Propositio II.

Sit formula reducenda $\int(dx:(e+fx+gxx))$. Ponatur $x=y-f:2g$; mutabitur proposita in hanc $\int(dy:(e-ff:4g+gyy))=\int(\frac{4g\,dy}{4eg-ff}:(1+\frac{4gg\,yy}{4eg-ff}))$ Hæc autem, ut patet ex præced. dependet a quadratura circuli, si $4eg$ majus quam ff, & a quadratura hyperbolæ, si $4eg < ff$. Ergo reducta est proposita ad alterutram quadraturam.

Nota: si $4eg=ff$, erit proposita absolute integrabilis; mutatur enim in hanc $\int(dy:gyy)$ quæ est $=-1:gy$.

Propositio III.

Esto jam reducenda $\int(xdx:(e+fx+gxx))$. Suppleatur quod deficit, ut logarithmus eliciatur: hunc in finem reducendæ hanc tribuo formam $\int((\frac{f}{2g}+x)\,dx:(e+fx+gxx))-\int(\frac{f}{2g}\,dx:(e+fx+gxx))$. Liquet autem $\int((\frac{f}{2g}+x)\,dx:(e+fx+gxx))=\frac{1}{2g}\,\text{Log.}\,(e+fx+gxx)$; altera vero $\int(\frac{f}{2g}dx:(e+fx+gxx))$ casus est præcedentis. Ergo factum est quod quæritur.

Propositio IV.

Posito numero r quolibet integro, & affirmativo, erit $\int(x^r\,dx:(e+fx+gxx))$ reducibilis ad quadraturam alterutram. Nam per divisionem, quoad fieri poterit, continuatam numeratoris per denominatorem, prodibunt termini simplices absolute integrabiles, residuum vero habebit hanc formam $\int((\alpha+\beta x)\,dx:(e+fx+gxx))$, reducibilem, per II & III, ad quadraturam circuli vel hyperbolæ.

PRO-

Propositio V.

Posito numero r quolibet integro, sed negativo, erit etiam $\int(x^r\,dx:(e+fx+gxx))$ ad quadraturam alterutram reducibilis: est enim illa [ponendo $x=1:z$] æqualis huic $\int(-gz^{-r}\,dz:(g+fz+ezz))$; hæc autem, quia $-r$ est affirmativa, habet conditionem præced. adeoque ad circulum vel hyperbolam reducibilis.

Propositio VI.

Proponatur reducenda $\int(dx:(e+fxx+gx^4))$, vel, posito bb pro e, $\int(dx:(bb+fxx+gx^4))$. Hæc duos habet casus seorsim solvendos; aut enim $4eg > ff$, aut $4eg < ff$.

Cas. I. Sit primo $4eg < ff$; facio ex præscripto methodi $dx:(bb+fxx+gx^4)=\alpha\,dx:(b+mxx)+\beta\,dx:(b+nxx)=$ [reductis ad communem denominatorem], $(\alpha b+\beta b+\alpha nxx+\beta mxx)\,dx:(bb+bmxx+bnxx+mnx^4)$; comparando coefficientes denominatorum, $bm+bn=f$, & $mn=g$; provenit $m=f:2b+\surd(ff:4e-g)$ & $n=f:2b-\surd(ff:4e-g)$. Cognitis m & n, comparentur etiam coefficientes numeratorum, $\alpha b+\beta b=1$, & $\alpha n+\beta m=0$; prodibunt valores ipsorum α & β, nempe $\alpha=m:(bm-bn)$ & $\beta=-n:(bm-bn)$. Sic itaque habemus $\int(dx:(e+fxx+gx^4))$ reductam ad $\int(\alpha\,dx:(b+mxx))+\int(\beta\,dx:(b+nxx))$ hoc est per Propos. I. ad quadraturam circuli vel hyperbolæ, vel etiam utriusque.

Cas. II. Sit nunc $4eg > ff$; ponatur $dx:(bb+fxx+gx^4)=(\alpha+\gamma x)\,dx:(b+nx+mxx)+(\beta+\varepsilon x)\,dx:(b-nx+mxx)$ vel [reductis ad communem denominatorem] $=(\alpha b+\beta b-\alpha nx+\beta nx+\gamma bx+\varepsilon bx+\alpha mxx+\beta mxx-\gamma nxx+\varepsilon nxx+\gamma mx^3+\varepsilon mx^3)\,dx:(bb+2bmxx-nnxx+mmx^4)$; comparando coefficientes denominatorum, $2bm-nn=f$, &

 mm

$mm = g$, emergit $m = \sqrt{g}$, & $n = \sqrt{(-f + 2b\sqrt{g})} = \sqrt{(-f + 2\sqrt{eg})}$. Cognitis jam m & n, comparentur porro coefficientes numeratorum, $\alpha b + \beta b = 1$, $-\alpha n - \beta n + \gamma b + \epsilon b = 0$, $\alpha m + \beta m - \gamma n + \epsilon n = 0$, & $\gamma m + \epsilon m = 0$; innotefcent $\alpha = 1 : 2b$, $\beta = 1 : 2b$, $\gamma = m : 2nb$, $\epsilon = -m : 2nb$. Eorum igitur valoribus fubftitutis habebitur $\int(dx : (e + fxx + gx^4)) = \int((\frac{1}{2b} + \frac{mx}{2nb})\, dx : (b + nx + mxx)) + \int((\frac{1}{2b} - \frac{mx}{2nb})\, dx (b - nx + mxx))$. Cujus utrumque membrum, per Propofitiones fecundam & tertiam, pertinet ad quadraturam circuli vel hyperbolæ.

PROPOSITIO VII.

Formula $\int(x^r\, dx : (e + fxx + gx^4))$, ubi r defignat numerum qualemcunque, five affirmativum five negativum, reducitur fimili modo ut in præcedenti, vel [exiftente $4eg < ff$] ad $\alpha\int(x^r\, dx : (b + mxx)) + \beta\int(x^r\, dx : (b + nxx))$, quorum utrumque per Prop. IV. & V habetur per quadrat. circuli vel hyperbolæ : vel [exiftente $4eg > ff$] ad $\int((\alpha x^r + \gamma x^{r+1})\, dx : (b + nx + mxx)) + \int((\beta x^r + \epsilon x^{r+1})\, dx : (b - nx + mxx))$, hoc eft, ad $\alpha\int(x^r\, dx : (b + nx + mxx)) + \gamma\int(x^{r+1}\, dx : (b + nx + mxx)) + \beta\int(x^r\, dx : (b - nx + mxx) + \epsilon\int(x^{r+1}\, dx : (b - nx + mxx))$, quæ fingula, per eafdem Propofitiones, revocantur ad alterutram quadraturam.

PROP. VIII.

Porro reducenda venit $\int(dx : (e + fx^4 + gx^8))$; hoc peragitur ut prius, refolvendo in duas partes, nempe vel [exiftente $4eg < ff$] in has $\int(\alpha\, dx : (b + mx^4)) + \int(\beta\, dx : (b + nx^4))$; ubi iterum $m = \frac{f}{2b} + \sqrt{(\frac{ff}{4e} - g)}$ & $n = \frac{f}{2b} - \sqrt{(\frac{ff}{4e} - g)}$, atque $\alpha = m : (bm - bn)$ & $\beta = -n : (bm - bn)$; vel [exiftente $4eg > ff$] in has $\int((\alpha + \gamma xx)\, dx : (b + nxx + mx^4)) + \int((\beta + \epsilon xx)\, dx : (b - nxx + mx^4))$, ubi $m = \sqrt{g}$, & $n = \sqrt{(-f + 2\sqrt{eg})}$ & $\alpha = 1 : 2b$, $\beta = 1 : 2b$, $\gamma = m : 2nb$, $\epsilon = -m : 2nb$. Verum in utroque cafu ambæ partes continentur in formula Prop. fextæ; adeoque ut ibi reducibiles.

PROP. IX.

Pariter $\int(x^r\, dx : (e + fx^4 + gx^8))$, in cafu quo $4eg < ff$, refolvitur in $\alpha\int(x^r\, dx : (b + mx^4)) + \beta\int(x^r\, dx : (b + nx^4))$ revocabiles ad fæpe memoratas quadraturas per Prop. VII. Et in cafu quo $4eg > ff$, refolvitur in $\alpha\int(x^r\, dx : (b + nxx + mx^4)) + \gamma\int(x^{r+2}\, dx : (b + nxx + mx^4)) + \beta\int(x^r\, dx : (b - nxx + mx^4)) + \gamma\int(x^{r+2}\, dx : (b - nxx + mx^4))$ fingulas eodem reducibiles, per eandem Propofitionem.

PROP. X.

Item $\int(dx : (e + fx^8 + gx^{16}))$, fimili operatione refolvitur in duas, quarum utraque habebit conditionem Prop. VIII. Ergo &c.

PROP. XI.

Nec aliter $\int(x^r\, dx : (e + fx^8 + gx^{16}))$ ad quadraturam alterutram reducitur, refolvendo in cafus contentos in Prop. IX. Eodem modo deinceps procedendum quoufque libuerit : hinc itaque fluit generalis.

PROP. XII.

$\int(x^r\, dx : (e + fx^p + gx^{2p}))$, ubi per p intelligo dignitatem quamcunque binarii, reducibilis eſt ad quadraturam circuli vel hyperbolæ.

Prop. XIII.

Eſto nunc reducenda $\int(x^{rq-1}dx:(e+fx^{q}+gx^{2q}))$, ubi r ſemper ſupponitur numerus integer affirmativus ſeu negativus, ſed q qualiſcunque. Fiat $x^{q}=y$; mutabitur propoſita [neglecto coefficiente numeratoris utpote in reductionibus nihil turbante] in hanc $\int(y^{r}dy:(e+fy+gyy))$, quæ dependet per Propoſitiones IV. & V. a quadratura circuli vel hyperbolæ.

Prop. XIV.

Sit tandem, quam reducere oporteat, formula *Tayloriana* $\int(z^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}dz:(e+fz^{q}+gz^{2q}))$, in qua δ deſignat numerum integrum, affirmativum vel negativum, λ numerum aliquem in hac progreſſione, 2, 4, 8, 16, &c. ſed q qualemcunque; Ponatur primo $z^{q}=y$, inde transformabitur propoſita [neglecto coefficiente numeratoris] in hanc $\int(y^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}dy:(e+fy+gyy))$, hæc vero [facto $y=x^{\lambda}$] in hanc alteram $\int(x^{\delta-1}dx:(e+fx^{\lambda}+gx^{2\lambda})$, quæ conditionem habens formulæ Propoſitionis XII, reduci poteſt ad quadraturam circuli vel hyperbolæ; ad quam per conſequens reducta eſt $\int(z^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}dz:(e+fz^{q}+gz^{2q}))$. Atque ita Problemati *Tayloriano* ſatisfactum. Q. E. D.

Quod nunc ad alterum ſpectat $\int(z^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}dz:(e+fz^{q}+gz^{2q}+hz^{3q}))$, cujus quidem mentionem facit TAYLORUS, non tamen petit ſolutionem; illud ex abundanti ſolvam, quantum ſolvere licet. Huc faciunt ſequentes reductionum formulæ.

Prop. XV.

Detur reducenda $\int(x^{r}dx:(b^{3}+fx+gxx+hx^{3}))$, intelligo hic iterum & in ſequentibus, per r numerum integrum quemcunque, affirmativum ſeu negativum. Ponatur illa æqualis $\int((\alpha+\beta x)x^{r}dx:(bb+mx+nxx))+\int(\gamma x^{r}dx:(b+px)$, hoc eſt [reductis ad communem denominatorem] $=\int((\alpha b+\gamma bb+\alpha px+\beta bx+\gamma mx+\beta pxx+\gamma nxx)x^{r}dx:(b^{3}+bmx+bbpx+bnxx+pmxx+pnx^{3}))$. Comparentur primo coefficientes denominatorum, $bm+bbp=f$; $bn+pm=g$; $pn=h$; hinc determinabuntur valores coefficientium quæſitorum, reperietur enim $m=\frac{f}{b}-bp$, $n=\frac{g}{b}-\frac{fp}{b}+pp$ & $p=$ cuilibet ex radicibus realibus [omnis enim æquatio cubica unam ſaltem habet radicem realem] hujus æquationis cubicæ $p^{3}-\frac{f}{bb}pp+\frac{g}{b}p-h=0$; conſtruibilis autem eſt radix p ope ſectionis alicujus conicæ aut alterius lineæ curvæ, ſicuti apud Algebræ ſcriptores docetur, ergo habitur p algebraïce vel geometrice, hinc & dabuntur m & n. Jam ex comparatione coefficientium numeratorum $\alpha b+\gamma bb=1$; $\alpha p+\beta b+\gamma m=0$; $\beta b+\gamma n=0$, provenit $\alpha=(bn-mp):(bbpp-bmp+bbn)$; $\beta=-np:(bbpp-bmp+bbn)$, $\gamma=pp:(bbpp-bmp+bbn)$. Cognitis hoc modo m, n, p, ut & α, β, γ; reducetur $\int((\alpha+\beta x)x^{r}dx:(bb+mx+nxx))$ ad quadraturam circuli vel hyperbolæ per Prop. IV. & V. Sed & alterum $\int(\gamma x^{r}dx:(b+px))$ nihil aliud eſt quam caſus particularis earundem Propoſitionum; facilius autem ad logarithmos reducitur, ſi r ſit numerus integer affirmativus, nec difficilius, ſi ſit negativus: Ponatur enim $x=$

$1 : z$ & mutabitur illa in $\int(-\gamma z^{-r-1}\, dz : (\frac{p}{b} + z))$, manifeſte logarithmicabilem, quia jam $-r-1$ eſt numerus integer affirmativus, aur forte o, in caſu nempe quo $-r = 1$.

Idem aliter præſtatur, & quidem hac ratione: ſit r numerus integer affirmativus [aut ſi ſit negativus, mutetur formula, ponendo $x = 1 : z$ ut fiat affirmativus]. Exempli gratia ſit $r = 2$; ponatur $x = p + y$ (intelligo per p quantitatem invariabilem quam nunc quæro) adeoque $dx = dy$, & $xxdx = (pp + 2py + yy)\, dy$, quibus ſubſtitutis erit $xxdx : (b^3 + fx + gxx + hx^3) = (pp + 2py + yy)\, dy : (b^3 + fp + gpp + hp^3 + (f + 2gp + 3hpp)\, y + (g + 3hp)\, y^2 + hy^3)$. Ut autem primus terminus denominatoris evaneſcat, faciendum eſt $hp^3 + gpp + fp + b^3 = 0$; hujus itaque æquationis radix quælibet realis p [habet enim, uti dictum eſt, ſaltem unam realem, quæ geometrice conſtrui poteſt] innoteſcet, & hinc convertetur formula in hanc $(pp + 2py + yy)\, dy : ((f + 2gp + 3hpp)\, y + (g + 3hp)\, y^2 + hy^3) = (ppy^{-1} + 2p + y)\, dy : (f + 2gp + 3hpp + (g + 3hp)\, y + hyy)$ cujus quilibet numeratoris terminus [excepto primo] diviſus per denominatorem eſt caſus Prop. IV; ipſe vero primus eſt caſus Prop. V. Ergo integrantur omnes per quadraturam circuli vel hyperbolæ.

Prop. XVI.

$\int(x^r\, dx : (b^3 + fxx + gx^4 + hx^6))$ reducitur ut ſequitur: Ponatur ſicuti per priorem modum Prop. præced. factum eſt $\int((\alpha + \beta xx)\, x^r\, dx : (bb + mxx + nx^4)) + \int(\gamma x^r\, dx : (b + pxx))$; invenientur rurſus valores ipſarum p, m, n, α, β, γ. Jam vero pars prior reducitur ad quadraturam circuli vel hyperbolæ per Prop. VII, & altera pars eodem reducitur per eandem Propoſ. vel per Prop. IV. & V.

Prop.

Prop. XVII.

Simili modo $\int(x^r\, dx : (b^3 + fx^4 + gx^8 + hx^{12}))$ reſolvitur in $\int((\alpha + \beta x^4)\, x^r\, dx : (bb + mx^4 + nx^8)) + \int(\gamma x^r\, dx : (b + px^4))$, quarum pars prior reducitur per Prop. IV, & altera per eandem, vel etiam per Propoſ. VII.

Prop. XVIII.

Poſito jam p eſſe dignitatem quamcunque numeri binarii, reducetur generaliter $\int(x^r\, dx : (b^3 + fx^p + gx^{2p} + hx^{3p}))$ ad quadraturam circuli vel hyperbolæ, quod utique patet ex præcedentium proceſſu continuato.

Prop. XIX.

Poſito autem q numero quocunque, reducetur $\int(x^{rq-1}\, dx : (e + fx^q + gx^{2q} + hx^{3q}))$ faciendo $x^q = y$; mutabitur enim propoſita in hanc, neglecto coefficiente numeratoris, $\int(y^r\, dy : (e + fy + gyy + hy^3))$, quæ per Prop. XV. quadrabilis eſt per circulum vel hyperbolam.

Prop. XX.

His præmiſſis ſit nunc reducenda altera formula Taylori $\int(z^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}\, dx : (e + fz^q + gz^{2q} + hz^{3q}))$, in qua ſupponitur, ut ſupra, $\delta =$ numero integro affirmativo vel negativo, & $\lambda =$ numero cuilibet in progreſſione 2, 4, 8, 16, 32, &c.: ſed $q =$ numero cuicunque. Fiat quemadmodum in Prop. XIV. fecimus $z^q = y$, propoſita hanc induet formam,

inſu-

insuper habito coefficiente nnmeratoris, $\int(y^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}dy:(e+fy+gyy+hy^3))$; hæc vero [facto $y=x^{\lambda}$] mutatur in hanc, posthabito etiam coefficiente numeratoris, $\int(x^{\delta-1}dx:(e+fx^{\lambda}+gx^{2\lambda}+hx^{3\lambda}))$, quæ quia conditionem habet formulæ Propos. XVIII. reducta est ad quadraturam circuli vel hyperbolæ.

SCHOLIUM I.

Atque sic satisfeci alteri quoque parti (ultra quam poscebatur) Problematis *Tayloriani*. Interim, quod moneo, ne quis causetur me non observasse, varii sunt casus, quibus formulæ istæ duæ evadunt absolute integrabiles. Ex. gr. si $\delta=\lambda$, & $e+fz^q+gz^{2q}$ sit quadratum aut multiplum quadrati, erit $z^{q-1}dz:(e+fz^q+gz^{2q})$ integrabilis, ejusque adeo quadratura algebraïca. Ita quoque si $\delta=\lambda$, vel $=2\lambda$, ac præterea $e+fz^q+gz^{2q}+hz^{3q}$ sit cubus multiplum submultiplumve cubi, integrabilis etiam erit $\int(z^{q-1}dz:(e+fz^q+gz^{2q}+hz^{3q}))$, ut & $\int(z^{2q-1}dz:(e+fz^q+gz^{2q}+hz^{3q}))$. Hi igitur & alii hujusmodi casus particulares, per se integrabiles, excipiendi sunt ex generalibus, qui ad sui integrationem deposcunt quadraturas circuli vel hyperbolæ.

SCHOLIUM II.

$\int(dx:(a^3+x^3))$ resolvitur per nostram methodum in $\int((\frac{2}{3a}-\frac{x}{3aa})dx:(aa-ax+xx))+\int(\frac{1}{3aa}dx:(a+x))$. cujus pars prior partim per circuli quadraturam, partim per logarithmum habetur; altera vero per logarithmum duntaxat; sed $\int(dx:(a^4+x^4))$ cum per resolutionem inveniatur $=$

$\int((\frac{1}{2aa}+\frac{x}{2a^3\sqrt{2}})dx:(aa+ax\sqrt{2}+xx))+\int((\frac{1}{2aa}-\frac{x}{2a^3\sqrt{2}})dx:(aa-ax\sqrt{2}+xx))$, cujus pars utraque requirit quadraturam, partim circuli, partim hyperbolæ vel hujus loco logarithmum; ita ut ad perficiendam integrationem ipsius $dx:(a^4+x^4)$ duplici logarithmo & duplici quadratura circulari opus sit: perperam asserit Cl. TAYLORUS integrationem elementi $dx:(a^4+x^4)$ esse omnium post $\int(dx:(aa+xx))$ simplicissimam, siquidem, ceu liquet, alterum illud $dx:(a^3+x^3)$ simpliciori modo integretur.

Adjicere lubet quædam mihi inventa Theoremata, quæ in reductionibus utilitatem suam habent non exiguam. Demonstrationes eorum brevitatis gratia nunc supprimo; erunt inter Geometras, qui forsan facile invenient, quocirca illis eas indagandas relinquo.

DEFINITIO.

Per q & l intelligo numeros qualescunque integros, fractos, affirmativos, negativos, rationales; sed per k, n, & p, intellectos volo tantum numeros quoslibet integros & affirmativos, & ita quidem, ut pro p & n etiam sumi possit o.

THEOREMA I.

$\int(dx:(e+fx^q)^{k+1:q})$ est absolute seu algebraïce quadrabilis.

THEOR. II.

Generalius $\int(x^{pq}dx:(e+fx^q)^{k+p+1:q}$ est algebraïce quadrabilis.

THEOR. III.

$\int(x^{kq-1}dx:(e+fx^q)^{k-1:q})$ est algebraïce quadrabilis.

Theor. IV.

Generalius $\int(x^{kq-1}dx:(e+fx^q)^{k+p-1:q})$ eſt algebraïce quadrabilis.

Theor. V.

$\int(x^{pq}dx:(e+fx^q)^n)$ dependet ex quadratura hujus $\int(dx:(e+fx^q))$.

Theor. VI.

$\int(x^{-pq}dx:(e+fx^q)^n)$ pendet a quadratura ejuſdem $\int(dx:(e+fx^q))$.

Theor. VII.

Generalius $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^n)$ fluit ex quadratura hujus $\int(x^l dx:(e+fx^q))$.

Theor. VII.

Sumtis δ & λ in ſenſu TAYLORI, erit $\int(z^{\frac{\delta}{\lambda}q-1}dz:(e+fz^q)^n)$ quadrabilis per circulum vel hyperbolam.

Quæ ex hiſce Theorematibus deduci poſſent Corollaria pulchra & miranda non minus quam utilia nunc omitto, ſicuti & plura alia ad quadraturarum reductionem ſpectantia, quæ jam olim inveni, ac partim cum Amicis communicavi.

N°. CXV.

NICOLAI BERNOULLI DEMONSTRATIONES *Theorematum Patrui ſui.*

IN quatuor prioribus Theorematis, non ſolum q & l, ſed etiam p poteſt ſignificare numerum quemcunque, etiam negativum, fractum, irrationalem; & quia ſcribendo $-q$ pro q, atque e & f invicem permutando Theorema ſecundum mutatur in quartum, & viciſſim; hinc omnia quatuor Theoremata, ſub uno generaliori comprehenduntur, quod ita pronunciari poteſt. *Act. Erud. Lipſ.* 1720. Octob. p. 471.

Theor. I. II. III. IV.

$\int(x^{kq-1}dx:(e+fx^q)^l)$ eſt algebraïce quadrabilis.

Demonstr.

Ponatur $e+fx^q=y$, & erit $\int(x^{kq-1}dx:(e+fx^q)^l)=\int(\frac{1}{q}(y-e)^{k-1}f^{-k}y^{-l}dy)=\int(\frac{1}{q}(y^{k-l-1}-(k-1)ey^{k-l-2}+\frac{(k-1)(k-2)}{1.\ 2}e^2y^{k-l-3}-\&c.)f^{-k}dy=(y^{k-l}:(k-l)-(k-1)ey^{k-l-1}:(k-l-1)+\frac{(k-1)(k-2)}{1.\ 2.}e^2y^{k-l-2}:(k-l-2)-\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1.\ 2.\ 3}e^3y^{k-l-3}:(k-l-3)+\&c.):qf^k$, quæ ſeries, ob numerum k integrum & affirmativum, finita eſt, & poſt ſubſtitum valorem ipſius $y=fx^q+e$, ſecundum dimenſiones ipſius x ordinata, evadit $=(x^{kq-q}:qf(k-l)-$

$(k-1)ex^{kq-2q}: qff(k-l)(k-l-1)+(k-1)$
$(k-2)eex^{kq-3q}: qf^3(k-l)(k-l-1)(k-l-2)$
$-$ &c.$): (e+fx^q)^{l-1}$.

Si q mutatur in $-q$, e in f & f in e, erit eadem series $=$ $\int(x^{lq-kq-1}dx:(e+fx^q)^l)$. Vide NEWT. *de Quadr. Curv.* Prop. 5.

SCHOLIUM.

Si l sit $=$ numero integro affirmativo non majori quam k, $\int(x^{kq-1}dx:(e+fx^q)^l)$ pendet a quadratura Hyperbolæ, & terminus aliquis seriei, $y^{k-l}:(k-l)-(k-1)ey^{k-l-1}:(k-l-1)+$ &c. fit infinitus.

THEOR. V. & VII.

$\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^n)$ dependet a quadratura hujus $\int(x^l dx:(e+fx^q))$. Hic p & n significant numerum integrum affirmativum.

DEMONSTR.

Ponatur $A=1:(n-1)qe$, & erit $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^n) = Ax^{pq+l+1}:(e+fx^q)^{n-1}+(\frac{1}{e}-A(pq+l+1))\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^{n-1})$. Dependet igitur $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^n)$ a $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^{n-1})$; & simili modo $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^{n-1})$ a $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^{n-2})$, & ita porro usque ad $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q))$. Fiat $B=1:(pq-q+l+1)$ & erit $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q))=\frac{B}{f}x^{pq-q+l-1}-\frac{e}{f}\int(x^{pq-q+l}dx:(e+fx^q))$. Dependet igitur $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q))$ a $\int(x^{pq-q+l}dx:(e+fx^q))$, & simili modo $\int(x^{pq-q+l}dx:(e+fx^q))$ a $\int(x^{pq-2q+l}dx:(e+fx^q))$, & ita porro usque ad $\int(x^{pq-pq+l}dx:(e+fx^q))=\int(x^l dx:(e+fx^q))$, a qua per consequens dependet $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^n)$. Vid. NEWT. *de Quadr. Curv.* Prop. 7.

SCHO-

SCHOLIUM I.

Si $\frac{1}{e}=A(pq+l+1)=(pq+l+1):(n-1)qe$, hoc est, si $(pq+l+1):q=n-1$; $\int(x^{pq+l}:(e+fx^q)^n)$ est algebraïce quadrabilis. Similiter si $(pq+l+1):q=n-2$; $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^{n-1})$ est algebraïce quadrabilis. Et si $(pq+l+1):q=n-3$; $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^{n-2})$ est algebraïce quadrabilis, & ita porro. Hinc si $(pq+l+1):q=$ numero cuidam integro affirmativo minori quam n, $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q)^n)$ est algebraïce quadrabilis.

SCHOLIUM II.

Si $p-q+l+1=0$, hoc est, si $(-l-1):q=p-1$, $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q))$ includit quadraturam Hyperbolæ. Similiter, si $(-l-1):q=p-2$, $\int(x^{pq-q+l}dx:(e+fx^q))$ includit quadraturam Hyperbolæ. Et si $(-l-1):q=p-3$, $\int(x^{pq-3q+l}dx:(e+fx^q))$ includit quadraturam Hyperbolæ, & ita porro. Hinc si $(-l-1):q=$ numero integro affirmativo minori quam p, vel $=0$, $\int(x^{pq+l}dx:(e+fx^q))$ & per consequens etiam $\int(x^{pq+l}dx):(e+fx^q)^n)$ involvit quadraturam Hyperbolæ, ultra quadraturam hujus $\int(x^l dx:(e+fx^q))$, exceptis casibus Scholii præcedentis.

THEOR. VI. GENERALIUS.

$\int(x^{-pq+l}dx:(e+fx^q)^n)$ dependet a quadratura hujus $\int(x^l dx:(e+fx^q))$.

DEMONSTR.

Ponatur $A=1:(n-1)qe$, & erit $\int(x^{-pq+l}dx:(e+fx^q)^n) = Ax^{-pq+l+1}:(e+fx^q)^{n-1}+(\frac{1}{e}-A(-pq+l+1))\int(x^{-pq+l}dx:(e+fx^q)^{n-1})$, & ita deinceps usque ad $\int(x^{-pq+}$

$dx:$

$dx:(e+fx^q))$. Fiat $B = 1:(-pq+l+1)$, & erit $\int(x^{-pq+l} dx:(e+fx^q)) = \frac{B}{e} x^{-pq+l+1} - \frac{f}{e}\int(x^{-pq+q+l} dx:(e+fx^q))$. Dependet igitur $\int(x^{-pq+l} dx:(e+fx^q))$ a $\int(x^{-pq+q+l} dx:(e+fx^q))$, & ſimili modo $\int(x^{-pq+q+l} dx:(e+fx^q))$ a $\int(x^{-pq+2q+l} dx:(e+fx^q))$, & ita porro uſque ad $\int(x^l dx:(e+fx^q))$, a cujus proin quadratura dependet etiam $\int(x^{-pq+l}:(e+fx^q)^n)$.

SCHOLIUM I.

Si $(-pq+l+1):q =$ numero integro affirmativo minori quam n, $\int(x^{-pq+l} dx:(e+fx^q)^n)$ eſt algebraïce quadrabilis.

SCHOLIUM II.

Si $(l+1):q =$ numero integro affirmativo non majori quam p, $\int(x^{-pq+l} dx:(e+fx^q)^n)$ involvit quadraturam Hyperbolæ.

THEOR. VIII.

Sumtis δ & λ in ſenſu TAYLORI, erit $\int(z^{\frac{\delta}{\lambda}q-1} dz:(e+fz^q)^n)$ quadrabilis per Circulum vel Hyperbolam. Sequitur ex collatione Theor. 7, cum Problemate TAYLORI.

COROLL.

Si fiat $\alpha:\beta = -1 : \frac{-f}{e} 2p+1 \frac{(pq+q-1)(pq+2q-1)\ldots\ldots(pq+nq-q-1)}{(-pq-1)(-pq+q-1)\ldots(-pq+nq-2q-1)}$, erit $\int(\alpha x^{-pq} + \beta x^{pq+q}) dx:(e+fx^q)^n)$ algebraïce quadrabilis.

N°. CXVI.

NIC. BERNOULLI

Joh. Filii,

EXERCITATIO GEOMETRICA

DE TRAJECTORIIS ORTHOGONALIBUS,

Continens varias earum, tum inveniendarum, tum conſtruendarum methodos, ſua vel Demonſtratione vel Analyſi munitas; cum præmiſſa diſcuſſione quarundam ejuſdem Problematis ſolutionum.

SECTIO I.

EXcitata jam paſſim fama inter Geometras de Problemate Trajectoriarum, dignum illud utique eſt, cujus ſolutio ad ſupremum poſſibilem perfectionis gradum (quem huc uſque nondum obtinuit) promoveatur. Cum anno 1718, illius Hiſtoriam deſcriberem in *Actis Lipſ.* * publicatam, contentus tunc ſine demonſtratione tradidiſſe duos ſolvendi modos a Patre meo inventos, atque olim cum Illuſtri LEIBNITIO communicatos, quibus exemplum, ab ipſo Anglis propoſitum, plenarie & conditionibus convenienter, hoc eſt, per quadraturas ſolvebatur; non potui abſtinere quin judicium noſtrum, ſine ullo carpendi animo, candide aperirem de quibuſdam aliis ſolutionibus, aut ſolutionum tentaminibus, hinc inde in lucem emiſſis; nec certe, ut ſpero, quiſquam æquitatis amans mihi, quod monui, vitio vertet, ſi conſiderare voluerit Patri meo, cui origo hujus Problematis debebatur, ſicuti in Hiſtoria narravi, ex neceſſitate incubuiſſe, ut declararet ſuam de illis ſolutionibus mentem, quin etiam indecorum fuiſſe, ſi, quod deſiderari videbatur ad omnimodam conditionum adimplectionem, ſilentio præteriiſſem; præſertim defuncto jam LEIBNITIO, qui alias ipſe hoc debuiſſet exequi.

Act. Erud. Lipſ. 1720. Maj. pag. 223.

* Supra N°. CVIII.

I I.

Ex eo tempore nova de eodem Problemate ſchediaſmata ad manus noſtras pervenere; unum a Cl. TAYLORO Tranſactionibus Londin. anni 1718 inſertum, a pag. 695. uſque ad pag. 701 *; Duo alia, *Supplementi* † primum, alterum *Additamenti* †† nomine, quæ Autore Celeb. HERMANNO prodierunt in *Actis Lipſ.* 1718. M. Julio, & 1719. M. Febr. quæque in primæ ſuæ ſolutionis in *Actis Lipſ.* 1717 **. M. Aug. editæ partim dilucidationem, partim perfectionem inſervire debuerant. Officii noſtri eſſe putamus, ut in honorem veritatis & incrementum ſcientiæ iſta quoque Schediaſmata ſub modeſtum examen revocemus; & ad ea, quæ nos propius tangunt, reſpondeamus; quod in primis Cl. HERMANNO, qui demonſtratos errores defendere non ſolet, minime diſplicebit.

I I I.

Optarem equidem, ut Cl. TAYLORUS præfatiunculam § ſuam, utpote ad rem nihil facientem, omiſiſſet; verba enim, quæ profert in Exteros Geometras nimis faſtidioſa, ac neſcio quem contemptum ſpirantia, ut ut a nemine læſus, parum laudis merentur. Piis manibus LEIBNITII, Viri certe magni, de quo forſan immoderate magis quam vere loquitur, parcere debuiſſet. Injurius eſt in Parentem meum, de quo temere aſſerit, quod eo *hortante* LEIBNITIUS *Problema Geometris Anglis ſolvendum propoſuit.* Liquet enim ex iis, quæ in Hiſtoria attuli, LEIBNITIUM, Parente meo inſcio, propoſuiſſe primum Problema de Trajectoriis Hyperbolarum, cujus poſtea ego ſolutionem dedi; Vid. *Act.* 1716. p. 227 §§; alterum vero Problema LEIBNITIO petenti a Patre quidem ſuppeditatum, ſed a LEIBNITIO ſponte ita volente, neque Patre hortante, fuiſſe Anglis propoſitum; quo fine, noſtrum non eſt indagare. Vix interim nobis perſuadere poſſumus, id factum eſſe, ut ſummi NEWTONI vires, plus ſatis nobis omnibus perſpectas, experiretur LEIBNITIUS, ingeniorum, dum viveret, æſtimator æquiſſimus. Nemo, quod ſciam, denegavit NEWTONO *immunitatem ab hujusmodi contemplationibus*, qua jure ſuo merito fruitur, poſt tot exantlatos labores. Sed quidni viciſſim ſimilem concedunt Angli immunitatem Parenti, qui, ſuis quoque defunctus laboribus, dudum demonſtratum dedit quid in reſolutione Problematum a ſe exſpectari poſſit.

I V.

* Supra N°. CVII. † N°. CVI. *Art.* II. †† N°. CIX.
** N°. CVI. *Art.* I. § Supra pag. 281. 282. §§ Supra N°. CIV.

I V.

Quos intelligat TAYLORUS per LEIBNITII *Fautores*, quibus affingit *licentiam provocandi ad certamen ingeniorum*, haud facile conjecerim; niſi quod ex conficta hortatione modo ante memorata colligere liceat, Parentem meum hiſce LEIBNITII Fautoribus aggregari, ut ſub hoc nomine tanto licentius eum exagitare poſſit TAYLORUS. Quid mali eſt fautorem fuiſſe LEIBNITII? Fuit certe Vir ſingulari ingenio, eruditione & virtute præditus, adeoque dignus cui faverent omnes qui ſcientias & artes amant. Eodem modo favemus etiam NEWTONO, ipſiuſque merita maximi facimus; ſed favor, quo hos proſequimur, eſt purus & in nullo partium ſtudio fundatus; favemus utique merentibus, ſed non in præjudicium veritatis; amicus NEWTONUS, amicus LEIBNITIUS, ſed magis amica veritas. Si quem lapſum a LEIBNITIO commiſſum obſervavit Pater, aut ſi qua in re ab ipſo diſſentiendum putavit, non veritus eſt ejus admonere Virum optimum, quandoque publice, quandoque privatim, prout occaſio poſtulabat; quod plane non ægre tulit. Credo NEWTONUM quoque, ſicuti ſolent omnes generoſæ mentes, ita eſſe animatum, ut ab inferioribus etiam, citra amicitiæ læſionem, ſe corrigi patiatur, ſi forte ab ipſo erratum fuerit.

V.

Sed minus urbane agit Cl. TAYLORUS cum LEIBNITIO, ejuſque, quos vocat, *Fautoribus*, quando crude adeo illos *imperitiæ* coarguit, quod contenti non fuerint ſolutione illa Anonymi, quam *maxime generalem* deprædicat, quæ prodiit in Tranſactione N. 347 *, quodque *nondum viderint quomodo ex illa*, præſertim pro exemplo propoſito, *æquationes ſint deducendæ.* Meruiſſent ſane honorificum ſcil. hunc *imperitiæ* titulum, quo illos tam liberaliter mactat, ſi ipſe præſtitiſſet, quos *Fautores Leibnitiani* nequiverunt, atque oſtendiſſet, quomodo, *premendo veſtigia ſolutionis generalis modo citatæ*, caſus particularis LEIBNITII ad æquationem & conſtructionem reduci poſſet: ſed illa prorſus neglecta, aliam iniit viam longe diverſam. Si ita argumentari fas eſt, ut TAYLORUS facit, ad demonſtrandum aliquam ſolutionem eſſe juſtam & legitimam, facile mihi erit quamvis Chimæram cuivis obtrudere tanquam genuinam alicujus Problematis ſolutionem. Quis enim audeat conqueri ſe non intelligere, niſi vellet *imperitiæ* notam incurrere? Verum ea eſſe debet natura Regulæ, Canonis, Formulæ, aut ſolutionis alicujus genera-

 lis,

* ſupra N°. CV.

lis, ut applicatio, etiam a Tyrone, inſtitui poſſit: quod ſi hac facilitate & claritate careat, jam non amplius pro ſolutione habenda eſt, ſed pro ænigmate, quod difficilius quam ipſa quæſtio Problematis. Caſum primum LEIBNITII de ſecandis hyperbolis per Trajectoriam orthogonalem dicit TAYLORUS *a quibuſdam Anglis fuiſſe illico ſolutum*; quod credimus libenter; nam & ego ſolvi, cum vix adhuc ſublimiorem Geometriam a limine ſalutaſſem. Sed qui fit, quod iidem illi Angli alterum caſum, qui jam eſt in quæſtione, non pariter ſolverint, etſi, fatente Cl. TAYLORO, non ſit difficultatis adeo inſignis? Scilicet *hoc manſit ab illis omnino intactum*; quo circa nihil exinde conſequitur, quod eos afficiat; cur vero prius illud, non æque ac hoc alterum, voluerint intactum relinquere, aliis divinandum trado.

VI.

Acutiſſimi TAYLORI venia, tranſeo nunc ad ipſam ejus ſolutionem, & quidem ſtatim ad ſecundam partem, quæ nunc ſola eſt in controverſia, qua nempe quæritur ſolutio & conſtructio Trajectoriarum ad angulos rectos ſecantium ſeriem Curvarum & nominatim earum, quæ pro æquatione habent $dx = y^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ ſumtis nimirum y pro abſciſſa, x pro applicata, & a pro parametro variabili in tranſitu ex curva in curvam. Equidem non diffitemur, ſolutionem TAYLORI, in ſe ſpectatam, eſſe juſtam & bonam; imo talem quæ ſolutoris ſingularem ſagacitatem indicat: ſed permittat nobis, ut quædam annotemus. 1°. Modus perveniendi ad æquationem fluxionalem terminorum infinitorum pro natura Curvæ quæſitæ, non ſatisfacit uni ex conditionibus LEIBNITII, qua cautum, ut æquatio conſtet terminis numero finitis & ut per ſegregationem indeterminatarum ad quadraturas reducatur; quod per ſeriem *Taylorianam* non obtinetur. 2°. Ingenioſe quidem ducit æquationem finitam differentio-differentialem ex analogia ſerierum $Ax^n dx : a^n +$ &c. & $As^n ds : a^n +$ &c. Sed, præterquam quod hæc via videatur nimis aliena & remota, hoc inſuper ex inſpectione operationis quilibet videt, iſtam duarum illarum ſerierum analogiam eſſe mere caſualem, vel fortuitam, atque huic exemplo forſan ſoli peculiarem; unde per conſequens nulla methodus elucet in aliis exemplis ſimiliter procedendi. 3°. Immediate non deducit ad differentias ſeu fluxiones primas, ad quas tamen per methodos a Parente meo uſitatas, & infra uberius explicandas, immediate pervenitur. 4°. Reductio fluxionum ſecundarum ad primas peragitur a TAYLORO, modo non valde naturali, permixtio quippe ſecundarum & primarum cum ipſis indeterminatis, reddit integra-

tegrationem difficilem, aut incertam, neque adeo a quovis alio minus verſato inſtituendam. 5°. Æquatio fluxionalis primi gradus, quam tandem ſic eruit TAYLORUS, etiamnum laborat indeterminatarum permixtione, quæ ideo, manente m in terminis generalibus, ut ad quadraturam curvarum revocetur, putat ipſe haud proclive eſſe: etſi Problema, ut jam conſtat, facillime per quadraturas conſtruatur.

VII.

De cætero eleganter obſervavit, quod poſtea obſervandi nobis etiam, & Cl. HERMANNO, anſam præbuit, curvam nempe quæſitam deſcribi poſſe per interſectiones Curvarum datarum, totidemque ſingulis reſpondentium algebraïcarum, quarum æquatio exhibetur. Aptiſſime etiam animadvertit, curvas ſecandas eſſe ſimiles; ſed miror, quod ex ſimilitudine animadverſa non elicuerit ſolvendi methodum longe facillimam, quæ non ad hoc tantum, ſed ad omnia alia ſimilia curvarum exempla applicatur. Conſtructio, quam dedi §. 10, Schediaſmatis mei a Patre ſuppeditatam, * inventa eſt per hanc methodum, deinceps explicandam, quæ ſi in mentem veniſſet Viris ingenioſiſſimis HERMANNO & TAYLORO, non dubito quin ſuos calculos, quos pro ſimilibus Curvis inſtituerunt, ſatis operoſos, prorſus neglexiſſent, amplexuri modum, qui nullo quaſi calculo, ut videbimus, ad quæſitum ducit. Quod vero illis non in mentem venerit, tanto magis miror, quod æquatio $da : a = (dx^2 + dy^2) : (xdx + ydy)$ ab HERMANNO *modularis* dicta, & cujus *analyſin* TAYLORUS *celare ſtatuit*, non niſi ex generali ſimilitudinis idea fluat; quemadmodum infra per analyſin non celandam conſtabit.

VIII.

Confero me ad Schediaſmata Cl. HERMANNI: ubi in anteceſſum monere debeo, quod quæ annotabo, non alium habeant ſcopum, quam ut Virum acutiſſimum, omni qua poſſum humanitate, invitem ad perficiendum opus, quod laudabili conatu inchoavit; videbit enim pro æquitate ſua multum adhuc abeſſe, quo minus ſolutiones allatæ ſupremum perfectionis apicem attigerint. Quæ menſe Junio 1718, † notavi in primum ipſius Schediaſma, menſe Auguſto anni præcedentis 1717 editum, eodem ſane fine erant ſcripta, ut nimirum loco Patris, qui poſt LEIBNITII fata officium diſcutiendi ſolutiones in ſe devolutum putarat, ob rationem ſupra dictam, amice aperirem, quid in illis deſideraremus. Interim non ſine aliquo mœrore vidimus ex Februario

* Supra pag. 290. † Supra pag. 297. 298.

1719 * Virum Cel. non eodem quo nos animo accepisse monita nostra; siquidem passim ita loquitur, quasi quæ scripseram ex studio carpendi atque verbis ipsius alienum sensum affingendi fuissent prolata; quam autem mentem nobis nunquam fuisse sanctissime testamur, spe freti fore, ut de iis benignius sentire incipiat, quando legerit sequentia, quæ vel ipse notavi, vel notata habeo a Parente.

I X.

Placuit Cl. HERMANNO primæ suæ solutioni editæ in *Actis Lipf.* 1717. pag. 348. † & seqq. præfigere amplissimum Titulum *generalitatis*: Cum autem illa solutio fundetur in suo, quem vocat, Canone de permutandis coordinatarum elementis cum variato alterutrius signo, monui illam solutionem non posse dici generalem, quia Canon iste ad Curvas transcendentes generaliter nequeat applicari, hoc est, ita applicari, quod notari velim, ut in æquatione prodeunte Modulus vel Parameter variabilis eliminetur: hæc enim eliminatio constituit partem essentialem Regulæ, ut ipse Cl. HERMANNUS in Canonis enunciatione clare indicat, pag. 349 ††, præcipiens Moduli valorem substituere, quod nihil est aliud quam Modulum eliminare, idemque Pater meus jam antea indicaverat in litteris ad Nob. MONMORTIUM, 10. Julii 1717. datis, Vid. Act. 1718. pag. 258 **. Certe quamdiu æquationem aliquam, quæ naturam curvæ exprimere debet, tres ingrediuntur indeterminatæ, sicuti hic fit per solam transmutationem elementorum coordinatarum, manente Parametro variabili, Curva quæsita nondum determinata dici potest. Videtur Cl. HERMANNUS ipse hoc postea agnovisse, quando traditurus mense Julio 1718 *Supplementum* § primæ suæ solutionis, ab initio statim ingenue fatetur, hanc solutionem *generalem quidem esse pro Curvis algebraïcis; sed viam, quam in analysi Exempli quarti illic secutus sit, non satis expeditam, nec æque generalem esse, ac primum putarat.*

X.

Quæ cum ita sint, miror, Virum perspicacissimum velle assertum meum, quod concessisse videbatur, nunc iterum improbare, (Vid. ipsius *Additamentum* Act. 1719. mens. Februar. pag. 75, §§) distinguendo inter *amplitudinem* & *sufficientiam.* Nusquam profecto negavi permutationem elementorum coordinatarum ubique locum habere in transcendentibus, æque ac in algebraïcis: At vero in hac sola permutatione non consistit Canon;

* Supra pag. 304. † Supra N°. CVI. *Art.* I. †† Supra pag. 276.
** pag. 295. § Supra N°. CVI. *Art.* II. pag. 279. §§ N°. CIX. pag. 304.

Canon; requiritur præterea, quod rei caput est, ut parameter variabilis eliminetur; in algebraïcis res nullam patitur difficultatem, quia valor ejus (concessa extractione radicum ex æquationibus algebraïcis) semper dabilis est in terminis finitis; id quod non perinde se habet cum curvis transcendentibus, utpote in quibus omnibus (paucissimis exceptis, ex. gr. quibusdam exponentialibus) valor parametri ex æquatione curvæ secandæ in terminis finitis obtineri non potest, aut quomodo obtinendus sit, saltem Canon *Hermannicus* non docet. Hoc itaque sensu non potest dici *generalis*, vel *completus*; id quod unum idemque mihi est; sed erit etiamnum imperfectus, seu insufficiens. Quando dixi, Canonem non esse *generalem* pro curvis transcendentibus, neque ideo majorem ei extensionem quam ad algebraïcas adscripsisse Patruelem meum, hujus Canonis Coinventorem (si modo inventio vocari mereatur, quæ, ipso fatente, nihil aliud est quam commoda quædam formula, qua exprimitur methodus jam pluribus annis ante finem superioris seculi usurpata a LEIBNITIO & Patre meo) certe per *non generale* intellexi idem quod *insufficiens*, sicuti patet ex meo Schediasmate, pag. 260 *, in quo loco diserte dixi, exemplum tertium, etiamsi transcendens, & a Patre, & a Patruo jam olim solutum, tale tamen esse, ut valor moduli in terminis finitis exhiberi possit, adeoque nec hoc *sufficientiam Canonis* probare: ad quod si animum advertisset Cel. HERMANNUS, non opus habuisset mihi inculcare suam distinctionem inter *amplitudinem* & *sufficientiam.* Siquidem, ut jam innui, universalitatem transmutationis elementorum coordinatarum nunquam negaverim, sed petitam inde frustra totius Canonis sufficientiam, seu generalem extensionem ad cujuscunque generis curvas.

X I.

