perpendant, annon ex perplexis ejus & operosis constructionibus colligi debeat, quod genuinam solvendi viam nondum cognitam habuerit; quod per difficiles ambages quæsiverit quæ tamen obvia erant & in propinquo, si brevissimam semitam quam ego secutus sum in solutione secunda, iniisset; quod denique ob id ipsum exhibere nequiverit transcendentes per solam algebraicarum rectificationem construendas. Hinc percipient Lectores, quam ob causam in propositione hujus Problematis petiverimus duntaxat curvas transcendentes, quibus nos acquieturos dicebat Filius meus pro casu intersectionis obliquangulæ; non mehercle! quod dubitaremus, an absolute dari possint algebraicæ generali huic conditioni satisfacientes; dedi enim, pro quovis angulo, curvas algebraicas infinitas, quas sistit modo memorata solutio mea secunda: sed rem ita proposuit Filius, ne alioquin aperte nimis panderetur transitus ille, per se jam satis facilis, a solutione per curvas algebraicas pro intersectionis angulo recto ad solutionem per easdem algebraicas pro angulo obliquo; scilicet inflectendo tantum earum applicatas, ceu docui in §§. 13, 14. Qua utique cautela prudenter adhibita factum, ut quod primarium est artis in hoc scrutinio, quantumvis facile, nostro Anonymo non suboluisse videatur: secus enim non dixisset in fine suæ solutionis Cycloïdem satisfacere tunc tantum, quando angulus intersectionis rectus est; sed addidisset, si rem perspectam habuisset, Cycloidem obliquangulam satisfacere tunc etiam, quando angulus intersectionis obliquus est. Responsum ergo hoc habeat Anonymus ad quæstionem, qua, in subnexo suo Scholio, nimis curiose quærit, *cur inter duos Problematis casus ita distinxerimus, ut pro angulo recto curvas algebraicas, pro obliquo transcendentes tantum postularemus*, etiamsi nobis pro utroque casu præsto essent algebraïcæ; responsum, inquam, hoc habeat, id nempe data opera factum, ut melius absconderetur artificium, neque a nobis ansa præberetur Anonymo illud detegendi, & postea, uti solent non pauci ex ejus Popularibus qui nostra arant vitula, contra nos eo abutendi, quin & quandoque conviciandi, ubi vident plagia sua e tenebris in apricum producta.

APPENDIX.

E re noſtra eſſe judicamus, ut ſciat B. Lector, hoc Schediaſma jam ante aliquot menſes conſcriptum fuiſſe, occaſione mittendi *Lipſiam* ſe non citius offerente, quam per Mercatores ad inſtantes nundinas Paſchales abituros. Interim quod commodum accidit, accepi nuperrime ſecundam aliquam Epiſtolam ab eadem illa, qua prior, ignota mihi manu exaratam. Significat Epiſtolæ ſcriptor, amicum ſuum [qui fortaſſis cum ipſo ſcriptore unus idemque eſt homo] paraſſe reſponſum ad meam animadverſionem editam in *Actis* M. Junii A. 1721 * idque publicatum iri *inter* neſcio quos *Commentarios*, *qui vero cum tarde*, aut forte nunquam, *ad manus meas ſint perventuri, ne diu ignorem reſponſi contentum*, ejuſdem apographum pro ea qua eſt humanitate communicavit, inſimul hortans, ut *quamprimum meam ſolutionem in publicum emittam*; quod nunc facio.

Anonymi reſponſum ita comparatum deprehendo, ut nihil in eo videam, cujus de cauſa aliquid, vel minimum, in Schediaſmate meo, licet diu ante ſcripto, immutare debeam: prodit itaque, ſicuti prodiiſſet ſi non vidiſſem Anonymi ſcriptum; duo enim tantum in hoc obſervo, ad quorum prius nihil adhuc animadverti poteſt, eo quod ſiſtit ſolutionem aut analyſin notis fictis, ut vocat, involutam, quam ſit retecturus, poſt quam meam ſolutionem viderit; alterum vero, quod reſponſum hoc continet, aliud nihil in ſe habet, quam Demonſtrationes de Cycloïdis & Logarithmicæ uſu in Problematis ſolutione: agnoſco equidem eas recte ſe habere, ſed quod ad Cycloïdem ſpectat, res eſt tantæ ſimplicitatis tantæque facilitatis, ut quilibet Tyro, non omnino rudis, idem præſtare queat. Duplicem autem uſum Logarithmicæ demonſtrare, illum præſertim quando Logarithmica moveri ſupponitur ſecundum directionem aſymtoti, fateor paulo altioris eſſe indaginis: interim etiam hoc demonſtrari facilius potuiſſet ab alio, qui non ea, qua Anonymus noſter eſſe videtur, peritia & ſagacitate polleret; poſtquam nimirum

* N°. CXXV. ſupra pag. 521.

mirum in præfata mea *Animadverſione* p. 272 *, omnes circumſtantias ad rei conſiderationem neceſſarias ita ſigillatim recenſui, & exerto quaſi digito indicavi, ut mirarer ſi Noſter non ſtatim rei indicatæ demonſtrationem inveniſſet.

Has ergo cum protinus dederit demonſtrationes, [quas ab eo petieram, ſed quatenus ex ſua ſolutione fluentes, quod nondum video] mirari potius ſubit, cur non eadem proclivitate ſe accinxerit ad alterum indagandum, ad quod illum pariter invitaveram; nimirum ad methodum generalem inveniendam, qualem hic in ſolutione ſecunda exhibui, conſtruendi curvas tranſcendentes optatas, quotquot libuerit, per rectificationem curvarum algebraicarum: nec eſt quod in excuſationem dicat Epiſtolæ ſcriptor; *Amicum ſuum* [h. e. ſi recte hariolor, ſe ipſum] *arctum temporis ſpatium ad eam ſolutionem ſumſiſſe; otium item ei defuiſſe rem ab eo tempore ulterius proſequendi, aliaque negotia jam quoque obſtare, quominus animum eidem rurſus applicet.* Quia enim hic prætextus non magis ad unum quam ad alterum valebat, permittet Anonymus, ut ego ſibi vicem reddens, moveam quæſtionem ſuiſmet verbis conceptam (Vid. ipſius Scholium): *Quæritur nempe quibus computationibus adductus ſit anonymæ ſolutionis Autor, inter hæc duo ad quærendum ſibi propoſita ita diſtinguere, ut ad alterum, ubi Cycloïdis & Logarithmicæ Demonſtratio petebatur, ſe promtum paratumque præbuerit, non obſtantibus omnibus ſuis negotiis; ad alterum vero, quando curvæ tranſcendentes per algebraicarum extenſionem deſcribendæ exiguntur, propter eadem illa negotia animum applicare noluerit.* Credo veram diſtinctionis rationem citra aruſpicinam haud ægre divinari poſſe.

Subinnuit Epiſtolæ ſcriptor in ſuo Reſponſo, *me allaborare ne quis Amici ſui* [ſive ſuam] *ſolutionem meæ anteferret*; quo me vanitatis alicujus poſtulare tacite videtur, ſed injuſte. Quorſum enim, ut ea me res ſollicitum teneat, de qua quilibet Lector gnarus, me nec curante nec monente, judicium feret, prout res ipſa merebitur? Sit igitur bono animo metuatque nihil; aperiat

* Supra pag. 523.

aperiat modo quantocyus Logogryphi ſui involucrum, ut Lectoribus introſpicere & de rei pretio judicare liceat: ſancte obſtringo fidem, me primum fore applauſorem, ſi quid mea ſolutione præſtantius protulerit.

Cæterum rogo, ſi quis me litteris privatis cohoneſtare porro velit, nomen ſuum ut exprimat, quo ſciam ad quem reſponſio, ſi qua opus fuerit prompta, pariter per litteras amandari queat: ſecus ubi fecerit nomenque ſuum reticere perrexerit in proximis, quas ab eo accepturus ſum, litteris; haud ægre feret, ſi deinceps ejus litteras ex Tabellarii manibus redimere recuſabo, atque ita irreſeratas relinquam ad Autorem referendas.

N°. CXXIX.

COMPARITIO

AD ANONYMI GEOMETRÆ BRITANNI NOVAM PROVOCATIONEM,

Ex occaſione Problematis de Trajectoriis reciprocis, hujuſque ſolutionum, editarum menſe Aug. 1722.

Per. Joh. BERNOULLI.

Acta Erud. Lipſ. 1723. Febr. p. 75.

HOc quidem Problema fuit propoſitum a Filio meo, ſed ita propoſitum in *Supplem. Tom.* VII. p. 352 *, ut neminem provocaret; ſcilicet tantum Curioſorum in gratiam, unicuique libertate relicta, vel tentandi vadum, vel non tentandi: qua in re nihil ſane contra modeſtiam peccatum fuiſſe nobis perſuademus. Extitit haud multo poſt aliquis *Britannus*, adhucdum mihi ignotus, qui per litteras, ſuppreſſo tamen nomine ſuo, ſolutionem aliquam, ſed ſine demonſtratione & ſine analyſi communicavit, editam poſtea in *Actis* 1721 p. 156. † Solutioni ad-

* Supra N°. CXVI. pag. 472.
† Supra N°. CXXIV. pag. 520.

jecerat Scholium quod ita comparatum, ut reſpondendi neceſſitas nobis imponi videretur.

Hinc continuo ad *Acta* miſi *Animadverſionem* meam, quæ eodem anno prodiit, p. 270 *. Duo in ſolutione Anonymi me deſiderare indicavi, unum ſcilicet, ut exhiberet curvas tranſcendentes non tantum per quadraturas, ſed per rectificationes curvarum algebraïcarum conſtruibiles; alterum, ut Cycloïdem & Logarithmicam varioſque hujus caſus quæſito ſatisfacientes, quos ibidem recenſui, actu ipſo demonſtraret.

Sub initium anni ſequentis ſecundam ad me ſcripſit Epiſtolam [Vid. *Suppl.* T. VIII. p. 40 †] in qua quidem hoc alterum effectui dedit, ſed priori penitus neglecto; cui hoc prætexuit commentum, *ſibi otium defuiſſe rem ulterius proſequendi, aliaque jam negotia quoque obſtare, quominus animum eidem applicet*: habuit nempe otium præſtandi unum, deerat vero tempus præſtandi alterum; quid mirum? hoc erat facile & obvium, illud autem difficile & arduum: utrum otii an virium potius defectus ſit accuſandus, judicent alii.

Communicavit in eadem Epiſtola ſolutionem ſuam, ſed notis fictis involutam, ne quid, quod metuebat, ex illa expiſcarer; ipſe vero pariter ex mea, quam prolaturus eſſem, quamque ſine mora ſibi videndam depoſcebat, ſuam adornaſſe non videretur. Interim non opus erat, ut ad ſibi ſatisfaciendum me provocaret; ſiquidem cum ipſius Litteræ advolarent, jam ab aliquot menſibus paratam habebam ſolutionum mearum deſcriptionem, exſpectans commodam ad *Acta Lipſ.* mittendi occaſionem. Mox poſtea Schediaſma tranſmiſſum prodiit in publicum menſe Auguſto, 1722 ‡.

Credebam, me in eo hanc materiam uſque adeo enucleaſſe per multiplices Problematis ſolutiones, quæ ſiſtunt innumera genera curvarum, tam algebraïcarum quam tranſcendentium, harumque conſtructiones non modo per quadraturas, ſed per rectificationes algebraicarum, ut nihil amplius ad ulteriorem dif-

* Supra N°. CXXV. pag. 521.
† Supra N°. CXXVI. pag. 524.
‡ N°. præced.

diſquiſitionem exigi poſſe ſperarem. At vero Anonymus meus, iſtis omnibus non contentus, omnem movit lapidem, ut porro inveniret aliquid, quo me ad incitas redigere poſſet: unde poſt multum laboris & ſudoris [licet antea dixerit, *ſibi otium deeſſe rem ulterius proſequendi*] tandem aliquid detexit cui me imparem fore lætabundus putavit. Et tanti quidem momenti res in eo conſiſtit, ut *determinetur omnium, quæ ſatisfaciunt in propoſita quæſtione, curvarum ſimpliciſſima.*

Nec mora; feſtinandum erat ad calamum: habebat enim, ita putabat, quo me ligaret; quo circa tertiam pronuper ab Anonymo meo Epiſtolam accipio; qua, quia tum minus bene valebam, aliquamdiu poſt reſerata, ſperabam me nomen ejus edoctum iri, atque in ea me reperturum methodum aliquam a mea diverſam conſtruendi ſuas curvas tranſcendentes per algebraïcarum extenſiones, quam utique dare tenebatur, antequam novi quid ſolvendum mihi proponeret.

Sed videtur eludere voluiſſe officii ſui debitum; & maluiſſe reſpondere provocando quam ſatisfaciendo, & hunc quidem in modum: ,, Oculos, inquit, nuper conjeci in ſolutionem Pro-
,, blematis tui, quam inter *Acta Eruditorum mens. Auguſt.* edi-
,, diſti. Cum autem unus e primariis hujus Problematis uſibus
,, ſit invenire curvas ſimpliciſſimas, quibus ſolvi poteſt, ut ipſe
,, haud ſemel innuiſti, nec video te indicaſſe curvam ſimplicif-
,, ſimam algebraïcam, gratiſſimum nobis facies, ſi indicaveris
,, ejuſmodi curvam ſimpliciſſimam, quam Problemati reſponde-
,, re obſervaſti, eamque delineaveris, & ſi ſignificaveris, an de-
,, monſtrationem habeas, quod curva, quam ſis exhibiturus,
,, revera ſit omnium algebraïcarum, quibus hoc Problema ſolvi-
,, tur, ſimpliciſſima. Curvam autem ſimpliciſſimam, quam
,, Amico [*hoc eſt, ſi recte conjicio, ſibi*] inveniſſe contigit, una
,, cum ratione eam inveniendi, notis fictis, quibus antea ſum
,, uſus, jam deſcribam &c.

Hiſce ſubnectit cryptographum ſuum, ſub quo curvam ſimpliciſſimam abſcondi affirmat: docebit dies, quando nos arcani participes reddere voluerit Autor, quid tanto Apolli-

ne

ne dignum in illo contineatur. Ad me quod attinet, tametſi non arbitrer mihi incumbere, ut præſto ſim cuique, qui me provocare ſtatuerit, cum præſertim in functione publica conſtituto non liceat ea quibus adſtrictus eſt penſa ſeponere, atque cum aliis importune obſtruſis negotiis commutare; volui tamen hac adhuc vice horulas aliquot impendere ſubciſivas, ut nunc quoque ſatisfacere conarer intempeſtivæ Provocatoris interpellationi, nequaquam mihi dedecori ducens, etiamſi incaſſum laboraſſem, tot aliis diſtractus negotiis. Ut enim dicam quod res eſt, non video cur ad quaſcunque quæſtiones ab otioſis mihi propoſitas reſpondere magis cogar, quam vel ipſe NEWTONUS, ut pote qui ab hujuſmodi contemplationibus non majori jure quam ego immunis eſſe debet. Poſſem enim regerere verba cujuſdam Angli, [quamvis a nemine provocati] eaque mihi applicare, dicendo: *ſive Problema ſolvatur, ſive inſolutum maneat; nihil exinde conſequetur, quod me afficiat: nec iſtis certe meis inſidiatoribus, qui Problematis ſolutionem continenter efflagitant, jus ullum eſt me ad certamen ingeniorum tanta cum licentia provocandi.* Nec eſt quod dicant, hoc Problema originem habere ex illo quod Filius propoſuit [a ſe ipſo] non a me, ut male cauſantur, acceptum; etenim, ut jam initio monui, abfuit a Proponente omnis provocandi animus.

Ne interim triumphum canant ante victoriam, dabo hic curvam omnium algebraïcarum ſimpliciſſimam, qualis in caſu propoſito deſideratur, eamque ſimpliciſſimam eſſe demonſtrabo: ſed ut evitetur ambiguitas, definiendum primo eſt quid per ſimplicitatem curvæ intelligatur. Alia eſt *ſimplicitas æquationis* inter coordinatas, per quam curva exprimitur; alia *ſimplicitas praxeos manualis*, qua curva in plano deſcribitur; in hoc poſteriori ſenſu, NEWTONUS vocat Ellipſin Conicarum ſectionum ſimpliciſſimam, eamque ob facilitatem deſcriptionis præfert Parabolæ, licet hæc ſimpliciore gaudeat æquatione, atque ideo diſerte rejicit Vir ſummus argumentationem a ſimplicitate æquationum. Vid. *Algeb.* NEWT. p. 314. 315.

Qualem hic ſimplicitatem Anonymus intelligat, non quidem exprimit; verum ex circumſtantiis colligo, eum intendere ſimplicitatem in priori & vulgari ſenſu ſumtam, nimirum ut exhibeam curvam algebraïcam Problema ſolventem, quæ exprimatur æquatione inter coordinatas dimenſionis quam fieri poteſt pauciſſimæ, hoc eſt, ut more *Newtoniano* loquar, quæ ſit infimi ordinis omnium poſſibilium curvarum algebraïcarum Problemati ſatisfacientium. Deſideratam ergo hanc Curvam in modum ſequentem deſcribo, ſed tranſpoſitis litteris, ut morem Anonymi obſervem; *9 a b b 5 c d æ 4 e g 4 i 3 l m 2 n o p q 3 r 5 ſ 3 t 6 u: 20 a b 6 c 6 d 6 æ 14 e ſſ g 6 i 7 l 6 m 7 n 3 o 9 p q q 13 r 4 ſ 17 t 12 u; 6 a b c c d d 3 æ 8 e f g h 11 i 3 l 4 m n n 3 o 4 p q 4 r 6 ſ 8 t 6 u. 14 a b 8 c d d 11 c h 6 i 6 l 4 m 4 n 11 o 4 p q 11 r 9 ſ 11 t 4 u: 16 a 4 b 3 c 3 d 11 e 3 g 9 i 7 l 5 m 6 n 3 o 4 p q q 5 r 12 ſ 12 t 13 u* *.

Supereſt igitur, ut Solutor anonymus aperiat ſuum logogriphum; quod ubi factum eſſe intellexero, meum quoque anagramma protinus revelabo. Sed permittat, ut conquerar de injuſto mecum procedendi modo. Quid enim? ſi in eventu contingat, meam, quam hic tradidi, curvam non tam ſimplicem eſſe quam quæ ex Anglia tranſmiſſa eſt, annon me in hoc certamine devictum tota Gens Britannica in triumpho circumduceret; inque Victorem [qui tunc nomen ſuum propalare non differet] plauſus & præconia largis manibus ſparget? Di boni! ſi hoc contingeret, quis amplius ex noſtratibus hiſcere, aut quis urgere auderet veteres noſtras victorias, quæ nunc haud dubie per recens acceptam cladem oblivioni traderentur, nunquam poſthac memorandæ. Sin contrarium contingeret, atque mea, quam exhibeo, curva forte fortuna ſimplicior deprehendetur illa ab Antagoniſta anonymo inventa; ubinam tunc quærendus eſſet Aggreſſor repulſus? aut quomodo ab illo debitum victoriæ præmium exigerem? Nullum eſt dubium, quin tunc latere pergeret poſt carecta; probe cavens, ne riſuum tela, quæ in me paravit, ſibimet ipſi noceant.

Neceſſe

* Hujus explicationem Vide N°. CXXXI.

Neceſſe eſt, hanc ob rem, ſi inſidiatoris titulum declinare velit, ut aperto marte mecum decertet, nomenque ideo ſuum declaret; juſtum enim eſt, utramque partem æqualiter idem ſubire periculum; quod ſi vero aliter ſtatuerit, ſciat me ſuas provocationes in poſterum, ut par eſt, alto ſilentio contemturum; quandoquidem cum Anonymis altercari non magis glorioſum, quam cum umbris dimicare.

N°. CXXX.

SOLUTIO PROBLEMATIS

De Curvis inveniendis, quæ quadam ratione in ſitu inverſo diſpoſitæ ſe interſecare poſſunt in angulo dato.

Tranſ. Phil. N°. 372. 1722. Jun. Jul. Aug. Art. 7. pag. 106. *Acta Erud. Supp.* Tom VIII. ſect. VI. pag. 234.

JAm primum ad manus pervenerunt *Acta Eruditorum* ad hunc menſem Auguſti, ubi invenio a me peti, ut ea aperiam, quæ notis fictis celata in *Suplementorum ad Acta Eruditorum* Tom. 8. ſect. 1. * edita ſunt. Explicentur autem ea Tabula ſequenti

·	z	y	x	v	u	t	s	r	q	p	o	n	m	l	k	i	h	g	f	e	d	c	b	æ	a
b	a	4	o	æ	i z	u	1	s	j	c	8 t	y	9	2	6	e p	3	m	f	7 l	v	w	5	r	b
g	e	o	u	w	4 d	3	i	c	6	2	s z	7	5	y	æ	m t	1	r	j	9 p	a	h	v	8	j l
n	ı	j	æ	5	o l	1	r	s	e	v	6 d	f	a	b	4	y z	w	u	7	9 t	3	8	c	m	2 p
q	o	8	3	o	v p	6	æ	1	c	w	b l	i	5	m	2	j d	f	e	9	a z	4	y	7	s	r t
x	u	y	4	1	c t	f	w	j	2	o	8 p	s	7	r	3	5 l	m	i	h	e d	9	æ	a	6	v z

In hac Tabula ſex ſunt notarum ordines: ſupremus litteras continet, quibus verba celata ſcribi debent, reliqui litteras numeroſque continent, quæ verarum litterarum loco uſurpantur. Litteras autem *b*, *g*, *n*, *q*, *x*, quæ e læva horum ordinum inferiorum collocantur, propter earum uſum indices appellare licet. Scripturæ pars celata ab horum indicum duobus incipit, quorum poſterior oſtendit notas illum ſequentes in eo ordine,

 cui

* Supra N°. CXXXVI. pag. 524.

cui præfigitur, quæri oportere, ut veræ litteræ cognoſcantur, quæ ſupra has notas in ordine litterarum primo ſemper habentur. Ex hoc autem ordine notæ fictæ deſumendæ ſunt, donec alteri alicui indicum occurritur, quod cum fit, hoc novo indice utendum eſt ut priori. Et hæc regula tota ſcriptura explicabitur, niſi quod quandocunque plures indices ſunt contigui, omnes præter ultimum negligi debent: item verborum aperte ſcriptorum interpoſitio hunc indicum uſum non turbat. Hoc modo ſcriptura occulta, ſi pauci errores typographici emendentur, verba ſequentia complecti invenietur.

„ Curvarum, quæ Problemati conveniunt, quæcunque ſumatur ordinata, illius fluxio ſecunda ab ejuſdem fluxione prima diviſa [ut ſermone Arithmeticorum utar] eandem dat quotientem, ſed contrario ſigno, ac fluxio ſecunda a fluxione prima diviſa ordinatæ ex altera principii abſciſſæ parte jacentis, & ad eandem ab eo principio diſtantiam *. Hujuſmodi autem curvæ inveniri poſſunt tribus regulis.

„ Prima regula curvam, qualem Problema requirit, ope ſpatii hyperbolici a curva quacunque deducit, quæ habeat ad æquales diſtantias a principio ſuæ abſciſſæ ordinatas æquales, & ab eadem parte abſciſſæ poſitas. Eſt enim ordinata curvæ quæſitæ, ut area alius curvæ ordinatam habentis æqualem ſegmento aſymptoti hyperbolæ terminato a ſpatio hyperbolico æquali areæ curvæ primo aſſumtæ.

„ Regula autem ſecunda pendet a prima, & curvam Problemati ſatisfacientem, ſine ope ſpatii hyperbolici, ex curvis derivat, quæ habeant ad æqualia intervalla a principio ſuæ abſciſſæ ordinatas æquales, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitas.

„ Et hæc ſecunda regula Theorema ſequens præbet; nimirum; Si aliqua curva ſumatur, qua Problema ſolvi poſſit per regulam primam, & ſi hujus ordinatæ inſiſtunt abſciſſæ ad perpendiculum, invenietur curva Problemati ſatisfaciens, ſi ad eandem abſciſſam conſtruatur alia linea curva, ea lege, ut illius ordinata ex altera parte abſciſſæ ubique æqualis ſit aggregato aſſumptæ lineæ curvæ & ejuſdem ordinatæ; exceſſui autem hujus curvæ præ ordinata ſua æqualis ſit unaquæque curvæ conſtruendæ ordinata, quæ ex altera parte abſciſſæ jacet, omnes enim curvæ hac ratione conſtructæ Problemati conveniunt.

„ Hoc autem Theorema demonſtratur propoſitione ſequenti, quod in omni triangulo rectangulo quadratum ab alterutro latere angulo recto adjacenti æquale eſt rectangulo ſub ſumma alterius lateris angulo recto adjacentis, laterisque angulo ei ſubtendentis, & ſub differentia eorundem laterum.

