N°. XCIII.

LETTRE I.

DE MONSIEUR BERNOULLI A MONSIEUR LE CHEVALIER RENAU,

Contenant quelques Remarques sur son nouveau Mémoire.

MONSIEUR,

L'Obligeante Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du *6* Juin, en m'envoyant vôtre *Mémoire*, auroit dû m'engager à vous répondre d'abord; M'ais j'espere que vous aurez la bonté de me pardonner ce petit délai, causé par quelques affaires importantes qui me sont survenuës à l'improviste.

Quant à la dispute que vous avez euë, il y a vingt ans, avec feu Mr. HUGUENS, il est vrai que j'ai été de vôtre sentiment, sur le recit que feu Mr. *le Marquis* DE L'HOPITAL m'en fit alors dans une de ses Lettres, mais sans me rapporter le détail de toutes les raisons alleguées de part & d'autre, excepté quelques-unes des vôtres, qui me parurent très-spécieuses & même convaincantes; ce qui fit que je me rangeai de vôtre côté en condamnant le sentiment de Mr. HUGUENS.

Vôtre *Théorie* n'étant pas parvenuë alors jusques à moi, je fus contraint d'en demeurer là, sans examiner de plus près cette matiere, comme je l'aurois fait si j'avois pû trouver ce Livre, pour m'éclaircir par ma propre lecture de l'état de la question, & pour en pouvoir porter un jugement assûré. Aussi n'y pensois-je plus, lors que Mr. de MONTMORT me manda, il y a environ 4 ou 5 mois, que vous alliez faire imprimer quelque chose de nouveau sur cette Dispute. Cette circonstance rappella mes idées, & me donna de nouveau la curiosité de lire vôtre *Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, pour savoir précisément de quoi il s'agissoit entre vous & Mr. HUGUENS. Un ou deux mois après, quelqu'un de mes Amis, de qui j'appris par hazard qu'il avoit ce Livre, eut la bonté de me le communiquer: Je le parcourus donc avec avidité & avec beaucoup d'attention; aussi eus-je le plaisir d'y trouver de très-belles choses, écrites d'un stile pur & élegant, & tournées d'une maniere agréable.

Mais vous me pardonnerez, Monsieur, si je me sers de la liberté que vous m'avez accordée de porter mon jugement, *sans aucun égard que pour la vérité*, pour vous dire, qu'outre la méprise que Mr. HUGUENS a remarqué touchant la vitesse du vaisseau dans une route oblique, j'en ai découvert encore une autre, qui concerne la détermination de l'angle de la dérive, & que Mr. HUGUENS a passée sous silence, en y consentant tacitement, comme je le puis (*) prouver par ses propres objections. J'avoüe que vos raisonnemens dans ces deux endroits ont, comme par tout ailleurs, tout l'air de la vérité; en sorte qu'il est difficile de ne se laisser pas entrainer par une grande vraisemblance qui y règne, & qui vous en a imposé à vous-même.

Ma remarque sur vôtre maniere de déterminer la dérive, consiste en ce que je vois que vous prétendez pag. 17, & 18 de vôtre *Théorie*, que *si on savoit le rapport qu'il y a, de la resistance que le vaisseau trouve à fendre l'eau avec son côté, à celle qu'il trouve à la fendre avec sa pointe, on détermineroit*

(*) On en voit la preuve dans l'Art. 6. du Chapitre XI, N°. XCI. pag. 71-72.

roit la ligne de la route du vaisseau: ce qui ne sauroit subsister car il s'ensuivroit, que la raison de GM à LM, seroit toûjours la même dans un même vaisseau, quelque grand ou quelque petit que fût l'angle GBM, & quelque figure que le vaisseau eût; au lieu que je trouve, que le rapport de GM à LM est variable, & qu'il dépend entierement de la figure du vaisseau & de la grandeur de l'angle GBM. Je puis même démontrer que le vaisseau pourroit être d'une telle figure, que nonobstant que la résistance contre le côté fût par exemple mille fois plus grande que celle contre la pointe, l'angle GBM deviendroit néanmoins plus petit que l'angle de la dérive LBM. Cela vous paroit un paradoxe; cependant j'en ai la démonstration (†). TAB. XXIV. *Fig. 2.*

Enfin, Monsieur, voyant que toute vôtre Théorie n'étant fondée que sur les deux principes, que vous supposez, pour la détermination de la dérive & de la vitesse, elle tomboit nécessairement par la destruction de ces deux principes; j'ai travaillé à une nouvelle Théorie, mais plus difficile à la vérité & denuée de cette simplicité qui régne dans la vôtre. Mais que faire, si la matiere elle-même devient difficile & embarrassante, quand on la veut traiter suivant le véritable systême? C'est sans doute ce qu'avoit prévû Mr. HUGUENS, qui ne voulut pas entreprendre de déterminer la dérive. J'ai donc travaillé à composer un Discours sur ce sujet, dans le dessein de l'envoyer à l'Academie Royale des Sciences & de le publier même, si Elle l'approuvoit. Je l'aurois aussi priée de vous communiquer auparavant mon Manuscrit; persuadé, Monsieur, ou que je me serois acquis vôtre suffrage, ou que vous auriez solidement refuté mes raisons; ce qui m'auroit porté ou à en hâter la publication, ou à le supprimer. Il ne tient qu'à vous, Monsieur, de me faire connoître vôtre sentiment là-dessus, & ce que vous souhaitez que je fasse; j'aurai l'honneur d'exécuter vos ordres,

A peine venois-je d'achever cet écrit, que l'on me rendit fort

R 2

(†) Voyez les Art. 8. & 9. du Chap. II. N°. XCI. pag. 19.

fort à propos, & dans le temps que j'avois encore l'imagination toute remplie de ces choses, le *Mémoire* que vous avez eu la bonté de m'envoier. L'envie que j'eus de voir la maniere dont vous repondiez à Mr. HUGUENS, fit que je le parcourus le même jour, & que je le relus encore le lendemain, afin qu'aucune particularité ne m'échapât.

J'ai d'abord remarqué, que vous considerez à présent la vitesse du vent comme comparable à celle du vaisseau; au lieu que vous l'aviez supposée dans vôtre *Théorie*, comme infinie par rapport à la vitesse du vaisseau; afin de pouvoir s'imaginer que le vent agisse constamment avec la même force sur la voile, soit que le vaisseau soit en repos, ou qu'il se meuve; ce que Mr. HUGUENS a aussi supposé dans ses piéces, & moi de même dans mon Discours. En effet, je crois que nous avions tous trois raison de considerer le vent comme infiniment rapide, puisqu'il l'est actuellement à un tel point, que la difference de la force contre la voile du vaisseau en repos, & de la force contre la même voile du même vaisseau en mouvement, doit être insensible, & peu digne d'y avoir égard, quand on veut construire des règles pour la solution des problémes, qui ne sont déja que trop difficiles, sans les embarasser d'avantage par des minuties de peu d'importance, lesquelles cependant rendroient le calcul extrêmement pénible.

Je conjecture que feu mon Frere, qui parla le premier dans les *Actes de Leipsic* de cette diminution de force sur la voile du vaisseau qui fuit le vent, vous a donné occasion d'y faire aussi présentement attention, pour expliquer diverses choses qui en dépendent, ce que vous exécutez admirablement bien; rien n'étant plus beau, ni mieux raisonné, par exemple, que l'application que vous faites des principes generaux, rapportés au commencement de vôtre *Mémoire*, & reçûs de tout le monde, au mouvement d'un vaisseau. Vos raisonnemens sont convaincans, solides, & suivis depuis l'Art. 7, jusqu'au 22 de vôtre *Mémoire*. Mais étant fort attentif à découvrir, où pourroit donc être la source du different qui vous separe de Mr. HUGUENS

HUGUENS & de moi, quant à la détermination de la vitesse du vaisseau mû dans une route oblique à la voile; je l'ai enfin découverte dans l'Art. 24 de vôtre *Mémoire*. Mais j'avoüe que vôtre raisonnement a une si grande vraisemblance, que bien des gens s'y tromperoient, & qu'il seroit même difficile d'en faire comprendre le paralogisme à quiconque voudroit s'opiniâtrer à le soutenir, soit par prévention, soit par d'autres motifs: Voici en quoi il consiste.

Vous prétendez, Monsieur, que si BK représente la vitesse uniforme, que le vaisseau en B (*) recevroit par le moyen de la premiere voile ABC toute seule suivant la direction BK; & si BL représente la vitesse du même vaisseau en B, qui lui seroit imprimée par le moyen de la seconde voile DBE toute seule suivant la direction BL; Vous prétendez, dis-je, dans vôtre Art. 24, que le vaisseau poussé par les deux vents tout ensemble, ira dans la direction BM, & avec une vitesse exprimée par BM diagonale du parallèlogramme LK. Or c'est l'une & l'autre partie de cette proposition, que vous ne prouvez pas par vôtre raisonnement, quelqu'air de vérité qu'il ait. Car je prétens que la diagonale BM n'est, ni la direction, ni la vitesse du vaisseau B; c'est ce que je démontre ainsi. TAB. XXIX. *Fig.* 1.

Il faut d'abord remarquer, que le vaisseau en B étant consideré comme dans le vuide, ou comme une bille sur un billard, poussée tout à coup & à la fois, suivant les deux directions BK & BL par deux forces, ou plûtôt par deux chocs, que je suppose être tels, que si chacun choquoit seul sans l'autre, l'un lui imprimeroit une vitesse designée par BK, & l'autre une vitesse designée par BL: Je dis, que dans ce cas le vaisseau, ou la bille poussée par ces deux chocs ensemble, prendra effectivement la route & la vitesse designée par BM. Car n'y ayant ici aucune resistance qui s'oppose au mouvement, il n'y

(*) Il est à remarquer qu'on fait ici & dans la suite abstraction de la figure du vaisseau, & qu'on le considere comme se pouvant mouvoir de tous côtés avec une égale facilité: Mr. *le Chev.* RENAU le suppose aussi dans son *Mémoire*.

a nulle raiſon pourquoi chacun des deux chocs n'ait ſon entier effet ; or les effets de chacun ſont les viteſſes BK & BL imprimées au corps B ſuivant leurs propres déterminations ; il faut donc qu'il acquiere la direction & la viteſſe BM, pour ſatisfaire en même temps aux deux cauſes laterales, c'eſt-à-dire, pour conſerver les viteſſes BK & BL dans leurs directions: c'eſt là à peu près le raiſonnement que vous faites, & dont je tombe d'accord, quant aux corps mûs dans le vuide, ou dans des milieux non reſiſtans.

Mais il en eſt tout autrement quand le corps B ſe meut dans une matiere reſiſtante, dont la reſiſtance continuelle fait, qu'il ne ſuffit pas d'avoir imprimé au vaiſſeau, dans un inſtant, deux viteſſes laterales BK & BL, pour en compoſer une ſelon la diagonale BM, comme on le conçoit dans les corps qui ſe meuvent dans le vuide, non pas par une impreſſion continuellement appliquée, mais par des chocs faits tout d'un coup. Car la réſiſtance ſe faiſant ſentir continuellement, demande auſſi une force mouvante continuellement appliquée au corps B pour le ſoutenir dans le mouvement. Or cette réſiſtance externe change de direction à meſure que la Force mouvante en change: Enſorte que vous voyez bien, Monſieur, que quoi qu'il ſoit vrai que le corps B (que je ſuppoſe toûjours avec vous, fendre l'eau également de tous côtez) trouve ſa reſiſtance ſuivant BK, s'il ſe meut actuellement ſuivant la direction BK, & qu'il trouve ſa reſiſtance ſuivant BL, s'il ſe meut actuellement ſuivant la direction BL; il ne s'enſuit pas, que ces deux reſiſtances laterales ſubſiſtent actuellement, ſi le corps B ſe meut ſuivant une troiſieme ligne ; puiſqu'il eſt viſible, qu'il n'y a point d'autre reſiſtance actuelle, ou réelle, à conſiderer, que celle que le corps B trouve directement oppoſée à ſon paſſage ſuivant cette troiſieme ligne.

Pour faire voir la difference qu'il y auroit entre la reſiſtance actuelle, directement oppoſée au mobile de quelque côté qu'il ſe meuve, & les deux reſiſtances actuelles laterales de directions invariables; je produirai deux manieres de concevoir les milieux

milieux

milieux reſiſtans, dont la premiere convient à tous les fluides uniformément reſiſtans, & la ſeconde, qui n'eſt qu'idéale, ne répond à rien dans la nature ; ce ſera cependant l'idée ſous laquelle vous concevez les fluides reſiſtans.

Premierement concevons un corps B dans le centre d'une TAB. XXIX. Fig. 2.
infinité de circonferences concentriques *alf*, *bmg*, *cnh* &c. d'égales diſtances B*a*, *ab*, *bc* &c. imaginons qu'une certaine matiere, qui reſiſte en ſimple raiſon de la viteſſe du mobile qui la traverſe, occupe ces circonferences, ou qu'elle ſoit diſpoſée autour de ces circonferences, comme ſi par exemple toutes ces circonferences étoient autant de filets à rompre par le mobile B, pouſſé du centre vers quelque point de la circonference : Je vois que, dans quelque direction que le corps B ſe meuve pour ſe faire jour à travers les filets, il les rencontre toûjours perpendiculairement ; ſi bien qu'il n'a qu'une ſeule & ſimple reſiſtance directement oppoſée à ſurmonter ; mais la direction de cette reſiſtance eſt variable, puiſqu'il eſt viſible qu'elle ſe dirige toûjours à être directement oppoſée à la direction du mouvement du corps B, de quelque côté qu'il aille : Et quoique nous ſuppoſions que le corps B ſoit tout à la fois pouſſé par deux forces ſuivant B*e* & ſuivant B*k*, & forcé ainſi de prendre une route moyenne, on ne pourra pas dire que des deux reſiſtances laterales, que le corps B ſouffriroit, s'il alloit ſeparément dans chacune des directions B*e* & B*k*, il en reſultera une reſiſtance moyenne ſuivant la direction B*p* ; puiſque cette reſiſtance moyenne eſt par elle-même ſimple & directement oppoſée au mouvement du corps B, comme s'il avoit été pouſſé immédiatement par une troiſiéme force ſuivant la direction B*p* ; enſorte que cette reſiſtance moyenne, qui ſeule eſt actuelle, ne dépend aucunement des reſiſtances laterales, qui ne ſont pas actuellement exiſtantes.

Mais 2°. concevons que ces filets diſpoſés en lignes droites TAB. XXIX. Fig. 3.
parallèles, & dans des intervalles égaux *ak*, *bt*, *cs* &c. doivent être rompus par le corps B, mû par une force, ſuivant la direction B*e*. Et que d'autres filets *fu*, *gx*, *hy* &c. auſſi

éga-

également distans & qui croisent les premiers à angles droits soient à rompre par le même corps B, quand il est poussé par une autre force, suivant la direction B*k*. Il est clair, que si les deux forces agissent ensemble, & qu'elles fassent par conséquent prendre au mobile une route moyenne B*p*, la resistance que le mobile rencontre en forçant obliquement les filets, n'est plus simple & directement opposée à la route, comme dans le cas précédent; mais elle sera toûjours composée de deux laterales, qui ont toûjours des directions invariables, dont l'une repousse le mobile par exemple de l'Est à l'Ouest, pendant que l'autre agit du Nord au Sud; si bien que ces deux resistances laterales conservent constamment les mêmes directions, & se font ainsi actuellement sentir au corps B, quelque obliquité de route qu'il prenne.

Je n'en dis pas d'avantage, Monsieur, car je conte que vous comprendrez à présent sans peine que le raisonnement, que vous faites dans l'Art 24 de vôtre *Mémoire*, auroit lieu, si la resistance de l'eau contre le vaisseau se faisoit à la maniere de ce second cas; mais comme c'est plûtôt au premier cas qu'il faut la comparer, ce que vous m'accorderez sans doute, il est visible que vôtre raisonnement ne peut plus subsister, à moins que vous ne prétendiez, contre mon attente, que l'une & l'autre maniere de concevoir les filets resistans produiroit le même effet, tant pour la direction que pour la vitesse du corps B, poussé à la fois par deux forces, suivant les deux directions B*e* & B*k*. Remarquez cependant, que dans l'un & l'autre de ces cas, je suppose que les filets soient faits de maniere (ce qui est assés difficile à exécuter) que chacun d'eux resiste à proportion de la vitesse, avec laquelle le corps B le rencontre perpendiculairement; parce que de cette maniere, la force qui est requise pour conserver une vitesse uniforme au corps B, suivant la direction perpendiculaire B*e*, sera comme le quarré de la vitesse; vû qu'elle doit être égale à la resistance totale, laquelle est en raison composée du nombre des filets rompus dans un temps donné & de la resistance de chaque filet, c'est-à-dire,

à-dire, que chacune de ces raisons, étant égale à celle de la vitesse, composeront ensemble la raison doublée de la vitesse.

Après vous avoir fait voir, Monsieur, en quoi consiste vôtre méprise touchant la détermination de la route & de la vitesse du vaisseau, poussé à la fois par deux vents, dont les directions font ensemble un angle droit, & dont chacun fait son impulsion sur une voile qui lui est perpendiculaire; il est à propos, que je montre la véritable maniere de déterminer & la route & la vitesse d'un tel vaisseau poussé ainsi par deux forces. TAB. XXIX. *Fig.* 1.
Soit donc le vaisseau en B; BK, la direction & la vitesse uniforme qu'il auroit par la seule impulsion du vent perpendiculaire sur la voile ABC; BL, la direction & la vitesse uniforme que le même vaisseau auroit s'il étoit poussé seulement par le second vent perpendiculaire sur la voile EBD: Soit BL prolongée en I, ensorte que BI soit la troisieme proportionnelle de BK à BL; Soit achevé le rectangle BIHK: Je dis, que le vaisseau B, poussé par les deux vents ensemble, ira non point dans la ligne BM diagonale du rectangle BLMK, ni avec la vitesse exprimée par BM, comme vous le prétendez, mais suivant la direction BH diagonale du parallélogramme BIHK, & avec la vitesse designée par BO moyenne proportionnelle entre BH & BK.

La démonstration n'en est pas difficile, si on admet la composition des forces, qui est le principe fondamental de toute la Statique. Car les forces des deux vents, quand il agissent chacun séparément, étant égales aux resistances de l'eau (parce que que je suppose les vitesses uniformes), & ces resistances étant comme les quarrés des vitesses; il est manifeste, que si nous considerons maintenant les deux forces agissantes ensemble, c'est comme si le point B étoit continuellement déterminé à se mouvoir par deux puissances suivant les directions BK & BL, & que ces puissances fussent comme les quarrés de BK & de BL, c'est-à-dire, comme les lignes BK & BI. D'où il suit, que la diagonale BH marquera la direction & la quantité de la puissance moyenne: donc la resistance de l'eau, que le vaisseau souffre dans cette route, étant directement opposée & égale à cette troisieme puissance ; il faut que la vitesse soit exprimée par BO, moyenne proportionnelle entre BK & BH, puisque les resistances sont comme les quarrés des vitesses, & que BK marque (par l'hypoth.) la resistance & la vitesse que le vaisseau B auroit, si le premier vent agissoit seul. Je conclus de tout ceci, que si un troisieme vent soufflant à contre-sens suivant HB sur une voile perpendiculaire *a*B*c* lui imprimoit une force designée par HB, comme les forces imprimées aux deux premieres voiles ABC, & EBD, sont designées par BK & BI, je conclus, dis-je, que le vaisseau B demeureroit contrebalancé de tous côtés & ne bougeroit pas; de même que trois puissances agissant sur un même point, dans les directions & dans les proportions ci-dessus données, le maintiendroient dans un parfait équilibre, conformément au principe de Statique allegué.

Cependant, Monsieur, vous revoquez en doute ce principe, & vous le traitez de *tradition passée des Anciens Geométres jusqu'à nôtre temps*, puisque c'est de ce principe que vous parlez dans vôtre Lettre; Et vous reconnoissez dans l'Avertissement du *Mémoire*, pag. 5. que Mr. HUGUENS *réduisit la question à un cas de Statique*, qui est justement le principe de la composition des forces. Mais songez vous, Monsieur, que par-là vous combattez la vérité d'un principe, qui sert de fondement non seulement à la Statique, mais encore à toute la Méchanique. Daignez, Monsieur, daignez de grace y faire un peu plus de réflexion. Si ce que vous avancez avoit lieu, toute cette Science tomberoit en ruine, & il n'y auroit plus rien d'assûré. La force du Levier tiré obliquement, celle du Plan incliné, generalement l'action de toutes les Machines qui y ont rapport, comme la Vis, le Coin &c. enfin tout ce qu'on a écrit jusqu'à présent sur l'Equilibre des Forces, qui agissent obliquement les unes sur les autres, seroit faux, & leur proportion établie sur ce principe ne seroit plus la véritable. Cependant que dirés-vous, Monsieur, si on peut confirmer cette proportion par une infinité d'Expériences? En voici une qui est très-propre pour le cas en question: A & B sont deux poids égaux

égaux attachez aux deux extrémités d'une corde ADFEB, qui passe par dessus les deux poulies D & E, que je suppose dans le même niveau: Au point du milieu F est suspendu un troisiéme poids C, qui en descendant fera monter les deux autres, jusqu'à ce que tous trois soient en équilibre: Or quelle proportion y aura-t-il alors entre les poids C, & A, ou B? La règle commune veut, qu'ayant achevé le parallèlogramme DFEG, & prolongé CF pour avoir la Diagonale FG, le poids A soit au poids C, comme DG, ou DF, à GF, c'est-à-dire, (supposé que DFE soit un angle droit) comme 1 à $\sqrt{2}$. Aussi est-ce que l'Expérience vérifiera, si vous voulez prendre la peine de l'essayer. Mais, selon vous, le poids A seroit au poids C, comme le quarré de DF au quarré de GF, ou comme 1 à 2; & ainsi le poids C seroit égal aux deux poids A & B ensemble, ce qui repugneroit manifestement à l'Expérience: outre que l'axiome general de Statique seroit détruit, où on suppose, que le commun centre de pesanteur de plusieurs poids, agissans les uns sur les autres, sera descendu le plus bas, quand tous ces poids se seront mis en équilibre. Car il me sera facile de prouver, que si le poids C est supposé double du poids A, ou du poids B, & DFE un angle droit, le commun centre de gravité des trois poids A, B, & C, ne sera pas dans sa plus basse situation au dessous de l'horison DE, & que par conséquent il n'y aura point d'équilibre entre les trois poids A, B & C: mais si au contraire le poids C est supposé au poids A, ou B, comme $\sqrt{2}$ à 1; je démontre aussi facilement, qu'alors le centre de gravité se trouvera le plus bas qu'il est possible, & partant que les trois poids se soutiendront mutuellement en équilibre.

TAB. XXIX. Fig. 4.

Mais j'apprehende, Monsieur, d'abuser de vôtre patience: je finis donc en vous priant de me pardonner si vous trouvez que j'ai peut-être eu tort de m'être tant étendu, & de vous ennuyer par une si longue Lettre: mais je vous prie de considerer qu'étant Etranger, je ne connois pas assez la langue Françoise, pour employer les expressions les plus courtes & les plus propres à exprimer mes pensées: cependant quoiqu'elles

 me

me manquent ; j'en trouverai toûjours ſuffiſamment lorſqu'il s'agira de vous aſſûrer que je ſuis avec un profond reſpect,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obéïſſant Serviteur

à Bale, 12. *Juillet* 1713.

J. BERNOULLI.

P. S. Je crois, Monſieur, qu'après tout ce que je viens d'écrire dans cette Lettre, il ſera inutile de répondre au long aux trois prétenduës abſurdités, auxquelles vous dites que conduit le principe de Mr. HUGUENS; principe qu'on a employé de tout temps dans la Méchanique & dans la Statique. Il ſuffit que j'avertiſſe que la premiere de ces abſurdités, pag. 71. * de vôtre *Mémoire*, vient de ce que vous ajoûtés les viteſſes que le vaiſſeau auroit par l'impreſſion ſur chaque voile ſéparément, pour avoir la viteſſe quand les vents concourent; ce qui n'eſt pas permis dans le plein, comme dans le vuide, par des raiſons ſuſdites.

TAB. XXIX. *Fig.* 1. Car de ce que l'impulſion du vent BK, perpendiculaire ſur la voile ABC, donneroit au vaiſſeau (ſi ce vent agiſſoit tout ſeul) la viteſſe (†) BP dans la direction oblique BM (ſuppoſé le vaiſſeau attaché à une corde infinie dans la direction de la voile aBc, qui ſeroit perpendiculaire à BM); & de ce que l'impulſion perpendiculaire ſur la voile DBE du vent BL, s'il agiſſoit ſeul, donneroit au vaiſſeau dans la même direction BM la viteſſe Bu; vous n'êtes pas en droit d'en conclurre pag. 78.** que la viteſſe du Vaiſſeau qui reſulte par le concours des deux vents ſera $BP + Bu$, & par conſéquent plus grande que BM; car vous ne deviez conclurre autre choſe, ſinon que cette viteſſe reſultante dans la direction BM, ſera

* N°. XCII. Art. 34. pag. 117.

(†) On ſuppoſe ici que BK & BL expriment les viteſſes que le vaiſſeau étant libre auroit s'il étoit pouſſé ſéparément par les deux vents: KN & Lo ſont perpendiculaires ſur la Diagonale BM: BP eſt moyenne proportionelle entre BK & BN; Et Bu eſt moyenne proportionnelle entre BL & Bo.

** Pag. 118.

ſera $\sqrt{(BP^2 + Bu^2)}$: puiſque BP & Bu marquant les viteſſes ſéparées, leurs quarrés BP^2 & Bu^2 marqueront les forces avec leſquelles le vaiſſeau eſt pouſſé par chaque vent dans la direction BM. Or quand les deux vents concourent, il eſt manifeſte que ces deux forces ſeront jointes enſemble pour pouſſer le vaiſſeau conjointément ſuivant BM; la force totale ſuivant cette direction ſera donc $BP^2 + Bu^2$, & partant la viteſſe ſera la racine de cette force, $\sqrt{(BP^2 + Bu^2)}$; & non point $BP + Bu$: Mais il eſt aiſé de faire voir que $\sqrt{(BP^2 + Bu^2)}$ eſt plus petit que BM, & qu'ainſi l'apparente contradiction à la premiere partie de vôtre Démonſtration ceſſe: Car $BP^2 = BK \times BN = LM \times Mo$, & $Bu^2 = BL \times Bo$, donc $BP^2 + Bu^2 = LM \times Mo + BL \times Bo < BM \times Mo + BM \times Bo = BM^2$, donc $BP^2 + Bu^2 < BM^2$, & $\sqrt{(BP^2 + Bu^2)} < BM$. Vous voyez donc, Monſieur, que l'impreſſion du vent MB perpendiculaire ſur la voile aBc, (que l'on ſuppoſe être capable de donner au vaiſſeau une viteſſe exprimée par MB, ſi ce vent ſouffloit tout ſeul ſur la voile aBc) doit l'emporter dans vôtre ſeconde ſuppoſition, auſſi-bien que dans la premiere ſur l'impreſſion qui réſulte du concours des deux vents BK & BL, qui pouſſent perpendiculairement, le premier la voile ABC, & le ſecond la voile DBE, & faire mouvoir le vaiſſeau de B vers m.

Pour ce qui eſt des deux autres abſurdités rapportées dans les Articles 35. & 38. de vôtre *Mémoire*; vous les prenez pour telles; mais ce ne ſont pas des abſurdités dans mon opinion. Car en ſuppoſant la viteſſe du vent comme finie & comparable à celle du vaiſſeau, il ne me paroît pas abſurde, ni impoſſible, (†) que la viteſſe oblique d'un vaiſſeau, retenu par une corde infinie, devienne plus grande que la viteſſe oblique du vent, & même plus grande que la directe: mais cela n'arrive pas, quand on ſuppoſe la viteſſe du vent incomparablement plus grande que celle du vaiſſeau dans la même direction.

(†) La poſſibilité de ce paradoxe ſe prouvera par la conſtruction que l'on donne à la fin de ce Poſt-ſcriptum.

Le reſte des inconvéniens, dont vous faites mention dans l'Art. 36, ſe diſſipe d'abord, ſi vous prenez la peine de conſiderer, que c'eſt à tort que vous ſuppoſez ici un équilibre TAB. XXIX. Fig. 1. entre la ſomme des efforts des deux vents BK, BL ſur les deux voiles ABC, DBE, & l'effort du troiſiéme vent MB ſur la troiſiéme voile aBc: Car je vous ai déja montré, que de la maniere que vous concevez la diſpoſition des voiles, & les vents, le troiſiéme le doit emporter ſur les deux autres; & que pour faire que ces trois voiles ſoient en équilibre entr'elles, il faut diſpoſer la troiſiéme, enſorte qu'elle ſoit perpendiculaire, non pas à la diagonale BM, mais à l'autre diagonale BH, & le troiſiéme vent doit être dans la direction HB, & non pas MB, & ſa force doit être telle, que la viteſſe, qu'il imprimeroit au vaiſſeau, s'il agiſſoit ſeul ſans le concours des autres, fut OB, ou la moyenne proportionnelle entre HB & KB, que l'on trouvera être plus petite que MB: Si bien que ni la direction, ni la force de ce troiſiéme vent, qui doit contrebalancer les deux premiers, ne répondent à celles que vous déterminez dans l'Art. 32.

Avant que de finir, voici une ſolution generale, que j'ai trouvée, du Probléme, où on demande la viteſſe oblique d'un vaiſſeau, retenu par une corde infinie, dans le cas de la viteſſe du vent finie & en raiſon donnée à la viteſſe que le vaiſſeau, s'il n'étoit point retenu par la corde, auroit dans la di- TAB. XXIX. Fig. 5. rection du vent. Soit donc le vaiſſeau en B pouſſé par le vent BM, lequel je ſuppoſe qu'il donneroit au vaiſſeau, s'il étoit libre, la viteſſe BM dans la route directe du vent BM: Soit auſſi BQ la viteſſe abſolue du vent. Que l'on prenne une route oblique BK quelconque, dans laquelle le vaiſſeau ſoit obligé de ſe mouvoir par la corde infinie BZ perpendiculaire à la direction BK: Tirez MK perpendiculaire, & MR parallèle à BK; tirez auſſi QRC & & MH perpendiculaires à BQ: ſoit MV moyenne proportionelle entre MQ & MR; elevez ſur MV la perpendiculaire VT, qui rencontre BQ prolongé en T; joignez les deux points T & H par la droite TH, & tirez lui la parallèle QS. Je dis que

BS

BS ſera la viteſſe du vaiſſeau, lorſqu'il eſt obligé par la corde infinie BZ de ſe mouvoir dans la route oblique BK: Ou, ſi on aime mieux une expreſſion algebraíque; ſoit $BH = a$, $BQ = b$, $MQ\ [b - a] = c$, $BS = x$; ſoit auſſi $BK : BM = 1 : n$. Je dis que la viteſſe oblique du vaiſſeau, ou x, ſera $= nab : (a + cn\sqrt{n})$. Je n'en mets pas ici la preuve.

Pour contenter le Lecteur, je veux bien ajoûter à cette Lettre mon Analyſe, qui lui tiendra lieu de Démonſtration. Gardant donc les mêmes Lettres & après avoir tiré SP perpendiculaire ſur BQ, il eſt clair que BS $[x]$ que l'on ſuppoſe pour la viteſſe du vaiſſeau, dans la direction oblique BH, donne BP $[x : n]$ pour la viteſſe avec laquelle le vaiſſeau fuit le vent dans ſa direction BQ; ainſi ôtant BP de BQ, on aura PQ $[b - x : n]$ pour la viteſſe relative du vent, avec laquelle il vient heurter contre la voile du vaiſſeau. Or les forces du vent ſur la voile étant en raiſon des quarrés de ſes viteſſes relatives, & auſſi égales aux reſiſtances de l'eau contre le vaiſſeau, s'il alloit librement dans la direction du vent, à cauſe de l'égalité entre les actions & les réactions; il faut faire une analogie enrre les forces du vent & les reſiſtances de l'eau qui leur ſont égales en cette maniere: Comme la force du vent exprimée par $MQ^2\ [cc]$, quarré de ſa viteſſe relative, eſt à ſa réaction, c'eſt-à-dire, à la reſiſtance de l'eau exprimée par $BM^2\ [aa]$ quarré de la viteſſe du vaiſſeau; ainſi eſt une autre force du vent exprimée par $PQ^2\ [(b - x : n)^2]$, quarré de ſa viteſſe relative, à $\frac{aa}{cc}(b - x : n)^2$ qui ſeroit la réaction, ou la reſiſtance de l'eau, ſi le vaiſſeau étoit libre & qu'il fût pouſſé par un vent dont la viteſſe relative fût exprimée par PQ $[b - x : n]$. C'eſt pourquoi faiſant, en vertu de la décompoſition des forces, comme BM à BK, c'eſt-à-dire, comme n à 1, ainſi la reſiſtance $\frac{aa}{cc}(b - x : n)^2$ contre le vaiſſeau libre dans la direction BM, à la reſiſtance xx

comme

contre le vaiſſeau retenu par la corde dans la direction oblique BK; on aura cette égalité $\frac{aa}{ncc}(b - x : n)^2 = xx$, ou, en prenant les racines, celle-ci $\frac{a}{c\sqrt{n}} \times (b - x : n) = x$; par la réduction de laquelle on trouve $x = nab : (a + cn\sqrt{n})$. Ce qu'il falloit trouver.

Si nous ſuppoſons la viteſſe du vent incomparablement plus grande que celle du vaiſſeau, c'eſt-dire que b ſoit comme infinie par rapport à a; ce ſera le cas de Mr. HUGUENS, dont nous avons amplement traité dans le Chap. V. * Car c devient égal à b, & ainſi l'équation $x = nab : (a + cn\sqrt{n})$ ſe change en celle-ci $x = nab : (0 + bn\sqrt{n}) = a : \sqrt{n} =$ à la moyenne proportionelle entre BM & BK; ce qui eſt cónforme aux Art. 2. & 5. du Chapitre V. *

Mais ſi l'on ſuppoſe la viteſſe du vent comme égale à celle du vaiſſeau, ce qui arriveroit ſi la reſiſtance de l'eau ſe trouvoit inſenſible, par le peu de priſe qu'elle auroit ſur le vaiſſeau, par rapport à celle que le vent auroit ſur la voile, qui ſeroit fort large ou d'une grande étenduë: alors il eſt manifeſte, que le vaiſſeau ue faiſant aucune reſiſtance par lui-même, ſeroit emporté avec toute la viteſſe du vent, & par conſéquent, quelle route qu'il fût obligé de prendre par le moyen de la corde BZ, il fuiroit toujours le vent avec la viteſſe totale BQ pour ne point faire d'obſtacle à la courſe du vent; ſi bien que BS, qui marque la viteſſe du vaiſſeau dans la route oblique, deviendroit égale à toute l'hypotenuſe BC du triangle rectangle BQC, & partant plus grande que le côté BQ, qui déſigne la viteſſe abſoluë ou totale du vent: en effet cela eſt conforme à nôtre formule generale; car b devient $= a$, & $c = 0$; donc $x = naa : (a + 0n\sqrt{n}) = na =$ BC. Ce que je voulois démontrer, pour ſauver la vérité du paradoxe que Mr. *le Chevalier* RENAU regardoit comme une choſe impoſſible & abſurde.

REPON-

* N°. XCI. pag. 30. & ſuiv.

N°. XCIV.

REPONSE

DE

MONSIEUR LE CHEVALIER RENAU

A

MONSIEUR BERNOULLI

Contenant des inſtances & des difficultés réïterées.

MONSIEUR,

J'Ai reçû la Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, & je ne ſçaurois trop vous remercier, de la bonté que vous avez euë, de vouloir bien examiner le Mémoire, que j'ai pris la liberté de vous envoyer, & de m'avoir fait part des remarques que vous y avez faites. Vous vous expliquez ſi clairement, & d'une maniere ſi conciſe, qu'il me ſera aiſé de revenir de mes erreurs, en cas que je me ſois trompé; mon deſſein n'étant que de connoître la vérité, & de la ſuivre, au dépens même de mon opinion; étant perſuadé, que l'on ne gagne jamais tant, que lors que l'on ſort de quelque prévention, dans laquelle on étoit malheureuſement engagé, & que l'on eſt bien obligé aux perſonnes qui veulent bien nous redreſſer. Je vous ſupplie donc très-humblement, Monſieur, de vouloir bien me lever les difficultés que j'ai ſur vôtre maniere de déterminer la route & la viteſſe du Vaiſſeau, lors qu'il eſt pouſſé à la fois par deux vents, qui donnent perpendiculairement ſur deux voiles, qui ſont à angles droits l'une à l'autre, & par conſéquent la direction de l'un des vents perpendiculaire à la direction de l'autre.

Voici, Monſieur, ce que vous dites: *Soit donc le vaiſſeau en B, BK la*

TAB. XXIX. Fig. 1. *la direction & la viteſſe uniforme qu'il auroit par la ſeule impulſion du vent perpendiculaire ſur la voile ABC; BL la direction & la viteſſe uniforme que le même vaiſſeau auroit, s'il étoit pouſſé ſeulement par le ſecond vent perpendiculaire ſur la voile DBE: Soit BL prolongée en I, enſorte que BI ſoit la troiſieme proportionnelle de BK à BL; Soit achevé le rectangle BIHK; Je dis que le vaiſſeau B, pouſſé par les deux vents enſemble, ira non point dans la ligne BM diagonale du rectangle BLMK, ni avec la viteſſe exprimée par BM, comme vous le prétendez, mais ſuivant la direction BH diagonale du parallèlogramme BIHK, & avec la viteſſe déſignée par BO, moyenne proportionnelle entre BH & BK.*

Et vous dites, Monſieur, que la démonſtration n'en eſt pas difficile, ſi on admet la compoſition des forces, qui eſt le principe fondamental de toute la Statique. J'en conviens avec vous, Monſieur, ſuppoſé que l'on puiſſe admettre ce principe, dans le cas dont il s'agit. Mais voici les difficultés, qu'il me ſemble qui ſe préſentent contre vôtre règle.

Le vaiſſeau allant donc ſuivant BH avec la viteſſe BO, ſa viteſſe ſuivant BL ſera B*q*, & ſuivant BK ſera B*p*, ſuppoſant O*q* perpendiculaire à BI, & O*p* perpendiculaire à BK. Or BO, B*q*, & B*p* ſont entr'elles comme BH, BI & BK, qui repréſentent par vôtre hypothèſe les forces qui pouſſent le vaiſſeau dans ces directions: donc les viteſſes uniformes ſeroient entr'elles comme les forces, ou ce qui eſt la même choſe, les viteſſes uniformes, dans un milieu qui reſiſte, ſeroient entr'elles comme les reſiſtances; car les reſiſtances ſont comme les forces: Ce qui ſeroit abſurde, parce que les reſiſtances ſont toûjours comme les quarrés des viteſſes, comme vous en convenez vous même, Monſieur.

Vous direz à cela; qu'il ne s'agit pas ici de comparer les reſiſtances laterales, qui ne ſont qu'idéales, & rien en effet, (ce que nous examinerons ci-après) & qu'il ne faut avoir égard qu'à la reſiſtance directe BO, qui eſt la ſeule réelle; j'y conſens, ſi l'on veut.

Pour en avoir une autre auſſi directe à lui comparer; ſoit ſuppoſé que la force qui pouſſe le vaiſſeau ſuivant BK ſoit double de la force déſignée par BK, & que la force qui pouſſe le vaiſſeau ſuivant BI ſoit auſſi double de la force déſignée par BI; prolongeant BK en R enſorte que BR ſoit double de BK & BI en S, enſorte que BS ſoit double de BI; BR déſignera la nouvelle force avec laquelle le vaiſſeau ſera pouſſé ſuivant BK; & BS déſignera celle avec laquelle il ſera pouſſé ſuivant BI: Et par vôtre règle, Monſieur, le vaiſſeau, pouſſé par ces deux forces à la fois, doit aller ſuivant la direction BT diagonale du parallèlogramme BSTR avec la viteſſe BX moyenne proportionnelle entre BT & BR; Mais comme BT n'eſt que BH prolongée en T, à cauſe des rectangles ſemblables, BH : BT = BO : BX, c'eſt-à-dire,

la

la force BH à la force BT, comme la viteſſe BO à la viteſſe BX; c'eſt-à-dire que les viteſſes directes du vaiſſeau ſeroient entr'elles comme les forces qui pouſſent le vaiſſeau; ce qui ſeroit abſurde: car ces viteſſes ſont toûjours comme les racines des forces, ou ce qui revient au même, comme les racines des reſiſtances. Voilà d'abord, Monſieur, une abſurdité qui ſuit néceſſairement de vôtre règle.

En voici ce me ſemble une autre: Vôtre force moyenne, déſignée par BH, étant moindre que la ſomme des deux forces qui la compoſent, ſavoir la ſomme des forces déſignées par BK & BI; il faudroit néceſſairement, qu'il y eût, pour cela, de la force de détruite dans les deux forces compoſantes; ce qui ne peut pas être, la direction de la force BK étant perpendiculaire à la direction de la force BI; & on n'aura pas de peine à en convenir, ſi on fait réflexion qu'il n'y a point de force ſans viteſſe; or la force BK n'a point de viteſſe contre la force BI, ni BI contre BK; d'où il ſuit que ces deux forces ne ſe peuvent rien détruire l'une à l'autre.

Suppoſons une force produite par le mouvement d'un corps qui va du Nord au Sud, & une autre force produite par le mouvement d'un corps qui va de l'Eſt à l'Oüeſt, comme dans le mouvement du Nord au Sud, il n'y a nulle viteſſe de l'Oüeſt à l'Eſt, la force du Nord au Sud n'employe aucune partie de ſa force contre la force de l'Eſt à l'Oüeſt; car là où il n'y a point de viteſſe contraire, il n'y a nulle force contraire; de même, la force de l'Eſt à l'Oüeſt ne détruit rien de la force du Nord au Sud: d'où il ſuit, que ſi deux forces, perpendiculaires l'une à l'autre, agiſſoient en même temps ſur un corps de toute leur force, ce corps ſera pouſſé par une route moyenne, avec une force qui ſera égale à la ſomme des deux forces compoſantes: ce que l'on va encore prouver par un autre exemple.

Suppoſons, que le vaiſſeau en B ſoit pouſſé par le plus grand vent que l'on puiſſe imaginer, dont la direction ſoit ſuivant BF, & qui donne perpendiculairement ſur la voile DBE; le vaiſſeau décrira par ſa route la ligne droite BF, parce qu'il ſera également preſſé de deux côtés de cette ligne; mais ſi dans ſa marche il venoit à être plus preſſé de la droite de cette ligne à la gauche, que de la gauche à la droite, à l'inſtant il ſe détourneroit & iroit vers la gauche, & il ne décriroit plus la ligne BF, par la raiſon qu'un corps va toûjours du côté vers lequel il eſt plus pouſſé, ou plus preſſé.

