



[ 270 ]

Nº. CIV.

### PROBLEMA:

*Trajectoria.* Data Serie Linearum per recta in eadem Linea constantis variationem procedente; invenire aliam Seriem Linearum, quarum quævis priores omnes ad angulos rectos fecet.

*Acta Erud. Lipsi. 1716 Maj. pag. 226.*

**H**OC Problema interviet ad exercendos explorandosque profectus in Calculo differentiali. Solutionem ejus generalem se habere significavit eminens in his studiis Vir, *Johannes BERNOULLIUS*. Et insignis est usus etiam in applicatione ad Physico-Mathematica; nam in Dioptriciis est quærare undas *Hugenianas*, dato medio tali ut radii sint datæ figuræ; vel in Phoronomicis quærare synchronas *Bernoullianas*. Et qui solutionem generalem dabit, operæ pretium se fecisse ostendet. In casibus tamen specialibus sepe facilius habetur solutio; velut cum Curvæ datæ sunt Conicæ. Et cum casus, quo datæ sunt Hyperbolæ ejusdem centri & verticis ad meliorem Problematis generalis intellectum inferriat, solutionem ejus ingeniosam subjicere placet, quam Dominus *Nicolaus BERNOULLIUS junior*, *Johannis filius*, dedit his verbis.

### PROBLEMA

Invenire Lineam, quæ ad angulos rectos fecet omnes Hyperbolas ejusdem verticis & ejusdem centri.

### SOLUTIO.

**T A B.** Sit LA axis transversus hyperbolarum AB, AC, AD, AG, &c. XXXIII. quarum commune centrum O, vertexque communis A: Linea quæ eadem ad angulos rectos traiciat, sit BCDG, cujus natura & constructio exhibenda est. In hunc finem, concipiatur ex hyperbolis duæ proximæ, AC, AD, quibus trajectoria quæsitâ occurrat in C, D. Ex puncto C tangens CF, atque applicata CE, ductæ intelligantur, huicque perpendicularis DS; ita ut habeatur triangulum DSC simile triangulo CEF; nec non, ex proprietate Sectionum Conicarum jam ab *APOLLONIO* demonstrata, tres rectæ OF, OA, OE, continue proportionales.

Nº. CIII.

Fig. 2.

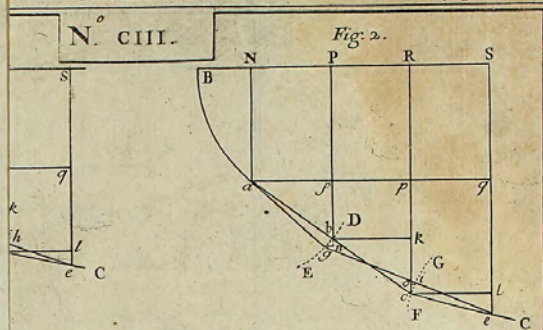


Fig. 4.

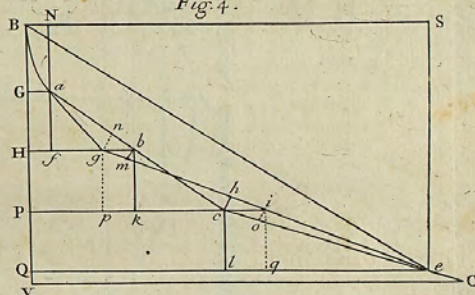
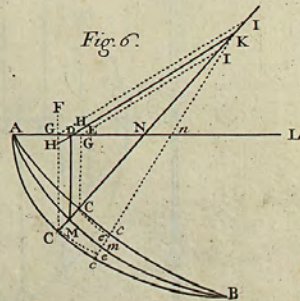
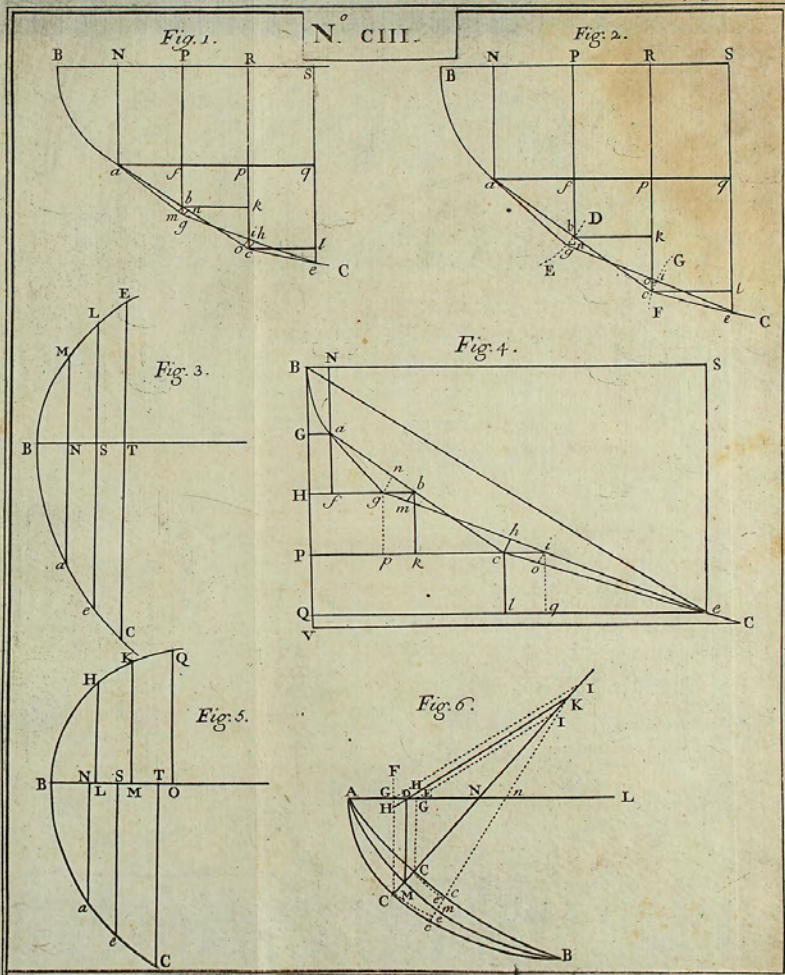


Fig. 6.



N. CHIL.

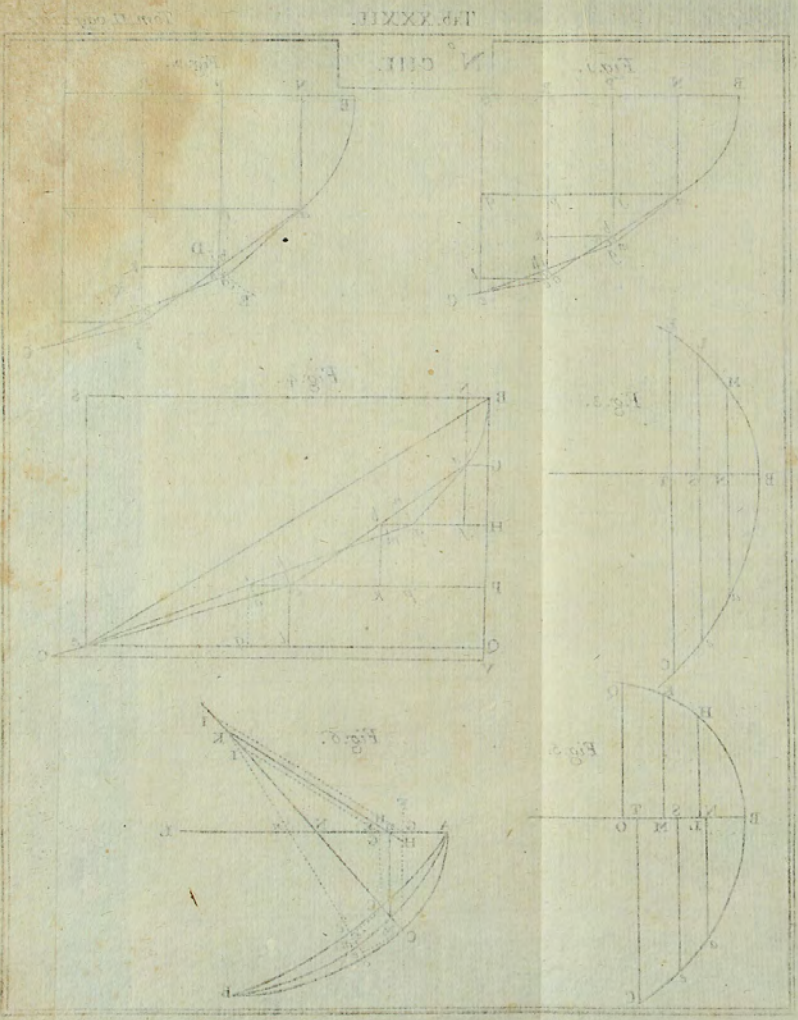


variationem  
m quavis

e profectus in  
habere signi-  
U S. Et infi-  
nam in Diop-  
dii sint datae  
mas. Et qui  
ndet. In ca-  
cum Curvæ  
bolæ ejusdem  
lectum infer-  
Dominus Ni-  
verbis.

perbolæ ejuf-

O, A G, &c.  
nca quæ cal-  
& constructio  
s duæ proxi-  
C, D. Ex  
gantur, huic-  
simile trian-  
um jam ab  
E, continue  
• Pofitis



PROBLEMA

Nº. CIV.

Positis itaque  
demque applicata  
EF [—  $ydy: d$   
decrevit  $y$ . Hinc  
 $dx$ , & OF. O  
continue proporti  
 $ydy = (aa -$   
gralibus  $yy + bb$   
[ per  $lx$  intelligo  
logarithmi ipsius  
quationem percurs  
tris idem olim F  
Hoc enim modo  
per  $1$ , hoc est,  
( $yy + xx + bb$ )  
rithmis, emergit ta  
lis pro natura tra  
auxilium vocanda

Ex centro hype  
cularis OR, ad  
fumtum, descripta  
ditatis gratia subtra  
ta per E. perpen  
fumta OH pro un  
lutione invenimus  
 $2af(adx: x) -$   
tus circulus fecerit  
tum = ME. EI =  
in quo adapteretur  
= NE' — NE  
EC; quo facto erit  
=  $yy$ . Ergo pun

Quandoquidem  
rametri variables e  
loquar] excrecend



N<sup>o</sup>. CIV. PROBL. DE TRAJECT. ORTHOG. 271

Positis itaque semisse OA,  $a$ ; abscissa curvæ quæsitæ OE,  $x$ , ejusdemque applicata EC,  $y$ ; erit DS [ $dx$ ]: CS [ $\frac{dy}{dx}$ ] = CE [ $y$ ]: EF [ $-ydy: dx$ ]; sumo autem  $\frac{dy}{dx}$  pro CS, quia crescente  $x$ , decrevit  $y$ . Hinc OF [OE - EF] =  $x + ydy: dx = (xdx + ydy): dx$ , & OF. OE =  $(xxdx + xydy): dx =$  [ob OF, OA, OE, continue proportionales] OA<sup>2</sup> =  $aa$ . Reducta æquatione provent  $ydy = (aa - xx) dx: x = aadx: x - xdx$ , sumtisque integralibus  $yy + bb = 2aax - xx$ , seu  $yy + xx + bb = 2aax$  [per  $lx$  intelligo logarithmum ipsius  $x$ ; est enim  $dx: x$  differentiale logarithmi ipsius  $x$ , seu  $dx/x$ ]. Equatio inventa reducitur porro ad æquationem percurrentem seu exponentialem, assumendo, ad mentem Patris idem olim facientis,  $n$  pro numero unitatis, hoc est,  $ln = 1$ . Hoc enim modo membrum prius æquationis inventæ  $yy - xx + bb$  per 1, hoc est, per  $ln$  multiplicatum esse supponi potest; unde habetur  $(yy + xx + bb) ln = 2aax$ , sumtisque more solito numeris ex logarithmis, emergit tandem  $n^{yy + xx + bb} = x^{2aa}$  æquatio exponentialis pro natura trajectoriæ quæsitæ BCD. Quæ vero ut construatur, in auxilium vocanda est curva logarithmica.

CONSTRUCTIO.

Ex centro hyperbolarum O excitetur ad axem transversum perpendicularis OR, ad quam ut asymptoton, & per punctum H pro lubito sumtum, descripta sit logarithmica arbitraria HZI; habeat illa commoditatis gratia subtangentem æqualem semi-axi transverso AO. Hinc ducta per E perpendiculari MEI, quæ occurrat logarithmicæ in I, erit sumta OH pro unitate EI =  $lx = f(a dx: x)$ . Quia autem in solutione invenimus  $ydy = aadx: x - xdx$  [id quod dat  $yy = 2af(a dx: x) - xx$ ] capiatur EM =  $2a$ , tum diametro MI descriptus circulus fecet LE in N: porro diametro NE [cujus utique quadratum = ME.EI =  $2af(a dx: x)$ ] describatur semi-circulus NPE, in quo adaptetur NP = OE =  $x$ , ductæque EP [cujus quadratum = NE<sup>2</sup> - NP<sup>2</sup> =  $2af(a dx: x) - xx$ ] abscindatur æqualis EC; quo factò erit hujus quoque quadratum =  $2af(a dx: x) - xx = yy$ . Ergo punctum C erit in Curvâ quæsitâ BCD. Q. E. F.

SCHOLIUM.

Quandoquidem hyperbolarum a trajectoria normaliter secundarum parametri variables existunt, possunt parametri, vel ultra infinitum [ut ita loquar] excrecendo, vel infra 0 decrescendo, evadere negativæ: At vero

vero hyperbolæ ad parametros negativæ degenerant in ellipses. Unde concludere licet eandem trajectoriam BCD si continuata intelligatur versus hyperbolas oppositas, ad angulos quoque rectos occursum ellipsis super eodem hyperbolarum axe transverso descriptis. Confirmatur hoc per calculum; nam si pro ellipsis illis separatim quaeratur trajectoria, sicuti id factum est pro hyperbolis, eadem prorsus quam supra invenimus prodibit æquatio; ita ut duo ista Problemata, etsi diversa videantur revera tamen non nisi unum idemque sint.

Quod si eadem logarithmica HZI super asymptoto OR sursum deorsumve translata intelligatur, ut nempe OH major minorve fiat; manifestum est aliam semper trajectoriam BCD per constructionem nostram prodire: unde numerus curvarum quaesito satisfaciendum atque hic exhibitarum oriatur infinitus. Si quis earum formas exploret, considerando attente constructionem nostram, vel simpliciter æquationem  $xy = aadx: x - xdx$ , observabit singulas ex trajectoriis istis formare figuras clausas verticem hyperbolarum tanquam umbilicum ambientes, quibus singulis alie totidem respective similes & æquales respondent circa alterum verticem, seu umbilicum L, quæ hyperbolas oppositas ellipsesque super axe AL descriptas pari modo trajectoriis normaliter. Et quemadmodum illæ omnes inter O & A, ita hæc omnes inter O & L axem transversum LA secant iterumque eundem utrimque prolongatum trajectiunt: ubi hoc notandum, puncta ista intersectionum interna magis magisque ad centrum hyperbolarum O accedere, nunquam tamen illud attingere posse, nisi trajectoria abeat in rectam OR perpendicularem ad axem LA; quæ utique solas ellipses ad angulos rectos secat, hyperbolis vero occurrere nequit. Notandum præterea omnium trajectoriarum circa A vel L descriptarum apsidem, vel puncta remotissima ab axe inveniri in eadem linea recta; nempe in ea quæ perpendiculariter axem secat in A vel L, quod vel hinc quoque patet, quia perpendicularis hæc cum haberi possit pro hyperbola, vel ellipsi parametri infinite, per quam nempe hyperbolæ quasi transeunt in ellipses; ipsa quoque a trajectoriis singulis normaliter secatur, quarum proin intersectiones sunt puncta remotissima ab axe.

Cæterum, si circa punctum A concipiatur medium diaphanum, densitatis ita variantis, ut radii ex puncto lucido A emanantes incurvantur in hyperbolas AB AC, AD, &c. manifestum est unamquamque ex trajectoriis BCD fore undam *Hugenianam*, vel Patris mei Synchronam, ad quam scilicet radii lucis, vel mobilia secundum medii raritates in curvis AB, AC, AD, &c. accelerata, æqualibus temporibus perveniunt.

PROBLE-

## PROBLEMATIS

*Olim in Actis Eruditorum Lipsiæ propositi*

## SOLUTIO GENERALIS \*

IN Actis Eruditorum pro mense Octobri Anni 1698 pag. 471. D. Jo-  
hannes BERNOULLIUS hæc scripsit. „ Methodum quam optave-  
ram generalem secandi Curvas ordinatim positione datas, sive alge-  
braicas, sive transcendentales, in angulo recto, sive obliquo, inva-  
riabili, sive data lege variabili, tandem ex voto erui: cui, LEIB-  
NITIO approbatoræ, ne  $\gamma\mu$  addi potest ad ulteriorem perfectionem, Art. III.  
& vel ideo tantum quod perpetuo ad æquationem deducatur: in qua si  
interdum indeterminate sunt inseparabiles, methodus non ideo imper-  
fectior est, non enim hujus sed alius est methodi indeterminatas sepa-  
rare: Rogamus igitur Fratrem ut velit suas quoque vires exercere in re  
tanti momenti. Suscepti laboris non poenitebit, si felix successus fructu  
jucundo compensaverit. Scio relicturum suum quem nunc fovet mo-  
dum, qui in paucissimis tantum exemplis adhiberi potest.

Hi tres Viri Celeberrimi sese, jam ab annis quatuor vel quinque cir-  
citer, in solvendis hujusmodi Problematibus exercuerant. Absque spiri-  
tu divinandi eandem solutionem cum *Bernoulliana* tradere difficile fuerit.  
Sufficit quod solutio sequens sit generalis, & quæ ad æquationem semper du-  
ducat.

## PROBLEMA.

Quæritur Methodus generalis inveniendi seriem Curvarum, quæ curvas in  
serie alia quacunque data constitutas, ad angulum, vel datum, vel data le-  
ge variabilem secabunt.

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. M m SOLU-

\* Hujus Solutionis Auctor Celeb. NEWTONUS. Vid. ejus Elogium in *Hist. Acad. Reg. Scient. Paris. A<sup>o</sup>. 1727.*



## SOLUTIO.

Natura Curvarum secundarum dat tangentes earundem ad intersectionum puncta quæcunque: & anguli intersectionum dant perpendiculara Curvarum secantium; & perpendiculara duo coeuntia, per concursum suum ultimum, dant centrum curvaminis curvæ secantis ad punctum intersectionis cujuscumque. Ducatur abscissa in situ quocumque commodo, & sit ejus Fluxio Unitas; & positio perpendiculari dabit Fluxionem primam ordinatæ ad Curvam quæsitam pertinentis; & curvamen hujus Curvæ dabit Fluxionem secundam ejusdem ordinatæ. Et sic Problema semper deducetur ad æquationes. Quod erat faciendum.

## SCHOLIUM.

Non hujus, sed alius est Methodi æquationes reducere, & indeterminatas separare; absolute, si fieri possit, sin minus, per series infinitas. Problema hocce, cum nullius fere sit usus, in *Actis Eruditorum* annos plures neglectum & insolutum mansit. Et eadem de causa solutionem ejus non ulterius prosequor.



ART. I.

N<sup>o</sup>. CVI.

## ART. I.

## J. H. \* SCHEDIASMA DE TRAJECTORIIS

DATÆ SERIEI CURVIS AD ANGULOS RECTOS  
OCCURRENTIBUS:

Continens Solutionem generalem Problematis in *Actis Eruditorum*

1698, pag. 471 †, primum propositi, & in *Actis anni*  
*superioris* pag. 226 iterati.

ET si Autor quidam anonymus, cujus Tentamen solutionis in *Transac-* *Acta*  
*tionibus Londinensibus* circa hoc Problema editum ab Amico accepti, *Erud. Lips.*  
fatis abjecte de hoc Problemate sentire videtur, sub prætextu, quod nul- 1717, Aug.  
lius sit utilitatis, non tamen id impedit quominus solutionem ejus gene- pag. 349-  
ralem hoc loco sim adducturus; tum quia elegans mihi videtur Problema,  
tum etiam quia Amicus optimus id a me exegit. Sed priusquam exponam,  
juvabit Auctoris Anonymi textum, quo Problema solvere tentavit,  
attulisse.

*Natura Curvarum secundarum*, &c. [Vid. N<sup>o</sup>. præced.]

Autor ob inutilitatem quam causatur, hujus Problematis, hæc præ-  
cepta nullo exemplo illustrare dignatus est; quare ea Tentamen potius  
solutionis vocavi, quam Solutionem ipsam; imo Tentamen istud, ut ut  
semper ad æquationem ducat; in curvis secundis transcendentibus, quarum  
indoles aliter, quam per æquationes differentiales exprimi nequit, successu  
semper destituetur; quia centum curvaminis curvæ secantis necessario  
semper datur per quantitatem tres indeterminatas, earumque elementa  
involventem; ex qua, etsi ope æquationis differentialis curvæ secundæ,  
cujus modulus tertiam præbet indeterminatam juxta coordinatas curvæ,  
hæc tertia indeterminata ejici potest; ejici tamen non poterit moduli ele-

M m 2

\* Jacobi HERMANNI.

† Supra N<sup>o</sup>. LII. pag. 266. seq. Tom. I.



mentum, nisi in æquationes identicas incidere velis. Per modulationem hic intelligo lineam, quæ respectu unius ejusdemque curvæ secandæ est constans, sed in diversis curvis ejusdem speciei diversæ magnitudinis. Itaque Autoris methodus non est generalis; sed ad solas curvas algebraicas, aut simplicissimas ex transcendentibus restringenda: id insuper incommodi habens, quod laboriosissimo semper calculo centrum curvaminis invenire, atque adeo ad secundas fluxiones descendere jubeat præter necessitatem; quod secundum *Conterranei* cujusdam sui statutum non minus est erroneum, quam Problema quoddam construere velle per curvam magis compositam quam necessitas requirit. Videatur Tom. 8. *Diarii Hagienfis* pag. 421. in fine. Dico Autorem nostrum citra necessitatem ad secunda differentialia delabi; cum certum sit, ope canonis mox afferendi, & ad transcendentibus curvas æque ac algebraicas sese extendentis, semper æquationem differentialem primi gradus inveniri posse, pro trajectory curvas secandas ad angulos rectos trajiciente. Canon vero ita habet:

In æquatione differentiali curvarum secundarum, permutatis coordinatarum elementis, alterutro tamen cum signo mutato, elicatur valor moduli ex æquatione post hanc permutationem orta, inventusque moduli valor in æquatione curvæ secandæ finitis quantitatis expressu substitutus, suppeditabit æquationem differentialem Trajectory quæsitæ.

## E X E M P L U M I.

Invenire Trajectory Hyperbolarum ex eodem centro lateraque transverso describendarum.

Sint  $a$  semilatus transversum,  $c$  semi axis conjugatus qui, cum in diversis hyperbolis diversæ sit magnitudinis, pro modulo sumi debet,  $x$  abscissa, &  $y$  ordinata. Equatio hyperbolarum erit  $ayy = cxx - aac$ , in cujus differentiali  $ay dy = cxdx - aac$  permutato elementa coordinatarum, scribendo pro  $dx$ ,  $dy$ , & pro  $dy$ ,  $-dx$ , scilicet  $dx$  cum signo mutato; & provenit  $cxdy = -ay dx$ : adeoque valor moduli  $c = -ay dx$ :  $xy dy$  in æquatione  $ayy = cxx - aac$ , præbet æquationem differentialem primi gradus  $ayy = (-axxy dx + a^2 y dx)$ :  $xy dy$ . Trajectory quæsitæ, quæ debitis reductionibus contrahitur in  $ydy = -xcx + aadx$ :  $x$ , cujus integralis est  $yy = bb - xx + 2aax - 2aaab$ ; ponendo  $lx$  &  $lb$  pro logarithmis linearum  $x$  & constantis  $b$ , quæ ad amussim convenit cum ea quam Docti. Nic. BERNOLLI, Johannis Celeberrimi Viri dignissimus Filius, dedit in *Actis Erud.* 1716. p. 228. \*

\* Supra N<sup>o</sup>. CIII. pag.

## E X E M P L U M II.

Invenire Trajectory curvarum hac æquatione  $x^3 + y^3 = axy$  expressarum.

Curvæ æquatio differentialis est  $3xxdx + 3yy dy = ay dx + ax dy$ , in qua scribendo pro  $dx$  &  $dy$  respective  $dy$  &  $-dx$ , invenitur  $3xxdy - 3yydx = ay dy - ax dx$ , atque adeo  $a = (3xxdy - 3yydx) : (y dy - x dx)$  qui valor in æquatione  $x^3 + y^3 = axy$  substitutus, destructis destruendis & omnibus ad unam æquationis partem dispositis, præbebit  $x^3 dx - y^3 dy + 2x^2 y dy - 2xy^2 dx = 0$  æquationem differentialem primi gradus pro Trajectory quæsitæ; in qua æquatione etsi indeterminatæ separari possunt cum suis elementis, huic tamen reductioni, brevitatis studio, non immorabor.

## E X E M P L U M III.

Invenire Trajectory Logarithmicarum per datam positionem punctum transeuntium; & communem asymptotam habentium.

Æquatio earum differentialis  $y dx = a dy$ , reducitur ad  $dx = a dy : y$  & integrando  $x = ay$ ; in prima vero permutatis  $dx$  &  $dy$  cum  $dy$  &  $-dx$ , fiet  $y dy = -a dx$  &  $a = y dy : -dx$ , qui valor in æquatione  $x = ay$  substitutus dat æquationem  $-x dx = y dy$  differentialem primi gradus Trajectory quæsitæ.

Similis est processus in omnibus aliis curvis algebraicis à Trajectory orthogonaliter secandis, & in illis ex transcendentibus quarum æquationes differentiales in alias finitis quantitatis expressas mutari possunt, ita tamen ut quantitates transcendentibus quibus constabunt modulum non involvant, ut in exemplo præcedenti. Etsi vero canon noster hærere videtur in aliis curvis transcendentibus, quarum æquationes differentiales ita comparatæ esse videntur, ut nequeant quantitatis finitis, ut in transcendentibus, exprimi quibus modulum non involvatur, nihilominus tamen ex exemplo sequenti constabit, ad eas omnino sese extendere, levi scilicet facta substitutione novæ cujusdam indeterminatæ loco alterutrius illarum quibus curvæ secandæ æquatio differentialis constat.

## E X E M P L U M IV.

Invenire Trajectory curvarum circa eundem axem descriptarum, & per datam in axe punctum transeuntium, hancque communem proprietatem habentium ut, in singulis, normalis curvæ, ad axem terminata, sit ad respectum radii osculi in data ratione  $m$  ad 1.

M m 3

Æquatio



Equatio differentialis hujus curvæ est, quæ habetur . . . N<sup>o</sup>. I.  $dx = y^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$   
 & a d u : b pro dy in æqu. I, fietque  $dx = adM : b$ , ponendo ad abbreviandum valorem dM, qui in æqu. III.  $dM = u^m du : \sqrt{(b^{2m} - u^{2m})}$  adeoque integrando  $dx = adM : b$  elicitur . . . æqu. IV.  $M = bx : a$   
 In æqu. I. permutatis coordinatarum elementis, more solito, fiet  $dy = -y^m dx : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , ex qua elicitur  $a^m dy = y^m ds$ , posita  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , vel, facta  $ds : dy = p : b$  . . . . . V.  $a = b^{-1:m} p^{1:m} y$   
 Hinc ex æquationib. II & V, elicitur VI.  $u = b^{(m+1):m} p^{-1:m} y$   
 & differentiando . . . VII.  $du = -\frac{1}{m} b^{(m+1):m} p^{(-m-1):m} dp$   
 Substitutis in æqu. III valoribus u & du ex VI & VII invenietur . . VIII.  $dM = -\frac{1}{m} b^{(2m+1):m} p^{(-m-1):m} q^{-1} dp$   
 [posito in præced. VIII,  $q = \sqrt{(pp - bb)}$ ] substituendo in æqu. IV valorem a ex V, fiet . . . IX.  $M = b^{(m+1):m} p^{-1:m} xy^{-1}$   
 & differentiando . . . X.  $dM = (-\frac{1}{m} p^{(-m-1):m} xy^{-1} dp + p^{-1:m} y^{-1} dx - p^{-1:m} xy^{-2} dy) b^{m+1:m}$

Jam ex æqu. VIII & X elicitur alia, quæ multiplicata per  $b^{(-m-1):m} p^{1:m} qy^2$ , & omnibus membris ad unam æquationem partem rejectis, præbet . . . XI.  $b^m y^2 dp + qxy dp + mpy dx - mpqx dy = 0$   
 Equ. XI integralis est  $bx + qy = y^m p : c^{m-1}$ , in qua si loco magnitudinum b, p, & q, substituam elementa dy, -dx, & ds, quæ ipsis in eodem ordine proportionalia sunt, mutabitur in . . XII.  $xy - y dx = y^m ds : c^{m-1}$   
 Et hæc XII est æquatio differentialis primi gradus Trajectoriæ quæsitæ.  
 Q. E. I.

Coroll.

Coroll. Si  $m = \frac{1}{2}$ , æquatio prima abit in  $dx = dy \sqrt{y} : \sqrt{(a - y)}$  æquationem Cycloidis, cujus integralis est  $x = A - \sqrt{(ay - yy)}$ , posita  $A = \int \frac{ady}{\sqrt{(ay - yy)}}$ ; adeoque A est arcus circularis cujus diameter a & sagitta y. Equatio quinta præbet hoc casu  $abb = ppy$ , seu  $ady^2 = yds^2$ , ex qua eliciuntur  $ds = dy \sqrt{ay} : y$ , &  $dx = -dy \sqrt{(ay - yy)} : y$ ; quare hi valores in æquatione XII ad hunc casum applicata  $xy dy - y dx = ds \sqrt{cy}$ , substituti dant  $x + \sqrt{(ay - yy)} = \sqrt{ac}$ , vel  $x = \sqrt{ac} - \sqrt{(ay - yy)} = A - \sqrt{(ay - yy)}$ , adeoque  $A = \sqrt{ac}$ . Hoc est, si in Circulo generatore cujuslibet Cycloidis abscondatur arcus ad basin Cycloidis terminatus, qui sit medium geometricum inter diametrum Circuli a & datam rectam c, linea per alterum arcus terminum ad basin Cycloidis parallela, Cycloidi occurret in quæsitæ Trajectoriæ puncto, & hæc ipsissima est constructio, quam Celeberrimus BERNOULLI dedit pro sua Synchrona in Actis 1697 †. Est itaque Synchrona Bernoulliana & Trajectoria una eademque curva, & utriusque æquatio differentialis  $xy dy - y dx = ds \sqrt{cy}$ .  
 Indicandum esset, qua ratione methodus nostra applicanda sit, cum Trajectoriæ quærentur, quæ curvas secandas in quolibet dato angulo fecant; id vero, ut ut facile ex præcedentibus colligi possit, alii tamen Schediasmati, una cum aliis huc pertinentibus reservabimus.

† Supra N<sup>o</sup>. XXXVII. pag. 192. Tom. I.

ART. II.

J. H. \* SUPPLEMENTUM

Solutionis sue Problematis de Trajectoriis Curvarum inveniendis, Mense Augusto superioris Anni in his Actis exhibitæ.

UT solutio Problematis de Trajectoriis datæ seriei Curvis ad angulos *Acta Erud.* rectos occurrentibus, quam in *Actis* præteriti Anni, 348. seqq. de. *Lips.* 1716. di, generalis est pro omnibus curvis algebraicis; ita dissiteri nolo, Jul. pag. viam quam in analysi Exempli quarti illic secutus sum, non satis expeditam; nec æque generalem esse ac primum putaram. Verum festinationi meæ imputandum est, quod non animadvertenter statim principia ibidem posita multo latius patere, quam tunc ostenderim, aut ostendere poterim. Reapse enim permutatio illa elementorum coordinata

\* Jacobi HERMANNIS.





natarum in curvis secundis quam adhibui, & assumtio novæ indeterminatæ principia sunt talia ut, si iis recte utamur, via plana & facili ad solutionem Problematis conducere possint. Quod ut probem, meamque *αΒΔΕ* *ΥΙαυ* reparem, exhibebo hoc loco constructionem generalem Trajectoriarum ex principiis istis deductam, suppressa tamen analysi, ne aliis in Problematis solutionem inquirendi proprioque Marte eruendi voluptatem adimere velle videar.

Sit generalis æquatio curvarum secundarum  $dx = p dy$ , ubi  $p$  data supponitur quomodocunque per  $y$  & constantes, factaque  $q = \sqrt{(1 + pp)}$  æquatio  $\log. c = \log. a = f(qqdy : (y + pspdy))$  præbebit constructionem generalem & facilem, ope Logarithmicæ perficiendam, existentibus  $a$  modulo curvæ secundæ, &  $c$  quantitate qualibet constante. Ad id enim, aptandæ solummodo sunt in Logarithmica dux ordinatæ  $a$  &  $c$ , atque in curva, cujus abscissæ  $y$ , ordinatæ vero sint  $qq : (y + pspdy)$ , abscindenda area proportionalis distantie applicatarum illarum Logarithmicæ; abscissa hujus areæ dabit ordinatam, ejusque valor in æquatione  $x = fspdy$  substitutus, abscissam Trajectoriæ quæsitæ in puncto interfectionis ejus & Curvæ secundæ. Q. E. P.

## E X E M P L U M.

Sit Curvæ secundæ æquatio eadem quæ in exemplo quarto Act. 1717, pag. 351, \*  $dx = y^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , eritque  $p = y^m : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$  &  $q = y^m : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$  quare invenietur  $spdy = f((1 - m)a^{2m}pdy : y^{2m}) - y : p$ , quod via differentiationis verum esse facile comperieris, & ponendo brevitatis gratia  $(1 - m)a^{2m}pdy : y^{2m} = dR$ , erit  $y + spdy = pR$ ; &  $qqdy : (y + spdy) = dR : (1 - m)R$ , quare integrando habebitur  $f(qqdy : (y + spdy)) = \frac{1}{1 - m} \log.$

$R = \frac{1}{1 - m} \log. a = (\text{constr.}) \log. c = \log. a$ ; ergo multiplicando per  $1 - m$ ,  $\log. R = \log. a = (1 - m) \log. c + (m - 1) \log. a$ ; atque adeo abjectis Logarithmis,  $R = a^m c^{1 - m}$ ; est vero  $R \Rightarrow f((1 - m)a^{2m}pdy : y^{2m})$ , seu restituyendo valorem ipsius  $p$ ,  $= f((1 - m)a^{2m}dy : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})})$ ; ergo si in curva cujus abscissæ  $y$  & applicatæ sint  $(1 - m)a^{2m} : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$  abscindatur

\* Supra pag. 278.

tur area  $= a^m c^{1 - m}$ , areæ hujus abscissæ  $y$ , dabit ordinatam trajectoriæ quæsitæ.

Æquatio differentialis hujus Trajectoriæ  $xdy - ydx = y^m ds : c^{m - 1}$ , quam in citato *Actorum* loco, quarto exemplo inventi, in eandem constructionem definit, quod simplici substitutione illico apparet; nam quia æquatio curvæ secundæ est  $dx = p dy$ , erit permutatis coordinatarum elementis,  $dy = -p dx$  &  $ds = -a^m p dx : y^m$  nec non  $spdy$  seu  $x = (pR - y) : p$ , retentis superioribus symbolis: substitutis his valoribus in æquatione  $xdy - ydx = y^m ds : c^{m - 1}$  invenietur  $-pRdx + ydx - ydx = -a^m p dx : c^{m - 1}$  id est,  $R = a^m c^{1 - m}$ , ut supra.

Si jam  $m = \frac{1}{2}$ , ut in Coroll. ad Exempl. 4. Act. 1717, pag. 352, \* fiet hoc casu  $R [ = f((1 - m)a^{2m}dy : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}) ] = f(\frac{1}{2}ady : \sqrt{(ay - yy)}) =$  arcui circulari cujus diameter  $a$  & sagitta  $y$ ; unde liquet constructionem nostram generalem in hoc casu particulari omnino ducere ad constructionem synchronæ *Bernoullianæ*, ut in *Actis* loco citato jam dixi; nam hic arcus  $R$  nunc erit  $= \sqrt{ac}$ .

\* Supra pag. 279.

## N°. CVII.

## SOLUTIO PROBLEMATIS

A Domino G. G. LEIBNITIO, *Geometris Anglis nuper propositi.*

Per Brook TAYLOR, LL. D. & R. S. Secr.

CUM Dom. G. G. LEIBNITIUS nuper defunctus, in controversia jam pridem orta circa inventionem Methodi Fluxionum, [quamvis Differentialem vocare maluit, sibi que pertinaciter appropriari nifus est] nihil omnino responsi dederit argumentis, quibus in clyti illius Inventi gloria Domino NEWTONO vindicatur; en tandem, hortante Domino Joh. BERNOULLI, Problema Geometris Anglis solvendum proposuit; quo scilicet vires eorum in Methodo ista experiretur; quasi Problematis illius solutioni, si cæteri istius Nationis deprehendantur impares, recte concludatur, nec ipsum NEWTONUM qui, fatente etiam LEIBNITIO,

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II.

N n ab

*Philosop. Transact.* 1717. Oct. Nov. Dec. N°. 354. Art. 2. pag. 695.

ab hujusmodi contemplationibus jam jure immunis esse debet, olim fuisse parem inventioni istius Methodi. Sive Problema solvatur, sive insolutum maneat, nihil exinde consequetur quod NEWTONUM afficiat; nec istis certe LEIBNITII Fautoribus, qui Problematis solutionem etiamnum continenter efflagitant, jus ullum est nos ad certamen ingeniorum tanta cum licentia provocandi; adeoque Problema eorum jure merito negligi possit. Verum ne aliquando exinde occasionem triumphandi arripiant, si hoc Problema maneat ab Anglis omnino intactum, ipse, Geometra longe non summi inter nostrates subfellii, inducor ut solutionem edam qualem qualem Problematis, nec usu, nec difficultate adeo insignis.

Problema a LEIBNITIO propositum, ita fuit intellectum, quasi nihil aliud requisitum fuisset quam ut secarentur ad angulos rectos Hyperbolæ Conicæ iisdem centro & verticibus descriptæ. Verum cum illi nunciatum fuerat hunc casum a quibusdam Anglis fuisse illico solum; rescriptit, non solutionem casus particularis, sed generalem requiri. Quo factum est, ut solutiones istæ particulares non editæ fuerint; verum in *Transactione Philosophica* N<sup>o</sup>. 347 \* subinde prodiit solutio maxime generalis. Sed nec illa contenti fuerunt LEIBNITIUS & Fautores ejus, quin illam derivari habuere, quasi qui illam excogitaverat non potuisset eam ad casum specialem applicare. Si nondum viderint quomodo ex illa æquatione sint deducendæ, id profecto illorum imperitiæ tribuendum erit. Paulo ante LEIBNITII obitum, prodiit tandem Problema sequens; quod quidem diversimode solvi potest, premendo vestigia solutionis generalis modo citatæ, sed quod in præsentia solvimus, ut sequitur.

## P R O B L E M A.

T. A. B. XXXIII. N<sup>o</sup>. CVII. Super recta AG tanquam axe, ex puncto A educere infinitas curvas, qualis est ABD, ejus nature, ut radii osculi, in singulis punctis B & ubique ducti, BO, secantur ab axe AG in C, in data ratione, ut nempe sit BO ad BC ut 1 ad n.

Deinde construende sunt Trajectoria EBF primas curvas ABD normaliter secantes.

## SOLUTIONIS PARS PRIMA,

Nempe Inventio Curvarum secundarum ABD.

1. Dæta ordinata BH ad axem AG normali, sint, Abscissa AH = z, Ordinata HB = x, Curva AB = v. Tum per Methodum Fluxionum directam

\* Supra N<sup>o</sup>. CV.

directam erit BC = xdv: dz † & fluente uniformiter v, BO = dxv: ddz. Unde, per conditionem Problematis, sit BO [dxdv: ddz]: BC [xdv: dz] = 1:n; adeoque xddz - ndxdz = 0.

2. Collata hac æquatione cum formula Fluxionum secunda, in calce Prop. 6. Methodi Incrementorum, invenitur  $x^{-n} dz = a^{-n} dv$ , existente a linea data, per cujus valorem potest curva ABD accommodari conditioni alicui Problematis annexæ.

3. Pro dv scripto ipsius valore  $\sqrt{(dx^2 + dz^2)}$ , migrat æquatio  $x^{-n} dz = a^{-n} dv$  in hanc  $dz = x^n dx: \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ . Unde datur z ex data x, per quadraturam Curvæ, cujus abscissa existente x, est ordinata  $x^n: \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ .

4. Sint  $\sigma$  &  $\tau$  numeri integri, vel affirmativi, vel negativi, tales ut sit Curvarum isto modo provenientium simplicissima, ea cujus est Abscissa y, & Ordinata  $y^{(1-n+2\sigma n):2n} \times (a-y)^{\tau-\frac{1}{2}}$ ; tum erit ea omnium Curvarum simplicissima; per quarum Quadraturam datur Abscissa z ex data Ordinata x.

5. Est Curva ABD geometrica, quoties pro n sumitur reciprocum numeri cujusvis imparis.

6. In prædictis Curvam ABD consideravimus ut versus axem AG concavam, quo in casu maxima ordinata x æqualis est lineæ datæ a, quam Parametrum Curvæ commode vocare licet. Et in hoc casu Curva actu occurret axi. Unde fluente ipsius  $x^n dx: \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$  debite sumpta, hoc est, ita ut simul evanescant z & x, transibit Curva per punctum datum A, sicut postulat Problema.

7. Sed si queratur Curva ABD, quæ sit versus axem convexa, ad eundem modum pervenietur ad æquationem  $dz = a^n dx: \sqrt{(x^{2n} - a^{2n})}$  quæ etiam ex æquatione priori derivari potest, mutando signum ipsius n. Et in hoc casu est curva ABD geometrica, quoties pro n sumitur reciprocum cujusvis numeri paris. In hoc vero casu Ordinata omnium minima x æqualis est Parametro a; adeoque Curva nusquam occurret axi. Quare limitatur Problema ad casum priorem.

8. Ex præmissis facile colligitur Curvas omnes ABD esse inter se similes, & circa punctum datum A similiter positas, lateribus earum homologis existentibus proportionalibus Parametris a.

N n z SOLU-

† TAYLORUS literas punctatas adhibet, quas typhothetæ causa mutavimus; Fluxiones more Leibnitiano designantes.



