N°. LXII.

Nouvelle maniere de rendre les Barometres lumineux.

Par Mr. BERNOULLI, *Professeur à* Groningue.

Extraite d'une de ses Lettres écrite de *Groningue, le* 19 *Juin* 1700.

AIANT lû dans un petit Livre, qui porte pour Titre, *Traitez des Barometres, & Notiometres, ou Hygrometres*, le Phenomene extraordinaire, qui arriva en 1675, au Barometre de feu M. PICARD, sçavoir cette lumiere entrecoupée, qu'il apperçut par hazard dans le mouvement du vif argent, en transportant le Barometre d'un lieu à un autre, dans une grande obscurité, & duquel il est encore fait mention dans la premiere Edition de l'*Histoire Latine de l'Académie* pag. 312; je l'ai jugé digne d'y faire quelques réflexions; & ce d'autant plus, que l'Auteur de ce Traité invite les curieux à perfectionner cette découverte, & dit que dans ce qu'on a déja fait d'expériences sur plusieurs autres Barometres, pour voir si la même chose arriveroit, on n'en a trouvé qu'un qui approchât de celui de M. PICARD; c'est apparemment celui de M. CASSINI, dans lequel Mr. DU HAMEL dit avoir été observé le même effet, quoique moins sensible que dans l'autre. Je m'y suis donc appliqué; & après quelques méditations faites sur ce sujet, accompagnées des expériences nécessaires, dont le succès a répondu à mon souhait, & conformément au raisonnement que j'en faisois *a priori*; il me semble que j'ai découvert la véritable cause de ce Phenomene, & une maniere de faire paroître une lumiere fort vive dans tous les Barometres sans distinction en tout temps & en tout lieu: en sorte que voila une nouvelle espece de Phosphore perpétuel, qui ne se consume pas comme ceux qu'on fait par la Chymie.

Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences, de Paris. 1700 pag. 178. Edition de Paris. pag. 230. Edition de Hollande.

Avant que de vous expliquer mon raiſonnement, je vous dirai que le même ſoir que je lûs ce Phenomene dans ce petit Traité, je voulus faire l'eſſai ſur mon Barometre, qui avoit été en expérience environ quatre ſemaines: je le tranſportai donc dans l'obſcurité, je le balançai d'abord legérement, mais ſans aucun ſuccès, n'y remarquant pas la moindre lumiere; mais l'ayant enfin balancé avec violence (ce que je puis faire ſans danger de caſſer le tuyau, ou de répandre du vif argent, le tuyau étant monté ſur une planchette, & comme enchaſſé, & le vif argent d'en bas enfermé dans une boëte de buis attachée à la planchette & cloſe par tout, enſorte que c'eſt par les pores du buis ſeulement que l'air entre pour preſſer ſur le vif argent,) j'obſervai que lorſque le vif argent (montant & baiſſant avec une grande viteſſe par une longue partie du tuyau,) étoit tout au bas, il jettoit un éclair fort foible, & qui s'évanoüiſſoit, dès que le vif argent commençoit à remonter. Cela me fit penſer, que celle des conjectures, que l'Auteur du Traité allegue pour rendre raiſon de ce que cette lumiere n'avoit encore paru que dans un ſeul Barometre, ſçavoir que pour les autres *il n'y eût peut-être pas aſſez de temps qu'ils fuſſent en expérience*, ne pouvoit avoir lieu; vû que mon Barometre n'avoit été en expérience que quatre ſemaines ou environ.

Après cette expérience, je voulus eſſayer ſi les autres conjectures de l'Auteur ſeroient admiſſibles: il dit que les autres Barometres n'ont pas fait le même effet, *ſoit qu'ils ne fuſſent pas aſſez épurez d'air, ou que le vif argent n'en fût pas aſſez pur.* Pour m'en aſſeurer, après avoir nettoyé ſoigneuſement le vif argent, en le forçant de paſſer par les pores d'un morceau de peau, je le mis encore dans un récipient dont je tirai l'air, & l'y laiſſai pendant vingt-quatre heures, afin de lui donner le temps de laiſſer évaporer les particules d'air mêlées dans le vif argent. Après l'avoir ainſi purgé, j'en remplis un tuyau à l'ordinaire, avec toute la précaution poſſible, pour empêcher qu'il n'y demeurât quelque petite bulle d'air; mais le Barometre ainſi monté n'en fit pas plus d'effet. Car quelque violent balance-

lancement que je donnaſſe au vif argent, à peine en pouvois-je tirer cette foible lueur, qui ſe montroit & s'évanouiſſoit preſque dans le même inſtant.

J'ai laiſſé le Barometre en cet état pour l'uſage ordinaire, ayant jugé être dommage de le démonter, après avoir pris tant de peine & de ſoin à le monter ſi exactement, que je ſuis aſſûré, que ni dans la partie vuide du tuyau, ni parmi le vif argent, il n'y a pas la moindre choſe d'air groſſier.

J'ai donc conclu de cette ſeconde expérience, que les autres conjectures de l'Auteur du Traité n'étoient pas valables non plus; ou du moins, que ni la purification du mercure, ni le vuide parfait de la partie d'en haut du tuyau, n'étoient pas la principale cauſe de l'apparition de cette lumiére.

Cela étant, j'en ai cherché la véritable cauſe; & voici comme je me ſuis pris dans mon raiſonnement. Comme la lumiére ne paroit dans chaque balancement, que lorſque le vuide ſe fait, c'eſt-à-dire, dans la ſeule deſcente du vif argent; j'ai compris, que quand le vif argent deſcend, il en doit ſortir, & remonter au même inſtant, une matiére très-déliée & très-ſubtile, pour occuper & remplir en partie l'eſpace du tuyau que le vif argent quitte: je dis en partie, parce qu'il faut bien croire, que les pores du verre, étant ſans doute plus amples que ceux du vif argent, (comme il paroit par la legèreté de l'un, & la grande peſanteur de l'autre,) il entre en même temps, par les pores du tuyau, une autre matiére bien plus ſubtile que l'air groſſier, mais bien moins que celle qui ſort du vif argent: & ces deux matiéres ſe mêlant incontinent, rempliſſent l'eſpace que le vif argent leur cede par ſa deſcente. Il n'importe quels noms vous donniez à ces deux matiéres: vous pourrez, s'il vous plait, appeller avec M. DESCARTES, celle qui pénétre les pores du tuyau, la matiere du ſecond élement, ou les globules céleſtes; & celle qui eſt ſi fine qu'elle ſort du vif argent, la matiere du premier élement. En effet M. DESCARTES a aſſez bien montré, dans ſes *Principes de Philoſophie*, Part. IV. art. 58.

art. 58. que les particules du vif argent laiſſent entr'elles des angles ſi étroits, qu'ils ne peuvent être remplis, que par la matiere la plus fine, c'eſt-à-dire, par celle du premier élement.

Or vous ſçavez, comment M. DESCARTES explique la production de la lumiere, la faiſant conſiſter dans le mouvement très-rapide de la matiere du premier élement, aſſemblée ſeule dans quelque eſpace, & dans l'effort qu'elle fait ſur les globules céleſtes. Je dis donc, que pendant que les particules du premier élement ſont diſperſées dans ces petits interſtices, & comme opprimées par les particules terreſtres du vif argent, elles ne peuvent pas acquerir ce mouvement rapide, ni agir & faire effort conjointément pour produire de la lumiere; mais auſſi-tôt que, par la deſcente du vif argent, elles en ſortent en abondance, elles vont s'unir enſemble; & dégagées ainſi d'abord de toute autre matiere, elles prennent ce cours rapide, qui leur eſt ordinaire quand elles ſont libres; & par l'effort qu'elles font ſur les globules céleſtes, qui viennent à leur rencontre, elles produiſent cette lumiere. Delà ſe voit la raiſon, pour laquelle cette lumiere ne s'obſerve que dans la deſcente du mercure; car quand il remonte, bien loin qu'il en ſorte de la matiere du premier élement, il y entre plûtôt une partie de ce qui en étoit ſorti dans ſon abaiſſement précédent: & le reſte eſt chaſſé avec les globules céleſtes, hors du tuyau, par les pores du verre. Voilà encore la raiſon pour laquelle cette lumiere accompagne toûjours le haut du mercure deſcendant, & qu'elle eſt comme attachée à ſa ſuperficie ſupérieure; pourquoi la lumiere produite dans une deſcente n'eſt pas durable; & pourquoi chaque deſcente finie, cette lumiere finit & s'évanoüit auſſi-tôt. Cela vient de ce que les particules du premier élement, qui étoient unies en ſortant du mercure, & ayant fait tant ſoit peu de chemin en s'éloignant de la ſurface du mercure, ſont d'abord diſſipées & diſperſées par la foule des globules céleſtes, qui avec leur impétuoſité les accablent, & leur ôtent ainſi toute la force de produire cet effet de lumiere: de ſorte qu'elle ne peut durer, qu'à meſure qu'il ſort du mercure une continuelle & nouvelle matiere du premier élement, pour ſuccéder à celle qui ſe diſſipe auſſi continuellement; à peu près de même que la flamme d'une chandelle ſe diſſipe & ſe renouvelle à tout moment. Il eſt donc manifeſte, que la lumiere en queſtion ne peut durer tout au plus, qu'autant que dure chaque deſcente du vif argent.

Il me reſte à faire voir le principal: ſçavoir pourquoi cette lumiere ne ſe montre pas dans tous les Barometres, & pourquoi elle n'a été obſervée juſqu'à preſent que dans deux ou trois: comme auſſi la maniere de rémédier à cela pour la faire paroître infailliblement dans tous les Barometres, en tout temps, & avec une vivacité ſurprenante, pourvû qu'on le faſſe dans un lieu fort obſcur: l'un & l'autre fortifiera & confirmera parfaitement bien les raiſons, dont je me ſuis ſervi dans l'explication que je viens de faire de la cauſe de ce Phenomene.

J'ai remarqué, que ſi on expoſe du vif argent, dans quelque vaſe, à l'air libre, on en trouvera au bout de quelque temps la ſuperficie, par où l'air le touche, toute trouble & couverte d'une pellicule très-mince; laquelle étant ôtée par le moyen d'une plume nette, la premiere clarté revient à la ſuperficie, qui ſera derechef polie comme un miroir; mais ſi on laiſſe le vif argent expoſé à l'air, une autre pellicule, d'abord ſemblable à une toile d'araignée, qui s'épaiſſit avec le temps, s'étendra par deſſus. Que ſi on l'examine bien avec le Microſcope, on verra qu'elle reſſemble beaucoup à de l'argent battu en feuille: en effet ce n'eſt autre choſe, qu'un tiſſu très-fin d'une eſpèce de mouſſe, ou de poil folet, qui ſe forme de petits filaments, leſquels ayant été ſéparés du vif argent par l'agitation continuelle de l'air, & ne pouvant pourtant pas ſuivre ſon mouvement, retombent avec d'autres ordures, qui ſe trouvent toûjours dans l'air, ſur la ſurface du vif argent; & s'entrelaſſant peu à peu, compoſent cette pellicule. Nous remarquons la même chose dans toutes sortes de liqueurs ; lesquelles, si on les laisse reposer, en sorte que l'air les puisse seicher par dessus, se couvrent enfin d'une peau, plus ou moins épaisse, selon la constitution des corpuscules qui s'exhalent, & retombent ensuite sur les liqueurs. Tout cela bien consideré ; je dis que c'est cette pellicule, qui empêche l'apparition de la lumiere dans les Barometres, qui ont été remplis à la maniere ordinaire : Voici comme je conçois la chose. Lorsqu'on fait le Barometre, on prend un tuyau scellé hermétiquement par un bout, & par l'autre on verse du vif argent, qui tombe goute à goute tout le long du tuyau ; en sorte que chaque goute, en penetrant & en fendant l'air depuis le haut jusqu'en bas, en essuye, pour ainsi dire, & entraine tout ce qu'il y a d'impur ; ce qui fait que, dans ce moment employé à couler le long du tuyau, le vif argent se charge plus de cette mousse, qu'il ne feroit en deux ou trois jours, étant simplement exposé à l'air. Ce que je viens de dire est si vrai, que si vous laissez tomber, de la hauteur d'un pied seulement, une goute de vif argent le plus netoyé & purifié qu'il soit possible, dans un vase où il y en ait aussi de si bien purifié, que la superficie en soit unie & polie comme la glace d'un miroir ; vous verrez que la goute tombant sur cette surface polie, la ternira à l'endroit où elle entrera dans la masse du vif argent, & y laissera une tache visible ; marque certaine, que la goute, toute nette qu'elle étoit, avoit été infectée de l'impureté de l'air. C'est ainsi que les goutes du vif argent, versé dans le tuyau, se couvrent de cette pellicule en coulant ; mais par la chûte des goutes les unes sur les autres, & par la pression du vif argent, ces pellicules particulieres crevent aisément, pour permettre une continuité dans le vif argent ; & ces ordures ne pouvant pas s'accorder, ni avec le mouvement, ni avec la figure des particules du vif argent, sont obligées, comme des excrémens, de se retirer hors de la substance intime du vif argent, & de se mettre par tout à côté, entre la surface concave du tuyau & la convexe du mercure. Voila

Voila donc toute la colonne mercuriale enveloppée de cette peau très-déliée, comme d'un épiderme. Certes il y a beaucoup d'apparence, que la chose se passe comme je viens de dire ; car le tuyau étant rempli de la sorte, si on vient à le renverser, pour en faire le Barometre, en bouchant l'ouverture avec le bout du doigt, jusqu'à ce qu'elle soit enfoncée dans le vif argent contenu dans le vase ; on observera en retirant le doigt, que le mercure, en descendant dans le tuyau, laissera en arriere des restes de cet épiderme, attachés aux côtés du verre de la partie vuide du tuyau, en forme d'écume de plomb fondu.

Il n'est donc pas difficile de concevoir, que le Barometre étant fait, la superficie horisontale & supérieure du cylindre mercurial, doit être couverte d'une pellicule plus épaisse, que nulle autre partie de la superficie de ce cylindre ; parce qu'elle s'épaissit, en partie par ces restes, qui demeuroient attachés à la partie vuide du tuyau, & qui se détachant enfin, retombent sur le sommet de la colonne mercuriale ; & en partie par celles qui sont au dessous, & qui sont poussées en haut par la pesanteur du mercure.

Donc pour derniere conclusion, il me suffit de dire, que cette pellicule qui occupe le dessus du mercure, quelque déliée qu'elle paroisse à nos yeux, couvre si bien les pores de la superficie du vif argent, qu'elle ferme, ou entierement, ou en plus grande partie, le passage à la matiere du premier élement, qui seule par son élancement peut produire de la lumiere : d'où il s'ensuit que dans les Barometres remplis à l'ordinaire, il n'en paroîtra point du tout, ou fort peu, à force de grands balancemens, comme dans le mien, dont j'ai parlé ci-dessus. On ne doit pas trouver étrange, qu'une pellicule si mince & si délicate puisse empêcher les particules du premier élement de sortir des pores du vif argent, ou du moins de sortir avec tant d'abondance & de véhémence ; vû que nous voyons tous les jours, que le vif argent même passe aisément par les pores des peaux de presque tous les animaux ; mais que le passage se ferme me entierement, ſi on n'en ſépare pas cette taye tendre, que les Médecins appellent *Epiderme* ou *cuticule* : Quelle contradiction y a-t-il donc, qu'une pareille choſe puiſſe arriver dans nôtre ſujet ?

Tel eſt juſqu'ici le raiſonnement que je faiſois, ſur la cauſe d'un effet ſi étrange. On n'eſt jamais mieux aſſûré qu'on ne s'eſt pas trompé, en raiſonnant ſur des choſes de Phyſique, que lorſque les expériences, faites enſuite exprès, s'accordent avec les concluſions, qu'on avoit tirées par le ſeul raiſonnement. Or ſi jamais raiſonnement *a priori* fut confirmé, dans toutes ſes circonſtances, par le ſuccès des expériences, je puis dire que le mien a eu ce bonheur : car voyant bien, qu'en conſéquence de mes raiſons, il faut que cette lumiere dans le Barometre ſoit très-vigoureuſe, ſi par quelque moyen on peut empêcher que la colonne mercuriale ne ſe couvre de cet épiderme; pour ce ſujet, je me ſuis bien aviſé de deux manieres, qui toutes deux ont très-bien réüſſi.

Voici la premiere. Je pris un tuyau de verre, d'environ trois pieds & demi de long, ouvert par les deux bouts, que j'eus ſoin de bien dégraiſſer & netoyer par dedans, pour n'y laiſſer aucune ordure ni humidité ; en ayant plongé un bout dans du vif argent, contenu dans un vaſe large, d'une petite hauteur, mais le plus obliquement que le bord du vaſe le permettoit, en ſorte que l'angle, que le tuyau faiſoit avec l'horiſon, comprenoit environ 18 à 20 degrez; ce qu'aiant fait, j'appliquai ma bouche à l'autre bout du tuyau, & je commençai à ſuccer: de cette maniere, je fis aiſément monter le vif argent juſqu'au haut, & en aiant même attiré quelques goutes dans ma bouche, je fis ſigne à un de mes Ecoliers, que j'avois inſtruit à cela, de boucher promptement avec le doigt le bout d'en bas enfoncé dans le vif argent. (Il faut dire ici, en paſſant, que j'ai achevé d'élever le vif argent, en ſuçant d'un ſeul trait, de peur que, ſi je le faiſois par repriſe, il n'entrât dans le tuyau quelque peu d'haleine, ou de ſalive). Le tuyau étant donc rempli de cette maniere, pendant que mon

mon Ecolier tenoit fermé le bout d'en bas avec le doigt, je fermois celui d'en haut, avec du ciment, dont je me ſers pour conſolider les verres caſſez, ou fendus. Après l'avoir bien fermé, je dis à cet Ecolier d'ôter ſon doigt de deſſous le bout, qui trempoit toûjours dans le vif argent; j'érigeai en ſuite le tuyau perpendiculairement, & le vif argent deſcendit à ſon équilibre, comme à l'ordinaire; mais j'eus le plaiſir de voir, qu'il ne laiſſoit point d'écume attachée dans la partie vuide du tuyau, comme font les tuyaux remplis à la maniere ordinaire: ce que je pris d'abord pour un bon ſigne. En effet, je prévoiois bien que cela devoit arriver; car, de la maniere que le tuyau avoit été rempli, on voit bien que l'air n'a point touché le vif argent, en montant dans le tuyau, ſi ce n'eſt ſeulement la premiere goute, qui étoit comme le bouclier, à la faveur duquel tout le reſte de la colonne mercuriale pouvoit monter, ſans prendre la moindre atteinte de l'air; mais cette ſeule goute, outre qu'elle ne pouvoit pas être beaucoup infectée, n'aiant pas fendu & penetré l'air avec violence, comme fait une goute qui tombe, ne demeura pas dans le tuyau: car, comme j'ai dit, j'attirai quelques premieres goutes du vif argent, juſques dans ma bouche.

Ainſi j'étois ſûr d'avoir un Barometre, dont la colonne mercuriale étoit toute dénuée de cet épiderme ſi funeſte aux autres. Cependant, pour faire l'expérience plus commodément, ſans encourir le danger de répandre du vif argent, en le tranſportant, ou balançant, j'ôtai le tuyau hors de ce vaſe large, tenant le bout d'en bas fermé avec le doigt, & je le mis dans un vaſe plus étroit & plus profond, à moitié rempli de vif argent. Tout étant achevé, j'attendois la nuit avec impatience, laquelle étant venuë, je pris mon Barometre ainſi préparé, le tuyau à la main gauche, & le vaſe dans lequel le bout d'en bas trempoit à la main droite; auſſi-tôt que je fus dans l'obſcurité, voila que j'apperçus déja, ſans avoir encore balancé le Barometre, des éclairs fort vifs,

vifs, lesquels étoient causez par un petit branlement, qui étoit imprimé à la colonne mercuriale par le mouvement de transport : mais quand je commençai, quoique fort doucement, à balancer le Barometre, pour donner au vif argent une reciprocation un peu plus considerable qu'il n'avoit par le seul mouvement de transport, il paroissoit, à chaque descente, une lumiere si exquise, qu'elle éclairoit les objets les plus proches, en sorte que je pouvois assez discerner, à la faveur de cette lumiere, les lettres d'une médiocre écriture à la distance d'un pied. Je vous avouë, que j'eus un grand contentement de voir, que l'événement répondoit si bien à mon attente; d'autant plus que ce n'étoit pas une expérience faite par hazard, mais que j'avois faite de propos déliberé, me fondant sur les principes de mon raisonnement. Il faut encore dire, que cette lumiere paroissoit si aisément, que les balancemens les plus insensibles, qui à peine faisoient monter & descendre le mercure de l'épaisseur d'un couteau, ne laissoient pas de produire des éclairs très-vifs : les jours suivans, j'ai réiteré cette expérience avec trois ou quatre autres tuyaux, que j'ai remplis de la même maniere; mais tous ont fait également leur effet, avec beaucoup de vivacité, sans avoir jamais manqué : ce qui me fait avancer hardiment, que tous les Barometres, préparés ainsi que j'ai dit, montreront en tout temps le Phenomene arrivé dans celui de M. PICARD, & peut être bien plus vivement.

La seconde maniere, dont je me suis avisé, pour remplir le tuyau de vif argent, sans que la colonne mercuriale soit couverte de la pellicule susdite, la voici en peu de mots. Je pris un tuyau bien nettoyé, & ouvert par un bout seulement, que je plongeai dans du vif argent contenu dans un vase, & que j'érigeai perpendiculairement; de sorte qu'il n'y avoit encore que de l'air dans le tuyau. Pour tirer l'air hors du tuyau, voici ce que je fis. Je couvris le tuyau, & le vase dans lequel trempoit le bout ouvert, avec un récipient de verre fait en forme de cloche, qui s'étendoit par en haut en une

une longue queuë creuse par dedans, pour contenir le tuyau, comme le fourreau contient la lame de l'épée; (ce récipient est fait exprès, pour faire ces sortes d'expériences avec le Barometre ;) j'appliquai donc le récipient avec le tuyau & le vase au dedans, sur l'assiete de cuivre de la pompe pneumatique, par le moyen de laquelle je tirai l'air du récipient, & ainsi en même temps celui du tuyau, qui ne pouvant sortir par le bout d'en haut, qui étoit fermé, sortoit, avec un petit bouillonnement, par le bout trempant dans le vif argent. Après avoir tiré l'air du récipient & du tuyau, le plus exactement qu'il m'étoit possible, je le laissai rentrer dans le tuyau, à cause du vif argent du vase qui l'en empêchoit, il poussa par sa pression le vif argent dans le tuyau, à la hauteur de 24 à 25 pouces, en sorte qu'il en manquoit peu qu'il ne fût monté à la hauteur ordinaire du Barometre : ce qui marquoit que l'air avoit été assez soigneusement tiré du récipient. Le vif argent étant ainsi monté : j'ai jugé qu'il devoit être tout à fait dépouillé de son épiderme; vû que le haut même de la colonne mercuriale n'avoit pû toucher à l'air, si ce n'est à ce peu qui étoit resté dans le tuyau, mais qui, à cause de son extrême raréfaction, n'avoit pû en rien alterer le haut du vif argent, & beaucoup moins le reste de la colonne mercuriale, de laquelle pas la moindre partie n'avoit été exposée à l'air en montant. En effet, quand je fis l'expérience la nuit suivante, la lumiere parut dans ce tuyau, avec la même force, & de même que dans l'autre, préparé de la maniere précedente. Par où l'on voit encore, que l'air qui restoit dans la partie vuide du tuyau, ne pouvoit point du tout empêcher que la lumiere ne parût; & qu'ainsi, si elle ne paroit pas dans les Barometres remplis à la maniere ordinaire, ce n'est pas parce qu'ils ne sont pas épurez d'air; mais uniquement parce que le vif argent contenu dans le tuyau, est enveloppé dans cette pellicule de maniere qu'elle ferme le passage à la matiere du premier élement.

Cependant j'ai trouvé par expérience qu'il n'y a encore rien de ſi nuiſible à l'apparition de cette lumiere que l'humidité: car après avoir continué pendant quelques ſemaines de balancer tous les ſoirs un des Barometres préparés ſelon la premiere méthode, pour voir s'il y avoit quelque difference, ſoit dans la vivacité, ſoit dans d'autres circonſtances; & n'y aiant pû remarquer la moindre difference, à ma grande ſatisfaction, je m'aviſai de verſer un peu d'eau dans le vaſe d'en bas, pour en couvrir la ſuperficie du vif argent qui y étoit contenu, & puis j'élevai le tuyau tout doucement, juſqu'à ce que le bout d'en bas, ſortant du vif argent du vaſe, parvint à l'eau; mais auſſi-tôt que quelques goutes d'eau furent entrées dans le tuyau, je le replongeai dans le vif argent, & ces goutes montant en haut couvrirent le ſommet de la colonne mercuriale. J'étois donc curieux de voir, ſi ce peu d'eau n'empêcheroit pas l'apparition de la lumiere. Effectivement, elle l'empêcha ſi bien, qu'avec les plus violens balancemens il n'y eut pas moyen de produire la moindre trace de lumiere. J'eſſaiai après cela la même choſe avec l'eſprit de vin rectifié, dans la penſée, qu'étant inflammable lui-même; il aideroit peut-être plûtôt à produire notre lumiere qu'à la détruire: mais en vain, car quelques goutes d'eſprit de vin n'eurent pas plûtôt occupé le ſommet de la colonne mercuriale, que la lumiere, qui paroiſſoit auparavant avec toute la vivacité poſſible aux moindres ſecouſſes du tuyau, ceſſa de paroître, même aux plus grands balancemens. D'où je conclus, que toute humidité, & toute matiere hétérogene, peut, ou boucher les pores du vif argent pour empêcher l'élancement de la matiere du premier élement, comme fait la pellicule, ou du moins arrêter en partie la grande rapidité, avec laquelle le premier élement doit être mu, pour exciter de la lumiere: car il eſt viſible qu'une matiere étrangère, occupant déja un peu d'eſpace, immédiatement au deſſus de la colonne mercuriale, là où ſe doit faire le rendez-vous de la matiere du premier élement pour ſe joindre enſemble; il eſt, dis-je, viſible, qu'elle ne peut pas ſe mouvoir conjointément, ni par conſéquent avec la rapidité, qui

qui lui eſt ordinaire quand elle eſt ſeule, ſans paſſer au travers des pores d'une matiere plus groſſiere.

Je m'arrête ici, Monſieur, pour vous donner le loiſir d'y penſer auſſi; afin que ſi vous trouvés que mes penſées aient quelque vraiſemblance, vous en faſſiés part, comme j'ai dit, à l'Académie. Je ſouhaiterois, que quelqu'un des Académiciens prit la peine de faire un ou deux Barometres, de l'une & de l'autre façon, & qu'on en confrontât l'effet avec celui du Barometre du feu M. PICARD. J'en apprendrai le ſuccès avec plaiſir. Mandez-moi auſſi, ſi vous ſavés de quelle maniere a été rempli ce Barometre de M. PICARD; car l'Auteur du petit Traité, que j'ai allegué, dit que c'eſt un tuyau recourbé. Or comme il eſt difficile de remplir les tuyaux recourbés par la maniere ordinaire, je commence à ſoupçonner qu'il a peut-être été rempli par le moyen du ſuccement, ſelon ma premiere méthode, ou par le moyen de l'extraction de l'air, ſelon la ſeconde, ou par une ſemblable. Si cela étoit, il donneroit un grand poids à mes penſées. Je ſuis, &c.

N°. LXIII.

NOUVEAU PHOSPHORE,

Par MR. BERNOULLI *Profeſſeur à* Groningue,

Extrait d'une de ſes Lettres écrite de *Groningue* *le* 6. *Novembre* 1700.

LA raiſon, Monſieur, pour laquelle j'ai un peu tardé à répondre à vôtre derniere du 4 Septembre, c'eſt qu'il m'a fallu faire quelques nouvelles expériences, pour ſatisfaire aux objections que vous me faites de la part de quelques-uns des Meſſieurs de l'Académie: car ces objections ne m'ont pas empêché de pourſuivre ma découverte touchant la lumiere du Barometre, que je prétens encore être generale. Au con- *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1701. pag. 1.*

traire, elles m'ont donné occaſion d'en faire une nouvelle, bien plus importante & plus curieuſe : elle conſiſte à faire du mercure un Phoſphore portatif & perpétuel, que je puis tranſporter & envoyer, commodément & ſans danger, par tout où je voudrai, & en tout temps; car il durera éternellement, ſans que ſa lumiere, à la force de laquelle celle du Barometre n'eſt pas à comparer, ſe diminue jamais. Comme cette découverte, quoique fort facile, ainſi que vous le verrez ci-après, a été tirée des principes, par leſquels j'ai crû, & je crois encore, avoir expliqué la lumiere du Barometre; j'ai tout ſujet d'être perſuadé que je ne me ſuis pas tant égaré dans mon raiſonnement, comme vous penſez peut-être, avec ceux de vos Meſſieurs; qui attribuent la lumiere de mes Barometres à la nature de mon vif argent; car vous ne dites mot ſur l'explication que j'en avois donnée : c'eſt apparemment que vous l'avez priſe pour un jeu d'eſprit, voyant que mes expériences, refaites par quelques-uns de vos Meſſieurs, n'avoient pas eu le ſuccès ſouhaité; & qu'au contraire, le Barometre de M. *le Maréchal de* VILLEROY, que *Mylord* PORTLAND lui avoit donné, faiſoit de la lumiere, même après l'avoir rempli de ſon vif argent à la maniere ordinaire. Ce ſont-là des objections, je l'avouë, leſquelles ſemblent détruire toutes mes raiſons. J'y devrois donc répondre, ſi je veux maintenir mon invention; mais que dirois-je ? Si j'avois été préſent à ces expériences, j'aurois peut-être remarqué cent circonſtances, dans leſquelles on n'aura pas aſſés bien obſervé ma méthode de remplir le tuyau : Par exemple, la maniere de le remplir par le moyen d'une bourſe de cuir, que vous dites équivaloir à la mienne, a pourtant cela de différent, que c'eſt ici le mercure qui doit pouſſer l'air devant lui, lequel en faiſant quelque petite reſiſtance, peut laiſſer attachées aux côtés du verre quelques reſtes ou bulles d'air, qui ſuffiront déja pour engendrer la pellicule de mercure, que j'ai dit empêcher la lumiere; au lieu que par le ſuccement, c'eſt l'air extérieur qui pouſſe le vif argent en haut, lequel ne fait par conſéquent que ſuivre le mouvement

ment de l'air intérieur, qui par ſa raréfaction ſort du tuyau, pour ainſi dire, volontairement. Ce n'eſt pas que je veuille déſapprouver abſolument cette maniere de remplir le Barometre par le moyen d'une bourſe de cuir : je m'imagine qu'elle doit être aſſés bonne pour y exciter de la lumiere. C'eſt donc une autre faute qui ſe gliſſe dans les circonſtances : peut-être que le tuyau dont on ſe ſervit, n'étoit pas aſſés ſec ni aſſés net; car la moindre humidité, ou graiſſe, empêche l'apparition de la lumiere. Ce tuyau étoit auſſi trop menu, n'ayant (dites-vous) qu'une ligne & demi de diametre intérieur: Les plus amples tuyaux ſont les meilleurs pour cet effet, comme je l'ai reconnu par expérience. La raiſon en eſt évidente; car outre que le mercure dans un tuyau large peut balancer bien plus librement, que dans un étroit, où le frottement du mercure contre le verre diminue la viteſſe de la deſcente : la pellicule, qui couvre le mercure, (s'il s'en forme une,) doit être auſſi plus épaiſſe dans un tuyau étroit que dans un large; parce que ne pouvant s'étendre en large, elle s'épaiſſit en hauteur.

Pour ce qui eſt de l'autre expérience, je doute qu'on ait pû venir à bout de remplir le tuyau de mercure avec la bouche comme moi, ſans qu'on y ait laiſſé entrer un peu d'haleine, ou de ſalive, étant très-difficile de l'empêcher, vû que d'autres n'y ont pû réüſſir. Il faut une adreſſe ſinguliere. Pour moi, il ne m'eſt pas difficile de le faire, pouvant d'ailleurs, par je ne ſai quelle habitude, tirer, avec la bouche, d'un petit récipient, $\frac{7}{8}$ de l'air qu'il contient, en ſorte qu'il n'y en reſte qu'une huitieme partie, & même ſans me trop efforcer.

J'ai encore d'autres conjectures, qui me rendent ſuſpectes les expériences dont vous me parlés; mais comme je n'y ai pas été préſent, je n'en puis rien dire de certain : j'eſpere cependant que ſi ces Meſſieurs veulent faire pour la ſeconde fois l'eſſai de mes expériences, en obſervant bien ce que je viens de dire, ils auront un meilleur ſuccès. Mais j'aimerois mieux qu'on le fit de nuit que de jour, quoique dans l'obſcurité;

rité ; car vous ſavez, que ſi de jour on entre ſubitement dans un lieu obſcur, les yeux étant encore éblouïs de la trop grande clarté du jour, on ne s'apperçoit pas ſi bien d'une foible lumiere, telle qu'eſt celle du Barometre, quoique d'ailleurs la nuit elle ſoit aſſez vive.

Le Barometre de M. DE VILLEROY, que vous dites avoir fait de la lumiere, même après avoir été rempli à l'ordinaire, me fait, je vous avouë, un peu de difficulté ; mais je voudrois l'avoir vû remplir ; je ne doute pas que je n'y euſſe pû trouver de quoi répondre : peut-être qu'en y jettant le vif argent, on a tenu le tuyau fort obliquement à l'horiſon, pour laiſſer couler doucement les goutes de vif argent, comme dedans un canal ; ce qui aura empêché l'air de le tant infecter qu'il auroit fait, ſi l'on en eût laiſſé tomber les goutes verticalement, avec impétuoſité. En effet, après avoir rempli de cette maniere un tuyau de mon vif argent ; j'y ai apperçû de la lumiere plus qu'à l'ordinaire, mais toujours bien moins que par les manieres du ſuccement, ou de la machine du vuide. En tout cas, pourquoi ne pourrois-je pas dire que le vif argent du Barometre de M. DE VILLEROY eſt ſi extraordinairement bien purifié, qu'il n'y a plus de matiere hétérogène, dont l'attouchement de l'air puiſſe former une pellicule ? Et ainſi ma maniere d'expliquer la cauſe de la lumiere du Barometre en ſeroit plûtôt confirmée que détruite.