Snppoſons donc que le vaiſſeau étant pouſſé par ce grand vent BF, & décrivant par ſon mouvement uniforme la ligne droite BF, il lui ſurvienne le plus petit vent que l'on puiſſe imaginer, & que ſa direction ſoit ſuivant BG perpendiculaire à BF, donnant perpendiculairement ſur la voile ABC, qui eſt à angle droit avec la voile DBE: la viteſſe du

vaiſ-

vaiſſeau quelle qu'elle puiſſe être, ſuivant B F, n'empêchera pas que le vent B G ne donne toujours ſur la voile A B C avec une même viteſſe, & ne pouſſe le vaiſſeau ſuivant B G avec la même force, que ſi le vaiſſeau ne ſe mouvoit point ſuivant B F; parce que le vent allant par tout parallelement à lui-même, il rencontrera la voile A B C, par tout où elle ſera, toûjours de la même maniere, c'eſt-à-dire, toûjours perpendiculairement, & avec la même viteſſe; puiſque le vaiſſeau, par ſon mouvement ſuivant B F, ne fuit en aucune maniere ce Vent, ni ne va au-devant de lui; par conſéquent le vaiſſeau, qui étoit également preſſé des deux côtés de la ligne B F, dans le temps qu'il décrivoit la ligne B F; ce vent B G, ſi petit qu'il puiſſe être, ſurvenant & pouſſant le vaiſſeau ſuivant BG, le vaiſſeau ſera alors plus pouſſé de B vers G, qu'il ne ſera preſſé de G vers B; ainſi le côté de G doit néceſſairement ceder, & le vaiſſeau ſe mouvoir de ce côté-là, augmentant de viteſſe, juſqu'à-ce que la reſiſtance de l'eau, en ſens contraire, ſoit égale à la force du vent B G ſur la voile A B C; après quoi il continuera à aller ſuivant B G d'un mouvement uniforme. Voilà donc la plus grande force que l'on puiſſe imaginer ſuivant BF, qui ne détruit point la plus petite force que l'on puiſſe imaginer ſuivant B G, qui lui eſt perpendiculaire, puiſque cette derniere fait ſon effet malgré l'autre; d'où il me paroit que l'on peut conclurre, que les forces, dont les directions ſont perpendiculaires, ne ſe détruiſent en rien, & que ſi elles agiſſent ſur un corps, qui donne lieu par ſa réſiſtance, que chacune d'elle agiſſe de toute ſa force, ce corps ſera pouſſé par une force qui ſera égale à la ſomme des deux.

On verra encore les mêmes vérités, ſi on les conſidére, par les reſiſtances que le vaiſſeau trouve à fendre l'eau, parce qu'elles doivent être égales aux forces qui pouſſent le vaiſſeau.

Suppoſons que le vaiſſeau aille ſuivant BH avec la viteſſe B O, il va en même temps ſuivant B I avec la viteſſe B q, & ſuivant B K avec la B p; ainſi la viteſſe B O ſuivant B H forme ces deux dernieres viteſſes, & réciproquement ces deux dernieres viteſſes, ſavoir la viteſſe BP ſuivant B K, & la viteſſe B q ſuivant B I, forment néceſſairement la viteſſe BO ſuivant B H. Or les reſiſtances ſont comme les quarrés des viteſſes; donc le vaiſſeau, allant ſuivant B H avec la viteſſe B O, trouve une reſiſtance ſuivant B K, comme le quarré de B p, & ſuivant B I, une comme le quarré de B q; ce qui doit être auſſi neceſſairement, puiſque dans le mouvement du vaiſſeau ſuivant BH avec la viteſſe BO, le vent BG continue à donner perpendiculairement ſur la voile A B C, avec la même viteſſe & la même force qu'il donneroit, ſi le vaiſſeau ne ſe mouvoit que ſuivant B K avec la viteſſe B p, & trouve auſſi par conſéquent la même reſiſtance en ſens contraire, c'eſt-à-dire, une reſiſtance comme le quarré de B p; le vent B F donne auſſi perpendiculairement ſur la voile D B E, avec la même viteſſe & la même force qu'il donneroit, ſi le vaiſſeau n'alloit que ſuivant B I avec la viteſſe B q; car ſans cette reſiſtance, qui eſt réelle, le vent B F, pouſſant continuellement le vaiſſeau ſuivant B F, le feroit aller à la fin de ce côté-là auſſi vite que le vent va lui-même; d'où il ſuit, que de même que la viteſſe B q ſuivant B I, & la viteſſe B p ſuivant B K, forment neceſſairement la viteſſe B O ſuivant B H; les reſiſtances de ces viteſſes, c'eſt-à-dire, la reſiſtance de la viteſſe B p, qui eſt comme B p^2, & la reſiſtance de la viteſſe B q, qui eſt comme B q^2, compoſeront & formeront neceſſairement la reſiſtance de la viteſſe B O ſuivant B H, qui eſt comme B O^2; & réciproquement la reſiſtance de la viteſſe B O ſuivant B H, forme néceſſairement les deux autres. Et comme, dans le mouvement uniforme, il faut néceſſairement que les forces qui pouſſent le vaiſſeau ſoient égales aux reſiſtances en ſens contraire, il eſt évident, que la force avec laquelle le vaiſſeau eſt pouſſé ſuivant B O, qui eſt comme B O^2, eſt égale à la force avec laquelle le vaiſſeau eſt pouſſé ſuivant B p, qui eſt comme B p^2, plus à la force avec laquelle le vaiſſeau eſt pouſſé ſuivant B q, qui eſt comme B q^2; Et l'on trouve auſſi que $BO^2 = Bp^2 + Bq^2$.

Toutes ces vérités me paroiſſent ſi liées les unes aux autres, & je les crois voir ſi clairement, & ſi diſtinctement, que je ſerai l'homme du monde le plus ſurpris, Monſieur, auſſi-bien que d'autres Perſonnes incomparablement plus éclairées que moi, ſi l'on peut démontrer avec évidence le contraire. Juſqu'à cette heure, on ne m'a objecté que le principe de Statique, duquel vous me parlez auſſi, Monſieur: Mais je ne trouve pas que ce principe faſſe rien à mon affaire. Voici pourquoi.

Dans l'exemple de Statique que vous me donnez, Monſieur, des trois poids en équilibre; comme on ſuppoſe que le poids C tirant ſuivant G F perpendiculairement à l'horizon, il tire en même temps obliquement ſuivant E F & ſuivant D F, & que c'eſt une même maſſe C, qui tire en même temps ſuivant ces trois directions, les forces avec leſquelles il tirera ſuivant ces trois directions, ſeront comme les viteſſes avec leſquelles il tendra auſſi à ſe mouvoir ſuivant ces trois directions, c'eſt-à-dire, comme ces trois lignes G F, E F & D F; parce que la force étant le produit de la maſſe par la viteſſe, ici la maſſe étant toûjours la même, les forces ſeront comme les viteſſes. Ce qui eſt bien different du cas dont il s'agit; car la force du vent BF, qui donne perpendiculairement ſur la voile D B E, & avec laquelle le vaiſſeau eſt pouſſé ſuivant B F, eſt le produit d'une maſſe & d'une viteſſe, differente de la maſſe & de la viteſſe qui produiſent la force du vent B G, qui donne perpendiculairement ſur la voile A B C, & qui pouſſe le vaiſſeau ſuivant B G. Ces maſſes ſont toûjours comme les viteſſes; c'eſt ce qui fait que les forces ſont toûjours comme les quarrés des viteſſes, & ne peuvent par conſé-

TAB. XXIX. *Fig.* 4.

TAB. XXIX. *Fig.* 1.

conséquent jamais être comme les vitesses; au lieu que, dans l'exemple de Statique, supposant que c'est la même masse qui tire en tous sens; il est nécessaire que les forces soient comme les vitesses, avec lesquelles cette même masse tend à se mouvoir; ce qui fait que la règle de Statique pour la composition des mouvemens ne peut pas être admise dans le cas du vaisseau poussé par deux vents, dont la direction est perpendiculaire l'une à l'autre, & qui donne perpendiculairement sur deux voiles; à moins que vous ne regardiez la force intrinséque du vaisseau, c'est-à-dire, une force que le vaisseau auroit reçûë en soi, & avec laquelle il agiroit, de même que le poids C agit par sa pesanteur, & qu'ensuite vous ne raisonniez ainsi; Le vaisseau agit en tout sens avec sa masse, qui est toûjours la même, ainsi la force avec laquelle il agira en tous sens, sera comme la vitesse avec laquelle il ira. Mais il me paroit très-clairement & très-distinctement, qu'il y auroit en cela une fort grande équivoque, comme je le vas faire voir.

TAB. XXIX. *Fig.* 4.

TAB. XXIX. *Fig.* 1.

Le vaisseau étant poussé par le vent BF, qui donne perpendiculairement sur la voile DBE, doit aller de plus en plus suivant BF, jusqu'à ce que la resistance qu'il trouvera en sens contraire, soit précisement égale à la force du vent sur la voile; après quoi il doit continuer avec la vitesse qu'il aura alors, ne pouvant plus rien y avoir, qui puisse augmenter ni diminuer cette vitesse; par la raison que la force avec laquelle le vent pousse continuellement le vaisseau, & qui l'entretient dans son mouvement uniforme, fait naître nécessairement une resistance en sens contraire, de la part de l'eau, qui lui est toûjours égale; ce qui fait que le vaisseau se trouve ensuite continuellement en équilibre, entre la force du vent qui le pousse d'une part, & la resistance de l'eau qui le repousse de l'autre, & qu'il doit aller dans cet état, quoique dans un milieu qui resiste, comme s'il se mouvoit dans le vuide: Et en tout cela, la force intrinséque du vaisseau n'y entre pour rien, & n'agit contre rien, le vaisseau allant comme il feroit dans le vuide. Le vent BG donnant aussi perpendiculairement sur la voile ABC, ni plus ni moins que si le vaisseau n'alloit point suivant BF, comme on le vient de faire voir ci-devant, fera aussi aller le vaisseau de plus en plus suivant BK, jusqu'à-ce que la resistance en sens contraire soit égale à la force du vent sur la voile, & il ira ensuite suivant BK avec une vitesse uniforme, & comme s'il alloit dans le vuide: Voilà donc le vaisseau, qui va en même temps suivant BF, & suivant BK, comme s'il alloit dans le vuide, c'est-à-dire, comme s'il n'étoit plus poussé, ni arrêté par rien. D'où on peut conclurre certainement ce me semble:

1°. Que le vaisseau ira suivant & avec la vitesse exprimée par la diagonale d'un parallèlogramme, qui a pour l'un de ses côtés la ligne qui exprime la vitesse que le vaisseau a suivant BF, & pour l'autre la ligne qui exprime sa vitesse suivant BK; puisque par toute autre route, & avec toute autre vitesse, il ne satisferoit point à ces deux vitesses indispensables: de maniere, que si la vitesse uniforme du vaisseau suivant BF, est exprimée par BL, & suivant BG par BK, il doit nécessairement aller par BM, quoique dans un milieu qui resiste avec la vitesse exprimée par BM, diagonale du parallèlogramme BLMK, comme s'il alloit dans le vuide; avec cette difference cependant, que dans le vuide il iroit aussi vite que le vent, & qu'ici il ne va qu'avec la vitesse, qui est nécessaire pour rendre la resistance, que le vaisseau trouve à fendre l'eau, égale à la force du vent sur la voile; ce qui fait qu'il va, comme s'il alloit dans le vuide, comme s'il n'y avoit rien qui resistât à son mouvement.

2°. Que la force avec laquelle ces deux vents poussent le vaisseau suivant BM, étant égale à la resistance de l'eau qui est égale à BM^2, elle sera égale à la somme des deux forces des deux vents; parce que $BM^2 = BL^2 + BK^2$, qui sont les forces des deux vents.

3°. Que la resistance suivant la diagonale BM est égale à la somme des deux resistances laterales.

4°. Que la force intrinséque du vaisseau n'agit contre rien, & ne fait rien pour déterminer les vitesses ni les routes du vaisseau.

Ainsi je ne vois pas ce que le principe de Statique, que l'on m'oppose, fait à mon affaire; dans laquelle je ne suppose que deux principes, dont tout le monde convient; savoir, que les forces des fluides sont comme les quarrés de leurs vitesses, pour l'un; & l'autre, que tout corps se meut toûjours du côté vers lequel il est plus poussé, même dans l'eau; supposant comme vous, Monsieur, que l'eau s'oppose suivant vôtre premiere maniere, que vous expliquez par des fils disposez suivant des cercles concentriques; Et je ne crois pas que dans tous mes raisonnemens, on puisse me citer rien, qui ne soit tiré directement & conséquemment de ces principes, & que le tout soit une suite nécessaire: Si cela n'est pas, je vous supplierai de m'en marquer les endroits.

Je ne serai cependant bien satisfait, Monsieur, que lors que je n'aurai plus contre moi une authorité aussi grande qu'est la vôtre dans mon esprit: Et parce qu'aussi on ne peut pas être avec plus d'estime & de respect que je suis,

MONSIEUR,

Vôtre très-humble & très-obéissant Serviteur

à Paris le 15. 7bre 1713.

RENAU.

J'aurai l'honneur de vous écrire, Monsieur, sur les autres endroits de vôtre Lettre qui regardent mon *Mémoire*; comptant que vous ne trouvez pas mauvais que l'on cherche à s'instruire & à voir clair.

LETTRE

N°. XCV.

LETTRE II DE MONSIEUR BERNOULLI A MONSIEUR LE CHEVALIER RENAU;

Contenant une ample Solution des instances & des difficultés faites dans la Réponse précédente.

MONSIEUR,

SI pour complaire à une personne que l'on estime, il étoit permis d'embrasser aveuglément son opinion, bien ou mal fondée; je vous proteste que je serois l'homme du monde le plus porté à vous sacrifier mes lumieres, & à acquiescer, s'il m'étoit possible, à la vraisemblance de vos raisonnemens; tant ils sont assaisonnés d'honnêtetés & d'expressions engageantes. Mais je sai que ce que vous exigez de moi, n'est pas une complaisance aveugle; Les Mathématiciens ne se payent pas de complimens, ils veulent des raisons & des raisons solides; Il faut convaincre ou être convaincu, il n'y a point de milieu. Vous me marquez, Monsieur, que vous ne serez satisfait, que lorsque vous n'aurez plus contre vous mon autorité; ce sont les sentimens où je suis à l'égard de la vôtre. Cependant comme dans les Mathématiques l'autorité n'est contée pour rien, à moins qu'elle ne soit elle-même appuyée

 sur

ſur de fortes preuves; tâchons de nous en donner mutuellement, jusqu'à-ce que l'évidence de la vérité ait diſſipé l'erreur de quelque côté qu'elle ſe trouve: Ce n'eſt pas que je ne ſois déja convaincu par la force de mes démonſtrations que l'erreur n'eſt pas de mon côté; auſſi ce que j'en dis, Monſieur, n'eſt que pour vous faire voir combien je ſerois diſpoſé à déferer à vos raiſonnemens, ſi le moindre doute troubloit l'évidence de mes preuves.

J'avouë, Monſieur, que ce n'eſt pas ſans raiſon que vous êtes prévenu en faveur de vôtre *Théorie*; elle eſt ſi ſimple & ſi commode, & l'on en tireroit un ſi grand avantage pour la Navigation, que c'eſt en vérité dommage, qu'elle ſoit moins fondée ſur la vérité que ſur la vraiſemblance. Je ſai de plus, Monſieur, que la Charge importante que vous occupez & que vous rempliſſez ſi dignement, vous a engagé à faire part au public de vôtre *Théorie*; elle a même été publiée par un Ordre exprès de Sa Majeſté: Cet Ouvrage a été reçû avec applaudiſſement par les Savans; & la plûpart d'entr'eux, qui ne l'ont pas examiné avec aſſez de ſoin, ſe ſont laiſſé entrainer à la voix publique, & ont été frappez de l'éclat de vos Démonſtrations. Le moyen donc d'abandonner légérement une Théorie ſi bien inventée? Pour moi, Monſieur, rien de ſemblable ne m'engage à défendre mon ſentiment avec opiniatreté: La Théorie que je propoſe eſt très-difficile & très-compliquée; elle n'a point l'attrait charmant de la ſimplicité; & aucune raiſon d'intérêt ou de réputation ne m'oblige à la ſoutenir, n'ayant encore rien publié ſur cette matiere: au contraire, ſur le rapport imparfait & confus qu'on m'avoit fait de vôtre diſpute avec Mr. HUGUENS, je m'étois au commencement déclaré en vôtre faveur; enſorte que ſi j'embraſſe aujourd'hui un ſentiment oppoſé au vôtre, vous devez être perſuadé, que c'eſt le ſeul intérêt de la vérité qui m'y a porté; ce qui doit naturellement faire préſumer, que je ne me ſuis rendu qu'à des preuves inconteſtables. Je ſouhaiterois ſeulement de pouvoir vous développer cette vérité, avec au-

autant d'évidence que je la conçois. Pour cet effet, Monſieur, je vous ſupplie de vouloir bien m'accorder une attention déſintéreſſée & dépouillée de tous préjugés. Je tâcherai premierement, de lever vos difficultés ſur ma Régle de déterminer la route & la viteſſe d'un vaiſſeau, enſuite je démontrerai cette même Règle par le principe ordinaire de Statique fondé ſur la compoſition des forces. TAB. XXIX.

Pour ce qui eſt de vos difficultés, voici en quoi elles conſiſtent: Selon ma Règle, je prétendois, & je prétens encore, que ſi BK marque la direction & la viteſſe uniforme qu'auroit le vaiſſeau, par la ſeule impulſion du vent perpendiculaire ſur la voile ABC, & BL la direction & la viteſſe uniforme du vaiſſeau, pouſſé ſeulement par le ſecond vent perpendiculaire ſur la voile DBE; la direction du vaiſſeau pouſſé par les deux vents enſemble ſera BH, diagonale du rectangle BIHK fait par les côtés BK & BI troiſieme proportionnelle de BK à BL; & la viteſſe ſera déſignée par BO moyenne proportionnelle entre BH & BK. Vous croyez, Monſieur, que cette Règle mène à des contradictions; ce que vous voulez faire voir par deux differentes concluſions, à la premiere deſquelles il eſt ſi aiſé de répondre, que vous avez prévû vous-même la réponſe que j'y ferois; Car après avoir rapporté la prétenduë abſurdité en ces termes; *Le vaiſſeau allant donc ſuivant BH avec la viteſſe BO, ſa viteſſe ſuivant BL ſera Bq, & ſuivant BK ſera Bp, ſuppoſant Oq perpendiculaire à BI, & Op perpendiculaire à BK. Or BO, Bq, & Bp ſont entre elles comme BH, BI, & BK, qui repréſentent par vôtre hypothèſe les forces qui pouſſent le vaiſſeau dans ces directions, donc les viteſſes uniformes ſeroient entre elles comme les forces, ou ce qui eſt la même choſe, les viteſſes uniformes dans un milieu qui réſiſte, ſeroient entre elles comme les reſiſtances, car les reſiſtances ſont comme les quarrés des viteſſes, comme vous en convenez vous-même*: Après avoir, dis-je, rapporté cette prétenduë abſurdité, vous remarquez fort à propos, que je dirai à cela, *qu'il ne s'agit pas ici de comparer les reſiſtances laterales, qui*

V 2

qui ne ſont qu'idéales, & rien en effet; & qu'il ne faut avoir égard qu'à la reſiſtance directe BO, qui eſt la ſeule réelle; Vous promettez même *d'y conſentir ſi l'on veut.* Non, Monſieur, je ne le veux pas de vous par honnêteté, mais j'eſpère que la vérité miſe dans tout ſon jour vous y obligera. J'ajoûterai ici ſeulement, en paſſant, que les viteſſes étant toûjours ſimples à proprement parler, ne ſe reſolvent pas comme les forces, en viteſſes laterales, mais que ce ſont plûtôt leurs déterminations qui ſe reſolvent; ainſi il falloit dire *que le vaiſſeau allant ſuivant BH avec la viteſſe BO, la détermination de la même viteſſe ſuivant BI ſera Bq & ſuivant BK ſera Bp*; ce qui ne renferme aucune abſurdité.

Paſſons à l'autre objection, qui paroît avoir plus de fondement; d'autant que la concluſion eſt directement contre ma Règle, & qu'il n'eſt pas ſi aiſé d'en découvrir le défaut: j'en ai pourtant le dénoüement; mais voyons auparavant comment vous raiſonnez. Vous convenez d'abord, comme je viens de le dire, qu'il ne s'agit pas ici de comparer les reſiſtances laterales, qui ne ſont qu'idéales; puis vous continuez, Monſieur, en ces termes: *Pour en avoir une autre (reſiſtance) auſſi directe à lui comparer, ſoit ſuppoſé que la force qui pouſſe le vaiſſeau ſuivant BK ſoit double de la force déſignée par BK, & que la force qui pouſſe le vaiſſeau ſuivant BI ſoit auſſi double de la force deſignée par BI; prolongeant BK en R, enſorte que BR ſoit double de BK, & BI en S, enſorte que BS ſoit double de BI; BR déſignera la nouvelle force avec laquelle le vaiſſeau ſera pouſſé ſuivant BK, & BS déſignera celle avec laquelle il ſera pouſſé ſuivant BI: Et, par vôtre règle, le vaiſſeau par ces deux forces à la fois, doit aller ſuivant la direction BT, diagonale du parallèlogramme BSTR avec la viteſſe BX moyenne proportionelle entre BT & BR; mais comme BT n'eſt que BH prolongé en T; à cauſe des rectangles ſemblables BH: BT = BO: BX, c'eſt-à-dire, la force BH à la force BT, comme la viteſſe BO à la viteſſe BX, c'eſt-à-dire, que les viteſſes directes du vaiſſeau ſeroient entre elles comme les forces qui pouſſent le vaiſſeau, ce qui*

ſeroit abſurde, car ces viteſſes ſont toûjours comme les racines des forces, ou ce qui revient au même, comme les racines des reſiſtances. Voilà, Monſieur, vôtre raiſonnement, qui a bien la mine d'être dans les formes: Je conviens qu'il le ſeroit, & qu'il détruiroit par conſéquent ma règle, ſi ce que vous ſuppoſez étoit vrai, que ſelon elle BX, moyenne proportionnelle entre BT & BR, déſigne la viteſſe du vaiſſeau, pouſſé à la fois par les deux forces BR & BS doubles des forces BK & BI. Mais je nie que BX, en conſéquence de ma règle, doive être la viteſſe du vaiſſeau. Il eſt vrai-ſemblable, je l'avoüe, que comme BO, moyenne proportionnelle entre BH & BK, marque, ſelon ma règle, la viteſſe du vaiſſeau pouſſé à la fois avec les forces ſimples BK & BI, de même BX, moyenne proportionnelle entre BT & BR, marquera la viteſſe du vaiſſeau pouſſé à la fois avec les forces doubles BR & BS. Cependant cette analogie de raiſonnemens ne peut pas avoir lieu ici, & ſi on entre bien dans le vrai ſens de ma règle, on verra que la viteſſe du vaiſſeau, dans ce cas des forces doubles, ſera exprimée par BZ moyenne proportionnelle entre BT & BK, & non point entre BT & BR. Pour vous en faire comprendre la raiſon, ſouvenez-vous, Monſieur, que dans les conſtructions géométriques, où il s'agit d'exprimer la proportion des quarrés par des lignes droites, on en choiſit une arbitraire pour l'unité; laquelle étant une fois poſée, il faut s'y tenir dans tout le cours de la conſtruction, n'étant pas permis de prendre pour l'unité, tantôt une ligne, tantôt une autre, ſans donner dans le paralogiſme. Or dans la conſtruction que preſcrit ma règle, j'ai pris BK pour l'unité; car comme BK & BL marquoient par hypothèſe les viteſſes uniformes, que le vaiſſeau auroit, s'il étoit pouſſé ſéparément dans les directions BK & BL; il étoit néceſſaire de faire un parallèlogramme KI dont les côtés BK & BI fuſſent comme les quarrés des viteſſes, pour exprimer la proportion des forces des deux vents; & partant, pour conſtruire ces deux côtés dans ladite proportion, j'ai pris, pour rendre la conſtruction d'autant plus facile & abrégée, une des viteſſes elle-même, ſavoir BK, pour l'unité, faiſant BI troiſieme proportionnelle de BK à BL; car de cette maniere, on aura $BK^2 : BL^2 = BK : BI$; enſorte que c'eſt en conſéquence d'une ſuppoſition arbitraire, que la même ligne BK marque ici en même temps l'unité, une viteſſe du vaiſſeau, & une force du premier vent. Or puiſque BH, diagonale du parallèlogramme KI, doit exprimer néceſſairement (en vertu de la compoſition des forces, que l'on peut appliquer à ce cas-ci, auſſi-bien qu'à deux poids qui en tirent obliquement un troiſieme, comme je l'expliquerai ci-après) la force moyenne, avec laquelle le vaiſſeau eſt pouſſé par l'action des deux vents enſemble; pour trouver donc la viteſſe uniforme du vaiſſeau dans la direction BH, qui produiſe une réſiſtance de l'eau égale à cette force moyenne, reſultante de l'action des deux vents enſemble; il eſt manifeſte que l'on doit prendre la racine de BH, ce qui ſe fait en prenant BO moyenne proportionnelle entre BH & l'unité, c'eſt-à-dire, entre BH & BK, puiſque j'ai pris BK pour l'unité. Il en eſt donc de même des forces BR, BS, doubles de BK, BI; celle qui en reſulte ſera BT diagonale du parallèlogramme RS; & la viteſſe du vaiſſeau ſera $\sqrt{BT}$, ou BZ, moyenne proportionnelle entre BT & l'unité, c'eſt-à-dire, entre BT & BK, & non pas BX, moyenne proportionnelle entre BT & BR, comme vous l'avez fait, en admettant tacitement deux differentes unités, ſavoir BK & BR, contre la Loi d'une bonne conſtruction.

Je vois bien au reſte, que la ſimplicité, que j'ai affectée dans ma conſtruction, vous a donné lieu d'en tirer cette conſéquence, quoique illégitime; car ſi ſans avoir égard à la ſimplicité, j'avois exprimé l'unité par une autre ligne priſe à diſcretion, j'aurois trouvé une même longueur pour BO, & vous n'auriez pas eu l'occaſion de faire vôtre objection; mais la conſtruction en auroit été un peu plus longue, dont voici la maniere de s'y prendre.

Soit, comme auparavant, BK la viteſſe uniforme que le vaiſſeau

vaiſſeau auroit par la ſeule force du vent, qui donne ſur la voile ABC; & BL la viteſſe uniforme imprimée au vaiſſeau, ſi le ſecond vent agiſſoit tout ſeul ſur la voile DBE: Soit maintenant N, une ligne quelconque priſe pour l'unité, que l'on faſſe $BQ =$ à la troiſieme proportionnelle de N à BK, & $Bt =$ à la troiſieme proportionnelle de N à BL: Soit achevé le parallèlogramme QB*t*V. Je dis, que le vaiſſeau étant pouſſé par les deux forces enſemble, ira dans la diagonale BV, & avec une viteſſe BO exprimée par la moyenne proportionnelle entre BV & l'unité N.

Je ne penſe pas qu'il ſoit beſoin, de prouver au long, que cette derniere conſtruction ici, & celle de ma Lettre précédente, donnent tout à fait la même choſe, tant pour la direction de la route, que pour la viteſſe. Car $BQ\ [BK^2 : N] : Bt\ [BL^2 : N] = BK^2 : BL^2 = BK : BI$; donc les parallèlogrammes Q*t* & KI ſont ſemblables, & par conſéquent leurs diagonales BV & BH ſont ſur une même ligne droite, ou dans une même direction: De plus, par ma premiere conſtruction, on a $BO^2 = BH \times BK$, & par la ſeconde $BO^2 = BV \times N$; mais à cauſe de $N : BK = BK : BQ = BH : BV$, on a $BH \times BK = BV \times N$; d'où il ſuit que BO de la premiere conſtruction, eſt égale à BO de la ſeconde.

Que ſi vous faites maintenant l'application de la ſeconde conſtruction au cas, qui fait le ſujet de vôtre objection; en prenant les forces laterales doubles de BQ & B*t*, & en gardant toûjours la même ligne N pour l'unité; vous trouverez que l'abſurdité apparente, que vous m'avez objectée, diſparoîtra entiérement. Voilà donc, Monſieur, vos deux plus grandes difficultés levées: ce que vous ajoûtez enſuite, partie pour appuyer ces mêmes difficultés, partie pour confirmer vôtre opinion, ne ſont, à ce qu'il me ſemble, que des repétitions de ce que vous avez amplement déduit dans vôtre Mémoire, exprimées ſous d'autres expreſſions; ou tout au plus, ce ne ſont que des argumens, qui y reviennent par un petit changement; deſorte que je vous cauſerois peut-être de l'ennui, ſi si à vôtre exemple, je réïterois de même les réponses que je vous ai déja données dans ma premiere Lettre; d'autant plus que la solution que je viens de donner à vos difficultés, & la vérité mise dans tout son jour, & bien affermie par la démonstration que je m'en vais vous communiquer, vous mettra en état de pouvoir vous satisfaire vous-même, sur toutes les difficultés qui pourroient encore vous rester.

Cependant pour répondre en peu de mots à l'objection, sur laquelle vous insistez le plus fortement, je remarquerai, Monsieur, que vous abusez du terme de *composition* de forces, en lui donnant une signification trop étroite, comme si c'étoit une composition de parties *intégrantes*, dont il se fait un *tout composé*; au lieu que ce n'est qu'une combinaison des forces laterales, dont il résulte une force moyenne, égale à une troisieme directement opposée, laquelle, quoiqu'inégale à la somme des deux laterales, ne laisse pas de les tenir en équilibre, ou de les contrebalancer, par la seule disposition de sa direction, comme on le peut faire voir par une infinité d'exemples de Statique, où un petit poids en tient suspendu un plus grand.

Quoi qu'il en soit, ce raisonnement que vous faites en ces mots; *Vôtre force moyenne, désignée par BH, étant moindre que la somme des deux forces qui la composent, savoir la somme des forces désignées par BK & BI; il faudroit nécessairement qu'il y eut pour cela de la force de détruite dans les deux forces composantes; ce qui ne peut pas être, la direction de la force BK étant perpendiculaire à la direction de la force BI; & on n'aura pas de peine à en convenir, si l'on fait réflexion qu'il n'y a point de force sans vitesse; or la force BK n'a point de vitesse contre la force BI, ni BI contre BK; D'où il suit que ces deux forces ne se peuvent rien détruire l'une à l'autre*: Ce raisonnement, dis-je, n'est pas plus concluant que cet autre, par lequel un certain Italien prétendoit autrefois détruire une proposition de Statique incontestable en elle-même, qui est que *le moment, ou la force avec laquelle une boule tâche de descendre sur un plan incliné, est au poids absolu de la boule comme la hauteur perpendiculaire de ce Plan à sa longeur*: Car de ce qu'en considerant la boule soutenuë par deux Plans inclinés qui font ensemble un angle droit; il voyoit que la somme des deux forces, avec lesquelles les deux plans sont pressez par la boule, seroit par cette proposition plus grande que la force totale, ou le poids absolu de la boule; il croyoit mal à propos que cela étoit une absurdité. Voyez les *Actes de Leipsic* de l'Année 1684. pag. 512.

Si vous prenez la peine, Monsieur, de réfléchir un peu sur l'état de nôtre question, vous verrez que vôtre raisonnement est fort peu different de celui de cet Italien; de même que les deux sujets différent aussi fort peu entr'eux. Je me hazarde de même de dire, que tous deux se reduisent à la même chose; voici comment: La boule peut représenter le vaisseau; le poids absolu de la boule, & sa direction verticale, représentent la force de la resistance de l'eau, & la route du vaisseau; & enfin les efforts que les deux plans inclinés employent à soûtenir cette boule se rapportent aux deux forces, avec lesquelles les deux voiles du vaisseau sont poussées. On pourroit donc former ici la même objection que vous faites, en disant que *les forces passives, ou les efforts, avec lesquelles la boule est repoussée par les Plans, & les Directions, dès quelles sont perpendiculaires, ne se détruisent en rien, & que si elles agissent sur la boule, qui donne lieu par l'action de son poids, que chacune d'elle agisse de toute sa force, cette boule sera poussée par une force qui sera égale à la somme des deux, &c.* Cependant la véritable Statique nous apprend, que la somme de ces deux forces passives des Plans est plus grande que le poids absolu de la boule, & par conséquent plus grande que la force moyenne passive, avec laquelle la boule est repoussée verticalement en haut, & qui doit être égale au poids absolu; à cause de l'égalité entre l'action & la réaction.

Je vous entens déja repliquer, que *vous ne trouvez pas que cet exemple, non plus que le principe de Statique, duquel je vous ai parlé dans ma précédente, fasse rien à vôtre affaire; vous direz,* *Monſieur, qu'un poids qui tend, ou qui tire perpendiculairement à l'horizon, tend ou tire en même temps obliquement, & que c'eſt toûjours une même maſſe, qui agit ſuivant toutes les directions, & par conſéquent que les forces de ce poids, ſuivant toutes les directions, ſeront comme les viteſſes avec leſquelles il tendra auſſi à ſe mouvoir; au lieu que la force du vent conſiſte dans le produit d'une maſſe & d'une viteſſe, differente de la maſſe & de la viteſſe qui produiſent la force d'un autre vent; enſorte que puiſque les maſſes ſont comme les viteſſes; les forces ſeront toûjours comme les quarrés des viteſſes; au lieu que dans l'exemple de Statique, ſuppoſant que c'eſt la même maſſe qui tire en tout ſens, il eſt neceſſaire que les forces ſoient comme les viteſſes, avec leſquelles cette même maſſe tend à ſe mouvoir, ce qui fait que la règle de Statique pour la compoſition des mouvements ne peut pas être admiſe dans le cas du Vaiſſeau pouſſé par deux vents, dont la direction eſt perpendiculaire l'une à l'autre, & qui donnent perpendiculairement ſur les deux voiles &c.*

Mais quelques ſpecieuſes que paroiſſent ces exceptions, ou d'autres ſemblables, on trouvera, ſi on les examine de près, qu'elles ne contiennent aucune raiſon ſolide, par laquelle on puiſſe démontrer que le cas particulier du Vaiſſeau pouſſé continuellement par trois forces, ſçavoir par celles des deux vents, & de la reſiſtance de l'eau, doive être exemté de la Règle generale de Statique; ſuivant laquelle on conclud univerſellement, & ſans exception, que ſi un poids mobile B eſt tenu en équilibre, par la reſiſtance, ou l'effort de trois puiſſances, dont les directions & quantités ſoient exprimées
TAB. XXIX. *Fig. 6.* par les trois lignes BK, BI, BY; chacune d'elles, BY, par exemple, ſera égale à la diagonale BH du parallèlogramme KI fait par les lignes des deux autres puiſſances BK, BI, & dans la même direction que cette diagonale, ſoit que l'angle KBI ſoit droit, ou oblique.

Auſſi ne vous êtes-vous aviſé, Monſieur, de chercher ces exceptions, que depuis que vous avez reçû ma premiere Lettre; où j'ai montré les abſurdités dans leſquelles on tomberoit, ſi on vouloit rejetter cette Règle generale de Statique, reconnuë

nuë de tous les plus ſçavans Géométres. Car vous ne pouvez pas diſconvenir, que vous ne l'ayez d'abord nettement condamnée, ſans vouloir même admettre le cas des poids; témoin l'expreſſion dont vous vous êtes ſervi dans vôtre premiere Lettre, où vous parlez en general de cette Règle comme *d'une pure tradition, qui avoit paſſée des Anciens Géométres jusqu'à nôtre temps, ſans en avoir d'autre preuve que l'Autorité des grands Géométres*: Témoin auſſi une des Lettres que Monſieur de MONTMORT écrivit à mon Neveu, dans laquelle ſe trouvent ces mots; *Si Monſieur* RENAU *a raiſon, il faut reformer tout ce qui a été écrit en Méchanique juſqu'à préſent, & en particulier celle de Mr.* VARIGNON, & par conſéquent auſſi la règle ou le principe de la compoſition, pris dans toute ſon étenduë. Mais vous commencez préſentement d'en reconnoître la vérité, au moins à l'égard des poids; cette démarche, Monſieur, vous approche de moi; encore une ou deux pareilles, & j'aurai le plaiſir de vous voir de mon ſentiment: mais c'eſt de quoi j'eſpére de venir enfin à bout.

Effectivement, la diſtinction, que vous faites, entre la force des poids & celle des vents, n'eſt pas une raiſon d'admettre le principe de Statique à l'égard des poids, & de le rejetter à l'égard des vents; car cette diſtinction ne regarde que les cauſes qui produiſent ces forces: or il n'eſt pas queſtion de ſavoir comment les forces ſont produites; il ſuffit qu'elles ſoient exiſtantes; de quelque cauſe qu'elles proviennent, elles feront toûjours la même impreſſion, la même action, & par conſéquent le même effet, pourvû qu'elles ſoient appliquées d'une même maniere. Car dès qu'une force uniforme eſt continuellement appliquée ſur un ſujet, elle eſt dans ce ſujet comme innée, ou intrinſéque. Ce ſeroit prendre le change, ſi pour raiſonner de l'énergie des forces, dans la Statique, on vouloit s'amuſer à pénétrer premierement la cauſe phyque de la peſanteur, pour ſavoir ſi c'eſt une qualité intrinſéque, ou eſſentielle des corps, comme le prétendent les Peripatéticiens; ou ſi elle eſt cauſée par la preſſion externe de la matiere ſubtile,

tile, qui compose le tourbillon de la Terre, selon la pensée de Messieurs les Cartésiens; ou enfin, si, suivant quelques Anglois modernes, elle consiste dans une attraction mutuelle des corps. De cette maniere, on ne seroit jamais assûré de la certitude d'une proposition de Statique; puisque si elle étoit vraie dans le systême d'ARISTOTE, elle seroit fausse, selon vôtre maniere de distinguer, dans celui de DES-CARTES.

Je ne crois pas que vous soyez formellement dans le sentiment de vouloir faire dépendre la certitude de la Statique de celle de la Physique: Cependant vous voyez, Monsieur, que vôtre distinction emporte une telle dépendance; réfléchissez-y, je vous en supplie, & faites attention à l'exemple de Statique que voici: Je m'en servirai comme d'un Lemme, dont je tirerai la démonstration de la construction que je vous ai donnée, pour déterminer la route & la vitesse du vaisseau, poussé par deux forces perpendiculaires l'une à l'autre.

TAB. XXIX. *Fig.* 7. Concevez donc, s'il vous plaît, dans un plan vertical, que le point mobile B soit attaché aux trois cordes BLN, BMO, & BP, dont les deux premieres faisant un angle droit LBM, passent par dessus les deux poulies L & M, ensorte que les portions repliées LN & MO & la troisieme corde BP soient verticales. Aux extrêmités des ces trois cordes N, O, & P, soient aussi attachés par le milieu trois Plans horizontaux, mobiles & sans pesanteur AC, DE, & FG, les grandeurs desquels soient, après avoir prolongé PB en H, comme les sinus des angles HBM, HBL, & LBM; ou, ce qui revient au même, comme les deux côtés BK, & BI, & la diagonale BH du parallèlogramme KI fait autour du diametre BH. Supposez, par exemple, que ces trois plans soient comme les trois nombres 3, 4, & 5. Imaginez-vous, présentement, qu'un vent vienne fondre de haut en bas sur ces trois plans, suivant les directions verticales LN, MO, BP, ensorte que les plans recevant les impressions du vent en raison de leurs grandeurs, c'est-à-dire des nombres 3, 4, & 5, ils tireront le point mobile B suivant les trois directions BL,

BL, BM & BP, avec des forces qui seront dans la même raison de 3, 4, & 5, ou de BK, BI, BH. De grace, Monsieur, je vous demande, si vous ne concevez pas clairement, que les trois cordes, dans cette supposition, seront bandées par la force du vent, de la même maniere qu'elles le seroient, si au lieu des plans pressés par le vent, on chargeoit les extrêmités des cordes N, O, P, de trois poids équivalents, & partant aussi en raison de 3, 4, & 5. Vous direz donc que le vent & les poids feront le même effet sur le point B: Or le point B seroit mis en équilibre, dans la supposition des poids, ce que vous m'accordez; il le seroit donc aussi dans la supposition du vent. Cela vous paroît clair comme le jour, j'en suis sûr, & qui est-ce qui en douteroit? Cependant c'est là justement le cas de nôtre question; ainsi il ne faut qu'un peu d'explication pour achever la démonstration de ce que j'ai fait, pour déterminer la route & la vitesse du vaisseau, poussé à la fois par deux voiles perpendiculaires.

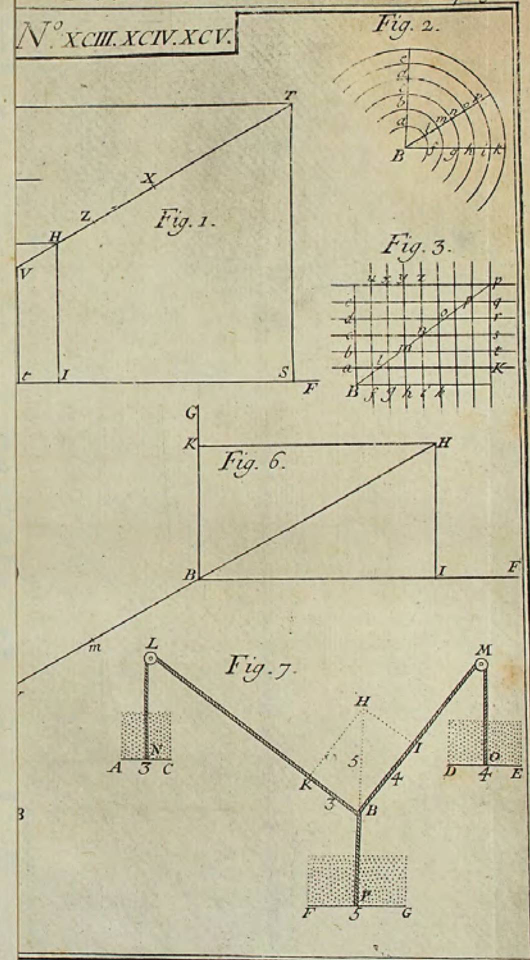
Car pour ce qui est de la route, vous serez, Monsieur, sans doute d'accord avec moi que sa direction doit être celle, suivant laquelle un troisieme vent, donnant en sens contraire sur une voile perpendiculaire *a*B*c*, pourroit contrebalancer les deux premiers vents, & arrêter ainsi le vaisseau en B. En considerant avec vous les vents comme n'étant pas infiniment rapides, je suppose, pour une plus juste application à nôtre cas, que les deux premiers vents donnent sur les voiles du vaisseau en repos avec leurs vitesses relatives, c'est-à-dire, avec l'excés dont la vitesse absoluë du vent suivant BF excéde la vitesse uniforme BL que le vaisseau auroit par la seule impulsion de ce vent, comme aussi avec l'excés dont la vitesse du vent suivant BG surpasse la vitesse uniforme BK que le vaisseau auroit s'il étoit poussé par ce seul vent. Ainsi voilà le vaisseau en B comme un point mobile tiré & contrebalancé par trois puissances suivant les trois directions BG, BF, & B*m*. Or, par le Lemme précédent, B*m* prolongée sera la diagonale BH du parallèlogramme KI, dont les côtés BK & TAB. XXIX. *Fig.* 1.

B I expriment la raiſon des deux autres puiſſances, leſquelles ſont comme les quarrés des viteſſes uniformes, que le vaiſſeau auroit, étant pouſſé par chaque puiſſance laterale ſéparément, c'eſt-à-dire comme BK^2 & BL^2. C'eſt pourquoi, le vaiſſeau pouſſé à la fois par les deux puiſſances laterales, ſans la troiſieme, ſuivra la route BH, qui ſeroit la direction de cette troiſieme puiſſance. Ce qu'il falloit démontrer pour la route.

