N°. LXXXI.

DE LINEARUM CURVARUM LONGITUDINE.

Auctore Joh. CRAIG.

L E M M A.

DUORUM *Quadratorum ſummam in alia duo Quadrata dividere.* Philoſoph. Tranſact. N°. 314. Mart. Apr. 1708. Art. IV. p. 64.

Sint dz^2, ds^2 duo Quadrata data, quorum ſumma $dz^2 + ds^2$ dividenda eſt in alia duo Quadrata dx^2, dy^2; ſintque m & n duo quilibet numeri ad arbitrium ſumendi. Jam ex conditione Problematis, eſt $dx^2 + dy^2 = dz^2 + ds^2$, unde [ut ex DIOPHANTO conſtat,] erit $dx = ((mm - nn)\,dz + 2mn\,ds) : (mm + nn)$; $dy = ((nn - mm)\,ds + 2mn\,dz) : (mm + nn)$. *Q. E. I.* Acta Erud. Lipſ. 1710. Aug. pag. 352.

P R O B L E M A.

Curvas innumeras invenire, quæ ſint ejuſdem longitudinis cum Curva quavis propoſita, ſive algebraïca, ſive tranſcendente.

Deſignent z, s, coordinatas Curvæ propoſitæ, & x, y coordinatas Curvæ quæſitæ, quæ ejuſdem ſit longitudinis cum propoſita: Unde, ex Curvarum Elementis $dx^2 + dy^2 = dz^2 + ds^2$. Ideoque, per Lemma præcedens, $dx = ((mm - nn)\,dz + 2mn\,ds) : (mm + nn)$ & $dy = ((nn - mm)\,ds + 2mn\,dz) : (mm + nn)$, Quarum integrales ſunt $x = ((mm - nn)\,z + 2mns) : (mm + nn)$, & $y = ((nn - mm)\,s + 2mnz) : (mm + nn)$.

Et ſic innoteſcunt coordinatæ x & y unius ex Curvis quæſitis, ſimiliter ex hac una invenietur ſecunda, ex ſecunda tertia, & ſic porro innumeræ invenientur. *Q. E. I.*

Exempla jam non addo, nam poſtea [DEO volente] opportunior dabitur locus, in quo methodus hæc ad plura hujuſmodi Problemata extendetur, & ſolutio Problematis hujus per Exempla illuſtrabitur. Et quidem hanc ſolutionem, ſemel iterumque, tam aperte indicavi, ut facillime a quovis in his verſato deduci poſſit ex iis, quæ ſubjunguntur ſolutioni caſus ſpecialis hujus Problematis, in quo ſcil. Curva propoſita eſt algebraïca, quamque exhibui in *Actis Philoſ. R. S.* Janu. 1704 †, ut

† Supra N°. LXXIII.

ut Clariſſ. Problematis propoſitori Dno. *Joh.* BERNOULLI conſtaret illius ſolutionem methodis Calculi differentialis inverſis maxime tritis poſſe obtineri; utpote qui, in privatis ſuis ad Dnum. CHEYNÆUM litteris ſignificabat eandem non poſſe exhiberi per Theoremata noſtra in *Actis Phil. R. S.* Mart. 1703 publicata. Et quoniam, ex *Actis Erudit.* Aug. 1705 *, percipio ſolutionem illam [quæ ſcopo prædicto ſatis ſuperque ſatisfaciebat] Doctiſſimo Viro non arridere, ideo modo præmiſſam ſolutionem, nulli objectioni obnoxiam, publici juris facio. Neceſſe itaque eſt, ut Clariſſ. BERNOULLI agnoſcat, vix ullum dari Problema, cujus ſolutio ex Calculo Integrali facilius deducitur, quam ſui de Transformatione Curvarum.

Quæ vero in ipſius BERNOULLI ſolutione diſplicent, paucis enarrabo. Et Primo, Quod ad Curvas tantum algebraïcas eandem extenderit. Secundo, Quod mechanica tantum ſit, a *Motu* [ut vocat] *reptorio* tota dependens. Immortali quidem honore dignus eſt HUGENIUS, ob inventum Evolutionis motum, quia, & ipſe, & poſt ipſum alii, plurima egregia Theoremata geometrice exinde deduxerunt. Sed nec Motus LEIBNITII tractionis, nec BERNOULLI Motus reptorius, cum HUGENII Motu evolutionis comparabuntur, donec, cum HUGENIO, celeberrimi Viri Curvas per Motus ſuos genitas ad leges geometricas revocaverint; quod cum neuter eorum præſtiterit, ideo Problematum ſolutiones, dependentes a Curvis per Motus ſuos genitis, inter Mechanicas ſolum annumerari poſſunt.

* Supra N°. LXXIV. pag. 409. 410.

EXCER-

N°. LXXXII.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola J. BERNOULLI *ad Dom.* BURNETUM, *Illuſt. Epiſcopi Sariſberienſis filium, data* 9 Jan. 1709.

PROPOSUI olim Problema, quod alius Mathematicus mihi popoſuerat, *de curva data in aliam differentem* [algebraïca in algebraïcam] *ejuſdem longitudinis transmutanda*, ſimulque inſinuavi ſolutionem ejus in mea manu eſſe. Hujus ſolutionem dare poſſe ſibi viſus eſt D. CRAIGIUS, eamque *Tranſactionibus Londinenſibus* Januar. & Febr. 1704 inſeruit, † unde poſtea in *Acta Lipſienſia* Aprilis 1705 tranſlata eſt. Sed oſtendi in *Actis* Auguſti ejuſdem Anni, †† cum propriam ſolutionem darem, a D. CRAIGIO principium petitum fuiſſe, quoniam ſolutionem ſuam fundavit in poſtulato æque aut magis difficili quam ipſum Problema. Supponit enim quod ſemper facile ſit dividere ſummam duorum quadratorum in duo alia quadrata, quorum latera ſint ſummabilia, ſeu dent ordinatas figurarum quadrabilium. Dn. CRAIGIUS, triennio elapſo, ſatisfacturus tandem poſtulato ſuo, ſchediaſma quoddam inſeruit *Tranſactionibus Londinenſibus* menſium Martis & Aprilis Anni 1708, * ubi majorem adhuc Paralogiſmum admiſit; nam credens exhiberi a ſe curvam novam priori æqualem, revera exhibet curvam eandem cum priore, ad alium ſaltem axem accommodatam. Si bona eſſet D. CRAIGII ſolutio, ipſe Author ejus primus non fuiſſet: lubricus enim locus eſt, & me ipſum ſpecies ac ſimplicitas ſolutionis olim deceperat, cujus rei teſtes habeo amicos, ſed mox Paralogiſ-

Miſcel. Berolin. Tom. I. pag. 184.

† N°. LXXIII. †† N°. LXXIV. * N°. præced.

logiſmum detexi. Quin & D. MOIVRÆUS in hanc falſam ſolutionem incidit triennio abhinc, parumque abfuit ab ejus publicatione: ſibi tamen diffidens, mecum eam prius communicavit, erroremque me monente agnoſcens, ſibi cavit. At D. CRAIGIUS non tantum publice ſolutionem ſuam nulli objectioni obnoxiam pronunciare audet, ſed meam etiam Methodum per Motum Reptorium ſpernit; cum tamen ea ſit una ex meis inventionibus, quas maxime æſtimo, quam LEIBNITIUS, NEWTONUS, aliique intelligentes, non ſatis æſtimare potuerunt, & cujus ope detexi quadraturæ circuli longe præferenda, quale quid eſt Methodus generalis omnes curvas ad circulorum circumferentias ipſis æquales reducendi, tam prope quam velim. Et fruſtra Dn. CRAIGIUS ſolutionem meam mechanicam eſſe pronunciat, tanquam a motu dependentem, cum tamen ad calculum analyticum reduci poſſit, & curva data exiſtente algebraïca, etiam Reptoriæ ſint tales.

N° LXXXIII.

FRAGMENTUM

Ex Logarithmotechnia generali : Autore Joh. CRAIG.

Phil. Tranſact. N°. 323. Oct. 1710. Art. III. pag. 195. Acta Erud. Lipſ. 1713. Jul. p. 315.

OBiter Lectorem hic monitum volo, quod Curva, quæ ex noſtra Problematis de Longitudine linearum curvarum analyſi in *Actis Philoſ.* R. S. Anni 1708. * edita (reperitur), eadem ſit eum propoſita. Ego quidem de recte inſtituta analyſi tantum ſollicitus, hanc Curvæ propoſitæ & inventæ coincidentiam minime obſervabam, priuſquam de ea me certiorem fecerit Clariſſ: Dnus. *Joh.* BERNOULLI, in litteris ſuis ad Dnum. *Guil.* BURNETUM R. S. S. miſſis; in quibus etiam Celeberr. Virum meis contra *Motum* ſuum *reptorium* objectionibus plene ſatisfeciſſe, ex puro (quam colo) Veritatis amore, libenter agnoſco.

† N° LXXXI.

LETTRE

N°. LXXXIV.

LETTRE

De M. Jean BERNOULLI *à* M. DE MONTMORT.

MONSIEUR,

COMME je n'ay receu votre beau Livre † que long-tems après votre derniere lettre, j'ai bien voulu différer la reponſe juſqu'à ce que je l'euſſe reçû & lû, pour être en état de vous en dire mon ſentiment. Quoiqu'une fluxion ſur les yeux, dont je ſuis ſouvent incommodé, m'empêche de travailler beaucoup ſur des choſes qui demandent de longs calculs, ſur tout dans le temps de l'hyver, je n'ai pas laiſſé d'examiner aux heures oiſives les principaux endroits de votre Traité, & de faire moi-même, autant que la foibleſſe de mes yeux me l'a permis, le calcul de la plûpart des Problémes. J'y ai trouvé effectivement pluſieurs choſes très belles & très curieuſes pour la ſpéculation, & utiles pour l'uſage qu'on en peut tirer dans les occaſions; mais pour vous faire part des remarques en particulier que j'ai faites çà & là, en liſant votre ouvrage, puiſque vous le ſouhaités, les voici.

Eſſay d'Analyſe ſur les Jeux de Hazard. 2e. Edition Paris. 1713. 4o. pag. 283.

La route générale que vous tenés, qui eſt de chercher dabord le nombre des cas qu'une telle & telle choſe peut arriver, eſt très ſûre & bonne; mais il eſt de la prudence du Calculateur de ne pas ſe plonger dans un calcul long & ennuyeux, en multipliant les cas plus qu'il ne faut & au de-là de la néceſſité. Par exemple *Pierre* parie contre *Paul* que d'entre 300 jettons [dont il y a également de blancs, de noirs, &

† *Eſſay d'Analyſe ſur les Jeux de hazard.* 4°. Paris. 1708.

& de rouges] il tirera un jetton blanc; pour ſavoir la raiſon de leurs ſorts, je dis qu'il n'eſt pas néceſſaire de dire qu'il y a 100 cas qui font gagner *Pierre*, & 200 qui le font perdre; voiant évidemment qu'à cauſe de l'indifference, ou de l'égale facilité, avec laquelle chaque couleur peut être tirée, ce ne ſont proprement que trois cas à conſiderer; un pour le blanc, un pour le noir, & un pour le rouge; en ſorte qu'il vaut mieux s'attacher au nombre de diverſes couleurs qui peuvent arriver avec une égale facilité, qu'au nombre des jettons, dont la multitude égale de chaque couleur ne varie aucunement les ſorts des Joueurs, qui eſt toujours comme 1 à 2. Il ſemble cependant que vous n'avez pas obſervé cela, avec beaucoup de ſoin. En voici quelques Exemples. Dans votre Livre, *page* 8 ſur le *Jeu de Pharaon*, pour chercher le ſort du Banquier qui tient quatre cartes entre les mains, parmi leſquelles la carte du Ponte eſt une fois, vous faites le denombrement de tous les 24 arrangemens des quatre cartes, pour en prendre les favorables au Banquier, ſans faire reflexion que ce ne ſont pas proprement les divers arrangemens, mais ſeulement les diverſes ſituations de la carte du Ponte entre les autres, qui font la diverſité des cas; ainſi au lieu de vos 24 arrangemens, je n'ai que ces quatre variations à conſiderer (je nomme a la carte du Ponte, & b chacune des autres.)

1. *bbba*, 2. *bbab*, 3. *babb*, 4. *abbb*

De ces quatre variations, la premiere eſt indifferente au Banquier, la 2e. & la 4e. le font gagner, & la 3e. le fait perdre; ſon ſort ſera donc $= (1 \times A + 2 \times 2A + 1 \times 0) : 4 = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$ †, tout comme vous avez trouvé. Si la carte du Ponte ſe trouve deux fois entre les cartes du Banquier, il y aura ces ſix variations, au lieu de 24 arrangemens,

1. *bbaa*, 2. *baba*, 3. *abba*, 4. *baab*, 5. *abab*, 6. *aabb*.

La

† A exprime ici l'Argent du Jeu.

La premiere, la troiſieme, & la cinquieme font gagner le Banquier; la ſeconde & la quatrieme le font perdre; & la ſixieme lui donne la moitié de la miſe du Ponte: & partant le ſort du Banquier ſera $= (3 \times 2A + 2 \times 0 + 1 \times \frac{3}{2}A) : 6 = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$, encore comme vous. Si la carte du Ponte ſe trouve trois fois entre les cartes du Banquier, on voit clairement qu'il doit y avoir autant de variations, que lorſque la carte du Ponte n'y eſt qu'une fois; car il n'y a qu'à faire une permutation de lettres a en b & b en a.

1. *baaa*, 2. *abaa*, 3. *aaba*, 4. *aaab*,

D'où l'on tire derechef le ſort du Banquier $= A + \frac{1}{4}A$. Par cette maniere de diſtribuer les cas, on voit ſans peine, que quelque nombre de cartes que tienne le Banquier exprimé par p, ſi celle du Ponte ne s'y trouve qu'une fois; l'avantage du Banquier ſera $\frac{1}{p}A$. Il n'en eſt guère autrement ſi la carte du Ponte ſe trouve plus d'une fois entre les cartes du Banquier; car au lieu de tous les arrangemens qu'il faudroit examiner, & dont le nombre eſt immenſe, pour un nombre mediocre de cartes; ici il ne faut que conſidérer le nombre des variations des deux lettres a & b, qui eſt toujours égal au nombre des combinaiſons, que des choſes, dont le nombre eſt celui de la carte du Ponte, peuvent être priſes differemment dans le nombre de toutes les cartes; & puis de ces combinaiſons, dont le nombre eſt toujours beaucoup plus petit que celui de tous les arrangemens, il ſera facile de choiſir celles qui font gagner, ou entierement, ou en partie, le Banquier, & ainſi de déterminer ſon ſort. Par exemple: Donnons au Banquier ſix cartes, entre leſquelles ſuppoſons que la carte du Ponte eſt deux fois. Dans cette ſuppoſition je n'ai que faire d'examiner, comme vous faites, tous les 720 arrangemens que les ſix cartes peuvent ſubir, me contentant de parcourir ſimpleplement ces quinze variations possibles, que la lettre *a* prise deux fois peut faire avec la lettre *b* prise quatre fois.

1. *bbbbaa*	4. *babbba*	7. *bbabab*	10. *bbaabb*	13. *baabbb*
2. *bbbaba*	5. *abbbba*	8. *babbab*	11. *bababb*	14. *ababbb*
3. *bbabba*	6. *bbbaab*	9. *abbbab*	12. *abbabb*	15. *aabbbb*.

Entre ces quinze variations, on en compte sept, qui donnent le tout au Banquier, deux qui lui donnent sa mise avec la moitié de la mise du Ponte, & les six autres qui le font perdre; en sorte que le sort du Banquier sera $= (7 \times 2\ A + 2 \times \frac{3}{2}\ A + 6 \times 0) : 15 = \frac{17}{15} A = A + \frac{2}{15} A$, conformément à ce que vous avez trouvé. Ainsi de même si la carte du Ponte est trois fois entre les six cartes du Banquier, il n'y aura que 20 façons de varier la situation de deux lettres *a* & *b* prise chacune trois fois, qui étant demêlées feront voir que le sort du Banquier sera $= A + \frac{3}{20} A$. Suivant ce principe, voici les formules générales que j'ai trouvées pour quelque nombre de cartes qu'il y ait entre les mains du Banquier, & quelque nombre de fois que la carte du Ponte s'y trouve, sans supposer connu le sort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p - 2$, comme vous faites dans votre formule générale, que j'ai aussi trouvée fort aisément; voici, dis-je, les miennes. Soit $1.2.3.4 \ldots (p - q) = m$; $(q + 1).(q + 2).(q + 3) \ldots p = n$; $(p - q + 1).(p - q + 2).(p - q + 3) \ldots p = l$; je dis que l'avantage du Banquier, si q est un nombre pair, sera exprimé par cette suite

$$\frac{m}{2n} \times \left(1 + \frac{(q-1)q}{1.2} + \frac{(q-1)q(q+1)(q+2)}{1.2.3.4} + \frac{(q-1)q(q+1 \ldots (q+4)}{1.2.3.4.5.6.} + \ldots\ldots \frac{(q-1)q((q+1)\ldots\ldots(p-2)}{1.2.3.4 \ldots (p-q)}\right).$$

Ou bien par celle-ci

$$\frac{(q-1)q}{2l} \times (1.2.3 \ldots (q-2) + 3.4.5 \ldots q + 5.6.7 \ldots (q+2) + \ldots (p-q+1).(p-q+2) \ldots (p-2))$$

Mais

Mais si q est un nombre impair, on aura pour le dit avantage,

$$\frac{(q-1).m}{2n} \times \left(1 + \frac{q.(q+1)}{1.2.3.} + \frac{q.(q+1).(q+2).(q+3)}{2.3.4.5.} + \ldots \frac{q.(q+1).(q+2)\ldots(p-2)}{2.3.4 \ldots p-q}\right)$$

ou bien $\frac{(q+1)q}{2l} \times (2.3.4 \ldots (q-1) + 4.5.6 \ldots (q+1) + 6.7.8 \ldots (q+3) + \ldots\ldots (p-q+1).(p-q+2) \ldots (p-2))$; où il faut remarquer que les nombres p & q peuvent être quelconques, pourvû que q ne soit pas moins grand que 3. Si vous voulés prendre la peine, vous pouvés examiner ces formules générales, si elles s'accordent avec les votres que vous donnés pour des cas particuliers, *pag.* 24 & 25.

Au reste, ce que j'ai dit jusqu'ici sur le jeu du *Pharaon* se doit aussi entendre sur celui de la *Bassette*, *pag.* 66 & suivantes, ou pareillement pour calculer les cas favorables & les désavantageux au Banquier, on peut s'épargner la peine d'éplucher tous les arrangemens possibles des cartes, qui sont entre les mains du Banquier, en n'emploiant que les variations des deux lettres *a* & *b*, comme il a été fait ci-dessus; mais passons à d'autres.

Pag. 32. *ligne* 15. En parlant de l'avantage d'avoir la main au *Jeu du Lansquenet*, vous dites, Monsieur, qu'*on ne peut exprimer cet avantage, que par une suite composée d'un nombre infini de termes, qui iront toujours en diminuant, & qu'on ne pourra jamais avoir la valeur précise de l'avantage de* Pierre. Il semble qu'en écrivant cela, vous n'aviés pas encore pris garde, que cette suite va toujours en progression géométrique, laquelle par conséquent, quoique continuée à l'infini, fait une somme qu'on peut trouver fort aisément par les règles communes. La suite, par exemple, que vous donnés *pag.* 35. est sommable: qu'est-il donc besoin d'approcher de la juste valeur en ajoutant un grand nombre de termes? puisqu'on peut trouver au juste cette valeur dans un moment & sans peine, étant précisement $\frac{1125}{4024}$ qui est plus grand que $\frac{1}{4}$ ou $\frac{4}{16}$, & par conséquent en approche plus que de $\frac{4}{17}$ que vous ayés mis pour

 la

la quantité approchante; mais il ſemble auſſi que vous vous ſoyez enfin apperçu que ce ſont des progreſſions, dont on peut donner la ſomme de tous les termes; car à la *page* 51, vous donnés les valeurs exactes de l'avantage & du deſavantage des coupeurs. Voici une formule générale, qui exprime l'avantage de celui qui a la main en quelque ſorte de jeu qùe ce ſoit, & qui recommence à avoir la main autant de fois qu'il gagne, juſqu'à ce qu'il perde: Soit nommé a l'avantage qu'il a dans chaque main, m le nombre des cas qui le font gagner, & n le nombre des cas qui le font perdre; je dis que ſon avantage total ſera (en ſuppoſant $m:(m+n)=p$) égal à cette ſuite $a+pa+p^2a+p^3a$ &c. dont la ſomme eſt $=a:(1-p)=(m+n)a:n=a+ma:n$. On peut trouver la même choſe ſans le ſecours d'une progreſſion par l'Algébre; voici comment.

Soit z la miſe de chaque Joueur, & ainſi le ſort pour le premier jeu de celui qui tient la main ſera $(m\times z+n\times 0):(m+n)=2mz:(m+n)$ & partant ſon avantage $=2mz:(m+n)-z=(m-n)z:(m+n)$; d'où il ſuit que nommant a l'avantage de chaque main, on aura $z=(m+n)a:(m-n)$. La miſe des Joueurs étant ainſi trouvée, ſoit x l'avantage total, qui conſiſte dans le droit de *Pierre* de tenir les cartes autant de fois qu'il gagne; il y aura donc, lorſqu'il commence à jouer, m cas qui le font gagner la miſe de ſon antagoniſte, plus l'avantage total de continuer le jeu ſçavoir $(m+n)a:(m-n)+x$, & n cas qui le font perdre ſa miſe, c'eſt à dire qui le font avoir $(-m-n)a:(m-n)$; on aura donc cette égalité $x=(m((m+n)a:(m-n)+x)+n((-m-n)a:(m-n)):(m+n)$ laquelle étant reduite donnera pour l'avantage total $x=(m+n)a:n=a+ma:n$, tout comme ci-deſſus. Cette voye eſt plus commode que celle par la progreſſion, parce qu'on peut ainſi trouver avec une égale facilité l'avantage de *Pierre*, en ſuppoſant que *Pierre* aiant perdu une fois, le jeu ne finiſſe pas encore; mais qu'on le continue à l'infini,

la

la main paſſant alternativement d'un Joueur à l'autre: Soit donc t l'avantage de *Pierre*, qui commence à avoir la main; il y aura m cas, qui lui donnent pour gain la miſe de ſon antagoniſte, plus l'avantage de recommencer, ſavoir $(m+n)a:(m-n)+t$, & n cas, qui lui ôtent ſa miſe, & qui en même tems le mettent dans l'état où étoit ſon antagoniſte lorſqu'on alloit commencer le jeu, c'eſt à dire, qui le font avoir $(-m-n)a:(m+n)-t$; d'où il reſulte cette égalité $t=(m((m+n)a:(m-n)+t)+n((\ \ m-n)a:(m-n)-t)):(m+n)$; par la réduction de laquelle on trouve $t=(m+n)a:2n$; en ſorte que l'avantage de *Pierre*, en ſuppoſant que le jeu doive être continué à l'infini, n'eſt que la moitié de l'avantage qu'il auroit dans la ſuppoſition que le jeu finiſſe auſſi-tot qu'il perd la main. Je m'étonne que vous n'ayés pas pris ſoin de déterminer l'avantage dans cette autre ſuppoſition là, comme la plus naturelle & la plus convenable à l'intention des Joueurs, qui ne commencent pas le jeu dans le deſſein de le finir dès que celui qui a le premier la main la perdra, mais plutôt de faire paſſer le droit de la main d'un Joueur à l'autre, un aſſés grand nombre de fois, en ſorte que le jeu peut être cenſé durer à l'infini.

Pag. 59. *l.* 26. La ſuite que vous donnés ici pour déterminer le ſort de *Pierre*, tenant la main au jeu du Treize †, eſt très belle & très curieuſe, on la tire aiſément de la formule générale de la *page* 58. J'ai auſſi trouvé cette formule, avec une autre, qui m'a fourni la même ſuite, mais ſans changement de ſignes, & qui ſuppoſe les ſorts des nombres précédens des cartes connus, comme vous l'allés voir. Soit S le ſort de *Pierre* que l'on cherche, le nombre des cartes que *Pierre* tient étant exprimé par n; t le ſort de *Pierre* le nombre des cartes étant $n-1$; s ſon ſort, le nombre des cartes étant $n-2$; r le ſort, quand le nombre des cartes eſt $n-3$, & ainſi de ſuite; on aura $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots\frac{1}{1.2.3..n}-\frac{t}{1}-\frac{s}{1.2.}-\frac{r}{1.2.3.}-\ldots\frac{0}{1.2.3..n}$; Cela peut paſſer pour un Théoréme,

† Cette ſuite eſt $\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}-\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+$ &c.

réme, votre ſuite étant plus propre pour trouver d'abord la valeur de *S*.

Pag. 63 *l.* 13. Vous faites $x = \frac{1}{2}(4A + S) + \frac{1}{2}A$; mais vous vous trompés; il faut faire $x = \frac{1}{2}(4A + S - A) + \frac{1}{2}A$; & ainſi l'avantage de *Pierre* eſt $\frac{1}{3}A$ & non pas $\frac{2}{3}A$: par la même raiſon *pag.* 64 l. 11 *à fine* ce que vous dites que l'avantage de *Pierre* ſeroit $2A + \frac{16}{57}A$, n'eſt pas juſte, car je ne trouve que $A + \frac{16}{57}A$.

Pag. 80. Il ne ſemble pas que Mr. PASCAL lui-même ait compris tout l'uſage de ſa Table †; une des plus belles proprietés, dont on ne fait pas mention ici, étant que les bandes perpendiculaires expriment les coëfficiens des puiſſances d'un binome: car ſi l'expoſant d'une puiſſance quelconque ſe nomme p, on aura $(a+b)^p = 1a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{1.\,2.}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\,2.\,3.}a^{p-3}b^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\,2.\,3.\,4}a^{p-4}b^4 + \&c.$ ce que j'ai trouvé autrefois par une voie toute particuliere, & j'en ai communiqué la démonſtration à feu *Mr. le Marquis de* L'HOPITAL: on en voit quelque choſe dans ſon Livre poſthume *, à l'endroit que vous allegués, *pag.* 92.

Pages 158 & 159. Vous prétendés, Monſieur, d'avoir réſolu le ſecond Probléme de Mr. HUYGUENS ††, ce que vous avés effectué, à la vérité, dans le ſens que vous donnés à ce Probléme, qui eſt qu'on doit ſuppoſer que chaque Joueur aiant retiré un jetton noir, le remette incontinant dans le pot, pour laiſſer à ſon ſucceſſeur la douzaine de jettons toûjours complete, ce qui rend le Probléme fort facile, & fait trouver le ſort des trois Joueurs dans la raiſon de 9, 6, 4; comme vous avés trouvé. Mais il ſemble que Mr. HUYGUENS ait propoſé ce

† C'eſt le *Triangle-Arithmétique* ſi connu, & dont Mr. PASCAL a compoſé un Traité.

* *Traité Analytique des Sections Coniques.* Paris 1707. 4°.

†† Le Probléme eſt propoſé en ces termes.

Tres Colluſores A, B, C, aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi, & 8 nigri exiſtunt, ludunt hac conditione; ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penes A, ſecunda penes B, & tertia penes C, & tum ſequens rurſus penes A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

HUYGUENS *De ratiociniis in Ludo alea.* pag. ult.

Probléme dans un autre ſens, qui paroit plus naturel, qui eſt que toutes les fois qu'on tire un jetton noir, il ne ſoit plus remis dans le pot; ſi bien que le premier tireur aiant manqué en tirant un jetton noir, le ſecond quand il vient à tirer, ne trouve plus qu'onze jettons; & le ſecond aiant auſſi manqué, le troiſieme ne trouve plus que dix jettons; & celui ci aiant pareillement tiré un noir, ne laiſſe que neuf jettons au premier qui doit recommencer à tirer, & ainſi conſécutivement; le Probléme étant conçû dans ce ſens, devient un peu plus difficile, & en rend le calcul plus long. Eſſayés-le, pour voir ſi vous vous accordés avec moi; j'en ai mis la ſolution après la propoſition dans le Traité *De Ratiociniis in ludo alea*, il y a bien douze ans; en le conſultant, je trouve que j'y ai écrit ces trois nombres, 77, 53, 35, pour la raiſon des ſorts des trois Joueurs.

Page 137. J'ai trouvé une formule qui s'exprime & ſe fait entendre plus facilement en cette maniere; pour les cas déterminés, † le nombre en eſt $= (1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\,p) : (1.\,2.\,3.\,\ldots\,b \times 1.\,2.\,3.\,\ldots\,c \times 1.\,2.\,3.\,\ldots\,d \times 1.\,2.\,3.\,\ldots\,e \times \&c.)$ c'eſt-à-dire $=$ à une fraction dont le numerateur eſt le nombre des arrangemens d'une multitude exprimée par p, & le dénominateur le produit des nombres des arrangemens des multitudes exprimées par b, c, d, e &c. Il eſt remarquable que cette formule exprime juſtement la méthode, que j'ai trouvée autrefois, pour la détermination du coëfficient de quelque terme que l'on voudra d'un polynome quelconque élevé à une puiſſance quelconque, ce qui me fut propoſé autrefois par Mr. LEIBNITZ, qui approuva fort la ſolution que je lui en avois donnée, & la trouva utile pour élever promptement un polynome à une haute puiſſance; car ſoit le polynome $(t + x + y + z + \&c.)^p$ dont il faille trouver le coëfficient du terme $t^b\, x^c\, y^d\, z^e$ &c.

† Il s'agit, étant donné un nombre quelconque p de dez, qui aient chacun tant de faces qu'on voudra, de trouver combien il y a de hazard pour amener le nombre b d'as, c de deux, d de trois, e de quatre, &c.

en ſuppoſant $b + c + d + e$ &c. $= p$; je dis que le coëfficient cherché ſera comme ci-deſſus $(1.2.3.4....p) : (1.2.3...b \times 1.2.3... c \times 1.2.3.... d \times 1.2.3... e \times$ &c.)

Mais pour revenir à la queſtion ſur les dez, & pour ſçavoir combien il y a de cas indéterminés, qu'avec un certain nombre de dez on peut amener tant d'une eſpèce, tant d'une autre † &c. Soit nommé la valeur de cette fraction v, il faut multiplier v (ſuppoſant R le nombre des faces de chaque dez) par cette ſuite $R. (R - 1). (R - 2). (R - 3)$, continuée juſqu'à ce qu'il y ait autant de termes, qu'il y a d'expoſans, & diviſer le produit par 1. 2. 3, s'il y a trois expoſans égaux, & le diviſer encore par 1. 2. 3. 4, s'il y en a quatre égaux, & ainſi de ſuite s'il y a d'autres expoſans égaux.