## Nempe Inuentio Curvæ fecantis.

9. Ex §. 2. fit  $dv : dz = a^n : x^n$ . Sed est  $BC : BH = dv : dz$ . Unde fit  $BC : BH = a^n : x^n$ . Ex conditione vero Problematis; est  $BC$  tangens Curvæ quæsitæ  $EBF$ . Quare si jam sumantur  $AH [z]$  &  $BH [x]$  pro coordinatis Curvæ  $EBF$ , Curva ipsa  $EB$  existente  $r$ , erit, per Meth. Flux. directam,  $dr : -dx = [BC : BH =] a^n : x^n$ .

$$\text{Unde fit } \frac{x^n}{a^n} = -\frac{dx}{dr}.$$

10. In Curva  $ABD$  finge æquationem  $dz = x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$  transformari in æquationem signis radicalibus non affectam  $dz = Ax^n dx : a^n + Bx^{3n} dx : a^{3n} + \&c.$  Tum regrediendo ad Fluente, fiet  $z = \frac{1}{n+1} Ax^{n+1} : a^n + \frac{1}{3n+1} Bx^{3n+1} : a^{3n} + \&c.$  coefficiente nova introducta nulla, quoniam per conditionem Problematis debent simul nasci  $z$  &  $x$ . Hinc vice  $x^n : a^n$  substituto ipsius valore  $-dx : dr$  in §. 9. invento, fit  $z = \frac{1}{n+1} Ax \frac{-dx}{dr} + \frac{1}{3n+1} Bx \frac{-dx^3}{dr^3} + \&c.$  quæ æquatio fluxionalis est primi gradus ad Curvam quæsitam  $EBF$ . Revocatur autem ad formulam simpliciore in terminis numero finitis, modo sequenti.

11. Fluat uniformiter  $r$ , & existente  $a$  quantitate non fluente fit  $-dx : dr = s^n : a^n$ . Substituto hoc valore ipsius  $-dx : dr$  in æquatione novissime inventa, atque ducta æquatione in  $s : x$ , transformatur ea in hanc  $z : x = \frac{1}{n+1} As^{n+1} : a^n + \frac{1}{3n+1} Bs^{3n+1} : a^{3n} + \&c.$  Unde capiendi Fluxiones, fit  $(2x ds + s x dz - s z dx) : x^2 = As^n ds : a^n + Bs^{3n} ds : a^{3n} = s^n ds : \sqrt{(a^{2n} - s^{2n})}$ . Quod ultimum constat ex Analogia serierum  $Ax^n dx : a^n + \&c.$  &  $As^n ds : a^n + \&c.$  Hinc pro  $s$  &  $ds$  substitutis eorum valoribus ex æquatione  $-dx : dr = s^n : a^n$  collectis, elicitur æquatio  $nz dz dx^2 - xz ddx - nxdx dz^2 - xz ddx = 0$ . Quæ ad fluxiones primas revocatur modo sequenti.

12. In termino ultimo  $-xx ddx$ , vice  $dx ddx$  scripto ipsius valore  $-dz dz$ , & æquatione deinde applicata ad  $z$ , fit  $nz dx^2 - xz ddx - nxdx dz + xz ddx$ . Quæ æquatio in  $x^{-n-1}$  ducta est Fluxio æquationis  $-x^{-n} z dx + x^{1-n} dz = a^{1-n} dr$ , existentibus  $a$  &  $dr$  non fluentibus. Est ergo  $-x^{-n} z dx + x^{1-n} dz = a^{1-n} dr$ , seu  $(x dz - z dx) a^{n-1} = x^n dr$ , æquatio fluxionalis primi gradus ad Curvam quæsitam  $EBF$ .

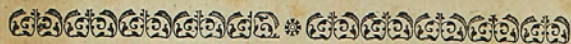
13. In ista autem æquatione est  $a$  valor ordinatæ  $BH$ , quando incidit punctum  $H$  in punctum  $A$ .

14. Haud proclive est æquationem  $(z dz - z dx) a^{n-1} = x^n dr$ , manente  $n$  in terminis generalibus, revocare ad æquationem Fluente tantum involventem, vel ad quadraturam Curvarum. Sed puncta Curvæ  $EBF$  possunt commode inveniri per descriptionem Curvæ  $ABD$ , & Curvæ cuiusdam geometricæ. Per geometricam hic intelligo Curvam, cujus æquationem non ingrediuntur Fluxiones, nec Fluente in indicibus dignitatum. Secetur enim Curva  $ABD$ , cujus Parameter fit  $a$ , in  $B$ , a Curva geometrica cujus æquatio est  $a a^n x^n - z a^n x^n = a a^n \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ , atque erit punctum illud intersectionis  $B$  ad unam ex Trajectoriis quæsitis, nempe quæ transit per punctum  $E$ , existente  $AE = a$  & normali ipsi  $AG$ .

15. Hinc si  $ABD$  sit Curva geometrica, erit etiam  $EBF$  geometrica.

SCHOLIUM. Potest & alio modo inveniri æquatio  $(x dz - z dx) a^{n-1} = x^n dr$ . Nam certa quadam Analyfi, quam nunc celare statuo, inveni æquationem  $d\alpha : \alpha = dr^2 : (z dx + x dz)$ . Qua comparata cum æquatione  $x^n : a^n = -dx : dr$  [§. 9], eliminando  $a$  &  $d\alpha$ , tandem pervenitur ad prædictam æquationem  $(x dz - z dx) a^{n-1} = x^n dr$ .

EXEMPLUM. Ad demonstrationem solutionis nostræ suffecerit exemplum simplicissimum. Sit itaque  $n = 1$ ; quo in Casu est  $ABD$  semicirculus diametro  $AG$  descriptus, atque est  $EBF$  item semicirculus descriptus diametro  $AE$ . Est autem in hoc casu  $x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})} = x dx : \sqrt{(aa - xx)}$ . Unde in §. 3. fit  $dz = x dx : \sqrt{(aa - xx)}$ , adeoque  $z = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ , quæ æquatio est ad Circulum diametro  $AG = a$  descriptum, ut fieri debuit. Item pro  $n$  scripto  $1$ , æquatio  $(x dz - z dx) a^{n-1} = x^n dr$ , [§. 12] migrat in hanc  $x dz - z dx = x dr$ . Unde exterminando  $dr$  ope æquationis  $dr^2 = dx^2 + dz^2$ , fit  $(2zx dz - z dx) : xx = -dx$ , adeoque regrediendo ad Fluente  $z : x = -x + a$ , quæ æquatio est ad Circulum diametro  $AE = a$  descriptum, ut etiam fieri debuit.



No. CVIII

NIC. BERNOULLI

JOHAN. F.

DE TRAJECTORIIS CURVAS ORDINATIM

POSITIONE DATAS AD ANGULOS RECTOS

VEL ALIA DATA LEGE SECANTIBUS;

*Qua occasione communicatur gemina constructio alicujus Problematis a LEIBNITIO propositi de Trajectoriis orthogonalibus.*

I.

*Al. Evad.  
Lipf. 1718.  
Jun. pag.  
248.*

Series linearum curvarum secundum datam legem descriptarum oritur; si assumta recta quæpiam, tanquam parameter, legem descriptionis ingrediens, & pro qualibet curva invariabilis, ex sui successiva variatione dat aliam atque aliam seriem illius curvam. Jam non pauca habentur notatu digna circa hujusmodi lineas communi lege generatas, quas Illustris quondam LEIBNITIVS vocaverat *ordinatim positione datas*. Duo cum primis non spernendæ utilitatis fuere hæcenus considerata & quæsitæ; modus scilicet determinandi lineam quæ illas ordinatim positione datas contingat; deinde methodus easdem secandi in angulo dato, vel data lege variabili, per lineas quas *Trajectorias* Honoratiss. meus Pater nuncupavit.

II.

Ad prioris generis Problemata pertinent omnia illa, ubi datæ curvæ quæritur evoluta, caustica, diacaustica, &c. ut & illa, quæ ex mutato situ, vel directione tangentis, aliam quæsitam continuo tangat; cujus exemplum luculentissimum præbet Balistica, in desinendo limite, qui comprehendat omnes possibiles jactus longissimos, ad quos globus missilis ex quacunque elevatione mortarii pertingere possit, quem limitem parabolam esse, ac quidem æqualem illi quam describit globus in mortarii situ hori-

horizontali, demonstratum est in *Analysi infinite parvorum*, pag. 133. Illa vero Problemata nihil aliud ad sui solutionem requirunt, quam directam differentialium methodum, sicuti patet ex iis, quæ pro solvendis hujusmodi traduntur in dicta *Analysi*; [Vid. Sectiones V, VI, VII, & VIII] ita ut, cum lineæ ordinatim positione datæ sunt algebraicæ, ipsa quoque, quæ quæritur, illas contingens, non possit non esse algebraica.

III.

Secus vero se res habet cum *Trajectoriis*; ut pote quæ, pro curvis, quanquam algebraicis, ex data lege secandis, sæpissime sunt transcendentes; tametsi accidere possit, ut secandarum etiam transcendentium *Trajectoriæ* fiant algebraicæ. Quod si enim lex illa in hoc consistat, ut *Trajectoriæ* occurrant secandis ad angulos constanter datos; manifestum est, ambas series curvarum in se mutuo ratione nominis converti posse; hoc est, quod series *Trajectoriarum* considerari queat instar seriei secandarum, & vicissim: quare si lineæ ordinatim positione datæ sint algebraicæ, habeant autem seriem *Trajectoriarum* transcendentem, annon hæc ipsæ, tanquam secandæ, licet transcendentes, habebunt priores algebraicas pro suis *Trajectoriis*?

IV.

Disquisitio ista, de *Trajectoriis* determinandis, res est abstrusæ indaginis; quæ plus difficultatis habet in recessu, quam prima fronte apparet; sicut illi experientur, qui in generali rei idea, nescio quam statim simplicitatem & facilitatem mentiente, non subsistere, sed ad peculiariora quædam exempla descendere dignabuntur. Deprehendent enim integrationum regulas, hæcenus in vulgus notas, in plerisque transcendentium exemplis nequiquam ad usum vocari, atque parum subsidii ab illis sperari posse, nisi arte quadam peculiari ac non cuivis obvia tractentur.

V.

Primum Patri meo subnata est occasio ea de re cogitandi, cum legeret olim HUGENII *Diatriben de lumine*, ubi singulari modo explicat generationem & propagationem lucis per expansionem undarum, quæ ita incurvantur, ut radios lucis curvilineos per medium continue difforme penetrantes orthogonaliter fecent. Mox postea ex radiorum curvitate quæreret [nec sine successu] suscepit Pater, curvitatem undarum, & vice versa hanc ex illa; tum & utramque ex data lege variantis refractionis

tionis medii. Ortum hinc habuit *Synchronarum* Parentis speculatio, quæ nimirum ex omnibus curvis celerissimi descensus commune initium habentibus abscondunt arcus temporibus æqualibus percurrentes; quasque ostendit has alteras, quæ in vulgari gravitatis hypothese sunt Cycloides, ad angulos rectos trajicere; ac proin Synchronas Brachyochronarum, & vicissim hæc illarum esse Trajectorias orthogonales. Vid. *Act. Lipp.* an. 1697. \*

## V I.

Sed, pluribus jam annis ante id temporis, hæc materia ipsi familiaris erat; ut constat ex iisdem *Actis* an. 1698. pag. 470 † & seqq. ubi mentionem injicit methodi cujusdam sibi usitate, atque exemplorum multorum per eam solutorum; simul & refert LEIBNITII, quem ad tentamen invitaverat, solvendi rationem sub finem anni 1694 sibi perscriptam. Patet ex ipsa ejus epistola, cujus excerptum ibi habetur, Problema hoc, quod aliquem usum in Dioptriciis habere videret, LEIBNITIO nequaquam displicuisse; cum præsertim postea a Parente meo monitus observaret suum solvendi modum, qui primus quoque fuit, in quem antea inciderat Pater, & a quo sane re ipsa non differunt illi, qui superiori anno prodierunt, feliciter applicari non posse, nisi ad exempla algebraica & ad pauca quædam transcendentia. Pro eo enim, quo erat, candore LEIBNITIIUS imperfectionem hujus methodi non tantum agnovit, sed etiam vel ideo questionem ipsam tanto pluris æstimavit: quo factum, ut de aliis methodis eruendis uterque cogitaret, quæ ad talia pertingerent, ad quæ illa communis & obvia applicari non possent. Patrem vero meum non prorsus successu frustratum esse, manifestum fiet ex constructione mox communicanda exempli ante biennium in Anglia propositi.

## V I I.

Non quidem inficior Problema ipsum a Patre fuisse suggestum. Sed nego, ceu aliqui ita interpretantur, hoc ipsum fecisse, ut provocaret illum ex mortalibus; nedum eruditos Angliæ Mathematicos, quorum profundam sagacitatem, præcipue incomparabilis NEWTONI, data quavis occasione deprædicat, & cum quibus pacem colere, modo vellent, esset id quod vehementissime cuperet. Prorsus enim adtipulatur NEWTONO existimanti, illum imprudentiæ esse arguendum, qui *umbra captando*, hoc est, lites ferendo, *perdit quietem suam, rem prorsus substantialem*. Vid. *Commerc. Epist.* p. 71. Sed ut intelligant, quam sit a more optimi Parentis alienum

\* Supra N°. XXXVII. pag. 192. 193. N°. XL. pag. 211.

† Supra N°. LII. pag. 266. & seq.

alienum alios ad certamen laceffere, vel cum quoquam rixarum ferram reciprocare, consultum duco indicare paucis rei historiolum. Exeunte nimirum anno 1715, in literis *Leibnitianis* ad se scriptis vidit Problema, quod Vir inclytus transmiserat Illustr. Abbati C. . . † eo fine ut ad *pulsura Anglorum Analyharum non nihil tentandum* [sunt LEIBNITII verba] illud illis proponeret. Problema autem ita sonabat. „Invenire lineam „BCD, quæ ad angulos rectos fecet omnes curvas determinati ordinis „ejusdem generis; exempli causa omnes hyperbolas ejusdem verticis & „ejusdem centri AB, AC, AD, &c. idque via generali.“ Pater vero respondit, quam difficile sit Problema generaliter conceptum, tam facile esse exemplum quod ille proposuerit; siquidem sit algebraicum, & tale quidem ut illud vix mediocri ingenii vires eludere queat; & ne dubitaret LEIBNITIIUS misit huic solutionem hujus exempli, e vestigio inventam a me tum temporis fati juvene, quam videre est in *Actis Lipp.* an. 1716. p. 227. \* Mirum itaque non fore addidit Pater, si excellentia Anglorum ingenia istius particularis exempli solutionem statim sint datura. Rescripsit LEIBNITIIUS d. 31. Januarii 1716. se hyperbolas proposuisse, non quasi Problema in iis consisteret, sed ut intelligeretur; se enim discrete addidisse quæri methodum generalem, rogavit autem ut novum sibi exemplum suppeditaret, en verba ejus: *Quod si mihi, inquit LEIBNITIIUS, suppeditare exemplum voles quod non particulari aliqua facilitate adjuvari putes, sed ad generalem adigere, rem gratam facies: id enim pro specimine Solutionis vera Dno. Abbati nominare poterō. Vellem autem tale esse, ut factis evolutionibus tandem ad quadraturas reduceretur, ne dicant ne a nobis quidem sufficientem solutionem dari posse: quanquam revera recurrendum sit ad differentias secundi gradus, nostra autem methodo inter primas conscribatur.* &c.

Rogatus Pater non potuit non morem gerere tanto Viro, cujus merita in universam rem literariam summopere venerabatur roganti. Itaque in exemplum desumptum ex eadem materia, quam selegerat LEIBNITIIUS, de trajectoriis orthogonals, suggestit Problema de inveniendis & construendis lineis ad angulos rectos fecantibus feriem curvarum, quæ hanc habeant naturam, ut cujuslibet in quolibet puncto radius convexitatis ad sui portionem ab axe reflectam habeat datam rationem.

## V I I I.

Hæc tum ita gesta sunt. Num vero transierit modestiæ limites, exhibendo petenti Problema, quod proponeret tanquam suum, non tanquam *Joan. Bernoulli Opera omnia* Tom. II. O o quam

† CONTRI Nob. Veneto.

\* Supra N°. CIV.

quam Parentis mei, qui hanc conditionem diserte stipulabatur, nunc æqui Lectoris iudicio relinquo. Quis enim somniasset, BERNOULLIUM hujus Problematis Autorem existere; nisi hoc, ut conjecto, ipse LEIBNITIUS amico [postea incaute propalanti] privatim aperuisset? Quo jure igitur imputabit quis BERNOULLIO ostentationis animum, a quo, si quisquam, ipse semper abhorruit? Cum latere voluerit, quomodo dici potest, quemquam provocare voluisse? Tradidit LEIBNITIO expositenti Problema, de quo, tanquam sui arbitrii & juris jam facto, faceret quod vellet. LEIBNITIUS hoc proponit, ac suo quidem proponit nomine; ita ut quicquid eveniret, de eo non Patri, sed LEIBNITIO respondere incubuisset. Sed quia nihil amplius hanc in rem expectare licet a Viro optimo morte occupato: lubet hic Patris mei permisso communicare solutionem & constructionem ipsius, qualem statim cum ipso Problemate impertiverat in literis ad LEIBNITIUM datis d. 11. Martii 1716.

## I X.

T A B.  
XXXIV.  
N<sup>o</sup>. CVIII.  
Fig. 1.

Problema duas habens partes his verbis conceptum erat,  
1<sup>o</sup>. Super recta AG tanquam axe ex puncto A construere infinitas curvas, qualis est ABD, ejus naturæ ut radii osculi ex singulis singularum curvarum punctis Beducti secantur ab axe AG in C in data ratione, ut nempe sit BO : BC = 1 : n;  
2<sup>o</sup>. Construendæ sunt Trajectoriæ qualis est ENF, priores curvas ABD ad angulos rectos secantes.

Solutio & constructio quam tum dederat, ita se habet.

1<sup>o</sup>. Esto AL perpendicularis ad AG: vocetur AI, x; IB, y; & quædam constans ad arbitrium assumpta, a; fiat y, seu IB =  $\int (x^n dx : \sqrt{a^{2n} - x^{2n}})$ ; erit punctum B in quadam curva ABD, quæ desideratam habet conditionem BO : BC = 1 : n. Quod si jam mutetur a, eaque major minorve sumatur, prodibit alia ABD a priori diversa, eandem conditionem habens. Et sic infinitæ constructentur curvæ optatæ: *Quod erat faciendum pro primo.*

2<sup>o</sup>. Describatur nova curva AH, habens [nominatis abscissis AM, z;] applicatas MH =  $a^n b^{n+1} : z^n \sqrt{a^{2n} - z^{2n}}$ , ubi a denotat eandem arbitrariam, quæ assumpta est pro curva ABD,

ABD, & b significat rectam pro omnibus curvis eandem, & tantum ad supplenda homogenea ad libitum introductam. In hac nova curva AH capiatur area AHM æqualis magnitudini arbitrariæ constanti c: secabit HM producta curvam ABD in puncto N, quod erit in aliqua ex Trajectoriis quæstis ENF, cujus reliqua puncta similiter determinantur, si successive mutetur a, servata c. Quod si alia insuper desideretur Trajectoria, sumatur jam c major minorve quam antea, modo constantis maneat magnitudinis dum a mutatur; reliqua peragantur ut prius, prodibit nova Trajectoria. Atque hoc pacto tot aliæ constructentur, quot libuerit. *Quod erat faciendum pro altero.*

Notetur, quod si  $n = +1 : (2p + 1)$ , aut  $= -1 : 2p$ ; erunt curvæ omnes ABD, ut & omnes ENF algebraicæ [intelligo per p quemvis numerum integrum & positivum]; si vero  $n = +1 : 2p$ , utrarumque constructiones dependent a quadratura circuli: Et tandem si  $n = -1 : (2p + 1)$ , dependent a quadratura hyperbolæ.

## X.

Tametsi hæc solutio pro quovis numero n sit generalissima, ita ut permixtio indeterminatarum constructionem per quadraturas nullo modo impediat; placet tamen adjungere aliam constructionem Paternam, quæ non tantum idem præstat in hoc exemplo, sed & ad alia infinita eodem successu accommodari potest, si levis attentio adhibeatur. Sit igitur AG axis curvarum ABG, AED, &c. normaliter secandarum a trajectoria quæstita NEB, quam per concessas quadraturas ita construit. Ex curvis secandis assumit aliquam pro lubitu, ut ABG, quam principalem vocat; per hujus singula puncta F, ducantur rectæ AFE, quarum partes AF transferantur in AM, [facta nimirum OA perpendiculari ad AG, & utraque producta versus M & K;] ad singula vero puncta M fiant anguli AMK æquales angulis inclinationum curvæ principalis ad rectas AF, hoc est, angulis quos faciunt tangentes in punctis F cum suis respective subtentis AT. Accepta AI arbitrariæ quidem, sed constantis

O o 2                      stantis

T A B.  
XXXIV.  
N<sup>o</sup>. CVIII.  
Fig. 2.



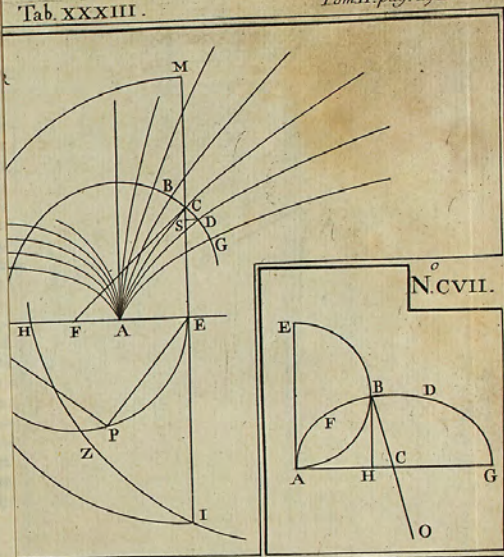
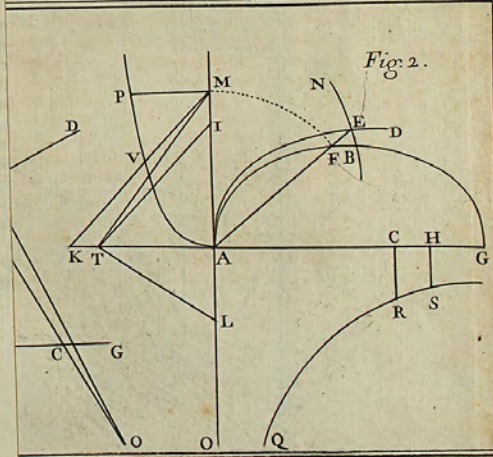
stantis & invariabilis longitudinis; agantur IT parallelae ipsi MK, & junctis MT fiant perpendiculares TL; deinde ad M applicentur MP ipsi AL aequales, formabunt puncta P curvam AVP, cujus areae AP M cum area hyperbolicis aequae determinabunt Trajectoriam, id quod sequenti modo peragitur. Inter asymptotos AG & AO descripta fit hyperbola QRS, quae possit  $AI^2$ , id est, cujus coordinatarum rectangula  $AC \times CR$  vel  $AH \times HS =$  quadrato rectae AI. Sumto autem quolibet puncto H pro initio fixo abscissarum HC, fiant areae hyperbolicae HCRS alteris illis APM aequales; capianturque in AF longitudines AE aequales ipsis AC. Puncta E describent Trajectoriam desideratam, quae omnes, ABG, AED, &c. orthogonaliter secabit.

COROLL. Mutato loco puncti fixi H, patet aliam obtineri Trajectoriam NEB a priore diversam. Sic itaque innumeras describere licet, quae singulae optatum praestabunt.

## X I.

Hicce ut puto, satisfactum est Problemati omni ex parte, idque ad mentem LEIBNITII, qui desiderabat, ut factis evolutionibus constructio tandem ad quadraturas reduceretur; adeoque ut non tantum, eliminatis differentis secundi gradus, inter primas consisteretur; sed ipse quoque indeterminatae cum suis differentialibus a se invicem separari possent, idque non per series, sed per terminos numero finitos; quod quicumque effectui non dederint, illi certe hanc quaestionem solvisse minime censendi erunt. Illa quippe reductio differentialium superiorum graduum ad inferiores, ut & indeterminatarum sequestratio, quae est res intricatissimi negotii, & a Parente primum olim excoli coepta, potissimum constituit partem solutionis alicujus. Videbimus itaque an inter solutores quidam exiterint alii, qui praesentis exempli solutiones suas ad hunc perfectionis gradum perduxerint. Haecenus saltem nullam hujusmodi videre contigit; quod miror, cum sit exemplum non adeo difficile, & alia suppetant difficiliora, non tamen extra potestatem nostram. Quod autem hoc potius suppetitaverit quam aliud, id certe arguit quod illud, nullo studio exquisitum, sed sponte velut oblatum, LEIBNITIO roganti festinanter descripserit.

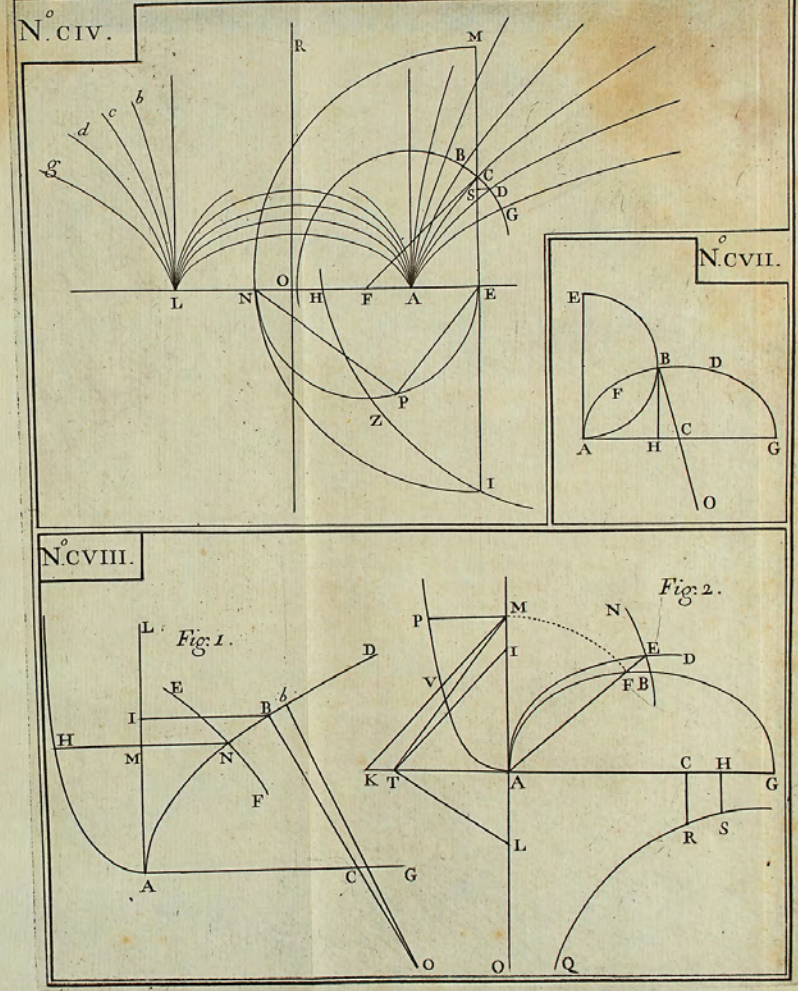
## XII.

N<sup>o</sup>. CVII.

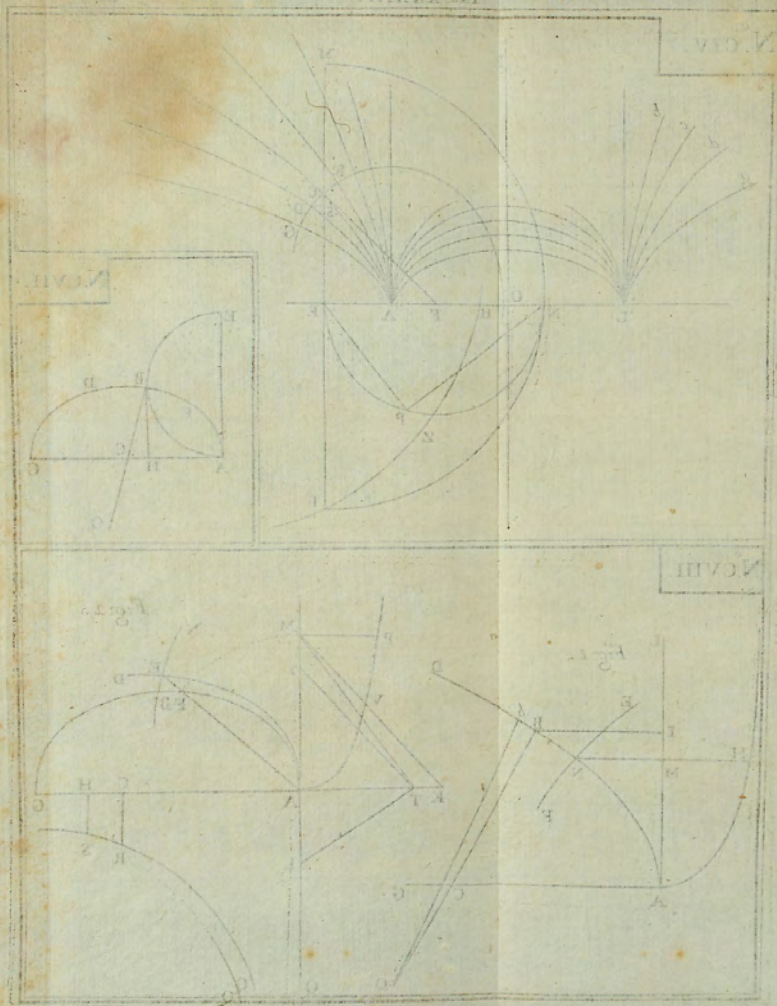
A  
 rallelae ipfis  
 einde ad M  
 uncta P cur  
 licae aequare  
 lo peragitur.  
 ola QRS,  
 angula AC  
 umto autem  
 , fiant areae  
 ; capiuntur  
 uncta E def  
 BG, AED,  
 liam obtine  
 ne innumeras

que ad mentem  
 structio tandem  
 natis differentiis  
 indeterminatae  
 que non per se  
 lectui non de  
 ti erunt. Illa  
 feriores, ut &  
 negotii, & a  
 nit partem sp  
 dam extiterint  
 tionis gradum  
 ontigit; quod  
 etant difficilio  
 noc potius sup  
 studio exqui  
 estinanter per

XII.







DE TRAJE

Tentatum fuisse ir-  
 irrito conatu, per  
 RUM Anglum, Vir-  
 tum, solutionis tand-  
 luptate accepimus; i-  
 mentum, ejusque ad-  
 solutionem suam in 2  
 nisi fortassis jam impe-  
 quadraturas, & quide-  
 sumum requisitum  
 rarissime & fero ad  
 duas habere solutione  
 quas in casu presen-  
 tylin non audivimus  
 sario ad secundas flu-  
 nerit per integration  
 rentis constructiones  
 tales quidem, quæ si  
 hoc præstitum sit, no-  
 plum nostrum non pl-

Interim spero Viri  
 de putatitia illa solut  
 Transactionibus supra  
 Martio anni 1716 †.  
 sui non satis intend  
 dicit quod ad rem fa-  
 elicere licet, in eo  
 operosa attentione via  
 ad tollendas difficulta-  
 tam quidem confert.  
 ad specialia exempla  
 LEIBNITIO prop-  
 lutum dare debuisset  
 affectet, dum causatu

\* N°. præced.  
 † Supra N°. CV.



## XII.

Tentatum fuisse in Gallia & in Anglia, ac quidem in hac aliquandiu irrito conatu, per literas nobis constat: nuper vero TAYLORUM Anglum, Virum sane in geometricis & analyticis profunde doctum, solutionis tandem compotem esse factum, ex Gallia non sine voluptate accepimus; ita enim novum accessisse penitiori Geometriae incrementum, ejusque adeo limites prolatos speramus. Siquidem ut scribitur solutionem suam in *Transactionibus Londinensibus* publico impertiturus sit, nisi fortassis jam impertierit\*. Utrum autem rem promoverit usque ad quadraturas, & quidem in terminis numero finitis, quod LEIBNITII summum requisitum fuerat, ediscemus quondam ex *Transactionibus*, quæ rarissime & sero ad nos perveniunt. Intelleximus Virum Acutissimum duas habere solutiones; sed in utraque ad secundas fluxiones pervenisse, quas in casu presenti minime evitare potuerit; quam instituerit analysin non audivimus; hoc saltem dico, si talis fuit; ut per eam necessario ad secundas fluxiones descenderit, oportet ut postea viam adinventerit per integrationes [rem enim omnino in potestate esse ambæ Parentis constructiones ostendunt] regrediendi ad fluxiones primas, & tales quidem, quæ sint cum fluentibus suis a se invicem separabiles. Nisi hoc præstitum sit, non ægre feret Cl. TAYLORUS, si dixerimus, exemplum nostrum non plene ab ipso solutum esse, in sensu LEIBNITIANO.

## XIII.

Interim spero Virum Clarissimum eandem nobiscum ferre sententiam de putatitia illa solutione Anonymi cujusdam, quæ dicitur apparuisse in *Transactionibus* supra memoratis pro mensibus Januario, Februario, & Martio anni 1716 †. Videtur Autor, quisquis ille sit, acumen ingenii sui non satis intendisse, dum dicere vult aliquid, quando revera nihil dicit quod ad rem faciat; aut si quem sensum commodum ex verbis ejus elicere licet, in eo consistit, quod quivis de trivio Mathematicus sine operosa attentione videt, etiam si Autoris solutionem non legerit; sed quod ad tollendas difficultates, quæ in ipsa rei executione occurrunt, ne festuam quidem confert. Hanc puto causam esse, quare Solutor Anonymus ad specialia exempla descendere, & præsertim cur casum particularem a LEIBNITIO propositum attingere noluerit; quem utique perfecte solutum dare debuisset, ante quam abjecte adeo de hoc Problemate sentire affectet, dum causatur, se ideo solutionem ulterius non prosequi, quia nullus sit

O o 3

\* N<sup>o</sup>. præced.† Supra N<sup>o</sup>. CV.

fit fere usus. Alias certe stomachari non debet, si sibi obijciatur, quod olim FERMATIUS & FRENICLUS, Illustres Galli, WALLISIO quaestiones numericas naufragare & contemnere simulanti inculcarunt: Facile est, inquit FRENICLUS, illud despiciere, ad quod non possumus pervenire. Nec etiam multum convenit Mathematico, conquiri cui bono sint haec problemata. Eodem vero jure quaeretur cui bono tota pene Geometria & Arithmetica, si pauca quaedam & ea magis trita, & a peritis despecta, quibus Geodetae, Agrimensores, Mercatores, & qui utramque Architecturam exercent, aliique complures in suis calculis utuntur, excipias; caetera nunquam magis recondita, & praestantiora non nisi ad scientia subtilitatem & perfectionem spectant. Cum autem sit proprium intellectus humani veritatem inquirere; nec aliam ob causam tot Viri praestantes scientiis acquirendis operam dederint; inutilis certe dici non debet in disciplina alicujus acquisitio veritatis. Vid. Oper. WALLIS. Tom. II. pag. 811 & 844. Haec incidenter monenda existimavi, quia aliunde quoque scio, esse nonneminem in Anglia, qui cum imitari non possit, omnia ea, quae a Parente, utpote non Anglo, proficiscuntur inventa invidiose tradit ac tanquam inutilia despiciatui habet; ut non sit cur praeposterum hoc judicium valde nos moveat, quamdiu certi sumus ipsum incomparabilem NEWTONUM, judicem in his rebus longe magis idoneum omnique exceptione majorem, de iis benignius sentire, ac suam sententiam meo Patri non parum honorificam plus semel jam edixisse; quod potiori laudi ducendum, quam quod vel a centum imparibus aemulis detrahi queat.

## XIV.

Ad propositum redeo. Occasio postulat ne sileam, quod praeslitit Patruelis meus, Nicolaus BERNOULLI, Mathematicum Professor Patavinum. Is jam ante biennium, cum primum se applicaret huic quaestioni de Trajectoria, invenit regulam generalem quidem pro curvis algebraicis, sed quae non valet pro transcendentibus, nisi illis tantum, in quibus recta illa constans, quae parametri loco est in qualibet curva, & ex ejus successiva variatione oritur series curvarum a Trajectoria normaliter secundarum, in terminis finitis exprimi potest. Regulam ipsam, quae in rei fundamento congruit cum illis Patri jam olim usitatis, quarum memini in Art. 6, statim communicaverat cum Illustrissimo MONMORTIO, Mathematico praestantissimo, & paulo post cum ipso LEIBNITIO his verbis: Si  $x$  &  $y$  sint coordinate trajectoriae quaesitae,  $p$  linea illa variabilis, quae determinat speciem vel positionem curvarum, ad quas alia ad angulos rectos duci debet; quero valorem ipsius  $p$  in  $x$ ,  $y$ , & constantibus, quo differentiatio, & mutatis  $dx$  in  $dy$  &  $dy$  in  $dx$  pos-

sitisque membris per  $dx$  multiplicatis aequalibus illis, quae per  $dy$  multiplicentur, habebitur aequatio differentialis satisfaciens Trajectoriae quaesitae.

## XV.

Eandem hanc regulam, sed in operandi ordine nonnihil diversam, eidem Nob. MONMORTIO perscriptit Pater decimo Julii anni superioris, nescius a Cl. Professore Patavino jam diu antea fuisse perscriptam, sicut monuit Illustr. MONMORTIUS in sua ad Patrem data responsione. Quia vero in praxi analytica saepius accidit, ut una eademque regula secundum unum quam alterum operandi ordinem facilius & commodius applicetur, non piget adjicere quale operationis filum Pater praescripserat. Verba in hanc rem ex dicta ipsius epistola ex Gallico in Latinum translata ita habent.

Si acquiescendum esset methodo generali pro curvis quidem omnibus algebraicis, sed non nisi quibusdam transcendentibus valenti, praerferrem regulam ab Agnato meo traditam, quae his 4 absolvetur partibus.

1<sup>o</sup>. Supponere constantem *parametrum*; hoc nomine voco rectam illam ex cujus mutata longitudine dependet curvarum secundarum diversitas. 2<sup>o</sup>. Juxta hanc suppositionem differentiare aequationem naturam curvarum exprimentem. 3<sup>o</sup>. Convertere  $dy$  in  $dx$ , &  $dx$  in  $-dy$ . 4<sup>o</sup>. Substituire valorem parametri expressum in  $x$ ,  $y$ , & constantibus datis, si quae adsunt in aequatione curvarum. Hoc facto, prodibit aequatio differentialis pro Trajectoria quaesita. Exempli loco sumamus invenientiam Trajectoriam parabolaram communem axem & verticem habentium: aequatio specifica illarum est  $ax = yy$ . Supponamus itaque 1<sup>o</sup>. parametrum  $a$  tanquam constantem; hinc 2<sup>o</sup>. per differentiationem habetur  $adx = 2ydy$ ; mutando 3<sup>o</sup>.  $dy$  in  $dx$  &  $dx$  in  $-dy$ , elicitur  $-ady = 2ydx$ ; in hac denique 4<sup>o</sup>. substituat pro  $a$  ipsius valor  $yy : x$ , & emerget  $-yydy : x = 2ydx$ , aequatio differentialis pro Trajectoria quaesita. Saepissime ulterius progredi non datur, propter inseparabilitatem indeterminatarum sed casus dantur in quibus illae separabiles evadunt, imo & quandoque integrabilis redditur tota aequatio, quae per consequens Trajectoriam arguit esse algebraicam, sicuti in hoc exemplo,

plo, ubi æquatio reperta —  $yydy : x = 2ydx$ , statim reducitur ad —  $ydy = 2xdx$ ; ex cujus integratione invenitur  $u = \frac{1}{2}yy$ ,  $= xx$ , aut  $2u = yy = 2xx$ , quæ est ad ellipsin; unde patet, parabolæ Trajectoriam esse quamlibet ellipsin, cujus centrum in communi parabolæ vertice, axis minor, super earumdem axe communi, habens ad alterum axem rationem ut 1 ad  $\sqrt{2}$ , idem omnino, quod jam ante complures annos inveni, ut tibi patebit ex *Actis Lips.* 1698. p. 470\*, quo in loco videbis etiam regulam aliquam Illustr. LEIBNITII a qua non multum differt illa, quam producit Celeb. HERMANNUS, & neutra valde discrepat ab ea, quam dudum antea excogitaveram, ceu videre est ex quadam mea epistola ad LEIBNITIIUM data d. 2. Sept. 1694, cujus excerptum habetur loco citato. Sed omnes istæ regulæ magno adhuc defectu laborant.

## XVI.

Quod in hac epistola memoratur de regula quadam Cl. HERMANNI, sciendum est, id intelligi debere non de ea quam publicavit in *Actis Lips.* mense Augusto Anni præteriti †; quippe quæ nondum lucem aspexerat, & super qua mox aliquid dicendum erit, sed de alia quadam, quam cum amicis communicaverat, & nominatim cum LEIBNITIO; cujus missu illam vidimus, atque jam Cl. Autoris pace, & scientiæ promovendæ gratia, ipsius verbis descriptam hic exponere lubet: „Lineam rectam, ait, quæ in una eademque curva constans est, sed variabilis variata curva, vocabo *Modulum*. Differentietur curvæ datæ æquatio, sumto etiam modulo pro quantitate variabili, & eadem æquatio adhuc semel differentietur, sed ita tamen ut  $x$  velut constans tractetur, & pro elemento ipsius  $y$  ponatur  $dy = (dx dx + dy dy) : dy$ ; opæ duarum ejusmodi æquationum eliminari potest modulus ejusque elementum, adeo ut habeatur æquatio ad curvam omnes datas ad angulos rectos trajicientem.

\* Supra N<sup>o</sup>. LII. pag. 268.† Supra N<sup>o</sup>. CVI. *Art. I.*

## XVII.

## XVII.

Hujus regulæ origo obvia est, ut pote quæ eodem nititur principio, quo illæ quæ jam ante annum 1694 Parenti erant familiares; sed ejusdem insufficientiam probe perspicuus Cl. HERMANNUS, cum in transcendendis, ubi moduli valor per quantitates finitas nequit exprimi, haud quadret, eam, credo, tanquam luce publica non satis dignam neglexit, sed nulla hujus facta mentione, aliam edidit in memorato *Actiorum* mense Augusto anni proxime elapsi, in hunc modum: „In æquatione differentiali curvarum secandarum, permutatis coordinatarum elementis, alterutro tamen mutato, eliciatur valor moduli ex æquatione post hanc permutationem orta, inventusque moduli valor in æquatione curvæ secundæ finitis quantitatibus expressa substitutus suppeditabit æquationem differentialem Trajectoriæ quæsitæ. „ Regulam istam esse profus eandem cum illa, quam jam antea Patruelis meus dederat, nemo non videt; ipse vero operationis ordo, quem Vir Acutissimus sequitur, adeo similis est illis, quem præcedenti mense Julio in literis suis ad MONTMORTIUM descripsit Pater, ut videri posset alterum alterius verba descripsisse, si hoc fieri potuisset in tanto locorum intervallo, & tam brevi temporis spatio.