Sed non est, cur hisce diutius immorer, sufficit Virum Clariss. Canone suo publicato, postea sponte ejus imperfectionem perspexisse; qua visa id agere voluit, ut suam, quam ingenue nominat, ἀβλεψίαν festinando commissam repararet per novam, quam exhibet, Constructionem, ut vocat, generalem & facilem sub titulo *Supplementi solutionis problematis de Trajectoriis* †; verba ipsa, quibus concepta est hæc Constructio, ita habent. „ Sit generalis æquatio curvarum secandarum $dx = $ „ $p\,dy$, ubi p data supponitur quomodocunque per y & constantes, facta que $q = \sqrt{(1 + pp)}$, æquatio log. c. — log. $a = \int(qq\,dy :$ „ $(y + p\int p\,dy))$ præbebit Constructionem generalem, & facilem, ope „ logarithmicæ perficiendam, existentibus a modulo curvæ secandæ, &

 „ c

* Supra pag. 297. † N°. CVI. *Art.* II.

„ c quantitate qualibet constante. Ad id enim aptandæ solummodo sunt „ in logarithmica duæ ordinatæ a & c, atque in curva, cujus abscissæ y, „ ordinatæ vero sint $qq:(y+p\int p\,dy)$, abscindenda area proportiona- „ lis distantiæ applicatarum illarum logarithmicæ; abscissa hujus areæ da- „ bit ordinatam, ejusque valor in æquatione $x = \int p\,dy$ substitutus, abs- „ cissam Trajectoriæ quæsitæ in puncto intersectionis ejus & Curvæ se- „ candæ. Q. E. F.

XII.

Interim novam hanc regulam, quam tunc generalissimam existimabat, saltem pro iis curvis secandis, in quarum æquatione differentiali littera x non reperitur, coactus est pariter insufficientem declarare, restringendo eam ad solas curvas similes in postremo suo Schediasmate Act. Febr. 1719 *, cui titulus est, *Additamentum ad schedas, &c.* ubi ingenue fatetur pag. 73 †, *se veritatis amore minime dissimulare voluisse*, quod æquatio sua modularis, ut & illæ omnes paragraphi sui præcedentis, inter quas hæc eadem $-da:a = (dx^2+dy^2):(xdx+ydy) = qqdy:(y+p\int q\,dy)$ ex qua deduxit suam Constructionem, communes quidem sint omnibus Curvis similibus, sed solis similibus; licet antea per errorem generales esse arbitratus fuerit.

XIII.

Videt itaque demum Vir sagacissimus, quantum adhuc desit quo minus generale Problema Trajectoriarum solutum nobis dederit, quandoquidem omnes æquationes, quas hactenus ab ipso habemus, (illa enim quæ ex transmutatis elementis coordinatarum oritur, utpote per se nequaquam determinans curvam quæsitam, non computanda est) respiciunt duntaxat curvas similes, excepta unica modulari, quam dedit pag. 76 ††, $da:a = (dx^2+dy^2):(ydy+(1-m)\,xdx)$ pro curvis quibusdam transcendentibus dissimilibus, quales sunt, quæ per hanc ex. gr. æquationem differentialem exprimuntur $dx = b^m dy:\sqrt{(a^{2m}-y^{2m})}$, quarum Trajectoriam cum non nisi per æquationem differentio-differentialem exhibuerit, a me petit, ut eandem exhibeam æquatione differentiali primi gradus; hoc autem quod operæ pretium, si non impossibile putavit, infra præstabo.

* N°. CIX. † pag. 303. †† Supra, pag. 305.

XIV.

Lubet autem paulo penitius inspicere præfatam constructionem, quam Vir Cel. nullius quidem usus in dissimilibus jam agnoscens, ad similes tamen curvas quascunque applicari posse, contendit. Ego vero, qui hujus Viri erga me benevolentiam plurimi facio, nollem eum offendere proterve obloquendo. Quare quam fieri potest officiosissime rogatum volo, ut ponderare dignetur rationem, ob quam mihi videtur Constructionem illam non sine periculo paralogismi deduci posse ex inventa æquatione $da:a = qqdy:(y+p\int p\,dy)$ Ratio est, quia si $qqdy:(y+p\int p\,dy)$ integrabilis est per logarithmos, inde non statim licet concludere, quod ideo $lc - la$ sit $=$ illis logarithmis, quorum differentialia faciunt $qqdy:(y+p\int p\,dy)$ cujus rei veritatem infra demonstrabo.

XV.

Poterit quidem Vir ingeniosissimus urgere sub aliqua veri specie, suam hanc constructionem sibi dedisse genuinam Trajectoriam pro secandis $dx = y^m dy:\sqrt{(a^{2m}-y^{2m})}$, atque conformem illi, quam a Patre meo exhibui in Actis 1718, pag. 253 *. Sed ad hoc respondeo, successum istum esse mere fortuitum, & tali casui adscribendum, qui in mille aliis exemplis non occurret, originem habens in præsenti exemplo ex eo quod, introducendo novam litteram R, quæ ponitur $= \int((1-m)\,a^{2m}p\,dy:y^{2m})$, tota illa quantitas $qqdy:(y+p\int p\,dy)$ mutetur in $dR:(1-m)\,R$, ubi commodum accidit, ut præter unicam indeterminatam R nulla alia reperiatur; id quod facit, ut integratio feliciter procedat. Quo vero magis pateat constructionis fallacia, proponamus nobis exemplum, cujus solutio aliunde jam cognita, curvarum secandarum similium, nempe parabolarum communium eodem vertice & axe descriptarum, quarum scimus Trajectorias esse ellipses super axibus conjugatis se habentibus ut $\sqrt{2}$ & 1. Sit itaque parabolarum parameter variabilis, a; earum æquatio $ax = yy$, unde $dx = [p\,dy] = 2ydy:a$, adeoque $p = 2y:a$ & q, seu $\sqrt{(1+pp)} = \sqrt{(aa+4yy)}:a$, quæ si substituantur in æquatione pro Trajectoriis, $-da:a = qqdy:(y+p\int p\,dy,)$ habebimus $-da:a = (aa+4yy)\,dy:(aay+2y^3) = dy:y + 2ydy:(2yy+aa)$, quare integrando, ut exigit constructionis præscriptum, prodibit $\int(qqdy:(y+p\int p\,dy)) = \text{Log. }y + \frac{1}{2}\text{Log. }(2yy+aa) = \text{Log. }c - \text{Log. }a$, atque adeo abjectis logarithmis $y\sqrt{(2yy+aa)}$

* Supra pag. 290.

$+ aa) = c : a$, vel reductione inſtituta, $2aay^4 + a^4 yy = cc =$ [ſuppletis homogeneis] $b^4 cc$, quæ eſſet æquatio determinans Trajectoriam parabolarum; ut vero illa inveniatur inter coordinatas y & z, ſubrogetur pro a ipſius valor $yy : z$ [eſt enim ex natura parabolarum $az = yy$] quo facto reſultabit $y^{10} + 2zzy^8 = b^4 ccz^4$, æquatio valde diverſa ab ea, quæ ad ellipſin ſpectat.

X V I.

Video Cl. Autori tandem ſuboluiſſe latentem in ſua Conſtructione defectum, quem expiſcari & tollere poſtea conatus, in *Additamento* Febr. 1719. pag. 71 *, ſcopum ſuum non attigit. Monet ibi, *non eſſe reticendum, quod utique, per* x, y, dx, dy, *intelligi debeat* x : a, y : a, dx : a, dy : a. Verum ſi in æquatione inventa pro parabolarum Trajectoria $- da : a = dy : y + 2ydy : (2yy + aa)$ pro y & dy, ſcribatur $y : a$ & $dy : a$ ſicuti monet, prodibit hæc alia haud multum diſcrepans $- da : a = dy : y + 2ydy : (2yy + a^4)$ ſed quæ, tractata ut ante, reddit æquationem inter z & y adhuc magis compoſitam, neque adeo ellipſi competentem. Quare, non obſtante Cl. Autoris medela, nondum ſublatus eſt defectus quo laborat ipſius Conſtructio. Certe ſi conſiderando a tanquam conſtantem, exhiberi poſſet $\int (qqdy : (y + p\int p\, dy)$ in terminis finitis, felicius ego ſuccurrerem laboranti. Nam nihil aliud faciendum eſſet, quam ut pro y & a, ſcriberetur $y : a$ & $a : a$, ſeu 1; hoc modo æquatio pro parabolarum Trajectoria in terminis finitis inventa $y \sqrt{(2yy + aa)} = c : a$ abibit in hanc a defectu emendatam $\frac{y}{a} \sqrt{(\frac{2yy}{aa} + 1)} = c : a$, ſeu $2y^4 + aayy = ccaa$, quæ, ſubſtituto $yy : z$ pro a, nobis dat hanc aliam $2zz + yy = cc$, manifeſte ſpectantem ad ellipſin illam, quam diximus parabolas orthogonaliter trajicere. Ob hanc rationem factum eſt ut in æquatione, ad quam p. 72 †, Vir Cl. pervenit $dR : (1 - m) R = - da : a$ non ſtatim, ſed poſtquam integrando ad terminos finitos redacta eſſet, dividendum fuerit R per a, ut vera reſultaret æquatio Log. $(c : a) = \frac{1}{1 - m}$ Log. $(R : a)$; alias, ſi jam in æquatione differentiali, ſecundum monitum ſuum, pro R & dR ſcripſiſſet $R : a$ & $dR : a$ manſiſſet æquatio invariata $dR : (1 - m) R = - da : a$, quæ ad logarithmos, & poſtea ad quantitates abſolutas perducta dediſſet æquationem erroneam & Problemati minime ſatisfacientem $c^{1-m} a^{m-1} = R$.

* N°. CIX. † pag. 302.

X V I I.

Atque ſic veram dedimus correctionem Conſtructionis *Hermannianæ*; Sed ſimul inde liquet, illam non poſſe in uſum vocari niſi rariſſime, quando ſcilicet $qqdy : (y + p\int p\, dy)$, integrabilis eſt, vel *abſolute*, vel per logarithmos. Videt ergo jam Cl. Autor conſtructionis (quam primo prædicavit generalem, poſtea vero ad ſimiles curvas reſtrinxit) nunc tandem eam, prout concepta eſt, ne ad has quidem (niſi adhibita quam memoravi cautela) adeoque ad nullas valere. Recurrendum itaque erit ad alias conſtruendi methodos, & commodiſſime quidem ad illas Patri meo uſitatas, quia ſunt faciles, ſive inventionem, ſive effectionem reſpicias.

X V I I I.

Hæc ſi perpendere dignetur Cl. HERMANNUS, monita noſtra, ut ſperamus, haud amplius inique feret; ſicuti nec hoc quod diximus, ipſius æquationem $xdy - ydx = c^{1-m} y^m ds$, permixtione indeterminatarum laborare; cum præſertim jam videat Cl. TAYLORUM non tantum in eadem nobiſcum opinione fuiſſe, ſed credidiſſe omnino, *quod haud proclive ſit æquationem illam, manentem in terminis generalibus, revocare ad æquationem fluentes tantum involventem, vel ad quadraturam curvarum.* Id quod regerit Vir Cl. permixtionem iſtam indeterminatarum *eſſe tantum apparentem, minime vero realem*, * nondum plane ſatisfacit. Notum enim eſt, quid per ſeparationem indeterminatarum intelligatur; ſcilicet ſeparare indeterminatas in æquatione aliqua ad cujus originem non attenditur, eſt artificioſe excogitare aliquem arbitrarium valorem, pro alterutra, vel utraque indeterminatarum, qui in æquatione ſubſtitutus reddat novam æquationem ab iſta permixtione immunem. Hoc autem ſenſu rem nondum eſſe confectam in præſenti exemplo $xdy - ydx = c^{1-m} y^m ds$ agnoſcet ultro, ſi attendere voluerit, quod æquatio ad quam pervenit $\int ((1 - m) a^{2m} dy : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} = a^m c^{1-m}$ non tam ex ipſis viſceribus æquationis ſeparandæ $xdy - ydx = c^{1-m} y^m ds$, quam ex præſuppoſita æquatione curvarum ſecandarum $dx = y^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ fuerit elicita; quem ſeparandi modum non eſſe genuinum, vel methodicum, qualem intendimus, hinc quoque patet, quod in tranſmutata $\int ((1 - m) a^{2m} dy : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} =$

* Supra pag. 300.

$a^m c^{1-m}$ adſit littera a, deſignans modulum, vel parametrum variabilem, quæ nullam dependentiam nexumve neceſſarium habet cum æquatione propoſita $xdy - ydx = c^{1-m} y^m ds$, in abſtracto ſumpta, utpote in qua non reperitur. Quod ſi vero Vir Cl. exiſtimet etiam in his dari certam methodum, aut ſi quam poſſideat, quæ methodi nomen mereatur; non melius de publico mereri poterit, quam ſi eam communicaverit. Tentet interim ſeparationem indeterminatarum in eadem ſua æquatione, mutato duntaxat unico ſigno $-$ in $+$, nimirum $xdy + ydx = c^{1-m} y^m ds$, ita ut per quadraturas conſtrui poſſit; aut dicat nobis, cur in hac permixtio indeterminatarum non æque ſit tantum apparens, ac in altera illa ſua $xdy - ydx = c^{1-m} y^m ds$.

XIX.

Supereſt adhuc Cel. Viri querela, quæ me ſollicitum habet; patietur itaque ut, amota illa, ſibi excutiam ſiniſtram de mente mea non ſatis percepta opinionem. Mirabar quod ille optime judicans Tentamen Anonymi illius Angli fore calculi laborioſiſſimi, ipſe interim calculi prolixitatem & moleſtiam evitare non ſtuduerit: mirabar etiam dicentem ſecunda differentialia eſſe ſuperflua; cum ipſe tamen, in calculo ſuo Exempli IV, ad ea delapſus fuerit. De hoc nunc queritur in *Additamento* p. 76, * quaſi verba ſua aliter intellexerim, vel potius, quod pejus eſſet, quaſi aliter interpretatus fuerim, quam ipſa ſonent. Sed, pace Viri Excell., aperte profiteor me ipſius verba probe intellexiſſe, & ita quoque, ut ſonant, interpretatum fuiſſe: at ipſe videtur mentem meam non ſatis aſſecutus. Proinde ut clarius me explicem, innuere volebam me mirari, quod improbarit in Anglo Anonymo calculi prolixitatem *non neceſſariam* & uſum *ſuperfluum* differentialium ſecundorum; ipſe tamen in utrumque inciderit, ſoluturus Exemplum ſuum quartum; cum tamen, ſi recta methodus adhibeatur, neque longo calculo, neque ſecundis differentialibus opus ſit. Exceptio igitur, quod Anonymi Tentamen non niſi ad curvas algebraïcas pateat, circa quas Vir Cl. non inciderit in calculi prolixitatem, aut in ſecunda differentialia, nihil prorſus ad rem facit. Licet enim lubens largiar, quod ipſi objici non poſſit id quod Anonymo, ſcilicet in exemplis curvarum algebraïcarum nimiam & ſuperfluam operam collocaſſe; in eo tamen comparationem juſtiſſimam facio, dicendo, quod quemadmodum Anonymi Angli Tentamen deducit ad nimium calculum, & ad differentialia ſecunda, circa exempla curvarum algebraïcarum,

* pag. 304.

rum, ubi neutro opus eſt; ita pariter Cel. Vir prolixum calculum fecit, & delapſus eſt ad differentialia ſecunda, ad ſolvendum Exemplum ſuum quartum, ad quod tamen, etſi tranſcendens, non longiori calculo, nec magis differentialibus ſecundis opus eſt, quam ad curvas algebraïcas; ut ex Analyſi Paterna apparebit; ipſeque jam perſpicit Vir acutiſſimus, ſponte nunc agnoſcens *in curvis tranſcendentibus ſimilibus* (in quorum cenſu ſunt curvæ Exempli quarti) *uſum ſecundarum differentialium vitari poſſe:* hoc itaque fuit quod miratus ſum, ipſum non vitaſſe quod vitare poterat. Meum interim non eſt probare; quod idem obtineat circa quaſcunque curvas tranſcendentes *diſſimiles*, quandoquidem hoc nuſquam dixi: dabo tamen æquationem differentialem primi gradus, quam petit, pro Trajectoria Orthogonali ejuſmodi curvarum tranſcendentium quæ exprimuntur hac æquatione differentiali $dx = b^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$; aliaque communicabo hiſce magis ardua; quorum labor erit, ut loquitur, operæ pretium.

SECTIO II.

XX.

Ante omnia, dicendum erit in univerſum de Problemate Trajectoriarum, quouſque illud in genere ſumtum ſolutum habeatur; poſtea de ſolutionibus minus univerſalibus, quæ quidem infinitis generibus curvarum competunt, non tamen omnibus; ac tandem de iis, quæ nonniſi ad exempla particularia ſunt accommodata. Solvere autem hoc loco vario ſenſu accipi poteſt: 1°. enim, ſolvitur aliquo modo Problema, perveniendo duntaxat ad æquationem differentialem qualemcunque, cui plures inſunt quem duæ indeterminatæ earumve elementa; qui ſolvendi modus dici poſſet primi & infimi gradus: 2°. ſolvitur nonnihil perfectius, ſi reduci poteſt ad æquationem quamvis differentio-differentialem, ſed in qua nonniſi duæ reperiuntur indeterminatæ cum ſuis elementis; qui ſecundus eſt perfectionis gradus: 3°, Perfecte ſolvitur inveniendo æquationem differentialem ſine differentiis altioribus, & quæ conſtat duabus tantum indeterminatis; talio ſolutio obtinet tertium perfectionis gradum. 4°. Solvitur perfectiſſime, ſi præterea integrando ad æquationam terminis finitis conſtantem, aut ſaltem per ſeparationem indeterminatarum ad quadraturas reducatur, ut conſtrui poſſit; qui quartus & ſummus eſt gradus perfectionis.

Acta Erud. Lipſ. Suppl. Tom VII. Sect. VII. pag. 303.

XXI.

Jam vero Problema Trajectoriarum generaliter conceptum ejus eſt indolis,

dolis, ut vix ſperare liceat aliam ſolutionem, quam quæ ad primum gradum, aut forte ad alterum referri poſſit: qui hucuſque rem perduxerit, multum ſane præſtitiſſe cenſendus eſt. Quod vero attinet ad ſolutiones, generales quidem, ſed tantum pro certis generibus curvarum; variæ ſuppetunt, quæ tertium, imo & quartum perfectionis gradum obtinent. De reliquis, quæ tantum ad exempla particularia ſunt aptata, non eſt ut multum dicamus; quia hujuſmodi ſolutiones certam methodum non obſervant; ipſa vero illa exempla plerumque jam continentur in aliquo genere curvarum, quod ſui generalem admittit ſolutionem.

XXII.

Quæ de his ſingulis inventa poſſideo, & potiſſimam quidem partem ex communicatione optimi Parentis, nunc ordine pertractabo; addita ubique demonſtratione ſeu analyſi.

Illa ex methodis, quæ maxime obvia, & cujus memini in litteris ad LEIBNITIUM datis, 2. Sept. 1694, per quam plura exempla dudum antea a ſe ſoluta refero, vid. *Act.* 1698, Menſ. Octobr. * conſiſtit in hoc, ſicuti patet ex ſolutione allata loco citato, pag. 472 † pro exemplo logarithmicarum eodem axe & per idem punctum ductarum, atque Trajectoria normali

TAB. XXXV. *Fig.* 1.

ſecandarum, ut ſi curva ABC ſit una ex ſecandis a Trajectoria quæſita DBE, concipiatur BF tangens ſecandæ ABC, tanquam normalis ſecantis DBE, propter angulum rectum ABE; adeoque poſitis coordinatis Trajectoriæ AG, y; GC, x; earumque elementis Gg, vel nb, dy; nB, $-dx$; ut fiat FG: GB $= -dx : dy$, hoc eſt, ſubtangens ſecandæ ad applicatam communem x, ſicuti hujus ejuſdem elementum ad elementum abſciſſæ; hæc analogia ſuppeditabit æquationem differentialem primi gradus, continentem, præter coordinatas earumque elementa, etiam parametrum variabilem curvarum ſecandarum. Hactenus ſolutum habebitur Problema, ſed nonniſi imperfectiſſime, ſeu in primo & infimo ſolutionis gradu: quod ſi inſuper valor ſubtangentis ita exhiberi poſſit, ut parameter variabilis eum non ingrediatur, habebitur Trajectoria DBE per æquationem differentialem primi gradus omnino liberam a parametro; quæ ſolutio

* N°. LII. pag. 267. *Tom.* I. † pag. 389. *Tom.* I.

tio perfecta eſt in tertio perfectionis gradu: unde patet curvarum algebraïcarum Trajectorias ſemper exprimi poſſe per hujuſmodi æquationem, conceſſa nempe extractione radicum ex æquationibus algebraïcis. Denique ſi valor ſubtangentis FG eo reduci queat, ut excludat non ſolum parametrum variabilem, ſed omnes quantitates conſtantes & implentes homogeneorum dimenſiones, hoc eſt, ut FG componatur tantum ex coordinatis y & x ſecundum quamcunque legem; dico hoc etiam ſolvi poſſe Problema in ſummo perfectionis gradu. Etenim æquatio differentialis pro Trajectoria emergens conſiſtet in meris y & x, ita ſecum invicem permixtis ut ubique ſimul eundem dimenſionis gradum adimpleant: verum jam diu a nobis demonſtratum eſt, quomodo in talibus æquationibus differentialibus indeterminatas ſeparare oporteat, ut earum conſtructio ad quadraturas revocetur; niſi, quod quandoque fieri poteſt, per integrationem ad algebraïcas omnino reducantur.

XXIII.

Poſſem horum caſuum exempla bene multa, tam tranſcendentia quam algebraïca producere; ſed quia conſtitui, ob materiæ abundantiam, ad particularia non deſcendere; relinquam aliis dictorum applicationem facere. Interim hac occaſione oſtendam, quam facile Canon Cl. HERMANNI, in quem etiam Patruelis meus incidit, ex hac prima Patris mei methodo deducatur. Sit enim, pro curva ſecanda ABC, æquatio differentialis generaliter expreſſa per $dx = pdy$, ubi y & x denotant ejus coordinatas AG, & GB, dy & dx earundem elementa, quatenus pertinent [manente parametro invariata] ad curvam ſecandam eandem ABC; atque p quantitatem deſignat utcunque compoſitam ex coordinatis, parametro, & conſtantibus. Jam ergo, per methodum expoſitam, erit FG: GB [$= dy : pdy = 1 : p$] $=$ Bn : bn $=$ [ſumendo $-dx$ & dy pro elementis coordinatarum x & y, quatenus pertinent ad Trajectoriam DBE] $-dx : dy$; adeoque $1 \times dy = p \times -dx$, hoc eſt $dy = -pdx$; unde apparet, permutatis elementis in æquatione ſecandarum $dx = pdy$, & variato alterutro ſigno, oriri æquationem $dy = -pdx$, pro Trajectoria quæſita; ſicuti præcipit Canon *Hermannianus* ſæpe adeo commendatus: ſed ſimul patet, eandem in re ipſa nihil differre a methodo hic explicata, quam Pater meus jam ante tot annos adhibuerat;

 quin

quin & canonem illum nihil aliud eſſe, quam ipſius methodi commodam tantum enunciationem.

X X I V.

Altera methodorum ſuperiori jam ſæculo a Patre uſitatarum, non multo minus obvia eſt quam præcedens.

TAB. XXXV. Fig. 2. Illa huc redit, ut concipiantur duæ curvæ ſecandæ ſibi mutuo proximæ, ABC, Abc ſectæ a Trajectoria DBE in punctis B, b, & a communi applicata GB in punctis B, β; unde formabitur triangulum rectangulum $Bb\beta$, eritque adeo [ducta bn perpendiculari ad $B\beta$] $B\beta : b\beta = b\beta : n\beta$; ſeu $B\beta \times n\beta = b\beta \times b\beta = b\beta^2$. Habetur autem $B\beta$, differentiando applicatam GB ſecundum parametrum variabilem & abſciſſam AG invariabilem; ipſa vero bn [elementum abſciſſæ AG quatenus pertinet ad Trajectoriam DBE] $= dy$, & βb elementum curvæ ſecandæ Abc, cujus poſita æquaitone differentiali $dx = pdy$, habetur βb [faciendo $1 : \sqrt{(1+pp)} = bn : \beta b$] $= \sqrt{(1+pp)} \times dy$, ſicuti & βn (propter $bn : \beta n = 1 : p$) $= pdy$. Sit itaque $B\beta = -qda$ [pono $-qda$, quia creſcente parametro in hac figura decreſcit GB] erit $-qda \times pdy = (1+pp)\,dy^2$, ſeu $-qda \times p = (1+pp)\,dy$, unde $-da = (1+pp)\,dy : pq$. Quæ eſt æquatio pro Trajectoria quæſita.

X X V.

In hac methodo fundamentum habet Regula prior, qua utebatur Cl. HERMANNUS, antequam in canonem ſuum incidiſſet, & cujus dedi deſcriptionem in Actis 1718 p. 259 *; ſed quam deſeruit, animadvertens haud dubie ſibi non facile eſſe applicare hanc regulam ad curvas tranſcendentes ſecandas ABC, in quibus nempe valor applicatæ GB in terminis finitis exhiberi nequit; hoc enim omnino requiri videtur ad id, ut differentiari illa poſſit, ſuppoſita variabilitate parametri, & invariabilitate abſciſſæ AG, hoc eſt, inveniendum valorem ipſius q in æquatione $-da = (1+pp)\,dy : pq$. Quamdiu itaqua fugit quid pro q ſubſtituendum ſit, æquatio inventa nullius erit utilitatis, utpote quæ ne quidem in infimo perfectionis gradu Problema ſolvit; proinde minoris

* Supra N°. CVIII. pag. 296.

minoris æſtimanda, quam quæ per primam methodum inventa eſt $dy = -pdx$; etſi hæc, jam dictum, quia tres inſolvit variabiles y, x & a latentem in p, nonniſi imperfectiſſimam conſtiuat ſolutionem. Sed ſi qua arte determinari poteſt q, ſcilicet in tranſcendentibus, de quibus hic ſermo eſt; æquatio proveniens, ex ſubſtitutione ejus valoris in $-da = (1+pp)\,dy : pq$ ſolvet Problema in longe excellentiori gradu quam altera $dy = -pdx$; ſiquidem in illa tunc nonniſi duæ continebuntur variabiles, ſuppoſito p dari duntaxat per a & y; nam ſi etiam x ingrederetur, utraque pari paſſu ambularent. Quacirca operæ pretium erit oſtendere quomodo in tranſcendentibus valor ipſius p inveniatur. In hunc finem communicabo rationem differentiandi quantitates tranſcendentes de curva in curvam; quam jam olim LEIBNITIO & *Parenti* meo familiarem fuiſſe ex ipſorum litteris ad ſe invicem ſcriptis cognovi, & quæ in vulgus nondum notà hucuſque deſiderari videbatur.

X X V I.

Sit igitur curva ABC, eique proxima Abc, quæ ex illius parametri variatione oritur: oportet invenire differentiam utriuſque applicatæ GB, Gb, ad communem abſciſſam AG pertinentis; hoc eſt oportet invenire Bb: quod ut peragatur etiam in tranſcendentibus [nam ſi GB algebraïce daretur nulla eſſet difficultas] obſervandum eſt differentiam duorum totorum eſſe æqualem ſummæ ex differentiis partium, vel quod idem eſt, differentiam duorum totorum componi ex omnibus differentiis partium. Hinc ſi [abſciſſa AG in elementa diviſa] innumeræ aliæ intelligantur applicatæ FE, IH, KL &c. erit Bb differentia inter GB & Gb, æqualis $Bb - Ee + Ee - Hh + Hh - Ll$ &c. Eſt vero [ductis Em, en, axi AG parallelis] $Bb - Ee = Bb - mn = Bm - bn =$ differentiæ inter elementa applicatarum, GB, Gb; unde Bb differentia totarum GB & Gb, erit æqualis aggregato ex omnibus illis differentiis inter elementa applicatarum ad communes abſciſſas pertinentium. Quare differentiando elementa applicatæ, ſuppoſita parametro variabili, & manente abſciſſa invariata, & poſtea quod provenit iterum integrando, ſuppoſita parametro invariabili & fluente abſciſſa, emerget valor ipſius Bb. Sit itaque, ut prius, TAB. XXXV. Fig. 3.

æquatio

æquatio naturam curvarum exprimens $dx = p\,dy$ [nominatis nempe AG, y; GB, x: parametro variabili a, & p, quantitate compoſita utcunque ex y, a & conſtantibus] differentietur p, ſupponendo a fluentem, & y manentem; vocetur quod provenit $R\,da$; erit $Bm - bn = R\,da \times dy = da \times R\,dy$; hoc nunc integretur, ſuppoſita a, ac proinde da manente, ſed y fluente; habebitur $da \times \int R\,dy =$ Bb, ſeu $q\,da$. Quod ſi $R\,dy$ actu ipſo integrari non poteſt, dabitur q, ſaltem tranſcendenter, hoc eſt, per quadraturam. Noſtra igitur æquatio ad Trajectoriam §. XXIII inventa, $-da = (1+pp)\,dy : pq$ abit in hanc $-da = (1+pp)\,dy : p\int R\,dy$, nonniſi duabus indeterminatis y, & a variabili conſtantem, per quam adeo Problema in penultimo perfectionis gradu ſolutum habemus. Perfectius autem, hoc eſt, in ſummo perfectionis gradu ſolvere Problema in tanta generalitate ſumtum, vix ſperare poſſumus. Notetur interim, ne confundatur dy in $\int R\,dy$ cum altero quod totam fractionem multiplicat, prius illud eſſe elementum abſciſſæ, quatenus pertinet ad curvam ſecandam, alterum vero eſſe elementum ejuſdem, quatenus ad Trajectoriam pertinet; ſic ergo $\int R\,dy$ conſiderari debet tanquam quantitas finita & data [licet tranſcendenter] per y, & a invariabilem in hac integratione, quæ, cum cæteris quæ inſunt quantitatibus per omnes curvas conſtantiſſimis, quomodocunque compoſitæ & permixtæ intelliguntur.

XXVII.

Reſtat ut Bb inveniamus in maxima Problematis generalitate, ſuppoſito nimirum, in æquatione curvarum ſecandarum, $dx = p\,dy$, quantitatem p conflatam eſſe ex ambabus coordinatis y, x, ex parametro a, & conſtantibus quibuſcunque. Ad hoc præſtandum, utemur eadem illa methodo differentiali quantitates tranſcendentes de curva in curvam, adhibita tantum aliqua dexteritate; vocetur enim Bb, dX, utpote elementum ipſius x ex ſolius parametri variatione ortum, adeoque diſtinguendum a dx. Quod itaque ex differentiatione ipſius p, ponendo y manentem,

nentem atque parametrum a fluentem, reſultat, ſit $R\,da + T\,dX$ [talem enim formam omnino habebit; quia, fluente a, etiam x fluet, hoc eſt, mutabiter GB in Gb]. Erit nunc $Bm - bm$ hoc eſt $ddX = R\,da\,dy + T\,dX\,dy$, adeoque $ddX - T\,dX\,dy = R\,da\,dy$. Res jam huc redit, ut hæc æquatio integretur, manente parametro & fluente AG, id quod duobus modis efficitur. Et quidem primo multiplicetur æquatio per z, ut habeatur $z\,ddX - Tz\,dX\,dy = Rz\,da\,dy$: nunc quæratur valor ipſius z, talis, ut prius membrum evadat integrabile; hoc fine ponatur illud eſſe differentiale ipſius $z\,dX$, hoc eſt, eſſe $= z\,ddX + dz\,dX$; & cum primi termini utrobique jam ſint identici, etiam alteri ſunt identificandi, faciendo $dz\,dX = -Tz\,dX\,dy$, unde $dz : z = -T\,dy$, atque integrando, lz, hoc eſt, logarithmus ipſius $z = -\int T\,dy =$ [ſupponendo $lc = 1$] $-lc \times -\int T\,dy$; reductiſque logarithmis more ſolito ad numeros $z = c^{-\int T\,dy}$. Hanc quantitatis non logarithmicæ reducendæ rationem a nobis primum introductam videas in *Act. Lipſ.* 1700 p. 212.* Cum itaque $z\,dX = \int Rz\,da\,dy =$ [ob da invariabilem] $da\int Rz\,dy$, ſubſtituatur valor inventus ipſius z, habebitur $c^{-\int T\,dy} \times dX = da\int(R\,dy\,c^{-\int T\,dy})$, ipſumque dX ſeu $\mathrm{Bb} = da\int(R\,dy\,c^{-\int T\,dy}) : c^{-\int T\,dy}$.

XXVIII.

Alter modus integrandi $ddX - T\,dX\,dy = R\,da\,dy$, continetur in methodo mihi olim uſitata in *Actis* 1697 p. 115 † ad conſtruendam æquationem $a\,dy = yp\,dx + by^n q\,dx$ a Fratre mihi propoſitam, cujus noſtra eſt tantum caſus particularis. Fiat igitur, ut in loco citato factum, $dX = mz$, adeoque $ddX = m\,dz + z\,dm$, quibus ſubſtitutis in æquatione $ddX = R\,da\,dy + T\,dX\,dy$, mutatur ea in hanc, $m\,dz + z\,dm = R\,da\,dy + Tmz\,dy$. Ponatur, vi illius methodi, $z\,dm = Tmz\,dy$, & $m\,dz = R\,da\,dy$; prior dat $dm : m = T\,dy$, unde $m =$

* Supra N°. LVI. pag. 319. *Tom. I.* † N°. XXXV. pag. 176. *Tom. I.*

$c^{\int Tdy}$; hoc in altera ſubſtitutum dat $c^{\int Tdy} dz = Rdady$, ideoque $dz = Rdady : c^{\int Tdy} = Rdady \times c^{-\int Tdy}$; unde $z = da \int (Rdy \times c^{-\int Tdy})$, & mz, ſeu dX, ſeu $Bb = c^{\int Tdy} \times da \int (Rdy \times c^{-\int Tdy}) = da \int (Rdy \times c^{-\int Tdy}) : c^{-\int Tdy}$, ut ante.

XXIX.

Reperta hoc modo ipſa Bb, ſeu valore ipſius qda in æquatione generaliſſima pro Trajectoriis (§. XXIII.) $-da = (1 + pp) dy : pq$, ſubſtituatur illa in hac æquatione, & prodibit nova, quæ illas generaliter ſolvit, & in qua nulla erit quantitas, cujus valor non ſit definitus, nempe hæc, $-da = (1 + pp) c^{-\int Tdy} dy : p \int (Rdy \times c^{-\int Tdy})$. Ubi ſtatim patet, in caſu quo p componitur tantum ex y, a, & conſtantiſſimis, ita ut x non ingrediatur, fore $T = 0$, ac proinde æquationem illam degenerare in hanc $-da = (1 + pp) dy : p \int Rdy$, prorſus ut jam invenimus §. XXV. Cæterum etiam hic, quod ſupra in fine ejuſdem paragraphi jam monuimus, notandum, in integrationibus $\int Tdy$ & $\int (Rdy \times c^{-\int Tdy})$, ſumi debere parametrum a pro invariabili, ita ut illæ quantitates tanquam finitæ, & datæ per ipſas curvas ſecandas datas, conſiderari debeant.

XXX.

Quandoquidem Patruelis meus Cl. Profeſſor Patavinus idem præſtitit, ſed eo fine, ut inveniret æquationem differentialem quam vocat completam ex data differentiali æquatione incompleta, unde poſtea Trajectoria determinatur per eandem noſtram æquationem; e re erit ejus methodum, quæ mere analytica eſt, nulla attentione facta ad figuram, huc tranſcribere ex quadam ipſius Epiſtola ad Patrem exarata, retentis quibus uſus eſt verbis, ſed ſymbolis ad noſtra accommodatis, ita autem habet:

PROBLEMA.

,, *Datam æquationem differentialem alicujus curvæ* $dx = pdy$, *in qua*

,, p, *datur per* x, y, *quantitatem conſtantem* a, *&* *alias conſtantes, tranſ-*
,, *mutare in aliam æquivalentem, in qua etiam quantitas* a *ſit variabilis.*

SOLUTIO

,, Sit æquatio quæſita $dx = pdy + qda$, quæ nempe integrata exhi-
,, beat eandem æquationem, quæ provenit ex integratione æquationis
,, $dx = pdy$, in qua a ſumitur pro quantitate conſtante. Ut inveniatur
,, valor quantitatis q, differentietur quantitas p, ſumptis pro variabilibus
,, x, y & a; & ſit generaliter $dp = Tdx + Sdy + Rda$. Sumta a
,, conſtante, erit $dy = dx : p$, hæc æquatio differentietur, ſumtis x &
,, dx conſtantibus, & erit $ddy = - dxdp : pp$ [quia ſi x conſtans
,, eſt, $dp = Sdy + Rda$] $= (- Sdxdy - Rdxda) : pp$
,, [quia ſi x conſtans, $dy = - qda : p$] $= (Sqdxda - Rpdxda) : p^3$.
,, Nunc hoc idem ddy alio modo quæro. Sumta x conſtante erit dy
,, $= - qda : p$. Hæc æquatio differentietur, ſumtis a & da conſtan-
,, tibus, & erit $ddy = -(-pdqda + qdpda) : pp$ [quia ſi a
,, conſtans, $dp = Tdx + Sdy$] $= (-pdqda + Tqdxda$
,, $+ Sqdyda) : pp$ [quia, ſi a conſtans, $dy = dx : p$] $= (-ppdqda$
,, $+ Tqpdxda + Sqdxda) : p^3$. Unde, æquatis his duobus valori-
,, bus ipſius ddy, erit $(Sqdxda - Rpdxda) : p^3 = (-ppdqda +$
,, $Tqpdxda + Sqdxda) : p^3$, ſive $Sqdx - Rpdx = - ppdq + Tqpdx$
,, $+ Sqdx$, ſive $- Rdx = - pdq + Tqdx$, ſive [ponendo pdy
,, pro dx] $- Rdy = - dq + Tqdy$. Ponatur $Tdy = - dz : z$
,, eritque $- Rzdy = - zdq - qdz$ & integrando $\int Rzdy = qz$
,, ſive $q = \int Rzdy : z$. Sed quia $Tdy = - dz : z$, erit ſumta c
,, pro quantitate aliqua conſtante [cujus nempe logarithmus $= - 1$]
,, $z = c^{\int Tdy}$, quo valore ſubſtituto, habebitur $q = \int (Rdy \times c^{\int Tdy}) : c^{\int Tdy}$.

BREVIUS.

,, Poſita a conſtante, eſt $dx = pdy$, differentietur hæc æquatio,
,, poſitis y & dy conſtantibus, eritque $ddx = dpdy =$ [poſita dp
,, $= Tdx + Rda$] $Tdxdy + Rdady =$ [quia ob y conſtantem,
,, $dx = qda$] $Tqdady + Rdady$. Poſita y conſtante, eſt $dx = qda$,
,, differentietur hæc æquatio, poſitis a & da conſtantibus, & erit ddx
,, $= dqda$. Unde æquatis his duobus valoribus ipſius ddx, erit
,, $Tqdady + Rdady = dqda$, ſive $Tqdy + Rdy = dq$; Ut prius.

X X X I.

Quod nunc ſpectat ad ipſam æquationem univerſalem pro Trajectoriis per hos modos inventam, $-da = (1+pp)\, c^{-\int T dy} \times dy : p\int(R dy \times c^{-\int T dy})$; ea utique etiam tres indeterminatas involvit y, x & a; proinde non perfectius ſolvit Problema quam altera illa ex transmutatione elementorum orta $dy = -p dx$, cujus expreſſio eſt ſimpliciſſima & inventu facillima; ſed hac tamen gaudet prærogativa, quod, in applicatione ad exempla, contingere poſſit ut x in noſtra æquatione inventa evaneſcat, & ita non niſi duas relinquat indeterminatas y & a, earumque elementa dy & da; id quod, in altera $dy = -p dx$, evenire nunquam poteſt: nam quamvis x prorſus exularet a p, reſtaret tamen ejus elementum dx; ita ut niſi aliunde forte via ſuppetat exterminandi adhuc alterutram y vel a, ſolutio per hanc æquationem ultra infimum gradum [ut jam ſupra diximus] non evehatur.

X X X I I.

Sed miſſa hac univerſaliſſima Trajectoriarum formula, quæ qua talis, quod fateor, plus habet curioſitatis quam utilitatis in applicatione ad exempla; pervenio tandem ad varias methodos, non quidem univerſaliſſime ſolventes Problema, ſed tamen generales ſingulas in ſuis generibus, adeo ut unaquæque applicabilis ſit ad infinita curvarum genera, ſpecies totidem particulares ſingula comprehendentia. Obſervabit Lector Problema ſolutum plerumque mira facilitate, ac ſemper in perfecto ſolutionis ſenſu, quandoque in perfectiſſimo; quod fit reducta æquatione ad conſtructionem per quadraturas.

X X X I I I.

Occurrit ſtatim methodus ſimplicitate jucunda gaudens, pro quibuſcunque curvis ſecandis ſimilibus & circa datum punctum ſimiliter poſitis; ubi non opus erit attendere curvarum peculiarem æquationem; ſiquidem omnia, quæ dari poſſunt ſimilium exempla ſub una generali conſtructione continebuntur, quæ ea eſt quam a Parente datam in *Actis* 1718 p. 154, §. 10. * communicavi & de qua ibi diſerte dixi, quod non tantum ad exemplum a LEIBNITIO propoſitum $dx = y^n dy : \sqrt{(a^{2n} - y^{2n})}$, *ſed & ad alia infinita eodem ſucceſſu accommodari poſſit, ſi levis attentio adhibeatur*; nempe ad omnium ſimilium curvarum exempla: ad ſimilitudinem enim [quam tum, certis de cauſis, nominare nolebam] extento quaſi digito me reſpexiſſe, nunc nemo non videt.

* Supra N°. CVIII. pag. 291. 292.

X X X I V.

Analyſim ipſam hanc in rem inſtitutam, prout eam primo Patrueli meo, poſtea Nobiliſſ. MONMORTIO impertiit Pater, paucis his habe:

Eſto LBM Trajectoria quæſita ſecans orthogonaliter omnes cujuſcunque generis curvas ſimiles ABb, CDd, &c. ex communi polo H, deſcriptas: aſſumatur ex illis quædam, ut CDd, pro invariabili & norma reliquarum, quam *Principalem* voco. TAB. XXXV. *Fig.* 4. Ductis ex polo H duabus rectis HB, Hb, angulum acutiſſimum facientibus BHb, quæ ſecent Trajectoriam in B, N, Principalem CDd in D, d, & curvam ſimilem tranſeuntem per B in b; intelligantur arculi concentrici, BF, DG, centro H deſcripti: Sit HD $= x$, HB $= y$, adeoque Gd $= dx$, FN $= -dy$ [ponitur $-dy$, quia creſcente ordinata HD in principali decreſcit ordinata HB in Trajectoria LBM.] Quia itaque curva CDd eſt data, elementum DG dabitur in x & dx, per methodum tangentium directam: Sit DG $= X dx$ [intelligitur per X quantitas qualiſcunque compoſita ex x & conſtantibus, hoc eſt, functio quælibet ipſius x]; ob ſimilitudinem curvarum CDd, ABb, triangula DHG, BHF, ut & DGd, BFb, ſunt ſimilia; proinde HD [x] : HB [y] = DG [$X dx$] : BF [$= yXdx : x$], & HD [x] : HB [y] = DG : BF = Gd [dx] : Fb $= ydx : x$; verum, ex conditione Problematis, angulo NBb exiſtente recto, erit BF^2 [$yyXXdx^2 : xx$] = bF × FN [$-ydxdy : x$]; reductione peracta, habebitur æquatio in qua indeterminatæ jam ſponte ſunt ſeparatæ ſine ulteriori præparatione, $XXdx : x = -dy : y$; quæ generaliter exprimit Trajectoriam, pro curvis ſimilibus tranſcendentibus æque ac algebraïcis, cujuſcunque ſint naturæ, atque hinc deducta eſt conſtructio citata ex *Actis* 1718 *.

* pag. 291. 292.

XXXV.

Nunc velim comparet B. Lector hanc univerſaliſſimam ſimilium ſolutionem ad extremum perfectionis gradum, nempe ad quadraturas, redactam, eamque ſimplicem, planam ac facilem, cum ſolutionibus particularis exempli $dx = y^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ a Viris Clariſſimis HERMANNO & TAYLORO datis, ac dein judicet per ſe ipſum, annon illæ [ſaltem reſpectu ad noſtram] ſint intricatæ, longæ & difficiles; atque imprimis judicet, quo jure Cl. HERMANNUS conqueri poſſit quod analyſin ipſius ejuſdem exempli in *Actis* 1717 p. 351 & 352 * exhibitam prolixitatis & moleſtiæ arguerim. Sed ſperamus, ubi viderit Vir acutiſſimus brevitatem juxta generalitatem, tum calculi tum formulæ noſtræ $XXdx : x = -dy : y$, ipſum, pro candore ſuo, agnita rei veritate, ſententiam noſtram in mitiorem partem accepturum eſſe. Videbit exemplum, alterum quod ipſi propoſui in *Actis* 1718 p. 260, l. 4. a fine †, certe ſuo illo calculo inſuperabile, & quod ideo intactum reliquit, in generali hac formula $XXdx : x = -dy : y$ æque contineri ac quodlibet aliud ſimpliciſſimum; ſiquidem, ut attendenti facile patet, ſit etiam ex claſſe ſimilium, de quo propterea non immerito dixi ejus conſtructionem per methodum Paternam non eſſe imperviam. Cæterum in tranſitu notari hic cupio, quod ex ipſa figura ultro patet, ſi curvæ ſecandæ CDd, ABb, ſint logarithmicæ ſpirales ſimiles, circa communem polum H, fore Trajectoriam LBM etiam ſpiralem logarithmicam, quia invariabilis anguli ABH, invariabile quoque eſt complementum MBH. Hinc ſpiræ mirabilis proprietatibus a Patruo quondam meo recenſitis, quibus illa multis modis ex ſe ipſa naſcitur, novum accedit augmentum; quo videmus ſpirarum illarum Trajectorias exiſtere pariter ſpiras ejuſdem naturæ, quamvis prioribus diſſimiles; excepto caſu, quo angulus HBA eſt ſemirectus adeoque ſui complemento HBM æqualis.

XXXVI.

Methodus hucuſque expoſita nimis fœcunda eſt, quam ut in ſimilibus tantum ſubſiſtat: meretur itaque ut porro explicem, quam facile applicari poſſit ad infinita alia curvarum, etiamſi non ſimilium, genera, a quibus omnes imaginabiles ſimilium familiæ, non aliter quam rivulus ab oceano abſorbentur; tanta nimirum reperitur diſcrepantia, ratione extenſionis, inter utramque

* Supra N°. CVI. *Art. I.* pag. 273. † Supra N°. CVIII. pag. 298.

que curvarum huic methodo obedientium claſſem. Proponantur ergo curvæ ſecandæ CDd, ABb &c. quæ licet ſint tranſcendentes diſſimiles, modo hanc inter ſe obſervent conditionem, ut ordinatæ HB ad HD, Hb ad Hd &c. habeant, non quidem conſtantem rationem, [quod eſſet caſus ſimilium & nonniſi unicus inter infinitos alios nunc ſolvendos,] ſed conſtantem quamcunque relationem, expreſſam æquatione quadam algebraïca inter ordinatam HD curvæ principalis CDd, & parametrum a ſpectantem ad curvam ſecandam ABb; hoc eſt, ut HB ſit functio data qualiſcunque ipſius HD, quam parameter a, aliæque conſtantes, quocunque modo ingrediantur.

XXXVII.

Sit enim ut antea HD ordinata curvæ principalis $= x$, HB ordinata Trajectoriæ quæſitæ $= y$; Gd $= dx$, FN $= -dy$. Manente invariabili parametro a, differentietur functio, qua exprimitur HB, quatenus eſt ordinata ſecandæ ABb, ut habeatur elementum Fb, quod vocetur pdx; dabitur utique p per x, a, & alias conſtantes: Sit nunc etiam, ut ſupra, DG $= Xdx$; erit HD $[x]$: HB $[y]$ = DG $[Xdx]$: BF $[= yXdx : x]$; unde iterum, ob angulum bBN rectum, BF² $[yyXXdx^2 : xx]$ = bF × FN $[-pdxdy]$; reducendo, invenitur $XXdx : pxx = -dy : yy$. Quia vero HB, ſeu y, = functioni ipſius HD, cui inſunt algebraïce x, a & conſtantes; dabitur, conceſſa extractione radicum, valor ipſius a in x, y, & conſtantibus; quo ergo ſubſtituto in quantitate p, emerget æquatio pro Trajectoria $XXdx : pxx = -dy : yy$, duas tantum indeterminatas x & y continens, ac proin ſolvens Problema in tertio perfectionis gradu.