Au reſte, ſi mon explication n'étoit pas la véritable, & que ce fût à la nature particuliere de mon vif argent, & non à la maniere dont j'avois remplis les tuyaux, qu'il fallût attribuer la production de la lumiere ; dites-moi, je vous prie, pourquoi mon Barometre ordinaire, rempli à la façon commune, quoique fortement ſecoué, ne fait que peu, ou point, de lumiere ? Au lieu que les autres tuyaux, remplis à ma façon du même vif argent, font une lumiere exquiſe au moindre balancement ? J'en fis encore pour la ſeconde fois pluſieurs épreuves dès que j'eus reçu vôtre lettre. Et pour m'aſſûrer entierement que cette lumiere n'étoit pas l'effet d'une proprieté ſinguliere

de

de mon vif argent, que tout autre n'eût pas ; j'en empruntai d'autre, avec lequel je refis les mêmes expériences, & avec le même ſuccès qu'avec le mien. Or il eſt moralement impoſſible, que ce ſecond vif argent ſoit préciſément de la même nature que mon premier ; puiſque (ſelon qu'on le prétend,) ce doit être une qualité ſi rare, qu'entre cent ſortes de mercures, on n'en trouvera peut-être pas un qui faſſe un tel effet.

Pour venir préſentement à la découverte de mon nouveau Phoſphore ; j'ai penſé qu'une des principales raiſons, pour leſquelles la pellicule empéche l'apparition de la lumiere dans les Barometres, pouvoit être la trop grande uniformité du mouvement du mercure, dans un tuyau ſi uniforme. Car en montant & en deſcendant ainſi le long d'un tuyau cylindrique, ſa pellicule ne doit jamais changer d'épaiſſeur, ni ſe déchirer ; mais au contraire demeurer toûjours attachée à ſa ſurface ſupérieure, avec laquelle elle monte & deſcend, ſans la quitter jamais : de ſorte qu'il ne s'y fait point d'ouverture, par laquelle la matiere du premier élement (comme je l'ai appellée avec M. DESCARTES,) puiſſe ſortir des pores du mercure, de la maniere que j'ai dit dans ma derniere Lettre. Or étant ſi difficile d'éviter cette pellicule des Barometres, remplis même ſelon mes manieres, j'ai conclu, que nonobſtant cette pellicule (pourvû qu'elle ne fût pas trop épaiſſe) la lumiere devoit pourtant paroître, ſi par quelque moyen je pouvois la faire crever, ou la diſperſer en pièces par le mouvement du mercure : ce qui m'a fait juger, que rien ne ſeroit plus propre pour cet effet qu'un mouvement très-violent, irrégulier, & non uniforme, du mercure enfermé dans un verre un peu large, & d'une figure inégale, dont on auroit vuidé l'air le mieux qu'il auroit été poſſible. Ce raiſonnement fût confirmé par une heureuſe expérience, qui fait le ſujet de ma découverte : la voici.

Je pris une phiole nette & claire contenant environ demi-chopine, & auſſi aſſés forte pour ſoûtenir l'agitation du mercure ;

j'y mis 5 à 6 onces de mercure bien purgé, après cela je cimentai sur le col de la phiole un robinet fort exact, que j'appliquai ensuite à la machine du vuide, pour tirer l'air de la phiole; ce qu'ayant executé le plus soigneusement qu'il me fut possible, je fermai le robinet, pour empêcher que l'air ne rentrât dans la phiole, étant séparée de la machine du vuide: voilà tout l'artifice.

Voulant donc essayer si j'avois raisonné juste, je portai, le même soir, la phiole dans l'obscurité, & la tenant ferme par le col, je commençai à l'agiter fortement (comme on fait en rinçant une bouteille) pour donner aussi une grande agitation au vif argent. Voilà que tout aussi-tôt la phiole parut pleine d'un feu, dont la lumiere n'étoit ni interrompuë, ni entrecoupée, comme celle du Barometre, mais qui duroit tant que le mercure étoit en agitation, & de plus avec tant de vivacité, qu'elle me faisoit aisément voir les visages des Spectateurs, jusqu'à les reconnoitre; j'ai réïteré plusieurs fois cette expérience, avec plus d'une sorte de mercure, & toûjours avec le même succès: excepté lorsque je n'ai pas assés exactement tiré l'air de la phiole, ou que j'y en ai laissé rentrer un peu; car alors non seulement la lumiere paroissoit beaucoup plus foible, mais elle s'affoiblissoit de plus en plus, nonobstant l'agitation continuelle de la phiole, même jusqu'à disparoître entiérement. Après cela, il n'y avoit plus moyen de la faire reparoître, à moins qu'on ne tirât de nouveau l'air de la phiole.

Ayant donc examiné au jour la cause de cet affoiblissement de lumiere, j'ai trouvé toute la surface du mercure couverte d'une pellicule, non seulement visible, mais si épaisse, qu'elle ressembloit à une pâte pêtrie de poussiére de terre; nonobstant qu'avant l'agitation, la phiole fût très-nette par dedans, & la surface du mercure polie comme la glace d'un miroir. D'où j'ai jugé que l'air agité, quoiqu'en petite quantité, peut extrêmement infecter le mercure, & que c'est-là la raison pour laquelle, à mesure que cette pâte se forme, la lumiere s'affoiblit, & pour laquelle elle s'évanouït aussi tout à fait, quand cette

cette pâte acquiert une si grande consistence, qu'elle ne peut plus être mise en piéces, quelques violentes agitations que l'on donne au vif argent. C'est aussi par-là qu'on peut connoître si la phiole est bien vuidée d'air, ou non: car si elle est bien vuidée, non seulement la lumiere ne s'affoiblit pas, & le mercure ne se couvre pas d'ordures; mais la lumiere devient même plus exquise avec le temps, & la pellicule du mercure (s'il en a eu au commencement) se dissipe entiérement: de sorte que le mercure se polit enfin si bien, par le fréquent usage, qu'il n'y reste plus aucune tache, & quand cela arrive, alors la lumiere est dans son plus haut degré de vivacité, & paroitra toûjours avec la même force toutes les fois qu'on agitera la phiole dans l'obscurité.

Je ne croi pas qu'on ait trouvé jusqu'à present un Phosphore perpétuel, c'est à dire, qui avec le temps ne se consume pas, ou du moins qui ne perde enfin sa vertu; mais en voilà un presentement, qui doit durer autant que l'on voudra, sans rien perdre de la sienne, pouvû que la phiole demeure toûjours bien bouchée, & que l'air n'y entre pas: car le mercure enfermé dans le vuide n'est sujet à aucune altération, en sorte qu'il n'y a point de raison, pourquoi il ne devroit pas faire son effet en tout temps.

Il est vrai que le robinet, que j'avois cimenté sur la phiole avec laquelle je fis la premiere expérience, commençoit à se corrompre par le vif argent, parce qu'il étoit d'airain; mais j'ai depuis trouvé le secret de boucher la phiole, après en avoir tiré l'air sans avoir besoin de robinet. Entre plusieurs moyens, qui me sont venus dans l'esprit, le plus sûr & le plus expéditif, est de boucher premierement la phiole, avant que d'en tirer l'air, avec un bouchon de liége, & avec de la cire propre pour cela par dessus; puis de faire un petit trou, avec une épingle, au travers de la cire & du liege, pour donner de l'ouverture à l'air qu'on va tirer de la phiole. Cela étant fait, on enfermera la phiole dans un récipient, dont on tirera ensuite l'air, le plus exactement qu'il sera possible, pour le tirer en

même

même temps de la phiole, par l'ouverture du petit trou: la plus grande difficulté est maintenant de fermer ce petit trou, avant que de laisser rentrer l'air dans le récipient: Pour pratiquer cela aisément, il faut exposer le récipient ainsi vuidé au Soleil, & par le moyen d'un verre convexe, faire un peu fondre l'extrémité de la cire autour du trou: De cette maniere le trou se remplit de cire fonduë, & se bouche parfaitement bien soi-même. Cela fait, on peut bien, *ex abundanti*, appliquer encore une fois le récipient à la machine du vuide, pour voir si, pendant l'opération, il ne s'est point glissé dans le récipient quelque peu d'air, par quelque ouverture invisible. Le plus sûr est encore de tenir, pendant l'opération tous les endroits du récipient, par lesquels il pourroit se glisser de l'air, enfoncés dans l'eau. Etant donc assûré que tout est bien fait, on laissera rentrer l'air dans le récipient, pour en ôter la phiole; laquelle ainsi préparée, servira ensuite de Phosphore, toutes les fois qu'on voudra prendre la peine de l'agiter dans un lieu obscur. Je garde, depuis 5 à 6 semaines, deux de ces phioles remplies de deux diverses sortes de vif argent, lesquelles font admirablement bien leur effet. Les curieux, auxquels je les ai montrées, ont avoué qu'ils n'ont rien vû de plus rare: effectivement toute la capacité de la phiole est en flamme, & le mercure ressemble à une liqueur ardente. Si j'avois occasion, je pourrois vous envoyer un de ces nouveaux Phosphores; car on les peut aisément transporter, sans aucun danger, le verre en étant bien épais, & le col bien bouché. Cependant j'espére que vos Messieurs ne manqueront pas de les faire aussi eux-mêmes, si vous voulés prendre la peine de communiquer cette Lettre à l'Académie.

Mais il faut bien observer ces trois choses: 1°. Que la phiole soit très-nette & seche par dedans; & si on en doute, il vaut mieux en prendre une toute neuve, telle qu'elle vient de la Verrerie. 2°. Qu'on ne remuë pas beaucoup le mercure, avant que l'air soit tiré de la phiole. 3°. Qu'on vuide l'air de la phiole le plus soigneusement qu'il sera possible. Ce

Ce 3e point doit être observé avec toute la précision imaginable; autrement il ne se feroit point de Phosphore, ou s'il s'en faisoit un, il seroit foible & ne dureroit pas longtemps. Il faut donc que la machine du vuide soit excellente; la mienne (qui a été faite en Hollande) l'est à un point, que le piston étant tiré depuis le fond du cylindre jusqu'à l'embouchûre, & demeurant dans cet état pendant 24 heures, il ne se glisse pas la 10000e partie de l'air dans la cavité du cylindre, comme je l'ai reconnu par expérience; marque certaine d'une très-grande justesse. Quoique mon Phosphore soit déja assés recommandable par la seule curiosité; j'entrevois cependant encore une maniere d'en tirer quelqu'usage, dont je vous ferai part une autre fois. Je suis, &c.

N°. LXIV.

LETTRE DE M. BERNOULLI

Professeur à* Groningue, *touchant son nouveau Phosphore.

Groningue, ce 5 Juillet 1701.

MONSIEUR,

AYANT été occupé depuis quelque temps à faire de nouvelles expériences, je n'ai pû répondre plûtôt à vôtre derniere du 26 Mai. J'ai lû l'écrit que vous m'avez envoyé †, mais je ne sai si je dois être fâché du mauvais succès des expériences qu'il contient sur la lumiere du mercure; il me semble que j'ai sujet de me féliciter plûtôt moi-même, de ce que personne n'a pû encore effectuer ce que j'effectuë fort aisément, soit

Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris. 1701. pag. 135. Edit. de Paris. pag. 178. Ed. de Holl.

† Cet Ecrit, qui étoit de Mr. HOMBERG, contenoit quelques objections contre le Phosphore de Mr. BERNOULLI, fondées principalement sur ce qu'on n'avoit pu réüssir à *Paris*, à rendre le mercure lumineux, d'où l'on concluoit, que la lumiere du mercure, que Mr. BERNOULLI avoit emploïé, venoit de quelque qualité accidentelle, & particuliére à ce mercure.

ſoit par mon addreſſe (ſi j'en ai), ſoit par la bonté de ma Machine pneumatique. Car, en effet, n'eſt-il pas ſurprenant que ces expériences de l'Académie n'aient jamais réüſſi, & que moi je n'aie jamais manqué? L'écrit porte, que *c'eſt quelque accident particulier, arrivé à quelque mercure, qui le peut rendre capable de luire en un lieu vuide d'air.* Mais je vous prie de conſiderer que j'ai fait mon Phoſphore, avec 5. ou 6 ſortes de mercures, que je ſçai être apportés ici de divers endroits & en divers temps, leſquels cependant m'ont tous fort bien réüſſi; hormis un ſeul, qui n'a pas donné de lumiere au commencement, mais que j'ai rendu luiſant, en le lavant, comme je dirai cy-après.

Je ne trouve pas néceſſaire de répondre par ordre aux expériences de cet Ecrit, ni aux réflexions & conſéquences qu'on en tire. Pour finir la diſpute, je prie l'Académie de me vouloir envoyer du même vif argent, dont on s'eſt ſervi ſans ſuccès; je prétends en faire un Phoſphore auſſi bon que ceux que j'ai déja faits juſqu'à preſent. Et afin que l'Académie puiſſe être aſſûrée, que c'eſt le même mercure qu'on m'aura envoié, dont j'aurai fait le Phoſphore; je le ferai en preſence de témoins autentiques, & je le renverrai à l'Académie. Ce qui me rend ſi hardi, c'eſt que je vois des circonſtances, dont l'Ecrit fait mention, leſquelles me font croire que ces expériences n'ont pas été faites avec aſſez d'exactitude; & que par conſéquent la mauvaiſe réüſſite en doit être imputée uniquement, ou à la Machine de l'Académie, qui n'eſt pas peut-être des plus juſtes, ou à quelque mépriſe. L'une de ces circonſtances, eſt que le mercure, dans une phiole vuidée d'air, étant fortement ſecoüé, donnoit à la vérité un peu de lumiere fort foible, qu'elle étoit forte au commencement, qu'elle diminuoit peu à peu, ſans néanmoins qu'il ſoit rentré d'air dans le vaiſſeau; & qu'après avoir laiſſé rentrer l'air, & puis vuidé ſur le champ une ſeconde fois la machine, ce mercure n'avoit plus donné aucune lumiere, quoique ſecoüé fortement. Je vois par-là que le mercure n'a pas été purifié comme il faut de la ma-

tiere

tiere hétérogéne, de laquelle aura été formée cette pellicule, dont j'ai parlé dans mes précédentes, par le concours de l'air qui ſera reſté dans la phiole, qu'on croyoit avoir aſſez vuidée: c'eſt pour cela que la lumiere étoit ſi foible, & s'évanoüiſſoit peu à peu; au lieu qu'elle auroit été très-vive & durable, ſi la phiole avoit été bien vuidée, & le mercure bien purgé; car j'ai éprouvé, plus d'une fois, que le mercure enfermé dans un vaiſſeau vuide d'air, où il luiſoit beaucoup pendant long-temps avec une égale force, a ceſſé de luire, en perdant ſa lumiere peu à peu, dès que j'y ai laiſſé rentrer un peu d'air. Quoiqu'il en ſoit, on peut conclure des expériences qu'on m'objecte, que le mercure qui n'étoit pas luiſant dans les Barometres (car comme l'Ecrit ne porte pas qu'on s'y ſoit ſervi de differens mercures, je crois qu'on n'y a employé que du même;) l'étoit au moins dans une phiole vuide d'air: ſi l'on avoit donc fait l'expérience avec le Barometre ſeulement, & qu'on eût prononcé que ce mercure n'eſtoit pas lumineux, ne ſe ſeroit-on pas trompé? puiſqu'il l'étoit effectivement. Il en eſt de même de la ſeconde expérience, par laquelle on n'a plus vû de lumiere dans la même phiole, après l'avoir vuidée une ſeconde fois; parce que (ſuivant l'Ecrit) peut-être en faiſant rentrer l'air dans le vaiſſeau, il s'eſt attaché un peu de l'humidité de cet air aux parois de ce vaiſſeau; ce qu'on reconnoit avec moi être nuiſible à la lumiere du mercure. Voyons donc ce qui ſeroit arrivé, ſi dès la premiere fois il ſe fût gliſſé inſenſiblement quelque humidité dans la phiole; il n'y a point de doute que la lumiere ne paroiſſant point dès cette premiere fois, on n'eût dit que ce mercure n'eſt point lumineux du tout, quoique c'eût été la faute de celui qui auroit fait l'expérience, & non pas celle du mercure. Je dis cela, pour faire remarquer que les expériences qui ne réüſſiſſent pas, ne prouvent rien pour ſoutenir une propoſition négative; parce qu'on peut toûjours douter qu'en faiſant ces expériences, on n'ait commis quelque mépriſe.

Je

Je ne dirai rien touchant les expériences sur le Barometre, tant parce que j'ai déja repondu dans ma seconde Lettre à ces mêmes objections, que parce que je néglige entiérement de faire d'autres observations sur la lumiere du Barometre, depuis que j'ai trouvé le moyen de rendre le mercure lumineux dans une phiole; ce qui est à mon avis infiniment plus curieux, dautant que cela fournit une espèce de Phosphore perpétuel, & commode à transporter; outre que la lumiere en est beaucoup plus vive que celle du Barometre: je dirai seulement quelque chose sur le second Barometre fait dans la Machine pneumatique de l'Académie. On a raison de dire *que le mercure n'est pas monté dans ce dernier Barometre à la même hauteur qu'il monte ordinairement dans un Borometre bien fait, n'étant pas possible de vuider par cette maniere tout l'air du dedans du tuyau;* parce que le poids du mercure pressant sur le bout ouvert du tuyau empêche enfin la sortie de l'air. Je vois par-là qu'on a laissé tremper le bout ouvert du tuyau trop profondément dans le mercure; au lieu que lorsque je fis cette expérience, je donnai telle situation au tuyau, que son bout étoit presque à fleur du mercure, & fort peu enfoncé: je pris, pour cet effet, un vaisseau un peu plat & large, afin qu'en laissant rentrer l'air qui par sa pression a fait monter le mercure dans le tuyau, ce mercure ne vînt pas à manquer. De cette maniere j'ai élevé le mercure jusqu'à la hauteur de *26* pouces, en sorte que peu s'en falloit qu'il ne montât à la hauteur ordinaire. Quoiqu'il soit donc vrai, qu'il n'est pas absolument nécessaire que le mercure soit dans un lieu parfaitement vuide d'air, pour devenir lumineux, comme on le remarque fort bien dans l'Ecrit en question; il faut pourtant sçavoir, qu'il ne restoit pas tant d'air dans le tuyau comme on a peut-être pensé; & qu'outre cela la lumiere, quoique très-vive la premiere nuit, s'est affoiblie notablement les nuits suivantes; sans doute à cause de ce peu d'air qui est resté dans le tuyau, ce que je n'ai remarqué qu'après ma derniere Lettre. D'où il s'ensuit, que plus le vuide sera parfait, plus la lumiere sera exquise & durable; en sorte que le mercure dans une phiole parfaitement vuide d'air (ou du moins qui le soit jusqu'à la dix-milliéme partie ou davantage, car il est impossible de tirer l'air totalement de quelque vaisseau que ce soit,) luira le plus vivement qu'il est possible; & bien loin que la lumiere s'affoiblisse, elle augmentera jusqu'à certains degrés, & puis elle subsistera, & se fera voir avec une égale force, toutes les fois qu'on remuëra la phiole, pouvû que d'ailleurs le vif argent soit bien purifié de ses ordures. J'avoüe que c'est une conjecture qui me paroit véritable, quand on soupçonne que mon premier mercure, (qui dans le moment qu'il est exposé à l'air commence à se couvrir d'une pellicule, qui devient comme de la poussiere, s'il est remué,) n'est pas aussi pur qu'il le pourroit être: je veux bien demeurer d'acord que cette pellicule se forme de la matiere étrangere, soit métallique, soit autre, laquelle vient du dedans du mercure, plûtôt que de l'air: cependant cela n'infirme point l'explication generale, que je donne de la production de la lumiere du mercure, & ne détruit même pas mon idée de la generation de la dite pellicule: car il est toûjours constant, comme j'ai remarqué dans mes précedentes, que l'air, s'il n'en est pas toûjours la cause materielle, il en est du moins la cause efficiente; vû que ce même mercure, tandis qu'il est enfermé dans le vuide, demeure toûjours clair & poli, quoique remué fortement, & aussi-tôt qu'on y admet l'air, il se trouble à son ordinaire: mais j'ai trouvé le secret de le purifier de toutes ses ordures, si bien qu'il ne se trouble plus, quand même il est exposé à l'air & agité fortement; je mets *4* ou *6* onces de mercure dans une phiole, & je verse dessus de l'eau commune, jusqu'à ce qu'elle couvre le mercure à l'épaisseur de deux doigts ou environ; puis je secouë fortement & long-temps la phiole, comme pour la rinçer; j'ôte l'eau, qui en devient toute sale & noire, de dessus le mercure, & j'y en remets de la fraîche & recommence de secoüer la phiole, jusqu'à ce que l'eau devienne derechef sale; cela étant, je change d'eau la seconde fois & fais la même chose: ce qu'étant

tant réïteré juſqu'à ce que l'eau ne ſe noirciſſe plus, ou fort peu; je ſeche le mercure, en le faiſant paſſer pluſieurs fois par un linge net: ſi on prend de l'eſprit de vin à la place de l'eau, on aura plûtôt achevé de nétoyer le mercure. De cette maniere, je lui ai ôté toute ſaleté, enſorte qu'étant remué tant qu'on veut à l'air libre, il ne laiſſe plus aucune trace de pellicule, ni de pouſſiere, ſi ce n'eſt qu'il ſe ternit un peu au bout de quelques jours, comme ſi c'étoit par l'haleine; ce qui vient apparemment par l'attouchement de l'air qui eſt toûjours un peu infecté d'humidité. Le Phoſphore, que j'ai fait de ce mercure ainſi nétoyé, a été beaucoup plus beau que les autres faits auparavant; c'eſt ce qui confirme mon explication de la production de cette lumiere, que j'ai dit être empêchée par la matiere heterogene, qui occupe le deſſus du mercure.

J'ai dit cy-deſſus que j'ai éprouvé 5 ou 6 ſortes de mercures, qui tous m'ont réüſſi; dont quelques uns ſe ſont auſſi infectés de pouſſiere par le remuëment, comme mon premier, & les autres ſont demeurés clairs & polis, comme celui de l'Academie. Entre ceux-ci il s'en eſt trouvé un, qui au commencement n'a point donné de lumiere: mais je m'en étois douté, avant même que d'en avoir fait l'eſſai: car il me paroiſſoit plus épais, ou moins fluide, que les autres; en ce qu'étant agité, il ne faiſoit point de boüillons ſur ſa ſuperficie, comme j'ai remarqué dans les autres, ce que j'ai attribué à ſa lenteur, qui empêche la ſeparation des parties. C'eſt ce qui m'a fait naitre le ſoupçon, qu'il y avoit peut-être dans ce mercure là quelque matiere huileuſe ou ſulfureuſe, qui, à cauſe de ſa viſcoſité, ne ſe manifeſte pas ſur la ſurface, comme font les autres ordures, qui ſe ſeparent plus aiſément des petites parties du mercure pour être jettées dehors: ainſi cette matiere huileuſe, demeurant toûjours mêlée dans l'interieur du mercure, on prendra ce mercure pour très-pur, quoiqu'il ne le ſoit nullement, & moins encore que celui qui ſe couvre d'abord d'une pellicule viſible: en effet l'ayant bien lavé de la maniere ſuſdite avec de l'eſprit de vin, plûtôt qu'avec de l'eau, parce que

que je penſois qu'il ſeroit plus propre que l'eau pour ôter la viſcoſité; le mercure, qui n'étoit point lumineux, devint auſſi luiſant que tout autre: mais ce qui eſt encore plus admirable, le premier vif argent, qui ſe troubloit au moindre mouvement, eſt devenu ſi pur par ce lavement (quoique d'eau ſeulement), que je lui ai vû faire de la lumiere, même dans une phiole pleine d'air naturel, ſans en avoir rien tiré. Il eſt vrai que la lumiere n'en étoit pas à beaucoup près ſi vive que celle qui ſe fait dans le vuide, & elle ne paroiſſoit qu'en forme d'étincelles ſéparées, qui naiſſoient ſucceſſivement & périſſoient preſque au même moment; au lieu que la lumiere dans le vuide eſt comme une flamme continuelle, qui dure ſans ceſſe, pendant que le mercure eſt en agitation. J'ai conclu de cette expérience, que le mercure, s'il eſt parfaitement purifié, peut laiſſer ſortir de ſes pores la matiere ſubtile, (que j'ai appellée avec M. DESCARTES du nom de premier élement) en tant d'abondance à la fois, que malgré la reſiſtance de l'air, elle a encore aſſez de mouvement, pour produire quelque lumiere. Qu'on prenne donc la peine de bien laver le mercure, qu'on dit n'être pas lumineux, & après l'avoir bien ſeché (car la moindre humidité cauſeroit un mauvais ſuccès), qu'on le verſe dans une phiole nette par dedans & bien ſeche, dont on tire enſuite l'air ſoigneuſement; je ſuis aſſuré qu'on réüſſira: Quoiqu'on penſe que ce mercure eſt parfaitement pur, parce qu'il demeure clair après l'agitation, j'ai pourtant remarqué, qu'il peut être infecté d'une matiere gluante cachée, qui fermant entierement ſes pores, ou du moins les rendant roides, empêchera, ou retardera la ſortie des particules qui doivent cauſer la lumiere. Je dis que la roideur des pores peut empêcher, ou retarder, la ſortie de ces particules; car il eſt bien viſible, que quoique le mercure ſoit en grande agitation, ſi pourtant les pores de ſes parties ne ſont pas aſſez flexibles pour changer de figure, la matiere du premier élement n'en pourra pas être chaſſée; car il faut que les pores ſe rétreſſiſſent ſouvent, pour que cette matiere puiſſe

ſortir.

sortir. Cela étant, il y a beaucoup d'apparence que le mercure, qu'on dit être devenu lumineux par la distillation au travers de la chaux vive, est du nombre de ceux qui ont les pores ainsi roides, à cause de quelque matiere sulfureuse, ou gluante. Et partant, bien loin d'être du sentiment de ceux qui croïent que ce sont des *parcelles ignées*, que la chaux vive a données au mercure en passant, qui produisent la lumiere; je suis fort persuadé au contraire, que la véritable raison en est la seule purification; de sorte que la chaux n'y a rien contribué que ses pores, par lesquels le mercure passant a laissé en arriere toute la matiere étrangére & gluante, & s'en est ainsi délivré: on n'a donc rien fait autre chose, par la distillation, que ce que j'ai fait par un simple lavement. En effet ces corpuscules ignées me semblent fort paradoxes, par plusieurs raisons, dont je ne dirai que quelques-unes.

1°. Il faudroit que ce nouveau Phosphore perdît enfin sa vertu, parce que ces parcelles ignées deviendroient enfin inutiles par le fréquent usage, comme on voit arriver aux autres Phosphores, qui sont lumineux par le moyen de telles particules ignées.

2°. Si ces parcelles ignées sont si subtiles, qu'elles puissent loger dans les petits interstices du mercure, & passer par iceux, comme on le prétend; sans doute elle pourront passer beaucoup plus aisément par les pores du verre, qui sont plus amples que ceux du mercure: d'où vient donc, qu'en secoüant la phiole, elles ne se dissipent pas d'abord, en s'envolant par les pores du verre, en quelque grande quantité qu'elles soient dans le mercure?

3°. On ne pourra pas expliquer non plus pourquoi, dans le Barometre, la lumiere ne paroit que dans la descente du mercure: car si elle est causée par ces corpuscules ignées qui nagent sur la superficie, pourquoi ne font-ils pas leur effet, quand le mercure monte, aussi bien que quand il descend,

s'il ne faut que du mouvement pour les faire *paroitre successivement sur la superficie du mercure?*

Or on évite toutes ces difficultés par ma maniere d'expliquer cette lumiere; car en disant qu'elle est produite par une matiere très subtile, qui étant universelle & se trouvant par tout, ne vient jamais à manquer, on fera voir que ce Phosphore doit durer perpetuellement, le mercure ne faisant autre chose que prêter ses pores fort étroits, & servir de crible à la matiere du premier élement, pour la separer de celle du second & du troisieme; (je me sers de ces termes, parce qu'ils sont commodes pour m'expliquer,) de laquelle étant délivrée, & après poussée hors du mercure par l'agitation qu'on lui donne, elle prend d'abord son mouvement rapide, qui lui est ordinaire quand elle est seule & dégagée de toute autre matiere, & produit ainsi dans nos yeux l'effet qui cause en nous la sensation de lumiere. Donc cette matiere *luminifique*, quoiqu'elle soit dissipée en un moment, elle ne laisse pas d'être incontinent suivie d'une autre, qui fait le même effet, & ainsi de suite; ce qui durera toûjours. Cette explication se verifie assez par un de ces Phosphores, dont j'ai fait l'experience presque toutes les nuits, depuis environ un an; & je puis dire de bonne foi, que je n'y ai jamais remarqué aucune varieté sensible; mais bien au contraire que la lumiere en étoit toûjours également splendide, comme elle l'est encore; & bien loin qu'elle ait souffert quelque diminution, il semble qu'elle est presentement un peu plus vive qu'elle n'étoit au commencement; peut-être parce que le mercure est devenu plus fluide, par les frequentes agitations, & que le reste des ordures s'en est separé peu à peu, & s'est attaché aux parois du verre, comme le verre qui est un peu trouble au dedans, le donne assez à connoître; en sorte que le mercure, étant totalement purifié, donnera à l'avenir toûjours de la lumiere au plus haut degré de vivacité. Mon explication me paroît d'ailleurs si plausible, que je suis pleinement persuadé, qu'une autre liqueur pure, & aussi pesante que le mercure, si on en avoit, feroit fans doute le même effet; enforte que je crois que l'or feroit le plus propre pour faire de femblables Phofphores, fi on fçavoit le moyen de le rendre fluide, fans perdre de fa pefanteur fpecifique : car comme je fais dépendre cet effet de la petiteffe & flexibilité des pores, il eft certain que l'or ayant les pores les plus petits entre les corps, il ne lui manque que la flexibilité des pores, qu'on ne pourroit lui procurer que par une parfaite fluidité de fa maffe. Peut-être que du plomb fondu, mis dans le vuide, donneroit auffi de la lumiere, à moins que les ordures, dont il eft toûjours infecté, ne l'en empêchaffent.

Pour ce qui eft du mercure, qu'on dit avoir été rendu lumineux par le Phofphore liquide artificiel; je crois que ce n'étoit pas le mercure qui a été lumineux, mais les parcelles mêmes du Phofphore artificiel. Or cela feroit arrivé fans doute à beaucoup d'autres corps, qu'on voit luire par le feul frottement du Phofphore folide ; & comme la lumiere en eft fort peu durable, je m'imagine bien que le mercure, dont on parle ici, n'a pas gardé non plus toûjours cette lumiere empruntée du Phofphore liquide artificiel; en forte que cette lumiere là n'eft plus de nôtre fujet.

Par tous ces raifonnemens, joints aux obfervations que j'ai alleguées, il paroît que les trois confequences qu'on a tirées, ne peuvent pas fubfifter. Car 1°. On voit que le mercure eft non feulement capable de devenir lumineux dans un lieu vuide d'air; mais qu'il eft déja lumineux en effet, pourvû que fa lumiere ne foit empêchée par quelque caufe étrangere, foit interne, foit externe.

2°. On voit que tous les mercures font également lumineux, pourvû que derechef leurs lumieres ne foient pas empêchées dans les uns plus que dans les autres, par quelques caufes que ce foient. J'ai fait fur ce fujet une obfervation remarquable : j'ai pris deux phioles toutes femblables & égales, dans lefquelles j'ai mis une égale quantité de mercure, prife d'une même maffe; j'ai tiré l'air également, & en une même heure, de

de chaque phiole. Ne diroit-on pas que la lumiere devroit auffi paroître également forte dans l'une & dans l'autre phiole; puifque tout étoit parfaitement, felon qu'il fembloit, égal & femblable? Cependant l'effet a fait voir tout le contraire; car l'une de ces phioles faifoit de la lumiere très-vive, au moindre branlement; mais l'autre n'en donnoit qu'après plufieurs fortes fecouffes, & puis ayant commencé de luire une fois, il ne falloit auffi que de petits mouvemens, pour faire revenir la lumiere; Et après avoir laiffé repofer cette phiole, pendant deux ou trois heures, il falloit derechef la fecoüer fortement avant que la lumiere commençât de reparoître; au lieu que la premiere phiole a toûjours donné de la lumiere fans peine. Que dire donc à cela? finon que dans une de ces phioles il étoit entré, peut-être, quelque peu d'humidité, quoiqu'imperceptible à mes yeux, foit de l'haleine, ou de la fueur des mains en la maniant; ce qui étoit déja fuffifant, pour caufer une fi grande difference dans l'apparition de la lumiere. Il ne s'enfuit donc pas, fi un mercure donne plus de lumiere qu'un autre mercure, qu'il foit pour cela plus capable d'en donner que l'autre; car ici, où les mercures étoient pris d'une même maffe, & par confequent également capables de luire, ils ne laiffoient pas de luire differemment.