## XVIII.

Quid autem de hoc canone sentiam, jam supra §. XIV aperui; scilicet illum generalem quidem esse pro curvis algebraicis, sed pro transcendendis non item. Patruelis meus, qui saltem commune jus habet eum Cl. HERMANNO in canonis hujus inventionem, ipse ei non majorem attribuit prærogativam; nec obstat quod contrarium dicat Cl. HERMANNUS, dum eum pro omnibus omnino curvis generalem prædicat. Exempla quatuor, quæ assert per hunc canonem soluta, vel solvenda, nihil probant. Exempla quippe primum & secundum, utpote ambo algebraica nihil difficultatis habent; tertium quidem transcendens, & a Patre & a Patruo jam olim solutum, vid. *Act. Lips.* an. 1698. p. 472 † tale est, ut valor moduli in terminis finitis exhiberi possit, adeoque nec hoc sufficientiam canonis probat. Quartum denique, quod ipsum est de quo agitur, a LEIBNITIO propositum, nescio an ad mentem LEIBNITII perfecte solutum dici mereatur; & si vel maxime solum concederemus, nondum tamen constaret, qua lege vel qua arte levis illa [ut dicit pag. 351\*] substitutio novæ cuiusdam indeterminatæ

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. P p in

† Pag. 259. &amp; 269. Tom. I. \* Pag. 277. supra.

in aliis transcendentium exemplis cum fructu sit imitanda; præsertim si in æquatione differentiali curvarum secundarum modulus  $a$  non semel tantum occurreret, sed variae ipsius  $a$  dimensiones illam ingrederentur: si haberetur, ex. gr., sequens æquatio curvarum secundarum, quarum Trajectorie constructio per methodum Paternam non est impervia,

$$dx = (a^m + fa^{m-1}y + ga^{m-2}y^2 + \dots + by^m) dy: \sqrt{(ua^{2m} + pa^{2m-1}y + qa^{2m-2}y^2 + \dots + ry^{2m})}$$

ubi datos qualescunque littere  $f, g, h, u, p, q, r$ , sicut  $m$ , denotant numeros. Tentet Vir Clarissimus illam suam substitutionem, nobisque ingenue referat quid profecerit, aut in quam calculi abyssum fuerit abreptus, æquationem Trajectorie expiscaturus; siquidem multum laboris subire debuit pro exemplo isto quarto, sane non difficillimo, nec tamen aliud effecit, quam ut, per ambages & institutam aliquam integrationem non facilem, nec certa ratione patentem, p. 352 †, pervenerit tandem ad æquationem aliquam

$x dy - y dx = y^m ds: c^{m-1}$ , quæ a constructione per quadraturas, a LEIBNITIO postulata, adhuc abest, ob indeterminatarum permixtionem; hinc ut casum simplicissimum ad constructionem Patris in *Actis* 1697 †† datam revocare possit, novum iterum instituit calculum, parum sollicitus de modo reducendi suam æquationem in statum optatum separationis, quo construi posset per quadraturas pro omni possibili casu ipsius  $m$ , quod supra § §. 9 & 10 felicissime peractum. Miror itaque, quod, dum optime judicat tentamen Anonymi illius Angli fore calculi laboriosissimi, ipse interim calculi prolixitatem & molestiam evitare non studuerit: miror præterea dicentem secunda differentialia esse superflua, quando ipse tamen, in calculo suo Exempli IV, ad ea delabitur; æquatio enim ipsius XI involvit  $dp$ , hoc est,  $dds$ : siquidem  $b, q, p$ , se habere supponuntur ut  $dy, -dx, ds$ ; quod moneo ut de alia magis perfecta Exempli istius solutione cogitet, quæ nec differentialium secundarum involuione, nec indeterminatarum inseparabilitate laboret, quem in finem binarum a Patre datarum constructionum analysin aut demonstrationem adhuc dum studio omisit, ut nimirum tempus habeant qui hisce delectantur, atque ingenii sui vim experiri voluerint, in illas inquirendi, aut alias similes, si non Paternis meliores, inveniendi.

† Pag. 278. supra. †† N<sup>o</sup>. XXXVII. pag. 192. Tom. I.

J. H.

## J. H. \* ADDITAMENTUM

*Ad Schedas super Problema Trajectoriarum, Mensibus Augusto 1717, & Julio superioris anni in his Actis Eruditorum editas.*

I. **E**T SI Problema Trajectoriarum Mense Maio 1716. \*\* pag. 226. *Acta Erud. Lips.* 1719 Febr. pag. 68. in *Actis* propositum ad me spectare non censui, ut pote qui nesciam de me tantum præsumere ostendi, ut omnibus, quæ proponi possent, difficilioribus Problematibus a summis tantum Artis hujus Magistris attingendis, me parem crederem; quia tamen elegans mihi visum est dictum Problema, ejus solutionem aggressus sum, incertus utrum adyta ejus penetrare mihi contingeret, necne. Post aliqualem inquisitionem incidi tandem in solutionem quam mensi Augusto 1717, his *Actis* inferi curavi, pag. 348 seqq. † & quatuor Exemplis illustravi, quorum duo priora curvas algebraicas respiciunt, tertium logarithmicas per commune quoddam punctum transeuntes, a Celeberrimis BERNOULLIIS Fratribus jam olim ††, sed alio modo solutum. Quartum est illud Exemplum, quod Ill. LEIBNITIVS paulo ante obitum suum in Anglia proposuisset dicitur a Cl. Viro juvene Nic. BERNOULLI, *Johannis* Viri Celeberrimi Filio, U. J. Candidato; & hoc idem confirmari video ex Schediasmate Eximii Nobilissimique Geometræ Angli Dni. TAYLOR §, qui in eo ingeniosam plane ejusdem exempli solutionem cum analysi adduxit, cujus apographum ex *Transactionibus Londinensibus* transcriptum, pro insigni humanitate sua, mihi transmisit Dn. MONTMORTIUS, Geometra præstantissimus.

P p 2

\* Jacobi HERMANNI. \*\* Supra N<sup>o</sup>. CIV. † Supra N<sup>o</sup>. CVI. *Art. I.*

†† N<sup>o</sup>. LI. *Art. III.* & N<sup>o</sup>. LII. pag. 259. & 269. *Tom. I.* § Supra N<sup>o</sup>. CVII.



mus. Nam cum Schedam meam ad *Acta* misi, nesciveram quod Exemplum in unum quartum in Anglia propositum fuisset ab Ill. LEIBNITIO, multoque minus qualis ab ipso solutio peteretur; nam id non a Dn. LEIBNITIO, sed a Dn. MONTMORTIO accepi, qui a Cel. Nic. BERNOULLIO Professore *Patawino* se illud nactum esse indicavit in suis ad me litteris; LEIBNITII vero tanquam Autoris ejus, aut saltem propositoris, mentionem nullam faciebat.

2. Cum vero intelligerem solutionem meam ideo nonnullis non probari, quod in æquatione differentiali Trajectoriæ quæsitæ  $x dy - y dx = y^m ds: c^{m-1}$  indeterminatæ permixtæ essent; item quod calculus meus Exempli quarti nimia prolixitate laboraret, nec commode aliis exemplis paulo difficilioribus accommodari posset, hisce gravaminibus remedium afferre conatus sum mense *Julio* proxime elapso †, ubi inter alia magna facilitate indeterminatas æquationis meæ, ope æquationis Curvarum secandarum,  $dx = y^m dy: \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$  indeterminatas separavi; nam hæc æquatio secandarum præbet  $x = f((1 - m)a^{2m} dy: y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}) = \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}: y^{m-1}$  & mutatis in eadem coordinatarum elementis,  $dx = -dy \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}: y^m$  &  $ds = a^m dy: y^m$ , quare substituendo hos valores ipsarum  $x$ ,  $dx$ , &  $ds$ , in æquatione Trajectoriæ  $x dy - y dx = c^{1-m} y^m ds$ , proveniet, destructis destruendis,  $f((1 - m)a^{2m} dy: y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}) = a^m c^{1-m}$ , æquatio, quæ concessis figurarum quadraturis construi potest eo fere modo, quem Dn. *Candidatus* a Cel. suo Parente adducit §. 9, Schediasmatis mense Junio superiori editi in Actis. \*\* Similem deductionem in casu particulari, quo curvæ secundæ sunt *Cycloïdes*, jam dederam in prima mea Scheda *Augusti* 1717, †† quando ibidem æquationem Synchronæ *Bernoullianæ*, ejusque constructionem dedi. Hoc tamen non obstante, Dn. *Candidatus* carpit in mea æquatione indeterminatarum permutationem, non animadvertens, quod ea tantum sit apprensus, minime vero realis; nam in hac æquatione  $x dy - y dx = c^{1-m} y^m ds$ , quantitates  $x$ ,  $dx$ , &  $ds$  dantur (transcendenter prima) ex æquatione curvarum secandarum  $dx = y^m dy: \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ . Imo si in illa pro

† Supra N<sup>o</sup>. CVI. Art. II.\* Supra N<sup>o</sup>. CVIII. pag. 290.

†† Supra pag. 279.

$dx$  &  $ds$  substituuntur earum valores  $-dy \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}: y^m$  &  $a^m dy: y^m$ , quos supra jam habuimus, resultabit inde algebraica æquatio  $x + \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}: y^{m-1} = a^m c^{1-m}$ , vel  $xy^{m-1} + \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} = a^m c^{1-m} y^{m-1}$  alicujus curvæ, cujus intersectiones cum curva secunda determinant puncta Trajectoriarum, & hæc sane constructio alteri per quadraturas si præferri non debet, ei saltem æquiparari meretur. Celeberr. TAYLOR hanc constructionem Trajectoriæ per intersectionem curvæ algebraicæ & curvæ secundæ etiam dedit, & innumere alix curvæ per quadraturas describendæ exhiberi possunt, quarum occurfus cum curvis quibusdam algebraicis puncta ejusdem Trajectoriæ determinant.

3. Alteri difficultati adversus analysin meam motæ, quod calculus ejus nimis quam necesse erat prolixus sit, vixque ad alia exempla paulo difficiliora sese extendat, satisfacere studui ostendendo, quod etiam si ordo, quem in calculo meo sequutus sum, minus naturalis & minus late patens sit, principia tamen analysios, quæ consistunt in commutatione elementorum coordinatarum curvæ secundæ, & introductione novæ indeterminatæ, sufficientiam ad exempla multo difficiliora solvenda. Hunc in finem adduxi æquationem,  $\text{Log. } c - \text{log. } a = f(qqdy: (y + pspdy))$  ex qua, quia ponebatur  $dx = pdy$ , &  $x = f(pdy)$ , resultat ista & intelligibilior  $lc - la = f((dx^2 + dy^2): (x dx + y dy))$ , in qua  $c$  est constantissima,  $a$  modulus variabilis, &  $dx$ ,  $dy$ , sunt elementa coordinatarum Curvæ secundæ. Non necesse duco monere, quod  $lc$  &  $la$  significant logarithmos constantis  $c$  & variabilis moduli  $a$ ; sed hoc non est reticendum, quod utique per  $x$ ,  $y$ ,  $dx$ ,  $dy$ , intelligi debeat  $x: a$ ,  $y: a$ ,  $dx: a$ ,  $dy: a$ ; hoc enim citato in loco expresse non monui, in applicatione vero æquationis ad exemplum illic propositum id accurate observavi, quando pro integrali ipsius  $dR: (1 - m)R$  scripti  $\frac{1}{1-m} lR - \frac{1}{1-m} la$ , nam hoc idem denotat, ac si posuisssem  $\frac{1}{1-m} \text{log. } (R: a)$ .

4. Hujus ratio ex sequenti analysi patefecit. Sint enim  $x = at: b$ ,  $y = au: b$ , critique in una eademque curva secunda  $a$  constans, &  $b$  per omnes constantissima; quare differentiando  $dx = adt: b$ , &  $dy = adu: b$ ; atque adeo  $dx: dy = dt: du$ , &  $dx du = dt dy$ . Quare permutando, juxta Canonem meum, elementa  $dx$ ,  $dy$ , cum  $dy$  &  $-dx$ , erit  $du dy = -dt dx$ . Jam in transitu ab una Curva secunda ad aliam, oportet modulum  $a$  variabilem assumere, & hac cautela posita, æquationes  $x =$



at: b, & y = au: b, differentiæ præbent dx = (adt + tda): b, & dy = (adu + uad): b, & hi valores in du dy = - dt dx substituti dant - adi<sup>2</sup> - tda = adu<sup>2</sup> + udu da, seu da: a = (dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup>): (t dt + u du). Quare, posita b = 1, si in hac inventa æquatione pro t, u, dt, du, scribantur x: a, y: a, dx: a, du: a, proveniet da: a = (dx<sup>2</sup> + dy<sup>2</sup>): (x dx + y dy) & integrando lc - la = f((dx<sup>2</sup> + dy<sup>2</sup>): (x dx + y dy)). Hanc æquationem deinceps exemplo eodem illustravi, quod quartum est in Scheda Mensis Augusti 1717. \* Sed quia posui p = y<sup>m</sup>: √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>) introductione hujus novæ litteræ p factum esse puto, quod nonnullis obscurus visus sit calculus meus: quare non abs re fore existimo eundem paulo clarius hoc loco exponere. Æquatio curvarum secundarum dx = y<sup>m</sup> dy: √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>) (nobis supra dedit x = f((1 - u) a<sup>2m</sup> dy: y<sup>m</sup> √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>)) - √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>): y<sup>m-1</sup> vel scribendo, brevitate gratia, R pro f((1 - m) a<sup>2m</sup> dy: y<sup>m</sup> √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>)) x = R - √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>): y<sup>m-1</sup>; sed æquatio differentialis secundarum dat √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>): y<sup>m-1</sup> = y dy: dx, posita permutatione elementorum dx, dy, quare (dx<sup>2</sup> + dy<sup>2</sup>): (x dx + y dy) [= - da: a] = a<sup>2m</sup> dx: R y<sup>2m</sup>, [vel substituendo ex æquatione differentiali curvarum secundarum valorem ipsius dx] = a<sup>2m</sup> dy: y<sup>m</sup> R √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>); verum, quia R = f((1 - m) a<sup>2m</sup> dy: y<sup>m</sup> √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>)) vel dR = (1 - m) a<sup>2m</sup> dy: y<sup>m</sup> √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>); erit a<sup>2m</sup> dy: y<sup>m</sup> R √(a<sup>2m</sup> - y<sup>2m</sup>) = dR: (1 - m) R = - da: a, & integrando, Log. (c: a) =  $\frac{1}{1-m}$  Log. (R: a), per notam paulo ante positam; ergo quantitates absolute his logarithmis respondentes erunt c: a = (R: a) <sup>$\frac{1}{1-m}$</sup> , ac denique a<sup>m</sup> c<sup>1-m</sup> = R.

5. Sed si t = bx: a & u = by: a fuissent ad suas differentias reductæ dt = (badx - bxda): aa & du = (badu - byda): aa & hæc elementa in æquatione du dy = - dt dx substituta, prodiret da: a = (dx<sup>2</sup> + dy<sup>2</sup>): (x dx + y dy) ubi dx & dy jam sunt elementa coordinatarum Trajectoriæ quesite. Hæc æquatio vocari posset *Modularis* quam Celeberrimus D. TAYLOR etiam dedit, sed suppressa ejus analysi. Hæc æquatio modularis omnibus curvis similibus communis est, sed solis similibus; quod veritatis amore, quam colo, minime dif-

\* N<sup>o</sup>. CVI. Art. II. pag. 278.

diffimulare volui; idem sentiendum de æquationibus paragraphi præcedentis, quas antea generales esse arbitrabar. Nam in curvis transcendentes dissimilibus æquatio modularis variat, quæ una & eadem est pro omnibus similibus, ut dictum; inventio tamen ejus, quæ peculiare calculi differentialis & integralis artificium deposcit, omnino in potestate est, & canonis mei usum quoque involvit.

6. Si in æquatione §. 4. inventa - da: a = (dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup>): (t dt + u du), ponantur t + u = rr, atque adeo t dt + u du = r dr; ac dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup> = ds<sup>2</sup> & ds<sup>2</sup> = dr<sup>2</sup> vel dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup> = dr<sup>2</sup> = dq<sup>2</sup>, ac denique xx + yy = zz, erit zz [= xx + yy] = (aatt + autu): bb = aarr: bb, & z = arb, vel etiam a = bz: r, ergo la = lb + lz = lr, & differentiando + da: a = dz: z - dr: r; quare æquatio - da: a = (dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup>): (t dt + u du) mutatur in - dz: z + dr: r = (dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup>): r dr & - dz: z = (dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup> - dr<sup>2</sup>): r dr = dy<sup>2</sup>: r dr. Constructio quam Dn. Candidatus noster §. 10. † a Cel. suo Patre avertit in hanc æquationem desinit, atque adeo solas Curvas similes respicit. Nam si in Schemate ejus AF = AM = r, AI = q, AC = AE = z, erit AT = bdq: dr, [nam dy est ad dq ut sinus complementi anguli, quem tangens curvæ AE in puncto F facit cum ejus subtensa AF, ad sinum rectum ejusdem anguli] & AL vel [conf. tr.] PM tertia proportionalis post MA & AT, ob angulum [conf.] rectum MTL = bbdq<sup>2</sup>: r dr<sup>2</sup>, quare cum sit AM = r, erit elementum areæ AVPM = bbdq<sup>2</sup>: r dr. Ordinata hyperbolæ QRS, quæ est CR, est = bb: z, & elementum quadrilini hyperbolici HCRS = - bbdz: z; quum vero areæ AVPM & HCRS [conf.] æquales sint, æquabuntur etiam earum elementa, ac proinde habetur bbdq<sup>2</sup>: r dr = - bbdz: z vel [dividendo per bb] dq<sup>2</sup>: r dr = - dz: z, quæ est æquatio quam ex nostra - da: a = (dt<sup>2</sup> + du<sup>2</sup>): (t dt + u du) elicuimus.

Hæc eadem Constructio immediate etiam deduci potest ex consideratione similitudinis arcuum AF & AE Curvæ, quam Cel. BERNOULLI *principalem* vocat, AFG & secundæ AED; quod quia quilibet, qui voluerit, facile explorare & invenire potest, brevitate gratia ostendere omitto. Hoc unum annotasse contentus, quod si Trajectoria NEB sursum continuetur usque ad occursum cum recta verticali AM, intervallum in hac verticali inter Trajectoriam & punctum A æquale futurum sit datæ lineæ AH. Quare variata hac variabitur etiam Trajectoriæ altitudo.

7. Iis quæ supra in mea Solutione desiderari scripsi, Cl. Candidatus BERNOULLI non solum subscribit, sed plura etiam profert, quæ in analysi exempli mei quarti reprehendenda invenit. Concedit quidem Canone

T A B.  
XXXIX.  
N<sup>o</sup>. CVIII.  
Fig. 2.

† Supra pag. 291.



nem meum generalem esse pro Curvis algebraicis, sed pro transcendentibus non item; non majorem ideo ei extensionem adscripsisse Cel. suum *Patruelum Prof. Patavinum*, etiam si commune mecum in inventionem ejus jus habeat; nec ob stare putat quod contrarium dicam. Scripsi Canonem meum ad Curvas transcendentis æque ac ad algebraicas sese extendere, & in hoc nihil a veritate alienum afferuisse sentio, cum id quod scripsi exemplis probaverim. Distinguendum porro est inter canonicam amplitudinem & sufficientiam: Canon enim ille, consistens in permutatione elementorum coordinatarum Curvæ secundæ, generaliter obtinet in omnibus omnino Curvis algebraicis & transcendentibus, sed solus, ne quidem in Curvis algebraicis sufficit. Nam, præter æquationem differentialem Curvæ secundæ, in qua elementa  $dx$ ,  $dy$ , permutari debent, alia semper requiritur æquatio, quæ cum hac differentiali possit conferri, & modulus variabilis auferri, ita ut ad æquationem nil nisi coordinatas Trajectoriæ cum suis elementis primis vel secundis, aut utriusque, & quantitibus constantibus contineat. Talem novam æquationem in exemplo sæpius citato quæsi & inveni, Canonisque usum indispensabilem cognovi. Contra hanc Analyfin varia excipit Dn. *Candidatus*, quod me tantum duxerit ad æquationem aliquam, quæ a Constructione per quadraturas a LEIBNITIO postulata adhuc absit, ob indeterminatarum permixtionem; quod procedat per ambages, & per integrationem aliquam, non facilem, nec certa ratione patentem, pervenerim ad æquationem meam differentialem; miratur denique quod judicando Anonymi cujusdam Angli tentamen fore calculi laboriosissimi, ipsemet calculi prolixitatem & molestiam evitare non studuerim; miratur item me dicentem secunda differentialia esse superflua, cum ipse ego ad ea delapsus sim.

8. Sed vellem & mihi locum indicet Dn. *Candidatus*, in quo, circa exemplum Curvarum algebraicarum, in nimiam calculi prolixitatem incidit, aut ad secunda differentialia delapsus sim. Talia enim me in Anonymi Angli tentamine improbasse, adeo clarum est ex eo, quod expresse negaverim ejus methodum latius patere quam ad curvas algebraicas, aut simplicissimam ex transcendentibus, Logarithmicam scilicet; ut ego vicissim mirer, ipsum verba mea aliter intellexisse, vel potius interpretatum fuisse, quam ipsa sonant. Verum est, me circa Curvas transcendentis ad secundas differentias delapsus esse; sed quid hoc mirum? Quis enim negaverit rationi consentaneum esse, quod in ejusmodi Curvis transcendentibus inventio Trajectoriæ secunda differentialia exposcat, quemadmodum pro Curvis algebraicis primis differentis opus est? Scio in curvis transcendentibus similibus usum secundarum differentiarum vitari posse; sed Dn. *Candidatus* nondum probavit, nec forte unquam probabit, idem obtinere circa Curvas transcendentis dissimiles, quales sunt hæc curvæ, quæ

hac

hac æquatione differentiali exprimentur,  $dx = b^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , in qua  $a$  est modulus variabilis, constans quidem pro una eademque linea ex infinitis, quæ hac æquatione exprimentur; sed major vel minor in alia atque alia ex hisce literis,  $b$  vero est constantissima per omnes hæc infinitas Curvas; earum omnium æquatio modularis est  $dx : a = (dx^2 + dy^2) : (y dy + (1 - m) x dx)$ . Et Trajectoriæ orthogonalis æquatio differentio-differentialis ea quæ sequitur  $(m dx^4 dy + m dx^2 dy^3 + y dx^2 dy dy - y dx dy^2 dx + (m - 1) x dx^2 dy dx + (1 - m) x dx^3 dy) \times b^{2m} = (m - mm) x y^{2m-1} dx dy^4 - m y^{2m} dx^2 dy^3$ . Quod si æquationem differentialem primi gradus invenire possit pro Trajectoria quæsitâ, aut hujus Trajectoriæ constructionem per quadraturas absolovere possit, operæ pretium erit ejus labor. Ad reliquas ejus objectiones in præcedentibus cum jam responsum sit, manum de tabula retraho.

N. CX.

NIC. BERNOULLI,

Math. Profess. Patavini,

TENTAMEN SOLUTIONIS GENERALIS

*Problematis de construenda Curva, quæ alias ordinatim positione datæ ad angulos rectos secat.*

CUM Celeb. HERMANNUS noster in *Supplemento* Solutionis suæ \*, quod mense Julio superioris Anni in his *Actis* edidit, aliis quoque in Solutionem hujus Problematis inquirendi voluptatem relinquere voluerit; haud incongrue me facturum existimavi, si & ego regule nostræ [illius scilicet, quam Cl. HERMANNUS in *Actis* 1717 † proposuit, quæque non differt ab ea, quam, uti constat ex narratione Patrueli mei in *Actis* 1718, pag. 259 \*\* ante triennium cum Nobil. MONTMORTIO communicavi, neque ab ea, in quam jam olim incidit LEIBNITIVS & Patrus meus] defectum aliquatenus supplerem. Dico aliquatenus; existimo enim, generalem Trajectoriarum constructionem dari non posse, *Jean. Bernoulli Opera omnia* Tom. II. Qq ne

\* Supra N. CVI. Art. II. † Ibid. Art. I. \*\* N. CVIII. pag. 294.





ne quidem concessis Curvarum quadraturis; secus ac existimat Cl. HERMANNUS; qui, ut spero, haud ægre feret, quod hic moneam, duo precipue in ejus *Supplemento* desiderari, quæ obstant, quo minus pro Solutione generali haberi possit. Primum est, quod pro generali æquatione Curvarum secundarum assumit  $dx = p dy$ , ubi  $p$  datam supponit quomodocunque per  $y$  & constantes; cum tamen supponere debuisset datam per  $x, y$ , & constantes. Alterum est, quod credam, errorem irrepressibilem in ipsam æquationem  $\text{Log. } c = \text{Log. } a = \int (qq dy : (y + psp dy))$ , quam nobis suppeditat pro constructione generali Trajectoriæ quæsitæ: nam applicanti mihi hanc formulam ad casus particulares nunquam se obtulit vera solutio, ne quidem in casibus simplicissimis, quando, ex. gr. lineæ secundæ sunt lineæ rectæ ex communi vertice egredientes, aut Parabolæ ex eodem vertice & super eodem axe descriptæ, quarum Trajectoriæ, ut notum est, sunt Circuli vel Ellipses concentricæ. Imo ne quidem in exemplo ab ipso Cl. HERMANNO allato res mihi successit; ipse quidem veram solutionem tandem elicit, sed applicatione, ut mihi videtur illegitima. Regula quam ipse præscribit, sic se habet: „Aptandæ sunt in Logarithmica duæ ordinate  $a$  &  $c$ , atque in Curva, cujus abscissæ  $y$ , ordinate vero sint  $qq : (y + psp dy)$  abscindenda area proportionalis distantie applicatarum illarum Logarithmicæ; abscissa hujus areæ dabit ordinatam, ejusque valor in æquatione  $x = \int p dy$  substitutus abscissam Trajectoriæ quæsitæ in puncto intersectionis ejus & curvæ secundæ.“ Jam vero in applicatione hujus regulæ ad exemplum citatum invenit  $qq dy : (y + psp dy) = dR : (1 - m) R$ , ubi  $dR = (1 - m) a^{2m} p dy : y^{2m} = (1 - m) a^{2m} dy : y^{2m} \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ ; porro invenit  $\text{Log. } c = \text{Log. } a = \frac{1}{1-m} \text{Log. } R = \frac{1}{1-m} \text{Log. } a$ ; ergo, secundum præscriptum regulæ, deberet in Curva, cujus abscissæ  $y$ , ordinate vero sint  $qq : (y + psp dy)$ , i. e. in hoc exemplo  $dR : (1 - m) R dy$ , abscindi area proportionalis  $\text{Log. } c = \text{Log. } a$ , i. e.  $\frac{1}{1-m} \text{Log. } R = \frac{1}{1-m} \text{Log. } a$ , quod non video quomodo conveniat cum conclusione *Hermanniana*, quæ hæc est: „Ergo si in Curva, cujus abscissæ  $y$ , & applicatæ sint  $(1 - m) a^{2m} : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , id est,  $dR : dy$ , abscindatur area  $= a^m c^{1-m}$ , id est  $= R$ , areæ hujus abscissa  $y$  dabit ordinatam Trajectoriæ quæsitæ.“ Rogatur itaque Cl. HERMANNUS, ut aut errorem [si quis sit] in regula sua corrigere, aut verum ejusdem sensum, quem fortassis non affecti

cuti sumus, explanare, modumve eam ad alia exempla applicandi nobis aperire velit.

Ut autem meum Trajectorias construendi modum exponam, communicabo hic geminam regulam, quarum una servit pro iis casibus, in quibus haberi potest æquatio differentialis completa Curvarum secundarum; altera vero servit pro aliquibus illorum casuum, in quibus Curvarum secundarum natura per æquationem differentialem incompletam exprimitur. Voco autem æquationem differentialem Curvarum secundarum *completam* illam, quæ exprimit relationem, quam habent inter se differentia lia, non tantum coordinatarum Curvarum secundarum, sed & parametri variabilis, sive ejus lineæ, quam Cl. HERMANNUS *modulum* appellat. Æquationem vero differentialem *incompletam* vero illam, quæ exprimit tantum relationem, quæ est inter differentia lia coordinatarum unius ex Curvis secundis, parametro sive modulo manente constante. Æquationem differentialem completam Curvarum secundarum generaliter designo hoc modo  $dx = p dy + q da$ , incompletam hoc modo  $dx = p dy$ , in quibus æquationibus litteræ  $x$  &  $y$  denotant coordinatas Curvarum secundarum,  $a$  parametrum variabilem,  $p$  &  $q$  quantitates datas quomodocunque per  $x, y, a$ , & constantes.

His tanquam definitionibus præmissis, regulam meam primam sic enuntio: Logarithmus quantitatis  $\sqrt{(1 + pp)}$ :  $p$  differentietur, sumendo  $y$  constantem & parametrum  $a$  variabilem, & substituendo pro  $dx$  ejus valorem  $q da$ ; postea inventa differentialis iterum integretur, sumendo etiam  $y$  variabilem, & substituendo, ubi opus fuerit, valorem harum æquationum,  $dx + p p dx = q da$ , &  $dy + p p dy = -p q da$ , integralis [si qua haberi possit] habeatur pro Logarithmo, cujus numerus vocetur  $n$ , per hanc quantitatem  $n$  dividatur quantitas  $q$ , & ex quotiente, postquam pro  $x$  substitutus fuerit ejus valor expressus in  $y, a$ , & constantibus, ejiciantur omnes illi termini, in quos ingreditur  $y$ , residui per  $da$  multiplicati sumatur integralis, quæ ponatur  $= A$ . Quo facto, si in Curva, cujus abscissæ sint  $= y$ , & ordinate, quas vocabo  $z = (1 + pp) : p n$ , abscindatur area  $= C - A$ , ubi per  $C$  intello quantitatem arbitriariam constantem pro singulari ejusdem Trajectoriæ punctis areæ hujus abscissa  $y$  dabit ordinatam Trajectoriæ quæsitæ in puncto intersectionis ejus & Curvæ secundæ.

Altera regula, quæ Corollarium est præcedentis, locum tantum habet in iis Curvis secundis transcendentibus, quarum æquatio differentialis incompleta  $dx = p dx$  ita comparata est, ut quantitas  $\sqrt{(1 + pp)}$ :  $p$  multiplicatione componatur ex duobus factoribus, quos nominabo  $B$  &  $T$ , quorum ille datus sit per  $a$  & constantes, hic per  $y$  & constantes. In his casibus construenda est Curva, in qua abscissis existentibus  $= y$ , applicatæ  $z$  sint  $= (1 + pp) : p B$ , & reliqua peragenda ut prius, cum hoc tamen discrimine, quod loco fractionis  $q da : n$ , quæ servit pro invenien-



venienda quantitate *A*, hic adhiberi debeat fractio ista *dE*: *B*, ubi per *E* intelligitur distantia variabilis puncti interfectionis Curvarum secundarum cum axe a puncto quopiam dato, ex quo nempe sumitur initium abscissarum Trajectoriae quaesitae; datur autem illa distantia *E* per *a* & constantes: quare hic area abscindenda semper erit  $C - \int (dE : B)$ , adeoque constans, si Curvae secundae omnes transeant per idem axis punctum. Utrumque regulam exemplis aliquot illustrare conabor.

EXEMPLUM I.

Sit aequatio Curvarum secundarum  $dx = y^m dy : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , ut in exemplo quod LEIBNITIUS proposuit in *Actis* 1715. pag. 226. Hic  $p = y^m : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = a^m : y^m$  adeoque per regulam secundam, erit applicata Curvae construendae sive  $z = (1 + pp)$ :  $pB = a^m : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$  & area abscindenda constans, si Curvae secundae omnes commune habeant principium; quae solutio apprime consentit cum solutione priore Patru mei, recensita ab ipsius Filio in *Actis* 1718. pag. 253. \*

EXEMPLUM II.

Sint Curvae secundae eadem, quae in precedenti exemplo, sed eo situ positae, ut distantia puncti ejusdem dati in axe a principio cujusque Curvae secundae sit aequalis parametro *a*. Hic eadem Curva quae antea constructi debet, sed area abscindenda erit  $C - \int (dE : B) = C - \int (da : a^m) = C + 1 : (m - 1) a^{m-1}$ .

EXEMPLUM III.

Sit aequatio Curvarum secundarum  $x = a + \int p dy$ , ubi *p* significet quantitatem quameunque compositam ex *y* & constantibus. Tales Curvae omnes nihil aliud sunt, quam una eademque Curva super axe suo ita mota, ut singula ejus puncta describant lineas rectas axi parallelas. Hic quantitates singulae *q*, *n*, *B*, aequales sunt unitati, &  $E = a$ ; ideoque erit ordinata Curvae construendae  $z = (1 + pp) : p$ , & area abscindenda  $= C - a$ .

\* Supra pag. 290.

EXEM-

EXEMPLUM IV.

Sint Curvae secundae Parabolae dati gradus, sed diversarum parametrorum habentes eundem verticem & axem, quarum aequatio generalis sit  $y^m = a^{m-1} x$ , cujus differentialis completa est  $my^{m-1} dy = (m-1) a^{m-2} x da + a^{m-1} dx$ ; hic  $p = my^{m-1} : a^{m-1} = mx : y$ , &  $q = (1 - m)x : a$ , &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = \sqrt{(yy + mmxx)} : mx$ , cujus Logarithmus si differentietur, sumendo *y* constantem, & ponendo pro *dx* ejus valorem  $q da = (1 - m)x da : a$ , prodibit  $(m - 1)yy da : (yy + mmxx)$ , hoc iterum integratum, posita etiam *y* variabili, & substituto valore hujus aequationis  $dx + pp dx = q da$ , dabit  $f(-dx : x) = \text{Log.}(1 : x)$ . Quare per regulam primam est  $n = (1 : x)$ , & applicata Curvae construendae sive  $z = (1 + pp) : pn = (yy + mmxx) : my = (a^{2m-2} y + mmy^{2m-1}) : m a^{2m-2}$ , & area abscindenda in hac Curva = constanti.

EXEMPLUM V.

Sint iterum Parabolae dati gradus, diversarum parametrorum, & super eodem axe constructae, sed transeutes per idem punctum extra axem datum, quarum aequatio sit  $y^m = a^{m-1} x + b^m$ . Hic ut in precedenti exemplo  $p = my^{m-1} : a^{m-1}$ , &  $q = (1 - m)x : a$ , &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = \sqrt{(a^{2m-2} + mmy^{2m-2})} : my^{m-1}$ , cujus Logarithmus si differentietur, ponendo *y* constantem, habebitur  $(m - 1) a^{2m-3} da : (a^{2m-2} + mmy^{2m-2})$ ; hoc iterum integratur, ponendo etiam *y* variabilem, & substituendo valorem hujus aequationis  $q da = dx + pp dx$ , & proveniet iterum  $f(-dx : x)$  pro Logarithmo ipsius *n*; quare  $n = 1 : x = a^{m-1} : (y^m - b^m)$ , &  $z = (1 + pp) : pn = (a^{2m-2} + mmy^{2m-2}) : (y^m - b^m) : ma^{2m-2} y^{m-1}$ . Area abscindenda sic invenitur: quia  $q : n = (1 - m)xx : a = (1 - m)(y^{2m} - 2b^m y^m + b^{2m}) : a^{2m-1}$ , erit rejectis terminis, in quibus reperitur *y*, residui per *da* multiplicati, id est,  $(1 - m)b^{2m} da : a^{2m-1}$  integralis  $= b^{2m} : 2 a^{2m-2} = A$ , adeoque area abscindenda  $= C - b^{2m} : 2 a^{2m-2}$ .

Qq 3

EXEM-



EXEMPLUM VI.

Sint Curvæ secundæ Logarithmicæ æqualium subtangentium super axis parallelis constitutæ, & per commune punctum transcentes, quarum æquatio generalis sit  $x = \text{Log.}(y - a) - \text{Log.}(1 - a)$ , cujus differentialis completa est  $dx = dy : (y - a) + (yda - da) : (y - ay - a + aa)$ ; hic  $p = 1 : (y - a)$  &  $q = (y - 1) : (y - ay - a + aa)$ , &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = \sqrt{(1 + yy - 2ay + aa)}$ , cujus Logarithmus secundum regulam differentiatius est  $(-yda + ada) : (1 + yy - 2ay + aa)$ , quæ quantitas ope æquationis  $dy + ppydy = -pqda$  reducitur ad hanc  $(dy - da) : (y - a) - dy : (y - 1)$ , cujus integralis  $\text{Log.}(y - a) - \text{Log.}(y - 1) = \text{Log.}n$ ; quare  $n = (y - a) : (y - 1)$ , &  $z = (1 + pp) : pn = (1 + yy - 2ay + aa) : (y - 1) : (yy - 2ay + aa)$ , & area abscindenda = constanti.

EXEMPLUM VII.

Sint Curvæ secundæ Logarithmicæ diversarum subtangentium super eodem axe & per idem punctum ductæ, quarum æquatio generalis sit  $x = a \text{Log.}y$ , cujus differentialis completa est  $dx = ady : y + da \text{Log.}y$ , ubi  $p = a : y$ , &  $q = \text{Log.}y$ , &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = \sqrt{(yy + aa)}$ , cujus Logarithmus, per regulam primam differentiatius, dat  $ada : (yy + aa) - da : a$ , quod iterum ope æquationis  $dy + ppydy = -pqda$  reducitur ad  $-dy : y \text{Log.}y - da : a$ , ergo integrando erit  $\text{Log.} \text{Logarithmi } 1 : y - \text{Log.}a = \text{Log.}n$ , & proinde  $n = 1 : a \text{Log.}y = 1 : x$ , &  $z = (1 + pp) : pn = (yy + aa) \text{Log.}y : y$ , & area abscindenda = constanti.

EXEMPLUM VIII.

Sit æquatio Curvarum secundarum  $x = f(dy \sqrt{(bb - yy)} : \sqrt{(aa + yy)})$ , ubi  $p = \sqrt{(bb - yy)} : \sqrt{(aa + yy)}$  &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = \sqrt{(aa + bb) : (bb + yy)}$ ; hinc per regulam secundam est  $B = \sqrt{(aa + bb)}$  &  $z = (1 + pp) : pB = \sqrt{(aa + bb)} : \sqrt{(aa + yy)} \cdot \sqrt{(bb - yy)}$ , & area abscindenda = constanti.

EXEMPLUM IX.

Sint Curvæ secundæ Parabolæ habentes eundem axem, sed parametros æquales respectivis verticem a puncto dato distantis, quarum æquatio generalis sit  $yy = ax + aa$ , cujus differentialis completa est  $2y dy =$

$= adx + xda + 2ada$ ; quapropter  $p = 2y : a$ , &  $q = (x + 2a) : -a = (yy + aa) : -aa$ , &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = \sqrt{(4yy + aa)} : 2y$ , cujus Logarithmus more solito differentiatius est  $ada : (4yy + aa)$ , qui mediante æquatione  $dy + ppydy = -pqda$  reducitur ad  $da : a + 2dy : y - (8ydy + 4ada) : (2yy - aa) = \text{Log.}n$ , unde  $n = 4yy : (4y^4 - 4aayy + a^4)$  &  $z = (1 + pp) : pn = (16y^4 - 12aay^2 + a^4) : 2aay^2$ . Area abscindenda sic invenitur: Quia  $q : n = (yy + aa) : (4y^4 - 4aayy + a^4) = a^3yy = 4y^2 : a^3 + 3a - a^3 : yy$ , erit, rejectis terminis in quibus  $y$  reperitur, residui per  $da$  multiplicati integralis  $= f 3ada = 3aa : 2 = A$ , & per consequens area abscindenda est  $C - 3aa : 2$ .

EXEMPLUM X.

Sit æquatio Curvarum secundarum  $x = \sqrt{(bb + 2byy : a)}$ , æquatio nempe ad infinitas hyperbolas ejusdem verticis & centri, cujus exempli Solutionem a Patruale meo exhibitam communicavit LEIBNITIVS in Actis 1716, pag. 228\*. Hujus æquationis differentialis completa est  $dx = (2abydy - byyda) : a \sqrt{(aab + 2abyy)}$ , ubi  $p = 2y \sqrt{b} : \sqrt{(aab + 2abyy)}$ , &  $q = -yy \sqrt{b} : a \sqrt{(aab + 2abyy)}$ , &  $\sqrt{(1 + pp)} : p = \sqrt{(aab + 2abyy + 4byy)} : 2y \sqrt{b}$ , cujus Logarithmus differentiatius, posita  $y$  constante, est  $(abda + yyda) : (aab + 2abyy + 4byy)$ , qui mediante æquatione  $dy + ppydy = -pqda$  reducitur ad  $(bda + 4yddy) : (2ab + 4yy) + da : 2a - 2dy : y$ , cujus integralis  $\frac{1}{2} \text{Log.}(ab + 2yy) + \frac{1}{2} \text{Log.}a - 2 \text{Log.}y = \text{Log.}n$ , quare  $n = \sqrt{(aab + 2abyy)} : yy$ , &  $z = (1 + pp) : pn = (aaby + 2ay^2 + 4by^2) : 2 \sqrt{b} (aab + 2abyy)$ , & area abscindenda = constanti.

SCHOLIUM I.

In præcedentibus exemplis suppletionem dimensionum neglexi; qui autem volet, ut ordinata Curvæ construendæ, quam nomino  $z$ , obtineat semper dimensionem linearum, poterit id, ubi opus fuerit, efficere assumendo rectam aliquam constantem pro unitate. Sic in exemplo primo possum assumere  $z = a^m b^{m+1} : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , loco  $z = a^m : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ ; & in exemplo ultimo  $z = (aaby + 2ay^2 + 4by^2) : (aab + 2abyy)$ , loco  $z = (aaby + 2ay^2 + 4by^2) : 2 \sqrt{b} (aab + 2abyy)$ ; & sic in aliis.

SCH

\* Supra N<sup>o</sup>. CIV.



SCHOL. II.

Æquatio ipsa Trajectoriæ quæsitæ, quamvis per methodum ordinariam plerumque, præsertim quando Curvæ secandæ sunt algebraicæ, facilius haberi possit, ex hac tamen constructione invenietur querendo expressionem areæ abscondendæ, & hinc eliciendo valorem parametri variabilis, qui valor in æquatione integrali Curvarum secandarum substitutus dabit æquationem integram, sed substitutus in æquatione  $dy = -p dx$  dabit æquationem differentialem Trajectoriæ quæsitæ. Res exemplis patebit.

In *Exemplo I.* expressio areæ abscondendæ hæc est  $C = \int (a^{2m} dy : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})})$ , quamvis autem hæc quantitas ipsa per se integrari non possit, potest tamen ope illius Curvæ secandæ, ad quam pertinet Curva ea, in qua area ista constans abscondi debet. Nimirum  $\int (a^{2m} dy : y^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}) = \int (a^{2m} - y^{2m}) : (1-m)a^m y^{m-1} + \int y^m dy : (1-m)a^m \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} = \int (a^{2m} - y^{2m}) : (1-m)a^m y^{m-1} + x : (1-m)a^m = C$ , aut, quod ob quantitatem Arbitrariam eodem recidit,  $\sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} : a^m y^{m-1} + x : a^m = C$ . Sed ex natura Trajectoriæ est  $dy = -p dx = -y^m dx : \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})}$ , quarum duarum æquationum ope sit parameter  $a$  eliminetur, habebitur  $(xdy - ydx) : y^m \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (xdy - ydx) : y^m dt = C$ , prorsus ut invenit HERMANNUS.