XXXVIII.

Ut hæc æquatio ad caſum ſimilium, tanquam ad ſimpliciſſimum applicetur; notandum, functionem, qua exprimitur HB, in hac tantum æquatione $y = ax$ conſiſtere; adeoque, quod genera-

generaliter vocatur p, hic jam eſſe $= a = y:x$; hoc igitur valore ſurrogato in $XXdx:pxx = -dy:yy$, prodibit $XXdx:x = -dy:y$, ſicut in § XXXIII invenimus. Sed innumeri alii ſunt caſus, præter hunc, in quibus res ſuccedit uſque ad ſeparationem indeterminatarum, id eſt, ad perfectiſſimum ſolutionis gradum: ſcilicet in omnibus illis, [ut aliquos tantum memorem,] ubi valor ipſius p, in y, x, & conſtantibus ita expreſſus habetur, ut y, vel quicquid ad eam ſpectat, per ſimplicem diviſionem vel multiplicationem a reliquo ſeparari poſſit; hoc quippe pacto æquatio noſtra $XXdx:pxx = -dy:yy$ in duo ſeparatur membra, quorum unum ex conſtantibus atque ex x & dx, alterum itidem ex conſtantibus, atque ex y & dy conflabitur. Sit, exempli gratia, curva principalis CDd data qualiscunque, tranſcendens vel algebraïca, ex qua curvæ ſecandæ ABb, ita generentur, ut relatio inter HD & HB exprimatur hac æquatione $a \times DB = HB \times HD$, hoc eſt, $ay - ax = yx$. Erit HB, ſeu $y = ax:(a-x)$, ideoque $Fb = aadx:(aa - 2ax + xx)$; unde $p = aa:(aa - 2ax + xx)$ [ſubſtituendo pro a ejus valorem $xy:(y-x)$] $= yy:xx$ & ſic æquatio generalis $XXdx:pxx = -dy:yy$ mutatur in hanc $XXdx:yy = -dy:yy$, vel, multiplicato utrobique per yy, in hanc, $XXdx = -dy$; quæ conſtruibilis eſt per quadraturam.

XXXIX.

In hoc curvarum ſecandarum genere, æque ac in ſimilibus, Principalis CDd eſt una ex ipſis ſecandis, adeoque, ut reliquæ, a Trajectoria ad angulos rectos ſecabitur: quod notanter dico; nam in pluribus aliis caſibus accidit ut Principalis, ex qua ſecandæ generantur, ipſa inter ſecandas non comprehendatur. Exempli gratia; Sint ſecandæ ABb tales, ut HB, ſeu y, ſit $= \sqrt{(aa + 2bx)}$, ubi per b intelligo lineam pro omnibus eandem; patet utique fieri non poſſe ut, parametro a ſucceſſive variante, tandem evadat HB ubique æqualis ipſi HD, hoc eſt, ut ſecanda AB coincidat cum principali CD. Interim etiam,

etiam, in hoc aliiſque hujuſmodi caſibus, Trajectoria LBM per quadraturas conſtrui poteſt. Quoniam enim $y = \sqrt{(aa + 2bx)}$, erit $Fb = bdx:\sqrt{(aa + 2bx)} = bdx:y$; unde $p = b:y$ qui valor ſubſtitutus in æquatione generali $XXdx:pxx = -dy:yy$, dat hanc alteram $XXdx:xx = -bdy:y^3$, in qua nulla cernitur indeterminatarum permixtio, quæ conſtructionem per quadraturas impediat.

XXXIX.

Non opus erit ut multis oſtendam hanc methodum eadem facilitate extendi ad omnia curvarum genera, ubi ſecandæ ex curva principali generantur, faciendo illarum applicatas ad communes abſciſſas pertinentium. Concipiamus enim curvas ſecandas ABb hac lege formari ex principali CDd, ut applicatæ HB, hb, &c. conſtituant functiones applicatarum principalis HD, hd &c. per æquationem algebraïcam expreſſas; ita videlicet, ut qualis functio eſt HB ipſius HD, talis etiam functio ſit hb, ipſius hd; & ſic ubique; hanc autem functionem ingrediatur parameter, qua eadem manente pro eadem curva, ſed ſucceſſive mutata pro diverſis, orientur ſecandæ infinitæ ABb, quarum Trajectoria orthogonalis LBM ſic paucis determinatur. Sint DG, BF parallelæ axi RP; ſintque $HD = x$, HB quatenus eſt applicata Trajectoriæ $= y$; proinde [ſuppoſita hb ipſi HB proxima] $Gd = dx$; $NF = -dy$. Quia, ob datam CDd curvæ naturam, datur per methodum tangentium directam Hh in x, dx, & conſtantibus; ſit igitur Hh, vel DG, vel $BF = Xdx$. Jam, manente parametro a, differentietur valor ipſius y, hoc eſt, functio, quæ exprimit HB, ut habeatur elementum Fb, quod ſit $= pdx$. Cum vero angulus bBN ſit rectus, erit BF^2 [$XXdx^2$] $= bF \times FN$ [$-pdxdy$], ſeu $XXdx = -pdy$. In quantitate p ſubſtituatur valor ipſius a, qui habetur ex æquatione inter y & functionem ipſius HD; quo facto reſultabit æquatio pro Trajectoria $XXdx = -pdy$, in qua nonniſi duæ involventur

TAB. XXXV. *Fig. 5.*

ventur indeterminatæ x & y; & ita ſolutum erit Problema in penultimo gradu perfectionis.

X L I.

Hæc autem pariter, ut altera illa §. XXXVI inventa, $XXdx : pxx = -dy : yy$, innumeros admittit caſus perfectiſſime ſolubiles, nempe per quadraturas: atque in univerſum quæ §§. XXXVII & XXXVIII dicta ſunt, etiam huc quadrant. Rem multis exemplis illuſtrare non vacat; ſubindicare tamen haud pigebit, plurima olim operoſe ſatis ſoluta, eſſe Corollaria tantum quorundam caſuum ſimpliciſſimorum. Exempli gratia. Sint ſecandæ ABb tales, ut earum applicatæ HB, habeant ad applicatas principalis HD, rationem conſtantem, hoc eſt, ut y ſit $= ax$, erit in hoc caſu $p = a = y : x$. Hinc æquatio generalis $XXdx = -pdy$, mutatur in hanc ſpecialem $XXdx = -ydy : x$, ſeu $XXxdx = -ydy$, quæ per quadraturas conſtruitur.

Ex hac ſpeciali porro fluunt, loco conſectarii, ſolutiones ſequentium; 1°. ſi curvæ ſecandæ ſunt Parabolæ, cujuſvis gradus, eundem verticem & eundem axem habentes: 2°. ſi ſunt Hyperbolæ vel Ellipſes ad communem axem tranſverſim pertinentes, quod fuit Problema primum *Leibnitianum* & a me ſolutum in *Actis* 1716 M. Maio *, 3°. ſi ſunt Logarithmicæ ſuper eodem axe & per idem punctum tranſeuntes; quod ſuperiori jam ſeculo Pater & Patruus ſolverunt; & qaæ ſunt ejuſmodi infinita alia. Quod ſi ſecanda ABb ſit eadem cum principali CDd, alium tantum ſitum habens, ita nempe ut DB, differentia inter HB & HD, ſit conſtantis magnitudinis, ſeu ut BD ſit = bd; adeoque $y = x + a$, & $p = 1$, id quod ex æquatione generali $XXdx = -pdy$, hanc facit $XXdx = -dy$, quæ competit omnibus Trajectoriis ad curvas eaſdem ex motu parallelo de loco in locum translatas.

X L I I.

Redeo ad curvas ſimiles, ſed accepta voce *ſimilitudinis* in latiori ſignificatione. Conſidero namque hoc loco triplicem ejus ſenſum, nempe ſimilitudinem *lateralem*, *exponentialem* vel *potentialem*,

* Supra N°. CIV. pag. 270.

tialem, & *functionalem*. Duæ *curvæ* dicuntur mihi *lateraliter ſimiles*, in quibus ſumendo in data ratione duas quaſvis abſciſſas, unam in una & alteram in altera, etiam applicatæ illis reſpondentes habent eandem illam rationem. Duæ *curvæ* erunt *exponentialiter* vel *potentialiter* ſimiles, quando, ſumptis duabus abſciſſis quibuslibet in data ratione, applicatæ illis reſpondentes gaudent ratione quæ datæ rationis eſt duplicata, triplicata, ſeſquiplicata, aliave multiplicata, ſecundum quemcunque exponentem, ſive rationalem, ſive irrationalem. Denique per *functionaliter ſimiles* intelligo, ubi abſciſſis datam rationem obtinentibus, reſpondent applicatæ, quæ proportionales ſunt functionibus utrobique eadem lege factis ex ſuis reſpectivis abſciſſis, parametris, & conſtantibus. De his ſequentia habe elegantia & curioſa.

X L I I I.

Quod quidem attinet ad curvas *lateraliter ſimiles*, oppido pateſcit ex definitione, earum ſimilitudinem non differre ab illa altera communiter & proprie ſic dicta, quo vulgari ſenſu ſumtas curvas ſimiles, ſupra §§. XXXII, XXXIII, XXXIV. XXXV, fuſe pertractavimus. De iis tamen ut denuo agamus, quantum quidem ſecundum hanc definitionem conſiderata ſimilitudo viam nobis ſternit ad altiora; e re omnino eſſe arbitramur.

X L I V.

Detur igitur curva quæcunque CDE pro principali, aliæque innumeræ ſecandæ, qualis ABb, hac conditione ex illa formatæ, ut ſumtis utrobique duabus abſciſſis RP & RF, in ratione b ad a, hoc eſt, ut parameter principalis ad parametrum ſecandæ, applicata Pd unius ad applicatam FB alterius habeat eandem illam rationem b ad a. Quæritur Trajectoria LBM? Sint coordinatæ Trajectoriæ RF, vel RS, $= y$; FB, vel SN, $= x$; coordinatæ principalis RH vel RP $= z$, HD TAB. XXXV. *Fig.* 6.

vel Pd $= t = \int Zdz$, intelligo per Z functionem quamcunque ipſius RH, hoc eſt, quantitatem utcunque datam per z & conſtantes; quam etiam HD vel t ingredi poteſt, quia hæc ipſa, ob curvam datam CDE, data ſupponitur. Sint porro elementa coordinatarum SF, BO, bT, HP, Gd; & elementa curvarum BN, Bb, Dd: Sit nunc RP : RF $= b : a =$ Pd : FB; & creſcente a per elementum da, ut habeatur proxima curva ſecanda tranſiens per N; ſit etiam RH : RS $= b : a + da =$ HD : SN; erit RF $[y] = az : b$, FB $[x] = at : b = \frac{a}{b} \int Zdz$, earumque differentialia FS $[dy]$ $= (adz + zda) : b$, BO ſeu TN $[-dx] = (-aZdz - tda) : b$. Eſt vero [ob curvas ſimiles CDE, ABb, ſimilemque in illis ſitum punctorum, D, B] Gd : GD $=$ Tb : TB $=$ [ob angulum rectum NBb] TB : TN; hoc eſt $Zdz : dz \; [= Z : 1] = \frac{adz + zda}{b} : \frac{-aZdz - tda}{b} = adz + zda : -aZdz - tda$; adeoque [æquando producta mediorum & extremorum] $adz + zda = -aZZdz - Ztda$, & per reductionem reſultat $-da : a = (1 + ZZ)\, dz : (z + Zt)$. Hæc itaque æquatio, in qua t & Z dantur per z conſtrui poteſt per quadraturas; quia non laborat complicatione indeterminatarum. Invento ſic valore ipſius a, Trajectoria LBM ipſa facile conſtruitur. Sumpta enim abſciſſa quavis RP $[z]$, fiat RP : RF $= b : a$, ut & Pd : FB $= b : a$, erit punctum B in Trajectoria quæſita LBM.

X L V.

Talis conſtruendi modus, ope curvæ principalis, omnium eſt commodiſſimus; interim ex eo etiam alii eliciuntur. Concipiamus enim quantitatem p eodem ritu dari per abſciſſam y & parametrum a curvæ ABb, quo Z datur per abſciſſam z & parametrum b curvæ principalis CDE: manifeſtum eſt curvæ ABb æquationem fore $x = \int pdy$, vel $dx = pdy$; ſicuti curvæ CDE æqua-

tio eſt $t = \int Zdz$, vel $dt = Zdz$. Porro manifeſtum eſt functiones duas ſimiles, hoc eſt, quantitates eodem ritu compoſitas ex indeterminatis utrobique proportionalibus, habere eam rationem ad ſe invicem, quam habent duarum indeterminatarum homologarum dignitates ejuſdem dimenſionis, cujus ſunt ipſæ functiones. Ut hoc, quod in ſequentibus quoque uſum habebit, paulo clarius explicem, quia $b : a = z : y = t : x =$ [ſumendo jam dy & dx pro elementis coordinatarum curvæ ABb lateraliter ſimilis ipſi CDE] $dz : dy = dt : dx$, erit exempli gratia $bbz + z^3 : aay + y^3 = b^3 : a^3 = z^3 : y^3 = t^3 : x^3$; item $\sqrt{(b^4 + 3bbtz + 2z^4)} : \sqrt{(a^4 + 3aaxy + 2y^4)} = bb : aa$; item $\frac{1}{\sqrt{(2bz + zz)}} : \frac{1}{\sqrt{(2ay + yy)}} = b^{-1} : a^{-1}$; item $\frac{b^3}{b^3 + z^3} : \frac{a^3}{a^3 + y^3} = b^0 : a^0 = 1 : 1$, hoc eſt $b^3 : (b^3 + z^3) = a^3 : (a^3 + y^3)$; item $\frac{dz}{\sqrt{(b^3 + z^2)}} : \frac{dy}{\sqrt{(a^3 + y^3)}} = b^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{1}{2}}$; item $\int dz \sqrt{(4b^4 + 2bz^3)} : \int dy \sqrt{(4a^4 + 2ay^3)} = b^3 : a^3$; & ita de aliis. Quomodo autem dimenſiones functionum ſint æſtimandæ, non eſt quod explicem; id enim intelligentibus per ſe patet.

X L V I.

Ex dictis fluit, omnes functiones ſimiles nullius dimenſionis eſſe inter ſe æquales: quæ ſunt primæ dimenſionis ſe habere in ſimplici ratione ut latera homologa: quæ ſunt ſecundæ dimenſionis ſe habere in duplicata ratione laterum homologorum: quæ ſunt tertiæ dimenſionis fore in triplicata ratione eorundem: quæ ſunt ſeſqui dimenſionis, eſſe in ſeſquiplicata ratione eorundem; & ſic deinceps. His probe intellectis, haud difficulter percipitur quantitates Z & p eſſe nullius dimenſionis, quia in æquationibus $dt = Zdz$ & $dx = pdy$, membra priora dt & dx, quæ ſunt unius duntaxat dimenſionis, indicant etiam altera, Zdz & pdy, unam tantum habere dimenſionem; adeoque Z & p nul-

 lam;

lam; & proinde $Z = p$; Ex quo liquet etiam $(1 + ZZ)dz : (z + Zt)$ & $(1 + pp)dy : (y + px)$, vel $(1 + pp)dy : (y + p\int pdy)$, cenſendas eſſe nullius dimenſionis, & conſequenter $(1 + ZZ)dz : (z + Zt)$ æqualem ipſi $(1 + pp)dy : (y + p\int pdy)$; hac igitur quantitate ſubſtituta in ſuperiori æquatione pro Trajectoria, habebimus hanc aliam $-da : a = (1 + pp)dy : (y + p\int pdy)$, quam primo dedit Celeb. HERMANNUS in *Actis* 1718, p. 335 *.

XLVII.

Sed probe notandum ſi $(1 + pp)dy : (y + p\int pdy)$ ſit integrabilis per logarithmos; ideo non poſſe concludi quod $lc - la$ debeat eſſe $= \int((1 + pp)dy : (y + p\int pdy))$, hoc eſt = illis logarithmis, qui differentiati producunt $(1 + pp)dy : (y + p\int pdy)$. Quod Paradoxum ut explicetur, hoc velim conſideret Lector, logarithmorum differentialia poſſe eſſe æqualia, ita tamen ut logarithmi ipſi non ſint æquales, ſed data quantitate a ſe invicem differentes, ut notum eſt. Verum numeri reſpondentes iſtis logarithmis data quantitate differentibus, in data ratione ſe habent, adeoque ſunt inæquales, neque differentia eſt data. Sic, exempli gratia, etiamſi $dx : x = ndx : nx$, male tamen aliquis concluderet logarithmum prioris qui eſt lx eſſe æqualem logarithmo poſterioris qui eſt lnx; alioquin pari jure colligere poſſet fore $x = nx$, quod abſurdum eſſet. Sic quoque ſi habeamus $dx : x = dz : z$, ſupponendo nempe $dx : dz = x : z = f : g$, hoc eſt in data ratione; plane non ſequitur, ut quilibet videt, fore abſolute loquendo $\int(dx : x) = \int(dz : z)$, ſeu $lx = lz$, quia alias foret $x = z$; quare ex æqualitate differentialium logarithmorum nihil aliud colligi poteſt, quam quod numeri illorum logarithmorum, ſeu quantitates abſolutæ, habeant inter ſe rationem datam. His bene notatis, nemo non perſpicit rationem, ob quam $(1 + ZZ)dz : (z + Zt)$ & $(1 + pp)dy : (y + p\int pdy)$ ſint quidem æqualia, tametſi eorum integralia per logarithmos expreſſa ſint inæqualia, atque ipſæ quantitates abſolute

* Supra N°. CVI. *Art. II.* pag. 279.

ſolutæ inæquales in ratione data; quæ ratio in hac lege fundatur, ut poſt reductionem logarithmorum ad numeros ſuos, vel quantitates abſolutas, in hac æquatione $lc - la = \int((1 + pp)dy : (y + p\int pdy))$; quælibet dimenſio ipſius y dividatur per eandem dimenſionem ipſius $a : b$, ita ut ſcribendum ſit $by : a$ pro y; $bbyy : aa$ pro yy; $b^3y^3 : a^3$ pro y^3, &c. nec non $ba : a$, ſeu b pro a, bb pro aa, b^3 pro a^3, &c. vel ſumta b conſtantiſſima pro unitate, ſcribi debeat $y : a$, $yy : aa$, $y^3 : a^3$, &c. pro y, yy, y^3, &c. & 1 pro a, aa, a^3, &c. Hoc enim pacto, fient numeri ſeu quantitates abſolutæ ex logarithmis qui inſunt in $\int((1 + pp)dy : (y + p\int pdy))$ & $\int((1 + ZZ)dz : (z + Zt))$ elicitæ perfecte æquales.

Atque ex hoc fundamento dedimus ſupra § XVI. correctionem Regulæ *Hermanianæ*, quæ, ſine illa, ut ibidem oſtendimus per exemplum parabolarum, veram Trajectoriæ æquationem in algebraïcis non exhiberet.

XLVIII.

Cæterum ſi deſideratur Trajectoriæ æquatio in y, x, a, & eorum elementis, dy, dx da; illa facillime ita obtinetur. Fiat $a : b = RF\,[y] : RP\,[z] = \frac{by}{a}$, & $a : b = FB\,[x] : Pd\,[t] = \frac{bx}{a}$, adeoque differentiando, erit HP, vel DG, $[dz] = (bady - byda) : aa$, & Gd $[dt] = (badx - bxda) : aa$. Quia vero ON $[dy]$: BO $[-dx]$ = Gd $[(badx - bxda) : aa]$: DG $[(bady - byda) : aa] = adx - xda : ady - yda$; habetur inde æquatio $ady^2 - ydady = -adx^2 + xdadx$; quæ reducta dat hanc alteram $da : a = (dx^2 + dy^2) : (xdx + ydy)$ a Cel. HERMANNO *modularem* dictam, atque prius a Cl. TAYLORO exhibitam, ſed ita tamen, ut ejus analyſin tanquam rem myſterioſam celare ſtatuerit. Etſi revera, cum tres contineat indeterminatas, x, y, & a, per ſe ſolam nullius ſit utilitatis ad Problematis, pro ſecandis ſimilibus generaliter ſumtis, conſtructionem, atque hunc unicum uſum, eumque ſatis exiguum, præſtet, quod ejus beneficio in quolibet particulari exemplo perveniri poſſit ad æquationem differentio-differentialem, inter coordinatas & earum elementa prima & ſecunda. Si nempe valor ipſius a in x, y, habendus ex æquatione canonis $-dy = pdx$, nec non valor ipſius da, qui ex differentiatione prioris provenit, ſubſtituatur in æquatione hac $da : a = (dx^2 + dy^2) : (xdx + ydy)$; reſultabit utique æquatio differentio-differantialis

tialis pro Trajectoria inter ſolas coordinatas & conſtantes, excluſa parametro variabili a. Hæc deinde æquatio porro reducetur ad æquationem differentialem primi gradus, ſaltem ſi id natura caſus particularis permittit, quamvis plerumque res ſit abſtruſiſſimæ indaginis; atque ſi ſuccedit, ſicuti in exemplo a LEIBNITIO propoſito $dx = y^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$, nihil tamen aliud lucri inde efficitur, quam quod obtineatur æquatio differentialis primi quidem gradus, ſed ubi plerumque indeterminatæ permixtæ manent; ut vel plane non, vel nonniſi difficulter ad conſtructionem per quadraturas revocari poſſit; quemadmodum accidit prædicto exemplo, quod hanc ſuggeſſit æquationem, $xdy - ydx = c^{1-m} y^m ds$, cujus conſtructionem Cel. HERMANNUS tantum indirecte, & ex præſuppoſita æquatione curvarum ſecandarum, non vero directe & ex ipſa ejus natura, ſequeſtratis indeterminatis, exhibuit. Confer quæ hac de re jam ſupra §. XVIII. fuſius monui. Hinc demum ergo patet, quantum reliquis omnibus ſit præferenda Paterna conſtructio generalis pro quocunque genere ſecandarum ſimilium, quam ex aſſumpta earum Principali deduxit; ego vero communicavi in *Actis* p. 1718, p. 254 *, & ipſam ejus analyſin aperui hic §. XXXIII. hujus Diſſertationis.

SECTIO III.

XLIX.

Ibid. Sect. 8 pag. 337. Accedo ad curvas *exponentialiter* ſimiles, quarum Trajectorias ſequenti modo determino: Sit in eadem figura 6^a. una ex ſecandis IKk (quam vitandæ confuſionis cauſa ad alteram axis partem pono, ad quam etiam principalis CDE poſita intelligatur.) Hujus itaque ſecandæ IKk, ex definitione ſimilitudinis exponentialis, hæc eſt natura, ut ſumtis duabus quibuſcunque abſciſſis RP & RF in ratione b ad a, id eſt, in ratione parametri curvæ principalis CDE ad parametrum ſecandæ IKk, applicata illius Pd ſit ad applicatam hujus FK, ut b^e ad a^e, hoc eſt, ut dignitas quælibet, cujus index ſeu exponens vocetur e, parametri principalis ad dignitatem ſimilem parametri ſecandæ: cæterum nominentur hic etiam, ut in lateraliter ſimilibus, coordinatæ Trajectoriæ RF, vel RS, $= y$; FK, vel SQ $= x$; coordinatæ curvæ principalis RH, vel RP, $= z$; HD vel Pd,

* Supra *pag.* 291, 292.

Pd, $= t = \int Zdz$. Intelligo, ut ibi, per Z functionem quamcunque ipſius RH vel z. Sit itaque RP : RF $= b : a$; erit Pd : FK $= b^e : a^e$. Creſcente a per elementum da, ut naſcatur ſecanda proxima tranſitura per Q, atque fiat RH : RS $= b : a + da$, ac proin HD : SQ $= b^e : (a + da)^e$, habebitur inde RF $[y] = az : b$, FK $[x] = a^e t : b^e = a^e \int Zdz : b^e$, earumque differentialia FS, ſeu KW, $[dy] = (adz + zda) : b$, QW $[-dx] = (-a^e Zdz - ea^{e-1} tda) : b^e$. Ut vero habeatur ratio inter KW & Wk, elementa coordinatarum curvæ ſecandæ IKk, differentientur earum valores $az : b$, & $a^e \int Zdz : b^e$ manente a invariabili; eritque KW $= adz : b$, & Wk $= a^e Zdz : b^e$, unde $\frac{a^e}{b^e} Z : \frac{a}{b} =$ Wk : KW $=$ [ob angulum rectum QKk] KW : QW $:: \frac{adz + zda}{b} : \frac{-a^e Zdz - ea^{e-1} tda}{b^e}$. Reducta hac analogia ad æquationem, reperietur $b^{2e-2} zda + ea^{2e-2} Ztda = -b^{2e-2} adz - a^{2e-1} ZZdz$, quæ eſt æquatio pro Trajectoria IKk, continens differentiales tantum primi gradus, atque duas tantum indeterminatas z & a; nam t datur per z.

L.

Potuiſſet hæc æquatio etiam elici ex natura curvarum ABb, principali CDE lateraliter vel ſimpliciter ſimilium; hoc modo: Quia BF $= at : b$ & FK $= a^e t : b^e$, erit BF : FK $= \frac{a}{b} : \frac{a^e}{b^e}$, hoc eſt [manente a invariabili pro curvis ABb, & IKk] in ratione conſ-

 tan-

tante, adeoque BF: FK $=$ bS: Sk; ac proinde etiam bT: kW $=$ BF: FK $= \frac{a}{b} : \frac{a^e}{b^e}$, id quod dat kW $= \frac{a^{e-1}}{b^{e-1}} \times$ bT & ita habebimus kW : KW [$=$ KW : QW] $= \frac{a^{e-1}}{b^{e-1}} \times$ bT : BT $=$ [ob ſimil. curv. ABb & CDE] $\frac{a^{e-1}}{b^{e-1}}$ Zdz: $dz = a^{e-1}Z : b^{e-1}$; eſt vero [ut ex §. præced. videre eſt] KW: QW $= \frac{adz + zda}{b} : \frac{-a^e Zdz - ea^{e-1} tda}{b^e}$; ideoque $= a^{e-1} Z : b^{e-1}$, quæ eadem eſt analogia cum præcedenti; per conſequens eandem dabit æquationem pro Trajectoria, nempe hanc $b^{2e-2} zda + ea^{2e-2} Ztda = -b^{2e-2} adz - a^{2e-1} ZZdz$; quæ [exiſtente $e = 1$, in quo caſu exponentialiter ſimiles IKk degenerant in lateraliter ſimiles ABb] mutatur in hanc $zda + Ztda = -adz - aZZdz$, unde $-da : a = (1 + ZZ)dz : (z + Zt)$, prorſus ut invenimus §. XLIV.

Hinc ſequentia deducuntur tanquam conſectaria.

L I.

Quia unaquæque ex ſecandis potentialiter ſimilibus IKk eam habet indolem & relationem ad ſibi correſpondentem ABb communi principali CDE lateraliter ſimilem, ut binæ quæque applicatæ BF, KF, eidem abſciſſæ RF competentes habeant rationem, ut $a : b$ ad $a^e : b^e$, hoc eſt, ut a^{1-e} ad b^{1-e}, ſeu ut dignitas parametri curvarum cujus exponens eſt $1 - e$ ad ſimilem dignitatem parametri curvæ principalis. Hinc fluit, quod ſi curvæ lateraliter ſimiles ABb, hac generali æquatione exprimantur, [nominatis RF, y; FB, u; parametro variabili, a; invariabili, b;] $du = pdy$; ubi per p intelligo quantitatem utcunque compoſitam ex y, u; & a;

atque

atque ſi ex illis formentur curvæ IKk, quarum applicatæ FK habeant ad applicatas BF rationem eam quam habet b^m ad a^m, hoc eſt, rationem quamcunque multiplicatam rationis parametri principalis b ad parametrum variabilem a, quarum adeo æquatio [poſita FK $= x$] ſit hæc, $dx = b^m pdy : a^m$, hinc, inquam, fluit etiam harum curvarum IKk Trajectoriam VKY determinari per ſuperiorem æquationem $b^{2e-2} zda + ea^{2e-2} Ztda = -b^{2e-2} adz - a^{e-1} ZZdz$, quæ jam mutatur in hanc [quia $1 - e$ vocatur m] $a^{2m} zda + (1 - m) b^{2m} Ztda = -a^{2m+1} dz - b^{2m} aZZdz$; ubi, ut ſupra per z intelligitur RH vel RP, abſciſſa curvæ principalis, rationem habens ad RS vel RF, ut b ad a; per t intelligitur applicata ejuſdem HD, per Z vero, quantitas eodem modo compoſita ex z, t, & b, ſicuti p componitur ex y, u, & a; ut nimirum principalis CDE lateraliter ſimilis evadat ipſis ABb, & potentialiter ſimilis ipſis IKk; & ſic quidem ut ſit Pd: FK [$= b^e : a^e$] $= b^{1-m} : a^{1-m}$.

L I I.

Exemplum curvarum ſecandarum diſſimilium hac æquatione differentiali $dx = b^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ expreſſarum, quod mihi propoſuit Cel. HERMANNUS in *Actis Lipſ.* 1719, pag. 76 *, eſt caſus duntaxat noſtrarum curvarum potentialiter ſimilium, quod ſic facile oſtendo: Quoniam enim $b^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} = \frac{b^m}{a^m} \times \frac{a^m dy}{\sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}}$; concipiamus curvas lateraliter ſimiles ABb, quarum hæc ſit æquatio $du = a^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$, [quas lateraliter ſimiles fore per ſe liquet] abeunte parametro variabili a in b, y in z & u in t; abibit $du = a^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ in $dt = b^m dz : \sqrt{(b^{2m} - z^{2m})}$. Jam vero du [bT] : dx [kW] $= \frac{a^m dy}{\sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}} : \frac{b^m dy}{\sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}} = a^m : b^m$.

proin-

* Supra N°. CIX. pag. 305.

proinde etiam u [BF] : x [KF] $= a^m : b^m$; hinc patet ergo curvas ſecandas quarum æquatio differentialis eſt $dx = b^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$, eſſe exponentialiter ſimiles; earum per conſequens Trajectoriam determinatam haberi per æquationem pro Trajectoriis ſecandarum exponentialiter ſimilium in præced. inventam $a^{2m} zda + (1 - m) b^{2m} Ztda = - a^{2m+1} dz - b^{2m} aZZdz$, ſupponendo nempe pro principali ſecandarum hanc æquationem $dt = b^m dz : \sqrt{(b^{2m} - z^{2m})}$. Atque ita dedi, quod opera pretium, ſi non forſan impoſſibile, putabat Cl. HERMANNUS, æquationem differentialem primi gradus pro Trajectoria mihi propoſita, & talem quidem quæ nonniſi duabus indeterminatis, a, z, & ex z dependentibus Z & t conſtat.

L I I I.

Verum etiam æquationem modularem, $da : a = (dx^2 + dy^2) : (ydy + (1 - m) xdx)$, quam pro hujusmodi Trajectoriis Vir doctiſſ. exhibuit, haud ægre deducimus ex contemplatione ſimilitudinis exponentialis: Fiat enim, ut pro lateraliter ſimilibus factitatum §. XLVIII, $a : b =$ RF $[y]$: RP $[z] = by : a$ ſed hoc diſcrimine, quod jam hic faciendum ſit $a^e [a^{1-m}] : b^e [b^{1-m}] =$ FK $[x]$: Pd $[t] = b^{1-m} x : a^{1-m}$; differentiando itaque erit HP vel DG $[dz] = (bady - byda) : aa$, & GD $[dt] = (b^{1-m} adx + (m - 1) b^{1-m} xda) : a^{2-m}$. Hinc BT : bT [$=$ DG : Gd] $= a^{1-m} dy - a^{-m} yda : b^{-m} adx + (m - 1) b^{-m} xda$, & quia bT : kW $= a^m : b^m$; erit, compoſitis rationibus, BT [KW] : kW $= ady - yda : adx + (m - 1) xda$. Eſt autem ex natura Trajectoriæ, hoc eſt, ob angulum rectum QKk, QW $[- dx]$: KW $[dy]$ $=$ KW : kW $= ady - yda : adx + (m - 1) xda$; ex qua analogia emergit æquatio $ady^2 - ydady = - adx^2 + (1 - m) xdadx$, quæ peracta reductione reddit ipſam modularem *Hermannianam* $da : a = (dx^2 + dy^2) : (ydy + (1 - m) xdx)$.

L I V.

Atque hæc æquatio univerſalis eſt pro Trajectoriis omnium ejuſmodi generis curvarum ſecandarum, quarum æquatio ita ſe habet $dx = b^m pdy : a^m$, ſuppoſito nimirum curvas alteras, quæ hac æquatione exprimuntur $du = pdy$ eſſe lateraliter ſimiles, quarum parameter variabilis ſit a. Sed ſi independenter ab hac conſideratione curvas iſtas ſecandas contemplemur quatenus ſunt potentialiter ſimiles, quarum exponens ſit e, ſcribendum tantum eſt e pro $1 - m$, & prodibit æquatio modularis $da : a = (dx^2 + dy^2) : (ydy + exdx)$ inſerviens Trajectoriæ ſecandarum potentialiter ſimilium.

L V.

Quod ſi vero porro deſideretur ejuſdem æquatio differentio-differentialis in exemplo propoſito ſecandarum $dx = b^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$; permutentur, ſecundum canonis tenorem, elementa dx & dy, & alterutrius ſignum, ut habeatur, $- dy = b^m dx : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ pro eadem Trajectoria, eliciaturque ex hac æquatione valor ipſius a, qui erit $= (b^{2m} dx^2 : dy^2 + y^{2m})^{1:2m}$; adeoque logarithmus ipſius a ſeu $la = l(b^{2m} dx^2 : dy^2 + y^{2m})^{1:2m} = \frac{1}{2m} l(b^{2m} dx^2 : dy^2 + y^{2m})$ differentiando utrumque habebitur $da : a$, hoc eſt $(dx^2 + dy^2) : (ydy + (1 - m) xdx) = (my^{2m-1} dy^4 + b^{2m} dy\,dx\,ddx - b^{2m} dx^2 ddy) : (mb^{2m} dx^2 dy + my^{2m} dy^3)$; facta reductione, invenietur æquatio illa prolixa quam expreſſit ingenioſiſſimus HERMANNUS in fine *Additamenti* ſui, vid. Act. 1719 Menſ. Febr. p. 76. * Sed quæ cum deſcendat ad differentias ſecundas, eaſque complicatas cum variis poteſtatibus primarum, non majus inde ſubſidium ſperari poterit ad conſtructionem Problematis quam ex æquatione modulari, quæ conſtat tribus indeterminatis: præſtat itaque, ſi quis operæ pretium facere voluerit, ut conſtructionem tentet Problematis ex noſtra æquatione ſupra inventa $a^{2m} zda + (1 - m) b^{2m} Ztda = - a^{2m+1} dz - b^{2m} aZZdz$, utpote quæ ſubſiſtit in primis differentiis, neque plures quam duas indeterminatas continet; obtinebitur autem conſtructio, ſi id unicum fiat, ut indeterminatæ ſeparentur. In caſibus quibuſdam res facile ſuccedit, nam ſi $m = 0$, vel $e = 1$, æquatio mutatur in hanc $zda + Ztda = - adz - aZZdz$, unde $- da : a = (1 + ZZ) dz : (z + Zt)$, quæ eadem eſt cum illa quam §. XLIV, pro curvis lateraliter ſimilibus invenimus; & reapſe illico patet in hoc caſu curvas potentialiter ſimiles evadere lateraliter ſimiles, ut jam animadverſum eſt §. L. Porro ſi $m = 1$, vel $e = 0$, noſtra æquatio in hanc faceſſit $azda = - aadz - bbZZ\,dz$, ſeu $azda + aadz = - bbZZdz$, & multipl. per z, erit $azzda + aazdz = - bbZZzdz$, ex cujus integratione oritur [aſſumpta pro arbitrio quantitate conſtante c^4] $aazz =$

* Supra pag. 305.

$= c^4 - 2bb\int ZZz\,dz$, unde $a = \sqrt{(c^4 - 2bb\int ZZz\,dz)} : z$, & ita conceſſa quadratura habetur a per z, ipſaque proin Trajectoria conſtruitur. Sciendum interim hunc caſum jam contineri in eo genere curvarum ſecandarum, quarum methodum tradidimus §. XL *, & nominatim quidem deſinere in illum, quem expoſuimus in ſequenti §. XLI. Num alii caſus ſint ſeparabilitatis indeterminatarum, præter hos duos $m = 0$ & $m = 1$, inquirere non vacat. Sed de his ſatis.

L V I.

De *functionaliter* ſimilibus etiam agendum erit, quod paucis exequi licet: earum enim Trajectoriæ perveſtigantur eadem methodo, qua uſi ſumus in lateraliter & potentialiter ſimilibus. Sit ergo IKk una ex ſecandis functionaliter ſimilibus, quæ ſcilicet ex principali CDE, hac lege ſupponitur deſcripta, ut ſumptis duabus utrobique abſciſſis quibuſcunque RP & RF in ratione b ad a, applicatæ correſpondentes Pd & FK obſervent rationem ut 1 ad α, hoc eſt ut unitas ad qualemcunque functionem parametri variabilis a; quam autem functionem nulla alia indeterminata præter a ingrediatur. Sit porro quod oritur ex differentiatione ipſius α æquale $A\,da$, hoc eſt $d\alpha = A\,da$, dabitur itaque etiam A per a, ſeu erit ipſius a nova functio data. Retentis interim iiſdem litterarum denominationibus & ſuppoſitionibus, quas adhibuimus §§. XLIV & XLIX; Ob RP : RF $= b : a$, erit RF $[y] = az : b$; & ob Pd : FK $= 1 : \alpha$, erit FK $[x] = \alpha t = \alpha \int Z dz$: differentiando habebitur FS, ſeu KW $[dy] = (a\,dz + z\,da) : b$, QW $[-dx] = -\alpha Z dz - t\,d\alpha = -\alpha Z dz - tA\,da$. Sed ad habendam rationem inter KW & Wk elementa coordinatarum curvæ ſecandæ IKk, earum valores $az : b$ & $\alpha \int Z dz$ differentiandi ſunt, manente a conſtanti, hoc modo fiet KW $= a\,dz : b$, & Wk $= \alpha Z dz$; proinde $\alpha Z : \frac{a}{b} =$ Wk : KW $=$ [quia angulus QKk eſt rectus] KW : QW $= \frac{adz + zda}{b} : -\alpha Z dz - tA\,da$, ex qua analogia reſultabit hæc æquatio $azda + bb\alpha AZt\,da = -aadz - bb\alpha\alpha ZZ dz$, exprimens natu-

* Pag. 449, ubi vitio Typothetæ inſcribitur XXXIX.

ram Trajectoriæ IKk in differentialibus tantum primi gradus, atque continens nonniſi indeterminatas z & a, ſiquidem datur t per z & α per a.

L V I I.

Non neceſſe duco ut moneam, ſub hac æquatione contineri duas jam illas ante inventas pro Trajectoriis curvarum ſive lateraliter ſive potentialiter ſimilium; potentiæ enim conſiderandæ veniunt ut ſpecies tantum functionum generaliter ſumptarum. Præterea etiam hoc loco unaquæque ex ſecandis functionaliter ſimilibus IKk talem habet connexionem cum ſibi correſpondente ABb, lateraliter ſimili communi principali CDE, ut binæ quoque tam applicatæ BF, KF, quam earum elementa bT, kW, rationem habeant ut $a : b$ ad α, ſeu ut $a : b\alpha$ ad 1. Hinc ut in §. LI, non abſimili argumento conficitur hoc alterum; ſi nimirum curvæ lateraliter ſimiles ABb generaliter exprimantur per æquationem ibidem poſitam $du = p\,dy$, ac formentur ex illis curvæ ſecandæ IKk, quarum applicatæ FK ad applicatas BF rationem obtineant eam quam habet 1 ad $a : b\alpha$, hoc eſt, ut unitas ad quamlibet functionem parametri variabilis, quam nunc vocare lubet $a : b\alpha$, quarum adeo æquatio hæc ſit $dx = b\alpha p\,dy : a$, harum utique curvarum IKk Trajectoria VKY determinabitur per æquationem modo ſupra inventam $azda + bb\alpha AZt\,da = -aadz - bb\alpha\alpha ZZ dz$.

L V I I I.

Ad rem exemplo illuſtrandam, ſit æquatio hæc curvarum ſecandarum, $dx = (a^b + ca^m + ea^n)^l \times (a^r + fa^{r-s} y^s + gy^r)^q \times dy$, ubi per c, e &c. intelligo quantitates quomodocunque datas per parametrum invariabilem b aliaſque conſtantes; per f, g, &c. coefficientes numericos quoſcunque, per h, m, n, &c. r, s, &c. ut & per l, q, exponentes vel indices quoſlibet.

libet. Ponatur jam in propoſita ſecandarum æquatione $az:b$ pro y, & $adz:b$ pro dy, mutabitur illa in hanc $dx = \frac{a^{rq+1}}{b} \times (a^b + ca^m + ea^n)^l \times (1 + fz^s : b^s + gz^r : b^r)^q \times dz$. Hinc protinus liquet pro curva principali CDE hanc poſſe ſumi æquationem $dt = (1 + fz^s : b^s + gz^r : b^r)^q \times dz$, ſumptaque $\frac{a^{rq+1}}{b} \times (a^b + ca^m + ea^n)^l$ pro α, ſeu functione parametri variabilis, intelligitur facile, inde generari curvas functionaliter ſimiles IKk, quæ gaudent prædicta æquatione, adeoque cum propoſitis ſunt eædem; manifeſtum igitur eſt ipſarum Trajectorias contineri ſub generali noſtra æquatione $azda + bb\alpha AZtda = -aadz - bb\alpha\alpha ZZdz$. In qua $\alpha = \frac{a^{rq+1}}{b} \times (a^b + ca^m + ea^n)^l$, $A =$ ejuſdem differentiali diviſo per da; $Z = (1 + fz^s : b^s + gz^r : b^r)^q$, adeoque t, ſeu $\int Zdz = \int (1 + fz^s : b^s + gz^r : b^r)^q dz$. Et ita patet curvas ſecandas quarum æquatio $dx = (a^b + ca^m + ea^n)^l \times (a^r + fa^{r-s} y^s + gy^r)^q \times dy$, eſſe ex genere functionaliter ſimilium; quod demonſtrare volebam.

L I X.

Æquatio modularis pro Trajectoriis functionaliter ſimilium invenitur iiſdem inſiſtendo veſtigiis, quæ deduxerunt ad inveſtigationem ejuſmodi æquationum pro Trajectoriis cum lateraliter tum potentialiter ſimilium. Vid. §.§. XLVIII. LIII. Recte enim inſtituta operatione pervenietur ad hanc æquationem $da : a = (dx^2 + dy^2)(ydy + a\alpha^{-1} Axdx)$, quæ modularis eſt competens Trajectoriis curvarum quarumcunque functionaliter ſimilium, atque æquatione $dx = b\alpha pdy : a$ gaudentium; ubi ſcilicet p talis ſupponitur quantitas, ut curvæ per $du = pdy$ expreſſæ ſint

ſint lateraliter ſimiles, habentes a pro parametro variabili. Cæterum nemo non videt ex æquatione iſta modulari immediate poſſe elici alteram modularem, ſeu reſpondentem Trajectoriis curvarum potentialiter ſimilium, quarum æquatio, ut ſupra vidimus, hæc eſt $dx = b^m pdy : a^m$. Comparemus enim $b\alpha pdy : a$ cum $b^m pdy : a^m$, tanquam genus cum ſpecie, & inde patebit quid pro α ſumendum ſit; nempe erit $\alpha = b^{m-1} a^{1-m}$, adeoque $d\alpha$ ſeu $Ada = (1-m) b^{m-1} a^{-m} da$, ipſumque $A = (1-m) b^{m-1} a^{-m}$; his valoribus ipſorum α & A ſubſtitutis in generali æquatione $da : a = (dx^2 + dy^2) : (ydy + a\alpha^{-1} Axdx)$, orietur $da : a = (dx^2 + dy^2) : (ydy + (1-m) xdx)$, quæ ipſiſſima eſt modularis *Hermanniana* inſerviens, ut oſtenſum eſt §. LIII, Trajectoriis curvarum potentialiter ſimilium.

L X.

Quæ hactenus de triplici ſecandarum ſimilium genere inventa & demonſtrata dedimus, poſſunt multo latius extendi: Eſto nimirum ſecandarum natura talis ut quælibet illarum IKk generetur ex principali CDE, faciendo RF ad RP, non quidem tantum in ſimplici ratione a ad b ſeu $= az : b$, ſed æqualem cuicunque functioni quam ingrediantur z, a, b, aliæque conſtantes, dum interim ipſa FK æqualis ſumitur pariter cuivis functioni quam ingrediantur t, a, b, & conſtantes aliæ. Dico quoque, in hoc univerſaliſſimo ſecandarum conceptu, poſſe earum Trajectorias VKY revocari ad æquationem differentialem primi gradus nonniſi duas indeterminatas continentem; quin etiam ad modularem: ſed cui bono? cum poſtquam prior illa eſt inventa, hæc quæ tres omnino indeterminatas involvit ſit exiguæ utilitatis. At nolo jam calculum proſequi, quem ex dictis Lector attentus ad methodi explicatæ fæcunditatem facile adornabit.

L X I.

Hoc tantum adhuc monere convenit, quod multa dari poſſint curvarum ſecandarum genera, quæ primo intuitu non videntur generari poſſe ex quadam principali, ope functionum ex ejuſdem coordinatis & parametro variabili data lege compoſitarum, quæ tamen, obſervata ſingulari quadam indeterminatarum ſubſtitutione, tandem ex inventa principali feliciter deriventur. Ut ſi quæreretur Trajectoria curvarum quibus hæc eſt æquatio $dx = (a^b + ca^m + ea^n)^l \times (a^{\beta} + fa^{\varepsilon} y^{\lambda})^q \times dy$; ubi ſicut h, m, n, ita quoque β, ε, λ, ſunt exponentes dati qualeſcunque, etiamſi $\varepsilon + \lambda$ non ſit $= \beta$, ut requirebatur in Exemplo §. L V I I I; ponatur vero $y = a^{(\beta - \varepsilon):\lambda} z$, ac proin $dy = a^{(\beta - \varepsilon):\lambda} dz$, quibus valoribus ſubſtitutis in æquatione propoſita reſultabit hæc altera, $dx = (a^b + ca^m + ea^n)^l \times (a^{\beta} + fa^{\beta} z^{\lambda})^q \times a^{(\beta - \varepsilon):\lambda} dz = a^{\beta q + (\beta - \varepsilon):\lambda} \times (a^b + ca^m + ea^n)^l \times (1 + fz^{\lambda})^q dz$; ſane itaque, quia hujus ultimum factorem $(1 + fz^{\lambda})^q$ parameter variabilis a non amplius ingreditur, palam eſt quod ſuppoſita curva principali cujus æquatio hæc ſit dt [Zdz] $= (1 + fz^{\lambda})^q dz$, atque formatis ex ea ſecandis, hac lege ut abſciſſa y ſit $= a^{(\beta - \varepsilon):\lambda} z$, & applicata x ſit $= a^{\beta q + (\beta - \varepsilon):\lambda} \times (a^b + ca^m + ea^n)^l$, palam, inquam, eſt quod curvæ ita formatæ ſint eædem cum propoſitis, quarum æquatio $dx = (a^b + ca^m + ea^n)^l \times (a^{\beta} + fa^{\varepsilon} y^{\lambda})^q dy$; illarum vero Trajectoria determinatur per methodum functionaliter ſimilium; ergo & harum determinata habetur.

L X I I.

L X I I.

