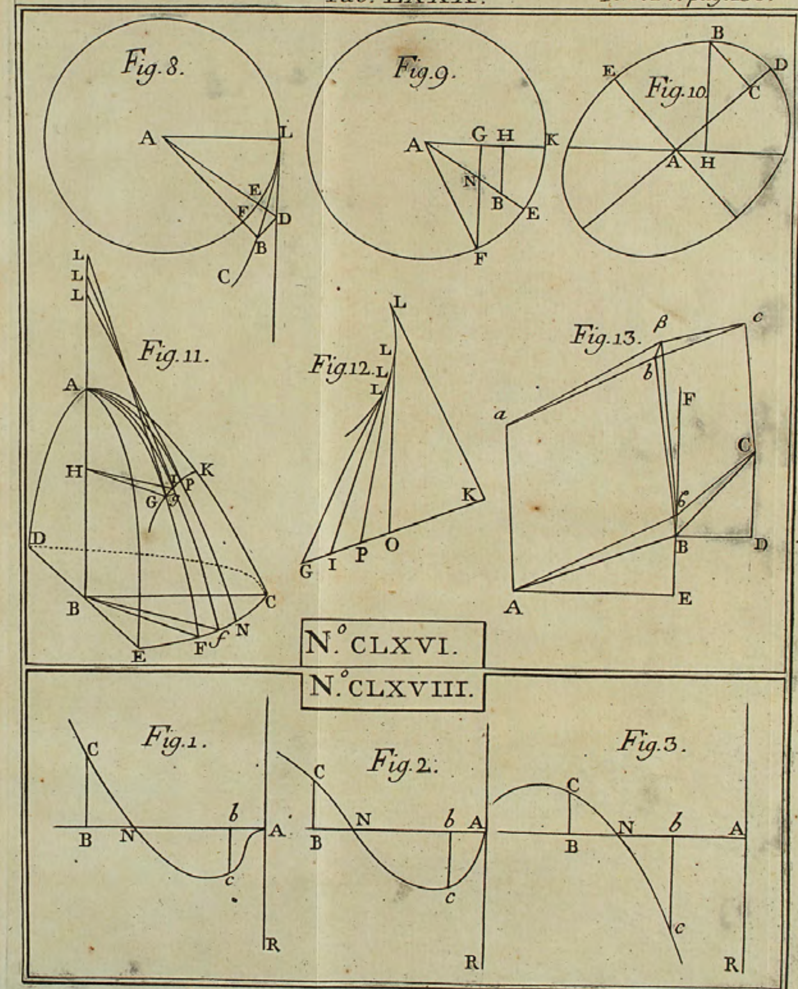


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
N.° CLXVI.
N.° CLXVIII.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.

Fluens inventa c
CHEYNÆUS.

Pag. 11. & 12.
+ż... *erit* z + ½z

Nulla hujus Se
citur illa Series pa
dedi in *Actis* 169

Pag. 13. *Ubi qu*

[CHEYNÆUS]
rum, *&c. Nos ver*
vulgares.

Etiam Series ex
ex vulgaribus nu
tuatur valor eoru

Pag. 17. *Fluen.*
(2ay — yy)) *quare*
turam esse byv² +
+ hay, *sed quo pa*

Haud dubie ex

Pag. 69. Theor
versalissimam exhi
CHEYNÆUS,

Pag. 71. *Fluen.*
$\frac{z}{y} + \frac{z^2}{2y^2} + \frac{z^3}{3y^3}$
1 + z *exhibet*,
modius, &c.

Hoc bene obse
hanc Seriem inver

Pag. 72. *Hic*
mavit Cl. BERN

† N°. XXXVI

Fluens inventa etiam evanefcat: ergo hic fruftra caftigatur CHEYNÆUS.

Pag. 11. & 12. *Fluens hujus quantitatis* $x^x dx \ldots$ *fi fit* $x = 1 + \dot{z} \ldots$ *erit* $z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{15}z^4 + \frac{1}{72}z^6$ &c.

Nulla hujus Seriei uniformitas confpicitur: Neque hinc elicitur illa Series particularis elegantiffima, pro cafu $x = 1$, quam dedi in *Actis* 1697, pag. 131. †

Pag. 13. *Ubi quantitas* x^x *confideranda venit, Logarithmos vocat* [CHEYNÆUS] *in auxilium: ubi* x^{x^x} *Logarithmos Logarithmorum, &c. Nos vero ad hæc omnia nihil adhibemus præter numeros vulgares.*

Etiam Series ex Logarithmis conflata poteft mutari in aliam ex vulgaribus numeris conftantem, fi pro Logarithmis fubftituatur valor eorum per Seriem infinitam expreffus.

Pag. 17. *Fluentem quantitatis* $(dy : a) \times \sqrt{((2ady - ydy)^2 : (2ay - yy))}$ *quærere fimulat, non quærit; jam novit formam futuram effe* $byv^2 + cv^2 + (dyv + eav)\sqrt{(2ay + yy)} + fy^3 + qay^2 + hay$, *fed quo pacto hoc fibi innotuit minime explicat.*

Haud dubie ex inductione.

Pag. 69. Theorematis mei, quo Fluens *ydz* per Seriem univerfaliffimam exhibetur, inveftigationem, quam dare voluit CHEYNÆUS, fcitiffime explodit Cél. MOIVRÆUS.

Pag. 71. *Fluens ipfius* $dz : (1 + z)$ *erit* [ponendo $y = 1 + z$] $\frac{z}{y} + \frac{z^2}{2y^2} + \frac{z^3}{3y^3} + \frac{z^4}{4y^4}$ &c. *Quæ Series Logarithmum ipfius* $1 + z$ *exhibet, & hoc vulgari Logarithmorum Serie multo commodius,* &c.

Hoc bene obfervatur, quod & ego obfervavi, cum primus hanc Seriem invenirem.

Pag. 72. *Hic iterum (uti folet) fruftra fedulus eft, nec exiftimavit Cl.* BERNOULLII *Seriem fatis generalem effe.*

Hanc

† N°. XXXVI. pag. 185. *Tom. I.*

Hanc fruſtraneam ſedulitatem etiam ego exprobravi Cl. CHEYNÆO in Animadverſionibus meis †; ſed nihil reſpondit.

Pag. 81. *Suppoſui* $az + bz^2 + cz^3 + \&c = gy + hy^2 + iy^3 + \&c$; *& valorem ipſius* z *in Serie infinita exhibui, quæ tota ex poteſtatibus ipſius* y, *una cum datis, componitur.*

Valorem z facillime determinare licet, ut oſtendi in litteris ad Cl. HERMANNUM. Sed ſi alterutra, vel utraque Series incipiat a quantitate pura, non video quomodo tunc vel MOIVRÆUS vel CHEYNÆUS valorem z mihi determinare facile queat.

Pag. ead. *In mirabili iſto Theoremate* NEWTONI, ... *quod continet Theoriam integram Sectionum angularium.*

Talia Theoremata etiam ego in *Actis Lipſ.* 1701. pag. 170 *, publicavi.

Pag. ead. *duo a nobis inventa Theoremata.... unum pro extrahenda radice æquationis infinitæ.... alterum pro infinitinomio ad poteſtatem.... indeterminatam elevando*,

Facile hæc duo Theoremata etiam a me ſunt inventa, ut oſtendi in litteris ad D. HERMANNUM.

Pag. 86. *Eo quod* $(a+x)^n = y$, *ſtatim concludit Logarithmum unius Logarithmo alterius æqualem eſſe; quod verum non eſt, niſi utrumque ex eadem Logarithmorum ſcala depromſerit.*

Levis objectio: utrumque enim ex eadem Logarithmorum ſcala depromtum eſſe, per ſe ſupponitur.

Pag. 88. *Cum quantitas* $x + a$ *ad poteſtatem cujus index* n *elevanda ſit, quidni ſumenda fuerit* x^n *pro termino primo Seriei, eodem jure ac* a^n.

Ideo x^n non debet ſumi, quoniam A [primus terminus] ponitur quantitas conſtans, & x^n eſt indeterminata; & proin hæc pro illa ſumi non poteſt, ſed recte ſumitur a^n.

Pag. 89.

† Supra pag. 134. & 135.

* N°. LXIX pag. 386. ſeq. *Tom. I.* Vid. etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* & Nus. CXXVII, pag. 526. *Tom. II.*

Pag. 89 & 90. *Ubi ex hac æquatione* $a^2 ddx + xdy^2 = 0$ *radicem* x *invenire ſatagit, ... aſſumit æquationem* $x = by + cy^3 + dy^5 + \&c$, ... *& ponit* $b = 1$, ... *Sed .... cur non liceat ponere* $b = 2$, *vel* 3, *vel* &c.

Licet utique, etiamſi diverſæ Series exſurgant. Ratio eſt, quoniam hæc æquatio Fluxiones ſecundas involvens admittit diverſas æquationes involventes Fluxiones primas, ſcil. $aaddx + xdy^2 = 0$, multipl. per dx, erit $aadxddx + xdxdy^2 = 0$; ſumtis Fluentibus erit $\frac{1}{2}aadx^2 + \frac{1}{2}xxdy^2 = \pm\frac{1}{2}bbdy^2$, ideoque $dy = adx : \sqrt{(\pm bb - xx)}$.

Pag. 93. *Problematis* [de binomio ad poteſtatem indeterminatam elevando] *libet.... inveſtigationem adducere.... quam quatuor abhinc annis inveni.*

Aliam ego inveni, duodecim abhinc annis, longe naturaliorem; utpote quæ a Fluxionalibus non petitur; quamque *Marchioni* HOSPITALIO impertivi in *Lectionibus* meis in ipſius uſum conſcriptis. ‡

Pag. 97. *In Problemate pro Serie infinita ad poteſtatem quamcunque elevanda, poſtulat ut detur Seriei quadratum, cubus, biquadratum*, &c.... *Nonne vero hoc eſt manifeſta petitio principii?*

Minime gentium; niſi omnis perfecta inductio ſit nominanda petitio principii.

Pag. 102. *Theoremata quædam pro comparatione curvarum, quæ* Phil. Tranſ. N°. 278, *exhibui.... exiſtimavi.... huc* referenda.

Omnia hæc Theoremata jam ante multos annos mihi erant cognita, uti patet ex *Lectionibus* meis cum HOSPITALIO communicatis †; & quidem omnia ſimul demonſtrari poſſunt per ea quæ publicavi de integratione fractionum rationalium in *Actis*, 1703, pag. 26 ſeq. §. Nam omnes iſtæ quantitates binomiales ſub vinculo comprehenſæ, de quibus MOIVRÆUS agit, [ſunt eæ $\sqrt{(dx \pm xx)}$ & $\sqrt{(rr \pm xx)}$,] poſſunt facillime mutari in quantitates rationales, adeoque ſemper dependent earum integralia [niſi ſint finita] a quadratura vel Circuli, vel Hyperbolæ, aut realis, aut imaginariæ.

‡ N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, *Tom. III.* † Ibid.

§ N°. LXX, pag. 393, *Tom. I.*

Pag. 111. *Si* m *exponatur per alium quemvis terminum diverſum ab iis quos ſupra memoravimus* [ii ſunt qui continentur in his Seriebus $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ &c. $-3, -4, -5, -6, -7$, &c. $-2, -1, 0, 1, 2, 3$, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m \surd(dx+xx)$ *aut* $x^m \surd(dx-xx)$, *non quadratur exacte, nec illa ab Hyperbola, aut hæc a Circulo pendet.*

Hoc Corollarium non eſt ſatis verum : exponatur enim, v. g. m per $-\frac{7}{2}$, qui caſus in præcedentes limitationes non cadit ; dependebit tamen quadratura curvæ $x^{-7:2} \surd(Dx \pm xx)$ a quadratura Hyperbolæ : id quod patet, ſi ponatur $x = 1:y$; tunc enim $x^{-7:2} dx \surd(Dx \pm xx)$ mutatur in hanc expreſſionem $- dy \surd(Dyy+y)$, quæ utique dependet a quadratura Hyperbolæ. Idem valet. ſi m exponatur per quemcunque terminum hujus Seriei $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$ &c. Semper enim dependent a quadratura Hyperbolæ, ſive ſit $+$, ſive $-$.

Pag. 117. *Si* m *ponatur æqualis termino cuivis, qui non in limitationes præcedentes cadat* [eæ erant $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ &c, $-1, -2, -3, -4$, &c. $0, 1, 2, 3, 4$, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m : \surd(dx-xx)$ *aut* $x^m : \surd(dx+xx)$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hac ab Hyperbola pendet.*

Hoc iterum falſum eſt. Nam ſi m ponatur æqualis termino cuivis hujus Seriei $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ &c, curva cujus ordinata $x^m : \surd(dx \pm xx)$ ſemper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 120. *Si* m *exponatur per terminum quemvis diverſum ab illis quos ſupra memoravimus* [nempe $1, 3, 5, 7$, &c. $-4, -6, -8, -10$, &c, $-2, 0, 2, 4, 6, 8$, &c.] *curva, cujus ordinata* $x^m \surd(rr-xx)$, *aut* $x^m \surd(rr+xx)$, *neque exacte quadratur, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Etiam hoc minus recte. Nam ſi m exponatur æqualis termino cuilibet hujus Seriei, $-1, -3, -5, -7$, &c. curva, cujus ordinata $x^m \surd(rr \pm xx)$ ſemper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 125. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet a præcedentibus* [$1, 3, 5, 7$, &c. $-2, -4, -6, -8$, &c. $0, 2, 4, 6, 8$, &c.], *diverſum, curva cujus ordinata* $x^m : \surd(rr-xx)$ *aut* $x^m : \surd(rr+xx)$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Item & hic, ſi m ſumatur æqualis termino cuivis hujus Seriei $-1, -3, -5, -7$, &c. curva, cujus ordinata $x^m : \surd(rr \pm xx)$ pendet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. ead. *Sit* A *Area curvæ, cujus abſciſſa* x, *ordinatim applicata* $x^m : (d-x)$; *ſit* B *Area curvæ, cujus abſciſſa itidem* x, *ejuſque ordinatim applicatæ* $x^{m-n} : (d-x)$; *erit Area* $A = d^n B - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) - ddx^{m-2} : (m-2)$, *&c. Sit ordinatim applicata* $x^m : (d+x)$, *tunc Area erit* $A = x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) + ddx^{m-2} : (m-2)$ &c. $\pm d^n B$.

Hæc Series multis laborat difficultatibus,

1°. A, vel ejus complementum jam eſt $= - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) - ddx^{m-2} : (m-2)$, &c. uti facile oſtenditur dividendo actualiter x^m per $d-x$, facto diviſionis initio a $-x$; ſummato enim quotiente, oritur hæc Series $-x^m : m - dx^{m-1} : (m-1)$ &c.; adeoque ſequeretur, vel $d^n B$ eſſe $= 0$, vel ſemper eſſe $= A -$ compl. A; quod utrumque eſt abſurdum.

2°. Si m eſt numerus integer & affirmativus, terminus tandem occurret $d^m x^{m-m} : (m-m) = d^m x^0 : 0 = d^m : 0 =$ infinito, ideoque Series nihil pro Area determinabit.

3°. Eſto $n = 0$, quo caſu erit $d^n B = B = A$; adeoque foret $A = A - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1)$ &c. quod eſt abſurdum.

4°. Ex eo quod $d > x$, facile demonstrari potest terminum infinitesimum $d^{\infty} x^{m-\infty} : (m-\infty)$ fore semper magnitudinis infinitæ; adeoque Seriem in omni casu esse divergentem, & proin ad determinandam Aream inutilem.