In *Exemplo IV.* expressio areæ abscondendæ est hæc  $C = \int (a^{2m-2} y dy + mny^{2m-1} dy) : ma^{2m-2} = (a^{2m-2} yy + my^{2m}) : 2ma^{2m-2} = yy : 2m + y : 2a^{2m-2}$ , sive quia constans Arbitraria est,  $C = yy : m + xx$ ; quare Trajectoriæ hujus exempli sunt Ellipses concentricæ, quarum latus rectum ad latus transversum ut  $m$  ad 1.

In *Exemplo IX.* expressio areæ abscondendæ est  $C = 3aa : 2 = \int ((16y^8 dy - 12aa y^4 dy + a^4 dy) : 2aa y^3) = \int (8y^3 dy : aa - 6y dy + a^4 dy : 2y^3) = 2y^4 : aa - 3yy - a^4 : 4yy$ , hinc  $C = (8y^4 - 12aa y^4 + 6a^4 yy - a^4) : 4a^2 yy = (2yy - aa)^2 : 4a^2 yy$ , aut etiam, extrahendo radicem quadratam,  $C = (2yy - aa)^2 : 2ay$ . Sed æquatio integralis Curvarum secandarum est  $yy = ax + a^2$ , hinc  $a = \sqrt{(\frac{1}{2}xx + yy)} - \frac{1}{2}x$  quo valore substituto reperietur  $C = (yy - \frac{1}{2}xx + x \sqrt{(\frac{1}{2}xx + yy)})^2 : (2yy - \frac{1}{2}xx + x \sqrt{(\frac{1}{2}xx + yy)})$

$\sqrt{(\frac{1}{2}xx + yy)}^2 : (-xy + y \sqrt{(xx + 4yy)})$  pro æquatione Curvæ, quæ ad angulos rectos secat Parabolas super eodem axe constructas, & habentes parametros æquales distantis verticem suorum a puncto axis dato, posito hoc punctum datum esse situm intra Parabolas secandas. Patruus meus in *Comment. Acad. Regiæ Scient. Paris.* An. 1702. pag. 294\*, & post eum Gabriel MANFREDIUS in fine Libri *de Constructione æquationum differentialium* dederunt æquationem talium Trajectoriarum, in hypothesi quod punctum datum respiciat convexitatem Parabolæ.

SCHOL. III.

Ex eadem expressioe areæ abscondendæ elici potest alius modus construendi Trajectorias quæsitæ, inveniendi nempe pro qualibet Curva secanda, cujus parameter  $a$  invariata concipitur, aliam Curvam, ita ut intersectio utriusque Curvæ fiat in puncto aliquo Trajectoriæ quæsitæ. Ipsa enim æquatio, quæ invenitur pro area abscondenda, expressa in  $x, y, a$ , & constantibus, præbet naturam Curvæ, quæ secandam in puncto Trajectoriæ interfecabit. Sic in exemplo primo æquatio aream abscondendam determinans est  $\sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} : a^m y^{m-1} + x : a^m = C$ , sive  $x = a^m C - \sqrt{(a^{2m} - y^{2m})} : y^{m-1}$  quæ hanc facilitam constructionem suppeditat. Sit in *Fig. 1.* Curva secanda ABC, Trajectoria construenda DBE; ad axem AM ducatur perpendicularis AG, per punctum quodlibet G in ea pro arbitrio assumtum ducatur axi parallela GI, occurrens Curvæ secandæ in puncto I, ex quo ducantur rectæ LM, IM, illa ad axem, ista ad ipsam Curvam perpendicularis; tum in recta GI abscondatur ex puncto G recta GH =  $a^m C$ , demta subnormali LM; punctum H erit in Curva HBF, quæ propositam ABC in puncto Trajectoriæ quæsito B interfecabit. Mutata autem  $a$  & servata C invenietur per similem constructionem aliud punctum ejusdem Trajectoriæ DBE. In casu particulari quando  $m = 1 : 2$ , & Curvæ secandæ sunt Cycloides, æquatio Curvæ, quæ datam quamque Cycloidem in puncto Trajectoriæ interfecat, deveniet  $x = \sqrt{ac} - \sqrt{(ay - yy)}$ , ponendo  $\sqrt{c}$  pro quantitate constante arbitraria C ad supplenda homogenea; est autem ista æquatio ad circulum hac ratione describendum:

In axe [*Fig. 2.*] AO Cycloidis secandæ ABC abscondatur AH =  $\sqrt{ac}$ , mediæ nempe proportionali inter constantem quandam  $c$ , & diametrum CO circuli genitoris CPO, tum describatur circulus HBF *Joan. Bernoulli Opera omnia* Tom. II. R r ejus

T A B.  
XXXIV.  
Nº. CX.  
*Fig. 1 & 2.*

\* Nº. LXX. pag. 396. Tom. I.



cujus diameter æqualis sit diametro circuli genitoris, & qui tangat axem AO in puncto H; iste circulus fecabit Cycloidem datam in puncto B Trajectoriæ quæsitæ DBE. Manifestum est hanc constructionem plane eandem esse ac illam, quam Patruus dedit pro Synchrona sua in Act. 1697. pag. 211 \*; nam si per punctum intersectionis B ducta intelligatur recta BP parallela axi AO, erit arcus PO = arcui BH = (ex natura Cycloidis) rectæ AH = (per contr.)  $\sqrt{ac}$ , uti requirit citata Patruï constructio.

## SCHOL. IV.

Problema hoc de Trajectoriis Curvarum construendis usum habere potest in negotio separationis indeterminatarum in æquationibus differentialibus. Nam si in proposita aliqua æquatione differentiali mutetur  $dy$  in  $dx$ , &  $dx$  in  $-dy$ , erunt Trajectoriæ Curvarum, quæ per æquationem differentialem ita mutatam exprimentur, illæ ipsæ Curvæ, quæ propositæ æquationi differentiali satisfaciunt; quod si igitur illæ Trajectoriæ construi possint, poterunt etiam differentialem in proposita æquatione separari. Ex gr. proponatur æquatio  $dy = (x dy - 4y dx) : \sqrt{(xx + 4yy)}$ , in qua separandæ sint indeterminatæ. Mutatis  $dy$  in  $dx$ , &  $dx$  in  $-dy$ , provenit  $dx = (x dx + 4y dy) : \sqrt{(xx + 4yy)}$ , cujus integralis est  $x = \sqrt{(xx + 4yy)} +$  vel  $-$  quantitate constante, æquatio nempe pro illis Parabolis, quarum Trajectorias in Exemplo IX construximus; cum igitur harum Trajectoriarum æquatio integralis in Scholio secundo inventa sit, inventa etiam est integralis differentialis propositæ  $dy = (x dy - 4y dx) : \sqrt{(xx + 4yy)}$ .

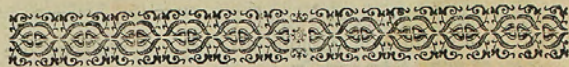
## SCHOL. V.

Etsi methodus ista construendi Trajectorias propter calculi prolixitatem aut alia impedimenta in multis casibus non succedit, ut in Exemplo, cujus mentionem fecit Patruus meus, Act. 1718. pag. 260, † pro hoc tamen & aliis exemplis, in quibus Curvæ secandæ ad unam constantem revocari possunt, suppetunt particulares methodi, de quibus, ut & de Trajectoriis illarum Curvarum, quarum ordinatæ non sunt parallele, sed in puncto quodam coeunt, forsan alio tempore disserendi occasio dabitur.

Videatur Nus. CXVI.

\* pag. 193. Tom. I.  
† Supra N<sup>o</sup>. CVIII. pag. 298.

JOHAN.

N<sup>o</sup>. CXI.

## JOHANNIS BERNOULLI

*Methodus inveniendi curvas algebraicas indefinite non quadrabiles, habentes tamen numerum determinatum spatiorum absolute quadrabilium.*

Excerpta ex Schediasmate quodam Nic. BERNOULLI  
Joh. Fil. J. V. L. & Prof.

§. 13. **O**RDO nunc postulat, ut aliquid dicam de modo construendi curvas algebraicas indefinite irrectificabiles, quæ tamen habent tot, quot libuerit, arcus algebraice rectificabiles. Patet utique supposita reductione quadraturæ cujuscunque propositæ ad rectificationem curvæ algebraicæ, Problema secundum *Hermannianum*, sicuti in *Actis* 1719 p. 361 extat, ex hoc altero pendere problemate, jam olim Patrem inter aliosque agitato, *Invenire curvam algebraicam indefinite inquadrabilem, qua tantum spatia habeat, quot libuerit, quadrabilia.* Hujus quæstionis solutionem aliquam, datam a Cl. HERMANNO in litteris ad Patrem meum scriptis 4 Sept. 1716, huc refero, quæ ita sonat. „ Posita abscissa  $x$ ; ordinata  $y$ , erit æquatio generalis curvæ quæsitæ  $y = z + bu$ , „ ubi  $z$  est quantitas data per  $x$  & constantes, &  $t$ , similis quantitas, sed „ data per  $u$  & eandem constantes, ac denique  $\theta = dt : dx$ , & posita, „ ut libet,  $x^{m+1} + ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c. - u = 0$ , „ Curva ista tot spatia quadrabilia habeat, quot sunt radices reales & „ veræ hujus æquationis  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \&c. - 1 = 0$ .

§. 14. Hæc vero solutio cum non satis naturalis Parenti visa esset, ut pote differentialibus præter necessitatem innixa, communicavit aliam concinniore in responsione ad Cl. HERMANNUM d. 12 Dec. 1716, his verbis. „ Ecce hujus problematis solutionem meam generalem, & facilem, ex pluribus unam, nullis differentialibus expressam. Sit abscissa  $x$ , ordinata  $y$ , erit æquatio generalis

R r 2 cur-

*Ada*  
*Evad. Lips.*  
Suppl.  
Tom. VIII.  
Sect. IX.  
pag. 380.



„ curvæ quæsitæ  $y = z + \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + h}$ , ubi  $z$  est quantitas data per  $x$  & constantes ope  
 „ hujus æquationis  $x^p - az^m - bz^{m-1} - cz^{m-2} - \dots - h = 0$ . Curva ista tot gaudet spatiis quadrabilibus, quot  
 „ sunt radices reales & veræ in hac æquatione  $x^p - az^m -$   
 „  $bz^{m-1} - cz^{m-2} - \dots - h = 0$ . Demonstrationem  
 „ ejus facile ipse erues, si quid attentionis adhibere libuerit.

§. 15. Ex subsequentibus interim litteris Cl. HERMANNI intelligens Pater, mentem suam ab ipso non recte esse perceptam, constituit, pro ea qua est facilitate in communicandis inventis suis, Viro Clar. aperire methodi suæ fontem, ipsamque adeo analysin; id quod præstitit in litteris ad Cel. HERMANNUM exaratis medio anni 1718, ex quibus, quæ huc spectant, transcribo.

TAB.  
XXXIV.  
N<sup>o</sup>. CXI.  
Fig. 1.

Sint duæ rectæ sibi invicem normales AK, AG; & super AK tanquam axe descripta sit curva algebraïca AFBCD, ejus naturæ ut abscissa AH existente  $x$ , applicata HB sit  $= \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + h}$  occurreret hæc curva, ut liquet, rectæ AD angulum GAK bifecanti in tot punctis C, D, &c. quot sunt radices possibiles in hac æquatione  $x^p - az^m - bz^{m-1} - cz^{m-2} - \dots - h = 0$  [intelligo per  $m$  &  $p$ , numeros ad libitum assumptos]. Jam in recta AG sumantur partes AE ipsi AH æquales & ad singulas applicentur EF ipsi AK parallelæ, quæ vocentur  $z$ . Quo peracto fiat super axe AK nova curva algebraïca ALMN, cujus applicatæ HL, quæ dicantur  $y$ , sint æquales aggregato ex BH & EF simul; unde per ejus naturam hæc emerget æquatio  $y = z + \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + h}$ ; dico hanc curvam satisfacere quæsito. Nam ex ejus constructione sequitur spatium AHL æquari aggregato AHB & AEF, hoc est mixtilineo AEFBH; hoc vero mixtilineum, abeunte puncto H in punctum I vel K, vel &c. patet degenerare in quadratum rectæ AI, vel in quadratum rectæ AK, vel &c. Ergo Curva algebraïca ALMN talis est, ut ejus area indefinita

nita ALH sit inquadabilis [suppono enim numeros  $p$  &  $m$ , quamvis integros & affirmativos, facere tamen, ut quantitas  $ax^p \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + h}$  non sit integrabilis] sed quæ interim tot habeat areas quadrabiles AIM, AKN, &c. quot libuerit, ex quot nempe radicibus possibilibus componere placuerit æquationem  $x^p - az^m - bz^{m-1} - cz^{m-2} - \dots - h = 0$ . Quod autem tandem  $z$  detur in  $x$  per hanc æquationem  $x^p - az^m - bz^{m-1} - cz^{m-2} - \dots - h = 0$  liquet ex eo quod, per naturam curvæ ABCD, abscissa  $z$  existente  $= EF$ , applicat sit  $= \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cz^{m-2} + \dots + h} = AE =$  [per constr.]  $= x$ . Elevando utrumque membrum ad potentiam  $p$ , & reducendo omnia ad unam partem provenit dicta æquatio  $x^p - az^m - bz^{m-1} - cz^{m-2} - \dots - h = 0$ , pro determinatione valoris ipsius  $z$  in  $x$ . Quæ omnia erant faciendæ & demonstrandæ.

SCHOL. 1. Si AE accipiatur æqualis multiplo submultiplove cuilibet ipsius AH, ita scilicet ut AE sit  $= nx$ : & deinde recta AD secet angulum GAK, ut tangens anguli DAK sit ad sinum totum ut  $n$  ad 1; ceteraque construantur ut ante, oriatur alia curva ALMN, quæ pro diversitate numeri  $n$  infinitis modis variatur, semper tamen gaudens spatiis quadrabilibus AIM, AKN &c. quorum tot erunt, quot sunt radices possibiles in hac æquatione  $n^p x^p = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + h$ . Notetur autem, faciendam jam esse HL  $= BH + nFE$ ; unde æquatio naturam curvæ ALMN exprimens erit hæc  $y = nx + \sqrt[p]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + h}$ , ubi  $z$  datur in  $x$  per hanc alteram  $n^p x^p - az^m - bz^{m-1} - cz^{m-2} - \dots - h = 0$ .

SCHOL. 2. Possunt hæc solutiones infinites generales reddi, si nempe pro AF sumatur functio qualibet ipsius AH, & R r 3 loco

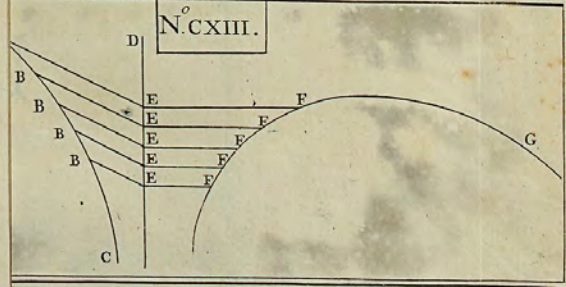
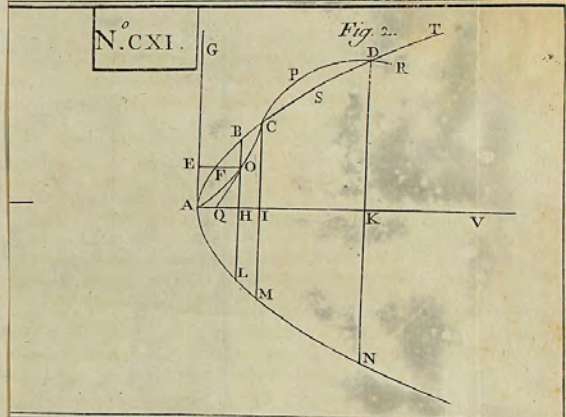
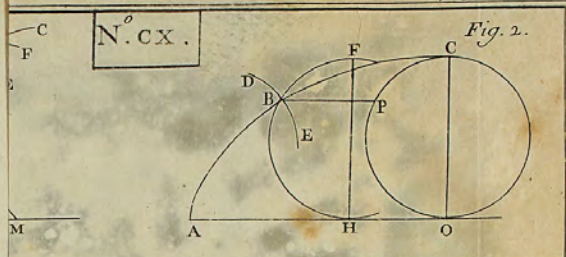


loco rectæ ACD adhibeatur Curva, cujus applicatæ expriment similes functiones suarum respectivé abscissarum. Fiat exempli gratia,  $AE = \sqrt{a \times AH}$ , sumaturque  $HL = BH + \frac{a}{2AE} \times EF$ . Pro recta ACD substituatur parabola super axe AK, cujus parameter =  $a$ . Secabit hæc parabola curvam AFBCD in tot punctis C, D, &c. quot sunt radices possibiles in hac æquatione  $a^p x^p = (ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + b)^2$ ; Curva proin ALMN totidem habebit arcus quadrabiles AIM, AKN &c. Datur vero EF, seu  $z$ , in  $x$  per hanc æquationem  $a^p x^p = (az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} + b)^2$ . Suppetunt alii adhuc solvendi modi; sed de his fatis.

T A B.  
XXXIV.  
N<sup>o</sup>. CXI.  
Fig. 2.

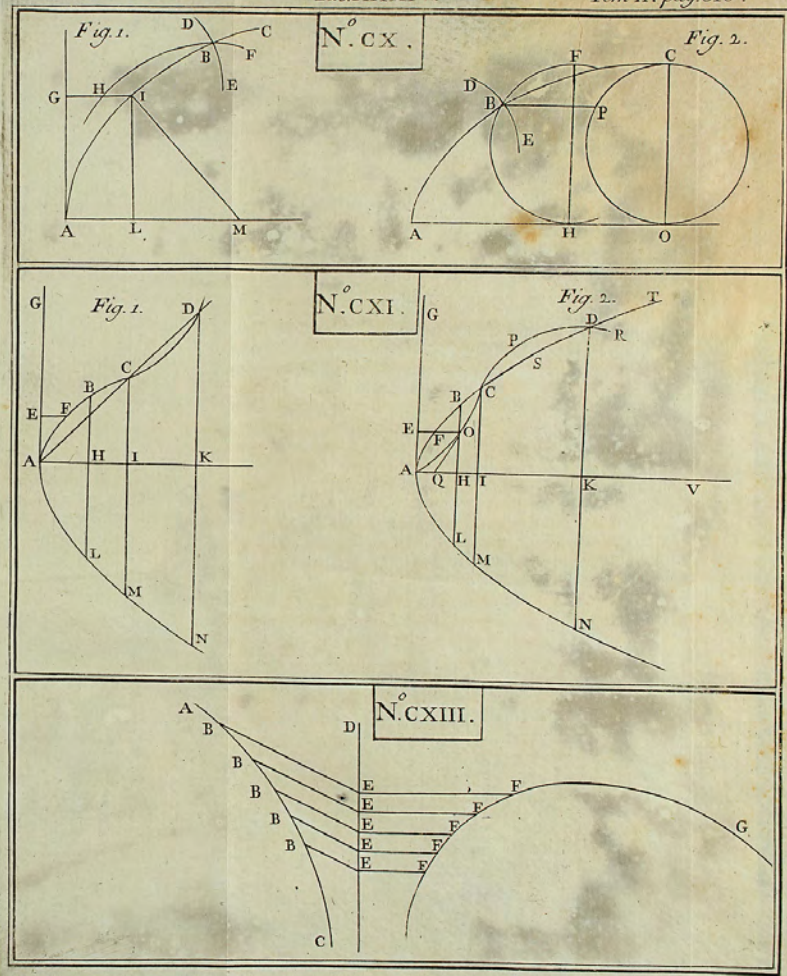
§ 16. Quandoquidem pro recta ACD assumere licet curvam quamlibet: possumus vicissim curvam ABCSDT supponere tanquam datam, & querere priorem, ita ut construendo ALMN non tantum indefinite sit inquadabilis & habeat partes quadrabiles numero datas, sed cujus insuper indefinita quadratura dependeat a quadratura curvæ propositæ, quod sic demonstratur. Sit curva propostæ quæcunque AFBSDT, cujus axes conjugati ad se invicem normales AV, AG; per verticem A & puncta quotcunque C, D, &c. in illa ad libitum assumta, describatur curva qualiscunque algebraica, exempli gratia ex genere Parabolæ AOCPCR, id quod fieri potest per lemma *Newtonianum*, Vid. *Princip. Philosoph. Nat.* p. 446. Edit. Sec. ejusque *Methodium*, quam vocat *Differentialiæ*, Prop. 3. & 4. Per quodvis hujus curvæ punctum O ductis & productis, si opus, applicatis HO, EO, quæ propostam fecent in B & F, ductaque tangente OQ, accipiatur quarta proportionalis ad HQ, HO, & EF, quæ vocetur L, constituatur denique applicata HL, æqualis HB + L: hoc si fiat pro singulis punctis O, orietur nova curva ALMN, cujus area qualibet ALH = AFBH + AFE = mixtilineo BFEAH, ac proin dependebit a quadratura curvæ propositæ ABCSDT; sed simul etiam habebit partes numero datas absolute quadrabiles; nam cadente puncto O in C, vel in D, &c. mixtilineum illud mutabitur in rectangulum AI × IC, vel in rectang. AK × KD &c. Area vero ALH fit area AMI, vel ANK, &c. quæ singulæ per consequens admittunt quadraturam absolutam: ut & zone inter singulas, qualis est MIKN, quæ etiam sunt quadrabiles. Q. E. D.

JOHAN.



ERMIN. &c.  
 licatæ expri-  
 n. Fiat exem-  
 HL = BH  
 parabola super  
 parabola super  
 parabola cur-  
 t sunt radices  
 $-1 + cz^{m-2}$   
 arcus quadra-  
 i z, in x per  
 $+ cz^{m-2}$   
 d de his satis.  
 e curvam quam-  
 tanquam datam,  
 tantum indefini-  
 datas, sed cujus  
 curvæ propositæ,  
 AFSDT, cu-  
 per verticem A  
 nta, describatur  
 re Parabolæ  
 num, Vid. Prin-  
 um, quam vocat  
 unctum O ductis  
 solitam fecent in  
 rtionalis ad HQ,  
 cata HL, æqua-  
 etur nova curva  
 AFE = mix-  
 curvæ propositæ  
 tas absolute qua-  
 mixtilineum illud  
 AK x KD &c.  
 singulæ per con-  
 inter singulas,  
 E. D.

JOHAN-







Faint, illegible text in a historical script, likely Latin or German, covering the right page of the left-hand spread. The text is mostly obscured by fading and staining.

JOHAN  
DISSE  
  
M E  
LUC  
PUBLICO

Ad Di  
Ea



Nº. CXII.  
JOHANNIS BERNOULLI  
DISSERTATIO PHYSICA  
D E  
M E R C U R I O  
LUCENTE IN VACUO  
PUBLICO ERUDITORUM EXAMINI  
SUBMISSA

*Ad Diem 24 Martii CIOIOCCXIX.*

*Edita primùm BASILÆ, 1719.*

高  
書  
書



PRÆFATIO AUCTORIS  
AD LECTOREM.



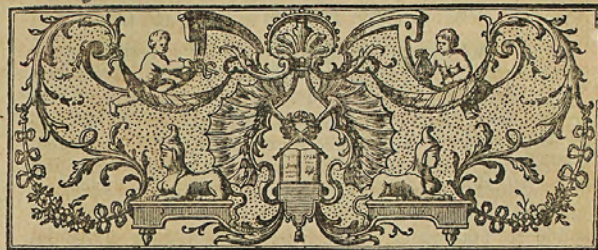
*N* Tibi, B. L. descriptionem Phosphori Mercurialis, inveni illius mirabilis, quod ineunte hoc Seculo, que eius est felicitas, primo lucem aspexit. Quælia habuerit fata ex illo tempore, edistes ex hac Dissertatione: Suffecerit si in antecessum hic dixero, eam tandem sortitam fuisse fortunam, ut Regum, Principum, Virorumque doctorum & celebrium applausum meruerit,

habuerit. Cum primum in publicum prodisset Phosphorus iste recens natus, non defuit quidem statim ingens contradicentium nubes, per quam fuisset extinctus, nisi ipsa prius fuisset dissipata per illius claritatem. Omnes vero, qui se ei jamjam invalescenti opposuere, non eodem spiritu agebantur. Quidam qui secundum præscriptas meas regulas, Phosphorum parare non poterant, atque vires suas iteratis vicibus experiundo identidem in cassum desudabant, non veriti sunt, regulas ipsas tanquam fallaces, ac proin Phosphori inventum, tanquam non-ens, aut saltem incertum quid proclamare. Hos autem non diu post ad silentium redactos vidimus per alios, qui rem felicioribus auspiciis aggressi publice demonstratum dederunt, infidum conatum succ-

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. S s cessum,

cessum, non regulis, sed operantium incuria, si non imperitia, imputandum esse. Quidam etiam, qui curiam suppellectilem habentes nihil unquam proferunt, quod aiatem ferre possit, agere patiuntur, ut quid melioris commatis prodeat ex officina aliorum. Quare non mirum, si Phosphorus Mercurialis a morsibus illorum intactus non abierit. Ast quid inde mali? Sane nihil aliud quam quod ringente invidia clarius postea entuerit; Posteaquam enim primo innotuisset Gallis & Batavis, ac mox eum secunda fama detulisset ad Germanos, Italos, & Anglos; apud singulas has nationes non tantum complures invenit fautores, sed & quorundam curiositatem ita excitavit, ut certatim quasi inventum excolere & nova novis augere inciperent, quod jam nonnullis peritioribus Mechanicis & Artificibus ansam dedit fabricandi apta machinamenta, quibus Phosphorus Mercuriales variis sub formis construerent; quos nunc passim venum exponunt. Multa quoque hinc inde scripta comparuere, quorum Auctores novitatem inventi condignis laudibus unanimi quidem consensu extolunt, sed in causa reddenda singularis nostri luminis, variorumque, que illud comitantur, Phenomenorum, plerumque a se invicem discrepant. Nonnulli ex illis videntur non satis percepisse vim & elegantiam systematis, quod adornaveram in Phosphori mei explicationem, quia nuda & simplici methode expositum forsitan non debitam eorum, quam merebatur, attentionem excitabat. Quocirca non inanem operam me sumpturum existimavi, si mentem meam hic plenius explicare susciperem, atque omnia qua huc faciunt, collecta ex meis partim scriptis editis, partim literis privatis, in ordinem digesta susius pertractarem. Unde facile intelligis, multa Tibi hic occurrura, que alibi frustra quaesiveris. Rem ordiar ab ovo, premissurus nempe brevem narrationem Historicam de natalibus & fatibus inventi nostri. Eam excipiet totius systematis expositio & hinc deducte Phenomenorum explicationes. Deinde docebuntur varii modi & regula parandi Barometra lucida atque Phosphoros Mercuriales portatiles perpetuos. Tandem ad quorundam objectiones respondebitur, interferentur quoque vindicta contra cavillos. Denique nonnulli usus indicabuntur, ex Phosphori istius inventione derivati. Hec sunt, qua Te scire volui, si quem fructum ex tenui mea opella percipies, bene est; sin aliter, quod novisti rectius, moneo ut impertias.

D E



D E  
MERCURIO LUCENTE  
IN VACUO.

CAPUT PRIMUM.

*Exponitur occasio inventi desumpta ex fortuita observatione luminis in barometro Picardiano. Narratur origo & perfectio Phosphori Mercurialis.*

§. I.



agitatus lucere possit.

Nimus non est explicare naturam & omnes admirandas proprietates hydrargyri seu argenti vivi, notissimi illius liquoris metallici, quem vulgo Mercurium nuncupant Chymici. Hos enim consulat, cui volupe est earum notitiam sibi comparare. Mihi suffecerit, eam duntaxat mercurii qualitatem considerare, qua fit, ut in loco aëre vacuo

S s 2

§. 2.



§. 2. Rara ista nostri liquoris virtus primum casu fortuito observata fuit a PICARDO, Mathematico Gallo. Acad. Reg. Scient. sodali; sed ita observata, ut crederetur lumen visum in Barometro, fuisse Phænomenon peculiare, non cuius Mercurio competens, ut mox uberius ex ipsa ejus historia patebit. Quare cum inter innumera Barometra, de quibus, statim post observationem *Picardianam*, periculum fumebatur, vix unum alterumve repertum fuerit, quod in tenebris luceret; procul dubio res fuit considerata tanquam singularis & in observationum numerum simpliciter referenda.

§. 3. Jacuit itaque neglecta per quinque fere lustra, nec ullus, prohi pudor! inter ipsos rerum physicarum curiosos extitit, qui insoliti & inauditi antea Phænomeni causam investigare & particularis inventi successum universalem reddere auderet. Supinam istam negligentiam tanto magis mirari subit, quod tum temporis floruerint sagacissimi Naturæ Ruspatores & magni illi Philosophiæ experimentalis Antesignani, BOYLEUS, GUERICKIUS, HUGENIUS, STURMIUS, PAPINUS, alii.

§. 4. Putabunt forte aliqui, Phænomeni *Picardiani* famam ad eorum aures non pervenisse, neque adeo illos cogitationes suas eo convertere potuisse, ut rei sibi ignotæ causam pervestigarent; sed vix ignorare potuerunt, siquidem observatio PICARDI, quæ contigerat anno septuagesimo quinto Seculi superioris, paulo post typis passim fuit evulgata. Nam præter libellum Gallicum editum anno 1686, de Barometris, Thermometris & Hygrometris, ubi fit mentio Phænomeni *Picardiani*, Diarium Parisinum dudum antea idem quoque recenset, anno nimirum 1676, Mense Majo, hoc est anno immediate sequente post ipsam Phænomeni observationem; Id quod egregie animadvertit Cl. LIEBKNECHT in sua Dissertatione de Noctiluca Mercuriali, unde summo jure colligit, quin rei novitas ad notitiam BOYLEI cæterorumve ipsi æqualium pervenerit. Cur vero ex illo tempore tam altum silentium servaverint, ut ne <sup>vix</sup> quidem in eorum scriptis postea editis de hac materia deprehendi queat, in eadem opinione sum cum

Viro

Viro Clarissimo, illis scilicet aquam hæsisse, nec venisse in mentem unde sufficientem redderent rationem mirabilis spectaculi, nedum exhiberent methodum generalem illud in quolibet Barometro producendi. Quid enim? si vel tantillum BOYLEUS perspexisset veram istius luminis causam, an non magna, ut solebat, pompa ebuccinasset admirandæ novitatis explicationem in binis libellis, quos quinto demum & sexto post anno edidit de Noctiluca, Aërea & Glaciali, ubi tam egregiam habuisset occasionem proferendi sententiam suam de argumento novo, cum materia, quam pertractabat, habente affinitatem non exiguan. Sed Vir iste perspicacissimus videtur maluisse filere dissimulando facti cognitionem, quam aliquid inepti in ejus causam allegare, quod minime convenisset cum acri, quo pollebat, ingenio; qua in re egit prudenter & pro more suo laudabili, qui is fuit, ut nihil unquam in vulgus protruderet, quod acumen ingenii non saperet.

§. 5. In fatiis itaque fuit, ut abdita maneret causa rarissimi nostri Phænomeni ad finem usque Seculi superioris, quo nimirum tempore ego, perlecta ejus historia in præfato libello Gallico, non tantum, acri meditatione, veram detexi causam, pluribus postea experimentis comprobata; sed & modum adveni omnia Barometra parandi lucida, quorum antea pauca quædam fortuito & rarissimo casu lucere conspiciebantur. Ut autem ordine telam nostram pertexamus, lubet, quæ huc faciunt verba Auctoris anonymi excerpte; Ea autem in latinum versa ita sonant: *Melius absolvi non potest brevis ista Dissertatio de Barometris*, (inquit Auctor Anonymus sub finem partis primæ) *quam commemorando Phænomenon extraordinarium, quod anno 1675, contigit in barometro PICARDI Acad. Reg. Scient. Socii. Habebat ille a pluribus annis in Observatorio Parisensi inter alias suas machinas aliquod Barometrum simplex, seu tubum vitreum ab una parte clausum, recurvum, atque quo descripsimus modo repletum argento vivo. Cum transportaret hoc Barometrum ab uno loco in alterum, nocte obscurissima observavit, quod ex mercurio commoto quadam fulgura per vices erumpebant, qualia emicare solent ex*

S s 3

Phosphoro

Phosphoro Anglicano, quando aëri exponitur. Iterata observatione in simili obscuritate, animadvertitis totam illam partem tubi, quæ vulgo vacua dicitur, quæque argento vivo supereminet, collustrari aliquo lumine interrupto, atque alternatim apparente & disparente, quod ad singulas mercurii reciprocatōnes quasi fulgura emittebat; hoc vero in qualibet libratione contingebat tunc tantum cum vacuum extenderetur, hoc est in solo descensu argenti vivi. Periculo factō in aliis pluribus Barometris; ut constaret, num idem quoque in illis accideret, non nisi unicum fuit repertum, quod quodam modo paria cum Picardiano faceret, incertum quam ob causam; an forte quod reliqua ab aëre non satis repurgata, an vero quod ipse mercurius non mundus, aut demum quod non a longo sat tempore Barometra illa fuerint ad usum parata. Irvitantur curiosi ad inventi hujus perfectionem. Hæc Auctor Anonymus.

§. 6. Consimilem in modum narratur historia in loco supra citato Diarii Parisini an. 1687. DU HAMEL ejusdem meminit, sed paucis verbis in Hist. Acad. Reg. Scient. Edit. primæ, quæ prodit 1698, pag. 312, & in eadem tribus post annis recusa pag. 337, hoc quoque, quod singulare est, refert; Lumen in barometro PICARDI, postquam per multos retro annos micare desisset, iterum sui copiam fecisse anno 1694. Addit denique eundem effectum se prodere in Barometro CASSINI Astronomi incomparabilis, ante paucos annos extincti, sed in barometro Picardiano lucem vegetiorem esse quam in Cassiniano. Celebrerrimus FONTENELLIUS, Acad. Reg. a Secretis, duo præterea memorat Barometra luminosa P. SEBASTIANI & LAHIRII, quorum illud (ut intellexi ex quadam epistola Celeberr. VARIGNONII) proprie pertinebat ad Ducem VILLAREGIUM ex donatione Illustr. PORTLANDI Legati Britannici.

Mém. de  
l'Acad. R.  
des Sciences  
1700.  
pag. 8.  
Edit. Paris.

CAPUT

## CAPUT II.

Variorum Phanomenorum & Observationum circa lumen  
Barometri factarum Recensio.

§. 1. QUOD si rite intelligere velit Lector, quibus vestigiis insistendo cruerim veram causam luminis Barometrici, & exinde condiderim systema quoddam pro universali apparitione ejusmodi luminis in hydrargyro existente in quovis loco vacuo, quod postea felicissime applicui ad conficiendos Phosphoros perpetuos in lagenulis vitreis inclusos: necesse duco, ut exponam principaliora saltem phænomena & circumstantias nonnullas hinc inde observatas, quæ imprimis viam aperuerunt, quam investigatione mea secutus sum. 1. Præcipuum vero, & ad quod præ reliquis attendendum, in hoc consistit, quod lumen hydrargyri in tubo barometrico agitati non est continuum, sed eam legem constanter sequitur, ut tunc tantum se prodatur, quando deorsum rapitur mercurius, ampliata nimirum superiori parte tubi vacua; statim vero ac iterum ascendere incipit, protinus evanescat, & nullum sui vestigium relinquat, donec subsequenti descensu inchoato lumen de novo appareat, postea in altero descensu dispareat, mox iterum redeat abeatque vicissim, idque toties, quoties oscillationes suas repetit mercurius. 2. Lumen conspicitur in summitate columnæ mercurialis, cui, velut affixum, simul cum descendente mercurio descendit. Quandoque tamen tam vividum est, ut inde pars tubi vacua, tanquam a fulgure collustratur. 3. Quo fortius & rapidius agitur mercurius intra tubum, eo clarius & vividius erumpit lumen, ac tanto quidem diutius durat singulis descensibus, quanto longius spatium percurrunt reciprocatōnes mercurii. Hæc vero intelligenda sunt, de illis tantum Barometris, quæ rite ad hunc effectum sunt parata, sive casu fortuito, sive per artem infra docendam. Nam 4. pleraque vulgari modo constructa Barometra aut plane non lucent, aut

non

non nisi violentissimis succussibus lucula quædam perdebilis elici potest, quæ per momentum tantum durat; scilicet cum mercurius valde præceps ruens inum attingit, interdum momentanea illa lucula animadvertitur. 5. Si bullula aërea inter agitandum ex imo sursum ascendit per columnam mercurialem in tubo Torricelliano oscillantem, ut quandoque fieri solet hydrargyro non satis ab aëre repurgato; aut si studio admittatur pauxillum aëris, extracto tubo extra mercurium inferius stagnantem & mox iterum immerso, ut aër ingressus sub forma bullulæ ascendat; apparebit luminosa superficies illius bullulæ ascendentis, sed tantum superficies superior qua tangit imminentem sibi mercurium, & ita lumen præcedit bullulam emergentem, quod eo splendidius est, quo proprius ad summitatem columnæ accedit. 6. Quod si vero bullula aëris intronmissa postea aliquo usque sursum enixa, atque jam per sui rarefactionem expansa totam occupet tubi diametrum, adeoque in columna mercuriali divulsionem pariat (id quod in tubis gracilioribus facile contingit) hærebit aër intra partes divulsas & simul cum illis librabitur; quod dum fit, præbebunt se insignes corruscationes, quæ alternatim ita se habent: nempe in ascensibus fulgor superiorem, in descensibus inferiorem aëris interjecti superficiem comitatur. 7. Admissa similiter intra tubum Barometri vel unica guttula aquæ, ubi ad superiora columnæ mercurialis pervenerit, lucem mercurii usque adeo extinguit, ut ne quidem violentissimis succussionibus reproduci possit. 8. Eundem quoque effectum habet Spiritus vini licet rectificatissimus, ut & oleum quodecunque, imo quilibet liquor, sive sit inflammabilis, sive non. 9. Lumen in nonnullis Barometris ab initio factis exquisitum conspicitur, quod postea paulatim debilitatur & tandem tractu temporis evanescit omnino, atque extinguitur. 10. Idem argentum vivum, seu ex eadem massa desumptum, quod in uno tubo lucet, non item in quovis alio lucebit. 11. Quinimo unus idemque tubus id agit, ut unus idemque mercurius, diversis temporibus ex illo emissus & statim iterum immisus, modo luceat, modo non luceat, quodque mirabilis est unum idem.

idemque Barometrum sibi relictum, cui proin nulla, ut videtur, supervenit mutatio, quandoque luminosum est, quandoque non luminosum; cuius exemplum habemus in ipso Barometro PICARDI, referente DU HAMEL. 12. Idem mercurius, qui lucet in tubo ampliori, ægre lucet in nimis gracili. 13. Tubi inæquales, vel non uniformiter ampli, aptiores sunt ad Barometra phosphorescentia conficienda, quam perfecte cylindrici.

§. 2. Et hæc quidem sunt ante plus quam viginti annos a me observata, ex quibus systema meum, hic fusius explicandum, condidi, omnibus & singulis hic enarratis Phenomenis mire satisfaciens. Innumera alia observari solita, sed quæ ad scopum nostrum non faciunt, non minus tamen commode, quam illa, explicari possunt, recensere superfedeo. Ad id nunc potius me accingo, ut prædictorum veram reddam rationem, præmissa explicatione causæ mirabilis hujus luminis; traditurus postea methodum certam conficiendi Barometra lucida quotquot libuerit, tandem & artem mihi inventam parandi novum genus Phosphori portatilis & perpetui, qui vel hoc nomine omnibus aliis, sive a natura, sive ab arte productis, utpote temporariis, jure merito palmam præripit.

## CAPUT III.

*Digressio ad generalem luminis naturam & causam considerandam.*

§. 1. **L**uminis mercurialis causam & generationem intelligere volenti necesse est attendere ad naturam & productionem luminis in genere sumti; quam ob rem de eo sequentia tradimus, statuimusque cum CARTESIO, HUGENIO, ac plerisque aliis sanioribus Philosophis; præter ætherem, cuius particulæ per omnium corporum sensibilibium, nec tamen nimium densorum poros promptissime penetrant; dari & aliam materiam multo subtiliorem, in indefinitum divisam, atque motu concitatissimo agitatum. Talem autem materiam in re  
Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. T t rum



rum natura existere nemo dubitabit, si varios naturæ effectus quos quotidie experimur considerare volet: Pulveris pyrii accensæ subitanea & violenta displotio; prompta restitutio elaterii in chalybe, aliorumque corporum solidorum; ipsius quoque aëris in sclopeto pneumatico incredibilis efficacia in glande plumbea perniciosissime expellenda; motus repentinus musculorum animalium, haud dubie ab effervescencia quadam productus, cuius tanta est energia, ut nemo facile crediderit, nisi eam ex legibus mechanices supputare noverit: Hæc & alia, quorum meminit HUGENIUS in limatissima sua Diatribæ *De causa gravitatis*, testantur utique adesse quandam materiam tenuissimam & celerrime commotam, ut scilicet poros & meatus quantumvis angustos libere pervadens præsto sit statim & ubique, ac data occasione per violentum suum impulsum exerat stupendos istiusmodi effectus.

§. 2. Profecto & ipsius gravitatis proprietas satis superque probat quod oporteat immensam esse illius materiæ agitationem, utpote a qua fit, ut corpora cadentia (abstrahendo a resistentia aëris vel medii ambientis) per accelerationem tantum non quemvis velocitatis gradum acquirant, idque ad sensum accurate satis secundum accelerationis legem a GALILÆO stabilitam, qua fit ut celeritates acquisitæ crescant in subduplicata ratione altitudinum a gravi cadente emensarum, adeoque tandem superent quamcunque imaginabilem velocitatem. Quod sane fieri non posset, nisi & ipsa nostra materia, a cuius perpetua agitatione spherica, & inde orto nisu ab ipsius centro recedendi, per consequens corpora, quæ motui isti obsequi non possunt, versus centrum detrudendi, unde corporum gravitas dependet, nisi, inquam, & ipsa hæc materia gravifica jam haberet velocitatem multo majorem. Eam autem prorsus enormem esse, ulterius liquet ex calculo *Hugeniæno*, per quem istam velocitatem acute supputavit, deprehenditque tantam esse prope Terræ superficiem, ut corpus aliquod simili velocitate præditum percurreret Terræ ambitum spatio horæ unius & 24½ minutorum, quæ velocitas quam proxime 17 vicibus superat ve-

*Discours  
de la cause  
de la pesanteur.  
pag. 143.*

locitatem æquatoris terrestris motu diurno circumrotati: quare si terra 17<sup>es</sup> velocius circumrotaretur quam re ipsa fit, tunc de-  
*Discours  
de la cause  
de la pesanteur.  
pag. 168.*  
mum punctum aliquod sub æquatore situm habiturum esse rapiditatem eam, qua cum agitur materia nostra fluidissima Tellurem ambiens; hæc vero agitatio ex HUGENII calculo adhuc 49<sup>ies</sup> concitator est in ipso Sole quem prope Terram.