Pages 159. & 160. Les deux Problémes, que vous mettés ici comme le troiſiéme & le quatriéme, ſont dans le traité de Mr. HUYGUENS, le quatrieme & le troiſiéme. Pour ce qui eſt de celui-là, * c'eſt-à-dire du quatriéme ſelon l'ordre de Mr. HUYGUENS, ou du troiſiéme dans votre livre, il eſt bien reſolu, en tant que *Pierre* parie que parmi les 7 jettons qu'il va prendre, il s'y en trouvera juſtement 3 blancs, ni plus ni moins; car je trouve auſſi que le ſort de *Pierre* ſera à celui de *Paul*, dans cette ſuppoſition, comme 35 à 64, ou comme 280 à 512; mais ſi on veut que *Pierre* ait gagné auſſi quand il tire les quatre blancs, ce qui paroit être le véritable ſens des paroles de Mr. HUYGUENS, *inter quos 3 albi erunt*, où il faut ſuppléer *minimum*, comme ſi *Pierre* s'engageoit de tirer trois blancs pour le moins, parmi les 7 jettons, qu'il prend entre les 12: Ce ſens étant donné au Problème, on trouve que les ſorts de *Pierre* & de *Paul* ſeront comme 14 & 19.

† C'eſt-à-dire, tant de ſimples, tant de doubles, tant de triples &c. On appelle doubles, deux dez qui marquent un même point, triples, trois dez qui marque un même point, &c.

* *Aſſumptis.... 12 calculis 4 albis & 8 nigris, certat* A (Petrus) *contra* B (Paulum) *quod velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus ſit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B?* HUYG. de Rat. de Lud. aleæ. pag. ult.

Pag. 162. La propoſition que vous faites ici du Probléme 5. de Mr. HUYGUENS † lui donne un ſens tout différent, & ce n'eſt plus le même Probléme. Pour vous en faire voir la grandiſſime différence, je vais vous donner ici les ſimples ſolutions de l'un & de l'autre propoſé en général. Selon les conditions de Mr. HUYGUENS, ſoit nommé n le nombre des jettons que chaque Joueur prend au commencement, a le nombre des coups qui font gagner à *Pierre* un jetton de *Paul*, & b le nombre des coups qui font gagner à *Paul* un jetton de *Pierre*; je dis que leurs ſorts ſeront communs a^n & b^n; & ainſi pour le cas particulier, qui eſt en queſtion, des 3 dez, où $n = 12$, $a = 27$ & $b = 15$; & ſorte que $a : b = 27 : 15 = 9 : 5$, je dis que le ſort de *Pierre* ſera à celui de *Paul* $= 9^{12} : 5^{12} = 282429536481 : 244140625$. Vous n'avés pas obſervé, je crois, que ces deux grands nombres ne ſont autre choſe que la 12e puiſſance de 9 & de 5. Mais ſelon les conditions de votre propoſition, nommons encore n le nombre des jettons qu'un des deux Joueurs doit gagner le premier pour gagner la partie, c'eſt à dire la moitié des jettons que *Jaques* diſtributeur tient au commencement entre ſes mains; ſoit auſſi a le nombre des coups favorables à *Pierre*, & b celui des coups favorables pour *Paul*. Je trouve que les ſorts des deux Joueurs ſeront exprimés par les deux ſommes des deux moitiés des termes du binome $a + b$ élevé à la puiſſance $2n - 1$: par exemple ſi $n = 3$, les ſorts de *Pierre* & de *Paul* ſeront comme la ſomme des trois premiers termes & la ſomme des trois derniers termes de $(a+b)^5$, c'eſt à dire, $a^5 + 5a^4b + 10a^3bb$, & $b^5 + 5b^4a + 10b^3a^2$; & ainſi en général ſuppoſant

† Le Probléme de M HUYGUENS eſt celui-ci, *A* (Paulus) & *B* (Petrus) *aſſumentes ſingulis 12 nummos, ludunt tribus teſſeris, hac conditione ut, ſi 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipſi B; at ſi 14 puncta jaciuntur, B tradat nummum ipſi A; & ut ille ludum victurus ſit, qui primum omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B, ut 244140625 ad 282429536481.* Ce que M. DE MONTMORT avoit, par mépriſe, entendu comme ſi *Jaques* aiant en main 24 jettons, en donnoit un à *Paul*, toutes les fois que les dez aménent 11, & un à *Pierre*, quand ils aménent 14: & que celui-là a gagné, qui a le premier 12 jettons.

$2n - 1 = p$, ces deux ſuites $a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} b^1 + \frac{p.(p-1)}{1.2.} a^{p-2} b^2 + \frac{p.(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} b^3 +$ &c. & $b^p + \frac{p}{1} b^{p-1} a^1 + \frac{p.(p-1)}{1.2} b^{p-2} a^2 + \frac{p.(p-1)(p-2)}{1.2.3} b^{p-3} a^3 +$ &c. continuée chacune juſqu'au nombre des termes exprimés par n, donneront la raiſon des ſorts de *Pierre* & de *Paul*. Dans notre cas particulier où $n = 12$, & $a : b = 9 : 5$, il faudroit prendre douze termes de chacune de ces deux ſuites $9^{23} + \frac{23}{1} 9^{22} 5^1 + \frac{23.22}{1.2.} 9^{21} 5^2 + \frac{23.22.21.}{1.2.3.} 9^{20} 5^3 + \frac{23.22.21.20}{1.2.3.4} 9^{19} 5^4 +$ &c. & $5^{23} + \frac{23}{1} 5^{22} 9^1 + \frac{23.22}{1.2} 5^{21} 9^2 + \frac{23.22.21}{1.2.3} 5^{20} 9^3 + \frac{23.22.21.20}{1.2.3.4} 5^{19} 9^4$, ce qui produiroit deux nombres ſi grands que le premier conſiſteroit [ſelon ma conjecture] pour le moins en 25 figures: ſi vous avés envie d'en faire le calcul, voilà de la beſogne pour exercer votre patience: Cependant vous voiés l'extrême différence, qu'il y a entre les deux manieres de propoſer le Probléme cinquieme de M. HUYGUENS: ſi bien que ce ſont effectivement deux Problémes tous différens, dont je vous ai reſolu chacun généralement. Vous ſerés peut-être étonné que vos 23 égalités vous fourniſſent pourtant la même ſolution de Mr. HUYGUENS, nonobſtant que vous propoſiés le Probléme dans un ſens qui le fait, comme je viens de vous le montrer, ſi différent de celui de Mr. HUYGUENS; mais la raiſon en eſt, parce que vous ſuivés effectivement, en formant les égalités, les conditions de Mr. HUYGUENS, & non pas celles de votre propoſition; car je vois que vous ſuppoſés que les ſorts des deux Joueurs ſont les mêmes lorſqu'il y a une même différence entre le nombre des jettons que l'un a déja gagné, & le nombre des jettons que l'autre a gagné; en ſorte que vous ſuppoſés, par exemple, que leurs ſorts ſont les mêmes, ſoit que

que *Pierre* ayant gagné cinq jettons, *Paul* en ait trois, ou que *Pierre* ayant deux jettons, *Paul* n'en ait point: c'eſt cette ſuppoſition, qui n'eſt pas juſte, ne pouvant ſubſiſter avec le Probléme pris dans le ſens que vous lui donnés.

Pag. 177, *lig* 12. & 13. *A qui il manque le moins de points.* Cette reſtriction qu'il doit manquer à *Pierre* le moins de points eſt ſuperflue, la regle que vous donnés n'étant pas moins bonne, quand il manque à *Pierre* le plus de points; il ſeroit même plus expéditif, de ſuppoſer que *Pierre* ſoit celui à qui il manque plus de points; car votre ſuite aura un plus petit nombre de termes, qui ſeront par conſéquent plûtôt ajoutés en une ſomme, que dans l'autre ſuppoſition. Quand au reſte, je réſous ce Probléme plus généralement, & par une expreſſion plus ſimple & plus naturelle: je l'énonce ainſi. Pierre *&* Paul *jouent en pluſieurs parties à un jeu inégal, où le nombre des cas favorables à* Pierre *eſt à celui des cas favorables à* Paul *comme* a *à* b; *& après avoir joué quelque temps le nombre des parties qui manquent encore à* Pierre *ſoit* p, *& le nombre des parties qui manquent à* Paul *ſoit* q; *on demande la raiſon de leurs ſorts.* Solution. Elevés le binome $a + b$ à la puiſſance $p + q - 1 = r$; le nombre des termes en ſera $p + q$; je dis que la ſomme des premiers termes dont le nombre ſoit q, eſt à la ſomme du reſte des termes dont le nombre ſera p, comme le ſort de *Pierre* eſt à celui de *Paul*; or ces deux ſommes ſont comme il ſuit:

$$a^r + \frac{r}{1} a^{r-1} b^1 + \frac{r(r-1)}{1.2} a^{r-2} b^2 + \frac{r.(r-1)(r-2)}{1.2.3} a^{r-3} b^3 + \text{\&c.}$$

continuée juſqu'au nombre des termes exprimés par q. Et

$$b^r + \frac{r}{1} b^{r-1} a^1 + \frac{r(r-1)}{1.2} b^{r-2} a^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} b^{r-3} a^3 + \text{\&c.}$$

continuée juſqu'au nombre de termes exprimé par p. Suppoſant p & q égaux, nous tombons dans le cas du Probléme cinquiéme de Mr. HUYGUENS, pris dans le ſens que vous le propoſés, *pag.* 162, ſur lequel je vous ai parlé amplement ci-deſſus.

Page 178. *l.* 9. *Voici une Table* &c. Je m'étonne que vous n'ayés pas obſervé l'uniformité de cette Table & la grande facilité avec laquelle on conſtruit une Table générale, pour quelque nombre de parties qu'on joue toûjours en rabattant; car ſoit le nombre des parties en leſquelles *Pierre* & *Paul* conviennent de jouer, n : voici la Table de leurs ſorts.

T A B L E.

Si *Pierre* a nul point,	ſon ſort eſt	$n + 0$	contre	$n - 0$
un point	. . . .	$n + 1$	. .	$n - 1$
deux points	. . . .	$n + 2$	. .	$n - 2$
trois points	. . . .	$n + 3$	. .	$n - 3$
quatre points	. . . .	$n + 4$	. .	$n - 4$
. .		. .		. .
. .		. .		. .
n points,	. . . .	$n + n$	. .	$n - n$

Vous voyés que leurs ſorts vont en progreſſion arithmétique, l'une aſcendante, l'autre deſcendante: en effet votre Table que vous avés faite pour le nombre de ſix ſeulement, s'accorde avec la mienne générale; car le ſort de

7	contre 5,	eſt la même choſe que	$6 + 1$	contre	$6 - 1$
2	. . 1	. . . .	$6 + 2$	. .	$6 - 2$
3	. . 1	. . . .	$6 + 3$	. .	$6 - 3$
5	. . 1	. . . .	$6 + 4$	. .	$6 - 4$
11	. . 1	. . . .	$6 + 5$	. .	$6 - 5$

Page 181. *ligne* 13 *Elles ſont abſolument impratiquables.* Au contraire, comme c'eſt un progreſſion géométrique, on peut ajouter dans un moment autant des termes qu'on veut, par des regles communes, qu'on trouve dans tous les livres d'arithmétique; ainſi le nombre des termes étant b, je trouve que la ſomme de tous les termes ſera $= p(m^b - q^b) : (m - q) m^b$; mais pour le reſte, vous faites bien d'employer

les logarithmes; je m'en ſuis ſervi utilement dans une pareille occaſion, il y a bien douze ans, où il s'agiſſoit de déterminer combien il reſtoit de vin & d'eau mêlé enſemble dans un tonneau, lequel étant au commencement tout plein de vin, on en tireroit tous les jours pendant une année une certaine meſure, en le rempliſant incontinant, après chaque extraction, avec de l'eau pure. Vous trouverés la ſolution de cette queſtion, qui eſt aſſés curieuſe, dans ma Diſſertation *De Nutritione* *; que Mr. VARIGNON vous pourra communiquer. Je fis cette queſtion, pour faire comprendre, comment on peut déterminer la quantité de vieille matiere qui reſte dans nos corps, mêlée avec de la nouvelle, qui nous vient tous les jours par la nourriture, reparer la perte que nos corps font inſenſiblement par la tranſpiration continuelle.

Mais en voilà bien aſſés, Monſieur & peut-être plus qu'il ne faut pour vous cauſer de l'ennui; c'eſt pour cela que je ne vous parle pas des fautes, ſoit de calcul, ſoit d'impreſſion que j'ai rencontrées en quelques endroits. Je vous prie cependant de prendre en bonne part tout ce que j'ai dit juſqu'ici; c'étoit pour l'amour de la vérité que j'ai crû vous devoir communiquer avec ma franchiſe ordinaire mes réflexions; d'autant plus que vous me les avés demandées. Je ne laiſſe pas d'eſtimer votre Livre autant qu'on peut eſtimer un Ouvrage, qui fait honneurs à ſon Auteur, & qui marque tout enſemble une profonde pénétration d'eſprit, & une patience infatigable à faire de longs & pénibles calculs. Il ſeroit à ſouhaiter que vous vouluſſiés prendre la peine d'étendre votre Livre, & d'en faire un ouvrage plus ample & plus riche: la matiere ne vous manqueroit pas, ſur-tout ſi vous vouliés entrer dans la morale & la politique, comme mon Frere avoit commencé de faire dans ſon Ouvrage, qui ſelon toutes les apparences ne paroitra jamais. †. J'entens avec plaiſir que les Mathématiques, malgré les misères de la guerre, fleuriſſent de plus en plus, & deviennent même en honneur en France. Ici, dans nos pays,

* Ci-deſſus N°. LII.

† Il a paru en 1713, ſous le titre d'*Ars conjectandi*. Baſileæ. 4°.

nous ne pouvons pas nous vanter du même bonheur. Depuis le départ de Mr. HERMAN, je ne ſçai perſonne, excepté mon Neveu, & très peu d'autres, dont il faille eſperer de grands progrès dans ces ſciences, leſquelles étant conſiderées, comme n'étant pas *de pane lucrando*, on les néglige, comme des choſes ſéches & peu utiles. Les quatre Problémes que vous propoſés à la fin de votre Traité ſont curieux; mais le premier me paroit inſoluble pour la longeur du calcul qu'il demanderoit, & que la vie humaine ne ſeroit pas ſuffiſante d'achever. Je n'entends pas le ſens du quatrieme: le ſecond, & le troiſieme me paroiſſent traitables, quoique non ſans beaucoup de peine & de travail, que j'aime mieux vous laiſſer pour apprendre de vous la ſolution, que de travailler long-tems aux depens de mes occupations ordinaires, qui ne me laiſſent guére le loiſir de m'appliquer à d'autres choſes. Il me tarde de voir la nouvelle Edition du Livre de Mr. NEWTON. Il y a long-temps qu'il m'a promis qu'il me l'enverroit, dès qu'il ſeroit imprimé; mais du depuis je n'en ai plus rien entendu; quand vous l'aurés reçû, je vous prie de me mander par occaſion ce que vous y aurés trouvé: En attendant, je me donne l'honneur de me nommer,

MONSIEUR

Votre très humble & très obéiſſant Serviteur

Baſle, ce 17 Mai 1710.

BERNOULLI

EXTRAIT

N°. LXXXV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur HERMAN *à Monſieur* BERNOULLI, *dattée de* Padoue, le 12. Juillet 1710.

JE ſuis bien aiſe, Monſieur, que vous ayez pleinement réſolu le Probléme inverſe des Forces centripètes, pour *trouver la Courbe qu'elles doivent faire décrire, la loi de ces forces étant donnée:* Probléme que je croi incomparablement plus difficile que le direct. C'eſt ce qui m'a porté à eſſayer auſſi mes forces ſur cettte queſtion, & aſſez heureuſement, ayant trouvé par mon analyſe, que les Sections Coniques ſont les ſeules Courbes que les Planètes puiſſent décrire avec des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des diſtances de ces Planetes au centre de ces forces: Vous en jugerez par l'analyſe que voici (ce me ſemble) aſſez courte.

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. 1710. pag. 519. Edit. de Paris. pag. 682. Edition de Hollande.

Soient A B C la Courbe cherchée, L I ſon axe, S le centre des forces, BC une particule infiniment petite de la courbe, ſur laquelle particule prolongée ſoit CE = BC; du point E ayant tiré ED parallèle à CS, & qui rencontre la Courbe en D, ſoient DF, CG, BH, parallèles à LI, leſquelles rencontrent en F, G, la petite droite EG parallèle à CI perpendiculaire ſur LI, & en H la droite CI; ſoit enfin la droite DK parallèle auſſi à CI, & qui rencontre CG en K.

TAB. XX. N°. LXXXV.

Cela fait, ſoient SI $= x$, IC $= y$: l'on aura SC $= \sqrt{(xx+yy)}$, BH ou CG $= dx$, CH ou EG $= dy$; & conſéquemment KG, ou DF $= ddx$, EF $= ddy$, ce qui donnera le double du triangle BSC ou CSD $= ydx - xdy$, que je ſuppoſe conſtant: de ſorte que les triangles [*Conſtr.*] ſemblables EDF, CSI, rendront ED $= (-ddx\sqrt{(xx+yy)}):x$.

Préſentement, puiſque le triangle BSC eſt [*hyp*] conſtant, l'on aura DE, en raiſon de la force centripète au point C, c'eſt-à-dire, en raiſon de $1:(xx+yy)$, ou en raiſon de $(ydx - xdy)^2:(xx+yy)$ d'où réſulte cette équation differentio-differentielle $-addx = x(ydx - xdy)^2:(xx+yy)^{\frac{3}{2}} = (ydx - xdy)(xydx - xxdy):(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$, dont l'intégrale eſt $-adx = -y(ydx - xdy):\sqrt{(xx+yy)} = (xydy - yydx):\sqrt{(xx+yy)}$, ou $-abdx:xx = (bxydy - byydx):xx$

$\sqrt{(xx}$

$\sqrt{(xx+yy)}$, dont l'intégrale eſt auſſi $ab:x$, ou plus généralement $ab:x \pm c = b\sqrt{(xx+yy)}:x$, ou $a \pm cx:b = \sqrt{(xx+yy)}$, qui eſt une équation aux trois Sections Coniques : ſavoir à la Parabole ſi $b = c$, à l'Ellipſe ſi $b > c$, & à l'Hyperbole ſi $b < c$.

J'ai auſſi tiré de là une maniere facile de déterminer la force centripète ſur une Courbe donnée quelconque. Car ſi (pour abréger) l'on prend $z = SC = \sqrt{(xx+yy)}$ dans cette Courbe ; $r = SL$ ſegment de ſon axe, compris entre ſa touchante EL & le centre S des forces centripètes, en prenant toûjours $SI = x$, $IC = y$, & de plus la ſoûtangente $IL = s$: ſi après cela on différentie juſqu'aux ſecondes differences l'équation de la Courbe donnée, & qu'on y ſubſtituë $vrrxyy:z$ au lieu de ddx, $vrry^3:z$ au lieu de ddy, s au lieu de dx, & y au lieu de dy ; il en réſultera une équation en grandeurs toutes finies, dont v déſignera la force centripète ; laquelle étant regardée comme inconnue, les autres grandeurs x, y, r, s, z, doivent toutes être priſes pour connuës.

Si vous voulez bien, Monſieur, me faire part de vôtre analyſe de ce Probléme des Forces centripètes inverſes, que je crois très-élégante, vous me ferez beaucoup de plaiſir, *&c.*

N°. LXXXVI.

EXTRAIT DE LA REPONSE

De Monſieur BERNOULLI *à Monſieur* HERMAN, *dattée de* Basle *le* 7 *Octobre* 1710.

Mém. de l'Acad. R. des Sciences de Paris, 1710. pag. 521. Edition de Paris, pag. 685. Ed. de Hol.

PERMETTEZ-MOI, *Monſieur*, d'examiner tant ſoit peu vôtre Solution du Probléme inverſe des Forces centripètes, quoique bonne & digne de vôtre pénétration ; aprés quoi je vous expliquerai plus au long ma maniere de le réſoudre, que vous me marquez ſouhaiter. A vous parler franchement, vôtre ſolution paroit faite à deſſein, accommodée à ce que vous cherchiez, & à ce que vous connoiſſiez déja. En effet, comment ſans cela auriez-vous vû, que pour trouver l'intégrale de vôtre équation $-ddx\sqrt{(xx+yy)}:x = (ydx - xdy)^2:(xx+yy)$, il faloit la réduire à $-addx = (ydx - xdy) \times (xydx - xxdy):(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$.

De

De plus, comment ſans cela auriez-vous pû tirer l'intégrale de celle-ci, & enſuite l'intégrale de l'intégrale ? puiſque les indéterminées x, y, dx, dy, ddx, y ſont ſi mêlées & ſi compliquées, que de les vouloir ſéparer, ſeroit entreprendre un travail à ſe déſeſperer ; & qu'il vous auroit été impoſſible de les integrer toutes mêlées, comme vous avez fait, ſi vous n'euſſiez pas ſoupçonné que les Sections Coniques, que vous aviez en vûë, ſatisfaiſoient à votre équation differentio-differentielle ; que vous avez pour cela ſi heureuſement accommodée au but où vous tendiez, que vous l'avez enfin reduite à une équation algébrique. Je ſouhaiterois fort que vous eſſayaſſiez vôtre méthode ſur l'hypothèſe générale, c'eſt-à-dire pour trouver la courbe trajectoire dans quelque hypothèſe que ce ſoit des forces centripètes, du moins en ſuppoſant la quadrature des eſpaces curvilignes : vous verriez que le mélange des indéterminées vous engageroit alors dans un embarras, d'où je ne crois pas que vous ſortiſſiez, ſans prendre un autre chemin que celui-là.

De plus, il ne ſuit pas encore de votre Solution particuliére, qu'elle ne conviennent qu'aux ſeules Sections Coniques ; après la premiere intégration de votre équation differentio-differentielle, vous avez oublié d'y ajoûter de part ou d'autre une quantité conſtante ; ce qui pourroit laiſſer quelqu'un en doute, ſi outre les Sections Coniques, il n'y auroit point encore quelqu'autre genre de Courbes qui ſatisfit à vôtre queſtion. Pour lever ce doute, vous deviez faire voir que l'addition ou le retranchement d'une quantité conſtante dans un des membres de l'intégrale d'une équation differentielle quelconque, ne change rien à la nature de la Courbe exprimée par ces deux équations. Voici comment je ſupplée à cette omiſſion.

Dans vôtre équation differentio-differentielle $-addx = (ydx - xdy) \times (xydx - xxdy):(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$ je ne mets pas ſeulement [comme vous] $-adx$ pour l'intégrale de $-addx$, mais $-adx \pm$ une quantité conſtante, c'eſt-à-dire, $-adx \pm e(ydx - xdy)$; pour le reſte je le fais comme vous ; de ſorte qu'en intégrant vôtre précédente équation

tion differentio-differentielle, je trouve $-adx \pm e(ydx - xdy) = -y(ydx - xdy) : \sqrt{(xx+yy)} = (xydy - yydx) : \sqrt{(xx+yy)}$, ou $-abdx : xx \pm eb(ydx - xdy) : xx = (bxydy - byydx) : xx\sqrt{(xx+yy)}$, dont l'intégrale est $ab : x \pm eby : x \pm c = b\sqrt{(xx+yy)} : x$ c'est-à-dire (en prenant $h = eb$, & en reduisant l'équation) $ab \pm hy \pm cx = b\sqrt{(xx+yy)}$: laquelle équation, quoiqu'elle renferme hy, que la vôtre ne renfermoit pas, est cependant [comme elle] aux trois Sections Coniques. Quant à la grandeur constante $e(ydx - xdy)$, que vous avez négligée, si elle n'eût pas été intégrable étant divisée par xx; ou si étant ainsi intégrable, elle eût donné des y de plusieurs dimensions; Vous voyez, Monsieur, qu'outre les Sections Coniques il y auroit eu encore d'autres Courbes, qui auroient satisfait à vôtre question, sans que vous vous en fussiez apperçû. Ce qui me fait esperer que vous conviendrez avec moi, que vôtre Solution est défectueuse, faute d'être assez générale

Voici présentement ma Solution, que vous me marquez souhaiter: j'espère aussi qu'elle ne vous déplaira pas, 1°. étant générale pour quelque hypothèse que ce soit, & donnant la construction de la Courbe, les quadratures des espaces curvilignes étant données; 2°. en ce que j'y arrive à une équation sans mélange d'indéterminées; 3°. & parce qu'il n'y entre que des premieres differentielles, sans avoir besoin de differentio-differentielles. Pour vous faire voir le tout d'un bout à l'autre, & dans une étenduë, qui [quoique longue] ne vous déplaira pas; je commence par le Lemme suivant.

LEMME.

Si deux Corps, de masses proportionnelles à leurs pesanteurs, commencent à descendre d'un même point A avec des vitesses égales, & avec des forces égales vers un même point O; l'un directement suivant la droite AO, & l'autre obliquement suivant la trajectoire ABC qu'il décrira: je dis que dans toutes les distances égales

TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 1.

égales de part & d'autre du centre O des forces, comme en B, E, en imaginant l'arc de cercle BE décrit de ce centre O; ces deux Corps auront toûjours des vitesses égales: de sorte que si EG marque la vitesse acquise en E du Corps qui descendroit suivant AO, la même EG marquera aussi la vitesse en B du Corps qui décrit la trajectoire ABC.

La démonstration de ce Lemme se trouve dans le Livre de Mr. NEWTON, *De Princ. Math. Phil. Nat. pag* 125. † Mais elle y est trop embarrassée: la voici plus simplement.

Concevons la Courbe ABC & la droite AO divisées en leurs élemens B*b*, E*e*, par une infinité de cercles BE, *be*, infiniment proches les uns des autres, tous décrits du centre O. Cela conçû, les Méchaniques font voir que par tout la force en chaque point E suivant EO, qui [*hyp*] est la même qu'en chaque point correspondant B suivant BO, est à ce qu'il en resulte de celle-ci au mobile, suivant chaque élement correspondant B*b* de la Courbe qu'il trace, comme B*b* est à E*e*. Or les Méchaniques faisant voir aussi que les accroissemens de vitesses, qui resultent des ces forces dans des corps égaux, sont entr'eux en raison composée de ces mêmes forces, & des temps élementaires employés par elles à produire ces accroissemens de vitesses, c'est-à-dire, employés à faire parcourir à ces corps les élemens linéaires E*e*, B*b*; & qu'au commencement en A, où les vitesses sont supposées égales de part & d'autre, ces élemens de temps sont entr'eux comme les premieres de ces petites lignes E*e*, B*b*: il suit delà que ces accroissemens de vitesses suivant les premieres E*e*, B*b*, sont ici entr'eux en raison composée de B*b* à E*e*, & de E*e* à B*b*, c'est-à-dire, comme B*b* × E*e* est à E*e* × B*b*. Donc à la fin de ces premiers élemens des lignes AO, ABC, les accroissemens de vitesses suivant ces premiers élemens linéaires seront ici égaux entr'eux. On les démontrera de même égaux entr'eux à la fin des seconds élemens de ces lignes AO, ABC; à la fin des troisiemes; à la fin des quatriemes, &c. pris ainsi deux à deux à distances égales du point O. Donc à distances égales quelconques de ce point O,

† Liv. I. Sect. VIII. Prop. 40.

O, les vitesses suivant chacune des lignes AO, ABC, se trouvant ainsi faites des premieres [*hyp*] égales entr'elles, & d'un égal nombre d'accroissemens égaux deux à deux de part & d'autre, seront aussi égales entr'elles. *Ce qui falloit démontrer.*

COROLL. Delà voici la Courbe DGH de ces vitesses, c'est-à-dire, une courbe qui par chacune de ses appliquées EG désigne la vitesse que le corps, qui descend droit de A vers O, a en chaque point E correspondant de la droite AO; & conséquemment aussi [*Lem* 1.] celle que le corps, qui trace la courbe ABC, a en chaque point B correspondant de cette courbe. Pour cela soit OE $= x$, EG $= v$, & la force en E, ou en B, vers O, c'est-à-dire, la force centripéte $= \phi$, laquelle soit donnée en x & en constantes, suivant quelque loi de forces que ce soit. Cela posé, puisque le temps par Ee est $= dx : v$, & que ce tems multiplié par la force centripéte ϕ, donne l'augmentation ou la diminution momentanée de vitesse, selon que le corps descend ou monte, c'est-à-dire, selon qu'il s'approche ou qu'il s'éloigne du point O; l'on aura ici $\phi\, dx : v = - dv$, ou $\phi\, dx = - vdv$, dont l'intégrale est $\int \phi\, dx = ab - vv$: j'entends par ab une quantité constante quelconque, laquelle se peut ajouter à volonté aux intégrales simples. Donc $v = \sqrt{(ab - \int \phi\, dx)}$ qui est l'équation cherchée de la Courbe DGH de vitesses.

C'est pour éviter les fractions que je prends vv pour $\frac{1}{2} vv$, la grandeur arbitraire ab me le permettant. Voici présentement le Probléme en question, en vûë de qui tout ce qui précéde à été fait.

PROBLEME.

Les quadratures étant supposées, & la loi des forces centripètes ϕ étant donnée à volonté en x *& en constantes; trouver la trajectoire* ABC *qu'elles doivent faire décrire au mobile.*

SOLUT.

SOLUT. Soit OA $= a$, & de ce rayon l'arc de cercle AL $= z$, Ll $= dz$; & par conséquent Nb $= xdz : a$. Soit aussi le temps par Bb en raison de Nb×BO, (double du triangle BOb) $= xxdz : a$. Vous savez que ce temps multiplié par la vitesse, c'est-à-dire, [suivant le Corollaire du Lemme précedent] par $\sqrt{(ab - \int \phi\, dx)}$ donne l'espace Bb. Donc $xxdz \sqrt{(ab - \int \phi\, dx)} : a =$ Bb $= \sqrt{(dx^2 + xxdz^2 : aa)}$; d'où résulte l'équation $dz = aacdx : \sqrt{(abx^4 - x^4 \int \phi\, dx - aaccxx)}$, qui exprime la nature de la trajectoire cherchée ABC, dans laquelle équation c est une constante arbitraire pour rendre le tout homogène. *Ce qu'il falloit trouver.*

Vous voyez, Monsieur, que j'arrive tout d'un coup à une équation differentielle du premier degré, dans laquelle il n'y a aucun mélange des indéterminées entr'elles; & qu'ainsi la construction géométrique s'en peut aisément déduire, les quadratures des espaces curvilignes étant données, & même plus commodément que Mr. NEWTON ne l'a trouvée, dans la page 127. &c. de ses *Princ. Math.* *

Mon équation fait voir de plus, si la trajectoire cherchée est algébrique, ou non, dans quelque hypothése que ce soit des forces données. Car si l'intégrale de $aacdx : \sqrt{(abx^4 - x^4 \int \phi\, dx - aaccxx)}$ se trouve réductible à un arc de cercle, dont le rayon soit à OA (a) comme nombre à nombre; la Courbe cherchée sera nécessairement alors algébrique. Ainsi l'hypothèse ordinaire des forces centripètes en raison reciproque des quarrés des distances du mobile à leur centre, c'est-à-dire, l'hypothèse de $\phi = aag : xx$ changeant l'équation précédente en $dz = aacdx : \sqrt{(abx^4 + aagx^3 - aaccxx)} = aacdx : x\sqrt{(abxx + aagx - aacc)}$ qui se peut réduire à un tel arc de cercle; je vois tout d'un coup que vôtre courbe ABC doit être algébrique dans cette hypothèse.

Pour voir présentement que cette courbe ABC, dans cette hypothèse, est toûjours une Section Conique, ainsi que Mr. NEWTON l'a supposé, *pag.* 55. *Coroll. I.* † sans le démontrer; il y faut bien plus d'adresse: Voici comme j'en viens à bout.