Agendum ſupereſſet de Trajectoriis curvarum talium, quæ motu angulari, data lege temperato, ex principali generantur. Concipiamus ſcilicet curvam aliquam C D d tanquam principalem, cujus applicatæ H D, h d, non ſint rectæ, ſed circulares concentricæ circa commune centrum R, in quibus moveantur puncta D, d &c. ad B, b &c; ita ut qualis eſt functio angulus H R B anguli H R D, talis etiam ſit quilibet alius h R b, alterius ex quo fuit generatus h R d; aſſumpto interim aliquo angulo, vel quod idem eſt, aliquo arcu dati radii, qui functionem illam ingrediatur, & qui ſit loco parametri variabilis, ex cujus ſucceſſiva mutatione mutetur & ipſa ſecanda A B b. Si functio illa in hoc unico conſiſteret, ut pro qualibet ſecanda A B b, angulus H R B excederet angulum H R D, angulo ſemper æquali B R D, ita nempe ut ſit B R D = cuilibet alii b R d; liquet tunc ſecandam quamlibet A B b, eandem fore cum principali CDd, eamque haberi ex gyratione hujus circa punctum R in alium ſitum translatæ; qui caſus ſimpliciſſimus conſtituit Problema a Patruo olim Patri propoſitum, atque ab illo pro deſperato habitum, ab hoc autem ſolutum. Vid. *Act. Lipſ.* 1698, p. 474 †, & quidem pro Trajectoriis conſtruendis curvam in gyrum verſam, non tantum orthogonaliter, ſed in quovis dato angulo conſtanter ſecantibus. Sed hujuſmodi curvarum Trajectoriis generatim ſolvendis nunc ſuperſedeo, ne nimius ſim; cum præſertim obſcurum eſſe nequeat quomodo eadem methodus pro functionaliter ſimilibus adhibita, ſi dextre tractetur, etiam huc poſſit quadrare. TAB. XXXV. *Fig.* 5.

L X I I I.

Auctarii tamen loco methodum aliquam communicare non inconſultum duco, indirectam quidem, ſed quæ tamen ad quadraturas uſque, hoc eſt, ad perfectiſſimum ſolutionis gradum deducit Trajectorias omnium generum curvarum, quæ celerrimo deſcenſui inſerviunt; ſuppoſita nempe quacunque accelerationis lege.

Sit recta verticalis A C R axis communis omnium brachyſtochronarum, ſeu curvarum celerrimi deſcenſus A M B, ad hanc univerſalem accelerationis legem accommodatarum, ut curvæ datæ cujuſvis A H E applicata C H deſignet velocitatem acquiſitam mobilis ex altitudine A C delapſi. Demonſtravimus in Actorum anno 1697, p. 208 * [poſitis $AC = x$, $CM = y$, TAB. XXXV. *Fig.* 7.

CH

† Supra N°. LII, pag. 271. *Tom. I.* * N°. XXXVII, pag. 191. *Tom. I.*

CH $= t$, arbitraria $= a$] curvæ celerrimi descensus AMB naturam hac exprimi æquatione $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$; in qua si successive mutetur a, prodibit series infinitarum hujusmodi curvarum AMB: ex quibus singulis si abscindantur arcus AB, inter se isochroni, seu qui æqualibus temporibus percurruntur, curva BBB, terminans hos arcus, nobis dicta *Synchrona*, omnibus, ut docui, brachystochronis AB normaliter occurrit in punctis B; adeo ut Synchrona in quavis accelerationis lege sit ipsa earum Trajectoria.

L X I V.

Quocirca ad construendam Trajectoriam pro ejusmodi secandis quarum æquatio $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$, res huc redit, ut ex illis singulis resecentur arcus isochroni, id quod concessis quadraturis ita facile peragitur. Dividendo curvæ AM elementum Mm, quod est $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = adx : \sqrt{(aa - tt)}$ per velocitatem acquisitam CH [t], habetur elementum temporis per arcum AM, seu tempusculum per Mm, quod est per consequens $= adx : t\sqrt{(aa + tt)}$, atque ipsum tempus per arcum AM $= \int (adx : t\sqrt{(aa - tt)})$. Hinc sequitur, quod si in serie curvarum secandarum sumatur quælibet AMB, cui respondeat a tanquam ipsius parameter, construaturque super axe AR curva nova cujus applicatæ sint $a : t\sqrt{(aa - tt)}$, in qua capiatur area æqualis datæ magnitudini C, erit, producendo ultimam ejus applicatam donec secet curvam AMB, punctum intersectionis in Trajectoria quæsita. Si jam alia sumatur AMB cui alia conveniat a, fiatque inde alia curva nova, in qua pariter construatur area datæ magnitudinis C, dabit ultimæ ejus applicatæ & assumptæ curvæ AMB intersectio aliud punctum Trajectoriæ quæsitæ, atque sic quot libuerit puncta in illa determinabuntur. Mutata magnitudine arbitrariæ C, eodemque observato processu, nova construetur Trajectoria, & ita pro lubitu quotcunque Trajectorias construere licebit.

L X V.

L X V.

In hac methodo fundamentum habet prima Patris mei constructio Problematis propositi curvarum secandarum $dy = x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ quam communicavi in *Actis* 1718 p. 253 *. Facta enim collatione hujus æquationis cum generali $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$, statim patet illam hujus esse duntaxat casum particularem, cum quod generaliter hic dicitur t, ibi sit x^n. Adeo ut curvæ secandæ exempli propositi nihil aliud sint quam curvæ celerrimi descensus, accommodatæ ad eam accelerationis hypothesin, qua supponitur celeritates acquisitas esse proportionales ipsis x^n, seu potestati cuicunque altitudinum verticalium, hoc est, curvam celeritatum AHE esse ex parabolarum genere, quo solo casu curvæ celerrimi descensus AMB evadunt inter se lateraliter similes, proindeque ex consideratione hujus similitudinis admittunt tam facilem, ut supra vidimus, Trajectoriæ suæ constructionem. Pro alia vero hypothesi ipsius t, qua curvæ AMB dissimiles fiunt, res non æque facilis erat; seposita nimirum consideratione celerrimi descensus. Præstitit id autem Patruelis meus in Schediasmate suo non ita pridem ad *Acta* misso †, in quo docuit modum construendi Trajectoriam curvarum, quarum æquatio est hujusmodi $dy = dx : \sqrt{(AX - 1)}$, ubi A est quantitas data per parametrum variabilem a, & constantes; sed X est quantitas data per x & constantes. Licet id directe invenerit, & haud dubie ex fonte aliquo in superioribus indicato; nihil tamen facilius est quam ostendere hanc æquationem $dy = dx : \sqrt{(AX - 1)}$ re ipsa non differre a nostra $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$. Est enim $tdx : \sqrt{(aa - tt)} = dx : \sqrt{(aa : tt - 1)} = dx : \sqrt{(aa \times \frac{1}{tt} - 1)}$. Unde liquet, quod in una æquatione est A in altera dici aa, & quod in una est X in altera esse $1 : tt$, adeo ut t sit $1 : \sqrt{X}$. Quocirca dico curvas AMB hac æquatione expressas $dy = dx : \sqrt{(AX - 1)}$ esse curvas celerrimi descensus, quibus respondet curva celeritatum AHE, talis ut applicatæ HC sint $1 : \sqrt{X}$.

L X V I.

Consideremus jam curvas celerrimi descensus, quæ oriuntur ex supposita directione gravium ad punctum datum convergente.

* Supra pag. 290. † N°. CX. pag. 305. *seq.*

Potest quippe demonstrari directe & a priori, in universum verum esse, quod series talium curvarum ex communi puncto emanantium pro Trajectoria orthogonali habeat quamlibet ex suis Synchronis. Ex puncto R, quod repræsentet centrum gravium, ducta sit recta RA per commune initium A curvarum celerrimi descensus AMB. Sit AHE curva celeritatum, cujus nempe applicata quælibet CH, designet celeritatem acquisitam pro distantia RC, vel RM, postquam mobile ex puncto A quacunque vi descendendo ad eam distantiam pervenit: intelligo namque AFG & CM esse arcus concentricos descriptos centro R, illum per punctum datum A, hunc per quodlibet punctum M curvæ AMB, per quod pariter ducta sit recta RMF; concipiatur quoque BBB portio curvæ Synchronæ, quæ, ut dictum est, necessario ad angulos rectos trajiciet curvas AMB, ac per consequens earum erit Trajectoria orthogonalis.

TAB. XXXV. Fig. 7.

LXVII.

Oportet itaque scire, ex quo genere curvarum sint, in hac hypothesi, curvæ celerrimi descensus AMB. In hunc finem, supponendum est dari curvam velocitatum AHE; jam enim non agitur de ea invenienda ex data lege virium centralium, quod alibi dudum præstitum habemus. Sit igitur, nulla attentione adhibita ad legem virium centralium, curva AH talis, ut applicata CH exprimat functionem quamcunque datam ipsius RC, & hæc proinde velocitatem acquisitam in M. Nominatis jam RA, vel RF, $= 1$, RC, vel RM, $= x$, HC $= t$, AF $= y$, arbitraria $= a$; Per aliquam ex Methodis a nobis præscriptis, & ex lege uniformitatis deductis, pro inventione curvarum maximum minimumve aliquod præstantium, elicuimus, pro natura curvæ AMB, hanc æquationem $dy = \pm tdx : x\sqrt{(aaxx - tt)}$, quæ, per successivam variationem ipsius a, dabit seriem omnium ejusmodi possibilium curvarum AMB; harum igitur Trajectoria determinabitur construendo Synchronam BBB, per modum §. LXIV. explicatum.

LXVIII.

Scilicet, resectis ex singulis curvis AM arcubus AMB sibi invicem isochronis, puncta terminantia B erunt ad Synchronam, seu Trajectoriam quæsitam BBB. Verum per concessas quadraturas, arcus isochroni AMB nullo labore capiuntur; elementum enim Mm dividendo, ut §. LXIV factum, per velocitatem acquisitam t, obtinebimus tempusculum per Mm, quod erit $\pm axdx : t\sqrt{(aaxx - tt)}$, adeoque ipsum tempus per arcum AM $= \pm \int (axdx : t\sqrt{(aaxx - t)})$. Cetera peraguntur ut ibi docuimus.

LXIX.

Notare convenit, sub hac curvarum AMB æquatione $dy = \pm tdx : x\sqrt{(aaxx - tt)}$ illam alteram pro hypothesi distantiæ infinitæ centri gravium $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$ contineri, tanquam particularem casum, in quem proin facile convertetur, considerando quod arcus AF, CM, fiant lineæ rectæ perpendiculares ad AC; item quod RM censeri possit æqualis ipsi RA, hoc est $x = 1$, quodque jam $\pm dx$ sit elementum ipsius AC, & t ejusdem functio; his enim substitutis abibit $dy = \pm tdx : x\sqrt{(aaxx - tt)}$ in $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$, ut fieri debuit, tempusque per arcum AM $= \pm \int (axdx : t\sqrt{(aaxx - tt)})$ fiet $\int (adx : t\sqrt{(aa - tt)})$, sicuti invenimus §. LXIV, quod utriusque solutionis bonitatem confirmat.

LXX.

Ex hisce discimus, quomodo Trajectoriæ per quadraturas construi possint illarum omnium curvarum, quarum ordinatæ in aliquo puncto coeunt, & quarum natura definitur per hanc generalem æquationem $dy = dx : \sqrt{(AX - xx)}$, ubi per X functio quælibet data ipsius x, seu ipsius RM, & A functio parametri variabilis denotatur. Quoniam enim $tdx : x\sqrt{(aaxx - tt)}$

— $tt) = dx : \surd\,(aa \times \frac{x^4}{tt} - xx)$, patet utique ſcribi poſſe A pro aa & X pro $x^4 : tt$, atque adeo curvas deſignatas per hanc æquationem $dy = dx : \surd\,(AX - xx)$ non eſſe alias quam curvas celerrimi deſcenſus, in quibus velocitas acquiſita HC, vel t, eſt $xx : \surd X$, & arbitraria variabilis a eſt $\surd A$.

L X X I.

Quod ſupereſt, Curioſorum in gratiam propono ſequens Problema haud inelegans, cujus ſolutionem a Patre meo feliciter erutam alio tempore aperiam; expectaturus interim, ac viſurus, num quis ex Geometris vadum tentare, & ſi quam invenerit enodationem, eam nobiſcum communicare, aut ſaltem ſe inveniſſe publice indicare voluerit.

P R O B L E M A.

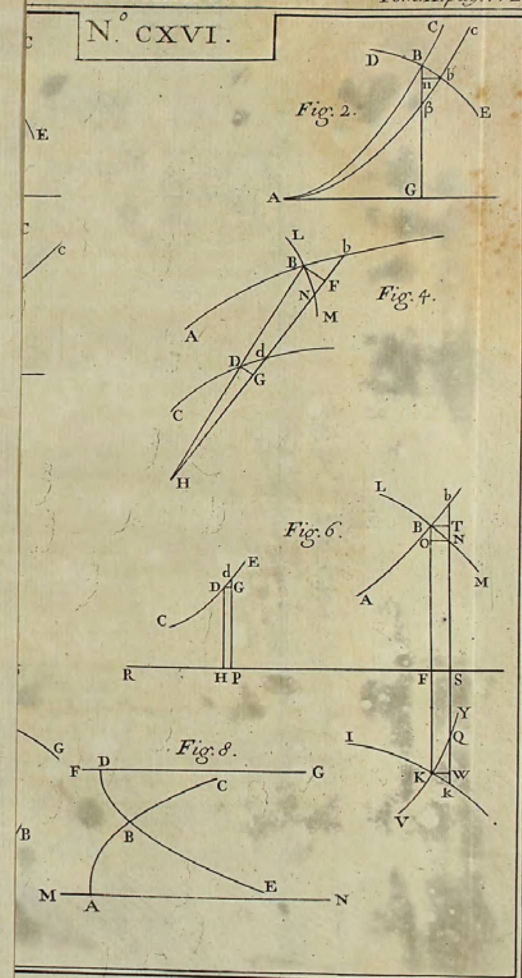
TAB. XXXV. Fig. 8. *Intra duos axes parallelos MN & FG poſitione datos, invenire & conſtruere curvam ABC, eandemque DBE, ſed inverſo ſitu poſitam; ita ut alterutra, vel utraque mota ſecundum axem ſuum, motu ſibi ſemper parallelo, curvæ ABC & DBE ſecent conſtanter ſe mutuo ad angulos rectos; hoc eſt, ut ſecandæ & ſecantes ſint curvæ eædem.*

Significamus in anteceſſum infinita genera curvarum, tam algebraicarum, quam tranſcendentium, ſatisfacere huic Problemati, & quidem dari duas quaſdam Geometris non ignotas, adeoque vel inventu, vel divinatu faciles; ſed petimus alias ex utraque curvarum claſſe: algebraïcas tamen præ cæteris deſideramus.

Rogamus inſuper Geometras, ut exhibeant talem aliam curvam ABC, quæ ſe ipſam in ſitu inverſo DBE poſitam, & modo antedicto ultro citroque motam, conſtanter ſecet in angulo, non quidem recto, ſed in alio quolibet dato; hoc eſt, ut angulus interſectionis EBC ſit cuivis dato æqualis. Quod ſi curva algebraica non detur generali huic conditioni ſatisfaciens; acquieſcemus exhibita nobis duntaxat curva tranſcendente, ſed per quadraturas conſtruenda: hoc enim infinitis modis præſtari poſſe ex ſolutione Paterna, ſuo tempore edenda, patebit.

FRAG-

Tab. XXXV. Tom. II. pag. 472.



ıtique ſcribi poſ-

ras deſignatas per
) non eſſe alias
elocitas acquiſita
bilis *a* eſt $\sqrt{A}$.

ſequens Problema
er erutam alio tem-
quis ex Geometris
ām nobiſcum com-
luerit.

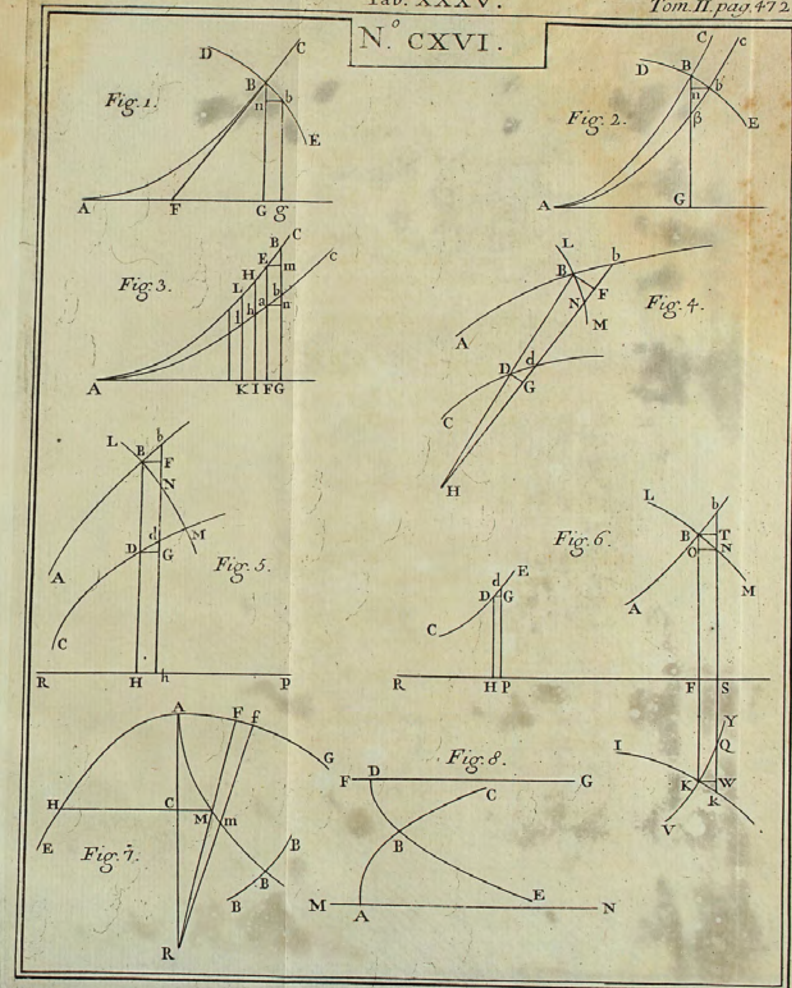
os, invenire & conſ-
u poſitam; ita ut al-
ſibi ſemper parallelo,
gulos rectos; hoc eſt,

m, tam algebraica-
mati, & quidem da-
vel inventu, vel di-
n claſſe: algebraïcas

liam curvam ABC,
o antedicto ultro ci-
uidem recto, ſed in
EBC ſit cuivis da-
erali huic conditio-
kat curva tranſcen-
nfinitis modis præſ-
a, patebit.

FRAG-

Tab. XXXV. Tom. II. pag. 472.



B

De l'

M

ON est c
BERNO
d'être Plagiai
de ces Problê
dé que ceux
teur ait eu d
& il n'est pa
expresse de to
écrit avant lu
nus. Mr. B
plaindre de l'
clination qu'i
mention de l
sactions Philos
L'Auteur s'
de faire ment
l'auroit engag
tions qui se tr
jugé à propos
de la Voile
données par
emprunté de
Problèmes ; c
ticuliers, quo
L'Auteur a c
Joan. Ber

N°. CXVII.

FRAGMENT

De l'Extrait du Livre de M^R. Taylor

Intitulé

Methodus incrementorum directa & inverſa;

donné dans la Bibliotheque Angloiſe,

Tom. IV. Part. 2.

ON eſt obligé de juſtifier ici l'Auteur de l'imputation, dont Mr. Bernoulli l'a chargé, dans le *Journal de Leipſic* de l'année 1716, d'être Plagiaire, pour n'avoir pas marqué expreſſement que quelques uns de ces Problèmes avoient été déja réſolus par lui. Mais on eſt perſuadé que ceux qui liront ſon Livre ne s'imagineront jàmais que l'Auteur ait eu deſſein de faire paſſer pour ſien tout ce qu'on y trouvera; & il n'eſt pas raiſonnable d'attendre d'un Autheur qu'il faſſe mention expreſſe de toutes les lumiéres qu'il peut avoir emprunté de ceux qui ont écrit avant lui; principalement lorſque leurs Ouvrages ſont ſi bien connus. Mr. Bernoulli en particulier n'a pas le moindre ſujet de ſe plaindre de l'Auteur à cet égard; puiſqu'il a ſuffiſamment montré l'inclination qu'il avoit à lui rendre juſtice, par la maniére dont il fait mention de lui dans l'Extrait qu'il donna de ſon Livre, dans les *Tranſactions Philoſophiques*, N°. 345. *Biblioth. Angl.* Tom. IV. pag. 534.

L'Auteur s'eſt renfermé uniquement dans ſon ſujet; il a évité exprès de faire mention de ce qui avoit été fait par les autres; parceque cela l'auroit engagé néceſſairement à remarquer pluſieurs fautes & imperfections qui ſe trouvent dans leurs ſolutions. C'eſt pour cela qu'il n'a pas jugé à propos de parler des ſolutions, qui ont été données, des figures de la Voile & de la Voute, non plus que de celles des Iſopérimétres donnéees par Mr. *Jacob* Bernoulli, quoique l'Auteur lui-même eût emprunté de ces ſolutions l'analyſe dont il ſe ſert pour réſoudre ces Problèmes; ces ſolutions ayant le défaut d'être reſtraintes à des cas particuliers, quoique les Problèmes ſoient propoſés en termes généraux. L'Auteur a cru que ſon ſilence, ſur la ſolution du Problème des Iſopérimètres donnée par Mr. *Jean* BERNOULLI dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 1706, * seroit regardé comme une faveur faite à l'Auteur de cette solution; parceque, s'il en eut fait mention, il n'auroit pû se dispenser de censurer trois ou quatre fautes très-considérables qui s'y rencontrent. Il n'étoit pas possible que l'Auteur marquât que Mr. *Jean* BERNOULLI & lui s'étoient servis des mêmes principes, sans autre différence que celle des mots, dans la recherche du centre d'Oscillation; parce que la solution de Mr. BERNOULLI n'a paru que l'année 1717, dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* pour 1714 †, cette prémiére datte étant postérieure de trois années à celle de la Publication du Livre de l'Autheur, sans compter que son Manuscript avoit été en la possession de la Societé Royale, environ un an avant ce temps-là, c'est-à-dire depuis le mois d'Avril 1713.

* Cy-dessus N°. LXXV. pag. 424. *Tom.* I. † Voiez cy-dessus N°. XCVI. pag. 168.

N°. CXVIII.

NICOLAI BERNOULLI

Joh. Filii,

Responsio ad TAYLORI Querelas.

Act. Erud. Lips. 1720. Jun. p. 279.

CUm hæc scriberem, † opportune incidi in Tomum IV alicujus Diarii litterarii, Amstelodami idiomate Gallico editi, sub titulo *Bibliothecæ Anglicæ*, in cujus parte secunda, pag. 523, & seqq. reperi recensionem *Methodi incrementorum Auctore* BROOK TAYLOR, ab ipso Auctore, ut videtur, transmissam. Quædam in illa offendi ad Patrem meum spectantia, sed minus candide prolata; quæ proin in gratiam veritatis nonnullam discussionem merentur. Pag. 534 quæritur sibi a Patre meo plagii crimen imputari in *Act. Lips.* A. 1716. Si Lector consulere voluerit *Acta* ista illius anni; inveniet non nisi duo schediasmata de quibusdam Patris mei inventis, quæ, curante Celeb. HERMANNO, in lucem prodierunt; sed nullam omnino mentionem ibi factam reperiet de Cl. TAYLORO. Quod si vero hic Vir digitum forte intendat ad *Epistolam* illam Anonymi *pro Patre meo* scriptam, atque eodem anno in *Actis*

† Enodationem alicujus Problemati, a Cl. HERMANNO propositi.

Actis editam, in qua scriptor TAYLORUM, juxta nonnullos alios, in censum refert eorum, qui dum *Bernoullianis* aliisque inventis utuntur, Autorum nomina vel dissimulant, vel non ipso loco quo fit usurpatio allegant; de hoc utique Pater respondere non tenetur: quousque enim contenta illius *Epistolæ* approbet, vel improbet, ipse jam monui in *Actis* 1718, p. 261 & 262. Utrum vero Anonymus *Epistolæ* scriptor hac in parte rem acu tetigit, nolumus decidere, sed relinquimus in medio.

Pergit Doctissimus TAYLORUS, vel qui ejus nomine loquitur recensor, pag. 535, dicitque, quod data opera evitaverit occasionem commemorandi quid in eadem materia, quam pertractavit, alii dudum antea præstiterint; quia alias, ut causatur, non potuisset præterire plures errores & imperfectiones in eorum solutionibus reperiundos; quod hanc ob rationem noluerit attingere solutiones ab illis datas figuræ veli, fornicis; ut & solutionem isoperimetrorum exhibitam olim a Patruo meo *Jacobo*, a quibus tamen, quod ingenue fatetur TAYLORUS, analysin suam mutuatus fuerit. Quinam sint isti errores & imperfectiones in illis solutionibus, quibus propterea silentio suo tam generose pepercerit, mihi equidem non constat; si unam excipias solutionem catenariæ olim a Cl. GREGORIO editam, quæ puro puto paralogismo nititur, ut jam pridem est ostensum. Interim si imperfectionem nominet, quod subinde solutiones illæ non tam generales fuerint, quam esse potuissent; nulla certe unquam solutio perfectionis nomen merebitur, quia nulla tam generalis est, quin ad generalitatem aliquid addi posset; cum præsertim facile sit inventis aliquid addere. In his autem, si volumus æquos agere rerum Judices, non tam ad solutiones quam ad solutionum methodos respiciendum nobis erit; atque attendendum, annon solutionum Auctores æque facile eas extendere potuissent, si animum advertissent. Qui seçus judicat, exponat rationes, ob quas putet sibi quam primis inventoribus & solutoribus facilius fuisse inventa aliena, ad quæ forsan ipse nunquam pervenisset nisi hi glaciem fregissent, promovere: si vero ita judicandi rationes habeat nullas; inani quam de se concepit opinioni plus tribuere videbitur quam æquitati.

Si Recensori credimus, p. 536, Cl. TAYLORI gratiæ & favori acceptum est ferendum, quod in libro suo præterierit silentio solutionem problematis isoperimetrici, editam in *Commentariis Acad. Reg. Scient.* 1706 *; quoniam si ejus meminisset, sibi non potuisset temperare, quin indicasset tres quatuorve errores ibi commissos, & [si Diis placet] gravissimos. Sed quid opus ut lapsus leves tanta cum pompa exaggeret? postquam Pater meus illius solutionis Autor, aliunde monitus, eundem lapsum non modo protinus ipse detexit, sed & pro candore suo publice dudum agnovit, emendavitque; ostendens illum ex sola quadam ina-

* Supra N°. LXXV. *Tom.* I. pag. 424.

inadvertentia ſubrepſiſſe; quem autem mirum in modum compenſavit communicata Methodo nova iſoperimetrorum citra calculum ſolvendorum, quod incredibile videbatur illis qui antea per longas & intricatas *Patrui* & TAYLORI analyſes velut exterriti fuerant. Videſis *Act. Lipſ.* 1718. * *Menſſ. Jan. & Febr.* quo loco videre eſt quoque aliam methodum, Paternæ in multis ſatis ſimilem, quam Cl. HERMANNUS noſter communicavit, poſtquam audiviſſet talem a Patre miſſam jam perveniſſe ad manus *Lipſienſium*, editionem ejus tamdiu protrahentium, donec *Hermanniana* tandem parata & tranſmiſſa ſimul edi poſſet: quod indicandum cenſui, ne quis miretur, qui fieri potuerit, ut duo iſta ſcripta de eadem materia ab Autoribus tam longo intervallo a ſe invicem ſeparatis, eodem tamen tempore in lucem prodirent.

Cl. TAYLORI Patronus Recenſor, eadem pagina 536, modo admodum lepido, neque autem valde ſincero, a Cliente ſuo amoliri conatur ſuſpicionem plagii. En quomodo: Poſtquam Parentis mei nova Theoria de Centro Oſcillationis † comparuiſſet, non tantum in *Commentariis Acad. Reg. Scient.* pro anno 1714, qui, quod fateor, nonniſi anno 1717 lucem aſpexerunt, ſed etiam, quod bene notandum, in *Actis Lipſ.* Menſe Junio anni 1714, quæ *Acta*, menſtruatim diſtribui ſolita, longe lateque mittuntur, atque ita mature ad manus Cl. TAYLORI, qui, ut ex hac ipſa libri ſui recenſione conſtat, *Acta* iſta diligenter evolvit, pervenire potuit præfata Patris Theoria; anno ſequenti demum, nempe 1715, prodiit in publicum Taylori Libellus *de Methodo incrementorum*, in quo conſpicitur modus inveſtigandi centrum oſcillationis, iiſdem prorſus, quantum per obſcuritatis peplum perſpicere licet, principiis inædificatus, quibus Parens meus in ſua Theoria jam antea uſus fuit. Sunt inter ſagaciores Mathematicos, qui ſuſpicantur, teſtibus literis quibuſdam privatis, *Taylorianam* hanc inveſtigationem mutato veſtitu ex *Bernoulliana* fuiſſe enatam.

Interim quamvis ea de re nec Pater, nec quiſquam alius Cl. TAYLORO lites moverit, ejus tamen Patronus haud ægre olfaciens tacita Virorum intelligentium judicia, prævenire illa conatur atque delere, dicendo *non fuiſſe poſſibile ut moneret* TAYLORUS, *principia ſua in quibus fundata eſt nova iſta inveſtigatio centri oſcillationis jam ante ſe fuiſſe inventa & in uſum vocata a* Joh. BERNOULLIO: quænam autem impoſſibilitatis hujus ratio? ad hoc reſpondet Recenſor, *quia ſolutio* Bernoulliana *comparuit in* Commentariis Acad. *pro anno* 1714, *qui ipſi vero nonniſi an.* 1717 *in lucem venerunt*, & ut efficacior ſit gravis ſcil. hæc ratio, ſubjungit ſtatim, *hunc annum, nempe* 1717 *tribus annis poſteriorem eſſe anno quo publicatus fuerit Liber* Taylorianus. Fuit autem impreſſus anno 1715, adeoque citius non publicatus: Nunc igitur computent Ari-

thmeti

* Supra N°. CIII. pag. 235.   † Supra N°. XCVI. p. 168.

thmetici, dicantque nobis, num annus 1715 tribus annis præcedat annum 1717: ſed tranſeat cum cæteris erroribus. Vellem hoc unicum, ut recte probaretur prætexta *impoſſibilitas*. Quid enim, ſi ſolutionem *Bernoullianam* ediſcere non potuit TAYLORUS ex *Commentariis Academicis* ante annum 1715, utpote nonniſi anno 1717 in publicum emiſſis; quid, inquam, impedit quominus eandem videre potuerit jam divulgatam in *Actis Lipſ.* menſe Junio anni 1714? ſed hunc ſcrupulum nobis tollere non curat Recenſor, tametſi bene noverit hæc *Acta* a TAYLORO legi, adeoque ſolutionem Parentis mei illi viſam eſſe, vel [quod ad ſuſpicionem excitandam jam ſufficit] videri potuiſſe ante editionem libri ſui. Nec eſt quod inſinuet Recenſor, Librum iſtum, antequam prelum ſubiret, per annum manſiſſe depoſitum apud Societatem Reg. Londin. Hoc, etiamſi maxime verum eſſet; annon vel durante hoc tempore, Cl. TAYLORUS, qui illuſtriſſimæ hujus Societatis fuit Secretarius, adeoque ad Archiva & ſcrinia aditum habuit, vel poſtea, cum ad prelum liber manuſcriptus extraditus eſſet, ei demum inſerere & infarcire potuit ſchedam de centro oſcillationis.

Agentes hic de mentione facienda eorum quæ jam ante ab aliis fuere præſtita, ſuum cuique libenter tribuimus; quamobrem hac occaſione monere debemus quod reſpicit magnum NEWTONUM. Poſtquam ſcilicet Pater meus in *Actis Lipſ.* A. 1719 M. Maio † expoſuiſſet ſolutionem maxime generalem Problematis ſibi a *Scoto* quodam propoſiti, de invenienda linea curva quam deſcribit projectile uniformiter grave in aëre uniformiter denſo, ſuppoſita reſiſtentia in duplicata, imo in quavis multiplicata ratione velocitatis; ſubjunxit conſtructionem facillimam, pro caſu reſiſtentiæ in ſimplici ratione velocitatis; per quam oſtendit dari pro curva quæſita logarithmicam ordinariam, vel etiam ex hac dependentem, quæ propius conſiderata etiam ipſa logarithmica eſſe deprehenditur, ſed cujus applicatæ obliquæ ſunt ad axem. Hanc conſtructionem autem, dum prædicabat multo ſimpliciorem quam *Newtonianam*, quæ extat in *Princ. Phil.* Lib. II. Prop. 4, utpote quæ ſit perplexa & operoſa; ſciendum eſt attendiſſe ad eam, quæ habetur in prima editione; quam forte fortuna inſpexit, licet utramque ad manus habuerit, non cogitans in nova editione aliquid amplius ea de re inveniri. Dein vero monitus, conſuluit quoque novam editionem, ubi, quod nunc per me ingenue fatetur, obſervavit Illuſtr. NEWTONUM ex prima illa ſua conſtructione eleganter deduxiſſe eandem logarithmicam; cujus inventionis anſam haud dubie nactus eſt ex viſa ſolutione *Hugeniana* in libro *de Cauſa gravitatis*, qui liber prodiit demum poſt editionem primam *Princip. Phil. Nat.* Cæterum eadem ingenuitate Pater meus agnoſcit, quod quædam ex Theorematibus ſubjunctis alteri ſuæ Solutioni, in *Actis M. Junio* ejuſdem anni

 editæ,

† Supra N°. CXIII. pag. 399.

editæ *, Problematis analytici a Cl. TAYLORO Geometris propofiti, facile fluant tanquam corollaria ex nonnullis formulis *Newtonianis* contentis in Libello vere aureo *De quadratura curvarum*; id quod nonnifi dimiffo fchediafmate animadvertere licuit: fcire tamen volumus Lectorem ex fonte longe alio petita effe Theoremata illa, quam quo ufus eft fummus NEWTONUS ad condendas fuas formulas. Quamvis autem fint generalia, erunt tamen ut fieri folet [nam nulla regula fine exceptione] quidam cafus particulares, ad quos unius vel alterius Theorematis applicatio fieri nequit. Interim hujufmodi exceptiones, fi quæ occurrunt, non magis derogant univerfalitati Theorematum, quam derogaret cafus quantitatis inquadrabilis $\int x^{-1} dx$ veritati Theorematis hujus univerfalis, [in quo cafus ille continetur] quod nempe $\int x^{n} dx$ fit algebraice quadrabilis. Hoc monendum duxi, ut objectiones prævenirem.

N°. CXIX.

APOLOGIA

D. BROOK TAYLOR, J. U. D. & R. S. Soc. contra V. C. J. *Joh.* BERNOULLIUM, *Mat. Prof. Bafil.*

Philof. Tranfact. 1719. N°. 360. *Art.* 2. p. 955.

PAcis & concordiæ ftudiofo fatius effet injurias vincere ferendo, quam odiofas contentiones obire ulcifcendo. Verum cum patientia noftra pro ignavia habetur, filentium pro confeffione criminis, & nuperam calumniam jam nova fequitur contumelia; omnino refpondendum eft, ne nobis pfis deeffe videamur. In *Epiftola pro eminente Mathematico D. J.* BERNOULLIO, *Actis Lipfienfibus* An. 1716 inferta *, plagii reus fiftor fequentibus verbis: *Hoc nihil novi eft in quibufdam Anglis qui fibi folis licere putant aliorum inventa tanquam fua impune ufurpare; quando ipfi Hominefque Deofque invocant, ubi vident, vel faltem videre arbitrantur, Extraneos in fuorum inventa manus inferre. Exempla funt quorundam, ut* CHEYNÆI, DES HAYES, TAYLORI, *aliorumque, qui paffim inventis* BERNOULLII *funt ufi, alienifque, vel nulla prorfus facta mentione Authoris, vel*, &c. Palam eft ab ipfo BERNOULLIO promanaffe hanc accufationem. Nam in *Actis Lipfienfibus* An. 1718 per filium fuum fatetur fe res ipfas in illa Epiftola contentas quoad

* Supra N°. CXIV. pag. 417.   * Menfe Julio pag. 296.

quoad maximam partem amico alicui perfcripfiffe. Invidiam equidem prædictæ calumniæ a fe amovere follicite ftudet, atque transferre in vicarium illum fuum; cum ipfe profitetur fe non approbare quæ in alios durius dicta cenferi poffunt. Sed admodum imperfecta eft hæc purgatio. Nam calumniæ funt, quæ durius dicta vocat. Ait fe dicta illa non approbare: Sed improbaffe neceffe fuit. Teftimonium denique eft pro fe teftantis. Autorem illum Anonymum citaffe oportebat, ut cum ipfo agere liceret. Sed is adhuc latitat. Quam vere autem, & ex animo, fe durius dicta non approbare videatur, conftare quodammodo poteft ex fequentibus, quæ de me ipfe profert, proprio fuo nomine, nulla ufus perfona *. TAYLORUS *Geometra infignis & acutus, qui ad profundiora noftra feliciter penetravit, tefte ipfius Libro* de Methodo incrementorum, *probe fentiens impeditam nimis analyfeos fraternæ prolixitatem, eamque in compendium contrahere, ac fimul generaliorem reddere nonnihil volens, tantam rei affudit obfcuritatem, [qua in aliis quoque brevitatem affectans impenfe delectari videtur] ut dubitem quemquam fore etiam inter perfpicaciores, qui ubique & hic imprimis mentem Viri affequatur, imo etiamfi aliunde rem cognitam habeat. Ut jam nihil dicam de ipfo calculo, pro more ejus, concifo quidem & contracto, fatis tamen adhuc longo & intricato, fi quis fingula ejus capita minutim perfequi velit; præterquam quod cum Fratre meo ad tertias quoque fluxiones excurrat.* Sit fane liber ille meus nonnihil obfcurus: Difficile eft in re fere nova, & ab ufu communi aliquantum remota, non effe obfcurum: fed maxime obfcurum oportet effe librum, in quem illa omnia vere dicantur. Et fi vere dicantur, tamen fine ulla omnino caufa talia dixiffe, ab ingenuis moribus prorfus alienum eft, & mera contumelia.

Sed audio BERNOULLIUM de exordio conquerentem, quo nuper ufus fum, in folutione Problematis *Leibnitiani in Tranfactionibus Philofophicis* edita *. Stylum acriorem reprehendit quam virum bene moratum deceat; item nimium contemptum Extraneorum. Quæ liberius effatus fum, hæc funt: *fi nondum viderint* [fautores LEIBNTII] *quomodo ex illa* [ex anteriori nempe folutione generali] *æquationes fint deducendæ, id profecto illorum imperitiæ tribuendum erit.* Hæc fateor paulo durius fonant. Sed fi ad caufam attendas, contumelia vacant. Fautores LEIBNITII (non omnes intelligo, fed BERNOULLIUM tantum, & focios ejus anonymos nobis infenfos] univerfos Anglos indigne tractarunt. Solutionem illam generalem, cum non intelligerent, derifui habebant. In injuriofos & derifores me liberius explicui; contumelia non eft. Sed ubi ille contemptus Extraneorum? Neminem ego nominatim citavi: De Fautoribus LEIBNITII fum folum locutus. Sed abfit

* Supra N°. CIII. pag. 237. 238.   † Supra N°. CVII. pag. 281 feq.

abſit ut omnes deſignatione illa omnino intelligerem, quocunque modo cauſæ LEIBNITII faventes; tanquam ipſe cauſæ *Newtonianæ* eſſem tam pertinaciter addictus, ut alios omnes odio habeam. Sed controverſia iſta NEWTONUM inter & LEIBNITIUM nihil ad me. Solos intellexi Fautores illos qui in Anglos eſſent infenſi, qui me nominatim calumnia provocarunt; BERNOULLIUM iterum dico, quem Principem agnovi cauſæ iſtius, ſocioſque ejus anonymos, vel veros, vel fictos. Hæc apertius dico, ne alii de noſtra in alios contumelia immerito querantur. In immerentes injuria eſſet; in BERNOULLIUM non eſt. Sed ad ſuperiora illa redeo.

Plagii accuſor, tanquam inventa BERNOULLII, aliorumque, uſurpaſſem ut mea. Exempla proferat; dabitur reſponſum. Plura ſane tractavi cum aliis communia, ſed inventis alienis ſum minime uſus, ut meis. Propria ubique uſus ſum analyſi [ſi Iſoperimetrum excipias, de quo poſtea dicetur;] at nullo modo dici poſſit me alios fraudaſſe. At Autores nominaſſe oportebat, unde artem hauſeram. Tanta me quidem tenet reverentia illuſtrium nominum, HUGENII, HOSPITALII, VARIGNONII, LEIBNITII, aliorum, ut neſciam an ex hac parte non peccaverim, cum mihi ipſi deeſſe videar, cui tantos viros citaſſe ſemper fuiſſet ornamento. Nimia fortaſſe ignavia erat, quod de rebus cum eſſem maxime ſollicitus, hiſtorias rerum penitus neglexerim. Sperabam tamen me in tantæ fraudis ſuſpicionem incidere non potuiſſe, cum illuſtriſſima tantorum virorum Opera eam facile detegerent. Quæ cum BERNOULLIO communiter tractavi Problemata ſunt de Funicularia, de Centro Oſcillationis, & de Iſoperimetris. In duobus primis ſum propria omnino uſus analyſi; in Iſoperimetro uſus ſum analyſi Autoris *Jacobi* BERNOULLII, Viri a rebus Mathematicis optime meriti; cui debitos nunc perſolvo honores. Solutio noſtra Problematis de Centro Oſcillationis, cum amicis meis communicata eſt uſque ab initio anni 1712, ut teſtes poſſum citare Epiſtolas autographas KEILII noſtri. Liber item noſter erat penes Societatem Regiam, & cum omnibus fere noſtris Mathematicis communicatus, uſque a Menſe Aprilis Anni 1714; quod hic monitu neceſſarium duxi, ne & ſolutionem illam ſibi vindicet BERNOULLIUS; cujus ſolutiones duæ extant eodem Anno editæ; quarum poſterior cum noſtra, quoad principia, tam mire conſentit, ut jurares ab eodem homine eſſe utraſque inventas. Materia de Iſoperimetris excogitata primum eſt a *Jacobo* BERNOULLIO, ſicut jam innuimus. Ejus extat ſolutio cum analyſi, in *Actis Lipſienſibus* anni 1701 *. Extat analyſis Fratris in *Commentariis Regiæ Scientiarum Academiæ*, Anni 1706. * Extat & ſolutio in Libro noſtro. De eadem ma-

teria

* Supra N°. CII. p. 214.

† N°. LXXV. pag. 424. *Tom. I.*

teria Commentarium nuper edidit BERNOULLIUS in *Actis Lipſienſibus* Anni 1718 † proximi. Ibi ne actum agere videatur, non meis ſolummodo, verum etiam fraternis ſolutionibus malevolus detrahere aggreditur; Fratri prolixitatem, mihi obſcuritatem objiciens. De novis illis inceptis nihil non magnum pollicetur; *& ope cujuſdam principii, ab uniformitatis lege, quam nemo hucuſque obſervavit, petiti*, rem totam, pene ſine calculo, nullo labore abſolvet. Sed neſcio quo fato fit, ut in hac materia de Iſoperimetris, BERNOULLIUS Deos omnes ſemper offendat iratos. Nam primo, priſtina illa analyſis ejus, a capite ad calcem, quaſi unum aliquod vitium maximum conſtituit: Secundo, quod tantum jactitat Principium, a lege uniformitatis, quam nemo hucuſque obſervavit [ſic enim ſtrenuus affirmat,] petitum, a me olim obſervatum eſt. Denique quam hic tanquam novam exhibet analyſin, tota mera fraterna eſt. Analyſin enim conſtituunt Præcepta, juxta quæ deinde inſtituitur calculus; qui non analyſis eſt, ſed inſtrumentum analyſeos. Præceptis ſemel poſitis, quivis facile calculum inſtituit, more quiſque ſuo; hic prolixius, ille magis concinne, prout unicuique faverit Minerva. Negandum non eſt, BERNOULLIUM calculum tandem concinnaſſe, & reddidiſſe elegantiorem; ſed tamen in analyſi fraterna fecit, non ſua. Nec dubitandum quin Frater, adhuc ſi vixiſſet, rem reddidiſſet non minus illuſtrem. Analyſin diximus in præceptis contineri; præcepta vero ſunt omnia fraterna. Nam quod curvæ quæſitæ arculum minimum tanquam ex tribus lineolis elementaribus compoſitum contemplatur, vel ipſo fatente a Fratre eſt: quod ex data longitudine arculi iſtius minimi quærit rationem differentiarum ordinatarum in Lemmatis ſuis, a Fratre eſt: quod rationem eandem denuo quærit, faciendo ut ſit areola naſcens, ex Functionibus [ut vocat] compoſita, vel maxima, vel minima, a Fratre eſt: quod denique ex duplici illa expreſſione ejuſdem iſtius rationis æquationem colligit qua curvæ quæſitæ natura definiatur, a Fratre eſt. Sed hæc ſolutionem conſtituunt. Ergo ſolutio mera fraterna eſt.

Dixi me olim uſum eſſe Principio illo, quod tanta cum oſtentatione ſibi arrogat BERNOULLIUS: Ex eadem una pagina, en duo exempla. In pagina 113 Libri mei hæc ſunt $m_{,} : R_{,} = m : R$; *ſed eſt* $m_{,} : R_{,}$ *novus valor ipſius* $m : R$, *unde eſt* $m : R$ *quantitas data.* Luce clarius eſt me, hoc loci, ex obſervata uniformitate, inter formulas $m_{,} : R_{,}$, $m : R$ concluſiſſe quod ſit $m : R$ quantitas data. Idem feci in ſequentibus. Pone $m_{,,}$:

 u

* Vid. Supra N°. CIII. p. 235.

$n R_{\prime} = m' : R_{\prime}$, *hoc eſt* $m n_{\prime\prime} n_{\prime} : R_{\prime} = m' n_{\prime} n : R_{\prime}$, &c. Ubi ut uniformitas appareret inter formulas $m n_{\prime\prime} n_{\prime} : R_{\prime}$ & $m' n_{\prime} n : R_{\prime}$ æquationem transformavi. Videtis, credo, quam feliciter penetraverim ad profundiora BERNOULLII. An hæc obſcura dicet?

Ad primam jam partem promiſſi pervenio, ut oſtendam priſtinam illam analyſin BERNOULLII eſſe omnino corruptiſſimam. Primo per ſubſtitutionem ſatis ridiculam, ex profundioribus ſuis neſcio quibus petitam, æquationem $FO \times \Delta RO = \Phi\omega \times \Delta\rho\omega$ transformat in hanc $FO \times \Delta PF = \Phi\omega \times \Delta\pi\Phi$; quod in caſu particulari [nempe quando functiones ſunt ut quadrata ordinatarum] huc redit, ut ſint ſimul $FO \times \Delta RO = \Phi\omega \times \Delta\rho\omega$ & $FO \times \Delta PF = \Phi\omega \times \Delta\pi\Phi$; unde conſit $PF : RO = \pi\Phi : \rho\omega$. Sed hoc impoſſibile eſt; quoniam eſt vel $PF \triangleright RO \triangleright \rho\omega \triangleright \pi\Phi$, vel $PF \triangleleft RO \triangleleft \rho\omega \triangleleft \pi\Phi$; quorum neutrum cum analogia expoſita conciliari poteſt. Nam ſi $PF \triangleright RO \triangleright \rho\omega \triangleright \pi\Phi$, per analogiam etiam erit $\pi\Phi \triangleright \rho\omega$ [propter $PF \triangleright RO$] contra hypotheſin; vel ſi $PF \triangleleft RO \triangleleft \rho\omega \triangleleft \pi\Phi$, per analogiam etiam erit $\pi\Phi \triangleleft \rho\omega$, contra hypotheſin. Secundo, parum ſcienter fingit curvaturam in F eſſe ad curvaturam in Φ ſicut eſt ΦO ad FO; cum nihil in hac tota Analyſi ſit quod privilegium illud vindicet puncto O potius, quam alio cuilibet puncto ω in arculo minimo $FO\omega\Phi$ ubivis ſumpto. Nec ſane Curvedo tam ridicule vult æſtimari. Tertio nimis imperite facit $mn = ddx$, $nl = ddy$, & $ml = dtddy : dx$, cum ſint $mn = \frac{1}{2} ddx$, $nl = \frac{1}{2} ddy$, & $ml = \frac{1}{2} dtddy : dx$. Denique, quod omnium peſſimum eſt, vitioſiſſimis hiſce principiis perfectiſſimam alligavit concluſionem. In Problemate primo dico, nam in ſecundo eſt talium parentum magis digna proles. Errores BERNOULLII veteres & exoletos me expoſuiſſe putatis. Non ita eſt, ipſe enim hæc habet: *Omnia, dudum ſepoſita, accurate rurſus excutiendo ad ſeveri examinis trutinam revocavi. Notandum autem ſolutionem primi Problematis in ſchediaſmate meo* Commentariis Acad. p. 235. *inſerto, rectiſſime ſe habere.* Errores ergo ſuos jam denuo adoptavit. Unde fortaſſe nunc quæret aliquis, Quo jure hic primas ſibi in ſublimiori illa analyſi tam obſtinata ambitione arroget; ut nemo ſit, qui in illa aliquid profecerit, quin continuo accuſetur ad profundiora BERNOULLII penetraſſe? Unde conſtet verum eſſe, quod quidam nuper affirmavit, Regulas extantes in Libro *de Analyſi infinite parvarum* a BERNOULLIO emanaſſe; quod laudes Excellentiſſimi *Marchionis* HOSPITALII ſint ſuo Præceptori tribuendæ? An hic ſit idoneus, qui alios docuerit regulas differentiandi differentias? Cum multis aliis, quæ ſigillatim enumerare

non eſt opus. Sed iſtis reſpondeat qui volet: nos in hiſce diutius non moramur.