3°. Enfin, on voit qu'un même mercure, s'il eft bien préparé, doit toûjours être également lumineux; & que s'il l'eft tantôt beaucoup, tantôt peu, tantôt point, c'eft une marque qu'il lui eft arrivé quelque changement, qui augmente, ou qui diminuë, ou qui empêche l'apparition de la lumiére, laquelle fans cela feroit toûjours la même : témoin le Phofphore dont j'ai fait mention cy-deffus, lequel donne de la lumiére depuis un an, fans aucun changement fenfible. Je puis confirmer ce que je viens de dire par une autre obfervation, que j'ai faite il y a peu de temps : j'avois une phiole préparée en Phofphore, qui luifoit également depuis fix femaines environ; mais fans l'ouvrir, ni laiffer rentrer l'air dans la phiole, j'ai brûlé avec les rayons du Soleil, par le moyen d'un verre convexe

vexe, une petite miette de liege qui s'étoit ſeparée du bouchon, & qui nageoit ſur le mercure; ce qui a produit un peu de fumée dans la phiole, qui, pour le reſte, demeuroit dans ſon premier état, ſans avoir rien changé: on ne ſçauroit croire combien ce peu de fumée a diminué la vivacité de la lumiére; outre qu'il falloit des ſecouſſes beaucoup plus fortes qu'auparavant pour la faire paroître. Ce qui fait voir que le changement de la lumiere, qu'on a remarqué à l'Academie, ne doit pas être pris pour une qualité eſſentielle, mais pour un effet d'une cauſe arrivée par accident.

Au reſte, je conviens *que tout mercure commun ſe reſſemble parfaitement, comme tout l'or & tout l'argent ſe reſſemble, de quelqu'endroit du monde qu'il vienne, pourvû qu'ils ſoient purs*: car c'eſt là le fondement de mon explication de cette lumiére, pour ſoûtenir qu'elle eſt generale, & qu'elle vient uniquement du mercure, qui donne paſſage à la matiére du premier element, à l'excluſion d'une autre matiere plus groſſiere. Je demeure auſſi d'accord qu'il ſuit de mon explication, que tout mercure doit être lumineux & en tout temps; auſſi eſt-il l'un & l'autre, comme j'ai prouvé juſqu'à preſent, pourvû que la lumiére ne ſoit empêchée par quelque cauſe étrangere, de même que le Soleil eſt toûjours lumineux, quoique ſa lumiére nous puiſſe être ôtée par une éclipſe, ou autre cauſe. Pour finir donc, je conclus que ce n'eſt pas un accident particulier, comme l'on croit, arrivé à quelque mercure, qui peut le rendre capable de luire en un lieu vuide d'air: mais bien au contraire, qu'il eſt naturel & eſſentiel à tout mercure, comme à toute autre liqueur auſſi peſante, ſi on en avoit, d'être lumineux; & ce ſeroit plûtôt un accident particulier arrivé au mercure, que ce qui empêcheroit l'apparition de ſa lumiére. Que ſi après tout cela, on trouve encore des difficultés, ſans pouvoir réüſſir à faire mon nouveau Phoſphore auſſi parfaitement que je le fais; je ne ſouhaiterois plus que d'avoir le même mercure, qui s'éclipſe ſi opiniâtrément; j'eſpère que j'en diſſiperois l'éclipſe, & que j'aurois le bonheur de maintenir à ce mercure le

le titre grec de *Phoſphorus*, avec autant de juſtice que la Planete de Venus porte le titre latin de *Lucifer.* Ce ſeroit là le moyen de décider nôtre diſpute. Si vous voulez, Mr. communiquer cette Lettre à l'Académie, vous me ferez un vrai plaiſir. Je ſuis de tout mon cœur, &c.

N°. LXV.

DISQUISITIO CATOPTRICO-DIOPTRICA,

Exhibens Reflexionis & Refractionis naturam, nova & genuina ratione ex æquilibrii fundamento deductam & ſtabilitam,
Auctore Johan. BERNOULLI.

POSTQUAM experientia, haud dubie initio ſola, docuiſſet mirabiles illas radiorum opticorum affectiones, quibus contingit, ut incidentes in ſuperficiem politam corporis opaci, reſiliant in plano ad eam recto, ſub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ; item, ut penetrantes oblique ex medio uno in aliud diverſæ conſiſtentiæ, refringantur in plano ad ſuperficiem ambo media dirimentem itidem recto, ſub angulis refractionis a linea perpendiculari & radio refracto factis, quorum ſinus ad ſinus ſuorum reſpective angulorum incidentiæ conſtantem ſervant rationem; illa quidem Catoptrica proprietate jam Veteribus, hac vero Dioptrica, nonniſi Recentioribus demum innoteſcente; varii exinde Philoſophi & Mathematici extitere, qui varias excogitarunt rationes, quibus hos Naturæ effectus explicarent & demonſtrarent: ſed nullus fuit, qui univerſalem applauſum obtinuerit.

Acta Erud. Lipſ. 1701. Janv. pag. 19. Idem Gallice, *Journal des Savans* 1703. 38 Journ. du 19 Nov. p. 596. Edit. de Paris. p. 992. Edit. de Holl.

Duos demonſtrandi modos præ cæteris plauſibiles vulgo circumferunt, CARTESII unum, mere mechanicum, qui compoſitione motuum nititur; alterum FERMATII, qui metaphyſicus eſt, deſumtus a Naturæ per breviſſimas vias operandi di consuetudine: nactus tamen est uterque suos adversarios. Ut enim objectiones omnes taceam, quibus explicatio *Cartesiana* impugnari solet, id unicum multis valde durum videtur, quod per eam supponendum sit, per diaphana, alioquin densioris consistentiæ, qualia sunt vitrum & aqua, radium opticum facilius & promptius eniti posse quam per aerem. Nec est, quod CARTESIUS dicat aërem esse magis villosum, ideoque etiam magis morari radios, quam faciant solidiora: quo enim colore asseverabit, purum ætherem villosiorem esse aëre crasso; cum idem accidat radiis ex æthere in aërem, quod ex aëre in vitrum, vel aquam, transeuntibus; utrovis quippe modo ad perpendicularem refringuntur. FERMATII vero hypothesis suis quoque premitur difficultatibus, multisque displicet; illis præsertim, qui causas finales ex physica proscriptas volunt; quamvis alias nova non sit: quantum enim ad demonstrationem æqualitatis angulorum incidentiæ & reflexionis, ea jam usi sunt veteres, nimirum PTOLEMAEUS Lib. I. *De Speculis*; item HERO Mechanicus in *Catoptricis*, teste HELIODORO *Larissæo*, qui ejus mentionem facit cap. 13 *De Opticis*, qui autem HERONIS Tractatus temporis injuria interiit. Unde non immerito summus noster LEIBNITIUS (vid. *Act. Erud.* 1682. p. 187) suspicatur, recentiores, FERMATIUM & *Willebrordum* SNELLIUM, in Veterum Geometria versatissimos, eorum principium ex Catoptrica in Diopticam tantum traduxisse. SNELLII enim theorema, cujus meminit *Isacus* VOSSIUS in sua dissertatione *De Lucis natura & proprietate* p. 37. quod scilicet secantes complementorum angulorum incidentiæ & refractionis constantem servent rationem, in idem plane recidit cum ipsorum angulorum sinibus reciproce sumtis; demonstrante id acutissimo LEIBNITIO, eodem loco ex *Actis* citato; quia et in universum verum esse facillime demonstrari potest, quod quorumvis angulorum sinus, sint complementorum suorum secantibus reciproce proportionales.

Sagacissimus HUGENIUS, haud multis abhinc annis, peculiarem suam Catoptrici Dioptricique hujus phænomeni dedit explicationem, in suo limatissimo Tractatu *De Lumine*, ex natura undulationis petitam; qua vix quicquam curiosius, acutiusve excogitari potuisset: nec tamen & hæc ad palatum est eorum, qui lumen in instanti propagari contendunt. Aliarum quarumdam probationum tentamina, præter jam allata, vide in DE CHALES *Mundo Mathematico* Tom. 2. pag. 536, seq. & pag. 617; at valde coacta sunt: videntur enim unice experientiæ accommodata esse; ita ut si de ea nondum constaret, pariter nihil certi ex illis a priori concludere liceret. Quantum ad ROBERVALLII modum refractionem explicandi, qui habetur in *Operibus Mathematicis & Physicis Academ. Regiæ Scientiarum* pag. 74, rejiciendus est omnino, utpote in ipsum Dioptrices principium peccans; ex eo enim sequeretur, non sinus angulorum incidentiæ & refractionis, eorumve complementorum secantes, sed horum tangentes esse in constante ratione, contra experientiam: unde simul patet, quam infeliciter admodum hac in parte CARTESIUM ibidem suæ censuræ subjecerit.

Nullus itaque extitit, quantum scio, qui puram dederit demonstrationem, id est, talem quæ mere apodictica sit, nullique certæ hypothesi, quæ causam quandam finalem, vel radiorum motum, sive instantaneum, sive successivum præsupponat, alligata; adeoque quæ nulli ex recensitis objectionibus, aliisque contra hanc illamve hucusque motis, sit obnoxia; sed potius quæ in abstracto proposita semper valeat, quæcunque demum hypothesis vera, vel deprehendatur, vel statuatur.

Hujusmodi quidem pro refractione dare conatus est HERIGONIUS in suo *Cursu Mathematico* Tom. 5. pag. 132 edit. Paris. usus principio planorum inclinatorum, quibus comparavit radios oblique incidentes. At vero excidit ausis: præterquam enim quod ex sua demonstratione, æque ac ex *Cartesiana*, [quamquam ipse contrarium dicat,] aperte sequeretur, radios ex medio rariori in densius ingredientes refringi debere a perpendiculari, & contra ad perpendicularem, si ex densiori in rarius; etiam postulatum aliquod assumit, quod manifeste ipsum est τὸ κρινόμενον, aut saltem haud multo evidentius: tandem quoque ex ea sequeretur, radios quamdiu in eodem adhuc medio homogeneo versantur, non æquali facilitate procedere, sed perpendiculariores facilius, ægrius vero obliquiores a puncto radiante emanare, quod valde absonum est; nulla enim in radiis consideratur perpendicularitas, nulla obliquitas, nisi respectu ad medium aliud diversæ a priori consistentiæ, a quo autem radii, ante appulsum, nihil utique mutationis patiuntur, quia radii in omnes partes pari facilitate sparguntur: nisi quis forte cum acutissimo NEWTONO velit aliquam vim statuere in altero medio, per quam radii, ante allapsum, jam alliciantur uni fortius quam alii. Vid. *Princip. Mathem. Phil. Nat.* * unde etiam NEWTONUS naturam reflexionis & refractionis explicat; sed ingeniose magis quam vere. Quid enim, & unde illa vis attractiva, ab illo non exponitur, sed supponitur; qua concessa, fateor perelegantem esse *Newtonianam* explicationem, quæ Mathematico plane satisfaciat.

* Lib. I. Sect. XIV. præcipue Schol. Prop. 96.

Verum jam nostram dabimus, qua rigido Physico, non minus quam accurato Mathematico satisfactum iri speramus; assumentes ex Physica aliud nihil, quam quod ab omnibus Opticis, cujuscunque opinionis fuerint alias, facile concedi queat; ex Mathesi vero, quod jam alibi demonstratum est. Incipiemus autem a refractione; ea enim explicata, reflexionis natura sponte fere fluet, & sic tanto facilius intelligetur. Constat utique 1° reactionem, quæ oritur ex actione aliqua, huic semper esse contrariam & æqualem; hoc est, eandem vim in agens redundare in partes oppositas quam transfert in patiens: communis enim actio, sive illa consistat in ictu, sive in impressione, sive in tensione, &c. in utrumque æqualiter exeritur: sic quanta vi malleus clavum percutit, tanta quoque a clavo percutitur; quanta idem pondus premit subjectam basin, tanta ab ea premitur; sic quoque chorda extenditur & extensioni resistit viribus paribus, &c. Constat etiam 2° duas vires, sive æquales, sive inæquales, in se mutuo libere agentes, ad eum statum, vel situm, se componere, in quo earum momenta fiant æqua-

æqualia, ut hoc modo procuretur æquilibrium. Ex hisce duabus naturæ legibus, nulla prorsus demonstratione indigentibus, sic porro argumentor: Sint duo media diversæ consistentiæ ACD & BCD distincta per planum CD; punctum radians A, punctum illustrandum B, ad quod scilicet radius AE pervenire debet per refractum EB. Quandoquidem igitur, per legem 1, radius EB tanta vi a resistentia medii BCD repellitur a B versus E, quanta radius resistentiam eandem superare conatur; similiter radius AE pari vi a resistentia medii ACD retunditur ab E versus A, qua ipsi opus est ad eandem resistentiam superandam, scilicet ab A versus E. Hinc in puncto E fit conflictus secundum directiones BE & AE, duarum virium inæqualium & mediorum resistentiis proportionalium. Hoc autem punctum E, per legem 2, ita situm esse debet, ut vires illæ inæquales ad æqualitatem momentorum, nempe ad æquilibrium reducantur. Res itaque huc redit, ut in CD determinetur punctum E, in quo potentiæ datæ, sibi mutuo obnitentes secundum directionem AE & BE, inter se servent æquilibrium. Quod ut inveniam, lubet tantisper proprietatem centri gravitatis considerare, ut pateat, quam pulchre & utiliter ad nostrum negotium applicari possit. Videtur enim natura [si quis instinctus ei attribuendus] hoc ipso statico principio delectari, atque hanc viam ex mechanicis mutuari voluisse, ut per eam, tanquam per facillimam, ad scopum suum perveniret.

TAB. XVI. N°. LXV. Fig. 1.

Concipiamus ergo CD, ut virgam rigidam, quæ instar axis admittat annulum vel verticillum E, sed ita ut lubricissime fluat, id est, sine ulla frictione, a vi minima, secundum rectam CD, ultro citroque moveri possit. Porro huic verticillo duos fingamus funiculos alligatos EAM & EBN, trochleas A & B superambientes, inque suis extremitatibus suspensa sustinentes duo data pondera inæqualia, ut ita verticillus E simul sollicitetur a duabus potentiis secundum directiones EA & EB, eodem plane modo, quo radios opticos punctum incidentiæ E, viribus datis inæqualibus, urgere diximus; hoc

TAB. XVI. N°. LXV. Fig. 2.

tantum diſcrimine, quod ibi potentiæ agant ſecundum directiones AE & BE, premendo: heic vero, ſecundum contrarias EA & EB, trahendo: patet autem perinde eſſe, ſive prematur, ſive trahatur; nam ſemper verum eſſe conſtat, ſi duæ pluresve potentiæ æquilibrium inter ſe conſtituentes, ſingulæ prioribus ſuis directionibus in contrarias partes dirigantur, eas etiam poſtea æquilibrium ſervare. Dico itaque verticillum E, ad eum locum pertractum iri in virga CD, in quo, ducta normali RS, ſinus anguli AER, repræſentantis angulum incidentiæ, ſit ad ſinum anguli BES, referentis angulum refractionis, in reciproca ratione potentiarum trahentium, quæ diaphanorum reſiſtentias, vel denſitates exprimunt, hoc eſt, ut pondus N ad pondus M; id quod variis modis, breviſſime tamen, & elegantiſſime, ex communis centri gravitatis maximo deſcenſu ſic demonſtro.

Promoveri fingatur verticillus E in *e* per lineolam infinite parvam E*e*, ut funiculi, cum ponderibus, capiant ſitum *m*A*e* & *n*B*e*: centris A, & B, radiis AE, & B*e*, deſcripti intelligantur arculi E*q* & *ep*, qui pro rectis lineolis habentur. Quoniam igitur commune centrum gravitatis ponderum M, & N, ad infimum poſſibilem locum deſcendit; erit quemadmodum ex ſtaticis patet, aſcenſus M*m* unius, ad deſcenſum N*n* alterius, ut hoc pondus N ad illud pondus M; eſt autem aſcenſus M*m* æqualis *eq*, & deſcenſus N*n* æqualis E*p*; ipſæ vero *eq* & E*p*, (ſumta E*e* pro radio, ſeu ſinu toto) ſunt ſinus angulorum *q*E*e*, & *pe*E, quorum ille *q*E*e* angulo AER, hic vero *pe*E angulo SEB ſemper æquantur: Ergo etiam ſinus anguli AER, erit ad ſinum anguli BES, in ratione ponderum N ad M: Unde patet angulos incidentiæ & refractionis eſſe in data ratione, ſcilicet reciproca mediorum denſitatum. *Q. E. D.*

Atque ſic ſtabilita Dioptrica radiorum proprietate, per noſtram demonſtrandi methodum; facile & eadem ad Catoptricam porrigitur. Cum enim radius reflexus cum incidente in eodem maneat medio; loco ponderum inæqualium, repræſentantium

ibi

ibi mediorum reſiſtentiam, ſeu denſitatem, heic pondera ſupponenda ſunt æqualia, ob eandem medii poſt reflexionem reſiſtentiam, qua ambo jam ſupra virgam CD conſtituta, trahere intelligantur verticillum E. Cæteris poſitis quæ prius; erunt aſcenſus M*m*, & deſcenſus N*n* inter ſe æquales, quia ipſa pondera N & M ſunt æqualia; adeoque etiam *eq* æqualis eſt E*p*: at quoniam triangula E*qe*, & E*pe* ſunt rectangula, erit angulus *pe* E æqualis angulo *q*E*e*; ille vero *pe*E angulo REB, hic vero *q*E*e* angulo AER ſemper ſunt æquales: ergo etiam angulus REB (reflexionis) æquatur angulo AER (incidentiæ). *Q. E. D.* Tab. XVI. N°. LXV. *Fig.* 3.

Aſſumpſi quidem hactenus Refractionem & Reflexionem fieri in planis ad plana refringentia & reflectentia rectis, quod etiam ab EUCLIDE, ALHAZENO, nonnulliſque Veteribus aliis, ſine demonſtratione aſſumtum eſt. VITELLIO vero, & inter recentiores KEPLERUS, dum id probare volunt, nihil probant. At vero ſtatim innuere potuiſſem, id ex meo principio ultro ſequi: nam ſi E, non tantum in recta CD, ſed in integra quadam ſuperficie liberrime in omnes partes fluere poſſe concipiatur, idque poſtea a duabus potentiis M & N trahi; quis eſt, qui non illico videat, punctum illud non ante quieturum, quam pervenerit ad eum locum, in quo, cum punctis A & B, ſit in plano ad ſuperficiem refringentem, vel reflectentem recto? ſecus enim ſi accideret; in quovis alio plano centrum gravitatis ponderum M & N non infimum poſſibilem deſcenſum obtineret.

Cæterum, non inutile erit, ſi jam oſtendero & ipſam illam metaphyſicam hypotheſin de compendioſiſſima Naturæ via, ex meo æquilibrii principio, commodiſſime & ſine longa demonſtratione, deduci poſſe; imo ſponte exinde fluere, ut ne opus quidem habeam conſideratione angulorum incidentiæ, & reflexionis, vel refractionis; id quod a nemine hactenus præſtitum ſcio: nam & ipſe HUGENIUS eam ex undarum ſuarum natura immediate demonſtrare non potuit; ſed cogebatur ex iis prius probare conſtantem eſſe rationem inter ſinus angulorum incidentiæ

dentiæ

dentiæ & refractionis. Vid. *Tractat. de Lumine*, pag. 40. FERMATIUS & LEIBNITIUS inverſo ordine hoc ex illo probarunt, quod eodem recidit, [Vid. *Opera Mathem.* FERMAT. p. 158. & *Act. Erud.* an. 1682 pag. 185] alterum enim per alterum ſtabilitur. At vero nobis utrumque, ſine ſuppoſitione alterius, demonſtratur; & quidem de priori, ſcilicet de angulorum iſtorum proprietatibus, id jam liquet: nunc de altero, nempe de facillima radiorum via porro liquebit.

Ex ſtaticis patet centrum commune gravitatis ponderum duorum, pluriumve, tunc infimum eſſe, quando ſumma rectangulorum ſub ponderibus & ſuis reſpective diſtantiis a ſuſpenſionum punctis omnium eſt maxima. Erit itaque M in AM + N in

TAB. XVI. N°. LXV. *Fig.* 3.

BN omnium maximum: hinc ſi a conſtanti M in MAE + N in NBE, auferatur maximum M in AM + N in BN, remanebit M in AE + N in BE omnium minimum: adeoque in Catoptrica, ubi pondera M & N [vid. *Fig.* III] ponenda ſunt æqualia, erit dividendo per M, AE + BE, id eſt, ſumma radiorum incidentis & reflexi omnium minima. In Dioptrica vero, ubi M & N [vid. *Fig.* II.] mediorum reſiſtentias, adeoque M in AE, & N in BE, radiorum AE & EB penetrandi difficultates [nam difficultas radii componitur ex medii reſiſtentia & viæ longitudine,] denotant; erit difficultas per AE & EB omnium minima, id eſt, radius ab A ad B per eam viam venit facillime. *Q. E. D.*

Et hæc ipſa eſt propoſitio, quam HUGENIUS operoſe, ſed operoſius multo FERMATIUS, nos vero, tribus quaſi verbis, demonſtravimus. Illi uſi ſunt vocabulo *temporis*, quod radius impendit ab A ad B; cujus loco nos *difficultatis* vocem adhibuimus; quod ſtudio factum, ut utrovis modo demonſtratio procederet, ſive in inſtanti, ſive ſucceſſive lumen propagari ſtatuatur. Unde noſtro fundamento tanto majorem firmitatem conciliari arbitramur, quod ei ſtatim ſuperſtruatur, nulla peregrina hypotheſi in auxilium vocata, id ipſum, quod alii, non tam ex ipſis fundamentis ſuis, quam per eorum ſequelas alienas & remotas eruerunt; aſſumentes interim, ex phyſica, hoc, vel illud, de quo ab aliis ſemper dubitabitur.

EXTRAIT

N°. LXVI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

Sur les Problemes des Iſoperimetres.

ON s'étoit flatté juſqu'ici, que l'Auteur de ces Problémes accepteroit les deux Articles, que Mr. BERNOULLI, Profeſſeur de *Groningue*, lui a propoſés dans le Journal du 15 Dec. 1698 †; vû qu'ils étoient tels, qu'en les acceptant il n'y auroit rien eu à riſquer pour l'Auteur des Problémes, & tout pour le propoſant, tant il a eu de condeſcendance pour lui; & que ç'auroit été le moien le plus promt pour finir une longue conteſtation qui eſt entre eux deux. Mais comme on ſe voit fruſtré dans ſon attente, on commence de douter que l'Auteur des Problémes ne craigne déja pour ſa cauſe & ne ſe voie trompé lui-même dans ſa Methode, par laquelle il prétend les avoir réſolus. On eſt confirmé dans cette penſée, parce qu'on a remarqué qu'il ſe contredit trop groſſiérement en divers endroits. Pour en avoir un échantillon, que le Lecteur prenne la peine de confronter les *Actes de Leipſic* de l'Année 1694. p. 276. l. 8. avec le Journal du 4 Aouſt 1698. pag. 360. l. 13 *: car dans les *Actes*, parlant de la courbure d'une lame élaſtique, ou d'un linge rempli de quelque liqueur, il dit: *Inter omnes figuras Iſoperimetricas, eidem rectæ inſiſtentes, Elaſtica illa eſt, quæ habet centrum ſuum gravitatis longiſſime remotum a recta.* Mais dans le Journal, il ſoutient directement le contraire. *Je ſoutiens même*, dit-il, *que cela eſt faux, & que la figure d'entre les Iſoperimetres, dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe, n'eſt pas celle d'un linge rempli de liqueur, mais une autre.* Voila un terrible effort pour ſe donner le dementi a ſoi-même:

Journal des Savans 1701. &c. Journ. du 21. Fevr. pag. 86. Edition de Paris. pag. 94. Edition de Hollande.

 ſon

† Cy-deſſus N°. XLVII. pag. 231. * Cy-deſſus pag. 226.

son plus grand adversaire n'auroit pû trouver des termes plus offençans, ni plus emphatiques, pour le refuter, que ceux avec lesquels il se refute lui-même.

On a voulu remarquer cela, pour donner à connoitre au Lecteur, si on peut conter sur une telle inconstance, & par consequent sur tout ce que l'Auteur des Problémes a avancé contre M. BERNOULLI Professeur de *Groningue*; & si ce n'est pas lui-même, selon toutes les apparences, qui a commis les paralogismes mentionez dans le Journal marqué, lesquels il impute à l'autre, par une conjecture temeraire. Mais cela soit dit en passant; on se reserve pour une autrefois, en cas de besoin, à montrer dans les écrits de l'Auteur des Problémes, d'autres contradictions, erreurs, & bevuës, même contre les premiers Axiomes de la Géometrie: sans pourtant qu'on veuille en rien déroger de la beauté de ses autres découvertes de Mathematique, qu'il peut avoir faites par un raisonnement juste. Les plus grands hommes sont sujets à broncher: cela lui est donc d'autant plus pardonable; pourvû qu'il ne le veuille blamer dans un autre, particuliérement si c'étoit à tort qu'il le feroit.

Pour le présent, on se contente d'avertir le Public, que M. BERNOULLI Professeur de *Groningue*, se soumettant au jugement de l'Académie Royale des Sciences, vient de remettre ses Méthodes pour les Problémes des Isoperimétres, entre les mains de M. le Secretaire de la dite Académie, qui sont les mêmes, dont il a fait part à M. LEIBNITS, il y a déja près de trois ans; lesquelles il a toujours aprouvées, témoin ses Lettres, qu'on peut produire; & son aveu public, qu'il a promis de donner, si l'occasion l'exige. Ainsi il ne tient plus qu'à l'Auteur des Problémes de faire paroitre la Méthode promise depuis si longtems.

Voiés *le N°. LXXV.*

JAC.

N°. LXVII.

JAC. B*. NOVA METHODUS

expedite determinandi radios osculi, seu curvaturæ, in curvis quibusvis algebraïcis.

METHODUS hæc, nec in radicum æqualitate, nec in Theorematis nostris *Jun. Act.* 1694 exhibitis fundata, sed singulari quadam eruta ratione, radium curvaturæ in omni curva algebraïca, citra ullum differentialium adminiculum, generaliter exhibet, idque tanta facilitate & promtitudine, ut nihil possit expeditius. Sufficit enim pro singulis æquationis terminis, e vestigio & nullo prævio calculo, alios quosdam substituere, prout e mox dicendis patebit. *Acta Erudit. Lips. 1700 Nov. pag. 508.*

Esto Curvæ cujusvis algebraicæ [cujus utique tangens inventa supponitur] abscissa $AB = x$, applicata $BC = y$, & subnormalis $BD = z$ [quæ omnes datæ sunt, ob datum C punctum,] & sit inveniendus radius osculi, seu curvaturæ C E. TAB. XVI. N°. LXVII.

REGULA. Æquatione tota, quæ curvæ naturam exprimit, ad unam partem constituta; & deleto, si adsit, termino, quem neutra indeterminatarum x & y ingreditur: reliquorum singuli, in quibus reperitur sola x, repræsententur per fx^m; in quibus sola y, per gy^n, & in quibus reperiuntur junctim x & y, per $hx^r y^s$; denotantibus, nempe, literis f, g, h, terminorum suorum coëfficientes, & literis m, n, r, s exponentes potestatum ipsarum x & y. Tum vero fiat fractio

in cujus . . . . *numeratore* . . . . *denominatore*

$$\text{pro singulis}\left\{\begin{array}{l} fx^m \\ gy^n \\ hx^r y^s \\ \\ \end{array}\right\}\text{substituatur}\left\{\begin{array}{l|l} +mfx^{m-1}z\ .. & +(m-mm)fx^{m-2}yy \\ -ngy^n\ ...... & +(n-nn)gy^{n-2}zz \\ +rhx^{r-1}y^s z & +(r-rr)hx^{r-2}y^{s+2} \\ -shx^r y^s & +(s-ss)hx^r y^{s-2}zz \\ & -2rshx^{r-1}y^s z \end{array}\right.$$

hoc est, loco datæ æquationis $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$ [quæ forma est, ad quam omnes referuntur] scribatur

$$\frac{+mfx^{m-1}z - ngy^n + rhx^{r-1}y^s z - shx^r y^s}{+(m-mm)fx^{m-2}yy + (n-nn)gy^{n-2}zz + (r-rr)hx^{r-2}y^{s+2} + (s-ss)hx^r y^{s-2}zz - 2rshx^{r-1}y^s z}$$

* Jacobi BERNOULLI,

quo

quo facto, ut denominator fractionis ad ipſius numeratorem, ſic erit CD ad radium oſculi quæſitum CE.

EXEMPL. I. Æquatio pro Parabolis omnis generis eſt $x - y^n = 0$. Conferatur x cum fx^m, & y^n cum gy^n; erit $f = 1$, $m = 1$, $g = -1$, & $n = n$; quibus valoribus ſubſtitutis, reſultat fractio $(z + ny^n) : ((nn - n) y^{n-2} zz) = (z + nx) : ((nn - n) y^{n-2} zz) =$ [ob $ny^{n-2} z = 1$, ex natura Parab.] $(z + nx) : ((n - 1) z)$; unde $(n - 1) z : z + nx = CD : CE$, ſive $z : z + nx = CD : (n - 1) CE$; quod propter ſubtangentem Parabolæ $BF = nx$, hanc facillimam Conſtructionem ſuppeditat. Ex puncto F, ubi tangens CF ſecat axem, excitetur axi perpendicularis FG, cui occurrat producta DC in G, erit $DG = (n - 1) CE$; adeoque $CE = \frac{1}{n-1} DG$.

EXEMPL. II. Sit æquatio curvæ $y^3 + x^3 + xxy - xyy + a^3 - aay + aax - axx + ayy = 0$. Neglecto a^3 & collatis

$+y^3$ cum gy^n, habetur $g = 1$, & $n = 3$	$-a^2y$ cum gy^n, habetur $g = -aa$, & $n = 1$
$+x^3 \ldots fx^m \ldots\ldots f = 1, \ldots m = 3$	$+a^2x \ldots fx^m \ldots\ldots f = aa, \; m = 1$
$+xxy \ldots hx^r y^s \ldots\ldots h = 1, r = 2, s = 1$	$-axx \ldots fx^m \ldots\ldots f = -a, \; m = 2$
$-xyy \ldots hx^r y^s \ldots h = -1, r = 1, s = 2$	$+ayy \ldots gy^n \ldots\ldots g = a, \; n = 2$

quibus ubique ſurrogatis, exurgit fractio

$$\frac{-3y^3 + 3xxz + 2xyz - xxy - yyz + 2xyy + aay + aaz - 2axz - 2ayy}{-6yzz - 6xyy - 2y^3 - 4xyz + 2xzz + 4yyz + 2ayy - 2azz}$$

Dico hujus denominatorem ad numeratorem ſe habere ut CD ad quæſitam CE.

OBSERV. I. Cum data ſit relatio inter x, y, z, ſeu AB, BC, BD, CD; poterit, ejus ope, ſemper una, pluresve, harum quantitatum, e fractione eliminari, eoque quæſitum in terminis plerumque ſimplicioribus exhiberi; ut ſupra, in *Exemplo I.* contigit.

OBS. II. Non opus eſt, ex data æquatione tollere prius fractiones & ſurditates, quando hæ ſimplices duntaxat poteſtates quantitatum x & y innuunt. Tantundem enim eſt, ex. gr. $aa : x$ atque aax^{-1}, $\sqrt{ax}$, atque $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{xyy}$ atque $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$, &c.

OBS. III. Imo nunquam illas tollere eſt opus, etiamſi ſigna radicalia binomia & multinomia involvant. Non minus enim aſſignari poteſt, quid pro talibus in fractione ſit ſubſtituendum. Sic ſi habeatur, in æquatione, quantitas ſurda $\sqrt[n]{(x^m + a^m)}$, brevitatis cauſa, dicta p; ejus

ejus loco, in numeratore fractionis ſurrogo $(mx^{m-1} z) : np^{n-1}$, in denominatore repono $+ ((m - mm) x^{m-2} yy) : np^{n-1} + ((n - 1) mmx^{2m-2} yy) : nnp^{2n-1}$, pariterque etiam in aliis.

OBS. IV. Haud abſimili methodo, tangentibus inveniendis Regula præſcribi poteſt, quanquam eadem vulgari quoque differentialium calculo haud difficulter eliciatur. Sit rurſum data æquatio $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$.

Dico fore ſubnorm. $BD = (-mfx^{m-1} - rhx^{r-1} y^s) : (+ngy^{n-2} + shx^r y^{s-2})$

Subtang. $BF = (-ngy^n - shx^r y^s) : (+mfx^{m-1} + rhx^{r-1} y^s)$

ſegm. axis $AF\ (-ngy^n - shx^r y^s - mfx^m - rhx^{r-s}) : (+mfx^{m-1} + rhx^{r-1} y^s)$

cui ſimilem in primo *Actorum* anno exhibuit Nob. D. TSCHIRNHAUS, niſi quod ipſe, in ordinanda æquatione, ad maximam poteſtatem y reſpicere jubeat, quod hic non eſt neceſſe. Sufficit, quod omnes termini æquationis ab una parte collocentur.

Atque hæc ſunt, quæ publico hac vice impertiri lubuit. Eorum veritatem qui examinare velit, Regulam noſtram tentet in variis curvis, de quorum radiis curvaturæ per alias methodos jam conſtat: qui vero in artificium inventionis ipſum curioſius inquirit, hoc ſibi ad ſolvendum, velut ænigma, proponat; donec ſolutum dedero ipſe.

N°. LXVIII.

JOHANNIS BERNOULLI

Nova ratio promte conſtruendi Radios oſculi, ſeu curvaturæ, in Curvis quibuſvis, ſive algebraïcis, ſive tranſcendentibus.

Item Methodus eoſdem analytice determinandi in curvis algebraïcis, per vulgarem Differentialium calculum eruta.

CUM primum in magni Problematis Brachyſtochronarum contemplationem inciderem; conferendo duplicem methodum, quam pro ejus ſolutione ſtatim inveneram, forte fortuna ſe mihi obtulit formula quæpiam, ſimpliciſſima ſimul *Acta Erudit. Lipſ.* 1701. Mart. pag. 136.