Ooo 2 Afin

* Liv. I. Sect. VIII. Prop. 41. † Liv. I. Sect. III. Prop. 13.

Afin de réduire cette valeur de dz à une formule differentielle ordinaire d'arc circulaire, ſoit $x = aa : y$ la ſubſtitution de cette valeur de x donnera $aacdx : x\sqrt{(abxx + aagx - aacc)} = - acdy : \sqrt{(a^3 b + aagy - ccyy)}$ [en ſuppoſant $y = aag : 2cc - t$] $= acdt : \sqrt{(a^3 b + a^4 gg : 4cc - cctt)} =$ [en ſuppoſant $cchh = ab^3 + a^4 gg : 4cc$ pour abreger] $= adt : \sqrt{(hh - tt)} = dz$; & par conſéquent $dz : a = dt : \sqrt{(hh - tt)} = (1 : h) \times hdt : \sqrt{(hh - tt)}$ qui eſt une differentielle d'arc de cercle (dont le rayon eſt $= h$, & le ſinus $= t$) diviſé par ſon rayon.

Cela étant, puiſqu'un arc de cercle, diviſé par ſon rayon, exprime l'angle qui lui eſt oppoſé, & que, ſuivant cela, l'angle L O $l = dz : a$; l'on aura auſſi $(1 : h) \times hdt : \sqrt{(hh - tt)}$ pour la quantité d'un angle differentiel, qui auroit ſon rayon $= h$, & ſon ſinus $= t$. Donc, à cauſe de l'égalité de ces deux angles differentiels, les angles intégraux en ſeront auſſi égaux, ou [pour plus de généralité] l'un ſurpaſſera l'autre d'un angle conſtant. Si donc on décrit un cercle M S T d'un rayon O M $= h$, & que l'angle A O L [$\int dz : a$] ſoit diminué ou augmenté d'un angle conſtant L O S pour avoir l'angle M O S [$\int((1 : h) \times hdt : \sqrt{(hh - tt)})$]; il eſt manifeſte que la perpendiculaire S P ſur A O ſera $= t$, & que de là (en retrogradant) on trouvera y, & enſuite x, ou O E, qui ſera $= 2aacc : (aag - 2cct)$. Donc en décrivant du rayon O E l'arc E B qui coupe O L en B, ce point B ſera un de ceux de la trajectoire A B C, que je prétends être une Section Conique: Je le démontre.

Tout Géométre attentif verra que l'angle conſtant L O S, dont on augmente ou diminue l'angle A O L, ne change point la nature de la Courbe A B C; mais ſeulement ſa ſituation, en l'avançant ou en l'arriérant autour du point O, tous les points B s'avançant ou s'arriérant ainſi dans leurs arcs E B, de même que ſi tout le plan de cette Courbe A B C tournoit avec elle autour de ce centre fixe O. Cependant, pour rendre le calcul plus facile, je vas ſuppoſer que l'angle A O L n'augmente ni ne diminue, c'eſt-à-dire, que l'angle M O S lui eſt égal.

Soit donc [*Fig.* 2. où les mêmes lettres marquent les mêmes choſes que dans la figure précédente] perpendiculairement en O ſur A O la droite O Q $= aag : 2cc$; & du centre Q entre les aſymptotes Q O, Q R, une hyperbole équilatère V X Z, dont le rectangle [des coordonnées] Q Y X ou Q O Z $= aa$; ſoit prolongée une ordonnée quelconque X Y de l'hyperbole, juſqu'à-ce qu'elle rencontre le cercle M S T en S, par lequel point S ſoit menée O S, ſur laquelle [prolongée, s'il en eſt beſoin] ſoit priſe O B = X Y. Je dis que le point B ſera un de ceux de la trajectoire A B C; puiſque [*hyp.*] O B = X Y = Q O Z : Q Y $= aa : (aag : 2cc - t) = 2aacc : (aag - 2cct)$; & que la conſtruction préſente rend A B C une Section Conique, ainſi qu'on s'en convaincra, ſi l'on cherche l'équation qui exprime le rapport de ſes coordonnées O F, F B; car en les appellant x, y, on trouvera l'équation $(a^4 gg - 4c^4 hh)xx = 8aac^4 hx - a^4 ggyy + 4a^4 c^4$, qu'on ſait exprimer une Section Conique: ſavoir une Parabole, lorſque OQ [$aa : 2c$] = OT [h]; une Ellipſe, lorſque O Q > O T; & une Hyperbole, lorſque O Q < O T. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Tab. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 2.

Préparation à une autre Solution.

Quand à la maniere de trouver les forces centripètes, les Courbes étant données, voici un aſſez beau Théoréme, dont je trouvai autrefois la Solution, indépendamment de l'inverſe précédente: je la communiquai à Mr. De Moivre, dans une Lettre du 16 Fevrier 1706, en ces termes, après avoir ſuppoſé que E P p eſt la Courbe donnée, S le centre, ou le foyer des forces centripètes, & S A une perpendiculaire ſur la tangente A π de cette Courbe en P: voici, dis-je, en quels termes je lui écrivis.

Tab. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 3.

„Soit tirée du centre S des forces une droite S π infiniment „proche de S P, & qui coupe la tangente prolongée en π, „& la Courbe en p; ſoit auſſi tirée la petite perpendiculaire $p\varpi$. „Suppoſant donc que le triangle P S p, qui marque le tems

„ que le mobile employe à parcourir l'élement Pp de la Cour„ be, ſoit conſtant, on pourra faire $SA \times Pp = 1$. Or vous „ ſavez que le diamètre de la développée en P (que je nomme „ R) eſt à Pp comme Pp à $p\pi = Pp^2 : R$, mais à cauſe des „ triangles ſemblables $SA\Pi$ & $p\pi\Pi$, on fait $SA : S\Pi [SP]$ „ $= p\pi [Pp^2 : R] : p\Pi$. Ainſi on trouvera $p\Pi$, ou l'éloi„ gnement momentané de la tangente, $= SP \times Pp^2 : SA \times R$ „ $= SP \times SA^2 \times Pp^2 : SA^3 \times R$ [à cauſe de $SA \times Pp = 1$] „ $= SP : SA^3 \times R$, en ſorte que la force centripète eſt en „ raiſon directe des diſtances, & en raiſon réciproque compo„ ſée du diamètre des développées, & du cube des perpendi„ culaires ſur les tangentes, &c.

De cette maniere, la force centripète ſe trouve généralement exprimée en termes tous finis.

Ce Théoréme ſert à trouver encore une autre Solution du Probléme inverſe des forces centripètes, que je trouvai [ſi je m'en ſouviens bien] il y a environ quinze ans, dès mon arrivée en *Hollande*. Il eſt vrai qu'elle renferme des ſecondes differences; mais j'ai une maniere particuliere de les ſéparer, & enſuite d'intégrer l'équation, & de la réduire à celle du Probléme précédent: voici cette autre Solution, que je veux bien vous communiquer.

TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 1. Soient ici comme là, dans la Figure, $OB = OE = x$, $AL = z$, $OA = a$, $BN = dx$, $Nb = dy$, la force centripète en $B = \Phi$ (par le Théoréme que je viens de démontrer) $= x : p^3 r$, en appellant p, la perpendiculaire menée du point O ſur la touchante en B; & r, le diamètre de la développée en B. Or les formules ordinaires donnent $p = xdy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & ſans faire aucune differentielle conſtante, on trouve $r = 2x(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} : (dx^2 dy + dy^3 + xdxddy - xdyddx)$. Donc on aura ici $x : p^3 r$, ou $\Phi = (dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy) : 2x^3 dy^3$.

L'artifice, dont je me ſers pour ſéparer ici les indéterminées [ce qui ſeroit difficile autrement] conſiſte à abreger cette longue formule; ce qu'on pourra faire en conſiderant laquelle des differentielles [cela eſt arbitraire] étant faite conſtante, & ſub-

ſtituée

ſtituée dans cette équation, n'y laiſſera que deux termes en y détruiſant les deux autres. Or je vois que cela ſe peut facilement faire en deux manieres, ſavoir en prenant xdy, ou $dx : x$ pour conſtante, quoi qu'on ait déja pris le temps xdy [$SA \times Pp$] conſtant dans le Théoréme précédent pour arriver à $p\Pi$ [proportionelle à la force centrale en P] $= SP : SA^3 \times R = x : p^3 r$, cette formule étant la même que ſi l'on n'y eût fait rien de conſtant.

1°. Si $xdy = c$, l'on aura $\Phi = (dy^3 - xdyddx) : 2c^3$, ce qui s'intégre en differentiant la conſtante xdy, qui donne $xddy + dxdy = 0$, ou $dy = -xddy : dx$, & ſubſtituant cette valeur de dy dans la précedente équation $\Phi = (dy^3 - xdyddx) : 2c^3$, il en proviendra $\Phi = (-dyddy - dxddx) : 2ccdx$, ou $\Phi dx = (-dyddy - dxddx) : 2cc$, dont l'intégrale eſt $\int \Phi dx = (-dy^2 - dx^2) : 4cc \pm n$; j'entends encore ici par n une quantité conſtante quelconque.

On peut encore arriver autrement à cette équation en multipliant $\Phi = (dy^3 - xdyddx) : 2c^3$, par dx, & en la prenant par parties pour avoir $\Phi dx = dy^3 dx : 2c^3 [dx : 2x^3] - xdxdyddx : 2c^3 [-dxddx : 2xxdy^2]$, dont l'intégrale eſt $\int \Phi dx = -1 : 4xx - dx^2 : 4xxdy^2 \pm n = (-dy^2 - dx^2) : 4xxdy^2 \pm n$, comme ci-devant.

2°. Soit préſentement $dx : x$ conſtante. Cette autre ſuppoſition changera l'équation précédente $\Phi = (dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy) : 2x^3 dy^3$ en $\Phi = (dy^3 + xdxddy) : 2x^3 dy^3$, qui peut encore s'intégrer en deux manieres; mais pour me ſervir ſeulement de la ſeconde, ſoit cette derniere équation multipliée par dx, & diſtribuée en pluſieurs parties telles que $\Phi dx = dx : 2x^3 + dx^2 ddy : 2xxdy^3$, dont les intégrales [à cauſe de $dx^2 : xx$ conſtante] donnent $\int \Phi dx = -1 : 4xx - dx^2 : 4xxdy^2 \pm n = (-dy^2 - dx^2) : 4xxdy^2 \pm n$, comme cy-deſſus.

Nôtre équation differentio-differentielle étant ainſi réduite à une équation differentielle ordinaire, ſi l'on s'y prend bien [en ſuppléant les homogènes] l'on en déduira $bbdx : \sqrt{(nxx}$

$- xx$

$- xx\int \Phi\, dx - b^4) = dy = xdz : a$, & conſéquemment auſſi $dz = abbdx : \sqrt{(nx^4 - x^4 \int \Phi\, dx - b^4 xx)}$ équation ſemblable à celle que j'ai trouvée par la premiere méthode, & de laquelle par conſéquent ſuit encore [comme de celle-là] la conſtruction univerſelle de la trajectoire, & ſa détermination aux Sections Coniques, dans l'hypothéſe particuliere des forces centripètes réciproquement proportionelles aux quarrés des diſtances du mobile au centre de ces forces.

REMARQUE.

J'ai dit ci-devant que Mr. NEWTON, après avoir démontré que les forces centrales d'un Corps, dirigées vers un des foyers d'une Section Conique quelconque décrite par ce corps, ſont toûjours entr'elles en raiſon renverſée des quarrés des diſtances de ce même corps à ce foyer, ſuppoſe l'inverſe de cette propoſition, ſans la démontrer: ſavoir que lorſque les forces centrales d'un corps qui décrit une Courbe, ſont en raiſon réciproque des quarrés des diſtances de ce corps à quelque point du plan de cette courbe, elle eſt toûjours une Section Conique, dont ce point eſt le foyer, ou un des foyers. Pour voir encore la néceſſité de la démonſtration que je viens de donner de cette inverſe, il n'y a qu'à conſiderer que de ce qu'un corps, pour ſe mouvoir ſur une Spirale Logarithmique, requiert des forces centrales en raiſon réciproque des cubes de ſes diſtances au foyer ou centre de cette courbe; ce n'eſt pas une conſéquence, qu'avec de telles forces il décrivit toûjours une telle Courbe: Puiſqu'il eſt aiſé de ſe convaincre par les formules directes des forces centrales, que ce corps auroit auſſi
TAB. XX. N°. LXXXVI. *Fig.* 4. ces forces en cette raiſon, s'il décrivoit une Spirale Hyperbolique CFED, dont la nature fût d'avoir égaux entr'eux, ou conſtans, tous les rectangles, ou produits AB × CD, faits chacun de chacun des rayons CD de cette Spirale, par l'abſciſſe correſpondante AB de la circonference du cercle ABL, décrit du centre C de cette même Spirale hyperbolique.

EXCER-

N°. LXXXVII.

EXCERPTUM

EX

CELEBERRIMI NEWTONI

Philoſophiæ Naturalis Principiis Mathematicis

LIBRO II. SECT. II.

Ex Editione prima.

PROP. X. PROBL. III.

Pag. 260. *Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur; tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis.*

TAB. XXI. *Fig.* 1. Sit AK planum illud plano ſchematis perpendiculare; ACK linea curva; C corpus in ipſa motum;
Pag. 261 & FCf recta ipſam tangens in C. Fingatur autem corpus C nunc progredi ab A ad K per lineam illam ACK, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progreſſu impediri a Medio, in regreſſu æque promoveri, ſic ut in iiſdem locis eadem ſemper ſit corporis progredientis

Ex Editione ultima.

PROP. X. PROBL. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut Medii denſitas, & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas & Medii reſiſtentia in locis ſingulis. Pag. 252.

Sit PQ planum illud plano ſchematis perpendiculare; PFHQ, linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hac curva ab F ad Q pergentis, & GB, HG, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E inſiſtentes; & ſint BC, CD, DE diſtantiæ ordinatarum inter TAB. XXI. *Fig.* 2.

tis velocitas. Æqualibus autem temporibus deſcribat corpus progrediens arcum quam minimum C G, & corpus regrediens arcum C g; & ſint CH, C h longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco C exeuntia, his temporibus, abſque Medii & Gravitatis actionibus deſcriberent: & a punctis C, G, g, ad planum horizontale A K demittantur perpendicula C B, GD, gd, quorum G D ac gd tangenti occurrant in F & f. Per Medii reſiſtentiam fit ut corpus progrediens, vice longitudinis C H, deſcribat ſolummodo longitudinem C F; & per vim gravitatis transfertur corpus de F in G: adeoque lineola H F vi reſiſtentiæ, & lineola F G vi gravitatis ſimul generantur. Proinde [per Lem. X. Lib. I.] lineola F G eſt ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim; adeoque [ob datam gravitatem] ut quadratum temporis; & lineola HF ut reſiſtentia & quadratum temporis; hoc eſt, ut reſiſtentia & lineola F G. Et inde reſiſtentia fit ut H F directe & F G inverſe, ſive ut H F : F G. Hæc ita ſe habent in lineolis naſcentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non ſunt accuratæ.

ter ſe æquales. A punctis G & H ducantur rectæ G L, H N curvam tangentes in G & H & ordinatis CH, DI ſurſum productis occurrentes in L & N, & compleatur parallelogrammum H C D M. Et tempora quibus corpus deſcribit arcus G H, HI, erunt in ſubduplicata ratione altitudinum L H, N I, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directe & tempora inverſe. Exponantur tempora per T & t velocitates erunt ut $GH : T$, & $HI : t$, & decrementum velocitatis tempore t factum, exponetur per $GH : T - HI : t$. Hoc decrementum oritur a reſiſtentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & ſpatium N I cadendo deſcribente, generat velocitatem qua duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet [ut Galilæus demonſtravit] id eſt, velocitatem $2NI : t$; at in corpore arcum H I deſcribente, auget arcum illum ſola longitudine $HI - HN$ ſeu $MI \times NI : HI$, ideoque generat tantum velocitatem $2MI \times NI : t \times HI$. Pag. 253.
Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $GH : T - HI : t + 2MI \times NI : t \times HI$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $2NI : t$, Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $GH : T - HI : t + 2MI \times NI : t \times HI$, ad $2NI : t$, ſive ut $t \times GH : T - HI + 2MI \times NI : HI$ ad $2NI$.

Et ſimili argumento eſt fg ut quadratum temporis, adeoque ob æqualia tempora æquatur ipſi F G; & impulſus, quo corpus regrediens ur-
Pag. 262. getur, eſt ut $hf : fg$ Sed impulſus corporis regredientis & reſiſtentia progredientis, ipſo motus initio, æquantur, adeoque & ipſis proportionales $hf : fg$ & $HF : FG$ æquantur; & propterea ob æquales fg & F G, æquantur etiam hf & H F, ſuntque adeo C F, C H [vel Ch] & Cf in progreſſione arithmetica, & inde H F ſemidifferentia eſt ipſarum Cf & CF; & reſiſtentia, quæ ſupra fuit ut $HF : FG$, eſt ut $(Cf - CF) : FG$.

Jam pro abſciſſis C B, C D, C E ſcribantur $-o$, o, $2o$. Pro ordinata C H ſcribatur P, & pro M I ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt NI, & Ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpective. Et quadrando differentias Ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum G H, H I quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c; & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{(1+QQ)} - QRoo : \sqrt{(1+QQ)}$ & $o\sqrt{(1+QQ)} + QRoo : \sqrt{(1+QQ)}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinata C H ſubducatur ſemiſumma ordinatarum B G ac D I, & ab ordinata D I ſubducatur ſemiſumma ordinatarum C H & E K, manebunt arcuum G I & H K ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis L H & N I proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t, & inde ratio $t : T$ eſt $\sqrt{(R + 3SO)} : \sqrt{R}$, ſeu $(R + \frac{3}{2}So) : R$, & $t \times GH : T - HI + 2MI \times NI : HI$, ſubſtituendo ipſorum $t : T$, GH, HI, MI, & NI valores jam inventos, evadit $3Soo\sqrt{(1+QQ)} : 2R$. Et cum $2NI$ ſit $2Roo$, Re- Pag. 254.
ſiſtentia jam erit ad Gravitatem ut $3Soo\sqrt{(1+QQ)} : 2R$ ad $2Roo$, id eſt ut $3S\sqrt{(1+QQ)}$ ad $4RR$.

Eſt autem reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis. Velocitas autem ut deſcripta longitudo CF directe, & tempus $\sqrt{FG}$ inverſe, hoc eſt ut CF : $\sqrt{FG}$, adeoque quadratum velocitatis ut CF*q* : FG. Quare reſiſtentia, ipſique proportionalis (C*f* — CF) : FG, eſt ut Medii denſitas & CF*q* : FG conjunctim; & inde Medii denſitas, ut (C*f* — CF) : FG directe, & CF*q* : FG inverſe, id eſt ut (C*f* — CF) : CF*q*.

COROL. I. Et hinc colligitur, quod ſi in C*f* capiatur C*k* æqualis CF, & ad planum horizontale AK demittatur perpendiculum *ki*, ſecans curvam ACK in *l*; fiet Medii denſitas ut (FG — *kl*) : CF × (FG + *kl*). Erit enim *f*C ad *k*C, ut $\sqrt{fg}$, ſeu $\sqrt{FG}$, ad $\sqrt{kl}$, & diviſim *fk* ad *k*C, id eſt C*f* — CF ad CF, ut $\sqrt{FG} - \sqrt{kl}$ ad $\sqrt{kl}$, hoc eſt [ſi ducatur terminus uterque in $\sqrt{FG} + \sqrt{kl}$] ut FG — *kl* ad *kl* + $\sqrt{FG \times kl}$, ſive ad FG + *kl*. Nam ratio prima naſcentium *kl* + $\sqrt{FG \times kl}$ & FG + *kl* eſt æqualitatis. Scribatur itaque (FG — *kl*) : (FG + *kl*) pro (C*f* — CF) : CF; & Medii denſitas, quæ fuit ut (C*f* — CF) : CF*q*, evadet ut (FG — *kl*) : CF × (FG + *kl*).

Pag. 263. COROL. II. Unde cum 2 HF & C*f* — CF æquentur, & FG & *kl* [ob rationem æqualitatis] componant 2 FG; erit 2 HF ad CF ut FG — *kl* ad 2 FG; & inde HF ad

Velocitas autem ea eſt qua cum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum HN*q* : NI, ſeu (1 + *QQ*) : *R* habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut Medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii denſitas eſt ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, id eſt, ut $3S\sqrt{(1+QQ)} : 4R^2$ directe & (1 + *QQ*) : *R*, inverſe, hoc eſt, ut S : R$\sqrt{(1+QQ)}$. *Q. E. I.*

COROLL. I. Si tangens HN producatur utrinque, donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: erit HT : AC æqualis $\sqrt{(1+QQ)}$, adeoque in ſuperioribus pro $\sqrt{(1+QQ)}$ ſcribi poteſt. Qua ratione, Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $3S \times$ HT ad $4RR \times$ AC, Velocitas erit ut HT : AC $\sqrt{R}$, & Medii denſitas erit ut $S \times$ AC : $R \times$ HT.

COROLL.

ad FG, hoc eſt, reſiſtentia ad gravitatem, ut rectangulum CF in FG — *kl* ad 4 FG *quad.*

COROL. III. Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem, ſeu abſciſſam AB, & ordinatim applicatam BC [ut moris eſt]; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem; Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur: ut in Exemplis ſequentibus.

EXEMPL. I. Sit linea ACK ſemicirculus ſuper diametro AK deſcriptus, & requiratur Medii denſitas, quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur ſemicirculi diameter AK in O; & dic OK, *n*; OB, *a*; BC, *e*; & BD, vel B*i*, *o*: & erit DG*q*, ſeu OG*q* — OD*q* æquale $nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$; & radice per methodum noſtram extracta, fiet DG $= e - ao : e - oo : 2e - aaoo : 2e^3 - ao^3 : 2e^3 - a^3o^3 : 2e^5$, &c. Hic ſcribatur *nn* pro $ee + aa$ & evadet DG $= e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$, &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos, in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva *o* non extat; ſecundum, in quo quantitas illa extat unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt *e*, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ BC inſiſtentis ad indefinitæ quantitatis initium B; ſecundus terminus,

COROLL. II. Et hinc ſi curva linea PFHQ definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AC & ordinatim applicatam CH, [ut moris eſt] & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.

EXEMPLUM. I. Sit linea PFHQ ſemicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A; dic AQ, *n*; AC, *a*; CH, *e*, & CD, *o*; & erit DI*q*, ſeu AQ*q* — AD*q* $= nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet Pag. 255.
DI $= e - ao : e - oo : 2e - aaoo : 2e^3 - ao^3 : 2e^3 - a^3o^3 : 2e^5$ — &c. Hic ſcribatur *nn* pro $ee + aa$, & evadet DI $= e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$ — &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos, in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva *o* non extat; ſecundum in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium in quo extat duarum; quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt *e*, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis *o*; ſecundus terminus, Pag. 264. minus, qui hic eſt $ao : e$, denotabit differentiam inter BC & DF, id eſt, lineolam IF, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum BCID, atque adeo poſitionem Tangentis CF ſemper determinat: ut in hoc caſu capiendo IF ad IC, ut eſt $ao : e$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $nnoo : 2e^3$, deſignabit lineolam FG, quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoque determinat angulum contactus FCG, ſeu curvaturam quam curva linea habet in C. Si lineola illa FG finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſubſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus, qui hic eſt $anno^3 : 2e^5$, exhibet variationem curvaturæ; quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea CF eſt latus quadratum ex CIq & IFq, hoc eſt, ex BDq & quadrato termini ſecundi. Eſtque FG $+ kl$ æqualis duplo termini tertii, & FG $- kl$ æqualis duplo quarti. Nam valor ipſius DG convertitur in valorem ipſius il, & valor ipſius FG in valorem ipſius kl, ſcribendo Bi pro BD, ſeu $-o$ pro $+o$. Proinde cum FG ſit $- nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$ &c. erit $kl = - nnoo : 2e^3 + anno^3 : 2e^5$, &c. Et horum terminorum ſumma eſt

minus, qui hic eſt $ao : e$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum HCDM, atque adeo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM, ut eſt $ao : e$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $nnoo : 2e^3$, deſignabit lineolam IN quæ jacet inter tangentem & curvam; adeoque determinat angulum contactus IHN, ſeu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione Problematum, quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Con-

eſt $- nnoo : e^3$, diferentia $- anno^3 : e^5$. Terminum quintum & ſequentes hic negligo, ut infinite minores quam in hoc Problemate conſiderandi veniant. Itaque ſi deſignetur ſeries univerſaliter his terminis $+ Qo - Roo - So^3$ &c. erit CF æqualis $\sqrt{(oo + QQoo)}$, FG $+ kl$ æqualis $2Roo$, & FG $- kl$ æqualis $2So^3$. Pro CF, FG $+$
Pag. 265. kl & FG $- kl$, ſcribantur hi earum valores, & Medii denſitas quæ erat ut (FG $- kl$) : CF $\times$ (FG $+ kl$), jam fiet ut $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$. Deducendo igitur Problema unumquodque ad ſeriem convergentem, & hic pro Q, R & S ſcribendo terminos ſeriei ipſis reſpondentes; deinde etiam ponendo reſiſtentiam Medii, in loco quovis G, eſſe ad gravitatem ut $S\sqrt{(1 + QQ)}$ ad $2RR$, & velocitatem eſſe illam ipſam, qua cum corpus, de loco C ſecundum rectam CF egrediens, in Parabola, diametrum CB & latus rectum $(1 + QQ) : R$ habente, deinceps moveri poſſet, ſolvetur Problema.

Sic in Problemate jam ſolvendo, ſi ſcribantur $\sqrt{(1 + aa : ee)}$ ſeu $n : e$ pro $\sqrt{(1 + QQ)}$; $nn : 2e^3$ pro R, & $ann : 2e^5$ pro S, prodibit Medii denſitas, ut $a : ne$ hoc eſt [ob datam n] ut $a : e$, ſeu OB : BC, id eſt, ut Tangentis longitudo illa CT, quæ ad ſemidiametrum OL ipſi AK normaliter inſiſtentem terminatur; & reſiſtentia erit ad gravitatem ut a ad n, id eſt ut OB ad circuli ſemidiametrum OK; velocitas autem erit ut $\sqrt{2BC}$. Igitur ſi corpus C, certa cum velocitate, ſecundum lineam ipſi OK parallelam, exeat de loco

Conferatur jam ſeries $e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5 -$ &c, cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. & perinde pro P, Q, R, & S ſcribatur e, $a : e$, $nn : 2e^3$, & $ann : 2e^5$, & pro $\sqrt{(1 + QQ)}$ ſcribatur $\sqrt{(1 + aa : ee)}$, ſeu $n : e$ & prodibit Medii denſitas ut $a : ne$, hoc eſt, [ob datam n] ut $a : e$, ſeu AC : CH, id eſt, Pag. 256.
ut Tangentis longitudo illa HT, quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur, & reſiſtentia erit ad gravitatem, ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut 3AC ad circuli

loco L, & Medii denſitas in ſingulis locis C ſit ut longitudo tangentis CT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo C ſit ad vim gravitas ut OB ad OK; corpus illud deſcribet circuli quadrantem LCK. *Q. E. I.*

Pag. 266. At ſi corpus idem de loco A ſecundum lineam ipſi AK perpendicularem egrederetur, ſumenda eſſet OB, ſeu a, ad contrarias partes centri O, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet, & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-a:e$. Negativam autem denſitatem [hoc eſt, quæ motus corporum accelerat] Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non poteſt ut corpus, aſcendendo ab A, deſcribat circuli quadrantem AL. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

TAB. XXI. Fig. 1. Exempl. II. Sit linea ALCK Parabola axem habens OL horizonti AK perpendicularem, & requiratur Medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipſa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum ADK æquale eſt rectangulo ſub ordinata DG & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur recta illa, b; AB, a, AK, c; BC, e & BD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$

culi ſemidiametrum PQ: velocitas autem erit ut $\surd$ CH. Quare ſi corpus, juſta cum velocitate, ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & Medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut 3AC ad PQ, corpus illud deſcribet Circuli quadrantem FHQ. *Q. E. I.*

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi QP perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-a:e$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a P deſcribat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

Exemplum II. Sit linea PFQ parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur Medii denſitas, quæ faciat ut Projectile in ipſa moveatur. TAB. XXI. Fig. 3.

Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale eſt rectangulo ſub ordinata DI & recta aliqua data; hoc eſt, ſi dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, ſeu $ac-aa$

oo æquale eſt rectangulo b in DG; adeoque DG æquale $(ac-aa):b+(c-2a)o:b-oo:b$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminis $(c-2a)o:b$ pro Qo & ejus coëfficiens $(c-2a):b$ pro Q; tertius item terminus $oo:b$ pro Roo, & ejus coëfficiens $(1:b)$ pro R. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti termini So^3 coëfficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $S:R\surd(1+QQ)$, cui Medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur Medii denſitate, movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonſtravit Galilæus. *Q. E. I.*

TAB. XXI. Fig. 4. Exempl. III. Sit linea AGK Hyperbola Aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii denſitas, quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Pag. 267. Sit MX Aſymptotos altera ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo DNXZ, dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX, vel DN, ponatur eſſe $m:n$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $bb:(a-o)$, VZ æqualis $m(a-o):n$, & GD ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-ma:n+mo:n-bb:(a-o)$. Reſolvatur terminus $bb:(a-o)$ in ſeriem convergentem

$-2ao+co-oo$ æquale eſt rectangulo b in DI, adeoque DI æquale $(ac-aa):b+(c-2a)o:b-oo:b$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $(c-2a)o:b$ pro Qo, tertius item terminus $oo:b$ pro Roo. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti coëfficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $S:R\surd(1+QQ)$, cui Medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur Medii denſitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonſtravit Galilæus. *Q. E. I.* Pag. 257.

Exemplum III. Sit linea AGK Hyperbola, Aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem, & quæratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea. TAB. XXI. Fig. 4.