„ Denique tertia regula derivatur a ſecunda, ope Propoſitionis nonæ Libri *de quadratura curvarum* NEWTONI.

SCHO-

* Scilicet, ſi abſciſſa a ſuo principio in oppoſitas partes æqualibus momentis fluit.

SCHOLIUM.

„ Exemplum generale, quod exhibui, curva logarithmica, & cycloïs plurimis modis inveſtigari poſſunt his regulis.

„ Unus caſus curvæ logarithmicæ commode invenitur per regulam primam, aſſumpta linea recta loco curvæ in illa regula memoratæ.

„ Alter hujus lineæ caſus deducitur ex regula ſecunda, ope ſpeciei quinquageſimæ nonæ linearum tertii ordinis, quæ omnium curvarum in illa regula utilium eſt fere ſimpliciſſima, præter parabolam cubicam & hyperbolam conicam.

„ Cycloïs optime invenitur Theoremate, quod a regula ſecunda deduxi diximus.

„ Exemplum iſtud generale facile invenitur regula tertia, aliis vero regulis non ſine ambagibus.

„ Regulis ſecunda & tertia commodiſſime inveniuntur curvæ geometrice rationales; quæ deducuntur etiam a Theoremate in regulam ſecundam pendente; quandocunque enim curva aſſumpta tam longitudinem quam ordinatam rationalem habet, cujuſmodi ſimpliciſſima eſt parabola ſemicubica, curvæ quoque inveniendæ ordinata rationalis erit.

„ Denique his regulis, vel etiam conditione in principio poſita, facile eſt invenire, an curva aliqua propoſita Problemati ſatisfaciet, & quibus poſitionibus id fiet: unde intelligi poteſt, an eadem curva diverſis modis Problemati conveniat.

Horum brevem explicationem jam opponam, deſcribendo, ex amici charta, Problematis ſequentis ſolutionem.

PROBLEMA.

Datis duabus lineis rectis, A B, C D [in *Fig.* I.] parallelis, ad abſciſſam A B curva E F deſcribenda eſt, quæ talis ſit, ut in ſitu inverſo ad abſciſſam C D deſcripta ſe ipſam ſemper interſecet in angulo quolibet dato. TAB. XXXVIII. *Fig.* I.

Ad abſciſſam C D deſcribantur curvæ G H, K L ſimiles & æquales curvæ EF, quarum altera huic curvæ E F occurrat in puncto quolibet I, altera vero per punctum M tranſeat, ut partes E M, K M curvarum E F, K L ſimiles ſint & æquales; & per punctum M, quod partes curvæ E F dirimit, quæ ſe mutuo interſecare debent, ducantur lineæ N M O, *n* M *o*, quæ cum rectis A B, C D angulos ſub N O B & ſub C N O, item angulos ſub *n o* A, & ſub *o n* D conſtituant ei æquales, in quo curva ſe ipſam ſecare ponitur. Ducatur I P T S lineis A B, C D pa-

parallela; item huic proxima & parallela $jxpts$; deinde ducatur Iv lineæ NO parallela, & denique Iw, Sy parallelæ lineæ no, ut angulus ſub Iwj æqualis ſit angulo ſub Ivx. Jam anguli ſub Ixw & ſub Ijv ſimul ſumpti æquales erunt angulo ſub xIM, ideoque & angulo ſub Iwv æquales; unde angulus ſub xIw æqualis erit ei ſub Ijv; & eodem modo angulus ſub jIv ei ſub Ixw æqualis invenietur; adeo ut triangula Ijv, xIw ſunt ſimilia, & jv : Iv = Iw : wx. Porro pro abſciſſis æqualibus MP, MT ſcribatur z, pro ordinata PI, y, & $-v$ pro ordinata TS, pertinente ad curvæ KL arcum KM, qui arcui EM curvæ EF reſpondet. Creſcentibus autem abſciſſis MP, MT, & ſimul increſcentibus ordinatis PI, TS, earum fluxiones primæ eadem habebunt ſigna cum ſuis ordinatis, ſed utræque fluxiones ſecundæ idem habebunt ſignum; nam fluxio ſecunda unius ordinatæ idem habebit ſignum cum ſua ordinata, ſed alterius ordinatæ fluxio ſecunda ſignum habebit a ſigno ſuæ ordinatæ diverſum; propterea quod curvarum KM, MF alterius concavitas verſus concavitatem alterius convertitur, ut manifeſtum eſt. His autem cognitis invenietur jv : Iv [Pp] $= dy : dz$, Iw [Tt] : wx [sy] $= dz : -dv$, & $dy : dz = dz : -dv$, item $-dy\,dv = dz^2$ & denique poſita dz invariabili $-dy\,ddv - dv\,ddy = 0$, vel $dy\,ddv + dv\,ddy = 0$, ideoque $ddy : dy = -ddv : dv$, quando dy & ddy ad curvam EF, ſed dv & ddv ad curvam KM pertinent. Idem vero locum quoque habet, quando omnes hæ fluxiones ad curvam EF referuntur, ſi abſciſſa in oppoſitas partes a ſuo principio fluere ſtatuitur; nam ſumpta MQ = MP, & Mq = Mp, ductiſque QR, qr ad AB, CD parallelis, puncta R, r in curva EF punctis S, s in curva KM reſpondent. Ponendo igitur abſciſſam in contrarias partes a ſuo principio æqualibus momentis fluere, *Curvarum, quæ Problemati conveniunt, quæcunque ſumatur ordinata, illius fluxio ſecunda a fluxione prima diviſa eandem dat quotientem*, &c. ut ſupra *. Hæc autem curvarum quæſitarum conditio eſt, unde deducuntur regulæ ſequentes ad Problematis ſolutionem.

REGULA PRIMA.

Cum requiritur, ut MQ exiſtente = MP, ſit $ddy : dy = -ddv : dv$, quando abſciſſa in oppoſitas partes a puncto M æquabiliter fluit, ita ut ejus fluxioni in partibus abſciſſæ, quæ a contrariis lateribus puncti M jacent, ſigna diverſa tribuenda ſint, ponere licet $ddy : dy$ proportionalem dz ductæ in quantitatem quamcunque, quæ eadem maneat, & ſub eodem ſigno, pro eadem magnitudine z, ſive illa affirmativa, ſive nega-

TAB. XXXVIII. Fig. 2 & 3. tiva ſit. Deſcribatur igitur [in *Fig.* 2.] ad abſciſſam NO curva quælibet KL, cujus ordinatæ angulum quemcunque datum cum abſciſſa conſtituant, & quæ habeat eas ordinatas æquales, & ab eodem latere abſciſſæ NO

* pag. 558 lin. 10 *ſeq.*

NO poſitas, quæ æqualiter diſtant a puncto M, ut ordinatæ PW, QX, deinde fiat $ddy : dy$ ordinatæ PW $\times dz$ proportionalis, & $ddv : dv$ ordinatæ QX $\times dz$. Jam [in *Fig.* 3] exponatur hyperbola YZ ad aſymptotos $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Theta$, angulum ſub $\Theta\Gamma\Delta$ angulo dato ſub NPW æqualem comprehendentes, deſcripta, & in alterutra aſymptoto, ut $\Gamma\Delta$, ſumatur ad libitum punctum Λ, & ducatur $\Lambda\Xi$ alteri aſymptoto $\Gamma\Theta$ parallela, & parallelogrammum $\Gamma\Xi$ compleatur: deinde in curva KL ad abſciſſam NO, & ad punctum M ordinatim applicetur MΠ; ſumatur ſpatium hyperbolicum $\Lambda\Xi\Upsilon\Sigma$, recta $\Sigma\Upsilon$ aſymptoto $\Gamma\Theta$ parallela abſciſſum, æquale ſpatio WPMΠ, & fiat PΦ = $\Gamma\Sigma$, eaque ratione deſcribatur curva $\omega\Psi\Phi\Omega$; dico PI curvæ quæſitæ ordinatam eſſe ut ſpatium MP$\Phi\Psi$. Hoc autem manifeſtum eſt; fluxio enim ſpatii MΠW·P æqualis eſt fluxioni ſpatii $\Lambda\Xi\Upsilon\Sigma$, ideoque PW $\times dz$ = fluxioni lineæ $\Gamma\Sigma$ ductæ in $\Sigma\Upsilon$, vel in $\Gamma\Lambda \times \Lambda\Xi : \Gamma\Sigma$; erit igitur PW $\times dz$ ut fluxio lineæ $\Gamma\Sigma$, ſive lineæ PΦ, per ipſam PΦ diviſa; ſed PW $\times dz$ eſt ut $ddy : dy$; unde erit P$\Phi \times dz$ ut dy, & neceſſario y, ſive PI, ut ſpatium MP$\Phi\Psi$. *Prima igitur regula curvam, qualem Problema requirit, ope ſpatii hyperbolici, &c.* ut ſupra. *

In exemplum hujus regulæ loco curvæ KL [in *Fig.* 2.] ſumatur linea recta lineæ NO parallela, & erit linea $\omega\Psi\Phi\Omega$ ea, quæ logarithmica dicitur, cui NO aſymptotos eſt: ideoque & linea EF etiam logarithmica, per punctum M tranſiens, & aſymptoton habens lineæ NO parallelam; propterea quod area MP$\Phi\Psi$ hic erit ut PΦ − MΨ (*a*). Si vero ordinatæ $\epsilon\eta\zeta$, $\beta\alpha\gamma$ ducantur æqualiter diſtantes a puncto M, ordinatæque MΨ proximæ, erunt $\epsilon\eta$, $\alpha\beta$ æquales quando primum naſcuntur, quoniam ſpatia $\epsilon\zeta\Psi$M, M$\Psi\gamma\alpha$ tunc æqualia ſunt; ex oſtenſis autem eſt $\epsilon\eta \times \alpha\beta$ = Mϵ^2 vel Mα^2, unde $\epsilon\eta$ = Mϵ; & $\epsilon\eta$ ad M$\Psi\zeta\eta$: MΨ ut radius ad ſinum anguli ſub NMΨ. Quoniam igitur PI ſemper eſt ut ſpatium ΨMPΦ, erit PI ubique ad ΨMPΦ : MΨ ut radius ad ſinum anguli ſub NMΨ; & denique limes ordinatarum negativarum ad ſpatium totum comprehenſum, a parte $\Psi\omega$ lineæ logarithmicæ $\omega\Psi\Omega$, ab ordinata MΨ, & ab aſymptoto MO ad ordinatam MΨ applicatum, ut radius ad ſinum anguli ſub NMΨ: eſt autem rectangulum ſub MΨ & ſub lineæ logarithmicæ $\omega\Psi\Omega$ ſubtangente ad ſpatium prædictum etiam ut radius ad ſinum anguli ſub NMΨ: adeo ut limes ordinatarum negativarum lineæ curvæ EF æqualis erit huic ſubtangenti; unde ſi ΨM retro producatur ad δ, ut Mδ huic ſubtangenti ſit æqualis, & ducatur $\theta\delta\lambda$ lineæ NO parallela, erit illa curvæ EF aſymptotos; erit autem curvæ hujus EF ſubtangens lineæ Mδ æqualis; propterea quod Mϵ = eſt $\epsilon\eta$.

TAB. XXXVIII. Fig. 2.

* pag. 558, lin. 16, *ſeq.*

(*a*) Vide Barrow. *Lection. Geom.* pag. 123.

$\epsilon\eta$. *Unus igitur caſus curvæ logarithmicæ commode invenitur per regulam primam*, &c. ut ſupra. *

Hæc autem regula primum oſtendit modum quo Problema ſolvitur.

REGULA SECUNDA.

TAB. XXXVIII. Fig. 2 & 4. Deſcribatur curva quæcunque $\kappa M \mu$ per punctum M tranſiens, in *Fig.* 2, vel $\kappa n c$, $m p \mu$, in *Fig.* 4, ubi curva invenienda duobus cruribus eMF, EMF conſtat; ut curvarum $\kappa M \mu$, & $\kappa n c$, $m p \mu$ ordinatæ ut Pν, Qρ, quæ æqualiter a puncto M principio abſciſſæ diſtant, ſint æquales, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitæ; ita ut mutato abſciſſæ ſigno ordinatæ ſignum etiam mutetur.

TAB. XXXVIII. Fig. 5. Exponatur porro [in *Fig.* 5] hyperbola æquilatera ab cujus axis transverſus ag, conjugatus hq, centrum d, aſymptoti dr, ds; ſumatur $dt =$ Pν, & ducatur tvw ad hq perpendicularis, juncta dw, ſumatur quoque $dx =$ Mn, & ducatur xy, item rectæ lineæ hq perpendicularis, juncta dy. Jam ſit curva KL [in *Fig.* 2] vel Kk Ll [in *Fig.* 4] talis ut ſpatium ΠMPW æquale ſit ſpatio adw, ſi curva $\kappa\mu$ per punctum M tranſit, aliter æquale ſpatio $daw - day$; hac enim ratione curvæ KL, & Kk Ll non deſinent conditionem habere, quæ in regula priori requiritur, nempe ut ordinatæ ad æquales diſtantias a puncto M ſint æquales, & ab eadem abſciſſæ parte poſitæ. Nam area hyperbolica adw affirmativa eſt, quando dt vel Pν eſt affirmativa, & eadem area negativa eſt, quando dt vel Pν negativa eſt, quia area tota hyperbolica ab eadem parte lineæ hq jacet; ideoque area curvarum KL, Kk Ll ad ordinatam MΠ terminata ſignum ſuum mutabit, quando abſciſſa MP, magnitudine ſervata, ſignum mutat; & curvæ ordinata nec magnitudinem nec ſignum mutabit, mutatione ſigni abſciſſæ. Sit porro $ad^2 =$ parallelogrammo $\Gamma\Xi$ in hyperbola priori: quo efficietur ut $tw + tv$ ſit ad ad ut $\Gamma\Sigma$ ad $\Gamma\Lambda$, ſi igitur $\Gamma\Lambda$ fiat $= ad$, erit $tw + tv = \Gamma\Sigma = $ PΦ. Porro ducantur ordinatæ $\epsilon\eta\zeta$, $\alpha\beta\gamma$ ordinatæ MΨ proximæ; deinde in *Fig.* 2 ubi curva $\omega\Psi\Omega$ ſimplex eſt, cum $\epsilon\eta$ ſit ad $\alpha\beta$ ut ſpatium M$\Psi\zeta\epsilon$ ad ſpatium M$\Psi\gamma\alpha$, erit $\epsilon\eta = \alpha\beta$; unde & earum utraque $=$ M$\epsilon =$ Mα. Ideoque $\epsilon\eta$ ad M$\Psi\zeta\epsilon$: MΨ ut radius ad ſinum anguli ſub NMΨ, & ubique PI ad M$\Psi\Phi$P : MΨ in eadem ratione. In *Fig.* 4 ubi curva $\omega\Psi\Psi\Omega$ ex duobus cruribus compoſita eſt, $\epsilon\eta$ eſt ad $\alpha\beta$ ut ſpatium ΨM$\epsilon\zeta$ ad ſpatium ΨM$\alpha\gamma$, ſive ut MΨ ad MΨ, propterea quod M$\epsilon =$ Mα. Cum igitur neceſſe ſit, ut $\epsilon\eta \times \alpha\beta =$ ſit Mϵ^2, ſcilicet ut crura MF, ME in angulo propoſito ſe mutuo interſecent, erit ratio $\epsilon\eta$ ad Mϵ ſubduplicata rationis $\epsilon\eta$ ad $\alpha\beta$, vel ſubduplicata rationis MΨ ad MΨ: ideoque $\epsilon\eta$ ad

* pag. 559, lin. 4, 5.

ad ſpatium M$\Psi\zeta\epsilon$ applicatum ad mediam proportionalem inter MΨ, MΨ, ut radius ad ſinum anguli ſub NMΨ; & generatim PI ad ſpatium M$\Psi\Phi$P applicatum ad mediam proportionalem inter MΨ & MΨ in eadem ratione. Eſt autem M$\Psi = yx + dx$, & M$\Psi = yx - dx$, & ad media eſt proportionalis inter $yx + dx$ & $yx - dx$. Unde utrobique dictis ad, a, dt vel Pν, R; erit P$\Phi = \sqrt{(aa + RR)} + R$; $R = \frac{1}{2}a($P$\Phi : a - a :$ P$\Phi)$ & PI ad MP$\Phi\Psi$: a, ut radius ad ſinum anguli ſub NMΨ. *Regula* igitur *ſecunda pendet a prima & curvam Problemati ſatisfacientem ſine ope ſpatii hyperbolici*, &c. ut ſupra *. Nam hic ſine ſpatio hyperbolico curva invenitur, cujus quadratura Problema ſolvitur.

Duæ autem ſunt in hac regula formulæ. Formula prior nimirum P$\Phi = \sqrt{(aa + RR)} + R$, curvarum geometrice rationalium, quæ maxime hic requiruntur, inventioni accommodatur; facile enim eſt ita ſumere quantitatem indeterminatam R, ut curva $\omega\Psi\Phi\Omega$ quadraturam admittat.

Ne caſus magis compoſiti memorentur, ponatur R, vel Pν, $= cz^{m:n}$, ut m & n numeri ſint impares, vel inter ſe primi, vel eorum alter unitas: hac enim ratione curva, cujus ordinata eſt Pν, conditionem habebit in hac regula, neceſſariam, & erit P$\Phi = \sqrt{(aa + RR)} + R = \sqrt{(aa + ccz^{2m:n})} + cz^{m:n} = z^{m:n}\sqrt{(cc + aaz^{-2m:n})} + cz^{m:n}$. Si igitur $m:n + 1$ ſit vel numero $-2m:n$ æqualis, vel ejuſdem multiplex, id eſt ſi ſumatur $m = -1$, & n numero cuilibet impari æqualis; pars ordinatæ $z^{m:n}\sqrt{(cc + aaz^{-2m:n})} + cz^{m:n}$ ſub vinculo incluſa, ideoque & ordinata tota quadraturam admittet. (*b*)

Verbi gratia, ponatur $m:n = -\frac{1}{3}$, $c = 1$, & P$\Phi = z^{-\frac{1}{3}}\sqrt{(1 + aaz^{\frac{2}{3}})} + z^{-\frac{1}{3}}$. Unde erit area M$\Psi\Phi$P $= (1 + aaz^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} : aa + \frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}$ & PI $= (1 : aa + z^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{2}{3}} : 2a$, curvaque quæſita hac æquatione comprehendatur $a \times$ PI$^2 - 3z^{\frac{2}{3}} \times$ PI $= 1 : a^3 + 3z^{\frac{2}{3}} : a^3 + 3z^{\frac{4}{3}} : 4a + az^2$. In hac æquatione cum $z^{\frac{2}{3}}$ ſignum non mutabit, mutatione ſigni abſciſſæ z; pro eadem ipſius magnitudine tam negativa quam affirmativa PI eandem habebit magnitudinem, & ſub eodem ſigno; unicuique autem magnitudini abſciſſæ z reſpondet & affirmativa & negativa ordinata: adeo ut curva quæſita habebit formam hic appoſitam [in *Fig.* 6] e tribus

Bbbb 2 conſtans

* pag. 558, lin. 22, *ſeq.*

(*b*) Vid. in Tract. NEWTONI, *de Quadr. Curv.* Tabulam curvarum ſimpliciorum quæ quadrari poſſunt.

conſtans cruribus abc, de, df punctis b, d æqualiter a puncto M diſtantibus; quippe eſt $Md = Mb = 1 : a^3$, quando enim eſt $z = 0$, erit $PI^2 = 1 : a^6$ & $PI = \pm 1 : a^3$.

Hæc autem regulæ hujus formula prior ſecundum exhibet curvas quæſitas inveniendi modum.

In formula poſteriori, cum R ſit $= \frac{1}{2} a (P\phi : a - a : P\phi)$, R vel $P\nu$ ejuſdem magnitudinis manebit, ſed ſignum mutabit, quando abſciſſa magnitudinem ſuam ſigno mutato retinet, ſi $P\phi$ talis ſumatur, ut, mutando abſciſſæ ſignum, $P\phi : a$ convertatur in $a : P\phi$, & contra ut $a : P\phi$ convertatur in $P\phi : a$. Et hæc formula poſterior tertium continet Problema ſolvendi modum.

Verbi cauſa, ſit $P\phi = a(c-z) : (c+z)$, quando z eſt affirmativa, & erit R, vel $P\nu$, eodem tempore $= \frac{1}{2} a \left(\frac{c-z}{c+z} - \frac{c+z}{c-z}\right)$, quando autem z negativa eſt, fiet $P\phi = a(c+z) : (c-z)$, & R vel $Q\varrho = \frac{1}{2} a \times \left(\frac{c+z}{c-z} - \frac{c-z}{c+z}\right)$. Hinc autem R æqualis erit $\mp 2acz : (cc - zz)$ & $Rzz \mp 2acz = ccR$; ideoque curva $\varkappa M \mu$ linea tertii ordinis, imo ſpecies earum quinquageſima nona; propterea quod æquationis $ccRR + aacc = 0$, radices ſunt impoſſibiles (c). Linea autem curva hinc invenienda, ſi fiat [in *Fig.* 7] NM vel $MO = c$, logarithmica eſt, cui recta AB eſt aſymptotos. Cum enim $P\phi$ ſit $= a(c-z) : (c+z)$ erit eadem $= ac : (c+z) - az : (c+z)$. Si igitur [in *Fig.* 8] in linea recta quacunque $\alpha\varepsilon$ ſumatur $\alpha\varkappa = OM = c$, & ei ad perpendiculum erigantur $\alpha\beta$, $\varkappa\mu$ quarum $\varkappa\mu$ ſit $= a$, & ſi aſymptotis $\alpha\varepsilon$, $\alpha\beta$ per punctum μ deſcribatur hyperbola $\zeta\eta$, & ſumpta $\varkappa\nu = MP = z$, ducatur $\nu\rho$ aſymptoto $\alpha\beta$ parallela; parti $ac : (c+z)$ ordinatæ $P\phi$ reſpondet area, quæ erit ad aream $\varkappa\mu\rho\nu$ ut ſinus anguli ſub NPI ad radium, & alteri parti $az : (c+z)$ ejuſdem ordinatæ reſpondet area, quæ erit ad $a \times \varkappa\nu - \varkappa\mu\rho\nu$ in eadem ratione (d). Unde PI, quæ eſt ad $MP\phi\psi : a$ ut radius ad ſinum anguli ſub $NM\psi$, erit $= 2\varkappa\mu\varrho\nu : a - \varkappa\nu$. Si igitur ſumatur $O\varsigma = OM$, & ducatur ςM ordinatæ PI recto productæ occurrens in χ, ut ſit $P\chi = PM = \varkappa\nu$, erit $\chi I = 2\varkappa\mu\varrho\nu : a$; ideoque linea MI logarithmica, cui AB aſymptotos eſt, & ςM ordinatim applicata, efficiens cum aſymptoto AB angulum ſub $A\varsigma M$ verſus contingentem æqualem dimidio anguli ſub AON. *Alter igitur hujus lineæ caſus deducitur*, &c. ut ſupra. †

TAB. XXXVIII. *Fig.* 7.

Magis

(c) Vid. NEWTONI *Enumer. linearum tertii ordinis* ad Fig. 63.

(d) Vid. NEWTONI *de Quad. Curv.* Tabul. Curv. ſimpl. quæ cum Circulo & hyperbola comparari poſſunt, forma prima.

† pag. 559, lin. 6, *ſeq.*

Magis generatim, ſi r ordinatam curvæ alicujus denotat, quæ inſtar curvarum $\varkappa M \mu$, & $\varkappa nc$, $mp\mu$ ad abſciſſam NO deſcripta ordinatas habeat æquales, quæ æqualiter diſtant a puncto M, ſed a contrariis partibus abſciſſæ poſitas, poni poteſt ordinata $P\phi = a \times$

$$\left(\frac{(b \mp cr + drr \mp er^3, \&c) \times \left((f \mp gr + \&c)^{\lambda} (h \mp kr + lrr \mp \&c)^{\mu}\right)^{\nu}}{(b \pm cr + drr \pm er^3, \&c) \times \left((f \pm gr + \&c)^{\lambda} (h \pm kr + lrr \pm \&c)^{\mu}\right)^{\nu}}\right)$$

Ex priori hujus regulæ ſecundæ formula deducitur quoque Theorema, cujus ſupra ſit mentio, ad inveniendas curvas tam rationales quam irrationales utile, quod quartus erit modus Problema ſolvendi.

THEOREMA.