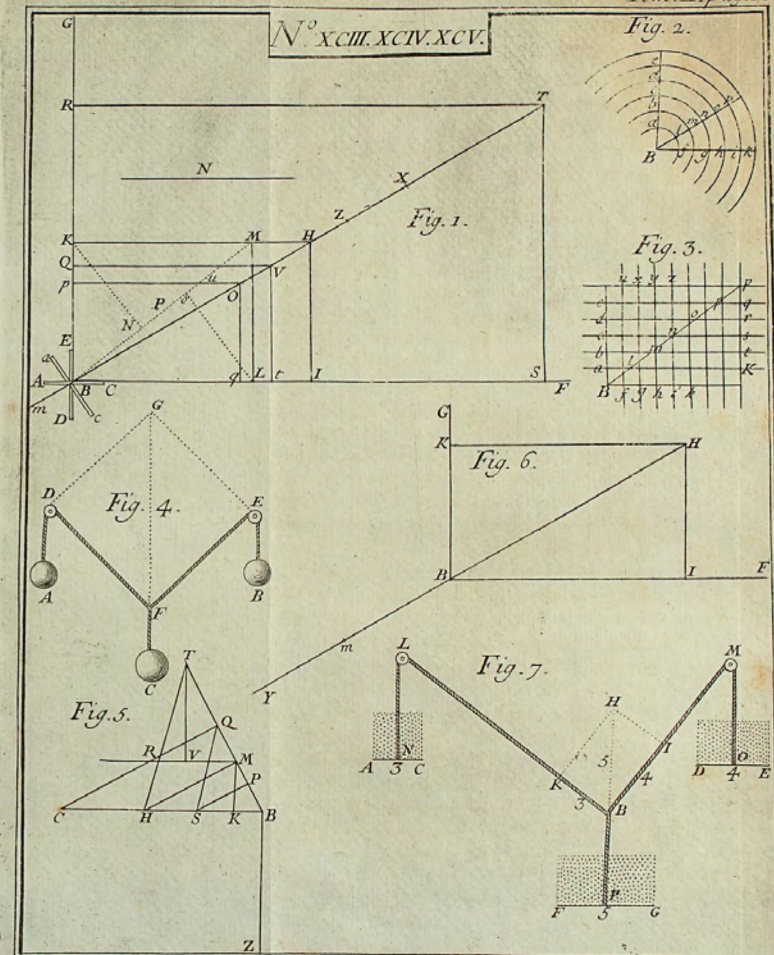
Quant à la viteſſe uniforme que ce vaiſſeau aura, il eſt clair, qu'elle doit être portée à un tel degré, que la reſiſtance de l'eau, qui en réſulte, puiſſe être égale à la troiſieme puiſſance qui contrebalance les deux autres puiſſances laterales; puiſque, par le Lemme précédent, la troiſieme puiſſance eſt exprimée par BH, on aura $\sqrt{BH}$, c'eſt-à-dire BO, ou la moyenne proportionnelle entre BH & l'unité BK, pour la viteſſe du vaiſſeau, qui produit une réſiſtance égale à la troiſieme puiſſance. Ce qu'il falloit auſſi démontrer pour la viteſſe.

Je me ſers ici du mot de *puiſſance* au lieu de celui de *force*; afin de me rendre plus intelligible, en faiſant voir que la force du vent n'a rien de ſingulier, pour la diſtinguer d'un autre genre de puiſſance continuellement & uniformément appliquée. Ainſi laiſſant là, & les vents, & les voiles, concevons deux
TAB. XXIX. *Fig. 6.* *vertus magnétiques*, par exemple, qui faſſent des efforts continuels & uniformes pour mouvoir le vaiſſeau, l'une ſuivant la direction BG, & l'autre ſuivant la direction BF, ſous telle condition, que la premiere vertu, ſans le concours de l'autre, pourroit procurer au vaiſſeau une viteſſe uniforme exprimée par BK, & l'autre, ſans le concours de la premiere, lui pourroit cauſer une viteſſe uniforme déſignée par BL. Il ſuit de-là, que leurs efforts ſeront comme le quarré de BK, & le quarré de BL, c'eſt-à-dire comme BK & BI. Concevons préſentement auſſi qu'une corde B*m* retienne & empêche le vaiſſeau d'obéïr aux efforts de ces deux vertus: Il eſt manifeſte, par le principe de Statique, ſur lequel eſt fondé mon Lemme;

Tab. XXIX. Tom. II. pag. 166.



Tab.XXIX. Tom.II.pag.166.



Lemme, que la
même direction
la force avec la
donc clairement
de, ne laisseroit p
voir dans la direc
à coup la corde,
mouvoir dans la
toûjours les même
en plus suivant B
veroit en sens con
laquelle la corde
la pesanteur ordi
dans l'air, jusques
se, qui cause dan
pesanteur.

Au reste, Mo
pas de la franchis
sées: Vous avez
pas la vérité: &
connoître, en qu
soumets-je avec p
content si, convai
vous ramener à
glorieux d'avoir fa
qu'il en arrive, je
veüillance, & vou
je serai toûjours a
à vôtre mérite,

MONSIE

à Basle, ce 7. Nov

Lemme, que la corde prendra une ſituation, qui ſera dans la même direction que la diagonale BH, & que BH déſignera la force avec laquelle la corde ſe bandera. Nous voyons donc clairement, que le vaiſſeau, quoique arrêté par la corde, ne laiſſeroit pas d'avoir une tendance continuelle à ſe mouvoir dans la direction BH; ſi bien que, ſi on rompoit tout à coup la corde, le vaiſſeau commenceroit effectivement à ſe mouvoir dans la route BH, & les vertus continuant de faire toûjours les mêmes efforts, ſon mouvement s'accelereroit de plus en plus ſuivant BH, juſqu'à-ce que la réſiſtance, qu'il trouveroit en ſens contraire, fût préciſément égale à la force, avec laquelle la corde ſe bandoit avant la rupture: De même que la peſanteur ordinaire fait accelerer les corps, qui deſcendent dans l'air, juſques-à ce qu'ils ayent acquis un degré de viteſſe, qui cauſe dans l'air une reſiſtance préciſément égale à leur peſanteur.

Au reſte, Monſieur, j'eſpére que vous ne vous offenſerez pas de la franchiſe, avec laquelle je vous découvre mes penſées: Vous avez l'Eſprit trop clair-voyant pour n'appercevoir pas la vérité: & le cœur trop bien placé pour ne la pas reconnoître, en quelqu'état qu'elle paroiſſe. Auſſi, Monſieur, ſoumets-je avec plaiſir mes raiſons à vôtre jugement; trop content ſi, convaincû de leur ſolidité, j'ai enfin le bonheur de vous ramener à mon ſentiment; je croirai qu'il me ſera bien glorieux d'avoir fait une ſi belle conquête. Cependant, quoiqu'il en arrive, je me recommande à l'honneur de vôtre bienveüillance, & vous ſupplie d'être entierement perſuadé, que je ſerai toûjours avec toute la vénération dûë à vôtre rang & à vôtre mérite,

Monsieur,

Votre très humble & très obéïſſant Serviteur

à Basle, ce 7. Novemb. 1713.

J. Bernoulli.

JOHAN-

N°. XCVI.

JOHANNIS BERNOULLI
MEDITATIO
DE NATURA CENTRI OSCILLATIONIS,

Ejusque in Pendulis compositis, tam quæ in Liquoribus, quam quæ in Vacuo agitantur, determinandi Regula, novo & certiori quam hactenus fundamento suffulta. †

I.

Acta Erudit. Lipſ. 1714. Jun. pag. 257.

IN *Actis Lipſienſ.* Anni ſuperioris, pag. 88. §. 23. * mentionem feci novæ alicujus Methodi pro inventione Centri oſcillationis; in quam incideram occaſione eorum quæ de effectu actionis diverſæ gravitatis differebam. Promiſi equidem, me totum hujus rei fundamentum, quod explicare, ob materiæ tractandæ copiam, tum non licebat, alio commodiori tempore detecturum: Sed excidiſſet hæc ſpeculatio; ut fieri aſſolet, propter alias, quæ poſtea mentem occuparunt meditationes; niſi refricuiſſet mihi memoriam Vir quidam eruditus & Mathematicus inſignis, cui ut morem geram, atque adeo promiſſi fidem liberem, ſuadet ejus erga me humanitas & mea demerendi illam proclivitas.

II.

Monendum eſt ante omnia, quamvis & ego quoque vectem mobilem conſiderem, ſicuti quondam fecit Frater meus piæ memor. [Vid. *Act. Lipſ.* An. 1691. pag. 317. & *Comment. Acad. Reg. Scient.* An. 1703. pag. 78.] magnam tamen eſſe diſcre-

† Meditatio hæc habetur etiam Gallice. *Mém. de l'Acad. Royale des Sciences de* Paris. 1714. pag. 208. édit. de Paris, pag. 269. édit. de Hollande.
* Supra N°. XC. Tom. I. pag. 528.

diſcrepantiam inter utriuſque applicandi rationem. Ille etenim uniuſmodi tantum gravitatem adhibet; adeoque rationem momentorum ex duabus ſolis rationibus componit, nempe ex ratione ponderum & ratione eorundem diſtantiarum perpendicularium ab axe oſcillationis: ego vero diverſimodas gravitates per mentis fictionem conſtituo, ſeu tales, quarum una quam alia potentiorem cauſam habeat, majoremque proinde accelerationem in corporibus cadentibus producat: unde mihi momentorum ratio ex tribus conficitur rationibus; nimirum ex ratione diſtantiarium ab axe, ex ratione materiæ quantitatis, quam vocabo *maſſam* vel *molem*, & ex ratione gravitatum acceleratricium; componendo namque duas poſteriores, naſcitur ratio ponderum.

III.

Quod cum obſervatum non ſit a Fratre, in calculum incidit multo intricatiorem, quam par eſt; ut videre licet in loco citato *Comment. Acad. Scient.* An. 1703, qui calculi labor præcaveri poteſt, introducta varietate gravitatis, qua corpora diverſimode accelerari concipiantur; quo fit, ut Pendulorum longitudines facillime tranſmutentur in alias, vel longiores, vel breviores, ſervato interim Pendulorum iſochroniſmo; atque ita Pendulum compoſitum conſiderari poſſit, tanquam repræſentans plura ſimplicia ſimul oſcillantia, ex quibus illud eligendum quod a gravitate naturali animatur.

IV.

Animare, hic & in ſequentibus, nihil aliud eſt, quam ad deſcenſum *ſolicitare*; ita ut ſingulis momentis corpori imprimatur celeritatis gradus, infinite quidem parvus, ſed tamen major, minorve, pro diverſa gravitatis ſpecie.

V.

Patet autem per gravitatem me hic intelligere, non pondus alicu-

alicujus corporis, sed ponderis causam, nempe vim acceleratricem, quæ agit in corpora, & per continuationem actionis in corporibus libere descendentibus, dato tempore, datam celeritatem producere valet: unde clarum est, si vocetur quantitas materiæ, vel massa corporis, C; vis acceleratrix, vel gravitas, G; pondus, P; distantia perpendicularis ab axe vectis, D; momentum, M; fore $M = D \times P = D \times C \times G$.

VI.

Lemma I.

Pendula simplicia, quorum longitudines sunt ut vires gravitatis a quibus animantur, sunt isochrona. Demonstrationem hujus dedi in *Actis Lipf.* An. 1713. *Mense Febr.* Theor. III. Coroll. I. §. 6. *

VII.

Lemma II.

Sit corpus C, *constans partibus* f, g, h, &c. *quæ singulæ a suis peculiaribus gravitatibus* p, q, r, &c. *animentur, ita ut pondera partium sint* fp, gq, hr, &c. *Erit pondus corporis* $C = fp + gq + hr$, *&c.* Hoc per se clarum est, partes enim simul sumtæ constituunt totum.

VIII.

Lemma III.

Positis quæ prius, corpus C, *oscillando, sive aliter descendendo, acceleratur eodem modo, ac si animaretur ab una tantum gravitate, quæ esset* $= (fp + gq + hr + \&c) : C$.

Cum enim partes firmiter inter se connexæ supponantur, necesse est, ut unaquæque nisum suum descendendi distribuat, &

* Supra N°. XC. Tom. I. pag. 518.

& de eo communicet cum reliquis partibus, pro ratione cujusque molis; unde communis nascitur nisus, in quem omnes partiales distributi coalescunt: hic autem, ut ex vulgari alligationis Regula liquet, invenitur dividendo summam ponderum partialium per summam molium, hoc est, per corpus ipsum C.

IX.

Hisce præmissis, Centri oscillationis determinandi viam eo ordine exponam, quo in eam incidi. Consideravi statim Pendulum rectilineum, & quidem primo compositum ex duobus tantum corporibus gravibus, sed æqualia hinc inde ab axe oscillationis intervalla obtinentibus. Hoc deinde ansam præbuit considerandi quoque plura gravia Pendulum rectilineum componentia in quibuscunque ab axe oscillationis distantiis. Tertio rem generalissime aggressus, supposui Pendulum compositum ex ponderibus quotcunque & quemcunque situm habentibus.

X.

Quod ad primum attinet, esto BAC linea, vel virga inflexilis, & nullius ponderis, [qualem in posterum semper intellectam volo,] punctum A axis rotationis, seu oscillationis, a quo in distantiis æqualibus alligata sint pondera inæqualia, B minus, & C majus. Hoc pacto prævalebit pondus C, & ex situ horizontali AC descendet certo tempore in situm A(C); tum alterum pondus B ex situ AB ascendet in A(B). Ut itaque invenirem hujus Penduli centrum oscillationis, hoc est, longitudinem penduli simplicis AL, quod eodem tempore in situm A(L) descenderet quo BAC in (B) A (C): vel quod angulum oscillationis LA (L) eundem cum CA (C) eodem tempore absolveret; ratiocinatus sunt ut sequitur. TAB. XXX. N°. XCVI. *Fig. 1.*

XI.

Gravitas agens in corpus B oppositum corpori C, eundem effec-

effectum: præstat, ob distantias æquales AB & AC, ac si, corpore B sublato, aliud ipsi B æquale adjungeretur corpori C, sed quod gravitate negativa esset affectum, seu quod sursum urgeretur a vi acceleratrice æquali ei, qua urgentur deorsum corpora, quæ a naturali gravitate G animantur. Hinc, remota parte AB, oritur pendulum simplex AC, in extremitate C ferens corpus C + B, ex duobus C & B conflatum, quorum prius C a gravitate naturali, seu + G, alterum vero a vi eadem, sed negativa, seu — G, animatur. Adeoque, per *Lemma* III, tota massa C + B eodem ritu oscillabitur, ac si animaretur a gravitate $(C \times G + B \times -G) : (C + B) = (C - B) \times G : (C + B)$. Res igitur huc redit, ut quæratur longitudo AL penduli alterius simplicis, animandi a gravitate naturali G, quod sit simplici huic pendulo fictitio isochronum. At vero, per *Lemma* I, pendulorum simplicium isochronorum longitudines sunt ut gravitates a quibus animantur; faciendo itaque ut $(C - B) \times G : (C + B)$ ad G [hoc est, ut C — B ad C + B], ita AC ad quartam, $\frac{C+B}{C-B} AC$; huicque æqualem sumendo AL; erit AL longitudo penduli simplicis naturalis, & isochroni pendulo fictitio AC, seu ipsi composito dato BAC: cujus igitur centrum oscillationis est in L. *Quod primo erat inveniendum.*

XII.

TAB. XXX. N°. XCVI. *Fig.* 2.

Ut nunc præstemus alterum, quod generalius est; quodque in hoc consistit, ut Centrum oscillationis determinetur in Pendulo rectilineo, composito ex quotcunque ponderibus, & in quibuscunque ab axe oscillationis distantiis: Sit recta indefinitæ longitudinis agitata circa axem A. Primo clarum est, ob lineæ inflexilitatem, puncti cujuslibet P tam velocitatem, quam velocitatis incrementum, se habere in ratione distantiæ AP; deinde liquet, vim ponderis alicujus C diffundi per totam virgæ vel lineæ longitudinem, ut & actionem gravitatis, qua circulatio lineæ AL acceleratur; & ita quidem ut vis, quam inde sentit quodvis punctum P, se habeat, ex natura vectis, in reciproca ratione distantiæ AP, seu, quod idem est, ut vis illa in P sit ad eandem in C vicissim ut AC ad AP: sic quippe momentum in P æquale est momento in C. Vocabo autem hoc momentum, quod in omnibus virgæ punctis idem est, *virtutem agitativam.*

XIII.

Ex hisce fluit, si sublato corpore C quod a gravitate naturali G animari supponitur, ejus loco substituatur in punctum P corpus aliud, quod animetur a gravitate $AP \times G : AC$, sed cujus massa sit $AC^2 \times C : AP^2$, fore ut virga AL eadem, qua prius, virtute agitativa urgeatur, & idem quoque velocitatis circulantis incrementum acquirat. Nam momentum in P [per Art. 2. & per hyp.] $= AP \times (AC^2 \times C : AP^2) \times (AP \times G : AC) = AC \times C \times G =$ momento quod a corpore C produceretur cum gravitate naturali: & præterea quia gravitas agens in C est ad gravitatem in P [per hyp.] ut G ad $AP \times G : AC$, hoc est, ut AC ad AP; erunt velocitatum incrementa in punctis C & P distantiis AC & AP proportionalia: adeoque linea AL eadem virtute agitativa urgetur, & eodem modo acceleratur circulando, sive a corpore C per gravitatem naturalem G animato, sive a corpore P $[AC^2 \times C : AP^2]$ animato per gravitatem $AP \times G : AC$ urgeatur.

XIV.

Quod autem de pondere C dictum est, idem & de alio quolibet in Pendulo composito inhærente intelligi potest: quare omnia pondera, quotquot sunt, per hujusmodi substitutionem fictitiam ad commune aliquod punctum P transferri poterunt, in quo unumquodque corpus, peculiari sua gravitate, pristinam virtutem agitativam lineæ AL imprimat, atque pristinam etiam accelerationis circulantis gradum contribuat; quo fit ut virtus agitativa totalis, æque ac velocitatis incrementum totale, in Pendulo hoc ſimplici ſubſtituto, conſerventur ejuſdem quantitatis ut erant in Pendulo compoſito: adeoque, ut ambo Pendula ſint ſibi mutuo iſochrona.

X V.

Hinc jam pateſcit, Centri oſcillationis determinandi negotium ni hoc unico conſiſtere, ut corpora, hinc inde diſperſa, atque ſingula ab eadem gravitate, nempe naturali, animata, ad commune punctum cogantur; mutando debite eorum & maſſas, & gravitates. Hoc modo Pendulum compoſitum ex ponderibus a ſe invicem diſſitis, ſed ab eadem gravitate animatis, transformabitur in Pendulum ſimplex iſochronum arbitrariæ longitudinis, cujus pondus, ex totidem corporibus, ſed per diverſas gravitates animatis, conſtat: huic poſtea, ope *Lemm.* I. & II, aliud iſochronum Pendulum ſimplex gravitatis naturalis facile invenitur.

X V I.

TAB. XXX. Sit itaque pendulum rectilineum AL, compoſitum ex pon-
Nº. XCVI. deribus quotcunque, ſive æqualibus, ſive inæqualibus, C,
Fig. 3. D, &c. Fingatur poſtquam ex ſitu quietis AL pervenit in ſitum $A(L)$, corpora C, D, &c. ſubito annihilari, aliaque totidem, eodem inſtanti, renaſci in puncto P, quorum primum habeat molem $= AC_2 \times C : AP^2$ alterum vero $AD^2 \times D : AP^2$, &c. atque animetur primum a gravitate $AP \times G : AC$, alterum a gravitate $AP \times G : AD$, &c. Liquet, ex iis quæ in Art. 13. & 14. explicavimus, virgam $A(L)$ ex hac ſubſtitutione nihil alterationis pati, neque in quantitate virtutis agitativæ, neque in quantitate accelerationis circulantis momentaneæ: ideoque, cum omnia perſiſtant in eodem ſtatu, pergit virga $A(L)$ agitari, ut feciſſet, ſi priſtina pondera C, D, &c. manſiſſent. Habemus itaque Pendulum ſimplex longitudinis AP, compoſito ACD iſochronum. Sed quia hoc ſimplex animatur a gravitate quadam, quæ naturali major,

vel

vel minor erit; videndum porro, quantæ longitudinis eſſe oporteat aliud Pendulum ſimplex gravitatis naturalis, quod cum illo aſſumto ſimplici ſit iſochronum: quod ita indagamus ut ſequitur.

X V I I.

Per *Lemma* tertium, gravitas, quæ animat corpus ex pluribus conflatum P, habetur dividendo ſummam productorum, quæ fiunt a maſſis partialibus in ſuas reſpective gravitates ductis, per ipſam maſſarum ſummam, ſeu per corpus P: ſunt autem maſſæ illæ, ſeu corpora partialia in ſuas reſpective gravitates ducta hæc, nempe productum primum $= (AC^2 \times C : AP^2) \times (AP \times G : AC) = AC \times C \times G : AP$; ſecundum $= (AD^2 \times D : AP^2) \times (AP \times G : AD) = AD \times D \times G : AP$; tertium $=$ &c. adeoque ſumma omnium productorum $(AC \times C + AD \times D + \&c) \times G : AP$, diviſa per P, ſeu per ſummam ipſorum corporum partialium, quæ eſt $(AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c) : AP^2$, dabit $(AC \times C + AD \times D + \&c) \times AP \times G : (AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c)$ pro gravitate quæ animat corpus ex partialibus conflatum P. Sic igitur, vi *Lemmatis*, ut factum eſt in Art. 2, etiam hic dicemus, ut ſe habet hæc gravitas $(AC \times C + AD \times D + \&c) \times AP \times G : (AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c)$ ad gravitatem naturalem G [ſeu, ut $(AC \times C + AC \times D + \&c.) \times AP$ ad $AC^2 \times C + AD_2 \times D + \&c.$] ita Penduli ſimplicis fictitii longitudo AP ad quartam, quæ erit $= (AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c.) : (AC \times C + AD \times D + \&c.)$, cui proin æqualis ſumta AZ, dabit longitudinem Penduli ſimplicis naturalis, quod iſochronum erit, per *Lemma* I, alteri illi ſimplici fictitio AP; & per conſequens etiam dato Pendulo compoſito ACD: cujus ergo Centrum oſcillationis eſt in Z. *Q. E. I.*

X V I I I.

Atque hoc ipſum eſt, quod docet regula vulgaris *Huge-*

pianæ,

niana, contenta in libro *de Horologio oscillat.* Parte IV. Prop. 5, in quantum quidem supponuntur pondera quæ Pendulum componunt esse in eadem linea recta, aut saltem, quod perinde est, in plano quodam in quo est axis oscillationis. Restat ut ejusdem regulæ, cujus certa demonstratio antea desiderabatur, bonitatem ex nostro principio deducamus, pro Pendulo composito ex ponderibus non in tali plano existentibus. Quo casu, pondera erunt vel in ipso plano ad planum oscillationis recto, vel tanquam essent in eo considerari possunt, & quidem in illis punctis hujus plani, e quibus ductæ rectæ ad pondera sunt plano perpendiculares.

XIX.

TAB. XXX. N°. XCVI. *Fig.* 4. Concipiamus itaque planum verticale LMN, per se nullius ponderis; hoc planum mobile sit circa punctum A; atque ei inhæreant varia pondera C, D, &c. situm quemcunque invariatum inter se servantia, dum ipsum planum hisce ponderibus oneratum circa axem A rotatur: manifestum est, retracto centro gravitatis ponderum C, D, &c. a linea verticali AM, planum postea dimissum in hoc situ non quieturum, sed, impetu concepto ad motus accelerationem, ultro citroque oscillationes suas instar Penduli continuaturum; non secus ac si pondera C, D, &c. vectis alicujus brachiorum AC, AD, &c. extremitatibus applicata essent, atque hoc modo repræsentarent ipsum de quo jam agitur Pendulum compositum.

XX.

Hujus itaque plani verticalis oscillationes ut investigemus, cujus nempe Penduli simplicis oscillationibus sint isochronæ & quantam hoc habere debeat longitudinem: Notandum primo, quod attinet ad situm hujus Penduli quæsiti, gratis supponi a Fratre, aliisque, eum situm talem esse, ut [quasi hoc per se pateret] congruat cum recta AF transeunte per centrum gravitatis

vitatis F ponderum C, D, &c. Hoc enim, ut ut verum sit, non supponimus; sed per ipsam nostram methodum, qua in re aliis antecellere arbitramur, verum esse invenimus.

XXI.

Jam vero intelligamus planum nostrum in ipsa oscillatione existere, atque ad hunc quem figura monstrat situm pervenisse; fingamus, ut supra factum, pondera omnia derepente tolli vel annihilari, eodemque instanti, in alio aliquo puncto P, quod primo ad arbitrium sumimus, alia pro singulis substitui vel renasci æquipollentia, hoc est, quorum unumquodque sit debitæ molis & a debita gravitate animetur, ita ut plano oscillanti eandem virtutis agitativæ & accelerationis momentaneæ quantitatem imprimere pergat, quam tempusculo minimo, ante hanc transmutationem, habebat impressam a pondere jamjam annihilando, pro quo tunc statim substitui concipimus.

XXII.

Evidenter apparet, substitutione hac facta, planum debere motum suum continuare eodem plane ritu, saltem per minimum tempusculum, ac si nulla facta mutatione mansissent pondera, C, D, &c. Dico autem *per minimum tempusculum*, quia, ut mox patebit, corpora substituta in P, non, ut in casu Penduli rectilinei, in quolibet plani situ invariatam semper obtinere magnitudinem, & ab invariata gravitate animari debent; unde nec massa totalis P, ex omnibus conflata, invariatam habebit magnitudinem, nec ab invariata gravitate animabitur per integram durantem oscillationem; nisi in casu, quo locus puncti P sumitur in recta transeunte per centrum gravitatis ponderum, id quod ipsum nobis, & situm, & longitudinem Penduli simplicis quæsiti determinandi rationem certam ob oculos ponit.

XXIII.

Quoniam igitur P, C, D, &c. non ſunt in eadem linea recta per A tranſeunte, adeoque directio gravium non æqualibus obliquitatis angulis ad brachia vectis AP, AC, AD, &c. applicantur; conſtat ex mechanica, quod pro virtutibus agitativis ponderum P, C, D, &c. exprimendis, jam non eorum diſtantias a puncto A, ſed diſtantias perpendiculares PQ, CR, DS, &c. a verticali AM, oporteat multiplicari per ipſa pondera P, C, D, &c. Nam rectæ AP, AC, AD, &c. non habent eandem inter ſe rationem, quam perpendiculares PQ, CR, DS, &c; niſi in caſu quo P, C, D, &c. in eadem ſunt recta cum puncto A, hoc eſt, in caſu Penduli rectilinei, ubi pro perpendicularibus PQ, CR, DS, &c. ſumſimus earum proportionales AP, AC, AD, &c. vel, quod eodem recidit & ad noſtrum ſcopum aptius eſt, poſſunt ſervari ipſæ diſtantiæ AP, AC, AD, &c. ut & maſſæ corporum P, C, D, &c., ſed reſolvendæ ſunt vires gravitatum in parallelas & normales ad brachia vectis AP, AC, AD, &c, ex quibus ſumendæ ſunt vires normales quæ in C, D, &c. exprimuntur per $RC \times G : AC$, $SD \times G : AD$, &c.

XXIV.

Quæ cum ita ſe habeant, virtutes agitativæ plano LMN impreſſæ a corporibus C, D, &c. deſignantur per producta diſtantiarum a puncto A, in maſſas, & in vires iſtas gravitatis naturalis normaliter ad diſtantias derivatas; hoc eſt, per $AC \times C \times RC \times G : AC$; $AD \times D \times SD \times G : AD$, &c. ſeu per $RC \times C \times G$; $SD \times D \times G$, &c. Quare ut, iſtis corporibus annihilatis, eædem tamen illæ virtutes agitativæ etiamnum plano imprimantur a corporibus in P renaſcentibus & animandis per gravitates convenientes puncto P, ſeu tales, quæ ſingulæ in plano producant eaſdem accelerationis circulantis momentaneæ quantitates, quas corpora C, D, &c. a gravitate naturali animata produxiſſent, ſi non fuiſſent annihilata; ante omnia gravitates iſtæ in P pro ſingulis corporibus renaſcentibus ſunt determinandæ: quod ſic peragitur.

XXV.

Ex eo quod punctis C, D, &c. a gravitate naturali G normaliter ad AC, AD, &c. derivata, quæ eſt $RC \times G : AC$, $SD \times G : AD$, &c. accreſcunt velocitatis incrementa momentanea, quæ ſe habere debent ad velocitatis incrementa puncto P accreſcentia a gravitatibus corpora ſubſtituta in P animantibus & per reſolutionem virium derivatis normaliter ad AP, ut ſe habent diſtantiæ AC, AD, &c. ad diſtantiam AP: Invenio has gravitates, [quas tantiſper appellabo M, N, &c.] inſtituendo has analogias $AC : AP = \frac{RC}{AC} G : \frac{QP}{AP} M$; $AD : AP = \frac{SD}{AD} G : \frac{QP}{AP} N$; &c. Ex iis enim prodeunt $M = AP^2 \times RC \times G : AC^2 \times QP$, $N = AP^2 \times SD \times G : AD^2 \times QP$, &c.

XXVI.

Nunc vero Maſſæ corporum ſubſtitutorum in P [quas nominare lubet T, V, &c.] determinandæ ſunt; quod fit ex æqualitate, quæ eſſe debet inter virtutes agitativas a corporibus C, D, &c. ante annihilationem plano impreſſas, & eas a corporibus renaſcentibus T, V, &c. eidem plano imprimendas. Nam, propter iſtam æqualitatem, habetur per Art. 24. $RC \times C \times G = QP \times T \times M$; & $SD \times D \times G = QP \times V \times N$; &c. Unde $T = RC \times C \times G : QP \times M$ = [ponendo pro M, ejus valorem in Art. præced. inventum] $AC^2 \times C : AP^2$; pariterque $V = SD \times D \times G : QP \times N$ = [ſurrogando valorem ipſius N modo ante repertum] $AD^2 \times D : AP^2$; &c.

 XXVII.

XXVII.

Maſſæ hæ ita inventæ, ſeu corpora partialia quæ conſtituunt Maſſam totalem in P, ſi ducantur in ſuas reſpective gravitates, in Art. 25. determinatas, atque productorum aggregatum [$T \times M + V \times N + \&c. = (RC \times C \times G + SD \times D \times G + \&c) : QP = (RC \times C + SD \times D + \&c) \times G : QP$] dividatur per ſummam maſſarum ſeu corporum partialium, hoc eſt, per corpus totale P [$T + V + \&c. = (AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c) : AP^2$]; quod provenit [$(T \times M + V \times N + \&c) : (T + V + \&c) = (RC \times C + SD \times D + \&c) \times AP^2 \times G : QP \times (AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c)$] dabit, per *Lemma* III, gravitatem quæ animat corpus totale P. Faciendo itaque, vi *Lemm.* I, ut ſe habet $(RC \times C + SD \times D + \&c) \times AP^2 \times G : QP \times (AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c)$ ad G, [ſeu, ut $(RC \times C + SD \times D + \&c.) \times AP^2$ ad $(AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c.) \times QP$,] ita Penduli ſimplicis fictitii longitudo AP ad quartam $(AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c) \times QP : AP \times (RC \times C + SD \times D + \&c)$; quæ erit longitudo Penduli ſimplicis naturalis AZ, & iſochroni Pendulo compoſito ACD; ſed quorum iſochroniſmus durat tantum per tempuſculum infinite parvum, niſi aliqua poſitione lineæ AP inter AC, AD, &c. fiat ut quarta iſta $(AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c) \times QP : AP \times (RC \times C + SD \times D + \&c)$, quæ alias variabilis eſt, pro varietate anguli MAP, evadat conſtantis datæque longitudinis pro quovis angulo MAP.

XXVIII.

Sed ut cognoſcatur an, & quæ ſit illa poſitio lineæ AP inter AC, AD, &c. advertendum eſt [poſito F eſſe centrum gravitatis corporum C, D, &c. & ducta FE perpendiculari ad AM] quod $RC \times C + SD \times D + \&c.$ ſit $= (C + D + \&c.) \times EF$, ceu patet ex Staticis; adeoque quod quarta illa exprimi

exprimi poſſit hoc modo, $(AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c) \times QP : AP \times EF \times (C + D + \&c)$; jam vero ultro quaſi in oculos incurrit, hanc quantitatem fieri conſtantem, modo conſtans ſit $AP \times EF : QP$, hanc autem conſtantem eſſe, quando AP tranſit per centrum gravitatis F, nemo non videt: eſt enim tunc $AP \times EF : QP = AF$; adeoque quarta illa AZ, ſeu longitudo Penduli ſimplicis ipſi compoſito ACD iſochroni [ſubſtituto AF pro $AP \times EF : QP$] erit $= (AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c) : AF \times (C + D + \&c)$ quantitati conſtanti, ob conſtantes AF, AC, AD, &c. ut & C, D, &c.

XXIX.

Atque hinc emergit regula *Hugeniana*, pro inveniendo centro oſcillationis in Pendulo qualicunque compoſito; quæ regula in Propoſitione V. Part. IV. *Horol. oſcillat.* his verbis concepta legitur: *Dato Pendulo ex ponderibus quotlibet compoſito, ſi ſingula ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum ſummam, in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo Penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius Penduli compoſiti.* Annon vero hujus regulæ veritas nunc longe firmiori fundamento ſit ſtabilita, quam antehac factum, judicium ſit penes Lectorem harum rerum intelligentem: cum non ſolum non indiguerim precaria illa HUGENII hypotheſi, qua, *ſi pondera quotlibet, vi gravitatis ſuæ moveri incipiant; non poſſe centrum gravitatis ex ipſis compoſitæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, aſcendere*, Axiomatis loco uſus fuerat, etſi non omnimodam evidentiam haberet; ſed neque etiam opus habui ut ſupponerem cum Fratre meo, ac ſi per ſe clarum eſſet, de quo tamen dubitari poſſet; ſcilicet centrum oſcillationis exiſtere in Linea centri, (ut vocat HUGENIUS) hoc eſt, in recta linea quæ per punctum ſuſpenſionis & per centrum gravitatis ducitur.

X X X.

Præterea duo in primis animadverto incommoda, quibus laborat modus demonſtrandi exhibitus in *Comment. Acad. Scient.* Anni 1703. pag. 81. & ſeqq. edit. Paris. Primum eſt, quod calculo analytico, eoque ſatis operoſo, utatur Frater in re, quam ego ſola fere ſyntheſi [ut fieri par eſt in demonſtrationibus] abſolvo. Alterum, quod ſupponat pondera C & D (vid. Fig. ibid.) quæ ipſi faciunt partes figuræ oſcillantis, æqualia; quo fit, ut ipſius demonſtratio valeat tantum pro ejuſmodi figuris in latus oſcillantibus, quarum applicatæ a communi quadam diametro biſecantur; neque igitur applicari poſſet ad figuras dimidiatas, quales eſſent ſemi-parabola, ſemi-hyperbola, &c. aut etiam conus, vel cylindrus per axem ſectus, niſi novo calculo id demonſtraret, haud dubie multo difficiliori futuro, quam quem adhibuit pro corporibus C & D hinc inde æqualibus ſuppoſitis. Hoc poſterius incommodum in noſtra doctrina evitatur; ut pote quæ rem univerſaliſſime pertractans, & numerum, & rationem corporum C, D, qualemcunque, æque facile admittit, ac ſi duo tantum & æqualia eſſent. Quanquam & hoc monendum, pondera C, D, &c. ut HUGENIO atque Fratri, ita & mihi conſiderari tanquam puncta, ſeu potius ut moleculas infinite parvæ extenſionis reſpectu totius Penduli.

X X X I.

Accedimus nunc ad alteram partem hujus noſtræ Diſquiſitionis, quæ nempe agit de centro oſcillationis determinando in Pendulis quæ, ex diverſæ materiæ corporibus compoſita, in fluidis vel liquoribus agitantur. Suppono autem fluida perfectiſſima, hoc eſt talia, quæ deſtituta partium tenacitate motui corporum non reſiſtant, vi tamen propriæ ſuæ gravitatis imminuant gravitatem corporum demerſorum. Hæc vero gravitatis naturalis imminutio in fluidis diverſa eſt, pro diverſitate denſitatis corporum; denſiora enim minus amittunt quam rariora: unde,

unde, cum æſtimanda ſit ſola gravitas relativa, ſeu exceſſus quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens, manifeſtum eſt corporum heterogeneorum oſcillationes in fluidis eodem modo ſe habere, ac ſi pendula agitarentur in vacuo, ſed quorum corpora non ab eadem gravitate naturali, verum a diverſis gravitatibus animarentur.

X X X I I.

Ponamus itaque gravitates relativas, a quibus corpora C, D, &c. heterogenea in fluido animantur, eſſe mG, nG, &c. hoc eſt; partes tantum gravitatis naturalis; intelligo enim per m, n, &c. partes unitatis. Quas ſupra, art. 25. invenimus gravitates M, N, &c. in P ſubſtituendas, nempe $M = AP^2 \times RC \times G : AC^2 \times QP$; $N = AP^2 \times SD \times G : AD^2 \times QP$; &c. patet eas nunc ita fore $M = AP^2 \times RC \times mG : AC^2 \times QP$; $N = AP^2 \times SD \times nG : AD^2 \times QP$ &c. adeoque $T \times M + V \times N +$ &c. erit hic $= (RC \times C \times mG + SD \times D \times nG +$ &c.$) : QP = RC \times C \times m + SD \times D \times n +$ &c.$)\, G : QP$, quod diviſum per $T + V +$ &c. [ſicut fecimus art. 27.] dabit jam $(T \times M + V \times N +$ &c.$) : (T + V +$ &c.$) = (RC \times C \times m + SD \times D \times n +$ &c.$) \times AP^2 \times G : QP \times (AC^2 \times C + AD^2 \times D +$ &c.$)$ pro gravitate quæ animat corpus totale P. Ut igitur habeatur longitudo Penduli ſimplicis in vacuo agitandi, quod ſit iſochronum Pendulo compoſito oſcillanti in fluido; ſumenda eſt, vi *Lemmatis I*, ut in modo citato art. 27. factum cernitur, quarta proportionalis hujus analogiæ, ut $(RC \times C \times m + SD \times D \times n +$ &c.$)\, AP^2 \times G : QP\, (AC^2 \times C + AD^2 \times D +$ &c.$)$ ad G, [ſeu ut $(RC \times C \times m + SD \times D \times n +$ &c.$) \times AP^2$ ad $(AC^2 \times C + AD^2 \times D +$ &c.$) \times QP$] ita AP ad quartam $(AC^2 \times C + AD^2 \times D +$ &c.$)\, QP : AP\, (RC \times C \times m + SD \times D \times n +$ &c.$) =$ [poſito jam F eſſe centrum gravitatis, non quidem totorum corporum C, D, &c. ſed eorum tantum partium, quæ ſunt mC, nD, &c.] $(AC^2 \times C + AD^2 \times D +$ &c.$) \times QP : AP \times EF \times (mC + nD +$ &c.$) =$ [ob $AP \times EF : QP = AF$,

$= AF$, posito nempe AP transire per F] $(AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c.) : AF (m C + n D + \&c.) =$ constanti alicui longitudini AZ.

XXXIII.

Hinc pro Pendulis compositis in fluido agitandis, hæc regula condi potest, *Hugenianæ* similis: *Dato Pendulo ex ponderibus quotlibet composito, atque intra datum liquorem agitando, si singulorum massæ ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo summam partium per* m, n, *&c. designatarum & ex ipsis massis sumendarum in distantiam centri gravitatis communis omnium illarum partium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo Penduli simplicis, sed extra liquorem agitandi, composito intra liquorem agitato isochroni.*

XXXIV.

Quod si vero desideretur Pendulum simplex in ipso quoque liquore oscillationes isochronas peragens; hoc obtinetur ope *Lemmatis* I; faciendo tantum, ut se habet pondus absolutum materiæ ex qua Pendulum conficere lubet, ad pondus relativum ejusdem, seu quod habet intra liquorem; ita Longitudo per datam regulam inventa, ad Longitudinem Penduli quæsiti. Sed curandum est, ut ubi primum agitari incipit removeatur a perpendiculo vel linea verticali AM, angulo MAP, qui sit æqualis ei quem facit ab initio oscillationis linea centri ponderum non absolutorum, sed relativorum quæ habent corpora C, D, &c. in ipso fluido, in quo Pendulum ex illis corporibus compositum agitatur: hoc enim nisi observetur, vibrationes duorum illorum Pendulorum non erunt isochronæ; sed qui ex dictis angulis major est, etiam Pendulum ad quod ille pertinet vibrationes suas longiori tempore perficit.

XXXV.

Unde rursus liquet peccari ab illis, qui, naturam centri oscillationis explicare suscipientes, supponunt quod Pendulum simplex composito isochronum, & Linea centri in ipso Pendulo composito, debeant æquales angulos constituere cum perpendiculo vel linea verticali transeunte per punctum suspensionis. Siquidem id tantum obtineat in Pendulis rectilineis in fluido, & in aliis quoque Pendulis, sed extra fluidum oscillantibus; quod per consequens non inter axiomata, sed inter invenienda & demonstranda reservari oporteat.

XXXVI.

Non necesse duco multis ostendere formulam nostram supra inventam $(AC^2 \times C + AD^2 \times D + \&c.) : AF \times (m C + n D + \&c.) = AZ$ sese porrigere ad quosvis alios casus oscillationum qui excogitari possunt; ut si ex. gr. Penduli compositi partes essent quidem ex materia homogenea, sed liquor constaret ex stratis diversis, in quibus singulæ partes agitarentur, & quæ strata essent heterogenea; vel si utcunque, & Pendulum, & fluidum ex partibus & stratis heterogeneis componeretur: modo attendatur, quantam partem ponderis sui unaquæque ex Penduli partibus retineat in eo in quo agitatur strato, hoc est, quasnam unitatis partes faciant quantitates m, n, &c.

XXXVII.

Neque etiam monere volo quid observandum esset, si quædam ex Penduli agitati partibus extra fluidum eminentes, reliquæ vero in illo demersæ semper manerent. Aërem enim, in quo quædam ex corporibus Pendulum componentibus agitantur, considerari posse ceu stratum aliquod ad liquorem adhuc pertinens, Lectori tam obvium erit, ut moneri non mereatur; in quo casu fit, ut quædam ex partibus m, n, &c. maneant æquales unitati; illæ nimirum, quæ respondeant Penduli partibus in aëre motis, & nihil sensibile de suo pondere amittentibus.

XXXVIII.

Pariter nihil difficultatis habere arbitror, si nonnulla corporum C, D, &c. sunt vel ejusdem specificæ gravitatis, vel etiam minoris, quam fluidum in quo movenda sunt: nam oppido constat, in his casibus, quasdam ex quantitatibus *m*, *n*, &c. vel evanescere, vel negativas evadere. Evanescunt scilicet, ubi corpora in fluido nihil ponderis retinent, ob æquipollentiam gravitatis specificæ corporum & fluidi ambientis: Sed evadunt negativæ, cum gravitas specifica liquoris ambientis præpollet gravitati specificæ corporum in illo motorum, quæ proin quasi levitant, hoc est, a gravitate negativa animantur.

XXXIX.

Plura alia ejusmodi, quæ ex hactenus explicatis, tanquam Corollaria deduci possent curiosa & elegantia, plane non attingo; contentus universalem oscillationum Theoriam ex tam claro simul & fœcundo principio jam esse derivatam, ut nihil tam obscurum tamque reconditum in hac materia videatur, quod non ejusdem principii ductu assequi liceat: quale quid antea ab *Hugeniano* aliove minus genuino vix sperari poterat.

XL.

Cæterum quod attinet ad compendia, quæ mihi sunt, pro parte ab HUGENIO,, sed operose demonstrata, ad levandam calculi molestiam in determinatione centri oscillationis figurarum variarum geometricarum, sive in planum, sive in latus oscillantium; ea, cum aliis huc spectantibus nondum cognitis, occasione commodiore publici juris faciam.

N°. XCVII.

DE CENTRO TURBINATIONIS

INVENTA NOVA,

Authore Joh. BERNOULLI.