Bbb 3 &

& univerſaliſſima, exprimens radium oſculi, in curvis quibuſvis, tranſcendentibus, æque ac algebraïcis; quæ cum differentialibus primi tantum gradus conſtaret, loco quod omnes aliæ, ab aliis hactenus traditæ, ſemper etiam differentio-differentiales, ſeu differentiales ſecundi gradus involvant; primo impetu lætabar nonnihil, ob novum inventum, tanquam valde ſingulare: ſtatim vero poſtea, aperte adeo ex formulis ordinariis fluere vidi, ut dubitarem an in adverſaria mea referre dignaturus eſſem. Quandoquidem tamen anſam dedit noſtræ huic conſtructioni geometricæ, univerſali & expeditiſſimæ, radiorum oſculi quarumvis curvarum; fontem ipſius paucis hic detegere non pigebit.

Eſto Curva quæcunque, cujus coordinatæ ſint x & y; & ſit æquatio differentialis ejus naturam univerſaliter explicans $dx = udy$, [intelligo per u, quantitatem ex x, y & conſtantibus utcunque conſtantem]; poſito dt pro elemento curvæ, dico radium oſculi fore ſemper $dt^3 : dy^2\, du$; quod ſic facile probo: nam ſumta dy pro conſtante, notum eſt radium oſculi eſſe $dt^3 : dy\,ddx$; cum autem dx ſit $= udy$, erit $ddx = dudy$; adeoque ſubſtituto loco ddx ipſius valore $dudy$, prodibit, quod dixi, radius oſculi $dt^3 : dy^2 du$. Id quod nobis ſuppeditat hanc generaliſſimam radii hujus conſtructionem, per ſolas quantitates ordinarias ſeu finitas.

TAB. XVI N°. LXVIII. *Fig.* 1. Sit Curva data AC, ſive tranſcendens, ſive algebraïca; cujus radius oſculi in puncto quovis C ſit aſſignandus: Ducantur lineæ, ut factum in Figura; ſcilicet ex puncto F, ubi tangens CF ſecat axem, excitetur ad axem perpendicularis FG, occurrens normali ad curvam DC productæ in G. Præterea, quoniam curvarum datarum dantur tangentes, ſubtangentes, normales, ſubnormales &c. Conſtruatur nova curva LM, ita ut ejus applicata BM ſit quarta proportionalis ad applicatam datæ BC, ejus ſubtangentem BF, & conſtantem quandam ad arbitrium aſſumtam P; unde & hæc nova curva dabitur, ejuſque adeo tangentes, ſubtangentes, &c. Fiat igitur, ut FB ad NB, ita GD ad quartam quandam CE; dico hanc CE fore radium oſculi, ſeu curvaturæ, curvæ propoſitæ in puncto C.

Demonſtratio per unicam æqualitatum ſeriem abſolvitur, deductam partim ex conſtructione, partim ex ſimilitudine Triangulorum. Quoniam enim CE = [per conſtr.] NB × GD : FB = [ob Triang. FCB, GDF ſimilia] NB × CF × FD : FB × CB = [ob Triang. CFB, DFC, ſimilia] NB × CF^2 : FB^2 × CB = [per conſtr.] NB × CF^2 × P : FB × CB^2 × BM = [per naturam tangentium; eſt enim NB : BM = dx : Pdu, & CF : FB = $dt : dx$, & CF : CB $= dt : dy$] $dx.\, dt.\, dt^2.$ P : P $du.dx.dy^2$ = [diviſo numeratore & denominatore per P dx] $dt^3 : du\, dy^2$ = [per ſupra demonſtrata] radio oſculi: ergo etiam CE = radio oſculi. *Q. E. D.*

Exempli loco duas ſumamus curvas, algebraïcam unam, alteram tranſcendentem. Sit ergo AC parabola cujuſvis generis, cujus exponens ſit n: patet, ex conſtructione, LM fore aliam parabolam, cujus exponens erit $n : (n - 1)$; unde FB ad NB, id eſt, GD ad CE, ut n ad $n : (n - 1)$; id eſt, ut $n - 1$ ad 1; adeoque CE = GD : $(n - 1)$.

Eſto jam [*Fig.* 2] AC logarithmica vulgaris: erit etiam TAB. XVI. N°. LXVIII. *Fig.* 2.
LM talis logarithmica, & quidem ejuſdem ſubtangentis, ſed cum priore ſitu inverſo ſuper eodem axe poſita: adeoque cum NB æquetur FB, hinc ſtatim fluit radium oſculi CE in logarithmica ubique eſſe æqualem ipſi GD: egregia hujus curvæ, & hactenus nondum obſervata proprietas, tantoque notatu dignior, quod eandem communem habeat cum parabola vulgari *Archimedea*; etenim & in hac CE ubique = GD. Ut & hoc inſuper notem, radius hic CE in Logarithmica utrinque in infinitum abit: ergo alicubi exiſtit minimus; quod ibi fit, ubi ſubnormalis eſt ſubtangentis dimidia.

Atque hæc, de geometrica conſtructione univerſali radiorum oſculi in quibuſvis curvis, ſufficiant. Quantum ad analyticam ejuſdem expreſſionem in algebraïcis, etiam hanc ex formula mea ſupra inventa CE = $dt^3 : dudy^2$, magna facilitate

tate & ſimplicitate per vulgarem differentialium calculum elicio, prout e jam dicendis patebit.

Æquatio catholica, ad quam omnes omnium curvarum algebraïcarum referuntur, hæc eſt, $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$; ubi repræſentantur per fx^m termini ſinguli, in quibus ſola x; per gy^n ſinguli, in quibus ſola y; & tandem per $hx^r y^s$ ſinguli in quibus x & y junctim reperiuntur: ſumtis ſcilicet x, y pro coordinatis curvæ, & a pro conſtante; f, g, h pro ſuorum reſpective terminorum coefficientibus; & m, n, r, s pro exponentibus poteſtatum ipſarum x & y. Vocentur normalis CD, v, & ſubnormalis BD, z. Oportet nunc exhibere expreſſionem litteralem itidem catholicam, meris quantitatibus algebraïcis conſtantem, quæ longitudinem radii oſculi determinet; quod ſic facio: Differentietur per viam ordinariam æquatio modo memorata, & habebitur $mfx^{m-1}dx + ngy^{n-1}dy + rhx^{r-1}g^s dx + shx^r y^{s-1}dy = 0$, proinde $(mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s)dx = (-ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1})dy$. Ponatur brevitatis gratia, quod cum dx multiplicatur $= p$ & quod cum dy multiplicatur $= q$; unde $pdx = qdy$. ſeu $dx = qdy : p$. Jam in univerſali noſtra formula, radium oſculi eminenter in quavis curva exprimente, $dt^3 : dudy^2$, loco du ponatur differentiale ipſius $q : p$; eſt enim hic $u = q : p$, adeoque $du = (pdq - qdp) : pp = [\text{ob } p : q = dy : dx = z : y] = (zdq - ydp) : pz$; erit $dt^3 : dudy^2 = pzdt^3 : (zdy^2 dq - ydy^2 dp)$. Sumantur nunc differentiales ipſarum p & q, ſeu ipſarum $mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s$ & $-ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}$, habebitur $dp = (mm - m)fx^{m-2}dx + (rr - r)hx^{r-2}y^s dx + rshx^{r-1}y^{s-1}dy$, & $dq = -(nn - n)gy^{n-2}dy - (ss - s)hx^r y^{s-2}dy - rshx^{r-1}y^{s-1}dx$. Subſtitutis igitur loco p, dp, & dq, ipſorum valoribus, prodibit $dt^3 : dudy^2 = (mfx^{m-1}z + rhx^{r-1}y^s z)dt^3$ diviſo per $(m - mm)fx^{m-2}ydxdy^2 + (r - rr)hx^{r-2}y^{s+1}dxdy^2 - rshx^{r-1}ysdy^3 + (n - nn)gy^{n-2}zdy^3 + (s - ss)hx^r y^{s-2}zdy^3 - rshx^{r-1}y^{s-1}zdxdy^2$, denique ſi pro dt, dx, & dy, ponantur eorum proportionales v, y & z [eſt enim $dt : dx = v : y$, & $dx : dy = y : z$] proveniet, ordinatis & reductis reducendis, $dt^3 : dudy^2$, ſeu CE, ſeu radius oſculi $= (mfx^{m-1}v^3 + rhx^{r-1}y^s v^3)$ diviſo per $(m - mm)fx^{m-2}yyz + (n - nn)gy^{n-2}z^3 + (r - rr)hx^{r-2}y^{s+2}z + (s - ss)hx^r y^{s-2}z^3 - 2rshx^{r-1}y^s zz$; adeoque ut denominator fractionis ad ipſius numeratorem, ſic erit unitas ad radium oſculi quæſitum CE.

Hoc nonnihil ſimplicius enunciari poteſt, ſi dividatur fractio per $vv : z =$ FD, & ſi dicatur, ut denominator ad numeratorem ita FD ad CE. Ubi notandum hanc fractionem, quod ad denominatorem, convenire omnino cum ea, quæ in *Actis* hiſce *Anni ſuperioris* p. 509 * traditur; ſed, quod ad numeratorem, noſtram hic traditam, utpote duobus tantum terminis conſtantem, altera illa quatuor habente terminos ſimpliciorem eſſe; quod in laudem incomparabilis differentialis calculi, ejuſque Illuſtriſſimi Autoris dictum eſto, ut ipſi ſua conſtet excellentia, & vindicetur ab iniqua cenſura eorum, qui eum, vel ex imperitia, vel ex invidia, ad hujuſmodi & alia extendi non poſſe crepant; ad quæ tamen, & longe plura reapſe extenditur, ſi dextre adhibeatur.

Cæterum quantum ad regulas, quæ pro tangentibus, normalibus, &c. præſcribi poſſunt, illæ tam facile ex vulgari differentialium calculo inveniuntur, ut id operis Tyronibus efficiendum relinquam. Ea interim, quæ pro ſubnormali invenitur, conducit ad examinandum, ſi cui volupe ſit, utrum citata ex *Actis* regula, pro determinando radio oſculi, ſit generaliter bona: nam ſi conferatur cum mea hic exhibita & de-

* Supra N°. præced pag. 379

monſtrata, producet valorem aliquem ipſius z ſeu BD, qui ſi idem fuerit [ut reapſe eundem eſſe comperi] cum eo quem indicat generalis regula pro normalibus, etiam illa altera judicabitur eſſe generalis.

N°. LXIX.

JOHANNIS BERNOULLI

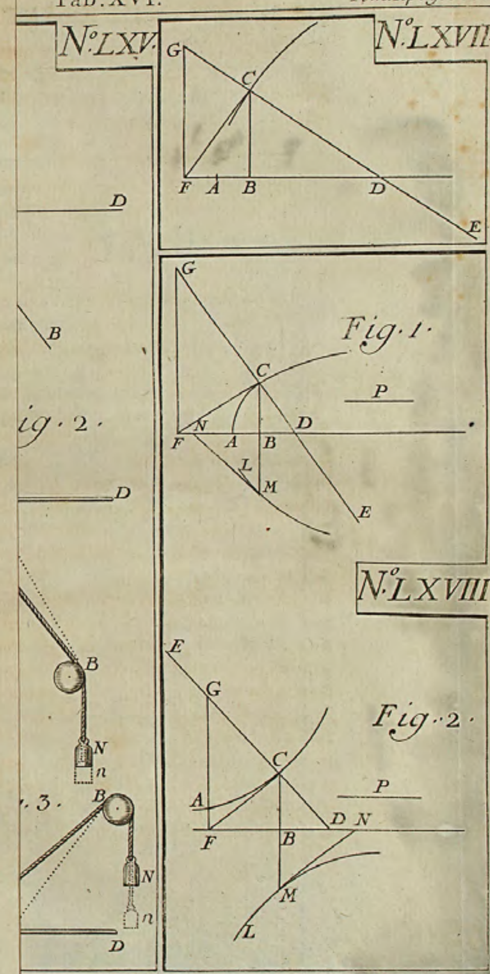
Multiſectio anguli vel arcus, duplici æquatione univerſali exhibita, inſerviens generali determinationi omnium Zonarum quadrabilium Cycloïdis.

Acta Erudit. Lipſ. 1701. April. pag. 170.

IN *Actis Erud.* Anni proxime elapſi, pag 268 * propoſui Problema ſectionum angularium generaliter ſolvendum, quippe quod ibidem oſtendi abſolvere totum negotium pro determinandis Cycloïdis Zonis quadrabilibus infinitis; ne ſcilicet, pro ſingulis, de novo ſemper recurrendum eſſet ad calculum, perquam tædioſum ſane & moleſtum. Et dixi me tali univerſali formula potitum eſſe, qua, ſine ullo prævio calculo, angulum datum quantumvis, vel multiplicare, vel dividere liceat. Sperabam hinc id Nonneminem excitaturum, qui, in re ardua adeo & ab omni ævo deſiderata, aliquid eſſet præſtiturus, ut ex junctis noſtris operis commune ſtudium tanto majorem caperet fructum. At vero aliud nihil prodit, niſi quod diceretur, *Problema ſectionis angularis in ratione determinata numeri ad numerum algebraicum eſſe, ſed indefinite in data ratione quacunque, tranſcendens.* † Verum utique hoc eſt. Interim nihil impedit, quominus tamen generalis dari poſſit æquatio, vel ſi mavis formula, quæ pleniſſime complectatur ſolutionem Problematis indefinite propoſiti, & quæ, in caſu determinato, aliud nihil requirat, quam nudam & extemporaneam terminorum ſubſtitutionem, qualem utique omnes

* Supra N°. LX. pag. 331. 332.   † Supra N°. LXI.

Tab. XVI.   Tom. I. pag. 386.



em ipsius z seu BD, qui
esse comperi] cum eo quem
libus, etiam illa altera ju-

IX.

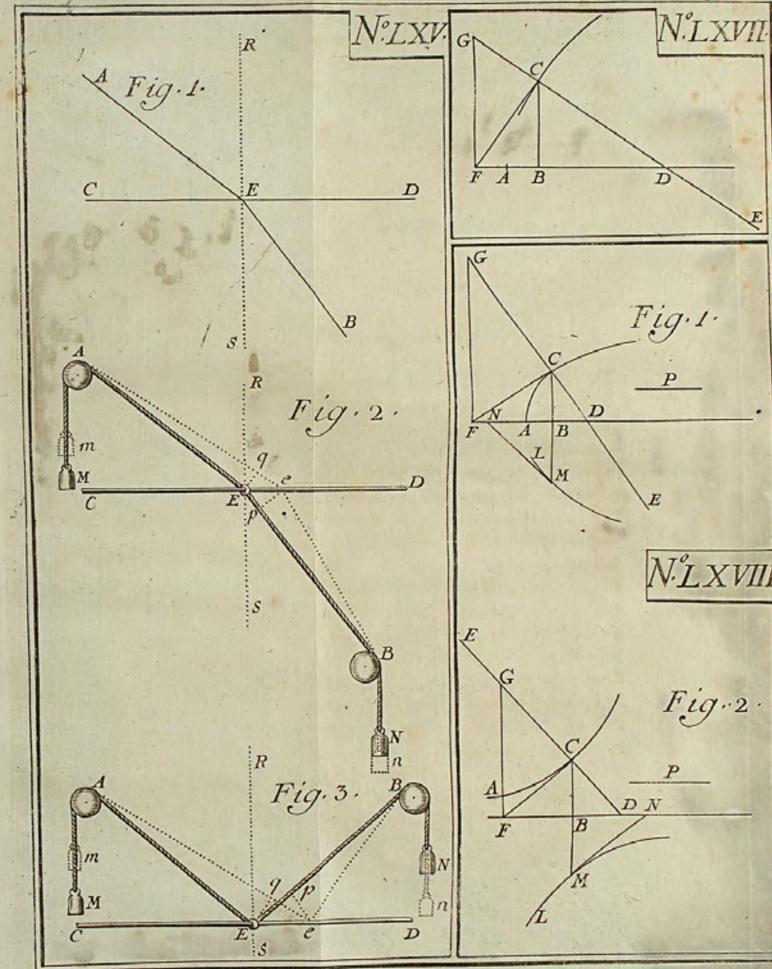
ERNOULLI

ici æquatione universali ex-
terminationi omnium
um Cycloidis.

elapsi, pag 268 * proposui
um generaliter solvendum,
vere totum negotium pro
adrabilibus infinitis; ne sci-
er recurrendum esset ad cal-
& molestum. Et dixi me
, qua, sine ullo prævio cal-
, vel multiplicare, vel di-
Nonneminem excitaturum,
i ævo desiderata, aliquid
stris operis commune stu-
tum. At vero aliud nihil
ma sectionis angularis in ra-
algebraicum esse, sed inde-
scendens. † Verum utique
ominus tamen generalis da-
nula, quæ plenissime com-
ndefinite propositi, & quæ,
requirat, quam nudam &
tionem, qualem utique om-
nes

†. Supra N°. LXI.

Tab. XVI. *Tom. I. pag. 386.*



nes hujuſmodi generales formulæ requirunt; ut vel ex ipſa radios oſculi curvarum algebraïcarum determinandi methodo patet, cujus æquatio indefinite ſumta etiam eſt tranſcendens, licet in caſu determinato ſit algebraïca. Ita quoque poteſtas indefinita binomii eſt tranſcendens; an ideo non per ſeriem exprimi poteſt, quæ doceat modum generalem, poteſtatem numericam quamcunque datam, e veſtigio & ſine prævio calculo, exhibendi? Talem itaque formulam ego requirebam pro indefinita multiplicatione & ſectione arcus. En autem nunc geminam; cujus priorem, una cum demonſtratione, jam ab aliquo tempore cum Illuſtr. *Marchione* HOSPITALIO communicavi, quæ hæc eſt.

Si radius circuli $= 1$, ſubtenſa arcus dati $= a$, ſubtenſa ejus complementi ad ſemicirculum $= \sqrt{(4 - aa)} =$ [brevitatis gratia] b, ſubtenſa arcus multipli, ſubmultiplive $= x$, ſubtenſa ejus complementi ad ſemicirculum $= \sqrt{(4 - xx)} =$ [brevitatis gratia] y; numerus multipli, ſubmultiplive $= n$. Dico fore pro arcu multiplicando, $x = ab^{n-1} - \frac{n-2}{1} ab^{n-3} + \frac{n-3.\,n-4}{1.\,2} ab^{n-5} - \frac{n-4.\,n-5.\,n-6}{1.\,2.\,3} ab^{n-7} + \frac{n-5.\,n-6.\,n-7.\,n-8}{1.\,2.\,3.\,4} ab^{n-9}$, &c. & pro arcu dividendo, ſeu ſecando, $x =$ radici hujus æquationis $a = xy^{n-1} - \frac{n-2}{1} xy^{n-3} + \frac{n-3.\,n-4}{1.\,2} xy^{n-5} - \frac{n-4.\,n-5.\,n-6}{1.\,2.\,3} xy^{n-7} + \frac{n-5.\,n-6.\,n-7.\,n-8}{1.\,2.\,3.\,4} xy^{n-9}$, &c. cujus progreſſionis natura per ſe manifeſta eſt, & ex uniformitate facile patet, quomodo ſit continuanda: continuari autem debet, donec ad terminum perveniatur, cujus coëfficiens abeat in nihilum: talis autem aliquis ſemper erit in progreſſione, cum ut hic ſupponitur, per n denotetur numerus integer: ſit, ex. gr. $n = 5$ habebit progreſſio terminos tres; adeoque erit x, ſeu ſubtenſa arcus quintupli $= ab^4 - 3abb + a$, & x, ſeu ſubtenſa arcus ſubquintupli, æqualis radici hujus æquationis $a = xy^4 - 3xy^2 + x$, & ita de cæteris.

Ecce nunc alteram formulam univerſalem. Dico itaque [retentis iiſdem litteris, ſed jam diametro ſumta pro unitate] haberi pro arcus multiplicatione $x = nab^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^3 b^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^5 b^{n-5} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6}{1.2.3.4.5.6.7} a^7 b^{n-7}$, &c.

vel etiam, ſi magis arridet valor ipſius y, erit $y = b^n - \frac{n.n-1}{1.2} a^2 b^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^4 b^{n-4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} a^6 b^{n-6}$, &c. Et, pro arcus diviſione, ſeu ſectione, dico eſſe $x =$ radici hujus æquationis, $a = nxy^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^3 y^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} x^5 y^{n-5} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6}{1.2.3.4.5.6.7} x^7 y^{n-7}$, &c. vel etiam [quod tantundem eſt] $x =$ radici hujus æquationis, $b = y^n - \frac{n.n-1}{1.2} x^2 y^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} x^4 y^{n-4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} x^6 y^{n-6}$, &c. Sumamus iterum in exemplum $n = 5$, erit x, ſeu ſubtenſa arcus quintupli $= 5ab^4 - 10a^3bb + a^5$, & x, ſeu ſubtenſa arcus ſubquintupli $=$ radici hujus æquationis $a = 5xy^4 - 10x^3yy + x^5$, vel etiam $=$ radici hujus æquationis $b = y^5 - 10xxy^3 + 5x^4y$, quæ omnes, ſi conferantur cum iis quæ per priorem formulam ſunt inventæ, attendendo quod illæ habeant radium, hæ vero diametrum pro unitate, elegans ubique obſervabitur conſenſus. Lex hujus poſterioris progreſſionis etiam per ſe patet; ſunt enim coëfficientes iidem, qui in binomii poteſtate n, ſed alternatim ſumti; alternantibus etiam ut in priori ſignis $+$ & $-$.

Quamquam alias hæc poſterior formula, quantum ad expreſſionem, nonnihil prolixior videatur priore, eidem tamen præferenda eſt; quippe quæ ſeſe extendit ad numeros n non integros modo, ut prior, [quod quidem ad Zonas quadrabiles infinitas jam ſufficit;] ſed etiam ad fractos, imo & ad ſurdos quoſvis: quibus in caſibus progreſſiones degenerant in ſeries infinitas ſummarum finitarum: adeo ut jam facile ſit exhibere ſeriem compoſitam ex terminis pure cognitis, quæ exprimat radicem æquationis pro quavis ſectione anguli vel arcus. Nam angulum, vel arcum datum ſecare in partes n, tantundem eſt ac eum multiplicare per $1:n$; ideoque ſi in generali progreſſione pro multiplicando arcu $x = nab^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^3 b^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^5 b^{n-5}$, &c. Subſtituamus $1:n$, loco n, orietur ſeries infinita terminorum pure cognitorum; cujus ſumma per conſequens erit radix hujus æquationis $a = nxy^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^3 y^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5.} x^5 y^{n-5}$, &c. pro generali arcus ſectione. Eodem modo, ſi loco n ſubſtituatur $\surd n$, vel $\surd(1:n)$ [intelligo per $\surd$ latus cujuſvis gradus] prodibit ſeries determinans ſubtenſam arcus, habentis ad arcum datum rationem datam quamvis ſurdam. Quæ omnia hactenus magnæ fuerunt caliginis; qua enim alia via, arcus inter ſe incommenſurabiles, pro datis numeris ſurdis, determinari queant, non video.

Ut nunc redeam ad Cycloïdis Zonas quadrabiles, patet ex ſupradictis, quomodo infinitæ tales ſimul poſſint algebraïce deſignari. Dico algebraïce; qui enim ad eas determinandas utitur curva quadam tranſcendente, ſane is non plus præſtitit, quam qui quadraturam circuli, ex ſuppoſita peripheriæ rectificatione, ſe inveniſſe gloriaretur *. Et hoc ſenſu nullum non ſpatium, nedum Zona, Cycloïdis eſt quadrabile. Sit enim ſemiſegmentum quodcunque AIB, erit illud ſemper æquale TAB.XV
rectangulo ſub AI & IB, minus rectangulo ſub $\frac{1}{4}$ AH & LB, N°. LXI

* Vide N^um. LXI.

plus triangulo H I L. Hoc ipſum vero non vocatur *quadrare*; quoniam lineæ I B, L B, licet rectæ, non tamen ſunt ſub poteſtate algebraïca, ſeu non habent relationem ad A I, H I, algebraïce exprimibilem. Non minus vice verſa, ſi aliqua ex areis Cycloïdicis, ut Zona K D B I, ſit algebraïce quadrabilis, quamdiu tamen illa aliter non determinatur quam per interſectionem curvæ alicujus tranſcendentis O S P & rectæ R S; id certe non eſt nodum ſolvere, ſed magis intricare; facilius quippe intelligitur [huc enim redit] quod dixi in eod. *Actorum* Anno *, ſcilicet ſumtis duobus ſinibus K M, I L, quorum diſtantiæ, a puncto medio P inter A & H, ſint reciproce proportionales ipſorum arcubus A M, A L, Zonam K D B I tunc exiſtere quadrabilem, utpote æqualem triangulis rectilineis & algebraïcis H A L + I A L — H A M — K A M: in hoc unico tota res verſatur. Quomodo vero hujuſmodi ſinus, eam conditionem habentes, univerſali formula ſint exprimendi, proponebam quidem, & ſolutionem aliquam expectabam; ſed fruſtra. Interim genuina nunc clare patet ex noſtris arcuum multiplicandorum & ſecandorum formulis ſupra allatis.

Eſto, ſecundum priorem, radius $AH = 1$, arcus A M ad arcum A L ut 1 ad n, ut P I ad P K; & ſit $AK = z$, adeoque $PK = \frac{1}{2} - z$, $PI = (\frac{1}{2} - z):n$, & $AI = (\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + z):n$; unde $AM = \sqrt{2z}$, & $AL = \sqrt{((n - 1 + 2z):n)}$; ſic igitur ſi in formula priori $x = ab^{n-1} - \frac{n-2}{1}ab^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2}ab^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3}ab^{n-7}$ &c. pro x, a & b ponantur valores $\sqrt{((n-1+2z):n)}$, $\sqrt{2z}$, & $\sqrt{(4-2z)}$, prodibit æquatio generalis infinitas ſimul determinans Zonas Cycloïdicas algebraïce quadrabiles, pro ratione unitatis ad numerum, ita ut, in particularis caſus applicatione, nuda tantum ſubſtitutione terminorum ſit opus. Eſto, exempli loco, ut ante $n = 5$, ergo ſubſtitutione e veſtigio facta habetur $\sqrt{((4+2z):5)} = (5 - 10z + 4zz)\sqrt{2z}$, cujus ergo radix z oſtendit, quanta

* N°. LX. pag. 331.

quanta ſit abſcindenda A K, ut, [facta K P ad P I, ut n ad 1] Zona K D B I fiat quadrabilis.

Haud aliter in formula poſteriori $x = nab^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^3b^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}a^5b^{n-5}$, &c. ubi tota diameter ponitur $= 1$, ſi pro x, a, & b, ponantur valores, qui jam ſunt $\sqrt{((\frac{1}{4}n - \frac{1}{4} + z):n)}$, $\sqrt{z}$ & $\sqrt{(1-z)}$, orietur iterum generalis æquatio, pro infinitis Zonis Cycloïdicis quadrabilibus ſimul determinandis, quæ, in applicatione ad exempla, aliud nihil requirit, quam nudam terminorum ſubſtitutionem. Sic, in eodem exemplo $n = 5$, proveniet ſtatim $\sqrt{((1+z):5)} = (5 - 20z + 16zz)\sqrt{z}$, quæ manifeſte eadem eſt cum modo inventa, ceu facile apparet, ſi, pro unitate diametri, ſurrogentur duæ unitates radii; & pro quadrato illius, quatuor quadrata hujus.

Atque de his ſatis. Qui noſtrarum formularum univerſalitatem examinare volet, tentet id in variis aliis caſibus ſpecialibus, præter quam in jam allatis, quos communi via indagare facile eſt: in ipſum vero inventionis artificium curioſius inquirendum non eſt, quod Nonneminem invitem; ſufficit, [ſi non harum] ſi ſaltem ſimilium dederit demonſtrationem: hoc ergo, tanquam Problema etiamnum ſibi propoſitum, habet.

Quod ſupereſt, de inveniendo Sectore ſolido Cycloïdico, habente centrum gravitatis ſub poteſtate algebraïca, quem propoſui in *Actis* anni 1700, * agnoſco facile Problema eſſe magis prolixum quam arduum; quomodo enim arduum eſſe poſſet, poſtquam methodum ipſam ibidem jam aperui? Verum ob ipſam ſolam prolixitatem propoſui, ut hac ratione me per alium examinarem, exploraturus num forte in calculum meum error irrepſiſſet. Interim ſolutio data in *Actis* Anni ejuſdem, pag. 552, † non ſatisfacit, quamvis contineatur in æquatione, ad quam pervenitur. Hoc ne mireris: eſt enim ex numero earum quæ, præter radices utiles, etiam inutiles ſeu Proble-

* N°. LX. pag. 333. † N°. LXI. pag. 336.

Problemati non ſatisfacientes continent, quas niſi probe diſcernant Analyſtæ, facile nubem pro Junone captant. Ut ergo dicam quod res eſt; calculo meo iteratis vicibus reviſo & examinato, nullum errorem in eo commiſſum deprehendi. At ſequeſtratis peculiari modo radicibus inutilibus, remanſere duæ utiles, ſed imaginariæ ambæ, quæ continentur ſub hac æquatione $xx - 8ax + 24aa = 0$, ſumendo x pro diſtantia verticis Cycloïdis ab amplitudine maxima ſectoris: dum interim y, ſeu diſtantia apicis ſectoris a ſua maxima amplitudine determinatur per hanc æquationem $3yy - 6ay + 8xy - 12ax + 6xx = 0$; adeo ut, ſecundum abſtractam Analyſin, Problema quidem ſolvi poſſit; at ſecundum Geometriam, & abſolute loquendo, nullus omnino detur realis ſector ſolidus Cycloïdicus, cujus centrum gravitatis determinetur per quantitates pure algebraïcas.

Videatur N^us. LXXXIX.

SOLU-

N°. LXX.

SOLUTION D'UN PROBLEME

Concernant le calcul intégral, avec quelques abregés par raport à ce calcul.

Par M. BERNOULLI Profeſſeur à *Groningue.*

Le tout extrait d'une de ſes Lettres écrite de Groningue *le* 5. Août 1702. *

PROBLEME.

Soit la differentielle $pdx : q$, *dont* p *&* q *expriment des quantités rationelles compoſées comme l'on voudra d'une ſeule variable* x *& de conſtantes; on demande l'intégrale, ou la ſomme algébraïque, ou du moins qu'on la reduiſe à la quadrature de l'hyperbole, ou du cercle; l'un ou l'autre étant toûjours poſſible.* *Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de* Paris. 1702 pag. 289. Edit. de Paris. pag. 385. Edit. de Holl.

SOLUT. Soit diviſée p par q, juſqu'à ce qu'enfin la plus grande dimenſion de x, dans le reſte, ſoit moindre que dans q, à moins que la grande dimenſion de x dans p ne fût déja moindre que dans q, auquel cas il n'y auroit point de diviſion à faire. Prenez enſuite l'intégrale du quotient de cette diviſion; ce qui eſt toûjours poſſible, puiſque ce quotient (quant aux x) ſera toûjours entier & rationel. Mais pour l'intégrale du reſte (ce qui eſt proprement le point de la difficulté) voici comme on la trouve. Soit ce reſte appellé r, & ſuppoſons que $rdx : q = adx : (x+f) + bdx : (x+g) + cdx : (x+h) +$ &c. c'eſt à dire $rdx : q$ égale à autant de differentielles logarithmiques, que la plus grande dimenſion

* Cette Piece ſe trouve auſſi en Latin, mais moins complette dans les *Acta Erud. Lipſ.* 1703. Janv. pag. 26.

ſion de x, dans q, a d'unités. Et là il eſt à remarquer que a, b, c, &c. de même que f, g, h, &c. ſont des quantités conſtantes indéterminées; & pour en avoir les valeurs, il faut reduire cette ſomme $adx:(x+f)+bdx:(x+g)+cdx:(x+h)+$ &c. à un dénominateur commun le plus petit qu'il ſoit poſſible; ce qui la rendra ſemblable à la propoſée $rdx:q$, en ce que x ſe trouvera au même degré dans le dénominateur de l'une & de l'autre. Quant au degré de x dans r, s'il arrivoit qu'il y fût moindre que dans l'autre numerateur, il faudroit y ſuppoſer ceux qui y manqueroient en les affectant de o. Cela fait, il faut égaler entr'eux les termes correſpondans, tant des numerateurs, que des dénominateurs de ces deux ſommes; ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de coëfficiens indéterminés dans la ſeconde, leſquels ſe détermineront enfin par le moyen de ceux de la propoſée, dont les valeurs données dans r & dans q, donneront celles de ces coëfficiens cherchés; à moins qu'il ne s'y trouvât de la contradiction; ce qui marqueroit qu'il y auroit encore quelque choſe d'abſolument intégrable dans la fraction reſtante. L'en ayant donc ſéparé par la diviſion, cette comparaiſon de terme à terme réüſſira toûjours dans le reſte. Par le mot de *Coëfficient* je n'entends pas ſeulement un nombre, mais auſſi toute grandeur conſtante, qui affecte quelque dimenſion que ce ſoit de x.

Autrement. Soit $rdx:q=sdx:t+adx:(x+f)$, en prenant t pour une grandeur compoſée de x, qui deſcendent par degrés juſqu'à une grandeur purement conſtante, & dont la plus grande dimenſion ſoit ſeulement d'une unité moindre que dans q; pendant que les autres ſont affectées de grandeurs conſtantes: De même par s j'entends une ſuite de dimenſions de x affectées de conſtantes; & qui deſcendent tellement par degrés, que leur plus grande ſoit d'une unité moindre que la plus grande de celles qui ſont dans t. De cette maniere $sdx:t+adx:(x+f)$ donnera $(sx+sf+at)dx:(tx+tf)=rdx:q$, où les x des dénominateurs monteront à un même degré. Ainſi en faiſant le reſte comme cy-deſſus, on trouvera les valeurs des grandeurs conſtantes indéterminées, qu'on y aura ſuppoſées: De ſorte que $rdx:q$ ſe trouvera reſoluë en $sdz:t+adx:(x+f)$, où les x de t ſeront déja d'un degré plus bas que dans q. On reſoudra de même $sdx:t$ en $vdx:w+bdx:(x+g)$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'enfin on ſoit arrivé à de ſimples racines de x dans les dénominateurs des fractions ſuppoſées; ce qui étant, la reſtante $rdx:q$ de la propoſée, ſe trouvera reſoluë en ces ſimples-ci: $adx:(x+f)+bdx:(x+g)+cdx:(x+h)+$ &c. Il ne reſte donc plus qu'à faire voir comment les intégrales des ces derniéres fractions (qu'on voit dépendre de la deſcription de la logarithmique, ou de la quadrature de l'hyperbole, ſoit réelle, ſoit imaginaire) ſe peuvent exprimer en grandeurs exponentielles ou parcourantes: le voici.