Quoniam eſt $P\phi = \sqrt{(aa + RR)} + R$, & $R = P\nu$, manifeſtum eſt, ſi $R : a$ vel $P\nu : a$ ſit ut fluxio ordinatæ, quæ abſciſſæ ſuæ ad perpendiculum inſiſtat, alicujus curvæ, erit $\sqrt{(aa + RR)} : a$, ut ejuſdem curvæ fluxio; curvæ autem hujus ordinata æqualis erit areæ curvæ $\varkappa\mu$ ad a applicatæ, ſi angulus ſub $MP\nu$ rectus ſit, & cum area curvarum [in *Fig.* 2 & 4.] $\varkappa M \mu$, & $\varkappa nc$, $mp\mu$ eodem ſigno afficiatur, tam quando abſciſſa eſt affirmativa, quam quando eſt eadem negativa, quoniam areæ ad diverſas abſciſſæ partes in illis diverſis caſibus jacent; & præterea cum eiſdem abſciſſæ magnitudinibus areæ æquales reſpondeant, curvæ, quales Problema requirit, inveniri poſſunt curvarum ope, quarum ordinatæ ad eaſdem abſciſſæ magnitudines æquales ſint, & ab eadem abſciſſæ parte poſitæ, ſi modo ordinatæ inſiſtunt abſciſſæ ad perpendiculum.

TAB. XXXVIII. *Fig.* 2 & 4.

Deſcripta ſit hujuſmodi curva no, quæ tangat abſciſſam in puncto M [ut in *Fig.* 9.] ſi evaneſcat, quando abſciſſa eſt $= 0$, fluens quantitas fluxioni longitudinis curvæ no reſpondens; aliter, quæ habeat ordinatam primam Mm [ut in *Fig.* 10] æqualem magnitudini fluentis iſtius quantitatis, quando abſciſſa eſt $= 0$. Erigantur ordinatæ Pp, Qq; deinde erit PI curvæ quæſitæ ordinata, quæ ab altera parte puncti M jacet, vel $= Mp + Pp$, vel $= Mmp + Pp$; ordinata autem QR, quæ ab altera parte puncti M cadit, vel $= Mq - Qq$, vel $= Mmq - Qq$.

TAB. XXXVIII. *Fig.* 9.

Obſervandum autem eſt hoc Theorema aliquando partem duntaxat curvæ quæſitæ deſcribere.

Ex ratione autem, qua hoc Theorema inveſtigatur, manifeſtum eſt duo crura curvæ hic deſcriptæ ejuſdem lineæ eſſe partes: nimirum utriuſque naturam eadem æquatione definiri. Hanc autem curvam in ſitu inverſo diſpoſitam ſe interſecare in angulo æquali angulo ſub NOB inde manifeſtum eſt, quod rectangulum ſub fluxione PI & ſub fluxione QR,

 ordi-

ordinatarum ſcilicet æqualiter a puncto M diſtantium, æquale eſt quadrato fluxionis abſciſſæ: ſi enim curvæ no ordinatæ wr, xt applicentur ordinatis Qq, Pp proximæ, & Px, Qw ſint æquales, & ducantur rs, tv abſciſſæ NO parallelæ, erunt triangula ptv, qrs rectangula ſimilia & æqualia: *in omni autem triangulo rectangulo quadratum ab alterutro latere angulo recto adjacenti æquale eſt rectangulo ſub ſumma alterutrius lateris angulo recto adjacentis laterisque angulo ei ſubtendentis, & ſub differentia eorumdem laterum.* Igitur $tv^2 = Px^2 = (pt + pv) \times (pt - pv) = (pt + pv) \times (qr - qs)$: eſt autem ultima ratio Px ad $pt + pv$ ea quam fluxio abſciſſæ habet ad fluxionem ordinatæ PI; & ratio Px vel Qw ad $qr - qs$ ea quam fluxio abſciſſæ habet ad ordinatæ QR fluxionem. Unde conſtat propoſitum. *Regula* igitur *ſecunda Theorema*, &c. ut ſupra. †

Jam ſi no ſit circuli circumferentia, linea EF cycloïs erit, quando angulus ſub NOB vel ſub NPI rectus eſt. Porro ſi curvæ no longitudo cum recta conferri poteſt, quarum curvarum ſimpliciſſima eſt parabola ſemicubica, curva inventa rationalis erit. Speciatim parabola ſemicubica, ſi rite diſponatur, ejus curvæ partem dimidiam exhibebit, quam in exemplum formulæ prioris regulæ ſecundæ delineavimus; ſcilicet
TAB. XXXVIII. Fig. 6. [in *Fig.* 6] crus de, partemque inferiorem bc cruris abc. Reliquæ autem illius partes deſcribi poſſunt, ſi retro producatur ordinata IP donec pars producta æqualis ſit $Mmp - Pp$, & producatur RQ ab altero abſciſſæ latere, donec pars producta æqualis ſit $Mmq + Qq$.

Nunc tranſeundum eſt ad regulam tertiam, quæ etiam curvas geometrice rationales largitur.

REGULA TERTIA.

Regula hæc tertia duos quoque complectitur Problema ſolvendi modos a prioris regulæ formulis Propoſitione nona tractatus *De quadratura curvarum* NEWTONI derivatos.

Propoſitione iſta ad formulam regulæ præcedentis priorem adhibita, invenitur area curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $\sqrt{(aa + RR)} + R$, æqualis areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $\frac{dz}{dR} \times (\sqrt{(aa + RR)} + R)$. Hinc autem quinto modo ſolvitur Problema.

Verbi cauſa, ut exemplum generale, quod antea (*e*) exhibui, inveſtigetur, poſitis $MP = z$, $P\nu = R$, ut prius, fiat $dz : dR = R^{(m-n):n} \times (c + dR^2)$, & erit $z = R^{m:n} \times (nc : m + ndR^2 : (m + 2n))$. Sint autem m & n numeri impares, vel inter ſe primi, vel eorum alter unitas; ut ſigna abſciſſæ z & ordinatæ R ſimul mutentur, ſicut in regula priori requi-

† pag. 558, lin. 26, *ſeq.* (*e*) In *Act. Erud.* Apr. 1721. Supra N°. CXXIV. pag. 520.

requiritur; jam erit ordinata $\frac{dz}{dR} \times (\sqrt{(aa + RR)} + R) = R^{(m-n):n} \times (c + dR^2) \times \sqrt{(aa + RR)} + R^{m:n} \times (c + dR^2)$; area igitur curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $\sqrt{(aa + RR)} + R$, æqualis erit areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $R^{(m-n):n} \times (c + dR^2) \times \sqrt{(aa + RR)} + R^{m:n} \times (c + dR^2)$, ſi modo hæc poſterior ordinata cum abſciſſa ſua angulum contineat æqualem angulo ſub $NM\psi$; unde hujus poſterioris curvæ quadratura linea exhibetur Problemati ſatisfaciens. Erit autem hæc linea curva geometrice irrationalis, niſi m & n certos quoſdam numeros deſignant, vel certa quædam ſit relatio inter coefficientes c, d; hæ autem conditiones ratione ſequenti inveniuntur. Erit (*f*) area curvæ, cujus abſciſſa R & ordinata $R^{m:n} \times (c + dR^2) + R^{(m-n):n} \times (c + dR^2) \times \sqrt{(aa + RR)}$, ad $R^{(m+n):n} \times (nc : (m + n) + ndR^2 : (m + 3n)) + R^{m:n} \times (aa + RR)^{\frac{3}{2}} \times (nc : maa + \frac{d - (m + 3n)\, c : maa}{(m + 2n)\, aa : n} R^2 + \&c.)$ ut ſinus anguli ſub $NM\psi$ ad radium. Hæc autem ſeries terminabitur, & quadraturam finitam dabit; ſi n ſit unitas & m numerus negativus ternario major, vel ſi ultimus terminorum hic ſcriptorum ſit nihilo æqualis, id eſt, ſi ſit $d = (m + 3n)\, c : maa$, vel ſi ſit $d = 0$, $n = 1$, & $m = -3$. Et hic quidem ultimus caſus curvam exhibet, quæ Theoremate præcedenti a parabola ſemicubica invenitur.

Magis generatim ponere licet $\frac{dz}{dR} = R^{(m-n):n} \times (c + dR^2 + eR^4 + \&c. \ldots + fR^p)$, ubi p numerum quemcunque parem denotat; unde fiat $z = R^{m:n} \times (nc : m + ndR^2 : (m + 2n) + neR^4 : (m + 4n) \ldots\ldots + nfR^p : (m + pn))$ & curvæ $\omega\Omega$ ordinata $= R^{(m-n):n} \times (c + dR^2 + eR^4 \ldots\ldots + fR^p) \times (\sqrt{(aa + RR)} + R)$. Hinc (*g*) ſi n ſit unitas & m numerus negativus numero $p + 1$ major, curva dabitur geometrice rationalis, vel ſi certa quædam relatio ſit inter coefficientes c, d, e, &c. . . . . . f, quæ relatio facile invenitur ut antea.

Porro ad alteram regulæ ſecundæ formulam adhibendo Propoſitionem nonam memoratam libri *de quadratura curvarum*, ſextus oritur Problema ſolvendi modus.

Littera r denotante ut ſupra, fieri poteſt ordinata $P\phi = a \times \frac{b + cr + drr + \&c.}{b - cr + drr - \&c.}$ area

(*f*) Per Prop. 5 *Quadr. Curv.* NEWTONI.
(*g*) Per Prop. proxime citatam.

area curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $P\phi$, æqualis erit areæ curvæ cujus abſciſſa eſt r & ordinata $a \times \frac{dz}{dr} \times \frac{b + cr + drr + \&c}{b - cr + drr - \&c}$. Ponatur igitur $\frac{dz}{dr} = r^{(m-n):n} \times ((b + cr + drr + \&c) \times (b - cr + drr - \&c))^p$ $= r^{(m-n):n} \times (bb + (2bd - cc)rr + ddr^4 + \&c)^p$, & curva, cujus ordinata eſt r conditionem hic neceſſariam habebit. Erit enim $z = r^{m:n} \times (bb + (2bd - cc)\, rr + ddr^4 + \&c)^{p+1}) \times (A + Brr + Cr^4 + \&c)$; cujus ſeriei coefficientes A, B, C &c. dantur per propoſitionem quintam Tractatus *de Quadratura Curvarum*. Manifeſtum autem eſt nec terminos hujus ſeriei, nec quantitatem $(bb + (2bd - cc)rr + ddr^4 + \&c)^{p+1}$, ſigna ſua mutare mutatione ſigni quantitatis r; quantitatis autem $r^{m:n}$, ſi m, n numeri ſint impares, ſignum mutabit, quando ipſa r ſignum mutat; ideoque ordinata r & abſciſſa z ſigna ſimul mutabunt. Ordinata autem $a \times \frac{dz}{dr} \times \frac{b + cr + drr + \&c}{b - cr + drr - \&c} =$ erit $ar^{(m-n):n} \times (bb + (2bd - cc)\, rr + ddr^4 + \&c)^{p-1} \times (b + cr + drr + \&c)^2$. Et hinc facile inveniri poſſunt curvæ rationales.

Pro exemp'o ſimplici ponatur $p = 1 = m = n$, d, &c $= 0$; unde erit $dz : dR = bb - ccrr$, & $z = bbr - \frac{1}{3} ccr^3$. Ordinata autem curvæ metiendæ $= abb + 2abcr + accrr$; ejuſdem igitur area eſt ad $abbr + abcrr + \frac{1}{3} accr^3$, ut ſinus anguli ſub NM$\psi$ ad radium; ideoque erit PI $= bbr + bcrr + \frac{1}{3} ccr^3$. Hinc autem invenitur pa-
TAB. XXXVIII. rabolam ſemicubicam Problemati ſatisfacere, quam ita deſcribere opor-
Fig. 11. tet. Data [in Fig. 11] linea recta AB, & in ea puncto C, una cum linea recta CD angulum ſub BCD cum linea CB conſtituente æqualem angulo, in quo curva ſe interſecare requiritur: Ducatur ad libitum HGI ad CD parallela, ſumaturque in ea GH $=$ 2CG; deinde dividatur angulus ſub ACD in duas partes æquales linea recta CE, & denique ad diametrum HI & verticem H deſcribatur parabola ſemicubica KHL, quæ tranſeat per punctum C, ita ut CE ordinatim applicetur ad diametrum HI. Hæc parabola ad eandem lineam ſimiliter applicata, ſed ſitu inverſo, ſe interſecabit in angulo æquali angulo ſub BCD.

Si placet curvas hac regula inventas Theoremate præcedente conſtruere, ex iis, quæ hic tradita ſunt, curva huic negotio apta inveniri poteſt erit enim curvæ illius ordinata æqualis areæ curvæ $x\mu$ ad a applicatæ, quando angulus ſub MPν rectus eſt. Verbi cauſa, hujus areæ fluxio, nimirum P$\nu \times dz$ in exemplo ſecundo prioris partis hujus regulæ erit $=$

$= R\,dR \times R^{(m-n):n} \times (c + dR^2 + eR^4 \ldots + fR^p) = R^{m:n} dR \times (c + dR^2 + eR^4 \ldots + fR^p)$; ideoque curvæ hic requiſitæ ordinata erit $= \frac{1}{a} R^{(m+n):n} \times (nc : (m+n) + ndR^2 : (m + 3n) + neR^4 : (m + 5n) \ldots + nfR^p : (m + pn + n))$.

In exemplo poſterioris partis hujus Regulæ erit $R = \frac{1}{2} a\, (P\phi : a - a : P\phi) = (2bcr + 2cdr^3 + \&c) : (bb + (2bd - cc)\, rr + ddr^4 + \&c)$; ideoque $R\,dz = r^{m:n} dr \times (2bc + 2cdr^2 + \&c) \times (bb + (2bd - cc)\, rr + ddr^4 + \&c)^{p-1}$; hæc igitur eſt fluxio ordinatæ curvæ quæſitæ.

Si ſit $m = 1 = n = p$, d, &c $= 0$, erit $R\,dz = 2bcr\,dr$, & ordinata curvæ quæſitæ $= bcrr$; quoniam igitur $z =$ erit $bbr - \frac{1}{3} ccr^3$, erit curva quæſita in hoc caſu parabola divergens cum nodo, quæ definitur hac æquatione $3ezz = y^3 - 2eyy + eey$ (*b*). Et hac curva deſcribetur parabola ſemicubica ſupra inventa.

Verbi cauſa, ad rectam lineam [in Fig. 12.] AB ducatur perpendi- TAB.
cularis CD; & ad illam ut axim deſcribatur ejuſmodi parabola divergens XXXVIII.
FECEG. Deinde ducatur ad libitum HI angulum quemcunque datum cum Fig. 12.
rectâ AB conſtituens, & ducatur HKLM ad CD parallela; deinde ſumatur HN $=$ HK $+$ arc. CK, HO $=$ HL $+$ arc. CKL, & ab altera parte puncti H, HP $=$ CEM $-$ HM; & curva hac ratione deſcripta parabola ſemicubica erit.

Hinc apparet quomodo curvæ, quarum inveſtigationi regula hæc tertia aptatur, Theoremate præcedenti conſtrui poſſunt; poſtquam earum formæ, cognoſcuntur; ſed hæ curvarum formæ a quibus rationales deriventur, regula hac tertia optime inveniuntur.

Hæ ſunt tres regulæ, quarum ſupra fit mentio. Ultima ſententia quæ ſub notis fictis celata fuit, exemplo ſequenti illuſtrari poteſt. Sit y vel $= a + bx + \surd(c + 2dx + ex^2)$ vel $= (a + bx + cxx) : (d + ex)$, quæ duæ æquationes omnes complectuntur ſectiones conicas. Inde vero inveniemus $ddy : dy$, vel $= (ec - dd)\, dz : (d + ex + b\surd(c + 2dx + exx) \times (c + 2dx + exx))$ vel $= (2cdd + 2aee - 2bde)\, dz : (d + ex : (bd - ae + 2cdx + cexx))$ quæ æquationes oſtendunt in nulla ſectione conica, quomodocunque diſponatur, quantitatem conditionem habere, quam hoc Problema requirit; ideoque nullam ſectionem conicam Problemati ſatisfacere. Quod comprobari etiam poteſt examinando rectangulum ſub fluxionibus primis ordinatarum æqualiter ad diverſas partes a principio abſciſſæ diſtantium.

(*b*) Vid. *Enum. lin. tert. ordinis.* Fig. 13.

Hinc autem cognoſcitur nullam lineam curvam geometrice rationalem Problema ſolvere, quæ parabola ſemicubica ſit ſimplicior.

Si vero talis inter quantitates a, b, c, d, e relatio ſtatui potuiſſet, ut $ddy:dy$ conditionem in hoc Problemate neceſſariam obtineret, nempe ut quantitas, quæ in dz ducitur, eadem eſſe potuiſſet, & ſub eodem ſigno, pro eadem magnitudine tam negativa quam affirmativa abſciſſæ z; quo eveniret ut $ddy:dy$ foret $= -\, ddv:dv$, ſi abſciſſa in oppoſitas partes a ſuo principio, æqualibuſque momentis fluere ponitur; tum profecto ſectio conica hinc determinanda vel Problema ſolveret, vel ſectionis Problemati ſatisfacientis ordinata ad ordinatam hujus rationem haberet datam.

Jam vero his regulis alias aliquot, quas ab amico accepi, ad Problema ſolvendum adjungam.

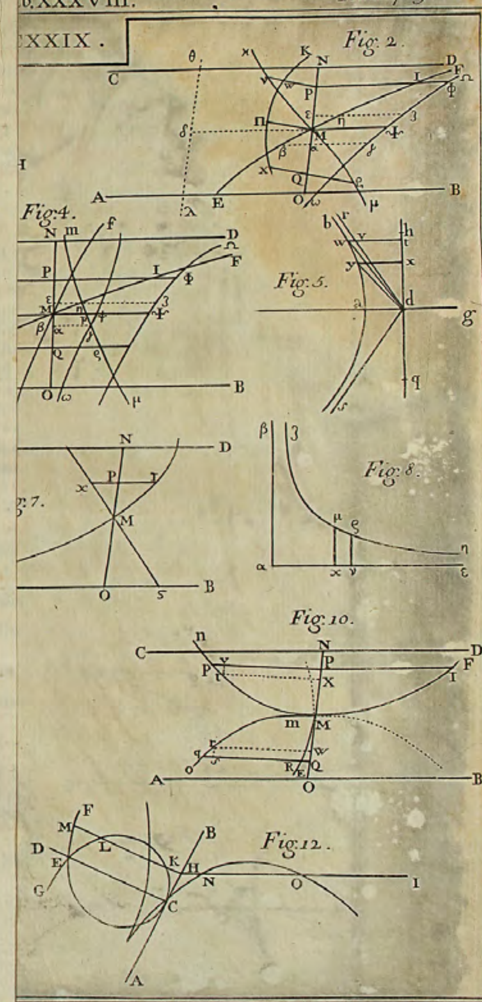
REGULA QUARTA

TAB. XXXIX. N°. CXXX. *Fig.* 13. Iiſdem poſitis ac in regula prima, ſit [in Fig. 13.] NO ad AB, CD perpendicularis; ſint PI, QR ordinatæ æqualiter a puncto M diſtantes, & ſit curva GH per punctum I ducta ſimilis & æqualis curvæ fEF. Ordinatis PI, QR parallelæ & proximæ ducantur πjl, δr, & lineæ rectæ Ik, Rs lineæ NO parallelæ. Angulus ſub sRr = eſt angulo ſub kIl; unde anguli ſub jIk, sRr ſimul ſumpti æquales ſunt angulo dato ſub jIl; & quantum angulus ſub jIk dimidium anguli ſub jIl ſuperat, tantum angulus ſub sRr ab eodem dimidio deficit. Si igitur [in Fig. 14.] radio quolibet mn circuli arcus no deſcribatur, & ſumatur angulus ſub nmp = dimidio anguli dati ſub jIl, angulus ſub nmq = angulo ſub jIk, & angulus ſub nmt = ei ſub sRr, ſectores qmp, pmt erunt æquales.

TAB. XXXIX. N°. CXXX. *Fig.* 14. Poſita autem Ik = Rs = 1, erit jk ut tangens anguli ſub jIk vel anguli ſub nmq, & rs erit ut tangens anguli ſub sRr vel anguli ſub nmt; ideoque & fluxio ordinatæ PI erit ut tangens anguli ſub nmq, nimirum ut nv; & fluxio ordinatæ QR ut tangens anguli ſub nmt, nimirum ut nw; curvæ igitur $\Psi\Phi\Omega$, cujus areæ ordinata PI proportionalis eſt, ordinata PΦ poteſt eſſe æqualis tangenti nv, & ordinata QΨ ab altera parte puncti M = nw. Quoniam autem ſectores pmq, pmt ſunt æquales, conſtitui poteſt ſector pmq æqualis areæ MπWP curvæ cujuſcunque KL conditionem habentis in regula prima indicatam; & ſector pmt æqualis areæ MπXQ ejuſdem curvæ. Denique ſi ducatur linea recta $\epsilon\eta\zeta$ lineæ MΨ parallela & proxima; cum angulus ſub ϵMη = ſit dimidio anguli ſub jIl, vel angulo ſub nmz, erunt triangula ϵMη, nmz ſimilia, & prima ratio $\epsilon\eta$ ad ϵM eadem cum ratione zn ad nm; ideoque $\epsilon\eta$ = M$\Psi\zeta\epsilon$: nm, propterea quod ϵM = eſt M$\Psi\zeta\epsilon$: MΨ & MΨ = nz. Hic autem habetur ſeptimus modus, quo Problema ſolvi poteſt.

Si

b.XXXVIII. Tom.II.pag.570.



ECTORIIS

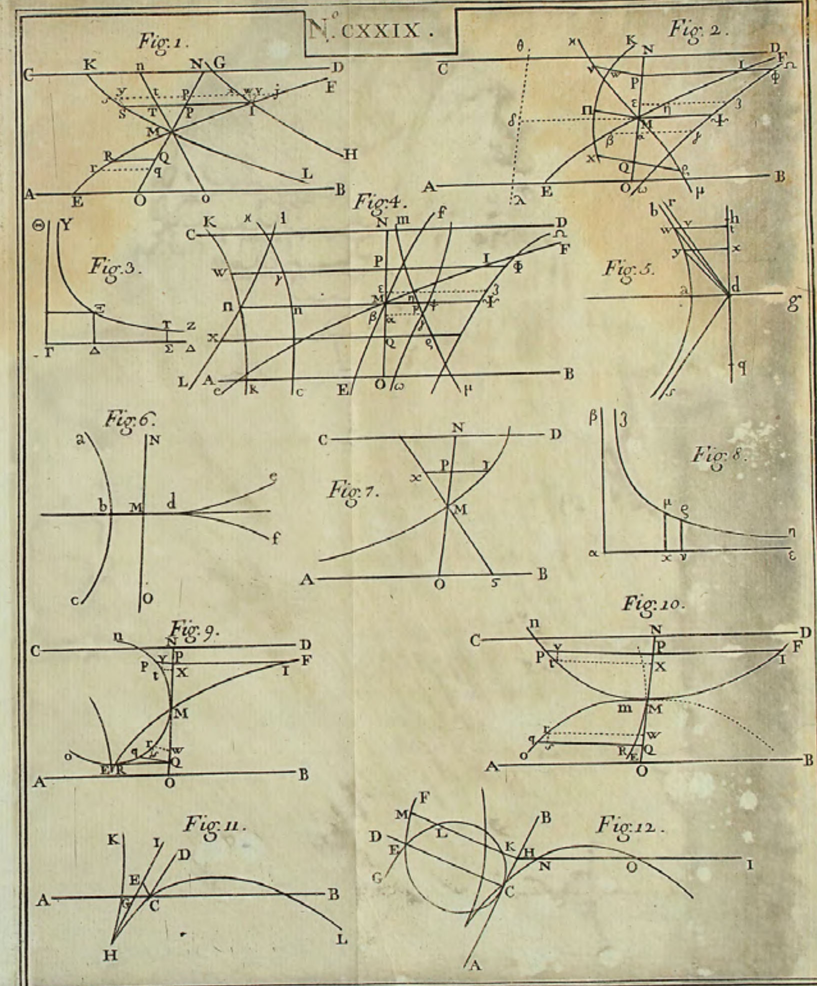
m geometrice rationalem
simplicior.
relatio statui potuisset,
ssariam obtineret, nem-
sse potuisset, & sub eo-
va quam affirmativa abs-
— $ddv : dv$, si abscissa
mentis fluere ponitur; tum
ema solveret, vel sectionis
s rationem haberet datam.
ico accepi, ad Problema

R T A

ig. 13.] NO ad AB,
ualiter a puncto M dis-
similis & æqualis curvæ
næ ducantur πjl, δr,
Angulus sub sRr = est
mul sumpti æquales sunt
b jIk dimidium angu-
em dimidio deficit. Si igi-
describatur, & sumatur an-
s sub nmq = angulo sub
np, pmt erunt æquales.
gens anguli sub jIk vel
sub sRr vel anguli sub
ngens anguli sub nmq,
ngens anguli sub nmt,
æ ordinata PI propor-
nti nv, & ordinata Qx
autem sectores pmq,
æqualis areæ MπWP
regula prima indicatam;
curvæ. Denique si du-
oxima; cum angulus sub
sub nmz, erunt trian-
εM eadem cum ratio-
propterea quod εM =
betur septimus modus,

Si

N°. CXXIX.