DE motu Pendulorum simplicium & compositorum, horumque centro oscillationis inveniendo, omnium optime scripsit Nob. HUGENIUS, Vir in hac materia apprime versatus. Principium vero, quod axiomatis loco assumsit, de descensu & ascensu communis centri gravitatis ad æqualem altitudinem, nonnullis visum est nimis temerarium, & sine demonstratione non admittendum.

Acta Erud. Lips. 1715. Jun. pag. 242.

Nos Theoriam nostram de hoc argumento, certiori fundamento innixam in *Actis Lipsiensibus* communicavimus, (Vide mens. Junii 1714. †) ex qua centrum oscillationis Pendulorum compositorum, tam in fluidis quam extra fluida agitatorum, evidentem & indubiam determinandi rationem deduximus. Prælaudatus HUGENIUS in Operis sui pereximii *de Horologio Oscillatorio* Parte quinta describit constructionem horologii cujusdam e circulari Pendulorum motu desumtam; quæ scilicet nititur contemplatione Pendulorum simplicium motu conico laterum, quorum gyrationes isochronas esse deprehendit, cum conicæ superficies a Pendulis descriptæ æquales habent altitudines. Meminit quarumdam utilitatum hujus horologii, monetque qua in parte præcellat alteri illi in antecedentibus descripto; quod nempe vulgari Pendulo inter duas cycloïdes oscillante instructum est; atque ea occasione innuit Nob. Autor, *se constituisse quidem edere descriptionem horum quæ ad motum circularem & vim centrifugam attinent; sed cum de eo argumento plura dicenda habuerit,* quam

† Supra N°. XCVI.

quam quæ eo tempore exequi vacaſſet, *interim autem*, *ut nova*, *nec inutili* (ceu ipſe vocat) *ſpeculatione fruerentur harum rerum ſtudioſi*, *machinæ hujus fabricam expoſiturum*, *& quædam tantum Theoremata traditurum ad vim centrifugam pertinentia*; *demonſtratione ipſorum in aliud tempus dilata.*

Vidimus poſtea Theorematum eorum demonſtrationes in *Opuſculis poſthumis Hugenianis*, anno 1703 editis. Quod attinet ad demonſtrandi ſoliditatem, vim, & perſpicuitatem, omnia ſapiunt ſolitam Authoris exactitudinem; ita ut nihil deſiderari poſſit, niſi forte quod nimis ſcrupuloſus ſit in demonſtrandis etiam rebus, more Veterum, quæ planæ facileſque videbuntur iis, quibus recentiores noſtræ methodi familiares ſunt; quod ideo dico, ne quis, cui HUGENII indoles perſpecta non eſt, aut ejus ſcripta examinare non vacat, præpoſtera alicujus Cenſoris ſententia deceptus, erroris inſimulet Virum ſummum, qui ſollicitus adeo fuit in errore evitando etiam in minutiſſimis.

Cenſuræ ejuſmodi intempeſtivæ exemplum extat in *Diario Pariſino* 23 Maii anno 1701. ubi P....* homo ad carpendum, uti videtur, natus, horum 13 Theorematum *Hugenianorum* demonſtrationes daturus, improbat quod HUGENIUS *duplicem oſcillationem minimam lateralem alicujus Penduli eodem tempore abſolvi ſtatuerit*, *quo abſolvitur circuitus minimus ejuſdem Penduli motu conico lati.* In dubium quoque vocat Theorema ſextum, quod reſtringendum eſſe aſſerit certis duabus conditionibus. Aliud autem, hac ſua criſi, effecit nihil P..., quam quod apud harum rerum intelligentes ſuam in iiſdem imperitiam prodiderit, conjunctam cum perpetuo cavillandi pruritu; ut vel hoc nomine parum commotus fuerim, quando eum vidi non mea tantum ſcripta ſubinde ſugillantem, ſed ne magnis quidem viris parcentem: quam ob rem nulla reſponſione eum dignum cenſui hactenus, neque poſthac cenſebo.

Verum enim vero, nec P...., a cujus cavillis ſolide vindicarunt HUGENIUM Clariſſimi Editores *Opuſculorum poſthumorum*,

* PARENTIUS.

rum, in Præfatione eorundem, nec quiſquam alius eorum omnium, quorum bene multi ſunt, qui Theoremata iſta tredecim demonſtrationibus ſuis qualibuſcunque munire voluerunt, hactenus ſibi in animum induxit, materiam eam amplificare, atque in primis ſupplere, ac quodam modo reſtituere ea quæ incomparabilis HUGENIUS videtur, præter dicta illa Theoremata, in mente habuiſſe, cum innuit ſibi de eo argumento plura dicenda fuiſſe, quam quæ tum temporis exequi licuiſſet.

Nemo enim facile crediderit, modo attendat ad rerum connexionem, HUGENIUM, qui, cum ageret de oſcillationibus lateralibus, tam operoſus fuit in reducendis Pendulis compoſitis ad Pendula ſimplicia, ſeu in determinandis centris oſcillationis Pendulorum compoſitorum, variarumque figurarum planarum & ſolidarum, eundem quoque, cum ſcriberet Theoremata de Pendulorum ſimplicium motu conico, non cogitaſſe pariter de compoſitis in gyrum actis, deque modo in illis, nec non in variis figuris, gyrationum tempora periodica, aliaque eo pertinentia determinandi & inveniendi. In hac enim mobilium gyrantium, vel, ut ego aptius voco, turbinantium, non minus quam in illa oſcillantium ſpeculatione, occurrunt profecto ſcitu digniſſima & longe jucundiſſima; ut mirer neminem fuiſſe, & quidem inter ipſos illos Demonſtratores Theorematum per ſe ſatis facilium, qui ulterius progredi auſus, materiam ab HUGENIO tantum inceptam promovere aliquo uſque ſuſtinuiſſet. Quorſum enim faſtidioſa illa repetitio, rei & a nobis primum, poſtea ab aliis dudum præſtitæ, niſi ut non tam de publico bene mereantur, quam ut oſtentent aliquam dexteritatem; qualis tamen ad hoc quicquid eſt operis haud magna requiritur.

Sperabam equidem, cum primum *Opuſcula poſthuma* in manus meas incidiſſent, me inter ea reperturum plenariam hujus argumenti pertractationem. Sed, præter nudam Theorematum demonſtrationem, cum tribus quatuorve aliis Propoſitionibus eo ſpectantibus, aliud nihil videre fuit.

Unde firmiter credo, quæ de Turbinationibus Pendulorum compositorum & figurarum meditatus est HUGENIUS, & haud dubie scripto consignavit, [prout conjicere licet ex iis quæ initio Partis quintæ *Horologii oscillatorii* haud obscure indicavit] cum plurimis aliis Schedis, ut fieri solet, post fata Autoris intercidisse,

Non igitur inconsultum fore judicavi, si, quod jam ab initio hujus seculi de centro Turbinationis commentus fui, tandem cum publico communicarem; atque ita restituerem deperdita *Hugeniana*, vel [si quidem non ausim pro certo asseverare, me in easdem prorsus cum ipso speculationes incidisse,] saltem jacturam illam repararem similibus, ut conjecto, cogitatis, atque inventione Regulæ universalis pro Pendulorum compositorum & figurarum turbinantium reductione ad Pendula simplicia motu conico lata, & cum illis isochrona. Necesse est autem ut præmittam quasdam definitiones *Hugenianis* similes, uti videre est in *Horologio oscillatorio*, pag. 92, vel potius ut cum paucis aliis *Hugenianis* illas ad rem nostram, mutatis mutandis accommodem. Sit itaque

DEFINITIO I.

Pendulum turbinans dicatur figura quælibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ex puncto aliquo, ut circa illud, vel potius circa rectam verticalem, quæ per punctum suspensionis ducta intelligitur, motum æquabilem horizonti parallelum, vi impetus impressi, continuare possit.

DEFIN. II.

Turbinari igitur est moveri in gyrum, ita ut singula figuræ turbinantis puncta describant circulos horizonti parallelos.

DEFIN. III.

Punctum suspensionis dicatur *Vertex turbinationis*.

DEFIN.

DEFIN. IV.

Recta vero verticalis per verticem turbinationis ducta vocetur *Axis turbinationis*.

DEFIN. V.

Per *Pendulum simplex* & per *compositum* in turbinationibus, intelligitur idem quod apud HUGENIUM in *Oscillationibus*; Vid. ejus Defin. 3. & 4.

DEFIN. VI.

Pendula turbinantia Isochrona vocentur, quorum tempora periodica sunt æqualia; hoc est, quæ turbinationes suas æqualibus temporibus absolvunt.

DEFIN. VII.

Planum turbinationis dicatur Planum verticale, in quo est Axis turbinationis, & quod per centrum gravitatis Penduli compositi vel figuræ turbinantis duci intelligitur.

DEFIN. VIII.

Linea Centri est quæ ex vertice per centrum gravitatis transire concipitur.

DEFIN. IX.

Centrum turbinationis Penduli compositi, vel Figuræ turbinantis cujuslibet appelletur punctum in axe turbinationis tantum a vertice turbinationis distans, quanta est altitudo superficiei conicæ descriptæ a Pendulo simplici quod figuræ turbinanti isochronum sit.

DEFIN.

DEFIN. X.

Angulus turbinationis vocetur, quem facit Linea centri cum Axe turbinationis.

DEFIN. XI.

Figura plana, vel Linea in plano sita, *in planum turbinari* dicatur, cum Axis turbinationis in eodem cum Figura Lineave est plano.

DEFIN. XII.

Eadem vero *in latus turbinari* dicantur, cum planum turbinationis cum figuræ lineæve plano angulum constituit.

HYPOTHESIS I.

Si Pondera quotlibet, invariatam distantiam, tam inter se, quam a vertice turbinationis servantia, turbinari incipiant, justo quodam impetu toti Systemati impresso; angulum turbinationis manere eundem semper, & velocitatem singulorum corporum fore æquabilem, (remota scilicet aëris resistentia,) & suis ab axe turbinationis distantiis proportionalem.

Hujus rei ratio unicuique manifesta evadet, si consideret rectas, a vertice turbinationis ad singula corpora turbinantia ductas, tanquam totidem vectis compositi brachia, quæ inter se connexa sunt in ipso vertice turbinationis, unumquodque vero in extremitate sua annexum habeat corpus, quod duabus potentiis brachium urget, una verticali, quæ dependet ab ipso ejus pondere, altera horizontali, quam acquirit inter turbinandum a conatu recedendi ab axe turbinationis, & quæ vocatur vis centrifuga. Quod si itaque momenta omnia virium deorsum trahentium æquentur momentis omnibus virium extrorsum nitentium; patet quandam tunc esse speciem æquilibrii in toto systemate corporum simul turbinantium; ita ut, quem tunc facit angulum Linea centri cum axe turbinationis, hunc postea servet continuo, maneatque velocitas uniformis in singulis systematis punctis; nisi ea vel ab aëre, vel ab aliis impedimentis externis, a quibus autem abstrahimus, turbetur: quo ipso, non amplius circuli horizontales a punctis istis describerentur, sed aliæ curvæ irregulares, & non in planis existentes, sicuti periculum facienti satis constabit.

Quo major autem est velocitas systematis, seu Penduli turbinantis, sive sit simplex, sive compositum; liquet tanto etiam majorem requiri angulum turbinationis: cum enim vires horizontales centrifugæ hoc modo augeantur, necesse est, ad conservandum æquilibrium, ut simul etiam crescant momenta ponderum, seu virium verticalium; id quod fieri nequit, nisi ab axe turbinationis magis recedant, magisque adeo angulus ille amplietur.

HYPOTHESIS II.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compositum turbinetur, ita ut singula ejus puncta describant circulos horizontales; esse aliquod Pendulum simplex, quod, motu conico gyrando, circuitus minimos faciet eodem tempore cum composito.

Ex Demonstratis *Hugenianis* palam est, tempora circulationum esse in subduplicata ratione altitudinum conorum, quorum superficies describunt Pendula simplicia: potest ergo abbreviari vel elongari longitudo Penduli simplicis, quæ est ipsa altitudo superficiei conicæ acutissimæ faciendo circuitus minimos descriptæ, ut tempus circulationis sit, vel dato quolibet minus vel dato quolibet majus; hoc est, ut in infinitum vel minui, vel augeri possit: ideoque necessario dabitur aliquod Pendulum simplex, quod dato composito erit isochronum. In hujus vero Penduli simplicis longitudine determinanda consistit inventio centri turbinationis; ut pote quæ longitudo Penduli simplicis gyrationes minimas facientis, æqualis est altitudini superficiei conicæ a quolibet alio Pendulo simplici isochrono descriptæ; quod ipsum est Theorema VII. *Horolog. Oscillat.*

demonstratum in *Opusculis posthumis*: Propos. VIII. de vi centrifuga.

Eo Theoremate cum nitatur maxima pars reliquorum Theorematum *Hugenianorum*, interim vero Autoris demonstratio, quæ ex consideratione potentiarum pondera planis declivibus incumbentia sustinentium deducitur, licet ingeniosa, non tamen satis plana & facilis videatur; dabo hic meam, ex natura Vectis petitam, magis naturalem, & ad inventionem centri turbinationis magis idoneam. Præmitto autem hoc

LEMMA.

TAB. XXX. N°. XCVII. Fi. . *Sit Vectis AB circa extremitatem A mobilis, in altera vero B hinc inde oblique tractus a duabus potentiis, quæ rationem reciprocam habent earundem directionum, in eodem cum Vecte plano existentium, distantiis a centro motus; manebunt potentiæ in æquilibrio, & ideo Vectis situm suum in hoc plano non mutabit.*

Patet hoc ex Mechanicis; etenim æqualitas intercedit momentis Potentiarum, & ideo æquilibrium inter ipsas Potentias.

THEOREMA HUGENII.

Si Pendula simplicia inæqualis longitudinis describant superficies conicas æqualis altitudinis: Tempora periodica erunt æqualia.

DEMONSTR. Concipiatur filum Penduli simplicis esse inflexile, vel rigidum instar Vectis gravitate carentis; clarum est, dum suspensum ab una extremitate circa verticem turbinando movetur, alteram extremitatem trahi, ut supra dictum, a duabus potentiis; nempe a pondere corporis secundum directionem verticalem, & ab ejus vi centrifuga secundum directionem horizontalem: Ergo, per Lemma præcedens, ob angulum turbinationis semper æqualem, potentiæ illæ duæ erunt reciproce proportionales suarum directionum distantiis a vertice turbinationis. Hinc itaque, si Pendula duo simplicia AB & LM turbinando describant duas superficies conicas, erit ut AC ad AD, ita pondus B ad ejusdem vim centrifugam $= AD \times B : AC$; Et pariter, ut LN ad LP ita pondus M ad vim centrifugam $= LP \times M : LN$; unde vis centrifuga in B ad vim centrifugam in M ut $AD \times B : AC$ ad $LP \times M : LN$ [sumendo pondera B & M æqualia] ut $AD : AC$ ad $LP : LN$, ut $AD \times LN$ ad $LP \times AC$ [suppositis conorum altitudinibus AC & LN æqualibus] ut AD ad LP, ut CB ad NM. Hoc est, vires centrifugæ sunt, in hoc casu, ut radii circulorum quos mobilia B & N describunt; Ergo, per conversam Theorematis primi in *Horolog. Oscillat.* ab hoc non dependentis, tempora periodica sunt æqualia. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

Notandum hic, etsi, demonstrationis gratia, pondera B & M assumta fuerint æqualia, posse tamen esse utcunque inæqualia. Ex eo enim quod, cum mutato pondere, etiam proportionaliter mutetur ejus vis centrifuga, angulo turbinationis manente eodem, liquet tempus periodicum non mutari. Rem ipsam nunc aggredior, quam comprehendam duabus prioribus Propositionibus fundamentalibus, quibus reliquæ superstruentur.

PROPOSITIO I.

Dato Pendulo turbinante, composito ex ponderibus quotlibet communi turbinationis plano inhærentibus; si pondera singula ducantur in suas distantias ab axe turbinationis, & porro in suas altitudines, hoc est, in distantias a plano horizontali per verticem turbinationis ducto; deinde summa productorum dividatur per id, quod fit ducendo ponderum summam in communis centri gravitatis ponderum distantiam ab axe turbinationis: habebitur distantia Centri turbinationis, seu Longitudo Penduli simplicis circuitus minimos iisdem cum composito temporibus facientis; seu quod idem est, habebitur altitudo superficiei conicæ, quam Pendulum quodlibet simplex describens, Pendulo composito dato erit isochronum.

Sint pondera Pendulum turbinans componentia, [quorum nec figura nec magnitudo, ſed gravitas tantum conſideratur] & communi plano turbinationis pondere carenti inhærentia, A, B, C; vertex turbinationis ſit O; commune centrum gravitatis ponderum, X; axis turbinationis, OR; linea centri, OX; angulus turbinationis, ROX, qui inter turbinandum invariatus manet, hoc eſt, Planum in quo ſunt pondera, non rotatur circa punctum O: Hujus rei cauſa eſt, quia momenta virium centrifugarum, angulum hunc ampliare conantium, æqualia ſunt momentis ponderum ipſorum eundem angulum contrahere nitentium: ita nempe ut, ſi nonnihil remitteretur vel lentior fieret turbinationis motus, linea centri OX, quæ continuo affectat ſitum verticalem, ſtatim accederet propius ad axem OR; ſi vero intenderetur, ſtatim ab eodem magis recederet.

TAB. XXX. N° XCVII. *Fig.* 2.

Pondera A, B, C, vocentur a, b, c, & eorum diſtantiæ ab axe OR, nimirum AF, BG, CH, ſint f, g, h; altitudines vero, ſeu diſtantiæ a plano horizontali per verticem O tranſeunte, vel quæ ipſis ſunt æquales OF, OG, OH, nominentur k, l, m; tandem diſtantia centri gravitatis ab axe XL ſit p; hujuſque altitudo OL, q. Erit productorum ſumma $afk + bgl + chm$. Et rurſus ducendo ſummam ponderum in diſtantiam centri gravitatis omnium ab axe turbinationis, productum æquale erit $ap + bp + cp$; unde dividendo prius per hoc, habebitur $(afk + bgl + chm) : (ap + bp + cp)$. Cui longitudini ſi æqualis ſtatuatur longitudo Penduli ſimplicis per circuitus minimos turbinantis: Dico hoc alteri illi compoſito iſochronum eſſe; adeoque etiam quodlibet aliud ſimplex, modo deſcribat ſuperficiem conicam ejuſdem altitudinis cum prædicta longitudine.

Ad hoc demonſtrandum, concipiamus Pendulum compoſitum OABC adhucdum in quiete, & lineam centri OX manu prehenſam removeri ab axe OR, ut conſtituat cum eo angulum ROX; intelligamus nunc, Pendulo ita conſtituto, imprimi plano turbinationis velocitatem eam, qua eodem tempore gyrationes abſolveret cum prædicto Pendulo ſimplici; oſtendam per

hanc velocitatem plani omnia pondera ſimul ſecum circumferentis, tantas iſta pondera acquirere vires centrifugas, ut earum momenta ſimul ſumta præciſe adæquent ſummam momentorum ponderum; adeoque velocitatem, ita impreſſam, eſſe ipſam illam requiſitam, quæ efficere debet ut angulus turbinationis inter turbinandum non mutetur: quo facto demonſtratum erit aſſertum; nempe Pendulum illud compoſitum, in dato turbinationis angulo ROX, fore iſochronum Pendulo ſimplici aſſignato.

Sit enim Pendulum turbinans ſimplex EM, quod angulum turbinationis NEM ſemi rectum faciat, habeatque ſuperficies conica, quam deſcribit, altitudinem EN æqualem aſſignatæ longitudini $(afk + bgl + chm) : (ap + bp + cp)$; patet vim centrifugam corporis M, in hac ſuppoſitione, eſſe æqualem ipſi ejus ponderi, quoniam ſub æqualibus angulis applicantur ad vectem EM, cum quo comparavi Pendulum. Sunt autem vires centrifugæ (per Theor. I. *Hugen.*) mobilium æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrentium, ut earum radii in ipſa reſpective mobilia ducti. Ergo pondera A, B, C, quæ cum plano iſochrono [per hyp.] mobili M junctim feruntur, acquirent ſingula vim centrifugam proportionalem molibus ſuis ductis in diſtantias ſuas ab axe; hoc eſt, faciendo ut NM [EN] ad FA, ita vis centrifuga mobilis M, ſeu, quod tantundem eſt, ob angulum turbinationis NEM ſemirectum, ejus pondus, ad vim centrifugam quam haberet iſochronum in diſtantia AF; eſſet hæc vis $= M \times FA : EN$; ipſa vero quæ ineſt corpori A, in eadem diſtantia AF & æque velociter moto, conſequenter erit $A \times FA : EN$; & ſimili ratione vis centrifuga, quæ ineſt corpori B, erit $B \times GB : EN$; item, quæ ineſt corpori C, erit $C \times HC : EN$; &c. harumque virium momenta habentur, ſi ducantur in ſuarum directionum diſtantias a vertice turbinationis, nempe in OF, OG, OH; quæ junctim ſumta $A \times FA \times OF : EN + B \times GB \times OG : EN + C \times HC \times OH : EN$ ſeu, adhibitis ſymbolis algebraïcis $(afk + bgl + chm) : EN = [\text{ob } EN = (afk + bgl + chm) : (af + bg + ch)] = af + bg + ch$, dabunt momentum totale, quo linea centri OX a viribus centrifugis extrorsum urgetur, seu quo illa affectat ampliationem anguli turbinationis ROX. Momenta autem ponderum deorsum nitentium habentur pariter, si ipsa pondera ducantur in suarum directionum distantias a vertice O, quæ sunt æquales ipsis FA, GB, HC; quæ ergo momenta simul sumta $A \times FA + B \times GB + C \times HC$, seu $af + bg + ch$ exhibent momentum totale quo linea centri OX a gravitate ponderum deorsum trahitur, seu quo illa affectat coarctationem anguli turbinationis ROX. Cum itaque pro momento totali utroque eadem quantitas proveniat, nempe $af + bg + ch$, erit inter illa æquilibrium, angulusque turbinationis in ea quam habet amplitudine perseverabit, adeoque, ob velocitatem primitus impressam plano turbinationis, quam isochronam fecimus velocitati Penduli simplicis, patet Pendula illa duo, simplex, & compositum, esse isochrona; atque adeo sumta $OS = EN$, punctum S fore centrum turbinationis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO II.

Dato Pendulo turbinante, composito ex ponderibus non in communi turbinationis plano, sed vel in alio, vel in aliis diversis planis inhærentibus; demissisque rectis perpendicularibus ad commune planum turbinationis ex ponderibus; si pondera singula ducantur in distantias suarum perpendicularium ab axe turbinationis & porro in altitudines superficierum conicarum, quas rectæ a ponderibus ad verticem turbinationis eductæ describunt; deinde summa productorum dividatur per id, quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab axe turbinationis: habebitur distantia Centri turbinationis, seu longitudo Penduli simplicis circuitus minimos iisdem cum composito temporibus facientis, sive altitudo superficiei conicæ, quam Pendulum quodlibet simplex describens Pendulo dato composito erit isochronum.

Hujus Propositionis veritas patet ex resolutione virium centrifugarum, & ex earum proportione. Cum enim illæ se habeant,

beant, per jam citatum Theorema I. *Hugen.*, ut pondera [quorum rursus nulla magnitudo consideratur] in suas distantias ab axe turbinationis ducta; resolvantur hæ vires in perpendiculares ad planum turbinationis, & in rectas, quæ harum perpendicularium distantias ab axe exprimunt; manifestum est vires centrifugas, quæ hoc modo secundum perpendiculares agunt in planum turbinationis ab una parte, æquales esse illis, quæ a parte opposita agunt in idem planum; quoniam producta ponderum in perpendiculares illas simul virium centrifugarum actiones secundum perpendiculares & ponderum momenta denotant, ex definitione plani turbinationis. Existente itaque actione & reactione æquali ab utroque latere plani, destruunt se mutuo vires centrifugæ secundum perpendiculares agentes, restantque solæ quæ secundum harum perpendicularium distantias ab axe se exerunt, & quidem in ipsa istarum distantiarum ratione. Ex quibus constat Pendulum iisdem viribus agere in lineam centri inter turbinandum, ac si pondera collocata essent in punctis plani turbinationis, in quæ incidunt perpendiculares ex ponderibus in planum demissæ: Vocentur autem puncta illa, *puncta projecta.* Unde jam habemus Pendulum secundum tenorem Propositionis præcedentis, cujus centrum turbinationis se habet ut in ipsa Propositione determinatur. *Q. E. D.*

COROLL. Hinc liquet quomodo Pendulum compositum turbinans, cujus pondera non sunt in eodem turbinationis plano, per projectionem reducatur ad aliud isochronum habens omnia sua pondera in communi plano turbinationis; si nimirum pondera admoveantur in puncta projecta.

PROPOSITIO III.

Datis Pendulis turbinantibus, qualia supposuimus in Prop. I & II, sed quorum pondera sint æqualia: Si vel ponderum (in casu Prop. I.) distantiæ ab axe turbinationis; vel punctorum projectorum (in casu Prop. II.) ducantur in altitudines superficierum conicarum, quas rectæ a ponderibus ad verticem turbinationis eductæ describunt; deinde

summa

summa productorum dividatur per distantiam centri gravitatis communis ab eodem turbinationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum: orietur distantia centri turbinationis, seu, quod idem est, altitudo superficiei conicæ quam Pendulum quodlibet simplex describens Pendulo dato composito erit isochronum.

Sint itaque pondera omnia inter se æqualia, sed magnitudinis minimæ, & singula dicantur a: Eorum vero distantiæ ab axe turbinationis, in casu Propos. I, vel distantiæ ab eodem punctorum projectorum, in casu Propos. II, sint ut ante f, g, h; altitudines superficierum conicarum per rectas ex vertice turbinationis eductas ad pondera descriptarum, sint iterum k, l, m. Erit, per Propositiones præcedentes, longitudo Penduli simplicis isochroni gyros minimos facientis $= (afk + agl + ahm) : (ap + ap + ap) = (fh + gl + hm) : 3p$; quo significatur summa productorum ex ponderum, vel punctorum projectorum, distantiis ab axe turbinationis in altitudines superficierum conicarum, applicata, vel divisa per distantiam centri gravitatis communis ab eodem turbinationis axe multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

TAB. XXX. N°. XCVII Fig. 3. *Sit* OS *axis, &* OST *planum turbinationis, in quo hæreant, sive per se, sive per projectionem, varia pondera* A, B, C, *aliaque totidem* M, N, P, *prioribus respective æqualia, & tam ab axe* OS, *quam a quadam perpendiculari* ST *æqualiter hinc inde remota; Hoc est, si,* A = M, B = N, C = P, *& rectæ conjungentes* AM, BN, CP, *sint parallelæ axi* OS, *& bisecentur ab* ST *perpendiculari ad axem* OS *in punctis* R, V, Y: *Dico* S *fore centrum turbinationis totius systematis ponderum* A, B, C, M, N, P, *turbinantis circa axem* OS, *& habentis verticem turbinationis in quocunque puncto* O *rectæ* OS.

Esto enim X centrum commune gravitatis ponderum A, B, C, M, N, P, quod utique erit in recta ST: Jam quia OS est media arithmetica inter OF, & OI, inter OG & OK, inter OH & OL; erit $A \times FA \times OF + M \times IM \times OI = 2\,A \times SR \times OS$, ut & $B \times GB \times OG + N \times KN \times OK = 2\,B \times SV \times OS$; item $C \times HC \times OH + P \times LP \times OL = 2\,C \times SY \times OS$; quare $A \times FA \times OF + B \times GB \times OG + C \times HC \times OH + M \times IM \times OI + N \times KN \times OK + P \times LP \times OL = 2\,OS \times (A \times SR + B \times SV + C \times SY = 2\,OS \times SX\,(A + B + C) = OS \times SX \times (A + B + C + M + N + P)$ quod divisum per $SX \times (A + B + C + M + N + P)$ dabit OS; quæ, per Prop. I, erit longitudo Penduli simplicis facientis gyros minimos & isochronos turbinationibus systematis A, B, C, M, N, P; seu altitudo superficiei conicæ, quam quodlibet aliud Pendulum simplex eidem Systemati isochronum turbinando describere debet.

CoROLL. Hinc magnitudo quælibet ABC, sive sit linea, TAB. XXX. N° XCVII. Fig. 4. sive superficies, sive solidum, turbinans circa axem OS, si a recta vel plano quopiam horizontali SB dividatur in duas partes, ABD, CBD, æquales, & similes, similiterque positas respectu SB, ut & ipsius axis OS: Erit S centrum turbinationis ex quocunque axis puncto O magnitudo ABC suspendatur.

Liquet hujus Corollarii veritas, si magnitudinis semisses cogitatu dividantur in particulas minimas. Quælibet enim earum E, quæ in una medietate ABD existit, habet sibi comparem G in altera medietate CBD: Hæ vero duæ particulæ, ut & singula reliquarum particularum paria in planum turbinationis projecta, habebunt conditionem Propositionis præcedentis. Ergo omnium particularum, hoc est, totius magnitudinis ABC centrum turbinationis est in S. *Q. E. D.*

PROPOSITIO V.

Dato Pendulo turbinante composito ex punctis ponderosis quotlibet, hoc est, ex ponderibus æqualibus nullius magnitudinis in communi Plano turbinationis, sive per se, sive per projectionem, existentibus: Dico centrum turbinationis esse idem, quod est centrum communi *mune gravitatis omnium peripheriarum a punctis illis turbinando descriptarum.*

Patet hoc ex Mechanicis. Nam altitudo centri gravitatis peripheriarum illarum habetur, si singulæ peripheriæ ducantur in suorum centrorum altitudines, seu distantias a vertice turbinationis, atque summa productorum applicetur ad summam ipsarum peripheriarum: hoc enim facto, orietur communis centri gravitatis peripheriarum distantia a vertice turbinationis. Verum, cum peripheriæ sint ut radii, hoc est, ut distantiæ punctorum ab axe turbinationis; poterunt hæ in dividendo & in divisore substitui pro peripheriis: & ita altitudo centri gravitatis peripheriarum erit [retentis litteris adhibitis in Propos. III.] $= (fk + gl + hm) : (f + g + h) = (fk + gl + hm) : 3p$. Quare constat propositum.

Propositio VI.

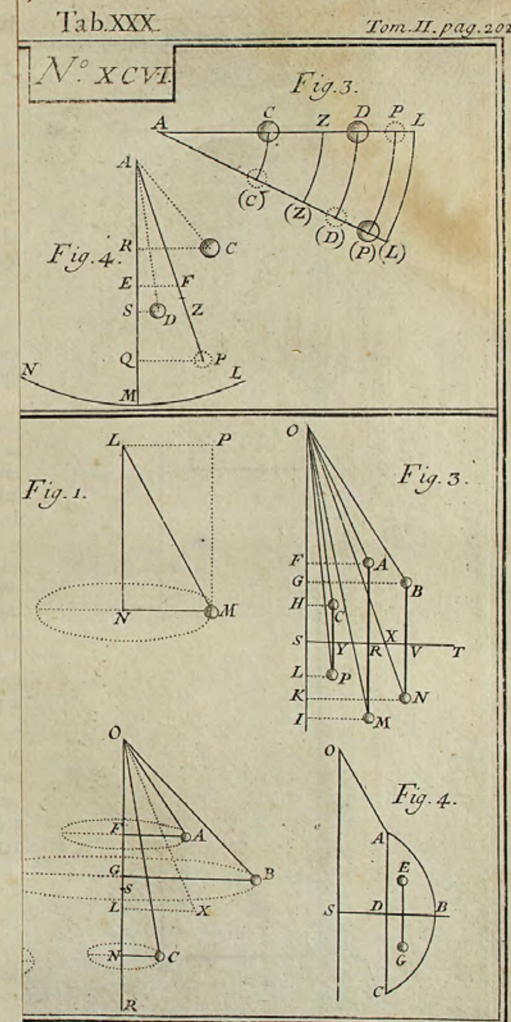
Figura plana, vel Linea quælibet in planum turbinans, habet centrum turbinationis in ipso centro gravitatis solidi rotundi, vel superficiei rotundæ a figura plana, vel a Linea inter turbinandum descriptæ.

Fluit ex præcedente: Intelligatur enim Figura vel Linea divisa in particulas minimas æquales, quarum singulæ per turbinationem describent peripherias cum crassitudine vel latitudine infinite parva, ex quibus omnibus conflatur rotundum ipsum a Figura vel Linea turbinando genitum: unde patet propositum ad casum præced. redactum.

Coroll. Hinc si Pendulum compositum, vel quæcunque magnitudo turbinans, aliter atque aliter suspendatur a punctis quæ in eodem accipiuntur axe turbinationis, modo Pendulum vel magnitudo eundem situm servet in plano turbinationis; erit centrum turbinationis in eodem semper loco.

Hoc utique manifestum est ex permanentia centri gravitatis communis peripheriarum a punctis projectis descriptarum.

SCHO-



NIS.
urbinando

gravitatis
ducantur
ce turbi-
mam ip-
unis cen-
inationis.
distantiæ
dendo &
entri gra-
n Propoſ.
$l+hm$):

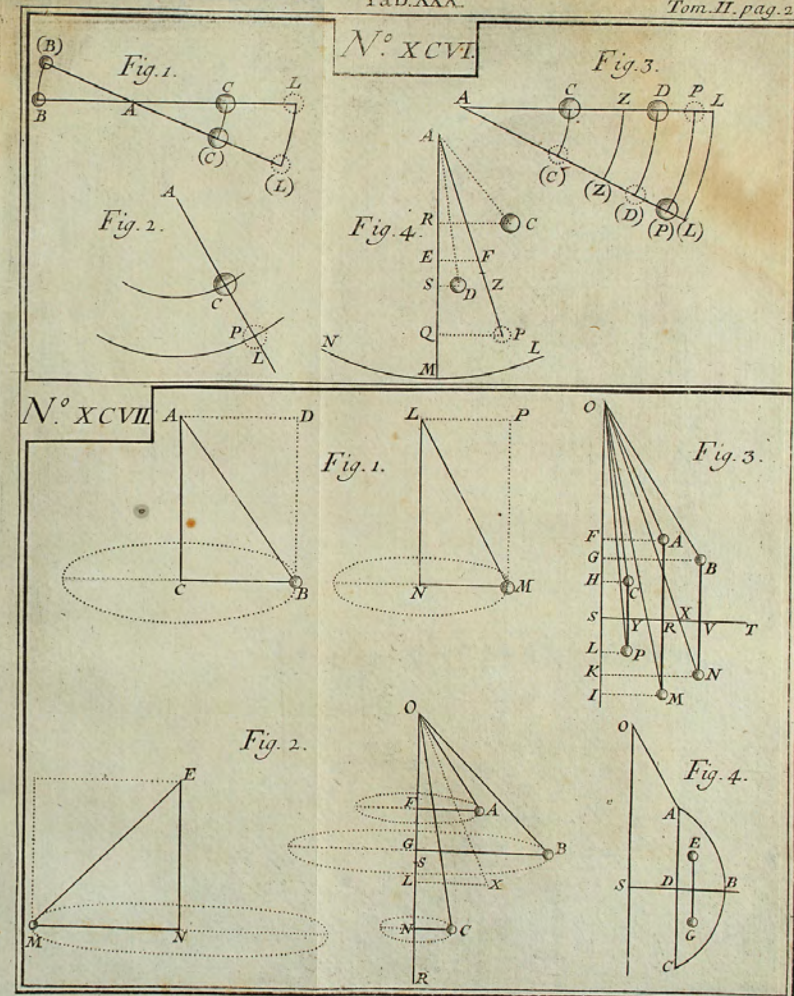
habet cen-
vel ſuper-
ndum deſ-

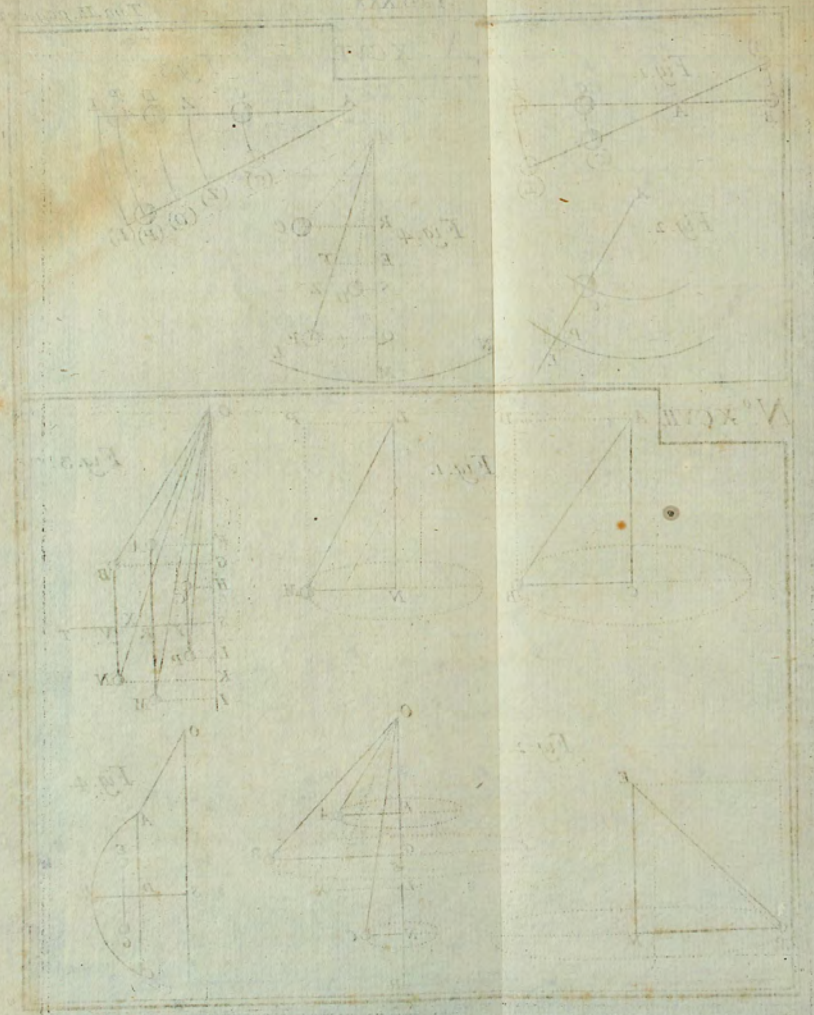
Linea di-
per turbi-
latitudine
um ipſum
proposi-

uæcunque
a punctis
Pendulum
inationis ;

i gravita-
criptarum.

SCHO-





Ope Proposi
tra turbinationis
bet in planum
binantium, alia
tionis innotescen
figura proposita
minimas æquale
projectarum dist
perficierum conic
binationis educta
centri gravitatis
plicatam per ipsa
centri turbination

Vel, quia par
nem efformant in
sed cujus puncta
quæ ponduscula
eidem puncto pr
trum turbinationi
trum commune g
niti; supposito n
vitate specifica e
bus ita variare,
puncto vel parti
intelligatur esse e
tionalis multitudi
puncto vel partic

Quandoquide
natione centri tu
nem centri grav
regularum dudum
ciunt quæ a G

SCHOLIUM.

Ope Propositionis hujus sextæ, determinantur facillime centra turbinationis figurarum planarum, & linearum quarumlibet in planum turbinantium. Reliquarum vero in latus turbinantium, aliarumque figurarum solidarum, centra turbinationis innotescent beneficio Propositionis tertiæ. Si nimirum figura proposita turbinans resolvatur cogitatione in particulas minimas æquales, quarum omnium in planum turbinationis projectarum distantiæ ab axe, multiplicatæ per altitudines superficierum conicarum quas rectæ a particulis ad verticem turbinationis eductæ describunt, dabunt summam dividendam per centri gravitatis figuræ distantiam ab axe turbinationis multiplicatam per ipsam figuram; ex qua divisione emerget altitudo centri turbinationis.

Vel, quia particulæ magnitudinis turbinantis per projectionem efformant in plano turbinationis novam figuram planam, sed cujus puncta censenda sunt inæqualibus pondusculis onerata, quæ pondускula se habent in ratione multitudinis particularum eidem puncto projectionis respondentium; Erit etiam heic centrum turbinationis in magnitudine turbinante, idem quod centrum commune gravitatis solidi rotundi a figura projectionis geniti; supposito nempe solidum hoc genitum non uniformi gravitate specifica esse præditum, sed gravitatem in singulis partibus ita variare, ut peripheria, vel potius annulus a quolibet puncto vel particula figuræ projectionis turbinando descriptus, intelligatur esse ex materia gravitatis specificæ, quæ sit proportionalis multitudini particularum magnitudinis turbinantis eidem puncto vel particulæ in figura projectionis respondentium.

Quandoquidem igitur quicquid est negotii in determinatione centri turbinationis, illud reduxerimus ad inventionem centri gravitatis rotundorum; hoc autem ope vulgarium regularum dudum in potestate habeatur; quorsum in primis faciunt quæ a GULDINO tradita extant; in exemplis deducen-

 dis

dis variarum linearum, superficierum, ac solidorum diversis modis turbinantium, jam tempus terere non lubet: calculo tantum pro his opus est; methodum invenisse, eamque indicasse hac vice sufficiat.

N°. XCVIII.

JOHANNIS BERNOULLI

BAROMETRUM NOVUM

communi multo accuratius.

Hermanni *Phoronomia.* p. 177. Amst. 1716. 4°. *Acta Erudit Lips.* 1716. Jan. pag. 10. TAB. XXXI. N°. XCVIII. *Fig.* 1.

SIT ABC tubus e duobus ramis inæqualium diametrorum compositus, figuram gnomonis præ se ferens; rami horizontalis BC in C aperti diameter lineam, seu duodecimam digiti Parisini partem, non excedat; rami vero verticalis AB in summitate obstructi diameter esto 4 linearum, vel amplius adhuc, prout variationum gradus in hoc Barometro magis sensibiles sunt exprimendi; & rami hujus altitudo sit, qualis in Baroscopiis communioribus, 30 aut 31 pollicum; longitudo vero rami horizontalis BC, quæ a proportione diametrorum ramorum pendet, 3 pedum minimum esse debet. Si tubo sic parato mercurius infundatur, & ramus ejus horizontalis pariter plenus sit mercurio ad medietatem usque E circiter, aëre existente mediæ consistentiæ, habebitur Barometrum, quod *16* vicibus magis sensibiles exhibebit variationes, quam ordinaria Barometra. Liquet enim, quod descendente mercurio in ramo verticali ex spatio unius pollicis, progredietur in ramo horizontali ex E in F per spatium *16* pollicum; nam ramus verticalis aliud non est, quam simplex seu commune Baroscopium.

Quod si vero ramus horizontalis angustior, aut verticalis amplior fieret, nemo non videt fore, ut variationes crescant in dupli-

duplicata ratione diametrorum; adeo ut hæ variationes in infinitum magis magisque sensibiles reddi queant. Sed quia praxis talia semper incommoda secum trahere solet, quæ theoriæ successum difficilem efficiant, nimia est fugienda horizontalis rami angustia; quia aëris pressio non satis commode agit in tubo valde angusto, nec in eo mercurius facile movetur. Horizontali igitur ramo vix minor quam unius lineæ diameter tribui debet. Propterea, loco imminutionis ejus diametri, satius est verticalem ramum majoris amplitudinis assumere, non quidem per totam ejus longitudinem, sed tantum in summitate, addendo scilicet tubo BM, qui ejusdem ac in vulgaribus Barometris crassitiei esse potest, capsulam vitream AM, in qua mercurius perinde ac in HUGENII geminato, descendet atque ascendet. Verum existente hac capsula valde laxa, insignis rami horizontalis longitudo, quæ hoc casu requiritur, instrumentum inconcinnum, usuique parum accommodatum redderet; nisi incommodo isti promptum esset remedium, contorquendo ramum horizontalem in spiralem, vel quoquo alio modo in minus spatium redigendo, flexuris illis quas Figura 3. exhibet; dummodo hæ flexuræ omnes in eodem plano horizontali existant.