Eædem hæ difficultates [quarta tantum restricta ubi $d > x$] contra alteram Seriem pro Area curvæ, cujus applicata $x^m : (d+x)$ moveri possunt. Ut igitur alias demus Series his difficultatibus non obnoxias, dividatur actu x^m per $d-x$, incipiendo a d, & quotiens summetur; prodibit $A = x^{m+1} : (m+1)d + x^{m+2} : (m+2)dd + x^{m+3} : (m+3)d^3$, &c. & pro altera dividatur actu x^m per $d+x$ [si nempe $d > x$], incipiendo a d; & erit, quotiente summato, $A = x^{m+1} : (m+1)d - x^{m+2} (m+2)dd + x^{m+3} : (m+3)d^3$ &c. si vero $d < x$, incipienda est divisio ab x; tunc enim, quotiente summato, erit $A = x^m : m \quad dx^{m-1} : (m-1) + ddx^{m-2} : (m-2)$ &c.

Pag. 126. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet sequentis Seriei* 0, 1, 2, 3, 4, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $\mathrm{x}^{\mathrm{m}} : (\mathrm{d}-\mathrm{x})$ *aut* $\mathrm{x}^{\mathrm{m}} : (\mathrm{d}+\mathrm{x})$ *pendet a quadratura Hyperbolæ.*

Imo, non tantum per terminum quemlibet hujus Seriei 0, 1, 2, 3, 4, &c. sed etiam per quemlibet hujus -1, -2, -3, -4, &c. potest m exponi, & semper tamen pendebit quadratura curvæ cujus applicata $x^m : (d \pm x)$, a quadratura Hyperbolæ. Qua methodo reducendi quadraturas usus sit Cl. MOIVRÆUS nescio; interim hoc utique non debebat prætervidere; uti nec hoc, quod si m exponatur per quemlibet terminum duplicis hujus Seriei $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$, $\pm\frac{7}{2}$ &c, curva cujus applicata $x^m : (d-x)$ dependebit a quadratura Hyperbolæ, altera vero, cujus applicata $x^m : (d+x)$ pendebit a quadratura Circuli. Porro nec hoc prætervidere debuisset, quod

quod sumto m æquali cuilibet termino hujus Seriei duplicis $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$, $+\frac{5}{4}$, $\pm\frac{7}{4}$ &c. quadratura curvæ, cujus applicata $x^m : (d-x)$, dependebit a quadratura Circuli & Hyperbolæ simul; reliqui casus omnes ad quadraturam Circuli vel Hyperbolæ; interdum reales, interdum imaginarios; interdum etiam ad quadraturas, partim Circuli, partim Hyperbolæ reducuntur. Qua de re consulantur quæ in *Actis Lips.* 1703, pag. 26, publicavi †, præsertim Corollarium & Compendia, quæ huic rei maximam lucem fœnerantur. Sic si m exponatur per quemcunque terminum hujus duplicis Seriei, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{5}{3}$, $\pm\frac{7}{3}$, $\pm\frac{8}{3}$ &c. Dico quod tunc quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m : (D \pm x)$ dependebit a quadratura partim Hyperbolæ, partim Circuli: Quod sic paucis ostendo. Ponatur $x = y^3$, erit $x^m dx : (D \pm x) = 3y^{3m+2} dy : (D \pm y^3)$; Existente igitur m æquali alicui termino in hac Serie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, &c. patet $3m+2$ fore terminum aliquem in hac Serie 3, 4, 6, &c. Diviso igitur actu, quantum fieri potest, $y^{3m+2} dy$ per $D \pm y^3$, secundum regulam, quam in citato loco præscripsi; ex quotiente, utpote rationali & integro, sumetur integrale; residua vero fractio habebit necessario, vel hanc formam... $dy : (D \pm y^3)$, vel hanc.... $ydy : (D \pm y^3)$. Ostendendum igitur restat, quomodo horum integralia, vel Fluentes, dependeant a quadratura, partim Hyperbolæ, partim Circuli. Esto $D = n^3$, & invenietur per regulam meam $1 : (n^3 \pm y^3) = (+\frac{2}{3n} \mp \frac{1}{3nn} y) : (nn \mp ny + yy) \pm \frac{1}{3nn} : (\pm n + y)$, & $y : (n^3 \pm y^3) = (\pm\frac{1}{3} + \frac{1}{3n} y) : (nn \mp ny + yy) - \frac{1}{3n} : (\pm n + y)$. Fluentes autem ipsorum $\pm \frac{dy}{3nn} : (\pm n + y)$ & $\frac{dy}{3n} : (\pm n + y)$ exprimunt Aream hyperbolicam. Pro determinandis reliquorum duorum Fluentibus, pona-

† N°. LXX. pag. 399 & 400. Videatur etiam Nus. CXIV, pag. 402. & seq. *Tom. II.* necnon Nus. CLVIII. supra, pag. 52.

ponatur $y = z \pm \frac{1}{2} n$, erit $(+ \frac{2}{3n} \mp \frac{1}{3nn} y)\, dy : (nn \mp ny + yy) = (+ \frac{1}{2n} \mp \frac{1}{3nn} z)\, dz : (+\frac{3}{4} nn + zz)$, & $(\pm \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} y)\, dy : (nn \mp ny + yy) = (\pm \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} z)\, dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$; in quibus iterum Fluentes ipſorum $\pm \frac{1}{3nn} zdz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ & $\frac{1}{3n} zdz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ dependent a quadratura Hyperbolæ; reliquorum autem $+ \frac{1}{2n} dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ & $\pm \frac{1}{2} dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ Fluentes pendent a quadratura Circuli, ut MOIVRÆUS ipſe declarat pag. 128.

Ponatur nunc $x = y^{-3}$ & erit $x^m dx : (D \pm x) = -3y^{-3m-1} dy : (Dy^3 \pm 1)$. Exiſtente igitur m aliquo termino in hac Serie $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ &c. manifeſtum eſt $-3m-1$ fore terminum aliquem in iſta Serie $0, 1, 3, 4$, &c. adeoque reliqua peraguntur ut prius: Unde tandem conſtat quod aſſeruimus; nempe ſi m exponatur æqualis termino cuicunque hujus duplicis Seriei $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{7}{3}$ &c. fore Aream curvæ, cujus applicata $x^m : (D \pm x)$ quadrabilem per quadraturam partim Hyperbolæ, partim Circuli. Reſolvimus enim Aream illam in Circularem unam & Hyperbolicas duas.

Denique, ſi m exponatur per quemvis terminum hujus Seriei duplicis, $\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}, \pm \frac{7}{6}, \pm \frac{11}{6}, \pm \frac{13}{6}$ &c. Area curvæ, cujus applicata $x^m : (D - x)$ eſt pariter quadrabilis per quadraturam partim Circuli, partim Hyperbolæ. Nam ſit $x = y^6$, erit $x^m dx : (D - x) = 6y^{6m+5} dy : (D - y^6)$. Deinde ſit $x = z^{-6}$, erit $x^m dx : (D - x) = -6z^{-6m-1} dz : (Dz^6 - 1)$. Jam manifeſtum eſt quod, per ſubſtitutionem termini alicujus affirmativi illius Seriei $\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}, \pm \frac{7}{6}$ &c, loco m, habeatur $6m + 5$ æquale termino alicui in hac Serie $6, 10, 12, 16, 18$, &c,; & per ſubſtitutionem termini alicujus negativi, fiat $-6m - 1 =$ termino alicui Seriei $0, 4, 6, 10, 12$ &c.

Diviſo

Diviſo igitur, ſecundum tenorem Regulæ meæ, quantum fieri poteſt, y^{6m+5} per $D - y^6$, vel $z^{-6m-1} dz$ per $Dz^6 - 1$, & quotientis, utpote rationalis & integri, ſumta Fluente vel integrali, reſidua fractio habebit neceſſario, vel formam.... $dy : (D - y^6)$, vel hanc.... $y^4 dy : (D - y^6)$ & pro altera expreſſione, vel hanc.... $dz : (Dz^6 - 1)$, vel hanc.... $z^4 dz : (Dz^6 - 1)$. Eſt autem [poſito $D = n^6$] .... $dy : (n^6 - y^6) =$ ....$dy : (n^3 + y^3) +$ .... $dy : (n^3 - y^3)$; horum autem Fluentes, vel integralia dependent [ut per modo ſupra dicta clarum eſt] a quadratura, partim Circuli, partim Hyperbolæ; a qua & reliquarum partium [quoniam eodem modo diſpeſci poſſunt] Fluentes dependent. Ergo &c.

Pag. ead. *Etenim ductis.* &c.

Demonſtratio hæc MOIVRÆI huc redit. Quoniam $x^0 dx : (D \pm x)$ eſt integrabile per quadraturam Hyperbolæ, ergo etiam per Hyperbolæ quadraturam integrabile eſt $x^m dx : (D \pm x)$. Quis autem hanc conſequentiam admitteret; ſi rei veritatem aliunde non noſſet. ?

Pag. 127. *Sit* A *Area curvæ cujus abſciſſa* x, *ordinatim applicata* $x^m : (rr + xx)$. *Sit* B *Area curvæ, cujus abſciſſa itidem* x, *ordinatim applicata* $x^{m-2n} : (rr + xx)$; *erit Area* $A = x^{m-1} : (m-1) - rr\, x^{m-3} : (m-3) + r^4 x^{m-5} : (m-5)$ &c.... $\mp r^{2n} B$.

Series hæc ſimilibus premitur difficultatibus, quas ſupra ad Seriem pag. 125, animadvertimus. Miror hic MOIVRÆUM nihil dicere de $x^m : (rr - xx)$.

Pag. 128. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet ſequentis Seriei*, $0, 2, 4, 6, 8$, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $x^m : (rr + xx)$, *pendet a rectificatione circularis arcus.*

Imo etiam, ſi m exponatur per quemlibet terminum ejus Seriei, $-2, -4, -6, -8$, &c.

Pag.

Pag. ead. *Etenim ſi centro* c, &c.

Demonſtratio ſimilis eſt ſuperiori ad pag. 126. Cæterum, ſi m exponatur per quemvis terminum duplicis hujus Seriei, $\pm 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$, &c. Area curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m : (rr - xx)$ quadrabitur per quadraturam Hyperbolæ. Et ſi m exponatur per quemcunque terminum duplicis hujus Seriei $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}$, &c. vel per quemcunque duplicis hujus $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{5}{3}$ &c, quadratura curvæ, cujus applicata $x^m : (rr - xx)$, dependebit a quadratura partim Circuli, partim Hyperbolæ. Sed oportet talia MOIVRÆO ſuam non ſuggeſſiſſe methodum; alioquin non præteriiſſet.

N°. CLXIX.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

à l'Auteur du Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits de M. le *Marquis* DE L'HOPITAL.

Imprimé à *Paris*, en 1721.

. . . .

J'ai reçu, Monſieur, votre *Commentaire ſur l'Analyſe*, & votre *Diſcours ſur le Mouvement*: Je vous en rends mille graces. . . . . . . En liſant le Diſcours ſur le Mouvement, j'ai bien remarqué qu'il eſt écrit avec beaucoup d'élegance & de force; mais je n'y ai point trouvé de nouvelles inventions, comme je croiois qu'on avoit exigé de ceux qui voudroient prétendre à remporter quelque prix. Vos penſées, tant ſur le Corps, que ſur le Mouvement, ne ſont pas de nouvelle datte; elles ſont la plûpart priſes des opinions de DESCARTES, qui fait, comme vous, conſiſter l'eſſence des Corps dans la ſeule étendue, & celle du Mouvement dans l'application ſucceſſive de leurs ſurfaces aux ſurfaces des corps contigus. Vous avez auſſi preſque les mêmes

mes ſentiments que Mr. DESCARTES, ſur la quantité & ſur la communication du mouvement. Il eſt vrai que vous paraphraſez très bien cet Auteur, & que vous mettez ſon ſyſtème dans un beau jour; quoique vous le refutiez auſſi ſur quelques points, comme, par exemple, ſur les cauſes occaſionelles. Cependant les Anglois ne vous paſſeront pas tout ce que vous dites ſur l'eſſence du Corps & du Mouvement. Pour ce qui eſt de la quantité prétendue permanente du mouvement & de ſa communication, que DESCARTES en déduit; les règles qu'il donne ſont entierement fauſſes: on en peut démontrer géometriquement la fauſſeté.

Je ne ſuis pas aſſez préſomptueux, pour croire que j'aurois pû écrire une auſſi belle piéce que la votre; car je n'ai pas le don de l'éloquence: mais je ſouhaiterois, qu'on propoſât une autre fois quelque queſtion déterminée, priſe de la Phyſique, réſoluble par la Géometrie, où il ne faille que de l'adreſſe à méditer & à inventer; peut être aurois-je le bonheur d'y réuſſir autant qu'un autre.

L'état de ma ſanté ne me permet pas de lire avec beaucoup d'attachement votre Commentaire ſur *l'Analyſe des infiniment petits*. J'ay pourtant parcourru, avant que de le donner au Relieur, la Dédicace, la Préface & les deux Diſcours préliminaires. Le ſecond de ces Diſcours éclaircit fort bien le calcul des puiſſances; tout y va bien, à quelques fautes près, ſoit de calcul, ſoit d'impreſſion. Il y a auſſi de belles remarques ſur les infiniments petits dans le premier Diſcours: Mais il ſemble qu'en voulant éclaircir la nature de ces infiniments petits avec trop de ſoin, vous la rendez moins intelligible à ceux, qui ne ſont pas accoutumés à de longues explications; ſur tout, ſi ces explications elles mêmes leur paroiſſent plus obſcures que la matiere à expliquer. En effet, c'eſt quelque choſe de choquant que de dire [p. 5.] *Qu'un Solide, un Parallelépipede, par exemple, peut être diviſé & ſubdiviſé dans la hauteur, tellement, qu'on viendra enfin à une ſurface, dont la hauteur ſera infiniment petite.* Car par la diviſion des corps, quelqu'infinie qu'elle ſoit, on ne par parviendra jamais à des ſurfaces. Les parties d'un corps, quoique infiniment petites, ſont toujours corps ; celles d'une ſurface, ſont toujours ſurfaces ; & les parties d'une ligne ſont toujours lignes : n'étant pas poſſible qu'un genre de quantité puiſſe être changé par la diviſion en un autre genre de quantité. Vous auriez donc mieux fait, à mon avis, de garder le mot de tranches, & de dire *qu'on viendra enfin à une tranche, dont la hauteur ſera infiniment petite, &c.* Vos autres façons de parler, *les ſurfaces ſont, par rapport au Parallelépipede, des infiniments petits,* &c. *le Parallelogramme infiniment petit, par rapport au Parallelépipede, &c.* me paroiſſent très dures pour une oreille géometrique, & peu capables de former un commençant à avoir des idées nettes, ſur le ſujet qu'on veut traiter : elles jettent plûtôt dans l'erreur, & dans le préjugé, où on eſt avant que d'être Géometre ; comme ſi le corps étoit compoſé de ſurfaces, la ſurface compoſée de lignes, & la ligne compoſée de points ; préjugé fort difficile à détruire dans les jeunes gens, & qui les empêche de comprendre les démonſtrations ſur les figures géometriques. Car qu'eſt-ce qui les trouble d'avantage, que quand ils ne ſavent pas diſtinguer, par exemple, la ſurface, d'avec les lignes qui la terminent ? Il ne faudroit donc pas ſe ſervir de ces façons de parler, qui nourriſſent les préjugés, au lieu de les détruire.