§. 3. Ex hac igitur, omnem imaginationem superante velocitate credimus lumen generari, æque ac alios naturæ effectus vehementes & subitaneos, de quibus supra. Nimirum rem ita concipimus. Quod si materiæ istius agitatisimæ (quam deinceps cum CARTESIO materiam primi elementi, sicuti ætherem materiam secundi elementi vel globulos cœlestes vocitabimus; non quod placitis illius, circa productionem horum elementorum adstipulari velimus, sed quia commoda videntur nomina, quibus cogitationes nostras exprimere valeamus,) Quod si igitur materiæ primi elementi portio quædam sensibilis in aliquo loco sit collecta, suo, quem habet, agitationis impetu quaquaversum ferit & percutit circumstantem materiam & imprimis globulos cœlestes in locum illum irruere paratos; qui igitur repercussi, reperiunt & ipsi alios proxime adstantes, hincque adhuc alios sibi contiguos, & ita deinceps, communicando scilicet, vel potius transmittendo, impetum de globulis in globulos, a quolibet materiæ agitatae puncto circumcirca in omnes partes, eum fere in modum quo videmus undas circulares in aqua aliove fluido excitari ab injecto lapillo, easque ita propagari ut altera alteram jugiter protrudat; cum vero globuli ætheri perfectò gaudeant elaterio, (quod cum HUGENIO libenter supponimus) adeoque ab impetu compressi promptissime se restituant, fit illa transmissio motus ab uno ad alterum, per longissimam globulorum seriem, quasi in instanti; experientia quoque id confirmante, qua videmus pilis eburneis, vel vitreis, aequalibus magno quantumvis numero, una post alteram contiguam in recta linea horizontali positis, si alia similis pila in primam impingat, eodem momento ultimam in se recipere motum primæ impressum, reliquis omnibus a quibus separatur,



quiescere perseverantibus; unde manifeste colligitur motum a prima ad ultimam pervenire non potuisse, nisi per successivam compressionem & restitutionem singularum intermediarum: quanta hoc fieri debeat promptitudine patet, ex imperceptibili tempusculo, quod intercedit inter ictum pilæ primæ, & motum ab illo in ultima excitatum.

§. 4. Atque in his paucis consistere arbitramur generationem & propagationem luminis, reliqua ad proprietates ejus spectantia, quæ ad institutum nostrum nihil faciunt, legi possunt apud HUGENIUM in ipsius elegantissima Dissertatione *De Lumine* Gallice conscripta, ubi quicquid ad hanc materiam pertinet ingeniose explicat per undulationes in æthere factas, indeque feliciter deducit notissima Catoptrica & Dioptrica principia, seu reflexionis & refractionis naturam; quamvis eam genuino magis modo a me demonstratam putem ex fundamentis staticis & maximo possibili descensu centri gravitatis ponderum in se mutuo agentium.\*

*Ad. Lspfl.*  
1701. p.  
19. seqq.

§. 5. Hoc porro monendum, quod propagatio luminis undulantis per interjectas series globulorum æthereorum peragatur enormi adeo pernitate, ut nullam fidem inveniret, nisi id demonstrari posset ex singulari observatione facta ab Illustriss. ROEMERO, Astronomo Dano, circa apparentes emersiones satellitum Jovis ex ipsius umbra, quæ vel retardantur, vel anticipantur, hoc est, veras emersiones vel sequuntur, vel præcedunt, prout Terra Jovi propinquior est, vel ab eodem remotior. Hinc enim probat HUGENIUS lumen impendere 22 minuta horaria ad peragranda diametrum orbitæ magnæ, quam scilicet Terra motu annuo circa Solem describit, quæque continet 24 millia diametrorum globi terraquei, adeo ut lumen singulis minutis plusquam mille diametros terrestres & singulis secundis, seu unoquoque arteriæ pulsû, plusquam 16 ejusmodi diametrorum spatium trajiciat. Ex his fluit haud difficili calculo celeritatem luminis plusquam sexcenties millies majorem esse celeritatem soni, qui simili tempusculo unius secundi, vel arteriæ pulsus, permeat longitudinem 180 orgyiarum, vel 1080 pedum.

\* N<sup>o</sup>. L X V. pag. 369. Tom. I.

*Traité de  
la lumière*  
p. 8.

§. 6. Non multo difficiliore calculo indagari potest ratio inter celeritatem agitationis materiæ primi elementi, & celeritatem propagationis per circumfusus globulos secundi elementi: Supra §. 2. capitis hujus, vidimus agitationem illam prope nostram Terram habere velocitatem, qua cum corpus aliquod circuitum Terræ absolveret intra horam unam & 24 $\frac{1}{2}$  minuta, id est intra 84 $\frac{1}{2}$  minuta; propagatio vero, ut modo ex HUGENIO retulimus, ejus est velocitatis, ut uno minuto intervallum plusquam mille diametrorum terrestrium, adeoque 84 $\frac{1}{2}$  minutis spatium 84500 simillium diametrorum & amplius conficiat. Tot autem diametri exæquant circiter 26886 circuitus. Quo tempore igitur corpus aliquod cum agitationis velocitate percurreret semel Terræ ambitum, eodem tempore cum propagationis velocitate eundem ambitum circumvolaret 26886 vicibus. Quod attinet ad agitationem materiæ solaris, quæ 49<sup>ies</sup> ostensa est major, quam quæ est prope Terram, dividendus est numerus 26886 per 49, quotiens 549, indicat quot vicibus velocitas propagationis luminis solaris exsuperet velocitatem agitationis, quæ lumen illud generat.

§. 7. Cæterum non est hujus loci, ut, quomodo sensatio luminis peragatur, multis explicemus. Communis est sententia veriore Philosophiam sectantium, visionem excitari ab impressione ejusdem illius materiæ æthereæ, quæ sub forma radiorum oculi pupillam subintrans, ac depingens (ut Optici docent) in tunica retina imaginem objectorum luminosorum, agit in nervulos tunicam istam constituentes. Eam autem impressionem ita modificatam, per nervum opticum censent ulterius deferri a spiribus animalibus ad commune cerebri sensorium: Ad cujus demum commotionem rite se habent em in anima visionis idea nascatur.

## CAPUT IV.

*Ætiologia Pars prior, seu Explicatio causarum physicarum  
luminis barometrici, & primariorum, quæ circa il-  
lud observata fuere, Phanomenorum.*

§. 1. **A**D propositum reversurus, communicabo nunc mo-  
dum quem inveni explicandi causam luminis in Ba-  
rometro ex generalibus luminis principiis in Cap. I. præced.  
expositis. In hunc finem ejus vestigia & filum sequar, quo  
usus in Scripto meo priori Acad. Reg. Scient. Gall. exhibitò,  
quod insigni applausu ab ea exceptum & postea Commentariis  
ipsius annuatim edi solitis insertum fuit. Addam vero & inter-  
miscibo hinc inde quædam privatim a me suppeditata, quæ,  
etsi publice non extant, conferent tamen ad majorem rei in-  
telligentiam.

*Memoires  
de l'Acad.  
Roy. des  
Scienc. de  
Paris. 1700.*

§. 2. Materia primi elementi, ob summam suam fluiditatem  
& subtilitatem, omnium corporum poros, ut jam dictum fa-  
cile penetrat, ac quælibet interstitia, etiam ea, quæ inter glo-  
bulos æthereos relinquuntur, replet. Ea enim se habet instar  
scobis, vel pollinis tenuissimi, qui ad omnes cavitates minimas,  
cujuscunque sint figuræ, occupandas protinus se accommodat.  
Quamdiu autem materia ista dispersa latet in interstitiis mini-  
mis, ac velut oppressa a globulis aliisve moleculis se contactu  
mutuo suffulcentibus, vim suam ab agitatione supra descrip-  
tam dependentem, utpote nimis divisam, non potest cum effectu  
exercere ad propellendas series globulorum cœlestium seu æthe-  
reorum; adeoque hæcenus nullum excitabitur lumen, sed tunc  
demum excitabitur, quando in locum aliquem amplio-rem, un-  
de omnis alia materia crassior expellitur, ex interstitiis vicinis  
affatim prosiliens constitit, & simul collectis viribus in globulos  
circumstantes, & irruptionem tentantes, impetuose satis fertur,  
ut hinc in materia secundi elementi orientur undæ istæ lumini-  
feræ,

feræ, per quas lumen in medio excitatum ad circumferentiam  
propagatur magis minusve distantem, pro quantitate & impetu  
confluentis materiæ fluidissimæ.

§. 3. Jam vero argentum vivum constat haud dubie particu-  
lis teretibus quidem & lubricis (secus enim tam fluidum non  
esset) sed simul usque adeo condensatis, quod ejus ponderosi-  
tas docet, ut inter ipsas relinquuntur meatus & anguli angus-  
tissimi, qui proin non nisi a materia primi elementi repleti  
queant. Ne quis autem putet ideam hanc de hydrargiri natu-  
ra hoc tantum tempore esse confictam, ut ad negotium nostrum  
accommodata quadraret utcunque explicationi luminis mercuris;  
moneri convenit, **CARTESIUM** eandem omnino fovisse opinio-  
nem tanquam ex fundamentis suæ philosophiæ legitime deductam,  
tamen tum temporis de isto lumine ne quidem somniaverit;  
impense utique sibi suæque philosophiæ (quam tamen in om-  
nibus minime amplectimur) gratulaturus, si quis ipsum præmo-  
nuisset, fore ut aliquando, insigni adeo naturæ phænomeno, af-  
ferti sui veritatem experientia doceret.

*Princip.  
Philos.  
part. IV.  
art. 58.*

§. 4. Hoc præmissis de natura mercurii, & de constitutione  
ejus pororum arctissimorum, non nisi materiam primi elementi  
continentium, cum paucis fortasse minoribus globulis secundi  
elementis, qui poros grandiusculos, si qui hinc inde reperiun-  
tur, subintrant; perpendamus porro quid fieri debeat, quan-  
do mercurius in tubo barometrico per succussiones acquirit mo-  
tum reciprocum, ut nunc ascendat, nunc descendat. Concipi-  
mus utique clare quod, descendente hydrargyro, pars tubi supe-  
rior, quæ vulgo vacua dicitur, nempe vacua ab aëre commu-  
ni, debeat ampliari, adeoque materia quædam surrogari in  
spatium a mercurio delabente relicto. Sed duplex advolat ma-  
teria spatium istud occupatura; scilicet per poros tubi & per  
poros mercurii: illa quæ transit per vitri poros, est sane ipse  
æther, seu materia secundi elementi; sed altera, quæ ex visce-  
ribus mercurii emergit, erit utique materia primi elementi: ra-  
tio hujus est manifesta, nam licet meatus vitri satis sint angusti  
ut arceant aërem, satis tamen sunt patuli ut transmittant æthe-  
rem,

rem, quod tum ex vitri minori ponderositate & hinc concludenda ejus raritate, tum ex infinitis experimentis patet, quorum hoc unicum instar omnium sit, quod radiis lucis, qui, ut vidimus, ex globulis secundi elementi constant, liberrimum transitum concedunt; ipse vero mercurius aliam materiam, quam quæ continetur in porulis ejus arctissimis, suppeditare nequit; suppeditabit igitur tantum materiam primi elementi, quam inter descendendum emittit sursum. En itaque vitrum & argentum vivum, quæ se habent instar duorum cribrorum, ut per illud fecernantur globuli cœlestes, per hoc materia tantum primi elementi; quæ in summitate columnæ mercurialis confluens & jam libera a vinculis & carceribus, quibus inerat, id agit, quod supra diximus fieri in generatione luminis; scilicet omnes ejus particule agitationem illam suam rapidissimam sine impedimento exercent, & globulos cœlestes per poros vitri irruentes junctis viribus valide repellunt. Ex hoc conflictu lumen excitatur, atque a globulis cœlestibus in se repercussis per consuetas undulationes protinus inde factas propagatur, & ita visibile redditur.

§. 5. Pauca hæc, pro causa & genesi nostri luminis prolata, ideo magis arridebunt, non tantum quod habeant desideratam & simplicitatem & claritatem, sed etiam quod primaria phenomena per illa jam possint explicari & quidem intelligibili & plausibili modo. Hinc enim liquet 1. cur in descensu mercurii hoc lumen appareat, in ascensu autem rursus dispareat; nempe materia luminifica tunc tantum ex mercurio scaturire potest, cum pars tubi vacua ampliatur, id quod contingit decedente mercurio; tantum autem abest aliquid illius materiae ex eodem ascendente emanare posse, ut potius resorbeat pars quædam ejus, quod in præcedenti descensu egressum fuerat, reliquum vero una cum globulis æthereis per poros tubi in externum aërem expellatur; quamobrem, quolibet descensu finito, materia luminis collecta in summitate columnæ mercurialis a multitudine globulorum affatim irrupentium opprimitur & dissipatur, ipsum, per consequens, lumen momento extingui necesse est; quod extinctum manebit toto ascensu durante, donec cum redeunte descensu

descensu novum redeat subsidium ex liquidi metalli cellulis ad novam accendendam flammulam, quæ pariter diutius durare non potest, quam durat ipse descensus, quamdiu nempe a materia primi elementi continuo emergente sustentatur; quæ quippe deficiente lux ipsa oppido evanescit.

§. 6. Manifestum est, 2<sup>o</sup>. cur quasi affixum lumen nostrum summitati columnæ mercurialis adhareat; ita ut ejus columnæ suprema tantum superficies singulis descensibus coruscare observetur, & præterea nihil aliud. Fit enim in hoc tantum loco confluxus materiae primi elementi, quæ ad occursum globulorum æthereorum lumen producit; copia autem istius materiae tanta non est, ut notabilem tubi partem occupet, quare ad longum intervallum supra mercurii superficiem non potest lumen diffundi.

§. 7. Porro, me non monente; quilibet videt 3<sup>o</sup>. lumen mercuriale eo intensius & vividius enitescere debere, quo fortiores & longiores fiant excursiones mercurii supra & infra suam consuetam altitudinem. Etenim haud dubie in majori copia & promptius prorumpit materia primi elementi, si magis præceps & ex majori altitudine deorsum rapitur, quam si lente tantum & per spatium breve descendit: ampliatio nimirum subitanea & aucta partis tubi vacuæ requirit etiam substitutionem promptam & copiosam materiae tum secundi elementi per poros tubi superioris, tum primi elementi ex intersitiis mercurialibus affluentis.

## CAPUT V.

*Ætiologie pars altera, ob oculos sistens originem variorum impedimentorum, quibus fit, ut lumen Barometri vel omnino tollatur, vel valde imminuatur.*

§. 1. **R**estat alterum, quod explicatu difficillimum videtur, qui nempe fiat, quod luminis nostri apparitio ratissime observetur in Barometris vulgaribus; cum tamen in fin-  
Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. V v gulis

gulis omnia adsint requisita ad generationem luminis. Ad hanc difficultatem tollendam, demonstrabimus in illis Barometris productionem luminis impediri a quibusdam impedimentis peregrinis, atque iis sublatis lucem e vestigio apparituram. Quod antequam præstemus, lubet paulo propius considerare quamnam esse possint illa impedimenta, quæ sunt varii generis.

§. 2. Et quidem, quod maximi est momenti in impediendo lumine dependet ab ipsa methodo, qua vulgo utuntur in Barometris implendis. Quod ut intelligatur, sequentia sunt annotanda circa argentum vivum. Experimur illud infici solo aëris tactu: Exponatur enim aëri libero copia quædam hydrargyri in vase amplo & aperto; elapsis aliquot diebus, inspicitur ejus superficies, quæ, cum initio esset nitida & polita adinstar speculi, observabitur nunc ea in parte, qua aërem contingit, turbida nonnihil, ac pellicula quadam tenuissima & vix sensibili obrecta; qua subtiliter remota ope pennæ, ut hydrargyro pristinus nitor & claritas redeat, post aliquot dies alia iterum pellicula superficiei inducta conspicietur, quæ, primo subtilissimæ telæ aranæ similis, postea paulatim ad sensibiliorem perveniet consistentiam.

§. 3. Pellicula ista beneficio microscopii examinata refert speciem argenti in folium tenuissimum (ut fieri solet ab artifice) malleo diducti. Materiam hujus pelliculæ credimus hoc pacto formari, quando aër externus, in perpetua agitatione existens, mercurii superficiem lambit, & ab eo separat quasdam particulas volubiliores ac secum aliquousque abducit, fit ut illæ particulæ jam aliis filamentis, quibus aër semper scætet, implexæ, & ideo agitationem aëris non satis prompte sequi valentes, recidunt in superficiem hydrargyri, præbeantque lanuginem ad contextendum illud regumentum subtilissimum. Probabile est omnis fere generis liquores aëri expositos simili modo contrahere suas pelliculas, magis minusve densas, pro natura & constitutione corpusculorum exhalantium, & mox iterum subsidentium.

§. 4. Quæ dicta sunt de generatione ejusmodi pelliculæ, indicant

dicant attendenti, hinc forte originem ducere unum ex maximis & frequentissimis impedimentis luminis in Barometris vulgaribus. Ex nostra mente res ita est concipienda: Quando parandum est Barometrum secundum viam ordinariam, sumitur ad id operis tubus vitreus ab una parte hermetice sigillatus, & ab altera apertus, per cujus orificium infunditur hydrargyrum, quod juxta latera tubi præcipiti casu guttatim delabitur, ita ut quælibet gutta, aërem penetrando, omnes quibus occurrit impuritates in aëre secum abripit, iisque se quasi involvit; quo fit ut, brevi hoc temporis spatio, quod impendit mercurius ad descendendum secundum longitudinem tubi, densius inde inficiatur ista languine, quam si per biduum triduumve aëri simpliciter exponeretur. Confirmatur hoc ex eo, quod si gutta argenti vivi purissimi cadat ex altitudine pedali vel sesquipedali in massam subjectam mercurii pariter purissimi & politissimi, observabitur plerumque in superficie tersa & polita, post guttæ delapsæ immersionem, labes vel macula quædam, magis minusve sensibilis, pro diversitate circumstantiarum; manifesto certe indicio guttam cadendo inquinatam fuisse ab aëris impuritatibus.

§. 5. Sic itaque guttæ mercuriales, in tubum infusæ, involutæ jam sunt involucris tenuissimis ex iniquatione aërea contractis: verum ex violento casu guttarum super se invicem, & pressione ipsius argenti vivi, involucra ista particularia haud ægre rumpuntur; unde partes mercurii in unum continuum coalescunt, ipsæ vero pelliculæ disruptæ, aliaque corpuscula heterogenea, quæ nec figura, nec motu intestino conveniunt cum particulis mercurialibus, eliminantur tanquam recrementa ex intima mercurii substantiâ, cogunturque sibi locum vindicare inter tubi superficiem concavam & columnæ mercurialis superficiem convexam. Tota proin columna ista vestita erit quodam velut indusio, sed qualibet sindone & tela bombycina longe subtiliori, quod commode potius cum epidermide tenuissima animalium comparaveris, utpote quæ cutem crassiorem terminat, sicut involucrem illud arctissime stringit mercurium.



§. 6. Quod si jam tubus argento vivo, ita ut dictum, impletus, obducto indice super ejus orificium, invertatur, & inversus, more solito, in vasculum aliud argentum vivum continens immittatur; mox remoto digito, descendet columna mercurialis ad eam altitudinem in tubo, quam tunc aëris atmospherici constitutio requirit ad æquilibrium servandum inter utriusque fluidi pressionem. Tubus ita instructus, sibi que postea relictus representabit Barometrum vulgare: interim ad hoc jam animum attendi velim, quod dum, subtracto digito a tubi orificio, mercurius subito delabitur, fieri non potest quin memorata cuticula, cui involvebatur, pluribus in locis dilaceretur, & dehiscat, ejusque fragmenta partim superioribus parietibus tubi adhareant, postea in columnam mercurialem relapsura; partim a parietibus inferioribus revulsa in mercurium intrent; sed cum sint leviora, statim ad summam pellantur & cum prioribus conjungantur. Observantur quandoque fragmenta illa, quæ post hydrargyri lapsum lateribus tubi aliquando agglutinata hærent, sub sensibili forma scoriarum alicujus, vel spumæ plumbi liquefacti, quandoque vero consistentiam habent vix visibilem. Utcunque autem comparata sint, haud difficile concipimus, quod suprema & horizontalis superficies columnæ vel cylindri hydrargyri cooperta erit tegumento aliquo ex fragmentorum illorum colluvie contexto, ac magis minusve crasso, pro quantitate recrementorum ex argento vivo separatorum.

§. 7. Tegumentum istud, ut ut sit crassius quam pellicula, quæ ante inversionem tubi cylindrum mercurialem circumambiebat, quippe quod ex conglomeratione totius fere illius pelliculæ formatum fuit; nihilominus plerumque tam tenue adhuc est, ut oculis vix distingui possit ab ipsa argenti vivi substantia. Non obstante vero illa tenuitate apparente, audemus asseverare sat magnam adhuc ei esse spissitudinem, ut vel omnino, vel maxima parte occludat exitum materiæ primi elementi ex mercurio emergere volenti, aut ut illam etsi nonnihil emergentem statim irretiat filamentis suis, & ita ejus agitationem, in qua luminis productio consistit, inhibeat vel infringat. Quare jam patet

patet cur Barometra, communi modo parata, plerumque nullum spargere possint lumen, & perraro accidat, ut non ita bene emerisio materiæ subtilis ab incumbente cuticula impediatur, quin saltem per succussus violentos, aliquid de ea materia repagula perrumpat, & ita debilis quædam lucula in conspectum veniat. Quemadmodum memini me observasse in aliquo Barometro, quod vulgari modo, sed summa tamen cura & diligentia, a me ipso paratum, non lucebat, si mediocriter tantum succuteretur, lucebat vero, quamvis modo fere imperceptibili, si fortiter libratus mercurius profunde descenderet.

§. 8. Ne quis autem miretur pelliculam, seu cuticulam illam, adeo subtilem impedire posse particulas materiæ primi elementi quo minus erumpant ex meatibus mercurii, aut saltem erumpant in sufficienti copia & debito cum impetu; attendat quæso ad id, quod quotidie observare licet; nimirum quod mercurius ipse, qui per corium vel alutam ovillam ab epidermide sua denudatam facillime transudat, non possit percolari per eandem alutam, quando ab ea nondum separata est epidermis, quamvis etiam magna vi comprimatur: quid ni ergo simile quid in nostro quoque negotio accidere possit?

§. 9. Aliud impedimentum invenit luminis mercurialis productio in ipsis mercurii visceribus; cum scilicet in eo solutæ sunt partes metallicæ, ex plumbo, stanno, marcasita, aliave hujusmodi materia, cujus miasmata facile nimis commiscuntur, ut notum est, cum ponderoso nostro liquore. An autem inquinatus sit impuritatibus istis metallicis, statim cognoscitur; nam præterquam quod mercurius plus minusve de fluiditate & agilitate sua amittat pro ratione quantitatis metalli alicujus admixti, etiam externe se produnt istæ impuritates: etenim talis mercurius, si commoveatur in aliquo vase clauso, non tantum pelliculam illam induit subtilissimam & fere imperceptibilem ab aëre contractam, ut ante exposuimus, sed ejus superficies oppido amittit omnem nitorem, & conspurcatur quodam quasi pulvere cænofo, qui brevi tempore abit in continuam membranam fatis spissam & visibilem; eaque remota, mox alia similis generatur ad



levissimam mercurii concussionem; cujus rei ratio manifesta est: cum enim particulae metallica simul cum argento vivo agitatae ad ipsius motum se non facile componant, utpote inertiores & minus agiles quam sunt ipsae particulae mercuriales; fit ut multae, illae praesertim quae motui agitativo minus obtemperant, foras eji- ciantur, ibique forment texturam illam pulverulentam superficiei mercuriali superinducendam. Quantum vero haec impedire pos- sit luminis generationem in tubis barometricis, per se mani- festius est quam ut multis explicem: si enim supra descripta pel- lícula tenuissima, ab aëris contractu genita, usque adeo potest pro- siliantem materiam primi elementi sufflaminare, ut ipsi pereat efficacia ad propellendos globulos secundi elementi, hoc est, ad lumen excitandum: nemo est qui dubitet hanc alteram membra- nam, ex crassioribus staminibus contextam, multo fortius materiam *luminificam* (sit venia dicto) retundere posse.

§. 10. Quod de impuritatibus metallicis cum mercurio per- mixtis dictum est, in memoriam revocat, quod de alio simili luminis impedimento disserui in *Comment. Paris.* ubi notavi, aliquem mihi occurrisse mercurium, qui quidem videbatur pu- rissimus, ex eo, quia agitatus in lagenula vitrea non contrahebat conspicuam illam impuritatem ex facibus metallicis oriundam, sed quantumvis quassatus manebat nitidus & politus; interim mercurius iste in suo, quo tunc erat statu, ad lucendum erat ineptus, donec per lotionem aliquam, de qua infra, ab impe- dimento suo liberatus acquireret exquisitissimam lucendi faculta- tem. Cum attentius examinasset hunc mercurium ante lotionem, animadverti illum quodam quasi lentore laborasse; eo quod agitatus non in guttulas, vel grumulos, tam facile dissiliret, neque bullas emitteret, ut in aliis fieri solebat; quod attribuendum videbatur tenacitati separationem partium nonnihil prohibenti: unde statim suspicari subitè causam illius lentoris originem traxisse a materia quadam sulfurea, vel oleosa, cum mercurio commixta, quae se, ob viscositatem suam, non monstrat extrinsecus, ut aliae fa- ciunt sordes, quae facilius sequestrantur a substantia mercurii, at- que foras expelluntur. Quomodo autem talis materia viscosa

in

in mercurio intine latens luminis mercurialis apparitionem im- pedire possit, operosa demonstratione non eget; sufficit ut di- camus, poros vel meatus mercurii, in quibus hospitatur mate- ria primi elementi, glutine illo ita obstrui, vel occludi, ut quan- do opus est ad lumen producendum egredi non possit, vel sal- tem non egrediatur cum requisito impetu & copia: quare Bar- ometrum ex hujusmodi mercurio paratum lucendi virtute pro- fus desituetur.

§. 11. Haecenus de nocumentis luminis, quae ipsi argento vivo vel accidunt, vel jam insunt. Sunt vero & alia lucis obstacula externa, quae nisi tollantur aut praecaveantur, fru- strabitur mercurius sua lucendi facultate; etsi per se habeat quic- quid desiderari potest, remotus a culpa propria, vacetque de- fectibus omnibus huc usque commemoratis. Hoc genus obstaculorum respicit ipsum tubum, qui non uno modo peccare potest; ut si internam superficiem habeat fordida, vel humi- dam, vel a quacunque pinguedine, aut uligine, tantillum infec- tam; ut verbo dicam, si parietes interni non fuerint tersissimi & siccissimi, tubus iste ad Barometrum lucidum inde conficien- dum nihil profus quadrat; utpote qui per contagium quasi cum mercurio communicat suum squalorem, ex quo dein statim for- matur tegumentum aliquod, quamvis insensibile, supremæ mer- curii superficiei inducendum, quod jam sufficit ad luminis abo- litionem. Nihil enim est, quod magis officiat lumini nostro, quam quævis humiditas, sive sit oleosa, sive aquosa; idque fit tam facile, ut tam tubus, quam mercurius, a sudore vel madore manuum insensibili, aut oris quoque halitu levissimo, durante præparatione Barometri, sapissime amiserint necessariam, quam antea habebant, ad lucendum qualitatem. Tubi quoque nimia gracilitas obstare potest, quo minus mercurius, qui in aliis amplioribus luceret, possit emittere lumen; cujus rei ratio suo loco patebit, quando reliquorum phenomenorum causas su- mus exposituri, quod sequenti capite præstare suscipimus.

CAPUT

## CAPUT VI.

*Ætiologia pars tertia, ubi reliquorum phenomenorum rationes redduntur.*

§. 1. **E**Xactis fundamentis jam non arduum erit omnium, quæ restant, phænomenorum exponere causas. Et quidem quod spectat ad quartum, (tria enim jam explicavimus *Cap. IV.*) quo nempe observamus Barometra vulgaria plerumque non lucere, aut si unum, vel alterum lucet, lumen esse perdebile & languidum, nec nisi per violentos mercurii succussus elicitum: rarissimum autem esse Barometrum communi via paratum, quod lucem vegetam spargat, quale fuit illud *PICARDI* & paucissima alia, quorum meminimus supra *Cap. I. §. 6.* Quod, inquam, ad hoc spectat, prima fronte explicatu difficillimum, id jam nullam amplius habet difficultatem, postquam pelliculæ illius ab aëris contactu formatae generationem & effectum tam fuse exposuimus, atque hinc tribus quasi verbis in *Cap. præced. §. 7.* hujus phænomeni causam dedimus. Ex generationis ratione dictæ pelliculæ, ut hoc insuper addamus, colligi potest eam esse inevitabilem in omnibus Barometris, quæ vulgari methodo implentur. Adeoque queri posset, cur quædam ex vulgaribus sint lucida, non obstante ista pellicula: Ad quod respondendum foret, id variis de causis fieri posse. Aut enim facta sunt Barometra in loco aliquo aëre purissimo pleno, qui pelliculam genuit usque adeo subtilem, ut erumpentem materiam primi elementi remorari non possit: Aut ipse mercurius tam fuit purificatus & tam insignem copiam materię primi elementi simul magno impetu ejaculatur, ut pelliculam etiam ordinarię consistentię perumpere valeat: Aut, quod aliquando accidisse certis indiciis compertum habeo, per crebram mercurii reciprocaionem in tubo dissipari iterum potest pellicula, dum in portiones minutas discerpitur, quæ postea lateribus vitri (quod ipsum ad hoc præ alio vitro aptius est,) sese agglu-

agglutinans in mercurii summitatem recidere nequit. Hæc quidem, & alia quæ autem rarissime contingunt, efficere possunt, ut quædam ex Barometris vulgaribus sint luminosa, & quidem magis minusve luminosa, prout causæ istæ particulares plures paucioresve simul concurrunt, aut singulæ majorem minoremve perfectionis gradum habent: non putem aliam hujus phænomeni causam quærendam esse.

§. 2. Phænomeni quinti causa feliciter detegitur per *Theoriam Cap. IV.* expositam; quæ itaque vel hoc unico mirifice confirmatur, quia nescio, an ulla alia excogitari posset, quæ rem eodem successu expediret. Phænomenon illud in hoc consistit, quod bullula aërea fortuito casu, vel studio, intra tubum admittæ, ascendens per columnam mercurialem sursum deorsum agitatum, lumen exhibeat in superiori tantum sua superficie, quæ nimirum imminet mercurium contingit, & ante se protrudit, ut ad superiora sibi viam aperiat. Concipe igitur, quod aër ascendens, & se continuo expandens, pellit & fugat mercurium sibi proximum, mercurius vero retro fugiens eructare debet ex porulis suis aliquid materię primi elementi, pro parte suppleturum fugientis spatium, quod aër rarefaciendus requirit; unde necessario lumen excitabitur, & quidem eo tantum in loco, ubi fit eruptio materię luminificæ, hoc est, in superiori bullulæ ascendentis superficie, quæ respectu mercurii fugientis est concava: hoc namque observamus generaliter, quod mercurii sese retrahentis superficies semper sit concava, sive ascendat, sive descendat: patet quoque, cur lumen bullulæ ascendentis vivacitate continuo crescat, crescit enim inter ascendendum & celeritas & raritas aëris, unde & effluxus materię primi elementi acceleratur, lumenque adeo intenditur. Observatio hanc in rem facta ab *Illustr. Job. POLENO*, explicationem datam mirifice confirmat.

§. 3. Ex hisce jam porro sequitur, si bullula aëris aliquoufque sursum enixa, & ita dilatata ut divulsionem vel separationem in columna mercuriali pariat, quod sextum constituit Phænomenon, fieri ut aër intra partes divulsas hærens, simul cum *Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II.* X x utra-

*Dissert. de  
Barom. &  
Therm. 2.*

51

utraque sursum deorsum libratus, offerat oculis coruscationes in utroque hiatus extremo alternatim apparentes, scilicet superne in ascensu, inferne in descensu. In universum quippe clarum est, semper ex ea parte mercurii erumpere debere materiam primi elementi, quæ opposita est ei parti, quam versus se recipit; hoc est, ex postica fugientis superficie: ita ut, si sursum tendat mercurius, coruscationes fiant ex inferiori ejus superficie, quæ est superior respectu aëris interjecti, sicuti jam in præced. §. explicatum est; atque si deorsum fertur, eveniat contrarium, ut nempe ex superiori mercurii superficie, quæ est inferior ratione aëris interpositi, fulgura profiliant. Notatu digna est circumstantia, quæ occurrit circa facies lucidas mercurii reciprocantis in tubo *Torricelliano*; Quod si enim fortiter succutias tubum, ut inde plures sequantur divisiones in columna mercuriali, eaque ita in partes plures separetur; observabis, non sine jucundo spectaculo, singulis librationibus quamlibet portionem divisam mercurii fulgere, sed ita, ut fulgor a tergo fugientis sequatur, ejusque superficiæ, quæ semper concava est, adhæreat. Observamus enim concavam reddi faciem portionis inferiorem in ascensu, & superiorem in descensu; e contrario autem fieri convexam inferiorem in descensu, & superiorem in ascensu.

§. 4. Adeo ut pro universali regula haberi possit, lumen Barometri semper ea in parte apparere, ubi mercurii, vel ejusdem portionis alterutra facies velut in scutellam excavatur, & quidem tanto magis profundam, quanto rapidius movetur mercurius. Quare miror Clariss. WEIDLERUM in sua doctissima Dissertatione *De Phosphoro mercuriali* anno 1715. edita p. 17. dicentem, *noctilucam mercurii in ascensu columna aliquando, quamvis rarius, ac solum sub initium nitorem exhibere*, cum tamen paulo post ipse fateatur, *supremam hydrargyri faciem columna sursum promotam convexam reddi, eamque a se in continuo ascensu nunquam coruscare visam esse*. Fortassis confudit Vir Clariss. descensum expirantem, quo nitor quamquam languescens adhuc durabat, cum ascensu, putavitque columnam ascensum inchoasse,

se, cum revera descendere nondum omnino desisset. Ceterum facile videre est, quæ his similia instituit experimenta HAUCKSBEJUS peritus artifex in Anglia, ac publici juris fecit *Londini* A. 1709, originem suam debere iis quæ de inventionem & constructionem phosphori mei mercurialis initio hujus seculi in lucem miseram. Ex his enim inventis *Haucksbejana* illa, aliaque circa hanc materiam in Anglia facta experimenta, tanquam totidem corollaria esse derivata, nemo, qui ea cum nostris comparaverit inficiabitur. Licet id dissimulet HAUCKSBEJUS & alii, qui, quod quamplurimis Anglis admodum solemne est, undiquaque corradunt & sua faciunt aliena, dum ipsi in plagiarios (quos sibi fingunt) terribili sed vano clamore debacchantur.

§. 5. Tempus autem est, ut quæ supersunt Phænomena explicare pergamus; quod jam nullo negotio præstabimus. Septimum namque & octavum, ceu per multiplicem experientiam compertum habeo, generalissime certa sunt; ita scilicet ut minima guttula aquæ, spiritus vini etsi rectificatissimi, olei, vel cujusvis alius liquoris, intra tubum Barometri admissa, lumen ejus prorsus extinguat, quod violentissima agitatione non poterit in conspectum revocari. Id vero nequaquam mirabimur, modo animum advertere velimus ad ea, quæ dicta sunt de pellicula lumen abolente, & insuper consideremus quam levi impedimento opus sit ad intercipiendum egressum materiæ primis elementi ejusque actionem in globulos coelestes, in qua luminiproductionem consistere vidimus. Humoris quantitas, quantumvis paucilla, in tubum irrepens statim summum petit cylindri mercurialis, ibique locum occupat, in quo materiæ subtilissimæ cum æthereâ consilendum esset, & ex hoc consiliu lumen elicendum. Talis autem consilius, si a tenui pellicula, quanto magis a crassioris humoris particulis reprimetur? Nec vero quicquam juvat liquorem esse inflammabilem: hic enim non agitur de ipso igne excitando, qui tunc tantum excitatur, quando materia primi elementi, secum ferens particulas terrestres vehementissime agitata, sat magna copia & impetu confluit, ut





particulas mobiliore materiae combustibilis solvere & simul in agitationem abripere valeat. Sin aliter se res habeat, ut in hoc nostro casu, vires materiae primi elementi, utpote a nullis corpusculis terrestribus stipatae, levi negotio franguntur, adeoque lumen Barometri a quavis materia liquida diversa a mercurio, quamquam alioquin igni alendo idonea esset, necessario suffocabitur.

§. 6. Haec enimvero causa est, cur aer ipse, etiamsi defecarissimus, modo non sit admodum rarefactus, luminis productionem impediatur, aut saltem valde debilitet; ejus quippe particulae satis sunt villosae & crassae, ut filamentis suis materiam primi elementi ex mercurio profluentem quasi irretiat, illiusque adeo impetum, quo cum globulos aethereos repercutere deberet, imminuat, unde lumen necessario aut penitus delebitur, aut non nisi languidulum apparebit. Quod si vero tantillum aeris inquinati in vacua tubi parte remanserit, non tantum languescet lumen, sed & paulatim emoriatur, ob pelliculam, quae inde formatur, materiae luminiferae egressum eo quo dictum est modo prorsus cohibentem; hoc nobis rationem subministrat Phænomeni noni. Tale quid accidisse credo Barometro praëlaudati Joh. POLENI, de quo refert, quod ab initio vix factum in obscuro conclavi emicuerit, ac per integram mensem eodem vigore (sensibiliter) perseveraverit: decursu tamen temporis lumen languidius factum fuerit. Quando autem conjectat Vir inclytus idem contingere quibuscunque luminosis Barometris, non dubito quin mutaturus esset sententiam, si ea videret a me elaborata Barometra, quae jam per tot annos sine ullo luminis dispendio eadem semper vivacitate fulgent.

§. 7. Nemo, qui haec dicta probe intellexerit, mirabitur valde idem argentum vivum, seu ex eadem massa desumptum, quod in uno tubo lucet, non item in quovis alio lucere; id quod decimum est Phænomenon: Siquidem ostenderit ipsum quoque tubum, vitio quodam laborare posse, quod mercurio, licet omnia ad lucendum requisita habenti, lumen adimat. Et cum in constructione Barometri inter operandum tam facile acci-

cidat, ut non omnia ad amissim observentur, quae requiruntur ad praevenda luminis impedimenta supra memorata; sponte hinc fuit ratio Phænomeni undecimi, quo experimur eundem mercurium in eodem tubo, si diversis temporibus depleatur, & statim iterum impleatur, modo lucere, modo non lucere. Imo patet etiam, cur unum idemque Barometrum, quod nunc luminosum est, evadere possit non luminosum, & forsan postea iterum luminosum, idque alternis vicibus, interjecto semper aliquo temporis intervallo; etsi Barometro ipsi nulla mutatio sensibilis superaccessisse videatur. Etenim pellicula quaedam generari potuit, sive ex aëris, sive ex ipsius mercurii impuritibus, cum ipsum construeretur Barometrum; quae vero, ob non satis perfectam consistentiam, aliquando dilaceratur & materiae luminiferae pervia redditur, aliquando ita concrevit, ut agitationibus diu resistere possit, antequam de novo perumpatur. Potest etiam fieri ut pellicula in fragmenta lacerata dissipetur, vel parietibus vitri adhaereat; postea alia nova generetur eandem sortem subitura, quam vicissitudinem necessario excipiet alterna apparitio & extinctio luminis, sicuti videre fuit in Barometro Picardiano.

§. 8. Cur tubi ampliores, ceteris paribus, sint magis apti ad lucendum quam nimis graciles, secundum tenorem Phænomeni duodecimi, putamus hanc esse causam; quia columna mercurialis, pro ratione molis suae, majorem habet superficiem ambientem si minorem habet diametrum ut in tubis gracilioribus, quam si diametrum habet majorem ut in tubis amplioribus. Idcirco argenti vivi frictio ad latera tubi nimis angustii multo major erit, quam in latioribus; tanta autem frictio usque adeo retardare potest motum reciprocationis argenti vivi, ut vel nihil materiae primi elementi, vel parum, idque segniter, ex eo erumpere valeat; unde mirum non est, si lumen nequicquam in talibus tubis expectemus.

§. 9. Quod denique spectat ad Phænomenon ultimum; quo vidimus tubos inaequabiles, vel non uniformiter amplos, facilius lucere, quam qui sunt perfecte cylindrici; Hoc ex eo deduci-

tur, quod pellicula mercurio insidens in tubo perfecte cylindrico, durante motu reciprocationis, eandem continuo servet figuram & spissitudinem, adeoque non facile lacerari possit; quæ vero in tubo inæquabili, inter agitandum, figuram suam & spissitudinem singulis momentis mutare debet; id quod peragi non potest, quin ejus partes sepiissime dislocentur & a se invicem separentur, quam separationem brevi sequitur totalis pellicula disruptio & dissipatio, atque hinc luminis apparitio.

## CAPUT VII.

*Modus docetur mercurium per lotionem preparandi & ad Barometra luminosa idoneum reddendi.*

§. 1. **H**Æc quidem fuerunt, quæ in explicationem theoriæ luminis mercurialis dicenda habebam: quamvis multa alia dici possent, cum rationi, tum experientiæ consona, quæ theoriæ hanc mirifice confirmarent, quæ autem brevitatæ gratia malo præterire, quam videri quod velim præter necessitatem exaggerare rem per se commendabilem ac suo se pretio laudantem. Quin potius id nunc facturus sum, ut artem doceam, ex allato systemate deductam, construendi Barometra, quæ lucendi virtute semper polleant. Cum vero ejus rei gratia plures a me modi Barometra implendi fuerint excogitati, quorum singuli optatum successum habuere; lubet hoc loco certiores tantum & pro praxi faciliores describere.