On ſait que $dx:(x+f)$, $dx:(x+g)$, $dx:(x+h)$, &c. ſont les differentielles de Logarithmes de $x+f$, $x+g$, $x+h$, &c. Et qu'ainſi $\int(dx:(x+f))$, $\int(dx:(x+g))$, $\int(dx:(x+h))$, &c. ſeront ces Logarithmes eux-mêmes: De ſorte que l'on aura $\int(dx:(x+f))=l(x+f)$, & ainſi des autres, où l ſignifiera *logarithme*, comme d ſignifie *differentielle*. Donc $\int(adx:(x+f))+\int(bdx:(x+g))+\int(cdx:(x+h))+$ &c. $=al(x+f)+bl(x+g)+cl(x+h)+$ &c. [par la nature des Logarithmes] $=$ Log. $((x+f).^{a}(x+g).^{b}(x+h).^{c}$ &c.) *Ce qu'il falloit faire.*

COROLLAIRE.

On voit delà comment les équations differentielles rationelles, ou qui, par les manieres de DIOPHANTE, ou par d'autres, peuvent devenir rationelles, & dont les variables avec leurs differences ſe trouvent ſéparées de toutes autres, tant variables, que differentielles, peuvent toûjours ſe reduire à des équations algébraïques ou à d'exponentielles; ce qui doit

doit être d'un grand uſage dans la Méthode inverſe des Tangentes. En effet, ſi l'on ſuppoſe l'équation $s\,dx : t = \sigma\,dy : \theta$, dont x & y ſoient les variables [s & t ne ſont compoſées que de conſtantes & de telles dimenſions de x qu'on voudra; de même σ & θ ne ſont faites que de conſtantes & de telles dimenſions de y qu'on voudra auſſi: le tout délivré des ſignes radicaux], & que l'on prenne X & Y pour ce que les quotiens, qui réſultent des diviſions de s par t, & de σ par θ, ont d'abſolument intégrable, c'eſt à dire, pour les intégrales de ce que ces quotiens ont d'abſolu & ſans fraction; l'on aura $X + \text{Log.}\,((x+f)^a.(x+g)^b.(x+h)^c \&c.) = Y + \text{Log.}\,((y+\phi)^\alpha.(y+\gamma)^\beta.(y+\lambda)^\kappa \&c.)$ Et ſi l'on prend preſentement l'unité [par laquelle on conçoit que X & Y ſont multipliées] pour un Logarithme conſtant, dont n ſoit le nombre, la réduction des Logarithmes aux puiſſances donnera cette équation exponentielle $n^X.(x+f)^a.(x+g)^b.(x+h)^c.\&c. = n^Y.(y+\phi)^\alpha.(y+\gamma)^\beta.(y+\lambda)^\kappa.\&c.$ laquelle dégenere quelquefois en purement algébraïque, comme lorſque X & Y ſont nuls, & que a, b, c, de même que α, β, κ, ſont commenſurables.

Pour faire preſentemenr ſentir la beauté & l'univerſalité de cette méthode, voici un bel exemple: C'eſt le premier des deux Problémes qui ſe trouvent propoſés dans les *Actes de Leipſic* au mois de *May* de 1698. pag. 232. † & deſquels je trouvai auſſi-tôt la ſolution, que je donnai au mois d'Octobre de la même année de ces Actes pag. 473 *. Où il eſt pourtant à remarquer qu'au lieu de $\int((a^3 dz + 4azz\,dz) : (aaz - 6z^3))$ il faut $\int((-a^3 dz - 4azz\,dz) : (3aaz + 2z^3))$ & non pas $\int((a^3 dz + 4azz\,dz) : (aaz - 2z^3))$. Ce premier Probléme, dis-je, [lequel conſiſte à trouver une Courbe, qui coupe à angles droits toutes les Paraboles décrites ſur un même axe, dont chacune ait ſon parametre égal à la diſtance de ſon ſommet à un même point fixe de cet axe] ne ſe borne pas aux ſeules Parabo-

† Ci-deſſus N°. LI. Art. III. pag. 261. * N°. LII. pag. 271.

Paraboles ordinaires; il s'étend à toutes, de quelque degré qu'elles ſoient, & de maniere que la courbe cherchée ſe trouve toûjours algébraïque ou exponentielle. En effet, en prenant x pour le parametre variable d'une Parabole quelconque, m pour ſon expoſant, & $y = xz$ pour l'appliquée de la Courbe cherchée, on trouvera (1) $dx : x = (-mmz^{2m-2} - 1)\,dz : (mz^{m-} + z + mz^{2m-1})$ & non pas $(1 + mmz^{2m-2})\,dz : (mz^{m-1} - z - mz^{2m-1})$. Ainſi nôtre équation, ne ſe trouvant compliquée d'aucuns ſignes radicaux, quand même l'expoſant m ſeroit irrationel, elle pourra toûjours devenir algébraïque ou du moins exponentielle, par le moyen de la précédente Regle univerſelle; & par ce moyen la Courbe cherchée ſe trouvera auſſi toûjours algébraïque ou exponentielle.

Au reſte, il eſt à remarquer que la facilité & la brieveté du calcul dépend beaucoup du choix des variables: Par exemple, ſi au lieu de l'appliquée de la Parabole, l'on appelle ſon abſciſſe y, & ſon parametre variable $x = yz$, l'on aura (2) $dy : y = ((-m+1)z^{(m-2):m} - mm)\,dz : (mz^{(2m-2):m} + mmz + mm)$; mais ſi [toutes choſes demeurant les mêmes] l'on ſuppoſe $y = tx$, l'on aura (3) $dx : x = (-t^{(2-2m):m} - mm)\,dt : (mt^{(2-m):m} + mmt + mm)$. Et ſi [les choſes demeurant encore les mêmes que dans la premiere équation] on ſuppoſe $x = zy$, cette ſuppoſition donnera enfin (4) $dy : y = ((mm-m)z^{-2m+1} - mz^{-m+1})\,dz : (mz^{-2m+2} + mz^{-m+2} + 1)$.

La ſeconde équation univerſelle rend le Probléme très-facile dans les Paraboles ordinaires; car l'expoſant m de ces Paraboles étant $= 2$, cette équation univerſelle (2) donne cette particuliere $dy : y = -5dz : (6z+4) = -\frac{5}{6}dz : (z+\frac{2}{3})$, qui eſt très-ſimple, & qui par la Regle précédente ſe reduit à cette équation purement algébraïque $y(2y+3x)^5 =$ à quelque quantité conſtante priſe à diſcretion, par exemple égale a^6; ce qui donnera $x = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\sqrt[5]{(a^6 : y)}$. De ſorte que la Courbe cherchée ſe trouvera enfin algébraïque & très-facile à conſtruire. Si quelqu'un veut bien ſe donner la peine de faire le calcul néceſſaire pour trouver le degré de la Courbe, en prenant à l'ordinaire x & y pour ſes coordonnées, il la trouvera de 12 dimenſions, ayant pour équation

$$31104yyx^{10} + 25920y^4x^8 + 8640y^6x^6 - 64a^6x^6 + 1480y^8x^4 - 582a^6yyx^4 + 120y^{10}xx + 228a^6y^4xx + 4y^{12} - 4a^6y^6 + a^{12} = 0$$

S C H O L I E.

Puiſque dans l'exemple précedent des Paraboles, de même que dans les autres, les formules ci-deſſus (1), (2), (3), (4), & ce que l'on en pourroit peut-être encore trouver d'autres, donnent des dimenſions differentes, il eſt viſible qu'il y a du choix à faire entre ces formules, & qu'il eſt important de choiſir celle qui donne le moins de dimenſions. Par exemple, ſi l'expoſant des Paraboles eſt $= -1$, c'eſt à dire, ſi ces Paraboles dégenerent en Hyperboles ordinaires; alors on aura deux formules, ſavoir (2) & (4), leſquelles n'éleveront z ou t qu'à quatre dimenſions, pendant que les deux autres les éleveront à cinq. Si l'on choiſit la derniere, l'on aura $dy : y = (-2z^3 - zz)\,dz : (z^4 + z^3 - 1)$, laquelle équation différentielle [à cauſe des quatre dimenſions de z dans ſon dénominateur] ſe peut réſoudre en quatre ſimples, par le moyen de la précedente Regle générale; & ſi l'on en fait exactement le calcul ſuivant cette Regle, on trouvera $dy : y =$ à la ſomme de quatre quantités differentielles ſimples que voici, dans leſquelles la lettre n deſigne la racine de cette équation $n^6 - 3n^5 + 3n^4 - n^3 + 4nn - 4n + 1 = 0$, laquelle donne $n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}})} - \sqrt[3]{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}})})}$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{(-4nn+5n-2)\sqrt{(2n+1)}-(n+1)\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n+1)}}dz:(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n+(n-1)\sqrt{((\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}):(-2n+1))}\\
+\dfrac{(-4nn+5n-2)\sqrt{(2n+1)}+(n-1)\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n+1)}}dz:(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n-(n-1)\sqrt{((\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}):(-2n+1))}\\
+\dfrac{(-4nn+3n-1)\sqrt{(2n-3)}+n\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n-3)}}dz:(z+\frac{1}{2}n-n\sqrt{((\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}):(-2n+1))}\\
+\dfrac{(-4nn+3n-1)\sqrt{(2n-3)}-n\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n-3)}}dz:(z+\frac{1}{2}n+n\sqrt{((\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}):(-2n+1))}
\end{array}\right\} = dy:y$$

Mais

Mais n ayant ici deux valeurs réelles; ſi l'on ſe ſert de la plus grande, l'on aura $-2n+1$ négatif: Et par conſéquent les deux premieres de ces quatre différentielles ſeront imaginaires, & par conſéquent auſſi conſtructibles dépendamment de la rectification d'un arc de Cercle: pour les deux dernieres, elles ſeront réelles & conſtructibles par le moyen de la Logarithmique. Au contraire, ſi l'on ſe ſert de la moindre valeur de n, alors les deux premieres de ces mêmes différentielles ſeront réelles, & les deux autres imaginaires. Ainſi de l'une & de l'autre maniere, la conſtruction de la Trajectrice cherchée des Hyperboles, dépend en partie de la quadrature du Cercle, & en partie de la quadrature de l'Hyperbole, ou de la deſcription de la Logarithmique.

Manieres abregées de transformer les différentielles composées en ſimples, & reciproquement; Et même les ſimples imaginaires en réelles composées.

PROBL. I. Transformer la différentielle $adz : (bb - zz)$ en une différentielle Logarithmique $adt : 2bt$, & réciproquement.

Faites $z = (t-1)b : (t+1)$, & vous aurez $adx : (bb - zz) = adt : 2bt$. Reciproquement prenez $t = (+z+b) : (-z+b)$, & vous aurez $adt : 2bt = adz : (bb - zz)$.

Corol. On transformera de même la différentielle $adx : (bb+zz)$ en $-adt : 2bt\sqrt{-1}$ différentielle de Logarithme imaginaire; & reciproquement.

PROBL. II. Transformer la différentielle $adz : (bb + zz)$ en différentielle de ſecteur ou d'arc circulaire $-adt : 2\sqrt{(t - bbtt)}$; & reciproquement.

Faites $z = \sqrt{(1 : t - bb)}$, & vous aurez $adz : (bb+zz) = -adt : 2\sqrt{(t - bbtt)}$. Reciproquement prenez $t = 1 : (zz + bb)$, & vous aurez $-adt : 2\sqrt{(t - bbtt)} = adz : (bb + zz)$.

PROBL. III. Transfo^r^mer la différentielle $adz : (bb - zz)$ en différentielle de ſecteur hyperbolique $adt : 2\sqrt{(t + bbtt)}$; & reciproquement.

Faites

Faites $z = \sqrt{(1 : t + bb)}$, & enſuite $t = 1 : (bb - zz)$; & vous aurez ce qu'on demande.

PROBL. IV. Transformer la différentielle Logarithmique $adt : 2bt$ en différentielle de ſecteur hyperbolique $adr : 2\sqrt{(r + bbrr)}$.

Faites $t = (b + \sqrt{(1 : r + bb)}) : (b - \sqrt{(1 : r + bb)})$; & vous aurez ce qu'on demande.

Corol. 1. On transformera de même la différentielle Logarithmique imaginaire $adt : 2bt\sqrt{-1}$ en différentielle de ſecteur circulaire réel. Car en faiſant $t = (b\sqrt{-1} + \sqrt{(1 : r - bb)}) : (b\sqrt{-1} - \sqrt{(1 : r - bb)})$, l'on aura $adr : 2\sqrt{(r - bbrr)}$.

Corol 2. Puiſque (*Probl.* 2.) $\int (adz : (bb + zz))$ dépend de la quadrature du cercle, & que d'ailleurs $adz : (bb + zz)$ eſt $= \frac{1}{2} adz : (bb + bz\sqrt{-1}) + \frac{1}{2} adz : (bb - bz\sqrt{-1})$, qui ſont deux différentielles de Logarithme imaginaire; on voit que les Logarithmes imaginaires ſe doivent prendre pour des ſecteurs circulaires réels : parce que la compenſation, qui ſe fait de ces grandeurs imaginaires ajoutées enſemble, les détruit, de maniere que la ſomme en devient toute réelle.

Voiés N°. LXXXIX., & Tom. II. N°. CXIV.

JOHAN-

N°. LXXI.

JOHANNIS BERNOULLI

Perfectio Regulæ ſuæ editæ in Libro Gall. Analyſe des infiniment petits, Art. 163. *pro determinando valore fractionis, cujus Numerator & Denominator certo caſu evaneſcunt.*

EX nulla re magis eluceſcit Methodi utilitas, quam ſi inexpectatum præſtat auxilium in enodandis quæſtionibus quæ per alias vias, per quas tamen ſolas ſolvi poſſe videntur, infelici plerumque ſucceſſu tractantur, & irreſolutæ manent. Hujus inexpectati auxilii exemplum luculentiſſimum habemus in noſtro Calculo differentiali, circa præſentem materiam. Cum enim, ante hos decem circiter annos, incidiſſem in conſiderationem curvarum quarumdam algebraïcarum, quarum ordinatim applicatæ exprimuntur per fractiones habentes Numeratorem & Denominatorem uno in caſu nihilo æqualem, dum interim ipſius fractionis valor aliquid reale exiſtit, qui prima fronte determinatu non adeo facilis, ſed tanto difficilior, quanto plurium diverſorum laterum complicatione fractio compoſita habetur: Hoc, quicquid erat, Problematis loco propoſui, tum temporis, Illuſtriſſimo *Marchioni* HOSPITALIO, cujus nunc ſuprema fata lugemus, & nonnullis aliis, Galliæ præſertim, Mathematicis, & in ſpecie quidem hoc exemplum $y = (\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{ax^3})$, ut nempe mihi definirent valorem ipſius y, quando x ſumitur $= a$; ſiquidem, ex nuda ſubſtitutione aliud nihil emergat, quam $y = a0 : 0$; ex quo utique nihil concludi poſſit. *Acta Erud. Lipſ. 1704. Aug. pag. 375.*

Illi, re acrius perpenſa, dignam ſatis judicarunt quæſtionem, cui ſe applicarent; ſed varias tentantibus vias, per analyſin ordinariam, inſuperabiles difficultates ſeſe obtulerunt, neque ipſis,

vel

vel ſomniando, in mentem veniſſet, Calculum differentialem, in quo erant verſatiſſimi, hic aliquid præſidii afferre poſſe: tota quippe quæſtio cum mere eſſet algebraïca, eam etiam non niſi algebraïce reſolubilem cenſebant. Sed cum ex hoc fonte omnia adhibuiſſent, quæ aliquid ad ſcopum conferre videbantur; ſolutiones vero ſuas, diverſis modis tentatas, ſibi contradicere perſpexiſſent, modo hoc, modo illud, nunc $y = a$, nunc $y = 2a$, pro quæſito valore exhibentes, incerti utrum eligerent, agnoverunt tandem ſe multum abeſſe a vera ſolutione, quam a me libenter edoceri cuperent.

Reſpondi ego, ſi ex Analyſi ordinaria petere vellent modum aliquem ſolvendi, debere prius fractionem propoſitam ipſi y æquatam reduci ad æquationem, terminis pure rationalibus conſtantem, eamque poſtea, [quod ſemper fieri poſſit] dividi per $x - a$, & tandem in ea, quæ oritur, tantum ſubſtituendum eſſe a loco x, ut ita habeatur valor ipſius y.

Verum ſimul ſubdidi, hoc quidem ſuccedere in exemplis, ubi non magna ſit complicatio ſignorum lateralium, ut in hoc, $y = (-xx + a\sqrt{ax}) : (a - \sqrt{ax})$; ſublatis enim aſymmetriis provenire hanc æquationem, $x^4 - 2ayxx - a^3x - 2aayx - ayyx + aayy = 0$, qua diviſa per $x - a$, oriri hanc $x^3 + axx + aax + 2ayx - ayy = 0$, ubi poſito a pro x haberi $3a^3 + 2aay - ayy = 0$, adeoque, reſolvendo æquationem hanc, obtineri $y = 3a$, pro quæſito valore ipſius fractionis $(-xx + a\sqrt{ax}) : (a - \sqrt{ax})$, in caſu quo $x = a$. Quando autem exempla ſint talia, quæ plura, eaque diverſa ſigna lateralia involvant, ut in noſtro $y = (\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{aax})$, ubi tria diverſa ſunt ſigna, nullum tunc hac via ſucceſſum ſperandum eſſe, ob immenſum nimis laborem, qui ſuſcipiendus ſit in ſublatione irrationalitatum, & qui illam tantum non impoſſibilem reddat.

Dixi itaque aliam mihi præſto eſſe methodum, quam nulla quantacunque etiam ſignorum involutio irrïtam reddat, ſeſe porrigentem ad exempla complicatiſſima, eadem facilitate, qua ad ſimpliciſſima. Verum enim vero prælaudati illi Viri ad quæſtionem mere algebraïcam aliquid utilitatis, ut jam dixi, ex Calculo differentialium afferri poſſe non ſuſpicantes, ſcire geſtierunt ubinam ergo latitaret myſterium; quod, ut illorum indagandi induſtriam excitarem, non ſtatim aperui, uſquedum impenſius flagitantibus in eo conſiſtere tandem oſtendi, quod fractionis propoſitæ Numerator & Denominator conſiderari poſſint, tanquam exprimentes applicatas duarum curvarum ſuper communi axe deſcriptarum, & in aliquo ejus puncto concurrentium; in eo, ſcilicet, quod ab initio abſciſſarum diſtat quantitate a, qua ſubſtituta loco x, fractionis termini in nihilum abeunt, atque adeo cum duæ illarum duarum curvarum applicatæ, in illo puncto evaneſcentes, degenerent in ſuas differentiales; quod oporteat loco Numeratoris & Denominatoris ſubſtitui eorum differentiales, ut nova habeatur fractio ejuſdem valoris cum priore, in caſu ſingulari $x = a$; quod itaque hæc nova fractio, poſt ſurrogatum a pro x, ſtatim datura ſit citra ullam aliam operationem quæſitum valorem; & quidem pro ſuperiori exemplo $y = (\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{ax^3})$, facillime hunc $y = \frac{16}{9}a$.

Inexpectata hac facilitate perculſus Illuſtris HOSPITALIUS, Regulam iſtam, juxta alia mea, inſeruit poſtea *Analyſi infinite parvorum*, quam inde citans Doctiſſ. SAURINUS in *Ephemer. Paris.* 3 Aug. An. 1702. neſcius a quo fuerit inventa, generaliorem nonnihil deprædicat eam quam par eſt: ſed, veritatis amore, non eſt diſſimulandus Regulæ illius defectus aliquis, quem neuter animadvertit; hunc igitur ut detegam tollamque, & ita Regulam meam ad perfectionis colophonem perducam; notandum eſt, aliquando accidere poſſe, ut nova fractio orta ex differentiatione terminorum fractionis propoſitæ, eadem adhuc laboret difficultate, id eſt, ut novos acquirat terminos itidem in nihilum abeuntes, in caſu $x = a$; id quod tunc neceſſario contingit, quando differentiales ipſæ terminorum, in eo caſu, reſpectu reliquarum, vel infinite magnæ, vel infinite parvæ evadunt; ſeu quando curvæ illæ, ſuper eodem axe deſcriptæ, non obliquum, ſed vel rectum, vel nullum angulum faciunt cum axe in puncto concurſus. Exempli loco proponatur hæc fractio $(a\sqrt[3]{(4a^3 + 4x^3)}$

$+ 4x^3) - ax - aa) : (\sqrt{(2aa + 2xx)} - x - a)$; quæritur ejus valor existente $x = a$. Jam vero, si differentientur, ex Regulæ præscripto, termini fractionis: prodibit pro novo numeratore $axxdx \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{(a^6 + 2a^3x^3 + x^6)} - adx$, & pro novo denominatore $xdx \sqrt{2} : \sqrt{(aa + xx)} - dx$, quorum ille, in casu proposito, est $adx - adx$, seu $o\,adx$, & hic $dx - dx$, seu $o\,dx$, ideoque & ipsa nova fractio degenerat in $o\,adx : o\,dx$, seu $o\,a : o$; quæ valorem determinatum nullum habet, & ita per Regulam nihil hactenus proficeretur.

Huic inconvenienti ut medelam afferamus; duas novas oportet ut consideremus curvas super communi axe descriptas, quarum applicatæ eandem habent rationem, quam habent priorum differentiales; & si hæ iterum in communi puncto concursus angulum cum axe facerent vel rectum, vel nullum, aliæ rursus duæ curvæ considerendæ forent, quarum applicatæ haberent cum proxime præcedentium differentialibus eandem rationem: idque toties faciendum, donec perveniatur ad duas curvas axem oblique secantes in puncto concursus; ad tales enim tandem necessario pervenietur, nisi fractio proposita habeat valorem vel nullum, vel infinite magnum; quo casu, una tantem curva secabit axem oblique, altera tanget, aut normaliter secabit eum.

Hoc intellecto, facile est videre, si post primam differentiationem terminorum fractionis datæ, alii appareant termini qui, substituto a loco x, abeant in nihilum, hos iterum esse differentiandos, ut & ex his novos prodeuntes, si in casu $x = a$ denuo evanescant; & sic porro usquedum habeatur fractio constans terminis, in eo casu, non evanescentibus.

Ratio hujus processus est evidens, ex eo quod differentiæ applicatarum in curvis duabus primis possint esse, vel comparabiles, in puncto concursus axi, cum reliquis applicatarum differentiis; quo casu, una tantum differentiatione opus est, ut in exemplo priori $y = (\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}) : (a - \sqrt[4]{ax^3})$; Vel quod differentiæ illæ possint esse simpliciter infinite parvæ vel magnæ, respectu reliquarum differentiarum; quo casu, secunda

cunda differentiatio est instituenda, ut in exemplo altero $y -$ $(a\sqrt{(4a^3 + 4x^3)} - ax - aa) : (\sqrt{(2aa + 2xx)} - x - a)$. Si enim termini ex prima differentiatione orti $axxdx \sqrt[3]{4} : (\sqrt[3]{(a^6 + 2a^3x^3 + x^6)} - adx$, & $xdx\sqrt{2} : \sqrt{(aa + xx)} - dx$ id est [diviso utroque per dx] $(axx \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{(a^6 + 2a^3x^3 + x^6)} - a$ & $x\sqrt{2} : \sqrt{(aa + xx)} - 1$, denuo differentientur, prodibunt $2a^4xdx \sqrt[3]{4} : (aa + xx)^{-\frac{5}{3}}$ & $aadx\sqrt{2} : (aa + xx)^{-\frac{3}{2}}$ quibus positis in formam fractionis, & substituto a loco x habebitur $2a$ pro valore quæsito fractionis propositæ $(a\sqrt[3]{(4a^3 + 4x^3)} - ax - aa) : (\sqrt{(2aa + 2xx)} - x - a)$: Vel quod differentiæ illæ possint esse infinities infinite parvæ vel magnæ respectu reliquarum differentiarum, quo casu, tertia differentiatio adhibenda est: & ita, pro gradu infinitatis illius, multitudo differentiationum augebitur. Plura hunc in finem exempla, quæ in promptu essent, hic cumulare velle, res esset supervacanea, & tædii plena.

Cæterum vero, quando supra dixi, terminos fractionis propositæ habentes differentiales (in casu $x = a$) respectu reliquarum infinite magnas, per sui differentiationem producere novos terminos, in eo casu, iterum in nihilum abeuntes; hoc ita intellectum velim, quod post peractam reductionem demum in nihilum abeant: alias certe novi termini prodeuntes, ut quilibet attendens facile videt, infiniti potius evadunt, ita ut Numerator si $m : o$, & Denominator $n : o$ uterque scilicet infinitus; sed per reductionem habeatur $\frac{m : o}{n : o} = \frac{om}{on}$, cujus nunc termini utique ex infinitis fiunt evanescentes.

N°. LXXII.

PROBLEME A RESOUDRE.

Journal des Savans 1703. 7e. Journ. du 12. Fevr. pag. 112. Edition de Paris. pag. 182. Edition de Hollande.

UNe Courbe algébraïque (vulgairement appellée géométrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussi géométriques, mais d'especes differentes, lesquelles soient chacune de même longeur que la proposée.

Ce Probléme a été proposé à Mr. BERNOULLI Professeur à *Groningue*, par un Mathématicien de son voisinage. Il le propose à son tour aux Géométres, auxquels il donne tout le reste de cette année, c'est-à-dire, jusqu'au commencement de 1704, pour le résoudre.

N°. LXXIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS

A Clariss. Viro D. Joh. BERNOULLI, *in* Diario Gallico Febr. 1703. *propositi*

Quam D. G. CHEYNÆO communicavit *Joh.* CRAIG.

PROBLEMA.

PRopositæ curvæ geometricæ alias innumeras longitudine æquales invenire.

SOLUTIO.

Philosoph Transact. N° 289. 1704. Janv. Febr. Art. II. p. 1527.

Sint v, s coordinatæ Curvæ datæ, & Curvæ quæsitæ sint coordinatæ x, y: tum ex conditione Problematis erit $dv^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ponatur $dx = dv - mdz$, unde erit $dy = \surd(ds^2 + 2mdvdz - m^2dz^2)$; in hac, pro ds substituatur ejus valor per v, dv & determinatas expressus:

pressus: & pro dz assumatur talis valor ex v, dv & determinatis compositus, ut valores quantitatum dx, dy sint summabiles. Et sic habentur x ac y coordinatæ Curvæ quæsitæ. *Q. E. I.*

Acta Erud. Lips. 1705. April. pag. 190.

EXEMPLUM I. Invenire Curvam æqualem lineæ Parabolicæ. Sit $2a$ latus rectum Parabolæ; adeoque $2as = v^2$, unde $ds^2 = a^{-2}v^2 dv^2$, adeoque $dy = \surd(a^{-2}v^2dv^2 + 2mdvdz - m^2dz^2)$. Ut hæc sit summabilis, assumatur $mdz = a^{-2}v^2dv$, unde $dx = dv - a^{-2}v^2dv$, & $dy = dv\surd(3a^{-2}v^2 - a^{-4}v^4)$; Quarum integrales, per methodos dudum cognitas, invenientur $x = v - v^3 : 3a^2$, & $y = \frac{v^2 - 3a^2}{3a^2}\surd(3a^2 - v^2)$.

EXEMPLUM II. Invenire Curvam æqualem Circulari. Sit a radius Circuli; tum $s = \surd(a^2 - v^2)$, unde $ds^2 = v^2dv^2 : (a^2 - v^2)$; & proinde erit $dy = \surd(v^2dv^2 : (a^2 - v^2) + 2mdvdz - mdz^2)$. Ut hæc sit summabilis, assumatur $mdz = 4v^2dv : a^2$, adeoque $dx = dv - 4v^2dv : a^2$, & $dy = (-3a^2v + 4v^3)dv : a^2\surd(a^2 - v^2)$; Quarum integrales, per communes methodos, inveniuntur $x = v - 4v^3 : 3a^2$, & $y = \frac{a^2 - 4v^2}{3a^2}\surd(a^2 - v^2)$.

EXEMPLUM III. Invenire Curvam æqtalem Ellipticæ. Sit $2r$ latus rectum, $2a$ latus transversum, tum $s = \frac{r}{a}\surd(a^2 - v^2)$, unde erit $ds^2 = r^2v^2dv^2 : (a^4 - a^2v^2)$, adeoque $dy = \surd(r^2v^2dv^2 : (a^4 - a^2v^2) + 2mdvdz - mdz^2)$. Ut hæc sit summabilis, assumatur $mdz = (2a + 2r)v^2dv : a^3$; unde $dx = dv - (2a + 2r)v^2dv : a^3$, & $dy = dv\surd(r^2v^2 : (a^4 - a^2v^2) + (4a + 4r)v^2 : a^3 + (2a + 2r)^2 v^4 : a^6)$; quarum integrales, per methodos notissimas, inveniuntur $x = v - (2a + 2r)v^3 : 3a^3$, & $y = \frac{2a^3 - ra^2 - 2av^2 - 2rv^2}{3a^3}\surd(a^2 - v^2)$.

EXEMPLUM IV. Invenire Curvam æqualem Parabolæ Cubicali, cujus æquatio sit $3a^2 s = v^3$; unde $ds^2 = v^4dv^2 : a^2$, & proinde $dy = \surd(a^{-4}v^4dv^2 + 2mdvdz - m^2dz^2)$. Ut hæc sit summabilis, assumatur $mdz = v^2dv : 2a^2$; unde $dx = dv - v^2dv : 2a^2$, & $dy = \frac{vdv}{2a^2}\surd(3v^2 + 4a^2)$; quarum integrales, per methodos vulgo notas, sunt $x = v - v^3 : 6a^2$, & $y = (\frac{vv}{6aa} + \frac{2}{9})\surd(3vv + 4aa)$.

Ex aliis infinitis valoribus quantitatis mdz debite assumptis, infinitas invenias Curvas datæ æquales. Tu vero, Vir Eruditissime, facile percipias hoc Problema aliquam habere cum Problemate quodam *Diophantæo* affini-

affinitatem : Problema DIOPHANTI eſt, Dividere ſummam duorum Quadratorum in duo alia Quadrata, quorum latera ſint rationalia; & Problema BERNOULLII eſt, Dividere ſummam duorum Quadratorum in alia duo Quadrata, quorum latera ſint ſummabilia. Sicut Problematis *Diophantæi* ſolutio a vulgari tantum Algebra dependet, ſic *Bernoulliani* Problematis ſolutio communes tantum Fluxionum methodos inverſas requirit: utriuſque artificium in debita laterum quæſitorum aſſumptione conſiſtit; ſcil. *Diophantæum*, ut ſint rationalia; *Bernoullianum*, ut ſint ſummabilia.

N°. LXXIV.

JOHANNIS BERNOULLI

MOTUS REPTORIUS,

Ejuſque inſignis uſus, pro lineis curvis in unam omnibus æqualem colligendis, vel a ſe mutuo ſubtrahendis; atque hinc deducta Problematis de Transformatione curvarum, in Diario Gallico Pariſ. 12 Febr. 1702 *propoſiti, genuina ſolutio.*

Acta Erud. Lipſ. 1705. Aug. pag. 347.

QUartus agitur annus, ex quo ſolutum habui Problema *de transformanda Curva algebraïca in alias innumeras algebraïcas longitudine æquales*, non diu ante mihi propoſitum ab egregio quodam *Belgii* Mathematico. Idem poſtea, quod viderem poſſe præſtare inſignem uſum pro dimenſione & comparatione curvarum, publice propoſui in *Diario Gallico* menſ. *Febr.* 1703, conceſſo totius modo tum incipiantis anni decurſu, ſpe fretus fore ut, per ejus ſolutionem unam vel alteram, Geometria recondita incrementum eſſet captura non ſpernendum. Sed ultra præſtitutum limitem [intra quem nihil ſolutionis comparuit] jam fere ſeſquiannus eſt elapſus, necdum tamen dedi meam ſolutionem; quod fateor oſcitantiæ, an oblivioni meæ imputandum, forſan diutius duraturæ, niſi excuſſiſſet eam viſa mihi nupera clariſſimi *Joh.* CRAIGII ſolutio

ſolutio publicata primum in *Tranſact. Philos. Londin.* Anno 1704, Num. 289, & poſtea tranſcripta in *Acta Eruditorum* noviſſimi *Aprilis*.

