N°. XLI.

AVIS

Sur les Problémes dont il est parlé dans le Journal des Savans *du* 2. Décembre 1697.

Journal des Sçavans 1698. 7e. Journal, du 17 Fevr. pag. 78. Edit. de Paris, pag. 120. Edit. de Holl.

MOnsieur BERNOULLI, Professeur à *Bâle*, Auteur de ces Problémes, prétend que la solution du principal, qui concerne les figures isopérimétres, n'y est pas entiérement conforme à la vérité. C'est pour cela qu'il veut bien accorder encore quelque temps aux Géométres pour la chercher : Et si enfin personne ne la trouve, il s'engage à trois choses.

1°. A deviner au juste l'Analyse qui a conduit son Frére à la Solution qui se voit dans ce Journal.

2°. Quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes, si on la veut publier.

3°. A donner la véritable solution du Probléme dans toutes ses parties.

Il ajoûte, que s'il se trouvoit quelqu'un, qui s'intéressât assez à l'avancement des Sciences, pour proposer quelque prix pour chacun de ces articles; il s'engage à perdre autant, s'il ne s'aquitte pas du premier; à perdre le double, s'il ne réüssit pas au second; & le triple, s'il manque au troisiéme.

REPON-

N°. XLII.

REPONSE

De Monsieur BERNOULLI, *Professeur de* Groningue, *à l'Avis inseré dans le* VII. Journal des Savans *du* 17. Février 1698.

JE vois bien par cet Avis de mon Frére, que l'inconnu *Non nemo* n'a guére envie de se rendre à la raison ; de peur sans doute d'être obligé de s'aquitter de sa promesse ; autrement il accepteroit l'offre que je lui ai faite, de nous en rapporter à la décision de Mr. LEIBNITZ, comme d'un des plus grands Géométres de ce tems; auquel, pour cet effet, j'avois envoyé mes solutions comme en dépôt; & entre les maius de qui on devroit de même remettre le prix, si l'on ne veut passer pour juge & partie tout ensemble. Ou si l'on recuse cet habile Mathématicien, qu'on en dise la raison, & qu'on en nomme un autre. Car je suis prêt de subir le jugement de tout homme désintéressé, & versé dans ces matiéres. Sans cela, quoiqu'on objecte, je ne répondrai plus à rien, & je mépriserai constamment toutes les chicanes qu'on me fera, & que je prévois déja bien qu'on me veut faire, Voici cependant ce que je veux bien encore répondre à cet Avis.

Journal des Savans 1698. 15e. Journal. du 21. Avril. pag. 172. Edit. de Paris, pag. 270. Edit. de Holl.

On est muet comme un poisson sur ma seconde Solution; ce qui fait déja voir qu'on en est parfaitement content, vû l'extrême application où l'on est à me chicaner. Aussi prens-je ce silence pour les *laudes promeritas*, que mon genereux Promoteur m'a fait esperer pour la solution de ce Probléme, qu'il jugeoit, lui-même, insoluble. Pour ce qui est de ma premiére Solution, savoir celle du Probléme sur les figures isopérimétres, (qu'on dit être le principal, quoique, selon les

les expressions de mon Frére dans les *Actes de Leipsic*, ce soit l'autre qu'il tient pour le plus difficile,) on veut assurer qu'elle n'est pas *entiérement* conforme à la vérité. Mais ce mot, *entiérement*, fait assez voir, qu'on n'oseroit disconvenir qu'elle n'y soit du moins conforme en partie; & un peu plus de bonne foi auroit fait avouer, qu'elle y est même conforme dans toute l'étenduë du Probléme proposé; & que s'il s'y est glissé quelque faute, ce n'est tout au plus que dans le surcroit d'étenduë que j'ai donné moi-même à ce Probléme. Pourquoi donc vouloir traiter cette Solution de paralogisme? N'étoit-il pas plûtôt à présumer que cette faute ne venoit point du tout du fond de la méthode; mais uniquement de quelque circonstance accidentelle? Effectivement, pour avoir trop hâté, (vû que dès le lendemain du jour, que ces Problémes vinrent à ma connoissance, j'envoyai mes solutions à Mr. LEIBNITZ, telles qu'elles ont été inserées depuis dans le Journal du 2. Décembre 1697. * nonobstant le grand terme qu'on m'avoit donné, & dont j'aurois pu me prévaloir,) pour avoir, dis-je, trop hâté, il se glissa une faute légére, non dans la méthode, ni dans la solution du Probléme proposé, mais uniquement dans l'application de cette méthode au surplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ce Probléme, au delà de ce qu'il en avoit, tel qu'on l'avoit proposé: de sorte que cette méprise ne donne atteinte, ni à ma méthode, ni à la Solution requise. C'est pourquoi je soutiens encore, que le Probléme, tel qu'il a été proposé par mon Frére, (*Déterminer la Courbe entre les isopérimétres constituées sur une base donnée, dont la somme des ordonnées élevées à une puissance donnée, fasse un plus grand*) est entiérement resolu dans le Journal du 2. Décembre 1697. & conformément à tout ce que mon Frére demandoit. Ainsi ayant encore, de son aveu tacite, resolu son autre Probléme; auquel des deux qu'il attache le prix de son *Non nemo*, ce prix me sera toujours dû. Mais je l'ai dit, & je le dis encore, n'étant

* Cy dessus N°. XL.

tant point un mercenaire, je le céde aux pauvres; & me chicaner sur le surplus qu'on ne me demandoit pas, c'est-à-dire, sur ce que je n'ai pas donné plus qu'on ne demandoit, ce ne peut être qu'un prétexte, pour leur refuser cette aumône, ou plûtôt pour leur nier cette dette.

J'en pourrois demeurer là, puisque je n'étois pas obligé à davantage. Mais il manque si peu de chose à ma premiére solution, pour lui donner le surplus d'étenduë, que j'ai librement ajouté au Probléme proposé, que trois mots suffisent pour reparer toute la faute de ma précipitation, tant elle est légére: page 462. ligne 7. du Journal du deuxiéme Décembre 1697.* où je dis, *J'appelle b l'intégrale ou la somme des* $GH\,dx : x$, effacez cela, & substituez simplement, *J'appelle b les ordonnées* GH: Omettez aussi le commencement de ce qui suit, savoir ces cinq mots, *D'où il est évident que*; car ce qui suit n'a point de connexion avec ce qui précéde, comme je me le persuadois alors, pour y avoir été trop vite. Dans la même page, ligne 18. † à la place de, *comme b est à* PZ, *ou* GH, mettez, *comme b est à* GT, *ayant tiré* BT *paralléle à la tangente en* H; ou si on l'aime mieux, écrivez seulement, *comme la soustangente de la Courbe* BH *est à l'abscisse* BG. Tout le reste va bien: Je défie le plus clairvoyant de m'y marquer la moindre faute.

TAB. X. N° XL. Fig. 1.

Je repéterai ici en general la proprieté très-remarquable, dont je n'avois fait mention que pour le cas particulier de mon Frére; ce qui fera voir en abregé, en quoi consiste toute ma solution generale, & d'où mon Frére pourra juger si elle s'accorde avec sa particuliére: c'est que si GH, ou PZ, doit être non seulement comme une puissance donnée de PF, mais aussi composée de PF & de données en quelque maniére que ce soit; alors on peut toujours trouver une même Courbe, pour que $\int PZ\,dy$ fasse un plus grand, ou un plus petit; & pour que $\int (dt : PZ)$ fasse réciproquement un plus petit, ou un plus grand: Car j'ai trouvé (ce qui est admirable) que quand le sinus

* Cy-dessus N°. XL. pag. 210. lig. 5.
† Ligne. 18.

ſinus de l'angle mixtiligne BFP eſt à l'ordonnée GH, ou PZ, en raiſon conſtante, alors la Courbe ſatisfait à l'un & à l'autre. Or, comme j'ai fait voir dans les *Actes de Leipſic*, du mois de Mai mille ſix cent quatre-vingt dix-ſept, * cette proprieté convient à la Courbe de la plus vite deſcente, dans toutes ſortes d'hypothèſes. Donc je puis dire avec raiſon, qu'ayant reſolu generalement le Probléme des *Brachyſtochrones*, j'ai auſſi reſolu celui des Iſopérimétres, avant que mon Frére l'eût propoſé.

Il en eſt de même de ſon autre Probléme de la Cycloïde, dont la portion coupée par une verticale donnée, ſoit parcouruë dans le moindre tems poſſible; puiſque j'ai montré que la ſolution en ſuit immédiatement de ma *Synchrone*, & qu'elle n'en eſt qu'un cas particulier. Il eſt ſurprenant, que mon Frére m'ayant voulu propoſer deux des plus difficiles Problémes qu'il pût imaginer, il ſoit juſtement tombé ſur deux que j'avois déja reſolus; & que la ſolution s'en ſoit trouvée dans le même mois des *Actes* où il me les a propoſés. C'eſt ce qui me fournit encore une réponſe fort ſuccincte aux deux queſtions qu'il me fait: ſavoir,

1. *Que la premiére queſtion ſur les Iſopérimétres, eſt reſoluë par mes Brachyſtochrones, & en même tems qu'elles.*

2. *Que la ſeconde queſtion ſur la deſcente à la verticale donnée, par la Cycloïde cherchée, eſt reſoluë immédiatement par ma Synchrone.*

Quant à l'autre partie du Probléme des Iſopérimétres, où l'on demande que PZ ſoit comme une puiſſance donnée de l'arc BF, (je ne ſais ſi cette partie eſt jointe à l'autre copulativement, ou disjonctivement; les particules *vel, ve,* dont on ſe ſert dans la propoſition, paroiſſant n'exiger de moi que la ſolution de l'une ou de l'autre,) j'ai dit dans le Journal du 2. Décembre 1697. † qu'on aura toujours par ma méthode une équation differentielle, ſinon du premier, du moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la Courbe. Comme

* Cy deſſus N°. XXXVII. pag. 190. † Cy-deſſus N°. XL. pag. 210.

me je me contentois alors d'avoir trouvé la méthode qui y conduit; je ne me mis guére en peine d'en faire le calcul; mais depuis ayant eu le temps d'y penſer, j'ai trouvé cette équation, $v = \int (ddy : (dt^2 - dy^2))$, pour la détermination de la Courbe, en prenant dt, ou l'élement de la Courbe pour conſtant: j'entends par v non ſeulement une puiſſance donnée de t, ou de l'arc BF, mais toute quantité compoſée de cet arc BF & de données. Si v eſt $= t$, la Courbe ſe conſtruit fort aiſément par le moyen de la Logarithmique.

Au reſte je remarque, que c'eſt le paralogiſme que mon Frére a cru voir dans ma méthode, qui a donné lieu aux deux premiers des trois articles de ſon Avis, & qu'il y a été un peu trop vite. Par le premier de ces Articles il s'engage à *deviner au juſte l'Analyſe qui m'a conduit à la ſolution de ſon Probléme ſur les Iſopérimétres.* Je ſais bien qu'il penſe, que je me ſuis ſervi de la méthode des Courbes, qui ſe font par la preſſion des fluides, que je conſiderois autrefois pour le calcul de la *Voiliére*, comme compoſée de deux autres preſſions collaterales, ſavoir d'horizontale & de verticale: Qu'il diſe de bonne foi, ſi je n'ai pas deviné au juſte ſa penſée. Mais il ſe trompe: car quoique cette méthode (qui n'eſt qu'indirecte), employée adroitement, conduiſe auſſi à la ſolution requiſe; j'en ai pourtant d'autres, & même une directe, qui m'ont toutes fourni une même ſolution. Ajoutez qu'un ſi merveilleux accord n'eſt pas la ſeule preuve que j'aye de ſa bonté, & que (s'il étoit beſoin) je pourrois la prouver encore par une démonſtration Synthétique, faite à la maniére des Anciens, & ſur-tout à l'imitation de celle que PAPPUS a donnée pour prouver que le Cercle eſt la plus grande des figures iſopérimétres. Je conſeille donc fraternellement à mon Frére de retracter la gageure qu'il offre pour le premier Article de ſon Avis; car il perdroit infailliblement: Il eſt de mon devoir de l'en avertir.

Pour ce qui eſt du ſecond article, j'eſpére qu'il aura aſſez de candeur pour le revoquer, de ſon propre mouvement, après

Ee 2

près qu'il aura vu cet éclairciſſement. Il n'y a rien à dire ſur le troiſiéme. Nous en jugerons quand il aura publié la ſolution qu'il nous promet depuis ſi long-temps.

Pour me conformer enfin à l'humeur de mon Inconnu *Non nemo*, (je ne ſaurois le nommer autrement, puiſqu'il ne veut pas ſe découvrir,) qui ne s'intéreſſe à l'avancement des ſciences, qu'autant qu'il y a de l'argent à gagner; je m'engage à perdre le quadruple de ſa promeſſe, ſi avant la fin de cette année il me détermine géométriquement, (comme je promets de le faire, s'il ne le fait pas,) *quelle demi-Ellipſe, de toutes celles qu'on peut décrire dans un plan vertical, ſur un même axe horizontal donné de grandeur, eſt parcouruë en moins de temps, ſuppoſé que le mobile commence ſon mouvement à une des extrèmités de cet axe.* Je permets que mon Frére le ſecoure. J'ajoute à ce Probléme les ſix autres que j'ai propoſés dans le Journal du 26. Août 1697. * dont Monſieur le *Marquis de* L'HOSPITAL a reſolu les cinq derniers, pour les exemples particuliers que j'y donne; mais je demande des ſolutions generales; ſur tout pour les Courbes diſſemblables, dont il s'agit dans le quatriéme & le cinquiéme. Voilà toute la Replique, que j'ai cru devoir faire à l'Avis de mon Frére.

N°. XLIII.

AVIS

De Mr. BERNOULLI, *Profeſſeur des Mathématiques à* Bâle, *ſur la Réponſe de ſon Frére inſerée dans le* Journal *du* 21. Avril 1698.

Journal des Savans 1698. 20e. Journal du 26. Mai. pag. 240. Edit. de Paris, pag. 377. Edit. de Holl.

AVANT que de publier ma Réponſe aux ſolutions de mon Frére, je le prie de repaſſer tout de nouveau ſur ſa derniére, d'en examiner attentivement tous les points, & de nous dire enſuite ſi tout va bien; lui déclarant, qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétextes de précipitation ne ſeront plus écoutés.

REPON-

* N°. XXXIX.

N°. XLIV.

REPONSE

De Monſieur BERNOULLI, *Profeſſeur de* Groningue, *à l'Avis inſeré dans le* Journal du 26. Mai 1698.

Journal des Savans 1698. 24. Journal du 23. Juin. pag. 284. Edit. de Paris. pag. 446. Edit. de Holl.

JE n'ai que faire de repaſſer ſur mes ſolutions des Problémes de mon Frére: Je ſai qu'en penſer, & mon temps ſera aſſûrément mieux employé à faire de nouvelles découvertes. C'eſt aſſez que mon Frére reconnoiſſe enfin que je poſsède la méthode, puiſque c'eſt tout ce dont il s'agit ici; la précipitation qu'il croit appercevoir dans ma réponſe du 21. Avril dernier, ne faiſant, ni pour, ni contre la validité de cette méthode. C'eſt donc en vain qu'on tâche de ſe tirer par tous ces détours; & tandis que le *Non nemo* refuſera de ſe ſoumettre au jugement d'un tiers, comme il l'a refuſé juſqu'ici, nonobſtant toutes les aſſignations que je lui ai données; tout le monde verra bien que c'eſt cauſe perdue pour lui. Cependant, pour couper pied à toutes ces chicanes, je ſoutiens.

1. *Que j'ai exactement & légitimement reſolu par mes Brachyſtochrones le Probléme des Courbes, dont les ordonnées élevées à une puiſſance donnée, font un plus grand.*

2. *Qu'entre toutes les Cycloïdes décrites d'une même origine, & ſur une baſe horizontale, celle qui rencontre à angles droits une ligne droite (verticale,) eſt auſſi celle par laquelle le mobile deſcend le plus vite à cette même ligne droite, en commençant ſon mouvement à l'origine commune des Cycloïdes.*

C'eſt là tout ce que ma partie m'a demandé. Ainſi pour répondre juſte, c'eſt à ces deux propoſitions préciſément qu'elle doit répondre: oui, ou non, c'eſt aſſez; & ſe jetter ſur le ſur-

ſurplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ces deux Problémes, c'eſt prendre le change, ou le vouloir donner, puiſqu'il ne s'agit point du tout de ce ſurplus, quoiqu'il ſoit auſſi parfaitement conforme à la vérité.

Au reſte, puiſque dans ce nouvel *Avis*, on ne fait aucune mention des Problémes que j'ai propoſés à mon *Non nemo* dans ma *Réponſe* du 21. Avril dernier; j'en conclus qu'il n'oſe riſquer ſeulement le quart de ce que j'expoſe, c'eſt-à-dire, de tout ce que je lui ai laiſſé la liberté de parier. Je lui donne encore cinq ſemaines, à compter du jour que ceci paroitra, pour déclarer s'il veut accepter la gageure. Ces Problémes ſont à la portée de l'eſprit humain, puiſque je les ai reſolus: Ainſi, s'il eſt brave, & auſſi habile qu'il veut le paroitre, il doit accepter ce défi, & ne pas reculer.

N°. XLV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monſieur BERNOULLI *de* Bâle, * *du* 26 *Juin* 1698. *Contenant l'examen de la ſolution de ſes Problémes, inſerée dans le* Journal *du* 2. Décembre 1697.

Journal des Savans 1698. 30 Journal du 4 Aouſt pag. 355. Edit. de Paris. pag. 560. Edit. de Holl.

Comme cette Lettre étoit faite dès le temps que l'Avis de Monſieur BERNOULLI, *inſeré dans le Journal du* 17. *Févrir* 1698, *fut publié, il n'a pas jugé à propos d'y rien changer pour l'autre ſolution du* 21. *Avril; ſe reſervant de répondre ſéparément à cette ſolution, qu'il dit être contraire à la premiére.*

Lorſque je propoſai, dans les *Journaux de Leipſic*, à mon Frére quelques Problémes de Géométrie, ce fut principalement dans la vûe, & dans l'eſpérance qu'il nous en donneroit un jour la ſolution. Car outre que je conſiderois, que nous pouvons avoir bonne part à la gloire de ceux qui ſe rendent habiles dans une Science, dont il n'y a pas long-

* A Mr. VARIGNON.

long-temps que nous leur avons donné les premiéres ouvertures; j'avois encore des raiſons particuliéres pour ſouhaiter qu'il y pût réüſſir, & gagner le petit prix qui y a été joint par un de mes amis. Ce que je dis, Monſieur, pour vous faire comprendre le plaiſir que j'ai eu à lire la ſolution de mes Problémes dans le cahier du Journal que vous avez eu la bonté de m'envoyer, & plus encore à y remarquer d'abord quelque conformité avec la mienne, laquelle me faiſoit croire qu'il s'en étoit aquitté en habile homme. Mais que ce plaiſir a duré peu! Il a été bien-tôt ſuivi du chagrin de voir mon attente fruſtrée; lorſqu'en ayant examiné toutes les circonſtances avec ſoin, j'ai trouvé que la ſolution de mon premier, & principal Probléme, étoit très-défectueuſe, & même fauſſe en tout ſens; bien qu'en un cas elle nous faſſe trouver, par accident, la pure vérité. Pour prévenir la ſurpriſe, qu'un aveu de cette nature pourroit cauſer; il faut conſiderer qu'en raiſonnant juſte ſur une hypothèſe vraye, l'on arrive toujours à une concluſion vraye; qu'en raiſonnant juſte ſur une hypothèſe fauſſe, l'on arrive toujours à une concluſion fauſſe; (comme l'on voit par les démonſtrations qu'on appelle *ad abſurdum*;) mais qu'en raiſonnant fauſſement ſur une hypothèſe fauſſe, il ſe peut faire, quelquefois, qu'on arrive à une concluſion vraye; une fauſſeté, pour ainſi dire, corrigeant l'autre. C'eſt juſtement ce que je crois être arrivé à mon Frére, qui, ſelon toutes les apparences, s'eſt d'abord jetté dans un principe faux, d'où par le moyen d'un Sophiſme il a tiré une ſolution, qui par un bonheur extraordinaire, ne laiſſe pas d'être en partie véritable. Quoique je ne parle que par conjectures, (il ſeroit à ſouhaiter, pour en juger avec certitude, qu'il nous eût donné l'analyſe, ou du moins la démonſtration de cette ſolution, comme j'ai fait celle de ſon Probléme de la plus vite deſcente:) je m'aſſure pourtant que ces conjectures ſont tellement fortes, que vous ayant expliqué la maniére, dont je m'imagine qu'il s'y eſt pris, vous m'avouerez qu'il eſt comme impoſſible qu'il ſe ſoit ſervi d'une autre.

Mais quand il n'y auroit rien à redire à la ſolution en elle-même, je ne trouve pas encore qu'il puiſſe prétendre au prix qu'on y a joint; d'autant qu'il n'a reſolu le Probléme, ni ſuivant mon intention, ni pleinement, & en toutes ſes parties. Vous vous ſouvenez ſans doute, Monſieur, que j'ai propoſé mes Problémes, à l'occaſion de celui de mon Frére, dont j'avois donné la ſolution par des principes de pure Géométrie; en ſorte qu'il eſt viſible, que mon intention étoit d'inviter mes Lecteurs à les reſoudre par la même voye. Mais il eſt très-probable, comme je le ferai voir, que mon Frére ne s'eſt ſervi dans cette recherche que d'un principe étranger & méchanique, qu'il devoit pluplûtôt prouver que ſuppoſer; c'eſt pourquoi l'on ne ſauroit aucunement dire, qu'il ait agi ſuivant mon intention. A quoi j'ajoûte, que celui qui aſpire au prix d'un Probléme, eſt obligé d'en donner une ſolution complette, qui ſatisfaſſe à tous les points de la queſtion propoſée. C'eſt ainſi que je fis à l'égard des Problémes propoſés par mon Frére dans ſon Programme de l'année paſſée : j'eus ſoin de les reſoudre tous, & en toutes leurs parties, juſqu'à marquer même un endroit où mon Frére pouvoit s'être trompé, en prenant des Courbes differentes pour une même. Et c'eſt ce qu'on ne peut pas dire de la ſolution qu'il nous donne à préſent de mon Probléme ; puiſque, quand j'accorderois tout le reſte, il ne l'a pas reſolu dans la partie qui concerne l'arc BF, ou plûtôt parce qu'il l'a reſolu fauſſement, comme je dirai ci-après.

Mais entrons en matiére, & voyons quelle peut avoir été l'analyſe de mon Frére. Il dit qu'il avoit trouvé la ſolution du Probléme, le même jour qu'il vint à ſa connoiſſance ; & dans *l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans*, au mois de Juin 1697. Art. 2. * où il nous anonce ſa ſolution, il reſtreint ce jour-là à trois minutes. Ce peu de temps me fit auſſi-tôt ſoupçonner, qu'il ne l'avoit cherchée que par quelque principe étranger, ou indirect, & tel qu'il ſaute naturellement aux yeux ; ſachant par expérience que celle qui ſe tire de la pure Géométrie, eſt trop recherchée pour être ainſi trouvée tout d'un coup. Je remarquai auſſi, qu'il n'y avoit rien qui ſe préſentât plus naturellement à l'eſprit, que ce principe de Méchanique : *Que les corps peſans deſcendent, juſqu'à ce que leur centre de gravité ſoit le plus bas qu'il ſoit poſſible* ; par exemple, qu'un lambeau de linge BTN ſoutenu par ſes extrémités, B, N, & rempli de quelque liqueur juſqu'à ſa baſe BN,
TAB. X. N°. XLV. ou bien qu'une corde BTN chargée de differens poids dans tous les points de ſa longueur, doit prendre une figure, telle que le centre de gravité de cette liqueur, ou de ces poids, deſcende plus bas qu'il ne feroit dans toute autre. Et c'eſt, à mon avis, le principe dont mon Frére s'eſt ſervi en cette rencontre. Voici comme il l'applique. Il ſuppoſe un linge BTN rempli juſqu'à la baſe BN d'une certaine liqueur, qu'il conçoit être de differente peſanteur ſpécifique, & telle que le poids de chaque filet PF ſoit comme GH diviſé par BG ; d'où il ſuit, que faiſant BP $= y$, PF $= x$, BF $= t$, & GH, ou PZ, $= p$; le poids du petit trapèze PC ſera $pdy : x$ (je marque la diviſion par : à la façon de Mr. LEIBNITZ, pour la commodité de l'Imprimeur, vous priant de rendre cette Lettre publique,) ſa force mouvante, *momentum*, à l'égard de la ligne BN ſera $= \frac{1}{2}\, pdy$; & par conſéquent la ſomme de ces forces $= \int \frac{1}{2}\, pdy$: & cette ſomme devant déterminer la

* Cy-deſſus N°. XXXVIII. pag. 202.

la diſtance du centre de gravité de la liqueur à la baſe BN, laquelle par l'hypothèſe eſt la plus grande qu'elle puiſſe être ; il conclut que $\int \frac{1}{2}\, pdy$, ou bien ſon double $\int pdy$, c'eſt-à-dire, la ſomme des trapèzes QZ, ou l'eſpace BZN, eſt un *Maximum*, ce que la queſtion demande. Il s'imagine donc que, pour en venir à bout, on n'a qu'à chercher la courbure d'un tel linge, ſuivant la méthode que j'ai autrefoi pratiquée pour la Voiliére ; ce qui ſe fait ainſi. Par ma Théorie de la preſſion des fluides, le poids PC étant $pdy : x$, il pouſſe la portion du linge FC, ſuivant ſa perpendiculaire FD, avec une force FD $= pdt : x$, laquelle par la doctrine de la communication des mouvemens ſe peut reſoudre en horizontale FE $= pdx : x$, & en verticale ED $= pdy : x$. Que toute ces petites forces verticales, qui agiſſent ſur la partie du linge FT, ſoient ramaſſées dans le corps L, & toutes les horizontales en M ; que ces deux corps tendent les deux filets FI, TI, qui touchent le linge en F & T : il faudra les mêmes puiſſances en F & en T, pour ſoutenir les corps L & M, qu'il faut pour ſoutenir le linge FT ; & parce que la puiſſance T demeure conſtamment la même, en quelque endroit du linge que l'on applique l'autre F, il s'enſuit que la partie de cette puiſſance, qui eſt employée à ſoutenir le corps L eſt $= \int (pdx : x)$ ſomme des forces horizontales, qui agiſſent ſur la partie du linge BF, laquelle jointe au corps M $= \int -(pdx : x)$ ſomme des forces horizontales qui agiſſent ſur la partie FT, & que la puiſſance T porte toute ſeule, fait une ſomme conſtante. Ceci étant poſé, l'on peut conſiderer, ſuivant votre beau Théorème, dont je me ſers en beaucoup de rencontres très-utilement, que le corps L eſt à la partie de la puiſſance T qui le ſoutient, c'eſt-à-dire, $\int -(pdy : x)$ à $\int +(pdx : x)$, comme le ſinus de l'angle FIT ou CFV au ſinus de l'angle FIK ou FCV ; c'eſt-à-dire, comme CV à FV, ou dx à dy : proportion qui ſe reduit juſtement à l'égalité que mon Frére donne pour la Courbe cherchée, qui eſt $dy = dx \int (pdx : x) : \sqrt{(1 - (\int pdx : x)^2)}$ ou [en mettant b au lieu de $\int (pdx : x)$] $bdx : \sqrt{(1 - bb)}$, & [dans le cas particulier de $p = x^m$] $dy = x^m dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$, comme l'on peut voir en ce que par la ſubſtitution de ces valeurs les termes de la proportion s'identifient.

Par un ſemblable raiſonnement on peut prétendre de trouver la Courbe BTN, dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *Maximum* ou un *Minimum*, en feignant que cette Courbe eſt repréſentée par une corde chargée dans tous les points F de petits poids réciproquement proportionnels à x^{m+1} ; par ce moyen le poids de la portion FC deviendra $dt : x^{m+1}$, la force de ce poids à l'égard de la droite BN, $dt : x^m$, & la ſomme de ces forces

ces, qui doit marquer la distance du centre de gravité de tous les poids à la droite B N (& par conséquent un *Maximum*) $\int(dt : x^m)$, comme il est requis. Le calcul en est le même que ci-dessus; on doit seulement remarquer, que le corps M étant nul en cette rencontre, la puissance T qui est constante, & que l'on peut nommer $1 : m$, est toute employée à soutenir le corps L ou $\int -(dt : x^{m+1})$; de sorte que l'on a cette proportion, $\int -(dt : x^{m+1}) : \frac{1}{m} = dx : dy$. D'où l'on tire encore l'égalité précédente $dy = x^m dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$, comme mon Frére l'a trouvée.