§. 2. Ante omnia ratio habenda est mercurii, qui omnium optimus eligatur. Ejus probitas cognoscitur ex puritate, fluiditate, agilitate, candore, & nitore: purus erit & sincerus, si nullis partibus metallicis aliisve heterogeneis scateat, quæ si ex metallo quodam fuerint, statim se produnt, si mercurius in phiala quadam parumper commoveatur; illæ enim, ut supra Cap. V. §. 9. diximus, foras prorumpunt, & instar scoriarum totam superficiem externam obtegunt; quibus remotis ac sublatis, aliæ protinus in earum locum succedunt: sed hic caute observandum, si nullæ hujusmodi

di fordes extrinsecus se manifestant, non ideo concludi posse, mercurium esse purum; siquidem datur talis, ut monuimus Cap. V. §. 10, qui perfectam mentitur puritatem, cum tamen minime sit purus, quia continet inquinamenta sulfurea, vel oleosa, quæ tam arte & intime commixta & unita sunt per totam mercurii substantiam, ut quantumvis fortiter agitatus nulla externe monstret indicia impuritatis, propter tenacitatem quæ partes viscosæ substantiæ mercurii adherent. Sed aliunde cognoscitur, an forte hujusmodi contagio laboret mercurius. Scilicet, ut jam monuimus, conspicitur in eo aliquis lentor, ac velut torpor, qui facit ut ad fluitandum non sit tam agilis, ut alias esse solet, neque per agitationem bullæ eleventur. Scire enim convenit, signum esse mercurii optimi, si lagenæ vitræ inclusus & vehementer concussus in superficie sua bullulas quasdam spectandas offert instar liquoris spumantis, quæ vero bullule in momento iterum dissiliunt. Signum quoque est bonitatis & agilitatis, si facile se discuti patiatur in grumulos minimos, qui promptissime in globulos abeant, hinc inde celerrime discurrentes si leviter attingantur. De candore & nitore non est quod multa dicam, constat quippe nativum mercurii colorem esse argenteum; ideoque si candicat & niter instar purissimi argenti politi, erit hoc nomine reliquis præferendus.

§. 3. Cum autem vix invenias mercurium, qui omnes prædictas perfectiones in eminentissimo gradu possideat; quod præsertim spectat ad sinceritatem & puritatem; non male egeris si eum, ut Chymici solent, vi ignis depuraveris per retortam, aut tibi comparaveris talem mercurium, qui ex cinnabari fuerit, ut ajunt, resuscitatus, utpote quem optimum reputamus. Interim cum ejusmodi non semper suppetat, licebit quoque alium adhibere in officinis venalem, qui utcumque habeat qualitates requisitas. Quod si autem in eo suspicaris impuritatem aliquam latentem & viscosam, elues eam per lotionem sequenti modo instituendam.

§. 4. Scilicet super 4 vel 6 uncias mercurii, in lagunculam vitream immisi, infunde aquam communem (in qua, si libuerit, non-

nonnihil aceti & falis diluatur) ad altitudinem duorum circiter pollicum. Collo dein probe obturato, lagunculam cum mercurio manu apprehensam suceute celerrime & sat longo tempore; aquam postea, quæ sordida & subnigra inde fiet, a mercurio subtrahe, aliamque recentem affunde, iterumque succute, fordibus infectam denuo remove, substitute novam aquam, agita lagenulam, hocque toties & tamdiu repete, donec aqua tam pura fere redeat a mercurio, quam ei fuerat superaffusa. Hoc pacto habebis mercurium purificatissimum. Lotio ista multo citius & simul accuratius peragetur, si pro aqua sumseris spiritum vini, utpote qui facilius penetrat & diluit sordes viscosas quam aqua simplex. Mercurium hoc modo defæcatum probe exsicca, trajiciendo eum sæpe per linteam mundum & tandem cogendo per alutam, ut liberetur quoque a particulis aëreis, quæ se forte admiscuerunt & insinuarunt, ut fieri assolet, per validam ejus agitationem. His omnibus rite peractis mercurium tuum in usum serva. Atque si ejus majorem desideraveris copiam, uti fere necesse est ad Barometrum conficiendum, operationem istam cum nova dosi 4 aut 6 unciarum mercurii institue, eandemque ter, quater, donec suffecerit, repete.

§. 5. Mediante hac lotione conciliavi lucendi facultatem mercurio, qui antea obstinate illam respuebat, & ne vestigium quidem luminis monstrabat; Cujus notabile exemplum extat in Epistola mea inserta *Comment. Acad. Paris.* Cæterum si ad manus fuerit antlia pneumatica, poterit, majoris cautelæ gratia, mercurius ita purificatus committi recipienti, atque ex eo extrahi aër, quo fiet ut mercurius, in vacuo per aliquot dies relictus, bullulas aëreas (si quas forte adhuc in recessibus suis superflites habet) per rarefactionem intumescens sensim exhalet, donec a cunctis liberatus perfectum acquisiverit puritatis gradum. Cavendum autem ne postea mercurius de novo agitetur, aut aliter multum commoveatur, quia facile aliquid aëris iterum se ei immisceret. Neque etiam multum atrectandus est manibus, præsertim sudore madentibus; imprimis studiose caveris, ne oris halitu

*Mém. de  
l'Acad. R.  
des Sciences  
1701.  
pag. 140.  
Edit. Paris.*

halitu inficiatur. Vidimus enim quam nociva sit productioni luminis mercurialis cujuscunque generis humiditas. Stet itaque mercurius, præscripto modo ad usum præparatus, in quodam vitreo vase sicco & mundo probeque obturato, ne quid immundi aut humidi ab aëre externo irrepens illum quodammodo contaminare possit, usque dum volupe fuerit implere tubum ad Barometri luminosi constructionem. Quod per aliquam ex sequentibus methodis feliciter exæqui licebit.

## CAPUT VIII.

*Varia exhibentur methodi parandi Barometra perpetuo lucida, ac luminis imminutioni non obnoxia.*

§. 1. **I**mperfecta atque dubia fuisset theoria luminis mercurialis a me adornata, per quam eleganti adeo successu causas exposui ejusdem tam apparitionis, quam suppressionis, nisi excogitasset simul viam conjungendi theoriam cum praxi, atque commonstrandum hoc pacto hanc super illam stabilitam effectus edere eos, quos ex ratiocinio meo a priori factis secuturos esse prævidebam non minus ac sperabam: Id quod prorsus confirmat ipsius theoriæ probitatem. Nam hæc prima fuit cura, post præparationem mercurii rite peractam, ut certam indagarem normam, secundum quam implendi essent tubi Barometrorum, ita tamen, ut pellicula illa, quæ tam facile ab aëre contrahitur, quando vulgari modo implentur, possit evitari. In hunc finem commentus sum plures implendi modos, quorum hic aliquos describam.

§. 2. Primus & tutissimus ita se habet: Selige tubum vitreum ab utraque parte apertum, longitudinis pedum trium, vel trium cum semisse circiter, cujus amplitudinis diameter sit duarum minimum linearum, seu sextam pollicis partem æquans; sed præstat adhibere ampliorem; nec refert, imo fatius est, si non sit perfecte cylindricus. Oportet autem ut sit, præsertim interne, nitidissimus & optime deterfus, ne quid vel minimum humiditatis  
*Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. Y y tis*



tis aut pinguedinis parietibus adhæreat, de quo, si tantillum dubitaveris, consultius facies, si tubum novum tibi compares immediate ex officina vitriaria, quem certus sis nulli adhuc usui inservisse. Hujus igitur tubi extremitatem alterutram demitte in vasculum aliquod humile, sed amplè satis apertura, quod fere plenum sit hydrargyro preparato. Inclina tubum ad horizontem, quantum id permittunt labra vasculi, merso interim manente orificio intra hydrargyri superficiem, ita ut tubus cum horizonte faciat angulum 18 circiter graduum, aut etiam acutiorem si fieri possit. Tum, ore admoto alteri orificio, incipe spiritum attrahere, ut mercurius per tubum oblique sursum feratur, cave autem inceptam suctionem interrumpas, usque dum uno continuo & æquabili tractu ad supremum usque orificium ascenderit; alias facile accidere posset ut, per vices sugendo & remittendo, aliquid salivæ vel halitus in tubum ingrederetur, quod laborem omnem cassum & irritum redderet. Continuato itaque suctu unico, ubi impleveris mercurio totum tubum, imo supremas quoque guttas aliquot ex tubo in os tuum attraxeris, protinus dabis signum alicui amanuensi ad hanc rem informato, qui promptissime obducatur digitum orificio inferiori, quod mercurio vasculi immersum est, ne suctione cessante sublatus mercurius relabatur in vasculum. Ore jam remoto a tubo, obstrue orificium superius glutine aliquo idoneo, quo ad vitra consolidanda uti solent, (optimum ad hoc negotium est illud, quod paratur ex minio in oleo olivarum cocto:) hoc bene peracto amanuensis retrahat digitum, atque tubus tunc rursus ad perpendiculum erigatur, quod dum fit, descendet mercurius ad consuetam altitudinem, quam exigit æquilibrium cum aëris externi pressione. Nihil insuper faciendum restat, quam ut tu ipse tubi orificium inferius subter mercurium digito iterum obtures, altera vero manu prehensum tubum ex vasculo amplo & humili eximas, transferasque in aliud vasculum mercurio preparato semiplenum, quod sit angustius & profundius; cum scilicet in sinem, ut possit Barometrum tutius contrectari, ac sine effusionis periculo agitari in tecebris. Tandem adaptes tubum cum vasculo super assulam ad hunc

hunc usum fabricatam, & habebis Barometrum optata lucendi facultate præditum.

§. 3. Nisi in circumstantiarum aliqua peccatum fuerit, Barometra hoc modo parata sunt excellentissima in lumine producendo. Perspicuum enim est, mercurium in tubum immitti citra aëris attractum, a quo proin inquinari non potest, nedum cooperiri pellicula, quæ ex violento transitu per aërem contrahitur, qualis hic nullus est. Nemo autem existimare debet, ex eo quod vertex columnæ mercurialis, per suctionem sursum pulsæ, ab aëre contingitur quamdiu ascendit, nonnihil pollui posse mercurium. Nam 1<sup>mo</sup> mercurius non violenter ferit aërem, ut fit per vulgarem implendi modum. 2<sup>do</sup> Vix tangit aërem, sed eum magis magisque rarecentem & ex tubo evadentem placide tantum sequitur. 3<sup>o</sup>. Suprema duntaxat mercurii gutta aëri rarecenti est exposita, tota vero reliqua columna sub ipsius tegmine tuta ascendit. 4<sup>to</sup>. Suprema ista gutta, si vel maxime aliquid impuritatis contraxisset, inter ascendendum in os fuit attracta, adeoque sequestrata a reliqua columna.

§. 4. Constat igitur, de quo te securum volo, scilicet te hac arte possidere Barometrum, quod semper lucendi facultatem habebit, quod lucem fundit in summo possibili gradu vegetam eamque æquabilem, non vero mutabilem & modo debiliorem, modo clariorem, id quod illis tantum Barometris contingit, quorum mercurius non omnem acquisivit puritatis gradum. Refero in *Commentariis*, me in primo Barometro, quod secundum hanc methodum confixi, deprehendisse tantam lucendi facilitatem, ut ad minimas & vix dum sensibiles trepidationes jamjam coruscaret mercurius, ad majores vero vibrationes exquisitam omnino lucem singulis descensibus spargeret; ad cujus claritatem mediocris scripturæ litteras discernere licebat in distantia pediali. Quæ res tum erat tanto magis curiosa, quod idem mercurius quem hic adhibui, in aliis Barometris ordinaria via paratis, ne scintillam quidem luminis sibi extorqueri passus fuerat; magno sane argumento bonitatis hujus methodi, quam itaque ceu longe omnibus præferendam

*Mémoires  
de l'Acad.  
Roy. des  
Sciences  
1700.  
pag. 187.  
Edit. Paris.*



dam nunquam satis commendabimus, & vel hoc nomine etiam, quod Barometrum hac arte paratum aptius quoque sit ad usum communem, qui est, ut aëris atmosphærici gravitantis mutationes fidelissime indicentur: norunt enim rerum physicarum periti, quantum noceat huic effectui, si vel tantillum aëris occupet partem tubi vacuum, quippe quod statim thermometri effectum edens, turbat & incertum reddit alterum a mutata aëris externi gravitate oriundum. Tale quid autem, quod in effectione Barometri communis evitari vix potest, omni licet adhibita cura, metui non debet in Barometro secundum hanc regulam constructo.

§. 5. Sed pergimus ad descriptionem alius cujusdam methodi tubos barometricos implendi. Requiritur autem antlia pneumatica, quæ sit perfectissimæ probitatis, qualem habui in Universitate Groningana, juxta copiosissimam supellectilem instrumentorum physico-experimentalium ab Illustr. & Præp. illius Provinciae Ordinibus Musarum Patronis liberaliter ministratam. Processus operationis huc redit: Sume tubum vitreum ab una parte apertum, sed ab altera hermetice clausum. Sit ille intus bene deterfus & siccus, aut, quod satius est, sit ex officina vi-triaria recens advectus. Tubum hunc erige perpendiculariter, ita ut orificium apertum deorsum spectans respondeat superfici mercurii præparati in aliquo vasculo contenti, quam autem superficiem non omnino attingat tubus, sic tamen ei immincat sustentus a lubrico quodam fulcro; ut tubus ad voluntatem tuam in subiectum, mercurium decidere & orificium suum submergere possit, dummodo eum ex statu verticali paulo inclines leniter.

§. 6. Colloca igitur vasculum cum tubo ita suffulto super discum æneum antliæ applicatum, eique, nempe tubo & vasculo, superinduc recipiens vitreum campaniforme, quod desinat in oblongum collum, ut in eo velut in theca possit tubus contineri. Tum, adducto embolo, extrahe aërem ex recipiente; per consequens etiam ex tubo; idque repete, donec ad sensum nihil amplius remanserit aëris. Si bona sit antlia, qualem habui, post paucas suctiones exhauseris aërem usque ad decies-millesimam partem

partem totius. Tantum raritatis gradum vix sperare licet in parte vacua Barometri ordinarii. Educto hoc modo aëre ex recipiente & tubo, attolle ab uno latere machinam cum toto apparatu, ut collum recipientis & inclusus tubus nonnihil inclinentur, quo fiet, ut tubus statim de fulcello suo decidat, ejusque orificium subintret in mercurium. Quod ubi observaveris rite esse peractum; admitte iterum aërem in recipiens, qui pressione sui elaterii, urgebit mercurium in vasculo contentum, cogetque eum ascendere in tubum, ubi nulla est resistentia ob aërem extractum, ad altitudinem, quam habet columna mercurialis in Barometris communibus. Jam enim diximus in his partem superiorem tuborum non exactius ab aëre vacuum esse, quam hac operatione efficitur. Nunc remove recipiens, tubum vero cum vasculo applica ad assulam: habebis Barometrum elegantissimum & quovis tempore lucere paratum, siquidem ut vides mercurius tubum intravit ab aëre non tactus, multo minus inquinatus.

§. 7. Primum, quod hac methodo constructum fuerat, Barometrum, lumen præbuit eadem vivacitate quæ obtinetur per modum præcedentem; sed, quod non est dissimulandum, elapso aliquot dierum tempore, vigor iste paulatim decrevisse videbatur: cujus causa erat, quod in operatione non adhibebatur omnis cura, quæ hic præscribitur. Tubi enim orificium ante aëris exhaustionem ex recipiente fuit statim mercurio immersum, neglecto fulcello illo, quo operatione durante extra mercurium sustineri debuisset. Unde factum est, ut aër ex tubo ipso tam perfecte quam ex recipiente exantlari non potuerit; scilicet propter pondus mercurii orificio incumbentis atque aëri egressuro renitentis, in tantum quidem, ut non dilataretur ultra eum raritatis gradum, qui requiritur ad vim elasticam aëris superstitis æquilibrium cum pressione mercurii ambientis. Hujus impedimenti effectus fuit talis, ut readmissa postea aëre in recipiens, mercurius ascenderit tantum ad altitudinem 24 vel 25 pollicum, ita ut duo vel tres circiter pollices deessent, quominus attingeret debitam altitudinem columnæ mercurialis in Barometro. Supponamus hanc esse 27 pollicum & defuisse 2½ pollices: calculo



instituto reperiemus post ascensum mercurii ad 24<sup>1</sup>/<sub>2</sub> pollices remansisse in superiori tubi cavitate quam proxime undecimam partem aëris naturalis; qui proin sufficientem densitatem non habuit, ut luminis apparitionem ab initio impediret, habuit tamen, unde tractu temporis pelliculam formaret, quamvis (credo) tenerrimam, ad vim luminis paulatim imminuendam, & forte tandem omnino abolendam. Hoc monere volui, ut illi, qui credunt idem omnibus luminosis Barometris contingere, videant se errare, quando rei naturam attribuunt, quod non nisi ex accidenti fit.

§. 8. Proprio ad tertiam methodum. Hæc ad praxin est accommodatissima, modo omnia accurate & diligenter pertractentur: ecce eam. Suppono hic etiam tubum ab una parte hermetice clausum, & insuper habentem omnes eas qualitates, quas in præcedentibus desideravi. Inclinetur tubus orificio aperto sursum spectante, ut faciat cum horizonte angulum admodum acutum, si vis 10 aut 12 graduum. Deinde leniter infunde modicam tantum quantitatem mercurii tui optime preparati, qui, propter magnam tubi obliquitatem, non cum impetu decidet, sed juxta latera lente deorsum reptabit, ac proinde in transitu per aërem non multum inficietur. Sed postquam hoc modo infuderis eam duntaxat argenti vivi copiam, ut occupet in tubo non nisi tres circiter altitudinis pollices, tunc quidem infundere desine. Paratum autem habeas filum ferreum, cujus uni extremo circumvolutum sit non nihil gossipii, in formam sactoris in syringa formati, non tamen tantæ crassitiei ut totam tubi amplitudinem impleat, sed interstitium quamvis exiguum relinquatur inter tubi parietes & superficiem gossipii. Hoc igitur velut embolo instructum filum ferreumingere in tubum ad fundum usque; postea aliquandiu sursum deorsum move, ut embolus frequenter trajiciat infusum mercurium ab uno extremo ad alterum, non tamen omnino egrediatur. Eo modo efficies ut non tantum bullulas aëreas, quæ forte subreperunt in mercurium cum descenderet, elimines, sed & perfecte eum everras ab immunditie, quam ab aëre inter transeundum (quamquam non possit esse magni momenti)

menti) potuisset contrahere. Extracto dein filo ferreo, infunde sursum parvam, ut prius, mercurii copiam, quam immisso embolo pariter everras. Sic itaque, partitis vicibus, tandem totum impleveris tubum, sine periculo remansionis bullularum aërearum, aut alicujus inquinamenti, unde pellicula generari posset. Habeo in ædibus meis Barometrum hac ratione paratum, quod ad levissimam agitationem insigniter splendescit, & licet jam ante duodecennium fuerit factum, nullam tamen luminis imminutionem per tot annorum intervallum passum fuit.

§. 9. Tres isti modi hucusque descripti sufficere possunt, utpote qui multiplici experientia certissimi sunt comperti; modo non erretur in aliqua, sive mercurii lavandi, sive tubi implendi, circumstantia. Quam facile enim errari possit, testantur instructuosi conatus Virorum quorundam in experimentalibus versatissimorum, qui tamen initio, licet omnia studiose observarent, uti putabant, nihil unquam profecere, donec tandem veniret qui sinistri successus culpam, non methodis, sed defectui dexteritatis operantium attribuendam esse egregie demonstravit, atque se, observando studiosius regularum datarum præcepta, desideratum successum obtinuisse, quotiescunque voluerat, professus est publice.

§. 10. Idem quoque testari potest Vir Nobiliss. Joan. P<sup>O</sup>-LENUS. Is quippe prima vice frustratus fuit expectatione sua, postquam Barometrum implevisset per methodum aliquam, primæ a nobis descriptæ analogam, utpote quæ ab ea non differt, nisi quod multo sit operosior, dum pro oris suctione substituit antiæ suctionem, ac præterea per alias procedit ambages, quæ sunt difficilis executionis, de quibus revera dici potest, quod plus ingenii sapiant, quam habeant necessitatis & utilitatis. Altera vero vice, cum majori cura ac diuturniori diligentia, (sunt ipsa ejus verba) mercurium abluisse atque tersisset, nec non interiores parietes tubuli probe verrisset, limo circa ferreum filum circumvolutum; felicior tum fuit, nec cecidit in cassum labor, siquidem Barometrum, quod inde obtinuit, vix tactum in obscuro conclave emicuit, ac per integrum mensem eodem vigore per-

*Dissert. de  
Barom. &  
Therm.  
pag. 45.  
& 6.*

*perseveravit.* Quando autem deprehendit *decurſu temporis lumen languidius factum eſſe*, debebat Vir Illuſtr. inde concludere, quod ne tunc quidem omnia peracta fuerint ſumma cum cura & diligentia, potius quam credere, quod talis luminis imminutio quibuſcunque luminofis Barometris contingat. Nullus dubito, quin ſi tertium inſtituiſſet experimentum, ſed circumſpectiſſime, lumen ex voto confeſciturus fuiſſet vegetum, æquabile, & durable, quale eſt illud, de quo paulo ante dixi jam a duodecim annis eodem ſemper vigore fulſiſſe & fulgere etiamnum.

§. 11. Non immorabor deſcribendis aliis methodis, quibus in confeſtione Barometrorum lucidorum uſi ſunt quidam artis periti, poſtquam noſtrum inventum & praxes ad hoc lumen procurandum, innotuiſſent. Una tamen, præ cæteris ingeniſoſa, non eſt ſilentio prætereunda. Auctor ejus fuit Celeberr. HOMBERGIUS, Acad. Reg. Scient. Pariſ. Socius & Chymicus incomparabilis, qui cum vellet, jufſu inclytæ illius Academiæ, periculum facere experimentorum, ex præſcripto regularum a me ad Academiæ tranſmiſſarum, non tamen imitari poſſet proceſſum methodi primæ, quæ ſuſtione peragitur, excogitavit hanc alteram, quæ illi ſatis ſimilis eſt. Adhibuit nempe etiam tubum utrinq; apertum, ejuſque oriſicio alterutri circumligavit artiſſime culeum, vel burſam aliquam coriaceam argento vivo plenam, ita ut oriſicium tubi in mercurium eſſet demerſum. Dehinc burſa manibus compreſſa, aſcendit mercurius ad alteram extremitatem, quam tum ſtatim adſtans quiſpiam amanuenſis cera obturavit. Relaxata poſtea burſa, ſubſidit mercurius ad altitudinem, quam exigebat æris æquilibrium. Tubum hoc modo paratum, admoto indice ad oriſicium inferius, exemit ex burſa, tranſtulitque in vaſculum mercurio ſemiplenum, atque ita habuit Barometrum, quod procul omni dubio habuiſſet debitam lucendi virtutem, ſi non fuiſſet erratum in quibuſdam accidentibus. Perſcriptum quippe fuit, jubente Acad. Regia, HOMBERGIUM caruiſſe optato luminis ſucceſſu. Sed ex variis circumſtantiis operationis (nam totus operationis proceſſus communicabatur) mox cognovi nec

mer-

mercurium, nec tubum HOMBERGII habuiſſe qualitates requiſitas, de quibus ſupra. Cæteroquin, quod ad ipſam ſpectat methodum, ea neutiſquam eſt ſpernenda, quandoquidem ejus beneficio intrat mercurius in tubum citra æris attackum, niſi quod ei exponatur tantum vertex columnæ mercurialis, qui autem, ſi quid impuri contraxiſſet, facile liberari poſteſt, expellendo ſcilicet aliquot guttas ſupremas mercurii per aperturam tubi ſuperiorem, antequam cera obſtruatur. Cedere tamen cogitur hæc implendi ratio illi alteri per ſuſtione peragenda; quia ſugendo ær rareſcit & quaſi ſponte egreditur, quem ſequitur aſcendens mercurius, & proin ab eo non niſi leniter afficitur; ſed comprimendo culeum, ſeu burſam, ær ab ipſo mercurio expellitur, ad quod fortiori attacku opus eſt.

§. 12. Poſtremo non putem opus eſſe ut moneam rationem habendam eſſe tempeſtatis, quando animus eſt conſtruere Barometrum luminofum. Tametiſi enim hoc peragatur, non ſub dio, ſed in conclavi aliquo ærem purum & ſiccum continente; quia tamen ær externus per minimas aperturas facile penetrat, non inconſultum erit, ſi operatio inſtituatur cælo exiſtente ſereno & ſudo, atque ſpirante ſubſolano, aliove vento atmophæram purificare & deſiccare ſolito. Hoc modo mercurius tuus propoſito deſtinatus, poſtquam eum per lotionem & aliter rite præparaveris, vacabit periculo novæ inquinationis, cui alias inter operandum obnoxius eſſe poſſet, ſi operari velles cælo pluvias minitante, aut a præviis pluviis nondum ſatis ad ſiccitatem redacta. Hæc hæcenus: Plura non dicam de praxi Barometrorum lucidorum, certus utique, ſi ſumma circumſpectione obſervaveris regularum in hoc capite deſcriptarum ſingula præcepta, fore ut ſpe tua nunquam excidas, nec te ſuſcepti laboris poeniteat. Accingo me ad explicandam alteram partem longe nobiliſſimam inventi mei, qua nimirum conſiſtit in inventione & effectione Phosphori mercurialis portatilis & perpetui, a nemine antehac nec facti, nec viſi.

## CAPUT IX.

## De Phosphoro mercuriali portatili &amp; perpetuo.

§. 1. **E**X concatenatis rationibus, quibus superstructum est totum systema de lumine mercuriali, illa quæ præ aliis soliditatem illius apprime corroborat hæc est, quod considerans modum a me erutum, quo lumen in Barometro generatur, & inde prævidens effectum, quem habiturus esset mercurius in spatio quolibet vacuo agitatus, occasionem arripui, ex hac consideratione subnatam, adveniendi atque simul in effectum deducendi artificiosissimum illum Phosphorum mercurialem portatilem & perpetuum nunc in vulgus notum, imo & passim ab artificibus peritis, non sine summa curiosorum oblectatione, parari solitum; de quo autem superioribus Seculis ne quidem fando aliquid fuit auditum; ita ut ejus inventionis gloria, si qua est, mihi soli ex asse debeatur.

§. 2. Vocamus primo hunc Phosphorum *portatilem* ad distinctionem Barometri luciferi, quod, quamvis possit etiam justo titulo venire in censum Phosphororum, ideo tamen non meretur cum aliis nomen *portatilis*, ob incommodam ejus translocationem. Noster vero, cujus jam descriptionem daturi sumus, in omnes partes facile moveri, transportari, quin & peregre transmitti potest, sine noxæ vel damni periculo, modo nulla violentia ipsi inferatur. Deinde eundem vocamus quoque *perpetuum*, quia hac gaudet prærogativa, ut, si vasculum in quo existit præcaveatur a destructione, semper duret, quoad duraverit mundus, cujus rei veritas ex præcedentibus satis patet, atque ex dicendis porro patebit. Quare & hoc nomine facile palmam præripit omnibus aliis Phosphoribus hætenus inventis, cujuscunque generis, sive naturalibus, sive artificialibus, hæc in terra visus; quippe quorum nullus est, qui non tandem consumatur, vel saltem lucendi virtutem amittat.

AD 58 Ilmo T. v. m. c. 0. L. 2. §. 3. Ut

§. 3. Ut igitur veniam ad originem inventionis hujus Phosphori, lubet exponere, quid ejus mihi ansam dederit. Nimirum, post detectam veram causam luminis mercurialis, proclive fuit concludere, omnem mercurium sua natura lucendi vim habere in vacuo, dummodo removeri possint lucis impedimenta. Considerando autem, inter hæc nullum esse quod facilius se offerat, & simul nullum quod difficilius præcaveri queat, quam pellicula illa, quæ ex impuritatibus contexta, supremam mercurii superficiem occupans, reprimit egressum materiæ primi elementi, vel si quid egreditur ejus actionem in globulos secundi elementi interceptit; cogitare subit, pertinacissimam luminis eclipsin in Barometris ordinariis forte maxima parte ex eo venire, quod mercurius in tubo feratur motu nimis uniformi; quo fiat, ut cum, propter tubi formam cylindricam, pellicula suam perpetuo servet spissitudinem & figuram, illius partes situm suum juxta se invicem nunquam mutant, etsi velocissime sursum & deorsum moveantur, adeoque discerpi non possit, sed potius instar velaminis mercuriali columnæ superagglutinati eandem indefinenter comiteretur. Unde porro colligere licuit, nullam per consequens fieri aperturam, per quam ex poris mercurii profilire possit materia primi elementi, collisura cum globulis athereis de super irruentibus.

§. 4. Cogitationem istam statim hæc alia excepit, quæ naturalissime ex ea fluere videtur ratiocinio, ut sequitur: Quod si tam difficile sit, quamvis non profus impossibile, evitare noxiam illam pelliculam implendo tubum barometricum; nihilominus effici poterit, ut lumen appareat non obstante pellicula, modo non sit nimis densa; si quo nempe pacto procurari potest ejus disruptio, & secutura inde per vim agitationis partium dispersio, ut materiæ luminificæ liber exitus ex minutissimis claustris mercurialibus concedatur.

§. 5. Ad hoc vero obtinendum nihil magis idoneum, nihil efficacius videbatur, quam motus vehemens, inordinatus, irregularis & non uniformis, in quem concitandus esset mercurius incarceratus in aliquo vasculo vitreo figuræ inæqualis, quod ex



cavitate ampliori in collum angustius desinat, atque ex quo aër, quam fieri potuerit, exactissime exantlatus esset. Sic enim, si qua cum mercurio irrepsisset immundities in pelliculam se formans, invita omni cura ac diligentia contra eam adhibita, vix tamen ac ne vix quidem resistere poterit, quin per violentam agitationem, qua ipsa mercurii massa in innumerabiles guttas discutitur, protinus in totidem quasi minutias disceperatur, atque ita omni ex parte viam aperiat materiae subtilissimæ ex poris mercurii magna vi excussæ, quæ in unum confluens, ac globulos cælestes impetuose retundens, insigne lumen excitabit totam vasculi cavitatem instar flammæ continuæ repleturum; quod jucundum spectaculum non poterit non durare, quamdiu durabit mercurii agitatio. Jam enim ostensum est, argentum vivum nihil aliud contribuere ad hoc negotium, quam præbere poros suos angustissimos, per quos tanquam per cribrum particulae minutissimæ primi elementi ab aliis quibus permixta est secernatur, ac deinceps eo, quo docuimus modo, ex qualibet mercurii gutta hinc inde fortiter jactata explodatur, & ita quidem ut a parte antica ingrediens ex postica iterum ejiciatur, adeo ut singulae guttae mercuriales a tergo secum ferant suam peculiarem luculam, id quod universam mercurii massam repræsentabit tanquam liquorem ardentem.

§. 6. Quod si ergo hæc ita se habeant, ut postmodum experientia comprobavit, quis quaso amplius de rei veritate dubitabit? quis etiam hujus Phosphori perpetuitatem negabit? si quidem cessare non possit, nisi cesset mercurius habere poros angustissimos, hoc est, nisi cesset mercurius esse id, quod est: vel nisi deficiat tandem materia primi elementi, quæ autem cum sit universalis, omnium corporum poros perfluens, ubique præsto & nusquam non reperienda, deficere nunquam potest, nisi per miraculum annihiletur.

§. 7. Tam certa hæc nobis videntur, ut ulterius progredi non vereamur, asseverando hujusmodi Phosphoros confici posse etiam ex aliis liquoribus, si modo tales haberentur, qui puritate & densitate mercurium imitentur vel anteirent. Sic nulli dubita-

mus

mus aurum, si converti posset in liquorem fluidissimum, manente tamen ipsius gravitate specifica, fore omnium ad hoc opus aptissimum, atque ex eo parari posse Phosphorum longe elegantiorum & clariorem, quam ex ipso mercurio. In plumbo liquefacto, quamvis non ita ponderoso ut hydrargyrum, fortassis aliquem luminis effectum nobis promittere liceret, nisi spem irritam redderet nimia, qua scatet, fardium farrago:

## CAPUT X.

*Exponuntur quadam artificia parandi Phosphorum mercurialem portabilem.*

§. 1. **V**idimus qua occasione & quibus argumentis inductus inciderim in conjecturam de mercurio in vasculo vitreo evacuato lucem fusuro. Supererat ergo ut porro cogitarem de inventionis executione, quæ sane in eo consistere debebat, ut primo mercurii accuratissime præparati sufficiens quantitas immitteretur in vasculum, ampullam, vel phialam vitream novam, nitidam, ac nulla humiditate vel pinguedine inquinatam: Deinde ut ex illius cavitate, ope antiæ pneumaticæ, quanta fieri potest perfectione aër extrahatur: Tertio ut aère exhausto, probe obtureretur ampulla, vel phiala, atque obturamentum ita muniatur, ne quid aëris in posterum in spatium evacuatum subreperere possit. Primum nullam patitur difficultatem, sicuti nec alterum, si bona habeatur antiæ: Sed tertium videbatur primo intuitu difficillimæ executionis; quomodo enim licebit manus admovere phialæ sub recipiente evacuato positæ ad obstruendum ejus orificium? Interim, post quasdam meditationes & tentamina, tandem superavi difficultatem, atque ita animo conceptam Phosphori novi ideam re ipsa feliciter effectui dedi. Cum autem finem meum consecutus fuerim variis modis, describam duntaxat faciliores.

§. 2. Ab initio quidem agebatur tantum de successu inventi examinando. Ideoque rem ipsam brevissima via tentavi, nondum sollicitus de Phosphoris in futura tempora consciendis & asser-

Z z 3

vandis,

vandis. Nimirum 5 aut 6 uncias mercurii (intellige optime purgati & preparati, ut deinceps intellectum volo etiam si non addatur) inditis lagunculae semiheminariae (nitidae & mundae, qualem semper supponam, etsi non dicam) ad hujus collum agglutinavi epistomium aeneum optima nota; quo postea applicato ad antliam pneumaticam, eduxi aërem accuratissime ex laguncula, eamque removi ab antlia, clausa prius epistomii clavicula, ne aër iterum subintrare posset. Lagenula ita parata cum ingruente nocte agitaretur, elegantissimum praebebat Phosphorum, plane ut ex systemate meo praevideram. Nam ad primam statim agitationem tota vasis cavitas quasi ignita apparuit: non vero erat lumen interruptum, ut in Barometris, quod tantum in descensu mercurii spectatur; sed durabat continue durante agitatione, & tanta quidem vivacitate, ut Spectatorum facies fere cognosci possent.

§. 3. Cum iterassem aliquoties hoc experimentum, eundem semper successum habui, nisi quod relicto aut intromisso nonnihil aëris, lumen non tantum languidius appareret, sed & magis magisque languescere pergeret ad omnimodam usque disparitionem, eodem prorsus modo ut supra in Barometris non sufficienti cautela paratis accidere observavimus. Haec omnia egregie conspirant in confirmationem ratiocinii quod inventum phosphoris mercurialis praecebat: Inventum mehercle ideo pluris aestimandum, quod non coecam fortunam (cui fere pleraque alia debentur) sed rationem ipsam pro matre habuit.

§. 4. Quare jam nihil faciendum restabat, quam ut, felicissimo experimenti successu animatus, converterem meas cogitationes ad detegendum aliquod artificium, quo phialam aëre educto accuratissime obturare possem idoneo aliquo obturaculo, quod arceret aërem non tantum ad aliquod tempus, sed in perpetuum; quod per consequens non esset ex materia quae a mercurio arroditur aliamve labem accipit. Nisi posterius hoc inconveniens metuendum esset, res ipsa foret facile confecta muniendo collum phialae epistomio, per quod ut dictum est aër extrahi, quodque post extractionem claudi posset. Sed quia epistomium

ex

ex aëre aut alio metallo confici deberet, alia quippe materia aërem accurate satis nunquam excluderet, illud utique diu mercurio (a quo corrumperetur) non resisteret. Ut jam nihil dicam de nimio pretio, si ad unumquodque Phosphori hujus exemplar parandum peculiare epistomium requireretur. Adde quoque majorem concinnitatem & elegantiam conciliari figurae vasculi, si simplici tantum, sed apto obturamento obstruatur, quam si perpetuo gerat epistomium collo affixum. Quomodo igitur vitrum aliquod evacuandum sit citra epistomium, evacuatam postea obturandum, atque ita Phosphorus perpetuus construendus, docebo nunc aliquot inventionis meae artificia.

§. 5. In ampullam, capacitatis ut supra dictum, leniter infunde mercurii 4 aut 5 uncias, tum ejus colli orificium claude obturamento subereo, vel quod satius est vitreo, hoc dein probe praemunias, undiquaque obducta quadam cera tenaci & ad vitrorum consolidationem adhiberi solita, sed ita tamen, ut ope alicujus acus interponendae inter obturamentum & orificii ambitum internum, & peracta oblivitione iterum extrahendae, formetur foramen, vel meatus per ceram nonnihil elongandam supra obturamentum, per quem meatum aër ex ampulla egredi possit. Ampullam ita instructam subde campanae vitreae, aliive immitte recipienti, unde postea aërem exantles accuratissime, quo fiet ut simul aër exeat per meatum ex ipsa tua phiala vel ampulla, vel saltem eo usque rarefiat, si bona antlia, ut vix decima millesima pars ejus sit remansura.

§. 6. Re hucusque confecta, opus jam est ut tollatur via communicationis inter cavitatem ampullae & cavitatem recipientis, hoc est, ut meatus, vel foramen in cera, per quod aëri ex una in alteram patuit egressus, occludatur, ne aër in recipientem intromissus simul remeet per eandem viam in ampullam, per quam fuerat eductus. In hunc finem oportet recipientem evacuatam, dum adhuc insidet machinae pneumaticae, exponere Soli, atque ejus radios ope vitri caustici colligere super foramen, unde mox incipiet cera liquari, & foramen per ceram disfluentem se ipsum obstruere. Quod ubi observaveris, sepones vitrum ustorium, ne  
cera

cera nimis diffluet; atque aperto recipiente eximes ampullam; cujus obstructionem manibus perficies, obturaculum nempe fortiter imprimendo, ac ceram adhuc mollem diligenter oblinendo. Sic enim penitus oblitterabitur & complebitur meatus, habebitque Phosphorum optatum, qui, in nocturnis tenebris agitatus, quovis tempore lucebit.

§. 7. Notandum vero est aliquod incommodum, quod in hac praxi sæpe occurrit, eamque irritam reddit: Scilicet, cera liquefcente in vacuo, oritur insolita ebullitio; hinc forte una vel altera bullula superno meatus orificio ita insidet, ut diffluens cera illum occludere impediatur, quod ubi contingit, facile conjicis te in cassum laborasse, quia aër, recipiente aperto, per meatum non bene clausum irremens evacuatam ampullam iterum impleret. Hoc autem inconveniens evitatur hac altera obturandi ratione: Sume forcipulam, qua ex foco igniario carbonem extractum prehendere solent, quæ nimirum crura habet elastica, ita ut, si divaricentur, nisu violento ad se invicem tendant: Forcipula hæc, divaricatis cruribus, ope circumligati filii, admoveatur meatui ceraceo, qui illis tam apte respondeat, ut crura subito coeuntia illum summis apicibus corripiant & comprimant. Re ita peracta, fac ut filum crura forcipule ligata tenens, subeat focum vitri caustici Soli expositi, & a radiis solaribus perustum rumpatur: Hinc enim crura, ruptis compedibus, ad se invicem repente appellentia meatum mollem comprimant & satis obstruent, ut aperto recipiente nihil aëris in ampullam irreat, tempusque tibi concedatur, quo obturationem & obliuionem manibus perficere queas.

§. 8. Fateor equidem hanc & præcedentem obturandi rationem quibusdam incommodis adhuc esse obnoxiam. Quoniam enim Sole præsentem opus habet, patet utique, noctu ad praxin revocari non posse, neque etiam interdum cælo nubilo, sicuti nec cælo licet sereno, iis in locis ubi Solis usus non conceditur. His autem incommodis mederi licet sequenti modo, qui quovis tempore & loco feliciter succedit, si in operando dextre procedatur. Ad manus esto recipiens vitreum in suprema parte apertum,

apertum, quod operiri potest aëneo operculo habente in medio foramen rotundum admittens fufum vel, praxillum teretem, qui instar claviculæ in epistomio exacte repleat cavum foraminis, & in eo circumagi possit: Fufus autem ab ea parte, qua spectat recipientis cavitatem, sit transversim perforatus ut filum vel tenuis funiculus trajici possit. Utuntur vulgo hujusmodi recipientibus ad res in vacuo positas variis modis commovendas. Funiculi illius per foramen trajecti pars altera formetur in laqueum, cui inseratur prominentia meatus ceracei, qui hiat in ampullam. Hunc situm ubi habuerit in recipiente, operculo suo rite munito, aër educatur, mox eo educto fufus intorqueatur, unde efficietur ut funiculo in helicem fuso circumvoluto laqueus sese constringens meatum coarctet & occludat. Quod deinde superest perficiatur ut ante.

§. 9. Atque hæc sunt artificia, quibus usus olim fui in illius constructione. Plurima paravi exemplaria, quorum passim participes feci Viros doctos & curiosos, qui inventi novitatem & singularitatem miris laudibus celebrarunt. Illust. LEIBNITTIUS, ut hunc unum nominem, magnus certe quondam Litterarum, Scientiarum, & Artium Cultor ac Prostates, nec non in vero rerum pulchrarum pretio statuendo Judex, si quisquam alius, longe aptissimus, sententiam tulit de hoc Phosphoro nimis honorificam, quam ut hic commemorari non mereatur; Extat illa publice his verbis: „Cæterum, inquit agens de variis Phosphorum generibus, alia habemus genera Phosphorum, in quibus nulla sunt ignis vestigia. Inter quos omnibus palmam præripit ille, quem debemus ingeniosissimo Viro Johanni BERNOULLIO, qui ab aliis de mercurio in vacuo lucente observata excoluit, effecitque ut jam pro arbitrio produci possit, cum antea raro & casu lucifer mercurius haberetur. Creditibile est hunc Phosphorum perpetuo lucendi vim servare, aut saltem in longinquum tempus producere, quoniam ad lucendum non indiget aëre libero, ut Pyropus seu Phosphorus ignificus, sed in vitro hermetice clauso simplici concussione splendorem emittit, quod Augusto Borussorum Regi ita placuit.

*Miser. Bero'lin. pag. 98.*

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. A a a , cuit



„cui ut inventorem medallione aureo remuneraretur. Et in-  
 „telligo nunc Dn. DUTALIUM Parisiis, aliosque, in confir-  
 „mando promovendoque hoc Phosphoro non sine insigni suc-  
 „cessu laborasse. Quantam lucem talibus Phosphoris pluribus  
 „continue concussis producere liceat, inquisitione dignum foret.  
 „Nam concussio continuata per machinam facile effici posset,  
 „plurium Phosphorum lux refractione aut reflexione colligi.  
 „Quæ miror nondum fuisse tentata.

§. 10. Si attendisset LEIBNITIUS ad veram luminis mer-  
 curialis causam, quam hic exposuimus, ille vero nondum satis,  
 cum hæc scriberet, percepisse videtur, verbis istis, *credibile est,*  
*hunc Phosphorum perpetuo lucendi vim servare,* non subjunxisset  
 opinor hæc alia, *aut saltem in longinquum tempus producere.* Vi-  
 didisset enim vim illam esse indelebilem, nisi, ut jam innuimus,  
 superveniat mercurio aliqua injuria per accidens. Durabilitatem  
 sane confirmat lumen vegetum, quod videre est in duabus ampul-  
 lulis quas jam ante viginti propemodum annos in Phosphoros  
 paravi, & quarum luminis claritas nihil omnino decrementi ac-  
 cepit in hunc usque diem.