Quid de hac ſolutione cenſeam, mearum eſt partium paucis prius aperire, quam meam propoſuero; neque id facere verebor, cum mihi conſtet, Clariſſimi Auctoris popularem Celeberrimum NEWTONUM ſententiæ meæ ab Amico quodam [cui eam privatim perſcripſeram] intellectæ per totum ſuffragari. Quare non ægre laturum ſpero acutiſſimum CRAIGIUM, ſi, quod in ipſius ſolutione deſidero amice & candide proponam. Illam, ut pote brevem, huc tranſcribo totam. „ Sint, inquit, v, s coordinatæ Curvæ datæ & Curvæ quæſitæ ſint „ coordinatæ x, y: tum, ex conditione Problematis erit dv^2 „ $+ ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ponatur $dx = dv - m dx$; unde „ erit $dy = \sqrt{(ds^2 + 2 m dv dz - m^2 dz^2)}$; in hac, pro „ ds ſubſtituatur ejus valor per v, dv, & determinatas expreſſus: „ & pro dz aſſumatur talis valor ex v, dv & determinatis „ compoſitus, ut valores quantitatum dx, dy ſint ſummabi- „ les. Et ſic habentur x ac y, coordinatæ curvæ quæſitæ. *Q. E. I.*

Nihil unquam expediri potuiſſet brevius, non nego: ſed & ipſa nimia brevitas eſt ſuſpecta. Revera enim quis, quæſo, vel leviter attendens, non viderit ſtatim poſtulari gratis, *& pro* dz *aſſumatur talis valor ex* v, dv *& determinatis compoſitus, ut valores quantitatum* dx, dy *ſint ſummabiles?* Poſtulatum hoc non minus difficile videtur quam ipſum Problema; imo, ſi illud dixero difficilius, non adeo a veritate alienum dixero: ſuperaddit enim tacite Problemati conditionem aliquam præter neceſſitatem, quæ hæc eſt, quod non tantum curvæ, ſcilicet totam toti, ſed etiam partes partibus æquales fieri jubeantur; quæ tamen poſterior conditio non exigitur in Problemate: ſufficit namque exhibere curvam datæ æqualem, licet partes æquales in illis determinari non poſſint. Exempla interim, quæ Vir Clariſſimus adducit, & quæ an recte ſoluta examinare nondum vacavit, non magis probant gene-

ralem

ralem Problematis solutionem, quam si quis, per nonnulla exempla æquationum quadratarum & cubicarum a se resolutarum, contendere vellet, se monstrasse viam generalem resolvendi æquationem, cujuscunque sit dimensionis.

Videtur Doctissimus CRAIGIUS ipse quodammodo agnoscere imperfectionem suæ solutionis. Sub finem enim, ubi innuit Problema *Diophantæum*, quo petitur, Dividere summam duorum quadratorum in duo alia quadrata, quarum latera sint rationalia, affinitatem habere cum nostro, quod putavit necessario idem esse quam, Dividere summam duorum quadratorum in alia duo quadrata, quorum latera sint summabilia; rectissime subdit, solutionem mei Problematis communes tantum Fluxionum methodos inversas requirere, & artificium in debita laterum quæsitorum assumtione consistere, scilicet ut sint summabilia; quo satis nobis indicare vult, quod, quemadmodum illa fluxionum methodus inversa nondum ad perfectionem est perducta, sed immane quantum adhuc circa illam a Geometris desideratur, ita etiam solutio sua, quæ illam methodum requirit, perfecta dici non possit: artificium autem [quod ipse ita vocat] assumendi latera debito modo, ut sint summabilia, haud dubie arcanum est difficillimum. Non ergo illud in solutione generali fuisset supponendum, sed demonstrandum: quod dum fiet, meam nunc solutionem cum alio, quod me eo deduxit, novo invento communicare nequaquam gravabor.

Verum hoc loco non est dissimulandum, quod acceptum ferimus Illustri nostro LEIBNITIO, felicioribus auspiciis rem aggresso. Is quippe mihi, sub initium anni superioris, perscripsit aliquod tentamen solutionis, neutiquam paralogisticæ; imo cui nihil deerat, nisi ut laborem calculi [qui ad perplexitatem haud facile superabilem deducere videbatur] tollendi modum ostenderet. Via autem, quam ineundam censuit Vir perspicacissimus, consistit in coevolutione duarum curvarum, ope styli commune complicatum filum tendentis, & describentis

bentis tertiam aliquam curvam; quæ, si algebraïca sit, ut & una ex evolutis, altera etiam necessario erit algebraïca, non minus quam ipsa etiam coevolutarum differentia semper per lineas rectas algebraïce determinabiles existit. Ex quo prævidit Illustris LEIBNITIUS, coevolutas posse fieri longitudine æquales, evanescente scilicet illa differentia; adeoque, ut curvæ datæ algebraïcæ inveniatur alia algebraïca æqualis, nihil aliud faciendum esse, quam ut assumatur pro arbitrio aliqua curva algebraïca [specifice tamen determinata & debite collocata,] quæ præstet speculi vicem, id est, quæ tangentes curvæ datæ, tanquam radios incidentes, sub angulo æquali reflectat, & per eorum intersectiones, causticarum more, formet novam curvam algebraïcam: hæc enim, cum data curva, faciet duas coevolutas pro assumta illa arbitraria per filum describenda. Et quia de casu tantum speciali in calculo agitur, ut nimirum coevolutarum differentia sit nulla; debito modo assumere jubet, sive speciem, sive parametrum, sive situm, sive aliud quid curvæ arbitrariæ, quo, in proposito casu, illa differentia evanescat, atque adeo datæ evolutæ inveniatur altera æqualis.

Ampliorem ejus rei explicationem non dabo; a nemine enim pro dignitate sua melius tractabitur, quam ab ipso inclito Viro, proinde humaniter rogando, ut communium studiorum bono & incremento methodum suam, hactenus nonnisi levi penicillo adumbratam, perficere, & inprimis, quomodo arbitraria illa curva, speculi vices subitura, sine operoso & molesto calculo, specifice determinanda vel collocanda sit, ut coevolutarum differentia evadat datæ æqualis, vel nulla, compendiosam aliquam viam aperire nobis dignetur.

Mea nunc inventa daturus, præmitto Geometrarum more nonnullas Definitiones & Postulata.

Fff 2 DEFI-

DEFINITIO I.

Tab. XVII. Fig. 1. Per *Normales extremas* intelligo lineas rectas ad utramque curvæ alicujus extremitatem perpendiculariter ductas. Sic BN & AN sunt normales extremæ curvæ ACB.

DEFINITIO II.

Amplitudo curvæ ad eandem partem concavæ est angulus, quem constituunt normales extremæ. Sic angulus BNA est amplitudo curvæ ACB.

DEFINITIO III.

Secare curvam *in partes æque amplas vel amplitudinis æqualis*, est eam ita dividere, ut partium singularum normales extremæ constituant angulos æquales.

DEFINITIO IV.

Curva curvam *obrepere* dicitur, si mobilis super immobili moveatur motu parallelo, & interim altera alteram continuo tangat, partibus convexis sibi mutuo obversis. Mobilis autem curva vocetur *Perreptans*, & immobilis *Perreptanda.*

DEFINITIO V.

Curva curvam *subrepere* vocatur, si similis fiat motus, hoc tantum discrimine, quod nunc curva perreptans convexitate sua, inter *rependum*, tangat continuo partem concavam curvæ perreptandæ.

Ut clarius hi duo motus intelligantur, possunt quodammodo comparari cum deviatione navis, qua scilicet fit, ut dum exempli gratia, a Borea in Austrum vi venti fertur, interim simul ab occulto quodam aquarum motu in aliam rapiatur plagam; quo pacto duas licet concipere curvas, quarum unam uno, alteram altero latere navis perpetuo tangit, quarum proinde una a navi *obrepitur*, altera *subrepitur.*

Fingamus igitur (*Fig. I. & II.*) curvam ACB immobilem, Tab. XVII. seu perreptandam, aliamque mobilem, seu perreptantem ECF, quæ posito, primo, vertice E in verticem A, axique EG in axem AD, vel cum eo in directum, moveatur postea ECF motu parallelo per ACB; hoc est, ut axis EG, & sibi, & AD maneat semper parallelus; habebitur (*Fig. I.*) motus *obreptionis*, & (*Fig. II.*) motus *subreptionis.*

DEFINITIO VI.

Curvam Reptoriam voco, quæ describitur hoc motu, per punctum quodvis in plano perreptantis curvæ ECF situm; ut, exempli gratia, AEH per verticem E, vel LGM per punctum G in axe.

DEFINITIO VII.

Curvarum perreptandæ & perreptantis, ACB & ECF, partes illas duas AC & EC, quæ jam suum officium fecerunt, illa rependo, hæc reptionem patiendo, vocabo *partes eadem reptione defunctas.*

POSTULATUM I.

Curvæ datæ algebraïcæ postulantur dari quoque algebraïce tangentes & normales.

POSTULATUM II.

Postulatur Curvam datam algebraïcam secari posse algebraïce in partes quascunque æque amplas.

LEMMA I.

Curvis, perreptanda & perreptante, existentibus algebraicis, erit quoque quæ hinc generatur, reptoria algebraïca.

Liquet ex *Postul.* I & II. Nam constat partes eadem reptione defunctas, AC & EC, esse æqualis amplitudinis; adeoque, assumpto arcu AC ad lubitum, posse algebraïce determinari arcum æque altum EC; hinc & punctum E in curva reptoria AE.

LEMMA II.

Omnes Curvæ reptoriæ, vel quæcunque earum partes eadem reptione descriptæ, inter se sunt æquales & similes.

Patet hoc ex parallelismo motus: sumatur enim in plano perreptantis ECF duo quæcunque puncta describentia E & G, quibus connexis per rectam EG, manifestum est hanc rectam, per motum reptionis singulis momentis translatam per intervallum minimum in situm priori parallelum, descripsisse utraque sua extremitate lineolas parallelas & æquales, quæ cum sint elementa curvarum AEH, LGM, constat propositum.

COROLL. I. *Tangentes ductæ ad extremitates omnium reptoriarum, vel quarumcunque earum partium eadem reptione descriptarum, parallelæ sunt omnes, tam inter se, quam communi tangenti per punctum contactus curvarum vel partium eadem reptione defunctarum.*

COROLL. II. *Reptoria cum partibus perreptandæ & perreptantis eadem reptione defunctis semper est ejusdem amplitudinis.* Hinc jam fluit utilissimum, quamvis facile

THEOREMA I.

Omnia Reptoria, vel quæcunque ejus pars, est longitudine æqualis, vel summæ, vel differentiæ partium perreptandæ, & perreptantis eadem reptione defunctarum; nempe summæ, si motus fiat per obreptionem; & differentiæ, si per subreptionem.

DE-

DEMONSTR. Concipiatur perreptans ECF progredi in situm proximum, ita ut vertice ejus E perveniente in e punctum simul perreptantis m cadat in punctum perreptandæ n; clarum nunc est, lineolam Ee, quæ per *Coroll.* I. parallela est lineolis Cn & Cm, fore in *Fig.* I, æqualem summæ $Cn + Cm$, & *Fig.* II, differentiæ earumdem $Cn - Cm$: nam per parallelismum motus fit, ut progressus puncti E nempe Ee, sit æqualis distantiæ punctorum n & m, quæ vero distantia, cum particulæ Cn & Cm in directum jacere censeantur, non differt ab earundum summa in *Fig.* I, & a differentia, in *Fig.* II. Sunt vero Ee, Cn, & Cm, elementa suarum respective curvarum AE, AC, & EC: Ergo etiam, collectim sumtis elementis, erit curva reptoria AE æqualis in *Fig. I.* summæ perreptandæ & perreptantis AC + EC, & in *Fig. II.* differentia earumdem AC — EC. *Q. E. D.* TAB. XVII. *Fig.* 1. & 2.

SCHOLIUM.

In memoriam hic sibi revocabit B. Lector, quod Illustre Virorum par, summus LEIBNITIUS, & acutissimus, dum viveret, HUGENIUS præstiterunt, introductis scilicet ab hoc *Evolutionis*, ab illo *Tractionis* motibus, non sine insigni pro notitia curvarum emolumento: sed nunc judicet, pro æquitate sua, annon noster *Motus Reptionis* illis duobus saltem adjungi mereatur. Sive enim ejus facilitatem & simplicitatem, sive utilitatem spectare velit, deprehendet eum in omni parte mirifice excellere. Quis enim motus facilior & simplicior, quis vero etiam ad praxin accommodatior, quam qui sibi semper parallelus est? Quantæ autem sit utilitatis, præter ardui Problematis solutionem mox dandam, vel hoc arguit, quod nobis introitum reseret ad abstrusiora, & tantum non hactenus desperata circa curvas cognoscenda & efficienda. Quorum unum alterumve tantum notabo: Et primo quidem, cuivis statim obvium est, quomodo, datis duabus aut pluribus curvis algebraïcis, facile alia nova algebraica inveniatur, cujus area æqualis

sit

sit summæ vel differentiæ arearum datarum; erecta scilicet tantum ad communem abscissam nova applicata summæ vel differentiæ datarum applicatarum æquali: At vero, si non areæ, sed longitudines ipsæ datarum algebraïcarum, in aliam novam algebraïcam curvam conflari, id est, inveniri si debeat curva algebraïca, cujus longitudo æquetur aliarum datarum vel summæ, vel differentiæ; hoc jam, quod hactenus a nemine effectum reperias, nostræ videtur reservatum methodo, rem mirabili brevitate absolventi. Etenim si primo duas ex datis curvis sumas, earumque unam obrepere facias, alteram habebis reptoriam duabus datis æqualem; ad quam si eodem modo addas tertiam datam curvam, ope obreptionis denuo instituendæ, prodibit alia nova reptoria tribus istis datis curvis longitudine æqualis, cui simili modo quartam, postea quintam, & plures porro addendo, habebis tandem unam omnibus simul curvis datis æqualem, & quidem, per *Lemma I*, algebraïcam, si tales quoque fuerint datæ; sicubi vero differentia, vel substractio curvarum facienda occurrit, loco tunc obreptionis, subreptionem instituendam esse, non necesse duco ut moneam.

Quæ cum ita se habeant, nulla posthac erit res ardua, curvas non tantum dissimiles, sed & diversorum omnino generum in unam [subintelliges algebraïcam, si illæ tales fuerint] colligere, vel a se mutuo subtrahere, vel partim subtrahere & partim addere; atque vel aggregato, vel differentiæ, vel partim differentiæ, partim aggregato, unam æqualem construere curvam. Sic exempli gratia, non solum Ellipses quotcunque dissimiles [quod tamen antea sat magnæ difficultatis fuisset] sed Ellipses cum Hyperbolis, & Parabolis, per nostram methodum facile coalescent in unam, hoc est, sine magno labore exhibebo jam curvam algebraïcam, quæ sola trium sectionum conicarum datarum longitudinem exæquet. Ex hisce vero deducitur sequens in abstracto propositum

THEO-

THEOREMA II.

Sint curvæ quot & qualescunque ADL, ACM, ABN; *sitque alia curva* APR *cujus abscissa* AO *æqualis abscissarum summæ* AE + AF + AG *respondentium partibus* AB, AC, AD, *æque amplis; & applicata* OP *æqualis applicatarum summæ* EB + FC + GD: *Dico curvam* AP *æquari longitudine omnibus curvis* AB + AC + AD. *Quod si vero* AO *esset summa abscissarum tantum aliquarum, mulctata reliquis abscissis, & similiter* OP *summa respondentium applicatarum, mulctata reliquis applicatis: Dico fore etiam curvam* AP *æqualem summæ curvarum unarum, mulctatæ reliquis curvis. Exempli gratia, si* AO *sit* = AG + AF — AE, *&* OP = GD + FC — EB; *erit curva* AP = AD + AC — AB. *Dico tandem etiam, in utroque casu, fore curvam* AP *æqualis amplitudinis, cujus sunt* AB, AC, *vel* AD. Tab. XVII. *Fig.* 3.

Demonstratio hujus ex præcedenti *Theoremate* haud difficulter colligitur: immo & immediate ex calculo differentialium directo peti potest. Quare illa relicta, revertor ad motum nostrum reptorium; qui hoc alterum notatu dignum nobis suppeditat, quod est inventum de dimensione linearum curvarum per circulares a me jam olim publico exhibitum in *Actis* hisce Anni 1695, m. *Aug.* † & Nobilissimis Duumviris Leibnitio & Tchirnhausio * tantopere laudatum, eodem Anno, mense *Novembri*: quo ostendi duas curvas, eadem evolutione condescriptas, per duo quælibet fili evolventis puncta, habere summam vel differentiam æqualem arcui circulari. Lubet ergo nunc ostendere, quomodo hoc Theorema, quod tunc singulari demonstratione muniveram, non sit nisi specialissimus duntaxat casus præsentis hujus de Reptoriis.

Sit enim curva perreptanda quæcunque ACB, sed perreptans ECG sit jam circulus; sumaturque punctum describens reptoriam LOM, in ipso centro O; patet statim reptoriam LOM esse, hoc casu, eam quæ describeretur per evolutio- Tab. XVII. *Fig.* 4.

† Supra N°. XXVI. * Supra N°. XXVIII. & XXIX.

nem eandem, per quam deſcriberetur ipſa ACB: puncta enim O & C intervallo ſemper æquali & perpendiculari ad curvas LOM & ACB exiſtentia, haſque proinde æquidiſtantes facientia, facile concipiuntur neceſſario eſſe in filo communi evolvente. Habemus igitur curvam LO per obreptionem æqualem ſummæ; & per ſubreptionem, æqualem differentiæ curvæ AC & arcus circularis EC, adeoque & hunc arcum utroque modo æqualem differentiæ curvarum LO & AC. Quando vero circulus ſubrepens ECG minoris eſt convexitatis, quem curva perreptanda ACB, id eſt, quando curvatura circuli ECG includit curvaturam ACB, illius nempe radio majore exiſtente quam radius circuli oſculantis in C; erit tunc differentia inter AC & EC penes arcum EC tanquam majorem; unde ſumma curvarum AC & LO, partes concavas ſibi jam obvertentium, habebitur æqualis arcui circulari EC. Verum enimvero cum parum ſit naturalis & incommode peragatur motus ſubreptionis, ubi ſuprepens includit ſubrependam, poſſunt hæ vices ſuas permutare, ita ut nunc circulus ſubrependæ, illa vero ſubrepentis functionem obeat: ſciendum quippe, in genere, per converſionem perreptantis in perreptandam, & viciſſim, nihil in reptoria quæ deſcribitur immutari, præter ſitum.

Atque ita veritatem Theorematis ex *Actis* citatis, tanquam corollarium ex novo hoc motus reptorii invento deduximus, ubi præterea notare convenit fundamentum, cur curvæ ex evolutione condeſcriptæ, nihil aliud ſint quam ſpecies reptoriarum; id quod in hoc conſiſtit, quoniam circulus ECG, ob partes ſuas ſimilares, ſive motu rotationis, ſive motu reptionis feratur ſuper AC, centro ſuo A eandem, utroque modo, deſcribit cuvam LOM: Atqui rotando, uti notum eſt, fit condeſcripta ex evolutione: Ergo conſtat quod indicare volui.

Ne vero diutius Lectorem detineam, propero tandem ad ſolutionem genuinam Problematis in *Diario Gallico* propoſiti, *de Transformatione Curvarum*; quod, ſi unum excipias ampliſſimum LEIBNITIUM, qui non infeliciter adeo rem eſt adorſus, in hanc uſque tamen diem, quantum conſtat, nondum perfectam a quoquam accepit enodationem, & ne ab illis quidem, quod miremur, qui nihil non pervium ſibi, & multa ſibi ſolis perſpecta putantes, alios provocando, nec modum nec menſuram tenuerunt: qualis vero cauſa ſit veterni corripientis eorum ſagacitatem hac in parte, hujus loci non eſt inquirere.

PROBLEMA.

Datam curvam algebraïcam transformare in alias innumeras etiam algebraïcas ejuſdem cum ipſa longitudinis, ſed quæ ſint diſſimiles datæ, tam quoad totum, quam quoad partes.

SOLUTIO I. *per motum obreptionis.*

Eſto curva data algebraïca ACB, quæ per *Poſtul. II.* ſecetur in partes aliquot æquales amplitudinis, exempli gratia, in duas AP & PB. Convertatur una ex iis, ut AP, circa rectam tangentem in P tanquam circa axem, ut convexitas in contrariam mutetur, ſumatque ſitum aP; in hoc ſitu obrepat aP partem PCB; ita, ſcilicet, ut inter rependum ſemper ſervet ſitum $\alpha C \pi$ parallelum primo aP. Curva reptoria, quæ hinc deſcribitur, $P \pi Q$, per punctum aliquod ad lubitum aſſumtum in plano curvæ $\alpha C \pi$, ut π, erit una ex quæſitis. Eſt enim, per *Theorema I.* $P \pi Q = \alpha C \pi + PCB =$ [quia $\alpha C \pi = aP = AP$] $AP + PB = APB$. Eſt autem $P \pi Q$ curva algebraïca, per *Lemma I.* Adeoque datæ algebraïcæ inventa eſt alia algebraïca æqualis; cui poſtea eadem methodo inveniri poteſt æqualis ſecunda, & deinde ſecundæ tertia, tertiæ quarta & ita in infinitum. Sunt vero etiam omnes diſſimiles, quoniam ſemper pars reptoriæ extrema $P \pi$ æqualis eſt partibus $PC + \pi C$, hoc eſt parti alicui intermediæ inter extremitates curvæ datæ APB; quod neceſſario diſſimilitudinem curvarum, partiumque ejus arguit; excepto unico caſu, quo nempe curva data æquabilis convexitatis, omneſque adeo par- TAB. XVII. Fig. 5.

tes ſimilares, id eſt, ſi curva data eſſet circulus, quem igitur hic exceptum volo, daturus infra pro eo ſolutionem peculiarem. Ergo transformata eſt omnis curva data, excepto circulo, in alias innumeras ſibi æquales, & quidem omnes algebraïcas, ſi propoſita ſit algebraïca. *Q. E. F.*

COROLL. I. Curva inventa prima P π Q dimidiæ eſt amplitudinis, cujus eſt data APB; ſecunda amplitudinis eſt partis quartæ, tertia octavæ, quarta decimæ ſextæ, & ſic porro; decreſcentibus ſcilicet amplitudinibus curvarum in progreſſione geometrica ſubdupla: unde ultro hic ſe nobis offert nova ratio rectificandi curvas per approximationem. Cum enim recta linea nihil ſit aliud quam curva amplitudinis infinite parvæ, curvæ utique noſtræ, ipſi APB æquales, per ſucceſſivas operationes inventæ, quanto minoris fiunt amplitudinis, tanto magis ad rectas lineas accedunt.

COROLL. II. Si curva propoſita ſecetur in tres partes amplitudinis æqualis, eæque per methodum ſupra traditam conflentur in unam curvam, habebimus iterum novam propoſitæ æqualem, quæ poſtea ſimiliter in aliam, & hæc iterum in aliam [& ita quoties libuerit] transformabitur. Pari ratione, ſi ab initio ſecetur curva data in quatuor partes æqualis amplitudinis, prodibit nova progreſſio infinita curvarum inventarum datæ æqualium; per quinquiſectionem curvæ datæ rurſus nova obtinetur curvarum ſeries; nec non nova, & nova ſemper, habetur per ſectionem in ſex, in ſeptem, in octo &c. partes æque amplas. Et ita ſatisfactum eſt Problemati, non uno modo tantum, ſed modis infinitis, quorum ſinguli innumeras exhibent curvas datæ æquales. Hi modi ſi combinentur, prodibit numerus modorum infinitorum infinitus; quibus ulterius combinatis ſine fine, exoriuntur novi ſemper infinitatis gradus, quibus præcedentes quaſi abſorbentur.

TAB. XVII. *Fig.* 5. COROLL. III. Alia præterea ratione obreptio initialis peragi poteſt; mutato nimirum ſitu partis AP, vel *a* P, ut extremitates partium non contiguæ ab initio ſe tangant, hoc eſt, ut extremitas *a* partis *a* P tangat extremitatem P partis

PB,

PB, hacque diſpoſitione inſtituatur obreptio. Fiet enim reptoria P π Q, omneſque reliquæ, poſtea ut prius deſcribendæ, a prioribus diverſæ, & tamen ipſi propoſitæ APB æquales. Hic autem modus imprimis locum obtinet, quando curvæ partes PA & PB ſunt æquales & ſimiles, uti fit, cum APB eſſet, exempli gratia, aliqua ex Sectionibus conicis, in qua punctum P foret vertex ſummus; quo caſu curva reptoria P π Q, per priorem modum deſcripta, eſſet nova tantum Sectio conica; ſed parti PA vel PB omnino ſimilis; id quod non ſatisfaceret Problemati; quippe quod requirit curvam propoſitæ diſſimilem. Atque hic in univerſum eſt notandum, quotieſcunque curvæ perreptans & perreptanda ſunt eædem, vel tantum ſimiles, ſeque tangunt, ab initio reptionis, in punctis ſimilibus, curvam reptoriam hinc generatam illis ſemper etiam fore ſimilem: cujus ratio attendenti haud difficulter pateſcit. Quando igitur dixi in ſolutione curvam P π Q diſſimilem eſſe ipſi APB, vel parti AP, excepto ſolo caſu, quo data curva APB eſſet arcus circuli, iſta verba ſub hac reſtrictione dicta velim, ut nimirum, ſi propoſita conſtet duabus partibus PA & PB æqualibus & ſimilibus, ſitus tunc partis *a* P prius permutetur, admoto ſcilicet *a* partis *a* P ad punctum P partis PB: alioquin certe reptoria deſcripta P π Q foret parti AP vel PB omnino ſimilis.

SOLUTIO II. *per motum ſubreptionis.*

Eſto curva data algebraïca ACB ad quam conſtruatur prius TAB. XVII. *Fig.* 5.
alia ſimilis LMNR, illiuſque dupla, quod quomodo fiat dudum eſt cognitum, ducendo tantum, ex aſſumpto quodam puncto O, per ſingula datæ curvæ puncta, rectas OL, OM, ON, OR duplas ſuarum partium OA, OP, OC, OB: Deinde ſumta LMNR pro perreptanda, & APCB pro ſubrepente, atque admoto B ad L, vel A ad R fiat ſubreptio. Dico reptoriam hinc genitam fore æqualem propoſitæ APB: Eſt enim æqualis differentiæ inter LMNR & APB, per

 Theo-

Theorema noſtrum I. Differentia vero æquatur ex conſtructione ipſi A P B. Ergo &c. *Q. E. F.*

Nota, quod pro ſubreptione inchoanda dixerim admovendum eſſe A ad R, vel B ad L; ſecus enim ſi A ad L, vel B ad R admoveretur, reptoria prodiret eadem cum A P B. Fateor equidem, hoc incommodum, certis caſibus, etiamſi adhibita illa cautela, poſſe occurrere; tunc nempe, quando curva data A P B duas habet partes P A & P B inter ſe æquales & ſimiles. Hoc vero inconveniens multis modis tolli poteſt; conſtruendo, exempli gratia, dimidiæ tantum A P, curvam ſimilem in ratione tripla; id eſt, ut ubique O L ad O A, O M ad O P, ſe habeant, ut 3 ad 1. Sic enim, admoto A ad M, vel P ad L; ſi A P ſubrepſerit M L, habebit reptoriam diſſimilem & duplam ipſius A P, adeoque toti A P B æqualem. Cæterum prærogativa aliqua gaudet hæc conſtruendi methodus ſuper præcedentem; dum non indiget *Poſtulato II.* ſectio enim curvarum in partes æque amplas moleſtiam quandoque in praxi creare poſſet; quæ autem hic commode evitatur. Sciendum interim hoc artificium, quod nititur prævia conſtructione curvæ ſimilis, ad habendam curvam diſſimilem & æqualem propoſitæ, poſſe etiam in motu obreptionis locum habere. Etenim, ſi conſtruatur curva L M N R datæ A P B ſimilis, ſed ſemiſſis tantum longitudinis; quod fit, biſecando rectas ex polo O eductas O A, O P, O C, O B; obrepat poſtea L M N R ſe ipſam inverſo ordine, hoc eſt curva L M N R bis deſcribatur, atque una obrepat alteram, facto ſcilicet reptionis initio ab unius extremitate L applicata ad extremitatem R alterius; manifeſtum eſt, reptoriam hinc exurgentem [quippe æqualem per *Theorema I.* duplici L M N] æqualem eſſe propoſitæ A P B, ut & eidem diſſimilem, niſi forte partes P A & P B eſſent æquales & ſimiles; quo caſu adhibenda foret medela modo ſupra allata. Cæteroquin tamen hoc notandum in favorem prioris ſolutionis, quod per hanc poſteriorem, non quemadmodum per priorem, amplitudines reptoriarum decreſcant; ipſæ-

ipſæque adeo ad rectitudinem magis magiſque accedant; ſed ex adverſo omnes prodeant ejus amplitudinis, cujus eſt curva propoſita.

Solutio ſingularis pro Circulo.

Pervenio tandem ad caſum unicum [ſi curva data circularis eſt] qui ſolus ſolutiones noſtras generales non agnoſcit, iiſque non comprehenditur, quem propterea jam ſupra excepi. Nam quomodocunque circulus circulum perreptet, ſive obrependo, ſive ſubrependo; reptoria quoque orietur ſemper circularis, cujus cauſa eſt, ut ſupra jam monui, æquabilis convexitas circuli, ſeu partium ejus non interrupta ſimilaritas. Ne igitur, hoc uno in caſu, inter infinitos, immo omnes alios a nobis ſolutos, aqua nobis hæreret, excogitanda fuit pro circulo peculiaris ſolvendi ratio, petita ex methodo jam olim mihi pro aliis curvis non infeliciter adhibita, ut videre eſt in *Actis* hiſce, *Anno* 1694, pag. 396 & 397 *, ut & *Anno* 1695, pag. 64 †, ubi ea uſus fui ad conſtruendam curvam paracentricam per longitudinem curvæ algebraïcæ; atque jam tum monui eam conſiſtere in diviſione quadrati differentialis propoſitæ in duo alia quadrata, quorum latera ſint integrabilia, adeo ut videre poſſit Clariſſimus CRAIGIUS, ſuæ ſolutionis fundamentum jampridem mihi innotuiſſe; quamquam tamen pro univerſali venditare nollem. Interim ecce ſolutionem pro circulo.

Eſto Circulus, cujus peripheria transformanda ſit in curvam aliam algebraïcam: Deſcribatur primo circulus alius A B E cujus radius C A = 8 radiis circuli propoſiti, ut ſcilicet quadrans A B totam circumferentiam datam contineat bis: Sit radius C A vel C B $= a$, abſciſſa C D $= x$, adeoque applicata D P $= \sqrt{(aa - xx)}$; conſtruatur nunc alia curva H G R hac conditione, ut ſit abſciſſa C F $= (3aax - x^3) : 3aa$, & applicata F G $= (aa - xx)\sqrt{(aa - xx)} : 3aa$; quo facto, erit ſemper, uti calculanti facile patebit, portio curvæ H G ducta in radium æqualis ſegmento circulari A P D C; adeo ut, ſumta C D = ipſi radio [quo caſu ſegmentum A P D C dege- TAB. XVII. Fig. 6.

* N°. XIX. pag. 121. † N°. XXIII. pag. 137.

generat in quadrantem circuli AB] hinc fiat CF = CR = $\frac{3}{2}a$, & FG = o; ipſa autem curva HGR ducta in radium = quadranti circuli CAB = quadranti circumferentiæ APB ducto in ſemiradium : Unde curva HGR = $\frac{1}{2}$ APB = [per conſtr.] toti circumferentiæ datæ ; quam igitur mutavimus in æqualem aliam curvam algebraicam : Hæc vero porro, per præcedentes ſolutiones, in alias infinitas transformabitur. Quare nunc dedimus Problema ex omni parte ſolutum.

N°. LXXV.

SOLUTION DU PROBLEME

Propoſé par M. Jaques BERNOULLI, *dans les* Actes de Leipſic *du mois de* May *de l'Année* 1697 ; *trouvée en deux manieres par M.* Jean BERNOULLI *ſon Frere, & communiquée à M.* LEIBNITZ *au mois de* Juin 1698 †.

SUR LES ISOPERIMETRES.

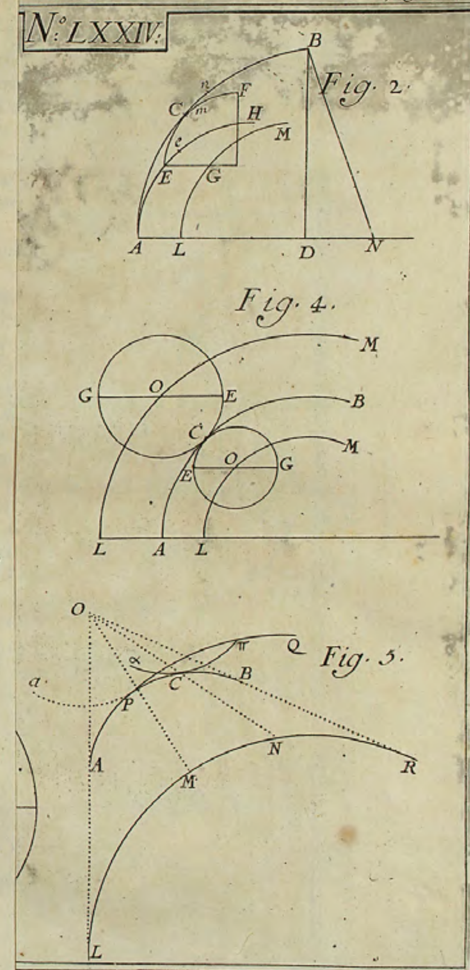
PROBLEME I.

Memoires de l'Acad. Roy des Sciences de Paris 1706. pag. 235. Ed. de Paris. pag. 304. Ed. de Holl.

DE toutes les Courbes iſopérimétres décrites ſur un même axe déterminé BN, *trouver la Courbe* BFN *telle, que ſes appliquées* FP *élevées à une puiſſance donnée, ou generalement telle, que les fonctions quelconques de ces appliquées, exprimées par d'autres appliquées* PZ, *forment ou rempliſſent un eſpace* BZN, *qui ſoit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere*

† Cette Solution étoit Latine, dans un paquet cacheté, préſenté à l'Académie Royale des Sciences de Paris, Le 1. Fevr. 1701, par Mr. VARIGNON, de la part de Mr. BERNOULLI, qui recommenda en même tems qu'il ne fût ouvert, qu'après que ſon Frere auroit publié ſon Analyſe de ce même Probléme (Voiés N°. LXVI.) Comme il y eut des difficultés ſur cette Publication & qu'enſuite Mr. BERNOULLI *l'aîné* eſt mort le 16. Août 1705, le paquet n'a été ouvert par l'Académie que le 17 Avril 1706.

Tab. XVII. *Tom. I. pag. 424.*



hinc fiat CF = CR = $\frac{2}{3}a$,
HGR ducta in radium =
nti circumferentiæ APB du-
HGR = $\frac{1}{2}$ APB = [per
; quam igitur mutavimus in
um : Hæc vero porro , per
nitas transformabitur. Quare
parte solutum.