Res ipſas expoſui, peroratione non utor; harum enim tædet. Nec ſi quidquam regeſſerit BERNOULLIUS, ulterius reſpondere neceſſe habebo. A contumeliis nos ſemel vindicare & jus & ratio poſtulat; ulterius non expedit.

N°. CXX.

M. JOHANNIS BURCARDI,

BASILEENSIS,

Epiſtola ad Virum Clariſſimum Brook TAYLOR, J. V. D. & R. S. B. Soc.

LEgi *Apologiam* tuam, Cl. TAYLORE, contra V. Cl. *Joh.* BERNOULLIUM, audivique illam non uno tantum loco typis fuiſſe excuſam. *Act. Erud.*
Londini bis prodiit, ſi non pluries; videlicet in *Tranſactionibus* Regiæ Societa- *Lipſ.* 1721. Maj. pag. 195.
tis, tum etiam in ſcheda peculiari; deinde ſemel ſaltem in Belgio; an alibi inſuper & quot linguis, præterquam Gallica & Latina, lucem aſpexerit, mihi nondum conſtat.

Operam dediſti indefeſſam, ut veniret ad notitiam exterorum quoque Mathematicorum.

Ex *Anglia* transfretaſti in *Galliam*, diſſeminaturus ibi, præſertim *Lutetiæ*, [hunc tui itineris ſcopum fuiſſe multi mecum opinantur] tua ſchediaſmata: exemplar unum, mittente Cl. VARIGNONIO, accepit Cel. BERNOULLIUS, mecumque communicavit.

Spe forſan lactabaris, Cl. TAYLORE, BERNOULLIUM noſtrum mire perculſum iri, ubi tuas legerit acerbas expoſtulationes, faſtidioſo contemtu aculeiſque virulentis refertas; ſed ſpem illam tuam inanem fuiſſe ex eo cognoſcere tibi licuit, quod Cl. BERNOULLIUS, cauſæ ſuæ fiſus, te per Cl. VARIGNONIUM ſollicitavit, ut ſibi adhuc aliquot duodena exemplaria tuæ *Apologiæ*, an *Invectivæ*, ocyus tranſmittere velles, ſancte promittenti, ſe illa per *Germaniam*, *Helvetiam*, & *Italiam* [in quas forſan mittendi occaſionem ipſe non habeas] fideliter diſtributurum. Prævidit namque, tuum ſecum agendi modum non poſſe non id efficere, ut apud omnes æquos rerum Judices fama *Bernoulliana*, quæ tibi ſudes eſt in oculo, altiores radices agat. Quis enim tuas nænias legendo non ſtatim animadverteret animum tuum invidia faſcinatum? Cl. BERNOUL-

LIUS te condecoraverat titulo *inſignis & acuti Geometræ*, aliisque occaſionibus te civiliter tractaverat; quin etiam per MONMORTIUM tuam ambiverat amicitiam. Sed quid, mi TAYLORE, pro hac humanitate repoſuiſti? Certe nihil, quam verba contemptum faſtumque ſpirantia: Scilicet tibi jam eſt BERNOULLIUS, ſi Diis placet, *imperitus* LEIBNITII *fautor*, *calumniator contumelioſus*, *malevolus detrectator*, *Princeps eorum qui univerſis Anglis ſunt infenſi*, &c. Quid, ſi talia iis rependis, qui humaniter te tractant; quid, inquam, illi abs te expectandum haberent, qui ſepoſita humanitate liberius de te loquerentur? Cl. BERNOULLIUS, qui neminem unquam aggreſſus eſt, nec niſi primus graviter laceſſitus quemquam offendit, poſſet utique cauſam ſuam ipſe contra te agere, atque te pro merito depexum dimittere; quid enim facilius quam injurias injuriis depellere? & quicquid in eum effudiſti, in ſinum tuum refundere. Sed non ita ſolet imitari lixas, & quam ſibi impoſuit legem, Vid. Act. Lipſ. 1718 pag. 262, ſe *nimirum nemini reſponſurum, qui conviciis tantum & aculeis voluerit pugnare*, ſtrictiſſime obſervabit, *ſecurus profecto*, ut in iiſdem Actis anni ſequentis pag. 218, monuit, *ſe quoque ſilente, maledicorum conatus in fumum abire, utpote a quibus ipſius exiſtimatio*, quam tantopere deſtructam cuperent, *minime dependeat.* *

Patere igitur, Vir Clariſſime, ut vices agam Cel. BERNOULLII noſtri, cujus humanitatem erga te obſervatam tam inhumaniter tractaſti. Amice reſpondebo, quod etſi non mereatur incommoda tua & faſtidioſa ſcribendi ratio, meretur ſaltem ingenii tui mathematici [utinam non tam ſupercilioſi] felicitas; hanc nos, nam & in hoſte virtus laudanda, quanti valet, æſtimamus.

Nomen quidem meum exprimere nolueram; non quod te reformidarem, ſed quia nullam inde quærebam laureolam: verum poſtquam, quibus titulis anonymos condecorare ſoleas, mecum perpendiſſem, ſententiam mutans illud appoſui: quamvis id tibi perinde eſſe debere exiſtimem, ſi non tam ad hominem, quam ad res ipſas reſpicere volueris: ſecus ſi feceris, atque ad injurias & convicia, tanquam ad arma tua confugeris, crede mihi, mi TAYLORE, eo ipſo demonſtratum dabis tua te cauſa cecidiſſe: nec te juvabit magnam affectare fidentiam, & erecta criſta deſpicere tuos adverſarios: rerum noſtrarum periti & æqui judices damnabunt barbaram iſtam pugnandi viam: nos vero non magni pendimus, quid in Patria tua judicaverint quidam ex ſociis tuis, ſimili faſtu turgidi & livore in exteros occœcati; hi enim ſoli tibi credent, & quo vehementius in nos debacchaberis, eo promtius applaudent. *Neceſſe, eſt*, ut lepide habet QUINTILIANUS, *contentioſius loquaris, quod probare non poſſis, & affirmationem ſumit ex homine, quicquid non habet ex veritate.*

Tria obſervavi in ſcripto tuo, Clariſſime TAYLORE, quæ exprobras Cel.

* Supra pag. 395.

Cel. BERNOULLIO, & quæ tibi anſam dederunt uſque adeo in illum invehendi, illa ſunt hæc.

I. Locus in *Epiſtola pro eminente Mathematico D. J.* BERNOULLIO, *Actis. Lipſ.* A. 1716 inſerta pag. 307, qui ita ſonat: *Hoc nihil novi eſt in quibuſdam Anglis, qui ſibi ſolis licere putant, aliorum inventa tanquam ſua impune uſurpare, quando ipſi hominesque Deoſque invocant, ubi vident, vel ſaltem videre arbitrantur, extraneos in ſuorum inventa manus inferre. Exempla ſunt quorundam, ut* CHEYNÆI, DES HAYES, TAYLORI, *aliorumque, qui paſſim inventis* BERNOULLII *ſunt uſi, alieniſque, vel nulla prorſus facta mentione Auctoris, vel &c.*

II. Diſplicet tibi, quod in *Actis Lipſ.* A. 1718 pag. 18 * BERNOULLIUS de te, quem tamen, quod crimen ejus emollire poterat, vocavit *Geometram inſignem & accutum*, dixerit te, *ad profundiora ſua, aliorumque, feliciter penetraſſe.*

III. Male te habet, Vir Clariſſime, amica admonitio Cel. BERNOULLII de tua in ſcribendo obſcuritate, qua fiat ut ſcripta tua a *perſpicacioribus quoque Mathematicis vix intelligi queant* †.

Videbo nunc, an gravia adeo hæc ſint delicta, ut tam ferociter in illa animadverteres.

Quod quidem ad primum punctum attinet, quo haud obſcure poſtularis *Plagii*; fateor, de injuria tibi illata potuiſſe te conqueri, ſi id dixiſſet Cl. BERNOULLIUS, atque ſi tu eſſes innocens & probe te purgaſſes a plagii ſuſpicione, qua etiamnum vehementer gravaris. Sed præterquam quod Noſter reſpondere non teneatur de eo quod Author *Epiſtolæ pro eminente Mathematico* aſſeruit, cum præſertim jam publice per Filium ſuum declaraverit, ſe omnia, quæ in illa Epiſtola continentur, non approbare; hoc inſuper verum eſt, tantum abeſſe te gloriari poſſe de non uſurpatis aliorum inventis, ut jam temet ipſum habeamus confitentem plagii reum; nunc quippe fateri demum cogeris, te in *Iſoperimetro uſum eſſe analyſi Auctoris* Jacobi BERNOULLII, cujus tamen nomen reticueras. Num reliqua, quæ in Libro tuo *de Methodo incrementorum* poſt BERNOULLIUM noſtrum alioſque tractaſti, ut de funicularia, de centro oſcillationis, de curvatura lintei, &c. ſatis evincant, te propria, ſicuti jactas, uſum eſſe analyſi, judicent periti, quos libri tui obſcuritas a lectione ipſius non abſterruit. Neſcis forſan, mi TAYLORE, nobis certo conſtare de cauſa, ob quam gratia excideris apud Illuſtriſſimum NEWTONUM; ſcilicet huic quoque, quod ſuum eſſe credebat, ſurripere & cum illo de inventorum gloria contendere auſus fuiſti.

Si rem propius inſpiciamus, etiamſi maxime favere tibi vellemus, non tamen mehercle poſſumus quin rotunde dicamus, *Methodum* tuam *incrementorum*, præter tituli novitatem, vix novi quid continere; ſtatim nam-

* Supra pag. 237. 238. † pag. 238.

namque ac tu consideras quantitatum variabilium incrementa, tanquam finita, nihil inde efficis aliud, quam quod per Algebram ordinariam præstari potest; quomodo vero inde deriventur proprietates *differentialium*, aut, ut a vestratibus vocantur, *fluxionum*, id dudum ante te ostensum esse patet ex sectione prima *Anal. Infin. parvorum.*

Quæ habes de *fluentium fluentibus*, in quibus mirum quantum tibi places, nec illa certe sunt nova Cel. nostro BERNOULLIO. Quod tibi est x', designans fluentem ipsius x, illi olim erat $\int x$; quodque tibi est x'' denotans fluentem fluentis x', erat illi $\int\int x$; atque in genere quod tu intelligis per x notatum accentu acuto toties repetito, quotus fluentis est gradus, cujus exponens sit n, id Noster expresserat simpliciter per $\int^{n} x$, non secus ac differentiale ejusdem gradus notari solet per $d^{n} x$; cum vero quantitatem aliquam differentiare negative sit idem, quod summare vel integrare affirmative; atque vice versa summare vel integrare negative tantumdem sit, ac differentiare affirmative; pronum est colligere, quod $\int^{n} x = d^{-n} x$ & $\int^{-n} x = d^{n} x$. Ne autem putes, Vir Cl. talia nunc demum a nobis confingi, ut tuis, quæ jactas, derogemus; transcribam huc quædam excerpta ex litteris quibusdam *Bernoullianis* ad Illustriss. LEIBNITIUM, datis jam quinto anto finem sæculi superioris anno; quæ continent erunt tibi forte ingrata, sed tanto gratiora Lectoribus aliis, qui non invidia torquentur.

De his litteris [ne credas me ad testem mortuum provocare] testari potest Cl. VARIGNONIUS, Vir, ut nosti, incorruptæ fidei, cum quo nempe Cl. BERNOULLIUS specimen aliquod ex litteris illis de eadem materia communicavit, in aliqua Epistola scripta d. 24 Decembris 1697: Tuum est, ni credere mihi velis, ex ipso illo viro integerrimo quærere, quid de hac re sit; petenti non denegabit testimonium. En igitur verba BERNOULLII ad LEIBNITIUM in Epist. $\frac{8}{18}$ Junii 1695.

„ Eleganter observasti consensum inter numeros potestatum „ a binomio & differentialium rectangulo: haud dubie aliquid „ arcani subest. Nondum satis vacavit examinare, an quid in„ de pro summationibus elici possit. Videtur tamen quantita„ tem propositam differentialem cujusvis gradus integrari posse, „ eam primo differentiando more consueto, & dein sumendo „ tertiam proportionalem hujus novæ quantitatis differentialis ad „ differentialem propositam, consideratis interim d, d^2, d^3, d^4, „ &c. tanquam quantitatibus algebraicis, & non ut litteris tantum-

„ tummodo characteristicis; sic exempli gratia, tertia propor„ tionalis d^3 ad dd erit d; & d^4 ad d^3 erit dd, ac si littera d „ quantitatem algebraicam denotaret. In hunc finem esto pro„ posita differentialiis tertii gradus hæc $xd^3y + dxddy$, cujus „ integralis invenienda sit: differentietur ea more solito, & ha„ bebitur $xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$; posito jam d^0x pro „ x; sumatur, secundum regulam meam, tertia proportionalis „ ad $d^0xd^4y + 2dxd^3 \cdot y + ddxddy$ & propositam d^0xd^3y „ $+ dxddy$, quæ erit d^0xddy, hoc est $xddy$: dico itaque „ $xddy$ esse integralem quantitatis propositæ $xd^3y + dxddy$; „ quod quidem ante calculum primo intuitu patebat; juvat ta„ men ostendisse, quomodo per methodum eo perveniri pos„ sit. Nota, quod in hoc scrutinio litteræ ipsæ, quæ alias „ indeterminatas denotant, non considerandæ sunt ut tales, sed „ duntaxat quatenus afficiunt vel distinguunt ipsas d, dd, d^3 &c. „ Hoc modo quadratum ipsius d^3y hic non est d^3y^2 sed d^6y; „ cubus ipsius d^3y non d^3y^3 sed d^9y; idem puta de multiplica„ tione, divisione & extractione radicum; erit scilicet nova hac „ operandi ratione $d^2y \times d^3y = d^5y$; $d^7y : d^5y = ddy$; „ $\sqrt[3]{d^6y} = ddy$; item $ddy : ddy = d^0y = y$. Hoc pacto $x : x$ „ non est $= 1$, sed $= d^0x : d^0x = d^0x = x$. Porro quo„ niam d^{-m} idem quod $\int^{m}$, erit exempli gratia, $d^4y : d^5y =$ „ $d^{-1}y = \int y$, & $d^3y : d^2x = d^3yd^{-2}x = d^3y\int\int x$. Idem „ intelligendum, si plures sint indeterminatæ x, y, z &c. Ac„ cidit plerumque, sicuti prævideo, ut integrale quantitatis dif„ ferentialis propositæ hoc modo inventum exprimatur per se„ riem, quando præsertim proposita differentialis sua natura non „ est integrabilis: Exempli gratia integranda sit $xd^3y + 2dxddy$; „ si differentietur, prodibit $xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy$: ergo „ tertia proportionalis hujus ad illam more nostro sumta erit „ $d^0xd^6y + 4dxd^5y + 4ddxd^4y$) : ($d^0xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy$); „ instituta jam divisione continua, incipiendo a primo denomi„ natoris membro, habebitur hæc series $d^0xddy + dy\,dx -$ „ $d^0yddx + d^{-1}yd^3x - d^{-2}yd^4x + d^{-3}yd^5x$ &c. hoc est,

xddy

,, $xddy + dydx - yddx + \int y d^3 x - \int\int y d^4 x + \int^3 y d^5 x$ &c.
,, quæ proinde æqualis eſt $\int(x d^3 y + 2 dx ddy.)$ Alia inveni-
,, tur ſeries incipiendo diviſionem ab ultimo membro, nimi-
,, rum hæc, $2 d^0 x ddy - d^{-1} x d^3 y + d^{-2} x d^4 y - d^{-3} x d^5 y$
,, $+ d^{-4} x d^6 y$, &c. hoc eſt $2 x ddy - \int x d^3 y + \int\int x d^4 y -$
,, $\int^3 x d^5 y + \int^4 x d^6 y$, &c. quæ proin priori ſeriei æqualis eſt.
,, Alia adhuc abſcondita huc latent, quæ autem eruere & ſtu-
,, dioſius excolere nunc non vacat &c.

In ſubſequente Epiſtola, menſe Aug. 1695 data ad eundem virum Illuſtriſſimum, hanc materiam continuavit his verbis:

,, Memineris me ſeriem univerſalem inveniſſe, [vid. *Act.*
,, *Lipſ.* 1694 pag. 438 *] pro quadraturis & rectificationibus,
,, per repetitam additionem & ſubtractionem quantitatum æqua-
,, bilium, quæ tibi non diſplicuit: Ecce nunc eandem ſeriem
,, per novum meum integrandi modum repertam. Quærendum
,, eſto $\int n dz$; differentietur more conſueto ndz; ut habeatur
,, $nddz + dndz$, ſive $d^0 nddz + dndz$. Ad hoc proin & ad
,, ndz, ſeu $d^0 ndz$, ex præſcripto novæ regulæ, capiatur tertium pro-
,, portionale, quod erit $d^0 nddz : (d^0 nddz + dndz) =$ [di-
,, viſo numeratore & denominatore per d quod a z efficitur]
,, $d^0 ndz : (d^0 ndz + dnd^0 z)$. Facta nunc diviſione ultima,
,, inchoando a priore denominatoris termino prodibit $\int ndz =$
,, $d^0 nd^0 z - dnd^{-1} z + d^2 nd^{-2} z - d^3 nd^{-3} z +$ &c.
,, hoc eſt, $nz - dn\int z + d^2 n \int\int z - d^3 n \int^3 z +$ &c. inchoa-
,, ta vero diviſione a poſteriore termino orietur $\int ndz = d^{-1} n$
,, $dz - d^{-1} n d^2 z + d^{-3} nd^3 z - d^{-4} n d^4 z +$ &c. hoc
,, eſt, $dz\int n - d^2 z \int^2 n + d^3 z \int^3 n - d^4 z \int^4 n +$ &c. Quo-
,, niam vero [poſita dz conſtante] $\int z, \int^2 z, \int^3 z, \int^4 z$ &c.
,, æquantur ipſis $zz : 1.2\,dz$, $z^3 : 1.2.3\,dz^2$, $z^4 : 1.2.3.4$
,, dz^3, $z^5 : 1.2.3.4.5\,dz^4$ &c. prior ſeries inventa $\int ndz = nz$
,, $- dn\int z + d^2 n \int^2 z - d^3 n \int^3 z +$ &c. convertetur in hanc
,, $\int ndz = nz - dn \frac{z^2}{1.2.dz} + d^2 n \frac{z^3}{1.2.3\,dz^2} + d^3 n \frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3} +$ &c
quæ

* N°. XXI. pag. 125. *Tom. I.*

,, quæ omnino eadem eſt, quam in *Actis Lipſ.* loco ſupra ci-
,, tato exhibui. Quod ſi ponamus dn conſtantem, erunt $\int n$,
,, $\int^2 n, \int^3 n, \int^4 n$, &c. $= n^2 : 1.2\,dn$, $n^3 : 1.2.3\,dn^2$, $n^4 : 1.2.3.4$
,, dn^3, $n^5 : 1.2.3.4.5\,dn^4$, &c. Hinc altera ſeries $\int ndz$
$= dz\int n - d^2 z \int^2 n + d^3 z \int^3 n -$ &c. mutabitur in hanc $\int ndz$
,, $= dz \frac{nn}{1.2.dn} - d^2 z \frac{n^3}{1.2.3.dn^2} - d^3 z \frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}$ &c. in
,, qua, perinde ut in præcedente, applicando ad exempla, dz,
,, $d^2 z$, $d^3 z$, &c. deſtruuntur per dn, dn^2, dn^3, &c. ita ut
,, proveniant quantitates pure algebraïcæ: quæ ſeries itidem, ut
,, in *Actis* docui, per iteratas additiones & ſubtractiones repe-
,, riri poteſt.

Quid cenſes, mi TAYLORE? annon vides ex paucis his ſpeciminibus [plura brevitatis cauſa non addimus] hanc materiam ante te jam diu fuiſſe occupatam, & forte ſolidius tractatam? Annon etiam percipis, longe commodius adhiberi litteras d & $\int$, quam veſtra puncta & accentus; ſiquidem cum his, non æque ac cum illis, algebraico modo procedere liceret? Hinc quoque intelligis, ut hoc in tranſitu dicam, quousque jam tum Cl. BERNOULLIUS penetraverit in naturam differentialium ulteriorum graduum, quam tu ipſi perſpectam non eſſe aſſeverare audes: hac de re autem infra tecum fuſius agam. Interim ne iraſcere, quæſo, ſi nunc detegam plagium, quod circa hanc ipſam materiam commiſiſti, & ſub conſuetæ tuæ obſcuritatis caligine abſcondere conatus fuiſti: continetur illud in Libri tui *Incrementorum* pag. 38, ubi Prop. XI hoc tradis Theorema veluti novum & tuum.

,, Ipſius $\dot{r}s$ fluens, inquis, exprimi poteſt per alterutram ex ſeriebus
,, $\boxed{\dot{r}s} = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dot{\ddot{s}} +$ &c. vel $\boxed{\dot{r}s} = \dot{r}s' - \ddot{r}s''$
,, $+ \dot{\ddot{r}}s''' -$ &c. Quam novum ſit, ſcilicet, patet ex allatis ſeriebus *Bernoullianis* ſuperiore jam ſæculo inventis; quæ tu vocas $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\ddot{r}}$ &c. $s, \dot{s}, \ddot{s}, \dot{\ddot{s}}$ &c. item r', r'', r''' &c. s', s'', s''' &c. Cl. BERNOULLIO ſunt $z, dz, d^2 z, d^3 z$, &c. $n, dn, d^2 n, d^3 n$, &c. item $\int z, \int^2 z, \int^3 z$, &c. $\int n, \int^2 n, \int^3 n$, &c. quod apud te eſt $\boxed{\dot{r}s}$, id Cel. BERNOULLIO audit $\int ndz$; tranſmuta jam tuos characteres in *Bernoullianos*, & prior tua ſeries $\boxed{\dot{r}s} = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dot{\ddot{s}} +$ &c. oppido eſt

Ber-

Bernoulliana prior $\int n dz = nz - dn\int z + d^2 n\int^2 z - d^3 n\int^3 z$ $+$ &c. Poſterior vero tua $\boxed{rs} = \dot{r}s' - \ddot{r}s'' + \dddot{r}s''' -$ &c. itidem eſt *Bernoulliana* poſterior $\int n dz = dz\int n - d^2 z\int^2 n + d^3 z\int^3 n$ $-$ &c.

Atqui hæ ſeries perſcriptæ ſunt Illuſtri LEBNITIO A. 1695, ac brevi poſt communicatæ cum Viris Celeb. *Marchione* HOSPITALIO, VARIGNONIO, & ni fallor aliis. Tu, Vir optime, eaſdem in lucem profers, in libro tuo, anno demum 1715 impreſſo: ita nos paſcis crambe tua poſt 20 annos recocta. Sed nec ignorare poteras, nam ſedulo legis *Acta Lipſienſia*, ſeriem tuam $\boxed{\dot{r}s} = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dddot{s} +$ &c. [quæ ut oſtendimus nonniſi notandi modo differt a priore *Bernoulliana* $\int n dz = nz - dn\frac{z^2}{1.2.dz} + d^2 n\frac{z^3}{1.2.3.dz^2} - d^3 n\frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3}$ $+$ &c.] jam extare in *Actis* illis 1694 p. 438 *; hoc tu diſſimulaſti. Quid ergo ſequitur? ſcilicet te reum eſſe plagii & convictum.

At audio te oggerentem, te *hic ſaltem propria uſum eſſe analyſi, ut nullo modo dici poſſis alios fraudaſſe*. Foret fateor aliquid tibi laudis tribuendum, ſi quod oggeris verum eſſet, & neglecta analyſi *Bernoulliana*, quæ ſimpliciter procedit per additiones & ſubtractiones earundem quantitatum ſub diverſis formis expreſſarum, dediſſes aliam & tibi propriam analyſin. Interim quam dediſti, minime eſt tua, ſed eſt Clariſſimi MOIVREI, qui eam pridem exhibuit in publicum, anno nimirum 1704, in ſuis doctiſſimis *Animadverſionibus* contra CHEYNÆUM, plagiarium faſtuoſum, & tibi admodum ſimilem. Ut autem clarius pateat identitas analyſeos tuæ cum *Moivreana*, tranſcribam priora tantum veſtra utriuſque verba: Tu ita infis pag. 38: *Sit fluens quæſita* $rs + p$, *hoc eſt* $\boxed{rs} = rs + p$: *Tum capiendo fluxiones, erit* $\dot{r}s = r\dot{s} + \dot{r}s + \dot{p}$, *hoc eſt*, $\dot{p} = -r\dot{s}$, *adeoque* &c. Clariſſ. MOIVREUS p. 69. *Sit*, inquit, *fluens ipſius* $\dot{z}y = zy - q$; *tunc* $\dot{z}y = \dot{z}y + z\dot{y} - \dot{q}$, *ſive* $\dot{q} = z\dot{y}$. *Pone* &c. Tu habes $r\dot{s}$; MOIVREUS habet $z\dot{y}$, quod tibi eſt p, MOIVREO dicitur q; Reliqua, ſi non omnino verbotenus ſunt eadem, ſane quoad ſenſum tam ſimilia ſunt, ut vix ovum ovo ſimilius eſſe queat.

Quid ad hæc dicis, Vir Clariſſime, fruſtra nobis obtrudis pro excuſatione *nimiam tuam ignaviam, ob quam, quod de rebus cum eſſes maxime ſollicitus*, uti jactas, *Hiſtorias rerum & Nomina Auctorum penitus neglexeris*. Sic omnes plagiarii ſe excuſabunt. Sed hæc tua ignavia te non detinuit, quin ſæpiſſime nominis *Newtoniani* [quod & nos veneramur] mentionem faciendi anſam arriperes; in rebus etiam, quæ jam ſunt tritiſſimæ, qualis eſt ſeries quam profers, pag. 55, pro inventione Dignitatis Binomii, quam & BERNOULLIUS noſter [cujus nomen tibi adeo inviſum eſt,] in *Lectionibus ſuis Hoſpitalianis* in multorum manibus verſantibus, ſingulari modo ante tot annos inventam tradidit, & poſtea multis aliis modis eandem nimis facile eruit, quam ut eos luce publica dignos cenſeret.

* Tom. I. pag. 126.

Series vero Bernoulliana $\int n dz = nz - dn\frac{zz}{1.2.dz} + d^2 n\frac{z^3}{1.2.3.dz^2}$ $- d^3 n\frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3}, +$ &c. minus erat trita, & fortaſſe non minoris momenti quam *Newtoniana*. Illam itaque jure potiore, quam hanc, primo ſuo inventori aſſerere debuiſſes, ſi voluiſſes bona fide agere.

Sed hoc ipſo, quod tecta & remota impunius auferuntur, quam ſi in omnium oculis verſantur; non dubitaſti inventum illud ſub velamine punctorum & accentuum tuorum $\boxed{\dot{r}s} = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dddot{s} +$ &c. Autori Cl. BERNOULLIO ſubducere: credebas te tutum in obſcuritate tua & furtum quaſi in ſacco gerentem.

Cæterum exempla, quæ depromis ex hoc tuo furto, ſunt trivialia, immo fere obſoleta; hinc recte quidem monuiſti pag. 46, *hæc jam elegantius fieri ab illuſtriſſimo* NEWTONO *in* Quadratura curvarum: modo interim non oblitus fuiſſes monere pariter, eadem diu antequam Tractatus *Newtonianus* in lucem veniſſet, facta fuiſſe ab aliis, ut videre eſt in *Fluxionum Methodo inverſa* Georgii CHEYNÆI; ſed magis adhuc in ſcheda quam CHEYNÆUS poſtea Libro ſuo adjunxit ſub titulo *Addendorum & Annotandorum*; de quibus ita loquitur CHEYNÆUS in præfatiuncula eorum, ac ſi quæ in iis continentur ſuo marte inveniſſet; cum tamen ea per litteras acceperit a *Johanne* BERNOULLIO antea conſulto, & rogato ut quod notaſſet in libro *Cheynæano*, cum ipſo CHEYNÆO amice communicaret; id quod BERNOULLIUS qui minime eſt myſterioſus, libenter indulſit CHEYNÆO roganti, ſed poſtea turpiter abutenti prona Cl. BERNOULLII facilitate. Si hac de re plura noſſe cupis, Cl. TAYLORE, adeas Cl. MOIVREUM, ex quo omnia accurate reſciſces, videbiſque te in CHEYNÆO habere tibi ſimilem plagiarium, quamvis hujus rei ſocios in Anglia veſtra plures alios habeatis.

Ad te redeo, Vir Clariſſime; jam non vacat venari omnia plagii exempla, quæ in obſcura tua *Incrementorum* ſylva deliteſcunt: unum tamen præ-

præterire non poſſum, quod ipſe commemoras. Haud dubie culpæ conſcius, culpam amoliri ſatagis, ſed in caſſum. Scilicet nova Theoria *Bernoulliana* de Centro oſcillationis, publicata anno 1714 in *Actis Lipſ.* menſe Junio †, ut & in *Comment. Reg. Scient.* pro eodem anno uſque adeo tibi placuit, ut eandem poſtea tuo libro inſerueris, tanquam a te inventam. Plagii ſuſpicionem, quam quis, ex eo quod liber tuus integro anno ſerius in lucem venerit quam Schediaſma *Bernoullianum*, habere poſſet, prævenire quidem omni modo ſtudes, ſed cunctis tuis rationibus, ſeu potius commentis, nihil aliud conficis, quam ut Lectores judicioſi in ſuſpicione ſua obfirmentur. Nolo hic diſcutere, quæ hanc in rem afferuntur in Diario Gallico in Batavis imprimi ſolito ſub titulo *Bibliothéque Angloiſe* *; ad argumenta quippe ſollicite congeſta a recenſore tui libri, hoc eſt, ſi recte conjicio, a te ipſo, jam anno præterito in *Actis Lipſ.* †† reſpondit Cl. *Nic.* BERNOULLIUS noſtri Filius, qui inter alia apprime notavit non ſat bona fide actum eſſe a recenſore, quod dum mentionem facit Theoriæ *Bernoullianæ*, fingat eandem extare tantum in *Commentariis Pariſinis*, pro anno quidem 1714, ſed nonniſi anno 1717 editis, diſſimulans alteram editionem, quæ habetur in *Actis Lipſ.* 1714 m. Junio, & quæ proin hoc ipſo menſe fuit divulgata. Acta enim iſta diſtribui ſolent ipſis Calendis cujuſque menſis, cujus nomen præ ſe ferunt. Ita putavit tuus Patronus, neminem fore, qui ſolutionem Problematis de Centro oſcillationis, inſertam libro tuo anno 1715, mutuatam e *Bernoulliana*, præcedente jam anno editæ, ſuſpicetur. Sed tandem in te rediens animadvertiſti, fucum iſtum nimis eſſe palpabilem, quam ut quenquam decipiat: rerum enim noſtrarum curioſi, qui *Commentarios Pariſinos* evolvunt, lectione quoque *Actorum Lipſienſium* delectantur. Quare relicto hoc ſtratagemate, nunc alio uteris, ſed non magis idoneo. Quando enim in tua *Apologia* hunc in modum loqueris; *Bernoullii ſolutiones duæ extant eodem anno* [1714] *editæ; quarum poſterior cum noſtra, quoad principia, tam mire conſentit, ut jurares ab eodem homine eſſe utraſque inventas*; fingis utique duas illas ſolutiones *Bernoullianas*, quoad principia eſſe a ſe invicem diverſas, ut tuam quoque a *Bernoulliana* priore diverſam eſſe Lectori perſuadere poſſis. At miſerum artificium, quo ne imperitioribus quidem illuſeris! oportet quippe utramque tantum linguam intelligere, Gallicam & Latinam, ut quis ex contextu æque ac ex inſpectione figurarum percipiat Schediaſma Gallicum Theoriæ *Bernoullianæ* in *Commentariis* editum, eſſe nudam tantum verſionem Schediaſmatis Latini in *Actis* evulgati, eamque tam fidelem, ut verbotenus fere ubique interpres reddiderit Gallice quod a BERNOULLIO ſcriptum erat Latine.

Quid ex his omnibus ſequitur, mi TAYLORE, niſi id tantum quod ſi ſolutio tua eadem ſit cum *Bernoulliana* poſteriore, ut fateris, ſit quo-

que

† Supra N°. XCVI. p. 168. * N°. CXVII. †† N°. CXVIII.

que eadem cum priore, quæ ante tuam in publicum prodiit, nimirum per integrum annum; credamus igitur citra juramentum ſolutionem in libro tuo 1715, eamque in *Actis* 1714, *ab eodem homine eſſe utraſque inventas.*

Nec eſt quod dicas, librum iſtum tuum fuiſſe *penes Societatem Regiam, & cum omnibus fere veſtris Mathematicis communicatum uſque a menſe Aprilis* 1714; ad hoc quippe ſatis ſuperque reſponſum eſt a BERNOULLIO Filio. Demus, ſi ita vis, librum iſtum tuum pridem ante ipſius editionem fuiſſe communicatum cum veſtris Mathematicis; quis eorum erit, qui ſe in eo ſolutionem tuam jam tum vidiſſe teſtabitur? annon poſtea, nemine animadvertente, intrudi potuit? At *ipſa ſolutio tua*, ut cauſaris, *cum amicis tuis communicata eſt uſque ab initio anni* 1712, atque hoc verum eſſe *teſtes* citas *Epiſtolas autographas* KEILII *tui* †. At fragile teſtimonium, ſi aliud tibi non ſuppetit! Audes contra BERNOULLIUM accerſere in teſtem KEILLIUM, quem noſti eſſe nominis *Bernoulliani* totiuſque Nationis Germanicæ inimicum infenſiſſimum? Hoccine tibi permittit Juriſprudentia tua? Ego vero ſincerius tecum agam, producamque teſtimonia contra te, non ab inimico tuo, ſed ab amico tuo quodam tibi fideliſſimo & in ſtudiis mathematicis verſatiſſimo, atque quanta pars inventorum gloriæ unicuique debeatur apprime gnaro, quippe qui operam dedit conſcribendæ *Hiſtoriæ de inventis mathematicis, eorumque veris Auctoribus*, qui proinde ſine dubio inſtructiſſimus fuit authenticis documentis. Utinam vero opus hoc, quod ferme ad umbilicum pervenerat, non interruptum fuiſſet præmatura morte ſcriptoris! multis ex veſtratibus, qui tam contentioſe ſibi ſuiſque varia inique arrogant, os potenter obturaſſet; atque, ut erat vir incorruptus, nec Germanis magis quam Britannis favens, utpote Gallus, ita facile fidem apud omnes æquos rerum judices inveniſſet. Is autem erat [quid opus eſt nomen celare?] MONMORTIUS Geometra inſignis & in orbe mathematico ſcriptis ſuis notiſſimus. Vir iſte tibi erat familiariſſimus, quem etiam, ut talem agnoviſti, Vid. Diarium Gallicum Hagienſe [*Europe ſavante*] menſe Maio, 1719. p. 126, ubi MONMORTII amorem in veritatem, ejuſque intimam, qua te honorabat, amicitiam ita extollis: *Je ſuis ſi touché*, [inquis] *de l'amour ardent que vous reſſentez pour la vérité, & de la grande bonté que vous témoignez, par l'opinion favorable que vous avez des travaux de mes Compatriotes*, [*ſans parler du bonheur que me procure l'étroite amitié, dont vous avez la bonté de m'honorer*] *que je me ferai toûjours un plaiſir très-grand, de vous être de quelque utilité dans vos recherches curieuſes.*

Hujus itaque MONMORTII, te ipſo fatente, tam candidi, tamque impenſe faventis & tibi & veſtratibus, teſtimonium nullo modo, ſi ſa-

Qqq 3 pis,

† Supra pag. 480

pis, reſpues. Ille autem in numerum Plagiariorum obſcure ſcribentium te refert, quod percipies ex ſequente fragmento Epiſtolæ alicujus *Monmortianæ* ad Cl. BERNOULLIUM ſcriptæ d. 3. April. 1718. *Je me ſouviens de ce que vous m'avez mandé autrefois touchant l'obſcurité impénétrable de ſon* [TAYLOR] *livre* Methodus Incrementorum. *Vous avez bien raiſon, c'eſt ramer ſur les Galéres, que de lire & de vouloir entendre de tels livres: pour moi la vengeance que j'en retire, ſi bons qu'ils ſoyent, c'eſt de les laiſſer-là. Vôtre Ami met Mr.* TAYLOR *au nombre de ceux qui ne citent pas les Auteurs, dont ils empruntent quelque choſe. Il mérite moins ce reproche que Mr.* CHEYNE'E, *& ſur-tout Mr.* HAYES, *qui vous a copié & Mr. de* L'HOSPITAL *mot-à-mot; mais je conviens qu'il* [TAYLOR] *le mérite un peu........ Je ne crains pas les voleurs, mais en général je les hais, & la République des Lettres en eſt pleine. Vous l'avez éprouvé plus qu'aucun autre: je me fais un véritable plaiſir, en compoſant* l'Hiſtoire de la Géométrie, *d'éclairer les larcins, & de reſtituer à chacun ce qui lui a été pris.*

Poſſem & alios magni nominis producere viros, qui te, mi TAYLORE, plagii reum ſuſpicantur, ac nominatim quidem in cauſa Theoriæ Centri oſcillationis, quam Cl. *Joh.* BERNOULLIO, utpote primo & unico Autori in ſolidum adjudicant: ſed ut bilem tuam effugiant, illos nominare nunc quidem ſuperſedeo; nominaturus ſi, quod ſpero, permittere voluerint.

Hæc ad primam tuam querelam. Ad alteram quod ſpectat, miror te ægre ferre verba Cl. BERNOULLII, *te ad profundiora ſua aliorumque feliciter penetraſſe*, dicentis. Neſcio ſane, annon quilibet alius talia de ſe dicta ſibi laudi duceret: quid enim avidius amaret, quam gloriam, qua de ſe prædicaretur, quod tanto polleat ingenii acumine, ut, quæ alii, licet ante ipſum, myſteria invenerunt, ad ea tamen ipſe ſuo marte feliciter penetraverit? Non crede vel NEWTONUM, vel BERNOULLIUM, vel alium quemvis ex hodiernis inventoribus offenſum iri, ſi de ſe dicatur, quod ad *Archimedea* penetraverit, & quidem multo felicius quam ARCHIMEDES ipſe. At, ſi quid valet mea conjectura, ideo te pupugerunt verba *Bernoulliana*, quia plagii vitium tibi tacite exprobari putabas; alium, qui meliorem habuiſſet conſcientiam, non pupugiſſent. Deſine ergo iraſci BERNOULLIO, & tuæ potius iraſcere culpæ: non enim juſtum eſt, ut alius luat quod tu peccaſti. BERNOULLIUS laudare te voluit; tu laude indignum te ſentis, cum prava te mordeat conſcientia. Quid ſtomacharis BERNOULLIO qui nihil deliquit? Hoccine tua te docuit Juriſprudentia!

Reſtat ut oſtendam, quam iniqua ſit tertia tua contra Cl. BERNOULLIUM quiritandi cauſa; dixit ſcripta tua eſſe *obſcura uſque adeo ut ne a perſpicacioribus quidem ſatis intelligi queant.* Sed quid tum? an de obſ-

curi-

curitate monere idem eſt quod crimen exprobare? ſi falſo te taxaſſet obſcuritatis; habuiſſes, fateor, cauſam retorquendi culpam in BERNOULLII indocilitatem: ſed ex litteris modo allatis vidiſti MONMORTIUM, invita omni qua pollebat perſpicacia, maluiſſe ad triremes damnari, quam legere caliginoſa tua ſcripta.

Ne putes, Cl. Vir, MONMORTIUM ita non locuturum fuiſſe, niſi antea ita loquendi occaſio data fuiſſet a Cl. BERNOULLIO; ecce ab eodem MONMORTIO, tuo quidem amico ſingulari, teſtimonium aliud ultro exhibitum de tua obſcuritate partim, partim de clara & perſpicua BERNOULLII ſcribendi ratione. Sic enim habet in Literis ad BERNOULLIUM noſtrum d. 28 Octobr. 1718: *Le peu que vous me marquez de vos idées ſur cette matiére* [des vibrations des cordes de muſique] *me plait beaucoup. Vous êtes ſûr Monſieur, dans tout ce que vous faites, quoi-qu'en diſe Mr.* KEIL. *Je vous invite à communiquer au public vos découvertes en ce genre. Il ne ſort rien de vos mains, qui ne ſoit* perfectum ingenio, elaboratum induſtria; *ce n'eſt point-là un compliment, c'eſt la pure vérité; & je ne connois perſonne, qui ſoit connoiſſeur & impartial, qui n'en convienne: ce que j'eſtime encore infiniment c'eſt que vous avez le rare & précieux talent de vous faire entendre: Vous êtes preſque le ſeul Autheur en Géometrie, que je liſe avec beaucoup de plaiſir: je n'aime pas la peine, bien d'autres me reſſemblent en cela, vous la diminuez infiniment à vôtre Lecteur. J'ai bien dit des injures, & de bien groſſes, à mon Ami Mr.* TAYLOR, *quand il étoit ici avec moi, ſur l'obſcurité étonnante, & la mauvaiſe façon de ſon Livre.*

Poſſes ne dubitare de ſinceritate hujus judicis, qui ſe [clam te, adeoque non ex adulatione] tuum amicum profitetur? Quid nunc, ſi amici tui ita de te judicant, quid inquam alii cenſebunt? Interim idem ille amicus tuus MONMORTIUS in aliis literis ad Cl. BERNOULLIUM, 28 Junii 1719, tuam, mi TAYLORE, obſcuritatem, qua plagium tuum ſupra notatum diſſimulare voluiſti, his exprimit verbis: *Son Mémoire* [de Mr. TAYLOR] *ſur les centres d'oſcillation, eſt abſolument le même que le vôtre, qui a paru le premier: on ne peut une plus grande conformité d'idées: il n'y a de diférence que dans l'expreſſion, claire chez vous, obſcure chez Mr.* TAYLOR.

Sed curioſa ſunt, atque digna inprimis ut tranſcribantur, quæ in eadem habet Epiſtola MONMORTIUS de ſuis inventis circa ſeries, quorum Latine vertendorum & edendorum curam tibi demandaverat. Tam egregie ſc. tranſlatoris officio functus fueras, ut Autor ipſe ſua inventa a te in Latinum verſa, an perverſa, cognoſcere amplius & intelligere vix potuerit. En ejus verba: *J'ai admiré & ri, que vous ayez reconnu le ſtile & le Latin de Mr.* TAYLOR, *dans le petit Traité que je vous ai envoyé ſur les ſuites. Je le lui avois envoyé fort différent de ce qu'il*

eſt,

eſt, il en a voulu changer toute la forme, & l'a rendu tel, qu'en honneur je ne l'entends pas trop moi-même. J'ai été obligé, pour le déviner, de m'accrocher aux exemples qu'il n'a point changés. . . . . . . Je me ſuis douté auſſi que le latin n'en étoit pas trop bon.

Obſcuritas tua, mi TAYLORE, tibi quandoque utilis eſt, ſed tibi ſoli; ejus namque beneficio videri cupis aliquid ſolviſſe, quod revera nec ſolviſti, nec ſolvere potuiſti. Exemplum habemus in Problemate a te ipſo Mathematicis non Anglis propoſito, & per Cl. BERNOULLIUM perfecte ſoluto, (Vid. *Act. Lipſ.* 1719 p. 256 & ſeq. *) at quod tu ipſe, quia nullam dediſti ſolutionem, minime ſolviſti. Interim ut imponeres MONMORTIO tuo, pro vera ſolutione ipſi fumum obtruſiſti, ut ſibi perſuaderet te ſolutionis compotem eſſe. Audi enim amicum tuum ad BERNOULLIUM filium, d. 15. Maj. 1719, ita ſcribentem: *Je lirai avec ſoin la ſolution qu'a donné Mr. vôtre Pére, dans les* Actes de Leipſic, *du Problême propoſé derniérement par Mr.* TAYLOR; *ce ſavant Géométre m'en a envoyé depuis peu une ſolution fort abrégée & que je n'ai pas entendue.* Vides MONMORTIUM bona fide crediſſe, a te tuum Problema eſſe ſolutum; accepit enim pro ſolutione aliquid, quod ne umbra quidem ſolutionis erat; neſcius ſub obſcuritate tua nil niſi fucum latere. Sed turpe eſt optimi amici credulitate abuti. Interim ut ſcias quid ſenſerit idem tuus amicus de ſolutione *Bernoulliana* ejuſdem Problematis tui [vel ſaltem a te propoſiti] ex Epiſtola ad Cl. BERNOULLIUM menſe Junio ejuſdem anni data excerpo judicium Illuſtr. MONMORTII hunc in modum expreſſum. *J'ai lu vôtre Mémoire avec toute l'avidité & toute la curioſité que j'ai toujours eu pour ce qui vient de vous. L'extrême clarté & l'ordre naturel de vôtre ſolution du Problême de Mr.* TAYLOR *m'a mis en état de l'entendre dans une matinée, & de faire tous les calculs néceſſaires. Je m'attens à un pareil plaiſir, lorſqu'il vous plaira nous découvrir vôtre analyſe du Problême de Mr.* KEILL †; *car vous poſſédez au ſuprême degré l'art d'applanir les difficultez à vos Lecteurs, & de mettre les matiéres les plus ſublimes à la portée des eſprits les plus médiocres. Hé bien, Monſieur, vous voyez que les efforts de ceux qui vous portent envie, & que les tentations, auxquelles on vous expoſe, tournent à vôtre gloire. Pour moi, je n'ai pas douté un moment, que voulant vous en donner la peine, vous ne fuſſiez capable de réſoudre, à coup ſûr, ce qui auroit été trouvé par un autre,* &c.

Huc pertinet, quod paulo poſt, nempe 28 ejuſdem menſis Junii, ad Cl. BERNOULLIUM noſtrum de eadem materia ſcripſit MONMORTIUS in ſententiæ ſuæ confirmationem. *Je vous ai*, inquit, *témoigné dans ma derniére lettre, Monſieur, ce que je penſois de vôtre ſolution du Problême de Mr.* TAYLOR: *le prémier & le plus grand mérite qu'ait pour moi un morceau de Géométrie, c'eſt d'être intelligible. Le vôtre eſt eſtimable par cet endroit, & par tout ce qui peut donner du prix à un Ouvrage* &c.

* Supra N°. CXIV. pag. 402, ſeq. † N°. CXIII. Supra pag. 399 & N°. CXXI. infra.