Pag. 7. Pour démontrer que la circonference d'un Polygone infinilateral, inſcrit dans le Cercle, eſt égale a la circonference du Cercle ; vous dites, que chaque côté du Polygone, étant la corde d'un arc de Cercle, la difference, qu'il y a entre un arc & ſa corde, diminue toûjours, à proportion que cette corde devient plus petite ; ce qui eſt très-vrai, comme auſſi ce qui ſuit : *Qu'on pourra donc multiplier tellement les cotés d'un Polygone inſcrit ou circonſcrit, qu'il ſera enfin permis de compter pour rien la difference d'un de ſes cotés avec l'arc qui lui répond.* Tout cela eſt vrai ; mais la conſéquence, que vous en tirez n'eſt pas légitime, ſavoir que la circonference du Poligone devient égale à celle du Cercle. Car il ne ſuffit pas de faire voir, que la diffe-

difference qu'il y a entre un arc de Cercle & ſa corde diminue à l'infini, pour en conclure que les deux circonferences deviennent égales ; autrement, vous pourriez conclure avec le même droit, que la baſe AB d'un triangle rectangle ABC eſt égale à l'hypothenuſe AC ; de ce qu'étant diviſées l'une & l'autre par des parallèles *nm*, *nm*, *nm*, &c. je vous fais voir, que plus eſt grand le nombre des parties, & plus petite ſera la difference entre une des parties *mm* & une des parties *nn* ; *on pourra donc multiplier tellement les parties de la baſe & de l'hypothenuſe, qu'il ſera enfin permis de compter pour rien la difference d'une des parties* mm *avec une des parties* nn, mais celui, qui en voudroit inferer de-là, que l'hypothenuſe AC deviendra égale à la baſe AB, ſe tromperoit entiérement. Vous voyez, Monſieur, qu'il faut encore autre choſe, pour prouver que la circonference du Polygone infinilateral devient égale à celle du Cercle : c'eſt qu'il faut faire voir, que non ſeulement la difference entre l'arc & la corde s'évanouit ; car cela arrive auſſi entre *mm* & *nn* ; mais que de plus la raiſon, qu'il y a entre l'arc & la corde, devient infiniment peu differente de la raiſon d'égalité ; ce qui n'arrive pas à la raiſon entre *mm* & *nn*, qui demeure conſtamment la même, en quelque grand nombre de parties, que ſoient diviſées les lignes AB & AC.

TAB. LXXXI. N°. CLXIX.

Pag. 8. Vous dites *que l'angle eſt ſans aucune épaiſſeur à ſa naiſſance.* Je n'ai jamais ouï parler de l'épaiſſeur de l'angle ; je ne ſais non plus ce que c'eſt qu'un *Angle naiſſant.* Les cotés d'un angle peuvent être naiſſants, lorſqu'ils deviennent finis, d'infiniment petits qu'ils étoient ; mais l'angle lui-même demeure toujours d'une même grandeur. Vous ne concevez, dites vous, point de lignes ſans largeur ; mais moi, au contraire, je ne conçois point de lignes avec largeur ; car, je vous prie, dites-moi, qu'eſt-ce que c'eſt qu'une ligne avec largeur ? C'eſt une chimère ; c'eſt une contradiction ; c'eſt comme ſi vous diſiez *c'eſt une ligne qui eſt ſurface*, ou, *c'eſt une ſurface qui eſt corps.* Je comprends bien, que vous voulez inſinuer, qu'il n'y a point de ligne géométrique, qui ſoit ſans largeur ; mais la poſſibilité, ou l'impoſſibilité de l'exiſtence ne doit pas règler nos idées. Je dois concevoir les choſes ſelon leur définition : or on définit la ligne, que c'eſt une grandeur, qui a une ſeule dimenſion. Je ne me mets pas en peine, ſi une telle grandeur peut exiſter, ou non ; ni ſi je la puis imaginer, ou non. Imaginer & concevoir ſont choſes differentes ; on doit concevoir une choſe, ſelon ce qu'elle eſt ; mais l'imagination ſe la repreſente, ſelon qu'elle frappe les ſens ; comme vous ſavez mieux que moi, vous, qui avez fait une ſi excellente Logique.

P. 11. au commencement, & dans la ſuite, vous parlez, Monſieur, *de multiplier AB par BC*, c'eſt-à-dire, un rectangle par une ligne ; & vous dites, *qu'on aura le rectangle BD*. Pardon, Monſieur, c'eſt là encore une façon de parler contre l'uſage des Géométres ; car vous ſavez que chez eux *multiplier un rectangle par une ligne, c'eſt faire un parallelépipede*, & non pas un autre rectangle. Il ne vous eſt pas inconnu, que dans l'Algébre on augmente les dimenſions par la multiplication, & on les diminue par la diviſion ; tellement que le produit eſt la ſomme des dimenſions des deux multiplicateurs, & le quotient la difference des dimenſions du dividende & du diviſeur. Il eſt vrai, que vous vous expliquez, ſur ce que vous entendiez par *multiplier le rectangle AB par la ligne BC*, en diſant, que c'eſt *placer ſucceſſivement AB ſur la ligne BC, autant de fois, que la baſe ſe trouve dans cette ligne* : cela va bien ; cependant les commençants & les foibles eſprits, qui ont appris à avoir des idées de ces multiplications & diviſions des dimenſions, ſelon la maniere ordinaire, pourroient ici ſe confondre, au lieu de s'éclaircir ſur les infiniment petits de tous les genres. Vous auriez peut-être mieux fait de vous exprimer ainſi : *Si on multiplie AB, par le nombre de fois que ſa baſe* Bm *ſe trouve dans la ligne BC, on aura le rectangle BDE*m : en parlant ainſi, vous ne vous ſeriez pas écarté de la maniere ordinaire de parler des Algébriſtes.

Vers la fin de la même page, vous concluez, ſans aucune reſtriction, que *ſi la hauteur E du rectangle AB étoit infinie, quoi-*

que la Baſe Bm *fut infiniment petite, ce Rectangle ne laiſſeroit pas d'être une quantité finie.* Pour moi je crois, qu'à parler généralement, cela ne peut pas être ſoutenu ; à moins qu'on ne ſuppoſe que la raiſon entre la hauteur E & la ligne BC eſt comparable à la raiſon entre la même ligne BC & la baſe B*m*. Car d'ailleurs, la premiere raiſon pourroit être infiniment, ou plus grande, ou plus petite, que la ſeconde raiſon. Ce que j'ay remarqué ſur la page 11, touchant votre maniere de multiplier, ſe doit auſſi entendre ſur ce que vous dites, page 13, des diviſions ; ainſi je n'approuve pas cette façon de parler, *le rectangle BD diviſé par le rectangle AB donne pour quotient la ligne BC* ; car la diviſion d'un rectangle par un autre rectangle donne pour quotient, non pas une ligne, mais un nombre. *L'infiniment petit*, dites vous au même endroit, *du premier genre AB, diviſé par l'infiniment petit du même genre* Bm, *donne pour quotient E un infiniment petit du ſecond.* Point du tout. Si les deux infiniment petits du premier genre ſont de grandeur homogéne, comme ligne & ligne, ou ſurface & ſurface, &c. que l'on peut exprimer par dx & dy ; alors la diviſion de l'une par l'autre [$\frac{dx}{dy}$ ou $\frac{dy}{dx}$] donne un nombre fini, bien loin de donner un infiniment petit du ſecond genre. Si l'un des infiniment petits du premier genre marque une ſurface [zdx], & l'autre une ligne dy ; alors la diviſion de celui-là par celui-ci [$\frac{zdx}{dy}$] donnera une ligne finie, & point-du-tout un infiniment petit du ſecond genre : ainſi des autres. Je ne ſaurois ſouffrir ce que vous ajoutez (pardonnez moi ma franchiſe) *que E, qui eſt une ligne, eſt infiniment petit en comparaiſon de AB*, qui eſt un rectangle. Dites moi, de grace, qui eſt celui de tous les Géometres, qui ait jamais comparé enſemble une ligne & un rectangle, qui ſont des grandeurs hétérogénes ? J'aimerois autant une comparaiſon entre le ſon & la couleur, ou entre un tems & un poids. Que diriez vous, Monſieur, ſi quelqu'un vous diſoit, que la longueur d'une aune eſt infiniment petite en comparaiſon de la longueur d'un ſiécle ? En vérité, votre comparaiſon ne va guéres mieux.

Vous continuez, dans la même page, vos locutions impropres, en prenant la baſe du Parallelépipede pour ſon infiniment petit, comme ſi un Rectangle, qui eſt une ſurface, pouvoit être l'élément d'un Parallelépipede, qui eſt un ſolide. Ce que vous dites, Monſieur, après cela ſur les multiplications & diviſions des infiniment petits de differens genres, n'eſt pas bien conforme aux idées que j'en ai; par exemple, à la page 14, vous voulez, que *ſi on diviſoit un infiniment petit du premier genre par un infiniment petit du troiſiéme, on auroit pour quotient un infiniment petit du ſecond, multiplié par un infiniment petit du premier.* Mais quant à moi, je prétens qu'une telle diviſion produiroit pour quotient une quantité infiniment-infinie, c'eſt-à-dire, infinie du ſecond genre; tant s'en faut que le quotient puiſſe être, comme vous dites, un infiniment petit du ſecond genre multiplié par un infiniment petit du premier. Voici ma preuve, ſans tant de façon de Rectangles & de Parallelépipedes. Soit a une ligne finie, adx un infiniment petit du premier genre, $dddy$ un infiniment petit du troiſiéme genre, il faut prouver que $\frac{adx}{dddy}$ eſt un infiniment grand du ſecond genre. Pour cette fin, ſoit $\frac{adx}{dddy}$ nommé z; donc $adx = zdddy$; donc $dx : dddy = z : a$. Or dx eſt infini-infiniment plus grand que $dddy$; donc auſſi z, qui eſt le quotient de la diviſion, ſera infini-infiniment plus grand que a, qui eſt une ligne finie; & partant z ſera un infiniment grand du ſecond genre. Ce qu'il falloit démontrer. C'eſt de cette maniere aiſée, qu'on peut déterminer toutes vos multiplications & diviſions de differens genres d'infiniment petits; enſorte, que je ne conçois pas pourquoi vous marchez par tant de détours, pour mener votre Lecteur à l'intelligence des differentielles, qui n'eſt pas à beaucoup près ſi difficile, que vous voulez faire accroire.

P. 15.

P. 15. au commencement de la page, vous faites derechef une comparaiſon entre des grandeurs hétérogènes, en diſant que *les lignes qui ferment un Triangle infiniment petit, ſont des grandeurs infiniment petites, en comparaiſon de la ſurface de ce Triangle.* Par ces paroles vous entendez ſans doute quelque choſe de different de ce que les termes ſignifient ordinairement; car vous remarqués fort bien vous même, à la page ſuivante, que *toute comparaiſon doit rouler ſur des choſes de même genre.* J'avoue donc que je ne comprens pas le véritable ſens que vous donnez à la ſuſdite comparaiſon, entre les lignes & la ſurface de votre Triangle. Comment voulez-vous donc qu'un Ecolier le comprenne? Outre cela l'aire d'un Triangle peut être infiniment petite, ſans qu'il ſoit beſoin pour cela que tous ſes trois côtés ſoient auſſi infiniment petits; car concevez par exemple un Triangle Iſoſcele, dont l'angle du ſommet ſoit infiniment aigu; vous voyez que l'aire en ſera infiniment petite, quand même les deux jambes ſont d'une grandeur finie.

P. 22. *ligne derniere*, il y a faute de calcul; car à la place de $+dx^2$ il faut écrire $-dx^2$. Cette faute, quoique legère, influe pourtant ſur ce qu'il y a à la page ſuivante, où vous dites, *donc* $dx^2 = dy^2$; *&* $dx = dy$; puiſqu'il faudroit conclure $-dx^2 = dy^2$, donc $dx\sqrt{-1} = dy$; c'eſt-à-dire une grandeur réelle égale à une imaginaire; ce qui jetteroit encore dans de plus grandes erreurs & contradictions, que celles que vous marqués. Cette même faute de calcul fait qu'il eſt faux ce que vous dites peu après; que dans les cas où dx ſeroit $= dy$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$. Il faudroit dire, que dans les cas, où $-dx^2$ ſeroit $= dy^2$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$: mais puis qu'il eſt impoſſible, que $-dx^2$ ſoit $= dy^2$, il faut conclure que ces cas ne peuvent pas arriver, où $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$; à ſavoir dans le ſens que vous le prenez. Ce que vous dites, dans le paragraphe ſuivant, participe encor de la même faute.

Voila, Monſieur, mes remarques, que je vous ai bien vou-

lu

lu communiquer, puiſque vous avez témoigné envie de les voir. J'eſpére que vous les prendrés en bonne part; d'autant plus que vous pouvez être aſſuré, que je ſouhaitterois de tout mon cœur, que vous m'euſſiez fait voir votre Commentaire en manuſcript, avant que de le faire imprimer, comme vous me l'aviez propoſé il y a quelques années: peut-être que mes Remarques ne vous auroient pas été inutiles. Je croi que mes avis vous feront aſſez connoitre, que vous auriez dû changer pluſieurs de vos manieres de commenter, & leur donner un autre tour; de peur que les ignorants, ou ceux qui haïſſent les nouveaux Calculs, ne prennent vos explications dans un mauvais ſens, & ne cherchent par là occaſion de décrier *l'Analyſe des infiniments petits*; ce qui ſeroit bien éloigné du but, que vous vous étes propoſé, en faiſant ce Commentaire.

Quant au reſte, Monſieur, vous me faites bien de l'honneur dans votre derniere lettre de reconnoitre & d'avouer, que cette *Analyſe*, que vous avez commentée, eſt moins l'ouvrage de Mr. le *Marquis* de l'HOPITAL, que le mien. Je veux bien croire, que vous parlés de la ſorte, non point par complaiſance, mais parce que vous en étes entiérement convaincu, par des preuves inconteſtables, qui ſont publiques. Vous en aurez un bon nombre dans les *Actes de Leipſic*, ſur tout dans ceux de l'Année paſſée, au mois de *Juin* ou dans celui de *May* [car je ne m'en ſouviens pas bien], où il y a une piéce d'un nommé Mr. BOURCARD*, dans laquelle on cite pluſieurs Lettres autentiques, qui ne laiſſent aucunement douter de la vérité du compliment que vous me faites dans votre Lettre, &c.

* N°. CXX, pag. 483, *Tom.* II.

REMAR-

N°. CLXX.

REMARQUES

Sur le Livre intitulé

Analyſe des infinimens petits, comprenant le Calcul integral, dans toute ſon étendue, &c.

Par Mr. STONE, de la Societé Royale de *Londres*.

Imprimé à Paris *en* 1735.

Sur le Diſcours Préliminaire.

Pag. 4. MR. LEIBNITZ *promettoit volontiers des Ouvrages... C'eſt dommage qu'il n'ait eu le tems d'en exécuter peut-être aucun, hors ſa* Théodicée, &c.

N'a-t-il donc rien donné que ſa *Théodicée*? Toutes les piéces qu'on a de lui, quoique détachées, ne composeroient-elles pas un gros volume, ſi on les ramaſſoit? Son *Codex Diplomaticus* eſt bien un gros Livre, ſi Mr. STONE en demande.

Ibid. *On peut douter ſi celui dont il s'agit ici* [l'Ouvrage que *Mr.* LEIBNITZ méditoit ſur la Science de l'infini,] *étoit mûr pour le tems auquel il le promettoit.*

Mais certes il n'eſt pas mûr pour Mr. STONE, qui ne donne, à ce qu'il paroit, que des choſes triviales.

Ibid. *Le Calcul différentiel etoit facile à éclaircir, ou même aſſez éclairci dès ce tems-là.*

Qui eſt-ce donc qui l'a éclairci, avant que je l'aye expliqué à Mr. De l'HOSPITAL? Où eſt-ce qu'on trouvoit ce calcul? Le Calcul exponentiel donné par moi, qui eſt-ce qui en avoit écrit quelque choſe? En trouvoit-on quelque choſe chez FERMAT, qu'on appelle ici *premier calculateur des infiniment petits.*

Pag. 5. *Mrs.* BERNOULLI *avoient ſuffiſamment remanié cette partie.*

Comme ſi quelqu'autre avant nous avoit déja manié cette partie.

 Ibid.

Ibid. *Le Calcul intégral.... étoit comme la partie propre de Mr.* NEWTON *& de cette Nation célèbre* &c.

Mr. NEWTON avoit-il alors rien donné fur le Calcul intégral? Quel mépris pour les non-Anglois! Nous les avons trouvé ces methodes, fans aucun fecours des Anglois.