Sit MX Aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum VX in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo DNXZ, dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX, vel DN, ponatur eſſe $m:n$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $bb:(a-o)$, VZ æqualis $m(a-o):n$, & GD, ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-ma:n+mo:n-bb:(a-o)$. Reſolvatur terminus $bb:(a-o)$ in ſeriem convergentem $bb:a+bbo:aa$

gentem $bb : a + bbo : aa + bboo : a^3 + bbo^3 : a^4$, &c. & fiet GD æqualis $c - ma : n - bb : a + mo : n - bbo : aa - bbo^2 : a^3 - bbo^3 : a^4$, &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $mo : n - bbo : aa$, uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $bbo^2 : a^3$, pro Ro^2; & quartus cum ſigno etiam mutato $bbo^3 : a^4$ pro So^3:, eorumque coëfficientes $m : n - bb :$
Pag. 268. aa, $bb : a^3$, & $bb : a^4$ ſecribendæ ſunt, in Regula ſuperiore, pro Q R & S. Quo facto, prodit medii denſitas, ut $\frac{bb}{a^4} : \frac{bb}{a^3}\sqrt{(1 - \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4})}$ ſeu, $1 : \sqrt{(aa + mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa)}$, id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $1 :$ XY. Namque aa & $mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa$, ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad Gravitatem, quam habet XY ad YG, & velocitas ea eſt quacum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum XY q: VG habente. Ponatur itaque, quod Medii denſitates, in locis ſingulis G, ſint reciproce ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia, in loco aliquo G, ſi ad gravitatem, ut XY ad YG; & corpus de loco A, juſta cum velocitate emiſſum, deſcribet Hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

EXEMPL. IV. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola ſit, centro X, Aſymptotis MX, NX, ea lege deſcripta, ut conſtructo

$aa + bboo : a^3 + bbo^3 : a^4$ &c. & fiet GD æqualis $c - ma : n - bb : a + mo : n - bbo : aa - bbo^2 : a^3 - bbo^3 : a^4$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus, $mo : n - bbo : a^2$, uſurpandus eſt pro Qo; tertius, cum ſigno mutato $bbo^2 : a^3$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $bbo^3 : a^4$ pro So^3, eorum- Pag. 258.
que coëfficientes $m : n - bb : aa$, $bb : a^3$, & $bb : a^4$ ſcribendæ ſunt in ſuperiore Regula pro Q, R, & S. Quo facto prodit Medii denſitas ut $\frac{bb}{a^4} : \frac{bb}{a^3}\sqrt{(1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4})}$, ſeu $1 : \sqrt{(aa + mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : a^2)}$ id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $1 :$ XY. Namque aa & $mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3XY ad 2YG & velocitas ea eſt qua cum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG & latus rectum XY q: VG habente. Ponatur itaque quod Medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciproce ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut 3XY ad 2YG, & corpus de loco A, juſta cum velocitate emiſſum, deſcribet Hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

EXEMPLUM IV. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX, ea lege deſcripta, ut conſtructo

tructo rectangulo XZDN, cujus latus ZD ſecet Hyperbolam in G, & Aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce, ut ipſius ZX, vel DN, dignitas aliqua ND^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX, ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad ZX vel DN, ut d ad e, & VG æqualis $bb : DN^n$ & erit DN æqualis $A - O$, VG $= bb : (A - O)^n$, VZ $= d(A - O) : e$ & GD ſeu NX $-$ VZ $-$ VG æqualis $C - dA : e + dO : e - bb : (A - O)^n$. Reſolvatur terminus ille $bb : (A - O)^n$ in ſeriem infinitam $bb : A^n + nbbO : A^{n+1} + (nn + n)bbO^2 : 2A^{n+2} + (n^3 + 2nn + n)bbO^3 : 6A^{n+3}$, &c.
Pag. 269. ac fiet GD æqualis $C - dA : e - bb : A^n + dO : e - nbbO : A^{n+1} - (nn + n)bbO^2 : 2A^{n+2} - (n^3 + 3nn + n)bbO^3 : 6A^{n+3}$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $dO : e - nbbO : A^{n+1}$, uſurpandus eſt pro Qo; tertius $(nn + n)bbO^2 : 2A^{n+2}$ pro Ro^2; quartus $(n^3 + 3nn + n)bbO^3 : 6A^{n+3}$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$ in loco quovis G, fit $(n + 2) : 3\sqrt{(A^2 + ddAA :}$

to rectangulo XZDN cujus latus ZD ſecet Hyperbolam in G & Aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur Medii denſitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX, ſcribantur A, O, C, reſpective, ſitque VZ ad XZ, vel DN, ut d ad e, & VG æqualis $bb : DN^n$, & erit DN æqualis $A - O$, VG $= bb :$ Pag. 259.
$(A - O)^n$, VZ $= d(A - O) : e$ & GD ſeu NX $-$ VZ $-$ VG æqualis $C - dA : e + dO : e - bb : (A - O)^n$. Reſolvatur terminus ille $bb : (A - O)^n$ in ſeriem infinitam $bb : A^n + nbbO : A^{n+1} + (nn + n)bbO^2 : 2A^{n+2} + (n^3 + 2nn + n)bbO^3 : 6A^{n+3}$ ac fiet GD æqualis $C - dA : e - bb : A^n + dO : e - nbbO : A^{n+1} - (nn + n)bbO^2 : 2A^{n+2} - (n^3 + 3nn + n)bbO^3 : 6A^{n+3}$. Hujus ſeriei terminus ſecundus $(d : e - nbb : A^{n+1})O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $(nn + n)bbO^2 : 2A^{n+2}$, pro Ro^2, quartus $(n^3 + 3nn + n)bbO^3 : 6A^{n+3}$ pro So^3. Et inde Medii denſitas $S : R\sqrt{(1 + QQ)}$ in loco quovis G, fit $(n + 2) : 3\sqrt{(A^2 + ddA^2 : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n})}$, adeoque

$ddAA : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n}$), adeoque si in VZ capiatur VY æqualis $n \times$ VG, densitas illa est reciproce ut X Y. Sunt enim A^2 & $ddA^2 : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n}$ ipsarum XZ & Z Y quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad Gravitatem, ut $S \times$ X Y : A ad $2RR$, id est ut X Y ad $(3nn + 3n)$ VG : $(n + 2)$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, qua cum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD, & Latus rectum $(1 + QQ) : R$ seu 2XY *quad* : $(nn + n)$ VG habente. *Q. E. I.*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

adeoque si in VZ capiatur VY æqualis $n \times$ VG, densitas illa est reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $ddA^2 : ee - 2dnbbA : eA^n + nnb^4 : A^{2n}$ ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3S \times$ XY : A ad $4RR$, id est, ut XY ad $(2nn + 2n)$ VG : $(n + 2)$. Et velocitas ibidem ea ipsa est quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & latus rectum $(1 + QQ) : R$ seu 2XY$q : (nn + n)$ VG habente. *Q. E. I.*

S C H O L I U M.

Eadem ratione, qua prodiit densitas medii, ut $S \times$ AC : $R \times$ HT in Corollario primo; si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, prodibit densitas medii ut $(S : R^{(4-n):2}) \times (AC : HT)^{n-1}$. Et propterea, si curva inveniri potest ea lege, ut data fuerit ratio $S : R^{(4-n):2}$ ad $(HT : AC)^{n-1}$, vel $S^2 : R^{4-n}$ ad $(1 + QQ)^{n-1}$; corpus movebitur in hac curva, in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Pag. 260.

. . . .
. . . .

Quæ Quæ

Pag. 273. TAB. XXI Fig. 5. Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si XAGK Parabolam designet, quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, VX dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, TG, HA, quarum XT parallela sit VG, & TG, HA Parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medii, in locis singulis G, sit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit, quacum Projectile pergeret Pag. 274. in spatio non resistente, in Parabola Conica, verticem G, diametrum VG deorsum productam, & & latus rectum $\surd\,(2$TG$q : (nn - n)$VG$)$ habente. Et resistentia in G erit ad vim Gravitatis, ut TG ad $(3nn - 3n)$ VG : $(n - 2)$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA, ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile transibit.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

SEC-

Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si XAGK Parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG, ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela sit VG, & GT, AH Parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medii, in locis singulis G, sit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit, quacum Projectile pergeret in spatio non resistente, in Parabola Conica verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum 2GT$q : (nn - n)$ VG habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $(2nn - 2n)$ VG : $(n - 2)$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile transibit. Pag. 264. TAB. XXI. Fig. 5.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

SEC-

SECTIO IV.

LEM. III.

Pag. 283. *Sit* P Q R r *ſpiralis quæ ſecet radios omnes* S P, S Q, S R, *&c, in æqualibus angulis. Agatur recta* P T, *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* S Q *in* T; *& ad ſpiralem erectis perpendicularibus* P O, Q O, *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico, quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* T Q × P S *ad* P Q *quadr. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis O P Q, O Q R, ſubducantur anguli æquales S P Q, S Q R & manebunt anguli æquales O P S, O Q S. Ergo circulus, qui tranſit per puncta O, S, P, tranſibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q & hic circulus in loco coitus P Q tanget ſpiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam O P. Fiet igitur O P diameter circuli hujus, & angulus O S P in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*

Ad O P demittantur perpendicula Q D, S E, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: T Q ad P D, ut T S, vel P S, ad P E, ſeu P O ad P S. Item P D ad P Q ut P Q ad P O. Et, ex æquo perturbate. T Q ad P Q, ut P Q ad P S. Unde fit P Q*q* æqualis T Q × P S. *Q. E. D.*

PRO-

SECTIO IV.

LEMMA III.

Sit P Q R r *ſpiralis, quæ ſecet radios omnes* S P, S Q, S R, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* P T, *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* S Q *in* T, *& ad ſpiralem erectis perpendiculis* P O, Q O, *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico, quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* T Q × 2 P S *ad* P Q *quadr. erit ratio æqualitatis.* Pag. 274.

Etenim de angulis rectis O P Q, O Q R, ſubducantur anguli æquales S P Q, S Q R, & manebunt anguli æquales O P S, O Q S. Ergo circulus, qui tranſit per puncta O, S, P tranſibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q, & hic circulus in loco coitus P Q tanget ſpiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam O P. Fiet igitur O P diameter circuli hujus, & angulus O S P in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*

Ad O P demitantur perpendicula Q D, S E, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: T Q ad P D ut T S, vel P S, ad P E ſeu 2 P O ad 2 P S. Item P D ad P Q ut P Q ad 2 P O. Et, ex æquo perturbate, T Q ad P Q ut P Q ad 2 P S. Unde fit P Q*q* æquale T Q × 2 P S. *Q. E. D.*

PRO-

PROP. XV. THEOR. XI.

Pag. 284. *Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: Dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.*

TAB. XXI. Fig. 6. Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur S Q ad V, ut ſit S V æqualis S P. Temporibus æqualibus deſcribat corpus arcus quam minimos P Q & Q R, ſintque areæ P S Q, Q S *r* æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut S P*q*, & [per Lem. X. Lib. I.] lineola T Q, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus P Q deſcribitur, [Nam reſiſtentiam iu hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo,] erit T Q × S P*q* [per Lemma noviſſimum] P Q*q* × S P, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut P Q × √S P, & corporis velocitas, qua arcus P Q illo tempore deſcribitur, ut P Q : P Q × √S P, ſeu 1 : √S P, hoc eſt, in dimidiata ratione ipſius S P reciproce. Et ſimili argumento velocitas, qua arcus Q R deſcribitur, eſt in dimidiata ratione ipſius S Q reciproce. Sunt autem arcus illi P Q & Q R ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in dimidiata ratione S Q ad S P, ſive ut S Q ad √S P × √S Q; &, ob æquales angulos S P Q, S Q *r* & æquales areas P S Q,

PROPOSITIO XV THEOREMA XII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato. Pag. 275.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur S Q ad V, ut ſit S V æqualis S P. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum P Q; & tempore duplo arcum quam minimum P R, & decrementa horum arcuum ex reſiſtentia oriunda, ſive defectus ab arcubus qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Et itaque decrementum arcus P Q pars quarta decrementi arcus P R. Unde etiam, ſi areæ P S Q æqualis capiatur area Q S *r*, erit decrementum arcus P Q æquale dimidio lineolæ R *r*, adeoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}$ R *r* & T Q quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut S P*q*, & [per Lem. X. Lib. I.] lineola T Q, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus P Q deſcribitur, [nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo] erit T Q × S P*q*, id eſt [per Lemma noviſſimum] $\frac{1}{2}$ P Q*q* × S P, in ratione duplicata tempo-

TAB. XXI. Fig. 6. Pag. 276.

PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr, ut SQ ad SP. Suman-
Pag. 285. tur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr, ut SQ ad SP — $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$, ſeu $\frac{1}{2}$ VQ; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima SP — $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$ ad $\frac{1}{2}$ VQ fit æqualitatis. In medio non reſiſtente areæ æquales PSQ, QSr [per Theor. I. Lib. I.] temporibus æqualibus deſcribi deberent. Ex reſiſtentia oritur arearum differentia RSr, & propterea reſiſtentia eſt ut lineolæ Qr decrementum Rr, collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola Rr [per Lem. X. Lib. I.] eſt in duplicata ratione temporis. Eſt igitur reſiſtentia ut Rr : PQq × SP. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad VQ, & inde Rr : PQq × SP fit ut $\frac{1}{2}$ VQ : PQ × SP × SQ, ſive ut $\frac{1}{2}$ OS : OP × SPq. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}$ VQ ut OP ad $\frac{1}{2}$ OS. Eſt igitur OS : OP × SPq ut reſiſtentia, id eſt, in ratione denſitatis Medii in P, & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio 1 : SP, & manebit Medii denſitas in P, ut OS : OP × SP. Detur ſpiralis, & ob datam rationem OS ad OP, denſitas Medii in P erit ut 1 : SP. In Medio igitur, cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac ſpirali. *Q. E. D.*

COROLL.

poris, adeoque tempus eſt ut PQ × $\sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut PQ : PQ × $\sqrt{SP}$, ſeu 1 : $\sqrt{SP}$, hoc eſt, in ſubduplicata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento, velocitas qua arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt in ſubduplicata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{(SP \times SQ)}$ & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr, ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad SP — $\sqrt{(SP \times SQ)}$ ſeu $\frac{1}{2}$ VQ, nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima SP — $\sqrt{(SP \times SQ)}$ ad $\frac{1}{2}$ VQ eſt æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ ex reſiſtentia oriundum, ſive hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; erit reſiſtentia ut Rr : PQq × SP. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}$ VQ & inde Rr : PQq × SP fit ut $\frac{1}{2}$ VQ : PQ × SP × SQ, ſive ut $\frac{1}{2}$ OS : OP × SPq. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO fit PQ ad $\frac{1}{2}$ VQ, ut OP ad $\frac{1}{2}$ OS. Pag. 277.
Eſt igitur OS : OP × SPq ut reſiſtentia, id eſt, in ratione denſitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis, conjunctim. Auferatur duplicata

COROL. I. Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt, quacum corpus in Medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo, ad eandem a centro diſtantiam SP.

Pag. 286. COROL. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut OS : OP; ſin diſtantia illa non datur, ut OS : OP × SP. Et inde ſpiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

COROL. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco, ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP. Nam vires illæ, ſunt ut lineæ Rr & TQ, ſeu ut $\frac{1}{2}$ VQ × PQ : SQ, & PQq : SP, quas ſimul generant, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$ VQ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}$ OS & OP. Data igitur ſpirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice verſa ex data illa proportione datur ſpiralis.

COROL. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & ſpiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, dimidia ſemper cum velocitate, qua probavimus in ſuperiori-

plicata ratio velocitatis, nempe ratio 1 : SP, & manebit Medii denſitas in P ut OS : OP × SP. Detur ſpiralis, & ob datam rationem OS ad OP, denſitas Medii in P erit ut 1 : SP. In Medio igitur, cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac ſpirali.

COROLL. I. Velocitas, in loco quovis P, ea ſemper eſt, quacum corpus in Medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo, ad eandem a centro diſtantiam SP.

COROLL. II. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP eſt ut OS : OP; ſin diſtantia illa non datur, ut OS : OP × SP. Et inde ſpiralis ad quamlibet Medii denſitatem aptari poteſt.

COROLL. III. Vis reſiſtentiæ, in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco, ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ Rr & TQ, ſive ut $\frac{1}{4}$ VQ × PQ : SQ & $\frac{1}{2}$ PQq : SP, hoc eſt ut $\frac{1}{2}$ VQ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}$ OS & OP. Data igitur ſpirali, datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice verſa ex data illa proportione datur ſpiralis.

COROLL. IV. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & ſpiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, ea cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem, perioribus in casu Parabolæ [Theor. X. Lib. I.] descensum in Medio non resistente fieri. Unde tempora descensus hic erunt duplo majora temporibus illis, atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in spirali P Q R, atque in recta S P, & longitudo spiralis ad longitudinem rectæ P S est in data ratione, nempe in ratione O P ad O S; tempus descensus in spirali erit ad tempus descensus in recta S P in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S, intervallis duobus datis, describantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere potest, est ut P S: O S, sive ut Tangens anguli, quem spiralis continet cum radio P S; tempus vero revolutionum earumdem ut O P: O S, id est, reciproce ut Medii densitas.

TAB. XXI. Fig. 7. Corol. 7. Si corpus, in Medio, cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque
Pag. 287. A E B circa centrum illud fecerit, & Radium primum A S in eodem angulo secuerit in B, quo prius in A, idque cum velocitate, quæ fuerit

tatem, qua probavimus in superioribus in casu Parabolæ [Theor. X. Lib. I.] descensum in medio non resistente fieri, in subduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora descensus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

Coroll. V. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in spirali P Q R atque in recta S P, & longitudo spiralis ad longitudinem rectæ P S est in data ratione, nempe in ratione O P ad O S, tempus descensus in spi- Pag. 278.
rali erit ad tempus descensus in recta S P in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Coroll. VI. Si centro S, intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo Circuli; & manentibus hisce Circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio P S: numerus revolutionum quas Corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere potest, est ut P S: O S, sive ut Tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio P S; tempus vero revolutionum earundem ut O P: O S, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut Medii densitas.

Corol. VII. Si corpus in Medio, cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque A E B circa centrum illud fecerit, & Radium primum A S in eodem angulo secuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad TAB. XXI. Fig. 7.

fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in dimidiata ratione distantiarum a centro [id est ut A S ad mediam proportionalem inter A S & B S:] corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & intersectionibus distinguet Radium AS in partes A S, B S, C S, D S, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum A E B, B F C, C G D &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverse; id est ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, & quam proxime ut $\frac{2}{3}$ A S ad A B. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus Corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S intervallis continue proportionalibus S A, S B,
Pag. 288. S C &c. describe circulos quotcunque, & statue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, esse ad numerum

ad velocitatem suam primam in A reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro [id est ut A S ad mediam proportionalem inter A S & B S] corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones B F C, C G D &c. facere, & intersectionibus distinguet radium AS in partes A S, B S, C S, D S, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut peri- Pag. 279.
metri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverse, id est ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $BS^{\frac{3}{2}}$, $AS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ sive ut $\frac{2}{3}$ A S ad A B quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. VIII. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S, intervallis continue proportionalibus S A, S B, S C, &c. describe circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem rum revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter duos circulos, ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime; sed & in eadem quoque ratione esse tangentem anguli quo spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium AS, ad tangentem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum secantes, ita esse tempora revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus, quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiralium illarum singulas revolutiones eisdem ab invicem intervallis distare; iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut dignitas aliqua distantiæ locorum a centro, sitque vis centripeta reciproce ut distantia in dignitatem illam ducta: Dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem proxime: sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium AS, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Coroll. IX. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XIII.

Pag. 280.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas qualibet ejusdem distantiæ: Dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

TAB. XXI. Fig. 6.

Demonstratur eadem methodo cum propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1}, cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus, quo corpus describit arcum quemvis PQ,

Pag. 289.

erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & resistentia in P, ut $Rr : PQq \times SP^{n}$, sive ut $\frac{1}{2}n\,VQ : PQ \times SP^{n} \times SQ$, adeoque ut $\frac{1}{2}n\,OS : OP \times SP^{n+1}$. Et propterea densitas in P est reciproce ut SP^{n}.

Demonstratur eadem methodo, cum propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1}, cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus, quo corpus describit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & resistentia in P, ut $Rr : PQq \times SP^{n}$, sive ut $(1-\frac{1}{2}n)\,VQ : PQ \times SP^{n} \times SQ$, ideoque ut $(1-\frac{1}{2}n)\,OS : OP \times SP^{n+1}$, hoc est, ob datum $(1-\frac{1}{2}n)\,OS : OP$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciproce ut SP.

TAB. XXI. Fig. 6.

Corol. I. Resistentia est ad vim centripetam ut $(1-\frac{1}{2}n)$ OS ad OP.

Corol. II. Si vis centripeta sit reciproce ut SP *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in Propositione nona Libri primi.

Corol. III. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii, cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutatur.

N°. LXXXVIII.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur BERNOULLI,

Ecrite de Baſle *le* 10 *Janvier* 1711, *touchant la maniere de trouver les forces centrales dans des milieux reſiſtans, en raiſons compoſées de leurs denſités & des puiſſances quelconques des viteſſes du mobile.*

LEMME.

Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris 1711 pag. 47. Edit. de Paris. pag. 59. Edit. de Hollande.

Un Corps pouſſé par une force uniforme (comme la peſanteur) appellée P, *parcourant un eſpace quelconque* S *en commençant au repos, dans le temps* T : *je dis que ce tems ſera exprimé par* $\sqrt{(2S:P)}$.

DEMONSTRATION.

Soit V la viteſſe acquiſe à la fin du temps T; l'on aura $dS:V = dT$, ou $P\,dS:V = P\,dT = dV$: Et par conſéquent $P\,dS = V\,dV$. Donc $PS = \frac{1}{2}VV$, & $V = \sqrt{2PS}$; ce qui étant ſubſtitué en $dS:V = dT$, donnera $dS:\sqrt{2PS} = dT$, & [en intégrant] $\sqrt{(2S:P)} = T$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

PROBLEME.

Trouver la force centrale requiſe, pour que le mobile décrive une Courbe donnée, dans un milieu dont les denſités varient ſelon une loi donnée, & qui reſiſte au mobile en raiſon compoſée des denſités, & des viteſſes élevées à quelque dignité que ce ſoit.

SOLU-

SOLUTION.

Soit A le centre des forces dans la courbe donnée CFK; AC, ou $AF = x$, $FB = dx$, $CB = dy$, $CF = ds$, $v =$ à la viteſſe du mobile en C, $dt =$ au tems pour parcourir CF, la force centrale en $C = f$, le rayon de la développée au point $C = r$, $n =$ à la dignité ou à la puiſſance de la viteſſe, $z =$ à la denſité au point C, $c =$ au nombre de l'unité, c'eſt-à-dire, $lc = 1$: outre cela ſoient p, q, des grandeurs données en x, y, & en conſtantes, leſquelles grandeurs p, q, ſeront déterminées ci-après. Tab XX. N°. LXXXVIII.

Tout cela étant ainſi, je reſous la force centrale [f] en deux, ſuivant les directions de la tangente EC & de ſa perpendiculaire Ee : la premiere ſe trouve $= fdx:ds$, & la ſeconde $= fdy:ds$. Or ce n'eſt qu'en vertu de celle-ci, que le mobile eſt contraint de quitter la tangente CE, pour ſe trouver au point e de la Courbe: ſi bien que voilà une force, au commencement uniforme, qui fait deſcendre le mobile de la valeur de Ee, du point E en e, dans le temps dt qu'il pourroit parcourir CE, CF, ou Ce; ces trois grandeurs ſont cenſées égales, à cauſe de leurs differences infiniment plus petites qu'elles. Donc, par le Lemme précédent, en ſubſtituant pour S la petite ligne Ee qui eſt $ds^2:2r$, & pour P la force $fdy:ds$ ſelon cette perpendiculaire à la courbe, dt pour T; l'on aura ici $\sqrt{(ds^3:frdy)} = dt = ds:v$; ce qui donne $f = vvds:rdy$.

Cette valeur de f étant ainſi trouvée, ſi on la ſubſtitue dans la précédente force $fdx:ds$, ſuivant la tangente EC, l'on aura cette force $fdx:ds = vvdx:rdy$, à quoi il faut ajoûter ou rabattre [ſelon que le mobile monte en s'éloiguant du centre A, ou deſcend en s'en approchant] la force de la reſiſtance du milieu, laquelle eſt [*hyp.*] zv^n, pour avoir la force abſoluë avec laquelle le mobile eſt retiré en montant, ou pouſſé en deſcendant. Cette force abſoluë ſuivant

vant EC sera donc $vvdx : rdy \pm zv^n$, laquelle étant multipliée par dt ou $ds : v$, produit $vdsdx : rdy \pm zv^{n-1} ds = -dv$ élement de la vitesse; d'où il résulte $dv : v + dsdx : rdy \pm v^{n-2} zds = 0$, ou bien [à cause que la rélation de dx, dy, ds, r, z, est donnée en x, en y, & en constantes, si l'on prend $p = ds : rdy$ & $qdx = zds$] $dv : v + pdx \pm v^{n-2} qdx = 0$. Il s'agit d'ôter la lettre v de cette derniere équation; ce que je fais de la maniere, dont je me suis servi dans les *Actes de Leipsic* de 1697. pag. 115, * en supposant $v = M \times N$, laquelle valeur de v étant introduite avec sa difference dans la derniere équation précédente, la change en $dM : M + dN : N + pdx \pm M^{n-2} \times N^{n-2} \times qdx = 0$. Pour déterminer présentement M & N, je fais $dM : M + pdx = 0$, & par conséquent aussi $dN : N \pm M^{n-2} \times N^{n-2} \times qdx = 0$: La premiere supposition donne $lM = -\int pdx \times lc$, d'où résulte $M = c^{-\int pdx}$; & l'autre après la substitution de cette valeur de M, donne $N^{1-n} dN = \mp c^{(2-n)\int pdx} qdx$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2-n} N^{2-n} = \pm \int c^{(2-n)\int pdx} qdx$ laquelle donne $N = \sqrt[2-n]{((\mp 2 \pm n) \int c^{(2-n)\int pdx}) qdx)}$. Ainsi en multipliant ces valeurs de M, N, l'une par l'autre, l'on aura $M \times N$, ou $v = c^{-\int pdx} \sqrt[2-n]{((\mp 2 \pm n) \int c^{(2-n)\int pdx} qdx)}$. Donc en substituant son quarré dans l'équation $f = vvds : rdy = pvv$ trouvée ci-dessus, l'on aura enfin la force centrale cherché $f = pc^{-\int pdx} \times \sqrt[1-\frac{1}{2}n]{((\pm 2 \mp n) \int c^{(2-n)\int pdx} qdx)}$; se souvenant toûjours que les signes supérieurs sont pour le mobile montant, & les inférieurs pour le descendant.

* Cy-dessus. N°. XXXV. pag. 175, 176.

On

On voit qu'il n'entre dans cette expression que des quantités données en x, y, & en constantes, sans la consideration du temps, que l'on peut présentement déterminer fort aisément, puisque $dt = ds : v$.

REMARQUE.

I. L'utilité qu'on peut retirer de tout cela, c'est d'éviter quelques méprises qui sont échappées à Mr. NEWTON, dans l'application qu'il a faite, *pag.* 265 † de sa Solution du *Probl. III. pag.* 260 *, au cercle ACK dans ses *Princ. Math.* Cette méprise consiste, en ce qu'après avoir mené du centre O le rayon OC, à volonté, dans le quart de cercle vertical OLCK, & y avoir fait CB perpendiculaire en B sur le diamètre horizontal AK, Mr. NEWTON dit dans cette *page* 265, † que pour qu'un Corps C, de pesanteur constante, pût décrire en l'air le quart de cercle LCK en tombant de L vers K [il ne croit pas que ce Corps le pût décrire en montant,] la résistance de ce milieu devroit être à la pesanteur de ce mobile en chaque point C, comme OB à OK, & que sa vitesse en ce point C seroit alors en raison de $\sqrt{(2 \times BC)}$ ce qui implique une manifeste contradiction, que je démontre ainsi.

TAB. XXI. N°. LXXXVII. *Fig.* 1.

Soit nommée R la résistance du milieu; P, la pesanteur du mobile; & π, la force que cette pesanteur exerce suivant chaque tangente en chaque point C. On fait que P : π = OC, ou OK : OB. Si donc, selon Mr. NEWTON, R : P = OB : OK. L'on auroit [en raison ordonnée] R : π = OB : OB, c'est-à-dire, R = π. Par conséquent la resistance R du milieu ôteroit autant d'accéleration au mobile, que la force π de sa pesanteur P lui en donneroit : & conséquemment aussi la vitesse de ce mobile seroit ici toûjours la même & uniforme, au lieu que Mr. NEWTON la

† Cy-dessus pag. 481. * pag. 487.

la dit variable en raiſon de $\sqrt{(2 \times BC)}$. *Ce qui eſt la contradiction que j'avois à démontrer.*

Pour remédier à ce défaut, je dis qu'il faut ici $R : P = 3 \times OB : 2 \times OK$. Car la Solution précédente, où j'ai pris v pour la viteſſe du mobile en C, r pour le rayon de la développée en ce point, ds pour l'élement C G de la Courbe quelconque nommée LCK, de l'extrémité G duquel parte $GE = dy$ perpendiculaire en E ſur $CB = x$; f pour la peſanteur du mobile, & zv^n pour la réſiſtance du milieu: cette peſanteur, dis-je, avec cette réſiſtance, ayant donné $fdx : ds = vvdx : rdy$ avec $vvdsdx : rdy \pm zv^n\, ds = -vdv$, de la premiere deſquelles égalités reſulte $vv = frdy : ds$ qui ſubſtituée dans la ſeconde, rend $fdx \pm zv^n\, ds = -vdv$: & ce cas-ci rendant $f = P$, $r = OC$, $dy : ds = EG : GC = BC : OC$, & $zv^n = R$; l'on y aura $vv = P \times OC \times BC : OC = P \times BC = P \times x$, & $P \times dx \pm Rds = -vdv$. Or [à cauſe de P conſtante] $vv = P \times x$ donne $vdv = \frac{1}{2} P \times dx$. D'où l'on aura pareillement ici $P \times dx \pm R \times ds = -\frac{1}{2} P \times dx$, d'où réſulte $P : R = \mp 2ds : 3dx = \mp 2CG : 3CE = \mp 2OC : 3OB = \mp 2OK : 3OB$; c'eſt-à-dire, $R : P = 3 \times OB : 2 \times OK$. *Ce qu'il faloit encore démontrer.*

II. Mr. NEWTON s'eſt encore mépris dans ſa *Prop. XVI. pag.* 288. * dans laquelle il dit, que ſi un Corps tiré par des forces centrales tendantes toutes à un même point, ſe meut autour de ce point, dans un milieu où il trouve par tout des denſités en raiſon réciproque des puiſſances quelconques n de ſes diſtances à ce point, & avec des forces centrales réciproques aux puiſſances $n + 1$ de ces mêmes diſtances; ce Corps décrira une Spirale logarithmique, dont le pole, ou le centre, ſera le point où toutes ces forces tendent: Je trouve, dis-je, par mon Analyſe que cette propoſition n'eſt vraye

* Cy-deſſus pag. 500.

vraye que dans le cas de $n = 1$, qui eſt celui de la *Prop. XV.* qui précède celle-ci.

Car en prenant x, pour chacun des rayons de la Spirale; h, pour la ſécante de ſon angle conſtant, & par tout le même avec chacun de ces rayons; l'unité, pour le Sinus total; c, pour le nombre dont le Logarithme eſt l'unité; f, pour chacune des forces centrales du mobile, tendantes au centre de la Spirale: v, pour la viteſſe de ce mobile; R, pour la réſiſtance du milieu, & D, pour la denſité qui en fait partie; ſi l'on ſuppoſe avec Mr. NEWTON $D = 1 : x^n$ & $R = mvv \times D$, on trouvera ſuivant mon Analyſe qu'il faudroit $f = x^{-3} \times c^{\mp 2mhx^{1-n} : (1-n)}$ & non pas $f = 1 : x^{n+1}$ comme Mr. NEWTON le dit, pour faire ici décrire au mobile une Spirale Logarithmique. On verra de là que bien loin que $f = 1 : x^{n+1}$ ſoit la force ici requiſe, cette force ne ſauroit même être égale à aucune puiſſance de x, ſi ce n'eſt dans la ſuppoſition de $n = 1$. Je trouve auſſi que les viteſſes ſeroient ici $v = x^{-1} \times c^{\mp mhx^{1-n} : (1-n)}$ & qu'il y faudroit $R : f = m : x^{n-1}$. Le ſupérieur du double ſigne $\mp$ eſt par tout ici pour le cas d'aſcenſion, & l'inférieur pour celui de deſcente. On peut multiplier l'expreſſion de f par $c^{+2mha^{1-n} : (1-n)}$ & celle de v par $c^{+mha^{1-n} : (1-n)}$.