TAB. XXXI. N°. XCVIII. *Fig.* 2.

TAB. XXXI. N°. XCVIII. *Fig.* 3.

Ad commodiorem hujus Barometri impletionem, non abs re fore notat Autor, si ramus perpendicularis AB in exiguum tubulum in L apertum desinat; ita ut per ejus orificium argentum vivum infundi possit, dum orificium rami horizontalis C obstructum tenetur. Ambobus ramis hoc pacto impletis, orificium L hermetice est sigillandum, & obturamentum, quo orificium C obstruebatur, demendum, ut argentum vivum in verticali tubo AB ad consuetam in communioribus Barometris altitudinem se demittere possit, scilicet ad terminum D, & ex horizontali ramo superfluus effluere hydrargyrus. Sed quia hac ratione ramus horizontalis mercurii plenus manebit, suctione pars ejus conveniens est adimenda, vel beneficio tubi capillaris ampullula instructi, quæ calefacta atque tubo horizontali intrusa, atque in eo refrigescens, mercurium in suam cavitatem tra-

trahet. Hac ratione Barometrum conſtructum uſuique paratum erit.

Cæterum non inutile fuerit, ſi tubus verticalis in loco, quo horizontali jungitur, exigua curvatura inſtar receptaculi H inſtruatur, ad impediendum ex horizontali in verticalem ramum aëris ingreſſum, ſi quando horizontalem forte mercurius deficeret, aut fortaſſe etiam ex nimia atmoſphæræ preſſione, ſeu a vibrationibus mercurii ex tranſlatione Barometri de loco in locum orta: quod poſtremum inconveniens ſi non tolli penitus, ſaltem obſtruendo orificium C minui poteſt.

Præter ſimplicitatem, qua *Bernoullianum* iſtud Barometrum ſe commendat, aliis inſuper prærogativis præſtare videtur Barometris compoſitis hactenus inventis. Nam tubi pro *Bernoulliano* & facile parantur, facileque etiam implentur, nec liquores in eo adhibentur in vapores ſenſibiliter abeuntes, quibus Barometri effectus mirum quantum alterari ſolent. Nam in Baroſcopio a nobis deſcripto ſolus adhibetur mercurius, qui in vapores ſenſibiliter non ſolvitur. Geminatum vero HUGENII Barometrum, præter quam quod tubos requirat ægre parabiles, & difficillime liquoribus implendos, liquores depoſcit evaporationi obnoxios, cui incommodo illud etiam, quod a Celeberrimo DE LA HIRE ingenioſe excogitatum, [Vid. *Acta Acad. Reg. Pariſ. Scient.* 1708.] ſubjectum eſt; aliudque præterea incommodum ſecum trahit, quod liquores ejuſdem ſpecificæ gravitatis, ſed impermiſcibiles requirat; alioqui variationes ejus non indefinite augeri poterunt, ſed intra certos terminos conſiſtent, quos tranſgredi nequeant. Nam vocando ſpecificas gravitates argenti vivi, & ex liquoribus in Barometro iſto adhibendis, gravioris ſcilicet, & levioris, m, t, p; capſularum vitrearum diametrum a, diametrum tubi anguſtioris b; invenio * poſt Clariſſ. BERNOULLIUM, variationes in Barometro *Hireano* ſe habere ad variationes in Barometro ordinario, ſeu communi, ut quantitas maa ad $2\,mbb + (aa - bb)(t - p)$. Jam quo minor eſt b quam a, eo propius accedit hæc ratio, rationi m ad

* Loquitur hic ſcilicet HERMANNUS.

ad $t - p$, quæ limitem exprimit, intra quem variationes Barometri a Cl. DE LA HIRE inventi, collatæ cum variationibus Barometri communis, continentur; quæ data ratio m ad $t - p$ eo ſolum caſu infinita fit, quo $t = p$, hoc eſt eo caſu, quo liquores in *Hireano* Barometro adhibiti ejuſdem ſunt ſpecificæ gravitatis, ſed qui invicem permiſceri nequeant.

Poſteaquam deſcriptio *Bernoulliani* Barometri coram Concilio Academiæ Scientiarum Regiæ Pariſienſis prælecta fuit, nuntiatum eſt Celeb. ejus Autori, ſimilem Barometri conſtructionem jam ante complures annos excogitatam fuiſſe a Celeberrimo Aſtronomo *Jo. Dominico* CASSINO, ſed poſtea neglectam ab ipſo jacuiſſe, quod in praxi non ſucceſſiſſet, ob aërem, qui mercurio in tubo, ſeu ramo horizontali ſe miſcuiſſe ejuſque liberum fluxum impediiſſe ſcribitur. Sed quia quid hac in re laudatus Vir molitus ſit nuſquam memoriæ proditum ſit, nec BERNOULLIUS de ejus tentaminibus quicquam fando audiverit, inventionis laus ipſi denegari non poteſt; maxime quod ejus cum ſucceſſu in *Belgio* factum eſſe periculum teſtari poteſt; & incommodum illud, quod CASSINO remoram injecit, tolli poſſe arbitratur, tubum horizontalem ſuctione implendo; vel etiam ſi compreſſione crumenæ cujuſdam coriaceæ argenti vivi plenæ, tubique horizontalis orificio applicatæ, mercurius tubo intruſus adſcendere cogatur uſque ad ſummitatem tubi verticalis, orificium ſuperius apertum habentis; hac mercurii intruſione peracta, & obturato ſummo verticalis tubi orificio, crumena a tubo horizontali eſt removenda, ut argentum vivum in tubo verticali ad conſuetam altitudinem delabi poſſit. Denique ut mercurii fluxus in tubo horizontali commode fiat, tanta tubo iſti amplitudo eſt tribuenda, quanta opus eſt, ut mercurius in eo contineatur, abſque eo ut diffluat.

JOH.

N°. XCIX.

JOHANNIS BERNOULLI
DEMONSTRATIO PRINCIPII HYDRAULICI

De æqualitate velocitatis quacum aqua per foramina vaſorum erumpere incipit, cum ea quam aquæ gutta acquirere poſſet motu naturaliter accelerato, cadendo ex altitudine æquali illi quam aqua habet in vaſi ſupra foramen.

Acta Erudit. Lipſ. 1716. Aug. pag. 375.

FUndamentum demonſtrationis in hoc conſiſtit, ut conſideretur guttula liquoris infima, & foramini vaſis immediate incumbens, tanquam preſſa, vel [ut ego voco] animata a gravitate quadam acceleratrice, quæ ſe habet ad gravitatem naturalem, ut altitudo aquæ, vel liquoris totius foramini vaſis incumbentis, ad altitudinem guttulæ; ſcilicet, ut pondus abſolutum columnæ aqueæ foramini inſiſtentis ad pondus abſolutum guttulæ; Sic quippe nihil aliud reſtat, quam ut quæratur quantam velocitatem acquirere poſſit guttula animata ab iſta gravitate majori, quando cadit per lineolam ſuæ altitudini æqualem, hoc eſt, poſtquam tota exierit per foramen: tam diu enim premitur a tota columna aquea, adeoque animatur a gravitate majore, quam diu aliquid adhuc de guttula [quam ut columellam ſolidam concipio] ſupra foramen exiſtit. Sit itaque altitudo columnæ totius liquoris $= A$, & altitudo guttæ infimæ $= a$, erit gravitas acceleratrix naturalis ad gravitatem acceleratricem a qua animatur gutta infima ut a ad A. Verum diverſæ gravitates acceleratrices uniformes ſunt inter ſe ut parametri Parabolarum, quæ inſerviunt pro ſcalis velocitatum ab iſtis diverſis gravitatibus per diverſa ſpatia emenſa productarum,

ſicuti

ſicuti fluit ex Theoremate meo II. in *Actis Lipſ.* 1713. pag. 79. * demonſtrato. Concipiantur igitur duæ Parabolæ LOS TAB. XXXI. N°. XCIX.
& LRT ſuper communi axe LN, quarum illius applicatæ ſingulæ MO, NS, &c. exprimant velocitates acquiſitas per gravitatem naturalem corporum cadentium ex altitudinibus LM, LN; alterius vero applicatæ ſingulæ MR, NT, &c. pariter deſignent velocitates acquiſitas per alteram gravitatem iiſdem ſpatiis emenſis. Harum Parabolarum parametri erunt, ut dictum eſt, ad ſe invicem ſicut a ad A. Sumta jam $LN = A$, altitudini columnæ aqueæ totius, & $LM = a$, altitudini guttæ infimæ; deſignabit NS velocitatem corporis naturali gravitate accelerati deſcendentis per altitudinem liquoris LN, & MR exprimet velocitatem quam gutta acquiſiverit quando delapſa eſt per altitudinem LM, hoc eſt, quando per foramen integra detruſa eſt: demonſtrandum ergo eſt NS & MR eſſe æquales; quod ſic paucis abſolvo. Quia enim parameter parabolæ LRT eſt ad parametrum parabolæ LOS $= A : a = LN : LM$; erit parameter major in LM, ſeu $MR^2 =$ param. min. in LN, ſeu NS^2, unde $MR = NS$. *Q. E. D.*

* Tom. I. N°. XC. pag. 517.

 EXCER-

N°. C.

EXCERPTUM

EX CELEB. JACOBI JURINI M. D.

Defensione Dissertationis de Motu Aquarum fluentium in Actis Philosophicis N°. 355 *editæ, contra animadversiones Viri Celeb.* Petri Antonii MICHELOTTI.

Transact. Philosoph. Sept. & Oct. 1722. N°. 373. Art. IV. pag. 189.

ACcedo jam ad expendendam Viri Celeberrimi *Joannis* BERNOULLII Demonstrationem de velocitate aquæ ex foramine vasis pleni effluentis. In quem finem legi diligenter ac relegi, tum quæ protulit Doctissimus MICHELOTTUS de principiis illius Demonstrationis [pag. 131 †] tum ipsam Demonstrationem a Cl. HERMANNO communicatam in *Actis Lipsiensibus*, anni 1716. Quæ quamvis nulla ex parte mihi satisfaciat, tamen cum imbecillitatis meæ conscius longe facilius accidere posse sentiam, ut ipse a vero aberrem, quam ut Virum nobilissimis inventis clarum, & acerrimo, si quis alius, ingenio pollentem, erroris alicujus redarguam; cunctanter idcirco & dubitantius proponam, quid in illa demonstratione minus firmum mihi videatur.

Fundamentum Demonstrationis [scribit Vir Cl.] &c. *Vide supra pag.* 208.

Posito hoc fundamento, pergit Vir Cl. ad Demonstrationem suam concinnandam: nobis vero suspecta est ipsius fundamenti firmitudo. Ut id quo jure fiat, videatur; ita, si placet, procedamus.

Quoniam nulla alia re utitur Cl. BERNOULLIUS, ad animandam, ut vocat, guttulam infimam gravitate prædicta acceleratrice, nisi sola pressione, sive pondere columnæ aqueæ foramini insistentis; congelari ponatur omnis aqua columnam illam ambiens, & columna aquea per politissimam glaciem, sine omni resistentia, labi concipiatur. His positis, quamdiu foramen clausum tenetur, urgebitur sane guttula foramini proxima toto pondere columnæ aqueæ incumbentis, prorsus uti statuit Cl. BERNOULLIUS.

Reseretur jam foramen, & permittatur liber exitus aquæ effluxuræ. Quid

† *De separatione fluidorum in corpore animali.*

Quid inde futurum censes! Num urgebitur, vel *animabitur guttula infima gravitate acceleratrice, quæ se habet ad gravitatem naturalem, ut altitudo aquæ totius foramini incumbentis, ad altitudinem guttulæ?* Minime vero; sed urgebitur sola gravitate sua acceleratrice naturali. Nam quam primum guttula infima moveri deorsum incipit, etiam velocitate, si placet, infinite parva, non amplius utique urgebitur a pondere columnæ aqueæ insistentis. Fieri enim non potest, ut columna aquea guttulam subjectam premat, nisi ab illa guttula impediatur in descensu. Non autem impeditur, quia non conatur velocius descendere, quam infima guttula gravitate sua deorsum fertur; sed columna & gutta pari passu descendunt, adeo ut gutta neque columnam desertura sit, nec ab eadem ullam vim aut pressionem sit passura.

Cedit itaque, ni fallor, & fatiscit *Bernoullianæ* demonstrationis fundamentum. Sed circumspicienti mihi, quidnam potissimum tanto Viro occasionem dederit a vero aberrandi, id præcipue occurrit, quod scilicet minus animum intenderit Vir acutissimus ad discrimen, quod est inter corpus pressum a pondere incumbente, quum pondus istud nonnisi a naturali gravitatis vi acceleratrice urgetur, & corpus impulsum, sive animatum [quoniam isto verbo uti voluit Vir Cl.] a gravitatis vi acceleratrice præter naturam aucta. In casu posteriore descendet corpus majore celeritate, quam quæ ex gravitate naturali proficisci queat, prorsus ex sententia Doctissimi BERNOULLII; at in priore, utut corpus pressum, dum quiescit, urgeatur a pondere incumbente, tamen ubi primum descendere incipiet, eadem prorsus velocitate descendet, ac si prius nullo pondere incumbente, pressum fuisset.

Nescio an operæ pretium sit, rem per se satis claram exemplo illustrare.

Quiescere ponatur, in mensa, columna solida ex centum aureis sibi invicem impositis confecta, & urgeatur, ut fit, aureus infimus pondere aureorum incumbentium. Si fiat jam foramen in mensa subter aureos, ut labi sinatur aureus infimus; quamprimum iste aureus descendere incipiet, liberabitur statim ab aureorum incumbentium pondere, & eadem velocitate descendet tum aureus infimus, tum reliqui omnes, ac si solus ille aureus in mensa constitutus fuisset.

Mitto dicere, quod, si quis ex velocitate, quacum aqua secundum Cl. BERNOULLII placita ex foramine egreditur, & ex determinata per eam velocitatem mole aquæ dato quovis tempore effluentis, motum ejusdem, ut supra monui, definire voluerit, eundem duplo majorem reperturus sit, quam qui ex pondere columnæ aqueæ foramini insistentis, eodem tempore, gravitatis vi generari queat. Profecto videntur ista mihi tantam veri speciem præ se ferre, ut multum debiturus sim, sive Cl. MICHELOTTO, sive ipsi demonstrationis Auctori celeberrimo, si me aliquid rectius docere dignabitur.

 Liceat

Liceat interim ipſis, pace tantorum Virorum, ſequentia duo experimenta, ad controverſiam iſtam certius dijudicandam, vel de novo inſtituenda, vel ſaltem diligenter expendenda commendare. Alterum *Newtonianum*, pag. 305 Princip. ſecund. Ed. deſcriptum; ut inveniatur, ex mole aquæ dato temporis ſpatio effluentis, velocitas, quacum tranſit per ipſum foramen: alterum Cl. MARIOTTI, Libro *Du Mouvement des eaux*, *Part.* 2. *Diſc.* 3. *Regl.* 1. quod tubo cylindrico, utrinque aperto, parte inferiore ſurſum reflexo, & aqua pleno ſumptum eſt; unde facile æſtimari poſſit, utrum guttulæ primæ aquæ effluentis ad tantam altitudinem proſiliant, quantam requirit *Bernoulliana* Demonſtratio.

N°. C I.

EXCERPTUM

EX CELEB. PETRI ANTONII MICHELOTTI

EPISTOLA

Ad Illuſt. Virum Antonium DE COMITIBUS *Patric. Venetum, in qua* Jurinianæ *Defenſioni reſpondetur.*

MICHELOTTI *Epiſtola* Venet. 1724. 4°. *Acta Eru. Lipſ.* 1725. Jul. pag. 317. TAB. XXXI. N°. CI.

I*N hac Epiſtola Clar.* MICHELOTTUS *in fundamento præſertim demonſtrationis* Bernoullianæ *vindicando & ſtabiliendo operam ſuam collocat. Monſtrat itaque, perperam* JURINUM; *duos caſus diverſos confundentem, ponere, quod aqua omnis in vaſe glacietur, columna foramini ad perpendiculum incumbente excepta, propterea quod guttulæ motus generetur a preſſione laterali aquæ verticali prorſus æquali & deſcenſui columnæ verticalis reſiſtente. Demonſtrat igitur aſſumtum* Bernoullianum *hoc modo.*

Sit, inquit, ABCD vas aqua ad ſummum uſque orificium repletum, cujus in fundo BC ſit foramen O, quod primo obturatum pono: ei certe inſiſtit gutta aquæ proxima, quam licet conſiderare tanquam columellam ſolidam OE, cujus baſis ſuperior E urgetur quidem a pondere totius ſuperincumbentis EF, ſed ejus quoque latera, uti ex Hydroſtatices legibus & natura fluiditatis conſtat, comprimuntur a laterum columnis, quales ſunt EH, EG, quæ continenter partes ſuperiores ab inferioribus ſeparare nituntur. Concipiamus nunc, obturamento remoto, reſerari ſubito foramen O: ſcis, quid eveniet! Incipiet columella OE

primo

primo inſtanti deſcendere ſola vi ſuæ naturalis gravitatis, quam conaretur quidem ſequi columna incumbens EF, niſi hanc deſcendere conantem prohiberent columnæ æque & contra ponderantes EH, EG. Quamobrem aqueæ columellæ OE, tanquam ſolidæ ſpectatæ, a ſuperincumbente columna EF divulſio exoriri debet, ac propterea minimo facto hiatu E*e*, laterum columnæ EH, EG eodem temporis momento apices infimos, cuneorum ad inſtar, in interſtitiolum E*e* defigunt. Jam vero, ex æqualitate virium quæ, uti ex Mechanicis patet, utrinque partibus a cuneo divellendis inferuntur, ſequitur, tanta vi maſſam totius columnæ *e*F ſurſum impelli, quanta columella OE deorſum impingitur. Vis prior ſuſtinet columnam *e*F in æquilibrio, atque ob id eſt æqualis ejus ponderi $= M.\,g$ [intelligo per M columnæ *e*F maſſam, & per g gravitatem naturalem, qua corpora gravia accelerantur in motibus ſuis;] vis altera, qua columella OE deorſum propellitur, eſt $m.\,G$: [intelligo hic pariter per m columellæ OE maſſulam, & per G gravitatem novam acceleratricem ex iſta cunei preſſione oriundam, qua quantitas materiæ, quam columella OE obtinet, animari decet]. Quoniam igitur iſtæ duæ vires ſunt æquales inter ſe, utpote ab eadem cunei actione profectæ, erit $M.\,g = m.\,G$, ac proinde $g : G = m : M$. Eſt vero m ad M, ut altitudo columellæ OE ad altitudinem columnæ *e*F; hoc eſt [ob infinite parvam OE vel O*e*] ad totam aquæ altitudinem OF. Quare patet veritas ejus, quod in ſua *Jo.* BERNOULLIUS Demonſtratione aſſeruit: guttulam nimirum infimam foramini inſiſtentem in deſcenſu ſuo animari a gravitate acceleratrice, quæ ſe habet ad gravitatem naturalem, reciproce ut tota aquæ altitudo OF ad altitudinem minimam columellæ OE.

 JACOBI

N°. C I I.

A R T. I.

J A C O B I   B E R N O U L L I

SOLUTIO PROPRIA PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI,

Propoſiti in Actis Lipſ. menſ. Maio 1697. *pag.* 214.

Acta Erud. Lipſ. 1700 Jun. p. 261.

CUM genuina ſolutio hujus Problematis nondum a quoquam fuerit exhibita, eam hic, donec ſuo tempore ſequatur analyſis, curioſo Lectori in ſequente Tabella contemplandam ſiſto, in qua litteras a & b pono deſignare quantitates conſtantes, x & y coordinatas curvæ quæſitæ, t ipſam curvam, p quantitatem quamcunque datam per x, & q quantitatem datam per t:

	Si	erit quantitas.
1.	$dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$	$\int pdy$ Maximum & $\int (dt:p)$ Minimum
2.	$dy = (a - p)\, dx : \sqrt{(2ap - pp)}$	$\int pdy$ Minimum
3.	$dy = apdx : \sqrt{((bb - aa)pp - 2aabp + a^4)}$	$\int (dt:p)$ Maxim.
4.	$dy = adx : \sqrt{(pp - aa)}$	$\int (dy:p)$ Maxim. & $\int pdt$ Minim.
5.	$dy = (p - a)\, dx : \sqrt{(2ap - aa)}$	$\int (dy:p)$ Minim.
6.	$dy = adx : \sqrt{(bb - 2bp + pp - aa)}$	$\int pdt$ Max.
7.	$dy = qdt : \sqrt{(aa + qq)}$	$\int qdy$ Maxim. & $\int ydq$ Min. *vel* Max.
8.	$dy = (a - q)dt : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$	$\int qdy$ Min. & $\int ydq$ Max. *vel* Min.
9.	$dy = adt : \sqrt{(aa + qq)}$	$\int (dy:q)$ Max. & $\int xdq$ Min. *vel* Max.
10.	$dy = (aq - bb)dt : b\sqrt{(bb - 2aq + qq)}$	$\int (dy:q)$ Min.
11.	$dy = adt : \sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)}$	$\int xdq$ Max. *vel* Min.

Ut ſolutiones reddantur generaliſſimæ, obſervandum, in omnibus iſtis æquationibus litteras p & q augeri minuive poſſe quantitate quacunque conſtante c; eaque ratione id effici, ut curva inventa non tantum conditioni præſcriptæ ſatisfaciat, ſed datæ quoque fiat longitudinis: exempli gratia loco primæ æquationis $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$ ſubſtitui poteſt $dy = (p + c)\, dx : \sqrt{(aa - pp - 2cp - cc)}$ vel etiam iſta, $dy = (p - c)\, dx : \sqrt{(aa - pp + 2cp - cc)}$; quibus curvæ denotantur, quæ *Maximum* $\int pdy$ comprehendunt, inſuperque determinatam longitudinem, eamque pro quantitate litteræ c majorem minoremve, obtinent.

Sciendum etiam eſt, reperiri poſſe æquationes curvarum, quarum $\int pdy$, $\int qdy$, &c. eſt *Maximum Minimumve*, cum quantitates, quæ litteris p & q deſignantur, non tantum ſimpliciter datæ ſunt per x vel t, ſed etiam promiſcue ex x & y, vel t & y compoſita Hoc fini ſumo differentiale ipſius p [conſiderando y inſtar conſtantis] quod voco mdx, facioque $r = \int mdx$ & denique $dy = rdx : \sqrt{(aa - rr)}$; quo pacto habebo æquationem curvæ, cujus $\int pdy$ eſt *Maximum.* Similiter ſi differentiale ipſius q [ſumta ſemper y conſtante] vocetur ndt, fiatque $v = \int ndt$, ac $dy = vdt : \sqrt{(aa + vv)}$, prodibit curva, cujus $\int qdy$ eſt *Maximum.* Eſto exempli gratia $p = \sqrt{(xx + yy)}$, hoc eſt, ſupponendum ſit in fig. * applicatam PZ vel GH æquari chordæ BF, erit differentia ipſius p, $xdx : \sqrt{(xx + yy)}$: Curva igitur, cujus $\int dy \sqrt{(xx + yy)}$ eſt *Maximum*, fit $dy = [rdx : \sqrt{(aa - rr)} =]$ $dx \int \frac{xdx}{\sqrt{(xx+yy)}} : \sqrt{\left(aa - \left(\int \frac{xdx}{\sqrt{(xx+yy)}}\right)^2\right)}$ nihilque ad omnimodam Problematis reſolutionem deeſt, præter artificium ſeparandi quantitates indeterminatas a ſe invicem, quod proſequi inſtituti noſtri non eſt. Dantur vero etiam caſus, ubi nec opus eſt ſeparatione, nempe cum littera y non amplius ingreditur differentiale ipſius p; velut ſi ponatur $p = (xx + yy) : a$ vel $= (xx + yy - by) : a$, &c. hoc enim in caſu æquatio curvæ non erit diverſa ab ipſa $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$; ſic ut hinc concludamus, eandem curvam BTN Problemati ſatisfacere, ſive applicatam PZ quadrato applicatæ PF, ſive quadrato chordæ BE, aut infinitis aliis modis proportionari ſupponamus; pariterque etiam in aliis. Obiter hic noto, quod Frater mentione hujus curvæ facta in *Ephem. Gall.* aſſerit, *illam eſſe, quam refert linteum a pondere liquidi expanſum, quam ego quoque meæ Elaſticæ attribuam.* † Dicendum potius fuiſſet, *eſſe Elaſticam, quam ego quoque aſſeram figuræ lintei*; quandoquidem, poſt demonſtrationem a me in *Actis Lipſ.* †† exhibitam de Elaſtica, nemo dubitare poſſit; cum contra de figura lintei id aliter hucuſque non conſtiterit, niſi quod illud ſæpe numero affirmaverim in *Actis*, eo jam tempore,

quo

* Vid. *Fig.* N°. XLV. TAB. X. *Tom. I.* † N°. XL. pag. 209. *Tom. I.*
†† 1695. Dec. pag. 538.

quo Frater adhuc longe diverſum ſentiebat. Sed gaudeo, Geometris veritatem aſſerti mei paulatim agnoſci.

Quod *Minima* concernit, quæ Tabulæ inſerui, hoc noto peculiare; quod quamquam eadem ſit curva, quæ *Maximum* $\int p\,dy$ & *Minimum* $\int(dt:p)$ ſuppeditat, iſta tamen curva priore prærogativa in genere duntaxat figurarum Iſoperimetrarum, altera vero in ordine ad omnes omnino curvas potitur. Secus ſe res habet cum *Minimo* $\int p\,dy$ & *Maximo* $\int(dt:p)$: præterquam enim quod non datur *Maximum* $\int(dt:p)$, quod tale ſit in ordine ad omnes curvas, hoc quod tale tantum eſt inter figuras Iſoperimetras, eidem curvæ non competit, cui *Minimum* quadrat $\int p\,dy$, ut ex Tabella liquet. Quemadmodum etiam non exiſtimandum eſt, curvam illam, quæ uno in ſitu *Minimum* $\int p\,dy$ ſubminiſtrat, in alio exhibere *Maximum*, ſive, duas priores Tabulæ hujus æquationes deſignare poſitiones tantum diverſas unius ejuſdemque curvæ; quanquam in caſu $p=x$ utraque conveniat circulo. Ratio eſt, quod ſi per p potentia quædam intelligitur ipſius x, pro exponente habens fractionem, cujus numerator eſt unitas, denominator numerus quilibet n, curva æquationis $dy=(1-p)\,dx:\sqrt{(2p-pp)}$ perpetuo mechanica eſt & a quadratura Circuli dependet [ſolo quem dixi caſu excepto ubi $n=1$,] cum, obſervante Fratre, illa, quæ æquationi $dy=p\,dx:\sqrt{(1-pp)}$ reſpondet, ſit alternatim algebraïca: reperio enim ſi $n=2$, applicatam y alterius curvæ fore $=(p+1)\sqrt{(2p-pp)}-\int(dp:\sqrt{(2p-pp)})$; ſi $n=3$, y fore $(pp+p+3)\sqrt{(2p-pp)}-\int(3\,dp:\sqrt{(2p-pp)})$; ſi $n=4$, $y=(p^3+pp+\frac{5}{2}p+\frac{15}{2})\sqrt{(2p-pp)}-\int(\frac{15}{2}dp:\sqrt{(2p-pp)})$, & generaliter $y=(p^{n-1}+p^{n-2}+ap^{n-3}+bp^{n-4}+cp^{n-5}+$ &c. uſque ad $+e)\sqrt{(2p-pp)}-\int(e\,dp:\sqrt{(2p-pp)})$, ſumendo nempe $a=\frac{2n-3}{n-2}$, $b=\frac{2n-3.\,2n-5}{n-2.\,n-3}$, $c=\frac{2n-3.\,2n-5.\,2n-7}{n-2.\,n-3.\,n-4}$ & $e=\frac{2n-3.\,2n-5.\,2n-7\ldots 3.}{n-2.\,n-3.\,n-4\ldots 1.}$

Inſtituta jam collocatione inter æquationem $dy=dx\int\frac{p\,dx}{x}:\sqrt{(1-(\int\frac{p\,dx}{x})^2)}$ a Fratre menſ. Dec. 1697 * exhibitam, & meam $dy=p\,dx:\sqrt{(1-pp)}$ hic traditam, facile eſt animadvertere, utrique convenire non poſſe, niſi cum p ſimplicem poteſtatem denotat ipſius x, qui quidem ipſiſſimus ille caſus eſt, quem ego initio propoſueram: adeo ut ſi ejus ſolutione Frater acquieviſſet, neque extendere Problema latius voluiſ-

* N°. XL. pag. 210. *Tom. I.*

voluiſſet, cæteraque diſſimulaſſet, quod concernit arcum B F, ſive *Maximum* $\int q\,dy$, nunquam certe in paralogiſmi ſuſpicionem apud me incidiſſet; quandoquidem ſolo hoc ſuperpondio, quo ſuam ſolutionem generalem efficere voluit, vitium methodi ſuæ mihi prodidit, ſicque etiam iis, quæ in ſe alias proba erant, pretium ademit.

Dico diſſimulandam fuiſſe omnino partem Problematis, quæ ſpectat arcum D F, quippe quæ de illa profert generaliter fallunt, neque æquatio legitima huc pertinens eſt $dy=dx\int\frac{q\,dx}{x}:\sqrt{(1-(\int\frac{q\,dx}{x})^2)}$ uti per verba ſua, *D'où il eſt évident* &c. innuere videtur; nec etiam $dy=q\,dx:\sqrt{(1-qq)}$; ſed potius juxta Tabulam Æq. 7. $dy=q\,dt:\sqrt{(1+qq)}$; quæ ab illis non modo plane diverſa eſt, etiam quando per q ſimplex denotatur poteſtas ipſius t, verum quoque curvas repræſentat, quæ primam mechanicarum claſſem nunquam excedunt, qualiſcunque ſtatuatatur relatio algebraica inter t & q; præterquam quod omnes rectificationem admittunt, tengenſque anguli, quem ipſæ cum ſuis applicatis conſtitunt, quantitati q ſemper proportionatur. In ſpecie obſervare poſſumus, ſi q potentiam denotat ipſius t, cujus index eſt fractio, pro numeratore habens unitatem, & pro denominatore quemvis numerum n, conſtructionem curvæ ope ſolius Logarithmicæ perfici poſſe, una coordinatarum x & y ſemper exiſtente algebraïca & altera mechanica, idque alternatim juxta ordinem numerorum 1, 2, 3, 4, &c. quos litera n ſignificare poteſt. Reperio enim, ſi hæc denotet numerum imparem fore $y=(q^{n-1}-aq^{n-3}+bq^{n-5}-cq^{n-7}$ &c. uſque ad $\pm e)\sqrt{(1+qq)}$: & ſi parem, $y=(q^{n-1}-aq^{n-3}+bq^{n-5}-cq^{n-7}\ldots\ldots\pm eq)\sqrt{(1+qq)}\mp\int(eq\,d:\sqrt{(1+qq)}$; ſumtis $a=\frac{n-1}{n-2}$, $b=\frac{n-1.\,n-3}{n-2.\,n-4}$, $c=\frac{n-1.\,n-3.\,n-5}{n-2.\,n-4.\,n-6}$, & $e=\frac{n-1.\,n-3.\,n-5\ldots\ldots 2}{n-2.\,n-4.\,n-6\ldots\ldots 1}$ pro priore hypotheſi, vel $e=\frac{n-1.\,n-3.\,n-5\ldots\ldots 3}{n-2.\,n-4.\,n-6\ldots\ldots 2}$ pro poſteriore, ne quid dicam de altera coordinatarum x, quæ eodem modo per q definietur. Sumta igitur recta quadam indeterminata, quæ vocetur q, perſpicuum eſt inveniri per illam poſſe x & y, unam algebraïcè, & per logarithmos alteram, longitudinemque curvæ t ſemper fore $=q^n$

Memoratu porro digna ſunt, ut alia prætercam, Quod una eadem-

que

que curva eſt, quæ [in diverſis poſitionibus] ſimul & *Max.* $\int q\,dy$ & *Max.* $\int (dy : q)$ ſuppeditat, Quod eadem quoque exhibet *Minimum Maximumve* $\int y\,dq$ vel $\int x\,dq$ [*Minimum*, ſi creſcentibus x, y & t, creſcit q; *Maximum* ſi decreſcit]: & Quod denique Catenaria privilegio inter alia non contemnendo plura comprehendit *Maxima Minimaque*; nempe *Maxima* $\int (dy : x)$, $\int t\,dy$, $\int (dy : t)$, $\int y\,dt$, $\int x\,dt$; *Minima* $\int t\,dy$, $\int x\,dt$, $\int y\,dt$, prout ex æquationibus 4, 7, 8, 9, 11 elucet, quæ omnes in caſu $p = x$, & $q = t$ curvæ huic conveniunt. Cæterum non poſſum quin moneam, ſuperfluam Fratrem operam impendiſſe, quærendis radiis curvaturæ ſeu oſculi ſuarum curvarum, quippe quod jam dudum in *Actis Lipſ.* a me factum fuerat; exſcribenda tantum fuiſſent quæ habentur menſ. Jan. p. 4. p. 267 ſeq. cum hæ curvæ nihil ſunt niſi totidem diverſæ ſpecies mearum Elaſticarum.

Hæc ad priorem ſolutionem Fraternam, quæ menſ. Dec. 1697 * comparuit, notanda fuerunt. Quod alteram ſolutionem ſeu prioris potius correctionem menſ. Apr. 1698 † inſertam concernit, notum me rogaſſe Fratrem, ut illum iteratæ reviſioni ſubjiceret, ipſum vero in hunc uſque diem nondum exorari ſe paſſum. Quapropter ejus hic vices ſuppleo, lectoreſque noſtros admoneo, conjecturas has ſecundas quoad *Maximum* $\int p\,dy$, recte quidem, at haud æque feliciter quantum ad *Maximum* $\int q\,dy$ ceſſiſſe, locoque æquationis dq [vocando q quod ipſi eſt v] $= ddy : (dt^2 - dy^2)$ ſcribendum fuiſſe $dq = a\,ddy : dx$, ſumpto elemento non ipſius curvæ dt, ſed ordinatæ dx pro conſtanti; quod ex æquatione ſeptima Tabulæ meæ facile oſtenditur: Æquatio eſt $dy = q\,dt : \surd(aa + qq)$; hinc fit $dx\,[\surd(dt^2 - dt^2)] = a\,dt : \surd(aa + qq)$; adeoque $dy : dx = q : a$, hoc eſt $a\,dy = q\,dx$, & differentiando $a\,ddy = dq\,dx$, ſive $dq = a\,ddy : dx$. Q. E. D.

* N°. XL. pag. 206. *Tom. I.* † N°. XLII. pag. 215. *Tom. I.*

ART. II.

JAC. BERNOULLI
ANALYSIS MAGNI PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI,
in Actis Eruditorum an. 1697. pag. 214 *propoſiti.*

THEOR. I.

IN qualibet Curva, ſi plures applicatæ contiguæ, ſe mutuo ſequantur, quarum prima, ſeu minima, vocetur x', *vel* x *ſimpliciter, proxime major* x'', *tertia* x'''; *quarta* x'''', &c. *erit* $x'' = x + dx$, $x''' = x + 2dx + ddx$; $x'''' = x + 3dx + 3ddx + dddx$; *numeris ſcilicet terminorum ordine exprimentibus coefficientes poteſtatum binomii. Si vero applicatarum maxima dicatur* x, *proxime minor* x'', *ſequens* x''', &c. *erit* $x'' = x - dx$, $x''' = x - 2dx + ddx$, $x'''' = x - 3dx + 3ddx - dddx$; *ſignis inſuper* $+$ & $-$ *alternatim ſe excipientibus, ut in poteſtatibus apotomarum. Non ſecus, ſi applicatarum differentiæ primæ ordine vocentur* dx' [*vel* dx], dx'', dx''', dx'''', &c. *erit* $dx'' = dx \pm ddx$; $dx''' = dx \pm 2ddx + dddx$, $dx'''' = dx \pm 3ddx + 3dddx \pm ddddx$. *Et ſi earundem differentiæ ſecundæ deſignentur per* ddx' [ddx], ddx'', ddx''', &c. *erit* $ddx'' = ddx \pm dddx$, $ddx''' = ddx \pm 2dddx + ddddx$. [$\pm$ *ſignificat* $+$ *in priore &* $-$ *in poſteriore hypotheſi.*] Act. Erud. Lipſ. 1701 Maj. pag. 213.

DEMONSTR.

$x'' = x \pm dx$	$dx'' = dx \pm ddx$	$ddx'' = ddx \pm dddx$
$x''' = x'' \pm dx''$	$dx''' = dx'' \pm ddx''$	
$= x \pm 2dx + ddx$	$= dx \pm 2ddx + dddx$	
$x'''' = x''' \pm dx'''$		
$= x \pm 3dx + 3ddx \pm dddx$		

Q. E. D.

Simili modo, ſi abſciſſæ ab applicatis portiones axis ordine vocentur y' [y], y'', y''', y'''', &c. oſtenditur, fore $y'' = y \pm dy$, $y''' = y \pm 2dy + ddy$, $y'''' = y \pm 3dy + 3ddy \pm dddy$; ut & $dy'' = dy \pm ddy$, $dy''' = dy \pm 2ddy + dddy$. Et ſi reſectæ portiones ipſius Curvæ dicantur z' [z], z'', z''', &c. fore $z'' = z \pm dz$, $z''' = z \pm 2dz + ddz$, &c. nec non $dz'' = dz \pm ddz$, $dz''' = dz \pm 2ddz$

$+dddz$, &c. Intellige, niſi forte differentiæ primæ quantitatis variabilis y vel z ponantur æquales; quo caſu altiores ejus differentiæ omnes evaneſcunt.

Nota, ſupponi, quod creſcente vel decreſcente quantitate variabili, creſcant vel decreſcant ſimul omnes ejus differentiæ: quanquam enim plerumque ſecus accidit, id tamen calculum non turbat, nec aliud infert, quam differentias quaſdam ſuppoſitionis noſtræ eſſe negativas; cum negative creſcere, decreſcere ſit, & contra. Quæ autem differentiæ in quovis particulari Problemate negativæ ſint, quæ poſitivæ, abſoluta demum analyſi definietur.

Theor. II.

TAB. XXXI. N°. CII. Fig. 1.

Data ſit poſitione recta A T, *extraque illam in diverſis diſtantiis puncta quatuor* B, F, G, C, *per quæ tranſeant rectæ* BH, FK, GL, CI *perpendiculares*; & BX, FY, GZ *parallelæ ipſi* AT. *Tum fixis manentibus extremis punctis* B & C, *reliqua* F, G *moveri incipiant ſuper datis poſitione rectis* FK, GL; *hac tamen lege, ut ſumma trium jungentium rectarum* BF + FG + GC *maneat conſtans & eadem; erit fluxio momentanea puncti* F *ad fluxionem momentaneam puncti* G, *hoc eſt, incrementum vel decrementum rectæ* KF *ad decrementum vel incrementum rectæ* LG; *ut differentia inter duo priora ad differentiam inter duo poſteriora trium ſolidorum ſub* CZ, BF, FG; *ſub* GY, BF, GC; & *ſub* FX, FG, GC.

Ut Theorema exprimatur ſymbolice, ſunto

$$\begin{array}{l|l|l} BX = l & FX = p & BF = s \\ FY = m & GY = q & FG = t \\ GZ = n & CZ = r & GC = u \end{array}$$

nec non

$$\begin{array}{rl|l} & HB = b & \text{adeoque} \\ KF = & f = b + p & df = dp \\ LG = & g = b + p + q & dg = dp + dq \end{array}$$

Dico fore $df : -dg = rst - qsu : qsu - ptu$.

Demonstr.

Partim propter triangula rectangula BXF, FYG, GCZ; partim ob puncta fixa B & C, ac per hypotheſin, habentur ſequentes ſex æqualitates

æqualitates $BX^2 + FX^2 = BF^2$ id eſt $ll + pp = ss$

$$\begin{array}{lll} FY^2 + GY^2 = FG^2 & \ldots\ldots & mm + qq = tt \\ GZ^2 + CZ^2 = GC^2 & \ldots\ldots & nn + rr = uu \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} BX + FY + GZ = \text{conſt.} & l + m + n = \text{conſt.} \\ FX + GY + CZ = \text{conſt.} & p + q + r = \text{conſt.} \\ BF + FG + GC = \text{conſt.} & s + t + u = \text{conſt.} \end{array}$$

unde differentiando, emergunt pro fluxu indeterminato punctorum F G æquationes

$$\begin{array}{ll} \text{I. } l\,dl + p\,dp = s\,ds & \text{IV. } dl + dm + dn = 0 \\ \text{II. } m\,dm + q\,dq = t\,dt & \text{V. } dp + dq + dr = 0 \\ \text{III. } n\,dn + r\,dr = u\,du & \text{VI. } ds + dt + du = 0 \end{array}$$

pro quibus, in caſu hujus Theorematis, ob fluxum punctorum F, G, in rectis KF, LG [qui rectas BX, BY, GZ, ſeu l, m, n, invariatas relinquit, ipſaſque proin dl, dm, dn cum tota æquatione IV evaneſcere facit] ſcribendæ

$$\begin{array}{ll} \text{I. } p\,dp = s\,ds & \\ \text{II. } q\,dq = t\,dt & \text{V. } dp + dq + dr = 0 \\ \text{III. } r\,dr = u\,du & \text{VI. } ds + dt + du = 0 \end{array}$$

ſic ut ſex tantum differentialia, & quinque æquationes remaneant, quarum beneficio quatuor ex illis omnifariam tolli, & reliquorum duorum ratio ad invicem inveniri poteſt. Nam, exempli gratia, per VI habetur $du = -ds - dt$, & per V, $dr = -dp - dq$; qui valores in III loco dr & du ſubſtituti faciunt $dt = (rdp + rdq - uds) : u$; & hic loco dt ſurrogatus in II, producit $ds = (rtdp + rtdq - qudq) : tu$; qui denique poſitus pro ds in I, exhibet, $(ptu - rst)\,dp = (rst - qsu)\,dq$; unde $dp : dq = rst - qsu : ptu - rst$, nec non componendo $dp : dp + dq$ [hoc eſt, $df : dg$] $= rst - qsu : ptu - qsu$, ſeu, variatis ſignis ſecundi & quarti termini, $df : -dg = rst - qsu : qsu - ptu$. Q. E. D.

Theor. III.

Ponantur, quæ in præced. rurſumque ſumma rectarum BF + FG + GC *conſtanter maneat eadem; ſed fiuant puncta* F, G *in peripheriis circulorum ſuper punctis fixis* B, C *deſcriptorum, ſecum ducentia rectas* KF, LG: *erit incrementum momentaneum rectæ* KF *ad decrementum moment. rectæ* LG, *aut viciſſim decrementum illius ad incrementum hujus, ut differentia inter duo priora ad differentiam inter duo poſteriora trium ſolidorum ſub* BX, FY, CZ; *ſub* BX, GZ, GY, & *ſub* FY, GZ, FX, *hoc eſt in ſymbolis, erit* $df : -dg = lmr - lnq : lnq - mnp$.

 DE-

DEMONSTR.