Quid tandem ad hæc omnia dicis, Doctiſſime TAYLORE? plura-ne deſideras teſtimonia? poſſem equidem alios non inferioris ordinis Geometras adducere, idem cum MONMORTIO de te ſentientes; ni autem inſatiabilis fueris, ſuffecerint, opinor, tot tamque graves hujus Viri querelæ contra inextricabilem tuam obſcuritatem motæ: hæ quippe, cum ſint ab optimo tuo amico profectæ, annon plus ponderis apud te habebunt, quam ſi mille alios in teſtes advocaſſem? Vides hinc, qua fronte dicere ſuſtineas, *de tua conqueri obſcuritate, id eſſe ab ingenuis moribus prorſus alienum, & meram contumeliam.* Quis enim conqueſtus eſt? profecto non BERNOULLIUS ſolus, ſed alii, ſed MONMORTIUS, amicus tuus fidiſſimus, qui te ea de re in faciem increpuit: hic igitur ex ſententia tua caruit ingenuis moribus; hic fuit tuus merus calumniator; deſine in poſterum condecorare BERNOULLIUM ejuſmodi titulis, qui ſolemnes ſunt inter calones, potius quam inter ingenuæ educationis homines.

Nec eſt quod in tui excuſationem objectes, *difficile eſſe in re fere nova & ab uſu communi aliquantulum remota, non eſſe obſcurum*; nihil enim tam novum in tuo Libro deprehendo, quod non explicari poſſit, vel jam ante te explicatum ſit, clare & perſpicue; deinde ridiculum mihi videtur novitatem prætexere ad excuſandam obſcuritatem. Si rei novitas obſcuritatem pareret in ſcribendo, omnia quæ hactenus ab ARCHIMEDE, APOLLONIO, aliiſque primis inventoribus inventa, forent obſcuriſſima, utpote tum temporis cum ſcriberent nova. Sed quid ad Veteres re urro? Nova Theoria de Centro oſcillationis a Cl. BERNOULLIO inventa, & primo in lucem emiſſa, tam clare, tamque dilucide conſcripta eſt, quam quod maxime; a te vero poſtea Libro tuo inſerta tanta laborat caligine, ut Lectori opus ſit Oedipo, qui explicet, & ne ſic quidem intelligi poſſit, niſi præ oculis habeatur ſcriptum *Bernoullianum*, quod lucem affundat ad cognoſcendum tuam ſolutionem enatam eſſe ex Theoria *Bernoulliana*.

Ita utcunque ventilavimus, amiciſſime TAYLORE, quam juſtæ ſcilicet fuerint illæ a te prætextæ rationes, ob quas Cl. BERNOULLIUM uſque adeo proſcindere, & eum, ſi per te ſtetiſſet, ex hominum memoria delere voluiſti. Si jam te dimitterem, tacerem que ad reliqua invectivæ capita, quibus BERNOULLII noſtri merita tantopere extenuas; forſan *patientiam noſtram ignaviæ* alicui imputares, & *ſilentium* pro conſenſu acciperes. O quanta inde tibi ſociiſque tuis naſceretur triumphandi materia! Ideoque in reſponſionem ad inficetas tuas nænias, accipe ſequentia placido & ſedato animo proferenda.

Undenam audiveras, Cl. Vir, id quod affirmas, *te audire* BERNOULLIUM *de exordio conquerentem, quo nuper uſus es in ſolutione Problematis* Leibnitiani *in* Tranſactionibus Philoſophis *edita* *; *reprehendiſſe ſtylum tuum, utpote acriorem quam virum bene moratum deceat; item nimium tuum contemtum extraneorum*: non enim memini BERNOULLIUM publice [quamvis jure potuiſſet] conqueſtum eſſe de ſtyli tui acrimonia, & indecentia, antequam *Apologiam* tuam, in lucem protruſeras: at hoc nunc tuo injuriandi ſpecimine comprobas, vehementer illum falli, qui apud te quærere voluerit veſtigia quædam humanitatis in exteros, eos præſertim quos tibi facilius eſt obtrectare quam imitari. *Fautores* LEIBNITII ſine exceptione taxaveras imperitiæ; ipſumque LEIBNITIUM exagitaveras, tanquam *pertinacem & convictum plagiarium.* Nunc vero prius, quod ipſe fateris *paulo durius ſonare*, reſtrictum cupis per neſcio quam Juriſprudentiæ tuæ Regulam ad quoſdam tantum Fautores LEIBNITII, BERNOULLIUM ſcilicet & *ſocios ejus vobis infenſos*, &, ſi Diis placet, *univerſos Anglos indigne tractantes.*

De altero vero, quo *pertinaciam & convictionem plagii*, pro civilitate tua, LEIBNITIO exprobraveras, nunc quidem quaſi id nunquam in mentem tibi veniſſet omnino taces; ſcilicet, ut bilem tuam totam in ſolum BERNOULLIUM effundere poſſes. Næ! lepidum jam eſt in ſcripto tuo legere inter *illuſtria nomina* extraneorum, quorum *te tanta*, ut ſimulas, *tenet reverentia*, ipſius quoque nomen LEIBNITII; quem antea, ex ſingulari tua reverentia, inter *pertinaces & convictos plagiarios* referebas; ſed & non minus lepidum eſt te videre triumphantem de *imperitia* BERNOULLII, eodem fere tempore, quo a te, tuoque KEILLIO, ad certamen provocatus, Problemata veſtra, quæ ipſimet ſolvere non valebatis, feliciter enodavit, atque exhibitis ſuis ſolutionibus, contra quas nihil excipere poteratis, victor evaſit.

Actum agerem, ſi denuo commonſtrare vellem, quam parum ſincere redargueris imperitiæ eos, qui putatitiam illam Anonymi ſolutionem † Trajectoriarum generalem pro ſolutione admittere noluerunt; id enim jam ſatis monſtratum eſt a Cl. BERNOULLIO filio in *Act. Lipſ.* 1720, M. Maio ††. Si tu citra præjudicium benignius de ea re judicas, monſtra te nobis peritiorem, neque bonitatem ejus, convitiis ſparſis in BERNOULLIUM ſocioſque [præ cæteris Cl. HERMANNUM, qui eandem cum BERNOULLIO fovet ſententiam, *Act. Lipſ.* 1717 M. Aug. §] vindica, ſed opere ipſo doce quomodo ex illa, quam ita vocas, ſolutione generali æquationes ſint deducendæ pro Trajectoriis curvarum a LEIBNITIO propoſitarum, quarum natura hæc eſt, $dy = x^{n}\,dx : \surd (a$

* Supra N°. CVII. pag. 281.

† Supra N°. CV. pag. 273.

†† Supra N°. CXVI. pag. 425, ſq.

§ N°. CVI. pag. 275.

$\surd (a^{2n} - x^{2n})$. Quod ſi non præſtiteris, eadem laborabis imperitia quam aliis objicis, & nolens volens, fateberis ſolutionem illam generalem eſſe puram putam chimæram. Eandem omnino tulit ſententiam MONMORTIUS tuus, in litteris ad Cel. BERNOULLIUM d. 14. Septembr. 1717. *J'ai porté*, ait, *le même jugement que vous, de la ſolution qu'on a donné de vôtre Problême ſur les Trajectoires dans les* Tranſactions : *c'eſt ſe moquer du monde, de donner une pareille ſolution d'un Problême fort difficile.* In eundem ſenſum litteris ſuis ad Cl. BERNOULLIUM 26 Junii 1718 judicat his verbis: *Vos réfléxions ſur le* id profecto illorum imperitiæ tribuendum erit *de Mr.* TAYLOR *ſont très-juſtes & exprimées avec beaucoup d'agrément. Je penſe en vérité comme vous: c'eſt ſe moquer du monde, & abuſer des termes, que d'appeller ſolution le peu de lignes dont il eſt queſtion au ſujet du Problême des Trajectoires; c'eſt un abus à reformer, que cette façon obſcure & énigmatique de réſoudre des Problêmes; & le vrai moyen eſt de ſtatuer, que qui parlera ainſi au public, ſera cenſé & reputé n'avoir point parlé.*

En, mi bone, dum BERNOULLIUM & ſocios ejus ad imperitorum claſſem revocas, incautus quoque damnas intimum tuum amicum, qui certe talia de te minime promeruit. Licebat tibi omnia in Cl. BERNOULLIUM quæ invidia inſpirabat eructare; nam

Hunc obtrectare ſi volet malignitas,
Imitari dum non poſſit, obtrectet licet,

modo ſociis, modo amicis tuis peperciſſes. Cl. BERNOULLIUS ſane invidentium rabiem non timet; novimus veſtratium quoſdam in ſocietatem coiiſſe, ſubverſuros, ſi poſſent, ſtabilitam Cel. BERNOULLII gloriam; ſed non animadvertitis hinc nihil aliud effici, quam ut eidem novum addatur robur: veriſſimum enim CICERONIS illud, *invidia virtute parta, gloria, non invidia eſt putanda.*

Huic adſtipulatur candidiſſimus ille tuus MONMORTIUS, ſemper ut ſentiebat eloqui ſolitus; is enim in Litteris menſe Junio 1719 exaratis, atque jam ſupra citatis, BERNOULLIO noſtro animum addit hunc in modum: *ſoyez ſûr qu'on ne gagnera pas un pouce de terrain ſur vous. Vous ne pouvez rien perdre du côté de la réputation de grand Eſprit, de Géométre du prémier ordre, de grand inventeur & de grand promoteur des nouveaux calculs, cela eſt certain. Vous aurez toûjours l'avantage ſur ceux qui voudront vous attaquer par ces endroits, les faits ſont déciſifs en vôtre faveur. D'ailleurs, il eſt conſtant qu'on vous a ſouvent volé, pillé avec artifice & ingratitude, & qu'on ne peut vous accuſer de vous être jamais ſervi du bien d'autrui, ſans lui en faire honneur. Je vous citois derniérement à Mr.* TAYLOR, *comme un modèle de l'exactitude qu'un honnête homme doit avoir en ce genre; & j'aſſociois à cet honneur Mr.* HERMANN *& Mr.* VARIGNON, *qui, ce me ſemble, ne manquent jamais, quand ils traitent une matiére après Mr.* NEWTON, *après vous, ou après quelqu'au-*

tre, d'y renvoyer & d'en parler avec honneur; bien différens en cela d'un certain Mr. HAYES, *qu'un de vos amis a cité bien à propos, & d'un grand nombre d'autres Anglois.*

In eadem Epiſtola ſub finem rem fortius exprimit. *Vôtre* ingratam æque ac moleſtam, & *le* profundiora noſtra *vous ont fait un adverſaire illuſtre* [*Mr.* TAYLOR]. *Vous auriez pu lui épargner ces reproches; car comme on dit, toutes vérités ne ſont pas bonnes à dire, ſur-tout en public; mais enfin il n'y a pas grand mal, vous vous en tirerez bien; tout ce que je vous demande, c'eſt que vous ne vous fâchiez point, & que vous ayez aſſez bonne opinion du public, pour être aſſuré que vôtre réputation, & les grands ſervices que vous avez rendus à la Géométrie, ne peuvent ſouffrir aucune atteinte, quand avec les Anglois l'ancien & le nouveau monde ſeroient conjurés contre vous. Mais cela n'eſt pas, car tous nos François en particulier, qui ont apris les nouveaux calculs dans* l'Analyſe des infiniment petits *& dans les* Journaux de Leipſic, *vous aiment & vous reſpectent comme leur principal Maitre.*

Poſſem producere innumera alia ejuſmodi teſtimonia, quæ Cl. BERNOULLIUM ab impacta *imperitiæ* nota potenter vindicant, niſi brevitatis quoque habenda eſſet ratio. Quia vero Veſtrates per Epiſtolarum documenta certare inceperunt, & ut audio, etiamnum pergunt, lubet hunc morem hac vice ulterius ſequi, adjiciendo fragmentum Epiſtolæ *Monmortianæ* ad BERNOULLIUM, die 17 Junii 1717. Ex ea namque videbis quid magnus veſter NEWTONUS de BERNOULLIO noſtro judicet. Audebiſne vocare *imperitum*, qui a NEWTONO titulum habuit Geometræ *peritiſſimi?* Ita autem MONMORTII verba ſonant: *Je ſai, qu'il* [*Mr.* NEWTON] *vous eſtime parfaitement, qu'il vous regardoit, même du vivant de Mr. de* LEIBNITS, *comme le plus fort Géométre qu'il y eut en Europe, & qu'il rend en toute occaſion la juſtice qui eſt duë, non ſeulement à vos grands talens, mais auſſi à vos découvertes. Il eſt certain, Monſieur, & il faudroit être, ou de mauvaiſe foi, ou trés-ignorant dans l'Hiſtoire de la Géométrie moderne, pour ne pas convenir, que les nouveaux calculs, & la Géometrie, à la prendre il y a 25 ans, vous doivent & à Mr. vôtre frére plus qu'à perſonne, ſans en excepter Mr.* NEWTON *& même Mr.* LEIBNITZ. L'Analyſe des infiniment petits, *& les* Journaux de Leipſic *ont fait preſque tout ce qu'il y a aujourd'hui de Géométrie, & on ſait la part que vous y avez. Ce que Mr.* LEIBNITZ *donna en* 1682 *étoit très-obſcur & aſſez borné, quoique digne d'admiration; c'étoit une ſource très-féconde; mais où vous & Mr. vôtre Frére avez pris cette ſource, elle étoit encore très-petite, vous l'avez rendu un grand fleuve. Il falloit de grands génies pour apercevoir, découvrir, & nous enſeigner tant de magnifiques applications que vous avez faites de ce calcul. Je ſuis fâché que Mr.* LEIBNITZ *n'ait pas répondu aux*

Anglois & aux préjugez qu'il tirent contre lui, principalement des deux Lettres de Mr. NEWTON *imprimées dans les Ouvrages de* WALLIS. *J'ai examiné avec ſoin les piéces qui ſont entre les mains du public. Comme j'ai deſſein de donner quelque jour une* Hiſtoire de la Géométrie, *qui eſt déja aſſez avancée, je tâcherai de m'inſtruire à-fond de tout ce qui a rapport à cette fameuſe querelle, qui partage deux ſavantes nations, & de rendre à chacun l'honneur qui lui appartient légitimement; quand vous voudrez je vous communiquerai ce que je penſe. Pour vos droits, & ceux de Mr. vôtre Frére, ils ſont indépendans de cette diſpute; le tribunal de Mr.* KEILL *n'eſt pas ſouverain, & on en peut appeller. Je le croi fort bon Géométre; mais il eſt chaud, prévenu, & paſſionné. Il me paroit encore qu'il a naturellement l'eſprit de travers: J'ai vû des raiſonnemens pitoyables de lui ſur la Phyſique, & de plus pitoyables ſur la Métaphyſique. Je ſai qu'il a voulu écrire contre moi; il m'auroit fait aſſurément bien de l'honneur; c'eſt à l'occaſion d'une certaine lettre: On m'a dit que Mr.* NEWTON *l'en avoit empêché.*

Non putem te dicturum aliquid hic adulationi eſſe tribuendum: veſtrum quippe NEWTONUM revera de Cl. BERNOULLIO noſtro eam, quæ hic dicitur, habere honorificam opinionem, ac cum NEWTONO ſimiliter ſentire HALLEIUM, alioſque magnos ex veſtratibus Geometras poſſem id docere per alias quoque literas ex Anglia ipſa ſcriptas, partim a Cl. MOIVRÆO, partim ab aliis, tum & ab ipſo NEWTONO. Docebo, ſi te de fide mea dubitare videro.

Sed quid his diutius immoror? Nemo non videt, Clariſſime TAYLORE, contemtum quem ſimulas de Cel. BERNOULLIO in maximam ejus laudem vergere. *Quemadmodum enim in magnis liberiſque civitatibus,* CORNELIO NEPOTE ita ſentiente, *ſic quoque in Republica litteraria eſt hoc commune vitium, ut invidia gloriæ comes ſit, & libenter de his detrahant, quos eminere videant altius.* Sed doleo hoc vitium uſque adeo tibi innatum, ut ne quidem diſſimulare queas. Velles quidem moroſiori tuæ intemperiei varias prætexere querimonias, ne ex mera invidia contra BERNOULLIUM tam inhumaniter ſcripſiſſe videreris, ſed nihilo graviores, quam quas Lupus in fabula movit Agno inferius ad rivum ſtanti & Lupo aquam turbanti: cum enim omnes tuas rationes frivolas eſſe perſpiceres, tandem quo te amplius verteres neſcius, feſtivum comminiſceris figmentum: ſcilicet BERNOULLIUS & ſocii ejus Anonymi vobis ſunt infenſi, atque univerſos Anglos indigne tractarunt. Gravis ſane accuſatio! ſed ſimili modo Lupus Agnum accuſaverat: quid? BERNOULLIUS, quia ad KEILLII tuamque cantilenam ſe componere noluit; quia a vobis inſolenter & elata criſta laceſſitus ſe defendit; quia ſuperciliosos veſtros contemtus & inſultus repreſſit; quia vobis duobus provocantibus comparuit; quia veſtris vos armis in fugam vertit, dum Problemata veſtra, quibus ſolvendis ipſi impaſſes eratis, feliciter enodavit; quid, inquam, an ideo BERNOULLIUS vobis omnibus eſt infenſus? an ideo univerſos Anglos indigne tractavit? Nimium tibi tribuis, KEILLIOque tuo, cum putas in utroque veſtro totius Anglicæ nationis honorem verſari; ille ſaltem Thraſo Atticus, qui omnes naves in portum appellentes ad ſe pertinere ſibi imaginabatur, multum abeſt, quin rem tantam ſibi tribuerit.

Si quis alius, Cl. BERNOULLIUS certe doctorum Anglorum ingenia & merita magni ſemper fecit; de NEWTONO ejuſque inventis non ſine ſumma laude mentionem fecit quavis data occaſione; quod ſolidiorem ipſi parit gloriam, quam quæ ex turpi nonnullorum veſtrorum adulatione emergit. Sunt multi alii ex Britannica gente Viri, quos, ob doctrinæ præſtantiam, ingenii acumen, ac morum probitatem, impenſe laudat & amat Cl. BERNOULLIUS noſter: habet enim Anglia HALLEIUM, CRAIGIUM, BURNETUM, alioſque eruditos Geometras, quibus merito accenſemus MOIVRÆUM, quamvis naſcendi ſorte Gallum, longa tamen habitatione Anglum: horum virtutes animi, & pereximias ingenii dotes & vires debito honoris cultu ſemper proſequitur Cl. BERNOULLIUS, ab iiſque viciſſim amatur; quin & tuam, quod non ignoras, ambivit amicitiam, ad ingenium tuum reſpiciens, non ad mores, quos nondum cognoverat. Sed aliter tibi viſum eſt, nec aliam ob cauſam reſpuiſti oblatam amicitiam, quam quod nomen *Bernoullianum* ambitioni tuæ obſtaculo eſſe putaveris. NEWTONUS ſibi gratuletur, quod Anglus ſit, alias idem a te ipſi quod BERNOULLIO contingeret; imo fortaſſe durius, nam ſumma petit livor: certe non eſt operæ pretium ut nobis perſuadeas, *te cauſæ Newtonianæ non eſſe tam pertinaciter addictum*; credimus, etiam ſi non dicas, te quidem externe ſimulare ſummi hujus Viri fautorem, dum eidem tamen, ſi per te ſtaret, inventorum gloriam avide ſurriperes, quod quodammodo patet ex ſupra dictis.

Ergone tandem agnoſcis, Clariſſime TAYLORE, te in Iſoperimetro uſum eſſe analyſi Autoris *Jacobi* BERNOULLII, *viri*, ut loqueris, *a rebus mathematicis optime meriti, cui debitos nunc perſolvis honores?* Ingenua fuiſſet hæc & te digna confeſſio, ſi ſtatim in ipſo loco, ubi ea analyſi uſus fuiſti, ſponte monuiſſes, unde eam hauſeris; ſed cum, detecta demum fraudulenta uſurpatione plagium amplius palliare non poſſis, confeſſionem iſtam tuam, utpote extortam, exſibilamus & nauci facimus; neque urbanitati tuæ tribuimus, quod defunctum *Jacobum* BERNOULLIUM, ob ejus merita de rebus mathematicis laudare & ipſi nunc debitos honores perſolvere volueris. Eandem haud dubie cum Fratre ſortem experiretur, ſi viveret.

Scripta placent a morte fere: quia lædere vivos
Livor, & injuſto carpere dente ſolet.

Accedo

Accedo tandem ad BERNOULLII noſtri Solutiones Iſoperimetrorum, in quibus carpendis dentes tuas præcipue exerces; ſed quam feliciter videbimus. Poſtquam omnem moviſſes lapidem, ut ex ſcriptis *Bernoullianis* aliquem extunderes errorem; tandem tibi viſus es reperiſſe ubi graviter ceſpitaverit BERNOULLIUS, nimirum in ſolutione priore edita in *Commentariis Reg. Scient. Acad.* 1706 †. Reapſe aliquid hic ex inadvertentia irrepſiſſe, Cl. BERNOULLIUS ipſe primus animadvertit, & pro candore ſuo publice monuit, nemine urgente. Tu vero lapſum leviorem, qui non tam methodum afficit, quam ejus circumſtantiam, tantopere exaggeras, invidorum more, ut quis crederet errorem a BERNOULLIO commiſſum fuiſſe capitalem: audes namque dicere, *priſtinam illam analyſin ejus a capite ad calcem quaſi unum aliquod vitium maximum conſtituere*; ſed cum eo venis, ut audax aſſertum probare jam velis, delaberis in aliquot ratiunculas & cavillas, quarum me miſeret.

p. 236 hujus Tomi.

Parturiunt montes, naſcetur ridiculus mus.

Primo vocas ridiculam ſubſtitutionem, per quam BERNOULLIUS *ex profundioribus ſuis neſcis quibus*, deduxit æquationem $FO \times \Delta RO = \phi\omega \times \Delta\rho\omega$. Ridendo res non conficitur, debebas monſtrare falſitatem hujus æquationis. Ego, ringente invidia, ſuſtineo æquationem eſſe bonam, atque ex præmiſſis ratiociniis [quæ tu per jocum profundiora vocitas] legitime deductam: ſi contrarium ſentis, tuum eſt, non per riſum, ſed per argumenta ſolida demonſtrare, aut latere vitium in præmiſſis illis, aut concluſionem inde non legitime eſſe petitam: utrumvis præſtiteris, magnus nobis eris Apollo. Sin ridere tantum perrexeris, reſpondeat PHÆDRUS, in quo forſan legiſti ſequentia:

Plerumque ſtulti, riſum dum captant levem,
Gravi diſtringunt alios contumelia,
Et ſibi nocivum concitant periculum.

Præterea tibi diſplicet æquationis inventæ $FO \times \Delta RO = \phi\omega \times \Delta\rho\omega$ transformatio in hanc, $FO \times \Delta PF = \phi\omega \times \Delta\pi\phi$; quia PF cum ſit minor quam RO & $\pi\phi$ major quam $\rho\omega$, hinc ut putas impoſſibilitas ſequatur. Fateor equidem ſi PF & RO, nec non $\pi\phi$ & $\rho\omega$ different quantitate aſſignabili, hoc eſt, ſi differentiæ cum ipſis quarum ſunt differentiæ eſſent comparabiles; transformationem fore vitioſam: ſed cum hic habeatur FO pro una particula elementari curvæ quæſitæ, & $\omega\phi$ vel $O\phi$ pro altera priori contigua; non video quid impediat, quominus PF pro RO & $\pi\phi$ pro $\rho\omega$ tanquam æquivalentes ſubſtitui poſſent: hoc quippe in calculo infiniteſimali praxis requirit ſolemniſſima: idque hic magis, quod puncta

† N°. LXXV. pag. 424. Tom. I.

puncta F & Φ tam prope ad O & ω accedere conſiderari poſſint, ut FP & $\Phi\pi$ reapſe cum RO & $\rho\omega$ confundantur. Quod ſi autem tu cenſeas, Vir clariſſime, in hoc negotio diſcedendum eſſe a praxi conſueta, demonſtrationem tuam, ſed citra riſum, præſtolabimur.

Dicis porro, *parum ſcienter fingi curvaturam in* F *eſſe ad curvaturam in* Φ *ſicut eſt* P O *ad* F O; quaſi vero hæc ratio per fictionem fuiſſet aſſignata, & non potius per ipſam analyſin ita determinata. Hinc profecto non capio, quid tibi velis cum ais: *nihil in hac tota analyſi eſſe, quod privilegium hoc vindicet puncto* O *potius quam alii cuilibet puncto* ω *in arculo minimo* FO $\omega\Phi$ *ubivis ſumto. Nec curvedinem tam ridicule æſtimari.* Urges inſuper, *nimis imperite fieri* $mn = ddx$, $nl = ddy$, & $ml = dtddy : dx$, & poni debere $mn = \frac{1}{2} ddx$, $nl = \frac{1}{2} ddy$, & $ml = dtddy : 2dx$. Omnes potius objectiones tuas excuſaberis quam iſtam; aut enim calculum differentialem non intelligis, aut nimio cavillandi pruritu laboras. Si prius, imperite agis alios imperitiæ arguendo, dum recte procedunt. Si poſterius, næ! iterum monſtras, quam perverſo in ſitu tibi ſit jecur livido felle turgens. Quid? ſi curva inſtar polygoni infinitorum latuſculorum conſideratur, uti certe hic fit, quod ex Fig. 4* patet, imo ex ipſa quoque Fig. 3, ubi angulus acutiſſimus lFm diſerte ſumitur pro angulo curvedinis; quod non eſſet, niſi Fm ſumeretur pro parte prolongata latuſculi præcedentis & ipſi Fl contigui; audebiſne, ſtante hac ſuppoſitione, negare $mn = ddx$, $nl = ddy$ & $ml = dtddy : dx$. Inquies forſan, curvam non recte conſiderari tanquam polygonum infinite parvorum laterum. Sed quidni hoc liceat, cum ſit res meri arbitrii? ſive enim contempler curvam veluti conflatam ex infinitis lineolis rectis, ut hic fit & multis aliis occaſionibus, præſertim in rectificationibus curvarum: ſive curvam mihi ſiſtam tanquam ex arculis circularibus compoſitam, ſicuti facere ſolemus in illis, quæ per evolutiones generatæ concipiuntur; certe nil niſi verum inde emerget, modo cetera ex aſſumta hypotheſi recte ratiocinando procedam. Poſitis itaque principiis licitis; quis unquam recte ratiocinando peccavit, aut verum non eruit? Vellem, mi optime TAYLORE, ut mihi vel unicum indicares ex Geometris calculo differentiali utentibus, ſive Gallus ſit, Italuſve; ſive Germanus, qui non idem mecum ſentiat, quippe non dicat perperam a te carpi $mn = ddx$, $nl = ddy$ &c. Provoco, non ad Celeb. WOLFIUM, alioſque Germanos, utpote tibi ſuſpectos; neque ad Cel HERMANNUM, ſiquidem Helvetios Germanis annumerare volueris; ſed provoco ad inſignes viros, VARIGNONIUM, MANFREDUM, RICCATUM, ipſumque qui veſtratibus impenſius favet *Abbatem* CONTIUM; hic quippe, ut & Cl. VARIGNONIUS, quod noſti & quod novimus ipſi, te jam in faciem damnarunt, cum nuper Pariſiis eſſes: reli-

* Tab. XVIII.

reliqui damnabunt certo certius. Hoſcine ergo tu omnes, cum BERNOULLIO noſtro, *Imperitorum* phalangi aggregabis, tuque ſolus, cum KEILLIO tuo, peritiam omnem poſſides! Sed ut videas porro, quam parum rem acu tetigeris, mi TAYLORE, monere te volo quod tibi ipſi contradicas. Laudas & approbas regulas extantes in libro *de Analyſi infinite parvorum*; interim ſecundum has ipſas regulas ſcribendum eſt $mn = ddx$, $nl = ddy$, ut ſcripſit Cl. BERNOULLIUS, non vero $mn = \frac{1}{2} ddx$, $nl = \frac{1}{2} ddy$, ut tu ſcribis. Conſule ſi lubet hujus libri art. 64. num. 1. pag. 57, quo ſpectant Figuræ 48 & 49; ubi quod eſt kc & cn, id in Fig. 3 Schediaſmatis *Bernoulliani Comment. Paris* 1706 † eſt nl, & mn, vel viciſſim, prout BP, aut BG, pro axe ſumitur. Invenies in fine dictæ paginæ hæc verba: *il eſt évident alors que le triangle* mgk *eſt ſemblable & égal au triangle* MRm, & *qu'ainſi* $kc = ddy$, & $cn = ddx$. Hoc præcipit regula prælaudati libri, quem non reprobas; reprobas vero $mn = ddx$, $nl = ddy$ in Figura *Bernoulliana*; quod idem eſt ac $cn = ddx$, $kc = ddy$ in Fig. libri. Vides in quem te conjiciat labyrinthum tua aliis contradicendi libido: quod carpit TAYLORUS, id laudat BROOKIUS: Quanta triumphandi materia!

Dicite, io Pæan! &, io, bis dicite Pæan!

Inunc, & perſuade quibuſdam veſtris ſciolis, id quod dicis, nempe *peſſimum eſſe in ſolutione* Bernoulliana, *quod vitioſiſſimis hiſce principiis perfectiſſimam allegaverit concluſionem.* Quid? ſi principia ſunt vitioſa, quo quæſo miraculo factum, ut perfectiſſima tamen concluſio ex illis deduceretur; cum ſit contra omnem probabilitatem, imo moraliter impoſſibile, tot veras concluſiones elicere, quot ſunt caſus particulares, ſi falſa eſſent principia quibus illæ nituntur. Non ſufficit paradoxum hoc aſſerere, ſed incumbit tibi dilucide & diſtincte oſtendere, quomodo ex principiis, licet falſis, mirabili adeo fato veritas promanaverit; deinde qui factum, ut prima illa ſolutio, quam tu omnino corruptiſſimam appellas, eleganter tamen adeo coincidat cum altera indirecta, priori ſtatim ſubjuncta, ex natura preſſionis liquidorum deſumta, cui tu gratiam facis, quamque ideo ſilentio tuo approbas.

Nihilo felicius tibi ceſſit, Vir conſultiſſime, captum conſilium conatuſque tuus carpendi alteram directam Cl. BERNOULLII ſolutionem Iſoperimetrorum editam in *Act. Lips. Anni* 1718 menſibus Jan. & Febr. * Incipis criſin tuam a criminatione, qua BERNOULLIO imputas, eum fraternis tuiſque ſolutionibus *malevolum detrahere*, Fratri *prolixitatem*, tibi *obſcuritatem* objiciendo. Objecit utique Cl. BERNOULLIUS Fratri ſuo prolixitatem, tibi obſcuritatem; ſed quid inde mali? an ideo

erit

† Tab. XVIII. * Supra N°. CIII. pag. 235

erit *malevolus detractor* ? Prolixitas & obſcuritas non ſunt crimina ; nihil ergo criminoſi vobis objecit : potuiſſet, fateor, de iis tacere ; non tamen omnino ſine ratione fuit mentionem feciſſe *Fraternæ* prolixitatis, & *Taylorianæ* obſcuritatis ; ut ſcilicet tanto clarius eniteret præſtantia methodi *Bernoullianæ*, utpote quæ cum ſit & brevis & perſpicua, ab utroque iſto vitio immunis eſt. Noſti proverbium, *oppoſita juxta ſe poſita magis eluceſcunt*. Hoc tantum quæritur, vere-ne an falſo id dixerit Cl. BERNOULLIUS ? Non putem hanc quæſtionem longa diſcuſſione opus habere. Quod namque ſpectat ad tuam obſcuritatem ; quis amplius de ea dubitabit, poſtquam legerit quæ ſupra attulimus ? De prolixitate ſolutionis *Jac.* BERNOULLII, non eſt quod multa dicam : Conferat modo qui certus eſſe volet, utriuſque & *Jacobi* & *Johannis* ſolutiones † ; oppido deprehendet ingens earum diſcrimen, ac plus forſan quam dictum eſt prolixitatis in una, ac brevitatis in altera.

Ut extenues præſtantiam ſolutionis *Bernoullianæ*, detorques ſenſum verborum dicentis, ſe ſolviſſe *ope cujusdam principii ab uniformitatis lege, quam nemo hucuſque obſervavit, petiti* ; affingiſque BERNOULLIO, quaſi his verbis innuere voluiſſet hanc uniformitatis legem nulla unquam occaſione fuiſſe adhibitam. Si æquus fuiſſes verborum interpres, ſcire te oportuiſſet, quod verba ſint intelligenda ſecundum ſubjectam materiam, nec ulterius extendenda. Haud dubie lex uniformitatis nihil novi eſt ; nec eſt, quod operoſe nobis probes a te quoque in Libro tuo adhiberi. Adhibita quippe fuit, dudum antea, ab ipſo BERNOULLIO in determinatione curvæ celerrimi deſcenſus, ſolidi rotundi minimæ reſiſtentiæ, aliiſque in occaſionibus. Non itaque *lex ipſa*, ſed *applicatio legis ad præſens negotium* aliquid novi continebat ex mente Cl. BERNOULLII : propterea hanc applicationem vocavit *principium ab uniformitatis lege, quam nemo hucuſque* [ſcilicet in hoc negotio] *obſervavit, petitum.*

Contendis deinde, novam hanc *Joh.* BERNOULLII *ſolutionem eſſe meram fraternam*, nempe a *Jacobo* datam. Ita plagii crimen, quo ipſe oneratus es, in BERNOULLIUM noſtrum devolvere velles ; ſed vano, ſed irrito conatu. Accuſationis prætextum ex eo ſumis, quod *Johannes* poſt *Jacobum* contemplatus fuerit arculum minimum curvæ quæſitæ, tanquam ex tribus lineolis elementaribus compoſitum ; item quod Lemmata, quamvis aliter demonſtrata, ſolutioni præmiſerit ; tum & alia generalia, quibus non hic tantum, poſt *Jacobum*, ut tu falſo ſupponis, ſed jam olim aliis in locis ante *Jacobum* uſus eſt *Johannes*. Si hæc faciunt, ut duæ iſtæ utriuſque ſolutiones pro una eademque ſint habendæ, certe Cl. HERMANNUS, qui in ſua ſolutione ſimili *Bernoullianæ*, eodem tempore edita, iiſdem prorſus præliminaribus uſus, Plagiarii nomen, te ita judicante, non effugiet. Interim egregio tuo ratiocinandi ſpecimi-

† Numeris. CII. & CIII.

ne pariter conficiam, omnia quæ pro quadratura & rectificatione curvarum a Geometris recentioribus detecta ſunt, deberi ARCHIMEDI, aliiſque veteribus Mathematicis ; ex quorum nempe ſcriptis haud obſcure elucet, habuiſſe eos aliquem calculum infiniteſimalem ; tum & conſideraſſe curvas, ceu polygona infinitorum laterum, eorumque areas per ordinatas parallelas reſolviſſe in trapeziola. Quin & tota Geometria ex Elementis *Euclideis* propullulavit : Ergo omnia noſtri temporis inventa accepta referenda ſunt primis *Euclideorum* inventoribus. Quid itaque tandem remanebit hodiernis ? Nihil.

Sed aliter cenſuerunt Viri Doctiſſimi, qui livoris œſtro non perciti inventis verum ſtatuere norunt pretium. Quanti æſtimaverit Cel. VARIGNONIUS hanc quam tu depretias ſecundam BERNOULLII Iſoperimetrorum meditationem, mallem ut ex ipſo inclyto viro ſiſcitareris, quam ut multis tibi referam. Audi interim MONMORTIUM tuum, judicium ſuum de eadem ferentem. Is in Epiſt. ad Autorem 26 Jan. 1718 mirabundus in hæc erumpit verba. *J'ai été charmé, enchanté, de vôtre Mémoire ſur les Iſopérimétres : tout ce qui ſort de vos mains eſt parfait. Je vous remercie de la bonté que vous avez euë de m'en donner communication.*

Nec minus honorifice loquitur in Epiſt. 28 Junii 1719 : Mr. HERMANN *m'avoit envoyé une ſolution avec l'analyſe du Probléme des Iſoperimétres, & j'en ai été plus content, que de celle que j'ai vu depuis* (de lui) *dans les Journaux ; c'eſt de cette ſolution peu différente dans le fond de la vôtre, & dans laquelle le principe de l'uniformité eſt employé, que je parlois à Mr.* TAYLOR. *Quoique ſon analyſe ſoit aſſez nette & courte, qu'il l'étende même à d'autres Problèmes ; je conviens ſans peine que la vôtre l'emporte par ſon extrême élégance, & auſſi par le grand nombre de très-belles applications, que vous faites de vôtre principe d'uniformité.* Vides hic Analyſin aſſertam BERNOULLIO noſtro, quam tu ipſi derogatam cuperes : vides agnoſci elegantiam applicationum principii uniformitatis, quod tu ex invidia tanquam nihil novi explodis : vides denique *hanc prolem* quam maxime *dignam eſſe ſuo parente*, dignam proinde, ut tuam inſulſam Ironiam revoces ; talem enim tamque *dignam prolem*, tu nullam hucuſque edidiſti in lucem, ac dubito an unquam ſis editurus.

Cum tam male tibi cedant joci, conſultius faceres ab iis abſtinere, quam iis intempeſtive indulgendo temet ipſum riſui exponere. Nam ecce ! quam fatui ſint ſales tui, mi TAYLORE. Dicis jocabundus, te *neſcire quo fato fiat, ut in hac materia de Iſoperimetris*, BERNOULLIUS *Deos omnes ſemper offendat iratos* ; ſed mox hujus joci oblitus & eodem fere halitu fateri cogeris : BERNOULLIUM *favente Minerva calculum pro Iſoperimetris tandem concinnaſſe, & reddidiſſe elegantiorem.* Quid agis, Jocator ? Habet Cl. BERNOULLIUS faventem Minervam, Deam nempe Humanitatis, ſcientiarum & artium; ſed offendit Deos iratos, at quales Deos? haud dubie Faunos, Sylvanos, Panes & hujuſmodi gentium Deos agreſtes, paluſtreſque, quos tibi propitios non invidet, ſibi iratos non curat BERNOULLIUS Minervæ dilectus. In poſterum ſi jocari geſtias, jocare cautius, ne in caput tuum recidat telum.

Propero ad finem invectivæ tuæ; tametſi plurima, quæ ne in immenſum excreſcat reſponſio, intacta relinquo; vix enim lineam invenio, ubi non lateat aculeus. Tandem, ut quorundam odium excites BERNOULLIO noſtro; audes neſcio quo colore ipſi exprobrare, quod *primas ſibi in ſublimiori Analyſi obſtinata ambitione arroget.* Accuſatio eſt falſiſſima; noſter enim nunquam eo proceſſit arrogantiæ, ut ſibi primas deberi contenderet; etſi forſan quædam præſtiterit ab aliis pro derelictis habita; unde aliquam ſaltem ſibi palmam attribuere potuiſſet: nunquam tamen modeſtiæ limites excedens, tuo veſtrorumque nonnullorum more auram popularem captans nimium ſibi plauſit.

Veriſſimum eſt, cujus tu nunquam contrarium probabis, Cl. *Joh.* BERNOULLIUM, præterquam quod cum Fratre ſuo calculum differentialem ad eam quam nunc habet perfectionem perduxerit, ipſo LEIBNITIO paſſim fatente, hoc inſuper peregiſſe, ut *calculum*, quem vocavit *integralem*, proprio marte, a nemine præmonitus eruerit, atque in Regulas Algorithmi, quantum rei natura tum patiebatur, redegerit; idque eo tempore, cum nondum ſciret an & quouſque LEIBNITIUS & NEWTONUS hoc negotium jam antea promoviſſent. Fuit itaque ejus inventor BERNOULLIUS, etſi non primus; *inveniſſe autem ingenii eſt*, inquit alicubi WALLISIUS veſter, *ſed primum inveniſſe fortunæ.* Nihil tum viderat BERNOULLIUS de ſcriptis *Newtonianis*, nec editis, nec ineditis; imo nec *Principia Phil. Nat.* ipſi adhuc erant viſa. Non eſt itaque quod glorieris Noſtrum a Veſtratibus tantillum profeciſſe; utrum alii ab ipſo profecerint, vidiſti partim ex literis quibuſdam *Monmortianis ſupra allegatis.*

Quod in ſpecie ſpectat ad *Analyſin infinite parvorum* ab Illuſtr. HOSPITALIO editam; in dubium revocas, *an regulæ extantes in illo libro a* BERNOULLIO *emanaverint*, proinde, *an hic ſit idoneus, qui alios docuerit regulas differentiandi differentias.* Si tibi ſcrupulum hunc, quem maligne moves, tollere non poteſt ipſa Illuſtr. Editoris candida confeſſio, quamvis nonnihil generalis, contenta in Præfatione, ita ſonans: *Je reconnois devoir beaucoup aux lumiéres de Mrs.* BERNOULLI, *ſur tout à celles du jeune, préſentement Profeſſeur à* Groningue: *&c.* ſi hoc, inquam, tibi non ſufficit, audi LEIBNITIUM rerum tum temporis geſtarum maxime gnarum. Is in *Novis Reip. Liter.* M. Novembr. 1706 p. 526, ſequens prehibet teſtimonium: *On le voit*, inquit, *par l'ouvrage de Mr. le* Marquis *de l'*HOSPITAL, *à qui Mr.* BERNOULLI *le jeune*

en avoit communiqué les fondements & la matiére à Paris. Adjunge Iluſtr. LEIBNITII teſtimonio, quod forſan recuſabis, alterum ab optimo tuo amico MONMORTIO datum, tanto utique majoris momenti habendum, quod ſit extra omnem veriſimilitudinem illum aliquid, in præjudicium veritatis, contra populares ſuos in gratiam alicujus extranei teſtari voluiſſe; adeo ut certum ſit illum locutum eſſe ex animi ſententia, convictum de rei veritate, quam, quia ſcribebat Inventorum mathematicorum Hiſtoriam, ſtudioſe & ſollicite inveſtigaverat. In Epiſtola jam citata 26 Junii 1718 ad Cel. BERNOULLIUM hæc habet: *Je ſuis maintenant ſuffiſamment inſtruit par vôtre lettre, & plus encore par la Lecture que j'ai faite, il y a 13 ou 14 ans, des Cahiers & leçons, que vous avez communiqué à Mr. le* Marquis *de l'*HOSPITAL; *le Pére* REYNEAU *en avoit un Manuſcript bien complet, qu'il me prêta.*

Huc faciunt quæ in eadem Epiſtola interjectis aliquot paginis adducit. *J'ai vû vos Leçons ſur un Manuſcript non ſuſpect; vous pourrez les rendre telles pour tout le public, en les faiſant imprimer avec certaines formalitez, qui ôtent tout ſujet de défiance & occaſion de reproche. J'admet auſſi les preuves que nous donne Mr.* NEWTON, *qu'il n'a appris de perſonne les régles de prendre les différences, & d'intégrer. Mais enfin étant jaloux, ſoit pour ſa gloire, ſoit pour celle de ſa Nation, de l'honneur de cette découverte, il devoit la publier le prémier; il ne ſeroit pas dans le cas où il ſe trouve aujourd'hui, 1° de partager l'invention avec Mr.* LEIBNITZ, *2°. de voir que l'honneur d'avoir fait les plus belles, les plus difficiles, & les plus importantes applications de ces nouveaux calculs vous appartient & à Mr. vôtre Frére; 3°. il ne ſeroit pas obligé, comme il l'eſt aujourd'hui, à prouver ſon droit à Gens difficiles, qui prétendent que dire,* literis tranſpoſitis, *qu'on ſait* fluxiones invenire & vice verſa, *n'eſt pas une preuve aſſurée qu'on le ſache.*

Quæ ſequuntur excerpta ex literis MONMORTII ad Noſtrum datis 28 Octobr. 1718, rei de qua dubitas veritatem ſpecialius probant; quandoquidem demonſtrant Illuſtr. HOSPITALIUM confeſſum eſſe ſe illas Lectiones habere: *C'eſt d'un ami*, inquit MONMORTIUS, *qui étoit à Paris avec vous, & qui copioit vos leçons pour Mr. de l'*HOSPITAL *que le Pére* REYNEAU *a tiré ſon Manuſcript, dont j'ai bien remarqué quelques petits lambeaux dans ſon livre* Analyſe démontrée: *Le Pére* BIZANCE *en avoit auſſi un. Comme je preſſois Mr. le M. de l'*HOSPITAL *de me le prêter; il me donna une lettre pour le Pére* BIZANCE, *par laquelle il le prioit de me prêter le ſien; mais apparemment le mot étoit donné pour n'en rien faire, car je ne l'eus point; le P.* REYNEAU *me prêta le ſien environ un an aprés.*

Viri hoc loco nominati ſunt, ni fallor, adhuc in vivis; tuum erit, ſi ulteriorem deſideras confirmationem, illos compellare; veritati non renuent teſtimonium. Verum Lectiones illæ in uſum HOSPITALII

Pariſiis conſcriptæ, quamvis copioſæ, minimam tamen conſtituunt partem eorum, quæ Noſter in Patriam redux, & poſtmodum in Belgium translatus, eidem ſuppeditavit, durante longo commercii Epiſtolici tempore. Nunquam finirem, ſi omnia in rei fidem afferre vellem documenta ex ipſis Litteris *Hoſpitalianis* deſumpta: pauca tantum inſtar omnium ſufficiant. In Epiſtola ad Cl. BERNOULLIUM 8 Decembr. 1692; *Vous voyez, Monſieur*, inquit, *que je continue à vous prier de m'inſtruire, & que je me ſers de la liberté que vous m'avez donnée là-deſſus.* Ibidem ſequentia leguntur: *Je voudrois bien auſſi que vous m'envoyaſſiez une méthode générale, pour reſoudre les Problêmes tels que celui-ci: ſoit donnée une demi-Ellipſe quelconque* AMB, *dont les demi-Axes ſont donnés de poſition, & ſuppoſant qu'il y ait une infinité de Paraboles qui paſſent toutes par le point* A, *& dont les ſommets des Axes ſoient dans la demi-Ellipſe, il faut trouver la ligne qui les touche toutes. Au-lieu d'une Ellipſe & des Paraboles on pourroit ſuppoſer d'autres lignes à l'infini. Ce Problême me paroit avoir quelque rapport à ce que dit Mr.* LEIBNITZ *dans les* Actes de Leipſic *du mois d'Avril de cette année.* Generalis hujus Problematis ſolutio, quam BERNOULLIUS petenti tranſmiſit, conſpicitur in *Analyſi infinite parvorum* pag. 131 & ſeqq.

Epiſtola HOSPITALII 2 Jan. 1693 inter multa alia hæc continet. *Je voudrois bien ſavoir comment vous êtes parvenu à cette conſtruction. Je vous prie de m'envoyer la maniére dont Mr. vôtre Frére trouve une ſuite infinie égale à la ſoutendente d'un arc de cercle donné. Vous me ferez tout-à-fait plaiſir de m'envoyer la conſtruction des Courbes que vous me marquez. Je ne déſeſpére pas que vous ne mettiez dans la perfection la méthode des tangentes inverſe, & que vous ne réſolviez enfin par ſon moyen la courbe de deſcente de Mr.* LEIBNITZ. *Vous voulez bien que je me ſerve de la liberté que vous m'avez donnée, en vous priant de penſer à vôtre loiſir aux queſtions ſuivantes, &c.* Per curvam deſcenſus *Leibnitianam* intelligit illam quæ alias vocatur Iſochrona Paracentrica, cujus ſolutionem & conſtructionem invenies in *Actis Lipſ.* 1694, M. Octobr. † Quæſtiones quarum ſolutiones deſiderat Illuſtr. HOSPITALIUS extant ſolutæ in *Anal. infin. parv.* p. 139 & ſeqq. uſque ad finem ſectionis VIII.