Si loco cu
nmz eadem
demque curv
ma solvit. F
det; si enim
sit mn, &
deinde $q\Phi v$,
est arcui circul

Describatur
Fig. 15] radic
δ; sit autem
ducatur $\epsilon\zeta$ ad
ejus naturæ, u
culi arcu [*Fig.*
producatur mp
mp, a; $m\theta$, b
ut $m\theta : mn$ [mp
$z\xi = mv$ [$\sqrt{(}$
& denique $y =$
Hinc autem

Per propositi
curvæ, cujus abs
æqualis est areæ
$\sqrt{(aa - RR}$
solvendi.
Litteræ m &
$R^{(m-n):n} \times ($
$(bb - RR)$ fiet
$RR)^{p-1} \times \sqrt{}$
rum quemcunqu
lis invenietur,

(i) Vid. Bar

Si loco curvæ KL linea recta ſumatur, quicunque ſit angulus ſub nmz eadem deſcribetur curva; adeo ut hac ratione invenitur una eademque curva, quæ diverſis ſitibus in angulo quocunque dato Problema ſolvit. Hæc autem curva a circuli & hyperbolæ quadratura dependet; ſi enim ducantur $m\tau$, $n\sigma$ ad mn perpendiculares, quarum $n\sigma =$ ſit mn, & aſymptotis mn, $m\tau$ hyberbola $\omega\sigma\psi$ deſcribatur, & deinde $q\Phi v$, $p\theta\varsigma$ ducantur lineis $m\tau$, $n\sigma$ parallelæ; quando MP = eſt arcui circuli pq, erit ordinata PI $= \theta\Phi v\varsigma : mn$, ſi $mn =$ ſit 2 Mπ (*i*).

REGULA QUINTA.

Deſcribatur [in *Fig.* 13.] curva $\varkappa M\mu$ ut in regula ſecunda, & [in *Fig.* 15] radio $= mn$ deſcribatur ſemicirculus $\alpha\beta\gamma$, cujus centrum δ; ſit autem $\delta\beta$ diametro $\alpha\gamma$ perpendicularis. Sumatur $\delta\varepsilon = P\nu$, ducatur $\varepsilon\zeta$ ad $\delta\beta$ parallela, jungaturque $\delta\zeta$. Deinde ſit curva KL ejus naturæ, ut area MπWP ſemper æqualis ſit ſectori $\beta\delta\zeta$. In circuli arcu [*Fig.* 14] no, ductis $p\eta$ ſinu arcus pq, & $p\theta$ ſinu arcus np, producatur mp ad z, ducaturque $z\xi$ ad $p\eta$ parallela, Porro dictis $mn = mp$, a; $m\theta$, b; nz, c; $p\eta$, R; nv; y; erit ut $mp : p\eta = mz : z\xi$, ſed ut $m\theta : mn\ [mp] = mn : mz$; ex æquo igitur ut $m\theta\ [b] : p\eta\ [R] = mn : z\xi = mv\ [\sqrt{(aa+yy)}] : zv\ [y - c]$ unde $by - bc = R\sqrt{(aa+yy)}$, & denique $y = nv = P\phi = (bbc + aR\sqrt{(aa - RR)}) : (bb - RR)$ TAB. XXXIX. N°. CXXX. *Fig.* 13. & 14.

Hinc autem modo octavo ſolvitur Problema.

REGULA SEXTA.

Per propoſitionem nonam Tractatus *de Quadratura Curvarum* area curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $(bbc + aR\sqrt{(aa - RR)}) : (bb - RR)$ æqualis eſt areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $\frac{dz}{dR} \times (bbc + aR\sqrt{(aa - RR)}) : (bb - RR)$ Unde habetur nonus modus Problema ſolvendi.

Litteræ m & n eadem denotent, ac in regula tertia, & fiat $dz : dR = R^{(m-n):n} \times (bb - RR)^p$, & ordinata $\frac{dz}{dR} \times (bbc + aR\sqrt{(aa - RR)}) : (bb - RR)$ fiet $bbcR^{(m-n):n} \times (bb - RR)^{p-1} + aR^{m:n} \times (bb - RR)^{p-1} \times \sqrt{(aa - RR)}$ Unde ſi n unitatem denotet, & p numerum quemcunque integrum & affirmativum, curva geometrice rationalis invenietur, ſi modo m ſit numerus affirmativus, vel etiam ſi n ſit uni-

(*i*) Vid. BARROW. *Lect. geometr.* pag. 110.

unitas, m numerus affirmativus, & $2p$ numerus impar negativus, numero m major.

REGULA SEPTIMA.

TAB. XXXIX. N°. CXXX. *Fig.* 15. Ducatur [in Fig. 15] $\beta\lambda$ ſemicirculum $\alpha\beta\gamma$ contingens in β & producatur $\varepsilon\zeta$ ad μ, ducta $\delta\nu\mu$. Sit autem curva [in Fig. 13] KL ejus naturæ, ut area $M\pi WP =$ ſit ſectori $\delta\beta\nu$. Dictis igitur mn; a; nz, c; & tangente arcus pq, R, erit $nv = P\phi = (aac + aaR) : (aa - cR)$. Et hic eſt decimus Problema ſolvendi modus.

Quando angulus interſectionis rectus eſt, & $c = a$, hæc regula ſub formula poſteriori regulæ ſecundæ comprehenditur.

Item ſi loco $\varkappa M \mu$ linea recta ſumatur, quicunque ſit interſectionis angulus, caſus ille curvæ logarithmicæ invenietur, quem in regula ſecunda tradidimus.

REGULA OCTAVA.

Ut antea, eſt area curvæ, cujus abſciſſa z & ordinata $(aac + aaR) : (aa - cR)$ æqualis areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt R & ordinata $\frac{dz}{dR} \times (aac + aaR) : (aa - cR)$. Hic autem eſt undecimus modus Problema exequendi.

Litteris m, n iiſdem denotantibus, ut antea, ſit $dz : dR = R^{(m-n):n} \times (a^4 - ccRR)^p$, & ordinata $\frac{dz}{dR} \times (aac + aaR) : (aa - cR)$ fiet $= R^{(m-n):n} \times (a^4 c + (a^4 + aacc) R + aacRR) \times (a^4 - ccRR)^{p-1}$ quæ formula curvas geometrice rationales facile præbet.

Si ſit $m = 1 = n = p$; eadem parabola ſemicubica atque ex regula tertia invenietur.

REGULA NONA.

TAB. XXXIX. N°. CXXX. *Fig.* 16. Si [in Fig. 16] NO ad lineas AB, CD perpendicularis ſit & ducatur curva KL, cujus ordinatæ PW, QX, quæ æqualiter a puncto M diſtant, æquales ſint, & ab eadem abſciſſæ parte poſitæ; radio ordinatæ PW æquali deſcribatur circuli ſegmentum abc, quod angulum comprehendat angulo æqualem, in quo curva ſe ipſam ſecare requiritur, cujus ſegmenti centrum æqualiter diſtet a lineis AB, CD. Ducatur autem & alia curva $\varkappa M \mu$ cujus ordinatæ $P\nu$, $Q\rho$ æqualiter a puncto M diſtantes

ſint æquales & a contrariis partibus abſciſſæ NO poſitæ. Deinde ſumta $Mf = P\nu$, ductaque fh lineæ NO ad perpendiculum, junctaque ch manifeſtum eſt, ſi curva quæſita EF ejus ſit naturæ, ut contingens in puncto I ſemper ſit parallela lineæ ch, quod propoſito ſatisfaciet. Nam cum ſit $WP = QX$, idem circuli ſegmentum ordinatis PW, QX convenit; adeo ut ſi ſumatur $Mg = Q\rho$, ducatur gk ad NO perpendicularis, & jungatur ck; linea recta contingens curvam quæſitam EF in puncto R parallela erit lineæ ck. Quoniam igitur $Q\rho =$ eſt $P\nu$, ideoque $Mg = Mf$ in ſitu hujus curvæ EF inverſo, & quando punctum R in punctum I cadit, contingens in puncto R lineæ puncta a, h conjungenti parallela erit, & cum contingente in puncto I angulum conſtituet æqualem ei ſub ahc, nimirum angulo in ſegmento abc comprehenſo. Invenitur igitur hujuſmodi curva, ſi fiat $dy : dz = fh : fc$. Quamobrem ſi pro PW ponatur m; pro $aM = Mc$ ponatur n; pro intervallo inter punctum M & centrum ſegmenti ponatur p; & pro $P\nu = Mf$, q; habebimus $dy : dz = \sqrt{(mm - qq)} \pm p : n + q$, & $dy = dz (\sqrt{(mm - qq)} \pm p) : (n + q)$. Dantur autem rationes inter m, n, p ob datum ſegmenti abc angulum, & invenietur y, vel PI, metiendo curvam, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $(\sqrt{(mm - qq)} + p) : (n + q)$. Hic autem exhibetur duodecimus modus Problema tractandi.

Si angulus ſub ahc ſit rectus, erit $p = 0$, $n = m$, & ordinata curvæ metiendæ $\sqrt{(m - q)} : \sqrt{(m + q)}$. Quam profecto ordinatam Problemati ſatisfacere intelligi quoque poteſt ex poſteriori regulæ ſecundæ formula.

Si loco linearum curvarum KL, $\varkappa M \mu$ rectæ ſumantur, quando angulus ſub abc rectus eſt, erit curva EF cycloïs; quæ facile determinatur forma undecima Tabulæ curvarum ſimpliciorum, quæ cum circulo & hyperbola comparari poſſunt in Tractatu *de Quadratura Curvarum* NEWTONI.

REGULA DECIMA.

Porro area curvæ, cujus abſciſſa eſt z & ordinata $(\sqrt{(mm - qq)} \pm p) : (n + q)$ æqualis eſt tum areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt m & ordinata $\frac{dz}{dm} (\sqrt{(mm - qq)} \pm p) : (n + q)$, tum areæ curvæ cujus abſciſſa eſt q & ordinata $\frac{dz}{dq} (\sqrt{(mm - qq)} \pm p) : (n + q)$, Unde habentur duo alii modi, quibus Problema ſolvi poteſt; quorum poſteriori, ratione ſequenti, curvæ geometrice rationales inveniri poſſunt.

 Sint

Sint δ, ε numeri impares, η numerus par, & ponatur $dz : dq = q^{(\delta - \varepsilon):\varepsilon} \times (n^{\eta} - q^{\eta})$; item $m = 1 + \frac{1}{4} qq$. Unde erit $z =$ areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt q & ordinata $q^{(\delta - \varepsilon):\varepsilon} \times (n^{\eta} - q^{\eta})$ & ordinata $\frac{dz}{dq} \times (\sqrt{(mm - qq)} \pm p) : (n + q)$ fiet $= (n^{\eta - 1} - n^{\eta - 2} q + n^{\eta - 3} qq \ldots + \&c \ldots - q^{\eta - 1}) \times (1 - \frac{1}{4} qq \pm p)$.

His quatuordecim diverſis modis generalibus Amicus meus Problematis ſolutionem abſolvit. Demonſtrationes autem illius ex compoſitione uſus in hoc Problemate curvarum Geometris notarum ſic ſe habent.

De Caſu primo linearum Logarithmicarum.

Vide Num. CXXVI. ſupra, pag. 525.

De Caſu altero linearum Logarithmicarum. ibidem.

De Cycloide. ibid. pag. 524.

De Parabola Semicubica.

Si [in *Fig.* 17] rectam lineam AB alia recta linea CD interſecat in
TAB. XXXIX. N°. CXXX. *Fig.* 17. puncto D cum linea AB angulum quemcunque conſtituens; & ſi ſumatur $DE = \frac{1}{2} DC$; deinde ducatur EF, ut DF ſit $= DE$; & denique diametro CF & vertice C deſcribatur parabola ſemicubica GCH, quæ tranſeat per punctum C, habeatque ordinatim applicatas ad diametrum CF lineæ FE parallelas: his poſitis, ſi parabola hæc ad lineam AB in ſitu inverſo deſcripta ſit, ut eandem in ſitu jam dicto deſcriptam interſecet, & contingentes ad punctum interſectionis ducantur, illæ contingentes ſe interſecabunt in angulo æquali angulo ſub CDB.

Sumatur in parabola GCH punctum quodvis I, ducatur ILC, & ſumpta $EM = EL$ ducatur MNC. Deinde ordinatim applicentur OIP, NQR, ducaturque CEV, item EX diametro CO parallela. His poſitis erit $VX : XE = EF : FC$, & $XE : XP = DF : EF$. Unde ex æquo ut $VX : XP = DF : FC$, dividendoque ut $VX : VP = DF : DC$. Quoniam igitur eſt $DF = DE = \frac{1}{2} DC$, eſt etiam $VX = \frac{1}{2} VP$. Porro ut $IO^2 : EF^2 = CO^3 : CF^3 = VO^3 : EF^3$. Quatuor igitur ratione continuata proportionalium eſt VO ſecunda, quarum IO eſt prima & EF ultima. Eſt autem & $IO : OV = LF : EF$. Ideoque ſunt IO, OV, FL, FE quatuor ratione continuata proportionales; unde $VO : LF = LF : EF = VO - LF : LE$, componendoque $LF + EF = VO - EF$ $[= VX] : LE$. Demonſtratum autem fuit VX æqualem eſſe dimidio lineæ VP. Ut Igitur $2LF + 2EF : EF = VP : LE = 2LFE + 2EF^2 : EF^2$. Jam vero ut $IO :$ LF

$LF [= IV : LE] = LF^2 [2LFE + LE^2 - EF^2] : EFq$, propterea quod lineæ IO, VO, LF, EF ſunt quatuor ratione continuata proportionales; quoniam igitur $VP : LE = 2LFE + 2EF^2 : EF^2$, erit $PI : LE = 3EF^2 - LE^2 : EF^2$. Eodem modo demonſtratur $NR : EM = 3EF^2 - EM^2 : EF^2$. Cum igitur $EM =$ ſit EL, erit $NR = PI$, ſunt autem parallelæ, ideoque puncta N, I æqualiter diſtant a linea AB. Si igitur parabola ſemicubica GCH in ſitu inverſo ad lineam AB deſcribatur, punctum N incidere poteſt in punctum I. Parabolæ huic detur ille ſitus inverſus *hcg*, & ducantur contingentes IΓS, EW, ΔNT *t*Iδ; item lineæ WLY, WZM. Erit ex natura parabolæ hujus $OS = \frac{2}{3} OC$, $FW = \frac{2}{3} FC$, & $QT = \frac{2}{3} QC$. Eſt autem & $FD = \frac{1}{3}$ FC; unde FD, DE, & DW ſunt æquales, & angulus ſub FEW rectus: &, cum EL ſit $=$ EM, erunt & anguli ſub EWL, EWM æquales. Quoniam autem LMF lineis IO, NQ parallela eſt, & lineæ OC, FC, QC, ſimiliter dividuntur in punctis S, W, T, erit WLY contingenti IΓS parallela, & WZM contingenti ΔNT. Eſt igitur angulus ſub WYD $=$ angulo ſub IΓ*t*, & angulus ſub WZD $=$ angulo ſub NΔD $=$ angulo ſub I*t*Γ. Porro cum anguli ſub EWL, EWM ſint æquales, & anguli ſub DEW, DWE etiam æquales propter linearum DW, DE æqualitatem, erit angulus ſub YWD $=$ angulo ſub WZD. Ideoque angulus ſub CDB, qui æqualis eſt ſummæ angulorum ſub WYD & ſub YWD, æqualis erit ſummæ angulorum ſub IΓ*t*, & ſub I*t*Γ, nimirum angulo ſub ΓIδ æqualis. Q. E. D. *Lond. Aug.* 27, 1722.

N°. CXXXI.

JOHANNIS BERNOULLI EXPLICATIO ANAGRAMMATIS,

Quod dedit in Actis Lipſ. 1723 M. Febr. *in ſe continentis deſcriptionem Curvæ inter omnes algebraïcas Trajectorias reciprocas ſimpliciſſimæ.*

Accedit Epicriſis in Solutionem Problematis de Trajectoriis reciprocis, editam in Actor. Suppl. T. VIII. Sect. VI. *

EDidit de hoc argumento Anonymus Britannus Geometra, *Acta Erud. Lipſ.*
ut apparet, acutiſſimus, cum quo plures commutavi epiſ- 1724. Jul.
tolas, pag. 29.

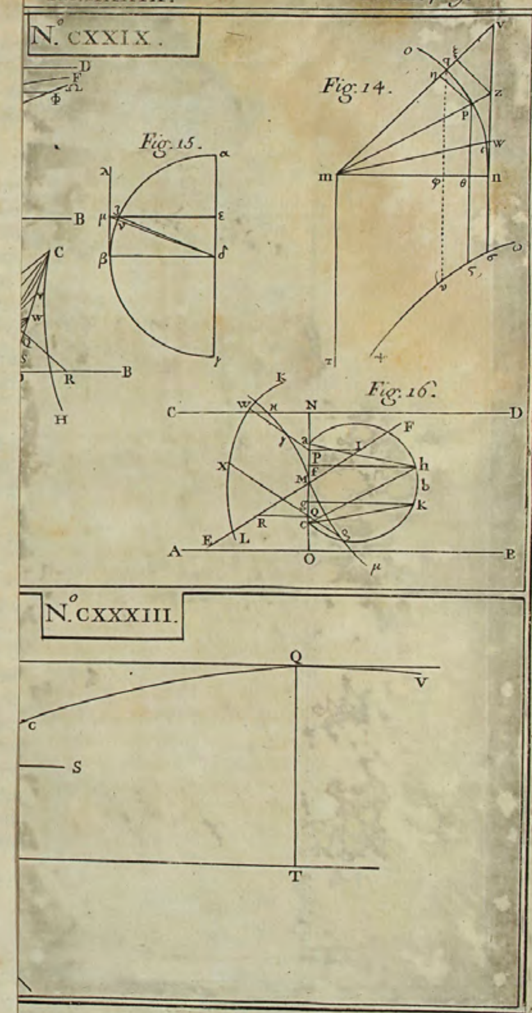
* N°. præced.

tolas, schediasma aliquod insertum *Suppl. T. VIII. sect. I,* * ubi meam solutionem videndi desiderio se teneri testatur [quam autem non unam tantum, sed varias alias, jamdiu antea ad prælum paratas habueram, sicuti constat ex Appendice annexa iisdem meis solutionibus exhibitis in *Act.* 1722 *M. Aug.* †], tum & suam solutionem prolixo logogripho involvit, qua certe opera inutili, ut nunc patet, supersedere potuisset.

Tertia vice ad me datis litteris novam proposuit quæstionem, ad quam solvendam me invitavit, aut potius provocavit; exigens scilicet, ut dicerem, quænam inter omnes curvas algebraïcas, Problema de Trajectoriis reciprocis solventes, sit simplicissima; modumque eam delineandi docerem. Etsi non putaverim me obligari cuicunque interpellanti respondere; tales imprimis quæstiones moventi, quas vel ipse non solvit, vel nonnisi fortuito casu solvit, sicuti videtur contigisse nostro Anonymo, qui, si de industria hanc sibi enodandam quæstionem proposuisset, & reapse enodasset; nullum est dubium, quin eam ab initio, statim & non post tanti temporis moram, fuisset obstrusurus, nil quippe intentatum relinquens, quo me in angustias cogi posse sperabat; volebam tamen hac occasione obtemperare, eoque magis, quod viderem, id tantum agendum esse, ut generales meas solutiones anno 1722 traditas perlustrarem, atque ex illis seligerem, quæ ad desideratum accommodari possent. Haud sane in opinione mea deceptus detexi, sine magno temporis spatio, curvam quæsitam esse *Parabolam cubicalem secundam.*

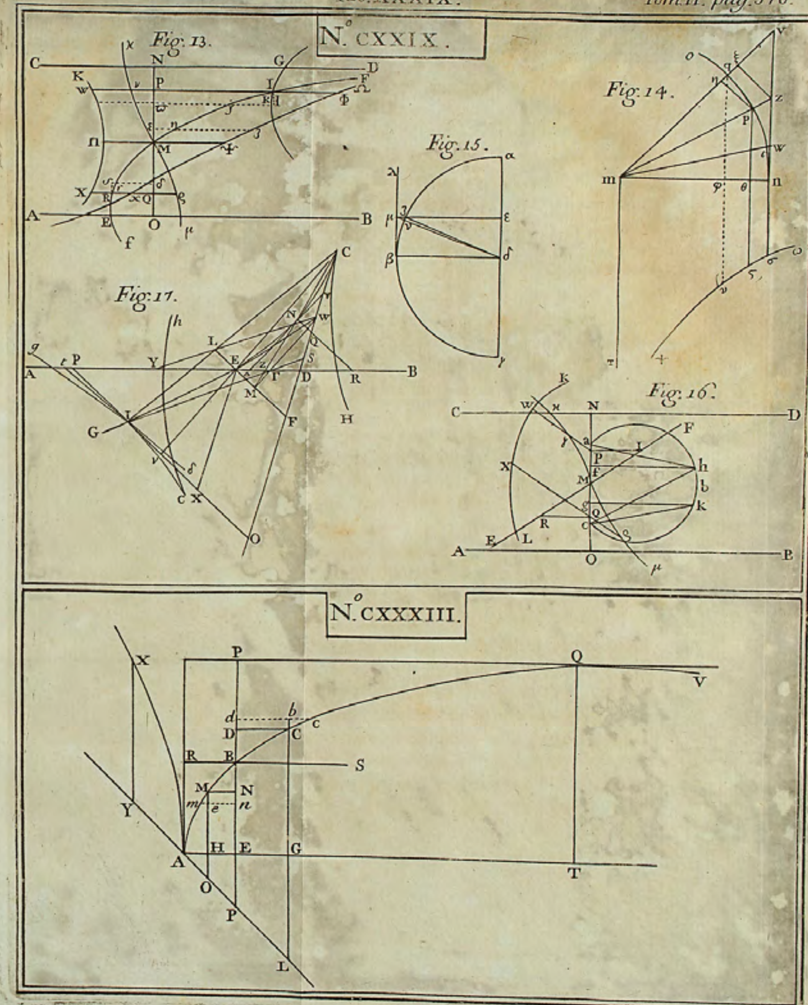
Necesse autem erat, ut hoc statim innotesceret Anonymo meo, ne se solum tanti arcani possessorem existimaret; quamobrem, sub finem ejusdem anni 1722, significavi illi per litteras privatas, quas ad aliquem Bibliopolam Londinensem ab ipso mihi indicatum direxeram, me solutionis, quam abs me postulabat, factum esse compotem; atque ne de rei veritate dubitaret, solutionem meam ipsius more anagrammati involutam perscripsi; quod anagramma eodem quoque tempore Lipsiam transmisi *Actis* inserendum, in quibus postea comparuit mense Febr. anni

* N°. CXXVI. pag. 524. † N°. CXXVIII. pag. 535.



JECTORIIS
T. VIII. *sect.* I, * ubi
eneri testatur [quam au-
jamdiu antea ad prælum
ppendice annexa iisdem
2 *M. Aug.* †], tum &
volvit, qua certe opera
sset.
n proposuit quæstionem,
potius provocavit; exi-
mnes curvas algebraïcas,
ventes, sit simplicissima;
Etsi non putaverim me
re; tales imprimis quæs-
vit, vel nonnisi fortuito
stro Anonymo, qui, si
stionem proposuisset, &
quin eam ab initio, sta-
, fuisset obstrusurus, nil
in angustias cogi posse
ne obtemperare, eoque
ndum esse, ut generales
lustrarem, atque ex illis
nodari possent. Haud sa-
ine magno temporis spa-
bicalem secundam.
innotesceret Anonymo
em existimaret; quamo-
significavi illi per litteras
m Londinensem ab ipso
is, quam abs me postu-
de rei veritate dubita-
grammati involutam pers-
tempore Lipsiam trans-
comparuit mense Febr.
anni

I II. pag. 535.



anni superi
Epistola m
vel etiam
caute proc
insidias evi
Respond
Martii 172
tia] *sibi ni*
ro cum in
nomine *Par*
esse, quin
nem; dedi
22 sequenti
„ pro simpli
„ *cubicam*,
„ consuevi;
„ tis mei in
„ non tantu
„ sit describ
„ mea cum
„ habebat 9
„ *b* 6 *c* 6 *d* 6
„ 6 *a b c c d*
„ 14 *ab* 8 *c e*
„ 16 *a* 4 *b* 3 *c*
„ 13 *u*.
„ Illa [li
„ sensum: C
„ tangula: q
„ rectæ paral
„ rum una tr
„ fiet ut duæ
„ mis partibu
„ rallelas rec
Joan. Berno

* N°. CXX

anni superioris, pag. 78 & 79 *. Ita faciendum esse statui, quia Epistola mea Londinum amandata potuisset in itinere perire, vel etiam potuisset non redditam esse simulari; vix enim satis caute procedere possumus, ut ignotorum hominum clandestinas insidias evitemus.