Vous voyez, Monsieur, quelle peut avoir été l'analyse qui l'a conduit à la solution qu'il nous donne de mon Probléme. Il ne faut pas être fort attentif, pour y découvrir deux défauts considérables. Il suppose d'abord, sans fondement, que s'il y a plusieurs figures isopérimétres chargées de poids en certaine proportion par dedans, ou autour de leurs circonferences, le centre de gravité de ces poids est plus éloigné de l'axe dans celle que ces poids auroient donné à un linge ou à une corde, que dans toutes les autres. J'avoue que lorsqu'il y a toujours une même quantité de poids, qui agit successivement sur quelque matiére flexible que ce soit, ces poids doivent se ranger de telle sorte, que leur centre de gravité se trouve le plus bas qu'il soit possible; mais dans la supposition précédente, la quantité des poids n'est pas la même dans les differentes figures isopérimétres; ou quand il y en auroit une même quantité, il est impossible que ces poids faisant prendre successivement à la matiére fluide des figures differentes, puissent acquerir ou retenir d'eux-mêmes cette proportion ou disposition qu'on leur suppose. Soient, par exemple, deux figures isopérimétres B T N & B btn N, dont celle-ci renferme un espace BbtnN plus grand que B T N de tout l'espace BbnN, puisqu'on sait que les isopérimétres ne sont pas égales; qu'on conçoive à la place de la figure B T N un linge rempli jusqu'à la base B N de quelque liqueur ordinaire, & telle que le poids de chaque filet P F soit proportionnel à la longueur P F, c'est le seul cas possible dans la nature; que cette liqueur agissant librement sur le linge, lui fasse prendre la figure BbtnN : Il est clair, qu'après cela, elle n'ira plus qu'en bn, & que par conséquent le centre de gravité de l'espace btn doit bien être plus bas que celui de l'espace B T N; mais il n'est nullement évident, qu'ajoutant par dessus celui-là la portion BbnN, le centre de la gravité de tout l'espace BbtnN soit encore plus bas que celui de B T N, ou de telle autre figure isopérimétre qu'on voudra. Je soutiens même que cela est faux, & que la figure d'entre les Isopérimétres, dont le centre de gravité est le plus éloigné de l'axe, n'est pas celle

celle d'un linge rempli de liqueur, mais une autre que j'enveloppe dans cette anagramme, pour donner loisir à mon Frére de la chercher aussi, s'il veut persuader à nos Lecteurs qu'il possède la véritable méthode pour ces Problémes : $a^{12} b^2 c^3 e^9 g^2 h i^7 l^6 m^3 n^6 o^4 p^7 q r^2 s^2 t^7 v^4$. *

Cependant quoi que le centre de gravité de l'espace absolu ne soit pas le plus bas dans la figure du linge, on peut du moins conclure que le centre de cette portion, qui est remplie par la masse liquide, doit être plus bas que le centre d'une portion égale, qu'on pourroit couper depuis le sommet de telle autre figure isopérimétre qu'on voudra; comme effectivement je le trouve par mon analyse : marque indubitable de sa bonté & de sa justesse. Et c'est avec cette limitation qu'il faut entendre ce que j'ai dit du centre de gravité de la Courbe élastique, dans les *Actes de Leipsic* de l'an 1694. pag. 276.

L'autre erreur qui se trouve dans l'analyse précédente de mon Frére, n'est pas moins considerable. Elle consiste, en ce qu'il marque la distance du centre de gravité des poids par la somme de leurs forces; & chacun sait que cette distance se détermine par la somme des forces appliquée à la somme des poids, & qu'ainsi elle ne peut se proportionner à la seule somme des forces, que lorsque la somme des poids demeure constamment la même; ce qui n'arrive pas ici, comme je viens de le remarquer.

Ibid. 31. Journal du 11 Aoust. pag. 361. Ed. de Paris, pag. 570. Edit. de Holl.

Voilà donc deux faussetés assez palpables dans un même raisonnement; mais aussi deux faussetés, dont l'une redresse l'autre si heureusement, qu'elles font trouver, dans quelques cas, la véritable solution; quoique cela ne puisse être que l'effet d'un pur hazard, qui ne donne pas plus de droit à la gloire d'avoir réüssi, qu'auroit celui, qui pour soutenir qu'*un caillou est de la pierre*, le prouveroit par ce raisonnement : *Tout homme est pierre; Tout caillou est homme; Donc tout caillou est pierre.* Marque de cela, c'est que l'on peut proposer tel Probléme, où l'une des faussetés venant à cesser, l'autre nous conduiroit à une conclusion nécessairement fausse : comme si l'on proposoit de trouver entre une infinité de Courbes isopérimétres B T N, B t N, &c. (qui seroient toutes chargées dans leurs circonferences, en sorte que le poids de chaque portion F C fût comme la portion correspondante de la base P Q) celle qui a le centre de gravité de ces poids le plus éloigné de l'axe; car en ce cas on trouve que la chainette est une parabole, ainsi que je l'ai dit dans les *Actes* de 1691 au mois de Juin, pag. 288. au lieu que la Courbe cherchée doit être un Cercle; parce que la somme des poids étant ici comme la somme des P Q, ou comme la base B N, & par conséquent la

* Le sens de cette Anagramme est celui-ci *Illa nempe* (figura) *quæ sinum anguli tangentis & applicatæ cubo applicatæ proportionalem habet*, par où l'on désigne la Courbe dont l'équation est $dy = x^3 dx : \sqrt{(a^6 - x^6)}$

même dans toutes les Courbes iſopérimétres, la diſtance du centre de gravité des poids à la baſe eſt véritablement proportionnelle à la ſomme de leurs forces, c'eſt-à-dire, à $\frac{1}{2} \int x dy$, laquelle on ſait n'être la plus grande que dans le Cercle.

Mais quoiqu'il en ſoit de tout ceci, il eſt ſeur que la ſolution de mon Frére, généralement parlant, eſt fauſſe; ſur tout, que celle qui regarde l'arc B C, l'eſt même dans tous ſes cas : ce qui me confirme entiérement dans la perſuaſion où je ſuis, que l'analyſe qui l'y a conduit, ne peut être differente de celle que j'ai rapportée, & qui fait trouver ſi juſtement ſa ſolution. Tout le monde ſait, qu'il eſt aſſez ordinaire qu'on arrive à une même vérité par différentes voyes; parce que la vérité n'eſt qu'une, & toujours ſimple : mais le faux étant infini en nombre, il eſt moralement impoſſible qu'on arrive à une même fauſſeté par deux raiſonnemens auſſi plauſibles & auſſi apparens que celui-là. Et c'eſt cette conſidération qui a donné lieu au premier des trois Articles du mois de Février dernier de ce Journal, où je me ſuis engagé à deviner l'analyſe de mon Frére. * Vous jugerez, Monſieur, ſi je puis avoir bien rencontré.

Au reſte, il y auroit lieu de s'étonner, ſi une analyſe auſſi défectueuſe que celle-là, n'étoit pas ſujette à pluſieurs contradictions : Auſſi l'eſt-elle à plus d'une. Premiérement j'obſerve que, ſi au lieu de ſe repréſenter la Courbe, dont $\int x^m dy$ eſt un *Maximum*, comme un linge, & celle dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *Minimum*, comme une corde : l'on peut tourner la choſe, en ſe ſervant de la conſideration de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci; & alors on trouvera des ſolutions très-differentes de celles qu'on a trouvées. J'obſerve auſſi que la raiſon du choix de mon Frére, qui a préféré le linge pour la premiére, a été, ſans doute, parce qu'il a vu que, s'il faiſoit autrement, la ſolution qu'il trouveroit, ne l'accommoderoit pas pour le cas de $m = 1$, auquel on ſait que la Courbe doit être un Cercle. Je ne parle point ici de ce que, ſuivant cette analyſe, la qualité $\int (dt : x^m)$ de la Courbe cherchée devroit plûtôt être un *plus grand*, qu'un *plus petit*; je remarque ſeulement que cette Courbe ſe peut encore trouver, ſi on la conſidére comme un rayon de lumiére, qui paſſe par un milieu inégalement tranſparent, & dont la rareté à la hauteur B G eſt comme G H; mais qu'elle ne s'accorde avec celle, qui ſe trouve par la conſidération de la corde, que lorſque G H eſt comme une ſimple puiſſance de B G; ce qui eſt peut-être cauſe que mon Frére, après avoir donné la Courbe dont $\int p\, dy$ eſt un *plus grand*, généralement pour tout les rapports de G H à

* Ci-deſſus N°. XLI. pag. 214.

G B, ou de p à x, n'oſe faire la même choſe de $\int (dt : p)$, & qu'il ſe contente de nous dire ſimplement quelle eſt la Courbe dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *plus petit*; bien que cette précaution ait été aſſez ſuperflue, & qu'il eût pû nous donner hardiment tout ce qu'il a trouvé ſur cette derniére ſuppoſition, l'analyſe qui s'y fonde étant tout autrement évidente que celle qui prend la Courbe pour une corde. Il faut cependant avouer qu'elle n'eſt pas plus propre que les autres pour faire trouver la Courbe dont $\int t^m dy$ eſt un *plus grand*, ou un *plus petit*; puiſque l'on conçoit aiſément que les longueurs B F de différentes iſopérimétres, qui correſpondent à une même hauteur B G, étant differentes, il faudroit que les G H qui y ont raport, & qui marquent la rareté du milieu, fuſſent auſſi differentes à la même hauteur B G; ce qui eſt abſurde. Enfin, Monſieur, cela eſt ſi clair, qu'il n'y a pas lieu de douter, que mon Frére n'ait bien vu & bien connu tout cela. Mais le moyen d'y remédier ! Il s'étoit déja précipité de publier par tout qu'il avoit trouvé la véritable ſolution, & il n'y avoit plus moyen de s'en dédire : le temps preſſoit, le terme alloit expirer, & il n'en avoit pas trouvé de meilleure. Il faloit donc publier celle qu'on avoit, malgré l'inévidence, & toutes les contradictions qui s'y rencontrent.

Deux autres Anagrammes, dont peut-être on donnera un jour la clef.

$a^{44}\ b^{8}\ c^{25}\ d^{20}\ e^{45}\ f^{3}\ g^{4}\ h^{2}\ i^{58}\ l^{21}\ m^{32}\ n^{32}\ o^{17}\ p^{19}\ q^{8}\ r^{30}\ s^{39}\ t^{42}\ v^{54}\ x.$

$a^{45}\ b^{8}\ c^{16}\ d^{10}\ e^{50}\ f^{3}\ g^{7}\ h^{2}\ i^{40}\ l^{7}\ m^{15}\ n^{33}\ o^{7}\ p^{13}\ q^{4}\ r^{18}\ s^{33}\ t^{40}\ v^{10}\ x^{4}.$

NB. Le ſens de ces deux Anagrammes eſt celui-ci.

Ex infinitis curvis, genere iisdem, illa gravi celerrimum deſcenſum ad datum perpendiculum concedit, quæ tempus totius deſcenſus, poſitis celeritatibus in ratione ſubduplicata altitudinum, duplum; in ſubtriplicata, triplum; in ſubſeſquialtera ſeſquialterum efficit ſummæ quorumdam elementorum, quæ ad reſpectiva tempuſcula rationem habent duplicatam elementorum applicatæ ad elementa Curvæ. Conſtat igitur, quomodo hæc per interſectionem duarum tranſcendentium determinetur. Imo dico amplius, in ſpecialibus quibusvis curvis, quæſitam, etiam unius tranſcendentis & algebraicæ ope, ſemper inveniri.

Tangens linea ex infinitis genere iiſdem curvis æquales arcus abſcindentis ita reperitur. Ductis per datum in abſcindente punctum una ex infinitis, ejuſque tangente & applicata, fiat : Ut exceſſus hujus tangentis ſupra ſummam tertiorum proportionalium ad elementa abſciſſæ Curvæ & elementa applicatæ, ad ipſam Tangentem; ita ſubtangens ad quartam; Denotabit hæc portionem axis tangentibus utriuſque abſcindentis & abſciſſæ Curvæ interceptam.

N°. XLVI.

AVIS SUR LA REPONSE

Inserée dans le Journal du 23. Juin dernier 1698.

Ibid. pag. 364. Edit. de Paris & pag. 575. Edit. de Holl.

JE n'ai jamais cru que mon Frére possedât la véritable méthode pour le Probléme des isopérimétres ; mais maintenant j'en doute plus que jamais, vu la difficulté qu'il fait de repasser sur ses solutions. Car enfin pourquoi nous refuser une chose si-tôt faite, si ce n'est qu'il ne se fie pas lui-même à sa méthode ? S'il n'*a emploié que trois minutes de temps*, comme il le dit, *pour tenter*, *commencer*, *& achever d'approfondir tout le mystére*, il y a apparence que la revue de ce qu'il a trouvé, ne lui en coûtera pas davantage : d'ailleurs quand il y en mettroit le double, est-ce que six minutes, emploiées à cet examen, diminueroient tant le nombre de ses nouvelles découvertes ? Mais quelque peu de peine que cela lui doive donner, je veux bien encore lui faire grace de plus de la moitié, en le priant seulement de retoucher ce qui concerne l'arc B F, ou du moins de nous dire, s'il n'y a point de faute d'impression dans son égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ Il sait que cela fait *une partie de ce que j'ai demandé*, quoiqu'il le dissimule ; & qu'ainsi il est indispensablement obligé de reformer sa solution, si elle est fausse, comme je le soutiens ; à moins qu'il ne veuille se désister de ses prétentions. Autrement, sur quoi veut-il que nos Lecteurs fondent leur jugement, n'aiant vu de lui ni analyse, ni démonstration ? (parce que peut-être il n'en ose donner.) Je déclare que bien loin de refuser dans tout ce differend l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ, je veux encore accepter de bon cœur celui de Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, comme de tous les plus excellens Géométres de ce temps ; pourvu qu'ils veuillent surseoir leur jugement, jusqu'à ce que j'aie parlé à mon tour, & que j'aie achevé de répondre aux deux solutions que mon Frére nous a données dans le Journal.

Je ne dis rien des nouveaux Problémes, par lesquels mon Frére tâche de faire diversion dans l'esprit des Lecteurs ; tant parce que n'aiant pas encore satisfaction sur le mien, je ne m'y crois pas obligé, que parce qu'il semble n'en vouloir proprement qu'à son *Non nemo*. Je ne sais si celui-ci nous en donnera un jour la solution ; mais je sais bien qu'il est homme à le faire, & peut-être l'a t-il fait déja. Du moins, si l'on est sage, on en demeurera là, & on ne le poussera pas davantage.

EX-

N°. XLVII.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monsieur BERNOULLI, Professeur *de* Groningue, *du* 22 Aout 1698, *pour servir de Réponse à celle de son* Frére Professeur *à* Bâle, *inserée dans les* Journaux *du* 4 & 11, *du même mois.*

Journal des Savants 1698. 40 Journal du 8. Déc. pag. 477. Ed. de Paris. pag. 759. Edit de Holl.

*COmme les dates pourroient être ici de quelque considération, M. V. * croit devoir avertir qu'il a reçu cette Lettre dès le 2 Septembre dernier, & que les vacances du* Journal *n'ont pas permis qu'elle parût plûtôt.*

Il est bien surprenant, qu'en voulant ménager une personne, il se trouve qu'on l'offense. Je croyois n'avoir affaire qu'à un Inconnu ; je prenois toutes les mesures possibles, pour ne point donner sujet à mon Frére de se plaindre de moi ; je tâchois de conserver l'union & la charité qui doit être entre deux fréres ; & je me trouve malheureusement trompé : l'extrait de sa Lettre, que je reçus hier, me faisant voir, que tant de mesures & tant d'égards pour lui, n'ont pu l'empêcher de s'intéresser de toute sa force pour cet Inconnu, & de prendre parti contre moi ; mais d'une maniére si chaude & si violente, qu'il n'y a personne qui ne voye qu'au lieu de cette louable émulation dont je me flattois, ce n'est qu'une aveugle envie qui le conduit. C'en est fait, son imagination plus forte & plus vive que celle de ces prétendus sorciers, qui croyent se trouver corporellement au Sabbat, l'a séduit ; il se laisse entrainer au torrent de ses vaines conjectures ; en un mot, il ne paroit plus donner cours à la raison, ni même en état d'entendre tout ce que je lui en pourrois alleguer. Je l'abandonne

* Mr. VARIGNON

ne donc à ses passions; & je me contenterai de faire voir au Lecteur l'absurdité de ses attaques.

Mon Frére avouë qu'il n'a point encore vû mon analyse; cependant il la refute: étrange maniére de refuter! Il s'en forge d'abord une, il me l'attribuë à faux; il y raisonne à perte de vuë; il en déduit des absurdités, des contradictions, & je ne sai quelles niaiseries: il n'en faut pas davantage; il est entêté; il me les impute toutes; ce sont des suites de ma prétenduë analyse; il en parle dans tout le cours de sa Lettre positivement comme de la mienne, & avec une assurance inconcevable. Quelle témérité! Quelle impudence! de me vouloir imputer à outrance une analyse, qui n'est point la mienne, dont je me défens, & que je désaprouve moi-même. Que veut-il davantage? Voilà toute la force de son attaque abattue: Car je lui nie absolument, que l'analyse, qu'il entreprend de refuter, soit la mienne. Il me semble que j'ai été meilleur prophête que lui, en ce qu'au XV. Journal, pag. 176. * j'ai si bien deviné ses conjectures; mais d'où vient qu'il n'a pas lû cet endroit-là? J'y dis expressément que ma Méthode est directe, géométrique, & telle qu'il la demande; que celle des fluides employée adroitement (& non comme mon Frére l'employe) conduit à la même & véritable solution. En vérité, s'il avoit lû sans prévention tout ce que je dis en cet endroit, il se seroit épargné la peine d'écrire tout son galimatias, lequel ne me touche aucunement, & qui n'est pas plus contre moi que contre le grand Turc. Je passe volontiers sous silence toutes ses grosses expressions, seur qu'il s'en repentira dès qu'il reviendra à soi. C'est pourquoi je ne m'arrêterai qu'à ce qui m'oblige indispensablement d'y répondre.

On feroit bien mieux de se taire, que de prétendre nous avoir donné quelque ouverture dans cette Science: Je crois que ces ouvertures se sont données mutuellement; & si nous voulions entrer en compte, je ne sais à qui on seroit en reste. Je

* N°. XLII. pag. 219.

prie seulement mon Frére de se ressouvenir à qui il est redevable de la premiére Théorie des chainettes, de laquelle il se sert présentement en Maitre dans toute sa Lettre: les gens qui le savent, sauront qu'en penser; ces sortes de reproches sentent trop la vanité.

Mon Frére dit, pag. 355 * que *le plaisir qu'il avoit d'abord, de voir quelque conformité entre ma solution & la sienne, a été bien-tôt suivi du chagrin de voir son attente frustrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les circonstances avec soin, il a trouvé que la solution de son premier & principal Probléme étoit très-défectueuse.* * Cy-dessus, pag. 223.

S'il a eu du plaisir, plûtôt que du chagrin, de voir quelque conformité entre ma solution de son premier Probléme & la sienne, que ne me rend-il donc justice sur ma solution de son dernier Probléme, que j'ai resolu infiniment au delà de sa condition, & même dans les cas qu'il tenoit lui-même pour désespérés? Que ne témoigne-t-il la joye qu'il en a? Qui est-ce qui le rend si muet? Est-ce l'excès du plaisir qui lui lie la langue?

Il est ridicule que mon Frére se reserve, pag. 356 † dans son intention des conditions qu'il n'a pas exprimées, savoir que *son intention étoit d'inviter les Lecteurs à resoudre ses Problémes, par des principes de pure Géométrie.* Pourquoi n'a-t-il pas ajouté cette condition dès le commencement? Peut-être pour avoir matiére de chicaner ensuite. Si la question est légitimement resolue, que lui importe de quelle méthode on se soit servi? Il a exigé une solution & non pas une méthode: ce n'est pas que je n'aye une méthode directe & purement géométrique, qu'il verra un jour; mais il suffit présentement qu'on voye la foiblesse de cette reservation mentale, que les honnêtes gens abhorreront toujours comme des artifices frauduleux. S'il est permis d'en user ainsi, je prouverai sans peine que la solution de ma Brachystochrone, donnée par Monsieur NEWTON, n'est pas légitime; parce qu'il n'y a ni démonstration, ni analyse; parce qu'il l'a tirée peut-être d'un principe méchanique. Il ne me sera pas difficile non plus

† Cy-dessus, pag. 223.

plus de faire des conjectures, de forger une analyse fausse; enfin de démontrer, par l'argument de mon Frére, que Monsieur NEWTON n'a rencontré la vérité que par le moyen de deux faussetés qui se redressent mutuellement. Mais je suis de trop bonne foi, pour imputer de telles pauvretés à personne.

* Cy-dessus, pag. 224. Sur la fin de la même page *, mon Frére se vante qu'*il a resolu tous mes Problémes, & en toutes leurs parties, jusqu'à marquer même un endroit où je pouvois m'être trompé, en prenant des courbes differentes pour une même.* Je le prie de me dire cet endroit, & de me marquer, non où je puis m'être trompé, mais où je me suis trompé en effet. De plus il n'a pas trop à se glorifier, d'avoir satisfait à tous mes Problémes. Dans les *Actes* de *Leipsic*, page 216. An. 1697. il confesse ingénûment, que sa solution d'un de mes Problémes * implique une manifeste contradiction: cela s'appelle-t-il resoudre? S'il n'a point d'autre solution, je lui en donnerai une légitime, s'il la souhaite, & même par une courbe géométrique; ou bien qu'il la demande à Monsieur LEIBNITZ, à qui je l'ai communiquée, il y a plus d'un an, & qui l'a trouvée fort bonne.

† Cy-dessus, pag. 225. Page 358 † Mon Frére s'arroge à tort la Théorie de la pression des fluides suivant la perpendiculaire. Il y a long-temps qu'elle a été connuë de Messieurs MARIOTTE, WALLIS, NEWTON, & d'autres, qui ont écrit sur cette matiére; mais il lui arrive fort souvent de venir *post festum.* C'est ainsi qu'il croyoit être le premier qui pût démontrer, que le Cercle est la plus grande figure de ses isopérimétres, ignorant que PAPPUS l'a déja fait très géométriquement. Il se regardoit aussi comme le premier inventeur des Théorémes pour l'expression des développées dans les Spirales, qu'il se persuadoit m'avoir été inconnus, & long-temps après que Monsieur *le Marquis de* L'HOSPITAL les avoit rendus publics &c.

Dans

* C'est le Probléme proposé au N°. XXX. pag. 158. qui consiste à trouver une courbe telle, qu'en menant d'un point donné une droite quelconque, qui la coupe en deux points, le solide sous un des segmens & le quarré de l'autre soit donné.

Dans l'autre membre de sa Lettre page 362 * mon Frére soutient, qu'*il est moralement impossible qu'on arrive à une même fausseté, par deux raisonnemens aussi plausibles & aussi apparens que les siens.* Mais pourquoi n'est-il pas aussi moralement impossible, que je sois arrivé par deux raisonnemens faux à une même vérité? C'est que le premier l'accommode, pour fortifier ses conjectures. * Cy-dessus, pag. 228.

Ibid. 41. Journal du 15. Déc. pag. 481. Ed. de Paris 765. Ed. de Holl.

Je remarque, dans ce qui suit, un paralogisme semblable à celui-ci: *Tout caillou est pierre; Donc toute pierre est caillou:* lors qu'il dit que, *si au lieu de se représenter la courbe dont* $\int x^m dy$ *est un* Maximum, *comme un linge; & celle dont* $\int (dt : x^m)$ *est un* Minimum *comme une corde: l'on peut tourner la chose, en se servant de la consideration de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci;* Car il est bien vrai que si $\int (dt : x^m)$ est un *Minimum*, aussi $\int x^m dy$ sera toujours un *Maximum*: mais la converse ne s'ensuit aucunement; puisque j'ai trouvé par mes analyses directes & indirectes, qu'il y a des courbes où $\int x^m dy$ fait un *plus grand*, sans que pour cela $\int (dt : x^m)$ fasse un *plus petit.* Ce paralogisme de mon Frére vient de ce qu'il n'a pas pris garde, que son Probléme des isopérimétres souffre plusieurs solutions; & c'est pour la seconde fois qu'il choppe contre ce même écueil: Mr. LEIBNITZ lui ayant très bien objecté la même faute, qu'il a déja commise touchant la courbe Paracentrique, lorsqu'il croyoit qu'il n'y en avoit qu'une. C'est ce qui m'a fait prendre la précaution de dire en general, pag. 174 † qu'*on peut toujours trouver une même courbe, pour que* $\int GH dy$ *fasse un* plus grand, *ou un* plus petit, *& pour que* $\int (dt : GH)$ *fasse réciproquement un* plus petit, *ou un* plus grand: pour marquer que mes Brachystochrones satisfont toujours aux Isopérimétres; mais qu'il y a d'autres courbes qui y satisfont aussi, lesquelles ne sont pas des Brachystochrones. † Cy-dessus, pag. 217.

Gg 2 Au

* Cy-dessus, pag. 228. Au commencement de la page 363 * il ſemble que mon Frére ſoit dans la penſée, qu'en faiſant $m = 1$; auquel cas on ſait que la courbe doit être un Cercle pour $\int x dy$ *Maximum*, elle ne le ſoit pas de même pour $\int (dt : x)$ *Minimum*. Cependant je puis prouver par une démonſtration ſynthétique, faite à la maniére des Anciens, ſans faire attention ni à ſon linge, ni à ſa corde, qu'effectivement le Cercle a cette proprieté; que $\int (dt : x)$ ſoit un *Minimum*. Je ne ſaurois donc pénétrer ce qu'il veut dire par *la raiſon du choix*, que je dois avoir tenu dans cette recherche; puiſque c'eſt une même courbe conſiderée de l'une & de l'autre façon: c'eſt à dire, poſant que $\int x dy$ ſoit un *Maximum*; ou que $\int (dt : x)$ ſoit un *Minimum*. Je ne comprends rien non plus dans tout ce qu'il dit de ſon linge & de ſa corde; & je puis dire en conſcience qu'en découvrant cette belle convenance entre $\int (dt : GH)$ *Maximum*, & $\int GH dy$ *Minimum*, ou entre les Problémes des Brachyſtochrones & Iſochrones, je n'ai pas plus ſongé au chifon de linge, & à la corde, dont il fait tant de bruit, qu'aux Lapons. Il devroit donc reconnoitre par cette ſeule découverte que je fis, que ce n'eſt ni par hazard, ni par la ſuppoſition de deux fauſſetés, que j'ai rencontré la vérité; mais que c'eſt plûtôt parce que j'en poſſede la véritable méthode; & que ſi dans mon premier écrit il ſe gliſſa une faute légére, que je corrigeai ſi aiſément dans le ſecond, ce n'étoit tout au plus qu'une faute de précipitation, qui laiſſe la méthode ſans atteinte. Si je ne propoſai cette proprieté dans le premier écrit, que pour la ſimple puiſſance de BG, c'eſt parce qu'il ne s'agiſſoit que de répondre au Probléme de mon Frére, & qu'il n'étoit pas queſtion de pouſſer ma découverte plus avant. Mais
† Cy-dessus, pag. 218. s'il avoit voulu lire ce que je dis à la page 174 † où je la donne pour generale, il auroit pû ſe paſſer de ſon injuſte *peut-être*, & ſuſpendre le jugement qu'il tire de ſes fauſſes conjectures.

Voilà, Monſieur, tout ce que j'ai pû remarquer à la hâte dans la Lettre de mon Frére: touchons un peu à l'Avis qui la

la ſuit immédiatement. Il me reproche d'abord que je me vante de n'avoir *emploïé que trois minutes de temps pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le myſtère.* Qu'il prenne la peine de reflêchir un peu ſur ce que ces Problémes, publiés dans les *Actes de Leipſic* au mois de *Mai* 1697, ne ſont venus à ma connoiſſance que ſur la fin du même mois; que ma Lettre aſſez longue, écrite à l'Auteur de *l'Hiſtoire des Ouvrages des Savans* *, s'y trouve inſerée au mois de *Juin* ſuivant; que l'Auteur l'a retardée, à cauſe de la Figure qu'il y faloit faire graver; & que ſans cela ma Lettre auroit paru dès le même mois de Mai, ainſi que l'Auteur lui-même me l'a écrit: combien de temps me reſtoit-il donc, pour y avoir pû penſer? Si mon Frére veut conſiderer tout cela, il trouvera, ſans doute, qu'il n'y a point de gaſconade ſi palpable qu'il ſemble penſer, dans ce que j'ai dit; du moins il verra qu'il s'en faut bien que je n'y aye employé les trois mois qu'il m'avoit accordés. Mais ce ſont choſes differentes, que d'inventer une méthode, & la mettre en pratique, ou d'en faire le calcul: il eſt quelquefois facile de trouver une méthode, dont l'analyſe devient pourtant très-pénible & très-prolixe. Je dis donc à mon Frére que j'ai bien repaſſé, & plus d'une fois, ſur ma méthode, parce qu'il s'agit là d'examiner s'il n'y a point de faux raiſonnement; mais de repaſſer ſur la ſolution, ou ſur l'analyſe, comme c'eſt l'affaire d'un écolier que d'examiner s'il n'y a point de faute de calcul, il n'eſt pas beſoin que je m'en mette en peine, me fiant entiérement à ma méthode; outre que je ſoutiens, comme tout le monde le peut voir, que ce qui concerne l'arc BF n'eſt qu'une partie disjonctive, & non copulative, de ce qu'il a demandé. Mais qu'il examine bien ſa ſolution; peut-être que ſi elle eſt differente de la mienne, [ce que je ne ſais pas encore] c'eſt elle qui eſt fauſſe: il n'eſt pas infaillible. Il commence dans cet Avis d'admettre tout; il n'y a plus que l'égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ qui lui faſſe de la peine. Si par hazard ſa ſolution touchant la

* N°. XXXVIII.

la ſimple puiſſance de l'arc BF ou de t, conſiſte en cette égalité $a^m y = t^{m+1}$, laquelle donneroit une conſtruction de la courbe fort aiſée; qu'il ſache que ſa ſolution ſeroit abſolument fauſſe. Quoiqu'il en ſoit, j'ai bien de la joye de ce qu'enfin il veut bien accepter l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ; je ſuis auſſi content de celui de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL, & de celui de Mr. NEWTON: s'il avoit accepté plûtôt cet expédient, il auroit pû éviter bien d'inutiles débats. Il y a long-temps que j'ai envoyé en dépôt à Mr. LEIBNITZ toutes mes ſolutions avec mon analyſe, * & mes méthodes tant directes qu'indirectes, leſquelles il a fort approuvées & louées; bien loin d'y trouver ces ſortes de fauſſetés, qui en ſe redreſſant font rencontrer la vérité. Je prie donc mon Frére d'envoyer auſſi inceſſamment les ſiennes, tant méthode que ſolution & analyſe, à Mr. LEIBNITZ, lequel les rendra publiques toutes à la fois, afin que nos Lecteurs, ſur tout Meſſieurs nos Juges, puiſſent les confronter, les examiner, & en juger. Demeurons-en là donc, & que mon Frére ſe taiſe, juſqu'à ce que nos ſolutions & nos méthodes aient paru: auſſi n'accepterai-je plus rien de lui, à moins qu'il n'ait livré les ſiennes à Mr. LEIBNITZ, & qu'elles ſoient publiées avec les miennes, à même temps, & en même lieu. La juſtice demande auſſi que ſon ami inconnu remette le prix entre les mains de quelqu'un de nos Juges; & il le fera, s'il eſt homme de bien & d'honneur. J'ai déja dit, & je le dis encore, que je n'y prétends rien; mais les pauvres y prétendent.