Durante fluxu punctorum F, G in peripheriis circa B, C; cum invariatæ maneant singulæ BF, FG, GC, seu s, t, u; evanescantque adeo ds, dt, du, una cum æquatione VI Theor. præced. cæteræ ibidem pro fluxu punctorum indeterminato repertæ æquationes ad has quinque reducuntur

I. $ldl + pdp = 0$ IV. $dl + dm + du = 0$
II. $mdm + qdq = 0$ V. $dp + dq + dr = 0$
III. $ndn + rdr = 0$

Per V habetur $dr = -dp - dq$, & per IV, $dn = -dl - dm$; quibus valoribus substitutis in III fit $dm = (-rdp - rdq - ndl) : n$: & hinc in II, $dl = (-mrdp - mrdq + nqdq) : mn$, indeque tandem in I, $(mnp - lmr)\, dp = (lmr - lnq)\, dq$; quare $dp : dq = lmr - lnq : mnp - lmr$, & componendo $dp : dp + dq\ [df : dg] = lmr - lnq : mnp - lnq$; seu $df : -dg :: lmr - lnq : lnp - mnp$. Q. E. D.

THEOR. IV.

Intelligantur in qualibet Curva ABD *quatuor ordinatim applicatæ contiguæ* HB, KF, LG, IC, *intervallulis æqualibus & infinite parvis* HK, KL, LI *discretæ, & intercipientes Curvæ portiunculam* BFGC, *quarumque [si vis] prima seu minima* HB *vocetur* x, *sicut* AH, y & AB, z. *Tum vero mutetur paululum curvedo portiunculæ* BEGC *fluxu punctorum* F, G *super applicatis suis* KF, LG; *sic tamen ut longitudo particulæ inter extrema puncta fixa* B, C *non mutetur. Erit incrementum, aut decrementum applicatæ* KF *ad decrementum, vel incrementum applicatæ* LG, *ut* $+ dz^2\, ddx + dz^2\, dddx - dxddx^2$ *ad* $+ dz^2\, ddx + 2dxddx^2$.

DEMONSTR.

Casus hic est specialis Theorematis secundi, a quo non differt, nisi quod hic, ob infinite propinqua puncta B, F, G, C, rectæ BX, FX BF, &c. seu l, p, s, cæteræque considerentur ut infinitæ parvæ, abeantque, res-

respectu Curvæ, in differentialia seu elementa dy, dx, dz, &c. Unde, per Theorema I. quantitates hæ fient,

$$\begin{aligned} &BX \text{ seu } l = dy' = dy \\ &FY \ \ldots\ m = dy'' = dy + ddy \\ &GZ \ \ldots\ n = dy''' = dy + 2ddy + dddy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &FX \text{ seu } p = dx' = dx \\ &GY \ \ldots\ q = dx'' = dx + ddx \\ &GZ \ \ldots\ r = dx''' = dx + 2ddx + dddx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &BF \text{ seu } s = dz' = dz \\ &FG \ \ldots\ t = dz'' = dz + ddz \\ &GC \ \ldots\ u = dz''' = dz + 2ddz + dddz \end{aligned}$$

Solida vero ex illis rst, qsu, ptu, quorum differentiæ, vi Theorematis secundi, quæsitum exhibent, multiplicatione inveniuntur, ut sequitur

$$\begin{aligned} r &= dx + 2ddx + dddx \\ st &= dz^2 + dzddz \\ \hline rst &= dxdz^2 + 2dz^2\, ddx + dz^2\, dddx \\ &\quad + dxdzddz + 2dzddxddz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= dz + 2ddz + dddz \\ qs &= dxdz + dzddx \\ \hline qsu &= dxdz^2 + 2dxdzddz + dxdzdddz \\ &\quad + dz^2\, ddx + 2dzddxddz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= dz + 2ddz + dddz \\ pt &= dxdz + dxddz \\ \hline ptu &= dxdz^2 + 3dxdzddz + dxdzdddz \\ &\quad + 2dxddz^2. \end{aligned}$$

& facta subtractione, eorum differentiæ

$$rst - qsu = + dz^2\, ddx + dz^2\, dddx - dxdzddz - dxdzdddz \quad \Big| \quad qsu - ptu = dz^2\, ddx + 2dzddxddz - dxdzddz - 2dxddz^2$$

ad quas abbreviandas eliminari possunt ddz & $dddz$, hoc pacto: Quoniam $dz^2 = dy^2 + dx^2$, atque ob æquidistantes, ex hypothesi, appliplicatas, dy eſt conſtans; ſumendo differentias habetur $dzddz = dxddx$; iterumque differentiando $dzdddz + ddz^2 = dxdddx + ddx^2$, hoc eſt, $dzdddz = dxdddx + ddx^2 - ddz^2 =$ [delendo ddz^2] $dxdddx + ddx^2 - dx^2\, ddx : dz^2$; quibus valoribus in locum $dzddz$ & $dzdddz$, nec non dy^2 in locum $dz^2 - dx^2$ ſuffectis, exſurgit

$$rst - qſu = + dy^2 ddx + dy^2 dddx - dxdy^2 ddx^2 : dz^2 \quad \Big| \quad qſu - ptu = dy^2 ddx + 2dxdy^2 ddx^2 : dz^2$$

unde conſequitur, quod Increm. KF: Decr. LG: [$= rst - qſu : qſu - ptu$, per Theor. II] $= dy^2\, ddx + dy^2\, dddx - \dfrac{dxdy^2\, ddx^2}{dz^2} : dy^2\, ddx + \dfrac{2dxdy^2\, ddx^2}{dz^2} =$ [facta communi multiplicatione per $dz^2 : dy^2$] $dz^2\, ddx + dz^2\, dddx - dxddx^2 : dz^2\, ddx + 2dxddx^2$. Q. E. D.

Nota, quantitates r, s, t, &c. earumque producta conſtare diverſorum ordinum aut claſſium differentialibus, quorum poſteriora prioribus gradatim ſunt incomparabiliter minora; quo circa ne permiſceantur, opera danda in ſumendis ſolidis, ut quæ ſunt ejuſdem ordinis, interque ſe ſe comparari poſſunt, in eodem ſibi articulo reſpondeant. Pergendum autem eſt in operatione ad tertium uſque ordinem, non ultra; cum primi & ſecundi ordinis quantitates omnes in calculi progreſſu ſe mutuo deſtruant; quæ vero tertium ordinem excedunt, ob contemnendam priorum reſpectu parvitatem tuto negligantur; quemadmodum etiam ſupra factitatum videmus, ubi producta ex $dzddz$ per $dddx$, ex $dzddx$ & $dxddz$ per $dddz$ in calculo compendioſe inſuper habentur.

THEOR. V.

Sunto in qualibet Curva quatuor applicatæ contiguæ HB, KF, LG, IC, *quarum rurſum prima & minima* HB *vocetur* x, AH, y, & AB, z; *quæque intercipiant tres curvæ particulas æquales & infinite parvas* BF, FG, GC. *Mutetur vero paululum curvedo harum partionum rotatione extremarum* BF, GC *circa puncta fixa* B, C, *ſic temperata, ut nec ſingulæ nec univerſæ longitudine varient. Erit incrementum, vel decrementum applicatæ* KF, *ad decrementum vel incrementum applicatæ* LG, *ut* $dy^2\, ddx + dy^2\, dddx + dxddx^2$ *ad* $dy^2\, ddx - 2dxddx^2$.

DEMONSTR.

Caſus eſt Theorematis tertii, abeuntibus hic iterum rectis BX, FX, BF &c. ſeu l, p, s, cæteriſque in infinite parva ſeu differentialia dy, dx, dz, &c. Quapropter eorum ſolida lmr, lnq, mnp, & ſolidorum differentiæ, quæ per Theorema dictum quæſitam rationem manifeſtant, eodem modo reperiuntur, quo in præcedenti.

En operationem.

$$r = dx + 2ddx + dddx$$
$$lm = dy^2 + dyddy$$

$$lmr = dxdy^2 + 2dy^2\, ddx + dy^2\, dddx + dxdyddy + 2dyddxddy$$

$$n = dy + 2ddy + dddy$$
$$lq = dxdy + dyddx$$

$$lnq = dxdy^2 + 2dxdyddy + dxdydddy + dy^2\, ddx + 2dyddxddy$$

$$n = dy + 2ddy + dddy$$
$$mp = dxdy + dxddy$$

$$mnp = dxdy^2 + 2dxdyddy + dxdydddy + dxdyddy + 2dxddy^2$$

atque adeo

$$lmr - lnq = + dy^2\, ddx + dy^2 dddx - dxdyddy - dxdydddy \quad \Big| \quad lnq - mnp = + dy^2\, ddx + 2dyddxddy - dxdyddy - 2dxddy^2$$

Porro eliminari poſſunt ddy & $dddy$ hoc modo: Conſideretur $dy^2 = dz^2 - dx^2$, ipſumque dz eſſe conſtans, ob æquales ſuppoſitas Curvæ particulas; unde bis differentiando fit primo $dyddy = - dxddx$, deinde $dydddy = - dxdddx - ddx^2 - ddy^2 =$ [ſublato ddy^2] $- dxdddx - ddx^2 - dx^2\, ddx^2 : dy^2$; his namque in locum $dyddy$ & $dydddy$, ipſoque dz^2 in locum $dx^2 + dy^2$ ſuccenturiatis, provenit

$$lmr - lnq = dz^2 ddx + dz^2\, ddx + dxdz^2 ddx^2 : dy^2 \quad \Big| \quad lnq - mnp = dz^2 ddx - 2dxdz^2 ddx^2 : dy^2$$

e quo colligitur, quod Increm. KF: Decrem. LG [$= lmr - lnq : lnq - mnp$, per Theor. III] $= dz^2\, ddx + dz^2\, dddx + \dfrac{dx.dz^2\, ddx^2}{dy^2} : dz^2\, ddx - \dfrac{2dxdz^2\, ddx^2}{dy^2} =$ [æque multiplicando per $dy^2 : dz^2$] $dy^2\, ddx + dy^2\, dddx + dxddx^2 : dy^2\, ddx - 2dxddx^2$. Q. E. D.

THE-

THEOR. VI.

Si ſint duæ quantitates indeterminatæ, minor f, *& hanc augmento infinite parvo ſuperans* g; *rurſumque aliæ duæ per has ſimiliter expreſſæ, vel datæ* F *&* G; *ſitque* ad F $=$ h d f, *&* ad G $=$ i d g: *Dico, fore* i $=$ h $+$ d h.

DEMONSTR.

Ponatur exempli gratia $F = \sqrt{(aa + ff)}$, eique ſimilis $G = \sqrt{(aa + gg)}$ erit *ad* F : df ſeu $h = af : \sqrt{(aa + ff)}$, & *ad* G : dg ſeu $i = ag : \sqrt{(aa + gg)}$. Patet autem, has quantitates $af : \sqrt{(aa + ff)}$ & $ag : \sqrt{(aa + gg)}$ cum & ipſæ ſimiliter ſint affectæ, eidem curvæ applicabiles eſſe, prout ejus abſciſſæ dicuntur f vel g: quoniam igitur f & g ex hypoth. denotant abſciſſas incremento infinite parvo differentes, erunt reſpectivæ earum applicatæ h & i ſibimet contiguæ & proximæ, ac proinde $i = h + dh$. Q. E. D.

THEOR. VII.

Si curva A B D *inter omnes ſibi Iſoperimetras iiſdemque punctis* A, D *interceptas curvas privilegio cujuſdam* Maximi Minimive *potiatur, quælibet ejus particula* B F G C *eodem quoque præ aliis omnibus ſibi æqualibus, interque puncta* B *&* C *extenſis lineis, privilegio gaudebit.*

DEMONSTR.

Gaudeat enim alia æqualis lineola BEC hoc privilegio, ut *Maximum* illud *Minimumve* contineat vel producat: majus ergo vel minus continebit aut producet BEC quam BFGC, additoque communiter quod continetur vel producitur ab ipſis A B & C D, majus minuſve continebit aut producet tota A B E C D quam tota A B F G C D. Non ergo huic competit privilegium *Maximi Minimive*; contra hypotheſin.

Nota; ſenſus Theorematis vel Demonſtrationis ejus videtur paulo obſcurior, nec ſatis determinatus; ſed planior fiet infra ex applicatione; quod moneo, ne quis moroſior propoſitionem ſtatim ſugillet, cui ſenſum fortaſſe ambiguum aut falſum affingi poſſe viderit.

Hactenus generalia

Sequuntur nunc ipſa Problemata, ubi pro ſpecialibus ſingulorum æquationibus inveniendis nihil jam ſupereſt aliud, quam ut ratio incrementi vel decre-

decrementi rectarum K F, L G ex ſpeciali cujuſque Problematis natura in aliis adhuc terminis reperiatur; cui negotio facilitando vel elementa dy, ſeu HK, KL, LI; vel elementa dz ſeu BF; FG, GC, ponenda ſunt conſtantia & æqualia; prout in quovis Problemate hoc vel illud ſimplicius videbitur. Quanquam enim id rem ipſam ſpectando ſit indifferens, ſæpe tamen unum quam alterum operationem haud paulo faciliorem reddere poteſt.

PROBLEMA I.

Datis poſitione rectis normalibus AT, AM, *& Curva quacunque* AN; *quæritur ex omnibus Figuris Iſoperimetris ſuper communi baſe* AT *& inter eadem puncta* A, D *conſtitutis, illa* A B D, *e cujus ſingulis punctis* B *ſi ducantur binæ rectæ* BHP, BMN, *normales ipſis* AT, AM; *ac ſtatuatur pars prioris* HP $=$ MN; *ut ſpatium inde ortum* A T V *omnium a cæteris Iſoperimetris ſimiliter genitorum ſpatiorum ſit Maximum Minimumve.*

ANALYSIS.

Sit Curva optata A B D, & *Maximum Minimumve* quod ab illa producitur, faciendo ubique HP $=$ MN, ſpatium ATV. Intelligantur in æqualibus interſtitiolis HK, KL, LI, quorum ſingula dicantur l, quatuor applicatæ contiguæ, HB $= b$, KF $= f$, LG $= g$, IC $= c$, totidemque aliæ per has ſimiliter expreſſæ, propterea que denotandæ per majuſculas, HP $= B$, KR $= F$, LS $= G$, IQ $= C$. Erit, per Theor. VII, ſpatiolum PHIQ, hoc eſt HK in HP $+$ KL in KR $+$ LI in LS, ſeu $lB + lF + lG =$ *Maximo Minimove*; adeoque ex natura *Maximi Minimi*que ejus differentiale $l\,dF + l\,dG = 0$, ſeu, dividendo per l, $dF + dG = 0$. [Ob fluxum enim punctorum F, G, quem ſuper rectis KF, LG, fieri concipio, ſolæ applicatarum mediæ KF, LG, KR, LS, ſeu f, g, F, G, longitudinem mutant, extremis HB, IC, HP, IQ, ſeu b, c, B, C, conſtanter iiſdem manentibus.] Ponatur $dF = h\,df : a$ & $dG = i\,dg : a$, erit $h\,df + i\,dg = 0$; unde proportio, $df : -dg =$ [per Theor VI] $h + dh : h$; & quia per Theor. IV generaliter quoque habetur $df : -dg = dz^2\,ddx + dz^2\,dddx - dx\,ddx^2 : dz^2\,ddx + 2dx\,ddx^2$, ſequitur fore, $h + dh : h = +dz^2\,dddx - 3dx\,ddx^2 : +dz^2\,ddx + 2dx\,ddx^2$, unde extremis & mediis in ſe invicem ductis [omiſſo tamen, quod cæterorum reſpectu evaneſcit, producto $2\,dh\,dx\,ddx^2$] reſultat æquatio ſpecialis noſtri Problematis $+h\,dz^2\,dddx - 3h\,dx\,ddx^2 = +dh\,dz^2\,ddx$, quæ, ut apparet, ad tertias uſque differentias aſcendit. Hanc autem ego porro ad ſecundas, indeque ad primas, ſequente analyſi reduco:

Primo, loco $dxddx$ reſtituo $dzddz$ [hoc fini, ut tot habeantur quantitates h, dz, ddx, una cum ſuis differentialibus dh, ddz, $dddx$, quot ſunt æquationis membra] eritque $hdz^2 dddx - 3hdzddxddz = dhdz^2 ddx$; deinde tranfero omnia ad unam partem, atque divido per dz, ut ſit $hdzdddx - 3hddxddz - dhdzddx = 0$. Jam fingo æquationem $h^m dx^n ddx^r =$ conſt. elevatis tribus quantitatibus h, dz, ddx ad poteſtates ignotas, ſed ex progreſſu determinandas, m, n, r; factaque differentiatione obtineo $rh^m dz^n ddx^{r-1} dddx + nh^m dz^{n-1} ddx^r ddz + mh^{m-1} dhdz^n ddx = 0$, quæ diviſione per $h^{m-1} dz^{n-1} ddx^{r-1}$ contrahitur ad hanc $rhdzdddx + nhddxddz + mdhdzddx = 0$; hæc vero terminotenus collata cum æquatione Problematis $hdzdddx - 3hddxddz - dhdzddx = 0$, exhibet $r = 1$, $n = -3$, & $m = -1$: unde loco fictæ æquationis $h^m dz^n ddx^r =$ conſt. habetur $ddx : hdz^3 =$ Conſt. [ex lege homogeneorum & propter conſtans dy] $\pm 1 : aady$, æquatio nempe differentialis ſecundi gradus; ad quam ulterius deprimendam pono rurſum æquationem $adx = tdy$, e qua debite tractata fluunt ſequentia, $ddx = dtdy : a$, $aadx^2 = ttdy^2$, & [addito $aady^2$] $aadx^2 + aady^2$, id eſt, $aadz^2 = (aa + tt) dy^2$ & $dz = dy \sqrt{(aa + tt)} : a$. Hi vero valores loco ddx & dz in æquatione inventa $ddx : hdz^3 = \pm 1 : aady$ ſubſtituti producunt $aadt : (aa + tt) \sqrt{(aa + tt)} = \pm hdy : aa = \pm hdx : at$, ſeu [inſtituta multiplicatione per $\pm t$] $\pm aatdt : (aa + tt) \sqrt{(aa + tt)} = hdx : a =$ [propter eandem f & x] $hdf : a =$ [per hyp.] dF, unde facta ſummatione acquiritur, partim $aa : \sqrt{(aa + tt)}$, partim $a - aa : \sqrt{(aa + tt)} = F$, hoc eſt, applicatæ KR, ſeu huc contiguæ HP aut MN; quam ſi deinceps vocare lubeat p, habebitur tum $p = aa : \sqrt{(aa + tt)}$, tum $p = a - aa : \sqrt{(aa + tt)}$; unde viciſſim & $t = a \sqrt{(aa - pp)} : p$, & $t = a \sqrt{(2ap - pp)} : (a - p)$. Atque hi tandem valores, in poſita æquatione $adx = tdy$, in locum t ſuffecti exhibent partim $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$, partim $dy = (a - p) dx : \sqrt{(2ap - pp)}$, pro æquationibus ſimpliciter differentialibus Curvarum, quæ Maximum Minimumve ſpatium ATV [$\int pdy$] ſuppeditant. Quod quidem principaliter inveniendum erat.

Utri vero harum Curvarum Maximum, & utri Minimum $\int pdy$ conveniat, ſic indagabimus: Prior æquatio eſt $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$; unde quadrando, $dy^2 = ppdx^2 : (aa - pp)$, & [addendo dx^2] $dy^2 + dx^2$, ſive $dz^2 = aadx^2 : (aa - pp)$; & extrahendo radicem, $dz = adx : \sqrt{(aa - pp)}$; quare $dy : dz = p : a$; hoc eſt, ſumta conſtante dz, dy proportionatur ipſi p. Ergo ſi creſcentibus x creſcere ſupponantur p, creſcent una quoque ipſa dy, quod indicium eſt, Curvam æquationi huic reſpondentem verſus axem AT cavam eſſe. Sit illa [Fig. 2.] ABC, & rotetur circa chordam AC, gignens ex oppoſito aliam ſibi Iſoperimetron AEC, ac utrique communis applicetur ordinata BEF. Quoniam igitur ex hyp. p majoris applicatæ x, ſeu BF, major eſt ipſa p minoris applicatæ EF; erit quoque pdy illius major quam pdy hujus; ac proinde omnia pdy ſeu $\int pdy$ Curvæ ABC majora omnibus pdy Curvæ AEC; quo circa $\int pdy$ Curvæ ABC non poteſt eſſe *Minimum*. Supereſt ergo, cum ſit alterutrum, ut ſit *Maximum*. Quod ſi creſcentibus x decreſcant p, decreſcent quoque dy, & Curva verſus axem AT convexa erit: ſit hæc AEC, ejuſque rotatu circa chordam AC gignatur ex adverſo alia Iſoperimetros ABC, & utrique applicetur BEF; unde cum nunc ex hyp. p minoris applicatæ EF reciproce major ſit ipſa p majoris applicatæ BF, erit quoque pdy illius major quam pdy hujus; omniaque pdy Curvæ AEC majora omnibus pdy Curvæ ABC: quare $\int pdy$ Curvæ AEC nequit eſſe *Minimum*; rurſum igitur *Maximum* ut ſit, neceſſe. E quibus conſtat, quod curva prioris æquationis $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$ ſemper Maximum complectatur $\int pdy$, utcunque ſe habeat p reſpectu x. Eodemque etiam modo oſtendi poſſet, quod Curva poſterioris æquationis $dy = (a - p) dx : \sqrt{(2ap - pp)}$ in omni viciſſim caſu Minimum $\int pdy$ continet. Sed cui Lectoris uſui repetita crambe?

PROBLEMA II.

Quæritur ex omnibus Figuris Iſoperimetricis, ſuper communi baſe AT *&* *inter eadem puncta* A, D *conſtitutis, illa* ABD, *cujus ſingulis applicatis* BH *ſi reſpondeant aliæ* HP, *datam habentes relationem ad abſciſſas ipſius Curvæ portiones* AB; *ſpatium hinc ortum* ATV *omnium a cæteris Iſoperimetris ſimiliter genitorum ſpatiorum ſit Maximum Minimumve.* TAB. XXXI. N°. CII. *Fig.* 1.

ANALYSIS.

Sit rurſum, ut nuper, $HK = KL = LI = l$; inſuperque

portio Curvæ AB $= \beta$	adeoque
$AF = AB + BF = \beta + s \ldots = \phi$	$d\phi = ds$
$AG = AF + FG = \beta + s + t = \gamma$	$d\gamma = ds + dt$

& per has ſimiliter datæ, $HP = B$, $KR = \Phi$, $LS = \Gamma$. Quoniam igitur

igitur ſpatium ATV ex hyp. eſt *Maximum Minimumve*, erit quoque tale, per Theor. VII, ejus portio PHIQ, hoc eſt, HK in HP + KL in KR + LI in LS ſive $lB + l\phi + l\Gamma$; ac proinde ex natura *Maximi Minimive* ejus differentiale $l d\phi + l d\Gamma = 0$, ſeu $d\phi + d\Gamma = 0$ [concipiendo nempe rurſum, mutari curvedinem fluxu punctorum F, G ſuper applicatis KF, LG, quo ſolæ AF, AG, & per has datæ KR, LS mutantur, reliquis AB & HP non mutatis.] Ponatur $d\phi = bd\Phi : a$ & $d\Gamma = id\gamma : a$, fiet $bd\Phi + id\gamma = 0$, ſeu $bds + ids + idt = 0$, ſive [loco ds & dt introducendo dp & dq, per duas primas æquationes Theor. II] $bpdp : s + ipdp : s + iqdq : t = 0$, ſive, ſublatis fractionibus, $bptdp + iptdp + iqsdq = 0$; & æqualitate in proportionem verſa, $dp : dq = - iqs : bpt + ipt$; componendoque, $dp : dp + dq\ [= df : dg] = - iqs : bpt + ipt - iqs$, ac denique mutatis ſignis ſecundi & tertii termini, $df : - dg = iqs : bpt + ipt - iqs$. Surrogetur jam loco i, per Theor. VI, $b + db$; & quantitates p, q, s, t vertantur, per Theor. I, in differentialia [ut factum in demonſtr. Theor. IV, niſi quod in ſumendis ſolidis ultra ſecundum differentialium ordinem nunc progredi non eſt neceſſe] hoc pacto:

$$\begin{array}{l|l} qs = dxdz + dzddx & pt = dxdz + dxddz \\ i = b + db & b + i = 2b + db \\ \hline iqs = bdxdz + bdzddx + dbdxdz & bpt + ipt = 2bdxdz + 2bdxddz + dbdxdz \end{array}$$

& facta ſubtractione

$$bpt + ipt - iqs = bdxdz + 2bdxddz - bdzddx$$

quocirca

$$df : - dg = bdxdz + bdzddx + dbdxdz : bdxdz + 2bdxddz - bdzddx$$

ſed per Theor. IV.

$$df : - dg = dz^2 ddx + dz^2 dddx : dz^2 ddx + 2dxddx^2 - dxddx^2$$

quare

$$bdxdz + bdzddx + dbdxdz : bdxdz + 2bdxddz - bdzddx = dz^2 ddx + dz^2 dddx : dz^2 ddx + 2dxddx^2 - dxddx^2$$

convertendoque

$$bdxdz + bdzddx + dbdxdz : + 2bdzddx - 2bdxddz + dbdxdz = dz^2 ddx + dz^2 dddx : + dz^2 dddx - dxddx^2 - 3dxddx^2$$

ſeu

ſeu [neglectis, compendii gratia, in primo & tertio termino differentialibus ſecundi ordinis, ceu nulli amplius uſui futuris, cæteriſque per dz diviſis]

$$bdx : + 2bdzddx - 2bdxddz + dbdxdz = dzddx : + dz^2 dddx - 3dxddx^2;$$

unde ductis in ſe invicem extremis & mediis reſultat, $bdxdz^2 dddx - 3bdx^2 ddx^2 = 2bdz^2 ddx^2 - 2bdxdzddxddz + dbdxdz^2 ddx$, hoc eſt, [compactis in unum 2do. & 4to. terminis ſubſtitutione $dxddx$ loco $dzddz$] $bdxdz^2 dddx = 2bdz^2 ddx^2 + bdx^2 ddx^2 + dbdxdz^2 ddx$; quæ eſt æquatio ſpecialis hujus Problematis, ad tertias itidem differentias aſſurgens, quam ſimili, qua in præced. Problemate uſus fui, analyſi ad has duas æquationes ſimplices $dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$, & $dy = (a - q) dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$ reduco. Operationem ipſam, ne tædio ſim, omitto; ſed veritatem aſſerti confirmabit omiſſæ analyſi haud ingrata, nec inutili, varietate ſuccenturianda ſyntheſis. Meminerit ſolum Lector, dy rurſum eſſe elementum conſtans, Curvamque AB vel AF, quæ ſupra erat Φ, jam vocari z; & datam per ipſam HP vel KR, quæ dicebatur ϕ, nunc appellari q; ſic ut loco $d\phi = bd\Phi : a$ deinceps habeatur $dq = bdz : a$.

Æq. I. $dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$

eſto compendii gr. $\sqrt{(aa + qq)} = s$

$$\begin{aligned} dy &= qdz : s \\ dz &= sdy : q \\ dx &= ady : q \\ dq &= bdz : a = bsdy : aq \\ ds &= qdq : s = bdy : a \\ ddx &= - adydq : qq = - bsdy^2 : q \end{aligned}$$

$$dddx \left\{ \begin{array}{l} + 3bsdy^2 dq : q^4 \\ - bdy^2 ds : q^3 \\ - sdy^2 db : q^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + 2bbssdy^3 : aq^5 \\ + abbdy^3 : q^5 \\ - sdy^2 db : q^3 \end{array} \right.$$

quibus in æquatione inventa ſubſtitutis fit

$$bdxdz^2 dddx = \left\{ \begin{array}{l} + 2b^3 s^4 dy^6 : q^8 = 2bdz^2 ddx^2 \\ + aab^3 ssdy^6 : q^8 = bdx^2 ddx^2 \\ - abs^3 dy^5 db : q^6 = dbdxdz^2 ddx \end{array} \right.$$

Æq. II. $dy = (a - q) dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$

ſit brev. ergo $\sqrt{(bb - aa)} = c$, $a - q = r$, $\sqrt{(bb - 2aq + qq)} = s$

$$\begin{aligned} dy &= rdz : s \\ dz &= sdy : r \\ dx &= cdy : r \\ dr &= - dq = - bdz : a = - bsdy : ar \\ ds &= - rdq : s = - bdy : a \\ ddx &= - cdydr : rr = cbsdy^2 : ar^3 \end{aligned}$$

$dddx =$

$$dddx = \left\{ \begin{array}{l} -3chsdy^2\,dr : ar^4 \\ +chdy^2\,ds : ar^3 \\ +csdy^2\,dh : ar^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +2chhssdy^3 : aar^5 \\ +c^3hhdy^3 : aar^5 \\ +csdy^2\,dh : ar^3 \end{array} \right.$$

quibus in æquatione inventa ſubſtitutis, fit

$$hdxdz^2\,dddx = \left\{ \begin{array}{l} +2cch^3\,s^4\,dy^6 : aar^8 = 2hdz^2\,ddx^2 \\ +c^4\,h^3\,ssdy^6 : aar^8 = hdx^2\,ddx^2 \\ -cchc^3\,dy^5\,dh : ar^6 = dhdxdz^2\,ddx. \end{array} \right.$$

Cum igitur utrobique in valores identicos deſinant quantitates $hdxdz^2\,dddx$ ab una; & tres reliquæ $2hdz^2\,ddx^2$, $hdx^2\,ddx^2$ & $dhdxdz^2\,ddx$ ab altera parte inventæ æquationis; colligitur, Curvas poſitarum æquationum $dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$ & $dy = (a - q)\,dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$ illas ipſas eſſe, quæ deſiderabantur, quibuſque Maximum Minimumve $\int qdy$ ineſt. Horum vero utrum utri Curvæ tribuendum, eodem quo nuper ratiocinio perquiro: Primo enim conſidero, an creſcentibus z creſcant decreſcantve ipſa q; deinde, an Curva verſus axem convexa ſit an concava; ac tertio, ſi circa chordam ſuam rotetur Curva propoſita, & ex adverſo producat aliam æqualem & ſimilem, an hæc majus habeat qdy, an minus: nam ſi majus, propoſitæ $\int qdy$ *Minimum* eſt, non *Maximum*; ſin minus, contra. Hoc pacto reperitur, Maximum $\int qdy$ ineſſe Curvæ $dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$, & Minimum $\int qdy$ alteri $dy = (a - q)\,dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$. Quæ erant invenienda.

PROBL. III.

Si Linea flexilis ABD *in tota ſua longitudine ponderibus utcunque ſit gravata, & ab extremitatibus ſuis* A, D *libere ſuſpenſa; quæritur inter infinitas curvedines, quas hæc linea ſucceſſive induere poteſt, illa quæ faciat, ut centrum commune gravitatis ponderum a baſe* AT *plurimum minimumve diſtet, hoc eſt, [quia centrum commune gravitatis ponderum in ſe agentium naturaliter locum infimum affectat] quæruntur omnis generis Funiculariæ, ſeu Catenariæ.*

ANALYSIS.

Aſſumtæ intelligantur in Curva quæſita ABD tres vicinæ particulæ æquales & infinite parvæ BF, FG, GC; & ſint ut ſupra HB $= b$, KF $= f$, LG $= g$, nec non portio Curvæ AB $= z$, & datum per z gravamen ejus $= q$; erit, per Theor. I, gravamen elementi BF $= dq$, elementi FG $= dq + ddq$, & elementi GC $= dq + 2ddq$

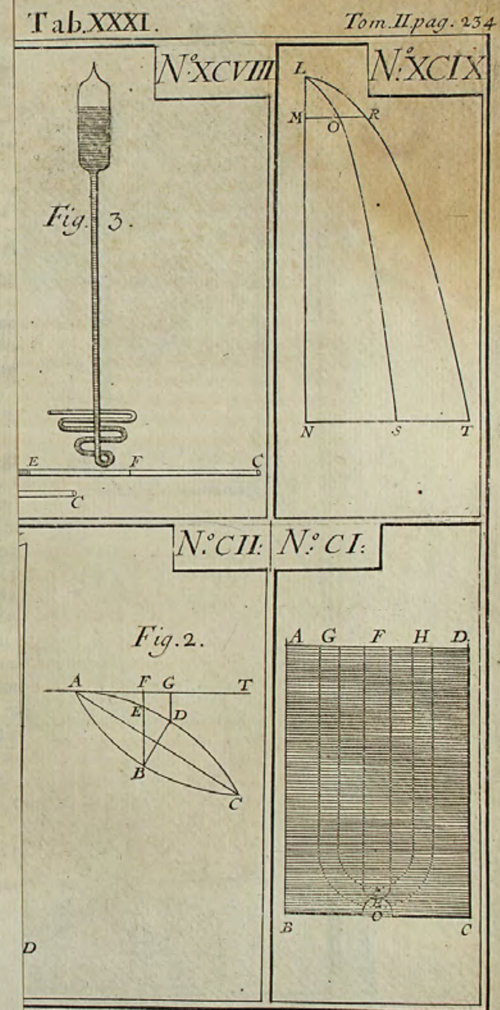
$2ddq$ [omiſſo $dddq$, quod hic eſt ſuperfluum,] unde momenta horum ponduſculorum reſpectu rectæ AT $= bdq + f(dq + ddq) + g(dq + 2ddq)$. Moveantur paululum puncta F & G in peripheriis circa puncta fixa B, C, ſic tamen ut BF, FG, GC maneant invariatæ longitudinis: manebunt quoque ponduſcula iis appenſa eadem, ut & applicata HB, ſolæque variabunt KF & LG; quod differentiale momentorum efficit $df(dq + ddq) + dg(dq + 2ddq)$. Sed hoc ex natura *Maximi*, & *Minimi*, debet æquari nihilo; cum enim diſtantia centri gravitatis ponderum a baſe AT, ob conſtantem ponderum ſummam, proportionetur ſummæ momentorum, ſequitur ex hyp. ſummam momentorum ponderum totius lineæ, adeoque & [per Theor. VII.] partis lineæ cujuslibet BC, quoque fore Maximam Minimamve. Habebitur itaque $df(dq + ddq) + dg(dq + 2ddq) = 0$ ac proinde $df : -dg$ [$=$ per Theor. V, $dy^2\,ddx + dy^2\,dddx + dxddx^2 : dy^2\,ddx - 2dxddx^2$] $= dq + 2ddq : dq + ddq$; dividendoque $dy^2\,dddx + 3dxddx^2 : dy^2\,ddx - 2dxddx^2 = ddq : dq + ddq$; ſive, neglectis ſecundi & quarti termini quantitatibus ſuperfluis, $+dy^2\,dddx + 3dxddx^2 : dy^2\,ddx = ddq : dq$ unde multipl. extrema & media fit, $dqdy^2\,dddx + 3dqdxddx^2 = dy^2\,ddqddx$, ſurrogandoque $-dyddy$ loco $dxddx$, ac dividendo per dy, $dqdydddx - 3dqddxddy - dyddqddx = 0$, Æquatio ſcilicet ſpecialis hujus Problematis, quam primo ope fictæ æquationis $dq^m\,dy^n\,ddx^r =$ conſt. in hanc differentio-differentialem $ddx : dqdy^3 = \pm 1 : adz^2$; ac deinde ope hujus $ady = tdz$, in iſtas ſimpliciter differentiales, $dy = adz : \sqrt{(aa + qq)}$, & $dy = adz : \sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)}$ reſolvo; quarum proin altera Maximum $\int xdq$ ſeu Maximam momentorum ſummam, Minimam altera ſuppeditabit. Utra vero utrum præſtet, ſic exploro: Juxta priorem Æquationem $dy = adz : \sqrt{(aa + qq)}$ habetur dx [$\sqrt{(dz^2 - dy^2)}$] $= qdz : \sqrt{(aa + qq)}$; quare $dy : dx = a : q$, & ſumta dy conſtante, dx proportionatur ipſi q. Cum igitur gravamen Curvæ q creſcat cum ejus longitudine z, ſequitur etiam cum utroque creſcere dx; atque adeo Curvam baſi AT convexitatem obvertere. Sit ergo Curva hæc ADC, [Fig. 2.] ac rotetur circa chordam AC, ut naſcatur ex oppoſito alia Iſoperimetros ABC: ſtatuatur etiam chordæ normalis recta BD, abſcindens ex utraque Curva partes ſimiles & æquales AB, AD, & denique ducantur applicatæ BF, DG. Quoniam igitur applicata DG, ſeu x, Curvæ ADC minor eſt applicata BF, ſeu x, alterius Curvæ ABC; erit quoque xdz [& hinc xdq] prioris Curvæ minor, quam xdz [& xdq] poſterioris: & conſequenter $\int xdq$ illius minor, quam $\int xdq$ hujus. Curvæ igitur propoſitæ $dy = adz : \sqrt{(aa + qq)}$ ipſum $\int xdq$ non eſt

TAB. XXXI. N°. CII. *Fig. 2.*

Maximum; relinquitur ergo ut ſit *Minimum*. Eodemque modo colligitur quantitatem $\int x\,dq$ alterius curvæ $dy = adz : \sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)}$ viciſſim Maximam eſſe, non Minimam. Quæ erant determinanda.

Notamus hic bonitatis Methodi noſtræ argumentum in eo, quod quæ funiculariis ſeu catenariis, ex alio fundamento, per notiores methodos eruntur curvæ, præciſe cum noſtris conveniant. Addimus æquationem noſtram priorem $dy = adz : \sqrt{(aa + qq)}$, inverſas verticibuſque ſuis ſurſum ſpectantes catenarias referre, ambas autem coincidere cum curvis præced. Probl. quæ Maximum Minimumque $\int q\,dy$ continent, niſi quod hic & ibi abſciſſæ cum applicatis appareant permutatæ.

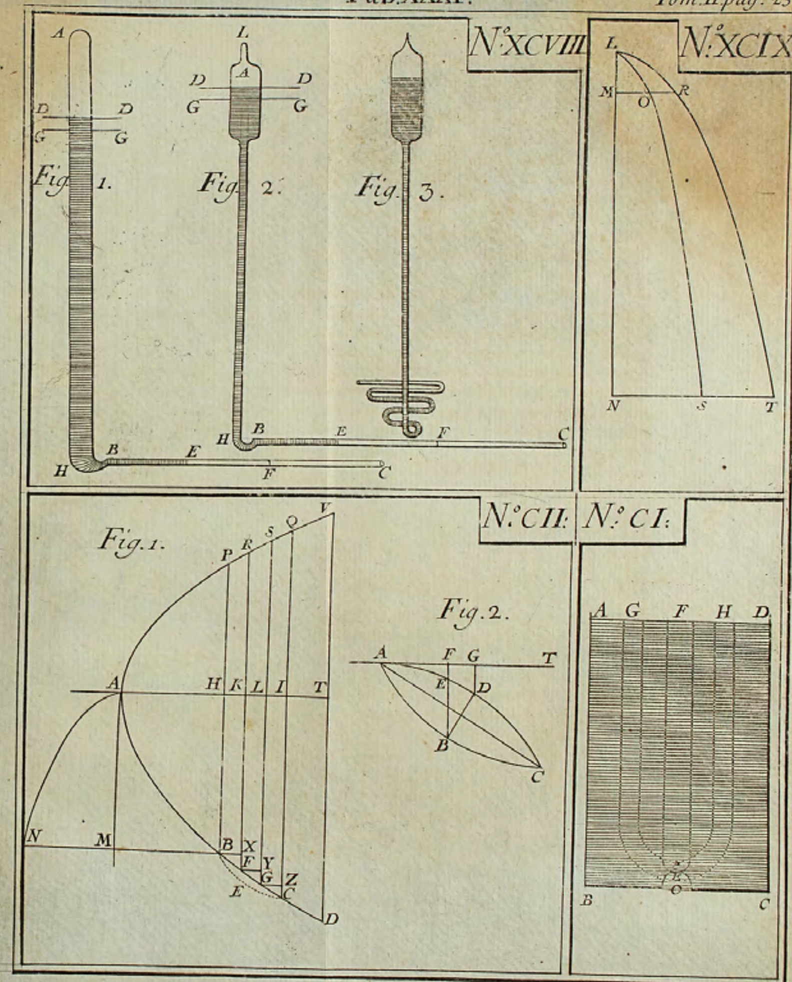
Sed laboris denique hic noſtri metam figimus; cum tria allata exempla ſufficere poſſint ad explicandum modum quo uti convenit in aliis omnibus. Unicum hoc tacere nefas, quod eadem methodus non ad ſolas figuras æqualium arearum, ſuperficies Conoidicas æquales, aut ſolida Conoidea æqualia, &c. mutatis mutandis accommodari poteſt, ita nimirum, ut ex infinitis illis reperiatur una, quæ quidpiam optime præſtet, ſeu quæ proprietatem quandam in eminenti gradu poſſideat: in quibus omnibus ſingularis quædam obſervatur reciprocatio. Quemadmodum enim, exempli gratia, inter omnes Figuras ejuſdem perimetri Circulus maximam poſſidet aream, Catenaria maximam converſione ſui gignit ſuperficiem, ſolidumque maximum Elaſtica; ſic inter omnes viciſſim Figuras, quæ aut æqualibus gaudent areis, aut æquales rotatione gignunt ſuperficies, ſolidave æqualia; Circulus, Catenaria & Elaſtica minimo clauduntur ambitu; quod pariter procedit in omnibus aliis. Et latent profecto in iſtis, quæ novum ſpeculandi campum ampliſſimum Geometris aperire valent. DEO autem immortali, qui imperſcrutabilem inexhauſtæ ſuæ ſapientiæ abyſſum leviuſculis radiis introſpicere, & aliquouſque rimari conceſſit mortalibus, pro præſtita nobis gratia ſit laus, honos, & gloria in ſempiterna ſecula.

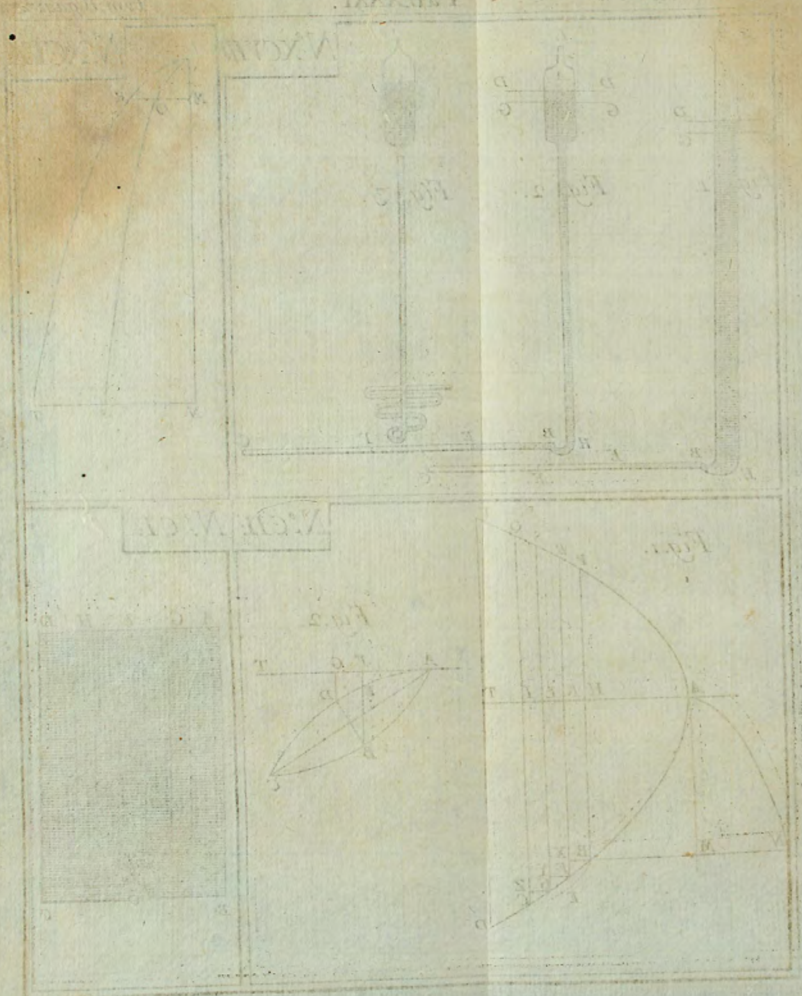


CUM.

odo colligi-
$aa + bb$
Quæ erant
, quod quæ
s methodos
æquationem
erticibusque
ncidere cum
tinent, nisi
allata exem-
enit in aliis
non ad so-
ut solida Co-
nimirum, ut
et, seu quæ
us omnibus
enim, exem-
aximam pos-
rficiem, so-
as, quæ aut
erficies, so-
duntur am-
ecto in istis,
rire valent.
æ sapientiæ
ncessit mor-
in sempiter-

EMAR-





RE

SUR CE QU

SOLUTIONS DE

Avec une nouvelle
calcul, laquelle

Par Mr. *Jean*

LEs curieux
vent se resso-
proposé le problém
plus vite descente
métres, laquelle f
que cette contesta
Leipsick de 1700,
Mémoires de l'Aca
Voyez aussi la pag
lé *Methodus Incre*

Je résolus cette
res différentes; &
solution secrette fa
LEIBNITZ, [d
à qui je la comm
prouver; ce qu'il

* La même Piece se
& Fevr. pag. 74.
† Ci-dessus N°. LXX

N°. CIII.