Respondit tamen Anonymus per litteras 22 Febr. hoc est, 5 Martii 1723, ubi inter alia dixit [nescio an ex animi sententia] *sibi nihil displicere, quod curvam petitam invenerim.* Ipse vero cum in iisdem his litteris nominaverit curvam, & quidem nomine *Parabolæ semicubicæ*, censebam non amplius differendum esse, quin illi darem anagrammatis antea transmissi explicationem; dedi autem sine mora in Epistola secunda ad eum exarata 22 sequentis Aprilis, his verbis: „ Quia video te nominasse „ pro simplicissima algebraica curva in quæstione *Parabolam semicubicam*, quam ego *Parabolam cubicalem secundam* appellare „ consuevi; lubet nunc tibi quoque aperire sensum anagrammatis mei in postremis meis litteris communicati; videbis, me „ non tantum curvam indicasse, sed & modum docuisse, quo „ sit describenda, ut satisfaciat; tuum est examinare, an hæc „ mea cum tuis conspirent. Anagramma autem meum ita se „ habebat *9 a bb 5 c dæ 4 e g 4 i 3 l m n n o p q 3 r 5 ʃ 3 t 6 u*: *20 a* „ *b 6 c 6 d 6 æ 14 e 2 f g 6 i 7 l 6 n 3 o 9 p 2 q 13 r 4 ʃ 17 t 12 u*; „ *6 a b c c d d 3 æ 8 e f g h 11 i 3 l 4 m n n 3 o 4 p q r 6 ʃ 8 t 6 u*. „ *14 a b 8 c d d 11 e h 6 i 6 l 4 m 4 n 11 o 4 p q 11 r 9 ʃ 11 t 4 u*: „ *16 a 4 b 3 c 3 d 11 e 3 g 9 i 7 l 5 m 6 n 3 o 4 p q q 5 r 12 ʃ 12 t* „ *13 u*.

„ Illa [litteris in suum ordinem positis] sequentem fundunt „ sensum: Curva quæsita est Parabola cubicalis secunda semirectangula: quæ ut optatum effectum præstet, ducendæ sunt duæ „ rectæ parallelæ perpendiculariter ad ordinatim applicatas, quarum una transeat per verticem, altera tangat Parabolam; quo „ fiet ut duæ parallelæ a se invicem distent octo vigesimis septimis partibus parametri. Dico Parabolam inter has rectas parallelas reciproco situ positam & ultro citroque motam se

* N°. CXXIX. pag. 552.

„ conſtanter ad angulos rectos ſecare. Quod ſi angulus inter- „ ſectionis debeat eſſe obliquus, mutabitur ſaltem applicatarum „ angulus; ſed ita tamen ut Parabola ſit ſemper acutangula.

Alia occaſione hujus propoſitionis demonſtrationem peculiari ſchediaſmate communicabo *, una cum aliis inventis huc ſpectantibus, Lectori curioſo & intelligenti non diſplicituris. Anonymus interim, viſa hac anagrammatis interpretatione, deſcriptionem meam curvæ ſimpliciſſimæ algebraïcæ, quam a me popoſcerat, non improbavit in litteris dehinc ab eo poſtrema vice acceptis, quæ datæ erant 13 Maii ejuſdem anni 1723, aſſerens, *verba mea cum inventis ſuis probe convenire*; hoc tantum mirabatur, quod parabolam nonniſi acutangulam in ſolutionem admittam, cum tamen omnis parabola ſemicubica duos habeat ramos, quorum uno exiſtente acutangulo, alter neceſſario ſit obtuſangulus. At vero in reſponſione mea die 17 menſis Julii ad eum data, reddidi rationem hujus diſtinctionis, monſtravique, ramum hujus parabolæ obtuſangulum non poſſe quadrare in ſtrictiſſimo Problematis ſenſu, ſed alterum tantum ramum acutangulum; immo ne hunc quidem totum, ſi quidem ex meo ſolvendi modo clare pateat, aliquem tantum ejus arcum rei quæſitæ eſſe idoneum, qui nempe comprehenſus ſit inter verticem & punctum contactus rectæ parallelæ parabolam contingentis. An datæ reſponſioni noſter Anonymus acquieſcat, neſcio, nam ex eo tempore nihil amplius litterarum ab illo vidi.

Interim videre tandem licuit, promiſſam ejus diuque expectatam clavem ad prolixum illum logogriphum, quem dederat in *Supplem.* T. VIII, Sect. I. Comparuit hæc clavis in eodem *Supplementorum* Tomo, Sect. VI †: quæ ſectio, quod notandum, nonniſi poſt menſem Julii anni proxime elapſi, ut colligi poteſt ex eo, quod in calce illius menſis dicitur, eſt impreſſa. Ipſum totum ſchediaſma, ut ex titulo conſtat, excerptum eſt ex *Tranſactionibus Philoſ.* A. 1722. Fatetur Autor in exordio, ſe vidiſſe meas Solutiones ac conſtructiones in *Actis Lipſ.* ejuſdem anni, priuſquam ſuas typis mandaſſet; poterat adeoque, ſi voluiſſet,

* Infra N°. CXXXIII. † N°. præced.

mentionem eorum facere [ſunt autem bene multa] quæ ipſi & mihi ſunt communia; a me vero prius occupata citiuſque edita.

Clavis ad ſcripturæ ſuæ occultæ intelligentiam conſiſtere debet in uſu, quem deſcribit, Tabulæ alicujus ſtatim in fronte exhibitæ; ſed deſcriptionem ipſam vix ſatis intelligo, hebetudinis meæ, an obſcuritatis culpa. Quis nunc dabit clavem ad clavem? poſſem fortaſſis in tricas iſtas penetrare, ſi otio & patientia abundarem, ſed cui bono? an, ut experiar, utrum logogriphi data ſit fidelis & ſincera interpretatio? at malo id credere, quam in ſingulis litteris extricandis, quod totum operis vix integro die abſolveris, ad ſudorem uſque macerari. Video Autorem ſingulari ſtudio & labore id operam dediſſe, ut ſollicite abſconderet myſterium, illudque vel ſagaciſſimo WALLISIO, magno quondam litterarum ſteganographicarum interpreti, redderet imperſcrutabile; non ſecus ac ſi ab ea re magnæ Britanniæ ſalus pependiſſet; quamvis non credam, ullum in toto mundo fuiſſe hominem, qui curioſitate ductus tentaverit in hoc Autoris ſacrarium penetrare.

Voluit ergo ipſimet ſibi reſervare interpretationis gloriam, nemine invidente; ſed poſito, interpretationem, quam dedit, conformem eſſe logogripho tam operoſa ſubtilitate tamque ſingulari circumſpectione extructo, certe non video, quid Lector ex ipſa illa interpretatione multum proficere queat ad ſolvendam quæſtionem propoſitam: ſunt enim, quæ ibi continentur, generalia tantum, & ad ſolutionem viam ſternentia, non autem ipſam ſolutionem exhibentia. Id quod haud dubie in cauſa eſt, cur Autor ſuæ interpretationi ſubjunxerit novam explicationem, quæ forſan apud multos Lectores alia iterum explicatione indigebit. Ut enim libere dicam quod res eſt; uſque adeo intricatum deprehendi Autoris modum demonſtrandi, ut a patientia mea impetrare non potuerim, tantam attentionis vim adhibere, quæ requireretur ad examinandas omnes longiſſimi ſcripti minutias: adde farraginem figurarum exiliſſimarum innumeris lineis oneratarum, ubi litterulæ, tam græcæ, quam latinæ, plerumque male formatæ, adeo confeſtim ſibi invicem inequitant; ut microſcopio opus ſit omnia diſtinctè diſcernere; & forſan ne ſic ſemper pateat, ad quæ puncta ſingulæ litteræ pertineant, niſi ex ſenſu divinaveris ipſe, & omiſſa quoque ſuppleveris. MONMORTIUS certe ſi viveret, nunc vel maxime, quod ſolebat, quereretur, ſe malle in triremibus remigare, quam talia perplexa legere.

His non obſtantibus, perſpexi tamen multa ab Anonymo proferri, quæ jam a me fuerant prolata, ipſique viſa, antequam ſuum ſcriptum paraſſet; quod, ut ſupra innuimus, ipſe fatetur: Exempli gratia; Id, quod demonſtravi in *Actis* 1722 M. Aug. §. 2 & 3 *, tanquam fundamentum ſolutionis, idem quoque in ſuum uſum vertit, in hoc ſcilicet conſiſtens quod, ſumtis in utramque partem a communi initio abſciſſarum curvæ quæſitæ abſciſſis æqualibus, rectangulum ſub elementis utriuſque applicatæ æquetur quadrato elementi alterutrius abſciſſæ. Deinde uſurpat modum Solutionis meæ §. 4 † expoſitæ, facitque formulas illis ibidem traditis ſimiles. Nec minus in ejus ſcripto conſpicitur generaliſſima mea ſolutio ſecunda §. 10 & ſeq. ‡ ad longum explicata, per quam inveniuntur curvæ innumeræ quæſito ſatisfacientes, algebraïcæ & tranſcendentes, & hæ quidem per curvarum algebraïcarum extenſionem conſtruibiles. Alia utrique noſtrum communia, quæ reperi, nunc non commemoro. Inter illa quæ ipſi ſunt propria, unum eſt, quod immediate ex prædicto fundamento fluit, ſcilicet nominatis y & $-v$ binis applicatis a communi abſciſſarum initio æqualiter hinc inde diſtantibus, fore $ddy : dy = -ddv : dv$; quid autem opus eſt confugere ad differentio-differentiales, ſeu ad fluxiones ſecundas, ubi primæ ſufficiunt?

Cetera prætereo; ſed ex privatis Anonymi litteris aliquid adhuc habeo quod moneam; in litteris nempe 22 Febr. 1722 ad me ſcriptis mihi perſuadere conatur, ſe non in animo habuiſſe mecum inire certamen; alioquin potuiſſe ſe difficiliorem Problematis caſum mihi proponere; ille autem caſus in hoc conſiſte-

* Supra pag. 537. † Ibid. ‡ pag. 541. & ſeq.

ſiſtebat, ut inveniretur curva, quæ una eademque in diverſis poſitionibus pro quibuſcunque interſectionis angulis Problemati ſatisfaceret; cujus quidem caſus conſtructionem aliquam deſcripſit in fine litterarum ſuarum, ſed ſine demonſtratione & ſine ulla analyſi. Ego, ut monſtrarem hunc caſum minime fuiſſe idoneum, ut propterea certamen mecum iniret, ſiquidem ſpes victoriæ, qua forſan fretus eſſet, ipſum fallere poſſet, dedi in reſponſionibus meis non tantum plenariam hujus caſus ſolutionem & analyſin, ſed ea occaſione alium non minus difficilem propoſui caſum, cujus ſolutione me potitum eſſe aſſeverabam: petii nempe *curvam, quæ una eademque in diverſis poſitionibus, non quidem infinitis, ſed numero datis, pro determinato numero angulorum interſectionis, Problemati ſatisfaciat.*

Ad hoc in poſtrema ſua Epiſtola nihil aliud repoſuit, quam *ſibi in aliquid ejuſdem generis incidere contigiſſe*, quod tranſpoſitis litteris hoc modo deſcripſit 11 *a* 3 *æ* 7 *b* 4 *c* 6 *d* 11 *e* 3 *g* 15 *i* 8 *l* 4 *m* 12 *n* 8 *o* 3 *p* 4 *q* 8 *r* 13 *ſ* 5 *t* 19 *u* 6 *v*; 10 *a* 6 *æ* 2 *b* 2 *c* *d* 8 *f* *g* *h* 8 *i* 3 *l* 4 *m* 5 *n* 3 *o* 3 *p* 2 *q* 9 *r* 4 *ſ* 7 *t* 5 *u* *v*; 4 *a* 2 *æ* *b* 2 *c* 2 *d* 7 *e* 2 *g* *h* 7 *i* 2 *l* *m* 8 *n* 5 *o* *p* *q* 5 *r* 7 *ſ* *t* 7 *u* 2 *v*: 5 *a* 3 *æ* 2 *b* 2 *c* 4 *d* 6 *e* *g* *h* 13 *i* 4 *l* 3 *m* 3 *n* 6 *o* 4 *p* *q* 9 *r* 10 *ſ* 3 *t* 8 *u* 2 *v* *x*, ſignificans ſe id aperte indicaturum, ſimul ac meas curvas ſibi indicavero. Quare in ſubſequente mea Reſponſione, ejus exemplum imitans, anagrammati involutum dedi fundamentum inventi mei, quod ita ſe habet: 7 *a* 3 *æ* *bb* 4 *c* *d* 8 *e* *h* 6 *i* 4 *l* *moo* 4 *p* 2 *q* 6 *r* 7 *ſ* 6 *t* 10 *u*; 6 *a* 6 *æ* 4 *b* 5 *c* 3 *d* 13 *e* *g* *h* 12 *i* 4 *l* 6 *m* 6 *n* 5 *o* 3 *p* *q* 7 *r* 9 *ſ* 10 *t* 9 *u* *y*; cujus ſenſum me detecturum pollicebar ſtatim ac ipſe ſuum detexerit; ſed quia eadem opera monueram, ut ſimul nomen ſuum indicaret, alias me non amplius ad ipſius litteras eſſe reſponſurum; nunc ipſe ſilet: interim videbimus, num forſan malit ſcripto publico quam per litteras privatas fidem datam liberare.

N°. CXXXII.

JOHANNIS BERNOULLI

Methodus commoda & naturalis reducendi Quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad Longitudines Curvarum algebraïcarum.

I.

Acta Erud. Lipf. 1724. Aug. pag. 356.

IN constructionibus Problematum transcendentium, res est magni momenti æquationum differentialium indeterminatas separare, ut earum effectiones obtineri possint per quadraturas curvarum algebraicarum: sed majoris momenti est, quadraturas illas reducere ad longitudines curvarum algebraicarum, & ita quidem, ut partes arearum quadrandarum sint simpliciter proportionales arcubus harum curvarum: id quod in hunc usque diem nemo præstitit.

II.

Placuit quod de hac materia scripsit Cel. HERMANNUS, in *Actis Erud.* M. April. anni superioris, ubi modum exhibuit construendi curvam algebraicam, quæ cum linea recta, una vel pluribus, conficiat summam vel differentiam $= \int p\,dx$, hoc est, æqualem areæ curvæ, cujus abscissa existente x applicata ponitur $= p$, datæ quomodocunque per x & constantes; seu, ut more meo loquar, cujus applicata p denotat functionem algebraicam quamcunque datam ipsius x. Adeo ut per $\int p\,dx$ intelligi tantum possit quantitas transcendens primi & infimi gradus.

III.

Etiamsi modus iste se non extendat ad transcendentes superiorum graduum; habet tamen, sicut jam dixi, non exiguam utilitatem in constructionibus Problematum simpliciter transcendentium, post peractam indeterminatarum separationem. Optandum esset, ut via, qua ea in re utitur, sit facilior, & ad usum accommodatior; recurrere enim ad evolutarum naturam, atque auxilium petere ab inclinatione linearum ad se invicem, mihi videtur via indirecta ac parum naturalis, per quam in operosum abducimur calculum, ut fieri solet si mere analytica cum geometricis præter necessitatem commiscemus. Damnat certe NEWTONUS, tanquam insigne peccatum contra bonam methodum, consuetudinem illam Geometrarum unum cum altero confundentium. Vid. *Algeb. Elem.* p. 282 & 315.

IV.

Putat quidem Cl. HERMANNUS, hanc viam, quam iniit, unicam dari, quæ pateat ad solutionem hujus problematis, vocatque eam facilem, planam, & evidentem; sed inter legendum statim suspicatus aliam posse applicari viam ab ea diversam, quæ ad scopum directe deducat; ansam arripui rem istam quasi ab ovo perscrutandi, quam antea nunquam tentaveram. Successus expectationem superavit, siquidem genuina methodus a me detecta se se porrigit ad quadraturas transcendentes, non tantum simplices, sed omnium ulteriorum graduum, quemadmodum patebit ex sequentibus. Incipiam a transcendentibus simplicibus, seu primi gradus.

V.

Sit p functio algebraica qualiscunque ipsius x, oporteatque invenire curvam algebraïcam, a cujus longitudinis dimensione pendeat $\int p\,dx$. In hunc finem quæro coordinatas algebraïcas

cas, convenienti modo ex p & x derivandas, ut curvam reddant cujus elementi expreſſio includat pdx. Verum haud difficulter video ad optatum perveniri non poſſe, ſi coordinatæ illæ deſignentur per novas functiones aſſumptitias ipſius x terminis finitis expreſſas; quæcunque enim aſſumerentur, forent differentiandæ, ut haberi poſſent eorum elementa; ſint illa tdx & udx: adeoque elementum curvæ $= dx\sqrt{(tt+uu)}$, quod comparandum eſſet cum pdx, plus vel minus aliqua quantitate integrabili rdx; unde reſultaret $dx\sqrt{(tt+uu)} = pdx + rdx$, hoc eſt $\sqrt{(tt+uu)} = p + r$, ſeu $r = \sqrt{(tt+uu)} - p$; res itaque huc rediret, ut cognoſceretur, quid pro t & u aſſumendum eſſet, ut ſalva integrabilitate ipſarum tdx & udx, etiam rdx oriretur integrabilis. Sed nemo non videt, hoc æque difficile eſſe quam id ipſum quod quæritur.

V I.

Recurro itaque ad terminos infiniteſimales, ex quibus, ope diviſionis, pro lubitu componi poſſunt quantitates finitæ & algebraïcæ. Sic poſitis, exempli gratia, n & z quantitatibus algebraïcis variabilibus quibuſcunque, earumque differentialibus dn & dz, dedi primus in *Actis Lipſ.* 1694 pag. 438 *, modum exprimendi $\int ndz$ per ſeriem terminorum infiniteſimalium, qui tamen ſinguli conſtituunt quantitatem finitam & algebraïcam. Oſtendi namque, aſſumta dz pro conſtante, fore $\int ndz = nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3ddn}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4dddn}{1.2.3.4.dz^3} +$ &c. Quam eandem ſeriem poſtea TAYLORUS, interjecto pluſquam viginti annorum intervallo, in librum, quem edidit A. 1715, *de Methodo incrementorum* transferre dignatus eſt, ſub alio tantum characterum habitu. Vid. ejus lib. p. 38.

V I I.

Dehinc, in mentem mihi venit, formare coordinatas curvæ

* N°. XXI. pag. 125. *Tom. I.*

quæſitæ ex hujuſmodi infiniteſimalibus, valores tamen finitos & algebraïcos denotantibus; ad imitationem ejus, quod jam olim in materia haud abſimili feliciter executus, cum eruerem *Theorema* illud *univerſale rectificationi linearum curvarum inſerviens*, Vid. *Act. Lipſ.* 1698 p. 463 *. Quo in negotio id unicum curandum eſſe videbam, ut coordinatarum commoda aſſumtio inſtitueretur, per quam reſultans curvæ elementum, comparatum cum propoſito pdx, determinaret aſſumtas infiniteſimales. Proceſſus ipſe rem clarius explicabit.

V I I I.

Aſſumo aliquam variabilem z, per calculum determinandam, ejuſque elementum dz: ex his atque ex x & dx conficio coordinatas, commodo, ut dictum eſt, modo; ſit igitur abſciſſa $= adx : dz$, & applicata $zdx : dz - x$, quam ita pono, ut ejus differentiale unico exprimatur termino, abbreviandi calculi gratia; quamvis alias id abſolute neceſſarium non ſit: differentientur itaque coordinatæ, ſupponendo alterutrum, exempli gratia, dz conſtans, & habebitur elementum abſciſſæ $= addx : dz$, elementum applicatæ $= zddx : dz$. Hinc curvæ elementum [ſuppoſitis coordinatis ad ſe invicem perpendicularibus] erit $= \frac{ddx}{dz}\sqrt{(aa+zz)}$, adeoque ipſa curva $= \int \frac{ddx}{dz}\sqrt{(aa+zz)}$. Inſtituta integratione, eum in modum, quem obſervavi in condenda mea ſerie ex *Actis* 1694 allegata, habetur curvæ longitudo quam voco L, ſeu $\int \frac{ddx}{dz}\sqrt{(aa+zz)} = \frac{dx}{dz}\sqrt{(aa+zz)} - \int(zdx : \sqrt{(aa+zz)})$, plus vel minus ea quantitate conſtante, quæ evaneſcente alterutra vel utraque coordinatarum deeſt vel ſupereſt, ad quam vero brevitatis gratia non attendam. Reſtat nunc, ut determinetur valor ipſius z; quod fit ponendo $\int(zdx : \sqrt{(aa+zz)}) = \int pdx$, ſeu $z : \sqrt{(aa+zz)} = p$; unde $z = ap : \sqrt{(1-pp)}$ adeoque $dz = adp : (1-pp)^{3:2}$. His va-

* N°. L. pag. 249. *Tom. I.*

loribus ſurrogatis in quantitatibus aſſumtis coordinatarum, prodibit $adx : dz$, ſeu abſciſſa $= \frac{dx}{dp}(1 - pp)^{3:2}$, & $zdx : dz - x$, ſeu applicata $= \frac{dx}{dp}(p - p^3) - x$, ipſa vero curvæ longitudo $L = dx(1 - pp) : dp - \int p\,dx$, vel quia p eſt functio algebraïca ipſius x, differentietur illa, ut habeatur $dp = qdx$, erit q nova functio algebraïce data ipſius x; quocirca ſcribendo qdx pro dp, emergent coordinatæ in meris terminis algebraicis, nempe abſciſſa $= (1 - pp)^{3:2} : q$ & applicata $= (p - p^3) : q - x$; ſed curvæ longitudo $L = (1 - pp) : q - \int p dx$; unde $\int p\,dx = (1 - pp) : q - L$. Sunt autem p & q quantitates algebraïcæ per x datæ, atque L eſt curva algebraïca: ergo reducta eſt quadratura tranſcendens areæ $\int p\,dx$ ad dependentiam rectificationis alicujus curvæ algebraïcæ. *Q. E. F.*

IX.

Hic modus viam ſternit ad infinitos alios, qui totidem diverſas præbent curvas algebraïcas L quæſito reſpondentes, pro infinita diverſitate modorum, quibus $\int p\,dx$ exprimi poteſt, quod ita fit: per differentiationem ipſius p ſuppoſui prodire $dp = qdx$, differentietur nunc pariter q, & prodeat $dq = rdx$, poſtea r ut habeatur $dr = tdx$, atque ita porro in infinitum. His ita factis erit

$$
\begin{aligned}
\int p\,dx &= px - \int x\,dp = px - \int qx\,dx \\
\int qx dx &= \frac{qxx}{1.2} - \int \frac{xxdp}{1.2} = \frac{qxx}{1.2} - \int \frac{rxxdx}{1.2} \\
\int \frac{rxxdx}{1.2} &= \frac{rx^3}{1.2.3} - \int \frac{x^3dr}{1.2.3} = \frac{rx^3}{1.2.3} - \int \frac{tx^3dx}{1.2.3} \\
\int \frac{tx^3 dx}{1.2.3} &= \frac{tx^4}{1.2.3.4} - \int \frac{x^4 dt}{1.2.3.4} = \frac{tx^4}{1.2.3.4} - \int \frac{ux^4 dx}{1.2.3.4}
\end{aligned}
$$

Hinc per ſucceſſivam ſubſtitutionem eruo valorem ipſius $\int p\,dx$ infinitis modis, ut ſequitur.

1 ....

$$
\begin{aligned}
&1 \ldots\ldots \int p\,dx = px - \int qx\,dx \\
&2 \ldots\ldots \int p\,dx = px - \frac{qxx}{1.2.} + \int \frac{rxxdx}{1.2} \\
&3 \ldots\ldots \int p\,dx = px - \frac{qxx}{1.2} + \frac{rx^3}{1.2.3} - \int \frac{tx^3 dx}{1.2.3} \\
&4 \ldots\ldots \int p\,dx = px - \frac{qxx}{1.2} + \frac{rx^3}{1.2.3} - \frac{tx^4}{1.2.3.4} + \int \frac{ux^4 dx}{1.2.3.4}
\end{aligned}
$$

Quæ ſi ita in infinitum continuata intelligamus, manifeſtum eſt, valorem ordine infiniteſimum ipſius $\int p\,dx$ prodire per ſeriem terminorum mere algebraïcorum, $\int p\,dx = px - \frac{qxx}{1.2} + \frac{rx^3}{1.2.3} - \frac{tx^4}{1.2.3.4} + \frac{ux^5}{1.2.3.4.5} -$ &c. quæ ipſiſſima eſt ſeries jam aliquoties ex *Actis* citata.