Ibid. *Ce n'eft pas qu'il n'eut tranfpiré quelque lueur de ce Calcul reciproque des Fluxions. Mrs.* LEIBNITZ, BERNOULLI, DE l'HOPITAL *pouvoient bien, fans le fecours d'aucun autre, en avoir fait les premieres opérations, & pour le moins la règle inverfe du retour d'une différentielle à fon intégrale.*

Le grand NEWTON, ce profond Géométre, ne nous avoit rien communiqué, dans ce tems-là, de ce qu'il peut avoir gardé *in petto*; au-moins je ne lui fuis redevable de rien.

Pag. 6. *Le Calcul intégral ne va pas fans le fecours des Séries.... il faut developer* [les Problémes] *en Séries infinies.*

Il y a bien des occafions, où les Séries font inutiles, & où le Probléme fe refout mieux fans elles, que par elles.

Pag. 11. *Il eft peu d'efprits novices qui fans calcul puiffent franchir.... la* 47e. *Propofition du* 1er. *Livre* [d'EUCLIDE].

Y a-t-il rien de fi facile que d'entendre cette Propofition? Je ne vois pas ce que le Calcul peut contribuer pour l'entendre.

Pag. 15.... CHEYNE,.... TSCHIRNAUS ne devroient pas être comptés parmi ceux qui ont fécondé les antéceffeurs dans les calculs, eux qui ont commis d'horribles paralogifmes en fait de calculs.

Pag. 21. *A la* 250me. *page* [du Livre des Principes de Mr. NEWTON] *on trouve le fameux Lemme... qui contient le principe immediat du calcul.... des Fluxions.*

Ce fameux Lemme juftifieroit pourtant la prétenfion de Mr. LEIBNITZ; c'eft ce qui a fait que l'on a retranché ce Lemme, ou plûtôt ce Scholie, de la troifieme Edition, comme faifant trop d'honneur à de Mr. LEIBNITZ.

Ibid. DESCARTES *eft admirable..... pour l'avoir inventé* [le Calcul algébrique].

Mais

Mais les Anglois l'accufent de l'avoir pris de HARIOTTE.

Pag. 22 à la fin. NEWTON *étoit fur le point de fe voir enlever toute la gloire* [de l'invention du Calcul infinitefimal] *par Mr.* LEIBNITZ.

Mais Mr. LEIBNITZ avoit inventé par lui-même le Calcul différentiel, felon le propre aveu de Mr. NEWTON, qu'il fait dans fon Scholie. N'étoit-il donc pas jufte que Mr. LEIBNITZ fe foit attribué la gloire de fon invention.

Pag. 30. *Le Calcul n'eft qu'une petite partie de la Géométrie.*

Renverfons la Théfe, en difant que la Géometrie n'eft qu'une petite partie du Calcul; puifque le faifeur de la Préface dit lui-même que les Anciens ont trouvé tous leurs Théorémes par le Calcul.

Pag. 38. *La méthode.... de former des Corps..... n'a été dévelopée qu'à demi par le Calcul intégral.*

Ce n'eft pas la faute du Calcul intégral, mais celle de Mr. STONE, & des autres Héros, que l'on éléve dans cette Préface, qui n'ont pas bien fû manier le calcul.

Pag. 45. *Le Cylindre, la Sphére & le Cone, fuivant* ARCHIMEDE, *font dans le rapport des nombres* 3, 2, 1.

Cela n'eft pas; car ils font comme 9, 6, 4; c'eft-à-dire, en raifon continue de 3 à 2.

Pag. 68. *La forme des Polygones infcripts & circonfcrits de* Gregoire *de St.* VINCENT; *cette forme d'échelons, qui ne paroit rien, a été décifive pour la naiffance des nouveaux Calculs, le différentiel & l'intégral &c.*

Peut-être, tout cela feroit-il à naître encor, fi la méthode en étoit reftée aux Polygones parallèles d'ARCHIMEDE. Quelle haute idée des échellons du P. GREGOIRE! Dans le tems que nous approfondiffions les nouveaux Calculs différentiel & intégral, je ne favois pas encor qu'il y eut jamais eu un P. *Gregoire* de St. VINCENT, bien loin d'avoir vû fes échellons. L'Ecrivain de la Préface fe trompe bien, s'il croit que tout le fondement de nos nouveaux calculs confifte uniquement dans la confidération de ces échellons.

Ff 2 Pag. 80.

Pag. 80. Mr. HUGUENS.... *inférieur en ce point à* DESCARTES.

On a de bonnes raiſons pour l'eſtimer, en ce point, beaucoup ſupérieur à DESCARTES.

Pag. 82. *La circonférence eſt égale à la tangente de la Spirale.*

Ce n'eſt pas à la tangente, mais à la ſoûtangente de la Spirale que la circonférence eſt égale.

Pag. 83. *Pourquoi ne penſerions-nous pas en effet que la Quadrature du Cercle fut une choſe poſſible à trouver?*

Je répondrois, parce qu'on en peut démontrer l'impoſſibilité.

Pag. 85. DE LA FAILLE... *a fait voir que le centre de gravité d'un arc, ou ſegment circulaire étant donné, le cercle ſeroit quarré. C'eſt... une des belles découvertes particuliéres des derniers ſiécles.*

Il falloit ajouter que ce ſeroit une découverte fort mince dans le préſent ſiécle.

Ibid. *Cette poſſibilité* (de la quadrature du Cercle) *eſt démonſtrative, & l'impoſſibilité ſimplement préſumée.*

C'eſt tout le contraire.

Sur l'Analyſe des infiniment petits, comprenant le Calcul intégral.

Pag. 1. *On ne peut trouver les Intégrales exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes; qu'en faiſant diſparoitre, dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical; ce qui ſe fait par le moyen d'une Série infinie.*

Notre Géométre ne paroit pas être fort habile dans le Calcul integral; puis qu'il ne ſait pas la pratique d'intégrer grand nombre de quantites différentielles, exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes, ſans recourir à des Séries infinies. Ainſi, par exemple, $xdx : (aa+xx)^n$, ou $xdx \sqrt[n]{(aa+xx)}$ ſont intégrables ſans Séries, & une infinité d'autres. Pourquoi donc veut-il

veut-il qu'on faſſe auparavant diſparoitre dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical?

Pag. 2. Probléme 1. *Transformer* b: (a+x), *où* a *&* b *ſont des quantités connues, &* x *inconnue, en une Série infinie &c.*

On a mauvaiſe grace de nommer a & b connues, & x inconnue, au lieu de les nommer ici déterminées & indéterminées.

Ibid. *Juſqu'à-ce que le quotient ait* 4, 5, *ou* 6 *termes. Alors vous en pourrez preſque toujours trouver autant qu'il vous plaira, en conſidérant la ſuite progreſſive de ce quotient &c.*

Au contraire, cela eſt le plus ſouvent impraticable. On n'a qu'à prendre pour exemple celui qu'on donne pag. 4, vers la fin, $(2x^{1:2} - x^{3:2}) : (1 + x^{1:2} - 3x)$, dont la Série ſe trouve $2x^{1:2} - 2x + 7x^{3:2} - 13xx + 34x^{5:2}$ &c. On a ici cinq termes, mais comment peut-on voir la ſuite progreſſive, ſans continuer l'opération de la Diviſion?

Pag. 7. *Quelques exemples donneront l'uſage de ce merveilleux Théorême* [pour l'élevation d'un binome à une puiſſance quelconque].

Nous avons trouvé ce merveilleux Théorême, auſſi-bien que Mr. NEWTON, d'une maniere plus ſimple que la ſienne. Feu Mr. PASCAL a été le premier qui l'a inventée.

P. 8. & 9. *Exemples* 2. 3. 4. &c.

Tous ces exemples ne contiennent rien de clair, puiſqu'on ne ſauroit continuer les Séries, ſans continuer actuellement l'opération de l'extraction des Racines; ce qui eſt pénible.

Pag. 9. *Mr. de* MOIVRE *nous a donné dans les* Tranſactions Philoſophiques *le Théorême ſuivant, ſoit pour élever une Série infinie à la puiſſance donnée* m, *ſoit pour en extraire la racine.*

Comment Mr. STONE daigne-t-il citer une Etranger? Mais il auroit mieux fait de montrer la premiere ſource de l'invention de ce beau Théorême, plûtôt que de releguer ſon Lecteur à la démonſtration de Mr. de MOIVRE, contenue dans les *Tranſactions*. J'en ai trouvé une méthode fort facile, que j'ai communiquée à Mr. HERMAN, il y a bien 40 ans, ſans avoir jamais vu ce que Mr. de MOIVRE en a publié dans les *Tranſactions*.

Pag. 18. *L'Intégrale de* dx *eſt* x; *celle de* dx + dy *eſt* x + y: *l'intégrale de* xdy + ydx *eſt* xy; &c.

Les Intégrales ici marquées ne ſont pas exprimées dans toute leur étendue; il faut les augmenter ou diminuer d'une conſtante c; en diſant que l'intégrale de dx eſt $x \pm c$; celle de $dx + dy$ eſt $x + y \pm c$: l'Intégrale de $xdy + ydx$ eſt $xy \pm c$ &c. comme Mr. STONE le dit lui-même dans le *Scholie* p. 19.

Ibid. *D'où il eſt évident que la méthode inverſe des Fluxions, ou la méthode des intégrations, revient à celle de trouver la ſomme d'une Série.*

Il n'eſt pas néceſſaire, en pluſieurs occaſions, de recourir aux Séries; ſavoir toutes les fois que l'on peut trouver l'intégrale en termes finis, ſoit algébriques, ſoit exponentiels. La méthode d'intégrer conſiſte dans un algorithme, contenant des règles certaines pour parvenir à l'intégrale d'une différentielle donnée, ſi la choſe eſt faiſable. Il eſt comme de la méthode de trouver les racines d'une équation algébrique. On pourroit ſans doute auſſi trouver les racines par des Séries; mais ce ſeroit une grande folie, ſi quelqu'un vouloit ſe ſervir des Séries pour les racines, lorſqu'on ſeroit en état de les exprimer en termes finis. En un mot les Séries ne doivent être employées que dans la derniére néceſſité, lorſque les Régles ne ſont pas applicables.

Pag. 19. *Or* p *eſt une quantité donnée quelconque, qui peut répréſenter &c.*

Il falloit dire que p eſt une quantité conſtante, qui, dans les exemples n'eſt pas toûjours donnée, mais ſouvent il faut de l'adreſſe pour la trouver.

Ibid. *Dans les Intégrales nous nous ſervons des Séries infinies, lorſque nous ne pouvons pas les trouver exactement.*

C'eſt ce que j'ai dit; pourquoi donc recourir toûjours aux Séries, avant que de ſavoir ſi les intégrales ne peuvent pas être exprimées en termes finis?

Ibid.

Ibid. *Quand les expreſſions différentielles ne ſont point mêlées de quantités conſtantes*, &c.

Ajoutez, & que les coëfficiens ſont toujours égaux.

Pag. 20. *Par exemple* 2xdy &c.

Il veut écrire, je crois, $2xdx$, car $2xdy$ étant une différentielle incomplette, n'eſt pas intégrable; c'eſt ſans-doute une faute d'impreſſion.

Pag. 21 in fine & 22 in initio. *Enfin l'intégrale de* $\frac{1}{x}$ dx $=$ $1x^{-1}$dx, *ſera* $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} = \infty$.

Ainſi, ſelon Mr. STONE, $\int \frac{1}{x} dx$ ſeroit égal à une quantité véritablement infinie, au lieu qu'elle eſt égale au Logarithme de x. Ne ſait-il donc pas que cette infinité apparente marque ſeulement que l'intégrale n'eſt pas algébrique.

Pag. 30. *Je vais... ajouter un mot ſur l'excellente méthode de feu Mr.* COTES &c.

Nôtre compilateur n'a garde de dire, que j'ai publié dans les *Actes* de *Leipſic* le plus eſſentiel de cette excellente méthode, trois ans avant que le Livre de Mr. COTES fût rendu public; & cela ſur le defi que Mr. TAYLOR m'adreſſa: Voiez N°. CXIV, pag. 402, *Tom.* II.

Pag. 66. *Quarrer l'éſpace cycloidal.* &c.

Quel abus des Séries! On trouve bien l'aire ſans elles, & même très-ſimplement ſans calcul.

Pag. 68. *Par une autre proprieté de la courbe* [ciſſoïdale]

Mr. STONE ne donne, par cette maniere, que l'eſpace total aſymtotique de la Ciſſoïde; mais nullement de chaque partie APM. Voici comment je le trouve généralement. Soit C le centre du cercle, ſoit auſſi tiré le rayon CN & la corde AN; & je nomme le rayon CA $= r$, & partant le diamétre AB $= 2r$: L'équation de la Ciſſoïde ſera donc $2ryy - xyy = x^3$; par conſéquent $y = \sqrt{x^3} : \sqrt{(2r - x)} = xx : \sqrt{(2rx - xx)}$, & l'élément de l'eſpace cherché PMm, ou $ydx = xxdx : \sqrt{(2rx - xx)}$. Pour intégrer cela par la quadrature du cercle, je diſpoſe cette

TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 1.

quan-

quantité, en y ajoutant & retranchant, pour la rendre dépendante du cercle par parties, où il y en aura une d'abſolument intégrable. Voici le calcul. $\frac{xxdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{(-2rx + xx)dx}{\sqrt{(2rx - xx)}} + \frac{2rxdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} = -dx\sqrt{(2rx - xx)} + \frac{2rxdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} = -dx\sqrt{(2rx - xx)} - \frac{(2rr - 2rx)dx}{\sqrt{(2rx - xx)}} + \frac{2rrdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$. Or il eſt viſible que le premier terme $-dx\sqrt{(2rx - xx)}$ eſt la différentielle du ſegment ANP, le ſecond terme eſt la differentielle de $\sqrt{(2rx - xx)}$, ou de PN, multiplié, par $2r$, & le troiſiéme terme eſt la différentielle de l'arc AN multiplié par $2r$. Ainſi j'aurai l'aire APM ou $\int ydx$, ou $\int(xxdx : \sqrt{(2rx - xx)})$ $=$ ANP $-$ PN $\times 2r$ + l'arc AN $\times 2r$. Mais PN $\times 2r$ fait quatre fois le triangle rectiligne ANC, & l'arc AN $\times 2r$ fait quatre fois le ſecteur circulaire ANC; retranchez donc celui-là de celui-ci, il vous reſtera quatre fois le ſegment ANA Donc APM, ou $\int ydx = 4$ ſegm. ANA $-$ demi-ſegm. ANP. Or le demi-ſegment ANP eſt égal au petit ſegment ANA + le triangle rectiligne ANP. Donc enfin l'aire ciſſoïdale APM eſt égale à 4 ſegm. ANA $-$ 1 ſegm. ANA $-$ triang. rectil. ANP, c'eſt-à-dire $= 3$ ſegm. ANA $-$ triang. rectil. ANP. Ce qu'il falloit trouver.

Coroll. 1. Prenant x, ou AP $= 2r$, ou AB; le triangle rectiligne ANP s'évanouit; parce que ſa hauteur PN eſt nulle au point B; & le ſegment ANA dégénére en demi-cercle ANBA. Donc l'aire totale de l'eſpace ciſſoïdal eſt triple du demi-cercle générateur ANBA: cas unique, qui ſe trouve dans notre Auteur.

Coroll. 2. Si le point P eſt fort près de A, l'arc AN ſera comme une Parabole naiſſante, & partant le triangle rectiligne ANP ſera juſtement triple du petit ſegment ANA, parce que celui-là fait la moitié du rectangle circonſcrit, & celui-ci en fait la ſixiéme, par la nature de la Parabole. Ainſi donc l'aire naiſſante APM ſera $= 0$, c'eſt-à-dire, infiniment plus petite que le triangle infiniment petit APN, ou que le ſegment infiniment petit ANA. D'où il ſuit que la Courbe AM coincide au commencement avec la droite AB, c'eſt-à-dire, qu'elles ſe touchent au point A; tout comme l'équation de la courbe l'indique. Car il s'enſuit, qu'au commencement on a $2ryy = x^3$, & partant $2r : x = xx : yy$. Donc $2r$ ſurpaſſant infiniment x, auſſi xx ſurpaſſera infiniment yy. Donc AB touche la courbe au point A.