XV.

U PROBLEME

LLI, *dans les* Actes de Leipsic
7 ; *trouvée en deux manieres*
LI *son Frere ,* & *commu-*
au mois de Juin 1698 †.

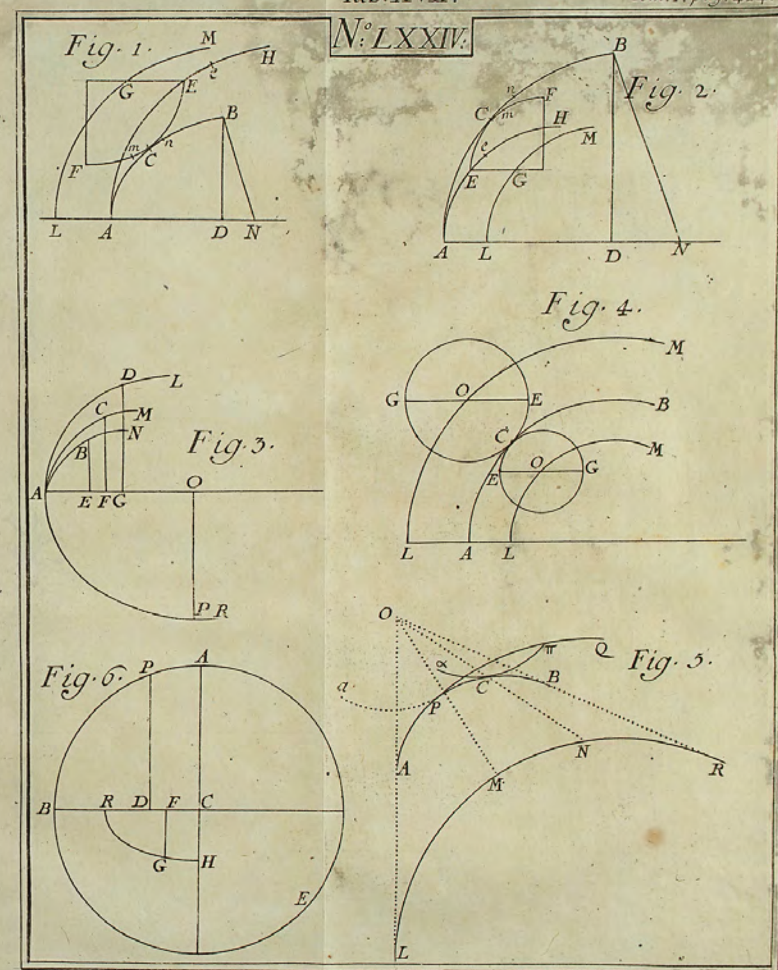
ERIMETRES.

EME I.

étres décrites sur un même axe
Courbe BFN *telle , que ses ap-*
e donnée , ou generalement telle ,
appliquées , exprimées par d'au-
mplissent un espace BZN , *qui*
peuvent être formés de la même
maniere

paquet cacheté, présenté à l'Académie
701 , par Mr. Varignon , de la part
en même tems qu'il ne fût ouvert , qu'a-
yse de ce même Probléme (Voiés N°.
ette Publication & qu'ensuite Mr. Ber-
5 , le paquet n'a été ouvert par l'Aca-

Tab. XVII. Tom. I. pag. 424.



maniere
ait pour
la Cour
ensorte
soit le p
me man
sur BN

Que
$BZ\zeta$
vant le
$FO\Phi$,
deux p
$ZL\zeta$
tes lig
Courbe
toutes
des po
$F\omega$, ω
& que
de mêm
je, qu
tre Z
petites
delà d
foyers
petite
O, ω
dont l
des fo
petite
de la
espace
Joa

maniere : ou bien [ce qui revient au même] une Courbe BH, *qui ait pour axe* BG *perpendiculaire à* BN, *étant donnée, déterminer la Courbe* BFN *donc les appliquées* FP *prolongées jusqu'en* Z, *ensorte que* PZ *soit égale à* GH, *fassent un espace* BZN, *qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere & compris par d'autres Courbes quelconques décrites sur* BN *& de même longueur que* BFN. TAB. XVIII. Fig. 1.

SOLUTION.

Que $BF\Phi$ soit une partie de la Courbe cherchée, & que $BZ\zeta$ soit partie de l'autre Courbe engendrée par celle-ci, suivant les appliquées de la Courbe donnée BH. Je regarde $FO\Phi$, élement de la Courbe $BF\Phi$, comme composé de deux petites lignes droites FO, $O\Phi$; & de même l'élement $ZL\zeta$ de la Courbe $BZ\zeta$, comme composé de deux petites lignes droites ZL & $L\zeta$. Maitenant, parce que toute Courbe, qui doit donner un *Maximum*, conserve aussi dans toutes ses parties les loix de ce même *Maximum*, il suit que si des point F & Φ on mene deux autres petites lignes droites $F\omega$, $\omega\Phi$, lesquelles prises ensemble soient égales à $FO + O\Phi$, & que de ces lignes on en forme par la même loi $Z\lambda$, $\lambda\zeta$, de même que de FO, $O\Phi$, on a formé ZL, $L\zeta$; il suit, dis-je, que l'espace $ZP\pi\zeta\lambda Z$ doit être plus grand que tout autre $ZP\pi\zeta\lambda Z$. Afin donc de trouver la position requise des petites lignes FO, $O\Phi$, qui doivent donner ce *Maximum*, & delà de trouver la nature de la Courbe $BF\Phi$; je conçois que foyers F, Φ, & de la longueur du fil $FO\Phi$, on ait décrit une petite Ellipse, sur la circonférence de laquelle les deux points O, ω, soient infiniment proches l'un de l'autre, c'est à dire, dont la distance $O\omega$ soit infiniment plus petite que la distance des foyers F, Φ, quoique la droite $F\Phi$ soit déja infiniment petite par elle-même, étant la soûtendante de l'élement $FO\omega\Phi$ de la Courbe $BF\Phi$. Donc, par la nature du *Maximum*, les deux espaces $ZP\pi\zeta LZ$ & $ZP\pi\zeta\lambda Z$ seront égaux entr'eux ; & en $\delta ZL = 0$

ayant ôté ce qu'ils ont de commun, il restera le triangle ZLY égal au triangle $\zeta\lambda Y$; ou bien menant les paralleles LO, $\lambda\omega$ [en négligeant les parties infiniment plus petites LYM & $Y\lambda\mu$] le triangle ZLM sera égal au triangle $\zeta\lambda\mu$, c'est à dire, qu'ayant mené ZC & ζD paralleles à l'axe $B\pi$, comme aussi FI & ΦK, l'on aura $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais parce que LM est la différence des lignes LR, MR, de même que $\lambda\mu$ l'est des lignes $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$; & que LR, MR, & $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$, sont les fonctions des lignes respectives RO, RT, & $\varrho\omega$, $\varrho\theta$; il est clair que LM représentera la différence des fonctions qui sont entre RO, RT; & que $\lambda\mu$ représentera de même la différence des fonctions qui sont entre $\varrho\omega$, $\varrho\theta$. Il faut bien remarquer, que la différence des fonctions de deux lignes comme RO, RT, qui se surpassent d'une quantité TO infiniment petite du second genre, se trouve en différentiant simplement la fonction de RO, & en multipliant par TO ce qui en vient, ayant omis les différentielles: Par exemple, si RL, fonction de RO, étoit seulement la puissance n de la même RO, en quoi consiste le cas de mon Frere, c'est à dire que si la Courbe BH étoit une Parabole du degré n, alors LM ou $(RO - RT)^n$ seroit $= n RO^{n-1} \times TO$. De même, si la Courbe BH étoit un cercle dont le rayon fût $= a$, alors LM ou $\sqrt{(2a \times RO - RO^2)} - \sqrt{(2a \times RT - RT^2)}$ seroit $= a - RO) \times TO : \sqrt{(2a \times RO - RO^2)}$; & ainsi des autres. Il faut aussi remarquer, qu'en général on exprimera les différences des fonctions de RO, RT, par $\Delta RO \times TO$, en prenant Δ pour le signe ou la caractéristique des différences des fonctions, où l'on omet les différences des grandeurs dont elles sont fonctions. Donc ayant déja $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, l'on aura aussi $FI \times \Delta RO \times TO = \Phi K \times \Delta\varrho\omega \times \theta\omega$.

Maintenant, des centres F & Φ soient décrits les petits arcs OX, $\omega\xi$, lesquels, par la nature des l'Ellipse, sont égaux entr'eux. Donc TO est à $\omega\theta$ comme la secante de l'angle XOT ou IFO, est à la secante de l'angle $\xi\omega\theta$ ou $K\Phi\omega$. Mais on aussi FI : ΦK

$\Phi K = FO \times \text{fin. } FOI : \Phi\omega \times \text{fin. } \Phi\omega K$. Donc si à la place de FI, ΦK, & de TO, $\theta\omega$, on substituë les grandeurs qu'on leur voit ici proportionelles, on aura $FO \times \text{fin. } FOI \times \Delta RO \times \text{sec. } IFO = \Phi\omega \times \text{fin. } \Phi\omega K \times \Delta\varrho\omega \times \text{sec. } K\Phi\omega$. Or par les loix des sinus, tangentes, & secantes, le rectangle fait du sinus de l'angle FOI par la secante de l'angle IFO, est égal au quarré du sinus total, lequel par les mêmes loix est égal au rectangle fait du sinus de $\Phi\omega K$ par la secante de $K\Phi\omega$. Donc $FO \times \Delta RO = \Phi\omega \times \Delta\varrho\omega$; ou si pour RO l'on prend son équivalente PF, qui lui est jointe par la petite ligne droite FO, & que pour $\varrho\omega$ on prenne de même son équivalente $\pi\Phi$, l'on aura $FO \times \Delta PF = \Phi\omega \times \Delta\pi\Phi$; & par conséquent $\Delta PF : \Delta\pi\Phi = \Phi\omega\ [\Phi O] : FO = \text{fin. } OF\Phi : \text{fin. } O\Phi F$. Et, *permutando*, $\Delta PF : \text{fin. } OF\Phi = \Delta\pi\Phi : \text{fin. } O\Phi F$. Et parce que $F\Phi$ est la soûtendante d'un arc infiniment petit $FO\Phi$ de la Courbe $BFO\Phi$; & qu'ainsi on peut regarder chacun des angles $OF\Phi$ & $O\Phi F$ comme la moitié de l'angle de la courbure en F & en Φ; il suit que ΔPF est au sinus de la courbure en F, comme $\Delta\pi\Phi$ est au sinus de la courbure en Φ, c'est à dire, en raison constante. Ainsi ce Probléme étant ainsi reduit à la pure analyse, on peut l'énoncer en cette sorte.

Trouver la Courbe BFΦ, *dont la nature soit telle que le sinus de sa courbure, dans un de ses points quelconque* F, *soit à la fonction différentiée de son appliquée respective* PF [*ayant négligé la différence de cette appliquée*] *en raison constante.*

Voici la maniere dont on peut résoudre ce Probléme. Soit TAB. XVIII.
BF la Courbe cherchée, dont l'élement [que l'on prend pour Fig. 3.
constant] soit $Fl = dt$, $BP = y$, $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$; soit regardée Fm comme la tangente en $F = Fl$, & par conséquent lFm comme l'angle de la courbure, dont le sinus est lm. Soit enfin le triangle rectangle mnl, dont les côtés mn, nl, soient paralleles aux côtés lC, CF, du triangle FCL; l'on aura $mn = ddx$, & $nl = ddy$. De plus

à cause de ces triangles semblables CFl, nml, on aura aussi $Cl\,[dx] : Fl\,[dt] = nl\,[ddy] : ml = \frac{dtddy}{dx}$. Mais par la nature de la Courbe, ml est à ΔPF en raison constante. Donc en faisant $\frac{dtddy}{dx} : \Delta x = dt : a$; l'on aura cette équation $addy = \Delta x \times dx$. Mais comme $\Delta x \times dx$ est la fonction elle-même différentiée; si l'on intégre, l'on aura la fonction elle-même, ou GH. Soit donc cette ligne $GH = X$, ayant aussi pris l'intégrale de l'égalité qu'on vient de trouver, on aura $ady = X \pm c$; ou bien, ayant multiplié les parties homogenes par la constante dt, on aura $ady = Xdt \pm cdt$ [il faut bien remarquer que j'entends par c une quantité constante arbitraire, dont il est permis d'augmenter ou de diminuer l'intégrale d'une différentielle quelconque]; & en quarrant de part & d'autre l'on aura aussi $aady^2 = dt^2 \times (X \pm c)^2 = (dx^2 + dy^2) \times (X \pm c)^2$; d'où l'on tire enfin $dy = dy(X \pm c) : \sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}$, qui sera l'équation générale de la Courbe cherchée, laquelle deviendra fort simple [il suffit d'en trouver une qui satisfasse] en supposant $c = 0$ dans cette équation : car il en résultera $dy = Xdx : \sqrt{(aa - XX)}$, dont l'intégrale sera $y = \int(Xdx : \sqrt{(aa - XX)})$, suivant laquelle si l'on construit une Courbe, je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

COROL. Ayant supposé $c = 0$, & conséquemment $ady = Xdt$, l'on aura $dy : X = dt : a$. Mais en supposant dt constante, dy est le sinus de l'angle BFP. Donc le sinus de l'angle $BFP : X\,[GH] = dt : a$. c'est-à-dire, en raison constante. Mais si BF est la Courbe *Brachystochrone*, & BH la Courbe, dont les ordonnées GH expriment les vitesses aux points F, j'ai fait voir * dans le tems, que le sinus de l'angle BFP est à GH en raison constante. D'où l'on voit que la Courbe BF a en même tems ces deux proprietés; puisqu'elle est telle que $\int Xdx$ est un *Maximum*, & en même tems $\int(dt : X)$ un *Minimum*. Mais cette Courbe n'a pas cette proprieté lorsque c n'est pas $= 0$.

PROBLE-

* Ci-dessus N°. XXXVII. pag. 190.

PROBLEME II.

Les mêmes choses étant posées, si l'on suppose maintenant que PZ *soit comme la fonction donnée de l'arc* BF, *on demande la nature de la Courbe* BFN. TAB. XVIII. *Fig.* 1.

SOLUTION.

Si l'on suit la même méthode que ci-dessus, on résoudra facilement ce Probléme. Car le triangle ZLY sera toûjours égal au triangle $\zeta\lambda Y$ par la nature du *Maximum*, ou $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais $LM\,[LR - MR]$ est la différence des fonctions des deux arcs BFO, BFT; & $\lambda\mu\,[\lambda\varrho - \mu\rho]$ la différence des fonctions des deux arcs $BF\omega$, $BF\theta$; & l'on trouvera la différence de ces fonctions de la même maniere que ci-dessus, en multipliant simplement la fonction différentiée [ayant négligé la différentielle de l'arc dont elle est fonction] par la différence des deux arcs BFO, BFT, c'est-à-dire, par TX. Donc à la place de $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, il faut écrire $FI \times \Delta BFO \times TX = \Phi K \times \Delta BF\omega \times \theta\xi$. Maintenant, par la proprieté de l'Ellipse supposée décrite des foyers F, Φ, par le moyen d'un fil $= FO + O\Phi = F\omega + \omega\Phi$, les petites lignes OX & $\omega\xi$ sont égales entr'elles. Donc $TX : \theta\xi =$ tang. IFO : tang. $K\Phi\omega$. De plus, on a encore $FI : \Phi K = FO \times$ sin. FOI : $\Phi\omega \times$ sin. $\Phi\omega K$. Donc si à la place de FI, ΦK, & de TX, $\theta\xi$, on prend ces grandeurs qu'on voit leur être proportionelles, on aura $FO \times$ sin. $FOI \times$ tang. $IFO \times \Delta BFO = \Phi\omega \times$ sin. $\Phi\omega K \times$ tang. $K\Phi\omega \times \Delta BF\omega$. Mais, par la proprieté des sinus, tangentes, & secantes, le sinus de $FOI \times$ tang. $IFO =$ sin. total $\times$ sin. IFO; de même le sinus de $\Phi\omega K \times$ tang. $K\Phi\omega =$ sin. total $\times$ sin. $K\Phi\omega$. On aura donc $FO \times$ sin. $IFO \times \Delta BFO = \Phi\omega \times$ sin. $K\Phi\omega \times \Delta BF\omega$; ou bien, si à la place de BFO on prend son équivalente BF, & à la place de $BF\omega$, son équivalente $BF\Phi$; l'on aura $FO \times$ sin. $IFO \times \Delta BF = \Phi\omega \times$ sin.

$K\Phi\omega \times \Delta BF\Phi$. Donc sin. $IFO \times \Delta BF$: sin. $K\Phi\omega \times \Delta BF\Phi = \Phi\omega\,[\Phi O] : FO =$ sin. $OF\Phi$: sin. $O\Phi F$. Et, *permutando*, sin. $IFO \times \Delta BF$: sin. $OF\Phi =$ sin. $K\Phi\omega \times \Delta BF\Phi$: sin. $O\Phi F$, en raison constante. De sorte que ce Probléme ainsi reduit à la pure analyse, se peut proposer de cette maniere.

Trouver une Courbe BFΦ *de telle nature, que le sinus de sa courbure dans un de ses points quelconque* F, *soit au sinus de* IFO × ΔBF *en raison constante.*

TAB. XVIII. Fig. 3. Pour resoudre ce Probléme, soit nommée, comme ci-devant, BP, y; PF, x; BF, t; Pp, dy; Cl, dx; Fl ou Fm, dt; & la fonction donnée de l'arc BF, v; l'on aura $ml = dt\,ddy : dx$. Donc en faisant [selon la proprieté que l'on vient de trouver de la Courbe cherchée] $\frac{dt\,ddy}{dx} : dx \times \Delta v\,[\frac{dx\,dv}{dt}] = dt : a$. l'on aura cette équation $adtddy : dx^2 = dv$, ou $adtddy : (dt^2 - dy^2) = dv$, dont l'intégrale est $v = \int(adtddy : (dt^2 - dy^2))$, ou [parce que a & dt sont supposées constantes] $v = \int(ddy : (dt^2 - dy^2))$; laquelle équation exprime la nature de la Courbe qu'on demande †.

REMARQUE.

TAB. XVIII. Fig. 1. On trouvera avec la même facilité, si on le veut, la Courbe BFf, en prenant PZ pour quelqu'autre fonction que ce soit, composée à volonté des fonctions non-seulement de l'arc BF, ou de l'appliquée PF, mais aussi de toutes les deux ensemble de telle maniere qu'on voudra. Car on en viendra toûjours à cette proprieté, que le sinus de la courbure dans un point quelconque F, est à une certaine quantité en raison constante. Ainsi ce Probléme étant reduit à la pure analyse, on trouvera facilement l'équation qui exprime la nature de la Courbe cherchée.

On peut aussi resoudre, de la même maniere, le Probléme des *Catenaires* & des *Brachystochrones*, dont les Solutions s'accordent facilement avec celles que j'ai données, & que j'avois trouvées par différentes méthodes; ce qui ne contribue pas peu à faire voir l'excellence de celle-ci. Au reste, comme cette méthode est directe, je vais en ajoûter une indirecte, prise de la pression des liqueurs, laquelle donnera précisément la même solution; & cet accord merveilleux de ces deux méthodes, tant directe qu'indirecte, nous assûrera encore de leur certitude.

† Voiez sur cette Solution, ce que l'Autheur en dit lui-même, N°. CIII.

Soit un linge BFN, étendu par une liqueur qui le presse par dessus, dont la pesanteur soit uniforme, ou non. Il est clair que ce linge prendra une courbure telle, qu'elle permettra à la liqueur de descendre le plus bas qu'il est possible : & cela arrivera, lorsque les *gravitations* de toutes les parties de la liqueur jointes ensemble seront un *Maximum*. Il faut bien remarquer, que je ne dis pas que cela arrivera, lorsque le centre de pesanteur de la liqueur sera le plus bas; car on ne peut considerer ici le centre de pesanteur, puisque la courbe BFN variant [quoiqu'elle soit isopérimétre] la quantité de liqueur contenuë dans cette courbe changera aussi : ainsi le centre de pesanteur n'y seroit pas le même. Que l'on imagine donc maintenant que l'espace BFN soit divisé en ses filamens par les appliquées verticales PF, pf &c. Et soit la Courbe BL, dont les ordonnées GL expriment les gravitations de la liqueur, suivant la hauteur BG ou PF, c'est à dire, dont les appliquées, GL & ED, expriment le rapport de ce dont la particule FC de la liqueur, suivant sa profondeur PF, pese plus, ou est plus pressée par le poids du filament ou de la colonne $PFCp$, qu'une égale particule Mn, suivant la profondeur PM, n'est pressée par le poids de la colonne $PMnp$: comme donc LG exprime la gravitation de la particule FC, & de toutes les autres qui sont à la même profondeur, ou qui se trouvent dans la droite GC prolongée; de même, comme DE marque la gravitation de la particule Mn, & des autres qui se trouvent dans la droite EM prolongée; il est clair que toutes ces appliquées prises ensemble, c'est à dire, les espaces BLG & BDE marqueront toutes les gravitations [je ne dis pas les pesanteurs] prises ensemble de toutes les particules qui se trouvent dans les colonlonnes $PFCp$, $PMnp$. Si donc on décrit une autre Courbe BH, dont les appliquées GH ſoient reſpectivement comme les eſpaces BLG, & ſi à P on applique $PZ = GH$ l'on aura une nouvelle Courbe BZN, dont les appliquées PZ exprimeront la ſomme des gravitations des particules, par rapport à leurs colonnes reſpectives $PFCp$; & par conſéquent la ſomme des appliquées PZ, c'eſt à dire, tout l'eſpace BZN repréſentera les gravitations de toutes les parties de la liqueur contenuë dans le linge ou la voile BFN. Donc puiſque la voile prend une telle figure ou courbure, que toutes les gravitations priſes enſemble [c'eſt à dire l'eſpace BZN] font un *Maximum*, il eſt clair, que ſi l'on emploïoit une liqueur d'une peſanteur continuellement différente, avec cette loi ou condition, que LG, DE, ou les gravitations des particules dans les profondeurs de F, M, fuſſent dans la raiſon des différentielles des appliquées GH [leſquelles, dans le Probléme de mon Frere, marquent les fonctions des mêmes PF]; il eſt clair, dis-je, qu'alors la courbure du linge ou de la voile ſeroit la même que la courbure que mon Frere m'a propoſée de chercher, ſeulement pour les puiſſances de PF. Mais je l'ai réſolu ci-deſſus, ce Probléme, par la méthode directe pour une fonction quelconque.

Afin donc que je montre l'accord de cette méthode directe avec l'indirecte, je vas chercher la nature de la Courbe, ou courbure, que prend un linge ou une voile chargée d'une liqueur dont la gravitation varie ſuivant le rapport que j'ay marqué: que ſi je tombe dans la même équation trouvée ci-deſſus, qui eſt-ce qui oſera douter de l'infaillibilité de ces méthodes? Il ſe préſente ici d'abord un cas fort facile, qui eſt lorſque la peſanteur de la liqueur eſt uniforme, ce qui eſt ordinaire, c'eſt à dire lorſque les gravitations LG, DE ſont entr'elles comme les profondeurs BG, BE; ce qui rend la Courbe BL une ligne droite, & la Courbe BH une parabole ordinaire: alors BFN ſera la courbure ordinaire du linge, ou de la voile, laquelle courbure mon Frere a attribué à ſon

Elaſtique, & dont la nature s'exprime [comme je l'ay trouvé autrefois auſſi-bien que mon Frere] par cette équation $y = \int(xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$.

Maintenant, ſi dans l'équation générale $y = \int(Xdx : \sqrt{(aa - XX)})$ trouvée ci-deſſus (*Sol. Probl.* 1.) par la méthode directe, on met à la place de la fonction générale X, le cas particulier xx que l'on ſuppoſe ici, l'on aura $y = \int(xxdx : \sqrt{(a^2 - x^4)})$, ou [ayant ſuppléé aux termes homogenes] $y = \int(xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$; cequi fait voir déja en ceci l'accord des méthodes.

Si l'on ſuppoſe préſentement, pour loi générale de la gravitation de la liqueurs, que la courbe BDL ſoit une courbe quelconque, & qu'on veuille trouver la nature de la courbure de la voile BFN; on le peut faire par la méthode dont je me ſuis ſervi autrefois pour trouver la courbure de la voile enflée par le vent, laquelle conſiſte en ceci, que la direction de la preſſion de la liqueur, qui eſt par tout perpendiculaire à la courbe, ſoit regardée comme compoſée de deux preſſions collaterales, l'une horizontale & l'autre verticale, & que par l'une & par l'autre priſe ſéparément, on cherche quelle eſt la ténacité requiſe dans le point le plus bas, ou la force avec laquelle la voile dans le point le plus bas eſt étenduë ſuivant la tangente; a, qui eſt la force abſolue, étant conſtante dans quelque point de la courbure que la voile ſoit ſuſpenduë, ou [ſi on l'aime mieux] qu'elle ſoit attachée à un clou. Ainſi formant une équation de ce qui viendra, avec une quantité conſtante priſe à volonté, de la maniére que je l'avois fait autrefois pour les funiculaires, ou catenaires, on trouvera la même équation, que j'ay trouvée ci-deſſus par la méthode directe. Cette maniere d'operer, quoique légitime, eſt néanmoins plus longue & n'eſt pas ſi naturelle que cette autre, que j'ay découverte depuis peu de tems, & que je vas rapporter ici.

Parce que chaque particule Ff du linge, ou de la voile, eſt preſſée ſuivant FI, qui eſt une direction perpendiculaire à la courbe, par le poids de la colonne de liqueur qui appuie TAB. XVIII. *Fig.* 1.

puïe dessus, ou par la gravitation de la particule FC de la liqueur, laquelle gravitation est exprimée par la ligne LG, la courbe sera la même que celle qui se formeroit, si je con-
TAB. XVIII Fig. 4. cevois que le fil $BRFST$ fût étendu par des puissances $R1$, $F2$, $S3$, $T4$, &c. perpendiculairement appliquées à tous les points R, F, S, T, &c. & proportionelles aux appliqués correspondantes ED, LG, VK, &c. Or je vas montrer d'une maniere facile, que cette courbe, & par conséquent la courbure du linge, est la même que celle que j'ay trouvée ci-dessus par la méthode directe.

Soit la Courbe conçûë comme un polygone d'une infinité de côtés BR, RF, FS, ST, &c. lesquels étant prolongés font des angles aRF, bFS, cST, &c. qui marquent les courbures de la courbe dans le points R, F, S, &c. Maintenant on sçait par les loix de la Méchanique, que la puissance $1R$ qui pousse, est à la puissance l qui soûtient, ou [ce qui est la même chose] à la force de la ténacité requise du fil, dans un point quelconque moïen entre R & F, comme le sinus de l'angle aRF est au sinus de l'angle $BR1$, c'est à dire, au sinus total: de même, la puissance qui soûtient en l, est à la puissance $2F$ qui pousse, comme le sinus de l'angle $2Fm$, ou sinus total, est au sinus de l'angle bFS; d'où il est évident que la puissance $1R$ est à la puissance $2F$, comme le sinus de l'angle aRF est au sinus de l'angle bFS. On démontrera de la même maniere que la puissance $2F$ est à la puissance $3S$, comme le sinus de bFS est au sinus de cST; & ainsi de suite. Donc la puissance $1R$ est à la puissance $3S$, comme le sinus de l'angle aRF est au sinus de l'angle cST; & *permutando*, le sinus de l'angle cST est à la puissance $3S$ [KV], comme le sinus de l'angle aRF est à la puissance $1R$ [DE]: c'est à dire, que le sinus de l'angle de la courbure dans un point quelconque R est à DE, que je suppose exprimer la fonction différentiée de BE, en raison constante. Or j'ay trouvé par la méthode directe cette même proprieté. Donc la courbure du linge, ou de la voile, chargée de la maniere qu'on le

TAB. XVIII. Tom. I. pag. 434.

N°. LXXV.

Fig. 2.

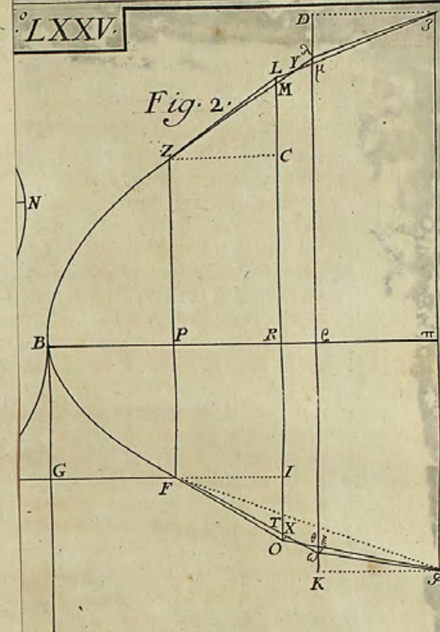
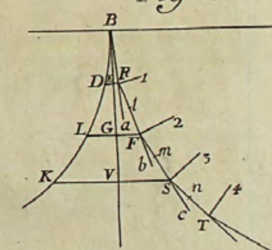


Fig. 4.

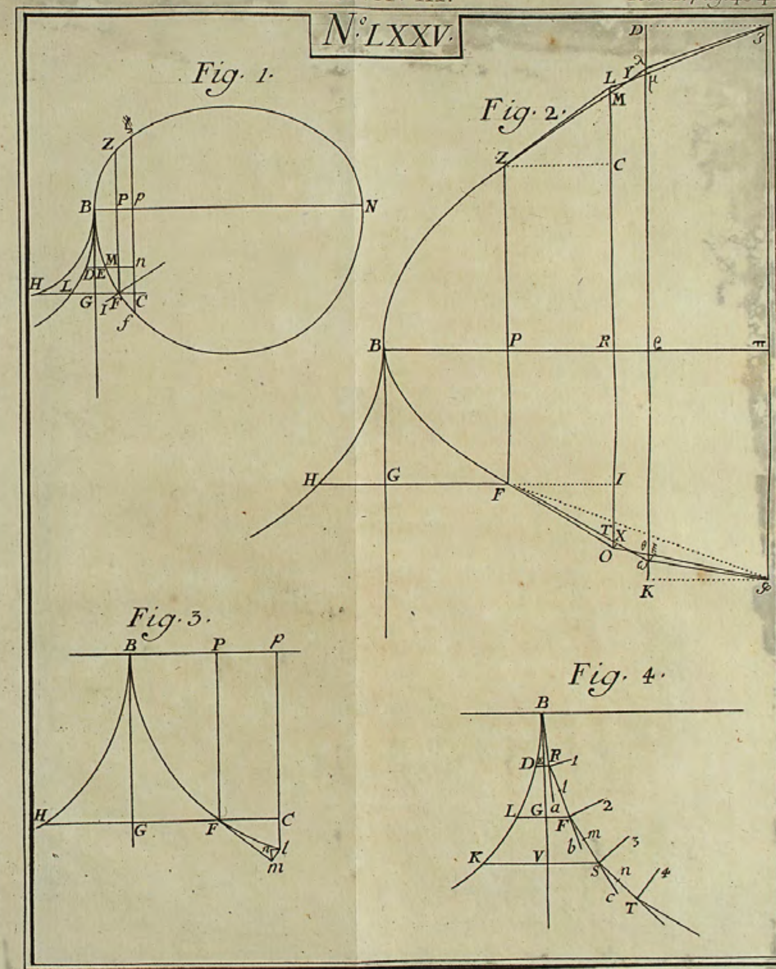


OBLEME

n de la particule FC de la
xprimée par la ligne LG, la
ui se formeroit, si je con-
endu par des puissances $R1$,
rement appliquées à tous les
portionelles aux appliquées
&c. Or je vas montrer d'u-
e, & par conséquent la cour-
elle que j'ay trouvée ci-des-

un polygone d'une infinité
lesquels étant prolongés font
. qui marquent les courbures
&c. Maintenant on sçait par
uissance $1R$ qui pousse, est à la
ui est la même chose] à la
l, dans un point quelcon-
le sinus de l'angle aRF est
dire, au sinus total: de mê-
, est à la puissance $2F$ qui
$2Fm$, ou sinus total, est
est évident que la puissance
le sinus de l'angle aRF est
nontrera de la même manie-
uissance $3S$, comme le si-
; & ainsi de suite. Donc
S, comme le sinus de l'an-
ST; & *permutando*, le si-
nce $3S$ [KV], comme le
ance $1R$ [DE]: c'est à di-
ourbure dans un point quel-
uppose exprimer la fonction
constante. Or j'ay trouvé
e proprieté. Donc la cour-
argée de la maniere qu'on
le

Tab. XVIII.



le vient de dire, & celle des Iſopérimétres, eſt la même. Donc la méthode directe & l'indirecte ſe confirment l'une l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Voiés Tom. II. Nº. CIII.

Nº. LXXVI.

SUR LA LUMIERE DES CORPS FROTTEZ.

LE nouveau & ingénieux Phoſphore de M. BERNOULLI, dont il a été parlé dans les Hiſtoires de 1700. & de 1701. * ne pouvoit manquer d'exciter la curioſité des Philoſophes, & ſur tout celle de l'Académie, qui a en quelque ſorte un droit particulier ſur cette découverte, dûe à l'un de ſes Membres. Entre les expériences qui ont été faites ſur ce ſujet, on eſt venu à celles de la Lumiére que rendent certains corps frottés dans l'obſcurité. M. BERNOULLI écrivit qu'il avoit fait depuis long-tems des obſervations ſur ces Phénoménes, mais que juſques-là il avoit négligé d'en rendre compte à la Compagnie. Voici quel en eſt le réſultat.

Hiſt. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris. 1707 pag. 1.