Quant aux nouveaux Problémes, que je lui ai propoſés, mon Frére dit que cet Inconnu eſt homme à les reſoudre, & me conſeille (ſi je ſuis ſage) d'en demeurer là, & de ne le pas pouſſer davantage. Je ſuis obligé à mon Frére de ce conſeil: mais il me permettra de dire, que cet Inconnu (quel qu'il ſoit) eſt très peu ſage, de n'avoir pas accepté un défi auſſi avantageux pour lui que le mien, s'il eſt vrai qu'il ſoit ſi habile

* Voiez le N°. LXXV.

bile homme, & qu'il en ait déja trouvé les ſolutions, comme mon Frére nous l'aſſure.

P. S. *Du 4 Octobre, reçu entre le 14 & le 20.*

Comme je n'ai jamais ſoutenu, que *la figure d'entre les Iſopérimétres, dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe, & celle d'un linge rempli de liqueur, ſoient une même figure;* Je ne vois pas pourquoi mon Frére s'écrie en l'air, & s'efforce tant pour prouver leur diverſité: cependant il ne m'a pas falu tant de loiſir pour trouver celle-là; la voici cachée (à l'exemple de mon Frére) ſous cette Anagramme,

$a^2\ b\ c^2\ d^2\ e^8\ i^7\ l^2\ m\ o^2\ p^2\ q^3\ r^5\ s^7\ t^8\ v^9\ x^2\ y.$ †

dont je donnerai la clef, après la déciſion de nôtre differend, quand mon Frére aura donné la ſienne. Pour cet effet, (à moins que mon Frére ne veuille faire trainer ce procès en longueur) il me ſemble qu'il vaudroit mieux le remettre au ſeul arbitrage de Mr. LEIBNITZ, ou d'un autre, ſi ce grand homme, tout déſintéreſſé qu'il eſt, lui paroit ſuſpect. Pour lui ôter toute excuſe & tout ſoupçon de colluſion, je m'engage à deux choſes très-avantageuſes pour lui: la premiére, que je m'en tiendrai à la déciſion de Mr. LEIBNITZ, quand même il décideroit contre moi: la ſeconde, qu'en cas qu'il décidât en ma faveur, & que mon Frére ne s'en trouvât pas ſatisfait, je lui permettrai d'en appeller au jugement de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, tant s'en faut que je les recuſe. Voilà deux articles que mon Frére acceptera infailliblement, s'il ne craint déja pour ſa cauſe. N'eſt-ce pas aſſez de condeſcendance, que de me privér de mon droit d'appeller, pour le ceder entiérement à mon Frére?

Voiés N°. LXVI.

† Le ſens de cette anagramme eſt celui-ci: *Si ſpatium curvæ quæſitæ vocetur* z, *erit, poſitis* dt *æqualibus,* dy *æquale* xſzdx.

EXTRAIT

N°. XLVIII.

EXTRAIT

Du Traité de Méchanique *de Monſieur* DE LA HIRE.

PROPOSITION CXX.

Traité de Méchanique. Paris 1695. 12°. pag. 421. TAB. XI. N°. XLVIII.

QUE les Corps, qui tombent dans une Cycloïde renverſée, arriveront à ſon ſommet dans le même tems, de quelque hauteur que ce ſoit qu'ils commencent à tomber.

Soit la demi-Cycloïde renverſée F E D, dont A F ſoit la baſe, & D le ſommet renverſé, laquelle ſoit décrite par le demi-cercle A B D. Je dis, qu'un corps, qui tombe dans la courbure de la demi-cycloïde F E, arrivera à même tems au point D, de quelque point E que ce ſoit qu'il commence à tomber.

Si de tous les points B du demi-cercle générateur A B D, on méne des cordes B D, & que par tous les points B on méne auſſi des parallèles K G B E à la baſe A F, qui rencontrent la Cycloïde en E, & la corde la plus proche en deſſus en G, & le Diametre A D en K: on ſait, par la nature de la Cycloïde, que ſa courbure F E D eſt formée par des parties égales aux parties des cordes comme B G, qui en ſont les touchantes, & qui ne diférent pas de la courbe quand les arcs B B du cercle générateur ſont très petits.

Mais, par ce qui eſt démontré dans la précédente Propoſition, que le corps, qui tombe par le plan incliné B G, y emploie un tems, qui eſt à celui qu'il emploie à parcourir B I parallèle à A D, & compriſe entre les B E, comme les longueurs de ces lignes B G, B I, quelque viteſſe que le corps ait en B. Et puiſque la viteſſe qu'il a en G eſt la même qu'en I, il s'enſuit que la ſomme des tems que le Corps emploieroit à parcourir chaque portion des cordes de ſuite, comme B G, avec les viteſſes acquiſes ſucceſſivement dans la chute de chaque partie B G, ſera à la ſomme des tems que le corps employeroit à parcourir chaque perpendiculaire B I, comme la ſomme de toutes les parties B G, qui ſont égales à la portion de Cycloïde E E D, à la ſomme de toutes les perpendiculaires B I, qui ſont égales à B H, ou K D.

Mais auſſi, par la nature de la Cycloïde, la portion de la courbe E E D eſt double de la corde B D, qui lui répond dans le cercle générateur A B D. Donc le tems de la chute par la portion de Cycloïde E E D, ſera au tems de la chute par la perpendiculaire B H, comme 2 B D à B H.

Enfin, par la même Propoſition, le tems de la chute par B D ſera au tems de la chute par B H, comme B D à B H: Donc le tems par E E D étant au tems par B H, comme 2 B D à B H, & le tems par B H au tems par B D, comme B H à B D; *en raiſon égale*, le tems par E E D ſera au tems par B D, comme 2 B D, ou la courbe E E D ſon égale, à B D. Mais, par la Propoſition 100, les tems de la chute par les cordes B D ſont tous égaux entr'eux; & par conſéquent, le tems de la chute par toutes les portions de la Cycloïde E E D juſqu'a ſon ſommet D, qui répondent aux cordes, ſeront auſſi égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont doubles des autres.

C'eſt par cette proprieté de la Cycloïde, que M. HUGENS DE ZULICHEM a rectifié le mouvement des pendules qu'il avoit appliqués aux Horloges, ce mouvement étant de lui-même inégal. Il a accommodé deux portions de Cycloïde au point de ſuſpenſion du pendule, ce qui fait que les vibrations de differentes longueurs ſont *iſochrones*, ou d'égale durée. Car ſi ce poids du pendule eſt conſideré comme un point, il décrira une Cycloïde ſemblable à celles qui ſont jointes à la ſuſpenſion, pourvû que le diametre du cercle générateur de ces Cycloïdes ſoit égal à la moitié de la longueur du pendule.

N°. XLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

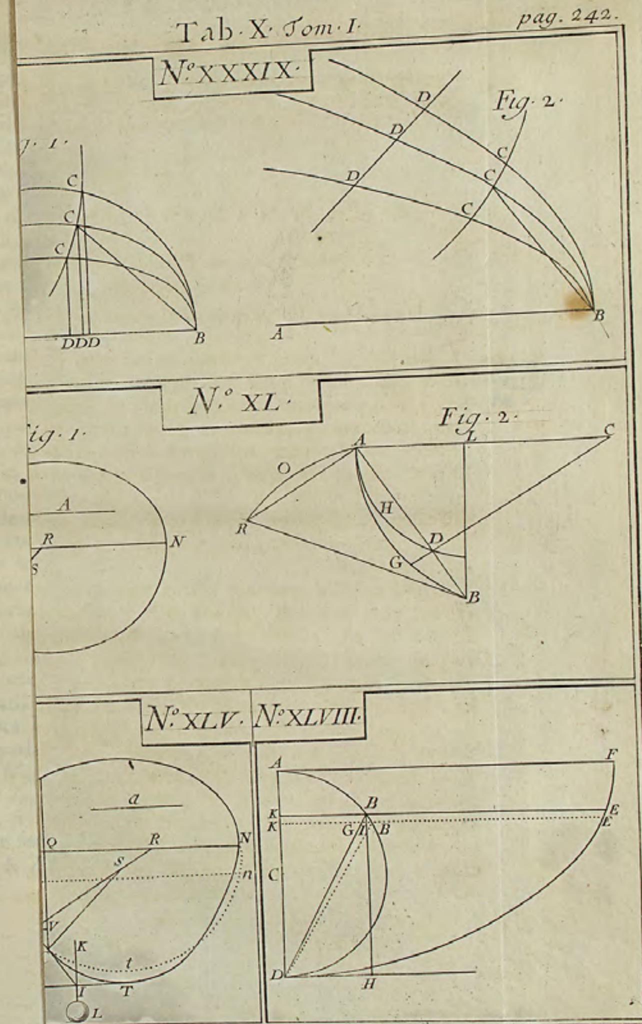
Investigatio algebraïca arcuum Parabolicorum assignatam inter se rationem habentium.

Demonstratio Isochronismi Descensuum in Cycloide, &c

Acta Erudit. Lipſ. 1698. Jun. *pag.* 261.

JAM diu eſt quod novimus extenſionem Curvæ parabolicæ & quadraturam ſpatii hyperbolici mutuam connexionem habere; novimus etiam areas hyperbolicas, inter aſymtoti applicatas ſecundum progreſſionem geometricam procedentes, eſſe æquales; quod pariter intelligendum de ipſis ſegmentis hyperbolicis, quibus illæ areæ a trapeziis rectilineis deficiunt: ſunt enim etiam hæc trapezia rectilinea inter ſe æqualia. Unde non difficulter ad aſſignatam aream hyperbolicam, inter aſymtoti applicatas comprehenſam, inveniri poſt alia hujusmodi area in data ratione.

Quod ſi igitur portiones Curvæ parabolicæ in eadem eſſent ratione cum iſtis areis, oppido factum haberemus quod quærimus; hoc eſt, a dato quovis in Parabola puncto, in promtu eſſet ſtatim reſecare arcum, qui haberet ad alium datum rationem datam. Verum enimvero portiones Curvæ parabolicæ, licet generaliter dicantur per quadraturam Hyperbolæ rectificari, non tamen iſtis areis inter applicatas aſymtoti proportionari poſſunt, ſed aliis areis comprehenſis inter applicatas axis conjugati: aſt hæ areæ, ut alteræ illæ, inter ſe æquari non poſſunt, niſi binæ tantum, & quidem ſimiliter ultra citraque axem ſumtæ: unde etiam contingit, ut impoſſibile ſit dato arcui parabolico alium æqualem, ſed diſſimilem, abſcindere. Hoc enim ſi fieri poſſet, ipſam quoque rectificationem Parabolæ, Hy-



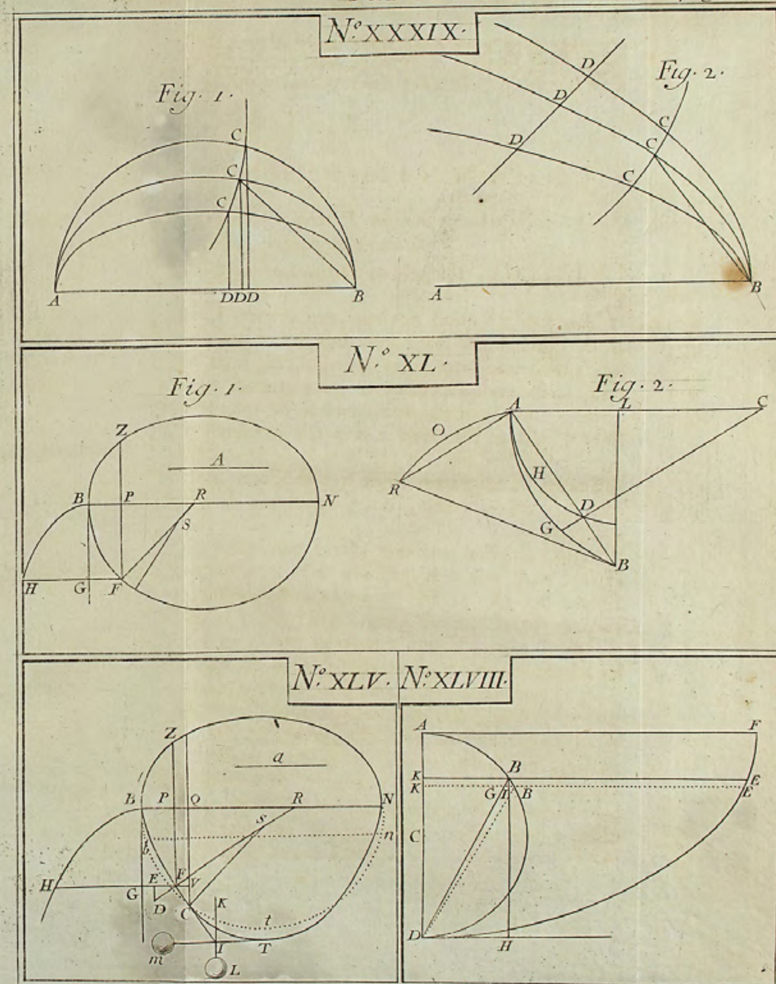
OULLI

ſſignatam inter ſe

Cycloide, &c

Curvæ parabolicæ
connexionem ha-
er aſymtoti appli-
procedentes, eſſe
ſegmentis hyper-
is deficiunt: ſunt
qualia. Unde non
inter aſymtoti ap-
jusmodi area in

e in eadem eſſent
emus quod quæ-
puncto, in prom-
l alium datum ra-
Curvæ paraboli-
Hyperbolæ rec-
aſymtoti propor-
inter applicatas
ter ſe æquari non
er ultra citraque
ibile ſit dato ar-
abſcindere. Hoc
onem Parabolæ,
Hy-



Hyperbolæve quadraturam, post se traheret. Hinc etiam accidit, quod etiamsi ratio data sit inæqualitatis, non tamen a quovis, in Parabola ad lubitum assumto, puncto resecari possit arcus quæsitus; sed id ipsum punctum, per constructionem demum, sit determinandum.

Ut igitur modum invenirem comparandi arcus parabolicos, in ratione data quavis inæqualitatis; vidi quidem perfacile, areas illas hyperbolicas super axe conjugato esse prius in data ratione sumendas: sed hoc ipsum est, quod aliquid laboris & industriæ requirere videbatur. Qua tamen via, Algebra duce sola, (hic enim methodus differentialis, aliave infinitesimalis nihil omnino præstat,) redditus fuerim voti compos, ut ostendam; calculi quem inivi capita principaliora indicabo.

Esto Parabola CAN, cujus axis AX, semiparameter AD; in eaque arcus datus BC, ad quem assignandus sit alius MN, rationem habens datam n ad 1. Ducta normali RAδ, centroque A & semi axe AD, descripta Hyperbola æquilatera IDZ; erit, ceu notum est, rectangulum sub AD & arcu parabolico quovis BC æquale areæ, seu trapezio hyperbolico correspondenti HRSI, quod nimirum continetur inter applicatas axis conjugati HR, IS; hoc est, arcus parabolici, BC, MN sunt ut correspondentia trapezia hyperbolica RI, αZ. Res itaque eo recidit ut, dato RI, determinetur aliud αZ, quod se habeat ad illud ut n ad 1; id quod sic efficio. TAB. XI. N°.XLIX. *Fig.* 1

Ductis asymtotis AG, AT, & ad eas applicatis DE, HF, IG, intelligantur AK, AL, AQ, AT, continue proportionales in ratione AF ad AG: palam est, quod ductis applicatis KV, LW, QY, TZ, non solum trapezia hyperbolica KW, LY, QZ, tam inter se, quam ipsi trapezio hyperbolico FI sint æqualia; sed etiam ductis subtensis IH, VW, WY, YZ, ipsa segmenta hyperbolica VW, WY, YZ, sint inter se, & ipsi segmento IH, æqualia: ideoque, si sumantur tot continue proportionales AK, AL, &c. quot sunt unitates in $n+1$, erit numerus segmentorum inter V & Z $= n$; & proinde summa segmentorum VW +

WY + &c. eſt ad ſegmentum HI ut n ad 1. Jam vero, ſi prima continue proportionalium AK ſumatur debitæ magnitudinis, ita ut demiſſis applicatis ad axem conjugatum $V\alpha$, $W\beta$ &c. ſumma trapeziorum rectilineorum $\alpha W + \beta Y +$ &c. ſeu polygonum rectilineum $\alpha VWYZ\delta$ ſit ad trapezium rectilineum RI, ut n ad 1, [quod utique fieri poteſt, quamvis trapezia rectilinea αW, βY &c. inter ſe non ſint æqualia; ſufficit enim quædam majora eſſe, quædam minora, ut ita, per compenſationem, ſimul omnia toties præciſe contineant ipſum RI, quoties n continet unitatem] hoc, inquam, ſi ita factum ſit, manifeſtum eſt aream hyperbolicam $VZ\delta\alpha$, ſeu ſummam trapeziorum hyperbolicorum $\alpha W + \beta Y +$ &c. fore ad trapezium hyperbolicum RI, ut n ad 1: eſt enim totum ad totum, ſeu polygonum rectilineum $\alpha VWYZ\delta$ ad trapezium rectilineum RI, ut ablatum ad ablatum, ſeu ut ſumma ſegmentorum $VW + WY + YZ$ ad ſegmentum HI; utrobique nempe ut n ad 1: ergo etiam reliquum ad reliquum ſeu trapez. hyperb. αZ ad trapez. hyperb. RI, & per conſequens arcus parabolicus MN ad arcum parabolicum BC, datam habebit rationem n ad 1. Id unicum igitur intendendum eſt, ut determinetur punctum K. In hunc finem voco cognitas DE, ſeu AE, $= a$, AF $= b$, AG $= c$; incognitam AK $= x$; erunt AL $= cx : b$, AQ $= ccx : bb$, AT $= c^3x : b^3$, &c. reperietur autem $\alpha V = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + aa\sqrt{\tfrac{1}{2}} : x$, $\beta W = cx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : b + aab\sqrt{\tfrac{1}{2}} : cx$, $\gamma\Upsilon = ccx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : bb + aabb\sqrt{\tfrac{1}{2}} : ccx$, &c. Item $A\alpha = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - aa\sqrt{\tfrac{1}{2}} : x$, $A\beta = cx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : b - aab\sqrt{\tfrac{1}{2}} : cx$, $A\gamma = ccx\sqrt{\tfrac{1}{2}} : b^2 - aabb\sqrt{\tfrac{1}{2}} : ccx$, &c.

ideoque

$$\underbrace{\frac{cx+bx}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\frac{aac+aab}{cx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{\alpha V+\beta W},\quad \underbrace{\frac{ccx+bcx}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\frac{aabc+aabb}{ccx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{\beta W+\gamma\Upsilon},\ \&c.$$

multiplicatis reſpective per

$$\underbrace{\frac{cx-bx}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\frac{aac-aab}{cx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{A\beta - A\alpha\,(\alpha\beta)},\quad \underbrace{\frac{ccx-bcx}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\frac{aabc-aabb}{ccx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{A\gamma - A\beta\,(\beta\gamma)},\ \&c.$$

prove-

provenit

$$\underbrace{\frac{cc-bb}{2bb}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{cc-bb}{2ccxx}a^4}_{\substack{\alpha V+\beta W \text{ in } \alpha\beta \\ 2 \text{ trapez. rectil. } \alpha W}},\quad \underbrace{\frac{c^4-bbcc}{2b^4}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{bbcc-b^4}{2c^4xx}a^4}_{\substack{\beta W+\gamma\Upsilon \text{ in } \beta\gamma \\ 2 \text{ trapez. rectil. } \beta\Upsilon}};$$

$$\underbrace{\frac{c^6-bbc^4}{2b^6}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{b^4cc-b^6}{2c^6xx}a^4}_{\substack{\gamma\Upsilon+\delta Z \text{ in } \gamma\delta \\ 2 \text{ trap. rectil. } \gamma Z}},\ \&c.$$

$$\frac{c^{2n}-bbc^{2n-2}}{2b^{2n}}xx+\frac{aacc-aabb}{bc}+\frac{b^{2n-2}cc-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4$$

$=$ duplo ultimi trapezii rectilinei.

His omnibus in ſummam collectis, [quod commode fieri poteſt, omnes enim primi termini, ut & omnes ultimi, conſtituunt progreſſionem geometricam, cujus numerus terminorum eſt n, medii vero faciunt ſeriem æqualium] habebitur adhibendo vulgares regulas pro ſummandis progreſſionibus geometricis.

$\dfrac{c^{2n}-b^{2n}}{2b^{2n}}xx+\dfrac{naacc-naabb}{bc}+\dfrac{c^{2n}-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4 = 2$ ſum. trapezior. rectil. $= 2$ polyg. rectil. $\alpha VWYZ\delta$: ſed multiplicando RH + SI per RS, prodibit duplum trapezii rectilinei RI, $= (cc-bb) : 2 + (aacc-aabb) : bc + (cc-bb)a^4 : 2bbcc$; & ſecundum ea quæ ſupra dicta ſunt, trapez. rectil. RI eſt ad polyg. rectil $\alpha VWYZ\delta$, ut 1 ad n, hoc eſt $(ncc-nbb) : 2 + (naacc-naabb) : bc + (ncc-nbb)a^4 : 2bbcc$ debet æquari $(c^{2n}-b^{2n})xx : 2b^{2n} + (naacc-naabb) : bc + (c^{2n}-b^{2n})a^4 : 2c^{2n}xx$; quibus reductis pervenietur ad hanc æquationem quadratam,

$c^{2n}x^4 : (cc-bb) = (nc^{2n}b^{2n} + na^4c^{2n-2}b^{2n-2})xx : (c^{2n}-b^{2n}) - a^4b^{2n}(cc-bb)$.

Sumta

Sumta itaque AK = radici hujus æquationis x, factoque ut b^n ad c^n, ita AK ad AT, determinabunt applicatæ KV, TZ puncta V & Z, ex quibus eductæ axi parallelæ VM, ZN, auferent ex Parabola arcum optatum MN, qui scilicet ad arcum expositum BC rationem obtinebit datam n ad 1. *Q. E. F.*

Quod notatu dignum hic venit, atque mihi, ad longe operosiorem calculum ab initio animum præparanti, supra votum tamen & expectationem successit, est, quod trapezia rectilinea αW, βY, &c. formaverint tres progressiones indefinite summabiles; si enim aliæ prodiissent a geometricis diversæ, & non indefinite summabiles, [quod facillime accidere potuisset, si pro incognita alia quævis quam AK accepta fuisset] Problema sane per unam & generalem æquationem pro numero indefinito n solvi non potuisset, sed pro singulis numeris, iisque integris & rationalibus duntaxat, singulares semper de novo æquationes fuissent quærendæ, magis minusve compositæ pro re nata. Hoc vero incommodum opportune sublatum est progressionibus illis geometricis; adeo ut pro numero n, non solum numerum integrum, sed & fractum surdumve quemvis substituere possimus in æquatione generali; quæ ideo tamen nunquam supra quadratam ascendet, unde Problema in omni casu est planum. Suppono autem datarum b & c etiam datas esse potestates b^n & c^n; quarum quidem ratio, si n sit numerus surdus, haberi non potest, nisi mediante Logarithmica.

Dixi supra, non posse citra ipsam rectificationem Parabolæ inveniri duos arcus æquales & dissimiles. Jam dico porro, si ratio data 1 ad n sit inæqualitatis, arcum majorem debere intra limites suos complecti minorem; seu extremitatem unam M majoris fore viciniorem vertici A, quam extremitatem minoris B, alteram vero majoris extremitatem N, ab eodem A remotiorem fore, quam minoris alteram extremitatem C: Id est, si intelligantur BO, CP normales ad axem AX, cadet necessario arcus OP, qui utique ipsi BC est æqualis, totus in-

intra MN. Quod si quis se habere putet aliam methodum, quæ aliud doceat, * per quam scilicet arcus minor BC, vel OP, sive totus, sive pro parte, extra majorem caderet; sciat, ex hoc solo, aut absolute eam esse fallacem, aut inventam se habere quadraturam Hyperbolæ, hactenus frustra quæsitam.

Quod superest, ex iisdem fundamentis, quibus hic usus sum, potest etiam solvi sequens: *Datis duobus, tribus, pluribusve arcubus parabolicis discretis, assignare alium arcum continuum omnibus illis simul sumtis æqualem.* Memorabile quoque est, quod quamvis omnis arcus parabolicus rectificationem recuset, possit tamen inveniri arcus, qui datum alium arcum excedat, vel ab eodem deficiat, excessu, vel defectu rectificabili. Hujusmodi alia multa omitto. †

Hæc jam jam dimissurus accipio D. L. H. †† *Tractatum Mechanicum* A. 1695 *Parisiis* impressum, quem aperiens fortuito incidi in Propositionem 120, ubi demonstrare nititur *Author* Isochronismum in Cycloide ab HUGENIO primo inventum. Posteriora tantum hujus demonstrationis verba legens, vidi eum concludere, tempus descensus per Cycloidem esse duplum temporis descensus per Diametrum verticalem circuli generatoris: hoc autem cum absolute falsum scirem; (ipso quippe HUGENIO jam demonstrante, tempus per Cycloidem sese habere ad tempus per Diametrum, in ratione semicircumferentiæ circuli ad Diametrum) animum incessit explorare, unde gravis iste error originem traxerit.

Hanc itaque ut detegerem, demonstrationem memoratam [quam alias, quod de Propositionis veritate diu ante persuasus essem, forsan nunquam legissem,] legere cœpi; sed ulterius progredi non erat necesse, quod in ipso statim limine deprehendi anguem in herba non latentem, sed patentem. Concludit enim positis quotcunque & quibuscunque analogiis $a : b = c : d$ $m : n = p : q$; $r : s = t : u$, fore aggregatum omnium prima-

* Vide supra Num. XXIII. Art. III. pag. 152. & Nos. XXX. pag. 159. XXXIV. p. 171. 172, XXXV. pag. 177.

† Videatur Nus. sequens.

†† DE LA HIRE. Vide Num. præced.

marum $a + m + r$ ad aggregatum omnium ſecundarum $b + n + s$, ut aggregatum omnium tertiarum $c + p + t$ ad aggregatum omnium quartarum $d + q + u$; quod num verum ſit, judicent alii. Hoc ſaltem dico, quod ſi id verum eſſet, Circulus, Hyperbola, & nulla non figura foret quadrabilis, & nulla non curva rectificabilis: mirabile quoque compendium nobis ſubminiſtraret inveſtigandi dicto citius tempus deſcenſus per quamcunque curvam; foret enim ſemper, ſecundum ratiocinium *Authoris*, tempus per curvam ad tempus per altitudinem ejus verticalem, ut ipſa curva ad ipſam altitudinem.

Ex dictis liquet quanto conſultius fuiſſet, nudam allegaſſe Propoſitionem nobiliſſimi hujus inventi, & Lectorem remiſiſſe ad demonſtrationem *Hugenianam*. Quod ſi vero *Hugeniana*, licet legitima, ſed ob multarum propoſitionum farraginem & perplexitatem non arriſit; laudo propoſitum ſuccinctiorem tradendi, modo tradidiſſet genuinam. Qua in re; cum a ſcopeo multum aberraverit, hic ego vices ejus ſupplebo, demonſtraturus breviſſime ac perſpicue, quod *in Cycloide, cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, a quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia.* Sit Cyclois FDC, cujus axis AD, circulus generator ABD; dico tempus per quamvis portionem GMD fore æquale tempori per integram ſemicycloidem FED. Concipiatur DG diviſa in partes indefinite parvas Mm, ut & DF in alias numero æquales Ee; unde erit partium una in DF, ad partium unam in DG, ut ipſa DF ad DG; aſſumanturjam ex illis partibus duæ homologæ Mm, Ee, id eſt, tales quæ ſecent DF, DG proportionaliter in E, M; ducanturque applicatæ ET, MN, item DB, DO, DL.