X.

Quod ſi ergo nunc aliam lubet invenire curvam algebraïcam a priore diverſam, cujus longitudo L habeat dependentiam communem cum area propoſita $\int p\,dx$; ſeligamus aliquam ex formulis præcedentibus, exempli gratia, primam $\int p\,dx = px - \int qx\,dx$ tanquam ſimpliciorem; [quamcunque autem ſeligeremus in aliam ſemper curvam L incideremus] & reſumamus ex Art. VIII, longitudinem curvæ $L = \frac{dx}{dz}\sqrt{(aa + zz)} - \int (zdx : \sqrt{(aa + zz)})$ ex ſuppoſitione coordinatarum $adx : dz$ & $zdx : dz - x$ emergentem; ubi, ad determinandum valorem ipſius z, ponit jam debet $\int (zdx : \sqrt{(aa + zz)}) = \int qx\,dx$, ſive $z : \sqrt{(aa + zz)} = qx$; unde $z = aqx : \sqrt{(1 - qqxx)}$, ac proinde $dz = (aqdx + axdq) : (1 - qqxx)^{3:2} =$ [propter $dq = rdx$] $(aqdx + arxdx) : (1 - qqxx)^{3:2}$, reliqua obſervando ut in præfato Art. VIII, reperiemus abſciſſam ſeu $adx : dz = (1 - qqxx)^{3:2} : (q + rx)$; applicatam ſeu $zdx : dz - x = (-rxx - q^3x^3) : (q + rx)$, atque ipſam longitudinem curvæ L, ſeu $\frac{dx}{dz}\sqrt{(aa + zz)} - \int (zdx : \sqrt{(aa + zz)})$

$= (1 - qqxx) : (q + rx) - \int qxdx = (1 - qqxx) : (q + rx) - px + \int pdx$: ex quo ſequitur $\int pdx = L + px - (1 - qqxx) : (q + rx)$ Quandoquidem igitur p, q & r ſunt algebraïcæ quantitates datæ per x, ipſa vero L eſt curva algebraïca, liquet quadraturam tranſcendentem areæ $\int pdx$ iterum perductam eſſe ad dimenſionem curvæ cujuſdam algebraïcæ. Q. E. F.

X I.

Sic tot diverſas quot volumus formabimus curvas L intento convenientes, adhibendo ſemper aliam atque aliam ex formulis valoris ipſius $\int pdx$; ſed cum pro ſingulis ſingulari operatione opus ſit, docebo jam modum una operatione innumeras curvas L determinandi: Eſto π functio algebraïca ipſius x pro lubitu formata, quæ differentietur, ut prodeat ejus elementum $d\pi$ quod vocetur θdx; differentietur quoque θ, ut habeatur $d\theta$ quod ſit Φdx. His ita præparatis, ponatur abſciſſa $= ad\pi : dz$, & applicata $= zd\pi : dz - \pi$. Sit, ut ante, dz conſtans, erit elementum abſciſſæ $= add\pi : dz$, elementum applicatæ $= zdd\pi : dz$, adeoque elementum ipſius curvæ $L = \frac{dd\pi}{dz} \surd (aa + zz)$ cujus integrale $= \frac{d\pi}{dz} \surd (aa + zz) - \int (zd\pi : \surd (aa + zz)) =$ [ſuffecto valore ipſius $d\pi$ qui eſt θdx] $\frac{\theta dx}{dz} \surd (aa + zz) - \int (z\theta dx : \surd (aa + zz))$. Fiat nunc $\int (z\theta dx : \surd (aa + zz)) = \int pdx$, hoc eſt $z\theta : \surd (aa + zz) = p$; obtinebitur $z = ap : \surd (\theta\theta - pp)$ & $dz = (a\theta\theta dp - ap\theta d\theta) : (\theta\theta - pp)^{3:2}$, $=$ [ſcribendo pro dp & $d\theta$ eorum valores] $(aq\theta\theta dx - ap\theta\Phi dx) : (\theta\theta - pp)^{3:2}$. Hinc emergunt coordinatæ, videlicet abſciſſa ſeu $ad\pi : dx = (\theta\theta - pp)^{3:2} : (q\theta - p\Phi)$, & applicata ſeu $zd\pi : dz - \pi = (p\theta\theta - p^3) : (q\theta - p\Phi) - \pi$; ipſa autem curvæ longitudo L, ſeu $\frac{d\pi}{dz} \surd (aa + zz) - \int (zd\pi : \surd (aa + zz) = (\theta^3 - pp\theta) : (q\theta - p\Phi) - \int pdx$; id quod reddit $\int pdx = (\theta^3 - pp\theta) : (q\theta - p\Phi) - L$. Ergo & hoc pacto reducta eſt quadratura

ra tranſcendens areæ $\int pdx$ ad extenſionem curvæ algebraïcæ, quæ infinities variabilis erit, magis minuſve compoſita, prout functio arbitraria π, & ab hac dependentes θ & Φ, quæ coordinatas ingrediuntur, majorem minoremve patiuntur compoſitionem. *Q. E. D.*

X I I.

Porro in immenſum augeri poteſt hæc infinitarum ſolutionum methodus, ope formularum Art. IX expoſitarum, quarum quælibet ſubminiſtrat peculiarem modum exhibendi una operatione infinitas curvas optatum præſtantes, qua in re inſiſtendum eſt veſtigiis proceſſus quem Art. X, & XI monſtravi: ut ſi, exempli gratia, formulam primam $\int pdx = px - \int qxdx$ adhibere libeat, faciendum erit $\int (z\theta dx : \surd (aa + zz)) = \int qxdx$, adeoque $z\theta : \surd (aa + zz) = qx$, unde $z = aqx : \surd (\theta\theta - qqxx)$ & $dz = (aq\theta\theta dx + a\theta\theta xdq - aqx\theta d\theta) : (\theta\theta - qqxx)^{3:2} =$ [poſitis pro dq & $d\theta$ eorum valoribus] $(aq\theta\theta dx + a\theta\theta rxdx - aq\theta\Phi xdx) : (\theta\theta - qqxx)^{3:2}$; ex his eliciuntur coordinatæ, & quidem abſciſſa, ſeu $ad\pi : dz = (\theta\theta - qqxx)^{3:2} : (q\theta + r\theta x - q\Phi x)$, & applicata, ſeu $zdp : dz - \pi = (q\theta\theta x - q^3x^3) : (q\theta + r\theta x - q\Phi x) - \pi$; verum ipſa curvæ longitudo L, ſive $\frac{d\pi}{dz} \surd (aa + zz) - \int (zd\pi : \surd (aa + zz) = (\theta^3 - qq\theta xx) : (q\theta + r\theta x - q\Phi x) - px + \int pdx$; unde fluit, $\int pdx = L + px - (\theta^3 - qq\theta xx) : (q\theta + r\theta x - q\Phi x)$. In his omnibus, cum $p, q, r, \pi, \theta, \Phi$ ſint quantitates algebraïcæ, palam eſt, quadraturam tranſcendentem $\int pdx$ etiam hoc modo reduci ad rectificationem curvæ algebraïcæ, infinitis caſibus mutabilis pro diverſitate arbitrariæ functionis π. Haud aliter proceditur, ſi aliam quamcunque ex formulis Art. IX in uſum vocare placuerit; atque ita habebimus infinitarum ſolutionum claſſes infinitas.

X I I I.

Tanta vero ſolutionum fæcunditas nonniſi infiniteſimam conſ-

 tituit

tituit partem multitudinis earum, quæ de novo ſcaturiunt ex combinatione formularum Art. IX traditarum: combinando enim per additionem, vel per ſubtractionem, vel quocunque alio modo, duas pluresve formulas earumve multipla, manifeſtum eſt ſemper novam aliquam oriri formulam inter ſimplices illas non contentam, quæ per conſequens in uſum adhibita, ut hic docuimus, ſuppeditabit novam infinitarum ſolutionum claſſem. Sic, exempli gratia, ſi formula prima $\int p\,dx = px - \int qx\,dx$ dematur a duplo formulæ ſecundæ $2\int p\,dx = 2px - qxx + \int rxxdx$, remanebit $\int p\,dx = px - qxx + \int(rxx + qx)\,dx$, pro nova formula in uſum adhibenda ad modum Art. præced. Nunc quippe poni oportet $\int(z\theta\,dx : \surd(aa + zz) = \int(rxx + qx)\,dx$, adeoque $z\theta : \surd(aa + zz) = rxx + qx$; unde habetur z & dz, ex quibus poſtea determinantur coordinatæ in terminis algebraïcis, ipſaque curvæ longitudo L, unde reſultabit $\int p\,dx = L$, plus aliqua functione algebraïca ipſius x ex pluribus aliis functionibus, tum datis, tum ad arbitrium aſſumtis, & ab iis dependentibus compoſita.

X I V.

Cum vero modus combinandi formulas, ut & aſſumtio functionis π ſint res meri arbitrii; fortaſſis non erit difficile, alterutrum, vel utrumque ita inter ſe accommodare & attemperare, ut functio illa ex aliis compoſita, & ipſi L adjungenda in nihilum abeat; quod certe eſt operis pure analytici: e quo id utilitatis lucraremur, ut prodiret $\int p\,dx = L$, hoc eſt, ut inveniri poſſet Curva algebraïca, cujus arcus, ſine linearum rectarum admixtione, proportionales eſſent partibus areæ tranſcencendentis $\int p\,dx$. Verum non vacat nunc hæc omnia ulterius proſequi; ſufficit me portam aperuiſſe qua iter panditur ad ſublimiora, & ad ea præſertim, quæ in Geometricis hucuſque credita ſunt abſtruſiſſima. Interim quod attinet ad formam quam adhibui coordinatarum $a\,dx : dz$, & $z\,dx : dz - x$, tanquam fontem infinities-infinitarum ſolutionum inde propullulantium; ſcien-

ſciendum eſt, etiam ipſam hanc formam mutari poſſe in alias, licet non tam ſimplices, quæ tamen ſingulæ novam ſolutionum ſegetem non minus copioſam largiuntur; quod niſi in his nimium me fore vererer, uno alterove exemplo comprobare poſſem.

X V.

Progredior ad areas tranſcendentes ſuperiorum graduum. Ut vero pateſcat quales hic intelligam, eas ſequientem in modum definio: Sit ſeries Curvarum A, B, C, D, E, &c. communem abſciſſam x habentium, quarum una ex altera ita generatur, ut area curvæ A ſit proportionalis applicatæ curvæ B, & area curvæ B proportionalis applicatæ curvæ C, dein area hujus C proportionetur applicatæ curvæ D, atque ita porro ſecundum ordinem curvarum; quarum proin quælibet conſtruitur per quadraturam ejus quæ immediate præcedit. Sit nunc prima A algebraïca, habens pro applicata p functionem quamlibet abſciſſæ x; ita tamen ut areæ elementum $p\,dx$ non ſit integrabile; vocabo quadraturam primæ curvæ A *tranſcendentem primi gradus*: quadraturam ſecundæ B *tranſcendentem ſecundi gradus*; illam tertiæ C, quartæ D, quintæ E, &c. *tranſcendentem gradus tertii*, *quarti*, *quinti*, &c.

X V I.

Quæritur modus inveſtigandi Curvas algebraïcas, per quarum rectificationem qualibet ex areis iſtis tranſcendentibus gradus cujuſlibet conſtrui poſſit.

Hujus Problematis non parum ardui, ut prima fronte videtur, commodam ſolutionem daturus, duo ſequentia notanda propono: 1°, Ex arearum noſtrarum geneſi habetur

Area prima $A = \int p\,dx$
Area ſecunda $B = \int dx \int p\,dx$
Area tertia $C = \int dx \int dx \int p\,dx$
Area quarta $D = \int dx \int dx \int dx \int p\,dx$;

atque ſic deinceps in infinitum.

2°. Sin-

2°. Singulæ reduci poſſunt ad quadraturas tranſcendentes ſimplices, ſeu primi gradus, per modum integrandi hic mihi uſitatum ac jam olim in *Actis* 1694 uſurpatum; invenio namque ut ſequitur

1 .... $\int p\,dx = \int p\,dx$

2 .... $\int dx \int p\,dx = x\int p\,dx - \int p x\,dx$

3 ... $\int dx \int dx \int p x = (xx\int p\,dx - 2x\int p x\,dx + \int p xx\,dx) : 1.\,2$

4 ... $\int dx \int dx \int dx \int p\,dx = (x^3\int p\,dx - 3x^2\int p x\,dx + 3x\int p x^2\,dx - \int p x^3\,dx) : 1.\,2.\,3$

&c.

Unde perſpicitur, hanc regulam generaliter obſervari in reductione quadraturæ tranſcendentis gradus indefiniti cujus exponens $= n + 1$; hac ſcilicet lege, ut elevetur $x - 1$ ad poteſtatem n, cujus termini prodeuntes ducantur reſpective in $\int p\,dx$, $\int p x\,dx$, $\int p xx\,dx$, $\int p x^3\,dx$, &c. totumque poſtea dividatur per factum numerorum omnium in n contentorum; ſic quippe erit $\int dx \int dx \int dx \ldots \int p\,dx = (x^n\int p\,dx - \frac{n}{1}x^{n-1}\int p x\,dx + \frac{n.(n-1)}{1.\,2.}x^{n-2}\int p xx\,dx - \frac{n(n-1)(n-2}{1.\quad 2.\ 3}x^{n-3}\int p x^3\,dx \ldots\ldots \int p x^n\,dx) : 1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\,n.$

XVII.

Jam nihil ſupereſt aliud, quam ut, per methodum Art XI, aliamve ex præcedentibus, areæ ſingulæ $\int p\,dx$, $\int p x\,dx$, $\int p xx\,dx$, &c. reducantur ad extenſionem totidem curvarum algebraïcarum cum ſibi annexis quantitatibus algebraïcis; quibus ſubſtitutis in prædicta progreſſione reſultabit quadratura tranſcendens quantivis gradus $n + 1$ areæ $\int dx \int dx \int dx \ldots \int p\,dx$ reducta ad rectificationem tot curvarum algebraïcarum, quot ſunt unitates in numero $n + 1$. *Quod erat ultimo faciendum.*

N°. CXXXIII.

DEMONSTRATIO CONSTRUCTIONIS

Edita in Actis Lipſ. 1724 M. Jul. *pro deſcribenda Trajectoria reciproca, quæ inter omnes algebraïcas poſſibiles ſit ſimpliciſſima;*

Autore Joh. BERNOULLI.

COnſtructionem de qua agitur, anagrammati involutam dedi, exeunte anno 1722 in litteris privatis Anonymo Anglo eam a me exigenti. Anagramma ipſum brevi poſt comparuit in *Actis Lipſienſibus* 1723, M. Febr. * ejuſdemque Evolutio in iiſdem *Actis* 1724 M. Jul. † ubi Demonſtrationem Conſtructionis in peculiari ſchediaſmate me communicaturum promiſi: animus nunc eſt datam liberare fidem. *Acta Erud. Lipſ.* 1725. Jul. p. 318.

Sit in hac adjecta Figura, ſuper recta AL, Parabola cubicalis ſecunda, ſemirectangula, ABQ, cujus nempe abſciſſarum AO, AF, AL &c. quadrata ſint ut cubi applicatarum OM, FB, LC &c. cum abſciſſis angulos ſemirectos conſtituentium. Ducta per verticem Parabolæ A recta AT perpendiculari ad applicatas: vocetur parameter $27a$; ſumaturque in AT pars $AE = 2a$; per punctum E tranſiens applicata FB prolongetur ad P, ita ut BP ſit $=$ BE: per B & P agantur RS & PQ parallelæ ipſi AT, quarum PQ occurrat Parabolæ in Q. Dico Parabolam hanc, circa RS converſam, ut in ſitum priori contrarium veniat, ſe ipſam intra parallelas AT, PQ ultro citroque motam ad angulos rectos ſecare. TAB. XXXIX. N°. CXXXIII.

DEMONSTR. Accepta qualibet AG majori quam AE, quæ vocetur $(a+x)^3 : \frac{1}{2}aa$, aliaque AH minori quam AE, quæ dicatur $(a-x)^2 : \frac{1}{2}aa$, erunt ex natura hujus Parabolæ

* N°. CXXIX. pag. 556. † N°. CXXXI. pag. 577.

[ob $AL = AG\sqrt{2}$, & $AO = AH\sqrt{2}$] $LC^3 = 2\,AG^2 \times 27a = AG^2 \times 54a$, & $OM^3 = 2\,AH^2 \times 27a = AH^2 \times 54a$, adeoque $LC = \left(\frac{(a+x)^6}{\frac{1}{4}a^4} \times 54a\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(a+x)^6}{a^3} \times 216\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(a+x)^2}{a} \times 6 = (6aa + 12ax + 6xx) : a$, & ob eandem rationem $OM = (6aa - 12ax + 6xx) : a$. Subductis GL & HO, quæ ſunt æquales ipſis AG & AH, remanebunt $GC = (4a^3 + 6aax - 2x^3) : aa$, & $HM = (4a^3 - 6aax + 2x^3) : aa$. Si jam porro ſubtrahatur EB, quæ eſt $= 4a$, ex GC, item HM ex EB, reſtabunt [ductis CD & MN parallelis ipſi AT] BD & BN, quarum utraque æqualis erit $(6aax - 2x^3) : aa$, adeoque ipſæ BD & BN inter ſe æquales. Dematur nunc AE, ſeu $2a$, ex AG, ſeu $(2a^3 + 6aax + 6axx + 2x^3) : aa$, ut & AH, ſeu $(2a^3 - 6aax + 6axx - 2x^3) : aa$, ex AE ſeu $2a$, ut habeantur EG vel $DC = (6aax + 6axx + 2x^3) : aa$, & EH vel $NM = (6aax - 6axx + 2x^3) : aa$. Differentientur nunc BD, vel BN, necnon EG, & EH, ut prodeant Dd vel Nn, hoc eſt Cb, vel $Me = (6aa - 6xx)\,dx : aa$, atque $bc = (6aa + 12ax + 6xx)\,dx : aa$, & $em = (6aa - 12ax + 6xx)\,dx : aa$. Eſt autem $(6aa - 6xx)\,dx : aa$ medium proportionale inter $(6aa + 12ax + 6xx)\,dx : aa$, & $(6aa - 12ax + 6xx)\,dx : aa$; nam liquet eſſe $aa + 2ax + xx : aa - xx = a + x : a - x$, ſicut etiam $aa - xx : aa - 2ax + xx = a + x : a - x$. Hinc $Cb \times Me$ ſeu $Cb^2 = bc \times em$; id quod eſt proprietas requiſita pro Trajectoriis reciprocis, ceu docui in *Actis* 1722 p. 398. §. 3 *. Ex quo ſequitur, Parabolam cubicalem ſecundam ſemirectangulam ABQ, eandemque circa RS tranſpoſitam in ſitum inverſum, atque intra parallelas AT, PQ hinc inde motam, ſemet ipſam ad angulos rectos conſtanter ſecare. *Q. E. D.*

COROLL. I. Sumtis, tam BD, quam BN, $= 4a =$ BE; abeuntibus nimirum DC in PQ, & NM in EA: erit in puncto A angulus $M\,me$ rectus, ideoque ejus complementum Ccb

* Supra N°. CXXVIII. pag. 537.

Ccb evaneſcit in puncto Q; hoc eſt, ultima applicatarum DC, quæ eſt PQ, tangit curvam in puncto Q. Id quod ex eo quoque patet, quia ſi BD $[(6aax - 2x^3) : aa]$ ponatur $=$ *Maximo*, prodit $x = a$; quo valore ſubſtituto habetur $(6aax - 2x^3) : aa = 4a =$ BP.

COROLL. II. Si jam pariter in expreſſione ipſius EG, vel DC, quæ eſt $(6aax + 6axx + 2x^3) : aa$, ſcribatur a pro x, habebitur ET vel $PQ = 14a$, ipſaque EH vel NM $[(6aax - 6axx + 2x^3) : aa]$ abit in ipſam $EA = 2a$. Unde tota baſis $AT = 16a$, maximaque curvæ altitudo $TQ = EP = 8a$, ita ut AT ſit dupla ipſius TQ.

SCHOLIUM. Geometris notum eſt, Parabolam cubicalem ſecundam conſtare duobus ramis ſeu cruribus ſe invicem tangentibus in vertice, qui proin eſt punctum reverſionis. Hinc noſtra ABQ quæ eſt ſemirectangula, habebit alterum ramum AX ſesquirectangulum, cujus ſcilicet applicatæ YX cum abſciſſis AY angulum conſtituunt obtuſum AYX ſeſquirecto æqualem. Notetur autem, nonniſi arcum ABQ ex duobus contiguis BA, BQ conflatum, in ſtrictiſſimo Problematis ſenſu, ſatisfacere quæſito; utpote qui ſolus in ſitu inverſo ſe ipſum ad angulos rectos decuſſat; continuata enim Parabola verſus V, attendenti facile patebit neque arcum QV, neque ramum AX ea proprietate gaudere, ut uterque ſe ipſum in ſitu inverſo orthogonaliter trajiciat, ſed id tantum evenire, ut alter alterum, hoc eſt, arcus AX inverſus arcum QV, vel QV inverſus ipſum AX in recto ſecet angulo. Ob hanc rationem dixi, Parabolam cubicalem ſemirectangulam tantum reſpondere conditioni præſcriptæ, excluſo ramo altero AX ſeſquirectangulo, immo quoque excluſo arcu QV ultra Q quantumvis protenſo. Quod ſi jam applicatæ ſingulæ LC, FB, OM, &c. inflectantur circa puncta G, E, H, &c. ita tamen ut omnes inter ſe maneant parallelæ, puncta C, B, M, &c. erunt ad aliam Parabolam cubicalem ſecundam ABQ ſemper quidem acutangulam, quia angulus ALG ad baſin trianguli iſoſcelis AGL neceſſario eſt acutus. Inſerviet vero tunc Parabola ABQ pro quolibet

 inter-

intersectionis angulo obliquo; quippe qui constanter æqualis erit inflexionis angulo AGL ad arbitrium facto, vel obtuso, vel acuto; sicuti demonstravi in *Actis* 1722 pag. 405. *

Analysis ad Constructionem præcedentem ducens.

Dedi in *Actis* memoratis 1722 † tres generalissimos solvendi modos, quibus inveniantur Trajectoriæ reciprocæ infinitorum generum, cum algebraïcæ, tum transcendentes; atque hæ sive per quadraturas, sive per rectificationes curvarum algebraïcarum construendæ. Duo priores illorum modorum dextre adhibiti subministrant inventionem simplicissimæ, quam construxi ac demonstravi, algebraïcæ Trajectoriæ reciprocæ: id qua arte obtineatur per ambos illos modos, nunc quidem docebo.

Modus I. Ad primum quod attinet, consistit ille in condendis formulis, quarum quædam exempla concinnavi p. 398 & 399 §, quarumque naturam & fabricam ibidem exposui; positis nimirum x & y pro coordinatis curvæ quæsitæ, assumtisque ipsius x duabus quibuscunque functionibus A & B, ejus indolis ut mutatis signis potestatum imparium ipsius x, functiones ipsæ in se invicem convertantur; hoc est, ut A mutetur in B atque B in A; ostendi æquationem $dy = Adx : B$ determinare aliquam ex curvis optatis. Cum vero difficile sit, ut ibidem jam monui p. 400 ‡, eas ex ejusmodi functionibus A & B eligere, quæ inde emergentem formulam $Adx : B$ reddant integrabilem; manifestum est curvam hac ratione determinatam plerumque, si non semper, evadere transcendentem. Quamobrem lubet hic indicare, quo pacto fieri possit, ut assumta tertia quadam functione G, æquatio oriatur integrabilis, exhibens proin curvam algebraïcam.

Sit itaque G functio ipsius x, sed talis ut contineat tantum potestates pares ejusdem; dico, si pro elementis coordinatarum sumantur Gdx & $AGdx : B$, fore curvam quæ hinc nascitur, etiamnum ex desideratis unam: quod sic paucis demonstro. Quia enim

* Supra, pag. 543. 544. † N°. CXXVIII.
§ pag. 537. ‡ pag. 538.

enim mutato x affirmativo in negativum & vicissim, mutabitur, $A : B$ in $B : A$, ipsum vero G non mutabitur, quoniam nonnisi dimensiones pares continet ex assumtione: unde captis [vid. *Fig.* 1] utrimque in partes oppositas abscissis OL & OM $= \int G dx$, applicata LB $= \int (AG dx : B)$; erit altera applicata MD $= \int (BGdx : A)$. Est autem $(AGdx : B) \times (BGdx : A) = GGdx^2$ hoc est, $cB \times nd = Ll^2$. Curva igitur ADBC, per ea quæ á me demonstrata sunt p. 398, §§ 2, & 3 *, satisfacit Problemati. *Q. E. D.* TAB. XXXVII. *Fig.* 1.