Comme elles n'ont pas été faites la plûpart ſur les Corps qui rendent le plus aiſément la lumiére, tels que ſeroient le dos d'un chat frotté à contre-poil en hiver, ou du ſucre, ou du ſouffre qu'on pile, &c. il y a certaines conditions à obſerver.

D'abord il faut que des deux Corps que l'on frotte l'un contre l'autre, il y en ait au moins un qui ſoit transparent, afin que l'on puiſſe voir la lumiére au travers, pendant qu'elle dure; car d'ordinaire elle ne dure pas plus que le frottement.

Il faut que la ſuperficie des Corps ſoit plane, bien polie, & bien nette, afin que le contact ſoit immédiat.

Il faut que les deux Corps ſoient durs.

Une grande denſité, ſans une grande dureté, fait auſſi ſon effet. Ainſi M. BERNOULLI a eu de la lumiére en frottant, contre une glace de verre, du Mercure amalgamé avec l'étaim.

L'un des deux Corps doit être le plus mince qu'il ſe pourra, il en ſera plus aiſé à échauffer par le frottement, & en rendra plus promptement de la lumiére, & une lumiére plus vive. C'eſt ce que M. BERNOULLI a éprouvé ſur de petites plaques de Cuivre de différente épaiſſeur.

* Voiés ci-deſſus Nº LXII. LXIII. LXIV.

L'Or frotté contre le verre lui a paru le plus propre de tout les métaux à donner de la lumiére. Aucun Corps n'en donne une ſi exquiſe que le Diamant. Elle n'eſt pas moins vive que celle d'un Charbon fortement excitée par le ſoufle. Il n'importe de quelle épaiſſeur ſoit le Diamant.

De là M. BERNOULLI a conclu que M. BOYLE, tout habile qu'il étoit dans la Phyſique expérimentale, a regardé comme une eſpèce de prodige ce qui n'en étoit pas un. C'étoit un Diamant qui étant frotté dans l'obſcurité, jettoit de l'éclat, & auquel il donna le ſuperbe nom d'*Adamas lucidus*. Il n'avoit point de privilège particulier. Il eſt vrai cependant que ſon éclat duroit quelques inſtants après le frottement, ce qui ne laiſſeroit pas de fonder en partie l'eſtime qu'en faiſoit M. BOYLE.

A l'occaſion des Expériences de M. BERNOULLI, M. CASSINI *le fils* en fit auſſi ſur le même ſujet.

1°. Un Diamant taillé en table, frotté contre une glace de verre, rendit une lumiére ſemblable à celle d'un charbon enflammé, & qui parut plus large que la face du Diamant.

2°. Un Diamant taillé à facettes a rendu une lumiére moins vive.

3° Un Ecu, & diverſes autres plaques d'argent, en ont moins rendu que le Diamant.

4°. Un Double de Cuivre, & un ſol en ont un peu rendu.

Tous les différens Corps des Expériences précédentes ont été frottés contre du verre.

5°. Le Diamant en table frotté contre une plaque d'argent, a fait de la lumiére.

JOHAN-

N°. LXXVII.

JOHANNIS BERNOULLI

Inventa de Appropinquationibus promtis ad metiendas figuras per Motus Repentis conſiderationem exhibitis.

Ex Epiſtola ad G. G. LEIBNITIUM, *Baſil.* 15 Janu. 1707.

SIT Ellipſis data ABDE cujus axes conjugati AD & BE; Fac igitur aliam Ellipſin datæ æqualem MPNQ, tangantque primo duæ illæ Ellipſes ſe mutuo in verticibus conjugatis A, & P; ita nempe ut in directum cadat axis major AD cum minori PQ. Hoc in poſitu repat PMQN, hoc eſt, moveatur motu parallelo ſuper immobili ABDE, ſeu ita, ut recta aliqua in mobili ſumta, velut MN, ſibi ſemper maneat parallela, ſervato interim ſemper contactu mutuo Ellipſium; quo fiet ut Ellipſis PMQN transferatur poſt primum circumlationis quadrantem in ſitum P1 M1 Q1 N1; poſt ſecundum in P2 M2 Q2 N2, poſt tertium in P3 M3 Q3 N3, & poſt quartum redeat in primum PMQN; atque interim vertices quatuor A, B, D, E, ſucceſſive excipient ſuos reſpective conjugatos P, N, Q, M. Hoc motu punctum quodvis in plano curvæ repentis, ex. gr. centrum O, deſcribet curvam OGO1HO2JO3KO, quæ ſecundum ea quæ demonſtrari in *Actis Lipſienſibus*, * erit dupla curvæ Ellipticæ ABDE; adeoque illius dimidia OGHO2 erit æqualis propoſitæ curvæ Ellipticæ. Quod ſi magis deſideretur, ut integra deſcripta Ellipſi datæ ſit æqualis; oportet prius aſſumere loco Ellipſis datæ aliam Ellipſin

Miſcellanea Berolinenſia Tom. I. pag. 173.

TAB. XIX. *Fig.* 1.

Iii 3 ſimi-

* Supra N°. LXXIV.

ſimilem, habentem axes conjugatos datarum dimidios; ita enim ambæ Ellipſes ABDE & PMQN ſimul ſumtæ æquant propoſitam, huicque adeo æqualis erit integra curva deſcripta GHIK. Habemus ergo conſtructionem per motum continuum, certe non minus geometricam, quam ea eſt, qua per motum continuum deſcribitur circulus. Quod ſi petatur æquatio algebraïca pro determinanda natura curvæ ejuſque punctis inveniendis; etiam hoc præſtabitur. Sit igitur ſemiaxis major AC $= a$, ſemiaxis minor B C $= b$, abſciſſa indeterminata in Ellipſi C R $= x$, adeoque applicata in eadem R S $= b\sqrt{(aa - xx)} : a =$ [brevitatis gratia] $by : a$; ex his fiant coordinatæ CT, TF hac conditione, ut abſciſſa CT ſit $= x + bx^3 : \sqrt{(a^4yy + b^4xx)}$ & ordinata TF $= by : a + a^3y : \sqrt{(a^4yy + b^4xx)}$; Dico, curvam hoc modo determinatam fore quæſitam, nempe illam ipſam, quæ per motum repentem puncti O fuit delineata. Notetur hic obiter, puncta F & S ita ſibi reſpondere, ut ubi O prorepſit in F, mutuus Ellipſium contactus tunc ſemper celebretur in S, quæ omnia demonſtratu ſunt facilia.

Sed ad aliud nunc progredior, quod moneri alicujus operæ pretium duco. Idque hoc eſt, quod hæc mea methodus transformandi curvas ſimul doceat lineas Ellipticas, cæteraſque Ellipticarum formam habentes, imo omnes curvas, comprehendere intra limites pro arbitrio coarctandos duorum circulorum, quorum unus majorem, alter minorem circumferentiam habeat, quam data curva Elliptica; quod quantum uſum habere poſſit in praxi patet; licet tale quid nemo hucuſque præſtiterit: nemo enim hucuſque, ſine ſerie, in terminis finitis & geometricis, reduxit, exempli gratia, Ellipſin ordinariam intra duas circumferentias circulares, quæ vel tantum centeſima, nedum milleſima, vel minori adhuc ſui parte, altera alteram excedat. Hoc tamen eſt quod mea Methodus feliciter exequitur.

Manifeſtum eſt Curvam rependo deſcriptam, quæ Ellipſi æqualis, habere quatuor ſua puncta cardinalia, O, O 1, O 2, O 3,

O 3, æqualiter diſtantia a centro C; ſed & demonſtrare poſſum, intra quatuor iſta puncta dari quatuor alia exacte intermedia G, H, I, K, itidem æqualiter diſtantia a Centro C, ſed hoc diſcrimine, quod illorum intervalla a centro C ſint minima, horum vero maxima; id quod curvæ noſtræ peculiarem hanc formam conciliat, ut nempe habeat quatuor gibbos, valde quidem obtuſos, in G, H, I, K, alternatim protuberantes inter quatuor puncta cardinalia O, O 1, O 2, O 3, ubi curva quatuor velut compreſſiones patitur: unde clarum eſt, circulos duos ex centro C & radiis CO, CG deſcriptos tangere curvam in quatuor punctis; & unum quidem interne in O, O 1, O 2, O 3, & alterum externe in G, H, I, K; adeoque illum, tanquam inſcriptum, minorem eſſe curva, hunc vero tanquam circumſcriptum, eadem eſſe majorem. Eſt autem radius inſcripti CO $=$ CA $+$ CB $= a + b$ & radium circumcripti C G invenio $=$ A B $\sqrt{2} = \sqrt{(2aa + 2bb)}$. Hinc ergo concludo, curvam O G O 1 H O 2 I O 3 K O, hoc eſt Ellipſin, cujus axes conjugati ſunt $4a$ & $4b$, nempe duplo majores quam A D & B E, eſſe majorem quam ambitum circuli cujus radius $a + b$, ſed minorem quam alium cujus radius $\sqrt{(2aa + 2bb)}$. Sumamus exemplum hujus adjectæ figuræ, ubi tali Ellipſi ſum uſus, in qua ſemiaxes conjuncti AC & BC, ſunt ut 5 & 4; unde radius circuli minoris erit 9 vel $\sqrt{81}$, & radius circuli majoris erit $\sqrt{82}$; Aſſero igitur, longitudinem Ellipſeos, cujus ſemiaxes conjugati habent partes 10 & 8, eſſe inter duas circumferentias circulares radiorum $\sqrt{81}$ & $\sqrt{82}$, qui numeri ſibi propius accedunt quam hi rationales 9 & $9\frac{1}{18}$, hoc eſt, quam 162 & 163; ideoque minor a majori minus differt, quam centeſima ſexageſima ſecunda ſui parte.

Hac occaſione memini me legere apud nonnullos Practicos, quod pro comparandis perimetris Ellipſium cum circularibus, jubeant deſcribere circulum, radio æquali medio Arithmetico inter ſemiaxes conjugatos Ellipſis propoſitæ; cui aſſerunt æqualem fore circuitum circuli ita deſcripti. Revera hic circulus, cujus circuitum haud dubie ex ſola ſenſuum æſtimatione æqualem

lem judicant lineæ Ellipticæ, eſt ipſiſſimus minor ex limitibus a me hic aſſignatis. Sed cum illi eum non niſi circiter æqualem æſtiment, incerti tamen, utrum, rem accurate ſumendo, ſit juſto major aut minor; ego, rei veritatem ſcientifice aſſecutus, oſtendi nonnihil juſto minorem eſſe.

Sed hæc de limitibus primis. Nunc limites ſecundos, multo quam primi propinquiores, & poſtea tertios propinquiores adhuc, & ita porro invenio, hac ratione. Finge ſcilicet curvam noſtram, prima operatione inventam, GHIK, ſe ipſam obrepere, & ita quidem, ut ab initio vertex gibboſitatis G tangat verticem compreſſitatis O, hoc eſt, ut recta longiſſima GC, in curva mobili, cadat in directum cum curva breviſſima OC, in curva immobili; plane ut factum eſt in ipſa Ellipſi, ubi ab initio vertices conjugati A & P [qui ſane nihil aliud ſunt quam id quod ibi voco vertices gibboſitatis & compreſſitatis] ſe tangunt, & maxima minimaque diſtantia AC, PO, in directum ponuntur. Hoc intellecto, levi attentione adhibita percipitur, ſecundo hoc motu reptitio, centrum C curvæ mobilis, vel quodvis aliud ejus plani, deſcribere curvam novam Octigibbam, hoc eſt, quæ habebit octogibbos tantillum prominentes alternatim inter totidem compreſſuras, & quorum vertices octo æqualiter a centro diſtabunt; curvamque ipſam octi-gibbam longitudine duplam eſſe curvæ generantis quadrigibbæ, uti hæc ipſa dupla eſt Ellipticæ, ex qua fuit generata. Attendas igitur admirabilem generationem harum curvarum: Ellipſis, quæ reapſe eſt curva bigibba, generat ſui duplam quadrigibbam; quadrigibba producit duplam octigibbam; & ita porro in infinitum. Sed quemadmodum curva quadrigibba propius ad rotunditatem circuli accedit quam bigibba, ſeu Ellipſis; ita quoque octigibba quam quadrigibba, & ita porro; adinſtar polygonorum, quæ quo plures habent angulos, eo magis circulo aſſimilantur; magno tamen diſcrimine ratione appropinquationis; nam per multiplicationem angulorum in Polygonis, diu multumque procedendum eſt, antequam perveniatur ad limites a *Ludolpho* VAN CÖLLEN conſtitutos, ſed curvæ noſtræ multigibbæ incredi-

incredibili adeo celeritate ad circulum convergunt, ut, quemadmodum ex indiciis quibuſdam mihi patet, inſtitutis quinque operationibus, jam perveniatur ad limites *Ludolphinis* arctiores; reperta nempe curva tantum *64* gibborum: cum ARCHIMEDI opus fuerit Polygono *96* angulorum, ad rationem ſuam, 7 ad 22, diametri ad circumferentiam inveniendam, quæ tamen vera multum adeo adhuc abludit. Veritatem hujus aliquo modo percipies ex limitibus nunc tradendis quos mihi ſuppeditavit curva octigibba. Hos ut inveniam, facile colligere eſt ex ante dictis, neceſſe eſſe ut quæram illius curvæ diſtantias a centro, maximam & minimam; circulus enim radio maximi intervalli deſcriptus tanget curvam exterius in octo punctis, & erit per conſequens longitudine major quam curva; ſed circulus deſcriptus radio minimi intervalli tanget curvam interius in octo punctis, adeoque longitudine minor erit quam curva. Quantum ad diſtantiam minimam, invenitur facile; eſt enim æqualis ſummæ diſtantiarum minimæ & maximæ curvæ quadrigibbæ genitricis, quod per ſe patet. Sed quod ſpectat ad diſtantiam maximam, demonſtrare poſſum quod ſit illa æqualis perpendiculari CZ bis ſumptæ, quæ demittitur ex centro C in rectam VX, tangentem curvam quadrigibbam generatricem in Y, quæ tangens ſupponitur facere cum CO & CG prolongatis, baſin trianguli iſoſcelis VCX: & quidem pari modo, diſtantiæ minimæ & maximæ in ſequentibus curvis multigibbis inveniuntur; ſemper enim diſtantia minima æquatur diſtantiis duabus, minimæ & maximæ ſimul ſumptis, in præcedente multigibba generatrice; & diſtantia maxima æqualis eſt altitudini bis ſumptæ trianguli iſoſcelis formati per prolongationem diſtantiarum præcedentium maximæ & minimæ, uſque ad tangentem, tanquam baſin ejus trianguli. Ex hoc generali fundamento, ſi nunc lubeat eruere limites ſecundos, quos nempe ſuppeditat curva octigibba; advertendum primo eſt, cum octigibba ſit dupla quadrigibbæ, & quadrigibba dupla bigibbæ, ſeu Ellipſeos; fore curvam octigibbam longitudine quadruplam Ellipſeos, adeoque, ut illa fiat æqualis Ellipſi propoſitæ, aſſumendam eſſe pro prima generatrice aliam Ellipſin ſimilem, cujus axes conjugati ſint ſubquadrupli conjugatorum propoſitæ. Sint igitur iterum [ut ante] axes conjugati Ellipſeos propoſitæ $4a$ & $4b$, adeoque nunc $AD = a$, & $BE = b$, inveni pro limitibus ſecundis, nempe radium circuli curvæ octigibbæ inſcripti $= a + b + \frac{1}{2}\sqrt{(2aa + 2bb)}$, & radium circuli eidem circumſcripti $\frac{1}{2}\sqrt{(2aa + 2bb + (aa - bb)\sqrt{2})} + \frac{1}{2}\sqrt{(2aa + 2bb - (aa - bb)\sqrt{2})}$, vel quod tantundem eſt, $\sqrt{(aa + bb + \frac{1}{2}\sqrt{(2a^4 + 12aabb + 2b^4)})}$. Ut applicationem faciamus ad exemplum noſtrum, ubi ſemiaxes conjugati Ellipſis propoſitæ ſunt partium 10 & 8, hoc eſt ubi $a = 5$ & $b = 4$; invenietur pro radio circuli minoris $9 + \frac{1}{2}\sqrt{82}$, & pro radio circuli majoris $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$, qui numeri ſibi magis appropinquant quam hi rationales $9\frac{8}{289}$ & $9\frac{391}{14000}$: etenim $9\frac{8}{289}$ tantillulo minor quam $9 + \frac{1}{2}\sqrt{82}$, & $9\frac{391}{14000}$ tantillulo major quam $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$. Atqui numeri $9\frac{8}{289}$, & $9\frac{391}{14000}$ paulo adhuc propius accedunt ad rationem æqualitatis, quam quæ eſt inter 36562 & 36563. Determinavi igitur, hac ſecunda operatione, duas circumferentias circulares, unam propoſita Ellipſi majorem, alteram eadem Ellipſi minorem, quæ tamen circumferentiæ tam parum ab æqualitate recedunt, ut in plus quam triginta ſex millibus partium, ne quidem parte unica a ſe differant. Nunc, quæſo, perpende, ſi limites primos 162, & 163, excipiant ſtatim limites ſecundi, enormi adeo modo ſibi propinquiores; quid fieret, ſi inſtituеremus nunc tertiam operationem, poſtea quartam, imo & quintam? haud dubitabis credo, de eo quod dixi, paucis iſtis operationibus poſſe, pro Ellipſibus coæquandis perimetris circulorum, perveniri ad limites anguſtiores quam quos *Ludolphus*, multis concatenatis operationibus, invenit, pro ipſo circulo rectificando. Fateor equidem, ulteriores operationes noſtras nonnihil difficiles & longas evadere, propter complicationem ſignorum radicalium, quæ in expreſſionibus limitum magis magiſque coacervantur; ſed qui hiſce delectatur, operæ pretium faceret, ſi inquireret, num qua certa lege limites progrediantur; quo caſu, ſine calculo, pro lubitu continuari poſſent, uti certe jam factum eſt, pro definiendo limite minori; quippe qui, ut ſupra monui, ſemper eſt æqualis medio arithmetico inter limites præcedentes: modo nunc pari facilitate limes major ex præcedentibus erui poſſet, haberemus quod volumus. Interim quamvis nondum id laboris mihi dederim, ut inſtituta tertia operatione tertium limitem majorem definierim; poteſt tamen, conferendo tertium limitem minorem, qui tam facile invenitur, cum præcedente ſecundo majori, perveniri ad rationem magis æqualitati accedentem, quam quæ habetur, ex utroque limite ſecundo. Ita in præſenti exemplo, ubi limites ſecundi $9 + \frac{1}{2}\sqrt{82}$, & $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$, quorum ratio continetur intra 36562 ad 36563, nunc habebitur pro limite minori $\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{82} + \frac{1}{2}\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$ & pro majori $\sqrt{(41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562})}$. Hos limites reperio contineri intra terminos hujus rationis 56717 ad 56718; quos vides una tantum unitate differre. Ellipſis igitur noſtra, cujus axes conjugati ſunt ut 5 ad 4, eo jam proximitatis ad perimetrum circuli reducta eſt, ut exhiberi poſſint duæ circumferentiæ circulares, una Ellipſi major, altera eadem minor, quæ tamen in pluſquam quinquaginta ſex millibus partium, ne una quidem a ſe differunt.

Inſcriptam lineam circumſcripta eſſe minorem certum eſt, cum lineæ ſint ad eaſdem partes cavæ. Dubitabit autem fortaſſe aliquis, an tales ſint hæ multigibbæ; ſed tales eſſe manifeſte infertur ex conſtructione earum ipſa, per motum repentem. Et mirum videri non debet, cum circulus lineam ad eaſdem partes cavam in pluribus punctis tangere poſſit, quod recta non poteſt.

N°. LXXVIII.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola Reſponſoria G. G. LEIBNITII *ad* Joh. BERNOULLIUM.

Data *Berolini*, 1. Febr. 1701.

Miſcel. Berolin. Tom. I. pag. 180.

TAB. XIX. *Fig.* 2.

COGITAVI inter ſcribendum, an tua per circulum appropinquandi ad curvam Ellipſeos Methodus applicari appropinquationi rectæ ad circuli circumferentiam poſſit, adhibendo curvam Ellipſiformem, quæ in rectam extendi poteſt. Sit linea Epicycloidalis A B C D E deſcripta revolutione circuli cujuſdam mobilis, ſuper circulo immobili A E F. Sit B D, chorda maxima in dicta Epicycloidali, per quam abſcindatur ſegmentum B C D: huic adjungatur aliud, per omnia congruum B K D, & ita formabitur linea Ellipſiformis B C D K B, rectificabilis per Geometriam ordinariam; talem enim aſſumtam ſuppono, cujus & puncta per Geometriam communem definiri poſſunt. Hæc tractetur per motum repentem, ut Ellipſis, & habebimus curvas ei æquales, vel ad eam in ratione data, quæ ad circulum in infinitum accedent; adeoque lineam rectificabilem quouſque libebit, admovendo ad circularem, viciſſim circumferentiam circuli magis magiſque admovebimus menſurationi, ſeu rectæ,

EXCER-

N°. LXXIX.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola BERNOULLI *ad* G. G. LEIBNITIUM.

Baſilea 23 *Martii* 1707.

Miſcel. Berol. Tom. I. pag. 180.

TAB. XIX. *Fig.* 3.

QUælibet linea rectificabilis huic fini inſervire poteſt, & ſi Ellipſeos formam non habeat. Sit enim BA arcus curvæ cujuſcunque, exempli gratia, Parabolæ; adjungatur ad B, verſus partem alteram, arcus alius priori per omnia ſimilis & æqualis BD; ita quidem, ut in B [quamquam nec hoc abſolute ſit neceſſarium] habeant communem tangentem, hoc eſt, ut forment curvaturam continuam; jam duobus iſtis arcubus BA, BD, adaptentur duo alii prorſus ſimiles & æquales EA, ED; ut hinc oriatur figura clauſa Ellipſiformis BAED, cujus tota circumferentia æquatur arcui BA quater ſumto; neque obſtat quod in A & D arcus in angulos coëant, non vero, ut in B & E, abeant in curvam continuam. Jam ſi huic figuræ BAED, alia per totum congruens PNQM admoveatur, & altera alteram obrepat, ut in Ellipſi; deſcribet punctum O curvam quampiam quadrigibbam, quæ erit arcus BA octupla, hæc quadrigibba poſtea mutabitur in octigibbam, & ita porro, &c. Fateor equidem curvas iſtas multigibbas non eſſe uniformis naturæ, ut ſunt illæ quæ generantur ex Ellipſibus; conſtant enim ex arcubus diverſis; qui tamen in continuam ubique abeunt curvitatem; & hoc jam ſufficit, pro approximatione ad Circulum. Apparet itaque, quomodo nunc Parabolæ arcus, &, quæ ab eo dependet, area Hyperbolæ, per circulum quantumvis prope

 menſu-

menfurari poſſit; quod ſane hactenus nemo feliciter executus eſt: hac enim Methodo, intra paucas horas, pro illis arctiores limites invenirentur, quam quos miſi pro Ellipſibus. Interim ut & hoc moneam, non neceſſe eſt ut arcus BA quater ſumatur ad formandam figuram clauſam Ellipſiformem BAED, niſi eam omnino ad integram circumferentiam reducere velimus. Nam quilibet arcus ſolus cujuſvis curvæ, per obreptionem ſubcontrariam continuo repetitam in infinitum, tandem abit ſaltem in arcum circuli. Voco autem *obreptionem ſubcontrariam*, quando arcus aliquis ſe ipſum obrepit inverſe, hoc eſt, quando in reptionis initio extremitates oppoſitæ ſe mutuo tangunt: hoc enim modo, arcus propoſitus, per reptionem primam mutabitur in alium ejuſdem, ut voco, amplitudinis, ſed qui conſtabit ex duobus arcubus ſimilibus & æqualibus; qui ſi nunc porro ſubcontrarie ſe mutuo obrepant, orietur arcus conſtans quatuor arcubus ſimilibus & æqualibus, adeoque ad rotunditatem arcus circularis magis accedens; per obreptionem tertiam ſubcontrariam formabimus arcum habentem arcus octo ſimiles & æquales & ſic magis ac magis ad ipſum arcum circuli, ejuſdem cum præcedentibus ſingulis amplitudinis, perveniemus. Hoc unicum adhuc addam, pro applicanda methodo ad rectæ appropinquationem ad circulum, ſumi poſſe Ellipſin, cujus axis minor ſit indefinite parvæ longitudinis, quæ utique nihil aliud erit quam linea recta duplicata. Hanc ſi more Ellipſium per reptionem moveas habebis loco curvæ quadrigibbæ quatuor latera quadrati; poſtea loco octigibbæ ambitum octogoni. Ita ſcilicet Ellipſi abeunte in rectam lineam, Curvæ multigibbæ quoque abeunt in Polygona regularia, & hæc tandem in Circulum. Id quod mihi ſuppeditavit modum hunc facilem exhibendi, per conſtructionem continuo & celeriter appropinquan-
TAB. XIX tem, arcum circuli æqualem lineæ rectæ datæ. Eſto data recta
Fig. 4. BG, perpendicularis ad aliam rectam AC. Ducatur ad arbitrium recta BA, & angulo A fiat æqualis angulus ABC, ut habeatur triangulum iſoſceles BCA. Jam ducatur perpendicularis CD in AB, & ipſi CD capiatur æqualis CL, jungatur

tur DL, in quam agatur perpendicularis CE, cui æqualis abſcindatur CM. Jungatur EM & ducatur perpendicularis CF; hocque continuetur in infinitum; & ſit CR illarum perpendicularium ultima. Dico, arcum circuli RS, radio CR deſcriptum, fore æqualem rectæ propoſitæ BG. Quamquam poſtea viderim puncta B, D, E, F &c. eſſe in Quadratrice DINOSTRATI, quod quidem facile demonſtrari poteſt, adeoque hoc nomine nihil novi me præſtitiſſe, quatenus diu jam cognitum eſt, rectificationem circuli dependere a determinatione interſectionis quadratricis & ejus diametri: in eo tamen aliquid ſingulare hic factum eſt, quod hic puncta in Quadratrice D, E, F &c ob perpendicularitatem CD, CE, CF &c. certius deſignentur, adeoque punctum ultimum R multo accuratius determinetur, quam per modum vulgarem, quo, propter ſectiones magis magiſque obliquas, puncta in Quadratrice tandem valde incerta evadunt. Cæterum vero quidquid de eo ſit, elegans mihi videtur & minime contemnendum, quod hoc ab aliis jam quidem inventum, & ut ſingulare quid venditatum, idem tamen noſtræ inventionis nonniſi minimum tantum ſit Corollariolum.

N°. LXXX.

EXCERPTUM

Ex Epiſtola Bernoulliana *data Baſileæ* 15. April. 1709.

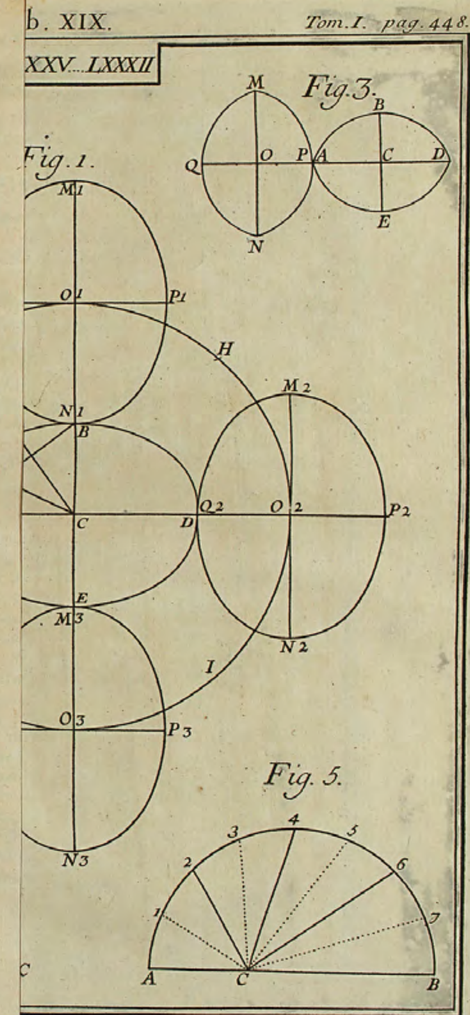
MULTUM excolui & promovi hanc materiam, [de Motu Reptorio & multigibbis,] & admiranda Theoremata detexi: limites quippe pro Ellipticis perimetris ad circulares revocandis non tantum provexi ulterius, ſed etiam certam, eamque facilem legem provehendi quouſque libuerit, erui; habeoque Theorema geometricum [mox ſubnectendum] quod applau-

Miſcel. Berolin. Tom. I. pag. 181.

applausum tuum merebitur, exhibens duos circulos quantumvis prope æquales, quorum unius circumferentia major, alterius minor est circumferentia Ellipsis propositæ. Aliud vero longe generalius mihi suppetit Theorema, quod spectat ad quamvis curvam propositam, intra duos arcus circulares, quantumvis sibi propinquos, coarctandam, idque e vestigio. Ecce

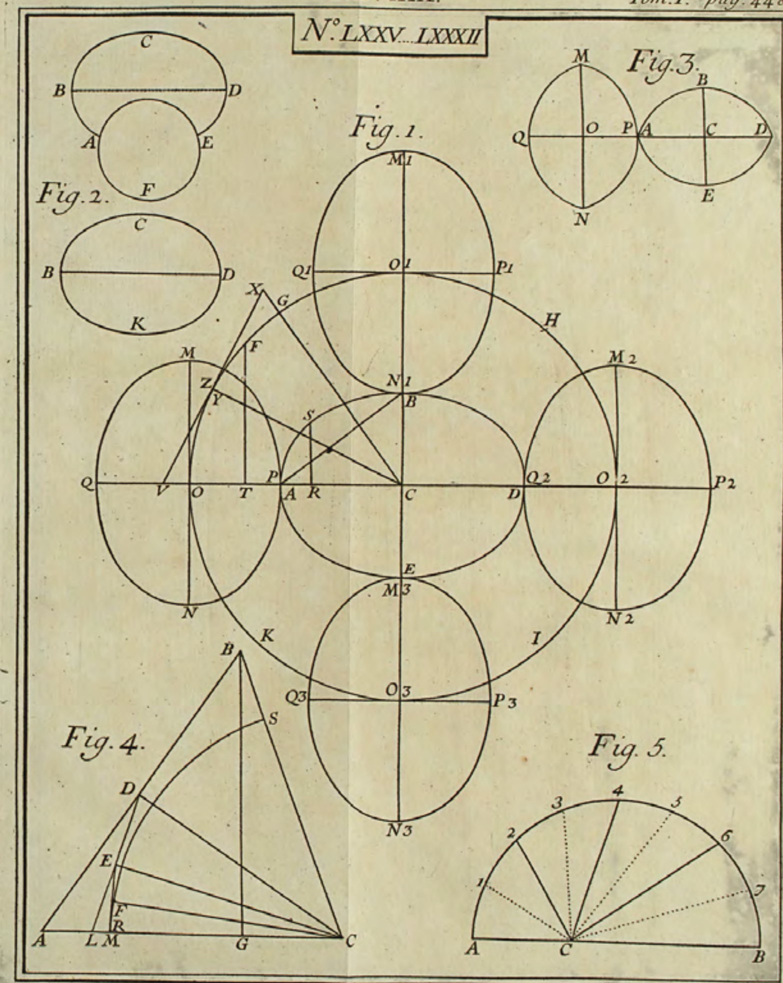
TAB. XIX. *Fig.* 5. Theorema prius: Esto semicircumferentia A 4 B, cujus diameter A B composita est ex semiaxibus alicujus Ellipsis AC & BC. Sit semicircumferentia bisecta continuo in 2, 4, 8, 16, & quotcunque libuerit partes æquales, atque rectarum ductarum ex puncto C ad divisionum puncta imparia 1, 3, 5, 7, capiatur media Arithmetica [hoc est $(C1 + C3 + C5 + C7):4$] quæ vocetur M: & rectarum ductarum ex puncto C ad divisionum puncta paria, 2, 4, 6, auctarumque radio R, seu AB, sumatur media Arithemetica [hoc est $(C2 + C4 + C5 + R):4$] quæ vocetur N, dico M & N fore radios duorum circulorum, quorum ille circumferentiam habet majorem, hic minorem quam Ellipsis proposita. Sunt enim illi duo circuli, circumscriptus & inscriptus, curvæ multigibbæ Ellipticam circumferentiam æquanti, duplo plurium existenti gibborum, quam est numerus divisionum. Unde, si in octo partes dividatur semicircumferentia A 4 B erunt M & N duo radii duorum circulorum circumscripti & inscripti curvæ sedecigibbæ, quæ sit Ellipsi æqualis. Ponamus [pro exemplo] axes Ellipsis esse inter se ut 5 ad 4, calculus me docuit M ad N fore in minore ratione quam est 6000001 ad 6000000.

De



os circulos quantum-
ferentia major, alte-
poſitæ. Aliud vero
, quod ſpectat ad
cus circulares, quan-
ue e veſtigio. Ecce
A 4 B, cujus dia-
alicujus Ellipſis AC
ontinuo in 2, 4, 8,
, atque rectarum duc-
a imparia 1, 3, 5,
(C 1 + C 3 + C 5
n ductarum ex puncto
, auctarumque radio
ca [hoc eſt (C 2 +
, dico M & N fore
circumferentiam habet
poſita. Sunt enim illi
s, curvæ multigibbæ
plo plurium exiſtenti
. Unde, ſi in octo
B erunt M & N duo
inſcripti curvæ ſedeci-
s [pro exemplo] axes
me docuit M ad N
01 ad 6000000.

De



貴重書

DE LI

D*UO*

Sint *dz*
videnda e
libet num
est dx^2 +
erit dx =
— *mm*)

Curvas
quavis prop
Designe
Curvæ qua
ex Curvar
Lemma pr
& dy = (
grales sunt
((*nn* —
Et sic i
liter ex ha-
numeræ i
Exempla
dabitur lo
extendetur
quidem ha
facillime a
solutioni c
est algebra
Joan. B
† Sup-