TAB. XI. N°.XLIX. *Fig. 2.*

Quoniam igitur per hyp. DF, DE, & DG, DM, ſunt proportionales, ergo etiam earum ſemiſſes, quæ, per naturam Cycloidis, ſunt DA, DB, & DL, DO, harumque quadrata proportionalia, id eſt DA q: DB q [= DA : DT] = DL q : DO q [= DH : DN], *dividendo* AT : DT = HN : DN, ideoque $\sqrt{AT} : \sqrt{HN}$ [ſeu, per naturam gra-

gravium deſcendentium, velocitas in E ad velocitatem in M] $= \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$ = DB : DO = DE : DM = [per hyp.] Ee : Mm; quoniam itaque velocitas in E eſt ad velocitatem in M, ut Ee ad Mm, patet quod tempus per Ee ſit æquale tempori per Mm; id quod de omnibus aliis portionibus homologis demonſtratur: unde tempus per omnes Ee, id eſt, per DF, erit æquale tempori per omnes Mm, id eſt, per DG; ergo deſcenſus per DF & DG ſunt iſochroni. *Q. E. D.*

N°. L.

JOHANNIS BERNOULLI

Theorema univerſale rectificationi Linearum Curvarum inſerviens.

Nova Parabolarum proprietas.

Cubicalis. primaria arcuum menſura, &c.

EXhibui in *Actis Anni* 1695, *pag.* 374, * modum generalem, *ad datam quamvis Curvam deſcribendi aliam, quarum ſumma, vel differentia, per arcum circuli ſit menſurabilis*, deductum ex generali illo de evolutione condeſcriptarum theoremate, quod poſtea ad alias ſpeculatione viam aperuit celeberrimis Viris LEIBNITIO & TSCHIRNHAUSIO in eodem *Actor. Anno m. Novembr.* † Ex eo tempore cogitare cœpi, an non forte, alia combinatione Curvarum, id fieri poſſit per ſolas lineas rectas; ſeu an non ad Curvam propoſitam inveniri poſſit alia, quarum ſumma, vel differentia, abſolute rectificabilis exiſtat; nec ſpe vana. Cum enim non ita pridem hæc in mentem redirent, ſequens inſigne theorema ſe mihi obtulit: *Si poſitis cujuſvis curvæ datæ coordinatis x & y, fiat alia curva cujus coordinatæ ſint* $xdy^3 : dx^3$ & $3xdy^2 : 2dx^2 -$

Acta Erudit. Lipſ. 1698. *Octob. pag.* 462.

* Supra N°. XXVI.
† Nis. XXVIII. & XXIX.

$\frac{3}{2}\int(dy^2 : dx)$ erunt ambæ curvæ, genitrix & genita, simul sumtæ rectificabiles: Facta enim recta, quæ se habeat ad abscissam curvæ datæ x, ut cubus tangentis ad cubum subtangentis in eadem curva data; æquabitur hæc recta longitudini curvarum simul sumtarum: id est, expressione litterali adhibita, si elementum curvæ datæ vocetur dt, longitudo ejusdem D, longitudo genitæ G, erit $D + G = xdt^3 : dx^3$. Notandum hic si Curva proposita versus axem sit cava & [posita dx constante], 3 xddy sit majus quam dxdy, tunc differentia curvarum dicta rectæ æquatur.

Non opus est indicare, qua via, quave analysi huc pervenerim; calculus foret nimiæ prolixitatis: si tamen alicui animus erit asserti veritatem explorare, poterit id commodissime synthetico more præstare; differentiando scilicet assignatam hanc ex constructione rectam, & quod prodit conferendo cum aggregato elementi curvæ genitricis & elementi genitæ: reperiet enim utrobique æqualitatem. Hinc, sive curva proposita algebraïca sit, sive transscendens primi gradus, si modo $dy^2 : dx$ sit summabile, curva genita tunc semper erit algebraïca: datur namque algebraïcæ ratio dx ad dy. Hinc etiam, quod incognitum hactenus fuit, & inter rara hujus sæculi inventa numerari potest, sequitur omnem Parabolam cujusvis gradus, aut per se, aut cum alia alius gradus Parabola conjunctam, absolute esse rectificabilem: per se, si exponens parabolæ sit $= (1 + 2p) : 2p$ [per p intelligo quemlibet numerum integrum]; cum alia vero generaliter in omni casu. Esto enim datæ parabolæ gradus seu exponens n: dico eam cum alia parabola cujus exponens $= (2n - 1) : (3n - 2)$ junctim admittere rectificationem; qualiscunque etiam sit numerus n, sive fractus, sive integer, sive surdus, sive rationalis, sive affirmativus, sive negativus. Unde pro Parabola communi *Archimedea* reperitur parabola cubico-biquadratica, id est cujus exponens est $\frac{3}{4}$, seu ubi biquadrata applicatarum sunt in triplicata ratione abscissarum. Hanc vero rectificationem, in quam alia quoque via particulari incidi, quoniam non posttre-

tremam proprietatem constituit hujus ab omni antiquitate decantatissimæ curvæ, placet hic plenius exponere.

Esto (*Fig.* 1.) AB Parabola communis, ex B agatur normalis BI secans axem AI in I; & IM normalis ad BI, occurrens diametro BM in M: resecetur IK = subnormali seu semiparametro. Descripta jam Parabola cubico-biquadratica AG, cujus parameter sit $= 3\frac{13}{81}$ parametri Parabolæ AB, sumatur abscissa AH = tertiæ proportionali ad parametrum, seu ad duplam IK & ad BK, appliceturque HG. Dico curvam GAB compositam ex portionibus parabolicis AG, AB esse æqualem lineæ rectæ IM. TAB. XI. N°. L. *Fig.* 1.

Si hæc porro conferantur cum iis, quæ primus inveni pro sectione arcuum parabolicorum in data ratione, quæque in *nupero Junio* * edita habentur, ubi simul innui ad arcum quemvis datum Parabolæ communis inveniri posse, ope methodi meæ, alium arcum in eadem Parabola, ita ut datam habeant differentiam rectificabilem: apparebit facile ratio comparandi quoque arcum Parabolæ cubico-biquadraticæ AG, cum arcu vel arcubus quibusdam Parabolæ communis. Unde novum emerget inventum, meo judicio haud quaquam spernendum, quod facem accenderet insignem ad mensurandam Parabolæ longitudinem per meras rectas lineas, si modo id possibile esset: perspicio quippe arcum AG, cum aliquo arcu vel arcubus Parabolæ AB, posse habere rationem algebraïcam. Jam vero aliquis operæ pretium ageret, si ostenderet arcum AG, non cum aliquo tantum, sed cum ipso arcu AB, comparabilem esse: haberet profecto rectificationem Curvæ parabolicæ & quadraturam Hyperbolæ dudum frustra quæsitam; dividenda enim tunc tantum adhuc foret recta IM in ratione inventa; divisæque hinc una pars arcui AG, altera arcui AB æquaretur. Sed id ipsum quod quadraturæ Hyperbolæ impossibilitas pro demonstrata fere habeatur, invictum est argumentum, arcus Parabolæ cubico-biquadraticæ cum quibusdam arcubus,

Ii 2 non

* N°. præced.

non cum omnibus Parabolæ comparabiles esse: insolitum quidem hoc est, sed tamen verum.

Quod si ulterius pergamus, & inquiramus, qualis exponens n debeat assumi, ita ut genitrix & genita fiant eædem curvæ, oportet æquari n cum $(2n - 1):(3n - 2)$ id quod dat $n = \frac{1}{3}$: adeoque est *Parabola cubicalis primaria*, quæ cum se ipsa comparata rectificari potest, seu in qua assignari possunt duo arcus quorum differentia est rectificabilis. Hic ergo incidimus, quasi fortuito, in perelegantem hujus famosissimæ curvæ alias irrectificabilis proprietatem; quod inventum alteri illi *Heuratiano*, seu, prout WALLISIUS contendit, *Neliano*, quo primum Parabola cubicalis secundaria rectificari cœpit, nobilitate non modo non cedit, sed multis parasangis præcellit, si id æstimare velimus ex difficultate eruendi; vilescit enim hoc, & desiit esse novum, ex quo methodi infinitesimales inclaruere, cum earum nulla sit, quæ non, immediate & facillime, hujus Curvæ parabolicæ secundariæ rectificationem exhibeat, & vel primo mentis obtutu. Nostra vero primaria, postquam omnes Geometrarum ejus dimensionem quærentium sudores & labores actenus elusit, nobis in tantum obsecundavit, ut arcuum suorum differentia mensuram, rectis lineis algebraice determinabilem, a nobis acciperet. Nec video, qua alia via, quam hic præscripta, ad hujus cognitionem perveniri potuisset. Egregiam adeoque habuissem occasionem, si, suppressa methodo, aliis idem problematice proponendo, vanæ gloriolæ litare voluissem: sed malui publicæ quam propriæ utilitati prospicere, exponendo inventum sine pompa. In vulgari Parabola conica eandem rem præstiti, ut supra dixi: illud autem, cum ex nuda attentione ad Hyperbolam ultro fluat, præ hoc novo nihili facio. Sit itaque Parabola cubicalis primaria ABC, *(Fig. 2.)* in qua arcus expositus BC; a punctis B & C ducantur applicatæ BF, CG: sumatur AI æqualis tertiæ proportionali ad vigecuplam septuplam AF, & ad parametrum Parabolæ; fiatque ut AG ad AF, ita AI ad AH; ad puncta I & H ductæ applicatæ IE, HD resecabunt arcum DE, qui ablatus ex arcu BC relinquet differentiam rectilinearem, quæ ita invenitur: Duc tangentes CP, BK, occurrentes AP normali ad axem in punctis P, K: ex quibus age axi parallelas PN, KL, quæ secent normales ad curvam CN, BL, in N, L: erige perpendiculares NO, LM, tangentibus productis occurrentes in O, M. Dico differentiam rectarum OP, MK esse æqualem differentiæ arcuum parabolicorum CB, ED.

TAB. XI. N°. L. *Fig. 2.*

N°. LI.

ART. I.

JAC. B. * DEMONSTRATIO SYNTHETICA

Problematis de Infinitis Cycloidibus, absque adminiculo infinite parvorum.

Item Constructio aliorum huic affinium a se propositorum mense Maio A. 1697.

CUM sub finem anni 1696. solutione mea Problematis de Curva celerrimi descensus, quam omnibus nunc constat esse Cycloidem, *Lipsiam* paranda occuparer; animum subiit aliud, huic quidem quoad materiam affine, sed quoad applicationem methodi de *Maximis & Minimis* plane diversum, quo videlicet porro quæritur, quænam ex infinitis Cycloidibus illa sit, per quam descendens grave ad datam quandam positione lineam citissime pertingat. Et quoniam ex consideratione similitudinis Cycloidum solutioni viam patere illico videbam; indeque animadvertebam modum operandi in omnibus aliis Curvis similibus eundem existere; imo non ad descensum tantum celerrimum, sed ad plurimas alias Curvarum functiones applicari posse; quemadmodum si quæratur ex infinitis Curvis similibus illa, cujus inter commune principum & datam positione lineam interceptus, vel arcus, vel area, vel nata conversione arcus superficies, aut spatii conversione solidum sit minimum, &c. constitui Problema, non minus utile quam elegans, publice proponere; ut & alii ejus contemplationi vacare, mecumque in partem solutionis venire possent. Ad imitationem itaque *Fratris*,

Acta Erudit. Lips. 1697. Maj. pag. 223.

* *Jacobi* BERNOULLI.

tris, qui, in Programmate ſuo, * Problemati de Curva celerrimi deſcenſus alia minus principaliora adjunxerat, primario meo de Figuris Iſoperimetris Problemati, ipſi viciſſim proponendo, alterum hoc ſecundarium ſubjeci; ſed duobus tantum verbis, & in caſu duntaxat ſimpliciſſimo, lineæ rectæ verticalis, nec niſi Cycloidis, Circuli, Parabolæque facta mentione, ſtudioque etiam ſupreſſa voce Curvarum *ſimilium*; tum quod perſuaſum haberem, qui in una quæſitum præſtiterit, in omnibus pariter illud præſtiturum eſſe, tum quoque ne fundamentum ſolutionis nimis aperte darem. Factum autem eſt, hoc non obſtante, ut, præter Fratrem, Illuſtriſſimus quoque Vir D. *Marchio* HOSPITALIUS adyta problematis optime penetraret, ſolutionemque non tantum hujus, ſed & aliorum, hujus occaſione, a Fratre *menſ. Auguſto* 1697. *Diarii Gallici* propoſitorum † nupero *Actorum Januario* exhiberet. Ego itaque, ne actum agam, nec tamen etiam nihil inventi mihi afferam, cum totum jure potuiſſem; illa tantum quæ ab Illuſtriſſimo Viro, Fratreque meo intacta relicta ſunt, delibare breviter; ac primo quidem Problematis a me in Cycloide propoſiti demonſtrationem ſyntheticam, citra adjumentum infinite parvorum, in gratiam eorum, qui horum calculum vel ignorant, vel improbant, exhibere animus eſt; quod faciam, ſuppoſitis tantum vulgo notis Lemmatibus: I. quod arcus circuli major ad ſinum ſuum, majorem habeat rationem, quam minor ad ſuum: II. quod tangens major ſit arcu ſuo.

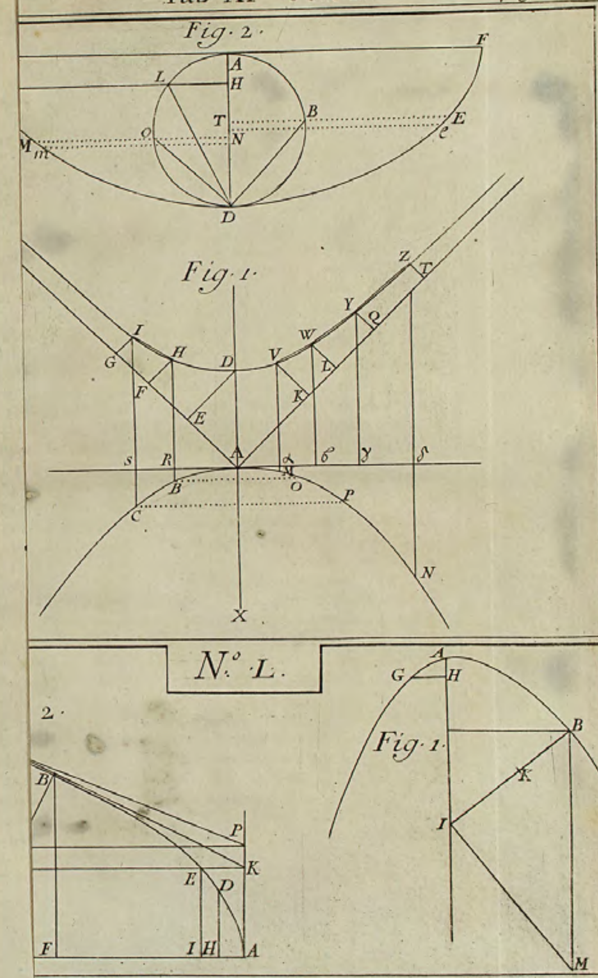
TAB.XII Fig. 1. PROP. *Si ſuper eadem baſe horizontaliter conſtituta AR duæ conſiſtant Cycloides AFC, ABP, quarum altera AFC datum perpendiculum ZB ad angulos rectos ſecat in C; ac demitantur ſuper illis duo gravia ex communi principio A: illud quod per AFC deſcendit, breviori tempore ad perpendiculum appellet.*

DEM: Sunto axes Cycloidum ZC, RP; ſemicirculi genitores ZLC, RTP, quorum ille radio GL in duos quadrantes ſit diviſus. Fiant AR, AZ, AH continue proportionales, ducanturque rectæ HF, FDS, CI, BE, illa perpendicularis, hæ parallelæ baſi; nec non ZDI, & huic parallela FM, ut ex Fig. liquet: erunt AR & AZ, AZ & AH, RP & ZC, RTE & ZLD partes Cycloidum ſimiles, adeoque proportionales. Quare.

1. *Hypoth. Si AR ⊳ AZ.* LD : GS ⊲ [*Lemm.* 1.] LZ : GZ : & *permutando* LD : LZ ⊲ GS : GZ, *componendoque* DLZ : LZ ⊲ SZ : GZ, ſumtis conſequentium duplis, DLZ : CLZ ⊲ SZ : CZ = SD : CI ⊲ [*Lem.* 2.] SD : CD; *inverſe & permutatim* CLZ : CD ⊳ DLZ : SD, & tandem *per converſionem* CLZ : DLZ ⊲ DLZ : DLZ — SD, hoc eſt, ex natura Cycloidis, AZ : AM ⊲ AM : AH; unde √AZ : √AH [= √RP : √CZ] ⊲ AM [DLZ] : AH

* Supra N°. XXXIII. † Supra N°. XXXIX.

Tab·XI· Tom·I. pag. 254.



IO DESCENSU

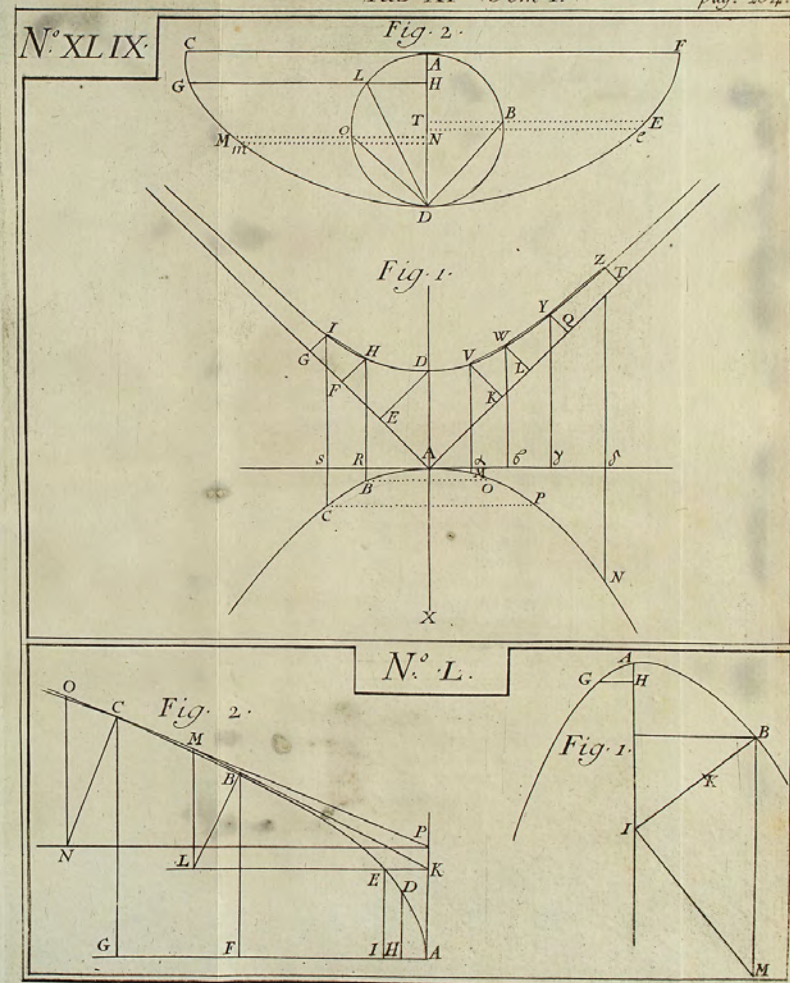
i de Curva celerrimi des-
imario meo de Figuris Iso-
do, alterum hoc secunda-
in casu duntaxat simplicis-
idis, Circuli, Parabolæque
e Curvarum *similium*; tum
um præstiterit, in omnibus
ne fundamentum solutionis
non obstante, ut, præter
Marchio HOSPITALIUS
nemque non tantum hujus,
mens. Augusto 1697. *Diarii*
rio exhiberet. Ego itaque,
enti mihi afferam, cum to-
trissimo Viro, Fratreque
primo quidem Problematis
syntheticam, citra adjumen-
qui horum calculum vel
st; quod faciam, suppositis
rcus circuli major ad sinum
or ad suum : II. quod tan-

constituta A R duæ consistant
datum perpendiculum Z B
per illis duo gravia ex com-
lit, breviori tempore ad per-

semicirculi genitores Z L C,
antes sit divisus. Fiant A R,
ne rectæ H F, F D S, C I,
; nec non Z D I, & huic
& A Z, A Z & A H, R P
similes, adeoque proportio-

[*Lemm.* I.] L Z : G Z : &
doque D L Z : L Z ⊲ S Z :
: C L Z ⊲ S Z : C Z =
& *permutatim* C L Z : C D
C L Z : D L Z ⊲ D L Z :
oidis, A Z : A M ⊲ A M :
C Z] ⊲ A M [D L Z]:
A H

X.



$AH = ETR : AZ = ETR : CLZ$. Ergo $ETR : \sqrt{RP} > CLZ : \sqrt{CZ}$. Sunt autem hæ quantitates, ut tempora deſcenſuum per AB & per AC, demonſtrante HUGENIO in *Tractatu de pendulis*, & nuper id quoque aſſumente Illuſtriſſimo HOSPITALIO. Tempus igitur per AB majus eſt tempore per AC. *Q. E. D.*

2. *Hyp. Si* $AR < AZ$. $ZM = FD = CD > DS = HM$; cum igitur hoc caſu fiat $AH > AZ$, erit AM major media arithmetica, coque fortius media geometrica inter AZ & AH; unde ſtatim in ipſis terminis habetur $AZ : AM < AM : AH$; e quo cætera deducuntur, ut prius.

Cæterum generaliter obſervabam, in omnibus ejuſmodi quæſtionibus, ubi ex infinitis Curvis ſimilibus aliqua invenienda eſt, quæ functionem quampiam optime præſtet, quod duarum Curvarum, quarum interſectione quæſitum determinatur, altera ſemper poſſit eſſe *Linea*, quam voco, *Functionis*, adeoque nunc mechanica, nunc algebraïca, dum altera perpetuo eſt algebraïca: quod hujus vices ipſa ſemper Recta præſtare poſſit; quo caſu altera, ut ut plerumque a *Linea functionis* diverſa, ab ejus tamen deſcriptione dependet: quod ambæ denique datæ cuidam è Curvis ſimilibus ſic adaptari queant, ut earum ordinatæ, vel inter ſe ſint parallelæ, vel hujus fiant tangentes, aut perpendiculares, aut alio aliquo modo illi applicentur. Exempla ſunto.

I. *Ex infinitis Circulis per A tranſeuntibus, & centra habentibus in* TAB.
horizontali AB, illum invenire, per quem deſcenſus ſit celerrimus ex puncto XII.
A ad datum perpendiculum. Fig. 2.

CONSTR. Datus ſit ſemicirculus AQB diviſus in duos quadrantes ANC, BNC, in cujus circumferentia ſumto indefinite puncto Q, agantur rectæ QP, QB, quarum illa parallela eſt radio NC, hæc ipſum ſecat in T: & fiat Linea Functionis ASX, nempe talis, ut hujus ordinata PS tempus deſcenſus per AQ repræſentet, hoc modo: Super diametro Circuli AB erigatur quadrans curvæ Lemniſcatæ ARB (Vid. *Acta Lipſ.* 1694, p. 337, & 1695, p. 543. †) cujus nodus A, e quo ſubtendatur curvæ recta AR media proportionalis inter AB & $2\,PQ$, ac ſumatur $PS =$ arcui AR pro ſiniſtro, aut $ARB + BR$ pro dextro Circuli quadrante. Quo facto, fiat Curva algebraïca AVX, cujus applicata PV quarta ſit proportionalis ad rectas AR, AB, & $2\,NT$; hæc priorem interſecabit in puncto aliquo X, unde demiſſa in AB perpendiculari XM, erit ut AM ad AB, ſic diſtantia perpendiculi a puncto unde grave dimittitur, ad diametrum circuli quæſiti.

II. *Poſitis, quæ prius, invenire Circulum, cujus inter punctum A &* TAB. XII.
datum perpendiculum interceptus arcus ſit minimus. Fig. 2.

CONSTR. Fiat Linea Functionis, nempe Linea Sinuum ASX, ſumta

† Hæc eſt Curva AMONA, N°. XIX.

ſumta ubique $PS =$ arcui AQ: tum deſcribatur Curva algebraïca AVX, facta $PV = NT$, & ex puncto interſectionis X demittatur perpendicularis XM, eritque ut ſupra, AM ad AB, ſicut diſtantia perpendiculi a puncto A ad diametrum Circuli quæſiti. Nota tamen, Problema ſimplicius quodam modo conſtrui interſectione ſolius Lineæ functionis, ſi hujus ordinatæ in tangentes datæ Curvæ projiciantur. Vid. generalem Conſtruct. infra in *Solutione ſex Problematum fraternorum.*

TAB. XII. Fig. 3. III. *Ex infinitis Curvis ſimilibus, & circa punctum A axemque communem AC ſimiliter conſtitutis, quarum una data ſit AB; invenire aliam AD occurrentem rectæ poſitione datæ DE in D, e quo demiſſa in axem perpendiculari DM, vel comprehenſum ſpatium ADM, vel nata converſione curvæ circa axem ſuperficies, vel natum converſione ſpatii ſolidum ſit maximum minimumve.*

CONSTR. Sumto indefinite in Curva data AB puncto B, ducatur tangens BG, axi perpendicularis BC, & hinc tangenti perpendicularis CL. Quo facto, functio primæ quæſtionis, h. e. ſpatium ABC dividatur per $\frac{1}{2} CL$; functio ſecundæ, ſive ſuperficies Sphæroidis geniti converſione curvæ AB, per ſemicircumferentiam radii BC; functio tertiæ, ſeu ſolidum ſpatii ABC rotatione effectum, per rectangulum ſub dicta ſemicircumferentia & triente CL: quotienti ſemper abſcindatur ex tangente æqualis BG, erit G ad Curvam quandam AGH, quam ſecerecta AG datæ rectæ DE parallela in G. Ex G ducatur GB tangens datam Curvam, ſitque punctum contactus B; tum juncta AB, quæ dat tam DE ſecet in D, fiat curva AD ſimilis ipſi AB. Hæc erit optata.

ART. II.

Solutio ſex Problematum Fraternorum, in Ephem. Gall. 26 Aug. 1697. * *propoſitorum.*

Ibid. pag. 226. PROBL. I. *In ſuperficie dati Conoidis, vel Sphæroidis, ex. gr. Parabolici, inter duo data puncta geometrice deſcribere Lineam omnium in illa ſuperficie ſic ductarum breviſſimam.*

SOL. Notanda primum ambiguitas in voce *geometrice*, quæ procul dubio in cauſa fuit, cur Illuſtriſſ. D. *Marchio* HOSPITALIUS in ſolutionibus ſuis *menſe Jan. Actorum* exhibitis hoc Problema prorſus neglexerit. Si hac voce talis conſtructio poſcatur, qua indefinite omnia puncta curvæ inveniantur, per meras quantitates ordinarias, ſeu algebraïcas, dico, Problema in ipſo Cono Cylindroque non minus difficile, imo impoſſibile, atque in cæteris Conoidibus, Sphæroidibuſque. Sin vero & illa conſtructio *geometrica* eſſe concedatur, in qua quantitates quoque tranſcendentes, ſeu quadraturæ, quæ ipſo Cel. D. LEIBNITIO adſtipulante, non minori jure *geometricarum* quantitatum nomine veniunt, adhibentur; Problema, in omnibus pariter Conoidibus ac Sphæroidibus, æque ac in Cono Cylindrove, eſt facillimum. Eſto enim Curva quæcunque ABC, cujus tantum tangens dari concedatur; ſitque baſis ejus $CD = a$, applicata quædam arbitraria baſi parallela $BG = c$, alia indeterminata $MN = x$, tangens ME, data per $x, = t$; rotetur autem curva ABC circa axem AD, & gignat Conoides $ABCFDA$, cujus polus A, meridianus ABC, æquator CF, eique parallelus per M tranſiens MH. Tum ſumto æquatoris arcu $CF = \int (actdx : xx\sqrt{(xx - cc)})$, tranſeat per F meridianus AHF, ſecabit hic parallelum MH in puncto aliquo H curvæ cujuſdam BH, quæ talis eſt, ut quælibet ejus portio omnium aliarum, in eadem ſuperficie ductarum, & iiſdem punctis interceptarum, Curvarum ſit breviſſima; ipſa autem longitudo curvæ $BH = \int (tdx : \sqrt{(xx - cc)})$. TAB. XII. Fig. 4.

* Supra N°. XXXIX.