REMARQUES

SUR CE QU'ON A DONNE' JUSQU'ICI DE SOLUTIONS DES PROBLEMES SUR LES ISOPERIMETRES;

Avec une nouvelle méthode courte & facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres Problèmes qui ont raport à ceux-là.

Par Mr. *Jean* BERNOULLI, Professeur à *Bâle*. *

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. 1718. pag. 100. Edit. de Paris. pag. 123. Edition de Hollande.

LEs curieux du progrès de la sublime Géométrie peuvent se ressouvenir, qu'il y a environ vingt ans qu'ayant proposé le probléme de la *Brachystochrone*, ou de la courbe de la plus vite descente, mon Frére me proposa la question des *Isopérimétres*, laquelle fut long-tems débatuë entre nous deux. Ce que cette contestation a produit se trouve dans les *Actes de Leipsick* de 1700, pag. 261, de 1701, pag. 213, ‡ & *dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences* de 1706, pag. 304. † Voyez aussi la pag. 67 du Livre de Mr. TAYLOR, intitulé *Methodus Incrementorum directa & inversa.*

Je résolus cette question des Isopérimétres en deux manieres différentes; & pour raisons que j'avois alors, j'en tins la solution secrette sans la faire voir à d'autres qu'à l'Illustre Mr. LEIBNITZ, [dont le monde savant pleure encore la mort,] à qui je la communiquai d'abord, & qui me marqua l'approuver; ce qu'il a assuré encore quelque part. Au commen-

Gg 2 cement

* La même Piece se trouve en latin dans les *Act. Erud. Lips.* 1718 Janv. pag. 16. & Fevr. pag. 74.

‡ N° præced.

† Ci-dessus N°. LXXV. pag. 424. *Tom. I.*

cement de 1701, j'envoyaî cette double solution à l'Académie Royale des Sciences, laquelle ne la publia que dans les Mémoires de 1706. La raison de ce retardement est raportée par le Célébre Mr. de FONTENELLE, dans *l'Histoire de l'Académie* de cette année-là pag. 5, placée à l'ordinaire à la tête de ces Mémoires.

Ne songeant plus à cette question, j'ai été averti depuis peu par un Ami, que de ce que mes solutions n'ont paru que depuis la mort de mon Frére, quelqu'un me soupçonnoit d'y avoir appréhendé quelque erreur, qui m'avoit empêché de les publier de son vivant. La raison de ce retardement, raportée dans l'*Histoire* de 1706 *de l'Académie Royale des Sciences*, fait voir que ce soupçon est aussi mal fondé, qu'il est injurieux à ma candeur. D'un autre côté, je ne pense pas qu'on me croye assez fou, pour avoir osé exposer en public un Ecrit de moi, dans lequel j'aurois reconnu, ou même soupçonné, quelque erreur; n'y ayant aucune apparence qu'un homme se montre avec un défaut qu'il se connoit, & qu'il pourroit cacher.

Cependant pour ne pas négliger les avis de mon Ami, j'ai revû tout de nouveau mes solutions depuis long-tems oubliées; & en les examinant encore, avec toute l'attention possible, j'ai enfin reconnu que je m'y étois effectivement mépris en quelque chose, que je n'avois pas observé auparavant; ce que l'amour de la vérité me fait avouër ingénument, & avec d'autant moins de honte, que je suis persuadé qu'un tel aveu sied bien à un honnête homme; & que le Public m'en saura gré, en conséquence des nouvelles découvertes qu'il me donne occasion de lui communiquer; lesquelles sans cela seroient peut-être demeurées pour toûjours ensevelies dans mes papiers, quoi qu'elles ne contribuent pas peu à l'avancement de la fine Géométrie.

Il est à remarquer que la solution du premier Probléme de mon Mémoire inséré parmi ceux de 1706 de l'Académie Royale des Sciences, pag. 304 *; est précisément la même que cel-le

* Ci-dessus *Tom. I.* pag. 424.

le que mon Frére avoit reconnuë pour légitime: son approbation, jointe à la trop-grande confiance que j'avois en l'Universalité de ma Méthode, me fit oublier à faire attenrion à une certaine circonstance qui empêche qu'elle ne puisse, sans quelque modification, s'appliquer au second Probléme de la pag. 310 †, dans lequel il s'agit de trouver, entre les courbes isopérimétres, qu'elle est celle, de qui les fonctions des arcs donnent un plus grand, ou un plus petit; laquelle inadvertance me fit tomber dans l'équation $adtddy : dx^2 = dv$, au lieu de $adt^2 ddy : dx^3 = dv$, qui est la vraye, & qu'on verra en differer en rien de celle que mon Frére a donnée dans la pag. 225 des *Actes de Leipsick* de 1701, * excepté que j'ai appellé t, v, ce qu'il appelloit z, q. Car, en prenant comme moi dt constante, l'on aura $adt^2 ddy : dx^3$ integrable; & en si prenant bien, on trouvera que l'intégrale de cette differentielle est $ady : dx = q \pm c$; équation qu'on verra dans la suite être équivalente à celle de mon Frére, & n'en différer qu'en ce que celle-ci est plus simplement exprimée que la sienne.

Pour reparer cette faute d'inadvertance, je vas donner ici une nouvelle maniére de résoudre avec une facilité singuliére, non seulement tous les Problèmes que mon Frére a proposez sur les Isoperimétres, mais encore une infinité d'autres approchans. Pour cela, je vas considérer, comme lui, un arc infiniment petit de la courbe cherchée, comme composé de trois petites lignes droites élémentaires, & par le moyen d'un Principe, pris de la loi de l'Uniformité, que personne n'a encore observé jusqu'ici, la seule inspection de la figure me va fournir tout d'un coup, & sans presque aucun calcul, des équations, qui se présenteront comme d'elles mêmes pour les Courbes cherchées. Le Lecteur ne rencontrera rien ici de l'embarras qui se trouve dans la pénible Analyse de mon Frére, compliquée de troisiémes différences, & d'autres difficultés, qui ne se trouveront point par ma méthode. M. TAYLOR, homme d'esprit, & Géométre très-habile, qui a heu-reu-

† Cy-dessus, *Tom.* I. pag. 429. * Cy-dessus. pag. 232.

reusement pénétré jusques dans ce que nous avons donné de plus profond, comme il paroit par son Livre *de Methodo Incrementorum*, sentant bien la longueur embarrassante de l'Analyse de mon Frére, & voulant la rendre plus courte & un peu plus claire, a répandu lui-même tant d'obscurité sur cette matiére; [aussi-bien que sur d'autres où il a voulu être court] qu'il semble y prendre plaisir, & que je doute qu'il y ait quelqu'un, quelque pénétrant qu'il soit, qui l'entende par tout, quand même la matiére lui seroit déja connuë d'ailleurs. Pour ne rien dire ici du calcul court & serré que cet Auteur y employe suivant sa coutume; si on l'examine de près, on le trouvera encore assés long & embrouillé, outre que ce calcul le méne sur la matiére présente, jusqu'aux troisiémes fluxions ou différences, comme mon Frére y a été conduit par le sien.

Par toutes ces raisons, & d'autres qu'il n'est pas nécessaire de rapporter ici, je ne crois pas qu'on m'impute de faire chose faite, si dans une matiére, aussi difficile que celle-ci, je montre une voye courte, claire, & facile, suivant laquelle, un Géométre d'habileté & d'esprit médiocres puisse arriver jusqu'à voir, non sur la foi d'autrui, mais de ses propres yeux, ces véritez abstruses, sans s'engager dans la longueur du calcul de mon Frére, ni dans l'obscurité de celui de Mr. TAYLOR. La voici cette voye, ou méthode, dans ce qui suit.

LEMME I.

TAB. XXXII. Fig. 1.

Les droites aq, eq, *étant donnés de position en angle droit* q, *avec leurs points* a, e; *soient à distance données* af, fp, pq, *les autres droites* fg, pc, *paralléles à* qe, *sur lesquelles soient deux points quelconques* b, c, *avec deux autres* g, i, *infiniment près de ces deux-là. Soient par* a, b, c, e, *les trois droites* ab, bc, ce, *fléchies entr'elles; & par* a, g, i, e, *trois autres droites* ag, gi, ie, *le tout de maniére que la somme des trois premiéres soit égale à la somme des trois derniéres, & qu'ainsi l'on ait ici* ab + bc + ce = ag + gi + ie.

Cela

Cela posé, si l'on imagine quatre petites lignes bm, gn, io, ch, *menées des quatre points* b, g, i, c, *perpendiculairement sur* ag, bc, ic, *avec les deux* bk, cl, *paralléles à* ag; *je dis que sans aucun calcul l'on aura* (fb: ab — kc: bc) × bg = (kc: bc — le: ce) × ci.

19

DEMONSTRATION.

Il est visible que l'on aura pour lors quatre couples de triangles semblables deux à deux; sçavoir *gmb, bfa*; *bng, ckb*; *coi, ckb*; *ihc, elc*; lesquels donneront $gm = fb \times bg : ab$, $bn = kc \times bg : bc$, $co = kc \times ci : bc$, $ih = lc \times ci : ce$. Donc la supposition qu'on fait ici de $ag + gi + ie = ab + bc + ce$, rendant $ag - ab + gi - bc + ie - ce = 0$, c'est-à-dire $gm - bn - co + ib = 0$; l'on aura pareillement ici $fb \times bg : ab - kc \times bg : bc - kc \times ci : bc + le \times ci : ce = 0$ & conséquemment $(fb : ab - kc : bc) \times bg = (kc : bc - le : ce) \times ci$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cette derniére équation suit $bg : ci = \frac{kc}{bc} - \frac{le}{ce} : \frac{fb}{ab} - \frac{kc}{bc}$ [en multipliant les deux derniers termes par $ab \times bc \times ce$] $= ab \times ce \times kc - ab \times bc \times le : bc \times ce \times fb - ab \times ce \times kc$. Ce qui est, sans aucun calcul, le Théoréme préliminaire lui-même, que mon Frére a démontré par un calcul assez long, ainsi qu'on le voit dans la pag. 215 des *Actes de Leipsick* de 1701. * Mais j'aime mieux m'en tenir à mon *équation* $(fb : ab - kc : bc) \times bg = (kc : bc - le : ce) \times ci$, [que j'appellerai dorenavant *fondamentale*] à cause de l'uniformité des grandeurs qui affectent bg, ci, par rapport à l'ordre des trois lignes ab, bc, ce; de leurs trois correspondantes fb, kc, le; & des trois fractions $\frac{fb}{ab}$, $\frac{kc}{bc}$, $\frac{le}{ce}$; ayant d'une part bg multipliée par la difference de la premiére à la seconde de ces trois fractions,

&

* Cy-dessus, pag. 220.

& ci multipliée de même par la différence de la feconde à la troifiéme. On verra dans la fuite que cette uniformité contribuë merveilleufement à reconnoitre comme d'un coup d'oeil, & non en conféquence d'aucune Analyfe, les équations qui conviennent à chacun des Problêmes que nous allons réfoudre.

Lemme II.

TAB. XXXII. Fig. 2. *Les lignes* aq, eq, *étant encore ici données de pofition en angle droit* q, *foient décrits, de rayons donnéz, les arcs circulaires* DbE; FcG, *qui ayent pour centres les points* a, e, *donnés fur ces droites* aq, eq. *Par ces deux points, ou centres* a, e, & *par deux quelconques* b, c, *de ces arcs, foyent trois lignes droites* ab, bc, ce, *fléchies entr'elles; & par les mêmes point fixes* a, e, *& par deux autres* g, i, *imaginés fur ces arcs infiniment près de* b, c, *foyent trois autres droites* ag, gi, ie, *le tout encore de maniére que la fomme de ces trois-là foit égale à la fomme de ces trois-ci; & qu'ainfi l'on ait encore ici* $ab + cb + ce = ag + gi + ie$.

Cela pofé, fi l'on conçoit bf, cp, *paralléles à* eq, *& rencontrées en* n, o, *par les petites droites* gn, io, *paralléles à* aq, *lefquelles en déterminent les particules* bn, co, *dont le paffage de* b, c, *en* g, i, *fera croître la première* fb, *& décroître la feconde* pc, *je dis, en fuppofant toûjours* bk, cl, *paralléles à* aq, *que l'on aura ici* [encore fans aucun calcul] $(fb : af - kc : bk) \times bn = (kc : bk - le : cl) \times co$.

Demonstrations.

L'angle k [hyp.] droit, rendant $bk^2 + kc^2 = bc^2$ (hyp) $= gi^2 = (bk + gn + oi)^2 + (kc - co - bn)^2$, & conféquemment $(bk + gn + oi)^2 - bk^2$ [$2bk \times (gn + oi)$] $= kc^2 - (kc - co - bn)^2$ [$2kc \times (co + bn)$]; l'on aura ici $bk \times (gn + oi) = kc \times (co + bn)$, ou $gn + oi = kc \times co : bk + kc \times bn : bk$. Or les triangles femblables afb, bng, donnent $af : fb = bn : gn$ [$fb \times bn : af$] Et les femblables

weil nämlich $(gn+oi)^2$ und $(co+bn)^2$ als unendlich kleine Größen zweiter Ordnung wegfallen.

blables cle, coi, donnent de même $cl : le = co : oi$ [$le \times co : cl$]. Donc, $fb \times bn : af + le \times co : cl = kc \times co : bk + kc \times bn : bk$ & conféquemment $(fb : af - kc : bk) \times bn = (kc : bk - le : cl) \times co$, équation fondamentale qu'il falloit démontrer, & dont les termes ont encore une uniformité pareille à celle qu'on a obfervée dans ceux de l'Equation fondamentale du *Lemme I.*

Corollaire I.

Il fuit auffi de cette derniére équation, que $bn : co = \frac{kc}{bk} - \frac{le}{cl} : \frac{fb}{af} - \frac{kc}{bk}$, [en multipliant les deux derniers termes par $af \times bk \times cl$] $= af \times cl \times kc - af \times bk \times le : fb \times bk \times cl - af \times cl \times kc$. Ce qui eft encore fans aucun calcul le Theor. 3. que mon Frére a démontré par le calcul différentiel dans les *Actes de Leipfik* de 1701, pag. 216. †

Corollaire II.

Si l'on veut déterminer le rapport qu'ont entr'elles gn, oi, il n'y a qu'à s'y prendre comme dans la folution précédente, & l'on trouvera de même l'équation fpécifique $(- af : fb + bk : kc) \times gn = (- bk : kc + cl : le) \times oi$, laquelle a la même uniformité que celles du préfent *Lemme II.* & du *Lemme I.*

DEFINITION.

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité compofée de quelque maniére que ce foit de cette grandeur variable & de conftantes.

Probleme I.

Entre une infinité de Courbes de même longueur, comprifes entre les mêmes points B, C, *en trouver une* BaeC *telle que les femblables fonctions quelconques de fes ordonnées* aN, eS, CT *&c.* TAB. XXXII. Fig. 2. 13

† Ci-deffus pag. 221.

faſſent un plus grand *ou un* plus petit, *qui ſoit une aire* BMLET *réſultante de ce que le prolongement vers* M, L, E, *&c. de ces ordonnées* a N, eS, CT, &c. *lui en produit d'autres* NM, SL, TE, &c *ſemblablement compoſées chacune de chaque correſpondante de celles-là, & de conſtantes: tellement, dis-je, qu'il en réſulte une aire* B M L E T, *qui ſoit la plus grande ou la plus petite de tout ce qui s'en peut former de cette maniére.*

SOLUTION.

Il eſt manifeſte que chaque portion ae de la Courbe cherchée BaeC, doit avoir la même proprieté que cette courbe toute entiere, de faire un *plus grand* ou un *plus petit*. Concevons donc une particule infiniment petite ae de cette Courbe comme compoſée [ainſi que dans la Fig. 1] de trois petites lignes droites, ab, bc, ce, comme de trois élémens contigus auxquels répondent ſur l'abſciſſe BS, trois élémens égaux NP, PR, RS, ou af, bk, cl; & les trois fb, kc, le, des appliquées Pb, Rc, Se. Concevons de plus que les extrémités a, e, de la particule $abce$, demeurant fixes, ſes points b, c, coulent le long des ordonnées Pb, Rc, en deux autres points g, i, infiniment près d'eux, & changent ainſi cette particule $abce$, en une autre $agie$ de même longueur qu'elle.

Cela poſé, la condition de *plus grand* ou de *plus petit* exige ici que la ſomme des fonctions de Pb, Rc, ſoit égale à la ſomme des fonctions ſemblables de Pg, Ri; & qu'ainſi la différence des fonctions de Pb, Pg, ſoient égales à la difference des fonctions de Rc, Ri. Or ces ſecondes différences de fonctions ſe trouvent en différentiant ſimplement les fonctions des appliquées Pb, Rc, & en multipliant ce qui en vient [après en avoir omis les premiéres différences qui s'y trouvent de ces appliquées Pb, Rc, qui entrent chacune dans la compoſition ſemblable de chacune de ces fonctions] par bg, ci, quantités infiniment petites du ſecond genre, dont Pb, Rc, différent de Pg, Ri, ainſi que je l'ai enſeigné dans les *Mémoi-*

$\delta\int_\alpha^\xi F(y)\,dx = 0$

res

res de l'Académie Royale des Sciences de l'année 1706 pag. 306.* Donc ſi l'on appelle ici, comme là, $\Delta Pb \times bg$, $\Delta Rc \times ci$, ces ſecondes différences des fonctions des appliquées Pb, Rc; en prenant, ainſi que là, non ſeulement Δ pour le ſigne, ou la Caractériſtique de ces differences de fonctions, ſuivie de Pb, Rc, pour marquer que c'eſt des fonctions de ces appliquées qu'il s'agit. mais encore ΔPb, ΔRc pour ce que ces ſecondes différences de fonctions contiennent de fini réſultant de la premiére différentiation de ces mêmes fonctions: l'on aura ici $\Delta Pb \times bg = \Delta Rc \times ci$. En effet, en prenant auſſi Φ pour la caractériſtique de ces fonctions elles-mêmes, la queſtion préſente de *plus grand* ou de *plus petit* dont il eſt ici queſtion, y exigeant $\Phi(Pb) + \Phi(Rc) = \Phi(Pg) + \Phi(Ri)$, elle exige auſſi $\Phi Rc - \Phi Ri = \Phi Pg - \Phi Pb$; ce qui ſuivant la définition de Δ, donne $\Delta Rc \times kc - \Delta Ri \times ki = \Delta Pg \times fg - \Delta Pb \times fb$: de ſorte qu'ayant $\Delta Rc = \Delta Ri$, & $\Delta Pg = \Delta Pb$, à cauſe de l'infinie petiteſſe de ci, bg, par raport aux grandeurs Rc, Ri, Pg, Pb; l'on aura ici $\Delta Rc \times (kc - ki) = \Delta Pb \times (fg - fb)$, c'eſt-à-dire, $\Delta Rc \times ci = \Delta Pb \times bg$; d'où réſulte $bg : ci = \Delta Rc : \Delta Pb = \frac{1}{\Delta Pb} : \frac{1}{\Delta Rc}$. Cela étant, ſi au lieu de bg, ci, l'on ſubſtituë leurs proportionnelles $\frac{1}{\Delta Pb}$, $\frac{1}{\Delta Rc}$, dans l'équation fondamentale $(fb : ab - kc : bc) \times bg = (kc : bc - le : ce) \times ci$ du *Lem.* I. il en réſultera une nouvelle équation $(fb : ab - kc : bc) : \Delta Pb = (kc : bc - le : ce) : \Delta Rc$, que j'appellerai ſpécifique; parce que d'elle réſulte l'équation différentielle, qui détermine finalement l'eſpéce de la Courbe cherchée.

$\Delta Pb \times bg = \frac{dF(y)}{dy}\delta y$

Pour trouver commodément cette équation differentielle, il eſt fort à propos de conſiderer l'uniformité qui ſe trouve dans la compoſition des deux membres de la précédente équation ſpécifique, tant par raport aux lignes ab, bc, ce; fb, kc, le, que par rapport à ΔPb, ΔRc: ce que ab eſt dans le premier membre, bc l'eſt dans le ſecond; ce que bc eſt dans le premier, ce l'eſt dans le ſecond; de

Hh 2 même

* N°. LXXV. pag. 426. *Tom. I.*

même kc, le, ſont dans le ſecond, ce que ſont fb, kc, dans le premier; enfin ΔRc eſt auſſi dans le ſecond ce qu'eſt ΔPb dans le premier. Cette conſidération m'a fait voir tout d'un coup que la courbe cherchée doit être telle, qu'en y ſuppoſant les élemens de l'abſciſſe égaux, la quantité $(fb:ab - kc:bc):\Delta Pb$ y ſoit par tout conſtante. Or il eſt viſible que $fb:ab - kc:bc$, n'eſt autre choſe que la differentielle négativement priſe d'une fraction, qui auroit un élement d'appliquée pour numerateur, & l'élement correſpondant de la courbe pour dénominateur.

Si donc [*Fig.* 3.] l'on appelle BN, y; Na, x; Ba, z; la précédente équation ſpécifique ſe changera ici en $d(dx:dz) \times \frac{1}{\Delta x} = dy : a$, quantité conſtante homogène; ce qui donne $dy\,\Delta x : a = -d(dx:dz) = (-dz\,ddx + dx\,ddz):dz^2$. Deſorte qu'en multipliant le tout par dx pour le pouvoir integrer, il en résultera $dy\,\Delta x \times dx : a = (-dz\,dx\,ddx + dx^2\,ddz):dz^2 =$ [à cauſe de $dx^2 = dz^2 - dy^2$, qui dans la préſente hypothéſe de dy conſtante, donne $dx\,ddx = dz\,ddz$] $= (-dz^2\,ddz + dx^2\,ddz):dz^2 = -dy^2\,ddz : dz^2$. Donc en diviſant le tout par dy, l'on aura ici $-dy\,ddz : dz^2 = \Delta x \times dx : a$, dans laquelle équation ayant dy conſtante, & la quantité $\Delta x \times dx$ étant la premiere difference de la fonction de x, ſi l'on appelle X cette fonction; cette équation integrée à la maniere ordinaire, donnera $dy : dz = (X \pm c) : a$, pour ſon intégrale, de laquelle réſulte $a\,dy = (X \pm c)\,dz$ dont le quarré eſt $aa\,dy^2 = (X \pm c)^2 \times dz^2 = (X \pm c)^2 \times (dx^2 + dy^2)$; d'où reſulte $(aa - (X \pm c)^2)\,dy^2 = (X \pm c)^2\,dx^2$, & enſuite $dy^2 = (X \pm c)^2\,dx^2 : (aa - (X \pm c)^2)$ ou, $dy = (X \pm c)\,dx : \sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}$, dont l'intégrale eſt $y = \int \frac{(X \pm c)\,dx}{\sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}}$ (A) ce qui [en prenant la grandeur arbitraire $c = 0$] donne $y = \int \frac{X\,dx}{\sqrt{(aa - XX)}}$ (B) pour le cas le plus ſimple.

TAB. XXXII. *Fig.* 3.

$U = \int_a^b F(y)\,dx$

$\frac{d.\frac{dy}{ds}}{F'(y)} = \frac{dx}{a}$

$d.\frac{dy}{ds} - \frac{1}{a} F'(y)\,dx = 0$

$a.\frac{dx}{ds} + F(y) = \text{Const}$

Ces deux dernières équations, A, B, s'accordent avec de pareilles que j'avois trouvées autrefois, leſquelles ſe voyent dans

dans la pag. 310. * des *Mémoires* déja cités *de l'Acad. Royale des Sciences*: la derniére B des deux s'accorde auſſi avec celle qu'on voit de mon Frére dans la pag. 222. des *Actes de Leipſick* de 1701. † déduite de ſa pénible Analyſe, à cette ſeule différence près qu'il y appelle p ce que j'apelle ici x.

Peut-être ſera-t-on ſurpris de voir que j'aye employé quelque peu de calcul dans la ſolution précédente, après avoir dit que je n'y en emploirois point; mais pour contenter ceux qui pourroient s'en formaliſer, voici encore une autre ſolution où il n'y aura point du tout de calcul.

AUTRE SOLUTION.

Soit ici BQ perpendiculaire ſur BS, à laquelle des points a, b, i, e, ſoient les parallèles aG, bH, iP, eQ, qui rencontrent BQ en G, H, P, Q, d'intervalles égaux GH, HP, PQ. Soient auſſi af, bk, cl, parallèles à BQ, deſquelles la prémiére af prolongée rencontre BS en N. Concevons après cela que les points b, c, coulent en d'infiniment proches g, i, le long de bH, Pc, de maniére que la ſomme des lignes ag, gi, ie, ſoit égale à la ſomme de ab, bc, ce. Enfin des quatre points b, c, g, i, ſoient ſur gi, ab, ce, quatre petites perpendiculaires bm, ch, gn, io; & auſſi des points, g, i, les droites gp, iq, parallèles à bk, cl. TAB. XXXII. *Fig.* 4.

Cela fait, en s'y prenant comme dans le *Lem. I.* on trouvera encore ici $(-fb:ab + kc:bc) \times bg = (-kc:bc + le:ce) \times ci$, pour équation fondamentale, mais de ſignes contraires à ceux de la fondamentale qu'on a trouvée là, à cauſe qu'on a ici $fb:ab < kc:bc < le:ce$ & que là on avoit $fb:ab > kc:bc > le:ce$.

Pour trouver préſentement l'équation ſpécifique d'ici, il n'eſt plus beſoin de differentier les fonctions: mais voyant que la nature du *plus grand* ou du *plus petit*, exige ſeulement ici que la ſomme des produits des fonctions de BH, BP, BQ multipliés chacune par chacune des petites lignes correſpondantes fb, kc, le,

 ſoit

* pag. 428. *Tom. I.* † Ci-deſſus pag. 228.

ſoit égale à la ſomme des produits des mêmes fonctions multipliées de même chacune des autres petites lignes fg, pi, qe, pareillement correſpondantes ; je trouve [en prenant encore Φ pour le ſigne ou la caractériſtique de chaque fonction] que $\Phi BH \times fb + \Phi BP \times kc + \Phi BQ \times le = \Phi BH \times fg + \Phi BP \times pi + \Phi BQ \times qe$, d'où [en retranchant choſes égales de part & d'autre] il réſulte $-\Phi BH \times bg + \Phi BP \times bg = -\Phi BP \times ci + \Phi BQ \times ci$; & conſéquemment $bg : ci = -\Phi PB + \Phi BQ : -\Phi BH + \Phi BP = \frac{1}{-\Phi BH + \Phi BP} : \frac{1}{-\Phi BP + \Phi BQ}$.
Donc, en ſubſtituant ces deux derniers termes au lieu de leurs proportionnels bg, ci, dans la précédente équation fondamentale $(-fb : ab + Kc : bc) \times bg = (-Kc : bc + le : ce) \times ci$, elle ſe changera en la ſpécifique $(-fb : ab + kc : bc) : (-\Phi BH + \Phi BP) = (-kc : bc + le : ce) : (-\Phi BP + \Phi BQ)$ dont l'uniformité entre ſes deux membres fait voir [à cauſe que $kc : bc - fb : ab$ n'eſt que la difference de la fraction $dy : dz$ & que $\Phi BP - \Phi BH$ n'eſt auſſi que la difference de la fonction Φx] que $d(dy : dz) \times \frac{1}{d\Phi x} = \frac{1}{a}$ grandeur conſtante homogéne, d'où réſulte $d(dy : dz) = d\Phi x : a$, de qui la ſimple omiſſion du premier ſigne differentiel d de chaque membre, rend l'intégrale $dy : dz = (\Phi x \pm c) : a$, en y ajoutant ou en y retranchant à l'ordinaire quelque grandeur conſtante homogéne $c : a$, deſorte qu'en prenant encore ici X pour le nom de la fonction Φx, & en multipliant le tout par adz, l'on aura encore la même équation $ady = (X \pm c)\,dz$, que j'ai trouvée dans la ſolution précédente.

PROBLEME II.

TAB. XXXII. Fig. 3. *Tout ce que le Problême I. ſuppoſe dans la* Fig. 3. *demeurant ici le même que là, excepté que* NM, SL, TE, *&c. qui expriment là les fonctions des appliquées correſpondantes* Na, Se, TC, *&c. de la courbe* BaeC *qu'on y cherchoit, expriment ici les fonctions des arcs correſpondans* Ba, Be, BC, *&c. de celle* BaeC *qu'on demande ici, de telle nature qu'entre toutes les iſopérimétres, c'eſt-à-dire, entre celles de même longueur qu'elle, elle rende auſſi l'aire* BMLET *la plus grande de tout ce qui s'en peut former de cette maniere.*

SOLUTION.

La *Fig.* 1. & les noms demeurans les mêmes que ci-deſſus, Fig. 1.
l'on aura ici comme dans le *Lem. I.* l'équation fondamentale $(fb : ab - kc : bc) \times bg = (kc : bc - le : ce) \times ci$. Quant à l'équation ſpécifique ici requiſe, il faut conſidérer que les points a, e, demeurant fixes pendant que les points b, c, coulent en g, i, de maniére qu'on ait encore ici $abce = agie$; la ſomme des fonctions des arcs Bab, $Babc$, doit être égale à la ſomme des fonctions de Bag, $Bagi$; & conſéquemment que la différence des fonctions de Bag, Bab, doit être auſſi égale à la différence des fonctions de $Babc$, $Bagi$. Or ſuivant ce que je viens de dire de la caractériſtique Δ dans la Solut. I. du Prob. I, la différence des fonctions de Bag, Bab, ſera ici exprimée par $\Delta Bag \times mg$, & la difference des fonctions de $Babc$, $Bagi$, le ſera de même par $\Delta Babc \times (abc - agi)$ [à cauſe que $abce = agie$, rend $abc - agi = ih$] $= \Delta Babc \times ih$. Donc on aura ici $\Delta Bag \times mg = \Delta Babc \times ih$. Or dans la démonſtration du *Lemme I*, l'on a trouvé $mg = fb \times bg : ab$ & $ih = le \times ci : ce$. Donc $\Delta Bag \times fb \times bg : ab = \Delta Babc \times le \times ci : ce$, d'où réſulte $bg : ci = \frac{le}{ce} \Delta Babc : \frac{fb}{ab} \Delta Bag = (ab : fb \times \Delta Bag) : (ce : le \times \Delta Bac)$. Si donc on ſubſtitue ces deux derniers termes, au lieu de leurs proportionnels bg, ci, dans la précédente équation fondamentale $(fb : ab - kc : bc) \times bg = (kc : bc - le : ce) \times ci$, elle ſe changera en la ſpécifique $(fb : ab - kc : bc) \times ab : fb \times \Delta Bag = (kc : bc - le : ce) \times ce : le \times \Delta Babc$.
Mais il eſt à remarquer, que dans chaque membre de cette équation ſpécifique, il n'y a point encore d'uniformité entiere, qui

qui permette de paſſer d'une particule quelconque ab de la Courbe cherchée à la particule bc immédiatement ſuivante, affectée de la même maniére que celle-là; ni de cette ſeconde particule bc à la troiſiéme ce; ni de celle-ci à la quatriéme, & ainſi de ſuite d'une particule à l'autre, ſans interruption: de maniére qu'on puiſſe conclurre, que chaque membre de cette équation ſpécifique doit être une quantité conſtante. Car quoique: $fb : ab - kc : bc$ & ΔBag, ayent dans un des membres de cette équation des ſituations ſemblables à celles que $kc : bc - le : ce$ & $\Delta Babc$, ont dans l'autre par rapport à deux élémens contigus ab, bc, de la Courbe; & qu'en cela ces deux membres ſoient uniformes; je voi cependant qu'on ne peut pas dire la même choſe de $ab : fb$ & $ce : le$; à cauſe que le défaut de $lc : kc$ entr'eux y laiſſe un vuide, qui interrompt le paſſage de l'un à l'autre par contigus, & empêche ainſi que l'uniformité entre les deux membres de la précédente équation ſpécifique ne ſoit entiére.

Pour la rendre telle, & remplir le vuide de ce qui y manque pour la continuité des parties; je multiplie l'un & l'autre membre de cette équation ſpécifique $(fb : ab - kc : bc) \times ab : fb \times \Delta Bag = (kc : bc - le : ce) \times ce : le \times \Delta Babc$, par $bc : kc$, ce qui la change en celle-ci $(fb : ab - kc : bc) \times ab \times bc : fb \times kc \times \Delta Bag = (kc : bc - le : ce) \times bc \times ce : kc \times le \times \Delta Babc$; dans laquelle ſe trouvent préſentement l'uniformité & la continuité requiſe, la premiére particule ab s'y trouvant liée & diſpoſée par rapport à la ſeconde bc avec tout ce qui a rapport à elles, comme cette ſeconde bc l'eſt par rapport à la troiſiéme ce, avec tout ce qui a auſſi de pareils rapports à elles. Ce qui fait voir que la nature de la Courbe ici cherchée, eſt telle que $(fb : ab - kc : bc) \times ab \times bc : fb \times kc \times \Delta Bag$, ou [à cauſe que les fractions $ab : fb$, $bc \times kc$, ſont égales entr'elles, ne différant l'une de l'autre que d'une quantité infiniment plus petite qu'elles] $(fb : ab - kc : bc) \times ab^2 : fb^2 \times \Delta Bag$, y eſt par tout une quantité conſtante; ſavoir, en y prenant [comme juſqu'ici] les élemens des abſciſſes par tout égaux entr'eux. Ce qui, ſuivant les noms en lettres

lettres dont nous nous ſommes ſervis juſqu'ici, donne $-d(dx : dz) \times dz^2 : dx^2 \Delta z = dy : a$ quantité conſtante homogène, d'où réſulte $-d(dx : dz) = dy \times dx^2 \times \Delta z : adz^2$ ou [à cauſe de $d(dx : dz) = (dzddx - dxddz) : dz^2$] $(-dzddx + dxddz) : dz^2 = dydx^2 \Delta z : adz^2$, d'où réſulte auſſi [en multipliant le tout par $dz^2 : dx^2$] $)-dzddx + dxddz) : dx^2 = dy \Delta z : a$ & ſi, pour intégrer cette équation différentielle, on la multiplie par dz, elle deviendra $dy \times \Delta z \times dz : a = (-dz^2 ddx + dxdzddz) : dx^2$ [à cauſe que $dz^2 - dx^2 = dy^2$ conſtante, rend $dzddz = dzddx$] $= (-dz^2 ddx + dx^2 ddx) : dx^2 = -dy^2 ddx : dx^2$ c'eſt-à-dire $-dy^2 ddx : dx^2 = dy \times \Delta z \times dz : a$, ou [en diviſant le tout par dy] $-dyddx : dx^2 = \Delta z \times dz : a$. Donc $\Delta z \times dz$ étant la premiere différence de la fonction de z, ſi l'on appelle Z cette fonction, une ſimple intégration ordinaire donnera ici $dy : dx = (Z \pm c) : a$, & en conſéquence $ady = (Z \pm c) dx$; deſorte que ſi l'on ſuppoſe ici la quantité arbitraire $c = 0$, l'on y aura $ady = Z \times dx$, qui ſera l'équation la plus ſimple de la Courbe demandée.

AUTRE SOLUTION.

Voici encore la même choſe plus ſimplement & ſans aucun calcul, par le moyen du *Corol. II* du *Lem. II*, & de la *Fig.* 2; lequel *Corol. II* donne l'équation fondamentale $(-af : fb + bk : kc) \times gn = (-bk : kc + cl : le) \times oi$; on trouvera de même, ſans aucune differentiation des fonctions, l'équation ſpécifique de la Courbe ici requiſe. Car la nature du plus grand ou du plus petit exigeant ici $\Phi Bab \times af + \Phi Babc \times bk + \Phi Babce \times cl = \Phi Bag \times (af - gn) + \Phi Bagi \times (bk + gn + oi) + \Phi Bagie \times (cl - oi)$; ſi l'on retranche de part & d'autre choſes égales, & que l'on conſidère que $ab = ag$, $bc = gi$, $ce = ei$, rendent les arcs $Bab = Bag$, $Babc = Bagi$, $Babce = Bagie$, & conſéquemment auſſi leurs fonctions $\Phi Bab = \Phi Bag$, $\Phi Babc = \Phi Bagi$, $\Phi Babce = \Phi Bagie$: l'on aura $-\Phi Bab \times gn + \Phi Babc \times gn = \Phi Babc \times oi + \Phi Babce \times oi$, d'où réſulte TAB. XXXII. *Fig.* 2.

 gn;

$gn : oi = -\Phi Babc + \Phi Babce : -\Phi Bab + \Phi Babc = \frac{1}{-\Phi Bab + \Phi Babc} : \frac{1}{-\Phi Babc + \Phi Babce}$. Donc, en ſubſtituant ces deux derniers termes au lieu de leurs proportionnels gn, oi, dans la précédente équation fondamentale $(-af : bf + bk : kc) \times gn = (-bk : kc + cl : le) \times oi$, trouvée dans le *Corol. II* du *Lem. II*, l'on aura pour ici la ſpécifique $(-af : fb + bk : kc) : (-\Phi Bab + \Phi Babc) = (-bk : kc + cl : le) : (-\Phi Babc + \Phi Babce)$, laquelle a une parfaite uniformité de part & d'autre, Or ſuivant les lettres dont nous nous ſommes ſervis juſqu'ici, $bk : kc - af : fb$ eſt la differentielle de la fraction $dy : dx$, & $\Phi Babc - \Phi Bab$ eſt auſſi la differentielle de la fonction de l'arc z de la Courbe requiſe. Donc $d(dy : dx) : d\Phi z = 1 : a$, quantité conſtante homogéne; & conſéquemment $d(dy : dx) = d\Phi z : a$, de qui la ſimple omiſſion du premier ſigne différentiel d de chaque membre rend l'intégrale $dy : dx = (\Phi z \pm c) : a$, en y ajoutant ou en y retranchant à l'ordinaire quelque grandeur conſtante homogéne $c : a$. De ſorte qu'en prenant Z pour la fonction marquée par Φz, l'on aura ici [en multipliant le tout par adx] $ady = (Z \pm c)\, dx$; ce qui eſt la même équation que nous venons de trouver dans la Solut. I.

SCHOLIE. I.

On ſera peut-être ſurpris de la différence qui paroit d'abord entre l'équation $ady = Z \times dx$ réſultante de la précédente lorſqu'on y prend $c = 0$, & celle $dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$ qu'on voit de mon Frére dans les *Actes de Leipſick* de 1701. pag. 224. * déduite de ſon long & pénible calcul, ce qui fera peut-être penſer, ou du moins ſoupçonner que nous ne ſommes pas ici d'accord entre nous deux. Mais voici la démonſtration du contraire; par laquelle je vas faire voir que ces deux équations ne différent que dans leurs expreſſions, & que dans le fond elles conviennent entiérement. Car puiſque $dx = \sqrt{(dz^2 - dy^2)}$, ma derniére équation $ady = Zdx$ ſera $ady = Z \times \sqrt{(dz^2 - dy^2)}$ & [en quarrant] $aady^2 = ZZ \times (dz^2 - dy^2)$ ce qui [en tranſpoſant] donne $(aa + ZZ)\, dy^2 = ZZ\, dz^2$ d'où réſulte $dy = Zdz : \sqrt{(aa + ZZ)}$ [en écrivant q pour Z] $= qdz : \sqrt{(aa + qq)}$, qui eſt l'équation de mon Frére, dans laquelle il appelle q ce que j'appelle Z.

* Ci-deſſus pag. 231.

Cela étant, je ſuis ſurpris à mon tour que mon Frére, qui démontre la même identité dans les *Actes de Leipſick* de 1700, pag. 266, * mais dans un ordre renverſé, en déduiſant mon équation de la ſienne; ſavoir, en faiſant voir que de ſon équation $dy = qdt : \sqrt{(aa + qq)}$ [dans laquelle dt ſignifie la même choſe qu'ici dz] il en réſulte $ady = qdx$, c'eſt-à-dire mon équation $ady = Zdx$: je ſuis, dis-je, ſurpris qu'il ne ſoit pas arrivé d'abord & immédiatement à celle-ci, qui, la plus ſimple, donne une idée plus facile de la Courbe; & qu'il ne l'ait pas préférée à cette longue $dy = qdt : \sqrt{(aa + qq)}$ pour la conſtruction de la Table qui ſe voit de lui dans les pag. 261. 262 des *Actes de Leipſick* de la même année 1700. †

PROBLEME III.

Déterminer la nature de la Courbe BaeC [Fig. 5.] *qui entre tout ce qu'il y en peut avoir de même longueur qu'elle, terminées comme elle aux points donnés* B, C; *ſoit telle qu'une autre Courbe* BHKQ *d'abſciſſes* BL, *qui expriment des fonctions données quelconques des arcs* Ba, *ait ſes appliquées* LH *égales aux appliquées* Na, *& ſon aire* BQO *la plus grande ou la plus petite de tout ce qui s'en peut former de cette maniére.* TAB. XXXII. Fig. 5.

On voit déja qu'en ce cas la Courbe demandée BaeC ſera la Catenaire, ſuivant laquelle ſe courberoit un fil parfaitement flexible & de même longueur que cette Courbe BaeC, s'il étoit chargé en chacun de ſes points d'un poids proportionnel à la différence de la fonction donnée de l'arc correſpondant Ba, & qu'il fut librement ſuſpendu par ſes extrémités aux points fixes B, C. Car il y a déja long-tems que dans l'Art. 13. de

* Ci-deſſus pag. 218. † pag. 214.

de ma premiére solution de ce Probléme, imprimée dans les *Actes de Leipsick* de 1691. pag. 275 †, & déduite d'un principe différent de celui que j'employe ici; j'ai fait remarquer que la plus grande descente du centre commun de gravité de tous ces poids exige que l'aire ou l'espace BQO soit un *plus grand* ou un *plus petit*, selon que la Courbe BKHQ qui le termine, aura sa concavité ou sa convexité tournée vers son axe BT. Voici présentement la solution de ce Probléme par le principe employé dans tout ceci.

Solution.