Pag. 70. Exemple XX. *Quarrer un eſpace quelconque ACMP de la Quadratrice &c.*

Il y a diverſes fauſſetés dans cette ſolution, car à la page 71, il n'eſt pas vrai que le ſinus em ſoit $= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. Ce qui eſt évident, puiſque ſi x, ou AP, ou Cm, eſt $= 0$, ſon ſinus em ſera auſſi $= 0$. Or dans ce cas la Série deviendroit $= 1$; comment donc peut-elle être $= 0$? Il faut donc ſavoir que $em = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ &c. Le Calcul bâti ſur cette fauſſe poſition ſera donc auſſi faux. Mais dans l'Analogie qu'il fait peu après, il redreſſe, ſans le ſavoir, ſon erreur, par une fauſſe opération; ainſi par une double erreur, il tombe par hazard ſur la véritable valeur de ydx. Avec tout cela il ne donne pas la quadrature par une expreſſion finie, comme nous en pouvons donner une, quoique les Logarithmes y entrent.

Pag. 79. *Trouver la longueur de la Spirale reciproque.*

Ni Mr. COTES, ni Mr. STONE n'ont point ſongé à cette courbe & à ſes proprietés avant moi †.

Pag. 103. *Ainſi* $\frac{p}{r}\mathrm{x\,dx}\sqrt{(\mathrm{ax} - \mathrm{xx})}$ *ſera l'élement du ſolide formé par ce mouvement* [de la Ciſſoïde autour de ſa baſe] *qui eſt égal à l'élement du premier ſolide qu'il faloit cuber ou meſurer. Donc le ſolide ciſſoïdal infini, formé ſuivant la révolution qui vient d'être dite, eſt égal au dernier ſolide formé par la révolution du demi-cercle générateur, autour d'une ligne droite parallèle à ſon aſymtote, paſſant par le point* A.

† Voiés N°. XC, pag. 552. ſeqq. *Tom. I.*

Il eſt très-vrai que ces deux ſolides totaux ſont égaux, mais il eſt ridicule de ne pas conclure généralement, que le ſolide ciſſoïdal, formé par la révolution d'une portion quelconque APM autour de l'aſymtote, eſt toûjours égal à l'autre ſolide formé par la révolution du ſegment circulaire APN autour d'une droite paſſant par A, & parallèle à l'aſymtote BH. La raiſon en eſt manifeſte, de ce que, par la nature de la Ciſſoïde, on a toujours $BP \times PM = AP \times PN$.

Pag. 106. $\frac{p}{12ar} \times (4yy + aa)^{3:2} =$ *à l'Intégrale de l'élement de la ſuperficie du Conoide parabolique.*

Mais en faiſant PM, ou $y = o$, auquel cas la ſuperficie du Conoide devient nulle, l'expreſſion trouvée ſe change en $\frac{p}{12ar} \times (aa)^{3:2}$, ou en $\frac{p}{12r}\, aa$; ainſi la veritable intégrale ſera $\frac{p}{12ar}(4yy + aa)^{3:2} - \frac{p}{12r}\, aa$.

Pag. 107. *Donnera...* $\frac{pady}{rbb}\sqrt{(b^4 + ccyy)}$, *quand AC ſurpaſſe BC; mais quand AC eſt moindre que BC, elle eſt* $\frac{pady}{rbb}\sqrt{(b^4 - ccyy)}$.

C'eſt-à-dire, que dans un Sphéroïde applati, ſa ſurface dépend de la quadrature de l'Hyperbole; mais pour le Sphéroïde allongé, ſa ſurface dépend de la quadrature du Cercle. Qu'eſt-il donc beſoin de tant conſulter les Tables de Mr. COTES?

Pag. 118. *Quand la Courbe* [la Ciſſoïde] *fait ſa révolution autour de la Baſe AB, Mr.* COTES *dans ſa* Harmonia Menſurarum, *donne la quantité de la ſuperficie formée. Mais l'opération eſt longue & difficile, les différentielles ne pouvant ſe rapporter directement à aucune de ſes Tables.*

Ainſi Mr. STONE avouë ſincèrement, qu'il eſt difficile de trouver la quantité de la ſuperficie en queſtion, puiſque la choſe ne peut ſe rapporter directement aux Tables de COTES. Voici

TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 1.

Voici ce que je trouve par ma méthode d'intégrer. Soit dans la Fig. AMI la Ciſſoïde, le diamétre du Cercle générateur, ou la baſe $AB = a$, une abſciſſe $AP = x$, l'appliquée $PM = y$, l'arc de la Ciſſoïde $= s$; la raiſon du raion à la circonférence, comme r eſt à p. Ainſi l'aire de la ſuperficie que décrit l'arc AM, par ſa révolution autour de AP, ſera $= \frac{p}{r}\int yds$; il s'agit donc de trouver $\int yds$, ou l'intégrale de yds, par une expreſſion qui ne contienne que a & x & leurs fonctions. Or je trouve, par ma dite méthode, que $\int yds = \frac{(2aa - ax)\sqrt{(4ax - 3xx)}}{2a - 2x} - \int \frac{2aadx}{\sqrt{(4ax - 3xx)}}$. Mais il eſt clair que $\int \frac{2aadx}{\sqrt{(4ax - 3xx)}}$ eſt égal à un ſecteur circulaire, que l'on conſtruit facilement; & le prémier terme eſt une quantité purement algébrique.

Pag. 122. Exemple 6. *Le centre de gravité eſt dans le rayon* AD, *qui coupe l'arc* BE.

Ajoutez, en parties égales.

Pag. 127. r *étant le demi-paramétre.*

Il faut que r ſoit le paramétre entier, pour que $\frac{1}{2}pxdx$ ſoit la différentielle des poids, & que $\frac{1}{2}pxxdx$ ſoit celle des efforts.

Pag. 129. Exemple 13. *D'où il ſuit que* $3a + 8b : 4a + 12b = a : \frac{3aa + 8ab}{4a + 12b}$.

Il faut renverſer les deux premiers termes, en faiſant $4a + 12b : 3a + 8b = a : \frac{3aa + 8ab}{4a + 12b}$.

Ibid. *Exemple* 14.

Beaucoup de confuſion régne dans cette ſolution; il ſeroit bien facile de la redreſſer; mais il ne vaut pas la peine de perdre le tems, en faiſant le calcul de ces choſes ſi triviales.

Ibid. *Exemple* 15. *Alors quand* PC *devient* x, *la différentielle des poids ſera* $\frac{pvydx}{2r}$.

Que veut dire, alors quand PC devient x? La différentielle

tielle des poids ne ſera-t-elle pas également $\frac{t y y d x}{2r}$, ſans que PC devienne x.

Pag. 131. Définition. *Le Centre de* percuſſion *ou d*'oſcillation *d'une figure &c.*

La Définition que donne Mr. STONE du *Centre de percuſſion*, donne une fauſſe idée de ce centre; car d'abord il ſuppoſe, ſans le démontrer, que le Centre de percuſſion & celui d'oſcillation ſont un même point; c'eſt en quoi il ſuit l'exemple de ſon Compatriote Mr. WALLIS, qui ne pouvant trouver la méthode de déterminer le Centre d'oſcillation, & voyant cependant que la régle de Mr. HUGUENS donnoit, en certains cas, le Centre d'oſcillation, au même point que lui WALLIS avoit aſſigné au Centre de percuſſion; il conclut d'abord, que ces deux Centres étoient un même point; & prétendit avoir été le premier Inventeur [par conſéquent avant Mr. HUGUENS] de la Théorie du Centre d'oſcillation. Mais pour faire voir qu'il n'y a aucune connexion néceſſaire, ni eſſentielle, entre ces deux Centres; il n'y a qu'à conſidérer ces deux choſes: 1°. La nature du Centre d'oſcillation dépend entiérement de la nature & de l'action de la peſanteur; au lieu que dans la Théorie du Centre de percuſſion, la peſanteur n'entre aucunement en conſidération, mais ſeulement la matiére & la viteſſe, quoique uniforme, de ſes parties: de-là il arrive, qu'un Pendule composé de pluſieurs corps de différentes denſités, agité dans l'air, a ſon Centre d'oſcillation différent de celui qu'il auroit, s'il étoit agité dans une liqueur, par exemple dans l'eau. Mais le Centre de percuſſion ſera le même dans l'air & dans l'eau. 2°. Au contraire, ſi les corps ſe meuvent dans un même milieu, le Centre d'oſcillation eſt quelque choſe d'abſolu & indépendant de toute rélation; au lieu que le Centre de percuſſion varie ſelon la diverſité de ſituation du corps choqué, enſorte qu'il y a une mutuelle dépendance entre les corps choquans & choqués.

P. 136.

Pag. 132. 133. 134. 135. Contenant les ſix premiers Exemples.

Ces ſix prémiers Exemples donnent bien la bonne ſolution, parce qu'ils ſont juſtement dans le cas où la fauſſe méthode de Mr. STONE, ou plutot de WALLIS, s'accorde, par accident, avec la vraye méthode; ce qui arrive toutes les fois que 1°. la figure qui choque eſt plane, 2°. qu'elle ſe meut autour d'un axe ſitué dans ſon plan, & 3°. qu'outre cela, la ligne frappante eſt auſſi dans ce même plan. J'appelle *ligne frappante*, la ligne droite, paſſant par le centre du mouvement, laquelle étant parvenue au point choqué, toute la figure s'arrête ſubitement ſur le point choqué. Ainſi ſi une ſeule de ces trois conditions manque, la prétendue méthode s'en va en fumée, & ne donne que de fauſſes ſolutions.

Pag. 136. 137. 138. Contenant les ſix derniers Exemples.

Ces ſix autres exemples ſont réſolus fauſſement en pluſieurs maniéres. Car 1°. on ne fait point d'attention à la ligne frappante. 2°. On prend tacitement, pag. 137, l. 5, & ſuiv. le côté du Cylindre pour la ligne frappante; auquel cas le Centre de percuſſion ne ſeroit plus le même que le Centre d'oſcillation, car celui-ci eſt toûjours dans l'axe du Cylindre. 3°. Quand même on prendroit l'axe du Cylindre, & des autres figures qu'on conſidére, pour la ligne frappante, le prétendu Centre de percuſſion ne coincideroit pas avec le Centre d'oſcillation; vû que Mr. HUGUENS trouve le Centre d'oſcillation dans toutes ces figures ſolides, choiſies par Mr. STONE pour exemples, plus éloigné du point de ſuſpenſion, que ne le donne Mr. STONE. Cela vient de ce que Mr. STONE ſupoſe fauſſement, que toutes les particules d'une tranche différentielle de la figure ſolide, ont une même viteſſe; ce qui eſt abſolument faux: vû qu'il eſt viſible, que les points plus éloignés du centre d'une tranche, ſont auſſi plus éloignés du point de ſuſpenſion, que les points plus proches du centre; par conſéquent que ces points-là auront auſſi plus de viteſſe.

Gg 3 Com-

Comment peut-il donc conſidérer chaque tranche circulaire, comme ayant une viteſſe égale dans toute ſon étendue?

Nôtre Auteur auroit mieux fait de ſupprimer entiérement ſa Section 7e. dont la matiére paroit être hors de ſa ſphére.

Pag. 139. Probléme 1er. *L'intégrale de chaque membre ſera* $x = y$. *D'où il ſuit que la ligne cherchée eſt l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, en regardant comme ſon axe la ligne coupant en deux cet angle droit.*

1°. Non ſeulement $x = y$, mais auſſi $x \pm a = y$, ſatisfait au Probléme. 2°. Je n'entends pas ce galimatias qu'on ajoûte, *en regardant comme ſon axe la ligne coupant en deux cet angle droit.* Eſt-ce que par ſon axe on veut entendre la ligne où ſont priſes les abſciſſes x? Si cela eſt, cet axe ſera la baſe du triangle rectangle, & par conſéquent ne coupera pas en deux l'angle droit. 3°. La ligne cherchée eſt à la vérité l'hypothénuſe d'un triangle rectangle iſoſcéle, mais non pas d'un triangle rectangle quelconque, comme Mr. STONE s'explique.

Ibid. Probléme 2e. $adx = 2ydy$, *& trouvant l'intégrale de chaque membre, on aura* $ax = yy$, *ainſi la courbe ſera la Parabole d'*APOLLONIUS.

Cela eſt vrai; mais il falloit intégrer plus généralement, en mettant $ax \pm ab = yy$; quoique cela donne encore la Parabole, il y a des cas, où ajoutant ou retranchant une quantité conſtante aux intégrales, cela change tout-à-fait la nature de la courbe. Comme, par exemple, $aaxdx = bbydy$; en intégrant à la maniére de Mr. STONE, on trouveroit $aaxx = bbyy$ c'eſt-à-dire, $ax = by$; ce qui donneroit une ligne droite pour la ligne cherchée; mais on ſe tromperoit, ſi on vouloit conclure qu'il n'y auroit point d'autre ligne qui ſatisfit à l'équation différentielle $aaxdx = bbydy$; puiſque la courbe, qui auroit pour équation $aaxx \pm abcc = bbyy$, & qui ſeroit une Hyperbole, ſatisferoit auſſi à la queſtion.

Pag. 240. Probléme 3e..... $2ax - xx = yy$.

Au lieu de $2ax - xx = yy$, on devroit écrire, par la raiſon ſuſdite, $2ax - xx = yy \pm ab$.

Ibid.

Ibid. Probléme 4e. *Ainſi* $dx = \frac{ady}{y}$, &c.

A quoi bon tout ce diſcours? Ne pouvoit-on pas dire tout-court, que la courbe cherchée eſt la Logarithmique ordinaire, dont les x, ou les abſciſſes, ſont priſes ſur l'aſymtote, & les y, ou les ordonnées, ſont les perpendiculaires ſur l'aſymtote.

P. 142. Scholie 2e. *Les nombres* $z - 1$ *&* $z + 1$ *ſeront égaux* &c.

Quelle obſcurité dans ce Scholie! Les nombres $z - 1$ & $z + 1$ ne différent-ils pas de deux unités, comment donc peuvent-ils être égaux?

Ibid. Probléme 6e. *Si un corps deſcend librement du point A, par le ſeul effet de la peſanteur, le long de deux plans inclinés AB, AC, aux points B & C; on demande la proportion des tems qu'il faut pour décrire ces eſpaces?* TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 2.

Tout le diſcours que fait Mr. STONE pour réſoudre ce chétif Probléme, eſt un tiſſu continu de Paralogiſmes, qui montrent évidemment qu'il n'a pas une idée nette de la Méchanique, Dynamique, Balliſtique, & de ce qui en dépend. Voyons quelques traits de ſes raiſonnemens contradictoires. Il ſupoſe deux plans AB & AC donnés de poſition; il prend AD & AE [en les nommant a & b] pour invariables; cependant il regarde DB & EC [qu'il nomme x & z] comme variables. N'eſt-ce pas une manifeſte contradiction? puiſque ſi AB & AC ſont données de poſition, & AD & AE de grandeur, ſans-doute DB & EC ſeront auſſi données de grandeurs. Il dit que $xdx : \sqrt{(aa+xx)} = Bb$, & $zdz : \sqrt{(bb+zz)} = Cc$; ce qui eſt très-abſurde: car le premier $xdx : \sqrt{(aa+xx)}$ marque la différentielle de la ſécante de l'angle BAD, prenant AD pour le rayon; & l'autre $zdz : \sqrt{(bb+zz)}$ n'eſt autre choſe que la différentielle de la ſécante de l'angle CAE, prenant AE pour le rayon.