Applicatio Conſtructionis ad Conum. Sit Conus $ACFD$ factus converſione trianguli rectanguli ACD circa cathetum AD; ponatur hoc triangulum ſeorſim ſuper recta infinita GD, centroque C, radio CA, deſcribatur quadrans circuli KIG, & radio minori CD, circulus PRQ; tum ſumto in latere coni AC puncto utcunque B, transferatur AB in CS, & ducatur SL parallela ipſi CK, ſecans rectam KL ipſi CD parallelam in L, ac denique per punctum L intra aſymptotos CD, CK trajiciatur Hyperbola LO: quo facto, per punctum quodvis O, in Hyperbola acceptum, duæ ducantur rectæ aſymptotis parallelæ OI, OT, quarum illa quadrantem KIG ſecet in I, hæc latus coni AC in T; arcuique quadrantis KI ex circumferentia minoris circuli PRQ, id eſt, baſis coni CF, reſecetur hinc inde æqualis arcus PR, ſeu CF, qui non nunquam totam circumferentiam excedit; ac tandem in latere coni per F tranſeunte, ſumatur $AH = CT$; eritque H punctum optatæ curvæ BH; ipſa vero $BH = \sqrt{(CT^2 - CS^2)}$, adeoque nequit eſſe (quod quis ſuſpicari poſſet) aliqua Sectionum Conicarum, cum harum nulla rectificationem admittat: tota vero curva conum ſerpentis in modum ambit, duoque coni latera, a ſupremo curvæ puncto B utrimque æquidiſtantia, ſibi aſymptota habet; ſubinde & unum tantum, cum curva coni ſuperficiem aliquoties* exacte circumit; circumit autem ſemel, ubi latus coni AC radii baſis DC duplum eſt, bis ubi quadruplum, ter ubi ſextuplum, &c. Effici præterea poteſt facile, ut curva per duo quævis data puncta tranſeat, prout ſupremum ejus punctum B in alio TAB. XII. Fig. 5. 6.

aliove latere coni, propiusque vel remotius ab ejus vertice aſſumitur.

SCHOL. Quia Conſtructio hæc requirit, ut ex circulis utcunque inæqualibus KG, PQ, æquales abſcindantur arcus KI, PR, quod ſupponit anguli ſectionem in data ratione; hæc vero generaliter non niſi per quantitates tranſcendentes abſolvitur; conſtat, quod dixi, curvam *geometrice*, id eſt, algebraïce non eſſe deſcriptibilem. In ſuperficie Cylindrica, puncta curvæ reperiri poſſunt continua arcus biſectione; ſed inventio omnium indefinite punctorum pariter ſectionem arcus in data ratione, vel ejus rectificationem ſupponit.

Atque hæc de primo Problemate dicta ſufficiant: Cætera ſupra laudatus Vir Illuſtriſſ. D. *Marchio* HOSPITALIUS, nupero *Januario*, plene & eleganter ſoluta dedit. Sed quia obſervo, paulo generaliora a Fratre proponi potuiſſe, ea ſequentem in modum formo ac ſolvo:

Tab. XII. Fig. 7. PROBL. II. & III. *Axi ET inſiſtant infinitæ curvæ BL, BF, genere eædem, hoc eſt, quarum ordinatæ ML, MF, conſtanter ſint proportionales; ſitque alia curva CL ex prioribus ſpatia auferens BLM, BCD, tum inter ſe, tum dato ſpatio æqualia. Quæritur, quæ ſit natura Curvæ CL, quæ ratio ducendi ejus tangentes, & quodnam in illa punctum, alteri ubivis dato puncto proximum?*

SOL. Eſto data ex infinitis una BL, datumque in Curva CL ubivis punctum C, e quo demiſſa in axem applicata CD, quæ ſecet datam Curvam in G, ducatur tangens GE; ſuper DE conſtituatur Rectang. EH = ſpatio dato BCD, fiatque CH : HD = DE : DT; juncta CT curvam CL tanget in C.

Nota ratione ducendi tangentes, natura curvæ latere nequit; eſtque ſemper, quod hic ſpecialiter annoto, reducibilis ad caſum Problematis *Beauniani* generalius concepti menſ. Dec. 1695, * adeoque, conſtruibilis per Logarithmicam, vid. menſ. Jul. 1696. † Punctum curvæ CL proximum ipſi B quodnam ſit, generaliter oſtendit Vir perilluſtris, poteſtque nullo negotio ad aliud quodvis datum punctum accommodari.

PROBL. IV & V. *In eadem Figura ſunto BC, BL, infinitæ curvæ ſimiles, ſeu ſpecie eædem, e quibus curva CL auferat arcus æquales BC, BL; quæritur natura curvæ CL, ejus tangens in puncto C, & punctum curvæ dato cuipiam puncto proximum.*

SOL. Exemplum proponit Frater in Parabolis. Huic ſæpe laudatus D. Marchio ita ſatisfacit, ut ducta per C Parabola BC, ejuſque tangente CE, faciat CE — BC : BC = BD : BT. Addo, ſi in hac proportione duntaxat BD vertatur in BE, conſtructio generaliter ad omnes curvas ſimiles ſe extendet; unde & componendo ſemper erit CE :
BC

* *Act. Erudit. Lipſ.* pag. 542.
† pag. 332.

BC = ET : BT. Quemadmodum etiam ſi curva CL talis eſſe ponatur, ut ex curvis ſimilibus areas abſcindat æquales BCD, BLM, reperitur triangulum CDE : BCD = ET : BT, quæ Theoremata obſervari merentur. De natura curvæ CL, punctoque in illa alteri cuidam proximo eadem tenenda, quæ in §. præced.

PROBL. VI. *Sint infinitæ Curvæ ſimiles BH, DL, circa idem punctum A ſimiliter conſtitutæ, quas trajiciant duæ rectæ poſitione datæ AH,* Tab. XII. Fig. 8.
ED, quarum altera AH tranſeat per A: quæritur arcuum ambabus rectis interceptorum maximus minimusve.

SOL. Data ſit una Curvarum ſimilium BH ſecans rectam poſitione datam AH in H, alterique poſitione datæ ED ducatur per A parallela AG. Evolvatur curva HB, principio evolutionis facto in H, & gignat curvam HG, quæ rectam AG ſecet in G; filum autem evolvens, dum deſcribit G punctum, ſit GB, tangens curvam in B. Jungatur AB ſecans rectam ED in D, ac per D tranſeat portio curvæ DL ſimilis portioni BH: erit arcus DL omnium rectis AH, ED interceptorum maximus minimusve.

COROLL. Patet hinc inſignis Evolutionum uſus, nondum quod ſcio conſideratus, nempe: Si ſit Curva quævis HB, ejus evolutione deſcripta HG, filum evolvens BG, atque ex punctis H & G inflectantur rectæ HA, GA, concurrentes in quolibet puncto A, & poſteriori per B agatur parallela recta infinita BF, erit evoluta BH omnium circa idem punctum A ſimiliter deſcriptarum, ac rectis AH, BF interceptarum Curvarum maxima minimave. Quin & amplius, ſi accipiatur in Curva HG quodvis aliud punctum C, quod filum evolvens IC dum deſcribit, tangit Curvam BH in I; atque ex I recta agatur IM ductæ CA parallela, erit arcus BI omnium rectis IM, BF interceptorum maximus minimusve.

ART. III.

Solutio Problematis Fraterni in Actis menſ. Mai. 1697. p. 211. * *propoſiti de Curva infinitas Logarithmicas ad angulos rectos ſecante.*

PRoblema de Curva invenienda, quæ infinitas Lineas ordinatim poſitione datas tangit, jam *menſe Octobri* 1694 † ſolutum dedimus. *Ibid.* p. 231.

 Quæ-

* Supra N°. XXXVII. pag. 193.
† *Acta Erudit.* pag. 391 †.

Quæſtio hic eſt de tali, quæ datas omnes ad angulos rectos ſecet. Dependet autem Problema a methodo tangentium inverſa, ut nullam generalem ſolutionem admittat, eſtque pro varia datarum poſitione miræ diverſitatis; neque gradus, vel ſpecies Curvarum, eſt character facilitatis vel difficultatis Problematis; cum non nunquam in algebraïcis res difficulter, in tranſcendentibus contra facile ſuccedat.

Exempla promiſcue algebraïcarum & tranſcendentium Curvarum, in quibus ſolutio facilis:

I. *Si eidem axi inſiſtant infinitæ Parabolæ æqualium parametrorum, ſed diverſorum verticum, ſive* (quod eodem recidit) *ſi ex infinitis una ſuper plano ſuo ita protrudatur, ut ſingula ejus puncta rectas deſcribant axi parallelas*, erit Curva, quæ infinitas illas Parabolas, ſeu unicam ita motam, perpetuo ad angulos rectos ſecat, Logarithmica, cujus ſubtangens æquatur ſemiparametro Parabolæ. Et viciſſim, ſi Logarithmica dicta ratione ſuper axe promoveatur, Curva quam continuo ad rectos ſecat angulos, eſt Parabola. Ita ſi Parabola cubica ſuper axe propellatur, quam ad rectos ſecat, eſt Hyperbola; ſi altiores Parabolæ, ab altioribus gradatim Hyperbolis normaliter ſecantur, & viciſſim, &c.

II. *Si infinitæ æqualium parametrorum Parabolæ axibus parallelis inſiſtant, & vertices habeant in linea his axibus perpendiculari; ſive, ſi Parabola ita feratur, ut ſingula ejus puncta rectas deſcribant axi perpendiculares*; Curva, quam infinitæ vel unica ſic mota normaliter interſecat, Parabola eſt cubicalis ſecundi generis, cujus latus rectum ad Parabolæ parametrum eſt, ut 9 ad 16. Si alia Paraboloidea ita ferantur, aliis itidem Paraboloideis normaliter ſecantur, & vice verſa, &c.

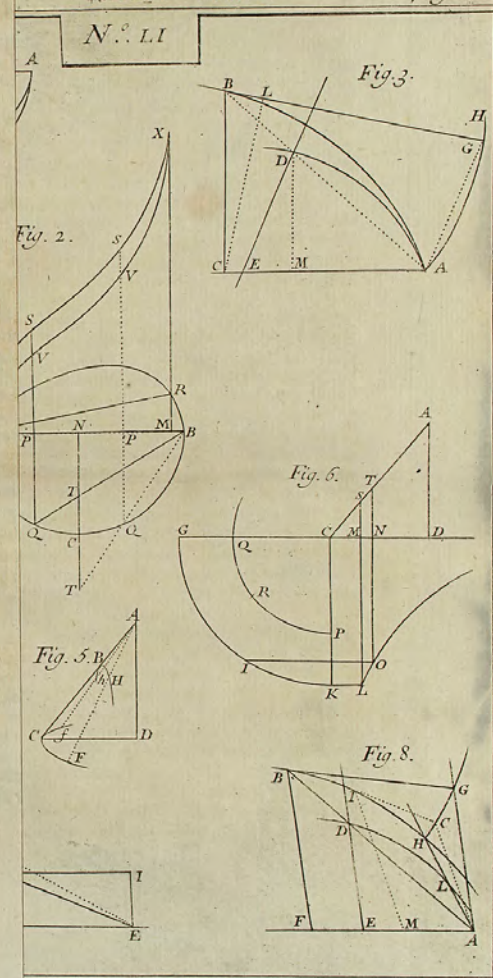
III. *Si infinita Paraboloidea ejuſdem gradus* [*cujus index ſit m*] *ſed diverſorum laterum rectorum, circa eundem axem & verticem conſiſtant*, Curva, quæ has omnes normaliter trajicit, conſtanter eſt Ellipſis, cujus centrum in communi vertice, latus tranſverſum in axe, ejuſque ratio ad latus rectum ut 1 ad *m*.

IV. *Si infinitæ æqualium ſubtangentium Logarithmicæ ſuper totidem axibus parallelis conſiſtant, tranſeantque per commune punctum B; quæritur Curva eas omnes normaliter interſecans.*

TAB. XIII. N°. LI. *Fig. 9.* CONTR. Eſto una earum data F B f, cum ſuo axe A G, inque hunc demiſſa perpendiculari B A; ſumtoque quolibet in Logarithmica puncto F, agantur ad axem perpendicularis F G, tangens F L, & huic parallela B M, ac inſuper ad partes Logarithmicæ ab axe remotiores ſtatuatur in axe recta A N, arbitrariæ longitudinis, major tamen ſubtangente G L: quo facto ſumatur inter duplam ſubtangentem & exceſſum, quo N G ſuperat A M, media proportionalis, eique in recta B A æqualis abſcindatur B I, ſurſum, deorſumve, prout punctum F ſupra, infrave

B,

Tab. XII *Tom. I.* *pag. 260.*



s CURVAS

s rectos secet. De-
, ut nullam gene-
um positione miræ
character facilitatis
algebraïcis res diffi-

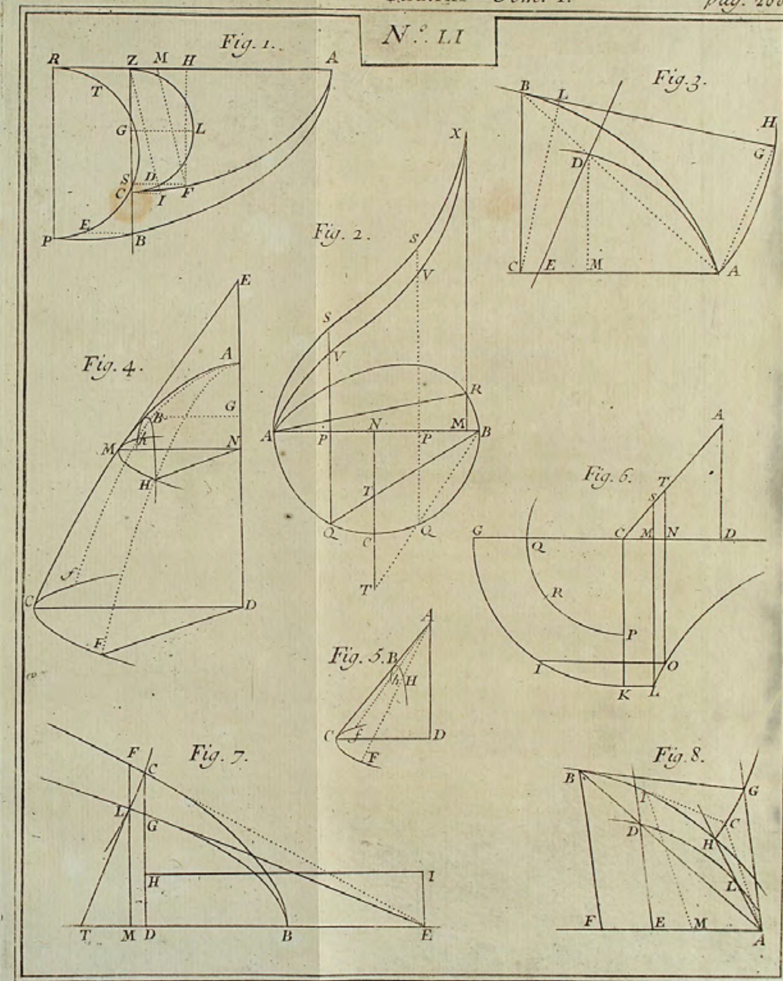
um Curvarum, in

parametrorum, sed
x infinitis una super
ns describant axi pa-
seu unicam ita mo-
, cujus subtangens
Logarithmica dicta
nuo ad rectos secat
r axe propellatur,
rabolæ, ab altiori-
issim, &c.
us parallelis insistant,
sive, si Parabola ita
endiculares; Curva,
secat, Parabola est
rabolæ parametrum
, aliis itidem Para-

us index sit m] sed
verticem consistant,
r est Ellipsis, cujus
axe, ejusque ratio

e super totidem axi-
nctum B; quæritur

e A G, inque hunc
ogarithmica puncto
F L, & huic paral-
remotiores statua-
tamen subtangen-
tem & excessum;
n recta B A æqua-
n F supra, infrave
B,



AD AN

B, assumtum fuer
que applicatam G
cui similes & æqua
angulis, constitui
Nota, Maxima
G L)). Si G M
latitudo.
V. *Quæritur der*
omnes Logarithmica
los rectos secat.
CONSTRUCT
sectionis Logarith
perpendiculari B A
ca, agantur rectæ
rumque illa axi pa
supra T, si quiden
inferiori T N];
cribatur semicircul
bitraria quadam c
T R = √ (½ T
superius sit ipso B
L P, ac tum dem
inde abscindantur
dam m C M C m
tutas, ad angulos
Nota, sumta T
puncto m, ut sit
transibit inter pun
Maxima Curvæ
Atque horum o
aliæ Curvarum pos
simplici Parabola a
deducunt; veluti
axe extructas, la
tiis æqualia habent
hoc: *Quæritur C*
no suo circa datu
admodum consta
angulo recto seca

B, aſſumtum fuerit; ac denique ex I ducatur I H parallela axi, ſecanſque applicatam G F in H; erit H punctum in optata Curva C H D; cui ſimiles & æquales, in cæteris rectarum B A, B C, ſeſe decuſſantium angulis, conſtitui poſſunt.

Nota, Maxima Curvæ altitudo $BD = \sqrt{(2\,GL \times (AN - GL))}$. Si $GM = AN$, cadit I H in B C, ſitque maxima Curvæ latitudo.

V. *Quæritur denique Linea* (quod eſt exemplum ſpeciale Fratris) *quæ omnes Logarithmicas ſuper eodem axe & per idem punctum ductas ad angulos rectos ſecat.*

Constructio talis: Eſto axis communis A m, punctum interſectionis Logarithmicarum B, earum una data F B f; demiſſa in axem perpendiculari B A, per punctum F, utcunque acceptum in Logarithmica, agantur rectæ F T, F N, ſecantes rectam B A in T & N, quarumque illa axi parallela ſit, hæc tangat Logarithmicam; [prætereaque ſupra T, ſi quidem punctum N inferius ſit ipſo T, abſcindatur $TN =$ inferiori T N]; quo facto, diametro A N, nempe $AT + TN$, deſcribatur ſemicirculus A P N, cui occurrat recta F T in P; ſumtaque arbitraria quadam conſtante L, abſcindatur in B A ex puncto T recta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 \pm L^2)}$ & jungatur R P, [vel ſi punctum T ſuperius ſit ipſo B, deſcripto ſuper T R ſemicirculo, applicetur illi prius L P, ac tum demum jungatur R P;] junctæ in recta F T æquales hinc inde abſcindantur T S, T S; eruntque puncta S, S, ad Curvam quandam m C M C m, quæ omnes Logarithmicas, circa punctum B conſtitutas, ad angulos rectos ſecabit, ut requirebatur.

TAB. XIII. N°. LI. Fig. 10.

Nota, ſumta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 + L^2)}$, occurret Curva axi in puncto m, ut ſit $Am = L$; ſed ſumta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 - L^2)}$, tranſibit inter puncta A & B, nec ad axem pertinget.

Maxima Curvæ latitudo $BC = \sqrt{(\frac{1}{2}BA^2 \pm L^2)}$.

Atque horum omnium ſolutio facilis admodum fuit: dari autem poſſunt aliæ Curvarum poſitiones, quæ Problema magis arduum reddunt, & vel in ſimplici Parabola ad caſus methodi tangentium inverſæ nondum exploratos deducunt; veluti, *ſi quæratur Curva, quæ omnes Parabolas ſuper eodem axe extructas, lateraque ſua recta reſpectivis verticum à puncto fixo diſtantiis æqualia habentes, ad rectos angulos trajicit. &c.* Cui addi poteſt & hoc: *Quæritur Curva, quæ Parabolam aut aliam datam Curvam ſuper plano ſuo circa datum punctum in orbem converſam in angulo dato ſecat;* quemadmodum conſtat, rectam ita converſam circa extremitatem ſuam in angulo recto ſecari a Circulo, in obliquo a Logarithmica ſpirali.

N°. LII.

JOHANNIS BERNOULLI

Annotata in Solutiones Fraternas Problematum quorumdam suorum, editas proximo Actorum Maio.

Acta Erudit. Lipſ. 1698. *Octob. pag.* 466.

SI Problemata ſubinde Eruditis propono, ſcopus mihi non eſt aliorum capacitatem tentandi; ſed unice, ut ingenia excitentur, novumque capiant incrementum ſcientiæ: unde & ego delectamentum habeo, quando præſertim ſolutiones in lucem prodeuntes cum meis conſpirare deprehendo. Eorum quæ partim in *hiſce Actis*, partim quoque in *Ephemeridibus Pariſ.* quondam propoſui, nunc demum nonnulla, a Fratre ſoluta, *Actorum menſis Maius* exhibet. Gaudium, fateor, non leve mihi attulit conſenſus, quem animadvertere potui ſolutiones Fraternas inter meaſque; & perfectum fuiſſet omnino, ſi modo in generalitate quoque meis reſpondiſſent. Non igitur abs re puto, ſi hic, paucis, & omni qua poſſum modeſtia, recenſuero quid ad perfectionem omnimodam Solutionum *Fraternarum* deſiderem.

Et quidem pag. 227 * Demonſtrationem Syntheticam affert Problematis de infinitis Cycloidibus; ſed pro ſimpliciſſimo duntaxat caſu, quando ſcil. recta poſitione data verticalis eſt. Optaſſem interim generalem, pro omni recta poſitione data, imo etiam pro curva, exhibuiſſet meæ ſimilem; qua non modo a puncto ad punctum iter breviſſimum Cycloidem eſſe, ſed & ſimul a puncto ad lineam non tantum verticalem, non tantum rectam, ſed utcunque curvam, deſcenſum breviſſimum, vel interdum longiſſimum, peragi per Cycloidem lineæ datæ perpendicularem, breviter, perſpicue, directe, & Synthetice demonſtro; quam omnes, quotquot ſunt, quibus communicavi, ſummopere laudarunt & approbarunt; & nuper tantum Ampliſſi-

mus

* Supra pag. 254, 255.

mus & Generoſiſſimus Dn. DIERQUENS Præſes in ſupremo Curia Brabantina quæ *Hagæ* eſt, Vir acerrimi judicii & in ha ſtudiis verſatiſſimus, una cum Filio Nobiliſſimo, Mathematicis pariter ingenioſo; quemadmodum ex ipſorum litteris ad me non ſine delectamento intellexi. Hæc vero mea Demonſtratio ſynthetica, quæ non in *Galilæana* tantum, ſed in omni alia hypotheſi, ſuccedit, jam initio ſtatim lucem publicam aſpexiſſet, niſi ſuaſu celeberrimi LEIBNITII eam etiamnum ſuppreſſam tenerem, ut jam alibi memini me monuiſſe: eo enim tempore, quo incidi in Problema de celerrimo deſcenſu, jam adinveni hanc demonſtrationem.

Cæterum, ſi verum eſt *Fratrem* celerrimum deſcenſum ad rectam poſitione datam, non ſolum in Cycloidibus, ſed & in omnibus curvis ſimilibus, determinare poſſe, vel potius tum temporis potuiſſe, cum hoc Problema proponeret; ſcire valde geſtio, quid illa verba ſibi velint, in quæ erumpit: *Qui methodum de maximis & minimis promovere volet, tentabit. Nobis ſufficiet propoſuiſſe.* De Circulis & Parabolis loquens, quæ utique etiam ſunt curvæ ſimiles, qui dicit ſibi ſufficere propoſuiſſe, tantumdem eſt ac diceret ſe non ſolviſſe; imo difficultate quaſi deterritum ne tentaſſe quidem. Quicquid ſit, longe majus quid præſtitiſſet, ſi ſolviſſet quoque in curvis diſſimilibus: tentet, & videbit immenſam difficultatem, & vel in ſolis Ellipſibus ſuper eodem axe extructis, quod jam *Non nemini* propoſui. Meus ſolvendi modus eo pertingit. Nec minus rem ſpinis obſitam ſentiet, ſi reliqua duo exempla, quæ ſine demonſtratione ſubnectit, a Circulis & Curvis ſimilibus ad quaſvis diſſimiles tranſferre voluerit.

Tranſeo jam ad ſolutiones Problematum meorum in *Ephemer. Gall. menſ. Aug.* 1697. * propoſitorum. Quod primum concernit, conqueritur ſtatim *Frater* de ambiguitate in voce *geometrice*: cum tamen jam nemo neſciat, non mihi ſoli dudum, ſed etiam acutiſſimo LEIBNITIO, imo & ipſi *Fratri* geometri-

cum

* N°. XXXIX.

cum eſſe quicquid geometrica lege peragitur, ſeu quicquid per æquationem, ſive algebraïcam, ſive tranſcendentem, determinari poteſt. Non nego, potuiſſem plane omittere hoc vocabulum, quippe quod per ſe ſubintelligitur; id tamen conſulto adjeci, ut ſimul excluderem conſtructionem quandam ſimpliciſſimam, generaliſſimam, & facillimam, quam prævideram dari poſſe, ſed quæ mechanica eſt: *extendendo ſcilicet filum per ſuperficiem convexam ab uno dato puncto ad alterum, illudque firmiter aſtringendo: capiet enim hoc pacto ſitum breviſſimum inter utrumque punctum.* Volebam itaque evitare ambiguitatem, excludendo ſtatim quod mechanicum eſt: tantum abeſt ut illam affectaverim. Videat hinc *Frater*, annon Illuſtriſſimo *Marchioni* HOSPITALIO rem forte gratiorem feciſſet, abſtinendo verbis blandiuſculis (quibus Viri generoſi parum delectantur,) quaſi ille hoc Problema ob dictam ambiguitatem neglexerit. Ipſe haud dicet ſe neglexiſſe; imo maxime ſe ei applicuit, ut ex ipſis ejus litteris ad me datis habeo: ſed de nulla tali ambiguitate conqueſtus eſt, quia optime genuinum ſenſum Problematis intellexit; quandoquidem ſe Problema de ſuperficie curva in ſuperficiem planam reduxiſſe mihi ſignificavit. Quod vero ei res non omnino ex voto ceſſerit, indicium eſt majorem in hoc negotio difficultatem præſenſiſſe, quam ut una generali æquatione (ut *Frater* ſe feciſſe putat,) Problema in omni ſua extenſione complecti liceat. Quid interim? ſi retorquerem & dicerem, Illuſtriſſimum Virum, qui pariter unius tantum Problematum *Fraternorum* ſolutionem de celerrimo deſcenſu ad lineam verticalem exhibuit, alterum de Iſoperimetris, ob ambiguitatem & obſcuritatem Propoſitionis, (ut fere neſciam an unum, an plura contineat Problemata) noluiſſe attingere.

Ut redeam ad Solutionem *Fraternam* lineæ ducendæ breviſſimæ in ſuperficie conoidea, eam legitimam agnoſco; & gaudeo *Fratrem*, hac in parte, mecum concurriſſe. Sed patiatur ut dicam ex infinitis caſibus vix unum eſſe quem ſolverit, eumque facillimum; adeo ut immane quantum adhuc pro generali ſolutione deſideretur. Fundamentum, quo forte *Frater*

uſus eſt, in eo conſiſtit, quod differentia duorum angulorum, quos facit linea quæſita cum duobus quibuſvis meridianis proximis in ſuperficie conoidis, vel ſphæroidis ductis, debeat eſſe æqualis angulo, quem comprehendunt duæ in ipſis punctis interſectionum tangentes meridianos, & in axe conoidis vel ſphæroidis concurrentes. Sed quam parum hoc eſt! Valet enim, vix ac ne vix quidem, in conoidibus & ſphæroidibus, & quidem baſium circularium: ſed neque in his omnibus; oportet inſuper axem rectum eſſe ad baſin: at vero quot ſunt conoides, quot ſphæroides, quarum axis eſt obliquus? quot ſunt iterum, quarum baſes non ſunt circulares? Vellem itaque ut reſtringeret verba ſua, quando dicit, *Problema in omnibus pariter conoidibus & ſphæroidibus, æque ac in cono cylindrove eſſe facillimum*, ad illas tantum quæ ſunt rectæ & circulares. Præterea ſi conſideremus multitudinem & varietatem infinitam ſuperficierum curvarum, quæ plane non ſunt conoides nec ſphæroides; fateri oportet, rem eſſe exigui momenti, quod in conoidibus & ſphæroidibus præſtitum, præ eo quod a *Fratre* præſtandum ſupereſt. Heic igitur me feciſſe aliquid puto, quod repererim viam generalem perveniendi ad æquationem pro quavis ſuperficie curva data, ſit conoidica, ſit non conoidica; quam *Fratri* indagandam relinquo, ut tempus habeat ſuam perficiendi, & Problemati ex aſſe ſatisfaciendi.

In cono quovis obliquo, pro quo, & quidem tantum recto, prolixiſſimam conſtructionem exhibet, & tamen non docet quomodo linea inventa per data duo puncta ducenda ſit; pauciſſimis verbis, ſine ſchemate, ita rem expedio: Ductis a duobus punctis datis ad verticem coni duabus rectis; fiant in plano duæ aliæ rectæ ipſis æquales, & angulum comprehendentes æqualem angulo ſuperficiei conicæ contento duabus iſtis rectis in cono ductis: conjungantur recta extremitates duarum rectarum in plano, quam ſecet alia recta utcunque ex angulo plani ducta; diſtantiam interſectionis transfer a vertice coni in ſuperficiem conicam, ita ut cum prioribus rectis faciat in ſuperficie conica angulos æquales angulis quos facit cum lineis in plano ductis: Dico punctum illud, in quod distantia cadit in superficie conica, fore in linea brevissima, quæ interjacet inter duo puncta data. Suppono hic angulos superficiei conicæ circa verticem comparabiles esse, vel æquales assumi posse angulis planis: quod quomodo faciendum, jam BARROWIUS docuit.