In Epiſtola quæ præcedentem immediate ſequitur, 20 Febr. 1693, leguntur hæc verba: *Vous avez très-bien réſolu tous les Problêmes que je vous propoſois, & même au-dela de mon attente; ce n'eſt pas que je ne ſois perſuadé que vous êtes capable de choſes bien plus difficiles, mais j'avois peur que la longueur du calcul ne vous ennuyât...... Je trouve dans vôtre lettre deux choſes nouvelles, qui me paroiſſent très-bien imaginées. L'une eſt la ſolution de la courbe* Leibnitienne, $addx = dy^2$...... *L'autre conſiſte dans l'application de la régle de l'inverſe des tangentes pour conſtruire l'équation*

† Supra. N°. XIX. pag. 119. *Tom. I.*

différentielle $axx\,dy = byydx + cxxdx$...... *Je n'ôſerois vous rien demander de vôtre nouvelle eſpéce de calcul* [intelligit calculum percurrentium ſeu exponentialium, cujus Principia in *Actis Lipſ.* 1697 * M. Mart. ſunt tradita] *j'eſpére cependant être des prémiers à qui vous la communiquerez.*

2. Sept. 1693 petuntur a Cl. BERNOULLIO trium ſequentium Problematum ſolutiones: *Je vous demande comment vous avez trouvé la conſtruction des tangentes des courbes des chalouppes que Mr.* VARIGNON *m'a communiquée; & vous voulez bien que je vous propoſe auſſi en même tems de trouver les tangentes des courbes que décrivent les points moyens entre les chalouppes. Je vous avoüe que je ne me ſuis pas fort appliqué à réſoudre l'équation* $(\sqrt[2]{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{ax^3}) = y$, *lorſque* $x = a$: *car ne voyant point de jour pour y réüſſir, puiſque toutes les ſolutions, qui ſe préſentent d'abord, ne ſont pas exactes; je n'ai pas voulu y perdre de tems inutilement, & j'aime mieux l'apprendre de vous, quand vous m'en voudrez faire part.* Poſtquam longo tempore, crebriſque litteris ſolicitaſſet horum ſolutiones; tandem inſtanter ſollicitanti eas communicavit; primi Problematis ſolutionem ſiſtit Propoſ. 16 Sectionis II *Anal. inf. parv.* Alterum ſolutum habetur ibidem Propoſ. 11 Sect. ejuſdem; tertium autem ſolutionem ſuam ſortitur Propoſ. 1 Sectionis IX.

D. 19. Febr. 1695 proponitur quæſtio varias partes complectens. *Voici maintenant une queſtion ſur laquelle je vous prie de me ſatisfaire: Je demande la maniére de déterminer les points de la plus grande largeur d'une roulette décrite par la révolution d'un cercle ſur un autre cercle, & cela ſoit que le point décrivant ſe trouve ſur la circonférence du cercle mobile, ou au déhors, ou au dedans. Je demande auſſi, lorſqu'il ſe trouve en dedans, la maniére de déterminer le point d'inflexion.*

Horum a Cel. BERNOULLIO datas enodationes invenies in *Anal. inf. parv.* Prop. 3 & 4 Sect. IX. Ad quas reſpondit Illuſtr. HOSPITALIUS 16 Apr. ejuſdem anni, hunc in modum: *Vôtre maniére pour trouver les points d'inflexion* [dans les roulettes] *eſt très-ingénieuſe, & j'en ſuis tout-à-fait content; il eſt facile de trouver en la ſuivant la valeur du rayon de la développée de la roulette; mais je voudrois ſavoir, quelle figure peuvent avoir ces développées dans les deux cas; ſavoir, lorſque le point décrivant eſt hors, ou au dedans de la circonférence; je ſouhaiterois auſſi, que vous m'envoyaſſiez la quadrature de ces roulettes.* Quadraturam iſtam deſideratam exhibet Propoſitio ultima Sect. IX.

Innumera alia prætereo, ne tibi, Cl. TAYLORE, qui ad Cel. BERNOULLII laudes tabeſcis, nimium creent faſtidium. At vero ſi hæc omnia nondum tibi extorquent confeſſionem, quod Cl. BERNOULLIUS noſter ſit maxime idoneus qui alios docuerit regulas differentiandi differentias, legendam & examinandam tibi commendamus illus analyſin

* Supra N°. XXXVI. pag. 179. *Tom. I.*

lysin adhibitam pro solutione Problematis de curva projectilium in aëre resistente in quacunque multiplicata ratione velocitatum, cujus solutionem, provocatus a KEILLIO vestro, dedit BERNOULLIUS in *Actis Lips.* 1719 M. Maio, * ipse dum KEILLIUS suæ solvendæ quæstioni impar fuit, quem ideo & tu, mi TAYLORE, pro misero Analysta habes, testibus litteris quibusdam MONMORTII ad BERNOULLIUM filium datis, d. 28. Octob. 1718, ubi inter alia tuum perscribitur testimonium de fidissimo tuo KEILLIO his verbis: *Voici ce que m'écrit Mr.* TAYLOR; „ *J'attendrai jusqu'après demain à* „ *écrire à Mr.* KEILL, *& vous pouvez avertir Mr.* BERNOULLI *de* „ *ce retard, qui peut-être l'engagera à allonger encore le terme qu'il a donné à* „ *Mr.* KEILL. " *Tout ceci est en Anglois, & il ajoute ces deux mots,* „ „ *c'est pour rire*; [quid hic ridendum sit nescio] *ensuite recommençant son* „ *Anglois, il ajoute:* „ *Entre nous, je suis un peu de l'avis de Mr.* BER- „ NOULLI, *que Mr.* KEILL *is better qualified for a Champion, than for* „ *an Analyst, est plus hardi Champion qu'il n'est bon Analyste.*" *Dans une autre de ces lettres, il blame Mr.* KEILL *de son peu d'équité &c. Montrez, s'il vous plait, ce dernier article à Monsr. vôtre Pére; il est pour lui.* Lege, inquam, sequentem analysin *Bernoullianam*, quam sistimus loco speciminis concatenatæ operationis per differentialia ulteriorum graduum; judicandum postea tibi & aliis relinquimus, annon Autor sit idoneus, qui alios docuerit regulas differentiandi differentias. Nunc quidem mente & corpore vale.

* Supra N°. CXIII. pag. 392.

N°. CXXI.

JOH. BERNOULLII

OPERATIO ANALYTICA

Per quam deducta est ejusdem Solutio, quæ extat in Actis Lips. 1719 * *M. Maii, Problematis de invenienda Curva, quæ describitur a projectili gravi in medio resistente.*

Excerpta ex illius Epistola ad Illustr. MONMORTIUM d. 13. Julii 1719.

ANalysin hanc cum transmitteret BERNOULLIUS desideranti MONMORTIO, his usus est verbis: *Voici, Monsieur, mon analyse, que vous m'avez demandée, pour la solution du Problême de Mr.* KEILL, *pris dans un sens général. Vous aurez la bonté de la communiquer aussi à Mr.* VARIGNON *qui la souhaite. Vous verrez que toute cette analyse n'est qu'une chaine d'égalités déduites de la formule générale pour la détermination des resistances, que j'ai donnée dans les* Journaux de Leipsic de 1713, p. 118 & 119. * *Acta Erud. Lips. 1721. Maj. pag. 228.*

PROBLEMA.

Invenire & construere curvam, quam corpus uniformiter grave, & cujus directio gravitatis sit ad horizontem perpendicularis, describit in medio uniformiter denso: supposita resistentia in quacunque multiplicata ratione velocitatis, cujus exponens sit $2n$.

SOLUTIO.

Vid. Fig. 3, Tab. XXII, *Tom.* I.

* Supra N°. CXIII. pag. 392. † Supra N°. XC. pag. 539. & 540. *Tom.* I.

Sit LC curva quæſita, vertex L, abſciſſa $LR = x$, applicata $RC = y$, arcus $LC = r$, reſiſtentia in puncto $C = R =$ [per hyp. & quia velocitas in C eſt in ſubduplicata ratione coradii CG, ut demonſtravi p. 117. §. 97 *] CG^n; gravitas G, quæ uniformis eſt, ponatur $= c^n$. Formula reſiſtentiæ, quæ habetur p. 118 & 119 †, $R = G(2\,Cb - dCG) : \mp 2\,Cc$, mutatur, ob medii denſitatem uniformem, in hanc $CG^n = c^n(2\,Cb - dCG) : \mp 2\,Cc$; adeoque $\mp 2\,Cc = c^n(2\,Cb - dCG) : CG^n =$ [ob $dCG = Fg - Cb$, ac proin $Cb = Fg - dCG$] $= c^n(2\,Fg - 3\,dCG) : CG^n = \frac{c^n}{CG^{n-1}}\left(\frac{2Fg}{CG} - 3\frac{dCG}{CG}\right) =$ [ob $Fg : CG = Oo : CO$] $= \frac{c^n}{CG^{n-1}}\left(2\frac{Oo}{CO} - 3\frac{dCG}{CG}\right) =$ [quia Oo eſt differentiale ipſius CO] $= \frac{c^n}{CG^{n-1}}\left(2\frac{dCO}{CO} - 3\frac{dCG}{CG}\right) =$ [quoniam differentiale quantitatis cujuſvis diviſum per eandem dat differentiale logarithmi quantitatis ejuſdem,] $= \frac{c^n}{CG^{n-1}}(2\,dl\,CO - 3\,dl\,CG =)$ [quia per naturam logarithmorum $l\,CO - l\,CG = \log.(CO : CG)$] $= \frac{c^n}{CG^{n-1}}\left(2\,dl\frac{CO}{CG} - dl\,CG\right) =$ [ob $CO : CG = Cc : bc$] $= \frac{c^n}{CG^{n-1}}\left(2\,dl\frac{Cc}{bc} - dl\,CG\right) =$ [ſubſtitutis pro Cc, bc, CG, ipſorum valoribus, ſupponendo dy conſtantem] $= \frac{c^n}{CG^{n-1}}\left(2\,dl\frac{dr}{dy} - dl\frac{dr^2}{ddx}\right) = \frac{c^n\,ddx^{n-1}}{dr^{2n-2}}$

* pag. 538. *Tom. I.* † pag. 539 & 540. *Tom. I.*

$\left(2\,dl\frac{dr}{dy} - dl\frac{dr^2}{ddx}\right) =$ [quia $l\frac{dr}{dy} = ldr - ldy$] $= \frac{c^n\,ddx^{n-1}}{dr^{2n-2}}(2\,dldr - 2\,dldy - 2\,dldr + dlddx) =$ [ob dy conſtans adeoque $dldy = 0$] $= \frac{c^n\,ddx^{n-1}}{dr^{2n-2}}\,dlddx =$ [per naturam different. logarith.] $\frac{c^n\,ddx^{n-1}}{dr^{2n-2}} \times \frac{d^3x}{ddx} = c^n ddx^{n-2}\,d^3x : dr^{n-2}$.

Æquando itaque primum cum ultimo, habebimus $\mp 2\,Cc$; hoc eſt $\mp 2\,dr = c^n ddx^{n-2}\,d^3x : dr^{2n-2}$, vel [multiplicando utrumque per $dr^{2n-2}ddx$] $\mp 2dr^{2n-1}ddx = c^n\,ddx^{n-1}\,d^3x$. Sit nunc $dx = z\,dy : a$; proinde $dr = dy\sqrt{(aa + zz)} : a$, quibus in priori æquationis membro ſurrogatis oritur $\mp\frac{2dy^{2n}}{a^{2n}}(aa + zz)^{(2n-1):2}dz = c^n ddx^{n-1}d^3x$. Integretur jam æquatio, ponendo $\int(aa + zz)^{2n-1):2}dz = Z$, & habebitur, ob dy conſtans, $\mp 2dy^{2n}Z : a^{2n} = \frac{1}{n}c^n\,ddx^n =$ [ſubſtituto valore $dzdy : a$ pro ddx] $\frac{1}{n}\,c^n\,dz^n\,dy^n : a^n$. Dividendo per $dy^n : na^n$, erit $\mp 2\,n\,dy^n Z : a^n = c^n dz^n$; extracta radice exponentis n, provenit $\frac{dy}{a} \times \mp(2nZ)^{\frac{1}{n}} = cdz$, unde $dy = acdz : (\mp 2nZ)^{-\frac{1}{n}}$ atque integrando emergit tandem $y = ac\int dz \times (2nZ)^{-\frac{1}{n}}$. Quia vero $dx = z\,dy : a = czdz \times (\mp 2nZ)^{-\frac{1}{n}}$; erit quoque $x = c\int zdz \times (\mp 2nZ)^{-\frac{1}{n}}$ Datis igitur y & x per z, ſaltem per quadraturas, dantur coordinatæ curvæ quæſitæ: ipſa proin curva conſtrui poteſt. Q. E. F.

SCHOLIUM

Diviſis valoribus coordinatarum y & x per communem conſtantem $c\times(\mp 2n)^{-\frac{1}{n}}$, prodibunt coordinatæ ſimplicius expreſſæ pro curva eandem cum optata naturam habente, nimirum $y = a\int dz.\,Z^{-\frac{1}{n}}$ & $x = \int z\,dz.\,Z^{-\frac{1}{n}}$.

COROLLARIUM

Hinc patet curvæ ſubtangentem eſſe $= yz:a$; eſt enim $dy:dx = a\,dz.\,Z^{-\frac{1}{n}} : z\,dz.\,Z^{-\frac{1}{n}} = a:z$.

N°. CXXII.

LITTERÆ B. TAYLOR AD J. B. M. † *Datæ* Londini die 6 Julii A. MDCCXXII.

Acta Erud. Lipſ. 1722. Sept. pag. 45.

CUm in *Actis Eruditorum Lipſiæ* a te editis compareant ſcripta Dn. *J.* BERNOULLII, atque ejus nomine aliorum, famam meam multa cum libertate tractantia, de quibus jure merito conqueri poſſem; haud tibi iniquum videri debet, Vir Clariſſime, quod unius accuſationis inter multas refutationem iiſdem *Actis* a te inſeri rogo. Cætera quidem contemno: hoc ſolum mea intereſſe credo, ut publice reſpondeam conatibus, quibus Orbi litterato ſuadere cupiunt, me inventionem Centri oſcillationis, libro meo *de Methodo Incrementorum* inſertam, ex *Bernoulliana* derivaſſe. Hoc ſæpius inculcant; ſed ſuffecerit verba Domini N. BERNOULLII citaſſe, quæ extant *Act. Lipſ.* Menſ. Jun. 1720 p. 281 *: *ſunt inter ſagaciores Mathematicos qui ſuſpicantur, teſtibus litteris quibuſdam privatis,* Taylorianam *hanc inveſtigationem mutato veſtitu ex* Bernoulliana *fuiſſe enatam.* Huic accuſationi pauciſſimis reſpondetur. Nam extat eadem inveſtigatio noſtra in *Tranſactionibus Philoſophicis* pro A. 1713, quæ jam Menſe Majo A. 1714 publici juris erant; BERNOULLII vero inveſtigatio jam primum prodiit in *Actis Lipſienſibus* pro Menſe Junio inſequenti. Teſtes alios citare ſuperſedeo, cum refutatione plenaria contentus accuſationem atrocem retorquere ſim minime ſollicitus.

M.

† *Joh. Burcardum* MENCKENIUM. * Supra N°. CXVIII. pag. 476.

N°. CXXIII.

M. JOHANNIS BURCARDI *BASIL.*

Modeſta & ſeria Reſponſio ad litteras Brook TAYLORI, *quæ extant in* Act. Lipſ. 1722 pag. 452.

CUm ante aliquot annos Cl. TAYLORUS ſui ipſius adeo oblitus fuiſſet, ut non vereretur in lucem protrudere gravem invectivam contra Cl. *Joh.* BERNOULLIUM, quæ ne quidem contra viliſſimum hominem, citra honeſtatis læſionem, ſcribi potuiſſet; non potui, juſta indignatione plenus, quin calamum arriperem ad famam *Bernoullianam* tuendam & ab atroci injuria liberandam. Exigebat hoc pietas in Præceptorem de profectibus meis optime meritum, in Virum omnino innocentem. Multum autem abeſt, quominus uſus fuerim ſtylo *Tayloriano*, hoc eſt, tali qui ſcribentis animum arguit felle & ira obſeſſum. *Acta Erud. Lipſ.* Suppl. Tom. VIII. Sect. V. pag. 219.

Miror Clariſſ. TAYLORUM dicentem nunc, ſe conqueri poſſe de ſcriptis, neſcio quibus, Cl. *Joh.* BERNOULLII in *Actis* editis, quibus fama TAYLORI multa libertate tractetur; cum tamen BERNOULLIUS in ſcriptis ſuis nonniſi bis meminerit TAYLORI; nimirum cum ſolveret ipſius Problema, quo fuerat provocatus, deinde quoque cum anſa daretur aliquid in tranſitu monendi de TAYLORI in ſcribendo obſcuritate, tum & quod feliciter penetraverit ad *Bernoulliana* inventa profundiora; quod utrumque modeſte & non ſine præfatione honoris monuit, quamvis certe per ſe neutrum contineat accuſationem alicujus criminis, cum e contrario poſterius in laudem TAYLORI vergere magis, quam in ejus vituperium, liquido conſtet. Adeo ut non videam quid ejus bilem commoverit, ut in Cl. BERNOULLIUM tantopere exardeſceret; niſi forte id urgeat, quod in *Epiſtola pro eminente Mathematico* in cenſum venerit quorundam Anglorum, qui ſub reatu plagii verſantur: ſed jam ſæpiſſime inculcatum eſt, Noſtrum non omnia ſua facere quæ in illa Epiſtola habentur.

Fallitur TAYLORUS, quando putat, quod ſcripſi in defenſionem BERNOULLII, id me feciſſe ejus nomine, vel juſſu: ſciat enim, quod hoc feci meo nomine, & ex proprio inſtinctu; idem jus idemque fas mihi eſſe ratus, quod KEILLIUS aliique ſibi ſumpſerunt agendi cauſam NEWTONI; BERNOULLIO nihil aliud contribuente, quam ut, ad iteratas meas ſollicitationes, tandem mihi permiſerit ſuas ſchedas & litteras perluſtrare ad exquirendum inde neceſſaria, quæ in rem facerent, documenta; eandem utique veniam NEWTONUS ſuis promachis conceſſit, quod ſatis ſuperque apparet.

Porro vellet TAYLORUS perſuadere, inventionem Centri oſcillationis, libro ſuo *de Methodo increm.* inſertam, non eſſe derivatam ex *Bernoulliana*; qua occaſione format ridiculam prorſus querelam contra Cl. N. BERNOULLIUM, Noſtri filium, qui in *Actis* 1720 p. 281 *. [ubi reſpondet Recenſori Opuſculi *Tayloriani* in *Bibliotheca Anglica*] inter alia hæc habet: *ſunt inter ſagaciores Mathematicos, qui ſuſpicantur, teſtibus litteris quibuſdam privatis*, Taylorianam *hanc inveſtigationem mutato veſtitu ex* Bernoulliana *fuiſſe enatam.* Hoc TAYLORUS vocat accuſationem; dicere, aliquem eſſe in ſuſpicione & quidem apud alios, eſt-ne hoc idem ac eum accuſare? poſito, ſed non conceſſo, TAYLORUM a ſe & ſuo marte habuiſſe inventionem Centri oſcillationis, adeoque hac in parte non eſſe plagiarium; an ideo BERNOULLIUS Filius falſo dixiſſet, eum apud ſagaciores quoſdam Mathematicos eſſe in ſuſpicione, teſtibus ipſorum litteris, quod inventionem ſuam à *Bernoulliana* mutuatus fuerit? Ex quibus litteris ego eas tantum produxi, quas MONMORTIUS TAYLORI optimus amicus ſcripſerat; ubi hunc manifeſtiſſime plagii ſuſpectum habet, & alicubi etiam reum facit. In eo quidem totus nunc eſt Cl. TAYLORUS, ut oſtendere conetur inveſtigationem Centri gravitatis, quæ in Libro ſuo 1715 prodiit, jam antea extare in *Tranſactionibus Philoſophicis*, quæ Menſe Maio 1714 publici juris erant. Vidimus quidem, haud ita pridem, hanc, de qua loquitur, inveſtigationem ex *Tranſactionibus* excerptam & huc tranſmiſſam; in illa per obſcuritatis tranſennam revera vidimus quædam veſtigia illius, quæ anno ſequenti 1715 in *Meth. Increm.* prodiit; ſed de cætero magnam animadvertimus diverſitatem in modo explicandi, non minus quam in aliis circumſtantiis; & vel hinc de novo aliquis ſuſpicari poſſit, Cl. TAYLORUM, viſa demum in *Actis* 1714 Theoria *Bernoulliana*, ad hujus formam, quod fortaſſe magis arriſerit, concinnaſſe eam quam poſtea dedit A. 1715, licet *Bernoullianæ* nullam mentionem fecerit: ſecus enim non capio, quid illum permovere potuerit ad mutandam priorem, quæ extat in *Tranſactionibus.* Sed ut libere dicam, quod ſentio: viderat Vir Clariſſimus quæ jam menſe Febr. anni 1713 † in *Actis* diſſeruit Cel. BERNOULLIUS de *Oſcillationibus pendulorum a diverſa gravitatis ſpecie agitatorum*; ubi diſerte monuit in §. 23 *, in ſpeculationibus eo loco explicatis conſiſtere *fundamentum genuinum & unicum, ex quo naturaliſſime fluat determinatio centri oſcillationis in pendulis compoſitis.* Talia tam

aper-

* Supr. N°. CXVIII. pag. 476. † N°. XC. pag. 514. *Tom. I.* * pag. 528.

aperte indicaſſe ſuffecerat cuivis ea, qua TAYLORUS pollet, perſpicacia prædito ad ſupplenda reliqua, & inde deducendam Methodum ipſam, quæ alioquin ipſi nunquam incidiſſet. Hæc ratio eſt, cur Methodus, quam prima vice in *Tranſactionibus* dedit, cum quædam ſupplenda fuerint per conjecturas, informis & imperfecta maneret; donec *Bernoulliana* Theoria, ſequenti anno 1714 clariſſime & ad longum expoſita, Cl. TAYLORO anſam præbuiſſet priorem ſuam refingendi, eamque poſtmodum anno 1715 ſub alio vultu in lucem emittendi.

Ita liquet tantum abeſſe, quominus ſuſpicio plagii ſit ſublata per id quod ex *Tranſactionibus* allegat, ut ea potius novo hoc accedente probabilitatis robore non parum confirmetur. Interim miramur, quod Cl. TAYLORUS, dum ſuſpicionem hanc tam ſollicite amoliri conatur, reliqua tamen plagii exempla ſibi objecta ſilentio præterierit, illud præſertim, quo oſtenſum eſt ſeriem illam quam pro ſua venditavit p. 38 *Meth. Increm.* $\boxed{rs} = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dddot{s} +$ &c. nonniſi in notandi modo differre ab hac $\int n\,dz = nz - dn\,\frac{z^2}{1.2.dz} + d^2n\,\frac{z^3}{1.2.3.dz^2} - d^3n\,\frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3}$, + &c. quam Cel. *Joh.* BERNOULLIUS exhibuit in *Actis* 1694 p. 438 †, hoc eſt, plusquam quatuor luſtra ante exiſtentiam libri *Tayloriani.* Hoc nunc, quo manifeſti plagii poſtulabatur, intactum relinquit: quid hoc ſibi vult? illud haud dubie; Qui tacet conſentire cenſetur.

Cætera quidem contemnit Vir Clariſſimus, nec refellere curat, quæ cum authenticis Teſtimoniis adſtruxi: ſed contemtus iſte rerum veritatem non deſtruit; cum præſertim principium habeat haud abſimile illi, quo uſa vulpes, quæ ſummis ſaliens viribus, uvam, quam appetebat, ut tangere non poterat, diſcedens ait, nondum matura eſt, nolo acerbam ſumere. Fateor contemtum quandoque eſſe nobilem, cum ſcilicet contemnimus injurias illatas ab iis, qui ſe defendere amplius non poſſunt. Ex hoc principio Cl. BERNOULLIUS, percepto nuntio de *Joh.* KEILLII morte, noluit permittere, ut in publicum prodirent Vindiciæ a Doctiſſ. CRUSIO paratæ contra virulentas calumnias, quas KEILLIUS in ambos ſparſerat, ſicut & in alios viros egregios, præcipue in Collectores *Actorum* de re litteraria longe melius merentes.

SOLU-

† N°. XXII. pag. 126. *Tom.*

N°. CXXIV.

SOLUTIO PROBLEMATIS

a Nicolao BERNOULLI, Joannis *filio*, *propositi*
De curvis motis secundum axem & se mutuo constanter ad angulos rectos secantibus,
Missa ex Anglia in litteris d. 7 Febr. A. 1721 Styli veteris datis †.

Acta Erud. Lips. 1721. Apr. pag. 156.

TOmo VII. Sect. VIII. p. 352 *Supplem. ad Acta Erud.* * *Nicol.* BERNOULLI, *Joh.* filius, Problema geometricum proposuit his verbis :

Inter duos axes parallelos positione datos, invenire & construere curvam, eandemque adhuc inverso situ positam, ita ut alterutra, vel utraque, mota secundum axem suum, motu sibi semper parallelo, curvæ secent constanter se mutuo ad angulos rectos, hoc est, ut secandæ & secantes sint curvæ eædem.

SOLUTIO

TAB. XXXVI. N°. CXXIV.

Exhibentur hujusmodi curvæ ratione sequenti.

Sint FG, MN parallelæ datæ. Ducatur AB, quæ cum iis angulos constituat FAB, NBA æquales angulo, quo curvæ se mutuo secare ponuntur, sive rectus sit, sive obliquus. In duas partes æquales dividatur linea AB in C, & sumatur in ea pro arbitrio punctum D, ducaturque DE rectis FG, MN parallela. Litteræ autem a, c, d denotent quantitates quascunque datas; R quantitatem non datam; m, n, numeros quosvis inter se primos & impares. Fiatque CD $= R^{m:n} (nc : m+n dRR : (m+2n))$ deinde DE. $a = R^{(m+n):n} (nc : (m+n) + ndRR : (m+3n)) +$ area curvæ, cujus abscissa R & ordinata $R^{(m-n):n} (c + dRR) \sqrt{(aa+RR)}$, quo facto locus puncti E erit curva quæsita. Erit autem irrationalis sive, ut appellant, transcen-

† Auctorem solutionis hujusce, & Numerorum CXXVI, CXXIX sequentium audivi esse Doct. *Henricum* PEMBERTON, celebrem apud Anglos Mathematicum, ac, nisi fallor, in Collegio *Greshamensi* Professorem.

* Supra N°. CXVI. pag. 472.

cendens. Si vero sit $d = (m+3n) c : ma^2$, locus puncti E erit rationalis, seu algebraica; erit enim DE $= \frac{nc}{ma^3} R^{m:n} ((aa+RR)^{\frac{3}{2}} + \frac{maa}{m+n} R + R^3)$ existente CD $= \frac{n}{m} R^{m:n} (c + \frac{(m+3n)c}{(m+2n)a^2} RR)$. Item si n sit unitas & m numerus negativus & ternario major [vel etiam ternarius, si sit $d = 0$] locus puncti E rationalis erit.

Sunt formæ generales, quibus hujusmodi lineæ ex curvarum quadraturis derivantur, quæ, præter jam memoratas alias, quoque innumeras curvarum species utriusque generis suppeditant; inter quas occurrunt duæ lineæ Geometris non ignotæ, nimirum Logarithmica, &, quando angulus intersectionis rectus est, Cyclois.

SCHOLIUM.

Quæritur, quibus computationibus adductus sit Problematis Auctor inter duos ejus casus ita distinguere, ut in altero, ubi angulus intersectionis rectus est, curvas rationales disertim requirat; in altero autem, quando angulus est obliquus, an tales dari possint dubitare videatur.

N°. CXXV.

JOHANNIS BERNOULLII

Animadversio in Solutionem a se Londino *missam Problematis alicujus circa Trajectorias*, *propositi in* Actis Lips. Suppl. Tomo VII. Sect. VIII. pag. 352.

MAteriam de Trajectoriis, elegantem sed arduam, fuse & accurate tractavit Filius meus in *Actis Lips.* anni proxime elapsi *, ubi methodos a me inventas, per quas, quoad fieri potest, solvitur generale Trajectoriarum Problema, clare & fideliter exposuit. In fine longæ dissertationis, adjecit Problema, ex hac materia enatum, solutu dignum & curiosum, quod proin Analystarum attentionem mereri videbatur. Consistit illud in hoc, ut *Inveniatur & construatur curva, quæ semel ipsam;*

Acta Erud. Lips. 1721. Jun. pag. 279.

* N°. CXVI.

ipsam inverso situ positam, atque hinc inde motam secundum utrumque axem motu sibi semper parallelo, secet constanter ad angulum rectum, vel etiam ad angulum cuilibet dato æqualem.

Monuit Proponens, me solutione potitum esse, & tali quidem, ex qua pateat satisfacere infinita genera curvarum, tam algebraicarum quam transcendentium: Inter eas dari duas quasdam Geometris non ignotas, adeoque vel inventu vel divinatu faciles, sed desiderare nos alias insuper, ex utraque classe curvarum, algebraicas tamen præ cæteris exigentes.

Accepi nupero mense Martio litteras *Londino* ab ignota manu, &, ut aiunt, sine die & consule scriptas, in quibus inveni aliquam, sed non addita analysi, Problematis nostri solutionem; quæ an bona sit, aliis examinandum vel Auctori demonstrandum relinquo. Legitur ea in *Actis* mensis Aprilis p. 156, 157 †. Quisquis vero sit ejus Auctor, haud dubie Britannus, videtur in Analysi infinite parvorum non mediocriter versatus, quod vel hinc manifestum est, quia in hac solutione elucent vestigia longi & operosi calculi. Sed si minus industriæ, plus vero sagacitatis adhibuisset, invenire potuisset solutionem aliam longe simpliciorem. Contigit ipsi, quod sæpissime solet, venari scilicet per ambages intricatas & longas, quod in propinquo latet angulo. Vitium autem est, aut saltem defectus in omni solutione, quæ præter necessitatem nititur fundamentis compositis ac longe petitis, deducens ad constructionem plus æquo laboriosam.

Priusquam itaque communicemus nostram, mira simplicitate & concinnitate gaudentem; indulgemus Solutori anonymo adhuc aliquod tempus, genuinam nostræque similem, qualem desideramus, investigandi solutionem; ac talem imprimis, quæ pro optatis curvis transcendentibus constructionem suppeditet, non per quadraturas, quibus solutor jam utitur, sed per solas rectificationes curvarum algebraicarum, & quidem sive rectus sit, sive obliquus intersectionis angulus; nec obstat, quod pro obliquo contentos nos fore promiserimus, re saltem ad quadraturas redacta; nostra enim methodo, pro quovis angulo intersectionis, præter innumeras curvas algebraicas, etiam innnumeræ aliæ transcendentes, concessa rectificatione algebraicarum construibiles promtissime eliciuntur.

† N°. præced.

Cæterum quas, suppresso nomine, subindicavimus binas curvas quæsito satisfacientes, Geometris non ignotas, rectissime nunc nominavit Solutor Londinensis; nimirum Cycloïdem, quando angulus intersectionis rectus est, & Logarithmicam, existente quolibet intersectionis angulo. Sed quod ad hanc attinet, notanda sunt sequentia, quæ ille nondum animadvertisse videtur. Primo sciendum est, Logarithmicam duplici modo ad usum vocari posse; ita nempe ut moveatur vel secundum directionem applicatarum, vel secundum directionem asymtoti: Priori modo unaquæque ex Logarithmicis inservit, sive rectangula sit, sive obliquangula; sed respectu alterius modi, non omnes Logarithmicæ huic negotio quadrant, sed tantum acutangulæ; nam vulgaris, seu rectangula, ut & omnes obtusangulæ sunt prorsus inidoneæ; voco Logarithmicas *acutangulas, rectangulas, obtusangulas*, quarum applicatæ cum subtangentibus constituunt angulos acutos, rectos, obtusos. Hoc etiam notatu dignum est, in casu quo angulus intersectionis esse debet rectus, optato effectui respondere Logarithmicam semirectangulam, quæ ipsissima est Linea *Beauniana*, apud Geometras quondam non incelebris *. Horum demonstrationem nunc non addimus; dabit eam noster Anonymus, ne divinando tantum, vel palpando, in Logarithmicam incidisse videatur.

* Vide Nos. IX & XI. pag. 62. & 65. *Tom. I.*

N°. CXXVI.

RESPONSIO

Ad Johannis BERNOULLII *Animadversionem in solutionem Problematis cujusdam, quæ Animadversio edita est in* Actis Lipsiensibus *Mensis* Junii A. MDCCXXI.

Acta Erud. Lipf. Suppl. Tom. VIII. Sect. I. pag. 40.

TOmo VII, Sectione VIII, p. 352, 353 *Supplementorum* ad *Acta Lipf. Nicol.* BERNOULLIUS, *Johannis* Filius, Problema a Patre acceptum Geometris proposuit. Brevi post adventum hujus Libri in nostram regionem [*Angliam*] charta incidit in manus, quæ Problematis solutionem exhibere præ se ferebat; cujus solutionis exemplum, inscio nec opinante chartæ scriptore, in publicum emisi; & nuperrime inveni *Jo.* BERNOULLIUM abhinc amplius sex mensibus Animadversione illud cohonestasse. Quod videam Cel. Virum elaborare, ne quis Amici mei solutionem suæ anteferret; is arctum quidem temporis spatium ad eam solutionem sumebat; & ut otium ei defuit rem ab illo tempore ulterius prosequendi, ita alia negotia jam quoque obstant quominus animum eidem rursus applicet. Cuperem igitur sine mora videre ipsam BERNOULLII Solutionem, & ne suspicio de nobis eum impediat, quasi nostram solutionem ex ea quam prolaturus sit adornare instituerimus, pauca, quæ Amico meo invenisse contigit, Notis fictis apponam.

Curvarum, quæ Problemati conveniunt, quæcunque sumatur ordinata illius *ngjy*4 *ubp*81 *lwiyq* 4 *rtqa* 2 *pæn* 3 *taxn* &c.

NB. *Sequebatur satis longus Logogriphus, cujus interpretatio legitur* N°. CXXIX.

Hactenus de methodo Amici mei generali; nihil amplius jam restat, præter Demonstrationem, cum BERNOULLIUS id petat, quibus modis lineæ Logarithmicæ Problemati satisfaciant; adjungam autem Cycloïdis quoque in eodem Problemate usum. Et primum quod ad Cycloïdem spectat, expediam.

De Cycloïde.

TAB. XXXVI. N°. CXXVI. *Fig. 1.*

Sint AB, CD duæ lineæ rectæ parallelæ, quas EF ad perpendiculum secet. In diametrum EF describatur semicirculus EGF, & eo semicirculo describatur semicyclois FH. Jam si alia semicyclois ILQ, priori simi-

similis & æqualis, sed situ inverso, intra parallelas describatur, & si contingentes LM, LN ducantur, dico angulum MLN rectum esse.

Sit IOP semicirculus, quo describitur semicyclois ILQ, ejus diameter IP; ducatur LGO, lineis AB, CD parallela, & jungantur FG, GE, IO. Erit deinde contingens LM parallela rectæ FG, & contingens LN parallela rectæ IO, quæ parallela est rectæ EG. Angulus igitur MLN = est angulo FGE recto; ideoque angulus MLN rectus est. Q. E. D.

De casu primo Linearum Logarithmicarum.

Sit AB linea Logarithmica asymptoton habens CD; eique ordinatim applicetur EF, quæ sit subtangenti Logarithmicæ æqualis. Ad lineam rectam EF & ad quodcunque in ea punctum I constituatur alia linea Logarithmica GHI, priori similis & æqualis, sed situ inverso disposita. Deinde si contingentes HL, HM ducantur, dico angulum LHM angulo CEF esse æqualem.

TAB. XXXVI. N°. CXXVI. *Fig. 2.*

Ordinatim applicetur HN, fiat EO = EN, ordinatim applicetur OP, & ducatur contingens PQ. Puncta P & H æqualiter distant a recta EI; unde punctum P in curva AB puncto H in curva GI respondet, & angulus OPQ = est angulo NHM, propterea quod curvæ AB & GI similes sunt & æquales. Quoniam vero curva AB est logarithmica & EN, EO æquales, erit $NH \times OP = EF^2$. Est autem EF = NL = OQ, unde NH : EF [NL] = EF [OQ] : OP. Cum igitur anguli HNL, QOP sint æquales, triangula HNL, QOP sunt similia, & angulus QPO, qui æqualis est angulo NHM, æqualis quoque erit angulo NLH. Unde anguli NHM & NLH æquales erunt, & angulus LHM angulo CNH, sive angulo CEF, æqualis. Q. E. D.

De casu altero Linearum Logarithmicarum.

TAB. XXXVII. N°. CXXVII. *Fig. 3.*

Sint AB, CD duæ lineæ rectæ parallelæ, intra quas quælibet alia linea recta EF ducatur. Ad asymptoton AB describatur linea Logarithmica GH, cujus subtangens sit æqualis lineæ EF, & ordinatim applicatæ comprehendant cum asymptoto angulos versus contingentes parti æquales dimidiæ anguli AEF. Quibus positis, si ad asymptoton CD alia describatur linea Logarithmica ILM prioris similis & æqualis, & si ducantur contingentes LN, LO, dico angulum OLN angulo BEF esse æqualem.

Ducatur NP ut angulus ANP angulo AEF sit æqualis, & erit NP

= EF. Sumatur N Q lineæ EF ſine ſubtangenti lineæ Logarithmicæ æqualis, jungaturque QL. Quoniam igitur QL punctum Q conjungit cum puncto contactus L, QL ordinatim ad aſymptoton AB applicabitur, adeoque angulus LQN verſus contingentem LN æqualis parti dimidiæ erit anguli AEF, vel anguli ANP; eſt autem NP = EF = NQ; quoniam igitur NP, NQ ſunt æquales, & angulus LQN æqualis dimidio angulo ANP, recta QL producta tranſibit per P efficiens triangulum PNQ iſoſceles. Eadem ratione, ſi ducatur OS ut angulus COS æqualis ſit angulo AEF, erit OS = EF; ſi vero ſumatur OR = EF, ducaturque RL, ordinatim ea applicabitur ad aſymptoton CD, & producta tranſibit per S; propterea quod linea IM ſimilis eſt & æqualis lineæ GH. Erit autem angulus PRL [= angulo LSQ] = angulo LQS = angulo NPQ; unde erit angulus LSQ = angulo NPQ, & triangula SLQ, PNQ ſimilia ſunt, anguluſque SLQ = angulo PNQ = angulo BEF. Eſt autem & LS = LQ, OS NQ, = item angulus OSL [= angulo ORS] = angulo NQL. Triangula igitur OSL, NQL æqualia ſunt, habentia baſes OL, NL æquales, & angulos NLQ, OLS etiam æquales; auferatur communis angulus NLS & relinquetur angulus OLN = angulo SLQ = angulo BEF. Q. E. D.

Coroll. Quando EF ad AB perpendicularis eſt; adeoque & angulus OLN rectus, erit angulus LQN anguli recti pars dimidia.

Dat. Londini. d. 29. Jan. 17$\frac{11}{12}$.

Videatur Nus. CXXVIII.

N°. CXXVII.

THEOREMA NOVUM,

Habens utilitatem in dividendis multiplicandiſque angulis, nec non in condendis Tabulis Sinuum, Tangentium & Secantium.

Autore Joh. Bernoulli.

Acta Erud. Lipſ. 1722. Jul. pag. 361.

Problema Sectionis angularis exercuit quondam Geometras non infimi ordinis bene multos: Nemo dederat antea formulam generalem, pro indefinitis angulorum arcuumve ſectionibus vel multiplicationibus, applicabilem ad quemlibet datum

tum numerum, cum ejuſmodi formulam primus exhiberem in *Actis Lipſ.* 1701 *M. April.* * Hæc poſtea aliis, quibus non diſplicuit, magni nominis Analyſtis anſam præbuit inquirendi in ejus demonſtrationem & originem, quam ego, ſingulares ob cauſas celaveram, tum etiam inveniendi tales alios canones univerſales. Quid vero in eam rem prodiit, id vel ſerierum infinitarum auxilio, vel calculi differentialis ope erutum: inprimis Formula illa altera univerſalis, quam multis poſt annis exhibui, peculiari aliquo artificio per logarithmos imaginarios inventa, habet quidem aliquid novi & inexpectati, quo æquationes angulares pro lubitu expedite & prompte formantur; interim logarithmi illi imaginarii, qui infirmioribus & minus exercitatis ſcrupulum faceſſere poſſent, originem habent ex differentialibus arcuum a tangentibus derivatis, Vid. Act. 1712, M. Jun. & Jul. †. Ante biennium circiter aggreſſus ſolutionem, [quam multiplici modo repertam mox communicabo in peculiari ſchediaſmate,] Problematis alicujus a Filio meo propoſiti in *Actorum Supplem.* Tom. VII, Sect. VIII, p. 532, de conſtruendis curvis ſemet ipſas inverſo ſitu poſitas atque motu parallelo motas in conſtanti angulo ſecantibus, incidi in Theorema longe univerſaliſſimum, & quidem communi analyſi adinventum; quod cum viderem habere poſſe uſum inſignem, non tantum in arcuum diviſione & multiplicatione, ſed & in plurium arcuum etiamſi inæqualium, quotquot libuerit, additione vel ſubtractione, eorumque aggregato vel reſiduo indefinite exprimendo per canonem generalem, qui compendium ſuppeditabit ſupputare volentibus Tabulas Sinuum, Tangentium & Secantium; operæ pretium duxi Theorema paulo fuſius exponere, præmiſſis aliquot Lemmatibus.

Lemma I.

Si in circulo BGL, cujus centrum A, & radius AB = 1, duorum arcuum BF & BFG datæ ſint tangentes, nempe BC = *a*, TAB. XXXVI. N°. CXXVII. *Fig.* 1.

* N°. LXIX. pag. 386. *Tom.* I. † N°. LXXXIX. pag. 511. *Tom.* I.

$= a$, $BD = b$, ſitque nova tangens $BE = (a+b) : (1 - ab)$; dico arcum BGH, cui illa reſpondet, eſſe æqualem ſummæ arcuum $BF + BFG$.

DEMONSTR. Ex ſuppoſitis habentur ſecantes, ut ſequitur: $AC = \sqrt{(1 + aa)}$, $AD = \sqrt{(1 + bb)}$, $AE = \sqrt{(1 + aa + bb + aabb)} : (1 - ab) = \sqrt{(1 + aa)} \times \sqrt{(1 + bb)} : (1 - ab)$. Habetur etiam DE, ſeu $BE - BD = (a + abb) : (1 - ab)$. Ducta ad AE perpendiculari DI, erit, ob Triangula EAB, EDI ſimilia, $EA : AB = ED : DI$, unde $DI = (a + abb) : \sqrt{(1 + aa)} \times \sqrt{(1 + bb)} = a\sqrt{(1 + bb)} : \sqrt{(1 + aa)}$. Adeoque $\sqrt{(1 + aa)}$ ſeu $AC : \sqrt{(1 + bb)}$ ſeu $AD = a$ ſeu $BC : DI$. Sunt itaque triangula CAB, DAI ſimilia; proinde angulus $BAC =$ angulo DAI, arcuſque $BF =$ arcui GH; & addito arcu communi BFG, erit $BF + BFG = BGH$. *Q. E. D.*

TAB. XXXVI. N°. CXXVII. Fig. 2. *Aliter*. Sint duorum arcuum BH, DH [quorum radius AB, vel $AD = 1$] tangentes datæ $BC = a$, $DE = b$; quibus prolongatis ductæ parallelæ AG, AF occurrant in punctis G, F; erit utraque, tam DG quam BF, tangens complementi arcus totius BHD. Sit DG vel $BF = x$: Ob ſimilia triang. CFA, EGA, erit $CF\,[a + x] : AF = AG\,[AF] : EG\,[b + x]$. Hinc $CF \times EG\,[ab + ax + bx + xx] = AF^2 = 1 + xx$. Ablato xx, & reducta æquatione, provenit $x = (1 - ab) : (a + b)$, adeoque $1 : x$, hoc eſt, tang. arcus $BHD = (a + b) : (1 - ab)$, ut ante. Q. E. D.

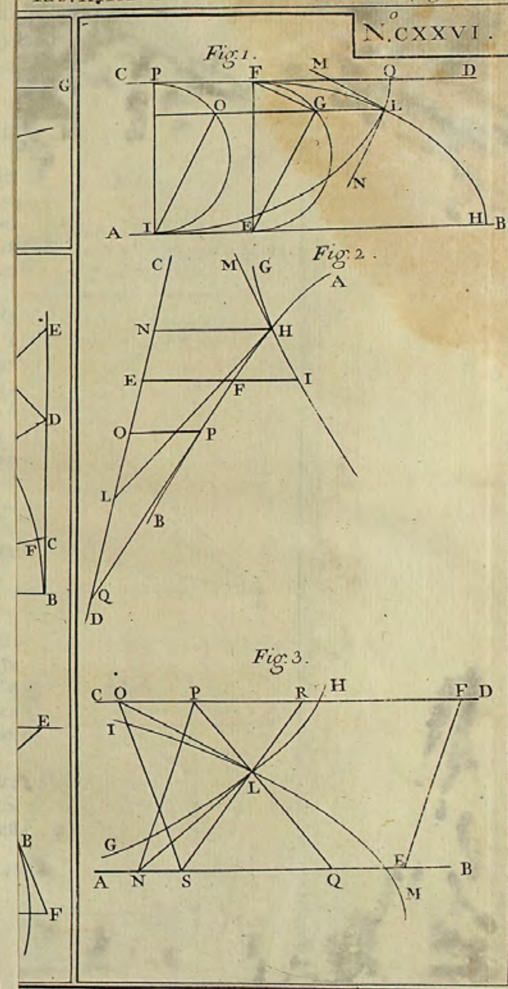
LEMMA II.

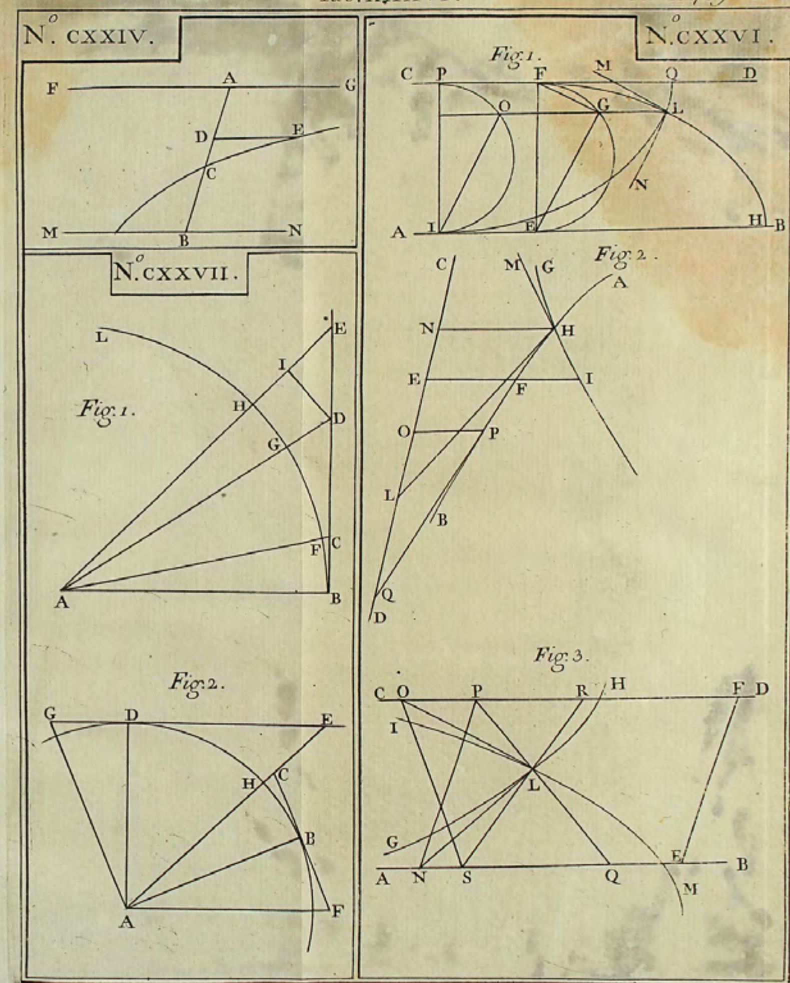
Sint ejuſdem circuli tres arcus, quorum tangentes ſint datæ a, b, c, ſitque tangens quarta $= (a + b + c - abc) : (1 - ab - ac - bc)$; dico arcum huic tangenti reſpondentem fore æqualem ſummæ trium datorum arcuum.

Demonſt. Quia, per præced. $(a + b) : (1 - ab)$ eſt tangens arcus qui æquatur primis duobus ſimul ſumtis, quorum tangentes ſunt a & b, ſcribatur n pro $(a + b) : (1 - ab)$, eritque, vi præcedentis, $(n + c) : (1 - nc) =$ tangenti arcus quarti; ſubſtituto nunc iterum valore ipſius n prodibit $(n + c) : (1 - nc)$

$=$

Tab. XXXVI. Tom. II. pag. 528.




N°. CXXIV.
N°. CXXVI.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
N°. CXXVII.
Fig. 1.
Fig. 2.