A la fin de la page 142, & au commencement de la p. 143, il dit, *les viteſſes décrivant les petites parties* Bb, Cc, *étant regardées comme égales, qui ſont proportionnelles aux* $\sqrt{AD}$ [$\sqrt{a}$]

&

& a $\sqrt{AE}$ [$\sqrt{b}$]. Quelle étrange façon de parler ! Les viteſſes décrivant &c. Ce ſont les mobiles qui décrivent avec les viteſſes ; les viteſſes ne décrivent pas ; & ces viteſſes, comment peuvent-elles être égales, puiſqu'elles ſont proportionnelles aux $\sqrt{AD}$ & $\sqrt{AE}$, qui ſont inégales. Tout ce qui ſuit dans ce diſcours eſt un jargon inintelligible : Les Tables de Mr. COTES y entrent ſans néceſſité. Les Règles de GALILE'E montrent immédiatement que le tems par AB eſt au tems par AC, comme la racine quarrée de la troiſiéme proportionelle de AE à AC. A quoi ſert-il donc, le long & pénible raiſonnement de notre Auteur ?

Pag. 143. Probléme 7e. *Trouver la nature de la courbe BC, telle qu'un corps tombant. . . . parcourra en deſcendant en tems égaux des eſpaces égaux.*

Au lieu de dire des eſpaces égaux, il veut dire ſans-doute des hauteurs verticales égales : car les eſpaces à parcourir ſont les arcs de la courbe : or ces arcs parcourus en tems égaux, ne peuvent pas être égaux eux-mêmes, à cauſe de l'accélération ; étant viſible que plus le mobile eſt deſcendu, plus il aura de viteſſe, & parcourra par conſéquent un plus grand arc dans un tems donné. Ce Probléme au-reſte fut propoſé par Mr. LEIBNITZ ſous le nom de la Courbe Iſochrone, & il fut réſolu par pluſieurs perſonnes, il y a bien 50 ans. Si Mr. STONE a voulu montrer ſon habileté, il devoit donner la ſolution du Probléme de l'Iſochrone paracentrique, que j'ai réſolu & publié l'an 1694. *

P. 145. Probléme 8e. *Trouver la Loi de réfraction, en admettant ce principe que la nature ſuit dans ſes opérations les voies les plus ſimples & les plus courtes.*

Ce Probléme apartient purement & ſimplement au Calcul Différentiel ; auſſi ſe trouve-t-il dans l'*Analyſe des infiniment petits*, qu'on attribue à Mr. de l'HOPITAL, où il ne s'agit que du Calcul Différentiel : Que fait-il donc ici, où on prétend traiter du Calcul Intégral ? Mais au-reſte, ſuivant le Principe qu'on adopte ici, il faudroit que le rayon de lumiére al-

* N°. XIX, pag. 119. *Tom. I.*

lât

lât plus vite dans les milieux moins denſes : cependant on montre, par des vrais principes phyſiques, que c'eſt tout le contraire, & ſelon Mr. NEWTON même.

Pag. 146. Probléme 9e. *Trouver l'angle &c.*

Ce Probléme auſſi, [à-peine digne d'être propoſé aux commençants] qu'a-t-il à faire dans un traité du Calcul Intégral ?

Ibid. Probléme 10e. *Si un fluide* &c.

Ce Probléme, quoique un peu plus difficile, n'apartient pas non plus au Calcul Intégral.

Pag. 147, vers la fin. *Donc* $xx + \frac{bb}{aa}x = bb$. *Ainſi* $x = \frac{b}{a}\sqrt{(bb + xx)} - \frac{bb}{2a}$.

Que veut dire cela, que dans la valeur de x on faſſe entrer ſon quarré xx ? On devroit écrire $x = \frac{b}{2a}\sqrt{(bb+4aa)} - \frac{bb}{2a}$.

Pag. 148. *Coupés BC* [b] *en G*, &c.

Il veut dire qu'on doit couper BC en deux parties égales. Pourquoi parler ſi inexactement ?

Ibid. ſur la fin. *Par conſéquent* $dx = \frac{2\sqrt{a}.\,Nn}{2b}$. *Maintenant quand l'intégrale de* dx, *ſavoir* x, &c.

Tout ce qui ſuit, juſques-à la fin de la ſolution, eſt tout-à-fait ſuperflu. Car après avoir trouvé $dx = 2\sqrt{a}.\,Nn : 2b$, ne pouvoit-il pas conclure d'abord, donc $x = 2\sqrt{a}.\,HNB : 2b = 2\sqrt{a}.\,HNB : 2HB = ASB : 2\sqrt{AB}$ = quantité conſtante. Donc &c.

Pag. 149. Probléme 12e. *La ligne Loxodromique & la différence de Latitude de deux endroits étant données, trouver la différence de Longitude.*

On propoſe ce Probléme en général pour deux endroits quelconques : cependant la ſolution qu'on donne ne ſert que pour un cas particulier. Car on ſupoſe qu'un des deux endroits eſt dans l'équateur. Ainſi la ſolution ne ſatisfait point, lorſque les deux lieux donnés ſont hors de l'équateur.

 P. 150.

Pag. 150. *Il viendra* $dx = \frac{madr}{zz} = \frac{madr}{aa-rr}$; *& prenant les integrales, on aura* $BA[x] = m \times (\frac{r}{a} + \frac{r^3}{3a^3} + \frac{r^5}{5a^5} + \frac{r^7}{7a^7} + \&c.)$ $=$ *à la différence des Longitudes des lieux A & C.*

Qu'eſt-il beſoin de recourir à des Séries infinies, lorſqu'on peut donner l'intégrale par une expreſſion finie, claire, & élégante, que l'on peut conſtruire facilement par les Logarithmes, ou moyennant la Logarithmique. Voici comment. $\frac{madr}{aa-rr} = \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Donc $\int \frac{madr}{aa-rr} = \int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Or $\int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} = \frac{1}{2} ml(a+r)$, & $\int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r} = -\frac{1}{2} ml(a-r)$: par conſéquent $\int \frac{madr}{aa-rr} = \frac{1}{2} ml \frac{a+r}{a-r}$, ſuivant le calcul exponentiel. Nous n'avons donc que faire, ni de Séries, ni de la méthode de Mr. COTES. Voici maintenant ma ſolution générale, pour deux lieux donnés quelconques, que j'ai écrite, il y a plus de 30 ans, derriere mes Tables des Sinus & des Logarithmes, en ces termes latins. *Eſto radius ſphæræ* $= a$, *ſinus totus* $= c = 10000000$; *differentia Longitudinum duorum locorum, ſecundum æquatorem ſumta* $= b$, *tangens ſemi-diſtantiæ loci unius a polo proximo* $= m$, *tangens ſemi-diſtantiæ alterius loci ab eodem polo* $= n$, *& tangens inclinationis rhumbi ad quemlibet meridianum* $= p$: *ſubtangens Logarithmicæ ad Tabulas uſitatas Logarithmorum accommodatæ, ut calculus docet,* $= 4342945$. *Dico fore* $p = \frac{4342945bc}{(lm-ln)a}$.

Pag. 151. Corollaire. *D'où on tire PB* (a): Cc $=$ cd (dy): Cc (du) *Donc &c.*

Quel plaiſant calcul fait-on ici; pour trouver une choſe qui ſaute aux yeux, ſans calcul. On compare dans cette prétendue analogie PB, qui eſt une ligne finie, à C*c*, qui eſt infiniment petite, & on fait cette raiſon égale à la raiſon de *cd* à C*c*, qui eſt une raiſon finie. Comment donc peut elle être égale à la premiere raiſon, qui eſt infinie? Ne pouvoit-on pas dire tout-court: Puiſque *c*d eſt à C*c* en raiſon conſtante donnée, donc auſſi l'intégrale de *c*d, c'eſt-à-dire AD, différence de Latitude, eſt à l'intégrale de C*c*, qui eſt AC, longueur de la Loxodromique, comme *c*d eſt à *c*C, ou comme le rayon eſt à la ſécante de la ligne Loxodromique?

Ibid. Probléme 13, à la fin du ſecond paragraphe, *AF* [a]: $Ff[\frac{adz}{y}] = AQ[\frac{ab}{z} - a]$: $Qs = \frac{abdz}{zy} - adz$; *de la même maniere* $Pn = \frac{abdz}{zy} + adz$.

Il faloit dire, en vertu de cette analogie, que $Qs = \frac{abdz}{zy} - \frac{adz}{y}$, & que $Pn = \frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y}$.

Pag. 152. lign. 6. $(\frac{by}{z} + y) \times (\frac{by}{z} + y)$.

Au lieu de cela il faut écrire $(\frac{by}{z} + y) \times (\frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y})$.

Ibid. lign. 7 & 8, *& l'élement de ces deux différentielles ſera* $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz) =$ *à la différence de la ſomme des deux ſolides produits par les eſpaces* cQGB, BGPC.

Il n'eſt pas vrai que l'élement de ces differentielles ſoit $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$; car il eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aab^3dz}{z^3} + \frac{2aabdz}{z})$; mais on veut dire que la différence de ces deux differentielles eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$.

Ibid. lign. 11. *eſt la differentielle de la* $\frac{1}{2}$ *de la ſomme, dont l'intégrale ſera* &c.

Je ne vois pas pourquoi Mr. STONE veut ſeulement la moitié de l'intégrale, pour avoir le ſolide; il me ſemble qu'il faut l'intégrale entiere $\frac{p}{r} \times (\frac{2aabb}{z} - \frac{2}{3}aaz)$; ou plutôt [car il

 n'ob-n'obſerve pas les ſignes] $\frac{p}{r} \times (-\frac{2aabb}{z} + \frac{2}{3}azz)$: Par cette raiſon, il faudroit changer les nombres dans tout le reſte qui ſuit, & écrire finalement $\frac{p}{r} \times \frac{-2aabbx - \frac{2}{3}a^3x + \frac{2}{3}aaxx}{a - x}$. Pour ce qui eſt des ſignes; il faut peut-être les laiſſer, comme ils ſont dans le Livre, mais c'eſt de plus haut qu'il faut commencer à examiner le calcul.

Pag. 153. 154. Juſqu'à la fin.

On ne ſauroit prendre la peine d'examiner tout ce long raiſonnement, après que nous en avons aſſez pris pour examiner tout ce qui précéde: quoiqu'il en ſoit, on feroit le calcul beaucoup plus aiſément, en ſuivant nôtre route.

Pag. 155. Probléme 14. *Trouver la nature d'une courbe AMC, telle que ſi on conçoit une vaſe formé par ſa révolution.... rempli d'eau, qu'on ſuppoſera couler par un petit trou rond, percé dans le fond..... la ſurface de l'eau deſcende par des eſpaces égaux en tems égaux; ſuppoſant que la viteſſe de l'eau qui ſort par le trou, ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou.*

Ce Problême eſt purement algébrique, ne demandant ni à différentier, ni à integrer; car pour que la ſurface deſcende par des eſpaces égaux en temps égaux, il faut que ſa viteſſe ſoit uniforme. Or la ſurface de l'eau eſt à la ſurface du trou, reciproquement comme la viteſſe par le trou eſt à la viteſſe de la deſcente de la ſurface, c'eſt-à-dire $yy : b = \sqrt{ax} : \frac{b\sqrt{ax}}{yy}$. Ainſi $b\sqrt{ax} : yy$ ſera la viteſſe de la ſurface; laquelle devra être uniforme, & partant conſtante: faiſant donc $b\sqrt{ax} : yy = c$, cela nous donnera $abbx = ccy^4$, ou $abbx : cc = y^4$; qui eſt pour la Parabole quarrée-quarrée.

Mais la ſuppoſition que l'on fait, ſavoir que la viteſſe de l'eau par le trou ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou, eſt fauſſe; n'ayant lieu que quand le trou ſeroit infiniment petit: ce qu'on ne peut pas ſuppoſer ici: autrement la ſurface de l'eau ne deſcendroit ſenſiblement qu'en

qu'en un tem nfini. La véritable ſolution de ce Probléme, & de tous le utres ſur le mouvement des eaux, n'a encore été publiée pa perſonne, ni même par Mr. NEWTON; & tout ce que l'c en a ſont de purs paralogiſmes: Nous en donnerons avec le tems la véritable Théorie. *

Pag. 155. Probléme 15. *Si AC eſt une ligne horizontale, ſur le point C de laquelle eſt elevé un Parallelépipede CD, dont une des ſurfaces ſoit perpendiculaire à la ligne AC: il s'agit de trouver l'angle CAB ſur le point A, duquel angle ſuppoſant poſée l'extrémité A d'un long ſolide AB; de maniere qu'avec ſon autre extremité B, il vienne preſſer le Parallelépipede CD, ce ſolide comprimera perpendiculairement CD avec plus de force au point A, qu'en tout autre point.* TAB. LXXXI. N°. CLXX. Fig. 3.

Si l'énoncé de ce Probléme, qui appartient ſeulement au Calcul direct Différentiel eſt obſcur, la Solution ne l'eſt pas moins. Si je le conjecture bien, je crois qu'on demande la poſition du corps peſant AB, entre la verticale CD & l'horizontale CA, qui ſoit telle que la verticale CD ſouffre le plus de force, pour être preſſée en arriére dans la direction horizontale.

SOLUTION.

Soit le poids du corps, ramaſſé au centre de gravité F, nommé p; AF, b; AB, a; BC, x. Ce poids p agiſſant ſuivant la direction verticale FE, il faut décompoſer la force en FI & IE. Celle de FI eſt ſoutenuë par l'obſtacle mis en A, & l'autre ſuivant IE fait effort pour tourner le levier AB autour de A, mais elle eſt empêchée par l'oppoſition du plan CD. Ainſi cet effort appliqué en F eſt $= \frac{EI}{EF}p = \frac{AC}{AB}p = \frac{p\sqrt{(aa-xx)}}{a}$. Et le moment de cet effort en F $= p.\ AF.\ \sqrt{(aa-xx)} : a = pb\sqrt{(aa-xx)} : a$. Faiſant maintenant $AB : AF = \frac{pb\sqrt{(aa-xx)}}{a} : \frac{pbb\sqrt{(aa-xx)}}{aa}$ = à la force avec laquelle le plan CD eſt pouſſé ſuivant HB: il

* Voiés N°. CLXXXVI.

il faut la decompofer en HG & GB: celle-ci pouffe CD de haut en bas, mais l'autre fuivant HG, fera perpendiculaire à CD, & fera $= pbbx\sqrt{(aa - xx)} : a^3$; c'eft donc de celle-ci, ou fimplement de $x\sqrt{(aa - xx)}$, qu'il faut faire le *maximum*, & non pas de $xx\sqrt{(aa - xx)}$; comme le pretend Mr. STONE. Si on fait le calcul, on trouvera que $x = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, & partant que l'angle CAB fera demi-droit, ou de 45°.

Pag. 156. Probléme 16. *Trouver &c.* [la courbe de la plus vite defcente].

Notre Auteur ne dit pas que je fuis le premier qui ait réfolu & propofé ce Probléme, & moins encore dit-il que la Solution qu'il a donnée eft prife de mon Frere. Pour cacher fon plagiat, il croit être à couvert & deguifer la méthode de mon Frére, en employant d'autres lettres, & en fe fervant d'autres façons d'exprimer la chofe; comme, par exemple, lorfqu'il dit (pag. 157, vers la fin) *la difference de la courbe eft toujours comme* $dx : y^{\frac{1}{2}}$, *c'eft-à-dire en raifon directe de la difference de l'abfciffe* AH [x], *& en raifon reciproque & foufdoublée de l'ordonnée* HE [y]. Au lieu que mon Frére avoit dit fimplement, que la nature de la courbe confifte en ce que $dx : \sqrt{y}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ doit être conftant, ou $= 1 : \sqrt{a}$.

Pag. 157. *On trouvera, que la courbe qui a cette proprieté* [de la plus vite defcente] *eft la Cycloïde, paffant &c.*

Il ne fuffit point de dire, *On trouvera*; il faloit faire voir en effet comme on le trouvera, & cela par une analyfe, & non pas *a pofteriori* par une demonftration; parce que cela fuppofe qu'on fait deja que c'eft une Cycloïde. Il ne fuffit pas non plus de dire que la Cycloïde paffe par les deux points; il faloit de plus montrer par l'analyfe, que le point fuperieur eft néceffairement au commencement de la Cycloïde renverfée.