Non est quod diu immorer cæteris Problematum solutionibus: meas, jam ante annum, *Illustrissimo* HOSPITALIO communicavi; quæ quodammodo simpliciores sunt. Sed hoc monitum duntaxat cupio, quod tunc statim etiam in litteris ad Dn. *Marchionem* innui, me, per curvas ejusdem speciei, non intellexisse curvas similes tantum, sed curvas quascunque certa lege descriptas, seu ut termino *Leibnitiano* utar, *ordinatim positione datas*: alias, si mens mea de similibus tantum fuisset, id diserte dixissem, quemadmodum, non diu post, feci in iisdem *Ephem. mens. Decembr.* ubi pag. 463, * seqq. illas expresse voco curvas *similes & similiter positas*. Quod autem in exemplum dederim Parabolas, quæ utique sunt curvæ similes; id ipsum ostendit quod tunc de similitudine curvarum ne somniaverim quidem; alias certe, non Parabolas sed alias curvas dissimiles, exempli loco proposuissem: nostra enim methodus ad omnes se extendit, quacunque lege datas. Ast tantum discrimen comperiet *Frater* inter similes & dissimiles curvas, ut si Problema denuo tentare lubeat, non dubitem, quin sit agniturus se, postquam hoc Problema pro speciali isto casu solvit, ne unguem latum promovisse generaliter conceptum pro quibusvis ordinatim positione datis; quod quam abstrusæ sit indaginis patebit ipsi, si in Probl. IV & V loco Parabolarum substituere velit easdem illas Ellipses, quæ in præcedentibus duobus, exempli loco inservierunt. Dico exempli loco; solvitur enim pariter per nostram methodum in omnibus aliis curvis.

Supersunt notanda quædam circa lineas, quas vocabo Trajectorias, quæ alias ordinatim datas normaliter, vel in angulo quovis dato, seu etiam data lege variante, trajiciunt. Diu adeo

* Supra N°. XL. pag. 212.

adeo est, quod hanc materiam seposuerim; quam, ni fallor, primus in lucem protraxi, ut difficulter in mentem revocem. Cum vero aliquot exempla proferat *Frater* curvarum algebraicarum, quæ, jam quatuor abhinc annis, Celeberrimo LEIBNITIO in privatis ad ipsum litteris soluta dedi: placet hic excerpere quæ tum scripseram in Litteris d. 2. Septembr. 1694.
„ Aliud jam pridem etiam mihi consideratum Problema non
„ minus elegans quam utile, ob affinitatem quam cum hisce
„ (*curvis alias positione datas tangentibus*) habet, proponam:
„ Datis nempe infinitis curvis positione, invenire curvam quæ
„ omnes ad angulos rectos secat, vel ut Tuis verbis utar,
„ *Lineis propositam normaliter secantibus positione ordinatim datis,*
„ *invenire propositam.* Si positione ordinatim datæ sint Pa-
„ rabolæ *cujusvis gradus*, eundem axem & eundem verticem,
„ sed parametros variabiles habentes, curva optata erit Ellip-
„ sis: si positione ordinatim datæ sint Parabolæ eædem eun-
„ dem axem sed variabiles vertices habentes, curva quæsita
„ erit Logarithmica vulgaris: Sic in quovis exemplo peculia-
„ ri, rem facile expedire possem; Tibi autem difficile non
„ erit generales pro hoc excogitare regulas. Cæterum hoc
„ Problema insignem usum præstat in determinanda curvatura
„ radiorum lucis per medium inæqualiter densum transeuntium,
„ juxta hypothesin HUGENII; si quidem radius nihil aliud
„ sit quam linea undulationes ad angulos rectos secans. Pos-
„ set præsens Problema adhuc latius extendi, nempe sic: *Li-*
„ *neis propositam ad angulum datum secantibus positione ordina-*
„ *tim datis, invenire propositam*, si lineæ datæ sint rectæ in
„ puncto coëuntes, curva quæsita (ceu manifestum est) erit
„ Loxodromica plana, &c.

Hisce Vir sagacissimus in hunc modum respondit, in Literis ad me datis $\frac{6}{16}$ Decembr. 1694, quod lubens huc refero, ut appareat quantum, & ille, jam tum fecerit. „ Me-
„ thodus, inquit, inveniendi curvam, quæ ordinatim positio-
„ ne datis occurrat ad angulos rectos, meo judicio consistit

,, in duabus æquationibus, una continente relationem inter x,
,, y, & conſtantem quandam in curva poſitione data, ſed pro
,, diverſis talibus ordinatim datis variabilem b; altera conti-
,, nente valorem ipſius $dy : dx$ in curva quæſita, expreſſum ex
,, proprietate perpendicularium in curva poſitione data; cujus
,, æquationis ope, datur ipſius b valor per dy, dx, y, x, pro
,, re nata; quarum duarum æquationum ope tollendo b, ha-
,, betur æquatio differentialis primi gradus pro relatione inter
,, x, & y. Sic ſi poſitione ordinatim datæ ſint Parabolæ ver-
,, ticis communis, quarum ſemiparametri b fiet æqu. $2bx = yy$.
,, Jam ex conditione Problematis, ſeu perpendicularitate ad
,, Parabolam, fit $b = - ydx : dy$; unde tollendo b, fit $- 2xydx$
,, $= yydy$; ſeu ſummando $aa - xx = \frac{1}{2} yy$, quæ utique eſt ad
,, Ellipſin, & ſatisfaciunt Ellipſes infinitæ. Et has ordinatim
,, poſitione datas manifeſtum eſt viciſſim a Parabola unaqua-
,, que normaliter ſecari. Cæterum præclare a Te notatum eſt,
,, hoc Problema uſum habere in Dioptricis, pro curvatura ra-
,, dii in medio continue variante: nihil potuit dici aptius,
,, &c.

Allata ſufficiant ad oſtendendum, methodum ad æquationem perveniendi, non in uno alterove tantum exemplo algebraicarum, ſed in omnibus, dudum nobis fuiſſe familiarem: ſed quoniam in tranſcendentibus non ſuccedit, niſi in ſimilibus, ut in Cycloidibus; vel etiam in illis, quæ ad unam conſtantem reduci poſſunt, ut in Logarithmicis; illam velut inſufficientem neglexi, nec quam excolerem dignatus ſum: alia itaque excogitanda erat, quæ generalis eſſet, & ad quaſcunque ordinatim poſitione datas, tranſcendentes æque ac algebraicas, porrigeretur. Hanc autem, poſtquam acutiſſimus LEIBNITIUS, occaſione eorum, quæ ipſi ſuper hac affinique materia communicaveram, ipſe novam differentialis calculi applicationem per utilem ſane inveniſſet, mecumque viciſſim communicaſſet, de qua hactenus nihil in publicum conſtat; hanc, inquam, quam optaveram methodum generalem ſecandi ordinatim poſitione datas, ſive algebraicas, ſive tranſcendentes, in

an-

angulo recto, ſive obliquo, invariabili, ſeu data lege variabili, tandem ex voto erui; cui LEIBNITIO approbatore ne γρύ addi poſſet ad ulteriorem perfectionem; & vel ideo tantum, quod perpetuo ad æquationem deducat; in qua ſi interdum indeterminatæ ſunt inſeparabiles, methodus non ideo imperfectior eſt; non enim hujus, ſed alius eſt methodi indeterminatas ſeparare †. Rogamus itaque *Fratrem*, ut velit ſuas quoque vires exercere in re tanti momenti. Suſcepti laboris non pœnitebit, ſi felix ſucceſſus fructu jucundo compenſaverit; ſcio relicturum ſuum, quem nunc fovet modum, qui in pauciſſimis tantum exemplis adhiberi poteſt, ut modo ſupra dixi.

Quod interim ſpectat peculiarem illum caſum, quem in *Actis* propoſui; ubi ſcilicet quæritur *Trajectoria omnes Logarithmicas ſuper eodem axe & per idem punctum ductas normaliter trajiciens*: En excerpta ex litteris meis ad prælaud. LEIBNITIUM, jam ante biennium datis, die puta 27 Octobr. *1696*, quæ ſingularem exhibent ſolvendi modum per æquationem *exponentialem*, ſeu, ut ego voco, *percurrentem*: ,, Eſto (*Fig.* 1.) AB axis communis omnium TAB. XIII. N°. LII.
,, Logarithmicarum CD, Cd ex puncto C eductarum: deter- *Fig.* 1.
,, minanda eſt curva Dd, omnibus CD, Cd normalis. Poſi-
,, tis coordinatis AB, BD, x, y; & CA, a: Concipiatur ad
,, lubitum determinata quædam Logarithmica CE, ad quam cæ-
,, teræ referendæ ſunt. Sit illa facilioris calculi gratia talis,
,, ut ipſius ſubtangens ſit æqualis ipſi CA, ſeu a. Jam ex
,, puncto quovis curvæ quæſitæ D, ductam intellige DE pa-
,, rallelam BA, quæ ſecet aſſumtam Logarithmicam in E, ex
,, quo ſi ducatur EF, deſignabit AF Logarithmum ipſius EF,
,, ſeu DB, ſeu y. Nunc, ob normalitatem Dd ad CD erit
,, generaliter $dx : - dy =$ BD : BG, ſubperpendicularem cur-
,, væ Dd, ideoque BG $= - ydy : dx$. Eſt autem, ex pro-
,, prietate Logarithmicarum ſubtangens Logarithmicæ CE ad
,, ſubtangentem Logarithmicæ CD, id eſt, CA ad BG, ut
,, AF ad AB, quod hanc ſuppeditat proportionem $adx : - ydy = ly :$

Ll 3 ,, x.

† De hac Methodo & toto hoc argumento Trajectoriarum, Vide Tom. II; Num. CIV. & ſeq. præcipue autem Num. CXVI.

„ x, unde habetur $axdx = -ylydy$; potest autem $-ylydy$ „ summari, [prout jam olim ad Te scripsisse memini,] hoc „ pacto $-ylydy = -ylydy - \frac{1}{2}yydly + \frac{1}{2}aydy$ [quia $dly = ady$: „ y]; sumtis itaque summis per partes, erit $\int -ylydy = -$ „ $\frac{1}{2}yyly + \frac{1}{4}ayy$, & per consequens $= \frac{1}{2}axx$; id est $x = y\sqrt{\frac{a - 2ly}{2a}}$

„ Vel, si mavis æquationem percurrentem: sit b numerus ipsius „ a, seu $lb = a$, tunc erit $2yyly = yylb - 2xxlb$, adeoque $y^{2yy} = b^{yy - 2xx}$, vel etiam $b^{2xx}y^{2yy} = b^{yy}$ &c.

Haud difficilius alter casus Logarithmicarum, cujus constructionem dat *Frater* §. 4, ad æquationem percurrentem reduci potest. - Ut & si quæreretur Trajectoria normaliter secans omnes omnium graduum parabolas ejusdem parametri, verticis, & axis; haberetur enim pro natura curvæ $a^{yy+xx} = x^{2xx}y^{2yy}$. Quapropter, videsis quæ scripsi de Exponentialibus *Anno superiori mense Martio.* †

Videamus autem, quomodo tandem *Frater* discursum claudat. En expositis omnibus suis solutionibus & constructionibus, postremo duos casus aliis solvendos proponit, quos hactenus inexploratos dicit, suisque adeo methodis impervios & desperatos. Sunt autem hi: *Quæritur curva, quæ omnes Parabolas super eodem axe extructas, lateraque sua recta respectivis verticum a puncto fixo distantiis æqualia habentes, ad rectos angulos trajicit*; Item: *Quæritur curva, quæ Parabolam, aut aliam datam curvam, super plano suo circa datum punctum in orbem conversam, in angulo dato secat.* Gaudeo mihi ansam hic dari, qua ipsius methodo subvenire possim. Ecce solutionem utriusque. Pro

TAB. XIII. N°. LII. *Fig.* 2. primo: Sit A punctum fixum (*Fig.* 2), AB axis communis Parabolarum BC, quarum parametri, seu latera recta, distantiis AB æqualia: Super axe BA producto fac Logarithmicam FG pro arbitrio, cujus subtangens vocetur a: super AH normali ad AB, describe curvam AE cujus applicata HE (posita abscissa

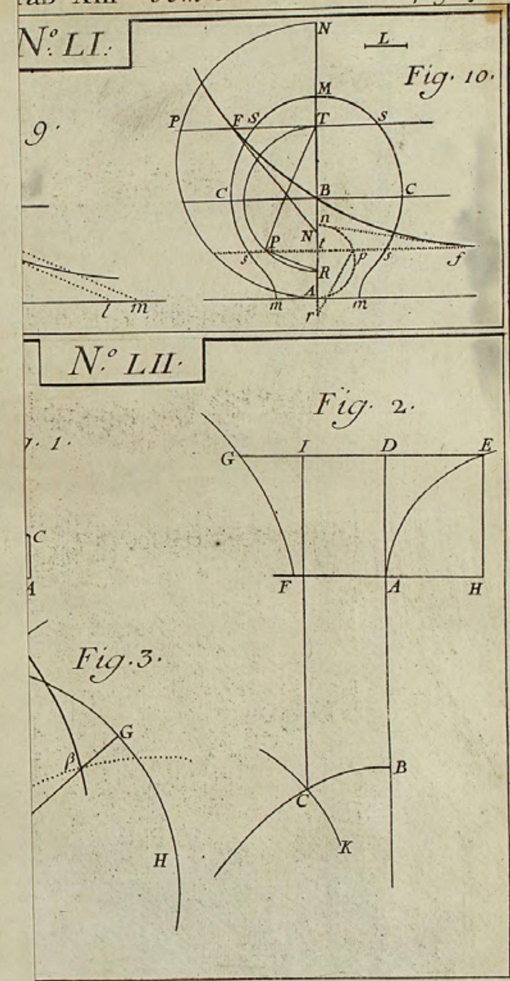
† Supra N°. XXXVI.

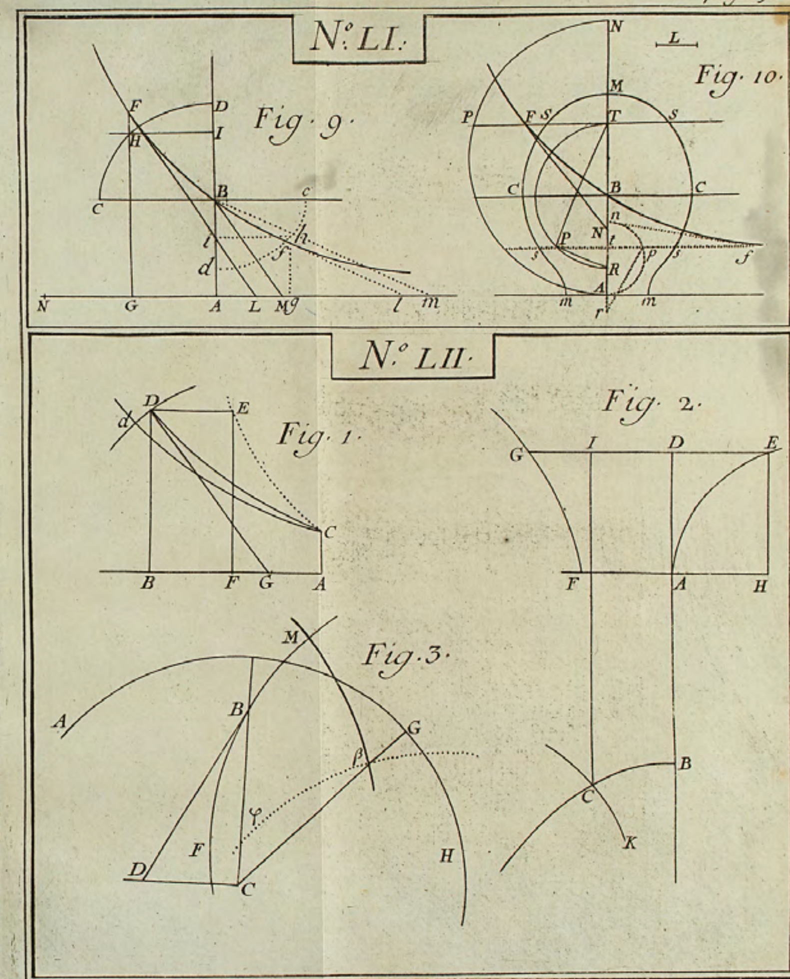
abscissa AH $= z$) sit $= \int \frac{a^3dz + 4azzdz}{aaz - 6z^3}$†: quo facto, agatur utcunque GE parallela ipsi AH, secans curvas in G, E, & axem in D: sume DI, quæ sit ad DE, ut DG ad subtangentem Logarithmicæ; ex I ducatur axi parallela IC, occurrens Parabolæ descriptæ parametro AB æquali ipsi DG; dico punctum occursus C fore in Trajectoria quæsita CK, quæ omnes Paraboias, ut BC, normaliter trajiciet.

Alterum, quo quæritur *Trajectoria datam quamvis curvam, in suo plano, circa datum punctum in gyrum versam, in dato angulo constanter secans*: ita construo. Sit punctum, seu centrum rotationis C, (*Fig.* 3.) ex quo describatur circulus AGH, assumaturque punctum A pro initio rotationis, ipsa vero curva data circa C rotanda sit BF: ex cujus puncto quovis B ducatur ad C recta BC, & ad hanc normalis CD, occurrens tangenti BD in D. Vocentur radius circuli, seu Sinus totus, a; Sinus anguli dati, b; Sinus complementi, c; CB, y; CD, r; BD, t; (nota quod r & t dentur per y) sumatur jam arcus AG $= \int \frac{a^3ry \pm abctt}{bbtty - aay^3}dy$, & ex radio CG abscindatur Cβ = CB; dico punctum β esse in trajectoria quæsita βM, quæ curvam datam BF, circa C conversam in quovis situ $\beta\Phi$, secabit in augulo dato M$\beta\Phi$: qui si rectus sit, constructio evadit simplicissima; tunc enim sumendus est arcus AG $= \int ady : r$. Hujus demonstrationem non addo, quoniam evidens & cuivis obvia est. TAB. XIII. N°. LII. *Fig.* 3.

† Hoc correxit Author N°. LXX. & legendum dixit $\int \frac{-a^3dz - 4azzdz}{3aaz + zz^3}$. Vid. ibid.

JOH.





JOH

JO

D I

N U

Edita pri

Joan. Ber

N°. LIII.

JOH. BERNOULLI MATH.

DISPUTATIO
MEDICO-PHYSICA
DE

NUTRITIONE,

Quam

Publice examinandam exhibuit

Ad diem 11. Maii 1699.

Edita primum GRONINGÆ 1699. *iterum* TIGURI 1735.

DISSER-

I.°

DISSERTATIO
MEDICO-PHYSICA
DE
NUTRITIONE*.

I.

DE Nutritione acturus non ea percurram singula, quæ apud omnes fere tam Medicos quam Physicos circa hanc materiam leguntur. Delibabo duntaxat, quæ ad institutum meum primario tendunt: forte & ansa dabitur attingendi quæ alii intacta præteriere.

Mm 2 II.

* *Dissertationem hanc in* Tempe helveticam *Anno* 1735, *cum inserendam curaret Vir Celeb.* Joh. Georg. ALTMANNUS, *Lectoribus dedit id Moniti:* Eruditissimam hancDissertationem, a Celeberrimo Auctore, jam sub finem elapsi sæculi, Philoso-

II.

Quid per Nutritionem intelligendum, neminem fugit; Vulgo eam definiunt, quod sit *alimentorum in viventis corporis substantiam conversio & assimilatio*: seu, si magis arridet, quod sit *continua effluentis substantiæ redintegratio*. Videsis passim Auctorum scripta, nimirum CASTELLI *Lexicon Medicum*, MICRELII *Lexicon Philos.* SENNERTI *Institutiones Med.* FERNELII *Physiolog.* ROHAULTI *Physic.* Guilielmi COLE *Hypotyp.* aliorumque innumera.

III.

Eam autem duplicem faciunt, *conservantem & augmentantem*; per illam tantundem præcise novæ materiæ corpori apponitur, quantum continua dissipatione ab eo separatur, per hanc plus additur quam perit. Nonnulli tertiam speciem afferunt *attenuantem*, qua novæ substantiæ suppeditatio veteris jacturam non æquat.

IV.

Omnes ergo conveniunt, (ecquis negaret!) quod corpus, quod vulgo dicitur vivens, continuo motu & agitatione partium, de substantia sua indesinenter amittat, quodque amissum per conversionem & appositionem alimentorum sit resarciendum. Quomodo vero hæc conversio & appositio peragatur, a variis varie explicatur. Qui explosis Veterum chimæris delectantur, & apertis oculis circulationem sanguinis non vident, materiam pro nutrimento primam ex sanguine per venarum

Philosophiæ tum temporis & Matheseos in Academia Groningana Professor, cum ab acerbis & inficetis quibusdam hominibus accusaretur, ideoque ob imputatum in articulo de resurrectione mortuorum Socinianismum, scriptam & jam per plurimos annos a Viris doctis desideratam, hic recudendam existimavimus; cum ejus lectio, non Physicos tantum, & artis Apollineæ cultores, sed etiam Theologiæ, omniumque bonarum artium amatores instruere & delectare possit.

rum truncos ad capillares facultate sua attractiva eliciunt, mox quatuor humorum formam successive induturam, *humoris* nempe *innominati*, *roris*, *glutinis* & *cambii*; quorum ultimum tanquam materia proxima jam præsto est, quæ relictis prioribus eligatur a facultate electrice, & assimiletur ab assimilatrice, quæ duæ facultates, mirum! in singulis partibus singulari modo suum exercent imperium, ita ut cambium illud in ossa ab ossificatrice, in musculos a musculificatrice, in nervos a nervificatrice, & ita porro commutetur. Belle omnino! at turbas prævideo machinæ nostræ exitiales ex eo oriundas, si quondam accideret ut facultates istæ sui officii immemores alia aliam salutando ex suis in aliena transmigrarent domicilia: proh superi! quid fieret? quanta metamorphosis? si quod jam carnosum est ossesceret, & carnesceret quod osseum; si nervi, si tendines rigerent; si loco crurum duæ tibi essent marmoreæ columnæ; si brachia cum digitis abirent in durissimos arborum ramos; si solidus cortex loco cutis involveret corpus; contra si cranium, costæ, dentes, reliquaque ossa mollescerent; si aures & nasus instar ceræ ductiles evaderent; certe vix similem OVIDIUS finxit transformationem. Jocari sed liceat, ad seria pergimus.

V.

Postquam nostrum inventorum ferax sæculum, ut in omnibus aliis scientiis, ita in Anatomicis novas easque clarissimas accendit faces, verum jam sanguinis cognovimus motum, genuinam chyli viam, exiles lymphæ ductus Veteribus inconspicuos, venarum valvulas, arteriarum & venarum capillarium anastomoses, plurimaque alia a sagacissimis Microcosmi lustratoribus detecta; quibus cognitis, arduum non erit, nutritionis rationem intelligibiliter exponere. Quanquam & inter recentiores sint, qui in nonnullis discrepent, dum alii, ut WARTHONUS, GLISSONIUS, COLE, succum nutritium proxime ex nervis subministrari volunt, alii ut WILLISIUS, CARTESIUS, ROHAULTUS, STENO, cum ex ramulis arteriarum extremis immediate derivant; conveniunt tamen omnes, materiam ex qua ille generetur esse sanguinem, inque mechanico explicandi modo parum aut nihil differunt, qui summatim ita se habet: Cibi in ore masticati ope dentium, ab interspersa saliva primam præparationem subeunt, deglutiti postea a fermento ventriculi comminuuntur & digeruntur magis, inque chylum seu succum, cinericeum primo, dein albicantem convertuntur, qui post moram aliquam per ventriculi ostium inferius, *pylorum* dictum, exprimitur in intestina, in quibus paulatim proreptando, cogente intestinorum motu peristaltico, porro elicitur, exaltatur, attenuatur, intensiusque lactescit: Hoc modo attenuatus, oscula vasorum lacteorum subintrat, urgente semper eo qui sequitur, relictis particulis crassioribus & fæculentis, quæ excrementa componunt per alvum ejicienda; mox percolatur per glandulam magnam ASELLII, ulterioris depurationis gratia, uti volunt, dehinc affatim properans per varios ramos tendit ad commune receptaculum a PECQUETO detectum; concentratus iterum expellitur, partim a novo subingressuro, partim etiam a micatione arteriarum & motu musculorum in vicinia jacentium, abdominis præsertim & quorundam respirationi inservientium, ubi diaphragma quam plurimum præstat, expulsum recipit ductus thoracicus, per quem iisdem moventibus jugiter ascendit, & denique in suprema parte sese exonerat in venam subclaviam, ubi primum cum sanguine commiscetur. Scio quosdam esse ex præstantissimis modernis Anatomicis, qui quidem hac chyli via non negata, aliquam tamen ejus partem, immediate ex intestinis venientem, a venis mesaraicis absorberi, & sic cum sanguine statim mixtum ad hepar amandari statuunt, quam opinionem præprimis fovent HORNIUS, SWAMMERDAM, BILSIUS, BORELLUS, DEULINGIUS; decantatissimo illo experimento *Bilsiano* omnes vel plerique nixi; quo jure vero, consulantur PECQUETUS, LOWERUS, BARTHOLINI *Pater* & *Filius*, & alii, qui ad hepar nihil omnino chyli per mesaraicas deferri validissimis argumentis evicerunt, & propterea ei totum sanguificationis munus, quod ab omni antiquitate gesserat, eripuerunt. Lectu inprimis digna sunt LOWERI experimenta hunc in finem instituta, ut & quæ *Thomas* BARTHOLINUS, qui antea ipse viriliter pro hepatis functione militaverat, tandem vero meliora edoctus in exequias ejus conscripsit.

VI.

Chylus itaque ex vena subclavia continuo in sanguinem instillatus, cum eo progreditur, dextrumque statim cordis ventriculum pervadit, exinde per pulmones itinere emenso, sinistrum cordis thalamum subit, nec moram nectit, sed validis iteratis pulsibus exploditur in arteriam aortam, ex hac in ramos, ex ramis in minores arterias, ex istis in capillares indesinenter profunditur, unde iterum inverso ordine ex venulis minoribus in majores recollectus ad cor revehitur; sed nullis induciis concessis, eundem repetit circuitum, itque reditque semper eandem viam; atque in hoc consistit ab omnibus jam recepta circulatio sanguinis ab HARVAEO primitus detecta, postquam diu adeo latuisset, non sine exprobranda superiorum sæculorum cæcitate. Chylus hoc modo cum sanguine delatus, ab eo sensim subigitur, excoquitur, & elaboratur, ita ut particulæ chyli sanguineis similes a reliquis separentur, sanguinique ob similitudinem facile associentur, reliquæ autem, quæ ob heterogeneitatem figurarum ita intime cum sanguine misceri non possunt, variis naturæ viis ex corpore eliminentur. Dum enim per varia viscera massa sanguinea trajicitur, pro ratione meatuum partes ipsis accommodatæ ab ea secernuntur. Non certe alius quærendus est sangnificationis modus, quam modo dictus, qui consistit tantum in debita chyli permixtione cum sanguine, & in mora sufficienti plurium circulationum: prima etenim alterave id opus non statim peragitur; teste experientia, quæ docet, quod si animali, quatuor vel quinque horis post largiorem pastum, arteria vel vena quævis

vis secetur, reddet sanguinem multum chyli etiamnum lactescentis habentem.

VII.

Sanguis ex chylo factus, & a partibus heterogeneis repurgatus, constat tamen diversis diversæ indolis & naturæ particulis, pro ratione pororum cujusvis partis nutriendæ in corpore, ita ut singulis pro usu & indigentia sua suppeditare possit: sic pars sanguinis subtilior & volatilior in cerebro secernitur, & spiritibus reficiendis destinatur, pars vero glutinosior nutritioni corporis inservit. Non tamen putandum est, eam, dum in vasis sanguiferis circumfertur, glutinosam existere; quamdiu enim particulis motus inest, non facile sibi adhærescunt, sed ubi extra vasa semel fuerint a motu rapido cessantes, viscositatem eam induunt, quam videmus humores omnes gelatinosos acquirere, si aliquandiu in loco non nimis calido stagnaverint, quantamcunque etiam antea habuerint fluiditatem.

VIII.

Quomodo autem sanguis nutritioni idoneus ex vasis promanare queat, multi non satis concepere; crediderunt plerique & etiamnum credunt, extremas arteriolas capillares per totum corpus disseminatas hiare apertis osculis in interstitia partium nutriendarum, succumque nutritium ita quasi eructare cum reliqua sanguinis massa ab alteris ostiolis venularum capillarium pariter hiantium resorbenda, & ad cor revehenda. Sed huic opinioni reclamat perfecta vasorum capillarium anastomosis, quam celebris ille invisibilium scrutator LEUWENHOEKIUS, fidissimi sui microscopii ope in pluribus animalibus observavit. Et ut fidentius loquar, facit propria autopsia, quæ me non semel idem docuit in anguilla, ubi, non sine magna admiratione & delectamento, conspexi sæpius perelegantem sanguinis circulationem, atque ex arteriolis in venulas continuo tractu celerrime prolabentes globulos sanguineos, in illis nimirum ascendentes, in his vero reflexo velut itinere sine ulla interposita morula descendentes; adeo ut ex flexura illa, quæ inter binos quosque ramulos intercedit, evidentissime constet, quamlibet arteriam capillarem cum sua venula unum continuum efformare vasculum; tam certum igitur est quam quod certissimum, duo ista genera vasorum per immediatas anastomoses inter se communicare, adeoque extravasationem illam sanguinis ex capillarium osculis merum esse figmentum.