Hinc ut curva ADBC fiat algebraïca, nihil aliud faciendum, quam ut assumatur G talis, quæ producat integrabiles tam Gdx quam $AGdx : B$; id quod assumta fractione $A : B$ rationali infinitis modis exequi licet. En hunc facillimum: Pone $G = A \times B$, habebit utique G conditionem suppositam, si nempe A & B suas habuerint, quemadmodum attendenti sponte liquet; prodibit inde $Gdx = ABdx$, & $AGdx : B = AAdx$; utrumque sane integrabile, ob A & B functiones rationales & integras. Quare si abscissa OL fiat æqualis $\int ABdx$, & applicata LB $= \int AAdx$ resultabit curva ABC algebraica quæsito respondens. Nota, per x & $-x$ intelligi quamlibet partem indeterminatam ab O versus H, eandemque ab O versus G capiendam; ex qua formentur functiones A & B, atque ex his coordinatæ OL, LB vel OM, MD.

His ita præmissis, si investigare jam lubeat, quænam ex omnibus istis algebraïcis sit simplicissima & cujus sit naturæ, vel quam habeat æquationem coordinatis convenientem: eligatur ex formulis, quarum fabricam in *Actis* loco præmemorato docuimus, ea, quæ omnium est simplicissima, vel qua simplicior dari non potest; hæc autem, ceu patet, est ipsissima illa, quæ pag. 398 † primum locum occupat $dy = \frac{a - x}{a + x} dx$, aut quod perinde est $dy = \frac{a + x}{a - x} dx$, ubi igitur $A = a + x$, & $B = a - x$; adeoque G seu $AB = aa - xx$: unde OL $= \int ABdx = aax - \frac{1}{3}x^3$, & LB $= \int AAdx = aax + axx + \frac{1}{3}x^3 + c^3$; adjicio constantem c^3, ut

* pag. 537. † pag. 537. lin. 6 à fine.

ut moris est in integrationibus, ad denotandam primam applicatam puncto O respondentem. Si vero magis arrideat, ut curva ABC transeat per O, negligi debet c^3, & sic accommodabitur ad figuram præsentem huic Schediasmati adjectam, in qua punctum B initium est abscissarum, abscissæ ipsæ hinc inde æquales BD & BN, applicatæ DC & NM. Habebimus itaque curvam ABC algebraïcam, cujus hæc est indoles, ut sumtis abscissis in utramque partem BD & BN $= aax - \frac{1}{3}x^3$, applicata DC sit $= aax + axx + \frac{1}{3}x^3$, altera per consequens NM $= aax - axx + \frac{1}{3}x^3$. Multiplicemus has quantitates per constantem $6 : aa$, ut coordinatarum valores unius sint dimensionis, quo facto prodibit BD $=$ BN $= (6aax - 2x^3) : aa$, DC $= (6aax + 6axx + 2x^3) : aa$ & NM $= (6aax - 6axx + 2x^3) : aa$. Verum supra in Constructione demonstravimus hanc proprietatem competere Parabolæ cubicali secundæ: atque ita hæc Parabola analytice deducta est ex formularum in *Actis* a nobis expositarum simplicissima, quod qua ratione fiat, ostendere hoc modo volebamus.

Modus II. Propero ad alteram Methodum ibidem p. 403 † explicatam, ubi docui modum describendi Trajectorias reciprocas transcendentes & algebraïcas per rectificationes curvarum GEH [vid. *Fig.* IV ibid.] arcus hinc inde similes & æquales ES, EM, habentium. Ostendere nunc animus est, etiam per hanc methodum maxime generalem, perveniri ad nostram Parabolam cubicalem secundam, tanquam omnium Trajectoriarum reciprocarum simplicissimam. Hunc in finem, quæro ex omnibus curvis habentibus ab utroque axis EO latere ramos ESH, EMG similes & æquales eam, quæ primo sit algebraïca & rectificabilis, secundo quæ sit, quoad fieri potest, infimi ordinis, vel dimensionis, respectu æquationis inter coordinatas, ac tandem tertio cujus arcus ES, EM cum abscissis correspondentibus relationem habeant infima possibili æquatione expressam.

TAB. XXXVII. *Fig.* 4.

Ut

† pag. 541.

Ut tria ista requisita obtineam, concipio, in præfata *Fig.* IV, ductam esse applicatam SL perpendicularem ad axem EO; atque inter abscissam EL, quam voco z, & applicatam SL, quam voco t, haberi hanc æquationem $t = \frac{1}{2-2n} a^{n} z^{1-n} - \frac{1}{2+2n} a^{-n} z^{1+n}$ [ubi per n intelligo quemcunque numerum fractum unitate minorem, cujus numerator sit impar & denominator par] dico, curvam hanc algebraïcam constare ramis utrinque similibus, & æqualibus, quod examinanti facile patet, ejus arcus esse rectificabiles, eosque habere ad abscissas relationem non magis compositam, quam ipsæ applicatæ ad abscissas habent; erit enim ES, vel EM $= \frac{1}{2-2n} a^{n} z^{1-n} + \frac{1}{2+2n} a^{-n} z^{1+n}$ quæ expressio ab ea, qua applicata SL exprimitur, non differt nisi signo, quo afficitur secundus terminus. Ex omnibus igitur curvis ESH, hac æquatione determinatis, illa quæ simplicissima est respectu æquationis inter coordinatas, erit etiam simplicissima respectu relationis inter abscissas & arcus. Videndum adeoque est, quid pro n sumendum sit, ut prodeat æquatio inter t & z infimæ possibilis dimensionis; inferior autem dari non potest quam tertia, alias sectio conica foret rectificabilis. Velis ergo tertiam: Pone $n = \frac{1}{2}$, atque obtinebis $t = a^{1:2} z^{1:2} - \frac{1}{3} a^{-1:2} z^{3:2}$, seu $t = \sqrt{az} - \frac{1}{3}\sqrt{(z^3 : a)}$, quæ reducta dat $9att = z^3 - 6azz + 9aaz$, pro curva tertii ordinis ESH, cujus arcus ES $= \sqrt{az} + \frac{1}{3}\sqrt{(z^3 : a)}$.

Ex hac ut eruas naturam Trajectoriæ reciprocæ AEC; ex puncto B demitte in axem EO perpendiculum BT; habebis abscissam ET $=$ EL $+$ LT $=$ EL $+$ SB $=$ EL $+$ ES $= z + \sqrt{az} + \frac{1}{3}\sqrt{(z^3 : a)}$ & applicatam BT $=$ SL $= t = \sqrt{az} - \frac{1}{3}\sqrt{(z^3 : a)}$. Assume nunc quamlibet indeterminatam x, atque fac, quod liberum est, $z = xx : a$, orientur coodinatæ per x expressæ, scilicet abscissa ET $= xx : a + x + x^3 :$

$x^3 : 3aa$, & applicata BT $= x - x^3 : 3aa$, quibus in ordinem reductis, utriusque simul sextuplum sumendo, fit ET $= (6aax + 6axx + 2x^3) : aa$, & BT $= (6aax - 2x^3) : aa$. Liquet ergo nunc iterum, ex Constructione supra data & demonstrata, Trajectoriam simplicissimam algebraïcam, per secundam nostram methodum adinventam, esse Parabolam cubicalem secundam; nullo hic alio existente discrimine, quam quod coordinatæ permutentur, dum quas ibi vocamus abscissas, hic applicatarum nomine veniunt, ac vice versa.

Atque sic omni ex parte satisfactum jam puto Anonymo Anglo, quando non tantum exhibui, sed & demonstravi, quod a me, tum exhibendum, tum demonstrandum, postulaverat. Vices nunc redditurus, permittente id talionis lege, quæro ab eo, ut det aliquam Trajectoriam reciprocam algebraïcam, quæ sit inter omnes quas invenire potest in ordine simplicitatis secunda, utque exhibeat æquationem inter coordinatas naturam curvæ quæsitæ exprimentem.

N°. CXXXIV.

CONTINUATIO MATERIÆ DE TRAJECTORIIS RECIPROCIS:

Imprimis de PANTOGONIA, *quæ pro diversa axis positione se ipsam in quovis angulo dato constanter secat:*

Item determinatio Trajectoriæ alicujus reciprocæ algebraïcæ post primam simplicissimæ.

Autore Joh. BERNOULLI.

I.

Acta Erud. Lips. Suppl. Tom. IX. Sect. VI. pag. 265.

QUanquam ab aliquot annis multa & varia hinc in lucem prodierunt ad Problema Trajectoriarum spectantia, jucunda non minus quam utilia; multum tamen abesse existimo, quominus fœcundam istam materiam omnino exhaustam esse credamus. Meæ multiplices solutiones, analyses, constructiones, demonstrationes, annotationes, & quæ alia in eam rem faciunt, legi possunt in *Actis Lips.* quibus ansam dedit velitatio illa fat diu me inter & Anonymum Britannum, in hunc usque diem mihi ignotum, intercedens.

II.

Is cum vidisset, me sibi identidem provocanti, aliaque post alia de novo proponenti, nunquam defecisse, destitit tandem ab importuna compellatione, abrupitque commercium litterarium, haud quidem mihi valde gratum, quia nesciebam quocum genere viri mihi res esset; a quo tamen commercio non abhorruissem, si non perrexisset nomen suum pertinaciter celare. Ut enim quod res est libere dicam, parum videbatur gloriosum decertare cum ignoto, quem si viceris nihil tibi proderit victoria, cum nescias a quo palmam repetere liceat; sin aliter evenerit ut succumbas, in triumpho te ducere non cunctabitur Victor; apud Anglos præsertim, ubi quamplurimi sunt, qui immani odio & invidia flagrant in Exterorum virtutes & merita. Aliam certe causam, cur Anonymus noster aperto marte pugnare defugerit, nullam video, quam ut posset, aut tuto vincere, aut impune lædi.

III.

Monebat quidem, ut verum suæ mentis propositum dissimularet, sibi non fuisse in animo, mecum inire certamen; interim eodem in loco urget, se invenisse mirabilem aliquam curvam, ejus naturæ ut illa sit Trajectoria reciproca non tantum pro uno angulo dato, sed pro infinitis aliis, prout alius atque alius in illa assumatur *axis inversionis*, quo nomine voco rectam illam, circa quam curva inverso situ posita & hinc inde mota, alte-

altera alteram constanter in angulo dato secat. Subindicabat simul Noster in litteris d. 22 Febr. 1723 datis, hoc quod tanquam solutu difficillimum credebat, *a se mihi proponi potuisse, si me tentandi animum habuisset.* At haud ægre olfaciens sub istis verbis latere tacitam provocationem, applicui animum e vestigio ad illud, quicquid erat, Problematis solvendum; quod cum brevi feliciter enodassem, perscripsi, sine mora, me totum detexisse mysterium & demonstrare posse id quod ipse sine analysi & demonstratione communicaverat; atque ne dubitaret adjeci quædam observata, ex quibus certo concludere potuisset, non vanum esse quod asserebam.

I V.

Ille non contentus mea demonstratione novos movit scrupulos, dubitans scilicet in responsoria Epistola d. 13 Maii scripta, utrum ego, præter nudam quam dederam demonstrationem suæ propositionis, invenerim quoque solutionem & solutionis fundamentum; *alia*, inquit, *res est propositionis demonstrationem videre*, *alia vero fundamentum*, *unde inventa sit*, *percipere.* Indignabar nonnihil, ut verum fatear, eam adversarii morositatem, quam nemo alius paulo tantum æquioris animi habuisset: Ideoque invitis negotiis, quibus nos in publica statione constituti nunquam non distinemur, accinxi me protinus ad exarationem prælongæ epistolæ die 17 Julii 1723 dimissæ ad Antagonistam, multo ut apparet otio abundantem, in qua ut ulterioribus altercationibus ansam præciderem, omnia capita minutissime exposui, ex quibus cernere posset me certo ad ima usque novi hujus Problematis fundamenta penetrasse, aliaque multa communicavi, & monui generatim spectantia ad rem nostram de Trajectoriis reciprocis: hac tamen addita seria declaratione, nullas illi in posterum abs me expectandas esse litteras, si me diutius ignorare sineret nomen suum.

V.

V.

Sive igitur nihil amplius habuerit quod reponeret, sive quod maluerit silere, quam se, quis esset, notum facere, sive, ut probabile est, utrumque sit silentii causa; ab eo nihil ulterius responsi loco in hunc usque diem vidi. Quare nunc lubet cum publico communicare principaliora ex Epistola illa mea ad Anonymum postremo data, & quædam admiscere ad illustrationem eorum, quæ obiter tantum tetigeram: inservient ad notitiam curiosorum partim, partim ad analyseos parum hactenus usitatæ perfectionem. Quod inter cætera eo lubentius facio, quia observare licuit Anonymum nostrum hanc materiam intricate magis quam accurate pertractasse, in longo suo atque intellectu perquam difficili & obscuro Schediasmate, quod in *Actor. Erud. Supplem.* Tomo VIII * extat excerptum ex *Transact. Londin.* Quantum præsertim attinet ad descriptionem illius Trajectoriæ reciprocæ [quæ *Pantogonia* vocari potest] ea proprietate gaudentis, ut infinitos habeat axes inversionis inter se parallelos, adeoque Problemati satisfaciat non pro uno tantum angulo dato, sed pro infinitis aliis pro lubitu, assumto nimirum alio atque alio axe, ut casus exigit; hujus descriptionis quam dat Noster in præfato *Supplem. Tomo VIII*, pag 253 † vix aliquod certæ analyseos vestigium videre est. Non itaque ingratum spero me facturum perspicuæ methodi Amatoribus, si rei fundamentum, ipsamque qua usus sum analysin, prout eam Antagonistæ meo ante quatuor abhinc annos perscripsi, hoc loco aperuero.

V I.

PROBLEMA.

Invenienda & construenda est super recta positione data A C [Fig. 1.] *linea curva* A B C, *quæ conversa circa quamcunque perpendicularem ad* A C, *exempli gratia*, *circa* F N, *& deinde* TAB. XL. Fig. 1. *ultro citroque mota*, *motu parallelo ipsi* F N, *se ipsam semper secet in angulo constanti*, *qui duplus erit anguli* A F N; *atque ita si*

Gggg 2 *circa*

* N°. CXXXX. † Supra pag. 571.

circa axem alium, exempli gratia DL, *invertatur curva* ADC, *ut sit angulus interſectionis perpetuo duplus anguli* ADL, &c.

Præparatio ad Solutionem.

Sit AC recta abſciſſarum, in qua nempe concipio ſumi abſciſſas AL, AM, AN, AO, AP, AQ, &c. in progreſſione arithmetica, ita ut applicatæ LD, ME, NF, OB, PG, QH &c. æquali a ſe invicem diſtent intervallo. Hinc per ea quæ explicavi in *Actis Lipſ.* 1722 p. 398 §. 1 & 2 *, aſſumta EM pro axe inverſionis, id curandum eſt, ut angulus ADL + ang. AFN fiant = 2 ang. AEM, hoc eſt, ut tres anguli ADL, AEM, AFN ſint continue arithmetice proportionales. Porro ſi jam FN debeat eſſe axis inverſionis, oportebit pariter tres angulos AEM, AFN, ABO procedere in continua proportione arithmetica; idem concludetur de tribus AFN, ABO, AGP, item de tribus ABO, AGP, AHQ, & ſic deinceps. Unde liquet totam ſeriem angulorum ADL, AEM, AFN, ABO, AGP, &c. quouſque libuerit continuatam formare progreſſionem arithmeticam, dum & abſciſſæ AL, AM, AN, AO, AP, &c. talem progreſſionem obſervant. Unde ſtatim perſpicitur, ad inveſtigandam quam petimus curvam, nihil aliud agendum eſſe, quam ut aſſumto ubivis puncto R pro initio abſciſſarum, determinetur qualis ſit Curva ABC, cujus abſciſſa quælibet RM ſit directe proportionalis angulo ſibi correſpondenti AEM, quem facit applicata EM cum tangente in puncto E.

V I I.

Solutio & Conſtructio.

Problema huc reductum ſolvitur per vulgarem calculum differentialem, ducitque ſimul ad ſequentem conſtructionem, quæ eadem opera analyſin monſtrat: Primo manifeſtum eſt, abſciſſas RM, ut comparari poſſint cum ſuis reſpectivis angulis AEM, eorumve potius menſuris, ſupponendas eſſe æquales arcubus ali-

* Supra N°. CXXVIII. pag. 536, 537.

alicujus circuli ad arbitrium aſſumpti: Sit itaque recta RT aſſumtæ longitudinis = 2 quadrant. peripheriæ alicujus circuli $\alpha\gamma$ [*Fig.* 1 & 2] cujus centrum ζ; intelligatur arcus indeterminatus $\alpha\beta$ cui æqualis ſupponatur abſciſſa RM; ſitque radius $\alpha\zeta = a$, tangens $\alpha\delta = t$, ſinus $\beta\varepsilon = x$, coſinus $\zeta\varepsilon = y = \surd(aa - xx)$, arcus $\alpha\beta = s =$ RM, ME $= u$, cui proxima ſit applicata me; erit M$m = ds = aadt : (aa + tt) = adx : \surd(aa - xx) = - ady : \surd(aa - yy)$, $ne = du$. Ut igitur anguli AEM proportionales fiant abſciſſis RM, hoc eſt, arcubus $\alpha\beta$ vel angulis $\alpha\zeta\beta$, poſſum ſupponere angulum AEM ſeu Een eſſe æqualem angulo $\alpha\zeta\beta$, vel cuivis ejus multiplo, ſubmultiplove; ſupponamus ergo ſtatim E$en = \alpha\zeta\beta$, TAB. XL. Fig. 1 & 2.

erit E$n : ne = \alpha\delta : \alpha\zeta$, hoc eſt, $ds : du \left[= \frac{aadt}{aa+tt} : du\right] = t : a$,

vel, ſi mavis, erit $En : ne = \beta\varepsilon : \varepsilon\zeta$; ſeu $ds : du \left[= \frac{adx}{\surd(aa - xx)} : du\right]$

$= x : \surd(aa - xx)$, vel etiam $ds : du \left[= - \frac{ady}{\surd(aa - yy)} : du\right]$

$= \surd(aa - yy) : y$. Ex prima analogia habetur $du = a^3dt : (aat + t^3)$; Ex altera fit $du = adx : x$; Ex tertia denique eſt $du = - aydy : (aa - yy)$. Hinc cognoſco curvam quæſitam ABC deſcribi, ſi facta abſciſſa = RM = arcui $\alpha\beta$, ſumatur applicata ME, ſeu u, $= c + \int(a^3 dt : (aat + t^3))$, vel $= c + \int(adx : x)$, vel $= c + \int(- aydy : (aa - yy))$; per c intelligo quantitatem conſtantem arbitrariam.

V I I I.

Trium horum modorum medius dat accurate conſtructionem Anonymi noſtri; reliqui duo, etſi in expreſſione diverſi, cum eodem tamen coincidunt, ſupponuntque omnes tres, quadraturam hyperbolæ vel [quod in praxi longe facilius & concinnius eſt] logarithmos; ſumta enim a pro unitate, fit $\int(a^3 dt : (aat + t^3)) = \log.(t : \surd(aa + tt))$; $\int(adx : x) = l(x : a)$ & $\int(- ady : (aa - yy)) = l(\surd(aa - yy) : a)$. Hos au-

Gggg 3 tem

tem omnes valores eſſe inter ſe æquales, patet ex eo quod $t : \sqrt{(aa+tt)} = x : a = \sqrt{(aa-yy)} : a$.

I X.

In his ita expoſitis conſiſtit tota ſolutio & ſolutionis fundamentum; interim volebam ulterius progredi, quia liberum eſt ſtatuere angulum Een æqualem non tantum ſimplici angulo $\alpha\zeta\beta$ ſed cuivis ejus multiplo. Hunc in finem, ita procedebam: ſtatuatur angulus E$en = 2$ ang. $\alpha\zeta\beta$, erit [quia tangens dupli anguli $\alpha\zeta\beta = 2aat : (aa-tt)$, ut calculum facienti patebit], E$n : ne = ds : du$ $\left[= \frac{aa\,dt}{aa+tt} : du\right] = \frac{2aat}{aa-tt} : a$ adeoque $du = (a^3 - att)\,dt : (2aat + 2t^3)$. Facta igitur rurſus abſciſſa RM $=$ arcui $\alpha\beta$, capiatur applicata ME ſeu $u = c + \int((a^3 - att)\,dt : (2aat + 2t^3))$, orietur etiam hoc modo curva quæſita ABC.

X.

Statuam porro angulum E$en =$ triplo angulo $\alpha\zeta\beta$, cujus tangens $= (3aat - t^3) : (aa - 3tt)$; erit nunc $ds : du$ $\left[= \frac{aa\,dt}{aa+tt} : du\right] = \frac{3aat - t^3}{aa - 3tt} : a$, unde $du = (a^5 - 3a^3tt)\,dt : (aa+tt) \times (3aat - t^3)$. Et ſic facta ſemper RM $=$ arcui $\alpha\beta$, fiat applicata ME $= c + \int((a^5 - 3a^3tt)\,dt : (aa+tt) \times (3aat - t^3))$, deſcribetur iterum curva optata ABC. Eodem ritu poſſum pergere, ponendo angulum E$en =$ quadruplo, aut alii cuivis multiplo, ſubmultiplove anguli $\alpha\zeta\beta$, & ſic ſemper obtinebo diverſam expreſſionem pro applicata ME; cui negotio inſervit formula generalis quam exhibui in *Actis Lipſ.* 1722 p. 367 †, & jam antea in iiſdem 1712 p. 330 * pro inveniendis tangentibus arcuum multiplorum ex tangente arcus ſimpli.

X I.

† N°. CXXVII. pag. 532. * N°. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.*

X I.

Videtur prima fronte, omnes iſtas expreſſiones applicatæ ME non poſſe non totidem diverſas generare curvas ABC, ſed re paulo penitius inſpecta & ad calculum differentialem revocata, protinus liquet illas curvas eſſe omnes inter ſe eaſdem, vel potius ſimiles. Unde hoc emergit paradoxum, omnes has formulas $\int(a^3\,dt : (aat + t^3))$; $\int((a^3 - att)\,dt : (2aat + 2t^3))$; $\int((a^5 - 3a^3tt)\,dt : (aa+tt) \times (3aat - t^3))$ &c. per ſolas areas hyperbolicas, vel quod perinde eſt per meros logarithmos integrari; adeoque nihil, ut alias in hujuſmodi fractionibus rationalibus plerumque fit, abſolute integrabile, vel reducibile ad arcus circuli in illis comprehenditur; quod a priori invenire, res forſan eſſet difficilioris indaginis.

X I I.

Cæterum patet curvam noſtram ABC habere duos ramos BA & BC ſimiles & æquales: ſumta enim in prima conſtructione [vid. §. 7 & 8] RO $=$ quadranti $\alpha\beta\gamma$, erit angulus ABO rectus; ſumtiſque punctis M & Q æqualiter a puncto O diſtantibus, erunt anguli AEM & CHQ æquales inter ſe, quanto enim AEM recto minor, tanto etiam ex natura curvæ angulus AHQ recto eſt major, & præterea ME $=$ QH; nam utraque $= c + l(x : a)$ vel [ob $a = 1$] $= c + lx$. Patet inſuper curvam duas habere aſymtotos RS & TV parallelas applicatis; nam in punctis R & T, eſt $\beta\varepsilon$, ſeu $x = 0$, ideoque $lx = l0 = -\infty$; id eſt, applicatæ prima & ultima RS & TV ſunt infinitæ, in partes averſas ducendæ; quæ proinde habent naturam aſymtotorum.

X I I I.