M

$=(a+b$

cus quarti

lis. *Q. E.*

In eoden

exprimantur

$+c+e-a$

$be-ce+$

summæ reliq

$a, b, c, e.$

DEMO

$-bc)=n$

tangenti arcu

$+e):(1-$

$(1-ab-ac$

qui quatuor d

Aliter. Ad

$(1-ab)=$

Lemma I, $(n$

substituantur v

quantitati mo

In his jam

vato continua

cubus qui plur

æquales. No

mulæ nostræ e

gato litterarum

bilium content

ternatim interp

quibus formet

Joan. Bernou

$= (a+b+c-abc) : (1-ab-ac-bc) =$ tangenti arcus quarti, qui tribus datis arcubus ſimul ſumtis eſt æqualis. *Q. E. D.*

LEMMA III.

In eodem circulo dentur arcus quatuor, quorum tangentes exprimantur per a, b, c, e; ſit tangens arcus quinti $= (a+b+c+e-abc-abe-ace-bce) : (1-ab-ac-ae-bc-be-ce+abce)$; dico hunc arcum quintum eſſe æqualem ſummæ reliquorum quatuor arcuum quorum tangentes ſunt a, b, c, e.

DEMONSTR. Ponatur $(a+b+c-abc) : (1-ab-ac-bc) = n$ erit, per Lemmata I & II, $(n+e) : (1-ne) =$ tangenti arcus quinti; reſubſtituto hic valore ipſius n orietur $(n+e) : (1-ne) = (a+b+c+e-abc-abe-ace-bce) : (1-ab-ac-ae-bc-be-ce+abce) =$ tangenti arcus, qui quatuor datos arcus exæquat. *Q. E. D.*

Aliter. Ad eandem formulam pervenitur ponendo $(a+b) : (1-ab) = n$, & $(c+e) : (1-ce) = p$. Erit enim, per Lemma I, $(n+p) : (1-np) =$ tangenti arcus quinti, ubi ſi ſubſtituantur valores ipſarum n & p, erit $(n+p) : (1-np) =$ quantitati modo inventæ. *Q. E. D.*

SCHOLIUM

In his jam evidens progreſſionis ordo perſpicitur, quo obſervato continuare licet, ſine calculo, valores tangentium pro arcubus qui pluribus aliis quot libuerit datis & ſimul ſumptis ſint æquales. Notandum enim, terminos fractionum, quibus formulæ noſtræ exprimuntur, conflari ex unitate, ut & ex aggregato litterarum a, b, c, e, f, g, &c. earumque omnium poſſibilium contentorum, alternatim ſumptorum, ſignis $+$ & $-$ alternatim interpoſitis. Sint exempli gratia a, b, c, e, f, ex quibus formetur progreſſio ſequens

 $1+a$

$$\begin{array}{llllll}
1 + a & + ab & + abc & + abce & + abcef \\
+ b & + ac & + abe & + abcf & \\
+ c & + ae & + abf & + abef & \\
+ e & + af & + ace & + acef & \\
+ f & + bc & + acf & + bcef & \\
 & + be & + aef & & \\
 & + bf & + bce & & \\
 & + ce & + bcf & & \\
 & + cf & + bef & & \\
 & + ef & + cef. & &
\end{array}$$

In qua unitas occupet locum primum; ſumma litterarum $a+b+c+e+f$ locum ſecundum; ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis $ab+ac+ae+$ &c. locum tertium; ſumma ſolidorum ſub ſingulis ternis $abc+abe+abf+$ &c. locum quartum; ſumma contentorum ſub ſingulis quaternis $abce+abcf+$ &c. locum quintum; illudque unicum $abcef$ locum ſextum. Componatur ex illis omnibus fractio, cujus numerator conſtet ex ſecundo — quarto + ſexto, & denominator ex primo — tertio + quinto, ſicut videre eſt.

$$\left(\begin{array}{l} \\ \\ +a \\ +b \\ +c \\ +e \\ +f \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} -abc \\ -abe \\ -abf \\ -ace \\ -acf \\ -aef \\ -bce \\ -bcf \\ -bef \\ -cef \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +abcef \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right) : \left(\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} -ab \\ -ac \\ -ae \\ -af \\ -bc \\ -be \\ -bf \\ -ce \\ -cf \\ -ef \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ +abce \\ +abcf \\ +abef \\ +acef \\ +bcef \\ \\ \\ \\ \end{array}\right)$$

Exprimet hæc fractio valorem tangentis arcus alicujus, qui erit æqualis ſummæ omnium quinque arcuum, quorum tangentes exponuntur per has reſpective litteras a, b, c, e, f, hujus veritas liquet ex ante dictis. Hinc fluit ſequens generale

THEO-

THEOREMA.

Datis tangentibus quotcunque arcuum deſignatis per a, b, c, e, f, g, &c. quarum ſumma $a+b+c+$ &c. ſit $=A$; ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis $ab+ac+$ &c. $=B$; ſumma ſolidorum ſub ſingulis ternis $abc+abe+$ &c. $=C$; ſumma contentorum ſub ſingulis quaternis $=D$; ſumma contentorum ſub ſingulis quinis $=E$; ſumma contentorum ſub ſingulis ſenis $=F$; & ita porro ſummæ ſequentium contentorum $=G, H, I$, &c. Dico tangentem arcus unius, qui æqualis ſit reliquis omnibus ſimul ſumtis, eſſe $=(A-C+E-G+I$ &c$):(1-B+D-F+H$&c.$)$ Demonſtratio patet ex præcedentibus.

COROLL. I.

Quod ſi ex datis arcubus, unus pluresve ſint ex reliquis ſubtrahendi, hoc eſt, ſi invenienda ſit tangens alicujus arcus, qui ſit æqualis differentiæ inter ſummam omnium arcuum affirmativorum & ſummam omnium arcuum negativorum; per ſe manifeſtum eſt, aliud nihil faciendum eſſe quam ut in fractione inventa mutentur ſigna earum litterarum quæ denotant tangentes arcuum negativorum, hoc eſt, eorum qui a reliquis ſubtrahi debent: ut ſi a & b tales eſſent, ſcribendum erit $-a$ & $-b$ pro $+a$ & $+b$, atque $+a$ & $+b$ pro $-a$ & $-b$; ſed nihil mutandum in $+ab$ vel in $-ab$; quia, ceu notum, multiplicatio ſigni + per + & ſigni — per — ſemper idem ſignum + producit.

COROLL. II.

Poſitis arcubus omnibus, quorum numerus ſit n, eorumque adeo tangentibus a, b, c, e, f, &c. inter ſe æqualibus, ex doctrina combinationum colligitur progreſſionem $1+A+B+C+D+E$ &c. abire in $1+\frac{n}{1}a+\frac{n.(n-1)}{1.\ 2.}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}a^3+$

Xxx 2 $n(n$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4$ &c. quæ ſeries, uti conſtat, exprimit valorem ipſius $(1+a)^n$, hoc eſt, binomii $1+a$ ad poteſtatem n elevati. Sic igitur, poſita a pro tangente arcus multipli; qui ſit ad ſimplum ut n ad 1; Erit, vi Theorematis noſtri,

$$\mathrm{R}\ldots x = \frac{\frac{n}{1}a - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \&c.}{1 - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4 - \&c.}$$

Et viciſſim, ſumta a pro tangente arcus in partes numero n ſecandi, & x pro tangente unius ex illis partibus, erit.

$$\mathrm{S}\ldots a = \frac{\frac{n}{1}x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}x^5\ \&c.}{1 - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^4 - \&c.}$$

Quæ ipſiſſima eſt formula, quam jam edidi in *Actis Lipſ.* 1712 p. 330, * cujuſque originem per logarithmos imaginarios ſingulari modo inventam expoſui ibid. p. 276; adeo ut nunc firmiori fundamento nitatur, poſtquam hic oſtendi eam eſſe tantum caſum particularem Theorematis univerſaliſſimi hic traditi & ſola Algebra duce detecti.

C O R O L L. III.

Ad multiſectionem anguli vel arcus inſervit formula S, ubi tangens a data eſt, & x quæſita: Tunc quidem pro quolibet numero partium n, emergit æquatio finita, ſed magis minuſve compoſita, prout exigit numerus n; neque adeo innoteſceret x, niſi per reſolutionem illius æquationis in radices. Verum etiam formula R ſuppeditat immediate valorem tangentis quæſitæ; cum enim ſecare vel dividere arcum aliquem in partes n idem

* N°. LXXXIX. pag. 513. Tom. I.

idem ſit atque eundem multiplicare per $1 : n$, ut jam olim etiam monui; ſubſtituatur ubique in formula R, $1 : n$ pro n, & prodibit valor ipſius x, per fractionem cujus numerator & denominator conſtabunt terminis numero quidem infinitis, ſed tamen cognitis.

C O R O L L. IV.

Vocetur nunc p arcus ipſe; cujus tangens eſt a, concipiaturque diviſus in partes numero n, quarum per conſequens unaquæque erit $= p : n$. Quod ſi itaque numerus n ſit infinitus, cenſebitur arculus $p : n$ æqualis ſuæ tangenti & habebuntur $n.(n-1) = n^2$, $n(n-1)(n-2) = n^3$, $n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4$, &c; quia numeri finiti 1, 2, 3, &c ab infinito n demti, eundem non minuunt. Hinc in formula S pro his contentis ſcribantur poteſtates numeri n & pro x, x^2, x^3 &c. ſcribantur $p : n, p^2 : n^2, p^3 : n^3$, &c. quo facto formula S degenerabit in hanc,

$$a = \frac{\frac{1}{1}p - \frac{1}{1.\ 2.\ 3.}p^3 + \frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}p^5 - \&c.}{1 - \frac{1}{1.\ 2.}p^2 + \frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}p^4 + \&c.}$$

Atque ita, ex dato arcu p datur ejus tangens a per ſeriem; quod quidem nihil eſt novi, eandem enim jam tradidi in *Actis* 1694, p. 439 * deductam ex generali mea ſerie ibidem expoſita, quæ cujuſque differentialis integrale univerſaliter exprimit; non tamen inconſultum duxi, indicare egregium utriuſque methodi conſenſum, ut Calculo differentialium & integralium per communem Algebram confirmato, ſua conſtet validitas a nonnullis non ſatis intelligentibus impugnata aut in dubium revocata.

C O R O L L. V.

Hoc denique notandum, quod ope Theorematis noſtri Tabulæ

* N°. XXI. pag. 127. Tom. I.

bulæ Sinuum &c. compendioſius quam per viam ordinariam calculari poſſint; inventis quippe paucorum tantum quorundam arcuum tangentibus, ex illorum, ſive ſimplorum, ſive multiplorum, varia vel additione vel ſubtractione, novæ ſemper novorum arcuum tangentes eruuntur, in quas operationes non ingrediuntur radicum extractiones. Sit exempli gratia ex tangente 45 grad. $= 1$, & data tangente 1 min. $= b$, habebitur, per *Lemma* I, tangens 45 gr. 1 min. $= (1 + b) : (1 - b)$; ex hac & ex tang. 1 min. reperitur, per idem Lemma, tangens 45 gr. 2 min. & ita porro uſque ad finem quadrantis, quibus inventis ultro dantur tangentes complementorum, quippe quæ illis ſunt reciproce proportionales; ut ſi t ſit tangens alicujus arcus, erit $1 : t$ tangens complementi. Ex tangentibus ſupputantur ſecantes, id quod fit per ſolam tangentium additionem, ope cujuſdam Theorematis notiſſimi vi cujus *ſecans cujuſvis arcus eſt æqualis aggregato ex ejuſdem arcus tangente & ſemiſſis complementi tangente.* Habentur deinde ſinus ex ſecantibus, per regulam proportionum, ſunt enim ſinus reciproce proportionales ſecantibus complementorum, ita ut citra ullam extractionem radicis triplex ille Canon conſtrui poſſit. Nihil jam dico de quibuſdam aliis compendiis, quæ in hoc quoque negotio commode adhiberi poſſunt ad facilitandum calculum.

N O T A

Finita horum ſcriptione, incidi in *Acta* 1706, & in *Comment Pariſ.* ejuſdem anni. Deprehendi in *Actis* p. 262, Demonſtrationem aliam Lemmatis primi, ſed ab ambabus meis Demonſtrationibus multum diverſam, iiſque longiorem: ibidemque ut & in *Commentariis* p. 256, extare quoque vidi formulam generalem pro determinanda tangente arcus multipli, quam ſupra in Coroll. II deduxi ex Theoremate meo univerſali: quod nolui ſubticere, ne quis in ſequiorem vertat partem, obſervans me ejus rei nullam mentionem feciſſe in *Actis* 1712, ubi eandem formulam jam tradidi per logarithmos imaginarios erutam.

erutam. Nulla certe tunc mihi ſubnata cogitatione, eam ab aliis [quamvis longe aliter] fuiſſe inventam. Scopus vero nunc non fuit repetere quæ diu abhinc ſunt tradita, ſed tantum, occaſione ita ferente, oſtendere quam facili negotio fluant ex Theoremate illo univerſali, de quo ſaltem mihi non conſtat an a quoquam alio fuerit detectum. Interim non tam novitas me impulit ad illud in lucem emittendum, quam ipſius utilitas in ſolutione Problematis in ſchediaſmate alio, brevi *Actis* inſerendo, exhibita.

N°. CXXVIII.

JOHANNIS BERNOULLI

Variæ ſolutiones & Conſtructiones Problematis propoſiti in Act. Lipſ. Supplem. Tomo VII. Sect. VIII. p. 352. *De Curvis motis ſecundum axem ſe & mutuo ad angulos datos ſecantibus.*

HUjus Problematis ſolutionem aliquam accepi ex *Anglia* ad me per litteras miſſam a quodam Anonymo, quam poſtea vidi in *Actis* M. Apr. 1721 *, ſed nulla nec analyſi nec demonſtratione munitam. Quid de hoc ſolutione ſenſerim & ad eam perficiendam ulterius deſideraverim a ſolutore, expoſui in iiſdem *Actis M. Jun.* anni ejuſdem †: an ex eo tempore deſideratis ſatisfecit, aut num alius præterea dederit aliam ſolutionem, mihi non conſtat; quæ ipſe inveni ad egregii Problematis multiplicem ſolutionem, nunc quidem cum Geometris communicare lubet. Tres mihi ſunt methodi, quæ ſingulæ infinitas exhibent curvas quæſito ſatisfacientes.

Acta Erud. Lipſ. 1722. Aug. pag. 396.

Problema ita ſonat: *Invenire & conſtruere curvam: quæ ſemet ipſam inverſo ſitu poſitam, atque hinc inde motam ſecundum utrumque*

* Supra N°. CXXIV. pag. 520 † N°. CXXV. pag. 521

quæ axem motu sibi semper parallelo, secet constanter ad angulum rectum, vel etiam ad angulum cuilibet dato æqualem.

Quandoquidem quæsito satisfaciunt infinita genera curvarum, tam algebraicarum quam transcendentium, meæque solutiones comprehendunt utriusque classis curvas, ut jam monuit Filius meus in ipso loco ubi hoc Problema proposuit; ostendam primo Methodum generalem determinandi e vestigio tot quot libuerit curvas transcendentes, quæ per quadraturas construuntur; excipiet hanc alia methodus, qua pariter tradentur innumeræ curvæ, cum transcendentes tum algebraicæ, & ita quidem ut transcendentes construantur ope rectificationis curvarum algebraïcarum; demonstrabitur porro quamlibet curvam quæ, angulo dato existente recto, solvit Problema, ita posse mutari ut inserviat quoque pro quolibet alio dato angulo obliquo. Subjungetur constructio quædam singularis, quæ rem expedit mira facilitate, quando angulus datus alterius dati pro curva quadam jam inventa quamcunque partem constituit in hac progressione $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ &c. contentam. Accedet denique, ex abundanti, tertia quædam methodus solvendi Problema, per quam ex duabus pluribusve curvis optatam proprietatem habentibus aliæ novæ in infinitum derivari possunt. Ad hæc præstanda trado sequentia.

I.

TAB. XXXVII. *Fig.* 1. Sint duæ rectæ parallelæ NP, QR, intra quas duæ curvæ ABC & EBF, quarum altera cum altera sit eadem sed ad se invicem inverso situ posita, moveantur ambæ, vel saltem alterutra, motu parallelo rectis NP, QR, ita ut se mutuo secent in puncto variabili B, per quod & per punctum D [sumto arcu AD æquali ipsi EB] si ducantur rectæ ipsis NP, QR parallelæ BL, DM occurrentes assumtæ positione HG in punctis L & M, liquet hæc puncta L & M a puncto medio O hinc inde æqualiter distare, ut & angulum mixtilineum FBL esse æqualem angulo mixtilineo CDM, adeoque angulum totum CBF ex CBL & FBL compositum esse æqualem summæ angulorum CBL & CDM.

I I.

I I.

His præmissis, atque assumto O pro initio abscissarum OL, OM, hinc inde æqualium & ad ordinatim applicatas LB, MD, respondentium; concipiantur utrobique duæ applicatæ proximæ lb, md æqualiter a prioribus distantes, ita ut $Ll = Mm$. Oporteat nunc angulum intersectionis curvarum FBC esse constantem, nimirum ubique æqualem ipsi GLB vel GHQ. Hinc fient triangula Bcb, Dnd [ductis nempe bc, Dn ipsi GH parallelis] sibi mutuo similia; est enim per præced. angulus MDC, seu ndD = angulo $FBL = FBC - cBb = OLB$ $[bcL] - bBc = Bbc$, & præterea ang. $Dnd = bcB$; quare $Bc : bc = Dn : nd$, & $Bc \times nd = bc \times Dn = bc^2$.

I I I.

Res itaque huc redit, ut quæratur curva ABC, super GOH, ejus naturæ ut, sumtis in utramque partem a communi initio abscissarum O abscissis æqualibus OL, OM, rectangulum sub elementis utriusque applicatæ æquetur quadrato elementi alterutrius abscissæ. Ad hoc præstandum, sequentes condo formulas, quarum quælibet solvet Problema, & in quibus consistit primus meus solvendi modus.

I V.

SOLUTIO I.

Sit $OL = x$, $LB = y$, $Ll = dx$, $Bc = \pm dy$; atque assumtis pro arbitrio quotcunque datis a, b, c, &c. fiat $dy =$ cuicunque ex his formulis

[1] $dy = (a - x)\, dx : (a + x)$
[2] $dy = (aa - bx + xx)\, dx : (aa + bx + xx)$
[3] $dy = (a^3 - bbx + cxx - x^3)\, dx : (a^3 + bbx + cxx + x^3)$
[4] $dy = \sqrt{(a - x)}\, dx : \sqrt{(a + x)}$
[5] $dy = \sqrt{(a - x)}\sqrt{(aa - bx + xx)}\, dx : \sqrt{(a + x)}\sqrt{(aa + bx + xx)}$
[6] $dy = ((a - x)^p + (b - x)^q)\, dx : ((a + x)^p + (b + x)^q)$.

Conſtruaturque curva ſuper OH [id quod, conceſſis quadraturis, ſemper fieri poteſt, quia nulla hic adeſt indeterminatarum permixtio] quæ electam ex formulis pro æquatione differentiali habeat: dico curvam illam præſcriptæ conditioni ſatisfacturam; id quod ex ante dictis facillime demonſtrabitur. Quoniam enim poſita $OL = x$ erit $OM = -x$, & $Mm = -dx$; adeoque nd, ſeu elementum applicatæ MD, exprimetur per formulam aſſumtam, in qua ſigna dimenſionum imparium ipſius x erunt permutata, quo fit ut etiam termini fractionis in ſe invicem tranſmutentur, hoc eſt, ut numerator abeat in denominatorem & viciſſim, unde reſultabunt duæ fractiones pro valore cB & nd, quarum termini per mutuam multiplicationem ſe deſtruent: Exempli gratia, ſi in formula ſecunda ubi dy ſeu $Bc = (aa - bx + xx)\,dx : (aa + bx + xx)$ ſcribatur $+x$ pro $-x$, & $-x$, pro $+x$, prodibit $nd = (aa + bx + xx)\,dx : (aa - bx + xx)$, unde, multiplicando Bc per nd, habebitur, ſumendo $-dx$, vel Mm, affirmative, $Bc \times nd = \frac{aa - bx + xx}{aa + bx + xx}dx \times \frac{aa + bx + xx}{aa - bx + xx} = dx^2 = bc^2$. Obtinet igitur curva ABC conditionem, quam in § præced. requiri oſtendimus ad id, ut ſe ipſam, in ſitu inverſo ultro citroque motam, ſecet in angulo conſtanter dato FBC, utpote qui æqualis erit ipſi GLB, ſeu GHQ.

V.

In formularum harum fabrica, loco regulæ generalis hoc tantum obſervandum eſt, ut pro terminis fractionis adhibeantur duæ fractiones qualeſcunque ipſius x, eam ad ſe invicem habentes relationem, qua fiat ut in utraque functione, mutatis ſignis poteſtatum imparium, altera in alteram convertatur: quo levi artificio intra quadrantem horæ centum vel plures conduntur formulæ, totidem diverſas ſiſtentes curvas quæ optatum præſtabunt. Sed altioris jam eſſet indaginis eas ex illis formulis eligere quæ ſunt integrabiles, & propterea nobis reddunt cur-

vas algebraïcas; pro quibus autem inveniendis infra dabo regulam peculiarem. Id nunc notare debeo, formulam primam exhibere curvam Logarithmicam obliquangulam, de qua mox fuſius; & infinitas alias, quæ ex terminis conſtant mere rationalibus, conſtrui poſſe, vel per logarithmicam, vel per extenſionem arcuum circularium, ſicuti patet ex iis quæ olim tradidi de conſtructione fractionum differentialium rationalium, Vid. *Act. Lipſ.* 1703. M. Jan. * Quantum vero ad formulas irrationales, attendenti liquet, illam num. [4] exprimere Cycloïdem, & quidem vulgarem, ſeu rectangulam, exiſtente nimirum angulo GLB recto; ſed Cycloïdem obliquangulam, exiſtente eodem obliquo angulo. Voco Cycloïdem obliquangulam, quæ fit, conſtituendo ad datum angulum obliquum applicatas Cycloïdis vulgaris, quæ alias ſunt perpendiculares ad axem.

VI.

Redeo ad Logarithmicam, cujus pro hoc ſingulari caſu conſtructionem exponere lubet, ut diſtincte pateſcat, quo pacto & qua lege illa ſit uſurpanda ad Problematis ſolutionem; ſiquidem non omnis Logarithmica, nec quomodocunque deſcripta huic negotio quadrat. Sint, ut ante, rectæ duæ parallelæ NP, QR; intra quas curvæ reciproce poſitæ ſe ſe debeant decuſſare in angulo dato, qui ſit æqualis ipſi GHQ. Capiatur HS æqualis ipſi HG, completoque parallelogrammo SVGH, deſcribatur Logarithmica obliquangula SBD ſuper aſymptoto GN, cujus applicatæ ſint diagonali SG parallelæ, & quam tangat in puncto S ipſa SV, unde per conſequens GV æqualis erit eidem SV: dico hanc Logarithmicam SD, eandemque EBF inverſe deſcriptam ſuper aſymptoto RQ, ita ſe invicem ſecare in B, dum feruntur motu parallelo, ut interſectionis angulus EBS vel DBF evadat continuo æqualis angulo dato GHQ vel VSQ. Demonſtratio fluit ex ipſa formula. TAB. XXXVII. *Fig.* 2.

Coroll. I. Ut ſe ſecent orthogonaliter, exiſtente ſcilicet angulo dato GHQ recto, facienda eſt Logarihmica SBD

* N°. LXX. pag. 393. *Tom. I.*

ſemirectangula, hoc eſt cujus applicatæ cum ſubtangentibus faciant angulum ſemirectum, talis enim erit angulus SGV. Unde patet Logarithmicam SBD fore tunc curvam *Beaunianam* multum olim inter Geometras agitatam, uti jam monui in *Actis* anni 1721. p. 272. †

COROLL. II. Qualiſcunque vero ſit angulus datus GHQ, erit angulus SGV quovis in caſu acutus; hinc nulla ex Logarithmicis niſi acutangula huic negotio inſervire poteſt, adeoque Logarithmica vulgaris, ſeu rectangula, ac multo magis omnis obtuſangula, prorſus erit inutilis, ut pariter jam innui loco allegato. Neſcio autem an Anonymus Britannus, perplexæ ſolutionis Autor, dederit horum demonſtrationem, ad quam indagandam eum invitaveram.

VII.

Ita vidimus quali moderamine opus ſit ut Logarithmica fiat idonea ad effectum qui deſideratur præſtandum; ſi ſcilicet moveri debeat ſecundum directionem aſymptoti. Quod ſi vero motus inſtituatur ſecundum directionem applicatarum, poſſunt omnes Logarithmicæ ſine ulla exceptione quæſito ſatisfacere, modo ex illis ea aſſumatur, cujus applicatæ cum ſubtangentibus faciant angulum qui ſit complementum ad duos rectos dati anguli interſectionis curvarum; id quod ſequentem in modum facile demonſtro.

VIII.

TAB. XXXVII. Fig. 3. Factis enim & ſuppoſitis in Fig. 3 quæ in Fig. 1; Eſto ſuper GH tanquam aſymptoto Logarithmica ASC, cujus ſubtangens æqualis ſit applicatæ OS in puncto medio O, quæque vocetur a; ſit igitur hic iterum $OL = x$, $Ll = dx$, $BL = y$, $Bc = -dy$, $OM = -x$, $Mm = -dx$. Erit ex natura Logarithmicæ $-Bc$, ſeu $+dy = -ydx : a$, $DM = aa : y$, $nd = -aady : yy =$ [ſubſtituto valore ipſius $+dy$] $adx : y$,

† Supra N°. CXXV. pag. 523.

y, adeoque $Bc \times nd = (ydx : a) \times (adx : y) = dx^2 = ba^2$. Ex quo ſequitur Logarithmicam ASC habere conditionem per §. 3 requiſitam, ut ſecundum directionem applicatarum mota alteram Logarithmicam ſibi æqualem & inverſam ſecet ad angulum dato GHQ æqualem.

COROLL. In caſu anguli GHQ recti, erit & ipſa ASC Logarithmica rectangula ſeu vulgaris; quæ per conſequens ſemet ipſam inter rectas oppoſitas applicatis parallelas ſubcontrarie, hoc eſt, inverſe poſitam orthogonaliter trajicit. Pro quovis vero angulo obliquo GHQ, ipſa quoque ASC erit obliquangula, ac proin tali motus directione ſuppoſita, quæ fit ſecundum ductum applicatarum, nulla non Logarithmica utilis eſſe poteſt ad ſolvendum Problema; prorſus ut indicavi in loco præmemorato Actorum.

IX.

Propero ad alteram Methodum, per quam exhibentur curvæ innumeræ, quæ optatum præſtant, tam algebraicæ quam tranſcendentes, & tales quidem tranſcendentes, quæ ad ſui conſtructionem nullas exigunt quadraturas, ſed duntaxat curvarum algebraicarum rectificationes; quod num præſtiterit ſolutor Anonymus, prout ab eo petii, nondum audivi. In hac methodo conſiſtit

X.

SOLUTIO II.

Sit primo angulus interſectionis curvarum rectus. Super HG perpendiculari ad rectas parallelas PN, RQ, deſcribatur curva arbitraria GEH, quæ habeat duos ramos EG, EH, ſimiles & æquales, adeoque verticem E in parallela OE tranſeunte per punctum medium O. Sumtis dein in utroque ramo duobus arcubus ES, EM æqualibus, agantur parallelæ SB, MD illa ad dextram, hæc ad ſiniſtram, fiantque ipſis arcubus ES, EM æquales: Dico puncta B, D, fore in curva AEC op- TAB. XXXVII. Fig. 4.

Yyy 3 tata,

tata, quæ nempe circa EO revoluta ut cum priore inversum acquirat situm, inter parallelas PN, RQ, semet ipsam ad angulum rectum constanter secabit, dum alterutra movetur secundum directionem parallelarum.

Dem. Productis SB, DM pro lubitu ad v, V; intelligantur applicatæ proximæ sb, md, atque Bt, Dn, ipsis elementis arcum Ss, Mm parallelæ: hinc quia $Bt = Ss = Es - ES = sb - SB = tb$; erit triangulum B$tb$ isosceles, adeoque angulus Bts duplus anguli Bbt; quoniam vero $Bts = HSB$, & $Bbt = CBu$, erit etiam angulus HSB duplus anguli CBu. Pari ratione demonstratur angulus EMV duplus anguli EDM. Porro ang. EMV = ang. ESB, ob æqualitatem & similitudinem arcuum EM, ES; ille vero angulus ESB junctus angulo HSB æquivalet duobus rectis, ac proinde summa semissium $EDV + CBv$, facit unum angulum rectum. Quare patet, ex §§ 1 & 2, Curvam AEC habere naturam eam ut se inversam secet ad angulum istis simul sumtis, hoc est, recto æqualem. *Q. E. D.*

COROLL. Assumta pro GEH semi circumferentia circuli, generabitur inde curva AEC, quæ, vi constructionis hujus, erit Cycloïs vulgaris; quod alia demonstratione opus non habet: & sic rursus per hanc solvendi viam in Cycloïdem incidimus.

XI.

Quod si pro GEH aliæ quæcunque curvæ algebraïcæ assumantur, quæ habeant ramos EG, EH similes & æquales, ut sunt omnis generis Ellipses, item Hyperbolæ, & Parabolæ, quarum vertex summus sit E, & axis EO; prodibunt innumeræ diversissimi generis curvæ AEC, conditioni præscriptæ satisfacientes, quæ ad sui constructionem requirunt tantum curvarum algebraicarum rectificationem, citra ullum ad quadraturas recurrendi necessitatem.

XII.

XII.

Denique hoc insuper consequimur, quod in hujus Problematis solutione maximi est momenti; adhibita nimirum pro GEH aliqua curva non tantum algebraïca, atque ambos ramos similes & æquales habente, sed quæ præterea sit algebraice rectificabilis, quales innumeræ dantur, ut sunt variæ Evolutæ, variæ Causticæ, aliæque ejusmodi, tum omnes Epicycloïdes, & Hypocycloïdes, quæ describuntur ex revolutione circuli super circulo, quorum diametri sunt commensurabiles; adhibita, inquam, tali curva pro GEH, palam est, curvam ex ea descriptam AEC fore semper algebraïcam. Et hac ratione infinitas curvas algebraïcas e vestigio depromere licet, quarum singulæ optata qualitate gaudebunt, hoc est, quæ in situ subcontrario positæ semet ipsas orthogonaliter continue secent, durante motu parallelo.

XIII.

Esto nunc angulus intersectionis obliquus: Ut huic quoque casui satisfiat, exhibendo pariter curvas, vel omnino algebraïcas, vel algebraïcarum extensione construibiles, utrumque enim pro intersectione obliquangula non minus quam pro rectangula in potestate est; docebo primo modum, inventam quamlibet curvam pro quolibet dato angulo inservientem immmutandi in aliam, quæ inserviat in casu cujusvis alius anguli dati. Supponamus itaque curvam ABC TAB.
esse aliquam per methodum quamcunque constructam, quæ imperato officio fungatur inter GN, HQ parallelas, & recta GH faciens XXXVII.
angulum GHQ æqualem angulo intersectionis. Suppositis factisque reliquis ut in Fig. 1, ducatur HK, ut fiat angulus GHK, *Fig.* 5
cui jam oporteat esse æqualem angulum intersectionis, tum inclinentur NG singulæque applicatæ BL, DM, &c. in situm TG, βL, ΔM, ipsi HK parallelum. Dico puncta β, Δ, fore in curva $\alpha\beta\Gamma$, quæ inverse posita super HK, uti est super GT, & hac vel illac fluens in earundem directione semet ipsam decussabit ad angulum ipsi GHK constanter æqualem.

Dem.

Dem. Ductis applicatis proximis $\text{ϐ}l$, δm, æqualiter a βL, ΔM diſtantibus; factiſque ipſi HG parallelis $\text{ϐ}\gamma$, $\Delta\varepsilon$; erunt hæ ipſæ $\text{ϐ}\gamma$, $\Delta\varepsilon$ tam inter ſe quam ipſis bc, Dn æquales, utpote tam hæ quam illæ æquales ipſis Ll, Mm; nec non $\gamma\beta = c$B & $\varepsilon\delta = nd$, utpote utrobique differentiæ applicatarum æqualium. Quoniam igitur curva ABC ſupponitur præſtare conditionem optatam pro angulo GHQ, erit per §. 2, $c\mathrm{B} \times nd = bc^2$; hinc & $\gamma\beta \times \varepsilon\delta = \text{ϐ}\gamma^2$; eruntque adeo triangula $\beta\gamma\text{ϐ}$, $\Delta\varepsilon\delta$ ſimilia; ex qua ſimilitudine habetur angulus $\varepsilon\delta\Delta =$ ang. $\beta\text{ϐ}\gamma$, proinde angulus $\varepsilon\delta\Delta$, ſeu qui ipſi æqualis cenſetur angulus MΔr, una cum angulo $\gamma\beta\text{ϐ}$, hoc eſt, cum angulo Lβr æquatur angulo $\mathrm{L}\gamma\text{ϐ} = \mathrm{GL}\beta =$ angulo dato GHK. Ergo, per §§. 1 & 2, Curva $\alpha\beta$r ſatisfacit pro angulo interſectionis qui conſtanter æqualis erit dato GHK. *Q. E. F.*

X I V.

Ex hac curvarum immutatione nunc liquet quomodo ad datum quemvis interſectionis angulum Problema ſolvi poſſit, exhibendo curvas, quæ pro lubitu, vel ſint algebraïcæ vel per algebraïcarum rectificationem conſtruibiles, & quidem utriuſque generis numero infinitas. Deſcribatur enim primo pro arbitrio per §§. 11 & 12, curva aliqua quæ tantum inſerviat pro interſectione orthogonali, hujuſque poſtea applicatæ inflectantur ut ſingulæ cum axe HG conſtituant angulum dato cuilibet æqualem; manifeſtum eſt ex prædictis, curvam novam inde naſci qualis deſideratur: illa quippe, ſi ſimpliciter obſervetur modus in § 11 oſtenſus, erit tranſcendens, ſed quæ ad ſui conſtructionem requirit duntaxat curvæ algebraïcæ extenſionem: ſin autem in auxilium vocetur quod ſuppeditat § 12, habebitur omnino algebraïca. Motum interim curvarum harum inſtitui debere ſecundum directionem applicatarum præfato modo inflexarum, non opus eſt ut moneam; ratio ejus plus ſatis apparet ex præcedentibus.

X V.

X V.

Subjungam hac occaſione conſtructionem aliam, etiamſi particularem, quam propoſitam volo loco Theorematis jucundi & elegantis: Eſto ABC curva quæcunque inter parallelas PN, RQ movenda, ſeque inverſam conſtanter ſecans in dato angulo, qui ſit æqualis ipſi GCQ. Productis applicatis LB, MD &c. capiantur in illis partes BS, DV &c. ipſis arcubus CB, CD &c. reſpective æquales, ut puncta S, V, &c. generent novam curvam CSVE; deinde capiantur partes SK æquales arcubus CS, ut habeatur tertia curva CFK; atque ex hac ſimili modo deſcribatur quarta; ex quarta deſcribatur quinta, & ita deinceps. Dico omnes has curvas eam habere indolem, ut unaquæque ex illis inter parallelas easdem PN, RQ mota ſe inverſam ſecet in conſtanti angulo, qui præcedentis erit dimidius: poſito namque interſectionis angulo pro prima $= a$; erit ille pro ſecunda CSE, $= \frac{1}{2}a$; pro tertia CFK, $= \frac{1}{4}a$; pro quarta, $= \frac{1}{8}a$; pro quinta $= \frac{1}{16}a$; & ſic in infinitum. TAB. XXXVIII. Fig. 6.

Demonſtratio ſimilis eſt ei quam feci §. X: aſſumtis enim duabus applicatis LBS, MDV a puncto medio O æquidiſtantibus, iiſque proximis lbs, mdv; intelligantur lineolæ ts, Vn, elementis primæ curvæ parallelæ: erunt, ut ibi demonſtratum; ambo triangula Sts & Vnv iſoſcelia; adeoque angulus Bts hoc eſt LBb vel LBC duplus anguli tSs ſeu LSC; & angulus MDC duplus anguli MVC; unde ſequitur, angulum interſectionis pro curva ſecunda CSE [hoc eſt per §. I] ang. LSC + ang. MVC $= \frac{1}{2}$ ang. LBC $+ \frac{1}{2}$ ang. MDC $= \frac{1}{2}a$; pari modo demonſtratur angulus interſectionis pro curva tertia CFK, $= \frac{1}{4}a$; ille pro quarta, $= \frac{1}{8}a$; atque ita deinceps. *Q. E. D.*

X V I.

S o l u t i o III.

Supereſt tertia ſolvendi methodus, quæ docet, ex ſuppoſitis ali-

aliquot curvis jam inventis deſiderato ſatisfacientibus, invenire novam quæ idem præſtet pro alio interſectionis angulo; ita, exempli gratia, ſi ſupponamus in eadem *Fig. 6*, Curvam CFK eſſe datam, eamque ſatisfacere pro interſectionis angulo qui ſit $= a$; item CSE eſſe aliam datam inſervientem pro interſectionis angulo quem vocemus b: inveniri poterit tertia curva CBA, quæ reſpondebit quæſito pro interſectionis angulo qui erit $= a + b$. Quod ex ſequenti ratiocinio patebit.

XVII.

Concipiatur recta CG perpendicularis ad applicatas, quæ pro axe ſumatur, ſitque $CL = x$, $LB = y$, $Bc = dy$; quia per hyp. Curvæ CK, CS, ſunt datæ, dabuntur in x & dx elementa applicatarum LK, LS; hinc etiam dabuntur in x tangentes inclinationis curvarum ad applicatas, hoc eſt, angulorum CKL, CSL; exprimuntur autem tangentes horum angulorum dividendo elementum abſciſſæ, Ll, vel dx, per elementum applicatarum LK, LS, & ſumendo unitatem pro ſinu toto. Sit itaque $p =$ tang. ang. CKL, & $q =$ tang. ang. CSL; quæraturque curva CBA, cujus arcus CB cum applicata BL faciat angulum æqualem ſummæ angulorum CKL & CSL; quo facto manifeſtum eſt hanc curvam CBA ipſam fore, quæ inſerviet pro interſectionis angulo $a + b$.

XVIII.

Quomodo autem talis curva CBA ſit formanda; quæ habeat ubique angulum CBL $=$ ang. CSL $+$ ang. CKL; diſcimus ex Theoremate generali quod in Schediaſmate præcedenti demonſtratum eſt. Nam quia tangens anguli CKL $= p$, & tang. ang. CSL $= q$, erit, vi illius Theorematis, tangens ſummæ horum angulorum $= (p + q) : (1 - pq)$, cui per conſequens æqualis eſſe debet tangens anguli CBL, quæ eſt $dx : dy$, unde habetur $dy = (1 - pq)\, dx : (p + q)$, pro æquatione differentiali curvæ

curvæ quæſitæ CBA. Dantur vero p & q in x, hoc eſt, ſunt abſciſſarum functiones datæ; ipſa proin æquatio eſt conſtruibilis, ſaltem conceſſis quadraturis curvarum algebraicarum.

XIX.

Quod ſi aſſumantur tres curvæ quæ quadrent ad totidem diverſos interſectionis angulos, a, b, c; ex illis eandem methodum ſequendo adornabitur curva quarta, quæ erit idonea ad efficiendum angulum interſectionis $= a + b + c$. Sint enim p, q, r, tangentes angulorum in quibus curvæ datæ applicatis ſuis occurrunt; ex præfato noſtro Theoremate clarum eſt tangentem ſummæ trium illorum angulorum fieri $= (p + q + r - pqr) : (1 - pq - pr - qr) =$ tang. anguli CBL $= dx : dy$. Hinc pro natura curvæ quæſitæ CBA obtinetur æquatio differentialis hæc $dy = (1 - pq - pr - qr)\, dx : (p + q + r - pqr)$, cujus integratio, ob datas abſciſſarum x functiones p, q, r, redacta eſt ad quadraturas.

XX.

Simili modo ex quatuor curvis aſſumtis invenitur quinta, ex quinque ſexta, & ita porro; quo rurſus infinita naſcitur curvarum multitudo. Ubi notandum inter aſſumtas poſſe quoque inſervire ipſam lineam rectam, cum axe CG angulum quemcunque conſtituentem; etenim & hæc quoque linea recta gaudet præſcripta conditione, ut ſe inverſam & in parallelum motam ſecet ad conſtantem angulum: ſit, exempli gratia, in §. XVII, linea CSE recta hypothenuſa trianguli rectanguli CGE, faciens angulum cum applicatis ubique eundem & æqualem ipſi CEG; cujus proin tangens q, quæ ibi eſt functio ipſius x, hic jam eſt quantitas conſtans quæ vocetur h; mutabitur æquatio differentialis pro curva quæſita in hanc $dy = (1 - hp)\, dx : (p + h)$. Unde apparet unicam curvam aſſumtam CFK pro quocunque interſectionis angulo ſufficere ad formandam ex ea curvam CBA, quæ ad quemlibet alium interſectionis angulum utilis erit: prout

 enim

enim h major minorve ſumitur, magis etiam minuſve augebitur angulus interſectionis curvæ aſſumptæ CFK; quinimo eundem omnino diminui poſſe, ſupponendo h negativum, per ſe clarius eſt, quam ut multis moneri neceſſe ſit; tunc utique æquatio inde reſultans $dy = (1 + hp)\, dx : (p - h)$, determinabit curvam CBA, cujus angulus interſectionis $= a - b$, ſeu differentiæ inter angulum interſectionis curvæ CFK & angulum interſectionis lineæ rectæ AE.

XXI.

Præter hos tres ſolvendi modos in promptu ſunt alii, ſed cui bono ut omnes recenſeam? Potuiſſem exponere duntaxat ſecundum & ſupprimere reliquos; ille quippe ſolus gaudet omni perfectione, quæ in hujus rei negotio deſiderari queat, dum non tantum exhibet curvas tranſcendentes quæ ad ſui deſcriptionem requirunt algebraicarum extenſionem, qualis conſtruendi ratio illi quæ per quadraturas procedit longe eſt anteponenda; ſed & largitur algebraicas; & quidem ex utroque curvarum genere numero infinitas, pro quovis dato interſectionis angulo. Volui tamen primum & tertium prædictorum modorum una opera communicare; ut appareat quam diviti meſſe abundet hæc materia, atque hinc anſam arripiant curioſi ex combinationibus harum infinities-infinitarum ſolutionum particularium, ex tergemina noſtra methodo univerſali emergentium, eruendi alias quæ adhuc latent ſolutionum ſpecies.

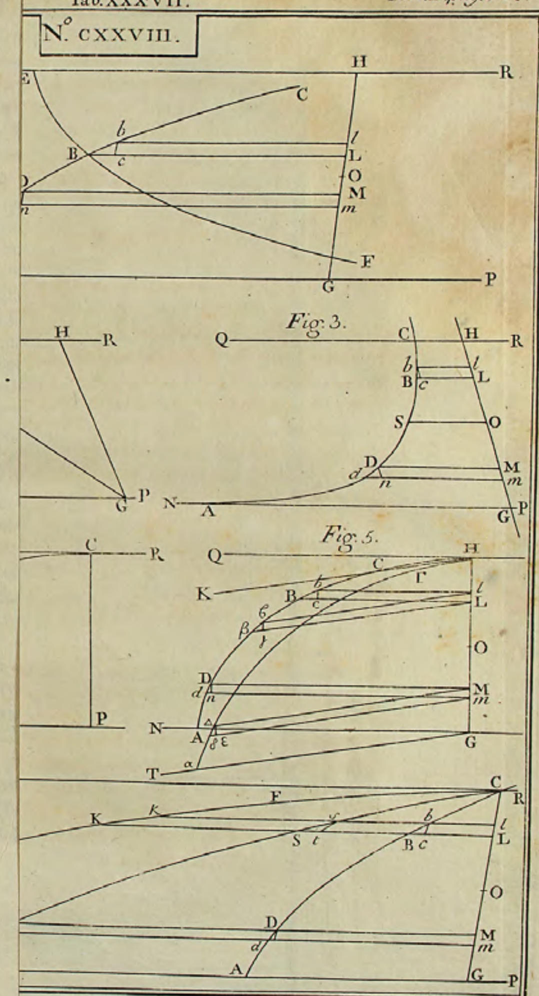
XXII.

SCHOLIUM.

Rogantur quicunque hæc legent & intelligent, ut conferant omnes illas ſolvendi methodos, præſertim quæ ſub titulo *Solutionis* II a me traditæ ſunt, cum illa quæ ab Anonymo ſolutore Britanno extat in *Actis* Anni ſuperioris M. Apr. * atque ut per-

* N°. CXXIV. ſupra pag. 520

Tab. XXXVII. *Tom. II. pag. 548.*

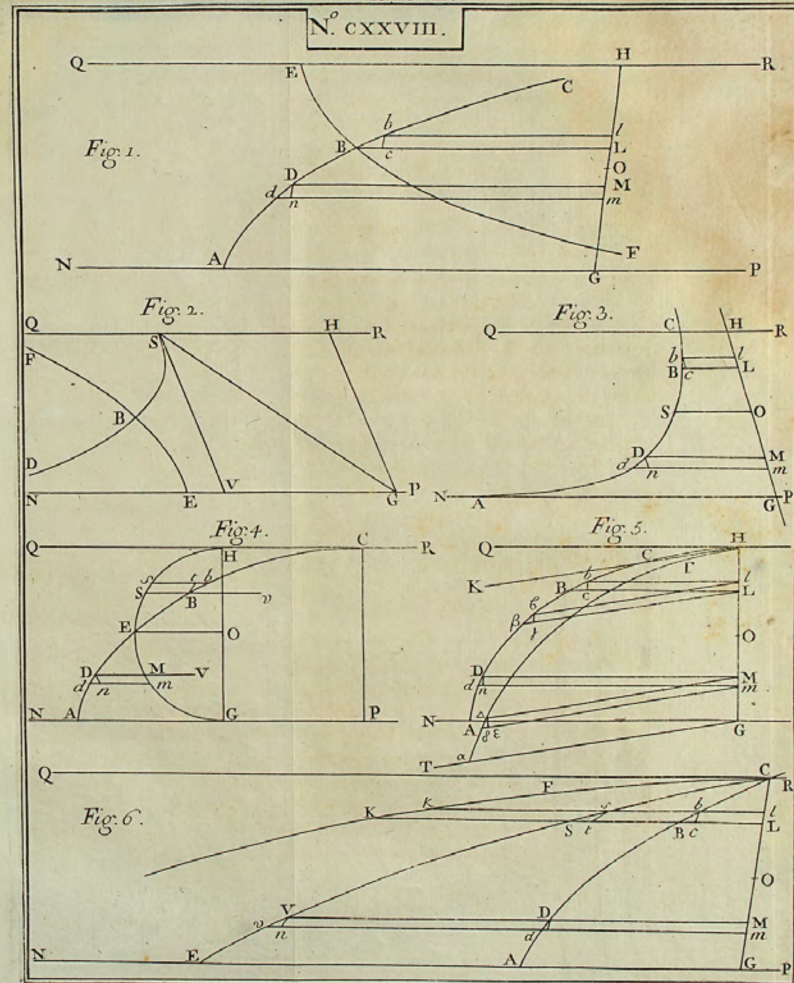


TORIIS

nusve augebitur
ninimo eundem
, per se clarius
que æquatio in-
eterminabit cur-
-b, seu differen-
angulum inter-

unt alii, sed cui
duntaxat secun-
udet omni per-
ueat, dum non
ni descriptionem
onstruendi ratio
ponenda; sed &
arum genere nu-
gulo. Volui ta-
um una opera
undet hæc ma-
binationibus ha-
m, ex tergemi-
uendi alias quæ

t, ut conferant
sub titulo *Solu-*
onymo solutore
pr. * atque ut
per-



perpendar
bus collig
nitam hab
men obvia
ego secut
ob id ipsur
carum rect
quam ob c
duntaxat c
Filius meu
quod dubi
huic cond
curvas alge
mea secun-
nimis panc
tione per c
solutionem
inflectendo
Qua utiqu
rium est ar
nymo non
suæ solutio-
gulus inters
buisset, Cy
do angulus
habeat And
nimis curio
rimus, ut p
cendentes t
præsto esser
nempe data
neque a no
postea, uti
arant vitula
viciandi, u