III. Il eſt encore à remarquer, que la *Prop. XV. pag.* 284 * de Mr. NEWTON, ſouffre une plus grande généralité que ne porte ſon énoncé: Car au lieu de cette reſtriction, [qu'il y fait] *Sitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis*; On peut dire, *Sitque vis centripeta, in quacumque multiplicata ratione denſitatis, majore tamen quam triplicata, ſi mobile aſcendit, & minore, ſi deſcendit.* En effet, ſi l'on prend, non pas 2, comme fait Mr. NEWTON, mais en général k pour l'expoſant

† Ci-deſſus, pag. 495.

de la puiſſance de la denſité, & conſéquemment $f = x^{-k}$; le reſte demeurant comme ci-deſſus, *Art.* 2. On trouvera par mon Analyſe $D = (3 - k) : \mp 2mhx$, c'eſt-à-dire, non ſeulement que la denſité D doit être ici en raiſon réciproque des diſtances [x] du mobile au centre de la Spirale; mais encore que $(3 - k) : \mp 2mh$ doit être un nombre affirmatif, afin que la denſité D ſoit poſſible; C'eſt pourquoi ſi le mobile monte, k doit être plus petit que 3. On trouvera auſſi en général par mon Analyſe la raiſon de la réſiſtance R à la force f, ſavoir $R : f = 3 - k : \mp 2h$. Et que la viteſſe v eſt proportionelle à $D^{(k-1):2}$. C'eſt ainſi qu'on verra que Mr. NEWTON n'a point donné aſſez d'étendue à ſa *Prop. XV. pag.* 284. * & qu'il y pourroit dire, *in qualibet multiplicata ratione*, au lieu de dire ſeulement, [comme il fait] *in duplicata ratione*: mais toûjours avec la reſtriction mentionnée de k plus grand ou plus petit que 3.

IV. Il ſuit du précédent *Art.* 3. que ſi $k = 3$, la denſité D [$(3 - k) : \mp 2mhx$] ſeroit nulle, les forces centrales f [x^{-k}] $= x^{-3} = 1 : x^3$. D'où l'on voit que ces forces $f = x^{-k}$, qui dans le précédent *Art.* 3. feroient décrire au mobile une Spirale Logarithmique, malgré la réſiſtance R [$mvvD$] du milieu, la lui feroient encore décrire dans le cas où $3 = k$ rendroit la denſité D [$(3 - k) : \mp 2mhx$] nulle, & ces forces $f = x^{-3}$; c'eſt-à-dire, dans un eſpace ſans réſiſtance, tel qu'on ſuppoſe d'ordinaire le vuide, tant que ces forces [f] ſeroient réciproquement proportionnelles aux cubes [x^3] des diſtances [x] de ce mobile au centre, ou au pole de la Spirale: vérité que nous ſavons d'ailleurs, démontrée même par Mr. NEWTON dans ſes *Princ. Math. pag.* 47. Ce qui doit donner encore un fort grand poids à tous mes raiſonnemens contre lui.

* Cy-deſſus pag. 495.

ADDITION

ADDITION

DE MR. NICOLAS BERNOULLI,

Neveu de l'Auteur de ce Mémoire-ci.

AYant trouvé par l'application des égalités $vv = frdy : ds$ & $z = (fdx + vdv) : \mp ds$ [de la vérité deſquelles je ſuis entiérement convaincu] au cas particulier du demi-cercle rapporté par Mr. NEWTON, *pag.* 263 * de ſes *Princ. Math.* qu'elles n'étoient pas conformes à la Solution de cet Auteur; & voyant encore l'abſurdité manifeſte qui réſulte quand on ſuppoſe la réſiſtance à la force centrale comme OB : à OK. J'ai jugé qu'il y avoit néceſſairement quelque mépriſe, dans le raiſonnement de Mr. NEWTON; parce que je n'en trouvois aucune dans ſon calcul. J'ai donc été curieux de chercher cette mépriſe; & en examinant avec ſoin ſa Solution générale, j'en ai trouvé l'origine: cette mépriſe eſt dans le *Coroll. III. pag.* 263. à l'endroit où cet Auteur dit *Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam* AB, *& ordinatim applicatam* BC; *& valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur.* A cela près, j'ai trouvé cette ſolution de Mr. NEWTON fort exacte.

C'eſt cette méthode de changer les quantités indéterminées & variables en ſuites convergentes, & de prendre les termes de cette ſuite pour leurs différentielles reſpectives, ſavoir le ſecond terme pour leur différentielle du premier degré, le troiſieme terme pour leur differentio-différentielle, le quatrieme terme pour leur differentielle du troiſieme degré, &c. C'eſt, dis-je, cette méthode, qui a conduit Mr. NEWTON à des ſolutions fauſſes, dans l'exemple dont je viens de parler, & dans les ſuivans. Car cette maniere de prendre les différentielles, laquelle eſt preſcrite auſſi par cet Auteur dans le *Scholium* qui eſt à la fin de ſon Traité *De Quadraturis*, n'eſt bonne que pour les differentielles du premier degré. Pour ce qui eſt des différentielles d'un degré plus élevé, elles ne ſont pas exprimées par les termes de ces ſuites convergentes, leſquels ſont ſeulement proportionels & non pas égaux à ces différentielles, comme on le peut voir par l'exemple qu'il donne dans ce *Scholium.*

* Ci-deſſus pag. 484.

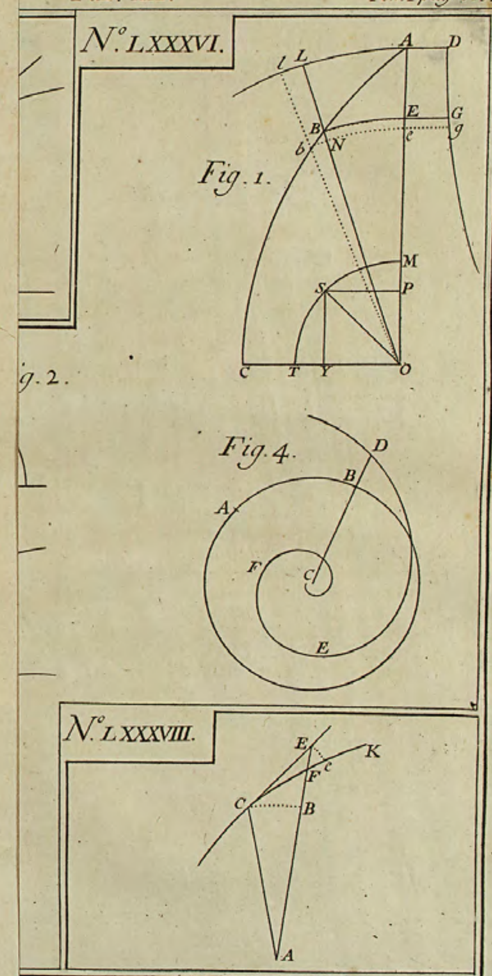
Il s'agit dans cet exemple de différentier Z^n. Pour cela Mr. NEWTON dans ce Scholie prend $(z+o)^n$ pour z^n, & change ce binome $(z+o)^n$ en cette ſuite $z^n + nz^{n-1}o + \frac{nn-n}{2}z^{n-2}oo + \frac{n^3-3nn+2n}{6}z^{n-3}o^3$ + &c. dont il prend le ſecond terme $nz^{n-1}o$ pour la differentielle de z^n, le troiſieme $\frac{nn-n}{2}z^{n-2}oo$ pour ſa differentio-differentielle, le quatrieme $\frac{n^3-3nn+2n}{6}z^{n-3}o^3$, pour ſa differentielle du troiſieme degré, & ainſi de ſuite ; Au lieu qu'en ſuivant ſa propre Régle pour differentier, qu'il a donnée au commencement de ſon même Traité *De Quadraturis*, & en ſuppoſant o [$\dot{z}$ ou dz] conſtante, il auroit trouvé que la differentielle du ſecond degré de z^n eſt $(nn-n)z^{n-2}oo$, que celle du troiſiéme eſt $(n^3-3nn+2n)z^{n-3}o^3$, &c.

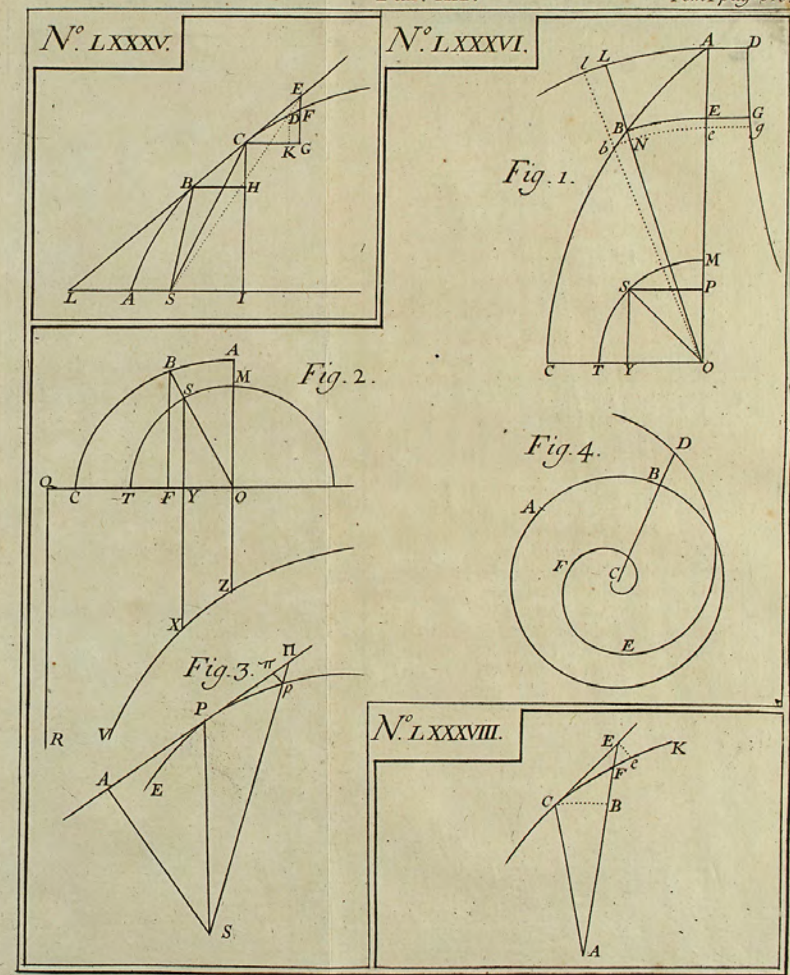
Ainſi dans notre exemple du demi-cercle de la *page* 263. &c. en differentiant $\sqrt{(nn-aa)}$, qui eſt la valeur de l'ordonnée $BC = e$, au lieu de la ſuite $e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5$ — &c. de Mr. NEWTON, on trouvera $e - ao : e - nnoo : e^3 - 3anno^3 : e^5$ — &c. D'où l'on tire $Q = a : e$, $R = nn ; e^3$, $S = 3ann : e^5$, leſquelles valeurs de Q, R, S, étant ſubſtituées, on trouvera $S\sqrt{(1+QQ)} : 2RR = \frac{3ann}{e^5}\sqrt{(1+aa:ee)} : \frac{2n^4}{e^6} = \frac{3ann}{e^6}\sqrt{(ee+aa)} : \frac{2n^4}{e^6} = 3an^3 . 2n^4 = 3a : 2n = 3 \times OB : 2 \times OK$. C'eſt-à-dire que la réſiſtance eſt à la force centrale comme 3 OB eſt à 2 OK, conformément à ce que mon Oncle a trouvé.

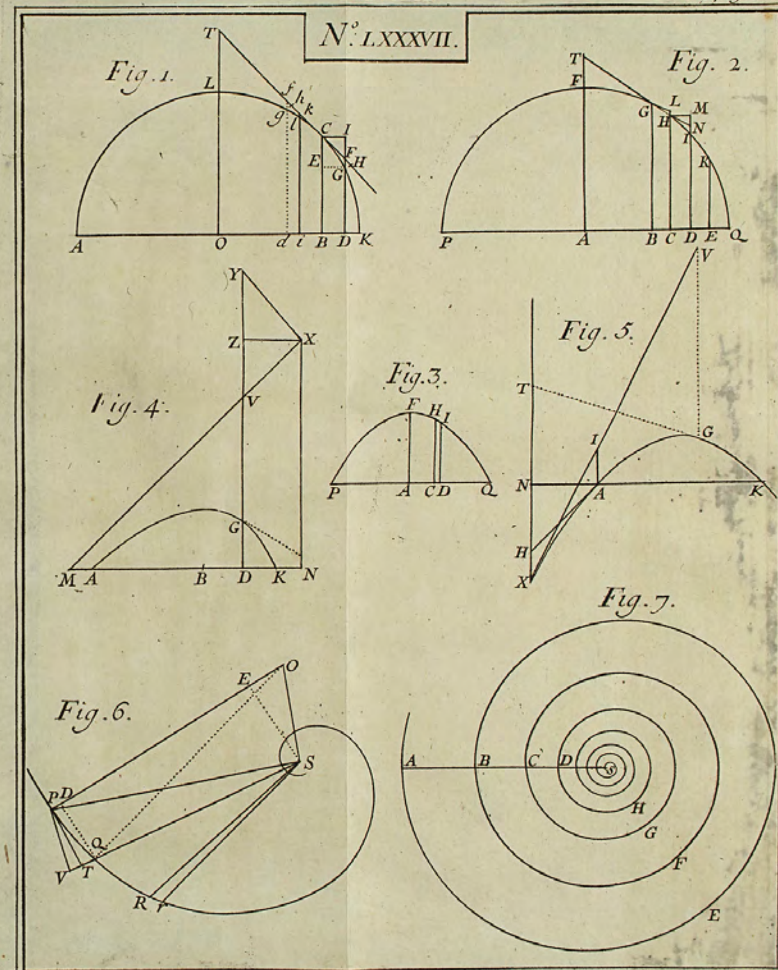
En uſant de la même correction dans les exemples 3 & 4. *pag.* 268, 269. On trouvera que la réſiſtance eſt à la force centrale dans l'exemple 3,
TAB. XXI. N°. LXXXVII. *Fig.* 4. comme $3 \times XY$ à $2 \times YG$, au lieu de XY à YG ; & dans l'exemple 4, comme XY à $(2nn+2n)VG : (n+2)$, au lieu de XY à $(3nn+3n)VG : (n+2)$. Tout cela ſe trouve auſſi préciſément par les formules $vv = frdy : ds$, & $z = (fdx + vdv) : \mp ds$.

ANGULO-

Tab. XX. Tom. I. pag. 510.




N°. LXXXV.
N°. LXXXVI.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
N°. LXXXVIII.


N°. LXXXVII.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

ANGU

SECT

Per Formu
Et hinc de

IN Actis hi
modum Ci
eum multiplic
ubi numerus d
mativus, abrur
resve, pro ma
his casibus, se
existit : cum v
Problemata tr
mere finitis co
ad quadraturar
ut pote quæ ad
LEIBNITIO
finitis, sed dim
fronte impossib
nare arcuum
reductio quadr
nondum sit in
habeatur.
Verum consi

* Supra N°. L

N°. LXXXIX.

ANGULORUM ARCUUMQUE SECTIO INDEFINITA,

Per Formulam univerſalem expreſſa, ſine ſerierum auxilio: Et hinc deducta æquationum angularium promta formatio;
Autore Joh. BERNOULLI.

IN Actis hiſce Anni 1701. pag. 170. & ſeqq. * tradidi modum Circuli arcum in partes quotcunque ſecandi, vel eum multiplicandi, ope quarundam ſerierum, quæ quidem, ubi numerus diviſionis vel multiplicationis eſt integer & affirmativus, abrumpuntur, terminoſque relinquunt plures paucioreſve, pro magnitudine illius numeri; Problema quippe, in his caſibus, ſemper algebraïcum magis minuſve compoſitum exiſtit: cum vero indefinite conceptum tranſcendens ſit, & Problemata tranſcendentia per æquationes ex quantitatibus mere finitis conſtantes, ſolvi non poſſint, niſi ea tantum quæ ad quadraturam hyperbolæ, vel ad logarithmos reducuntur, ut pote quæ admittunt æquationes percurrentes, ſeu, ut magno LEIBNITIO vocantur, exponentiales, quantitatibus ſcilicet finitis, ſed dimenſionibus indeterminatis conſtantes; hinc prima fronte impoſſibile videtur, aliter, quam per ſeriem, determinare arcuum angulorumque ſectionem indefinitam; ſiquidem reductio quadraturarum circuli & hyperbolæ ad ſe invicem nondum ſit inventa, imo fere a Geometris pro impoſſibili habeatur.

Acta Erudit. Lipſ. 1712. Jun. pag. 274.

Verum conſideret B. Lector, quæ in *Actis* Anni 1703. pag. 31.

* Supra N°. LXIX. pag. 386.

31. & in *Memorab. Acad. Reg. Scient.* pag. 297. Edit. Pariſ. * a me ſunt oſtenſa de Sectore circuli habendo pro Logarithmo imaginario, poſtquam docuiſſem generalem methodum integrandi differentialium fractiones rationales, vel abſolute, vel ſuppoſita quadratura circuli, hyperbolæ, aut utriuſque. Obſcurum non erit, quomodo ea nunc ad præſentem uſum ſint vocanda, ut nimirum exhibeatur æquatio finita, qamvis *percurrens*, pro angulorum ſectione indefinita. Includet illa quidem quantitates imaginarias, ſeu impoſſibiles; ſed hæ ipſæ, in caſu quolibet particulari, evaneſcunt, & ſic quæ per ſe ſunt impoſſibilia, inſerviunt tamen ad inveniendum quod eſt poſſibile, & ad ſcopum noſtrum facit; idque levi & extemporanea quantitatum ſubſtitutione; ſicuti ex jam dicendis patebit.

Sit radius circuli $= 1$; arcus indeterminatus $= A$; cujus multiplex aut ſubmultiplex quivis $nA = B$; ſitque tangens ipſius A $= x$ & tangens ipſius $B = y$. Notum eſt ex calculo differentiali eſſe $dA = dx : (xx + 1)$ & $dB = dy : (yy + 1)$; cum igitur, per hyp. $nA = B$, erit quoque (ob numerum conſtantem n) $ndA = dB$: hoc eſt $ndx : (xx + 1) = dy : (yy + 1)$ ſeu multiplicando utrumque per $2\sqrt{-1}$ [quod ita facio, ut poſtea reſolvere poſſim in differentiales logarithmorum, licet impoſſibilium] erit $2ndx\sqrt{-1} : (xx + 1) = 2dy\sqrt{-1} : (yy + 1)$; quæ ergo reſoluta, ſicuti docui in locis citatis, dabunt hanc æqualitatem $ndx : (x - \sqrt{-1}) - ndx : (x + \sqrt{-1}) = dy : (y - \sqrt{-1}) - dy : (y + \sqrt{-1})$ in differentialibus logarithmicis expreſſam: ſumtis itaque integralibus prodit æquatio inter logarithmos $nl(x - \sqrt{-1}) - nl(x + \sqrt{-1}) = l(y - \sqrt{-1}) - l(y + \sqrt{-1})$ qui redacti ad numeros, ut moris eſt, fiet $\left(\frac{x - \sqrt{-1}}{x + \sqrt{-1}}\right)^n = \frac{y - \sqrt{-1}}{y + \sqrt{-1}}$, adeoque inſtituta multiplicatione per crucem,

$$(x - \sqrt{-1})^n (y + \sqrt{-1}) = (x + \sqrt{-1})^n . (y - \sqrt{-1});$$

quæ

* Supra N°. LXX. pag. 400.

quæ eſt æquatio univerſalis, cuilibet arcui multiplicando, vel dividendo, pro lubitu inſerviens; nec obſtat quod $\sqrt{-1}$ quantitas impoſſibilis in illa reperiatur: ea enim in applicatione ad ſpeciale quodlibet exemplum reperietur in ſingulis æquationis terminis, & ideo per diviſionem tolletur.

Hoc interim notari velim, quod, ubi n ſignificat numerum parem, valor ipſius y repertus exprimat tangentem, non ipſius arcus quæſiti B, ſed ejus complementi ad quadrantem: cujus rei ratio manifeſta eſt ex integratione differentialium logarithmorum.

Ceterum ex noſtra univerſali æquatione $(x - \sqrt{-1})^n (y + \sqrt{-1}) = (x + \sqrt{-1})^n (y - \sqrt{-1})$ ſi attente perpendatur, fluit regula generaliſſima pro exprimenda tangente arcus B cujuſcunque multipli ſubmultiplive n ipſius dati A, & quidem mirabili facilitate & ſimplicitate. Regula autem ita habet: *Elevetur* x + 1 *ad poteſtatem* n *& ex terminis alternis, cum ſignis alternatim variantibus, formetur fractio, ita nempe ut numerator conſtet primo, tertio, quinto, &c. denominator vero ſecundo, quarto, ſexto, &c.: fractio quæ inde emergit, exprimet tangentem quæſiti arcus* B, *ſi ſcilicet* n *ſit numerus impar; complementi vero ejuſdem, ſi* n *ſit par.*

Exempl. I. Si $n = 4$. Sumatur poteſtas quarta ipſius $x + 1$, & erit $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6xx + 4x + 1$ ex cujus terminis alternatim excerptis, cum variantibus ſignis, formetur fractio in hunc modum $(x^4 - 6xx + 1) : (4x^3 - 4x)$; dico ob paritatem numeri n, fore hanc fractionem $=$ tang. complementi arcus B ſeu $4A$: adeoque converſo numeratore in denominatorem, & viciſſim, haberi $(4x^3 - 4x) : (x^4 - 6xx + 1)$ pro tangente ipſius arcus B ſeu quadrupli arcus A.

Exempl. II. Si $n = 5$. Termini $(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$, diſponantur, uti dictum, in fractionem $(x^5 - 10x^3 + 5x) : (5x^4 - 10xx + 1)$; hæcque erit, ob imparem numerum n, tangens ipſius arcus B, ſeu quintupli A.

EXEMPL. III. Si $n = 6$. Ex terminis $(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15xx + 6x + 1)$, ſumti pares pro numeratore, & impares pro denominatore, (propter paritatem numeri n) conſtituent fractionem $(6x^5 - 20x^3 + 6x) : (x^4 - 15x^5 + 15xx - 1) =$ tangenti arcus B, ſeu ſextupli A.

Ibid. Jul. pag. 329. Quod ſi ſeriem adhibere lubeat, poterit, nulla facta diſtinctione inter numerum parem & imparem, generaliter exprimi tangens arcus multipli indefiniti n, incipiendo a termino poſtremo binomii $x + 1$ ad poteſtatem n elevati, eumque pro primo habendo: formata namque fractio ex terminis ſecundo, quarto, ſexto, &c. pro numeratore, & ex primo, tertio, quinto, &c. pro denominatore, alternantibus ſemper ſignis, exhibebit valorem tangentis arcus multipli, indiſcriminatim in omni caſu, ſive par ſit, ſive impar numerus n; imo etſi fractus vel ſurdus eſſet; in litteris algebraïcis rem ita explico.

Quia conſtat $(x + 1)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n.n-1}{1.2}xx + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}x^4 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}x^5 +$ &c. Dico, ſumta ut ſupra x pro tangente arcus ſimpli A, & n pro numero multiplo quo multiplicandus eſt, fore tangentem arcus multipli $B = (nx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}x^5 -$ &c.$) : (1 - \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}x^4 -$ &c.$)$.

Ex qua formula univerſali hoc præterea utilitatis fluit, quod latera polygonorum circumſcriptorum, adeoque & inſcriptorum, compendioſe determinentur; æquando nempe ipſi zero numeratorem fractionis diviſum per x, erit enim radix æquationis $=$ ſemilateri polygoni circumſcripti, cujus numerus laterum eſt n, & radius circuli 1. Demonſtrationem ejus, ut pote attendenti facile obviam ex præcedentibus, lubens omitto.

DE

N°. XC.

DE MOTU CORPORUM, GRAVIUM, PENDULORUM, ET PROJECTILIUM

In mediis non reſiſtentibus & reſiſtentibus, ſuppoſita gravitate uniformi & non uniformi, atque ad quodvis datum punctum tendente, & de variis aliis huc ſpectantibus,

DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ;

Autore Joh. BERNOULLI.

I

QUI hanc materiam dudum pertractavit, Vir omni laude major, *Iſaacus* NEWTONUS in Opere ſuo incomparabili *Phil. Natur. Princip. Math.* anſam præbuit de ea ex noſtris Meditationibus communicandi: qua in re non male egiſſe videbor; ubi oſtendero inclytum illum Virum quandoque a veritatis ſcopo aberraſſe; quod diſſimulandum, vel omnino celandum, non ego tantum, ſed quivis intemeratæ veritatis mathematicæ amans, & vel ipſe NEWTONUS, minime arbitrabitur; cum præſertim ea ſit magni hujus Geometræ autoritas, quæ, in argumento hoc nodoſo & difficili, apud quam plurimos aſſentiendi magis quam examinandi animum reperiret. Et ſi interim quæcunque ad rem præſentem ſpectant, accuratius, ut mihi videtur, jam pridem evolverim, quorum analyſin meam alibi communicavi juris publici faciendam †: hoc loco conſtitui ea duntaxat impertire, quæ ad ſyntheticam demonſtrandi rationem revocari poſſunt, viamque ſternunt ad ſolutionem Propoſ. X. Sect. II. Libri ſecun- *Acta Erud. Lipſ.* 1713. Februar. pag. 77.

† N°. LXXXVIII

secundi, *Phil. Nat. Princ.* qua quæritur corporis gravis, datam curvam in medio resistente describentis, in singulis locis velocitas, medii resistentia & densitas, nec tantum pro uniformi gravitate directe ad horizontem tendente, sed pro quavis gravitatis continuo variantis & ad datum punctum tendentis lege, sicuti ex sequentibus patebit.

II.

THEOREMA I.

Sint A & B duæ diversæ gravitatis vires, sed ambæ uniformes; dico velocitates acquisitas duorum corporum, quorum unum sollicitatur ab A, alterum a B, per æqualia spatia a quiete delapsorum esse in subduplicata ratione illarum virium, in medio scilicet non resistente.

TAB. XXII. *Fig.* 1. DEMONSTR. Descendat corpus unum perpendiculariter, vi gravitatis naturali A, incipiens descensum in L, secundum verticalem LM; corpus vero alterum inchoet descensum in eodem puncto L, sed super plano inclinato LN. Quoniam itaque hoc corpus, non plena vi gravitatis urgetur, sed ea tantum ejus parte, quæ se habet ad totam, ut LM ad LN, supposito angulo LMN recto; sicuti ex compositione & resolutione virium liquet; tantundem est, ac si corpus hoc alterum directe urgetur secundum rectam LN vi quadam uniformi B minori quam A, ita nempe ut A : B = LN : LM. Notum est autem dudum, velocitates in M & N esse æquales, ut & velocitatem in N esse ad velocitatem, in quovis alio puncto O, in subduplicata ratione LN, ad LO; sumta itaque LO æquali LM, erit velocitas in N, hoc est, velocitas in M, ad velocitatem in O, in subduplicata ratione LN ad LM, hoc est in subduplicata ratione A ad B. *Q. E. D.*

III.

ALITER. Ex demonstratis *Hugenianis* in *Opusculis posthumis* Theorem. de vi centrifuga, quæ brevitatis causa hic demonstrare nolo, constat, vim centrifugam alicujus corporis, in circulo horizontali ea velocitate gyrantis, quam acquireret cadendo ex altitudine dimidii radii, æqualem esse vi gravitatis; sed ex iisdem patet, vires centrifugas duorum mobilium æqualium in circulis æqualibus gyrantium esse in duplicata ratione velocitatum; quare si concipiamus velocitates illas esse acquisitas cadendo utrobique ex altitudine dimidii radii, per vires uniformes A & B, manifestum est etiam A & B esse in duplicata ratione velocitatum acquisitarum; proinde ipsas velocitates in ratione dimidiata virium A & B. *Q. E. D.*

IV.

THEOR. II.

Positis, ut prius, duabus viribus uniformibus, sed inæqualibus, A & B; sint vero & spatia emensa inæqualia; dico velocitates acquisitas esse in ratione composita ex subduplicata virium, & subduplicata spatiorum emensorum.

DEMONSTR: Sit enim iterum LO = LM, capiaturque alia LP, major vel minor quam LO; quia itaque, per præced., velocitas M est ad velocitatem in O, ut $\sqrt{A}$ ad $\sqrt{B}$, & velocitas in O ad velocitatem in P, ut $\sqrt{LO}$ ad $\sqrt{LP}$, ergo, ex æquo & per rationum compositionem, velocitas in M ad velocitatem in P ut $\sqrt{A} \times \sqrt{LM}$ ad $\sqrt{B} \times \sqrt{LP}$. Idem etiam, ex consideratione virium centrifugarum colligitur.

V.

THEOR. III.

Sint iterum vires uniformes A & B; dico spatia eodem tempore emensa esse ut vires.

DEMONSTR. Ducta MQ normali ad LN; patet ex *Galilæanis*, spatia LM & LQ esse isochrona, est vero LM : LQ = LN : LM = [per præced.] A : B. *Q. E. D.*

VI

COROLLAR. I.

Hinc demonstrari potest *pendula, quorum longitudines sunt ut vires gravitatis a quibus agitantur, esse isochrona.*

DEMONSTR. Sint enim LPC & *lpc* quadrantes circulorum, vel alii quilibet arcus similes, quos pendula oscillando describunt, & intelligantur arculi minimi similes similiterque positi PQ & *pq*. Ductis jam horizontalibus LE, PF, QG, ut & *le*, *pf*, *qg*; erunt velocitates in P & *p* tantæ, quantæ forent in F & *f* cadendo ex altitudinibus EF & *ef*. Est vero, ob similitudinem arcuum [nominatis radiis R & *r*] EF : *ef* = FG : *fg* = PQ : *pq* = R : *r* = A : B; Ergo, per convers. Theor. III, altitudines EF & *ef*, ut & EG & *eg*, sunt isochronæ, proinde tempusculum per FG = tempusculo per *fg*; & quia velocitates in F & *f* sunt æquales velocitatibus in P & *p*, erit tempusculum per PQ æquale tempusculo per *pq*; idemque cum valeat de omnibus arculis similibus similiterque positis, ex quibus conflantur arcus toti similes LPC & *lpc*; erunt etiam tempora per LPC & *lpc* inter se æqualia; hoc est, arcus isti sunt isochroni, quos pendula oscillando describunt, quorum longitudines se habent ut vires gravitatis a quibus agitantur. *Q. E. D.*

TAB. XXII. *Fig. 2.*

VII.

COROLL. II.