§. 11. Cæterum habentur alia adhuc methodi parandi Phos-  
 phoros nostros in lagenulis, partim a me ipso, partim a quibus-  
 dam Artificibus, postquam a me inventi notitiam acquisivissent,  
 excogitata & notabili cum fructu ad praxin vocatæ. Fabricarunt  
 enim eam in rem singularia machinamenta, quorum ope vas-  
 cula cum indito mercurio aëre evacuata obstruerent, atque hoc  
 pacto conficerent Phosphoros mercuriales variis usibus interven-  
 tes, quos, sicut alia curiosa Physico-mathematica, venales habent  
 Artifices peritissimi in Belgio, Germania, Anglia, alibi-  
 que, quos inter excellunt MUSCHENBROEKIUS, LEUPOL-  
 DUS, HAUCKSBEIUS. Scripsit namque primus inter nomi-  
 natos ad me, litteris exaratis 26 August. 1707, hunc in modum:  
*Multi hic sunt curiosi, qui a me emunt tuum Phosphorum mercuriale.*

§. 12. Sed ut pateat, qua arte MUSCHENBROEKIUS  
 utatur in obturandis vitrorum orificiis post aëris extractionem,  
 placet ejus verba in latinum translata exscribere ex litteris ad me  
 datis

datis 3 Decembr. 1706. „Legi, inquit, in Historia Acad.  
 „Reg. Scient. inventum tui Phosphori mercurialis. Jam annus  
 „circiter est, quod hoc experimentum imitatus fuerim. Sed  
 „inveni modum obstruendi vitrum obturamento vitreo optime  
 „posito. Applicui ad operculum recipientis syringam aliquam,  
 „cujus embolo affixa erat certa quædam forcipula, vel volsella,  
 „quæ tenebat obturamentum. Vitrum vero futuri Phosphori  
 „ita erat collocatum in recipiente, ut aëre rite exhausto, &  
 „postea embolo syringæ detruso, obturamentum ingrederetur  
 „in vitri orificium, illudque tam exacte circum circa repleret,  
 „ut citra metum potuerim aërem admittere in recipiens, utpote  
 „nulla via penetrare valentem in Phosphorum, sed potius sibi  
 „ipsi viam præcludentem per vim, qua obturamentum in orifi-  
 „cium fortiter adigebat. Hoc modo semper obtinui felicem  
 „successum, &c.

§. 13. Hæc operandi ratio elegans est, eoque magis placet,  
 quod nulla cera vel glutine ad oblinendas commissuras indigeat.  
 Sed quis, præter Artifices in hujusmodi operibus conficiendis uni-  
 ce & quotidie occupatos, industria & dexteritatis satis habeat,  
 ut ea quæ hic requiruntur sufficienti accurate executione possit,  
 quod præsertim spectat ad obturaculi polituram & conformatio-  
 nem tam exacte orificio vitri accommodandam, ut solo contactu  
 aërem ab ingressu arceat, eique adeo ne minimam quidem rimu-  
 lam ad transpirandum relinquat? Optimus certe obstruendi mo-  
 dus esset, isque in perpetuos usus tutissimus, si quis artem,  
 (quam non supra humanas vires puto) inveniret, orificium Phos-  
 phori post aëris exhaustionem hermetice sigillandi, ita tamen ut  
 inter operandum nihil aëris de novo ingrediatur.

## CAPUT XI.

*Respondetur variis objectionibus & difficultatibus, quas HOMBER-  
 GIUS, alique ex Academicis Parisinis, moverunt contra systema  
 propositum in explicationem luminis mercurialis.*

§. 1. **P**osteaquam in publicum prodiiisset novum istud in-  
 ventum de construendis pro arbitrio Barometris lu-  
 minosis



minofis, ut & Phosphoris portatilibus perpetuis, non defiere, qui statim onerarent inventum variis objectionibus & diuiculis, non quidem eodem animo prolaris. Nonnulli, qui præscriptas regulas ad amiffum fequi non poterant, ex finifiro fuffefu concluderunt, quod non verum fit mercurium fua natura in vacuo lucere, fed quod non nifi ex accidenti poffideat lucendi virtutem, per confequens non cuius mercurio competentem; cum potius defectum dexteritatis fuæ accufare debuiffent. Alii agnoverunt quidem rei veritatem, fed datis phenomenon explicationibus acquiefcere nolentes, alias fubftituere conati funt, ut fcilicet nobili invento aliquid faltem contriuiiffe videantur, quod folemne eft illis, qui ægre patiuntur, ut quis folus inventi fui gloria fruatur.

§. 2. Ad claffem priorem referendus eft fupra laudatus HOMBERGIUS, qui cum infeliciter adimpleviffet provinciam fibi demandatam ab Illuftr. Acad. Scient. eo tendentem, ut examinaret fystema meum de lumine mercuriali, atque experimentorum ab Inventore inffitutorum periculum fumeret, ob fequiorum, quem habuit fuffefum (non fua, fed regularum præfcriptarum culpa ratus) nonnullos inde formavit fcrupulos contra ipfum fystema partim, partim contra experimenta, quos Academia tradidit. Hæc vero mihi Inventori tranfmiffit ut refponderem. Quam autem dederim refponfionem ex Commentariis Acad. patet, num illa fatisfecerit vix eft ut dubitemus, fiquidem ab eo tempore tam HOMBERGIUS, quam alii Academici, qui illum fecuti in luminis mercurialis fuffefu querendo fuffra defudaverant, non tantum filentio fuo acquiefcere, fed & de re ipfa tandem convenire vifi funt, approbante quidem tota Illuftr. Academia, ficuti liquet ex eo. quod ipfius nomine fcripfit in laudem inventi Pereximius FONTENELLIUS in Hiftoria præfixa *Comment. Acad. anni 1701.*

§. 3. Objectiones HOMBERGII in fynopfim contractæ huc recidunt. 1. Pleraque Barometra fecundum methodos hic defcriptas a fe aliisque Academ. Parif. impleta, nullum dediffe lumen. 2. Quædam dediffe lumen, fed parciffimum. 3. Idque non

Hift.  
de l'Acad.  
Roy. des  
Scienc. de  
l'an. 1701.  
p. 1. fuit.

non durable, fed paulatim emoriens. 4. E contrario quædam Barometra more ordinario conftituta multum lucere, & quidem uno tempore fortius quam alio. 5. Mercurium qui in Barometris non luxerat, eundem luxiffe quidem in ampullis aère vacuis, fed non nifi fortiter agitatis, & luce perquam debili. 6. Aère iterum intromiffio lumen difparuiffe, neque aère altera vice extracto ullum luminis veftigium de novo excitari potuiffe, quantumvis fortiter agitata fuerit ampulla. 7. Perfectum aëris vacuum non requiri ad luminis productionem, fecundum ipfas Inventoris obfervationes & experimenta, adeoque non magnam requiri cautelam ad aëris omnimodam exclusionem, modo habeat mercurius peculiarem illam, quam putabat ad lucendum difpofitionem. Hanc vero credidit mercurio fupervenire poffe a caufa quadam accidentali, quæ illum potius quam alium luminis capacem reddat. Ita ut mercurio nihil aliud in fit naturaliter, quam generalis quædam difpofitio, per quam, accedente alia particulari caufa (quæ non adfit femper) mercurius evadere poffit luminofus in vacuo: eodem nempe modo, quo lapis Bononicenfis, per fe non lucens, fieri poffit ad lucendum aptus, ope certæ alicujus calcinationis.

§. 4. His præjudiciis occupatus ftatuit Vir Clariffimus in mercurio lucente effe quædam corpuscula, ut vocat, ignea, quæ dum mercurius exiftit in agitatione, emergant ad fupremam ejus fuperficiem, ibique inflammantur & luceant, atque hoc in vacuo facilius fieri quam in pleno, quia corpuscula illa ignea copiofius emergere poffint & liberius, fi fpatium fit vacuum, quam fi fit aère plenum. Illa vero corpuscula ignea fibi imaginabatur introduci poffe in mercurium per deftillationem chymicam, deceptus quadam obfervatione, qua putavit fe corpuscula illa demonftrare potuiffe. Scilicet ex mercurio, quem refufcitavit ex cinnabari ope calcis vivæ per deftillationem, paravit quædam Barometra, quæ deprehendit effe luminofa: hinc potius conclufit, mercurium tranfeuntem per poros calcis vivæ, tanquam per cribrum, fecum abdixiffe quædam ex corpusculis igneis, quæ in magna quantitate in calce vi-



va resitare putabat, & cum sint alias volatilia, haud ægre per distillationem a mercurio abripi potuerint, quæ postea in illius interstitiis inveniunt commoda sua hospitia, ex quibus autem profiliant sub forma luminis, cum mercurius in vacuo agitatur.

*Mémoires  
de l'Acad.  
des Sciences  
an. 1701.*

§. 5. Quod vero attinet ad ipsas objectiones *Homborgianas*, ad eas quidem fusc respondi in *Commentar. Paris.* ita ut fastidiosum esset singulas repetere responsiones: Sufficerit itaque si tantum monuerimus in universon, si *HOMBERGIUS* in experimentis instituendis non errasset, sed accuratissime omnia ad mentem meam effecisset, illum nullam ansam habiturum fuisse difficultates istas proponendi. Hic enim ei accidit, quod aliis quoque accidisse supra diximus; scilicet culpam infelicis successus perperam rejecit in methodos, quam imputare debuisset, aut suæ incuriæ, aut instrumentorum suorum defectui, aut fortassis utriusque. Alterutri enim horum adscribendum esse, quod objecit in tribus prioribus suis assertis, nemo sane dubitabit, qui rationes nostras supra allegatas, præsertim quas Cap. VI. adduximus perpenderit. Nam si in operando rite observasset quæ erant observanda, & ne minimum quidem errorem admisisset, pro certo asserere audemus, in nullis non Barometris secundum artem constructis visurum fuisse lumen, idque non parvissimum, nec temporarium & paulatim evanesçens, sed copiosum, vividum, & durabile. Quod quinto & sexto loco protulit *HOMBERGIUS*, favet sane nostræ sententiæ, ipsiusque propriam opinionem destruit: Quid enim? Si lucendi vis mercurio accidentalis est, non cuivis contingens, quid quæso dicendum de mercurio non lucente in Barometro, sed lucente in ampulla? Habuit, aut non habuit illam accidentalem vim lucendi? Si habuit, quare non luxit in tubo Barometri, æque ac in ampulla? Si non habuit, quare tamen luxit in hac? Deinde cur idem ille mercurius in ampulla vacua lucens, desit lucere in eadem ampulla, cum ab intromisso aëre altera vice evacuata esset? Debebat enim utraque, aut neutra vice lucere, quia secundum *HOMBERGIUM* prædi-

præditus erat, aut non erat, particulari illa ad coruscandum dispositione.

§. 6. Porro nequicquam objicitur 7<sup>o</sup> perfectum aëris vacuum non requiri ad luminis nostri productionem; adeoque non magna cautela opus esse ad accuratam aëris exhaustionem. Quod enim mercurius quandoque luminosus sit in vacuo, etiam si non perfectissimo, hoc utique verissimum est, ejusque rationem dedimus. Imo docui in *Commentariis Paris.* me aliquando usque adeo purificasse mercurium per sollicitam lotionem, ut in phiala aëre naturali plena agitatus scintillaret, cujus exemplum habemus in eodem illo mercurio supra citato Cap. VII. §. 4. Verum si concessimus aërem relictum in spatio, in quo agitatur mercurius, non semper eum privare omnimoda lucendi facultate; vicissim & hoc nobis concedendum, quod lumen in eo casu non sit tam perfectum, nec tam durabile, & æquabile, quam ubi aër summa cura a mercurio remouetur. Etiamnum itaque asserimus & sustinemus perfectum aëris vacuum requiri ad perfectam luminis, cujus capax est mercurius, excitationem, atque tantillum aëris relictum in vacuo imminuere posse lucis vivacitatem, usque ad totalem ejus abolitionem, sicuti manifestum est ex eo, quod diximus Cap. VIII. §. 7. de Barometro, in quo mercurius in altitudine tantum 24 aut 25 pollicum suspensus hærebat.

*Mém. de  
l'Acad. R.  
des Sciences  
1701.  
pag. 141.*

§. 7. Quid multis opus? Annon *HOMBERGIUM*, aliosque qui tam infelices fuerunt in imitandis Barometrorum phialarumque luminosarum effectionibus, resellunt tot alii sagaciores Naturæ Mystæ & Artifices, qui ex eo tempore Inventoris præcepta studiosè secuti auspiciatissimum habuere successum. Inprimis notari meretur industria Præclar. *DUTALII* Medici Parisiensis, qui non tantum ex eo ipso mercurio, qui *HOMBERGII* reliquorumque mali successus sociorum conatus eluserat, elegantissimum paravit Phosphorum, regulis nostris insistentem, atque quoties repetere volebat optatum finem semper obtinuit, sed & veritatis amore ductus ultro publicavit apologiam pro Inventore, sub hoc titulo: *Pièce justificative pour Mr. BERNOULLI, contre Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*

en



en faveur du Phosphore, qu'il a proposé à cette Académie. Extat illa in *Novis Litterariis* BERNARDI, A. 1706. Mens. Sept. In qua satis facete, & forsitan falsius quam par est, Academicorum illorum supinam incuriam ac frivolas objectiones exagitat, inter alia hæc habet, quæ latine reddita ita sonant:

„Ab initio, inquit, Academici isti habuerunt hoc phænomenon pro paradoxo, ac postquam se torisissent, omnesque intendissent nervos optatum eventum quærentes, confessi sunt, totius nationis probro, BERNOULLIUM, industria palmam præripere Gallis. Viri isti statim crediderunt BERNOULLIUM adhibuisse argentum vivum alterius naturæ quam quod ipsius adhibebant. Postea asseruerunt mercurium reddi luminosum a particulis igneis calcis vivæ, quam illum adhibere sibi fingebant ad mercurii purificationem. Asseruerunt alias rationes nihilo magis validas in scopi non impetrati prætextum. Hoc mihi memoriam refricat Philosophorum illorum, quos Celeberr. FONTENELLIUS fingit frequentare comædiam, infatuatos chymerica illa sua sympathia & antipathia. Certe si Viri isti ausi fuissent loqui more præcorum Philosophorum, nullus dubito, quin dixissent, BERNOULLII hydrargyrum habuisse aliquam qualitatem occultam, quam illud ab ipsis usitatum non habuerit; Ut verbo absolvam, illum libenter artis magicæ postulassent. &c.

§. 8. Sed ut serio ostendamus quam sint paradoxæ, quamque ab omni verisimilitudine alienæ particulæ illæ igneæ, quas hic tam lepide ridet DUTALIUS, perpendat Lector, inter plures alias, sequentes tantum ex illis ductas consecutiones. 1. Phosphorus noster tandem amitteret suam facultatem lucendi, quoniam frequenti agitatione particulæ istæ igneæ brevi evaderent inutiles, ut videre est in Phosphoris illis arte chymica paratis, qui ideo luminosi sunt, quia istiusmodi corpusculis igneis scætant. 2. Si corpuscula illa tam sint subtilia, ut hospitari possint in angustiis mercurii interstitiis, ac per ea penetrare, sicuti contenditur, haud dubie multo facilius penetrabunt poros vitri, utpote ampliores mercurialibus. Qui fit ergo, quod per ampul-

pullæ agitationem corpuscula ignea non oppido dissipentur avolando per poros vitri, quantacunque etiam sit copia illorum corpusculorum in argento vivo. 3. Denique, quod omnium optime commonstrat inanem corpusculorum igneorum fictionem, ne umbra quidem rationis reddi potest, cur lumen in Barometris non nisi descendente mercurio appareat. Nam si illud producitur a corpusculis istis igneis in suprema superficie columnæ mercurialis natitantibus, quid quæso causæ est, quod suum effectum non edant in ascensu mercurii aque ac in descensu; siquidem motu tantum opus sit ad id, ut successive emergant supra superficiem supremam mercurii?

## CAPUT XII.

*Discutuntur HARTSOEKERI ineptæ cavillationes, deregiturque ejus dolesæ machinatio, qua Inventum Bernoullianum extenuare conatus est.*

§. 1. VIX Orbi erudito innotuerat Phosphorus mercurialis, cum confestim universali applausu exciperetur; testibus innumeris elogiis, quibus nobile Inventum condecorarunt tam publice quam privatim Viri præstantissimi; usque adeo ut, scribente LEIBNITIO, dignus fuerit habitus, qui Regis Reginaeque oculos in sui contemplationem converteret, ac spectantis Aulae plausum impetraret.

§. 2. Solus HARTSOECKERUS a communi sententia discedens non putat operæ pretium, ut de hac re multa scribantur, nedum in eam tot encomia congerantur. Hinc agre fert, nescio quo livoris cæstro percitus quod in *Historia & Commentariis* Acad. Reg. Scient. Paris. tam copiose de Phosphori invento & tanta cum laude differatur. Imprimis male multat HARTSOECKERUM quod Scriptor elegantissimus FONTENELLIUS, Vir, ut notum est, acerrimi iudicii ac multijugæ eruditionis de eodem honorifice adeo fuerit locutus. Sed omnes impudentia limites transgreditur, quando BERNOULLIUM (me scilicet) plagii suspectum sistere conatur, insinuando illum

*Joan. Bernoulli Opera omnia* Tom. II. B b b non

Eclaircis-  
sément  
sur les  
conjectu-  
res Philo-  
sophes.

non primum observasse mercurium in tenebris lucere, utpote quod jam ante ipsum PICARDUS observaverit, subdole dissimulans BERNOULLIUM ipsum PICARDO primam (fortuitam tamen) observationem disertis verbis asseruisse; siquidem hinc, quod non minus aperte professus est, ansam arripuerit in luminis illius causam & originem inquirendi, atque certam methodum investigandi qua omnia Barometra reddi possent luminosa: quod denique illum perduxit ad egregium inventus Phosphori mercurialis portatilis, cui antea (præfiscine dixerim) nihil simile conspexerant curiosi. Hoc nunc fugillare folius est HARTSOECKERI, qui, cum meliora non possit, in more habet optima quæque contemnere, imo summorum Virorum HUGENII, LEIBNITII, NEWTONI, aliorumque labores & scripta, quæ ne quidem intelligit Geometriæ reconditæ cognitione profusus destitutus, ausu sacrilego depretiare & ludibrio habere.

§. 3. Sed non est cur multum moremur malitiosam nostri Aristarchi censuram; quippe quam æquiores rerum æstimatores dudum observarunt & refutarunt. Exemplum si quis desideret, inspiciat recensionem libri *Hartsœckeriani*, quæ extat in *Actis Lipsiensibus*, ubi Clariss. Recensor iniquam Auctoris criminationem hac strictura excipit, non perpendit HARTSOECKERUS (inquit) BERNOULLIO deberi, ut Phosphorus mercurialis pro arbitrio parari possit, cum antea non nisi casu haberetur: Et paulo post, quid de Auctoris genio sentiat, paucis ita explicat: *En tibi media, quibus utitur Auctor ad illustres adversarios provocandum, media scilicet quibus HARTSOECKERUS tantum, & ipsius similes utuntur, ut, quemadmodum in præfatione fatetur, illustres adversarios excitet, unum vero ex mediis illis est, Viros Celebrerrimos (sunt verba Clariss. Recensoris) & de re litteraria longe meritissimos nimia licentia oppugnare, eosque quamvis nulla data offensa scurriliter profcindere.*

§. 4. Exemplum aliud eorum qui Censoris futilem crisin improbarunt, nobis præbet Vir Clarissimus *Job. Frid. WEIDLERUS* Math. Prof. Witemb. qui in Eruditissima sua Dissertatione de Phos-

Ad. Lips.  
1711. P.  
321.

Phosphoro mercuriali contra cavillatorem disputans hanc fert sententiam justissimam: *Non opus erat, ait, magna contentione asserere, non BERNOULLIUM primum eum notasse, sed PICARDUM; cui nemo, quantum novi, primæ observationis gloriolam usquam voluit derogatam: tantum id jure meritoque BERNOULLIO largiuntur omnes, quod ante eum nemo tradiderit modum, comparandi peculiariter arte mercurialem Phosphorum, qui non nisi casu alias in Barometrorum quorundam siphunculis animadvertebatur.*

§. 5. Neque etiam moramur quod Antagonista dicit, sed non probat, rationem, quam dedit de lumine mercuriali BERNOULLIUS, esse intricatam & defectivam. Si quid rectius novisset, debebat prius impertiri, quam aliena carpere, sed quid dedit in hujus phænomeni explicationem? nihil certe quod immediatam luminis causam determinet, sed generalia tantum quædam asfert, ne nihil dixisse videretur; quæ autem partim falsa, partim a me in Scriptis meis publicatis jam diu ante notata, & inter impedimenta luminis potius quam causas relata fuere. Quis itaque non rideret hominem, qui luminis barometrici rationem daturus affectata brevitate rem ita expedire vellet: *Si Barometrum aliquod magis lucet quam aliud, hoc inde venit, quia in uno quam altero plus minusve aëris relictum fuit; Aut quia tubi constant ex diverso vitro magis minusve duro; Aut quia mercurius magis minusve est impurus, ipsorumque tuborum parietes magis minusve inquinavit; Aut quia mercurius fortius remissiusve ac longiori breviorive tempore agitatur.* Quid enim? An non hæc omnia, excepto quod de diversa duritie vitri ex suo cerebro habet fugillator, nulla nec ratione, nec experientia confirmatum, ipsemet ego jam dudum commemoravi, sed tanquam phænomena quæ erant explicanda, non pro causa luminis assumenda.

§. 6. Ut autem ulterius patefeat quid Eruditi moratiores de HARTSOECKERI stolidi ferocia sentiant, placet transcribere quæ hac de re scripsit Vir quidam Celebris in litteris ad me datis 10 Jan. 1711. „Nescio, inquit, an videris mensem Junium 1710 „des *Nouvelles de la République des Lettres de Mr. BERNARD*, „ubi est locus qui te respicit, in recensione libri cujusdam HART- „SOECKERI, quo Philosophus hic Mennoista præcipua mem-



bra Academia Regiæ Parisiensis, Te, NEWTONUM, AMON-  
TONIUM, HOMBERGIUM, TOURNEFORTIUM &c.  
fugillare refertur: Sed excerptam tantum id, quod de Barome-  
tro tuo luminoso agit; *Il prétend qu'on a trop fait valoir . . .* Post  
allatam HARTSOECKERI crisin, hæc porro habet; Tale  
judicium ex invidia & livore profectum non dubito, cum satis  
ostendat non nisi oscitanter tua Schediasmata super hoc Baro-  
metro ipsi lecta esse, nam ibi vidisset primam observationem  
te tibi ipsi non tribuere, sed PICARDO, cum diserte ibi di-  
cas, ejusmodi *Picardianam* observationem tibi occasionem de-  
disse periculum faciendi, primum an tuum Barometrum fortiter  
conculsum lumen emitteret, postea inquirendi in modum quo  
omnia Barometra lucida reddi possint. In hoc enim consistit  
inventum, quod PICARDO non innotuisse constat, cum in  
pluribus aliis Barometris simile lumen extundere non potuerit,  
nec ante inventi tui publicationem quisquam alius; atque ideo  
citra livorem PICARDO primæ inventionis laus tribui non  
potest, licet is primus phenomenon casuale observaverit. Quod  
vero HARTSOECKERUS alias causas substituere conatur,  
ridiculum se præbet; nam si earum aliqua veri speciem præ se  
fert, ex tuis est deprompta, sed depravata, reliquæ vero ab Auc-  
tore excogitata mihi eidem haud invidendæ, sed Auctore suo  
prorsus dignæ videntur. Sequentia etsi non respiciant mate-  
riam nostram, digna tamen sunt quæ legantur, ut Lector melius  
cognoscat indolem nostri Zoili. De NEWTONO, ita pergit  
Amicus, hæc habentur in Novellis: *Mr. NEWTON est atta-  
qué assez vigoureulement par notre Auteur. Il dit que toutes  
les suppositions, par lesquelles ce grand Philosophe tache de  
soutenir son ingénieux Systeme, valent bien moins que les qua-  
lités occultes des Anciens. Il ajoute que ce Systeme fait grand  
bruit dans le monde, parce qu'il y a une douzaine de Savans  
en Europe, qui ayant établi une espèce de commerce de louan-  
ges réciproques, le louent avec excès, & qu'un grand nombre  
de gens, qui ne sont que les Echos des autres, le louent avec  
tout autant d'excès, non par ce qu'ils l'entendent, mais seule-  
ment pour faire croire dans le monde, qu'ils sont aussi initiés  
dans*

*dans ces mystères.* HARTSOECKERUS haud dubie aliter  
locutus fuisset, si præclaræ illius laudum Societatis Assessor con-  
stitutus esset, sed eadem, ut videtur, exclusus, verbis illis do-  
lorem suum testari voluit. Ast quod ipsi solatio esse deberet,  
agmen is facile ducet in illa Visionariorum tribu, qui sibi ipsi  
magni videntur Apollines, atque philosophemata magna con-  
fidentia in publicum protrudunt, parum curantes quibus ratio-  
nibus opiniones suas confirmant.

§. 7. In aliis ejusdem Viri Celebris litteris ad me scriptis  
d. 22 Aug. 1711, hæc alia habentur notatu non minus digna.  
Gaudeo meas animadversiones in nugaces HARTSOECKE-  
RI cavillas tibi non displicuisse, quas tibi perscribere volui  
potius ut, quid de iis sentirem, videres, quam quod Phos-  
phorum tuum ejusmodi apologia egere arbitrarer. Etenim le-  
gendo illum Novellarum locum subito mihi animum subijt,  
illius Viri obtreccationes inanes elegantissimo invento nihil  
prorsus detrahere, sed contra Auctori suo famæ, si quam  
haberet, detrimentum afferre posse, utpote qui tam vanis  
objectiunculis eum se prodat, qui livore tabidus summorum  
Virorum reperta traducendo ad gloriam grassetur: cujusmodi  
hominum genus nil nisi bonorum indignationem incurrere aut  
sibilo excipi solet, loco vilis gloriolæ, quam sibi ab ignara lit-  
teratorum plebe pollicetur. Sed maxime ridiculum se præbuit  
nostrer Pseudophilosophus, cum *Newtonianum* systema confuta-  
re aggressus est, cum nemo non videat eum ne apicem illius sys-  
tematis intelligere. Et quomodo hic levioris armaturæ Auctor  
ea capere potuisset, quæ tamen convellere præsumsit, cum om-  
nis Matheseos, nedum sublimioris Geometriæ cognitione des-  
titutus sit? Tecum igitur miror Amplissimum LEIBNITIUM  
ineptulum hunc aliqua responsione dignatum esse.

§. 8. Complura alia ejusmodi judicia, si operæ pretium esset,  
asserere possem. Sed cavillationes hominis, nec moribus nec doc-  
trina conspicui, non merentur, ut operose vindicetur inventum  
quod semetipsum satis vindicavit, dum inter Eruditos curiosos  
tot Illustres Approbatores nactum est. Interim ego non leve



folatium, si quo indigerem, ex eo capere possem, quod viderim Thraonem nostrum non solum summis Viris HUGENIO, NEWTONO, LEIBNITIO &c. non peperisse, sed prorsus nemini, cujuscunque fuerit nominis, de quo quidem in ipsa statim præfatione gloriatur, tanquam de facinore laudabili. Nihil arrogantius, nihil quoque insulsius excogitari potuisset, quam HARTSOECKERI comminatio, qua se nulli mortalium suafurum dicit, ut ipsius primum elementum impugnare vel carpere sustineat, ni velit digitos suos adurere, cum sit *ignis purissimus*. Ita nempe ille unus omnes se non metuere, ab omnibus metui audacter contendit. Aliquam a se scriptam jactat Dioptricam. Interim quam sit in hac scientia hospes, ex eo colligere datur, quod ignoraverit veram generationem Iridis secundariæ consistere, ut vel tyronibus notum est, in duplici reflexione inter binas refractiones radiorum solarium: dum illam pueriliter attribuit guttulis quibusdam aqueis, consistentiam habentibus diversam ab ea, quam habent illæ guttulæ, in quibus Iris primaria apparet. Unde sequeretur, ordinem colorum in utraque Iride secundaria & primaria (quem ordinem respectu unius ad alteram inversum esse norunt, qui meteorologiam dioptricam e lumine tantum salutarunt) esse eundem: deinde secundariam a primaria non eodem intervallo nempe 9 grad. quovis semper tempore distare; sed pro diversa illa consistentia vel densitate guttularum, modo ad majorem, modo ad minorem distantiam, ac modo extra, modo intra primariam cadere debere. Hoccine ferendum in Dioptrices Scriptore? Et hæc quidem de HARTSOECKERO.

Vid. Eclairciss. sur les couleurs. Part. 2. du II. Diss. com. Livr. second p. 144. & 145.

CAPUT XIII.

*Expenduntur aliorum opiniones de causa luminis mercurialis in vacuo.*

§. I. **M**ateriam de lumine mercuriali a nobis in scenam producto, nemo melius postea excoluit, quam *Clar. Franc. HAUKSBEIUS* Soc. Reg. Lond. Socius, qui circa eam

eam varia experimenta curiosissima instituit. Ea quidem Londini edita ad manus nostras non pervenere; vidimus tamen eorum magnam partem in *Actis Lipsiens.* recensitam: Ubi patet Auctorem experimentorum in explicatione causæ illius luminis nobiscum non convenire, siquidem contendat Phosphorum barometricum non a motu mercurii, sed attritione vitri oriri, id quod ulterius inde confirmari putat, quod tubi Torricelliani partem vacuam digitis fricando, citra ullum mercurii motum lumen produci expertus fuerit; quamvis non prorsus neget, vim lucis productricem in mercurio quoque latere posse.

AAa  
Erud. Lips.  
An. 1709.  
pag. 238.

§. 2. Ad quæ sequentia respondemus: Mirum non est industrium HAUKSBEIUM (qui in experimentalibus forsitan felicior est, quam in veris rerum naturalium causis indagandis) a nostra discedere sententia. Cum enim in Anglia jam a pluribus annis invaluerit Physica attractiva (ubi scilicet omnia per vires corporum attractrices explicare conantur), voluit etiam hic, ut morem gereret hujus Philosophiæ Patrono, comminisci aliquam in vitro electricitatem, quæ per attritionem excitata non tantum corpuscula leviora ad vitrum alliciat, sed & lumen producat. Non equidem inficior, quod experientia confirmat, plura passim dari phænomena in rerum natura, ubi lumen per attritionem excitatur, cujus ipse ego quædam exempla satis memorabilia, a nemine prius observata, exhibui quorundam corporum lævigatorum, quæ ad vitri alicujus superficiem planam attrita in tenebris lucent. Inter alia ostendi mercurium cum stanno amalgamatum ex mutuo affricu cum vitro polito lumen elicere, adamantem vero quemlibet sectum, ut vocant, in tabulam, si superficies ejus superior affricetur ad superficiem planam vitri, exquisitum adeo lumen reddere, ut prunam ignitam & statu fortiter candentem amuletur. Unde non immerito conclusi, ab universali hac adamantum qualitate multum imminui raritatis pretium illius, quem BOYLEUS insignivit titulo *Adamantis lucidi*, de quo integram scripsit dissertationem, ut extolleret singulare, quod præ cæteris adamantibus habere putabat, lucendi privilegium; quo tamen, ut patet, non nisi in aliquo eminentiori gradu gaudebat, dum post finitam

Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences An. 1707. pag. 2. supra N°. LXXVI.



finitam frictionem, per aliquot momenta retinuit splendorem suum, quem reliqui statim amittunt.

§. 3. Hæc cum ita se habeant, lubenter concedimus, quod & nos dudum sumus experti, non tantum superiorem tubi barometrici partem, sed quodlibet vasculum vitreum aëre vacuum, si digitis vel aliter fricetur, ut paulo tantum incalescat, splendorem aliquem fulgurantem evibrare. Horum utique & similitudinem rationem physicam reddere non erit arduum, modo attente considerentur quæ Cap. III. de generali luminis causâ disseruimus: Duo nempe corpora se mutuo fricantia porulos suos, prope contactum, alternatim constringunt & dilatant; eorum vero porulorum labra ( quæ in alterutro saltem corpore elastica suppono, & eo quidem magis elastica, quo illud durius est ) inducunt motum tremulum velocissime reciprocantem, quo fit ut materia primi elementi in angustiorem interstitiis hospitans magno impetu excutiat eam in partem, ubi nullum, vel parvum impedimentum invenit, hoc est versus cavitatem vasculi vitrei, in qua nullus adest aër resistens & impetum infringens; hic igitur particulae primi elementi irruentes in solos globulos athereos, consuetum suum effectum edunt, atque lumen excitant.

§. 4. Idem quoque ut contingat necesse est, si primum elementum ex alterutro, vel utroque corpore explosum, intra mutuum contactum, ( qui ita immediatus esse debet, ut nihil aëris crassioris in eo remaneat ) jamjam impingat in globulos cœlestes ibidem solos existentes: lumen autem ex hoc conspectu excitatum eo fortius esse debet, quo plures sunt pori angustissimi in quibus duntaxat materia *luminifica* subtilissima existere potest, & quo duriora seu magis elastica sunt latera pororum, vel in utroque vel saltem in alterutro corpore; ita ut mirum non sit, mercurium amalgamatum, propter densitatem suam & vitri duritiam, sed magis adhuc adamantem, propter suam cum densitatem tum summam duritiam, ad luminis productionem esse præ cæteris idoneum.

§. 5. At quid tandem hæc omnia ad rem nostram? Quomodo lumen mercurii in vacuo per attritionem excitabitur? Quod  
si

si enim in tubis barometricis gracilioribus, in quibus sane columna mercurialis, propter, superficiem ejus majorem ratione molis, patitur frictionem fortiorem quam in amplioribus, lumen tamen minus sensibile conspicitur, ut supra notavimus, attritio utique generationi luminis nostri potius officit quam prodest. Quid insuper dicit Clar. HAUKSBEIUS ad hanc singularem circumstantiam, quæ lumen Barometri distinguit ab illo altero per attritionem corporum excitari solito? Quod scilicet illud se videntum præbeat tantum in descensu mercurii, minime vero in ascensu. Hæc sola circumstantia, quæ nostram theoriam singulariter commendat, funditus evertit, sicuti HOMBERGII, ita & HAUKSBEII, aliorumque opiniones contrarias.

§. 6. Deinde, si quid hic attritio contribueret ad luminis nostri apparitionem, non video quare illud occupet tantum summitatem cylindri mercurialis; cum potius diffusum esse deberet per totam superficiem cylindricam: siquidem hæc sola oscillante cylindro omnem attritionem, nullam vero supra superficiem horizontali parallela patitur.

§. 7. Porro, cum observemus in Phosphoro mercuriali ampullæ incluso, quamlibet guttam lucere in parte postica, non vero in laterali, qua tangit vitrum; imo etiam lucere, quando labitur vel volitat per spatium vacuum, ita ut vitrum plane non tangat; liquet utique HAUKSBEIANAM luminis mercurialis explicationem ex affricu petitam infirmo admodum stare talo, eamque prorsus corruere, si hoc tandem in ipsius infirmationem addideris, quod experimur, lumen illud tam delicatum esse, ut a minima quadam labe, aliave insensibili alteratione extingui possit; cujus insigne exemplum extat in *Comment. Parsf.* Nimirum in phiala aliqua in Phosphorum rite præparata, postquam per sex hebdomadas æquali semper vigore luxisset, micam suberis, quæ ab obturamento in mercurium erat delapsa, ope radiorum solarium per vitrum causticum collectorum combusta, ut nonnihil fumi excitaretur in cavitae phialæ cæterum in suo statu manentis, visurus quid mutationis inde accideret luminis mercuriali; deprehendi mirum quantum pristinae luminis vivacitati

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II.

C c c

*Memoires  
de l'Acad.  
A. 1701.  
p. 145.*

ti

ti decessisse, & cum antea ad levissimam commotionem statim coruscare inciperet, jam violentissimis succussionibus vix sensibilibus apparuisse. Vellem igitur ut mihi ostenderetur quo pacto, post tantilli fumi exhalationem, sequi potuerit notabile adeo luminis dispendium: dicere enim a fumo interceptam aut impeditam fuisse attritionem mercurii ad vitrum, tam foret ridiculum quam falsum. Cæterum, quod addit HAUKEBEIUS, vim lucis productricem in mercurio quoque latere posse, verum quidem, sed nihil explicat; nam oportebat docere in quonam consisteret illa vis; alias hoc esset supponere quod est in questione. Sed de hoc fati.

§. 8. Locum inter dissentientes sibi quoque vindicat Cl. Joh. Frid. WEIDLERUS, qui in doctissima sua Dissertatione *De Phosphoro mercuriali*, hujus historiam accuratam tradidisse non contentus, exhibuit novam aliquam hypothesin in luminis hujus causam explicandam. Sed ut verum fatear, usque adeo paradoxa mihi videtur & ab omni verisimilitudine aliena, ut firmiter mihi persuadeam; Auctorem ipsum eam non aliter considerasse, quam ingenii sui lusum, cui forte aque parum fidei tribuerit, ac Poetæ suis fabulis.

§. 9. Consistit autem, ut eam breviter tantum exponam, in hoc, quod supponit lucem debilem, absente lucido, superstitem manere in locis tenebrosos dispersam & invisibilem; unde deducit Theorema mirabile, quod ipsius verbis conceptum ita sonat: *Lucula, a mercurio in tenebris concusso, diffusa, originem suam unice ducit a repercussione serierum ætherearum, sive radiorum lucis impetum directum, vel saltem nisum ad eundem, qui a violentâ pressione siderum, præcipue Solis, proficiscitur, superstitem semper etiam in tenebrosos locis conservantium.* Sed quid jam contribuunt superstites illæ series æthereæ, seu radii lucis invisibiles, ad reddendum mercurium in Barometro luminosum? Audi quæso lepidum commentum! Mercurius nimirum habens superficiem politissimam, fungitur officio speculi concavi, quod radios luminis, ceu notum est, in foco colligens, majorem ipsi vivacitatem conciliat. Bene! At quænam est illa mercurii superficies, quæ induit figuram concavam?

cavam? Noli querere! Annon enim meministi ejus quod supra diximus, supremam superficiem columnæ mercurialis, quoties descendit in tubo Torricelliano excavari. En ergo speculum concavum, pusillum quidem, utpote quod vix sextantem pollicis in latitudine habet, sed adeo politum & ex tam densa materia constat, ut ex opinione Clar. WEIDLERI series æthereæ, vel lucis radii in tenebris dispersi, ac quasi deperditi, in hoc speculum forte fortuna impingentes valide ab eo repercutiantur, atque repercussi coeant in foco, ibique collectis suis viribus illam, quam miramur Noctilucam producant.

§. 10. Verum animo jocandi talia ab Auctore prolata fuisse, non dubito. Alioquin serio locuturus potuisset, cum aliqua saltem veri specie, sed admodum modica, fingere radios solares a mercurio imbibiti, atque ab illis in obscuritate lucidum reddi, eum in modum, quo idem contingit lapidi Bononiensi: fuisset hoc figmentum nonnihil speciosius, sed nihilo magis verum, ob rationes quæ sponte se offerunt. Phosphori illi duo mercuriales, quos suo loco diximus jam ante plus quam 20 annos fuisse paratos, asservantur in arca quadam clausa, per plures quandoque menses non referari solita, ita ut proinde nihil lucis solaris ad eos pervenire queat, nec directe, nec per reflexionem: noctu tamen agitati, quotiescunque experimentum facere libuerit, eandem lucem fundunt quam prima nocte fuderunt. Quid hic efficiant radii solares in tenebris superstites, & a superficie mercurii tanquam a speculo ustorio collecti, ut jocari voluit WEIDLERUS, nemo assequi valet; præsertim cum qualibet gutta mercurii per agitationem a reliquo separata sit luminosa, quamvis utique habeat superficiem convexam, non vero concavam ad radios colligendos aptam, qualem Clariss. WEIDLERUS requirit, ad lumen Barometri explicandum.

§. 11. Saniorem fovet opinionem de nostro lumine Vir Clariss. Joh. Georgius LIEBKNECHT Mathem. Prof. Giesanus. Is enim in pererudita sua Dissertatione *De Noctiluca mercuriali* edita Giesæ Anno 1716, non tantum subscribit in universum Theoriæ nostræ, sed & ejusdem partes solidis argumentis



Pag. 35. tuetur adversus Clariss. WEIDLERUM. Videtur tamen quod eam velit arguere alicujus imperfectionis, quasi *multarum observationum suarum causas suppedilare non possit*. Non vero exponit, quænam sint illæ observationes nostris rationibus inexplicabiles, nisi quod innuat, Barometri lumen augeri posse, per repercussionem radiorum a vitro & hydrargyro fieri solitam, ad quod in nostra Theoria nulla attentio facta sit.

§. 12. Verum, si vel maxime tribuendum esset aliquid isti repercussioni, profecto is, qui systema generale est traditurus, non tenetur rationem habere circumstantiarum quarundam non essentialium. Explicanda erat causa efficiens luminis mercurialis, non vero ejus augmentatio accidentalis, aliæ ejusmodi modificatio a causa aliqua peregrina dependens, quæ ad ipsam rei naturam nihil confert. Quamvis talia quoque in promptu habuerim, quæ ex invento meo ad curiositatem partim, partim ad utilitatem derivavi, atque passim cum Eruditis per litteras communicavi.

P. 2. §. 13. Miramur quoque Clariss. LEIBKNECHT ita loquentem de LEIBNITIO, quasi primus hic animadverterit vel crediderit *lucem mercurii esse perpetuam*; cum tamen hæc perpetuitas ex systemate nostro necessario fluens non potuit silentio præteriri a me ejus Inventore. Sic eam variis in locis diserte exprimo: Vide *Comment. Acad. Reg. Scient. Edit. Paris. 1700. p. 128. Histor. ad annum 1701. p. 8. Comment. ejusd. anni pag. 7. 138. 139. 143. 146.*

§. 14. Ex eo quod Cl. LIEBKNECHT fulgorem mercurii, qui in lagenula apparet, postponendum ducit illi alteri, qui in Barometris observatur, judicari omnino potest: præstantiam Phosphori mercurialis in ampulla aëre vacua ipsi non satis fuisse compertam; neque hoc mirandum, quia vasa illa, in quibus lumen mercurii inclusi observavit, adhuc continebant aërem crassum, aut calore ignis non nihil rarefactum: perfectius enim aërem educere non poterat Vir Clariss. antlia pneumatica, ut videtur, destitutus. Hæc utique causa est, cur ex mercurio non nisi scintillas hinc inde sparsim profluentes animadverterit, id quod jam supra Cap. XI. §. 6, a nobis notatum. Propterea illi facile largi-

largimur, lumen Barometri in descensu mercurii apparens, utpote æquabilis vivacitatis, attentione dignius esse, quam quod scintillatim tantum & vix sensibilibiter intermicat, sine ordine, inter partes mercurii in vasculo non exinanito agitati. At vero dubium non est, quin protinus aliter sentiret, si autoptis fieret unius ex illis Phosphoris, quos ante quatuor lustra me passæ in ampullis vitreis & hodiernum asservare supra memoravi. Tanta enim est fulgoris claritas, quanta primo die, & quantam non æquarent, si sex Barometrorum lumina in unum coïrent. Id quod Phosphori hujus præstantiam & perennitatem, nemine amplius contradicente, luce meridiana clarius probatam deprædicat.