Ibid. vers la fin, *On fuppofe* [les points] *A & B, pofés de façon, que* ACD *foit une demi-Cycloïde.*

Cette fuppofition eft puerile, en ce qu'elle reftreint la Propofition generale à un cas particulier; comme fi le point inférieur donné B devoit néceffairement être au fommet de la Cycloïde renverfée: au lieu qu'il peut être dans un endroit quelconque de la Cycloïde, tantôt au delà du fommet, tantôt en deça, felon que le hazard l'a placé.

Pag. 158. *PQ* [$\sqrt{(ay - yy)}$]: *BP* [$\sqrt{(aa - yy)}$] $=$ *CL* [dx], *CE* $= \frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{dx.\sqrt{a}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}}. = \frac{dx.\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, *laquelle expreffion eft comme* $\frac{dx}{y^{1:2}}$; $\sqrt{a}$ *étant donnée. Donc la Cycloïde &c.*

Quel honteux paralogifme, pour un Géometre tel que le nôtre! Car il eft faux que $\frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}}$ foit $= \frac{dx\sqrt{a}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}}$. Nous autres Géometres du commun, aurions fait

$$\frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}}{\sqrt{y}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}}{y^{1:2}}.$$

Cependant il femble que Mr. STONE trouve, nonobftant fon paralogifme, ce qu'il veut trouver, favoir $\frac{dx}{y^{1:2}}$ proportionel à la differentielle de la courbe: mais loin de-là, ce n'eft que par accident qu'il le trouve, par une autre faute qu'il commet, & qui redreffe la premiere. C'eft qu'il fait BP $= \sqrt{(aa - yy)}$, au-lieu de faire BP $= \sqrt{(aa - ay)}$, étant moyenne proportionelle entre KB [a] & BA [$a - y$]. Ainfi pour corriger la double erreur de Mr. STONE; il n'y-a qu'à écrire $\sqrt{(aa - ay)}$, en place de $\sqrt{(aa - yy)}$, qui fe trouve deux fois dans la même ligne de la page 158.

Pag. 158. Probléme 17. *Trouver la nature &c.* [du Solide de moindre refiftance].

Il examine ici le Solide rond de la moindre refiftance. Mais, à la premiere infpection, je vois que tout ce qu'il y a de bon eft qu'il a emprunté de moi la méthode. On le voit en confrontant fa Figure 81 avec la Figure apartenant à la piéce que j'ai publiée dans les *Actes de Leipfik*, *1699* * au mois de *Novembre*, où j'ai expofé la méthode & le fondement fervant à réfoudre le Pro-

* N°. LIV. pag. 307, & N°. LVI. pag. 315, *Tom. I.*

Probléme en question. Et pour ce qui est du calcul même, que Mr. STONE employe; il paroit entiérement copié de celui de feu Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL. Pour en être convaincu; il n'y-a qu'a lire la piéce de Mr. de L'HOSPITAL, qu'il donna dans la même année au mois d'*Août*. †

Pag. 161. Probléme 18. *Trouver l'angle ABC, que forme le plan d'une aile de moulin à vent*, &c.

Ce Probléme est un de ceux qui ne dépendent nullement du Calcul Intégral. Mr. STONE ne cite que Mr. MARIOTTE, qui l'a mal resolû, & Mr. PARENT, dont, à ce qu'il dit, il n'a point vû la Solution. Mais ne pouvoit-il pas aussi citer Monsieur HUGUENS qui l'a très bien résolu. De plus, ne pouvoit-il pas citer ma *Manœuvre des Vaisseaux* *. Car pag. 51, je donne une règle, pour déterminer l'angle que doit faire le gouvernail avec la quille, pour que le Vaisseau tourne le plus promptement qu'il est possible, qui est le même que celui que doit former l'aile du moulin à vent avec l'axe, pour faire tourner le moulin avec le plus de force qu'il soit possible.

† N° LV. pag. 311, *Tom. I.*
* N°. XCI. pag. 40, 41, *Tom. II.*

OPTICA

N°. CLXXI.

OPTICA.

I.

PROBLEMA OPTICUM.

Datis tribus objectis AB, CD, EF, inæqualium longitudinum, in eadem recta RS sitis, datisque intervallis BC, DE a se invicem sejunctis; invenire locum oculi O, ex quo tria ista objecta videat ejusdem magnitudinis apparentis.

SOLUTIO.

Ex puncto O intelligatur demissa perpendicularis OR, & dicantur AB $= a$, CD $= b$, EF $= c$: Item intervallum BC, quo distat objectum primum a secundo $= m$, & intervallum BE quo distat objectum primum a tertio $= n$. Sintque OA $= x$, OB $= y$, OC $= z$. Quia tres anguli AOB, COD EOF debent esse æquales; erunt areæ triangulorum, ut AO × BO, CO × DO, EO × FO. Sunt quoque, ob communem verticem O, ut bases AB, CD, EF. Attendamus primo ad duo priora triangula AOB, COD, ubi habebimus AB [a]: CD [b] $=$ AO × BO [xy] : CO × DO $= \frac{bxy}{a} = z \times$ OD; quare OD $= bxy : az$. Porro quia, addito communi angulo BOC, habetur AOC $=$ BOD, erit etiam AC [$a+m$]: BD [$b+m$] $=$ AO × CO [xz] : BO × DO $= \frac{b+m}{a+m} xz$; cum itaque BO sit $= y$, erit etiam OD $= (b+m)\, xz$: TAB. LXXXI. N°. CLXXI Fig. 1.

$(a+m)y$; adeoque $(b+m)xz : (a+m)y = bxy : az$; unde elicitur z, vel $OC = y\sqrt{((ab+bm):(ab+am))}$. Et valore hoc ſubſtituto in $bxy : az = OD$, erit $OD = x\sqrt{((bb+bm):(aa+am))}$.

Simili modo inveniuntur OE & OF, ſcribendo tantum c pro b, & n pro m; prodibitque $OE = y\sqrt{((ac+cn):(ac+an)}$ & $OF = x\sqrt{((cc+cn):(aa+an)}$.

Ut nunc habeantur duæ æquationes inter x & y, ad eorum valores determinandos; obſervo, quod $AR = (BO^2 - AO^2 - BA^2) : 2BA = (yy - xx - aa) : 2a$; adeoque $BR = (yy - xx - aa) : 2a + a = (yy - xx + aa) : 2a$. Sed & idem $BR = (CO^2 - BO^2 - CB^2) : 2CB = (byy - ayy) : (2ab + 2am) - \frac{1}{2}m$; unde emergit hæc prima æquatio $(yy - xx + aa) : 2a = (byy - ayy) : (2ab + 2am) - \frac{1}{2}m$.

Pari ratione $BR = (EO^2 - BO^2 - EB^2) : 2EB = (cyy - ayy) : (2ac + 2an) - \frac{1}{2}n$; unde hæc altera æquatio $(yy - xx + aa) : 2a = (cyy - ayy) : (2ac + 2an) - \frac{1}{2}n$. Æquatio prior dat $yy = (xx - aa - am) \times (b+m) : (a+m)$. Poſterior vero dat $yy = (xx - aa - an) \times (c+n) : (a+n)$. Hinc igitur $(xx - aa - am) \times (b+m) : (a+m) = (xx - aa - an) \times (c+n) : (a+n)$. Brevitatis gratia ponatur $a+m = d$, $b+m = e$, $a+n = f$, $c+n = g$; Erit $(xx - ad)e : d = (xx - af)g : f$, hoc eſt $(exx - ade) : d = (gxx - afg) : f$; multiplicando per crucem $efxx - adef = dgxx - adfg$; ex cujus reductione invenitur $xx = (adfg - adef) : (dg - ef)$; hocque ſubſtituendo in alterutro valore ipſius yy [eſt enim perinde] provenit $yy = (aefg - adeg) : (dg - ef)$. Ergo tandem $x = \sqrt{((adfg - adef) : (dg - ef))}$, & $y = \sqrt{((aefg - adeg) : (dg - ef))}$. Q. E. I.

COROLL. I.

Hinc etiam reliquæ CO, DO, EO, FO determinantur. Eſt enim (ut ſupra inventum) $OC = y\sqrt{((ab+bm):(ab+am)} = y\sqrt{(bd : ae)} = \sqrt{((bdfg - bddg) : (dg - ef))}$; $OD = x\sqrt{((bb+bm):(aa+am))} = x\sqrt{(be : ad)} = \sqrt{((befg - beef) : (dg - ef))}$; $OE = y\sqrt{((ac+cn):(ac+an))} = y\sqrt{(cf : ag)} = \sqrt{((ceff - cdef) : (dg - ef))}$; $OF = x\sqrt{((cc+cn) : (aa+an))} = x\sqrt{(cg : af)} = \sqrt{((cdgg - cdeg) : (dg - ef))}$.

COROLL. II.

Sub hac generali Solutione continentur ſinguli caſus particulares. Ex. gr. ſi duo ex objectis, vel omnia tria eſſent contigua; nihil aliud agendum eſſet, quam ſupponere tantum BC ſeu $m = 0$, & BE, ſeu $n = CD = b$. Atqui ita foret $d = a$, $e = b$, $f = a+b$, $g = c+b$. Quibus igitur ſubſtitutis, in generalibus linearum valoribus, prodiret x ſeu $OA = \sqrt{((adfg - adef) : (dg - ef)} = a\sqrt{((ac+bc) : (ac - bb)}$; y, ſeu BO, ſeu [quia cum ea in hoc caſu congruit] $CO = \sqrt{((aefg - adeg) : (dg - ef))} = b\sqrt{((ac+ab) : (ac - bb)}$; DC, ſeu [quæ hic eadem eſt] $EO = \sqrt{((ceff - cdef) : (dg - ef))} = b\sqrt{((ac+bc) : (ac - bb))}$; $FO = \sqrt{((cdgg - cdeg) : (dg - ef))} = c\sqrt{((ac+ab) : (ac - bb))}$. Quæ omnia rite conſentiunt cum Solutione hujus caſus, per methodum particularem inventa.

****

II.

PROBLEMA DIOPTRICUM GENERALE,

Quod comprehendit omnia Huygeniana *circa lentes.*

Data lente ABCD, cujus axis EBDF, & puncto radiante M; invenire ejus focum, ſeu punctum G, in quo radii MH incidentes, poſt duplicem refractionem in H & I perpeſſam, concurrent. TAB. LXXXI. N°. LXXI. Fig. 2.

SOLUTIO.

TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 2. Eſto ſinus anguli incidentiæ ex aëre in vitrum ad ſinum anguli refractionis, ut m ad n; F centrum ſuperficiei ſuperioris ABC; E centrum ſuperficiei inferioris ADC. Pro conceſſo aſſumatur angulos infinite parvos, ſeu valde acutos, eſſe ut eorum ſinus.

Vocetur angulus incidentiæ MHO $= m$, & angulus refractionis primæ FHI $= n$; angulus radiationis HMB $= a$; diſtantia puncti radiantis M a lente, hoc eſt, MB $= d$. Erit, producta IH donec axi occurrat in N, ang. N $= a - m + n$, ang. F $= m - a$. Dicatur porro ang. E $= b$, erit ang. EIN $=$ E $-$ N $= b - a + m - n$. Eſt vero EIN : LIG $= n : m$; hinc LIG $= (mb - ma + mm - mn) : n$; ang. G $=$ LIG $-$ E $= (mb - nb - ma + mm - mn) : n$. Sit radius ſuperficiei inferioris ADC, hoc eſt ED $= p$; radius ſuperioris, hoc eſt FB $= q$; erit HF : HM ſeu BM $= a : m - a$, hoc eſt, $q : d = a : m - a$; unde $da = mq - aq$, ideoque $a = mq : (d + q)$. Præterea, quia craſſities lentis BD, multoque magis HI, infinities minor ſupponitur amplitudine arcus ID, qui & ipſe infinities minor habetur diſtantia finita ME, punctum I cenſeri poteſt in H, adeoque EIM tanquam triangulum; hinc ergo $b : a =$ MI, vel MH, vel MB : EI $= d : p$; hinc $b = ad : p =$ [ſubſtituto valore ipſius a] $mqd : (pd + pq)$. Surrogatis itaque valoribus ipſarum a & b in valore anguli G, qui inventus eſt $= (mb - nb - ma + mm - mn) : n$, obtinebitur G $= (mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq) : (npd + npq)$. Tandem G : E $=$ EI : GI $=$ ED : GD, hoc eſt $\frac{mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq}{npd + npq} : \frac{mqd}{pd + pq} = p :$ GD. Reperitur itaque

$$GD = \frac{npqd}{mqd - nqd + mpd - npd - npq}.$$

ORDRE

****

III.

ORDRE DU CALCUL

Pour la détermination des Iris ou Arc-en-Ciels de toutes les Claſſes.

SOit AMRTV le grand cercle d'une boule de matiere tranſparente, repréſentant un de ces globules aqueux, qui rempliſſent l'air, dans le tems qu'on y voit un Iris. BA, BM, Bm ſont des rayons ſolaires, conſiderés comme venant d'une diſtance infinie, par conſéquent comme paralleles; dont celui BA, qui prolongé paſſe par le centre B, ſera nommé *l'axe des rayons.* Les autres BM, Bm, prolongés en S, s, ſont les rayons incidents obliquement, qui à l'entrée dans la boule ſe rompant vers les perpendiculaires CM, Cm, donnent les rayons rompus MR, mr, leſquels ſont réflechis, autant de fois que l'on voudra, ſavoir MR en RT, RT en TV &c. Et mr en rt, rt en tu &c. pendant qu'une partie de chacun de ces rayons ſort de la boule à la rencontre du point de réflexion. TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 3.

Il faut remarquer, que pour qu'un Iris d'une certaine claſſe s'engendre, il y a un certain point M ſur lequel le rayon BM tombant, & tous les autres infiniment proches Bm entrant enſuite dans la boule, dont, après autant de réflexions qu'il en faut pour l'Iris de cette claſſe, ils ſortent parallelement VP, vp, comme ils y étoient entrés parallelement BM, Bm. Tous les autres rayons ſolaires qui tombent ſur des point différents de M, m, en deça ou en delà, ſortiront après le même nombre de reflexions non parallelement, & ſe diſperſeront. Ce qui fait que l'œil placé dans la direction VP, vp, on verra ſur Vv l'image du Soleil ſous une certaine couleur convenable à la nature de la réfraction du rayon BM en MR, & de Bm en mr. C'eſt en quoi conſiſte l'apparition d'un Arc-en-ciel; ſuppoſé

 que

que l'œil en ſoit aſſés ſenſiblement frappé ; quoique, en vérité, les yeux des hommes ne ſoient pas aſſés ébranlables, pour s'appercevoir des Iris, qui ſont au de-là de la ſeconde Claſſe : peut-être que les Aigles, les Linx, ont les yeux plus vifs, plus perçants pour les voir. Quoiqu'il en ſoit, voici la méthode générale pour déterminer le point M, pour telle ſorte d'Iris que l'on voudra ; ce point trouvé, il eſt aiſé de déterminer la demi-largeur de l'Iris, c'eſt-à-dire, l'angle que fait PV prolongé avec l'axe AC, ou le rayon BM, prolongés.