Patet etiam *pendula æqualia absolvere oscillationes suas temporibus, quæ se habent reciproce in subduplicata ratione virium gravitatis, a quibus pendula agitantur.*

DEMONSTR. Intelligatur enim pendulum aliquod tertium brevius, a vi minori B agitatum, & isochronum longiori, a vi majori A agitato: sunt autem, ut dudum constat, tempora oscillationum duorum illorum pendulorum, ab eadem vi B agitatorum, in subduplicata ratione reciproca longitudinum; hoc est per Coroll. præced. in subduplicata ratione reciproca virium.

VIII.

VIII

COROLL. III.

Hinc multitudines vibrationum, eodem tempore peractarum a duobus pendulis æqualibus, se habent in dimidiata ratione directa virium pendula agitantium.

IX

SCHOLIUM

Quamquam hæc pleraque apud NEWTONUM, & HUGENIUM, vel jam demonstrata reperiantur, vel non difficulter ex iis deducantur; cum tamen illorum demonstrationes nonnihil perplexiores videantur, nostræ vero vulgaribus tantum principiis innixæ etiam ab illis intelligi possint, qui profundiora Geometriæ non penetrarunt; eas hic communicare volui; hac præsertim de causa, ne aliunde petere opus haberem ad stabiliendas demonstrationes propositionum majoris momenti, quas infra dabo.

X.

Interim annotare hic conveniet modum æstimandi & inter se comparandi vires gravitatis in diversis Terræ locis diversarum latitudinum, per comparationem nempe longitudinis pendulorum isochronorum; quorum observationes multis in locis accurate instituendæ monstrarent, quousque experientia conspiret cum ratiocinio & regula a NEWTONO tradita in Lib. III. Prop. 20. Sed Gallorum observationibus [quas crassas vocat] videtur ipse parum fidere, nec immerito; non tam quod ab ipsius computo abludant, quam quod sibi mutuo contradicere videantur, dum in Terræ regionibus, ab æquatore remotioribus, minorem assignant pendulo singulis secundis oscillanti longitudinem quam in propinquioribus; atque ita quoque in illis corpora minus gravitarent quam in hisce; quod sane est contra omnem

nem probabilitatem: cum enim corpora a circumgyratione Terræ acquirant niſum recedendi a centro, adeoque vi gravitatis quadantenus contrarium, qui eo major eſt, quo loci parallelus eſt major, minus utique foret reſiduum gravitatis in locis, ſub, vel prope æquatorem, quam in aliis ab eodem remotioribus; per conſequens in his pendula iſochrona requirerent majorem longitudinem quam in illis.

X I.

Quando tamen Galli contrarium ſe obſervaſſe aſſeverant, pendulum ſcilicet *Pariſienſe* [cujus longitudo 3 ped. 8. $\frac{3}{5}$ lin.] ſuperare, una tantum linea cum quadrante, pendulum iſochronum in Inſula *Cayennæ*, quæ ab æquatore non omnino 5 grad. diſtat; ſed & ab eodem *Pariſienſi* deficere duabus lineis pendulum, quod ipſi iſochronum eſt in Inſula *Gorée*, haud procul a promontorio viridi, quam eandem differentiam a ſe etiam obſervatam aſſerunt in *Guadaloupe*, non obſtante quod ambæ hæ Inſulæ *Guadaloupe* & *Gorée*, utpote 14 vel 15 graduum latitudinem habentes, ab æquatore magis diſtent quam *Cayenna*. Hæc ita conſignata reperio in Collectaneis aſtronomicis & Phyſicis [*Recueil d'Obſervations Aſtronomiques & Phyſiques*] editis *Pariſiis* in fol. Anno 1693, quare miror unde habeat NEWTONUS, quod dicit, pag. 426: *Gallos factis experimentis inveniſſe, quod pendulorum minutis ſecundis ſingulis oſcillantium longitudo* Pariſiis *major ſit quam in Inſula* Gorée *parte decima digiti & major quam* Cayennæ *parte octava*; cum potius penduli *Cayennenſis* longitudinem parte decima, *Goréenſis* vero parte ſexta a longitudine *Pariſienſis* deficere Obſervatores Galli dixerint.

X I I.

Quæ itaque cum conciliari non poſſint cum Theoria de imminutione gravitatis prope æquatorem, malumus ſuſpicari obſervationes non fuiſſe accuratas, quam inæqualitatem illam pendulorum iſochronorum tantum apparentem, non realem pronunciare, cum LA HIRIO; qui ejus rei cauſam rejicit in elongationem metalli menſuram pedis ſibi inſculptam gerentis, quod, in regiones calidas tranſlatum, aliquam rarefactionem paſſum fuerit, unde pendulum collatum cum menſura nonnihil extenſa neceſſario brevius apparuerit. Nollem quidem negare quod huic rarefactioni metalli aliquid adſcribi poſſet; eſt tamen extra controverſiam abbreviationem pendulorum prope æquatorem magna ex parte deberi imminutæ gravitati corporum; quocirca e re eſſet, ut quantum huic ſoli debeatur ſtudioſe inquireretur, quod meo judicio non adeo eſſet difficile.

X I I I.

Calefacto ſcilicet aëre in aliquo loco clauſo, in quo experimentum inſtitueretur, ad certum uſque caloris gradum ope thermometri annotandum; tranſlata poſtea eadem regula, ad quam in noſtris regionibus penduli longitudo fuit menſurata, in regionem æquatori vicinam, in cujus loco aliquo itidem clauſo, aër, ope ejuſdem thermometri ad eundem caloris gradum attemperatus, conciliabit utique metallo, quo menſuretur pendulum, eundem rarefactionis gradum, quem obtinuit hic loci; ſi qua differentia deinde ſe proderet in pendulorum utriuſque loci longitudine, eam certe imminutæ gravitatis actioni tunc unice adſcribendam eſſe, nemo, qui hæc intelligit, dubitabit: quod enim HIRIUS ſomniat metalli extenſionem quoque fieri poſſe per vapores & halitus metalla penetrantes, quibus aër in Zona torrida inprimis ſcateat, nulla hoc attentione dignum judico.

X I V.

Illuſtrantur quæ hactenus diximus, de effectu imminutæ gravitatis, per experimenta primo globorum ſuper planis declivibus poſitorum. Cum enim, ex demonſtr. Theor. I & III, vis gravitatis abſoluta ſe habeat ad vim qua mobile deſcenſum molitur ſecundum declivitatem plani, ut ſinus totus ad ſinum declinationis ejus; Sumantur duo pendula, quorum longius TAB. XXII. *Fig. 1.*

ad brevius sit ut LM ad LQ; oscilletur longius in plano verticali, brevius vero super plano declivi, cujus inclinationis angulus sit LNM; erunt, per Coroll. I. Theor. III, oscillationes utriusque penduli isochronæ; quas ita esse etiam experientia docuit: oportet autem planum declive esse politissimum, sicut & globum; ne mutua attritio a quantulacunque scabritie oriunda officiat descensui, cumve ullo modo removetur.

X V.

Deinde non minus curiosa sunt, minusve probant nostra ratiocinia, quæ fiunt experimenta circa pendulorum oscillationes in fluidis perfectioribus, in quibus nempe abest sensibilis partium tenacitas; ita ut oscillationes minimæ nullam offendant resistentiam. In his fluidis constitutorum corporum gravitas [notante id apprime-acutissimo NEWTONO pag. 284] duplex considerari potest; altera, vera & absoluta, nempe vis tota qua corpus deorsum tendit, altera, apparens, relativa & vulgaris, consistens in excessu quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens.

X V I.

Sumantur itaque duo pendula æqualia, quorum alterum in aëre, alterum in fluido aliquo nullius tenacitatis, oscilletur, quod fluidum tamen & ipsum habeat gravitatem, adeoque eam quæ est in pendulo imminuat. Quod si jam animus sit prædicere, in qua ratione se habituri sint numeri oscillationum in aëre & fluido eodem tempore peragendarum: sit pendulum, exempli gratia, plumbeum oscillans in aqua, cujus gravitas specifica se habet ad gravitatem specificam plumbi, ut 7 ad 80 quam proxime, ita ut plumbum in aqua amittat $\frac{7}{80}$, retineatque $\frac{73}{80}$ sui ponderis. Est ergo vis gravitatis absolutæ, qua agitatur pendulum in aëre, [quem hic nullius gravitatis sensibilis supponimus] ad vim gravitatis relativæ, qua sola pendulum agitatur in aqua, ut 80 ad 73, unde, per Corol. III, Theor. III, numerus oscillationum in aëre ad numerum oscillationum in

in aqua eodem tempore peragendarum, ut $\sqrt{80}$ ad $\sqrt{73}$, seu ut 120 ad 114 $\frac{2}{7}$, quam proxime; hoc est, pendulum aliquod semisecunda notans, dum in aëre uno horæ minuto vibrationes 120 absolvit, alterum pendulum plumbeum æqualis longitudinis in aqua perficiet tantum vibrationes 114 $\frac{2}{7}$. Quod accurate satis respondet experimentis institutis ab ipso LA HIRIO, quamquam præter ejus expectationem hunc successum habentibus. Vide *Comment Acad. Scient.* pro *Anno* 1703 pag. 289. Edit. Paris. † Ubi dicit se primo sumsisse globulum plumbeum 2 unciarum, ex quo pendulum confecerit semisecunda notans in aëre; hoc postea in aqua agitatum, uno minuto horario peregisse 112 oscillationes; tum vero assumto globulo plumbeo 5 unciarum pro simili pendulo, se numerasse 114 oscillationes uno minuto peractas, quæ differentia duarum oscillationum haud dubie ex eo venit, quod globulus major, cum minorem habeat superficiem pro ratione molis, patiatur minorem resistentiam a tenacitate aquæ oriundam, quam globulus minor, qui pro ratione molis majorem habet superficiem.

X V I I.

Quæ resistentia, ut ut perexigua sit, si excursiones vibrationum non longæ sint, [nam brevissimæ eodem modo & tempore peragerentur ac si aqua plane non resisteret, quod ostendit etiam NEWTONUS pag. 308, Coroll. 2 *] potest tamen illa magis adhuc insensibilis reddi; si nimirum, loco globuli, sumatur corpus lentiforme, terminatum acie tenui ad aërem sulcandum dum in latus oscillatur; quo pacto, nihil, vel parum superficiei occurrit fluido; a quo proin, si præterea arcus vibrationum sint parvi, tam imperceptibilis resistentia corpori oscillanti objicitur, ut jure merito negligi possit: hujusmodi lenticulam si in experimento suo LA HIRIUS adhibuisset, non tantum 112, vel 114, sed 114 $\frac{2}{7}$, aut 115 omnino oscillationes uno minuto numeraturus fuisset. Quod autem, eadem

Vvv 2 pag.

† Pag. 349 Edit. Batavæ. * Lib. II. Sect. VI. Prop. XXVII.

pag. 289, ſe attonitum ſtetiſſe fateatur, cum videret pendulum illud, quod credebat vibrationes ſuas peracturum eſſe in aqua minimum ſingulis tantum ſecundis, illas tamen, contra ſuam expectationem, fere æque promptas, vel ejuſdem durationis deprehendiſſe, ac in aëre; oſtendit profecto animum admirationis plenum, qui minus decet Geometram conſummatum, quam hominem in hiſce profundioribus hoſpitem: nihil enim hic contigiſſe video, quod non ante experimentum prædicere potuiſſem. Ne vero hoc gratis dictum ſit, examinet regulam ſequentem, ejuſque periculum faciat in variis corporibus.

XVIII.

Sit ratio gravitatis ſpecificæ corporis alicujus & aquæ, ut *c* ad *a*; adeoque ejuſdem corporis gravitatis abſoluta, vel extra aquam, ad gravitatem relativam, vel intra aquam, ut *c* ad *c — a*: *Dico numeros oſcillationum, extra, & intra aquam, æquali tempore peractarum, fore ut* $\sqrt{c}$ *ad* $\sqrt{(c - a)}$. Ope hujus Regulæ, inveni, ex data ratione gravitatis aquæ & variorum corporum, numerum oſcillationum, quas illorum ſingulorum pendula in aqua conficiunt, uno horæ minuto, dum in aëre [tanquam non gravi conſiderato] abſolvunt 120 vibrationes. Quod calculus ſuggeſſit in ſequentem Tabellam redegi; ex qua videre eſt numerum oſcillationum haud multum differre; etſi corpora ipſa notabiliter diſcrepent ratione gravitatis. Exempli gratia, aurum, licet quinquies fere ſuperet marmor in aëre, & omnino ſexies in aqua, vix tamen decima parte plures in aqua oſcillationes conficit aurum, quam marmor.

Corpo-

Gravitates Corporum	In aëre	In aqua	Oſcillationibus 120 in aëre reſpondent	Oſcillationes in aqua
Auri	400	379		117
Plumbi	240	219		114 $\frac{2}{3}$
Argenti	218	197		114 $\frac{1}{6}$
Cupri	200	179		113 $\frac{5}{7}$
Ferri	168	147		112
Stanni	156	135		111 $\frac{3}{5}$
Marmoris	84	63		104 $\frac{2}{5}$
Aquæ	21	0		0

XIX.

Quod ſi eadem corpora oſcillentur in liquore adhuc leviori quam aqua; exempli gratia, in oleo petræ, quod ſe habet ad aquam in gravitate, ut 16 $\frac{2}{5}$ ad 21; diſcrepantia illa oſcillationum erit adhuc minor: aurum nempe perficiet, in hoc liquore, oſcillationes 117 $\frac{3}{5}$, quando marmor æquali tempore abſolvit oſcill. 107 $\frac{3}{5}$; ita ut jam duodecima circiter parte tantum plures ab auro quam a marmore peragantur vibrationes. Unde conjectu facile eſt, in fluidis levioribus tandem evaneſcere omnem retardationem ſenſibilem: ſit quippe, pro fluido, aër ipſe gravis conſideratus, qui nempe in gravitate ſe habet ad aquam, ut 1 ad 800, adeoque ad aurum, ut 1 ad 15238, & ad marmor, ut 1 ad 3200; eſt ergo, ſecundum Regulam, numerus oſcillationum auri in vacuo, ad numerum oſcillationum ejuſdem in aëre, [ſubintellige ab æqualibus pendulis eodem tempore peractarum] ut $\sqrt{15238}$ ad $\sqrt{15237}$, hoc eſt quam proxime ut 30476 ad 30475: marmoris vero oſcillationes in vacuo, hoc eſt in fluido non gravi,] erunt ad oſcillationnes in aëre

ut

ut $\sqrt{3200}$ ad $\sqrt{3199}$, vel quam proxime ut 6372 ad 6371, ita ut aurum ultra triginta millia, marmor vero plusquam sex millia vibrationum in aëre absolvere possint, priusquam una tantum retardentur.

XX.

Ex quibus liquet resistentiam aëris, a gravitate ejus oriundam, hic tuto negligi; adeoque pendula in aëre, tanquam in vacuo agitata, considerari posse, modo interim præcaveatur altera ejus resistentia a densitate & tenacitate ejus proveniens; quæ majoris momenti est, quæque dependet partim a velocitate, partim a superficie corporis ad aërem appellente; quare hæc resistentia, ut supra jam monui, valde imminuitur & pene insensibilis redditur, si pendulum habeat figuram lentiformem, & in latus oscillando describat arcus brevissimos; ita enim exigua velocitate, sed magna facilitate penetrat aërem.

XXI.

Cæterum Regula valet etiam de corporibus quæ in fluidis levitant; hoc est, quæ demersa sursum tendunt, ob prævalentem specificam gravitatem fluidi: est enim levitas nihil aliud quam gravitatis inversa, taleque corpus exhibebit pendulum inversum, capite fili ad fundum vasis alligato, dum lenticula ipsa oscillando describit arcus verticales supra centrum: quia vero excessus gravitatis specificæ jam est penes aquam, faciendum est ut $\sqrt{c}$ ad $\sqrt{(a - c)}$, ita vibrationum numerus extra aquam ad numerum earum intra eandem: unde hoc emergit paradoxum, quod quo ex leviori materia sunt pendula, eo promptiores sunt in fluido oscillationes inversæ, adeo ut etiam quemcunque promptitudinis gradum assequantur, modo a ad c magnam satis habeat rationem: abstrahimus hic semper a resistentia tenacitatis fluidi. Si, exempli gratia, pro pendulo assumatur corpus ex materia duplo specifice leviore quam aqua, hoc est, si a sit $= 2c$; faciet hoc pendulum oscillationes utrobique & extra & intra aquam æquales numero; quod si vero illud fiat ex materia quintuplo leviori quam aqua, oscillabitur duplo promptius in aqua quam in aëre; in illa nempe binas absolvit oscillationes, dum singulas perficit in hoc: & ita de aliis.

XXII.

Ex hisce speculationibus ut fructum aliquem percipiamus, non abs re alienum erit, si communicetur sequens

Modus explorandi solidorum & liquidorum Gravitates specificas ope pendulorum.

Hic scilicet peragitur, citra adminiculum consueti illius instrumenti hydrostatmici, alteriusve cujusdam machinæ; mediantibus scilicet duobus pendulis, quorum alterum, oscillaturum intra liquorem, sit ex materia non multo graviori quam ipse liquor ponderandus; sic enim differentia pendulorum duorum, in aëre & liquore oscillationes isochronas facientium, sensibilior erit, quam si materia illa valde ponderosa esset. In hunc finem, supponamus lenticulam penduli in liquore agitandi [alterum enim, ex quacunque sit materia, modo non nimis levi, ne aëris resistentia officiat, nihil refert] esse ex stanno paratam; quo facto, rationem gravitatis investigaturus trium horum liquorum, ex. gr. aquæ communis, olei petræ & olei tartari per deliquium, & singula tam inter se, quam cum stanno comparaturus, pendulum suspensum in aëre, longitudinis pro arbitrio assumtæ, agitabo, & dein statim alterum, cujus lenticula ad modicam tantum profunditatem liquoris demersa oscillationes perbreves describere debet, elongabo, vel contraham, donec isochronum evadat priori in aëre oscillanti: collata postea longitudine penduli, in singulis tribus liquoribus successive agitandi, ope scalæ alicujus accuratissimæ, cum longitudine penduli in aëre isochroni; observabo rationem earum ut sequitur

Longi-

Longitudines	Aëre	conſtant	1000
pendulorum	Aqua	particulis	865
iſochronorum	Oleo petr.	in ſcala	895
in	Oleo tart.	ſumtis	833

Cum igitur per Coroll. I. Theor. III, in eadem quoque ratione ſe habeant gravitates ſtanni relativæ in aëre, aqua, oleo petræ, & oleo tartari, deſignabunt tres differentiæ inter 1000 & tres reliquos numeros, cum 1000 comparatæ; quantum ponderis ſtannum amittat in uno quoque liquore demerſum, adeoque & ipſam proportionem gravitatis ſpecificæ ſtanni, horumque trium liquorum, nimirum

Gravitas ſpecifica	Stanni	ſe habet ut	1000—0	=	1000	vel proxime ut	96
	Aquæ		1000—865		135		13
	Olei petræ		1000—895		105		10
	Olei tart.		1000—833		167		16

Simili modo procedendum eſt in aliis. Rem ipſam vero perficiendam & ad commodam praxin deducendam, aliis relinquo, quibus vacat & volupe eſt.

XXIII.

Occaſio iſta opportune invitaret, ad materiam hanc de oſcillationibus provehendam, atque alium non ignobilem uſum indicandum, in quem incidi: detecto nempe fundamento genuino & unico, ex quo naturaliſſime fluit determinatio centri oſcillationis in pendulis compoſitis, citra precarias illas hypotheſes ab aliis aſſumtas, nec dum ſatis ſtabilitas. Quæ methodus præterea, etiam in hoc aliis antecellit, quod pari facilitate doceat invenire centrum oſcillationis, ſi penduli compoſiti partes, ex varia materia & in liquore homogeneo, vel quod eodem venit, ſi partes penduli ex materia homogenea, ſed in diverſis liquoribus oſcillentur; nec refert, ſi utriuſque partes & penduli & liquoris ſint heterogeneæ, ad alterutrum enim caſuum duorum

rum priorum reduci poteſt: de qua pendulorum ſpecie, eorumque centro oſcillationis definiendo, nemo hactenus cogitavit. Noſtram regulam, cum ipſo fundamento ex quo eruta eſt, differimus in tempus commodius, quo plus otii nobis fuerit; hoc interim monuiſſe convenit conſiderationem vectis, [per quam Frater meus b. m. aliquando rem eandem tentavit, etſi non prorſus infeliciter] huic rei ſolam non ſufficere, ſed quod palmarium eſt, recurrendum eſſe ad effectum corporum diverſa gravitatis ſpecie deorſum tendentium, atque ad eorundem in ſe mutuo agentium efficaciam.

XXIV.

Hactenus ad fluidorum, in quibus corpora moventur, reſiſtentiam non attendimus; per reſiſtentiam hic intelligimus vim quamcunque, quæ motui corporis contraria eſt, & propter quam corpus motum ſuum, niſi aliunde continuo inſtauretur, paulatim amittit, & tandem aliquando ad quietem redigitur. Unde vero dependeat reſiſtentia illa in fluidis, quamve cauſam phyſicam agnoſcat, hujus loci non eſt anxiei inquirere; ſive enim veniat a quadam partium tenacitate in fluido, ob quam particulæ fluidi non ſtatim ad appulſum corporis a ſe mutuo ſeparantur; ſive a quadam attritione ex ſcabritie, quæ non tantum in ſuperficie corporis, ſed & in particulis minimis fluidum componentibus adeſſe poteſt; ſive demum oriatur illa ex ipſa fluiditatis imperfectione, qua nimirum fit ut, cum fluidum actu non ſit diviſum in infinitum, hoc eſt, in particulas data quavis minores, ſed conflatum ex moleculis ſolidis determinatæ magnitudinis, fit, inquam, ut in tali fluido corpus motum, ſingulis momentis, certam fluidi quantitatem ante ſe pellere & amoliri debeat, quod citra ſui motus imminutionem continuam peragere non poteſt, etſi alias nulla eſſet tenacitas, nullaque ſcabrities in partibus fluidi: quæcunque ergo vera ſit cauſa reſiſtentiæ fluidorum, ſive una ſola ex tribus dictis, ſive, quod veroſimilius, omnes ſimul concurrant, sive alia quædam locum obtineat; eam nunc supponimus, non explicamus; neque etiam quam rationem habeat [quæ utique esset composita ex duplicata velocitatis, & simplici medii, vel fluidi densitatis, si tertia a nobis indicata resistentiæ causa admitteretur] pro certo definire volumus. Legantur quæ de ea conscripsit *Illustr.* LEIBNITIUS in *Actis Lips.* A. 1689, pag. 39 & seqq. ubi de mediorum resistentiis acutissime, pro more suo, disseruit: Ego vero propositum meum mathematice prosecuturus, resistentiam ejusque rationem in abstracto considerabo.

XXV.

THEOR. IV.

Tab. XXII Fig. 3. *Esto curva quacunque* LCK, *quam corpus, vi gravitatis uniformis, libere describit, id medio quocunque resistente: Vis quam exerit gravitas secundum normalem ad curvam [quam ideo vocabo* vim gravitatis normalem*] erit ut sinus anguli GCS, quem recta curvam contingens CS constituit cum directione gravitatis CG: Vis autem, quam exerit secundum tangentem [quam ideo vocabo* vim gravitatis tangentialem*] est ut sinus ejusdem anguli complementi GCO.*

DEMONSTR. Sit CZ directio & quantitas gravitatis, qua corpus urgetur, dum est in C. Ex puncto Z agatur perpendicularis ZX in rectam CO normalem ad curvam. Ex resolutione virium patet, vim gravitatis CZ, quam ubique datam seu constantem suppono, resolvi in duas collaterales CX & XZ, quarum illa exprimit ejus *vim normalem*, hæc vero ejus *tangentialem*: sumta itaque CZ pro sinu toto, erit CX sinus anguli CZX seu ZCS; & ZX erit sinus anguli ZCX, qui ejusdem est complementum: sunt ergo vires illæ in ratione horum sinuum. *Q. E. D.*

COROLL. Si Gravitas non sit data, seu non uniformis, erunt *vires* gravitatis *normales*, ut & *tangentiales*, in ratione composita illorum sinuum & quantitatis absolutæ, quam gravitas

vitas in singulis curvæ punctis obtinet; hoc est, si CZ exprimat vim absolutam gravitatis, dum corpus existit in C, exprimetur *vis normalis* per CZ × sin. anguli SCZ, & *tangentialis* per CZ × sin. ang. ZCX.

XXVI.

THEOR. V.

Positis quæ prius, velocitas, in quovis puncto C, erit in ratione dimidiata coradii *circuli osculantis: Voco autem* Coradium *partem CG lineæ directionis gravitatis, quæ a perpendiculari ex centro O circuli osculantis in eam educta resecatur.*

DEMONSTR. Liquet utique projectile ea velocitate moveri debere, per quam acquirat vim centrifugam æqualem vi contrariæ normali gravitatis: Corpus enim, quod libere aliquam curvam describit in medio quolibet, non alia de causa curvam non deserit, quam quod, in singulis curvæ punctis, tanta vi trahitur versus centrum circuli osculantis, quanta vi centrifuga ab eodem retrahitur, ut hoc pacto servetur æquilibrium. Vis autem, qua mobile trahitur versus centrum, est ipsa vis gravitatis normalis, quæ nempe exeritur a gravitate secundum normalem ad curvam, & quæ ostensa est proportionalis sinui inclinationis curvæ ad directionem gravitatis, hoc est, anguli GCS, seu ipsi æqualis COG: In hac ratione ergo se habebit etiam vis centrifuga a velocitate partim, partim a curvedine oriunda. Est autem, ut constat ex *Hugenianis*, vis centrifuga in ratione composita ex duplicata velocitatis directe & ex simplici semidiametri inverse; concipienda quippe est particula minima curvæ C*c* tanquam arculus circuli cujus centrum O, & radius OC, & in cujus circumferentia mobile circularetur celeritate uniformi, & æquali ei quam in curvæ puncto C adquirit: Erit itaque CG: CO, id est, sinus anguli COG, cui proportionalis est vis normalis gravitatis, ut Quadr. velocitatis divisum per CO, cui proportionalis est vis centrifuga in puncto C: unde quadratum velocitatis ut CG; & ipsa velocitas,

locitas, ut $\sqrt{CG}$, hoc est, in dimidiata ratione coradii. *Q. E. D.*

XXVII.

COROLL. I. Si vis gravitatis non sit uniformis, simili argumento probabitur velocitatem V fore in ratione composita ex dimidiata coradii & dimidiata gravitatis, seu ut $\sqrt{CG} \times \sqrt{CZ}$, hoc est, ut medium proportionale inter CG & CZ.

XXVIII.

TAB. XXII. *Fig.* 4.

COROLL. II. Sit curva LCK arcus circuli, cujus centrum O, tendatque vis gravitatis ad horizontem OK, qui casus est ex NEWTONO *pag.* 263 †, erit O, pro quovis puncto C, in eodem semper horizonte OK; unde velocitates, quæ sunt ut $\sqrt{CG}$, se habebunt in subduplicata ratione distantiarum ab horizonte per centrum circuli transeunte; prorsus quidem ut asserit Celeb. NEWTONUS, *pag.* 265 *, tametsi in definienda resistentia a vero aberret, quemadmodum ex demonstratione sequentis propositionis patebit.

XXIX.

THEOR. VI.

Ut Corpus in medio resistente agitatum describat circulum LCK, *supposita vi uniformi gravitatis, quæ directe ad horizontem tendat: dico resistentiam fore, in singulis punctis* C, *ad gravitatem ut* 3 OG *ad* 2 OK.

DEMONSTR. Super axe OL, & vertice O, descripta intelligatur parabola ONE cujuscunque parametri; fiatque super eodem axe prolongato OP, eodemque vertice O, parabola alia OVQ, cujus parameter prioris sit dupla: Dein ad punctum L, & quodlibet aliud punctum R, applicentur ordinatæ LE, RC, RN, horizontales, istisque proximæ rc, rn; atque ex punctis E, N, n, agantur verticales EQ, NV, nu, secan-

† Supra, pag. 485. * pag. 487.

secantes parabolam OVQ in punctis Q, V, u; ex quibus applicentur ad axem OP, horizontales QP, VT, ut. Ex Coroll. II, Theor. præced. manifestum est, si LE designet velocitatem, quam corpus habet in supremo circuli puncto L, quod RN designabit velocitatem corporis, cum fuerit in puncto C. Sed quia parameter parabolæ OQ est dupla parametri parabolæ OE, liquet OL esse $= 2$ OP, & quamlibet aliam OR $= 2$ OT; unde quoque $Rr = 2\,Tt$. Et quoniam velocitas LE ea est, quæ requiritur ut vis centrifuga corporis in L æqualis sit ejus gravitati, erit illa velocitas, [ut HUGENIUS monstravit] tanta quanta acquireretur si grave in vacuo, hoc est, in medio non resistente, descenderet per altitudinem æqualem radio dimidio circuli: adeoque PO erit altitudo, per quam grave cum celeritate initiali EL, vel QP, in vacuo ascendere potest, & sic quælibet alia applicata VT exprimit velocitatem, quacum grave, sursum projectum in vacuo, emetietur altitudinem TO. Hisce præmissis, concipiamus corpus aliquod grave cum celeritate QP, in medio non resistente, sursum projici ex P versus O, aliudque pervenisse ad T, quando alterum in medio resistente pervenit ad C; ita ut eo momento habeant ambo corpora æquales velocitates NR, & VT, passuras decrementa æqualia, tempusculis inæqualibus, se habentibus in ratione spatiolorum percurrendorum Cc & Tt. Jam vero vires, quibus duo corpora æqualia & æquivelocia retardantur, sunt directe ut decrementa velocitatum eodem tempusculo producta, vel, quod idem est, reciproce ut tempuscula quibus fiunt æqualia decrementa velocitatum: Vis itaque gravitatis, qua corpus in vacuo ascendens retardatur in T, est ad vim qua alterum corpus in medio resistente descendens retardatur in C, vicissim ut Cc ad Tt. Hæc autem vis posterior æstimanda est per excessum, quo resistentia medii, in puncto C, superat vim tangentialem gravitatis, quam nempe exercet gravitas secundum tangentem CS, & quæ, per Theor. IV, ad ipsam gravitatem se habet ut OG ad OC. Unde si gravitas vocetur G, & resistentia R, erit $G : R - \frac{OG}{OC}G = Cc : Tt$

$= 2\,Cc : Rr\ [Cb] = 2\,OC : OG$, ſeu, æquando extremorum & mediorum facta, $OG \times G = 2\,OC \times R - 2\,OG \times G$, adeoque $3\,OG \times G = 2\,OC \times R$, quæ in analogiam converſa dant $R : G = 3\,OG : 2\,OC\ [2\,OK]$, hoc eſt, reſiſtentia ad gravitatem ſe habet ut 3 OG ad 2 OK. *Q. E. D.*

XXX.

Coroll. I. Quia $3\,OG \times G = 2\,OC \times R$, adeoque $R = 3\,OG \times G : 2\,OC$, erunt, ob datas G & OC, reſiſtentiæ in diverſis locis ad ſe invicem, ut reſpectivæ OG.

XXXI.