IX.

Quæ cum ita se habeant, ultro sequi videtur, humorem nutritium alia longe ratione ex vasis deducendum esse. Verum enim vero vix quicquam est quod rem clarius explicet; quam si dicamus, subtilissimas sanguinis particulas, propter calorem & motus rapiditatem, sub forma vaporum, per tunicas vasorum capillarium transsudare; cum enim ipsæ tunicæ nihil aliud sint quam expansio & textura infinitarum fibrillarum reticulatim implexarum, fieri nequit quin multi exigui meatus pateant ad recipienda illa effluvia; cui accedit, quod validus sanguinis motus talem transsudationem multum adjuvet: facta enim qualibet cordis systole, sanguis magna vi ex eo ejectus, arterias impetu suo nimium infarciens, earum tunicas valde distendit, quo fit ut pori amplientur, ceu optime notavit CARTESIUS in suo *Tract. de Format. Fœtus*: & præterea pressio sanguinis, quæ momento pulsus in omnes partes interioris superficiei arteriarum æqualiter se exerit, particulas in poros jam intrusas magis propellit, hæ vero proxime præcedentes & ita porro.

X.

Notandum interim est, omnes partes corporis animalis, quæ solidæ vulgo dicuntur, compositas esse ex innumeris fibrillis & fila-

filamentis diversimode intricatis & intertextis, interdum parallelis, ut in musculis, nervis, tendinibus; quin & ipsa ossa tali textura filamentorum gaudent, quod vel ex eo manifestum est, quod ossa uno quam alio modo longe facilius findantur, & fissa facilius coalescant quam fracta: In fissura quippe fibræ manent integræ, quæ in fractura dilacerantur. Quod egregie etiam observatum reperio in FORGEI notis ad CARTES. *Tract. de Homine*. Cum igitur arteriæ in ramos innumeros divaricentur, & horum singuli in infinita vasa capillaria, quæ totum habitum corporis secundum omnes dimensiones perreptant; conceptu facile est, singula filamenta ita insistere arteriolis, ex quibus subtiliores sanguinis moleculas exsudare diximus, ut illorum radices harum poris respondeant; quælibet ergo molecularum, per arteriolarum tunicas expulsarum, impingit occursu suo in radicem filamenti, atque si ibi foveolam offendit figuræ & magnitudini suæ congruam, in illam intruditur, & ita infixa & intrusa filamento isti appropriatur; si vero stationem nullam invenit, ob incommodam quam habet figuram, vel ob injustam magnitudinem, a succedentibus particulis statim removetur & præterlabi cogitur in interstitium duorum proximorum filamentorum, cujus longitudinem decurrendo, ubi ad extremitatem venerit, vel per poros cutis in aërem avolat, in quo proprie consistit transspiratio insensibilis, vel per vasa lymphatica, quæ in eum finem vasa sanguifera ibi comitari arbitror ut superfluum a nutritione humorem recipiant, sub forma lymphæ revertitur & plurimis in locis, partim cum chylo, partim immediate cum sanguine iterum miscetur; quo fit, ut illæ particulæ, quæ prima vice re infecta in sanguinem remeare coactæ fuere, forsan secunda tertiave circulatione aptiorem figuram adeptæ, vel jam diversis a prioribus filamentorum porulis impactæ, ipsis facile adhærescant; atque sic per successivam illam applicationem particularum totum nutritionis negotium absolvitur; ubi videmus quod, pro varia tum particularum nutritiarum tum meatuum figura & magnitudine, ab iisdem alimentis variæ corporis partes nutriri debeant,

beant, musculi, nervi, cutis, cerebrum, ossa: patet etiam ex eo solo quod particulæ tam arcte filamentis uniantur, replendo accuratissime alveos quibus intruduntur, eas filamenti consistentiam & naturam induere, adeo ut nullo hic glutino opus sit ad nexum firmandum, nullaque facultate electiva & assimilativa.

X I.

Notandum porro, quod dum radicibus filamentorum novæ particulæ apponuntur, hæ præcedentes ante se protrudant, donec ita quæ radici jam proximæ, certo temporis intervallo ad summitatem perveniant, ad quam ubi pervenerunt, ab aëris aliorumve corporum ambientium frictione abraduntur. Interim nihil impedit, quo minus etiam quædam particulæ ex lateribus filamentorum abripiantur, & quasi abluantur ab humore illo in interstitiis filamentorum decurrente, cum quo vel in sanguinem revertuntur, vel in auras avolant. Et hinc illa partium corporis continua dissipatio; qua non obstante, corpus crescit quamdiu plures particulæ radicibus filamentorum agglutinantur, quam a summitatibus eorundem divelluntur: id quod in adolescentia accidit, quando nimirum, ob mollem adhuc & laxam partium substantiam, particulæ nutritiæ facilius & copiosius poris infiguntur. Media ætate, tot præterpropter particulæ substituuntur, quot ab altera parte abripiuntur; unde corpus aliquandiu in æquali mole conservatur. Sed in senectute, quando pori densissime coarctati sunt, filamenta vix quicquam nutrimenti admittunt, dum interim extremitates aëri aliisve corporibus expositæ continuo atteruntur, humidumque quicquid est exsiccatur; quo pacto longe plus absumitur quam restauratur: hinc frequenter accidit quod valde decrepiti, non tam morbo, quam lento quodam marasmo emaciati, sine ullo sensu doloris extinguantur. Prævideo objectionem quam quis nobis facere posset, dicendo; Si filamenta in juventute sunt molliora quam in senectute, ut ita recipere possint particulas nutritritias majori copia, illa vice versa etiam tanto facilius posse atteri, per frictionem aëris corporumve aliorum. Ad hoc quamvis sufficeret respondisse, nihil omnino obstare quo minus illud quod apponitur longe plus sit quam quod demitur; hoc insuper responsi addo, quod experientia docet, duriora omnia ab attritu & frictione multo facilius consumi quam mollia. Ita videmus metalla, quo duriora sunt, eo melius expoliri posse; cujus ratio alia non est, quam quod in mollibus corporibus particulæ prominentes introrsum prompte cedere possint, & vi terenti se quasi subducere; quod cum in duris contingere non possit, necesse est ut omnes asperitates, superata resistentia exigua quam faciunt, a reliquo corpore avellantur.

XII.

Alia difficultas superest, quæ hanc Nutritionis explicationem premit, quæ vero facile diluitur: Eccam! Durum videbitur pluribus & tantum non impossibile, substantiam adeo solidam & compactam, ut sunt ossa, nutriri, dilatari, & extendi posse per solam insinuationem subtilissimi illius roris, qui ex massa sanguinea per tunicas arteriolarum transsudat: qui fiat quod valida ossium textura ingressuris particulis non resistat, vel saltem sui dilatationem non impediat. At qui ex mechanicis Legibus norunt ingentem vim cunei: imbecillitatem hujus objectionis facile percipiunt. Quælibet enim particula instar cunei se habet, quando vi admodum levi quidem adigitur, sed quæ applicata ad findendum longe majorem exercet nisum in latera. Quid igitur? si jam omnes particulas, quæ suas vires hoc modo exercent, collectim sumas, quid non valebunt? miraberisne, nullam ossium soliditatem vi dilatanti resistere posse? sane non magis quam quod, aëre existente pluvioso, tensæ testudinum fides crassiores etiam violenter rumpantur, quæ alias robustissimi viri manibus rupturam tentantis vires eluderent: tantum nempe valent solæ particulæ aquosæ, quæ ex aëre sese insinuando intra fidium fibrillas, easdemque dilatando, fides abbreviare affectant, quod cum fieri non possit, rupturam sequi necesse est. Huc refer etiam stupendam potentiam qua pollent musculi a spiritibus animalibus inflati; prout fusius explicui in Dissertatione mea *de Motu Musculorum*. Ut jam nihil dicam de ingenti pondere, quod funes humectati quasi sponte attollunt, cujus mirabilis effectus experimentum suo tempore curiosorum oculis proponam.

XIII.

His omnibus serio perpensis, liquido apparet, nullum in corpore animalis os tam durum esse, nullum tam compactum & solidum, quod non nutriatur, quodque adeo non mutetur & temporis intervallo partem sui amittat, novamque recuperet; atque hoc multo verius esse quoad reliquas corporis partes, quæ sunt minus solidæ. In simili opinione omnino fuit CARTESIUS. *Omnium corporum* (inquit sub init. tertiæ part. De Format. Fœt.) *quæ vitam habent, quæque alimento sustentantur, hoc est, animalium & plantarum* (harum enim nutritionis par ratio est) *partes in perpetua mutatione sunt; adeo ut inter illas quæ dicuntur fluidæ, ut sanguis, humores, spiritus, atque alteras quæ solidæ appellantur, ut ossa, caro, nervi, membranæ, nihil sit discriminis, nisi quod quælibet harum particula multo tardius moveatur quam illarum.* Quis quæso aliter sentire posset, cum quotidiana experientia ostendat, omnes machinas ex quantumvis durabili materia confectas longo usu corrumpi, deteri, & consumi; adeo ut nulla sit ratio, cur machina animalis, quæ artificialibus longe infirmior est, a detritionis & frictionis injuria immunis esset, non obstante quod sit in motu & agitatione perenni. Quinimo omnes Medici & Philosophi, quotquot de hac materia scripserunt, huc conspirant, & licet in explicandi modo nonnihil differant, uno tamen ore consentiunt, alimenta per nutritionem revera converti in ipsam corporis substantiam, adeoque particulas nutritias

tias per converſionem hanc componere, *proprie & ſtrictiſſime* loquendo, id quod vocamus oſſa, carnem, nervos, &c. Quis enim ſanæ mentis cum nonnullis delirantibus ſomniaret, nutrimenta non faceſſere in ipſam corporis partium ſubſtantiam, ſed ipſis tantum apponi ut accidentale quid, eum tantum in finem, ut deinde ab iis, per inſenſibilem transſpirationem reliquaſque naturæ conſuetas vias, iterum ſeparentur & ejiciantur? Hoc ſi eſſet, neſcio, an non natura, quæ alias nihil fruſtra facit, hic ſui ipſius maxime obliviſceretur, dum tanto molimine nutritionem inſtituiſſet ad cumulanda tantum excrementa, quibus parum adeo in corpore noſtro indigemus, ut ſatius longe eſſet a cibis omnino abſtinere, quam eos vitio naturæ corrumpere, inque pravos duntaxat & excrementitios humores commutare, qui nil niſi malum corpori minantur. Regeris, nutritionem forſan a natura inſtitutam eſſe, in adultis præſertim, ad refocillandas vires duntaxat, ſuggerendo nimirum novos ſpiritus animales in locum abſumtorum. Demus hunc unicum eſſe nutritionis finem; concedendum ergo eſt ſaltem, unam corporis partem, ſcilicet ſpiritus animales novam ſubſtantiam a nutritione acquirere: Fruſtra hic mihi negares, quod ſpiritus animales conſtituant partem corporis; conſtituunt enim, ſecundum omnes Medicos, unam ex maxime neceſſariis & eſſentialibus, quarum vulgo tria faciunt genera principalia, *continentium*, *contentarum* & *impetum facientium*, ad quorum tertium ſpiritus referunt, ad ſecundum ſanguinem cum reliquis partibus fluidis, & ad primum oſſa, muſculos, nervos, &c.

XIV.

Sed piget plus temporis terere in inepta adeo opinione refutanda. Agnoverunt veritatem & Veteres & Recentiores, quorum tamen omnium authoritas me minime moveret, niſi illa per ſe ſatis clara mihi patuiſſet, ut per hactenus dicta oſtendiſſe puto. Teſtimonium tamen tot tantorumque virorum mi-

hi

hi inſerviet pro ſtabiliendis quibuſdam conſequentiis, quas legitime ex communi ſententiam deducturus ſum, & evidenter adeo demonſtraturus, ut nemo non intelligat, quam frivole ab aliquibus impetantur, & quam injurii ſint non in me tantum, ſed in omnes illos inſignes viros, quos ſupra citavi, & quorum multo plures citare potuiſſem. Nullius enim criminis hac in parte inſimulari poſſum, quin ſimul illi omnes mecum rei fiant. Videant igitur Zelotes mei, quo ſua mihi nocendi libidine abripiantur, diſpiciant unde eluant injuriam inſontibus impactam.

XV.

Primum, quod ex iſta communi Medicorum & Philoſophorum ſententia de perennitate fluxionis corporis animalis, ſeu de perpetua ſubſtantiæ ejus deperditione, ſequitur, eſt hoc, quod corpus noſtrum, ut & omnium animalium, ne per unicam quidem horam poſſit manere idem *numero*: (idem autem numero eſt, cum idem ad ſeipſum refertur; vide de his prolixius diſſerentis Cl. HULSII nuperam Diſputationem *De eodem ſecundum numerum*:) mutatum enim eſt corpus poſt horam, non quoad accidentia tantum, ſed quoad ipſam ſubſtantiam: habuit quod non habet, & habet quod non habuit: quamvis illud quod intra horæ ſpatium abit & accedit modicum ſit, eſt tamen aliquid, quod pertinuit & quod pertinet ad ipſam ſubſtantiam corporis, fatentibus omnibus Philoſophis, Medicis & Anatomicis. At vero identitas numerica requirit ſubſtantiæ immutabilitatem quoad ſubjectum, quoad eſſentiam ſuam, licet quoad accidentia mutetur: ſic fructum ceræ rotundum ſi fiat cubicum, manet tamen eadem *numero* cera, quia eadem manet materia ceræ; ſed ſi aliquid demis aliudque addis tantillum ceræ, amplius non erit eadem *numero* cera, etiamſi rotunditatem ſuam ſervaret, nam non amplius eſt *idem ſibi ipſi*. Hinc patet, pro *identitate numerica* conſervanda in corpore requiri neceſſario conſervationem *quanti*, id eſt æqualis voluminis; unum idemque cor-

cor-

corpus, procul dubio, non poteſt majus minuſve ſpatium occupare uno tempore quam alio: peſſime igitur *quantum* corporis alicujus ſingularis & determinati inter ejus accidentia qualitatis refertur, cum quantitas, ſeu quæ hic intelligitur extenſio in longum, latum, & profundum, omnino ad ejus eſſentiam pertineat. Si tu mihi ducatum aureum commodares, eum vero bona parte circumciſum tibi reddere vellem, dicens, En tuum ducatum *numero* eundem, foresne contentus? Sed quidni eſſes, quando quidem *idem* redderem, quod dediſſes: Accipere etiamnum renuis? ego inſto, Accipe, aut deſine dicere, quod poſt circumciſionem priſtinus maneat ducatus. Non minus vice verſa ridiculum eſſet ſuſtinere, corpus quantacunque mole auctum, manere tamen idem *numero* corpus. Dicis hoc non eſſe ridiculum? eſto, me tibi commodaſſe vitulum, quem poſtea paſcuis tuis taurum factum repeterem; iniquum-ne cenſes petitum, cum tamen, ut ipſe fateris, nil petam niſi quod meum eſt, illum ſcilicet eundem *numero* vitulum meum. Sunt ne, quæſo, qui ejuſmodi habent ideam identitatis numericæ? vix putem, ſed pergo.

XVI.

Cum igitur ſubſtantia ipſa corporis continuo varietur, variatio autem unius horæ ſit inſenſibilis; luce profecto meridiana clarius eſt, quod illa tractu temporis fieri debeat notabilis; id quod quidem omnes Medici & Philoſophi haud ægre agnoverunt. Nemo autem, quod ſciam, extitit qui auſus fuerit mutationis illius menſuram determinare, aut quoquomodo definire quota pars corporis intra annum annoſve conſumatur, qualiſque ratio ſit inter illud quod remanſit, & inter illud quod de novo acceſſit. Euge! videamus, an in tanta caligine diluculum nobis ſuperſit? Proponamus nobis virum conſiſtentis ætatis, ſi vis tricenarium, optima valetudine utentem, robuſtum & athleticum; demus ipſi ordinariam ſtaturam corporis, cujus pondus ſit 150 librarum, & ſupponamus cum SANCTORIO hujus hominis

hominis quotidianum victum eſſe librarum octo. Compertum habuit præclarus ille SANCTORIUS, per multiplicem experientiam viginti & plurium annorum atque per obſervationes ſingulares hanc in rem unice inſtitutas, quod homo ſanus temperamenti bene conſtituti, quinquageſimam circiter partem convertat in corporis ſui ſubſtantiam: Sumta igitur quinquageſima parte octo librarum, provenient $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ pro nova ſubſtantia, quam athleta noſter ſingulis diebus corpori ſuo aſſimilat; id quod, anni ſpatio, efficit 58 lib. $12\frac{4}{5}$ ſemunc. hoc eſt, pluſquam trientem ponderis totius corporis: tantundem ergo etiam per continuam diſſipationem de ſubſtantia corporis deperdi debet, ſupponimus enim virum illum eſſe in conſiſtente ſtatu, in quo nimirum totius corporis pondus per longum tempus non mutatur. Jam vero, ſi deperditio eum in modum ſeſe haberet, ut vetuſtiſſima materia corporis primum abiret, deinde quæ proxime minus vetuſta eſt, & ſic ſucceſſive ad recentiſſimam uſque, eodem nempe ordine quo corpori fuit adſimilata; ſequeretur corpus non modo idem numero non manere, ſed ita omnino diſſipari, ut tandem ne minima quidem particula ejus ſuperſtes remaneat, alio jam plane corpore ejus locum occupante; & hoc pacto calculus foret leviſſimus: cum enim, anni ſpatio, 58 lib. $12\frac{4}{5}$ ſemunc. novæ materiæ corpori accedat, & tantundem de veteri pereat, quærendum tantum eſt ope Regulæ aureæ, quantum ergo temporis requireretur ad diſſipandas 150 libras, materiæ ſcilicet totius corporis; facta ſupputatione, reperietur quod diſſipatio totius corporis accideret intra biennium & $207\frac{1}{2}$ dies, adeo ut materia, qua noſtri viri corpus hoc ipſo momento componitur, poſt tres annos non tantum tota foret uſu detrita & conſumta, ſed ſimul etiam bona pars novæ quæ in locum ejus ſucceſſura eſſet.

XVII.

Et quidem hoc omnino ita futurum eſſe patet, ſi, ut dixi, in diſſipatione particularum idem temporis ordo a natura obſervavaretur qui in earundem appoſitione: a quo ſane credendo CARTESIUS & ROHAULTUS haud multum alieni videntur, quando uterque ſtatuit, quod infima particula radici filamenti appoſita, impellens & urgens ante ſe præcedentes, ad extremitatem pervenire & abradi non poſſit, niſi prius præcedentes omnes ſucceſſive fuerint avulſæ. At vero quoniam promiſcue ex veteribus & novis particulis ſimul, pro ratione utriuſque quantitatis, expelli debeant, quemadmodum liquet ex §. 11. fieri non poteſt ut unquam omnis materia, qua hoc momento componitur corpus, omnino in auras avolet, etiamſi mille annos viveret homo; ſemper enim remanebit aliquid de veteri materia commixtum cum recens advenienti, ſed magis & magis diminuitur, ita ut tandem minus evadat data quavis exigua quantitate. Quod ut eo melius intelligatur, ſimile dabo: Concipiamus vas aqua plenum continens 150 libras, unde hauriuntur $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ, & loco exhauſtæ æquæ reaffunduntur aliæ $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ vini puri; ſequenti die, ex mixto detrahuntur iterum $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ, & dein adjiciuntur $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ vini puri; tertio die, eodem modo ex mixto tolluntur $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ & tantundem vini puri additur; hocque ſingulis diebus per integrum annum iteratur, hauriendo nimirum dictam quantitatem ex mixto, & poſtea exhauſtum compenſando æquali quantitate vini puri, ita ut hoc pacto vas ſemper plenum maneat: quæritur ergo quantum aquæ & quantum vini, poſt finitum annum, in vaſe futurum ſit, ſeu quænam ſit proportio inter aquæ reſtantis quantitatem & vini quantitatem? Hoc problema jam pluſculum difficultatis in receſſu habet: ut enim vinum purum affunditur, ita e contrario aqua non pura detrahitur, ſed ſimul aliquid de vino affuſo; & quidem detracti copia utriuſque ſingulis vicibus mutatur; unde non, quemadmodum in priore hypotheſi, ex ſolo numero infuſionum utriuſque quantitas æſtimari poteſt: interim quantumvis ardua videatur hæc quæſtio, iis præſertim qui in Arithmeticis minus ſunt exercitati, pervenio tamen ad quæſiti cognitionem per viam haud valde ſalebroſam, quam

quam ecce! 150 libræ aquæ conficiunt 4800 ſemuncias, unde detractis $5\frac{3}{25}$ ſemunciis aquæ, & reaffuſa æquali quantitate vini puri, reſtabunt in vaſe $4794\frac{22}{25}$ ſemunciæ, aquæ permixtæ cum $5\frac{3}{25}$ ſemunciis vini; jam ſi ſecundo die ex hac mixturà detrahas iterum $5\frac{3}{25}$ ſemuncias, & tantundem vini puri adjicias, conſtabunt illæ $5\frac{3}{25}$ ſemunciæ detractæ non ex aqua pura, ſed tantillum vini ſecum habent, quod in eadem proportione erit ad aquam ut $5\frac{3}{25}$ ad $4794\frac{22}{25}$, ſuppono enim vinum uniformiter aquæ permixtum eſſe; adeoque ſecunda detractione $4794\frac{22}{25}$ ſemunciæ aquæ in eadem proportione diminuuntur, in qua diminuebantur 4800, id eſt, numerus aquæ reſiduæ ſemunciarum, poſt ſecundam detractionem, erit tertius proportionalis ad 4800 & $4794\frac{22}{25}$; pari modo tertio die facta ex mixto detractione $5\frac{3}{25}$ ſemunc. oſtenditur numerus aquæ reſiduæ ſemunciarum eſſe quartus proportionalis ad 4800 & $4794\frac{22}{25}$ & ſic porro: Ergo finito anno, ſcilicet poſt trecenteſimam ſexageſimam quintam detractionem, reſtantis aquæ pondus habebitur ſumendo trecenteſimam ſexageſimam ſextam proportionalem ad 4800 & $4794\frac{22}{25}$, ſeu elevando $4794\frac{22}{25}$ ad 365 poteſt. & quod provenit dividendo per 4800 elevatum ad 364 poteſtatem. Id quod immenſi adeo laboris eſſet, ut intra trimeſtre nemo calculum abſolveret; ſed ſuppetit compendium egregium ex Tabulis Logarithmorum, quod hoc eſt: Reducatur ratio numerorum 4800 & $4794\frac{22}{25}$ ad integros & minimos terminos, habebitur 1875 & 1873. Jam vero, ex doctrina Logarithmorum patet, quod Logarithmus trecenteſimi ſexageſimi ſexti proportionalis ad 1875 & 1873 ſit æqualis 365 log. 1873 minus 364 log. 1875; Ex Tabulis igitur ſumantur Logarithmi numerorum 1873 & 1875, qui ſunt 3.2725378 & 3.2730013, quorum ille multiplicetur per 365, hic vero per 364, id quod dabit 1194476297o, & 1191372473 2, quorum differentia eſt 3.1038238, quod quæratur in columna Logarithmorum, & reperietur ipſi reſpondere quam proxime numerus 1270, qui igitur erit trecenteſimus ſexageſimus ſextus continue proportionalis ad 1875 & 1873. Porro quoniam $1875 : 1873 = 4800 : 4794\frac{22}{25}$; erit ex ex proprietate continue proportionalium 1875 ad modo repertum 1270, ut 4800 ad trecentesimum sexagesimum sextum proportionalem ad 4800 & $4794\frac{22}{25}$, qui facta operatione Regulæ aureæ invenitur $3251\frac{1}{5}$, pro numero quæsito: Dico igitur quod post omnes illas mixti detractiones & vini puri infusiones singulis diebus factas, tandem elapso anno sint remansuræ in vase $3251\frac{1}{5}$ semunciæ aquæ, adeoque (complementum ad 4800,) id est, $1548\frac{4}{5}$ semunciæ vini.

XVIII.

Hisce ita computatis, applicatio ad præsens negotium facile perspicitur: aqua pura 150 librarum contenta in vase repræsentat materiam, qua corpus totidem librarum nostri hominis hoc momento componitur, $5\frac{3}{25}$ semunciæ vini puri quotidie infusi referunt novam materiam, quam singulis diebus in substantiam sui corporis convertit & quæ cum veteri commiscetur: reliqua per se sunt clara. Ergo hinc colligo, quod si quotidianum dispendium, seu dissipatio tam novæ quam veteris materiæ simul, fiat pro ratione utriusque quantitatis, erit materia vetus 150 librarum corporis istius hominis redacta ad $3251\frac{1}{5}$ semuncias, seu ad 101 lib. $19\frac{1}{5}$ semuncias. Residuum vero nempe $1548\frac{4}{5}$ semunc. seu 48 lib. $12\frac{4}{5}$ semunc. erit nova substantia, quæ cum illa veteri corpus humanum post anni finem componet. Jam vero, cum parum absit quin 48 lib. $12\frac{4}{5}$ semunc. faciant tertiam partem 150 librarum, dici potest, quod corpus humanum, quovis anno elapso, trientem fere amiserit suæ substantiæ quam initio illius habuerat, adeoque quod ipsi non multo plus duabus tertiis partibus restiterit substantiæ veteris. Proinde elapsis duobus annis, restabunt paulo plus quam duæ tertiæ illarum duarum tertiarum, id est quam quatuor nonæ partes: at cum etiam $\frac{1}{2}$ sit paulo plus quam $\frac{4}{9}$; poterimus affirmare quod intra biennium materia corporis humani quam proxime ad sui dimidium consumatur, & alterum dimidium nova restituatur. Porro duæ tertiæ partes dimidii, seu dimidium duarum

rum tertiarum, id est $\frac{1}{3}$, ostendet residuum veteris materiæ post lapsum triennii. Et sic deinceps pro quovis annuorum numero calculare licet, sumendo tantum duas tertias partes fractionis repertæ pro anno proxime præcedenti: quod in subsequentibus ad tantam tendit diminutionem, ut post decennium noster Lacertosus vixdum quinquagesimam adhuc partem sui corporis, quod nunc habet, sit retenturus, quamvis interim moles residui & adventitii collectim æquale semper pondus adæquet. Immediate quoque, ex methodo nostra per Logarithmos, calculus extendi posset ad quotvis annos; ita enim pariter deprehendi quinquagesimam tantum partem quam proxime remansuram esse, decem elapsis annis.

XIX.

Subticendum hic non est, quod in calculo præmisso supposuerimus ubique, omnes partes corporis humani æquabiliter & uniformiter dissipari, quanquam tamen certum sit dissipationem ossium lentiorem multo esse, quam partium fluidarum, ut sanguinis, spirituum animalium, &c. Considerandum vero damus, quod carnes, cæteræque partes molles, medium quasi teneant inter duras & fluidas, ita ut quanto promtius quam partes duræ, tanto vice versa lentius quam partes fluidæ consumantur: unde tuto & sine notabili errore fingere possumus, ac si totum corpus esset una continua caro; & sic calculo nostro sua iterum constabit probitas. Quod si quis tamen hæc curiosius rimari vellet, ponere posset certam proportionem inter pondera triplicis illius substantiæ totius corporis, osseæ nimirum, carneæ, & fluidæ, ut & inter celeritates dissipationis singularum; ex. gr. æstimemus sceletum seu totam ossium compagem 60 librarum, substantiam omnium carnium & partium mollium 70 lib., massam vero sanguinis & partium fluidarum 20 lib. ita enim plerique Anatomici censent; præterea ponamus fluidas duplo promtius dissipari quam molles, & molles decies promtius quam duras; id est, eodem temporis ſpatio, ſumtis tribus quantitatibus æqualibus fluidi, mollis, & duri, duplo plus conſumi ex illo quam iſto, & decies plus ex iſto quam ex hoc. Combinemus jam rationem mollium 20, 70, 60, ſeu 2, 7, 6, cum ratione celeritatum 20, 10, 1, unde proveniet ratio 40, 70, 6, ſeu 20, 35, 3; id quod oſtendit quod quotieſcunque ex maſſa fluida corporis humani diſſipantur 20 ſemunciæ, ex partibus carneis & mollibus diſſipabuntur 35, & ex compage oſſium 3 ſemunciæ. Illæ igitur $1548\frac{4}{5}$ ſemunciæ, quas ſupra invenimus pro univerſali diſſipatione annua totius corporis, dividendæ ſunt in tres portiones quæ ſe habeant ut 20, 35, 3: reperietur autem $534\frac{2}{29}$, $934\frac{18}{29}$, $80\frac{16}{145}$: atque ſic ſingulorum ſeparatim invenimus jacturam intra annum faciendam, nempe maſſa fluidorum deperdet $534\frac{2}{29}$ ſemunc. moles carnium $934\frac{18}{29}$ ſemunc. oſſium vero ſubſtantia $80\frac{16}{145}$ ſemunc. unde liquet carnes maximum, oſſa minimum pati detrimentum.