## CAPUT XIV.

*Sistit Phosphorum mercurialem ad varios usus applicatum.*

§. 1. **H**Uic Dissertationi coronidem impositurus paucis narabo nonnullos fructus, cum ad utilitatem, tum ad animi oblectationem ac curiositatem redundantes, quos ex invento meo sperare licet. Et quidem primo loco commemorari meretur Horologium nocturnum, quod ex Phosphoro mercuriali confici posse statim videbam, atque tum cogitationes meas hac super re cum quibusdam curiosis communicabam. Scilicet parentur duo vitra conica cava, atque post introductam in alterutrum eorum vitrorum sufficientem quantitatem mercurii optime præparati, conjungantur cuspides amborum (ut formam induant clepsammidii seu horologii arenarii) interposito diaphragmate foraminulum habente, per quod mercurius ex superiori vitro in inferius delabi possit. Diaphragma autem esto ex ebore, aliæ materia corrosioni non obnoxia. Tum aër ex vitris sollicitè educatur, aptoque glutine muniatur cuspidum commissura, ne quid aëris in vitra subreperere possit. Hoc modo habebitur horologium desideratum, quod in tenebris nocturnis representabit flum lucidum mercurii per foraminulum destuentis, usque dum omnis ex superiori in inferius vitrum transiverit. Si pro vitris conficis

adhibeantur duo tubi oblongi, facile procurari poterit, ut mercurius plures horas insumat defluendo, atque per longitudinem filii lucidi paulatim decrecentem indicet quoque horarum quadrantantes, imo minuta.

§. 2. Ex hac speculatione mox in aliam incidi, atque aliis præcundo observavi, hac arte construi posse lucernam inextinguibilem & perenniter lucentem: quales ferunt fuisse antiquorum lampades sepulchrales, de quibus autem inter Eruditos etiamnum disceptatur, utrum revera tales unquam repertæ fuerint, nec ne: siquidem dantur Philosophi qui flammam nullo ævo interituram contendunt rem esse prorsus impossibilem. Ecce vero jam lampadem nostram, quæ nec ellychnio, nec oleo opus habet, non quidem ardentem, sed tamen lucentem in perpetuum, modo accipiat motum aliunde, ex. gr. a fontis alicujus vivi defluvio. Lumen vero ut fortius evadat, poterit ex consilio Illustr. LEIBNITII plurium phosphorum lux refractione aut reflexione colligi. Idem Vir Celebris in litteris suis privatis notat, Phosphorum nostrum inservire posse in spectaculis pyrotechnicis nocturnis, conficiendo ejus ope ex vitro cavo aliquid, ex. gr. instar sceptri aut coronæ, quod a machinamento quodam obrecto continue agitata semper luceat; sed quod non est dissimulandum, lucis illius debilis claritas eminus vix percipi posset, nisi forte suppeteret artificium, quo illa concursu plurium Phosphorum redderetur intensior.

§. 3. Recenseri hic meretur machinamentum HAUKSBEIANUM, cujus ope mercurius transformatur in pluviam igneam; verius puto quam Jupiter quondam in pluviam auream mutatus a Poëtis dicitur. Res ita se habet. Duo constituuntur vasa vitrea, alterum in altero, ita ut majus, quod ambit minus, relicto inter utriusque latera sufficienti interstitio, in suprema sua parte instructum sit infundibulo desinenti in tubulum. Hoc autem tubulo per immissum teretem paxillum ocluso, ut infundibulum continere possit infusum mercurium, aer ex vasis extrahitur. Postea in tenebris, retracto paxillo ex tubulo, mercurius magna violentia ab aëre desuper premente impellitur ad instar rivuli in

cavi-

cavitatem vasis majoris, qui cum impetu illidens in verticem vasis interioris, in plurimas disjicitur guttulas lucidas, quæ, juxta latera vitrorum circumcirca affatim decedentes, imbrem quasi igneum jucundo spectaculo repræsentant.

§. 4. Machina hæc non levi incommodo laborat; ideo quia, quotiescunque experimentum instituere animus est, de novo semper aer ex vasis exantlari debet. Cui medelam attulit ingeniosissimus artifex LEUPOLDUS, constructa hunc in finem alia machina commodiori, qua mediante, citra aëris iteratas exhaustiones, quot vicibus libuerit inflitui potest experimentum.

§. 5. Hisce tandem addo fonticulum salientem lucidum, cujus structuram ex præcedenti machinamento quilibet sibi facile imaginabitur. Dummodo id curet ut mercurius pressus per tubulum sursum dirigatur. Hoc autem cum variis modis effici possit, pluribus rem facilem non persequar.

§. 6. Quod superest indicabimus modum, absoluta hac Dissertatione nobis inventum, obstruendi orificium Phosphori exhausto aëre per hermeticam sigillationem, id quod in fine Capituli X, magni quidem operis, non tamen supra humanas vires esse diximus. Rem ita feliciter exequendam speramus: Scilicet nitidam ampullam vitream diametri circiter duorum pollicum, quæ desinat in collum gracile, longitudinis semipedalis, diametrum habens unius tantum lineæ, implebimus accuratissime mercurio, optime præparato, ope infundibuli vitrei, cujus tubulus satis longus & satis tenuis sit, ut per collum ampullæ intrudi possit usque ad ejus fundum. Deinde sumemus tubum barometricum utrinque apertum, cujus in alterutra extremitate portio quædam exigua semidigitum non excedens sit reflexa, ut cum tubo angulum faciat paulo majorem quam rectum. Huic parti reflexæ inferemus extremitatem colli ampullæ, insertionem probe obliniemus cera, atque eadem vitrum cum vitro ita conglutinabimus & adunabimus, ut firmiter sibi mutuo adhæreant & nihil aëris externi per commissuram ingredi possit. Hoc facto, ampullam cum tubo adaptabimus ad assulam cum in finem paratam, ac tubum studiose implebimus mercurio, ita ut jam tota

cavi-

cavitas ampullæ, colli, & tubi una tantum continua massa mercuriali sit plena, ac nullum in illa super sit interstitium in quo aliquid aëris hæreat. Erecto postea toto apparatu, ac immisso orificio tubi aperto relicto in subjectum vasculum mercurio semiplenum, descendet mercurius ad consuetam æquilibrii altitudinem, & quia collum ampullæ acquiret situm declivem, deplebitur ampulla ultra dimidium, verum si nimium mercurii in illa restiterit, inclinabimus nonnihil machinam, ut declivius fiat collum, quo ipso aliquid mercurii ex ampulla per collum delabatur in columnam mercurialem in tubo barometrico suspensam hærentem. Sic itaque evacuata ampulla ad justam remanentis mercurii quantitatem, collum in media circiter longitudine, ubi eum in finem assula hiatum habere debet, ne flamma ligno noccat, liquefaciemus ope flammæ lampadis auctæ & excitate per statum spiritus vini in æolipila calefacti. Virum liquefactum a compressione aëris externi comprimetur. Si vero metuendum, ne obstructio non sit perfecta, poterit perfici forfice candente, & simul eadem dissecto collo separari a tubo Barometri. Habebimus ita Phosphorum hermetice sigillatum; ut speramus, elegantissimum.



JOH.

N<sup>o</sup>. CXIII.

JOHANNIS BERNOULLI  
RESPONSIO AD NONNEMINIS  
PROVOCATIONEM,

*Ejusque solutio questionis ipsi ab eodem propositæ de inveniendâ  
Linea curva quam describit projectile in medio resistente.*

**P**roponere Problemata in publicum non caret utilitate; Acta E-  
rud. Lips.  
1719. Mai.  
pag 216. hac enim ratione excitantur & acuuntur ingenia, ac sæpe aliquid eruitur in scientiæ incrementum, quod alioquin forte absconditum mansisset. Hoc igitur nomine laudabilis est illa quovis tempore recepta consuetudo, qua cum primis Geometræ mutua problematum propositione vires suas subinde exercuerunt: amittit vero pretium suum, statim ac degenerat in abusum a parte Proponentis; quod fit, quando non indefinite proponit, ut cuique fas sit propositi vadum tentare, sed ei tantum, cui male vult, & quem cuperet solutionis non capacem fore; cum tantum in finem, quo postea ex illius quasi infirmitate triumphet.

Exemplum hujusmodi indecentis provocationis dedit nobis Homo quidam, natione *Scotus*, qui ut apud suos impuris inclavit moribus, ita apud Exteros jam passim notus odio plus quam Vatiano quo flagrat, in ipsos præsertim *Germanos*, usque adeo implacabili, ut cum aliis sui similibus sibi persuadeat, quod in rusticitate modum excedere non possint cum *Germanis* controvertentes; cujus quidem ille causam non aliam habet, quam quod putet hos præ aliis resistere immodicæ ambitioni, qua occæcatus quicquid hætenus inventum est populi  
*Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. D d d la*

laribus suis arrogare contendit. Mirum profecto, quod inclutus NEWTONUS, cujus ingentia merita suscipiunt omnes veri rerum pulchrarum aestimatores, talem non repudiet vindicem, a quo sane laudari turpe mihi ducerem, vituperari honestum. Nostros si admitteret plausus Vir egregius, si nostra ipsi placerent præconia; uti sunt sincera atque a partium studio aliena, ita magis forent solida ac fide magis digna, saltem apud eos, qui non nisi ex aliorum iudicio de rebus ipsis iudicare valent.

Quod itaque attinet ad Aggressorem nostrum, qui nominari non meretur, tulit ille ægerrime quosdam a me notatos errores in *Phil. Natur. Principiis* NEWTONI, quos in *Actis Lips.* anni 1713 correxi, \* falsis vera substitui, ac defectus aliquos supplevi; tanto cætera candore & modestia usus, ut NEWTONUS ipse, qui in fine Præfationis hoc a Lectore suo petit, non tantum non offensus meis annotationibus, sed, ut postea intellexi ab Amico communi qui NEWTONO familiariter utitur, iisdem haud parum devinctus esse videretur: nec miror; quis enim veritatis amans in errore licet incius perseverare mallet, quam ejus admoneri? Cum præsertim eo jam ventum esset, ut altera *Principiorum* editio paulo post in lucem prodiret; quod proin elegans Opus iisdem navis dedecorum comparuisset, nisi amica nostra interpellatio tempeste intervenisset.

Hoc vero, ut modo dixi, momordit Antagonistam *Scotum*, quasi, quod ridiculum, toti suæ Insulari Nationi ignominiosum esset, *Britannum a non-Britanno* corrigi, lapsusque a summo Geometra commissos detegi a Geometra quodam inferioris subcellii. Dissimulato aliquandiu dolore, cum lites interim suscitasset magno quondam LEIBNITIO, voluit, ut nunc apparet, in suas me trahere partes, multis in me congestis encomiis & honorum titulis in aliquo contra LEIBNITIIUM scripto edito in *Diario Hagensi* †: Sed cum vanis laudibus facile inescari me non patiar, nolui, quod litigator optabat, me immiscere controversiæ intempeste inceptæ, multo minus partes amplecti contra LEIBNITIIUM; partim quia rixarum sum per-

\* N<sup>o</sup>. XC. Tom. I.

† Tom. IV. Part. 2. pag. 331.

petatus, partim quia argumenta quibus pugnare solet Aggressor sunt talia, ut illis, si vel *Anglus* essem, convinci non possem. Irritatus hac mea renitentia laxavit tandem fræna furori; atque relicta blandorum verborum methodo, iniiit conviciorum viam, quibus me, quod audio, mascule obruit & obruere pergit, sicuti solent qui desperatam habent causam; qui antea ipsi eram in calculo infinitesimali versatissimus, nunc mutata rerum facie, uti in eodem *Diario* \* testatur, hunc calculum ne quidem intelligo; credo equidem, cum postremam suam sententiam ferret, præ furore non meminisse ejus quod antea sedato animo scripserat. Taceo alia, ut rumor fert, dictu horrenda, ex quibus nuper conflavit libellum, (editum an ineditum nescio) quem tum manuscriptum circumferebat prælo destinatum. Fuerunt, ut mihi scribitur, inter ipsos adversæ partis sequaces, qui perlegendo cohorrerunt. Sed ita sum animatus, ut, quemadmodum ejus elogia me parum affecerunt, ita nec ejus contumelias morari constituam, utrumque æquali animo excepturus. Quod enim superiori anno in *Actis* hinc moneri curavi, me nemini responsurum, qui aculeis & conviciis militare vellet, id jam repeto, atque sanctissime observabo; securus utique, me quoque filente maledicorum conatus in fumum abire, ab illis enim meam qualemcunque existimationem dependere non puto.

Materia autem, circa quam meæ animadversiones errorum *Newtonianorum* versabantur, desumpta erat ex Sectionibus quatuor prioribus Libri secundi *Philosophiæ Natur. Principiorum*. Antagonista, ut extenuet meum laborem, causatur in aliqua Epistola, cujus apographum ipso ita dirigente ad me missum fuit, quod hæc unica pars *Philosophiæ Newtonianæ*, quam ait me summo studio excoluisse & examinasse, nullius sit momenti; quamvis NEWTONUS ipse longe aliter sentire videtur in fine Sectionis quartæ, ut pote qui has disquisitiones vocat perplexas, ac proin hand dubie præ reliquis dignas, ut singulari attentione pertractentur.

D d d 2

Cre.

\* Tom. VIII. Part. 2. pag. 431.





Credebam ego, quod in honorem NEWTONI fateri non pudet, in toto ejus Opere nihil non momentofum contineri: *Scotus* vero noster, qui cateroquin etiam errores ejus mordicus defendere fatagit, nunc partem invenit notabilem Operis *Newtoniani*, quam tanquam nauci exagitat ac vilipendit; ita solet furor in transverfum agere quosdam homines, qui sibi libenter unum eruerent oculum, dummodo liceret ambobus orbare eos quibus sunt infesti. Interim hic iterum turpiter prodit insanum, quo laborat, sibimet ipsi contradicendi cacoëthes. Postquam enim prædictam partem *Philos. Nat. Principiorum*, ceu rem frivolam & inutilem explosisset, subdit statim, in eadem Epistola, *se, si velim exercere meam industriam in aliqua re utili, desiderare, ut solvam Problema tentatum pridem a LEIBNITIO, sed qui erraverit & solvere non potuerit: Problema autem ad cujus solutionem me provocat, ita habet, Invenire curvam, quam projectile describit in aëre, pro simplicissima suppositione gravitatis atque medii densitatis uniformis, resistentia vero in duplicata ratione velocitatis.* Ubi statim Lectorem attendere cupio ad inconstantiam Provocatoris, Problema hocce tanquam *utile* & solutu dignum æstimantis, quod tamen ad ipsam illam spectat materiam, in cujus enucleatione studium singulare collocavi, & qua ipsius judicio nullius est momenti, nullique inservit Naturæ phænomeno explicando. Est enim illud Problema nihil aliud quam inversum Prop. X. *Philos. Nat. Princip.* p. 232. Edit. poster. ubi NEWTONUM hallucinatum demonstraveram. Insanientis certe est, crasse adeo sibi contradicere, ut 5 vel 6 lineis unum idemque modo nullius, modo magni æstimet momenti.

Quare autem hoc potius Problemate quam alio me tentare voluerit, conjectu haud difficile mihi fuit. Credebat enim, cum nullam illius solutionem invenerit ipse NEWTONUS; (nam si invenisset, nullum est dubium, quin *Principiis* suis inferuisset, majoris quippe utilitatis futurum, quam illa est, quæ extat pag. 215. pro hypothese naturæ non convenienti, supponendo scilicet resistentiam simplici velocitati proportionalem) credebat, inquam, hoc quod eluserit sagacitatem magni NEW-

TONI,

TONI, immo omnium tum temporis, cum hæc scriberet, Geometrarum Anglorum, idem multo magis vires meas superaturum. Interim quamvis, meæ tenuitatis conscius, mihi tantum non tribuam, ut cum consummatissimo Geometra NEWTONO paria facere velim; contigit tamen mihi invenisse id quod lynceos ejus oculos fugerat. Etenim visa Provocatoris Epistola, quam ab Amico aliquo Viro Nobili & insigni Mathematico communicatam acceperam ineunte Februario anni superioris, non diu post plenaria potitus sum solutione, & quidem ultra quam deposcebat Provocator, quandoquidem illa se extendit ad hypothesein resistentiæ, non tantum in duplicata, sed in quavis multiplicata ratione velocitatis.

Verum ante quam solutionem meam publicarem, justum & æquum judicabam, ut Provocatori suum ipsomet Problema vicissim proponerem. Quare subsequenti mense Maio ad eundem Amicum rescripsi, rogavique ut eadem, qua fuerat compellatus, via uteretur ad significandum Adversario petium meum, quod eo tendebat, ut ante tum proximum mensem Septembrem declararet, num ipse Problema suum solverit, aut solvere possit; addita simul justissima hac comminatione, nisi statuto tempore responsurus sit, me silentium ejus accepturum pro tacita confessione suæ imbecillitatis, atque hinc fonticam eausam habiturum conquerendi publice de ipsius turpi & inhumano mecum agendi modo; siquidem me tentaverit quodam mihi proposito Problemate, cui solvendo se ipsum longe imparem sensisset.

Terminus iste, ad intercessionem Amici, prorogatus fuit meo consensu usque ad Calendas Novembris, ita ut fere semestere deliberandi spatium habuerit Provocator: Sed turpi fuga terga dedit, & loco solutionis proprii sui Problematis, quam utique possidere prius debebat, quam illam a me exigeret, hunc futilem tergiversationis suæ prætextum obtrusit, scilicet *me agere imitatore LEIBNITII, qui cum ad argumenta respondere non posset, in Problematum propositione diverticula quaesiverit; jam non controversi, ver nostrum melior sit Geometra meliusque sciat*

D d d 3

Pro-

*Problemata resolvere: sed cardinem questionis esse, quis sit inventor calculi fluxionum directi & inversi, &c.* Sed quid ad me aliorum litigatio? Quid inde utilitatis redundat in publicum? Esto penes quemque Lectorem adjudicare inventa cuicumque voverit, modo inde doctior evadat. Si quis mihi mea epipere, ac sibi vel aliis attribuere gestiet, per me licet; erunt semper inter æquiores de rebus gestis instructos, qui quod verum deprehenderunt suum cuique publice asserere non verebuntur. Extant hanc in rem scripta nostra, quæ ut totidem monumenta facile dissipabunt inania jurgia, his demum temporibus tanto cum ardore agitari cœpta a vitiligatoribus, quorum magno suo merito Coryphæus est Provocator meus. Quis autem non miretur miserabile subterfugium, quo se a mutua obligatione ad id, quod mihi imponebat, subducere conatur? Provocat ille me ad certamen; ego compareo: provoco vicissim; comparere renuit: quod a me præstandum poposcerat, præstiti; idem ab ipso præstari petii, quid æquius? Hoc vero ille jam vocat diverticula quærere; uter diverticula quæsierit, nunc judicet Lector: sane si invenisset in armamentario suo idoneum quid ad explicandum Gordium suum quem mihi proposuit nodum, quanta quæso hilaritate prorupisset in scenam? Sed latuit, sed siluit pudibundus, si quid pudoris adhuc habet.

Sicuti nemo dubitabit, illum interim, cum se imminente termino in angustiis videret, ab omnibus Mathematicis, quos habet amicos, flagitasse manus auxiliatrices; ita firmiter mihi persuadeo, si quis in *Anglia* optatam solutionem præstituto tempore invenisset, quod eam protinus cum publico communicare non fuisset intermissurus; siquidem, ut videmus, sollicitate adeo caveat impotens Thraſo, & qui cum eo faciunt, ne qua inventi gloria ad Exteros transeat, atque ii aliquando exinde occasionem triumphandi arripiant.

Quæstio itaque ex *Anglia* oriunda nullam inibi solutionem accepit ad primum usque Novembris, qui ultimus fuit dies termini concessi, intra quem Provocator, aut quicumque vires ejus (cum ipse non posset) supplegere volebat, debuisset comparere.

parere. At sexto demum Novembris, styli veteris, seu decimo septimo ejus mensis, styli nobis usitati, significavit Cl. TAYLORUS, Vir ingeniosissimus, a Provocatoris moribus, ut speramus, longe alienissimus, se invenisse aliquam solutionem, quam sub hoc characterum involucre ( $r^4 - 1 + 4rrr + 4ur^2$ ) tectam transmissit, promittens se quoque explicationem ejus communicaturam, statim ac sibi innotuerit quod meam prius solutionem communicavero. Proinde, sine mora, per literas ad Illustriss. MONMORTIUM amandavi Constructionem, quæ Problemati infinites generalius, quam proponebatur, conceptu satisfacit. Lubet autem eandem publice exponere, ut cum *Tayloriana*, sicubi hæc in lucem prodeat, comparari possit. En ergo ipsa verba, quibus eam chartæ consignatam in Galliam transmisi.

## P R O B L E M A.

*Construere Curvam (concessis quadraturis), quam corpus uniformiter grave tendens perpendiculariter ad horizontem describit in medio uniformiter denso; supposita resistentiæ in quacunque multiplicata ratione velocitatis, cujus exponens sit 2n.*

## C O N S T R U C T I O.

Assumta indeterminata  $z$  construatur area  $f(aa + zz)^{n-\frac{1}{2}} dz$  quæ vocetur  $Z$ ; sint autem coordinatæ curvæ quæsitæ  $x$  &  $y$ . Fiat  $x = f(z dz, Z^{-1:n})$  &  $y = f(adz, Z^{-1:n})$ ; Dico curvam quæ inde oritur esse quæsitam. Q. E. F.

COROLL. I. In casu particulari (quem Provocator mihi proposuit) ubi supponitur resistentiæ in duplicata ratione velocitatis, erit  $n = 1$ . In hoc itaque casu habebimus  $Z = f dz \sqrt{aa + zz}$ , quod dependet a quadratura hyperbolæ, coordinatas autem  $x = f(z dz, Z)$  &  $y = f(adz, Z)$ . Huic Constructioni pro hoc casu tantum particulari consimilem fere, quamvis non tam simplicem constructionem dedit Cl. HERMANNUS in *Phoron*. p. 354.

C O

400 N<sup>o</sup>.CXIII. DE CURVA QUAM PROJECTILE

COROLL. 2. In omni casu quo  $2n$  est numerus impar unitate major, curva quaesita erit transcendens communis seu primi gradus; nam quia tunc  $(aa + zz)^{n-\frac{1}{2}}$  habetur in terminis simplicibus & numero finitis ex meris potestatibus ipsius  $z$ , dabitur algebraice ipsum  $Z$ ; ipsa vero  $x$  &  $y$  dabuntur per quadraturas curvarum algebraicarum.

COROLL. 3. Sed quando  $2n$  est numerus impar negativus, dabitur  $Z$  per quadraturam circuli.

COROLL. 4. In omni casu, ubi  $n$  est numerus integer negativus, dabitur algebraice ipsum  $Z$ . Et quidem in specie si  $n = -1$ , erit  $Z = z \cdot f(aa + zz)$ ; atque tunc etiam  $y$  dabitur algebraice, sed  $x$  dependet a quadratura hyperbolae.

COROLL. 5. Quod si vero  $2n = 1$ , hoc est, si resistentia sit in simplici ratione velocitatis, qui casus omnium est simplicissimus; erit curva quaesita expressa per hanc aequationem  $x = by: a + \log. a - \log. y$ , vel sumta  $a$  pro unitate,  $x = by - \log. y$ ; quae indicat curvam quaesitam posse esse logarithmicam vulgarem, existente nimirum  $b = 0$ , aliis vero in casibus facillime ex ipsa logarithmica construendam, & quidem hunc in modum: Ad axem verticalem DE descripta sit logarithmica ABC, ex cuius singulis punctis B ducantur BE, quae faciant angulos BED dato aequales: Atque ad punctum E agantur ad axem perpendiculares EF ipsis BE aequales. Puncta F formabunt curvam quaesitam GFF. Haec constructio facillior est, & simplicior, quam *Hugeniana*, exposita sine demonstratione in Libro *De causa gravitatis*, pag. 171, & multo adhuc simplicior quam *Newtoniana*, vid. *Princip. Phil. Nat. Lib. 2. Prop. 4.* quae cum sit valde perplexa & operosa, ex illa haud facile patet curvam quaesitam esse posse, logarithmicam, aut ex ea posse construi.

Atque ita satisfactum arbitror quaestioni, ultra quam petit Provocator. Solutionis meae analysin non addo; ut habeat quo inquirendo porro se maceret: sufficit ut regulam indicem in qua fundatur: publicavi illam in *Actis Lips.* 1713, pag. 118, lin.

T A B.  
XXXIV.  
N<sup>o</sup>.CXIII.

5,

## DESCRIBIT IN MEDIO RESISTENTE. 401

5. & pag. 119. lin. 2. \* Interim communicabo hic calculum Agnati mei, Mathematici Professoris *Patavini*; nam & ille solvit ope formularum mearum binarum huic rei apprime inservientium, quas dedi in *Commentariis Acad. Reg. Gall. Scient. an. 1711. pag. 47. lin. antepen. & pag. 49. lin. 8.* † Imo postquam intellexisset me generali solutione positum esse, protinus quoque suam reddidit generalem. Calculus ejus ita se habet.

Aequatio pro curva, quam describit projectile in aere resistente in duplicata ratione velocitatum; est  $dy = \mp dp \sqrt{(1 + pp)}$ , posito  $dx = p dy$ . Si enim sit  $ds =$  elemento curvae,  $u =$  velocitati,  $r =$  radio osculi,  $R =$  resistentiae,  $g =$  gravitati; est generaliter  $gr dy: ds = uu$ , &  $g dx \pm R ds = u du$ , sed  $r = dy(1 + pp) \sqrt{(1 + pp)}$ :  $dp$  (quod demonstratum est in *Actis Lips.* 1701. pag. 137. ††) &  $ds = dy \sqrt{(1 + pp)}$ , unde  $uu = gr dy: ds = g dy(1 + pp): dp$  &  $udu =$  [positis  $g$  &  $dy$  constantibus]  $= (2pdp^2 - ddp - ppddp) g dy: 2 dp^2 = g dx \pm R ds = gp dy \pm R dy \sqrt{(1 + pp)}$ ; dividendo per  $dy$ , & utrumque  $gp$  subtrahendo, erit  $(-gddp - gppddp): 2 dp^2 = \pm R \sqrt{(1 + pp)}$ , sive  $ddp = \mp 2 R dp^2: g \sqrt{(1 + pp)} =$  [ponendo  $2 R = uu = g dy(1 + pp): dp$ ]  $= \mp dy dp \sqrt{(1 + pp)}$ ; quare integrando  $dp = \mp dy \int dp \sqrt{(1 + pp)}$ , sive  $dy = \pm dp: \int dp \sqrt{(1 + pp)}$ , in qua aequatione separatae sunt variables. Simili modo invenio curvam, quam describit projectile si resistentia ponatur esse in ratione quacunque multiplicata velocitatis, hoc est,  $2 R = u^{2m} = (1 + pp)^m \cdot (g dy: dp)^m$ ; nam tunc erit  $ddp = \pm g^{m-1} dy^m dp^{2-m} \times (1 + pp)^{m-\frac{1}{2}}$  sive  $dp^{m-1} ddp = \mp g^{m-1} dy^m dp \times (1 + pp)^{m-\frac{1}{2}}$  & integrando  $dp^m: m = \pm g^{m-1} dy^m \int dp (1 + pp)^{m-\frac{1}{2}}$ , quae aequatio in casu  $m = \frac{1}{2}$ , mutatur in hanc  $2 dp^{\frac{1}{2}} = \mp g^{-\frac{1}{2}}$   
Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. II. E e e dy

\* N<sup>o</sup>. XCI. pag. 359. l. 25. & 540. l. penult. Tom. I.

† N<sup>o</sup>. LXXV. pag. 501. l. 25. pag. 506. l. 13. & 14. Tom. I.

†† N<sup>o</sup>. LXVIII. pag. 382. lin. 17. Tom. I.



$dy \frac{1}{2} fdp$ , five  $4dp : (p+a)^2 = g^{-1} dy$ , cujus integralis est  
 — 4:  $(p+a) = g^{-1} y+b$ , vel, substituendo pro  $p$  e-  
 jus valorem,  $dx: dy$ , & reducendo terminos, habebitur  $dx =$   
 —  $4gdy : (y+bg) - ady$ ; quæ æquatio, existente  $a=0$   
 est pro logarithmica vulgari, in cæteris vero casibus ope eju-  
 dem logarithmicæ construi potest.

Videatur N<sup>os</sup>. CXXI.

N<sup>o</sup>. CXIV.

CLAR. TAYLORI \*

Mathematici Angli

## PROBLEMA ANALYTICUM,

Quod omnibus Geometris non-Anglis proposuit,  
 solutum a Joh. BERNOULLI.

Acta E-  
 vud. Lips.  
 1719. Jun.  
 pag. 256.

INeunte hoc anno accepi litteras a Nobiliss. MONMOR-  
 TIO, Mathematico acutissimo ac Fautore meo singulari, in  
 quibus significat se rogatum fuisse a Cl. TAYLORO, ut ipsius  
 nomine proponeret Geometris Problema sequens: Invenire (sunt  
 verba TAYLORI Latine reddita) „ per quadraturam circuli

„ aut hyperbolæ, fluentem hujus quantitatis  $zz^{\lambda} \frac{d}{dz} z^{q-1} : (e +$   
 $zz^q + gz^{2q})$ ; ubi  $e, f, g$ , sunt quantitates constantes,  $z$   
 „ quantitas variabilis,  $\lambda$  numerus integer qualiscunque affirmati-  
 „ tivus aut negativus, &  $\lambda$  numerus quilibet hujus progressio-  
 „ nis, 2, 4, 8, 16, 32, &c. hoc est potentia quævis nu-  
 „ meri

\* A Celeb. Rogero COTES Professi Cantabrig primum profectum est hoc Pro-  
 blema. Videantur ejus Theoremata logarithmica & trigonometrica a Cel. Rob. SMITH  
 in ordinem redacta & edita Cantabrig. N<sup>o</sup>. 1722.

„ meri binarii. Peto autem (ita pergit TAYLORUS) ut hoc  
 „ Problema solvatur, sine ulla limitatione per radices imaginarias;  
 „ id quod non tantum uno modo præstari potest, quamvis LEIB-  
 „ NITIUS in Actis Lips. an. 1702. pag. 218. demonstrare  
 „ conatus fuerit contrarium in hoc casu  $x : (x^2 + a^2)$ , qui om-  
 „ nium simplicissimus est post hunc  $x : (xx + aa)$  spectantem  
 „ ad arcum circuli. Idem inveniri potest respectu hujus ele-

„ menti  $zz^{\lambda} \frac{d}{dz} z^{q-1} : (e + fz^q + gz^{2q} + bz^{3q})$ ; sed exigo  
 „ duntaxat solutionem prioris casus“. Hæc Cl. TAYLO-  
 RUS; ubi statim monere debeo, quod in Typothetarum com-  
 modum, fractiones a TAYLORO propositas expresserim more  
 Leibniano, interpositis nempe duobus punctis inter termi-  
 nos in una linea collocatos, ita ut antecedens designet nume-  
 ratorem, vel dividendum, consequens vero denominatorem,  
 vel divisorem, utrumque binis parenthesibus ( ) inclusum, si  
 ex pluribus constet partibus: eadem notandi ratione utar per  
 totum hoc Schediasma, ubi terminorum prolixitas id requireret;  
 simpliciores vulgari modo scribam.

Ante omnia æquitatis ratio postulat, ut in defensionem LEIB-  
 NITII, cui dicam scribit TAYLORUS, hoc etiam monea-  
 mus; non recte reprehendi LEIBNITIUM, quasi loco cita-  
 to absolute dixisset  $f(dx : (x^2 + a^2))$  neque ad circuli ne-  
 que ad hyperbolæ quadraturam reduci posse; nam notanter ad-  
 didit hanc restrictionem a TAYLORO dissimulatam, quod id  
 fieri non possit per analysin suam eo in loco institutam; sic  
 nempe loquitur ab initio pag. 219: Itaque  $f(dx : (x^2 + a^2))$   
 neque ex circuli, neque ex hyperbolæ quadratura per analysin hanc  
 nostram reduci potest. Videmus hinc Virum optimum non abso-  
 lute negasse rei possibilitatem, sed voluisse tantum innuere,  
 quod per eum, quem loco citato præscripsit, calculandi modum  
 non possit obtineri intentum, consistens in investigatione qua-  
 tuor radicum simplicium, seu factorum rationalium, ex quibus  
 componatur fractionis propositæ denominator  $x^2 + a^2$ . Nihi-

Ecc 2 lo



lo tamen minus methodus ipsa dextre adhibita, quæ eadem est paucis exceptis quam ego inveneram, uti constat ex *Commentar. Acad. Reg. Scient. 1702. & Act. Lips. 1703.* \* feliciter succedit, imo hæc unica succedere videtur; adeo ut dubitem, num Cl. TAYLORUS aliam invenerit. Sufficit autem in hoc exemplo, secundum methodi præscriptum, ut denominator  $x^2 + a^2$  resolvatur in duos factores reales, in quorum utroque indeterminata  $x$  ad duas dimensiones ascendat; verum, præter factores hos imaginarios  $xx + aa \sqrt{-1} & xx - aa \sqrt{-1}$ , dantur & hi duo alii reales (quos, quæ sola ejus fuit inadvertentia, LEIBNITIUS non-observavit)  $xx + ax \sqrt{2} + aa$ , &  $xx - ax \sqrt{2} + aa$ . Habemus proinde, si per methodum quam docui in *Commentariis Paris. & in Actis Lips.* calculum probe iniverimus,  $dx : (x^2 + a^2) = (1 : 2aa + x : 2a^2 \sqrt{2}) dx : (aa + ax \sqrt{2} + xx) + (1 : 2aa - x : 2a^2 \sqrt{2}) dx : (aa - ax \sqrt{2} + xx)$ ; utriusque vero partis integratio dependet a quadratura partim circuli, partim hyperbolæ, sicuti infra patebit. Dico itaque  $f(dx : (x^2 + a^2))$  dari per duas quadraturas circuli & per duas quadraturas hyperbolæ.

His in antecessum præmonitis, e re nostra futurum duco, ut quod privatim rescripsi. Celeb. MONMORTIO de propositione Problematis *Tayloriani* publice nunc exponam; inserviet enim ad reddendam rationem coram Publico, ob quam constitui me nolle posthac ad omnia hujusmodi Problemata respondere, scilicet quia non existimo me eo teneri, ut in libertatis & tranquillitatis meæ præjudicium cuicunque provocationi me statim præsto esse oporteat, quando præsertim alia negotia id vetant; unde ex silentio quod servavero nihil concludendum, quod vel solvere vel non solvere poterim Problema propositum, nisi hoc tantum, quod illud intentatum ac prorsus neglectum præterierim. Quæ igitur hanc in rem ad MONMORTIUM scripsi, huc fere redeunt:

» Quod respicit reductionem ad quadraturam circuli aut hyper-

\* N<sup>o</sup>. LXX. pag. 393. Tom. I.

» perbolæ quantitatis integrandæ hujus  $z^{\lambda} \frac{d}{dz} z^{q-1} dz : (e + fz^q$   
 »  $+ gz^2)$ , vel etiam hujus  $z^{\lambda} \frac{d}{dz} z^{q-1} dz : (e + fz^q + gz^2q$   
 »  $+ hz^{3q})$ ; quam TAYLORUS Problematis loco proponit  
 » Geometris Europæ extra Britanniam degentibus, videor mihi summo jure ab eo me eximere posse, æque ac Illustr. NEWTONUS se eximendum putat, eoque magis, quod nemo me longius reductionis negotium produxerit atque perfecit. Cl. TAYLORUS, ex illis meis laboribus lumine sibi accenso, quædam alia haud dubie invenit, meisque inventis aliquid addidit, quod non est difficile: ita glaciem a me sibi fractam gratus agnoscere potius deberet quam insultare, quoniam forte secus ad res istas animum nunquam advertisset. Si relegere digneris, quod olim communicavi in *Commentariis Acad. 1702.* & in *Actis Lips. 1703.* † ad integrandas fractiones rationales, (id quod, si bene memini, impense Tibi placuit) non inficiaberis opinor valde esse probabile, Cl. TAYLORUM non esse usum alia methodo, diversa ab ea quam ibi docui; & quicquid invenerit novi consistere fortassis in aliqua meæ methodi modificatione, qua radices imaginariæ evitantur pro exemplo proposito. Polliceor autem, etsi nondum tentaverim, id me impetraturum, ut talem modificationem etiam invenire possim; de quo si dubitaverit Problematis Autor, faciat ejus periculum. Non peto præmium, quandoquidem nec ego unquam mercedem pecuniariam obtuli Problemata mea soluturis; sed, si lubebit, sponsonem cum eo inibo, modo certare audeat, qua me obstringam, quod sim talem daturus solutionem qualem exigit, nempe citra limitationes per radices imaginarias. Quare uterque nostrum ad Tuas manus deponi curabit certam summam pecuniæ, ex. gr. pretium 50 nummorum aureorum Anglicorum, (quos *Guineos* vocant) hac conditione, ut si intra tempus definiendum transmissero Tibi solutionem,  
 E e e 3 » quam

† N<sup>o</sup>. LXX. pag. 393. Tom. I.

„ quam Tu tanquam Judex judicaveris legitimam, mihi remittas  
 „ non tantum meam depositam summam, sed & illam quam a Con-  
 „ certatore lucratus fuero; quod si vero intra illud tempus nul-  
 „ lam dedero solutionem, aut talem quæ Te Judice non sit  
 „ legitima, consentiam ut totam summam centum nummorum  
 „ aureorum TAYLORO lucratori persolvi cures. Præterea,  
 „ ut non habeat de quo queratur, obligo me ad talionem: ni-  
 „ mirum proponam ipsi vicissim aliquod Problema, cujus so-  
 „ lutionem ego in potestate habeam; ac pari conditione certabi-  
 „ mus, ita scilicet, ut si illud legitime solverit tempore limitan-  
 „ do, eandem stipulatam summam tanquam victoriæ præmium  
 „ sit reportaturus, sin minus, ut illa mihi victori cedat. Tuo  
 „ me, ut jam dixi, tribunali subjiciam, modo ille quoque idem  
 „ agnoscere velit, certus quippe Te judicem fore integrum &  
 „ intelligentem. Propone quæso conditiones istas Cl. TAY-  
 „ LORO, qui ut nullus dubito, sponsonem tanto avidius am-  
 „ plectetur, quanto minori se exponit periculo perdendi, siqui-  
 „ dem, quod libenter largior, Analysta sit, cum suo tum mul-  
 „ torum suorum judicio, me longe versatior & felicior. Hanc  
 „ ce viam credo commodissimam, qua tutus reddar in poste-  
 „ rum libererque ab importunis Problematistarum provocatio-  
 „ nibus. Ut enim verum fatear, hac qua sum provectiori ar-  
 „ te nihil magis anhelo quam vitam, non quidem otiosam,  
 „ sed tranquillam, atque a continuis velitationibus immunem;  
 „ talem si mihi concesserit Deus, utillorem navabo operam rei  
 „ mathematicæ pro tenuitate mea promovendæ, quam si ani-  
 „ mum habeam a rixarum procellis agitatam, &c.

Ad has litteras, quas 26 Januarii exaraveram, nihil respon-  
 huc usque ex *Gallia* accepi, unde colligo nihil quoque ex *Anglia*  
 eo pervenisse, etsi sufficiens respondendi tempus fuerit; alias  
 nullum est dubium, quin sine mora perscripisset MONMOR-  
 TIUS, si TAYLORI mentem rescivisset, quod sponsonem  
 oblatam acceptare auderet; non vero audere suspicor ex ejus  
 silentio. Quare ne, si ei jam acquiescerem, in sequiorem par-  
 tem vertant meum silentium, atque aliquando exinde occasio-  
 nem

nem triumphandi arripiant quidam ex severioribus *Anglis*, ve-  
 luti nemo inter *non Anglos* fuisset satis idoneus ad solvendum  
 Problema TAYLORI; ipse ego, licet non primi ordinis Geo-  
 metra, permoveor, ut solutionem exhibeam Problematis parum  
 difficilis, postquam illud tantum non omnino jam est solum  
 in locis supra citatis *Commentar. Paris. & Act. Lips.*; nihil  
 præterea requirens, nisi levem aliquam modificationem, cum qua  
 methodus mea est adhibenda. Paucis diebus post litteras scrip-  
 tas ad Nob. MONMORTIUM, in quibus ad præfati certami-  
 nis condiciones me adstrinxi, Celeb. VARIGNONIO signifi-  
 cavi, quod brevi illo temporis intervallo, invenerim solutio-  
 nem qualem desiderat TAYLORUS: eam igitur nunc daturus,  
 conveniens judico pertexere integram propositionum seriem, (ne  
 quidem facilioribus omissis) cujus fili ductu optatum finem ob-  
 tinui. Sic enim Lector uno quasi obtutu unius ex altera deduc-  
 tionem percipiet.

*Reductio integralium ad Quadraturas Circuli vel Hyperbolæ.*

## PROPOSITIO I.

Sit circuli radius, ut & hyperbolæ æquilateræ semi-axis transf-  
 versus,  $= a$ , ac tangens ad verticem  $= x$ , erit arcus circuli  
 $= \int (a dx : (aa + xx))$ , sector circuli  $= \int (\frac{1}{2} a^2 dx : (aa + xx))$ ; & sector hyperbolæ  $= \int (\frac{1}{2} a^2 dx : (aa - xx))$   
 $= \frac{1}{2} aa \times \text{Log.}(a + x) - \frac{1}{2} aa \times \text{Log.}(a - x)$ . Hæc  
 jam sunt notissima. Hinc  $\int (dx : (e + fxx))$ , ubi  $e$ , sicut  
 etiam in sequentibus, semper affirmativum supponitur, depen-  
 det a quadratura circuli vel hyperbolæ; est enim  $\int (dx : (e +$   
 $fx)) = \int (\frac{1}{f} dx : (\frac{e}{f} + xx))$ , adeoque  $=$  sectori circuli  
 vel hyperbolæ, [prout  $f$  vel affirmativum, vel negativum est,]  
 ejus radius  $\sqrt{(e : f)}$ , multiplicato per  $2\sqrt{f} : e\sqrt{e}$ ; sumendo  
 scilicet  $f$  affirmative, etsi sit negativum.

PRO-