Ne curioſus Lector opus habeat longa diſquiſitione ad indagandum per quam viam ad enodationem propoſiti hujus Problematis pervenerim; operæ pretium erit ipſam quoque analyſin

in

in illius gratiam hic ponere, quæ monstrabit, unicam tantum dari curvæ speciem Problema solventem. Quia; ceu supra vidimus in fine §. 6, curvæ natura postulat, ut angulus AEM seu Een [*Fig.* 1.] sit proportionalis RM, erit etiam elementum anguli Een, hoc est Een — AEM, proportionale elemento abscissæ Mm. Sit itaque RM $= z$, ME $= u$, data recta arbitrariæ magnitudinis $= a$, atque ponamus, quod liberum est, elementum applicatæ du constans: erit, quemadmodum in Analysi infinite parvorum docetur, ang. Een — ang. AEM $= duddz : (du^2 + dz^2)$. Faciendum ergo est, curvæ natura id exigente, $duddz : (du^2 + dz^2) = dz : a$; quæ æquatio, licet sit differentialis secundi gradus, reduci potest ad aliam primi gradus, introducendo novam indeterminatam t, ponendo nempe $dz = tdu : a$, adeoque $ddz =$ [ob du constantem] $dtdu : a$; quibus substitutis, mutabitur $duddz : (du^2 + dz^2)$ in $adt : (aa + tt) = dz : a$, seu $aadt : (aa + tt) = dz$. Quare assumta tangente $\alpha\delta$ [*Fig.* 2.] pro t, & radio $\zeta\alpha$ pro a, erit arcus $\alpha\beta = \int (aadt : (aa + tt)) = z$. Ut vero etiam
TAB. XL. *Fig.* 2. determinetur u, seu applicata ME; notetur, quia $dz = tdu : a$ seu $du = adz : t =$ [substituto valore ipsius dz] $a^3 dt : (aat + t^3)$, fore $u = a^3 \int (dt : (aat + t^3)) = a \int dt : t - a \int (tdt : (aa + tt)) = alt - al\sqrt{(aa + tt)} = al(t : \sqrt{(aa + tt)})$ $=$ [sumta a vel $\zeta\alpha$ pro unitate] $l(\alpha\delta : \zeta\delta)$. Dico itaque, si describatur curva, cujus abscissa sit æqualis arcui $\alpha\beta$ & applicata sit $= l(\alpha\delta : \zeta\delta)$ hanc curvam esse quæsitam.

X I V.

Constructio.

Ex hac analysi non tantum fluit constructio illa, quam supra §. 5 dedimus, & quam dedit quoque Anonymus, sed & hæc altera inde deducitur per logarithmos procedens, longe facilior &
TAB. XL. *Fig.* 3. concinnior. Sit quadrans circuli $\alpha\beta\gamma$ [*Fig.* 3] cujus centrum ζ; tangens indefinita αB. Producta $\alpha\zeta$ versus V, super ea tanquam asymtoto describatur logarithmica γST transiens per γ, cujus

cujus subtangens sit æqualis radio $\zeta\gamma$: jam per quodlibet punctum β in quadrante assumtum agatur asymtoto parallela βS occurrens radio $\zeta\gamma$ & logarithmicæ in punctis R & S; tum ad abscissam αM factam æqualem arcui $\alpha\beta$ applicetur ME æqualis ipsi RS: dico punctum E fore in curva optata BEG.

X V.

DEMONSTR. Demisso perpendiculo $\beta\epsilon$ & ducta per β secante $\zeta\beta\delta$, quæ repræsentant easdem lineas $\beta\epsilon$ & $\zeta\delta$ in *Fig.* 2; liquet RS esse logarithmum ipsius Rζ, vel $\beta\epsilon$; quia vero $\zeta\gamma$, seu $\zeta\beta$, sumitur loco unitatis, erit RS logarithmus rationis $\epsilon\beta : \zeta\beta$, hoc est $\alpha\delta : \zeta\delta$, quare cum AM sit $=$ arcui $\alpha\beta$, & ME $=$ RS $= l(\alpha\delta : \zeta\delta)$ erit punctum E in curva BEG, quæ habebit conditionem in analysi inventam. Ergo BEG est curva quæ petebatur.

X V I.

COROLL. Cadente puncto β in γ, ita ut arcus $\alpha\beta$ fiat $=$ quadranti $\alpha\beta\gamma$, erit & ipsa αM quæ jam est αB $= \alpha\beta\gamma$, & RS vel ME $= 0$. Abeunte vero β ultra γ, ita ut arcus $\alpha\beta$ tanto jam major fiat quadrante, quanto antea minor erat, manifestum est easdem recurrere applicatas RS vel ME, dum interim abscissa αM tanto excessu superat αB quanto prius ab eadem superabatur: unde palam est curvam GEB continuari ultra B in alium ramum priori GEB omnino similem, quod quidem supra [§. 12] alio modo jam demonstratum fuit, sicuti & id quod curva habeat duas asymtotos parallelas; quandoquidem existente arcu $\alpha\beta = 0$, vel $= 2$ quadrant., inde fit RS vel ME $= \zeta$V, vel αV, quæ est infinita.

X V I I.

SCHOLIUM. I. Ex eo quod in §. 13 per analysin nostram invenimus unam tantum æquationem differentialem $adt : (aa + tt) = dz : a$, quæ sane primi est gradus, merito conclusimus, nonnisi unicam dari curvæ speciem, quæ optatum effectum præstare

 possit;

poſſit; quia ſi aliæ præterea darentur curvæ ab inventa diverſæ, hæ non potuiſſent ſubterfugere analyſin, quippe quæ, cum fuerit inſtituta ad Problematis conditionem, comprehendere utique debet omnes quæ ei ſatisfaciunt curvas. Interim aliter videtur concludendum eſſe per ea quæ dedi in *Actis Lipſ.* 1722 p. 405 §. 15*. ubi demonſtravi ex una eademque Trajectoria reciproca generari infinitas alias natura diverſas: ut ſi exempli gratia, ABC ſit Trajectoria reciproca, ex cujus quolibet puncto r ducta intelligatur recta rK axi inverſionis parallela, & æqualis arcui Br, ſumto initio B ubicunque libuerit [eo enim licet mutato, eadem tamen ſemper generatur curva RBK] oſtenſum eſt, in loco allegato, punctum K eſſe in nova Trajectoria reciproca RBK, quæ cum priori communem habebit axem inverſionis & in ſitu inverſo ſe interſecabit in angulo conſtanti, dimidio nempe ejus in quo prior ABC ſe inverſam ſecat; quando igitur propoſita ABC gaudet natura *Pantogoniæ*, hoc eſt, ut habeat infinitos axes inverſionis, circa quos ſingulos converſa ſe interſecat in alio atque alio angulo conſtanti, facile intelligitur, etiam alteram inde generatam RBK neceſſario eſſe Pantogoniam. Quid autem? annon curva RBK eſt ſpeciei omnino diverſæ ab ea cujus eſt ABC? ita eſt profecto, generaliter loquendo; nam qualiſcunque ſit ABC, altera RBK ab ea valde differet & plerumque toto genere, quod vel ex eo intelligi poteſt, quia ſi curva ABC ſit algebraica, erit RBK tranſcendens; niſi forte, quod rariſſimum, ABC ſit rectificabilis. Sic, exempli gratia, ABC exiſtente circulo, orietur inde RBK Cyclois. Hoc cum ita ſe habeat, videtur utique non unam tantum ſpeciem Trajectoriæ reciprocæ pantogoniæ ABC dari, ſed aliam quoque, quæ, eo quo dictum eſt modo, ex prima deſcribitur RBK; & poſtea ex hac tertiam; ex tertia quartam, & ita infinitas alias. Verum enim vero, quod ſingulare hic eſt, & præter expectationem accidit, omnes illæ curvæ ſunt ſimiles, ejuſdemque adeo naturæ & ſpeciei. Hinc ſequens fluit Theorema, quod ita enuncio: *Sit Curva* ABC Pantogonia, *qualem ſupra* §. 1 *conſtruxi, & inde alia deſcripta* RBK, *quæ ſit ducendo* rK, *aſymtotis*

Tab. XL. Fig. 4.

* N°. CXXVIII. pag. 545.

aſymtotis RS, θV *parallelam, & æqualem arcui* Br: *Dico duas illas curvas eſſe ſimiles.*

XVIII.

Demonstr. Capiatur punctum B pro initio arcuum reſecandorum Br in vertice principali curvæ ABC; jam enim monuimus eandem curvam RBK generari quocunque in loco initium B ſumatur. Sit R punctum in quo genita RBK occurrit aſymtoto RS, quod ibi erit ubi filum, quod ramo BA in infinitum continuato circumplicatum concipitur, ſui evolutione tandem ſuperincidens aſymtoto SR pertingit ad R. Ex R & B erectis ad aſymtotas perpendiculis Rθ, BT; ductiſque ubilibet duabus applicatis proximis, ZK, ζk, quæ ſecent rectam BT & curvam BrC in punctis L, r & λ, γ; abſcindantur ex TB duæ abſciſſæ proximæ TI, Ti quæ ſunt dimidiæ ipſarum θZ, $\theta\zeta$, atque in punctis I, i, applicentur IH, ih: quare ſi intelligantur lineolæ ko, hn, elementis abſciſſarum Zζ, Ii parallelæ, ideoque etiam æquales, erit $ko = 2hn$, quia $\theta Z = 2TI$ & $\theta\zeta = 2Ti$, proinde $Z\zeta = 2Ii$. Cum vero ex natura curvæ BHC, eſt TI ad TL, ut angulus nHh ad angulum L$r\gamma$, erit angulus L$r\gamma$ duplus anguli nHh, & cum etiam, per ea quæ demonſtravi in *Actis Lipſ.* 1722 p. 406 §. 15*, idem angulus L$r\gamma$ duplum ſit anguli oKk, erit utique ang. $oKk = nHh$: hinc triangulum oKk ſimile eſt triangulo nHh, ideoque $oK = 2\,nH$, & ſumma omnium oK, hoc eſt ZK $= 2$ ſum. omnium nH, hoc eſt, $= 2$ IH. Unde ſequitur $\theta Z : TI = 2 : 1 = ZK : IH$; id quod arguit curvas RBK & BHC eſſe ſimiles, atque priorem RBK longitudine duplam eſſe alterius BrH. *Q. E. D.*

XIX.

Scholium II. Alter curvæ ramus pertinens ad RBK, huicque contiguus, ſicuti BA contiguus eſt ipſi BC, deſcribitur infra aſymtoton RS per curvam quæ ipſius ABC eſt conjugata, & infra RS exiſte-

Hhhh 2

* Supra pag. 545.

existere intelligenda, situm habens respectu asymtoti similem priori ABC; ita ut quælibet medietas RBK ad sui generationem requirat integram curvam ABC, cujus pars una dimidia BHC dat BKD, altera BA dat BR, quæ cum BKD unam tantum medietatem RBD constituit: illa nimirum BKD fit prolongando applicatam Lr ad K; hæc vero BR retroagendo applicatam *l*G ad *p* ita ut utrobique sint rK, G*p* suis respectivis arcubus Br, BG æquales.

XX.

SCHOLIUM III. Id quoque notatu non omnino indignum est, Trajectoriam nostram Pantogoniam se ipsam in alio quocunque axis situ ad angulum constantem secare, modo alius is situs axis cum priori parallelismum servet, etiamsi planum curvæ non invertatur, ut in aliis Trajectoriis reciprocis fieri debet: Constituatur scilicet ejus quælibet portio GHC in situm *g*H*c*, ita ut axis GP jam habeat positionem *gp* priori parallelam, curvæque convexitas altera alteri non sit opposita, sicuti in reciprocis, sed eandem utrobique respiciat partem: Dico si feratur alterutra motu parallelo secundum rectam GP vel *gp*, fore perpetuo intersectionis angulum *c*HC eidem constanti æqualem. Hujus rei veritas patet ex hoc, quod ob similitudinem utriusque rami BHC & BGA [*Fig.* 4] situs inversus totius curvæ ABC non differt a situ directo; quo circa si concipiamus portiones CHG, *c*H*g* [*Fig.* 5] continuari in curvas integras, potest altera respectu alterius considerari tanquam inversa; quæ proin se mutuo decussabunt in angulo invariabili. *Q. E. D.*

TAB. XL. *Fig.* 5.

XXI.

COROLL. Hinc Trajectoria nostra Pantogonia talis est, quæ Problemati satisfacit pro omni possibili intersectionis angulo, sive situm habeat inversum circa communem axem, sive in eodem relinquatur situ; mutata tantum positione axis in aliam parallelam; quæ proprietas, pariter ut prior illa, in nullam aliam curvam cadere potest. Sed de Pantogonia satis.

XXII.

XXII.

Quemadmodum his cæterisque hactenus explicatis, quæ cum Anonymo maximam ad partem communicaveram in Epistola illa 17 Julii 1723, super omnibus punctis ad me tentandum prolatis, ex asse satisfactum est, ita sperabam fore, ut ille vicissim præstaret quod jure talionis ab eo exigebam, eoque magis quod nihil proposuerim solvendum, quam quæ sponte enata sunt ex ipsius ejus Problemate, de invenienda Trajectoria reciproca algebraïca omnium algebraïcarum simplicissima. Postquam enim hoc protinus solvissem, & solutionem ei sine mora transmisissem; primo sub anagrammate, deinde per apertam explicationem anagrammatis, addita constructione ab ipsomet approbatam, quam vide sis in *Actis Lips.* 1724, Mens. Jul. † & postquam tandem ejusdem constructionis dedissem, in iisdem *Actis* 1725 M. Julio *, Demonstrationem, una cum Analysi, quæ me deduxerat ad Parabolam cubicalem secundam tanquam ad curvam quæsitam; subnexui ad calcem mei Schediasmatis p. 325 § novum Problema, vel potius prioris soluti continuationem, invitans Anonymum, qui me jam toties tentaverat, semperque paratum & obsequentem deprehenderat, ut versa tandem vice responderet ipse quoque ad Problema his verbis propositum: *Quæro ab eo, ut det aliam Trajectoriam reciprocam algebraïcam, quæ sit inter omnes, quas invenire potest in ordine simplicitatis secunda, utque exhibeat æquationem inter coordinatas naturam curvæ quæsitæ exprimentem.* Cum vero jam per biennium servet altum silentium, ex quo nihil boni ominandum; mearum esse partium duco silenti succurrere: en ergo solvendi modum.

XXIII.

Quandoquidem Parabola cubicalis secunda, quæ, ut vidimus, simplicissima est inter algebraïcas Problema solventes, occupat locum in tertio ordine Linearum algebraïcarum, utpote cujus natura

tura

† Supra N°. CXXXI. * N°. CXXXIII. § pag. 600.

tura exprimitur æquatione inter coordinatas ad tres dimenſiones aſcendente; inquirendum eſt, an aliqua detur Linea ex quarto ordine, quæ habeat qualitatem Trajectoriæ reciprocæ: talis enim, ſi erui poſſit, erit utique illa poſt Parabolam præfatam omnium ſimpliciſſima; niſi forte, de quo tamen ob graviſſimas rationes dubito, plures Problema ſolventes in eodem ordine quarto exiſtant, quæ ideo non forent ſimpliciores, ſed tantum eadem ſimplicitate gaudentes; ſuffecerit ergo vel unicam dediſſe ex hoc ordine, ad cujus indagationem non alia uſus ſum methodo quam quæ generalis eſt & a me primum explicata in *Actis Lipſ.* 1722, M. Aug. * ubi eam tantum adhibui circumſpectionem, quæ ad electionem æquationis differentialis inter coordinatas earumque elementa ſpectat, ut integrando prodiret æquatio algebraïca præ aliis ſimplicitate eniteſcens; qua ratione apparet, rem eſſe meræ ſagacitatis, quam quilibet in ſublimiori Analyſi verſatus habere poteſt, ſi probe attentus eſſe velit.

X X I V.

Computi proceſſus, quem inſtitui, ita ſe habet: Ex §. 3 p. 398 † *Actorum* modo memoratorum 1722 liquet, proprietatem characteriſticam Trajectoriarum reciprocarum in eo conſiſtere, ut
TAB. XL. *Fig. 6.* ſumtis in utramque partem à communi initio abſciſſarum O [per quod nimirum axis inverſionis OS tranſit] abſciſſis æqualibus OL, OM, rectangulum ſub elementis utriuſque applicatæ æquetur quadrato elementi alterutrius abſciſſæ, hoc eſt, ut $Bc \times dn$ ſit $= Ll^2$, vel Mm^2. Sit $OL = x$, $Ll = dx$, adeoque $OM = -x$, $Mm = -dx$; & ſit LB vel $MD = y$, cB vel $nd = dy$; præterea duæ conſtantes quædam rectæ arbitrariæ a & b: ex his formo hanc æquationem differentialem integrabilem $dy = (ab + 2xx)dx : ab + 2xdx \surd(ab + xx) : ab$, quam tribuo relationi inter elementa coordinatarum OL, LB. Ea ut inſerviat coordinatis ab oppoſita parte ſumtis, ſcribendum eſt $-x$ & $-dx$ pro x & habebi-

* N°. CXXVIII. † pag. 537.

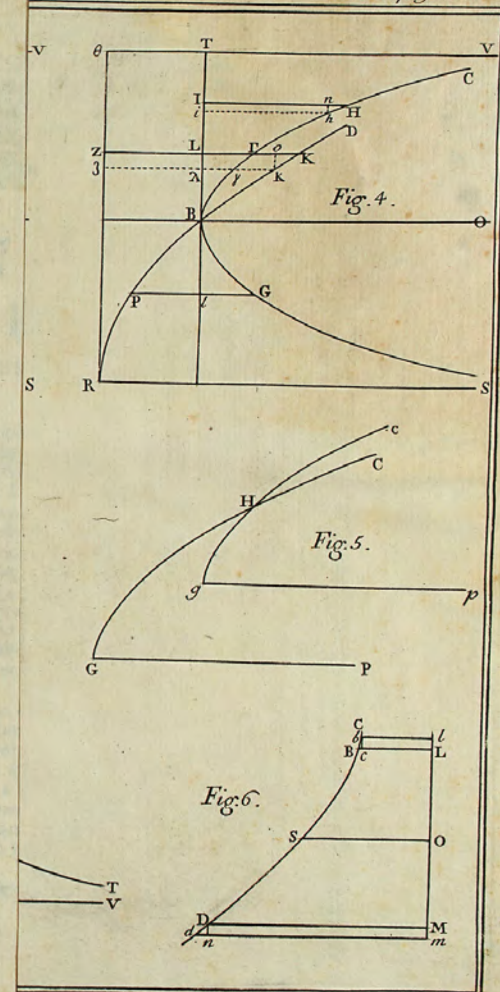
bebitur $dy = -(ab + 2xx)dx : ab + 2xdx \surd(ab + xx) : ab$. Ducendo itaque cB ſeu $(ab + 2xx)dx : ab + 2xdx \surd(ab + xx) : ab$, in nd ſeu $-(ab + 2xx)dx : ab + 2xdx \surd(ab + xx) : ab$, erit $nd \times cB = -dx \times dx = Mm \times Ll = Ll^2$ vel Mm^2: unde ſequitur æquationem noſtram aſſumtam differentialem $dy = (ab + 2xx)dx : ab + 2xdx \surd(ab + xx) : ab$, habere conditionem requiſitam, ut ſit ad aliquam Trajectoriam reciprocam.

X X V.

Videamus nunc, quænam inde eliciatur æquatio algebraïca: quia $\int(ab + 2xx)dx = abx + \frac{2}{3}x^3$ & $\int(2xdx \surd(ab + xx) = \frac{2}{3}(ab + xx)\surd(ab + xx)$, integrabilis ſane erit æquatio $dy = (ab + 2xx)dx : ab + 2xdx \surd(ab + xx) : ab$. Integretur ergo & habebitur hæc æquatio algebraïca $y = (abx + \frac{2}{3}x^3) : ab, + \frac{2}{3}(ab + xx)\surd(ab + xx) : ab$, vel multiplicando per $3ab$, hæc $3aby = 3abx + 2x^3 + (2ab + 2xx)\surd(ab + xx)$. Poſitis vero rationalibus terminis ad unam, & irrationali ad alteram partem, erit $3aby - 3abx - 2x^3 = (2ab + 2xx)\surd(ab + xx)$, ſumtoque utriuſque membri quadrato, ut aſymmetria tollatur, emerget $9aabbyy - 18aabbxy - 12abx^3y + 9aabbxx + 12abx^4 + 4x^6 = 4a^3b^3 + 12aabbxx + 12abx^4 + 4x^6$. Deletis delendis, totaque æquatione ad o reducta, ut moris eſt, lucrabimur æquationem deſideratam $4aabb - 9abyy + 18abyx + 3abxx + 12yx^3 = 0$, cujus ultimo in termino $12yx^3$ cum indeterminatæ ſimul ad quartam dimenſionem aſcendant, erit illa ad Lineam algebraïcam quarti ordinis, adeoque hæc ipſa dabit Trajectoriam reciprocam omnium algebraïcarum ſimpliciſſimam poſt Parabolam cubicalem ſecundam. *Q. E. I.*

X X V I.

SCHOL. IV. Qui ulterius hanc materiam excolere voluerit, poterit iiſdem veſtigiis hic indicatis inſiſtens vires ſuas exploraplorare, in venandis aliis Trajectoriis reciprocis ex sequentibus Linearum ordinibus; rem enim non esse impossibilem ex iis cognoscere est, quæ præstitit felicissimi ingenii Juvenis *Leonhardus* EULERUS, a cujus sagacitate & acumine maxima quæque nobis pollicemur, postquam vidimus quanta facilitate & solertia in adyta sublimioris Geometriæ nostro auspicio penetravit. Is quippe, sicuti significavit in *Actis Lipf.* superioris A. 1726 p. 363, hanc calcans viam ex quolibet altiori ordine Linearum unam saltem Trajectoriam reciprocam eruendi methodum feliciter detexit; cur vero eam hucusque presserit, ratio est, quia Anonymo nostro nolebat præripere sufficiens tempus respondendi ad propositam sibi quæstionem; ad cujus enodationem tanto magis obligabatur Anonymus, quod ipsemet, suo exemplo, proponendi ansam dederat.

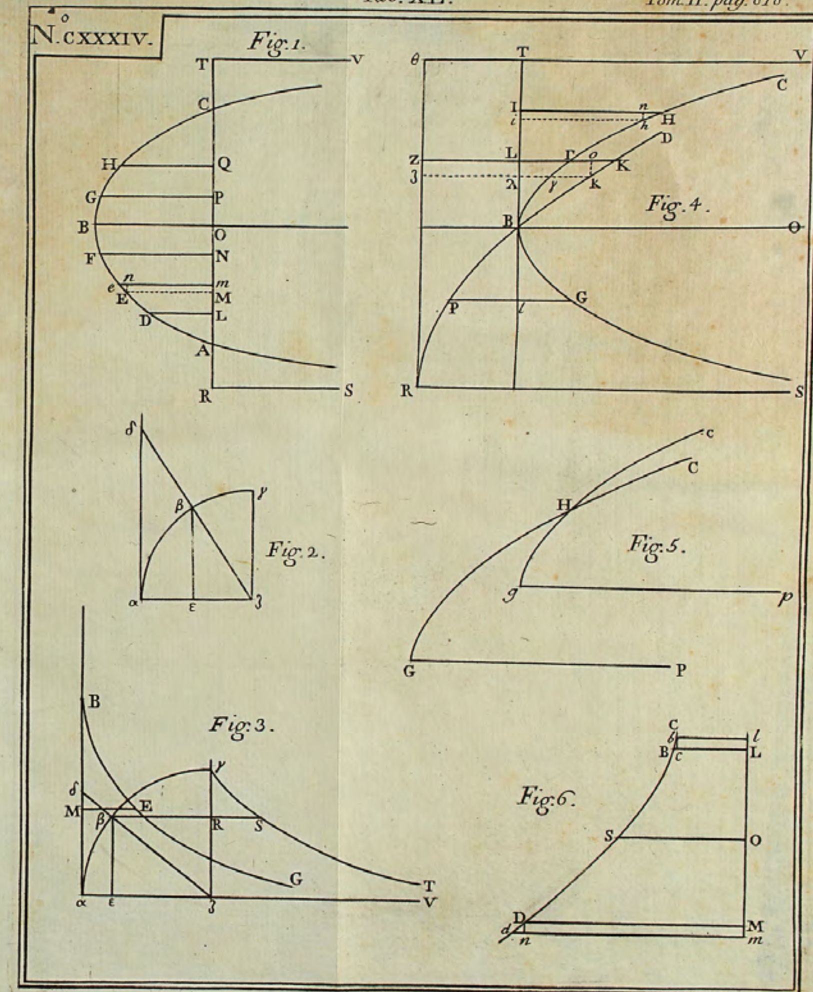


…IPROCIS.

…s ex ſequentibus
…ſibilem ex iis co-
…Juvenis *Leonhar-*
… maxima quæque
…acilitate & ſoler-
…ſpicio penetravit.
…perioris A. 1726
… ordine Linearum
… methodum felici-
…, ratio eſt, quia
… tempus reſpon-
…ijus enodationem
…emet, ſuo exem-

INDEX

Tab. XL. *Tom. II. pag. 616.*



N U

Quos

N°. XCI. Eff

Chap. I. De

rencontren

Chap. II. De

d'un Paral

Chap. III. De

Chap. IV. De

Quille pour

que Route

Chap. V. Dig

Queſtions d

ſeau nulle c

vernail pou

Chap. VI. De

d'un Loſang

Chap. VII. De

Chap. VIII. T

boïque par

Chap. IX. Du

fluide. De

ſa Direction.

Joan. Bernoulli C

INDEX
NUMERORUM
Quos Tomus Secundus *complectitur.*

FINIS TOMI SECUNDI.