D'abord, il eſt clair que toutes les cordes MR, RT, TV &c. ſont égales entr'elles ; comme le ſont auſſi les cordes mr, rt, tu, &c. à cauſe de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion. Soit CA le ſinus total $= 1$, CE perpendiculaire ſur MS, prolongement de BM, ou le ſinus de l'arc $AM = x$, l'arc $\mathrm{M}m\mathrm{R} = \mathrm{R}r\mathrm{T} = \mathrm{T}v\mathrm{V} = A$, l'arc $m\mathrm{R}r = rt = t\mathrm{T}v = B$; le nombre de réflexions en R, T, &c. ou le nombre quantiéme de l'Iris qu'on veut déterminer $= N$: on aura l'arc total $\mathrm{MRTV} = (1+N)\times A$, & l'arc total $mrtu = (1+N)\times B$. Donc la différence de ces arcs totaux, c'eſt-à-dire, $\mathrm{M}m + \mathrm{V}v = (1+N)\times A - (1+N)\times B = (1+N)\times(A-B) = (1+N)\times(\mathrm{M}m - \mathrm{R}r)$. Or, parce que les rayons RM, rm [s'ils rebrouſſoient] ſortiroient parallelement en MB, mB, comme leurs égaux TV, tv doivent ſortir parallelement en VP, vp ; il faut que la figure $\mathrm{M}m\mathrm{R}r$ ſoit parfaitement égale & ſemblable en tout à la figure $\mathrm{V}v\mathrm{T}t$; donc $\mathrm{M}m = \mathrm{V}v$, & $\mathrm{R}r = \mathrm{T}t$. Ainſi nous aurons $2\mathrm{M}m = \mathrm{M}m + \mathrm{V}v = (1+N)\times(\mathrm{M}m - \mathrm{R}r) = (1+N)\times \mathrm{M}m - (1+N)\times \mathrm{R}r$; ce qui nous donne $\mathrm{M}m\times(N-1) = (1+N)\times \mathrm{R}r$, & partant $N+1 : N-1 = \mathrm{M}m : \mathrm{R}r =$ [par la nature du cercle] $\mathrm{MF} : \mathrm{F}r$ ou FR ; donc *componendo* $2N : N+1 = \mathrm{MR} : \mathrm{MF}$; donc $\mathrm{MF} = \frac{N+1}{2N}\mathrm{MR}$; cela veut dire, que le point cherché M doit être là, où MF, partie du rayon rompu compriſe entre le point de réfraction M & la cauſtique, ſoit $= \frac{N+1}{2N}\mathrm{MR}$. Or dans l'*Analyſe des infin. petits* pag. 122, on

a

a generalement $\mathrm{MF} = \frac{bbmy}{bmy - any - aan} =$ [ſi y, ou le rayon incident eſt infini, comme ici] $\frac{bbm}{bm - an}$. Et a eſt ici [en nommant $\mathrm{CE} = x$] $\mathrm{ME} = \sqrt{(1 - xx)}$, b ou $\mathrm{MG} = \sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$, $\mathrm{MR} = 2\,\mathrm{MG} = 2\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$; d'où on aura cette équation $\frac{N+1}{2N}\mathrm{MR}$ ou $\frac{N+1}{N}\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} = \frac{bbm}{bm - an}$ ou $\frac{m(1 - \frac{nn}{mm}xx)}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$. La diviſion par $\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$ donnera

$$\frac{N+1}{N} = \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$= \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}} + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$= 1 + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}};$$

Donc $\frac{1}{N} = \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$; multiplié en croix, il vient $m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)} = Nn\sqrt{(1 - xx)}$; ou $m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} = (Nn + n)\sqrt{(1 - xx)}$; ou en quarrant les deux membres, $mm - nnxx = (Nn+n)^2 - N^2n^2xx - 2Nn^2xx - nnxx$. Par la réduction, on obtiendra $xx = \frac{(Nn+n)^2 - mm}{NNnn + 2Nnn}$ & partant $x = \frac{\sqrt{((Nn+n)^2 - mm)}}{n\sqrt{(NN + 2N)}}$. C.Q.F.T.

Corollaire I.

Pour le Principal Iris, où N, le nombre de réflexions, eſt $= 1$, x devient $= \frac{\sqrt{(4mm - nn)}}{n\sqrt{3}}$

Corol-

COROLLAIRE II.

Pour le ſecond Iris, où N, le nombre de réflexions, eſt $= 2$, il vient $x = \frac{\sqrt{(9mm - mm)}}{n\sqrt{8}}$.

COROLLAIRE III.

Pour le troiſiéme Iris, où $N = 3$, on a $x = \frac{\sqrt{(16mm - mm)}}{n\sqrt{15}}$. Et ainſi des autres à l'infini.

COROLLAIRE IV.

Pour l'infinitiéme Iris, où $N = \infty$, x ſera $= 1$; c'eſt-à-dire, le rayon incident BM doit friſer la boule, & ſera le plus éloigné de l'axe BAC qu'il eſt poſſible.

COROLLAIRE V.

Si la réfraction eſt ſuppoſée bien grande; il pourroit arriver que quelques-uns des premiers Iris devinſſent imaginaires; par conſéquent inviſibles: par exemple, ſi $m : n = 5 : 2$, on auroit pour le premier Iris, où $N = 1$, $x = \frac{\sqrt{(16 - 25)}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{-9}}{2\sqrt{3}}$, imaginaire. Mais le ſecond Iris, où $N = 2$, donneroit $x = \frac{\sqrt{(36 - 25)}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{8}}$, poſſible.

Pour la détermination des demi-largeurs des Iris de toutes les Claſſes.

Le rayon dernier ſortant VP, qui entre dans l'œil, doit être continué en arriére VQ, juſqu'à-ce qu'il rencontre le rayon incident BM prolongé, ces deux rayons feront un angle,

gle, dont la meſure donne la demi-largeur de l'Iris. Pour trouver cet angle, on obſervera ce qui ſuit: CE, ou x, eſt le ſinus de l'arc AM, en prenant CA pour le ſinus total, & il eſt en même tems le ſinus de l'angle d'incidence: or x étant trouvé, on trouvera par les Tables l'arc AM qui ſera la meſure de l'angle d'incidence; on aura donc auſſi $\frac{n}{m}x$, ou CG, ſinus de l'angle de réfraction; cet angle ſera donc auſſi connu par les Tables. La différence de ces deux angles d'incidence & de réfraction, qui eſt l'angle RMS, ſoit nommée D. On aura de même, en prolongeant TV en π, $PV\pi = D =$ RMS.

De plus, je nomme R l'angle de réfraction CMG ou CRG. Il eſt viſible, que chacun des Angles MRT, RTV, &c. $= 2R$. Que l'on prolonge le rayon incident BMS à l'indéfini, lequel rencontre le rayon réflechi prolongé après la premiere réflexion au point α, celui prolongé d'après la ſeconde réflexion, au point β, celui prolongé d'après la troiſiéme réflexion au point γ, &c. Enfin le dernier rayon ſortant VP, continué en arriére rencontre le rayon incident au point nommé ω. Qu'on nomme enfin l'angle droit P. On conçoit qu'en chaque point de rencontre il y a deux angles, l'un intérieur qui regarde le Soleil, & l'autre extérieur qui eſt ſon angle de ſuite. Le premier intérieur $\alpha = \mathrm{MRT} - \mathrm{RMS} = 2R - D$; le premier extérieur $\alpha = 2P - 2R + D$: Le ſecond intérieur $\beta = 2R - (2P - 2R + D) = 4R - 2P - D$; le ſecond extérieur $\beta = 2P - (4R - 2P - D) = 4P - 4R + D$. Le troiſiéme intérieur $\gamma = 2R - (4P - 4R + D) = 6R - 4P - D$; le troiſiéme extérieur $\gamma = 2P - (6R - 4P - D) = 6P - 6R + D$ &c. Maintenant, ſi chacun des intérieurs eſt diminué encore d'un D, on aura la demi-largeur du premier Iris $= 2R - 2D$; celle du ſecond Iris $= 4R - 2P - 2D$; celle du troiſiéme $= 6R - 4P - 2D$; En general, celle de la N• Claſſe; c'eſt-à-dire, la demi-largeur de l'Iris, qui ſe forme après N réflexions entre deux réfractions, ſera $= 2N \times R - 2(N - 1) \times P - 2D$.

Quelques exemples ferviront d'éclairciffement. Suppofons la loi de réfraction $\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$, qui eft celle qui fe fait en entrant de l'air dans l'eau. Pour le premier ou principal Iris, où $x = \frac{\sqrt{(4mm - nnn)}}{n\sqrt{3}}$, on aura $x = \sqrt{\frac{20}{27}} =$ [en prenant pour le finus total 10000] $\frac{\sqrt{2000000000}}{\sqrt{27}} = \sqrt{74074074\frac{2}{27}} = 8607$ à fort peu près. En confultant les Tables des finus, on trouvera que ce finus 8607 répond à l'arc AM de $59°. 24' =$ à l'angle d'incidence. Faites donc $4:3 = 8607:6455 =$ au finus de l'angle de réfraction, qui répondra dans les Tables à $40°. 12'\frac{1}{2} =$ à l'angle de réfraction $= R$: la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction fera donc $19°. 11'\frac{1}{2} = D$. Ainfi on aura $2R - 2D = 42°. 2' =$ à la demi-largeur de l'Iris principal; conformément aux obfervations.

On fera, *mutatis mutandis*, une femblable opération pour le fecond Iris. On trouvera $x = 9501\frac{1}{2}$, qui donne l'arc AM de $71°. 50' =$ à l'angle d'incidence: faifant $4:3 = 9501\frac{1}{2} : 7126 =$ au finus de l'angle de réfraction, qui répond à l'arc de $45°. 27' =$ à l'angle de réfraction $= R$: la différence des angles d'incidence & de réfraction $= 26°. 23' = D$: on aura donc $4R - 2P - 2D = -(54°. 34') =$ à la demi-largeur de l'Iris Secondaire.

Le figne négatif $-$ marque que le concours des lignes prolongéees PV & BMS fe fait entre le Soleil & la boule, & non pas derriere la boule, comme la Figure le repréfente.

SCHOLIE.

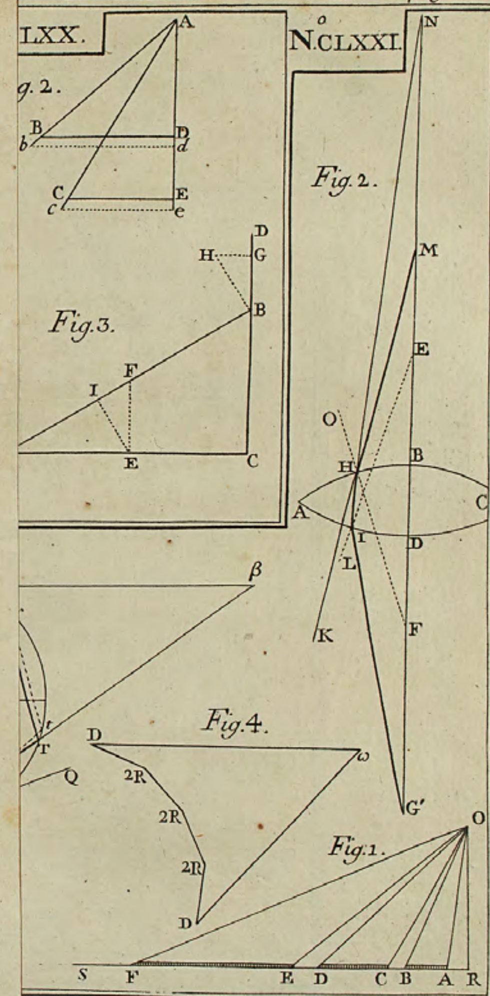
Sans fe donner tant de peine, & fans paffer graduellement par toutes les claffes inférieures des Iris, pour parvenir à la connoiffance de la demi-largeur ω de l'Iris de la claffe N confiderée généralement; on y peut arriver immédiatement par la propriété du Polygone, qui eft que la fomme de tous fes angles eft égale à deux fois autant d'angles droits qu'il a de cotés ou

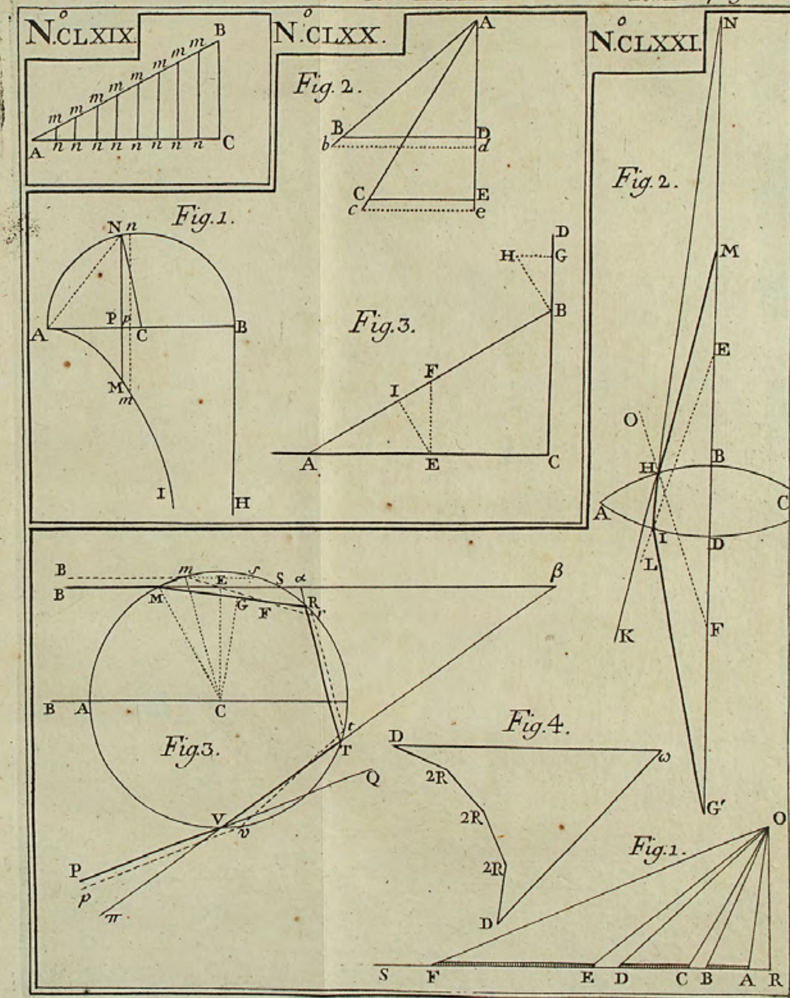
d'angles

d'angles moins quatre. Ainfi dans nôtre cas, il y a une efpèce de Polygone, comme dans cette Figure $D\omega D2R2RD$, qui a toujours trois angles faillants ω, D & D, & autant d'angles rentrants $2R$, qu'il y a d'unités dans le nombre N; enforte qu'il y a en tout $N+3$ angles, & autant de cotés; où il faut noter, que l'angle ω eft celui que l'on cherche, chacun des deux angles D eft la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction; chacun des angles marqués $2R$ eft le double de l'angle de réfraction R; tous les cotés $D2R$, $2R2R$, $2R2R$ &c. font égaux, repréfentés dans la précédente Figure, par les cordes égales MR, RT, TV, &c. Quant au refte, il eft à obferver que chacun des angles rentrants $2R$, entant qu'ils concourent à former les angles du Polygone, qui doivent regarder l'intérieur de la Figure, a pour mefure, non pas $2R$, mais le complément à 4 droits; ainfi chaque $2R$ doit être eftimé par $4P - 2R$: Donc la fomme de tous les angles du Polygone fera $= \omega + 2D + N \times (4P - 2R)$. Or, par la propriété générale des Polygones, cette fomme doit être $= 2(N+3) \times P - 4P$, c'eft-à-dire $= 2(N+1)P$; ce qui nous fournit cette équation $2(N+1)P = \omega + 2D + N \times (4P - 2R)$, ou $2N \times P + 2P = \omega + 2D + 4N \times P - 2N \times R$. D'où on tire $\omega = 2N \times R - 2(N-1)P - 2D$; ce qui eft conforme à ce que nous venons de trouver par une beaucoup plus longue déduction.

TAB. LXXXI. N°. CLXXI. Fig. 4.

Tab. LXXXI. Tom. IV. pag. 204.




N.° CLXIX.
N.° CLXX.
Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 3.
N.° CLXXI.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 1.

M E

C A

Délivré des inco

à

D I S

Composé à l'occa

Messieurs de

F