Coroll. II. Quod ſi vero ſupponatur Reſiſtentia ut medii denſitas, & quadratum velocitatis conjunctim, erit [nominando Denſitatem D] $D \times CG\ [= R] = 3\,OG \times G : 2\,OK$, & proinde $D = 3\,OG \times G : 2\,OK \times CG$, hoc eſt, denſitates ſunt, ob datas G & OK, ut OG : CG; ſeu ut tangentis longitudo CM, prorſus quoque ſicuti Newtonus.

XXXII.

Scholium.

Ratio a nobis aſſignata inter Reſiſtentiam & Gravitatem, ut 3 OG ad 2 OK diſcrepat utique a *Newtoniana*, ut pote quam ponit ut OG ad OK, adeoque ſeſquialtera ratione minorem, quam quæ noſtra eſt. Ne quis vero, qui hæc accuratius examinare nequit, ſuſpicetur perperam forte a nobis redargui, quæ a Viro acutiſſimo, tanta cum induſtria, fuere enucleata; demonſtrabo hic rationem illam *Newtonianam* ad manifeſtam contradictionem deducere: Nam ſi reſiſtentia ad gravitatem ſe haberet ut OG ad OK, ut vult Newtonus; ipſa vero Gravitas cum ſe habeat ad vim tangentialem, ut OC, ſeu OK, ad OG; eſſet, ex æquo, reſiſtentia ad vim tangentialem ſeu motricem, ut OG ad OG: foret ergo reſiſtentia huic vi motrici æqualis, adeoque velocitas, in omnibus punctis C, uniformis; quam tamen eſſe ut $\sqrt{CG}$ & proinde non uniformem ſupra monſtravimus, conſentiente quidem & ipſo Newtono.

XXXIII.

Error iſte, qui tanto Viro excidit, non quidem in ipſa ejus ſolutione latet, quam juſtam eſſe, & ab omni paralogiſmi vitio immunem deprehendi, quanquam non parum detortam & intellectu difficilem; ſed quærendus ille eſt in ipſo applicandi modo, qui in eo laborat, quod pag. 263 * in ſerie quæ exprimit DG [vid. Fig. ibid.] terminum quemlibet ſumat pro aliqua indeterminatæ DG differentiali, ſeu, ut ipſe vocat, fluxione tanti gradus, quantæ dimenſionis exiſtit littera o in ipſo termino; quod in primo & ſecundo verum eſſe poteſt, in reliquis vero minime: ſit enim, exempli gratia, DG ut ſimplex poteſtas aliqua p ipſius OB, ſeu a; ita ut DG ponenda ſit $= (a+o)^p$ quæ itaque, more *Newtoniano*, in ſeriem conjecta dabit $DG = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} o + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} o^2 + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} o^3 + \&c.$ cujus termini, ex opinione Newtoni, exprimerent ſucceſſive differentiales omnium in eodem ordine graduum ipſius DG; interim, excepto primo & ſecundo termino, reliquos omnes a veris differentialibus abludere, communis differentiandi regula docebit; ſumpta enim a pro indeterminata, cujus differentialis da ſupponitur conſtans, & differentiata ſucceſſive poteſtate a^p, invenietur pro differentiali prima $pa^{p-1}da$; pro ſecunda $p.(p-1)a^{p-2}da^2$; pro tertia $p.(p-1).(p-2)a^{p-3}da^3$; pro quarta $p.(p-1).(p-2).(p-3)a^{p-4}da^4$, &c. Unde hæc emergit ſeries, ſubſtituendo pro da litteram o, & ponendo ipſam a^p, tanquam differentialem gradus

* Supra pag. 485.

gradus infimi, ſeu nullius, pro primo termino, $a^{p} + pa^{p-1}o + p.(p-1)a^{p-2}oo + p.(p-1).(p-2)a^{p-3}o^{3} + p.(p-1).(p-2).(p-3\,a^{p-4}o^{4}$ &c. $=$ ſummæ omnium differentialium; hæc autem ut patet, diverſa eſt ab illa altera $a^{p} + \frac{p}{1}a^{p-1}o + \frac{p.(p-1)}{1.2}a^{p-2}o^{2} + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3}a^{p-3}o^{3} +$ &c $=$ DG; duo enim tantum priores termini utrobique conveniunt, cœteri diſcrepant omnes in multiplicitate coëfficientium.

XXXIV.

Non ſatis capio qua rationis ſpecie inductus fuerit Vir ſagaciſſimus, ut crederet terminos ſerierũm harum, per extractionem radicis prodeuntium, eoſdem eſſe cum terminis per differentiationis continuationem collectis; cum præſertim differentiandi differentialia, vel fluxiones ex fluxionibus capiendi Regula, ei vix latere potuerit: quod moneo ne quis plus, quam par eſt, tribuat radicum extractioni per ſeries, in ſolutione problematum, quæ pendent a curvatura curvarum, quæque & commodius & verius ex differentiationis fonte obtinentur. Judicet itaque æquus Lector, quid tenendum ſit, de uſu hujus Regulæ, quem deprædicat Author pag. 264, in ſolvendis iſtius modi problematibus; quandoquidem uſus tam facile in abuſum degeneret. Vacillant certe omnia, quæ in ſequentibus ex illa deducit, pro determinanda ratione reſiſtentiæ ad gravitatem; ſicuti enim pro Circulo, pag. 265, ita etiam pro hyperbolis pag. 268 & 269, ut & pro parabolis pag. 274, rationem reſiſtentiæ ad gravitatem ubique juſto minorem facit, & quidem iterum in ratione ſeſquialtera, quod ut evidentius pateat, dabo ſolutionem problematis *Newtoniani* pag. 260. Prop. X. generaliter concepti in hunc modum.

XXXV.

XXXV.

Problema I.

Tendat vis uniformis directe ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim; requiritur tum medii denſitas, in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iiſdem locis, tum & ratio reſiſtentiæ ad gravitatem. *Acta Erud. Lipſ.* 1713. Mart. pag. 115.

Solutio. Sit LC curva data quæcunque; LR ejus axis; IO evoluta, ex cujus nempe evolutione deſcribitur curva LC; CO, radius evolutæ pertinens ad punctum C; ejus coradius CG, & *ſubradius* OG; hoc nomine voco perpendicularem ex centro circuli oſculantis ductam ad lineam directionis gravitatis, & quæ coradium terminat: Sit quoque EN curva velocitatum, cujus nempe ordinata NR exprimit velocitatem projectilis in C; ſicuti EL exprimit velocitatem initialem, quacum illud exit ex puncto L ſecundum directionem horizontalem; etſi forte curva hanc directionem nuſquam habeat; inſervit enim hæc ſuppoſitio pro omnibus directionibus: Sit porro curva PQV Parabola ſuper communi axe continuato PT deſcripta, cujus applicata quælibet VT exprimat velocitatem quam grave acquireret, ſi ex altitudine PT ſola vi gravitatis deſcenderet in medio non reſiſtente. TAB. XXII. *Fig.* 3.

XXXVI.

Hiſce ita præparatis, conſideremus qua cauſa fiat, ut projectile in motu ſuo haud deſerat curvam LC, ſed ei ſemper inhæreat, quaſi alligatum eſſet extremitati C fili CO, quob ab initio curvæ OI circumplicatum, & ad L uſque protenſum eſſet, poſtea evolveretur, & hoc motu corpus curvam LC deſcriberet; ut pote quod a filo continue retineretur, ne in quolibet puncto C evaderet ſecundum tangentem CS; id quod, ſubito ſoluto filo, neceſſario contingeret, niſi gravitas & medii reſiſtentia hoc impediret. Jam vero cum, ut videtur, libere

bere moveatur projectile in curva, aliquid aliud adeſſe debet, quod fili retinentis vices ſubeat, quodque in quolibet puncto C tantam vim activam exerat ad trahendum corpus ſecundum directionem CO, quantam alias reſiſtentiam paſſivam præberet filum impediendo tantum ne elaberetur corpus ſecundum tangentem; quæ reſiſtentia, ut patet, æqualis eſt vi centrifugæ, qua illud naturaliter conatur recedere a centro, dum continuo affectat directionem ſuam naturalem, ſecundum rectam tangentem in puncto C, in quo verſatur.

XXXVII.

Retinetur itaque projectile in curva LC, quia in ſingulis hujus punctis urgetur duabus viribus oppoſitis & æqualibus; una nimirum extrorſum ſecundum directionem OC, ex gyratione circa O acquiſita, altera introrſum ſecundum directionem CO priori oppoſitam, quæ producitur ab actione gravitatis normaliter ad curvam derivatæ. Vis prior, ex natura corporum gyrantium, ſe habet conjunctim ut quadratum velocitatis directe, & longitudo radii CO inverſe: poſterior vero, quæ a gravitate exercetur ſecundum normalem ad curvam, ſe habet ad ipſam gravitatem abſolutam, ut coradius CG ad radium CO, per compoſitionem virium. Erit igitur ubique $NR^2 : CO$, ut $CG . G : CO$ [per G intelligo gravitatem abſolutam] hoc eſt, ob datam G, ut $CG : CO$; adeoque NR ut $\sqrt{CG}$; ex quo patet velocitatem mobilis, in quolibet puncto C, ſe habere in dimidiata ratione coradii, hoc eſt $NR : EL = \sqrt{CG} : \sqrt{LI}$. *Quod erat inveniendum pro velocitate.*

XXXVIII.

Reſiſtentia determinatur hoc pacto; Corpus grave, verticaliter deſcendens in medio non reſiſtente, dum percurrit Tt velocitate acquiſita VT, acquirit incrementum velocitatis iu æquale incremento hn, quod acquirit projectile ſimili velocitate NR percurrendo Cc: ſunt autem corporum æquivelocium ſpatio-

la percurſa Tt, Cc, ut tempuſcula, quibus percurruntur: tempuſcula vero ſunt reciproce ut vires incrementa æqualia velocitatum producentes: Ergo etiam hæ vires ſunt reciproce ut ſpatiola percurſa, hoc eſt $G : \frac{OG . G}{CO} \pm R = Cc : Tt$ [per R intelligo vim Reſiſtentiæ, quæ ad vim gravitatis normalem & per $OG . G : CO$ expreſſam addenda eſt in aſcenſu, & ſubtrahenda in deſcenſu, ad habendam vim retardatricem, vel acceleratricem $\frac{OG . G}{CO} \pm R$; notandum itaque in ambiguitate ſignorum, ſuperius pro aſcenſu, inferius pro deſcenſu valere.] Porro cum velocitas in L tanta ſit, quantam acquireret, ſi grave in vacuo, hoc eſt, in medio non reſiſtente neque gravitatem imminuente, quale hic ſub *non reſiſtente* ſemper ſubintelligitur, deſcenderet per altitudinem æqualem ſemiradio evolutæ, ſicuti HUGENIUS monſtravit de corpore circulariter gyrante; nam vis centrifuga in quolibet curvæ puncto, tanta cenſetur, quanta foret, ſi mobile eadem celeritate gyraret in circulo curvam in eo puncto oſculante, quia linea curva & circulus oſculator eandem habent curvaturæ quantitatem in puncto oſculi. Erit ergo $PD = \frac{1}{2} LI$; & ob $\sqrt{PT} : \sqrt{PD} =$ [per naturam parabolæ] $VT : QD = NR : EL = \sqrt{CG} : \sqrt{LI}$, erit $PT : PD = CG : LI$, unde $PT = \frac{1}{2} CG$, earumque elementa dPT, ſeu $Tt = \frac{1}{2} dCG$. In ſuperiori itaque analogia $G : \frac{OG . G}{CO} \pm R = Cc : Tt$ pro $\frac{OG}{CO}$ ſubſtituatur æquivalens $\frac{Cb}{Cc}$, & pro Tt ſcribatur $\frac{1}{2} dCG$, prodibit $G : \frac{Cb . G}{Cc} \pm R = Cc : \frac{1}{2} dCG$, unde $R = G . (2Cb - dCG) : \mp 2Cc$, vel $R : G = 2Cb - dCG : \mp 2Cc$; hoc eſt, Reſiſtentia ſe habet ad Gravitatem, ut duplum elementi abſciſſæ, demto elemento coradii, ad duplum elementi curvæ propoſitæ. Quod ſi vero elementum coradii ſit negativum, vel quod idem eſt, ſi creſcentibus abſciſſis LR, decreſcant coradii CG; ſicuti fit, ſi curva LC eſt, exempli gratia, circulus; habebit ſe

 Reſiſ-

Reſiſtentia ad Gravitatem, ut duplum elementi abſciſſæ, auctum elemento coradii affirmative ſumto, ad duplum elementi curvæ propoſitæ. *Quod erat inveniendum pro reſiſtentia.*

XXXIX.

Hinc liquet eandem proportionem obſervari, tam in aſcenſu quam in deſcenſu projectilium per curvam; hoc tantum diſcrimine, quod reſiſtentia in aſcenſu negativa ſit, ſi ea quæ in deſcenſu eſt affirmativa, & viciſſim. Reſiſtentia autem negativa, hoc eſt, talis quæ motum juvet, phyſice eſt impoſſibilis; unde manifeſtum eſt, duo media poſitive reſiſtentia excogitari non poſſe, in quorum uno aſcendens projectile eandem curvam deſcribat, quam deſcribit in altero deſcendens. *

XL.

Neque igitur in uno medio, utcunque variante ratione denſitatis, mobile deſcribere poteſt curvam, quæ habeat circa axem duas partes ſimiles, vel eaſdem; adeoque parabolæ omnes cujuſcunque gradus [excepta parabola conica, quæ ſola in medio non reſiſtente, vel ſaltem in medio denſitatis infinite parvæ deſcribi poteſt,] & ejuſmodi aliæ curvæ, quæ, circa axem verticalem, ab utraque parte, deorſum verſus, extenduntur in ramos ſibi mutuo ſimiles, in natura rerum admitti non poſſunt, etſi vel maxime mediorum denſitates pro arbitrio moderari in noſtra poteſtate eſſet. Ubi enim reſiſtentia in aſcenſu eſt poſitiva, eoque nomine phyſice poſſibilis; eo ipſo fit negativa in deſcenſu, & ideo impoſſibilis; vel vice verſa, ſi poſſibilis eſt deſcendendo, fit pro aſcenſu impoſſibilis, utpote negativa.

XLI.

Utrum vero linea aliqua aſcenſu, an deſcenſu deſcriptibilis ſit, cognoſcitur ex ipſa noſtra formula $R = G.\,(2\,Cb - d\,CG) : \mp 2\,Cc$, in qua ſi $d\,CG$ ſuperat $2\,Cb$, aſcenſus eſt poſſibilis;

* Vide ad calcem hujuſce Numeri.

lis; ſecus vero deſcenſus: contrarium accidit cum $2\,Cb$ majus eſt quam $d\,CG$. Ergo, ubi neutrum neutro majus eſt, ſeu cum $2\,Cb = d\,CG$, id quod fit in parabola communi; hoc ſolo caſu, aſcenſus & deſcenſus eſt poſſibilis, reſiſtentia quippe tunc nulla eſt.

XLII.

Quod ſi vero linea data LC ejus ſit conditionis, ut, creſcentibus abſciſſis LR, decreſcant coradii CG, & ideo etiam velocitates NR, ſicuti fit in circulo; erunt elementa $d\,CG$ negativa, atque ideo R ad G, ſeu reſiſtentia ad gravitatem, ut $2\,Cb + d\,CG$ ad $\mp 2\,Cc$; ſeu, quemadmodum jam monuimus, ut duplum elementi abſciſſæ, auctum elemento coradii poſitive ſumto, ad duplum elementi curvæ ipſius propoſitæ; cujus rationis exponens, cum ſemper ſit negans in aſcenſu, & ſemper affirmans in deſcenſu patet omnes ejuſmodi lineas curvas in univerſum ſumtas pro ſolo deſcenſu, inſervire poſſe; quod in circulo quidem obſervavit ſummus NEWTONUS, *pag.* 266, ſed in aliis inobſervatum præteriit. Verum & hoc inſuper patet, quod obiter tango, pro circulo in ſpecie, in quo elementum coradii poſitive ſumtum, elemento ipſius abſciſſæ æquale eſt, haberi $R : G = 3\,Cb : 2\,Cc =$ [vid. Fig. *Newt.* pro circulo] $3\,OG : 2\,OK$; quod jam ſupra oſtenſum confirmat. TAB. XXI. *Fig.* 1.

XLIII.

Cum igitur, pro determinatione reſiſtentiæ in qualibet curva, requiratur cognitio Coradii evolutæ, vel circuli oſculatoris; non alienum erit, ſi commodam hic pro eo exhibeam formulam. In *Actis Lipſ.* ann. 1701 *pag.* 137 †, dedi modum univerſalem exprimendi, in differentialibus tantum primis, radium oſculi, ſeu evolutæ; quippe quem oſtendi æqualem eſſe $dt^3 : dudy^2$, [per u intelligo quantitatem ex x, y & conſtantibus utcunque compoſitam, in æquatione differentiali ad curvam $dx = udy$; ad talem enim omnes reduci poſſunt:] quoniam igitur radius

 evolu-

† Supra N°. LXVIII.

evolutæ est ad suum coradium semper, ut elementum curvæ; seu dt, ad elementum applicatæ seu ad dy, invenietur coradius $= dt^2 : du\, dy$.

X L I V.

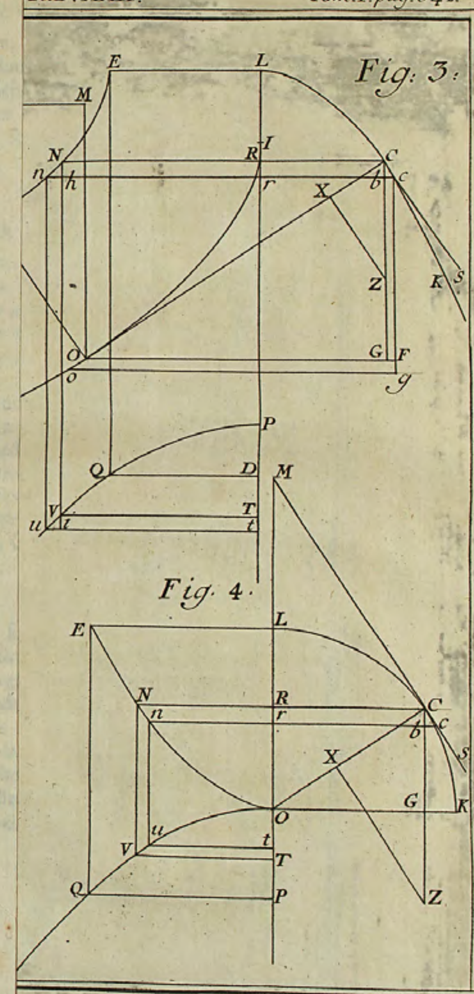
Inventis hoc modo celeritate & resistentia, superest ut medii densitas D quoque determinetur. Hæc autem ex illis fluit, independenter a natura curvæ; nam deducenda est ex sola hypothesi, sive sit arbitraria, sive naturalis. Sic si R hic ponatur $= VVD$; hoc est, si resistentia sit in ratione composita ex duplicata velocitatis & ex simplici densitatis, erit $D = R : VV$, seu densitas erit conjunctim ut resistentia directe & quadratum velocitatis inverse; ita ut nihilo alio opus sit quam supra inventum valorem ipsius R dividere per quadratum velocitatis, sive per coradium C G.

X L V.

Si quis hanc regulam sequatur, comperiet, quod supra dixi, similem nempe lapsum identidem commissum circa hyperbolam in Opere *Newton.* pag. 268 *, ubi Vir Inclytus invenit
Tab. XXI. Resistentiam ad Gravitatem ut X Y ad Y G [vid. ipsius fig.]
Fig. 4. pro quo scribendum est ut 3 X Y ad 2 Y G; sicuti etiam pag. sequ. 269 †, qua agitur de hyperbola gradus indefiniti n, pro assignata ratione resistentiæ ad gravitatem ut X Y ad $(3nn + 3n)$ V G : $(n + 2)$, substitui oportet hanc alteram ut X Y ad $(2nn + 2n)$ V G : $(n + 2)$. Nec non pag. 274 †† [serperet enim error per omnia quotquot fierent exempla] ubi applicatio instituitur ad parabolam indefiniti pariter gradus n, concluditurque resistentia ad gravitatem, ut [vid. Fig. Autoris] T G
Tab XXI. ad $(3nn - 3n)$ V G : $(n - 2)$, sed rectius ut T G ad
Fig. 5. $(2nn - 2n)$ V G : $(n - 2)$, & quidem pro descensu, nam pro ascensu ponendum est ut T G ad $(2nn - 2n)$ V G : $(2 - n)$; ita ut ascensus hic, non quolibet casu, sit in natura possibilis, sed tunc tantum quando n simul major est unitate & minor binario; secus enim, si extra hos limites cadit, parabola nonnisi pro

* Supra, pag. 490. † pag. 492. †† pag. 493.

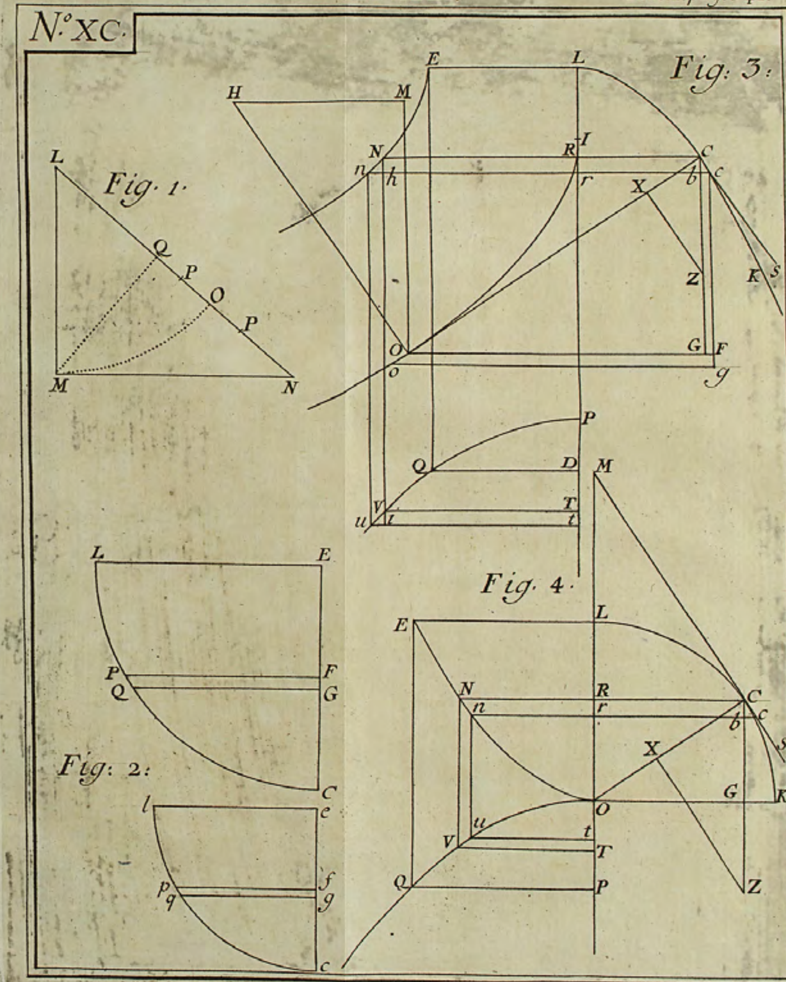
Tab. XXII. Tom. I. pag. 542.

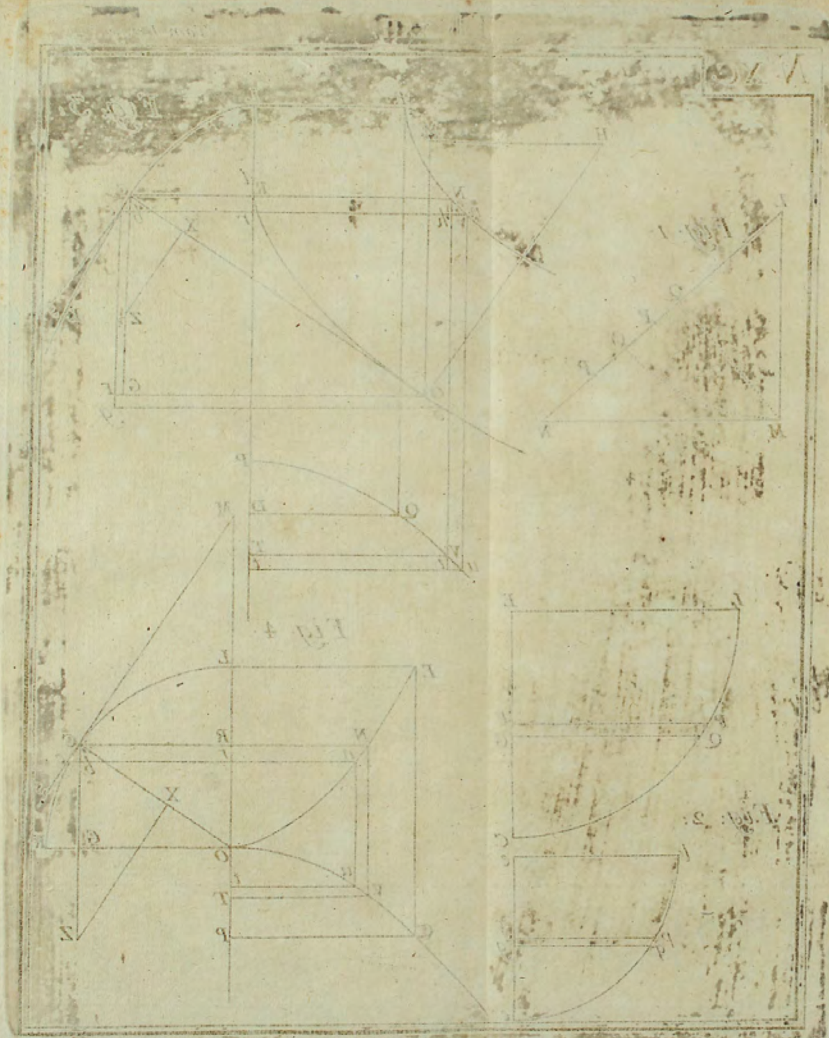


tum curvæ ;
tur coradius

ereſt ut me-
ex illis fluit,
t ex ſola hy-
hic ponatur
compoſita ex
)=R: VV,
& quadratum
ſupra inven-
ocitatis, ſive

uod ſupra di-
circa hyper-
clytus invenit
d. ipſius fig.]
ti etiam pag.
efiniti n, pro
ad $(3nn+3n)$
ut X Y ad
†† [ſerperet
ubi applicatio
, concluditur-
Autoris] T G
ut T G ad
eſcenſu, nam
V G: $(2-n)$;
ura poſſibilis,
& minor bi-
abola nonniſi
pro





pro deſcenſu inſerviet, hoc eſt grave cum debita velocitate ex A projectum ſecundum tangentem, deſcribere quidem poteſt arcum AX deſcendendo, ſed non arcum AG aſcendendo; quod ipſe ſagaciſſimus NEWTONUS animadvertiſſe non videtur. Sed pergo ad ſolutionem problematis quod *Newtoniano* multo eſt generalius.

XLVI.

PROBLEMA II.

Tendat vis gravitatis non uniformis, ſed quacunque data lege variabilis, ad punctum aliquod datum, tanquam ad centrum virium; ſitque reſiſtentia utcunque ex ratione denſitatis & velocitatis compoſita. Quæruntur velocitas, reſiſtentia, & denſitas in locis ſingulis, quæ faciant. ut corpus in data quavis linea moveatur.

SOLUTIO. Eſto itaque LC curva quævis data; centrum virium X, per quod ducta recta LX pro axe habeatur, & quævis alia CX pro linea directionis; ſit item evoluta IO; radius ejus CO pertinens ad quodvis punctum C; coradius CG & ſubradius OG, angulum rectum facientes ad G. Centro X, radioque XC, deſcripto arcu CR, & eidem proximo *cr*; ad puncta R, *r*, intelligantur applicatæ RN, *rn*, quæ deſignent velocitates mobilis in C, *c*; ita ut N, *n*, ſint in curva velocitatum EN*n*. TAB. XXIII. *Fig.* 5.

XLVII.

Concipiatur nunc, ſuper axe PD in LX prolongato, parabola PQ, cujus applicata quælibet QD exprimat velocitatem, quam in medio non reſiſtente corpus aliquod acquireret, ſi ex altitudine PD deſcenderet, vi uniformis gravitatis æqualis ei quam habet projectile in L. Concipiatur præterea, ſuper eodem axe, alia parabola PV, cujus quævis applicata VT ſimiliter deſignet velocitatem, quam mobile aliquod acquireret, ſi in medio non reſiſtente caderet ex altitudine PT, vi uniformis gravitatis æqualis ei quam projectile habet in diſtantia RX, vel in loco C.

XLVIII.

Quod ſi jam velocitatem in C, hoc eſt, applicatam NR determinare lubeat; ſimili argumento, quo ſupra §. XXXVII factum eſt, concludam, ob æqualitatem vis centrifugæ & vis oppoſitæ retractionis a gravitate oriundæ, $NR^2 : CO$ ſe habere ut $CG.\,G : CO$ [per G jam intelligo gravitatem, vel vim centralem data lege variabilem] adeoque NR^2 ut $CG.\,G$, & NR ut $\sqrt{CG}.\,\sqrt{G}$: hinc ſequitur velocitatem projectilis, in quovis puncto C, eſſe in ratione compoſita ex ſubduplicata coradii & ſubduplicata vis gravitatis, ſeu $NR : EL = \sqrt{(CG.\,G)} : \sqrt{(LI.\,g)}$; per g intelligo vim gravitatis in diſtantia XL, vel in ipſo loco L.

XLIX.

Reſiſtentiam venabimur hac ratione: Ex punctis E & N ductæ concipiantur duæ rectæ parallelæ axi LX, ſecantes parabolas PQ & PV in punctis Q & V, ex quibus applicentur QD & VT: Quoniam itaque altitudines PD & PT ſupponuntur ſpatia percurſa, in medio non reſiſtente, a duobus corporibus, quorum unum a vi gravitatis uniformis g, alterum a vi gravitatis uniformis G urgetur, erunt, per Theor. II, celeritates acquiſitæ conjunctim in ſubduplicata ratione tam virium quam ſpatiorum emenſorum; hoc eſt, $\sqrt{(PT.\,G)}.\,\sqrt{(PD.\,g)} = VT : QD = NR : EL = \sqrt{(CG.\,G)} : \sqrt{(LI.\,g)}$; adeoque $PT : PD = CG : LI$. Eſt vero, ex *Hugenianis* ſupra citatis, $PD = \frac{1}{2} LI$; ergo, etiam $PT = \frac{1}{2} CG$. Quare ſi ducta intelligatur rectæ NV parallela nu & applicata tu, ut habeatur particula Tt, quam dum corpus, per gravitatis vim G, velocitate VT percurrit, projectile vero, æquali velocitate NR percurrit particulam curvæ Cc, utrumque acquirit æquale velocitatis incrementum, illud nempe iu, hoc hn: unde ſimili ratione, ut ſupra §. XXXVIII factum, elicio $G : \frac{OG.\,G}{CO} \pm R = Cc : Tt$, vel etiam $G : \frac{Cb.\,G}{Cc} \pm R = Cc : Tt$.

L.

L.