TAB. XXXII. *Fig.* 2. A l'imitation des solutions précédentes, considerons encore ici [*Fig.* 2.] une particule infiniment petite ae de la Courbe cherchée, comme composée de trois autres petites particules ab, bc, ce, égales entr'elles. Considerons de plus que les deux extrêmes ab, ec, de ces trois petites particules, se meuvent infiniment peu autour des centres fixes a, e, jusqu'en g, i, de maniére que gi soit égale à bc, & conséquemment que $agie$ soit aussi égale à $abce$. De là en conséquence de la plus grande descente du centre commun de gravité des trois petits poids ab, bc, ce, agissans mutuellement les uns sur les autres; il arrivera que la somme de leurs momens dans leur situation $abce$, sera égale à la somme de leurs momens dans leur autre situation $agie$ infiniment proche de celle-là; & qu'ainsi l'on aura ici $\triangle Bab \times Pb + \triangle Babc \times Rc + \triangle Babce \times Se = \triangle Bag \times Pn + \triangle Bagi \times Ro + \triangle Bagie \times Se$. Donc, si l'on retranche de part & d'autre le second membre de cette équation qui a $\triangle Bag = \triangle Bab$, $\triangle Bagi = \triangle Babc$, $\triangle Bagie = \triangle Babce$, à cause de $ag = ab$, $gi = bc$, $ie = ce$; l'on aura $-\triangle Bab \times bn + \triangle Babc \times co = 0$, & en conséquence $\triangle Bab \times bn = \triangle Babc \times co$, d'où résulte $bn : co = \triangle Babc : \triangle Bab = \frac{1}{\triangle Bab} : \frac{1}{\triangle Babc}$. Donc, si l'on substitue ces deux derniers

† Ci-dessus N°. IV. pag. 50. Tom. I.

niers termes au lieu de leurs proportionnels bn, co, dans l'équation fondamentale $(fb : af - kc : bk) \times bn = (kc : bk - le : cl) \times co$, trouvée par le *Lemme II*, on la changera pour ici en la spécifique $(fb : af - kc : bk) : \triangle Bab = (kc : bk - le : cl) : \triangle Babc$, dans laquelle on voit qu'il ne manque rien pour une parfaite uniformité entre ses deux membres. C'est pourquoi j'en conclus tout d'un coup que la nature de la Courbe cherchée est d'avoir $(fb : af - kc : bk) : \triangle Bab$ par tout égale à une quantité constante; & qu'ainsi en se servant encore des symboles, ou lettres employées jusqu'ici, l'on y aura $-d(dx : dy) \times \frac{1}{\Delta z} = dz : a$, quantité constante homogéne, & de là $-d(dx : dy) = \Delta z \times dz : a$, qui sans autre préparation s'intégre en $-dx : dy = (Z \pm c) : a$ par la seule omission du premier & du dernier signe de cette différentiation, qui ne se trouvent plus dans cette intégrale; de laquelle résulte $-adx = (Z \pm c)dy$, que la supposition de la grandeur arbitraire $c = 0$, change en $-adx = Zdy$, qui est une équation de la Courbe cherchée, plus simple encore que celle qu'on voit dans la pag. 226 des *Actes de Leipsic* de 1701 * avoir été trouvée par mon Frere.

On voit aussi qu'à la seule permutation près des coordonnées, cette derniere équation $-adx = Zdy$ est semblable à celle $ady = Zdx$ que je viens de trouver dans le Schol. I, pour les Courbes du précédent Probléme II, lesquelles donnent $\int q\,dy$ pour un *plus grand* ou pour un *plus petit*. Ce que je vois dans la pag. 227 des précédens *Actes* de 1701 * avoir à la vérité été observé par mon Frere, quoiqu'il n'ait pû conclure cette identité de ces deux genres de Courbes, par la seule comparaison des équations qu'il en a données d'expressions différentes.

Les solutions précédentes sont à la vérité de Problémes proposés depuis long-tems, mais outre qu'elles sont nouvelles, en voici présentement de Problémes auxquels personne, que je sache, n'a pensé jusqu'ici. Il est constant depuis long-tems, & je l'ai trouvé le premier, que la Courbe Brachystochrone, ou de plus vîte descente, est une Cycloïde. Si présentement l'on vouloit

* Ci-dessus pag. 232, 233.

vouloit que cette Brachyſtochrone fût de longueur donnée, c'eſt-à-dire, qu'elle fût celle, qui entre tout ce qu'il y en peut avoir de même longueur entre deux points donnés, porteroit le mobile du plus haut au plus bas de ces points dans le tems le plus court: la voici dans le Probléme ſuivant, où cette queſtion ſe trouve plus clairement propoſée.

Probleme IV.

TAB. XXXII. Fig. 5. *De toutes les Courbes de longueur donnée, ou de même longueur entre deux points donnés* B, C, *dans la* Fig. 5, *trouver celle le long de laquelle un mobile commençant à tomber de* B *par ſa peſanteur, arrive en* C *dans un tems plus court que par aucune autre de ces Courbes.*

Solution.

Fig. 2. Soit $BaeC$ dans la *Fig.* 2, cette Courbe de plus vîte deſcente de B en C, que par aucune autre Courbe de même longueur qu'elle entre les mêmes termes B, C. Concevons encore cette particule infiniment petite $abce$ de cette Courbe, comme faite de trois élemens égaux ab, bc, ce, qui en ſe mouvant circulairement, ainſi que dans la Solution du précédent Probl. III, paſſent dans une ſituation $agie$ infiniment voiſine de $abce$, en laquelle ſoit comme là, $ab = ag$, $bc = gi$, $ce = ie$; & conſéquemment $abce = agie$.

Cela poſé, je conſidére que pour que le mobile arrivé de B en a, & continuant ſa route vers C arrive de a en e, dans le moindre temps que ſa peſanteur puiſſe employer à l'y faire paſſer par $abce$ plus vîte que par toute autre route de même longueur; la nature de ce *plus petit* exige que les trois tems requis pour parcourir ainſi les trois petits élemens ab, bc, ce, ſoient enſemble égaux à la ſomme des trois petits tems pareillement requis pour parcourir ces mêmes élemens en ag, gi, ie, de ſituations infiniment voiſines de leurs premieres. Je conſidére de plus à l'ordinaire la vîteſſe dont chacun de ces élemens eſt

par-

parcouru, comme uniforme dans toute ſa longueur; & comme proportionnelle [ſelon la loi des poids qui tombent] à la racine quarrée de la hauteur dont l'horiſon, où la chute a commencé, eſt au deſſus du commencement de chacun de ces élemens: ce qui donne $ab:\sqrt{Na}$, $bc:\sqrt{Pb}$, $ce:\sqrt{Rc}$, pour les trois petits tems par ab, bc, ce; & $ag:\sqrt{Na}$, $gi:\sqrt{Pn}$, $ie:\sqrt{Ro}$ pour les trois petits tems par ag, gi, ie; ou [à cauſe de l'égalité ſuppoſée des élemens qui ſont les numerateurs de ces fractions] $1:\sqrt{Na}$, $1:\sqrt{Pb}$, $1:\sqrt{Rc}$, pour les trois premiers de ces petits tems; & $1:\sqrt{Na}$, $1:\sqrt{Pn}$, $1:\sqrt{Ro}$, pour les trois derniers. Donc $1:\sqrt{Na} + 1:\sqrt{Pb} + 1:\sqrt{Rc} = 1:\sqrt{Na} + 1:\sqrt{Pn} + 1:\sqrt{Ro}$, & conſéquemment $1:\sqrt{Pb} - 1:\sqrt{Pn}$ $[bn: Pb\sqrt{Pb}] = 1:\sqrt{Ro} - 1:\sqrt{Rc}$ $[co: Rc\sqrt{Rc}]$; d'où réſulte $bn:co = \frac{1}{Rc\sqrt{Rc}} : \frac{1}{Pb\sqrt{Pb}} = Pb\sqrt{Pb} : Rc\sqrt{Rc}$. Donc ſi l'on ſubſtitue les deux derniers termes de cette analogie, au lieu de leurs proportionnels bn, co, dans l'équation fondamentale $(fb:af - kc:bk) \times bn = (kc:bk - le:cl) \times co$, trouvée dans le *Lem. II*, on la changera en la ſpécifique $(fb:af - kc;bk) \times Pb \times \sqrt{Pb} = (kc:bk - le:cl) \times Rc \times \sqrt{Rc}$, parfaitement uniforme dans ſes deux membres; ce qui rend la quantité $(fb:af - kc:bk) \times Pb \times \sqrt{Pb}$. conſtamment la même par toute la Courbe cherchée. Donc, en l'exprimant en lettres employées juſqu'ici, l'on aura ici $-d(dx:dy) \times x\sqrt{x} = dz\sqrt{a}$, grandeur conſtante homogène, & conſéquemment $dz\sqrt{a}:x\sqrt{x} = -d(dx:dy)$ [à cauſe de $d(dx:dy) = (dyddx - dxddy):dy^2$] $= (-dyddx + dxddy):dy^2$ [à cauſe que dz ſuppoſée conſtante, rend $ddx = -dyddy:dx$] $= (dy^2 ddy + dx^2 ddy):dxdy^2 = dz^2 ddy:dxdy^2$, d'où réſulte $dzddy:dy^2 = dx\sqrt{a}:x\sqrt{x}$, de qui l'intégrale priſe à l'ordinaire, eſt $-dz:dy = -2\sqrt{a}:\sqrt{x} \pm b:c$, laquelle rend $dz = 2dy\sqrt{a}:\sqrt{x} \pm bdy:c$ ou [à cauſe de $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$] $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2dy\sqrt{a}:\sqrt{x} \pm bdy:c$, ce qui [en quarrant le tout, & en le reduiſant enſuite] donne $dy = cdx\sqrt{x} : \sqrt{(4acc + bbx - ccx \pm 4bc\sqrt{ax})}$ (A) pour l'équation finale de la Courbe cherchée.

Si

Si l'on suppose ici $b = o$, cette équation A devient $dy = dx\sqrt{x} : \sqrt{(4a - x)}$ qui est celle de la Brachystochrone ordinaire, c'est-à-dire, de la Cycloïde, qui d'entre toutes les Courbes possibles terminées comme elle en B, C, de quelques longueurs qu'elles soient, est celle le long de laquelle un poids tombant de B, arriveroit en C dans le tems le plus court. Mais tant que b demeure réelle dans la précédente équation A, elle donne une autre Courbe, qui d'entre toutes les possibles terminées en B, C, non quelconques, mais de même longueur qu'elle, est celle le long de laquelle un poids tombant de B, arriveroit en C dans le tems le plus court. Cette courbe exprimée par l'équation entiere A, changeroit de nature selon les différens rapports de b à c: en voici un cas remarquable, c'est celui de $b = c$; dans lequel elle deviendroit algébraique; ce cas la changeant en $dy = dx\sqrt{x} : \sqrt{(4a \pm 4\sqrt{ax})}$ de qui l'intégrale [en s'y prenant bien] se trouve être $y = (\pm \frac{2}{5}x : \sqrt{a} - \frac{8}{15}\sqrt{x} \pm \frac{16}{15}\sqrt{a}) \times \sqrt{(a \pm \sqrt{ax})}$ [en multipliant le second membre par $a\sqrt{a} : a\sqrt{a}$] $= (\pm 6ax - 8a\sqrt{ax} \pm 16aa)\sqrt{(a + \sqrt{ax})} : 15a\sqrt{a}$ [en prenant $tt = ax$] $= (\pm 6tt - 8at \pm 16aa)\sqrt{(a \pm t)} : 15a\sqrt{a}$.

SCHOLIE II.

Nous venons de supposer dans la Solution précédente la loi qu'on suppose d'ordinaire dans l'accéleration des poids qui tombent; savoir, que leurs vitesses sont en raison sou-doublées des hauteurs de leurs chutes: mais il est aisé de voir que ma Méthode n'est point assujettie à cette hypothése particuliere. En effet, suivant quelque fonction [que j'appelle X] des ordonnées Na [x] de la Courbe BaeC le long de laquelle un poids tombe; qu'on régle les vitesses de ce corps en chaque point correspondant de cette Courbe, en y supposant ses vitesses en raison des fonctions X correspondantes; si l'on s'y prend comme dans la solution précédente, & qu'on en suive exactement le fil, il conduira à l'équation générale $dy = cXdx : \sqrt{((ac \pm bX)^2 - ccXX)} = cXdx : \sqrt{(aacc \pm 2abcX + (bb - cc)XX)}$, que le cas de $b = o$, change en $dy = Xdx : \sqrt{(aa - XX)}$, qui est conforme en quelque cas à l'équation trouvée ci-dessus pour la solution du Probléme I. De maniére qu'une même courbe exprimée par $dy = Xdx : \sqrt{(aa - XX)}$ a tout à la fois les proprietez de rendre $\int Xdy$ un *plus grand*, & $\int (dz : X)$ un *plus petit*, quoique la converse ne vaille pas: car il y a une infinité d'autres courbes qui ont $\int Xdy =$ à un *plus grand*, sans cependant avoir $\int (dz : X) =$ à un *plus petit*, & réciproquement une infinité d'autres Courbes, lesquelles ont ce *plus petit* sans ce *plus grand*; & quoique les deux équations $dy = (X \pm c)dx : \sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}$ & $dy = cXdx : \sqrt{((ac \pm bX)^2 - ccXX)}$, qui résolvent les Prob. I & IV, ayent quelque apparence de conformité entr'elles, elles ne conviennent cependant que dans le seul cas de $c = o$ dans la premiére & de $b = o$ dans la seconde. C'est ce qui a trompé mon Frere, lorsqu'il a dit de ses équations touchant les *plus grands* & les *plus petits* dans les *Actes* de 1700 pag. 262 †, où il en a fait une Table que pour les rendre plus générales, *in omnibus istis aequationibus litteras* p, q, [qui chez moi sont X, Z,] *augeri minuive posse quantitate quacunque constante* c. Sa méprise paroit dès la premiére équation $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$ [marquée à l'ordinaire] $\frac{pdx}{\sqrt{aa - pp}}$ qu'il en donne pour exemple; car en y augmentant ou en y diminuant p d'une quantité constante c, cette équation devient $dy = (p \pm c)dx : \sqrt{(aa - pp \pm 2pc - cc)}$, qui à la vérité s'accorde avec la mienne $dy = (X \pm c)dx : \sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}$ du Probl. I & satisfait ainsi à la premiere condition qui est de rendre $\int pdy$ [$\int Xdy$] un *plus grand*; mais elle ne satisfait pas de même à l'autre qui est de rendre $\int (dt : p)$ [$\int (dz : X)$] un *plus petit*, puisque cette autre équation est réellement différente de $dy = cXdx : \sqrt{((ac \pm bX)^2 - ccXX)}$ qui donne ce *plus petit*. On le voit de cela seul, que si X, ou p, est telle qu'au commencement B de la Courbe [Fig. 5.] lequel rend $x = o$, cette

† Ci-dessus pag. 215.

te fonction X, ou p, ſoit auſſi $= 0$; cette Courbe ne pourra faire alors qu'un angle droit avec ſon axe BO dans le cas de $\int(dx:X)$ $[\int(dt:p)] =$ à un *plus petit*, au lieu que dans le cas de $\int Xdy$ $[\int pdy] =$ à un *plus grand*, elle peut faire au contraire tel angle qu'on voudra avec ſon axe ſelon le rapport de a à c.

Quant à ma derniere équation $dy = cXdx : \surd((ac \pm bX)^2 - ccXX)$ pour un *plus petit* $\int(dz:X)$, je la trouve conforme à celle $dy = apdx : \surd((bb - aa) \times pp - 2aabp + a^4)$ que mon Frere a donnée pour un plus grand $\int(dt:p)$ dans ſa Table, lig. dern. de la pag. 261 des *Actes* de 1701.* Mais je ne ſai quelle fauſſe lueur a pû l'éblouïr aſſez pour lui faire prendre ici pour un *plus grand*, ce qui ne ſauroit l'être, du moins ſi p ou X croiſſoit avec x, la moindre attention ſuffiſant pour faire voir qu'alors $\int(dt:p)$ croîtroit à l'infini. De plus, ſoit que $\int(dt:p)$ puiſſe être un *plus grand* ou non, on conviendra ſans peine que l'équation $dy = apdx : \surd((bb - aa) \times pp - 2aabp + a^4)$ que mon Frere vante pour un *plus grand* $\int(dt:p)$ ne ſatisfait point à un tel *plus grand*, quand j'aurai fait voir qu'il y a des cas où cette équation donne manifeſtement $\int(dt:p) =$ à un *plus petit*. Cela ſe voit premierement dans le cas de $b = 0$, dans lequel cette équation dégénère en $dy = pdx : \surd(aa - pp)$ qui eſt la premiere de la Table de mon Frere, qui y dit lui-même que cette derniere équation convient à un *plus petit* $\int(dt:p)$, comme je l'ai démontré ci-deſſus. Secondement ſi outre $b = 0$, l'on prend $p = \surd x$, ſa même équation [en prenant a pour l'unité] deviendra $dy = dx\surd x : \surd(a - x)$, qui eſt l'équation même de la cycloïde, ou de la Courbe ordinaire de la plus vîte deſcente, dont le tems eſt exprimé par $\int(dt:\surd x)$. J'avouë que je ne comprends pas comment mon Frere a pû prendre cela pour un *plus grand*: je ſuis d'autant plus ſurpris de ſon inadvertance, qu'on ſait l'attention ſcrupuleuſe qu'il donnoit juſqu'aux moindres choſes; & qu'il apportoit tant de ſoin à ce qu'il examinoit, que d'ordinaire il ne lui en échapoit rien de remarquable: auſſi obſerve-t-il fort à propos ſur la

fin

* Ci-deſſus pag. 214. ligne 3. de la Table.

fin de la p. 263 des *Actes* de 1700,* *Quod quanquam eadem ſit curva quæ Maximum* ſp dy, *& Minimum* ſ(dt : p) *ſuppeditat; iſta tamen curva priore prærogativa in genere duntaxat figurarum iſoperimetrarum, altera vero in ordine ad omnes omnino curvas potitur.* Mon Frere ayant donc ſû [comme il paroit par cette citation] que ſa premiere équation $dy = pdx : \surd(aa - pp)$ déſigne une courbe qui rend $\int(dt:p)$ un *plus petit*, non ſeulement par rapport aux Courbes iſopérimétres, mais encore par rapport à toutes les Courbes poſſibles compriſes entre deux points donnés, comme il arrive dans les Courbes Brachyſtochrones, pour telle hypothèſe qu'on voudra d'accéleration des poids qui tombent: je ne comprends pas comment il n'a point penſé à examiner auſſi les Courbes qui rendent $\int(dt:p)$ un plus petit, non abſolument par rapport à toutes les poſſibles, mais qui ne le ſoit que par rapport à celles qui ſont de même longueur entr'elles.

Perſonne aſſurément ne regardera comme impoſſible cet autre genre de Courbes, dans lequel $\int(dt:p)$ n'eſt un *plus petit* que par rapport aux iſopérimétres; ſi l'on conſidére qu'entre toutes les Courbes poſſibles terminées à deux points donnés inégalement haut, il ne s'en trouve à la vérité qu'une ſeule; ſavoir, la Cycloïde ordinaire, dans laquelle $\int(dx:\surd x)$ ſoit un *plus petit* abſolu, mais que parmi elles, il y en a d'égales en longueur déterminée plus grande ou plus petite que celle de l'arc de cycloïde compris entre ces deux points, entre leſquelles lignes égales il s'en trouve toûjours auſſi une qui a l'avantage d'être parcouruë depuis le plus haut de ces deux points juſqu'au plus bas par un corps grave, plus vîte qu'aucune de ſes égales, c'eſt-à-dire, qui d'entr'elles a ſeule l'avantage d'avoir un plus petit $\int(dt:\surd x)$. Il eſt viſible auſſi qu'en variant la longueur commune à ces dernieres Courbes, en d'autres longueurs pareillement déterminées & communes à d'autres Courbes compriſes entre les mêmes points qu'elles, il en réſultera autant de claſſes de Courbes compriſes entre ces deux points donnés, auxquelles dans chaque claſſe chaque lon-

 gueur

* Ci-deſſus pag. 216.

gueur déterminée ſera commune, & dont une dans chaque claſſe aura cette prérogative d'un *plus petit* préférablement à toutes les autres Courbes de cette claſſe. De ſorte que la longueur déterminée & commune à toutes les Courbes de chaque claſſe, pouvant varier à l'infini d'une claſſe à l'autre, dans laquelle cette longueur augmentée ou diminuée ſoit auſſi commune à toutes les Courbes de cette autre claſſe ; il y aura une infinité de telles claſſes, dont chacune aura ſa Brachyſtochrone particuliere, c'eſt-à-dire, une Courbe, qui préférablement à toutes les autres de cette claſſe rendra $\int(dt : \sqrt{x})$ un *plus petit*. Mais entre tous ces *plus petits*, dont chaque claſſe n'en a qu'un, il en a un qui eſt le plus petit de tous, & que pour cette raiſon l'on peut appeller le *plus petit* des *plus petits*, ou un *plus petit abſolu*, qu'on ſait ne convenir qu'à la cycloïde compriſe, comme toutes ces autres Courbes, entre les deux point donnés. Quant aux autres plus petits $\int(dt : p)$ particuliers chacun à chaque lougueur déterminée commune aux Courbes de chacune des claſſes précédentes, celles de ces Courbes, auxquelles ils conviennent, chacun à une ſeule dans chaque claſſe, ſont toutes compriſes, de même que la cycloïde ordinaire, dans ma précédente équation générale $dy = cXdx : \sqrt{((ac \pm bX)^2 - ccXX)}$, qui eſt ſemblable à la troiſiéme de la Table de mon Frére, à laquelle il attribuë $\int(dt:p)$, c'eſt-à-dire, $\int(dz: X)$ comme un *plus grand*; mais mal à propos.

Pour ce qui eſt de la quatrieme $dy = adx: \sqrt{(pp - aa)}$, & de la ſixiéme $dy = adx: \sqrt{(bb - 2bp + pp - aa)}$, des équations de ſa Table, à la prémiére deſquelles il aſſigne $\int(dy: p)$ pour un grand, & $\int pdt$ pour un plus petit, en aſſignant à l'autre $\int pdt$ pour un plus grand ; il les auroit ſurement omiſes, s'il eût fait réflexion qu'elles ſont compriſes dans la premiére & dans la troiſiéme de cette Table, n'en différent qu'en ce que dans ces deux-ci p eſt ce qu'eſt $aa:p$ dans ces deux-là. En effet, en mettant $aa: p$ aulieu de p, dans celle qu'on voudra de ces équations, la quatriéme & la ſixiéme ſe

changeront en la premiére & la troiſieme; & réciproquement ces deux-ci en ces deux-là ; de ſorte que l'on peut dire la même choſe de la premiére & de la troiſiéme, que de la quatriéme & de la ſixiéme, deſquelles la quatriéme $dy = adx: \sqrt{(pp - aa)}$ veut à la vérité pour un plus grand rélatif $\int(dy:p)$ & en même temps pour un plus petit abſolu $\int pdt$; mais la ſixiéme $dy = adx: \sqrt{(bb - 2bp + pp - aa)}$ ne convient qu'à un plus petit rélatif $\int pdt$; & non pas [comme mon Frére l'a dit] à un plus grand $\int pdt$, lequel n'eſt pas même poſſible, du moins dans le cas où p diminuë pendant que x croit.

Mon Frére auroit omis de même dans ſa Table la ſeconde équation $dy = (a - p)\, dx: \sqrt{(2ap - pp)}$ qu'il dit avoir un plus petit $\int pdy$, ou la cinquiéme $dy = (p - a)\, dz: \sqrt{(2ap - aa)}$ qu'il dit auſſi avoir un plus petit $\int dy:p$, s'il eût auſſi fait réflexion que ces deux équations ne différent point non plus entr'elles, puiſqu'en mettant $aa:p$ au lieu de p dans celle qu'on voudra des deux, elle deviendra toujours l'autre. Il en eſt de même de la ſeptiéme & de la neuviéme, de la huitiéme & de la dixiéme, leſquelles priſes ainſi deux à deux ſe changent pareillement l'une en l'autre par la ſeule ſubſtitution de $aa: q$ au lieu de q, dans celle qu'on voudra des deux.

Tout cela fait voir que la moitié des équations de la Table de mon Frere eſt ſuperflue, & qu'ainſi il auroit pû l'y omettre ; ce qui lui auroit épargné un travail inutile & immenſe, comme on le voit par le long & pénible calcul qu'il a employé de tems en tems dans ſon analyſe qu'il publia l'année ſuivante 1701. Outre cela j'ai obſervé beaucoup d'autres choſes à reprendre dans ces équations, parmi leſquelles il y en a qui, bien loin de s'accorder, s'impliquent manifeſtement : par exemple, quand mon Frere a cru, par je ne ſai quelle mépriſe, que dans toutes ces équations les lettres ou les quantités p, q, peuvent être augmentées ou diminuées de telle quantité conſtante qu'on voudra, & que de cette maniere la courbe trouvée ſatisfera encore à la condition preſcrite ; & que ſuivant cela, au lieu de ſa premiere équation $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$, il a ſubſtitué cette autre $dy = (p - c)\,dx : \sqrt{(aa - pp + 2pc - cc)}$, qu'il a dit exprimer une Courbe qui comprend un plus grand $\int pdy$, pendant qu'il diſoit que cette même équation ſatisfait à un plus petit $\int pdy$ dans le cas où $c = a$ la fait dégénerer en $dy = (p - a)\,dx$ $\sqrt{(2ap - pp)}$ qui eſt la ſeconde de ſa Table : comment concilier des choſes auſſi incompatibles entr'elles que celles-là ?

Cette erreur ſemble tirer ſon origine de ce que mon Frere, dans l'Analyſe de ſon Prob. I. [Voyez les *Actes de Leipſick* de 1701, pag. 222 lig. 9. *] n'a pas integré aſſez generalement la differentielle $aatdt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)}$ quand il a dit, *facta ſummatione acquiritur partim* $aa : \sqrt{(aa + tt)}$ *partim* $a - aa : \sqrt{(aa + tt)} = p$; vû qu'au lieu de cette derniere équation, il auroit dû plûtôt prendre $c - aa : \sqrt{(aa + tt)} = p$, qui eſt plus univerſelle. Après cela procedant, comme il a fait, il ſeroit arrivé à l'équation generaliſſime $dy = (c - p) \times dx :$ $\sqrt{(aa - (c - p)^2)} = (c - p)\,dx : \sqrt{(aa - cc + 2cp - pp)}$, qui non ſeulement comprend les deux ſiennes, mais encore une infinité d'autres, ſelon les différens rapports arbitraires de c à a. Cette derniere équation generale eſt réellement la même que $dy = (X \pm c)\,dx : \sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}$ que j'ai trouvée ci-deſſus dans la ſolution du Probl. I ; Et la courbe qu'elle exprime, donnera $\int pdy$ tantôt pour un *plus grand*, tantôt pour un *plus petit*, ſelon les différens rapports de a à c.

Il eſt viſible que les deux premieres équations de la Table de mon Frere, ſavoir $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$ & $dy = (a - p)\,dx : \sqrt{(2ap - pp)}$, ne ſont que deux cas particuliers entre une infinité d'autres de ma précédente équation $dy = (X \pm c)\,dx : \sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}$. Car ſi l'on prend $c = 0$, cette équation generale donnera la premiere de ces deux-là ; & ſi l'on prend $c = a$, elle donnera l'autre. Quant à ſavoir, ſi quelque cas particulier que ce ſoit de cette équation generale, rend $\int pdy$ un *plus grand*, ou un *plus petit*, c'eſt une choſe aiſée à reconnoitre, ſi l'on fait attention à l'équation primitive $ady = (X \pm c) \times dz$ qui m'a donné cette generale dans la ſolution du Prob. I. Car en y conſiderant

* Ci-deſſus pag. 223. ligne 25.

rant ſi X croît ou décroît pendant que x croît, & ſi c & X ſont affirmées ou niées enſemble, ou alternativement ; on verra auſſitôt ſi $\int pdy$ eſt un *plus grand* ou un *plus petit*, en s'y prenant à peu près de même que mon Frere s'y eſt pris pour cela dans la pag. 222. des *Actes* de 1701. *

Tout ce que nous avons dit juſqu'ici des équations en qui $\int pdy$, ou [ce que j'ai fait voir revenir au même] $\int (dy : p)$ eſt un plus grand ou un plus petit, doit auſſi s'entendre [en y faiſant les changemens convenables] des autres équations en qui $\int qdy$, ou $\int (dy : q)$, eſt l'un ou l'autre, & de celles en qui $\int xdq$ l'eſt dans les précédentes ſolutions des Probl. II & III.

Mais il eſt tems de metrre fin au Probléme des Iſopérimétres, que mon Frere me propoſa autrefois avec autant de pompe qu'il lui a couté de peine & de calcul pour les reſoudre lui-même ; ainſi qu'on le voit par ſa longue & pénible Analyſe ; au lieu qu'on voit ici tous ces Problémes réſolus fort ſimplement & ſans aucun calcul, par la ſeule loi de l'uniformité, ſuivant laquelle je pourrois encore, avec la même facilité, en réſoudre pluſieurs autres concernant cette matiere, en y employant des fonctions de certaines quantités que nous n'avons point ici conſiderées, propres à donner des *plus grands* ou des *plus petits*. Mais en voilà aſſez, ce me ſemble, pour conduire ceux qui voudront pénétrer dans ce que j'omets ici, pour n'être pas trop long.

Cependant pour mettre encore plus à découvert la fécondité du principe de l'uniformité, employé juſqu'ici ; Voici comment j'en déduis la ſolution d'un Probléme, qui ne regarde point les Iſopérimétres, mais l'Iſochroniſme : ſavoir, entre une infinité de Courbes Iſochrones, c'eſt-à-dire, parcourues en tems égaux par un corps grave, quelle eſt celle qui donne un plus grand ou un plus petit ? Pour exemple ſoit le Probléme ſuivant.

PROBLEME V.

De toutes les Courbes Iſochrones [Fig. 4] *compriſes entre deux points donnés* B, C, *dont* B *eſt le commencement de la deſcente ſuivant*

* Ci-deſſus pag. 228. 229.

ſuivant ces Courbes ; trouver celle BaeC, *qui avec la droite* BC *comprendroit un ſegment* BCeaB *le plus grand de tous ceux qui peuvent être ainſi compris entre chacune des autres Iſochrones & cette droite ou ſoutendante* BC *commune à toutes.*

SOLUTION.

Soit CV perpendiculaire à la verticale BV, avec leſquelles la droite BC fera un triangle rectangle BVC, invariable à cauſe des points donnez B, C, quelque variation qu'il arrive à la Courbe cherchée $BaeC$; duquel triangle le ſegment $BCeaB$ ſera retranché par cette Courbe; de ſorte que ce ſegment $BCeaB$ devant [*hyp.*] être un *plus grand*, le reſte $BeaCV$ du triangle BVC doit être un *plus petit*, lequel *plus petit*, lorſqu'il ſera déterminé, donnera ce *plus grand* cherché C'eſt pourquoi je ne vas m'attacher qu'à déterminer ce plus petit.

Pour cela je ſuppoſe la *Fig.* 4, préparée comme ci-deſſus dans la Solut. II du Probl. I, excepté que je n'y ſuppoſe plus que la ſomme des trois particules ab, bc, ce, ſoit égale à la ſomme des trois ag, gi, ie, infiniment voiſines de celles-là; mais au lieu de cela, je ſuppoſe ici que ces particules ſont diſpoſées de maniére que la ſomme des trois petits tems par ab, bc, ce, ſoit égale à la ſomme des trois par ag, gi, ie: ſavoir qu'après que le poids de chûte commencée au repos en B, eſt arrivé en a, il parcourt l'élément $abce$ de la courbe dans un tems égal à celui quil emploîroit à parcourir l'infiniment voiſin $agie$

Avant toutes choſes, il faut chercher ici l'équation fondamentale qui doit ſervir à la ſolution, non ſeulement de la queſtion préſente, mais encore de toutes celles qu'on peut faire ſur les Courbes Iſochrones. Pour cela je conſidére que, ſuivant ce qui a été dit dans la Solut. du Probl. 4, l'égalité qu'on ſuppoſe ici entre les tems par $abce$, & par $agie$, y doit rendre $ab:\sqrt{BG} + bc:\sqrt{BH} + ce:\sqrt{BP} = ag:\sqrt{BG} + gi:\sqrt{BH} + ie:\sqrt{BP}$, d'où réſulte [en retranchant choſes égales de part

part & d'autre] $bn:\sqrt{BG} + co:\sqrt{PB} = (gm + ih):\sqrt{BH}$, & en conſéquence $bn:\sqrt{BG} - gm:\sqrt{BH} = ih:\sqrt{BH} - co:\sqrt{PB}$; de ſorte que ſubſtituant ici au lieu de bn, gm, ik, co, leurs valeurs $fb \times gb:ab$, $kc \times gb:bc$, $kc \times ci:bc$, $le \times ci:ce$ l'on aura l'équation fondamentale $(fb:ab \times \sqrt{BG} - kc:bc \times \sqrt{BH}) \times bg = (kc:bc \times \sqrt{BH} - le:ce \times \sqrt{BP}) \times ci$. Or la loi du *plus petit* donne ici les aires $GabceQ$, $GagieQ$ égales entr'elles, c'eſt-à-dire, $aG \times GH + bH \times HP + cP \times PQ = aG \times GH + gH \times HP + iP \times PQ$; ce qui donne [en retranchant choſes égales de part & d'autre] $bg \times HP = ci \times PQ$, & en conſéquence $bg:ci = PQ:HP = \frac{1}{HP}:\frac{1}{QP}$. Donc, en ſubſtituant ces deux derniers termes au lieu de leurs proportionnels bg, ci, dans la précédente équation fondamentale, l'on aura pour ici la ſpécifique $(fb:ab \times \sqrt{BG} - kc:bc \times \sqrt{BH}):HP = (kc:bc \times \sqrt{BH} - le:ce \times \sqrt{BP}):PQ$, de membres entierement conformes. Ce qui [à cauſe que $fb:ab \times \sqrt{BG} - kc:bc \times \sqrt{BH}$ eſt la différentielle de la fraction $dy:dz\sqrt{x}$, & que $HP = dx$] me fait auſſi-tôt conclure que $d(dy:dz\sqrt{x}):dx = 1:a\sqrt{a}$, quantité conſtante homogéne; & qu'ainſi $d(dy:dz\sqrt{x}) = dx:a\sqrt{a}$, dont l'intégrale eſt $dy:dz\sqrt{x} = (x \pm b):a\sqrt{a}$, ou [en multipliant en croix] $a\,dy\sqrt{a} = (x+b)\,dz\sqrt{x}$; qui reduite [en conſiderant que $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$] devient $dy = (x \pm b)\,dx\sqrt{x}:\sqrt{(a^3 - x(x \pm b)^2)}$, qui eſt l'équation finale cherchée, laquelle deviendra $dy = x\,dx\sqrt{x}:\sqrt{(a^3 - x^3)}$, ſi l'on y ſuppoſe la grandeur arbitraire $b = 0$.

Si l'on ſuppoſe $= 0$ la quantité conſtante homogéne à $d(dy:dz\sqrt{x}):dx$, c'eſt-à-dire $d(dy:dz\sqrt{x}):dx = 0$, & conſéquemment $d(dy:dz\sqrt{x}) = 0$, ſon intégrale ſera $dy:dz\sqrt{x} = 1:\sqrt{c}$, conſtante auſſi & homogéne; & une réduction ſemblable à la précédente, changera cette intégrale en $dy = dx\sqrt{x}:\sqrt{(c - x)}$, qui eſt une équation à une cycloïde, qui auroit B pour commencement, & dont le cercle générateur, qui l'engendreroit en roulant ſur BNS, auroit pour diamétre une ligne quelconque c.

 Cela

Cela se peut aussi conclure, & tout d'un coup, de la seule considération de la plus vîte descente. Car dès qu'on sait, que c'est par la cycloïde $BaeC$ que cette descente se doit faire pour être la plus prompte qu'il soit possible de B en C; l'on voit aussi-tôt qu'il faudroit un plus long tems au mobile pour tomber ainsi de B en C par toute autre courbe comprise de même entre ces deux points, & qui avec la droite BC feroit un segment égal à celui que cette cycloïde fait avec cette droite. Il est ici à remarquer que le Probléme est le même, soit qu'on veuille, *de tous les segmens égaux placés sur la corde ou soutendante* BC *trouver celui dont l'arc* BaeC *est parcouru dans le tems le plus court*; ou qu'on veuille, *de tous les arcs isochrones décrits sur la même soutendante* B C, *déterminer celui qui avec elle comprend le plus grand segment.* Car il est aisé de voir, ainsi que mon Frére l'a autrefois observé [voyez les *Actes de Leipsick* de 1701. pag. 227 *] qu'en général cette réciprocation est valable; ensorte que de chercher entre une infinité de Courbes, qui ont quelque affection A au même degré, laquelle est celle qui a quelqu'autre affection B au plus grand ou au plus petit degré; c'est la même chose que de chercher réciproquement entre une infinité de Courbes, qui ont la même affection B, laquelle est celle qui a l'affection A au plus petit ou au plus grand degré: ensorte, dis-je, qu'il n'y a de différence que de nom ou d'expression dans la maniére de résoudre ces deux questions: l'équation fondamentale pour l'une, tiendra lieu d'équation spécifique pour l'autre; & réciproquement.

Pour mettre fin à ce Mémoire, j'y vas ajouter ma Méthode directe de résoudre le fameux Problême de la plus vîte descente, n'ayant point encore publié cette méthode, quoique je l'aye communiquée à plusieurs de mes Amis, dès 1697, que je publiai mon autre indirecte. L'incomparable Mr. LEIBNITZ, à qui je les avois communiquées toutes deux; comme il l'a témoigné lui-même dans les *Actes de Leipsick* de cette même année 1697, pag. 204, trouva cette méthode directe d'une beauté si singuliére, qu'il me conseilla de ne la pas publier, pour des

* Ci-dessus pag. 234.

raisons qui étoient alors, & qui ne subsistent plus. J'espére qu'elle plaira aussi d'autant plus au Lecteur, que quoique l'Analyse n'en conduise qu'au rayon de la curvité, ou du cercle osculateur de la courbe cherchée, laquelle se trouve ainsi être la cycloïde ordinaire qu'on sait avoir seule, en quelque point que ce soit, un tel rayon de sa curvité ou de son cercle osculateur; cette méthode me fournit cependant aussi une démonstration synthétique, qui avec une facilité surprenante & agréable, fait voir que cette cycloïde est effectivement la courbe cherchée de la plus vîte descente.

PROBLEME

De la plus vîte descente, résolu d'une maniere directe & extraordinaire.

SOLUTION ANALITIQUE.

Par le point supérieur A, d'où le Corps grave commence à tomber à l'autre B, soit l'horisontale AL coupée en quelque point N, par une droite quelconque INC, sous tel angle INL qu'on voudra. D'un point quelconque K, pris de même à volonté sur la partie NI, de la droite INC, soit une autre droite Knc qui fasse avec elle l'angle CKc infiniment aigu, de maniére que les petits arcs Ce, Mm, décrits du centre K, puissent être pris pour de petites lignes droites. Tout ce que je vas faire ici, ce sera de chercher, entre une infinité de ces petits arcs concentriques, quel est celui que le corps grave, tombé de A, peut parcourir dans le petit tems le plus court. TAB. XXXII. *Fig. 6.*

Pour cela, après avoir appellé NK, a; MN, x; & fait la verticale MD soit $1 : m = MN\,[x]$. $MD = mx$. Et $1 : n = CK : Ce = MK\,[x+a] : Mm\,[nx+na]$. Avant que d'aller plus loin, il est à remarquer qu'il n'y a par tout là que x de variable; & que m, n, sont deux nombres dont le premier est fini, & le second infiniment petit. Cela posé l'on aura $Mm : \sqrt{MD} = (nx+na) : \sqrt{mx}$, pour le petit tems par Mm, lequel doit être ici un plus petit, qui divisé par la fraction constante $n : \sqrt{m}$, & ensuite différentié, doit donner en conséquence $(x - a)\,dx : 2x\sqrt{x} = 0$ d'où resulte $x = a$. Ce qui fait voir que la nature de la courbe AMB de la plus vîte descente est d'avoir, en quelque point M que ce soit, le rayon MK de sa curvité, ou de son cercle osculateur, coupé en deux parties égales par son axe AL : proprieté qu'on sait d'ailleurs depuis long-tems ne convenir qu'à la seule cycloïde. Mais quand cela ne seroit pas déja connu, on ne le trouveroit aisément par nôtre calcul intégral.

Suivant cette méthode, le Probléme présent peut encore être résolu plus généralement, savoir en supposant que les corps graves en tombant, ont leurs vitesses, non en raison soudoublée des hauteurs de leurs chûtes, comme nous venons de le supposer à l'ordinaire, mais en raison de quelque fonction que ce soit de ces hauteurs. Car si l'on apelle mX cette fonction de la hauteur DM, & qu'on s'y prenne comme ci-dessus l'on aura $(x + a) : mX$ pour un *plus petit*, dont la différentielle sera par conséquent $(X - x\Delta x - a\Delta x)\,dx : XX = 0$ ce qui donne $X = (x + a) \times \Delta x$, de laquelle équation la racine x donnera le rapport de MN à NK; après quoi ce sera au calcul intégral à reduire la nature ainsi trouvée de la Courbe, à une équation faite de ses coordonnées : ce qu'il ne s'agit pas de faire ici.

SOLUTION SYNTHETIQUE

Soient MK, mK, deux perpendiculaires à la cyloïde AMB en deux points M, m, infiniment proches l'un de l'autre, lesquelles perpendiculaires se rencontrent au point K de la dévelopée de cette cycloïde, & qui prolongées rencontrent en C, c quelqu'autre courbe ACB que ce soit, comprise comme cette cycloïde entre les deux points A, B. Après avoir imaginé le petit arc Ce décrit du centre K, & menés MD, CG, perpendiculaires en D, G, à l'horizontale AL; soit menés DK, qui prolongée aussi bien que CG [s'il est nécessaire] coupe CG en H; & à laquelle GI soit paralléle, Enfin sur CG prolongée, soit prise CF troisiéme proportionnelle à MD, CH.

Cela fait, ayant $MN = NK$, pat la proprieté de la cycloïde l'on aura pareillement $CN = NI$. Or $CN^2 + NK^2 > 2 \times CN \times NK$, & conséquemment $CN^2 + NK^2 + 2 \times CN \times NK > 4 \times CN \times NK = CI \times MK$. Donc ayant $CN^2 + NK^2 + 2 \times CN \times NK = CK^2$, l'on aura aussi $CK^2 > CI \times MK$. Ce qui rend $MK : CK < CK : CI$. Or $MK : CK = MD : CH$ [*hyp.*] $= CH : CF$. Et $CK : CI = CH : CG$. Donc $CH : CF < CH : CG$. Et conséquemment $CG < CF$.

Or le petit tems que le corps grave tombé de l'horizontale AL, requiert pour parcourir le petit arc Mm, est au petit tems que le même corps tombé du même horison AL, requieroit pour parcourir le petit arc Ce, en raison composée de la droite de ces petits espaces Mm, Ce, & de la reciproque des racines quarrées des hauteurs MD, CG : c'est-à-dire, que le petit tems par Mm, est au petit tems par $Ce = \frac{Mm}{\sqrt{MD}} : \frac{Ce}{\sqrt{CG}} =$ [à cause que la précédente hypothése de MD, CH, CF, en proportion continuë, donne $\sqrt{MD} : \sqrt{CF} = MD : CH = MK : CK = Mm : Ce$] $= \frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{MD}} : \frac{\sqrt{CF}}{\sqrt{CG}} = \sqrt{CG} : \sqrt{CF}$. Donc, venant de trouver CG moindre que CF, l'on aura pareillement ici le tems par Mm plus petit que le tems par Cc hypothénuse du triangle rectangle Cec. Donc le tems par tous les élémens Mm, c'est-à-dire, par la cycloïde AMB, est plus petit que le tems par tous les élémens Cc, c'est-à-dire, que par toute autre courbe ACB comprise entre les mêmes points A, B, que la cycloïde AMB. *Ce qu'il falloit démontrer.*