Ut vero innoteſcat quid hic ſit Tt, advertendum eſt, ob variabilitatem gravitatis G, etiam parabolam PV eſſe variabilem; quare huic proxima intelligitur parabola PW, cujus nempe, applicata quælibet $W\theta$ exprimat velocitatem acquiſitam, in medio non reſiſtente, pro altitudine $P\theta$, a vi gravitatis uniformis, & æqualis ei quam projectile habet in c, vel in diſtantia Xr, hoc eſt, quæ ſit $G + dG$. Sit itaque $W\theta$ applicata ex puncto W, in quo parabola illa ſecat rectam nu. Jam vero, ex eo quod PT ſit ſemper $= \frac{1}{2} CG$: adeoque & $P\theta =$ ſemicoradio ad punctum c pertinenti, erunt & differentiæ inter ſe æquales, ſeu $T\theta = \frac{1}{2} dCG$. Verum, ob θW & tu æquales, quæ velocitates denotant in θ & t, a gravitatibus uniformibus $G + dG$ & G generatis, erunt quoque producta ſpatiorum percurſorum per reſpectivas gravitates æqualia, utpote quæ quadratis iſtarum velocitatum proportionentur, per Theor. II. Hoc eſt $P\theta \times (G + dG) = Pt \times G = (P\theta + \theta t) \times G$, & demtis æqualibus, remanebit $\theta t \times G = P\theta \times dG =$ [ob differentiam inaſſignabilem inter PT & $P\theta$] $PT \times dG$; ideoque $\theta t = PT \times dG : G$; aggregando itaque $T\theta$ & θt, habebitur $Tt = \frac{1}{2} dCG + PT \times dG : G =$ [ob $PT = \frac{1}{2} CG$] $\frac{1}{2} dCG + CG.\,dG : 2G = (G.\,dCG + CG \times dG) : 2G = d(CG.\,G) : 2G$. Suffecto hoc valore ipſius Tt in analogia ſuperiori, prodit $G : \frac{Cb}{Cc} G \pm R = Cc : \frac{d(CG.\,G)}{2G}$; ex qua habetur $R = (2Cb.\,G - d(CG.\,G)) : \mp 2Cc$.

LI.

Quod ut ſymbolice exprimatur [poſitis Rr vel Cb, dx; bc, dy; Cc, $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$] velocitas, quæ ſupra inventa eſt proportionalis ipſi $\sqrt{(CG \times G)}$ vocetur v, adeoque vv pro $CG \times G$ & $2vdv$ pro $d(CG \times G)$ ſcribi poteſt; quo facto Reſiſtentia R erit $= (Gdx - vdv) : \mp dt$.

LII.

LII.

Nota interim, quod cum Rr, vel Cb, vel dx, conſiderari poſſit tanquam differentiale ipſius XC vel XR, æque ac ipſius LR; cum qua creſcente, & ipſa vis gravitatis G, & velocitas v, ut creſcentes ſupponuntur, dum in ſchemate parabola PW major quam parabola PV, & recta rn major quam recta RN repræſentantur; hinc quoque in applicatione Regulæ ad exempla, dx & dG contrariis ſignis ſunt afficiendæ, ſi XC vel XR vocetur x; quia tunc x & G contraria ratione creſcere ſupponit figura; adeoque manente dG & dv cum ſigno ſuo, pro $+dx$ ſcribendum eſt $-dx$, & $+dx$ pro $-dx$; ſed ſi LR dicatur x, nihil in ſignis mutandum erit: quod majoris cautelæ gratia monuiſſe ſufficiat.

LIII.

Denſitas medii, poſt velocitatis & reſiſtentiæ inventionem, ex qualibet hypotheſi aſſumta, nunc ſponte fluit, ut ſupra jam vidimus. Exempli gratia, ſit $R = vvD$, hoc eſt, ſi reſiſtentia ſupponatur in ratione compoſita ex ſimplici denſitatis & duplicata velocitatis; habebitur viciſſim denſitas ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, adeoque $D = R : vv = (Gdx - vdv) : \mp vvdt$. Et in univerſum, ſi ſupponatur $R = v^n D$ [per n intelligo exponentem cujuſvis poteſtatis] erit utique $D = R : v^n = (Gdx - vdv) : \mp v^n dt$.

LIV.

Ad exempla non deſcendo, cum præſertim hanc materiam, alio modo & via analytica, jam olim pertractaverim, cujus quoddam ſpecimen, ante aliquot annos, Illuſtr. Academiæ Scient. Reg. Gall. exhibui, * commentariis ſuis annuis, ſi dignum deprehenderit, publicandum; quod quidem jam factum per-

* Supra N°. LXXXVI.

percipio in Tomo ad An. 1710 qui nuper demum prodiit. Unici tamen exempli loco, quod inſtar omnium ſit, ſumamus ſpiralem logarithmicam, quæ radios omnes ex centro virium ductos interſecat ad angulos datos.

LV.

Eſto igitur LC talis ſpiralis, centrum virium X, ex quo ducta quælibet XC, faciat cum curva angulum datum XCc, cujus ſecans ſit ad ſinum totum ut m ad 1. Ponatur vis gravitatis, vel vis centripeta, reciproce ut dignitas quælibet n data diſtantiæ locorum, aut quod perinde eſt ponatur $G = 1 : XC^n = XC^{-n}$, ut & $R = vvD$. Nunc, quoniam in hac curva puncta G & X coincidunt, ſive $GC = XC$, erit $v\ [= \sqrt{(CG \times G)}] = XC^{(1-n):2}$, $R\ [= (Gdx - vdv) : \mp dt] = \frac{3-n}{\mp 2m} XC^{-n}$, & $D\ [= R : vv] = \frac{3-n}{\mp 2m} XC^{-1}$; hoc eſt, velocitas in ſingulis locis C eſt ut dignitas diſtantiæ locorum, cujus index eſt $(1-n):2$, Reſiſtentia ut ejuſdem alia dignitas, cujus exponens eſt $-n$, multiplicata per coëfficientem $(3-n) : \mp 2m$, vel, quia hic invariabilis eſt, ſimpliciter ut diſtantiæ dignitas exponentis $-n$, niſi ſit $n = 3$, quo caſu, evaneſcente iſto coëfficiente, & ipſa reſiſtentia evaneſceret, ſeu evaderet nulla. Denſitas demum eſt, ut diſtantiæ dignitas, cujus index eſt -1, ducta etiam in coëfficientem $(3-n) : \mp 2m$, vel ſimpliciter, reciproce ut diſtantia locorum: niſi ſit pariter $n = 3$; nam & denſitas hoc caſu evaneſceret; quod quidem ex reſiſtentia evaneſcente ſtatim manifeſtum erat. Ex quibus omnibus varia fluunt conſectaria.

L V I.

Consectarium I.

Si n major ſit quam 3, ſpiralis per aſcenſum; ſin minor, per deſcenſum deſcribitur; ſi vero $n = 3$, poterit illa per aſcenſum & per deſcenſum deſcribi; tunc enim tam denſitas quam reſiſtentia nulla eſt: unde patet ſpiralem logarithmicam deſcribi in medio non reſiſtente, cum vis gravitatis, ſeu vis centripeta, eſt reciproce ut cubus diſtantiæ a centro virium, quod in ipſo centro curvæ exiſtit; prorſus ut NEWTONUS invenit pag. 47, licet vox *reciproce* ibi ſit omiſſa, lapſu, ut credo, typothetæ.

L V I I.

Consectar. II.

Sequitur ex noſtra demonſtratione, Virum ſæpe laudatum Propoſitioni ſuæ XV, pag. 284 * non omnem dediſſe amplitudinem, quam dare potuiſſet, quando dicit, *Si medii denſitas, in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatum*; quod *corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato*: Si enim dixiſſet *in quacunque multiplicata ratione denſitatum*, propoſitio in hoc ampliori ſenſu ſumta non minus vera fuiſſet: quovis quippe numero pro n admiſſo in dignitatem diſtantiæ locorum, exurgit medii denſitas reciproce ut ipſa diſtantia; excepto, ſi vis, caſu quo $n = 3$, qui denſitatem facit nullam, vel potius infinite parvam; ita ut aliquo ſenſu etiam ſit reciproce ut diſtantia locorum; cum nihil obſtet, quominus infinite parva inter ſe comparentur, non minus quam finita.

L V I I I.

Consect. III.

Quandoquidem igitur ſuppoſita vis centripeta in quacunque ratione

* Supra pag. 495.

ratione multiplicata diſtantiæ, ſive directa, ſive reciproca, ſemper requirit, pro ſpirali logarithmica deſcribenda, medii denſitatem reciproce ut diſtantiam ſimplicem, revidendam commendamus Illuſtri NEWTONO demonſtrationem ſuam Prop. XVI. pag. 288 *, qua aſſerit *medii denſitatem poſſe eſſe reciproce, ut quævis dignitas diſtantiæ locorum; dummodo vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia in dignitatem illam ducta.*

L I X.

Consect. IV.

Cum ſupra, §. XLIX, inventa ſit $PT = \frac{1}{2} CG$, ſequitur corpus in medio non reſiſtente gyrari poſſe in circulo, cujus radius $= CG$, quando eadem vi gravitatis ad centrum urgetur & eadem celeritate gyratur, quas habet mobile in curvæ puncto C: fiunt enim hoc pacto vis centripeta & vis centrifuga æquales. Unde, in ſpeciali exemplo logarithmicæ ſpiralis, ubi punctum G cadit in X, velocitas in loco quovis C, ea ſemper eſt, quacum corpus in medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo ad eandem a centro diſtantiam XC: quod idem invenit Vir ſummus, quanquam pro ſua tantum hypotheſi nimis reſtricta de vi centripeta in duplicata ratione denſitatis. Vid. Coroll. I. pag. 285. †

L X.

Consectar. V.

Mutetur jam ſpiralis obliquitas, ita ut anguli XCc ſecans ſit ad ſinum totum, ut p ad 1; erit jam denſitas ad denſitatem in priore ut $\frac{3-n}{\mp 2p} XC^{-1}$ ad $\frac{3-n}{\mp 2m} XC^{-1}$, hoc eſt, ſi datur diſtantia XC, ut $1 : p$ ad $1 : m$; adeoque denſitas proportionalis eſt $Cb : Cc$, ſive $OG : OC$; ſi vero diſtantia illa non datur, erit denſitas ut $OG : OC . XC$. Quod

* Supra pag. 500, 501. † pag. 497.

congruit Corollario 2°. *Newtoñiano*, pag. 285 & 286 †, quamvis ex particulari hypotheſi deducto.

L X I.

Consect. VI.

Vis reſiſtentiæ $\frac{3 - n}{2m} XC^{-n}$ poſitive ſumta eſt ad vim centripetam XC^{-n} ut $(3 - n) : 2$ ad m; in hypotheſi vero particulari, ubi $n = 2$, erit ut $\frac{1}{2}$ ad m; hoc eſt ut $\frac{1}{2}$ Cb ad Cc, ſive ut $\frac{1}{2}$ OG ad OC. Sic igitur tertium Coroll. *Newton.* pag. 286 † in hoc tantum caſu valet. Idem etiam de Coroll. ſequenti quarto dici poteſt: Nam licet, in caſu iſto, corpus nequeat gyrari in ſpirali logarithmica, niſi cum vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ, poteſt tamen gyrari, in quacunque ſint alia ratione duæ illæ vires, ſi tantum n debito modo major minorve ſupponatur quam 2. Si, exempli gratia, $n = 1$, hoc eſt, ſi vis centripeta ſit ut ipſa medii denſitas, vel reciproce ut diſtantia locorum; erit vis reſiſtentiæ ad vim centripetam ut 1 ad m; nempe ubique ut Cb ad Cc, ſeu ut CG ad OC; unde patet corpus in hac ſpirali gyrari poſſe, modo vis reſiſtentiæ minor ſit quam tota vis centripeta. Et quod ſingulare eſt in hoc caſu, velocitas ubique eſt uniformis; fit enim $v\,[= XC^{(1-n):2}] = XC^{0:2} = 1$.

L X I I.

Consect. VII.

Liquet porro, cum in velocitatis expreſſione $v = XC^{(1-n):2}$ non ingrediatur littera m, fore velocitatem, in diſtantiis a centro æqualibus, in omnibus hiſce ſpiralibus æqualem; adeoque tempora aſcenſus vel deſcenſus eſſe ut ipſas longitudines ſpiralium, & quidem in generali hypotheſi, ſicuti Newtonus pag.

† Supra pag. 497.

pag. 286 †, Coroll. 5, idem indicat pro caſu particulari $n = 2$. Sed multa alia prætereo, atque Lectori, ut quouſque noſtra cum *Newtonianis* conveniant ipſe examinare poſſit, lubens relinquo.

L X I I I.

Quod ſupereſt, non neceſſe duco, ut multis moneam, Regulam noſtram generalem, de motu projectilium in mediis reſiſtentibus, comprehendere etiam caſus omnes, qui formari poſſunt de mediis non reſiſtentibus. Velocitas quippe, quæ independenter a reſiſtentia ſe habet ut $\sqrt{(CG.\,G)}$, ſi ducitur in tempuſculum quo percurritur lineola Cc, & quod tempuſculum, in medio non reſiſtente, proportionale eſſe areæ circa centrum virium deſcriptæ, hoc eſt, triangulo CXc vel ejus duplo $CX.\,bc$ eleganter demonſtravit Newtonus pag. 37, provenit ipſa lineola percurſa Cc, ut productum, nempe ut $CX.\,bc \times \sqrt{(CG.\,G)}$; [eſt enim ſpatium uniformi velocitate percurſum in ratione compoſita ex velocitate & tempore]; ſumtiſque quadratis erit Cc^2 ut $CX^2.\,bc^2 \times CG.\,G$; unde G ſe habebit ut $Cc^2 : CX^2.\,bc^2.\,CG$; ſeu [quia ducta perpendiculari XS ad tangentem, $Cc : bc = CX : SX$, & ob ſimilia triangula OCG & XCS, $CG.\,CX = OC.\,SX$] ut $CX : OC.\,SX^3$, quod ipſiſſimum eſt Theorema pro lege virium invenienda ex natura curvæ datæ, mihi olim, ſed ſine demonſtratione, tranſmiſſum a pereximio Geometra *Abrahamo* Moyvræo, a me poſtea cum demonſtratione, quamvis ex alio fundamento petita, remiſſum. Eo itaque inſtar formulæ uti licebit, ad determinandam vim centripetam ex natura curvæ datæ; ſive etiam hanc ex illa, & ex utravis celeritatem ac tempus periodicum.

L X I V.

Hoc vero magni diſcriminis obſervandum eſt inter utrumque, quod prius, ubi, data curva, quæritur vis centripeta, peragitur per methodum differentialium directam, adhibendo nudam.

† Supra pag. 498.

nudam tantum & simplicem terminorum differentiationem. Sed posterius, quo nempe, ex data lege virium, quærenda est curva, paulo plusculum laboris requirit in quibusdam exemplis; in quibusdam aliis ne quidem in potestate adhuc est, concessis licet figurarum quadraturis; nam tunc consulenda venit methodus integralium, quæ prioris est inversa, sed nondum ad optatam perfectionem evecta.

L X V.

Interim, quod non est silentio prætereundum, sæpe per hanc methodum, ut fieri solet, plures diversi generis curvæ eidem quæsito satisfaciunt. Sic, exempli gratia, si quæratur curva, quam mobile, in medio non resistente, describit, supposita vi centripeta in ratione reciproca cuborum distantiarum; cui quæsito supra, cum Celeb. NEWTONO, diximus respondere spiralem logarithmicam; præterea aliam alius generis spiralem satisfacere dudum observavi, quæ hanc habet naturam, ut ducta recta ex umbilico ad quodvis in curva punctum sit reciproce proportionalis angulo, quem eadem recta cum alia positione data TAB. XXIII. Fig. 6. constituit: vel, quod eodem recidit, sit X centrum circuli A B H & simul umbilicus spiralis C D E, hac proprietate gaudentis, ut ad ejus quodvis punctum C ducta recta X C se habeat reciproce ut arcus A B, initium sumens a puncto quodam fixo A; seu, si mavis, ut rectangulum $XC \times AB$ sit dato æquale; ita ut non incongrue hæc spiralis vocari possit *Hyperbolica*, vel etiam *Archimedea inversa*; utpote, quæ cum *Archimedea ordinaria* hoc commune habet, quod in utraque distantiæ punctorum ab umbilico sint proportionales circulationibus emensis, in *Archimedea* vulgari *directe*, in nostra vero *inverse*.

L X V I.

Ut itaque hæc nostra spiralis hyperbolica C D E (quæ asymtoton habet L M parallelam rectæ X A, & ab ea distantem intervallo æquali arcui A F, vel cuicunque alii arcui concentrico G C inter axem X A prolongatum, & curvam ipsam intercepto, omnes namque isti arcus sunt inter se æquales, ut, inquam, hæc spiralis describi possit, in medio non resistente; dico, requiri vim centripetam quæ sit in triplicata ratione reciproca distantiarum. Hoc ita se habere non secus ac in spirali logarithmica, facile quivis per regulam nostram comperiet.

L X V I I.

Neque hoc satis est; dico præterea, non tantum infinitas esse curvas, quæ reciprocam rationem triplicatam distantiarum pro lege virium admittant, sed & ex utraque curvarum classe, vel potius ex earum duobus summis generibus, nempe tam algebraicarum quam transcendentium, suppetere quasdam species, quamvis diversissimas. Sunt enim quædam, ad quarum constructionem requiritur comparatio linearum circularis & rectæ; quædam aliæ, quæ supponunt comparationem arearum circuli & hyperbolæ; quædam etiam, ubi arcus circulares secum invicem comparandi veniunt; atque inter has, quod mireris, innumeræ dantur prorsus algebraicæ, magis minusque compositæ, & ad quemvis dimensionis gradum ascendentes: cui asserto ut fidem faciam, docebo hic naturam harum curvarum, pro quibus legem virium centripetarum, ope Theorematis *Moyvræani* supra demonstrati, quilibet facile inveniet, ac videbit eam eodem modo se habere ut in duabus spiralibus logarithmica & hyperbolica. Quomodo vero ad ipsarum curvarum cognitionem me perduxerint calculi integralis certa compendia mihi usitata, non est hujus loci ut explicem.

L X V I I I.

Ecce interim curvarum illarum ex arcuum comparatione universalem constructionem: Per centrum virium, quod sit in TAB. XXII. Fig. 7. X, ductæ rectæ pro axe inservienti X A agatur, intervallo arbitrario, parallela Z G; dein centro X descriptis arcubus concentricis AM, BN, CO &c. qui singuli ad partem suam a parallela ZG terminatam, habeant datam aliquam rationem constantem, nimirum ut sit $a:b = AG:AM = BH:BN = CI:CO =$ &c. orietur curva MNOP, quæ algebraïca est, si ratio data a ad b sit numeri ad numerum, quamvis pro rationis illius diversitate diversæ quoque dimensionis curva existat; secus vero, si a & b sint incommensurabiles, erit curva transcendens. Utcunque autem se habeat ea ratio a ad b, & qualiscunque inde emergat curva, sive algebraïca, sive transcendens; dico fore hanc curvam semper ejus naturæ ut ad ipsam describendam corpus requirat vim centripetam tendentem ad punctum X, atque cubis distantiarum reciproce proportionalem; hoc est, ut vis in loco M sit ad vim in loco quovis alio N, ut vicissim XN^3 vel XB^3 ad XM^3 vel XA^3. Curva hæc raris affectionibus gaudet; habet enim primo duas asymtotos a centro virium X æqualiter remotas, nempe distantia quæ est quarta proportionalis ad a, b, & perpendicularem XZ, atque una ex illis asymtotis parallela est axi XA, atque altera cum eadem angulum facit qui se habet ad angulum rectum ut $2b$ ad a. Quod insuper animadversione dignum est, si b aliquoties superat $2a$, curva priusquam definat in asymtotos, tot gyros integros circa centrum X conficit, quot sunt unitates in $b:2a$. Et in specie quidem, si $b = 2a$, curva semel tantum circa centrum circulatur, ab una nimirum extremitate infinita procedens & in alteram desinens: ita ut jam ambæ asymtoti sint axi parallelæ & ab eodem distantes intervallo, quod duplum est intervalli parallelæ ZG, hoc est duplum perpendicularis XZ. Si b minor quam a, curvæ MNOP erit convexa versus axem XA, eamque tunc describere potest mobile si vis centripeta sit negativa, hoc est, si mutetur in vim centrifugam, proportionalem tamen reciproce cubis distantiarum a centro X. Sed nimium hisce immoror, pergo ad alia.

LXIX.

Quemadmodum igitur ex eo, quod pro gyratione corporis in spirali logarithmica, requiritur vis centripeta in reciproca triplicata ratione distantiarum, male quis concluderet hujus propositionis conversam, asserendo nempe *quod ergo vicissim, posita hac lege vis centripetæ, necesse sit, ut curva existat spiralis logarithmica*; si quidem altera spiralis hyperbolica, & aliæ multæ curvæ, tam algebraïcæ quam transcendentes, eadem virium lege gaudeant: Ita quoque ex eo quod demonstratur corpus gyrans in sectione conica, centro virium existente in foco, requirere vim centripetam reciproce proportionalem quadratis distantiarum, non sine aliqua paralogismi specie colligitur, supposita ista virium centripetarum proportione, curvam motu corporis describendam fore Sectionem Conicam, tametsi NEWTONUS ipse in eundem lapidem impegerit, Vid. pag. 55. Coroll. II, ut & in simili casu pag. 49. Coroll. I; nisi prius demonstretur, hic se rem aliter habere, quam in hypothesi virium cubis distantiarum reciproce proportionalium, quam diversis curvis convenire posse ostendimus; atque sectiones conicas solas esse, quæ admittant vires in duplicata reciproca ratione distantiarum.

LXX.

Hanc autem conversam primus ego, quod sciam, inveni ac demonstratam dedi prælaudatæ Acad. Reg. Scient. Gall. quam postea, me monente, sua quoque Demonstratione munivit Celeb. noster HERMANNUS; ita ut nunc de Orbitis Planetarum, veram Ellipsium conicarum formam habentibus, dubitare amplius non liceat; concessa scilicet eorum attractione versus Solem quadratis distantiarum reciproce proportionata: de qua veritate antea certi esse non poteramus. Quid si enim plures curvæ diversi generis eidem huic virium centralium legi respondissent, ut alteri isti reciproce triplicatæ respondere vidimus? Sane non video, cur Ellipses potius quam alias curvas, quæ æque satisfacerent, Planetarum Orbitis attribueremus.

LXXI.

Atque hactenus prolata sunt quædam tantum ex Observationibus jam olim mihi subnatis ex lectione operis *Newtoniani*; ea vero nunc demum cum publico communicare volui, quia intelligo alteram hujus Operis Editionem parari, quæ hoc adhuc Mense, quo hæc scribo, prælum sit evasura, multis annotationibus, correctionibus, novisque inventis aucta & exornata; inter quas correctiones eam quoque conspectum iri audio, quam supra §. XXXII. inserui, de non recte definita ratione resistentiæ ad gravitatem in Opere NEWTONI pag. *265*, quamque Vir incomparabilis ab Agnato meo *Nicolao* BERNOULLIO, studiorum nostrorum Cultore solertissimo, nuper in Anglia degente, ante absolutam impressionem novæ Editionis, opportune monitus, singulari scheda libro suo inserere non fuit dedignatus.

LXXII.

Hanc vero materiam præ cæteris enucleandam duxi, quod ea, fatente Viro summo, pag. *290*, perplexæ esset disquisitionis atque adeo explanationem & dilucidationem imprimis requireret; num vero scopum attigerim, judicium sit penes Lectorem: hoc mihi saltem suffecerit, ubi videro ipsum NEWTONUM hæc mea qualiacunque approbaturum; si mihi præsertim tam felici esse contingeret, ut quæ Vir laudatissimus de hoc argumento ediderit correctiora [secundæ quippe curæ emendant priores] ea cum hisce meis essent, si non prorsus eadem, saltem, quod spero, non dissentanea.

LXXIII.

Cæterum agnoscet, opinor, Incomparabilis NEWTONUS, me hic aliud nihil intendisse, quam quod ipse petit a Lectore suo

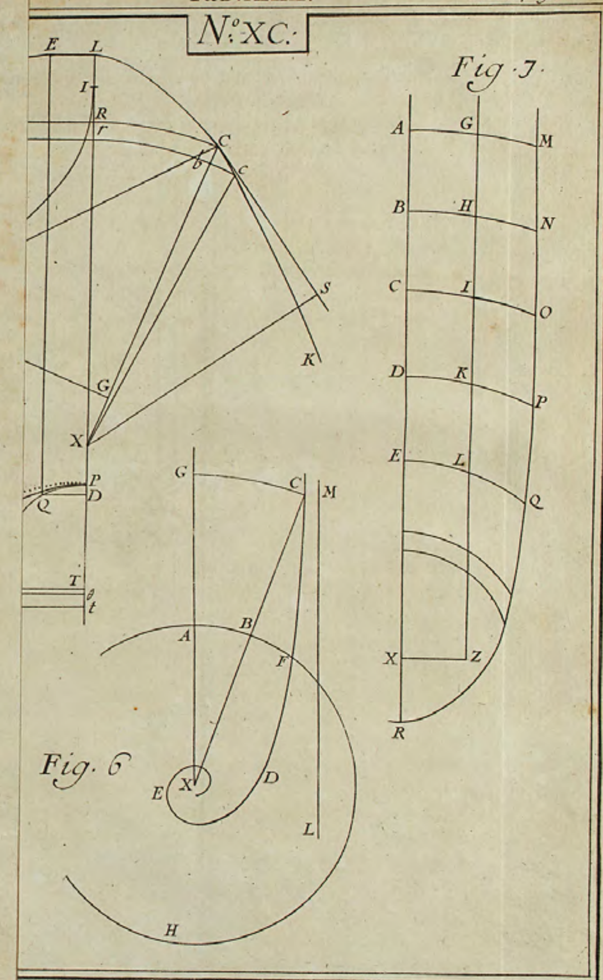
suo in fine Præfationis; absuit nimirum longissime animus reprehendendi lapsus in materia tam difficili; quin potius eos candide corrigere, defectus quosdam [quorum pauci sunt in tam vasto opere] benigne supplere, atque veritatem novis conatibus investigare, fuit id quod ubique mihi proposui.

Additio ad §. XXXVIII.

Ut analogia inter resistentiam & gravitatem, quæ hic uniformis supponitur [$R : G = 2\,Cb - dCG : \mp 2Cc$,] exponi possit per quantitates ordinarias & finitas, pro universali formula: TAB. XXI. *Fig. 3.* Concipiantur coradius cg, & subradius og, priori coradio & subradio proximi, quorum ille secet OG in puncto F. Sitque OH radius evolutæ secundæ, per cujus nempe evolutionem generatur evoluta prima IO. Sit pariter evolutæ secundæ coradius OM, & subradius HM. Hinc quia per naturam Evolutarum $CO : OH = Cc : Oo$, & $OH : HM$ [$= CO : CG$] $= Oo : Fg$, erit ex æquo $CO : HM = Cc : Fg$, unde $Fg = HM.\,Cc : CO$; adeoque dCG, hoc est $cg - CG$, vel $Fg - Cb = HM.\,Cc : CO - Cb$, & $2\,Cb - dCG = 3\,Cb - HM.\,Cc : CO$; quo substituto in analogia nostra $R : G = 2\,Cb - dCG : \mp 2\,Cc$, mutatur in hanc $R : G = 3\,Cb - \frac{HM.\,Cc}{CO} : \mp 2\,Cc$; in qua si porro subrogentur, pro Cb & Cc, earum proportionales OG & CO, prodibit hæc nova $R : G = 3\,OG - HM : \mp 2\,CO$; Hoc est resistentia se habebit ad gravitatem ut triplum subradii evolutæ primæ multatum subradio evolutæ secundæ, ad duplum radii ipsius evolutæ primæ. Ex quo statim judicare licet de possibilitate physica ascensus vel descensus per curvam. Si enim $3\,OG - HM$ sit quantitas negativa, vel, quod idem est, si subradius evolutæ secundæ major sit triplo subradii evolutæ primæ, ascensum pronunciabimus possibilem; sin ille minor sit triplo hujus, hoc descensum physice possibilem arguet. Si vero æqualis sit, quod fit in parabola ordinaria, natura utrumque admittet, nam resistentia

tentia tunc nulla est. Quod attinet ad formulam §. L., qua exprimitur resistentia $R = (2\,CB.\,G - d\,(CG.\,G)) : \mp 2Cc$, ubi supponitur vis gravitatis variabilis, pro diversa ratione distantiarum a centro virium, posset illæ quoque universaliter exponi per quantitates finitas, si tempus & locus id permitteret: Sed aliquid Lectori nostro faciendum relinquimus.

INDEX



M &c.

§. L., qua

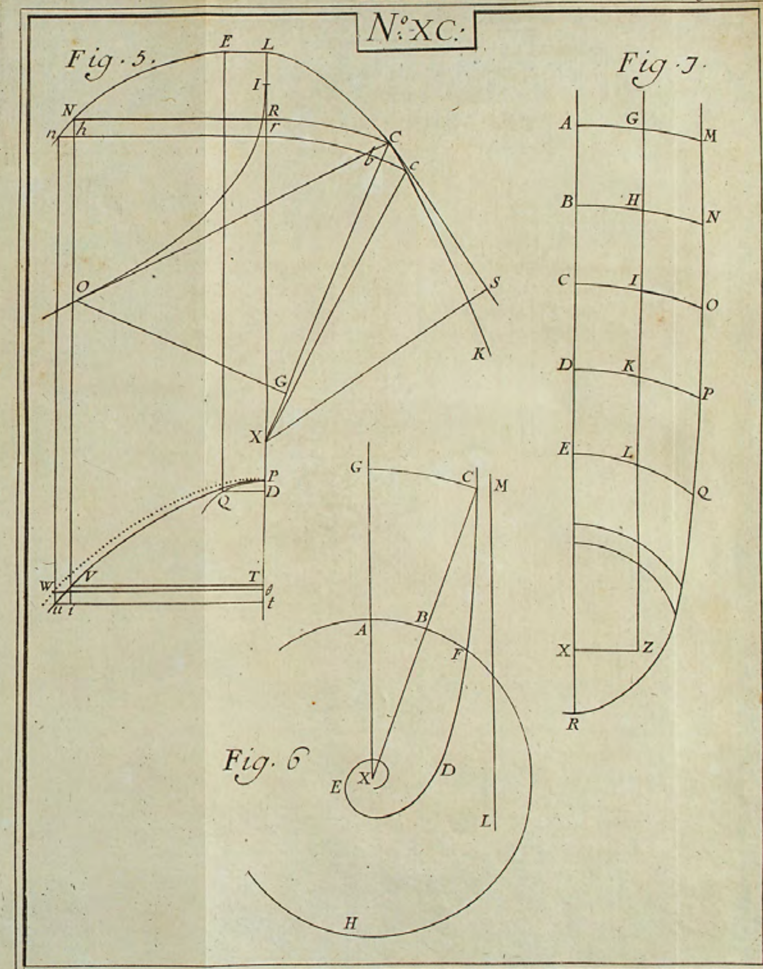
)): $\mp 2Cc$,

ratione dis-

versaliter ex-

permitteret:

NDEX



INDEX NUMERORUM

Quos TOMUS PRIMUS *complectitur.*

XVI. *Re-*

XXXII. *Pro-*

FINIS TOMI PRIMI.