XX.

Finiamus hanc materiam ſpeculatione alia non injucunda, niſi forſan illis quibus omnia diſplicent, quæ ſana ratio ſuggerit. Vidimus ſupra virum noſtrum, cujus conſtitutionem corporis mire variabilem hactenus examinavimus, quotidie $5\frac{3}{25}$ ſemuncias in ſuæ machinæ reparationem acquirere: Quoniam vero nonnihil ætatis conſumit, ubi tanta quotidie quantitate alimentorum non veſcitur, quæ ſufficiens ſit ad ſuppetandas illas $5\frac{3}{25}$ ſemuncias; præſertim in tenera juventute & in ſenectute extrema; quanquam vero hæ duæ partes ætatis cum intermedia illa comparatæ exiguæ admodum ſint; reſcindamus tamen notabilem partem ab illis $5\frac{3}{25}$ ſemunciis, & ponamus illarum loco tantum 4 ſemuncias, quas ſingulis diebus in quavis ætate in ſubſtantiam ſui corporis commutet. Videamus jam quantum illud eſſet, quod per totam viam in ſui corporis ſubſtantiam commutat, ſi in unam molem colligeretur; ſeu quouſque excreſceret, ſi, præter excrementa tam ſen-

ſenſibilia quam inſenſibilia quotidie excernenda, de propria corporis ſubſtantia nihil amitteret: ſit autem vita hujus hominis 80 annorum; calculum obiter tantum attingam, quia adeo facilis eſt ut Arithmetices tyronem ne quidem morari poſſit; multiplicetur 365 numerus dierum anni, per 4 numerum ſemunciarum quotidie corporis ſubſtantiæ apponendarum, & proveniunt 1460 ſemunciæ, pro incremento corporis annuo, qui proinde numerus porro multiplicatus per 80 numerum annorum vitæ, dabit 116800 ſemuncias, ſeu (dividendo per 32,) 3650 libras, pro omni illa ſubſtantia quæ per totam vitam corpus compoſuit: ſed 3650 libræ continent 150 libras $24\frac{1}{3}$ vicibus, adeoque ſi ad 80^mum ſuæ ætatis annum nihil ſui corporis amiſiſſet, vel ſi amiſſum recolligere poſſet, tunc ad eam uſque corporis magnitudinem perveniret, quæ ordinariam ſuperaret pluſquam vicies quater. Atque ſic, ſi diutius vitam protraheret, tandem ponderoſam æquaret Coloſſi Rhodii molem; & verendum eſſet, ne ſi homines hoc artificium creſcendi haberent, more veterum Gigantum congeſtis ad ſidera montibus denuo regnum cœleſte affectarent; Videmus enim nonnullos ne ſic quidem abſtinere ab auſibus qui viribus ſuis non conveniunt, moliendo nimirum ſumma contentione multa iniqua, proximique ſui perniciem & interitum. Sed tu qui Titanico conatu montes niteris, & eniteris murem, audi, Audacule, quod mula apud PHÆDRUM muſcæ increpanti & minitanti reſpondet: *Verbis*, inquit, *non moveor tuis. Derideo qui ſine virtute vanas exercet minas.*

XXI.

Subſiſtendum hic eſſet, niſi, non tam materiæ affinitas, quam alia quædam gravis cauſa me invitaret ad mittendam tantiſper falcem in alienam meſſem. Philoſophica omnino hucuſque tractavi, ſed quid vetat quo minus in Theologicis etiam ſanam Philoſophiam adhibere ſatagamus, imo debeamus, quantum pote; ſed ita tamen ut deferamus ſemper venerationem de-

debitam myſteriis fidei. Non enim Deus fruſtra hominem ad ſui imaginem creavit, neque ut brutorum more, abdicata omni ratione, in incertum fluctuemus, vel machinæ noſtræ motu unice ad agendum rapiamur: quis inſaniæ fines adeo excedat, ut dicat, nobile hoc rationis talentum, quod Deus nobis dedit, tunc quam maxime ſub modium ſepeliendum eſſe, quando de ipſius Dei & verbi ejus cognitione agitur? Cave, cave, ne quondam a te rigide ſatis rationes exigantur tam male collocati tui talenti. Scio quam maxime, nec opus eſt ut moneam, plurima eſſe, quæ Deus in verbo ſuo nobis revelavit, captum noſtrum infinities ſuperantia, qualia ſunt momentoſiſſima fidei capita de S. S. Trinitate, de æterna generatione Filii, de ejus incarnatione, de *reſurrectione mortuorum*, &c. hæc ſane credidi, credo, & per gratiam Dei ſemper credam, quia ea revelare mihi dignatus eſt; quod autem credam, non eſt contra ſanam rationem, nec ſine ratione; eo ipſo enim quod Deus ſit ens ſumme perfectum, adeoque quod ſit infinitus, ſumme bonus, qui fallere & falli neſcit, cogor ad credendum quæcunque ab ore ejus infallibili promanant, licet mens humana, tanquam finita, ea quæ infinitam intelligentiam requirerent comprehendere & aſſequi non poſſit. Jam porro quia ex ratione clariſſime video, Deum nihil nec efficere nec dicere poſſe, quod cum ſua perfectione pugnet, vel minimam in ipſo imperfectionis notam arguat, ſane etiam in myſteriis fidei omnes contradictiones abeſſe debent; & hæc una eſt ex graviſſimis cauſis, cur primi noſtri Reformatores ex Babylone Romana tot contradictionibus ſcatente egreſſi fuerint: Ita ut impium vel mente captum potius conſiderem illum, qui ex myſterio revelatæ S. S. Trinitatis concludere vellet, quod in uno Deo ſint tres Dii, vel quod in una perſona ſint tres perſonæ; utrumque enim æque abſurdum eſt, quia manifeſtam contradictionem involvit. Quanquam igitur arcana fidei captum noſtrum longe ſuperent, ſanæ tamen menti non adverſantur: imo debemus illa uti ad ſuffocanda hujuſmodi periculoſa deliria, ſi quis tenebrio ea exinde abſurde adeo elicere conaretur; tantum abeſt ſanam rationem uſum habere nullum in explicandis & vindicandis revelatis veritatibus divinis.

XXII.

Ita etiam eadem divina authoritate perſuaſiſſimus ſum *de Reſurrectione carnis*, imo *hujus* carnis, quam homines in hac vita aliquando habuerunt; (addo *aliquando*, non enim ſemper eandem habent, ut ſupra ſatis ſuperque oſtendi:) & quidni hoc crederem, cum Deus id revelaverit? nullam hic video contradictionem; ſi enim Deus omnia corpora ex nihilo potuit creare, quanto magis jam creata iterum colligere, eorumque partes utcunque diſperſas unire poterit? At vero ſi male feriatus quiſpiam me adigere vellet ut crederem, quod ex ſua penu addit, nempe Deum, in communi reſurrectionis die, reſuſcitaturum omnem illam materiam *eandem numero*, (a cujuſmodi terminis barbaris S. Scriptura ubique abhorret) quæ olim corpus humanum per totam vitam ſucceſſive compoſuerat, (quam ſupra oſtendi Coloſſi molem adæquaturam) & tamen reſuſcitati corporis ſtaturam fore ordinariam; vel contra, ſi mihi perſuadere conaretur, embrionem vix ſpithamam æquantem & jam in utero materno mortuum, reſurrecturum cum corpore quod glorioſo corpori Chriſti ſit conforme, & tamen ei nullam novam ſubſtantiam acceſſuram; illi regerem, ut ineptas hujuſmodi contradictiones propinaret fungis & ſtipitibus, vel illis, qui credere aſſueti ſunt, totum corpus noſtri Salvatoris, quantum quantum eſt, comprehendi poſſe in exiguo hoſtiæ ſpatio. A nobis profecto ultra quod Sacra Scriptura credendum petit, exigi nihil debet: at nullo in loco dicit, Deum omnem præciſe, nec plus nec minus, corporis materiam quæ ipſi fuerat eſſentialis reſuſcitaturum; nam ſi hoc diceret, lubentiſſime etiam id crederem, quia ipſi non minus poſſibile eſſet reproducere omnem, quam partem; ſed tunc negarem homines reſurrecturos in vulgari ſtatura. En ergo hic paucis ſinceram meam confeſſionem de Reſurrectione; quam

quam omnis Christianus nunquam satis serio meditari potest; est enim nostra spes unica fruendi olim perfecta beatitudine & tranquillitate, post vitam hanc ærumnosam, insidiis, perturbationibus & persecutionibus plenam, quas, proh dolor! etiam ii qui pacem & concordiam suadere deberent, continuo nobis inferre non verentur.

XXIII.

Vides hinc, mi amice Lector, quo sensu accipiendum sit, quod ante annum circiter in publica Disputatione Philosophica, cum bihorium destinatum hisce exercitiis jam elapsum esset, nescio qua data occasione velut in transitu dixeram, *corpora non eadem numero resurrectura:* nimirum non quod plane nova corpora sint a Deo substituenda, multo minus creanda; sed quod eodem sensu non futura sint eadem *numero*, quo supra diximus, cum omnibus Philosophis & Medicis, in ipsa vita non eadem *numero* manere. Quamvis interim pro certo habeam, Deum homini redditurum corpus suum, illud nempe quod in hac vita habuit; quoniam tamen multa successiva habuit, næ! illud unum, quod ex omnibus illis homo habebit, non poterit esse idem numero cum reliquis, quæ non minus sua fuerunt, quam illud unum quod tunc iterum habebit: nisi quis forte, contra omnium communem Physicorum & Medicorum receptam opinionem, cavillari voluerit, illam materiam, quæ per nutritionem corpori assimilatur, eidem non esse essentialem; sed stamina vel primordia tantum quædam immutabilia facere ipsius corporis essentiam, a quibus corpus unum & idem semper dici debeat, licet interim alia & alia materia jugiter accedat & secedat. Verum enimvero præterquam quod, ex supradictis & ex vulgari de nutritione sententia, clarissime constet nihil in toto corpore animalis esse quod sit stabile & quod non nutriatur, adeoque ne ficta quidem illa stamina; responderi insuper potest, quod si omne illud, quod corpori accrescit, sit accidentale tantum, sane corpus ipsum sine istis accidentalibus erit imperceptibile: etenim in ipsa statim generatione hominis, corpusculum ejus, quod etiamnum ovulo materno includitur, crescere incipit & peregrinam materiam in sui substantiam convertere: Ergo, cum ab eo momento reliqua omnia sint accidentalia, sequitur corpus Goliathi essentiale, sepositis omnibus accidentalibus, tandem reduci ad invisibilis acori magnitudinem. Risum teneatis amici!

XXIV.

Atque hunc verborum meorum sensum fuisse, potuit colligi exinde, quod in ipso illo actu, iteratis vicibus, ad Opponentem meum dixerim, (sed quod accusatores mei alto silentio prætereunt caute) *tu non habes idem corpus quod ante annum habuisti;* quemadmodum omnes auditores testari possunt: adeo ut inutile fuisset, me, vel postea in alia Disputatione sub Celeb. BRAUNIO habita, vel hisce pagellis, ulterius explicare. Si ergo ulla heterodoxia hac in parte commissa est, sane non ego solus, sed tota Medicorum & Physicorum cohors excommunicanda est. Sed hoc male mihi cupientes exprobrant, quod dixerim, *per oculos quibus* JOBUS *Deum visurus est (Job.* XIX. 27.*)* non præcise eos intelligendos esse, quos tunc in miserando suo statu habuerat, sed similes; quid quæso hic impii? quid heterodoxi? annon plausibilius est, Deum JOBO redditurum eos saltem oculos, quos habuit in statu sanitatis? An hi non æque sunt JOBI *oculi* ac illi, intolerabilibus cruciatibus deplorandum in modum deformati, atque continuis lamentationibus tantum non penitus in lacrymas colliquati? notandum enim est, nullam partem corporis dissipationi magis esse obnoxiam quam oculos; imo Medici observarunt, quibusdam hominibus pertusis tunicis tumorem aqueum ex oculo totum effluxisse, aliumque in ejus locum brevi a natura substitutum fuisse; jam vero, cum iste humor aqueus unam ex principalibus constituat oculi partem, interim tamen utrumque, & elapsum, & restitutum, idem oculus capere non possit;

possit; utrum tu, qui similitudinem adeo abhorres, ipsi adjudicabis in resurrectionis die? ego sane hoc beneplacito divino relinquerem; quemcunque enim ipsi dederit, sive effusum, sive restitutum, sive alium quemvis, qui ex oculo illo insensibiliter emanavit, semper ipsi suum dederit; quia aliquando suus revera fuit. Confirmare hoc ulterius possem, ipsius JOBI, quem tam male adversus me allegant, testimonio; quando non uno in loco conqueritur de consumtione carnium suarum, *pelli meæ*, lamentatur haud procul a loco citato, *adhærent ossa mea*; recuperavit autem perfectam sanitatem cum reliquis corporis bonis, quibus Deus illum postea largius beavit, recuperavit ergo novam carnem, novam corporis substantiam, adeoque priori non eandem sed similem; & tamen dicere potuit JOBUS, *& in mea carne videbo Deum:* utraque enim sua erat, adeo ut nil referat, utram Deus aliquando resuscitet.

XXV.

Novum interim non est, ut ea quæ successive & insensibiliter secundum substantiam mutantur, vocentur tamen *eadem*, si modo eandem figuram & formam retineant; ita enim invaluit communis mos loquendi, qui plerumque originem habet ab imperita plebe a sensibus omnia deducente. Hinc Navis olim, qua THESEUS salvus ab expeditione redierat, quæque in æternam rei gestæ memoriam diu adeo asservabatur, ut suffecta toties nova materia, rejectis semper asseribus vetustate corruptis, vix una alterave tabula de veteribus remaneret, ejusdem tamen Navis THESEI nomen perpetuo gerebat. Ita quoque res omnes, quæ usu & tempore paulatim deteruntur, detritæ reparantur, eædem habentur; quamvis vix minimum pristinæ materiæ supersit; & sane eodem pacto se habet cum corpore hominis cæterorumque animalium, quod quidem, hoc sensu vulgari, sine omne difficultate semper *idem* dici potest; at si non cum vulgo, sed philosophice, sed physice, secundum

rei naturam loqui velimus, dicere omnino tenemur, quemadmodum illam THESEI Navem, ita & corpus humanum *idem numero* diversis temporibus non esse, sed simile tantum, seu idem specie. Quid hic sapit hæresin? dic! annon omnes Philosophi ita censent? quibus ergo fidiculis me ad rogum damnabis? quo colore, quin simul illi omnes, imo & Jurisconsulti, me eo comitari debeant? quippe & hi cum Philosophis sentiunt, corpus humanum, communi quidem sensu, dici manere idem, manere tamen idem tantum specie. Aperi modo, si placet, Corpus Juris, & lege *l.* 76. D. *de Judiciis*, ubi ALFENUS expressissimis verbis inquit: *cujus rei SPECIES eadem consistit, rem quoque eandem esse existimari*, &, quod notabile est, sententiam suam hoc ipso exemplo corporis humani aliisque multis confirmat, adeo ut secundum ipsum non maneat idem *numero*, sed idem specie, quod præterea Commentator repetit, & eodem simili de THESEI Nave apprime illustrat. Tot ergo mihi sunt socii idem jugum mecum trahentes, ut commune malum mihi sit solatio.

XXVI.

Pervenio tandem ad gravissimam accusationem, sed simul iniquissimam & ineptissimam. Cum in prædictæ illius Disputationis conflictu, inter alia quoque allegarem argumentum ab Anthropophagia (non rabida semper, sed aliquando coacta, cujus exempl. vid. Thren. IV. 10.) petitum; nescius tunc, vel oblitus saltem, (Deum testor!) illud quoque a Socinianis urgeri; protinus Socinianismi a nonnullis accusor: Quo vero jure, quave æquitate? & vel Logices tyroni dijudicandum relinquo, qui ad illorum ignominiam melius novit, in secunda figura syllogismorum non affirmative concludi. Syllogismus enim hic, *Sociniani adhibent hoc argumentum. A. ego adhibeo hoc argumentum. Ergo ego sum Socinianus*, non melior est quam alter hic, quem vulgo Ludimagistri in scholis faciunt ad tentandos suos adolescentes: *Asinus habet aures. A. tu habes aures. Ergo tu* *es asinus* : quod etiam tunc statim alio simili syllogismo futilitatem prioris manifestabam Auditoribus. Sed missis ejusmodi scholasticis quisquiliis, memini me dixisse, orthodoxum & hæreticum eodem argumento uti posse, illum bene, hunc male; illum ad veritatem adstruendam, hunc ad errorem tegendum; me enim aliter illud argumentum applicare quam Sociniani faciant. Nihil enim aliud per illud demonstrare contendo, quam quod non omnis substantia, quæ per totam vitam corpus alicujus hominis composuit, sit cum illo resurrectura; quia nimirum aliqua ejus pars, conversa per anthropophagiam in substantiam alterius hominis, cum utroque non possit resurgere; id quod mihi haud dubie facile largieris, siquidem corpus aliquod in duobus locis simul esse posse sine manifesta contradictione nemo sustinebit: possem hic allegare, ex abundanti, visibilem transformationem carnis unius hominis in carnem alterius, quemadmodum me legisse memini de quodam TALIACOTO Medico Italo, tantæ peritiæ ut homini, cui nasus erat amputatus, alium apponeret vivum, affabre exsectum ex lacerto alterius hominis, pretio ad dolorem & carnis suæ jacturam ferendam conducti. Hoc si verum, ut possibile est, fateberis puto mecum, frustum illud carnis ex uno exsectum & quasi transpropriatum alteri homini, non cum utroque homine resurrecturum. Credo interim (salva vi hujus argumenti,) ut id majusculis litteris repetam, CORPUS QUOD MECUM RESURGET, ERIT MEUM CORPUS, QUOD HABUI IN HAC VITA. Quid plura desideras, visne ut supra Scripturam sapiam? at si tantum didicisti ex Logica tua, ut scias propositiones affirmantes universales simpliciter converti non posse, dic mecum exinde non sequi: Ergo omnis materia, quæ in hac vita successive corpus meum composuit, mecum resurget; supra enim ostendi absurditatem ejus. Quid si huc traherem nonnullorum veterum Patrum, quos inter ipsius AUGUSTINI, sententiam, corpus resurrecturum sine humoribus & exsangue, cum tamen sanguis, cæteræque partes fluidæ, longe corporis sint essentialiores quam bra-

brachia vel crura: illosne hæreseos accusabis, quod identitatem numericam negaverint?

XXVII.

Jam vero Sociniani utuntur anthropophagiæ argumento, ut execrandum suum dogma specioso quodam mangonio obducant: credunt enim se per illud evincere posse, quod, in Resurrectione, nova corpora non tantum sint substituenda, sed a Deo nova creanda. An ego is sum qui hoc unquam statui? prodi, mi bellule, quisquis es, qui serena fronte tantam hæresin mihi torpenti scil. inurere conaris, & me id dixisse, vel scripsisse convince! Egone dicerem, novam novorum corporum creationem fore, qui tamen illo ipso die ter quaterve repetii: *corpora non erunt nova, sed illa ipsa, quorum materia jam ante sex fere millia annorum a conditore universi fuit creata;* quod vero iterum subdole dissimulant, utpote quod æque quadrat ad Socinianum fabricandum, quam thymbra ad lanceam. Porro si Socinianorum doctrinam penitius examinemus, videbimus illos omnino Resurrectionem mortuorum negare, quod pereleganter primus animadvertit Celeb. BRAUNIUS. Cum enim secundum illos anima sit pure materialis, quippe quam ridicule consistere volunt in certa quadam crasi seu temperamento corporis, ejusque humorum & spirituum, quo mortuo, vel annihilato, & ipsam animam mori vel annihilari necesse est; evidens utique est, si, ut delirant, novum corpus sit creandum, cum illo etiam creari novum temperamentum, novam crasin, adeoque novam animam, atque sic omnino novum hominem: homo ergo qui mortuus est non resurgit, sed alius creatur: per consequens negant omnino Sociniani Resurrectionem hominis.

XXVIII.

Decreveram apologiam conscribere, qua fusius ostensurus eram

eram, inter meam de Resurrectione sententiam, quam cum reliquis orthodoxis semper habui, & inter Socinianam, non minorem hiatum esse quam inter Lazarum & divitem Epulonem. Interim vero Cl. HULSIUS hac in parte me occupavit, & tanquam strenuus Theologus, multo melius quam ego potuissem, qui alius longe sum professionis, Socinianorum strophas ventilavit, discussit, explosit; quapropter Lectorem B. remitto ad lectionem ejus Disputationis nuper habitæ; reperiet ibi Socinianis larvam tam scite detractam, ut sine omni difficultate, immanem illam discrepantiam inter me & Socinianum animadversurus sit. Non igitur possum quin hic gratum meum animum Collegæ meo honoratissimo testificer, quod me tanto labore levarit, & orthodoxiam meam ab impactis stultitiis tam fortiter vindicarit. Nescio qui fiat & maximopere miror, quod aliqui sint, ut rumor fert, qui sinistram opinionem habent, quasi per *Protea lubricum & sophistam versipellem*, quos tam mascule constrinxit, præter Socinianos, etiam Philosophos & me in primis intellexerit: quod sane nullo modo in animum mihi inducere possum: præterquam enim quod Vir Cl., pro ingenuitate sua, bene agnoscat Mathematicos, quibus ego adscribi valde delector, nil nisi certitudinem, soliditatem & evidentiam amare, proscribentes longe omnem Protei & Sophistæ lubricitatem; insignis insuper ejus erga me humanitas non permittit, ut tale quid minimum de ipso suspicer; præsertim cum fere jam ante annum, in propriis suis ædibus, in quibus ipsum convenire honos mihi contigit, plenaria mea explicatione eorum quæ super Resurrectione paulo ante publice dixeram audita, me ab omni heterodoxia absolverit, imo etiam causam meam (id enim ab ipso rogaveram) apud alios, qui verba mea in alienum detorsissent sensum, fideliter se acturum promiserit; nihil in mea explicatione sibi displicere asserens, nisi quod terminum illum scholasticum *idem numero* non in vulgari sensu me accepisse existimaverat.

XXIX.

Spero liberam hanc meam defensionem & justissimam injustissime mihi imputatæ heterodoxiæ depulsionem piis omnibus & æquis judicibus ex asse satisfacturam, neminique displiciturum, nisi qui liberam vocem innocentis audire metuit. Silui diu, cogitabam enim cum CICERONE, quod *magna vis veritatis, quæ contra hominum ingenia, calliditatem, solertiam, contraque fictas omnium insidias facile se per se ipsam defendat.* Sed silentium & patientiam meam vicit nonnullorum insolentia, qui male obrutum resuscitant incendium, qui me nunquam visum accusant, & nunquam auditum condemnant. Bone Deus! qualis procedendi modus? danturne sub sole gentes tam barbaræ, quæ non curent tritum illud, *audi & alteram partem?* Alitne tales monstrorum ferax *Libya*, vel inculta *Americæ occiduæ* adjacens *California*? ubi candor? ubi Christiana charitas? posito me errasse, erranti in disputandi calore verbum excidisse, quod non apte quadret; itane statim sinistre interpretandum erat? itane protinus per plateas cursitandum; declamandum; rudi popello, cui alte manent vestigia impressa, persuadendum, me heterodoxum esse? tantane tragœdia adornanda & summa imis confundenda? Quod si id fecerunt ex fervente pietatis zelo, quod si ipsis propositum fuit, omnia heterodoxiæ semina evellendi & conculcandi; eja! quam bene factum est, quamque laudabiliter: habent pro hoc sat magnum pensum, si linguam & calamum suum acuere dignantur contra tot hæreticorum libros, quos ut totidem lupos ovile Christi infestantes impune in mundo circumvagari patiuntur. Sed aliæ viæ præsto sunt ad fratrem suum corrigendum, ovis enim aberrans recolligi debet non deglubi, hoc officium est boni pastoris. Observandæ sunt leges charitatis, quas CHRISTUS præscripsit Math. XVIII: 15, 22. Luc. XVII: 2, 4. Nec est quod dicas, peccatum publice commissum etiam publice corripi debere: qui enim amicorum privatis objurgationibus non auscultat, publicis profecto reprehensionibus & violenta castigatione multo minus emendabitur, quia semel infamis factus monita omnia susque deque habet, quem alias solus infamiæ metus a peccato liberaret. Has CHRISTI regulas sancte observarunt ipsius discipuli, qui fratres suos, non publice corripiendo, traducendo, proscindendo, lucrati sunt, nullumque, qui heterodoxiæ suspectus se publice explicare & purgare voluit, interruperunt & turbarunt, quin contra læti maxime a suspicione liberatum apertis ulnis excepissent. Erit forsan unus vel alter, cui hujusmodi admonitio, ut & superiora omnia, non usque quaque arridebunt, quem proin pruritus contra scribillandi facillime invadere poterit; scio enim multos esse, qui cum aliam inclarescendi viam non habeant, in quovis mustaceo laureolam quærunt: Sed quicquid hoc modo prodierit, sciat ejus Auctor, me non magis id curaturum quam si canis me allatrasset: semel enim innocentiam meam toti mundo exposuisse eamque per publicam Disputationem vindicasse, abunde mihi sufficit: reliquum temporis, quod mihi superest, melius collocasse putabo, si, ut hactenus, ita porro ex arte nobilissima quam profiteor aliquid novi utileque in lucem emisero, quam si miseras nasutulorum rixas sine fine retundendo oleum & operam perderem; est enim hujus seculi labes quædam & macula virtuti invidere: sed pulchrum est invidorum criminationes purgare morum innocentia, & suæ virtutis exemplo aliorum vitia etiam tacendo coarguere.

ANNEXA PRÆSIDIS.

I. Quicunque blaterat, per experimenta nupera a me solemniter in Choro Templi Academici, ubi reliqua exercitia Academica peragi solent, instituta, Templum Dei fuisse profanatum: is, aut mente captus est, aut suum in nos nostraque studia odium & malevolentiam turpiter prodit.

II. Quicunque improbat generositatem Illustr. & Præpotent. D. D. Ordinum summam pecuniæ, pro coëmendis Instrumentis experimentalibus suppeditantium, is indignus est qui Eorum beneficio fruatur, & habendus est pro imperitissimo Misomuso.

III. Potentia & sapientia Dei ex nulla re sensibilius patet, quam ex contemplatione operum ejus, & nemo ea melius contemplari potest quam Philosophus & Mathematicus, qui eorum naturam perscrutatur. Risu igitur sunt dignissimi, qui Philosophiam & Mathesim tantopere derident & exsibilant, tanquam nullam haberent utilitatem in rebus momentosis.

Excerpta

N°. LIV.

Excerpta ex Litteris Domini Joh. BERNOULLII, Groningæ 7 Augusti *1699 datis.*

ACCEPI duas plagulas priores libelli a Dn. FATIO DUILLERIO † editi, & non potui satis mirari modum scribendi, quo usus est. Queritur me non dignatum ipsi exemplar Problematis * transmittere; sed facilis responsio est, me nec teneri mittere talia ad singulos, nec divinasse ubi ille degat; & Dn. NEWTONO exemplaria misisse, non ut eum ad certamen provocarem, ut ipse DUILLERIUS rem interpretatur, sed ut aliis quoque res innotesceret. Dum me tanquam *minus modestum* accusat, videtur sub umbra modestiæ voluisse efficere, ut credamus, *se quoque, si qua invitatione dignus visus fuisset, litteris suas dudum solutiones fuisse exhibiturum;* quasi scilicet, si modo se applicare *dignatus* fuisset, mox mysterium fuisset detecturus. Interim nobis non dicit, quanto tempore frustra insudaverit, quantum laborem hanc in rem impenderit. Nempe antequam de libello *Fatiano* aliquid rescivissem, didici a Viro fide digno, qui nuper venit ex Anglia, Dn. DUILLERIUM, cum amico etiam in Anglia extraneo, ante duos circiter annos, magna contentione Problemati huic, cujus notitia mature ad ipsum pervenerat, sese accinxisse, & ambos certatim in eo laborasse. *Amicum* illum primum destitisse re infecta; & DUILLERIUM, postquam diu satis frustra insudasset, etiam abjecisse arma. Tandem tamen hunc, multo post, resumsisse Problema desperatum,

Acta Erudit. Lips. 1699. Nov pag. 513.

 eique

† *Nicolai* FATII DUILLERII R. S. S. *Lineæ brevissimi descensus Investigatio geometrica duplex, cui addita est Investigatio geometrica solidi rotundi, in quo minima fiat resistentia.* Lond. 4°.

* Supra N°. XXXIII.

eique acriter & tenaciter inhæſiſſe. An autem abſolviſſet, Relator ignorabat. Certe, ſi *modeſtia* impedit, quo minus quis ſua inventa publici juris faciat; nemo aliquid in publicam utilitatem edere poterit, niſi immodeſtus eſſe velit. Quod ſi vero nomen exprimere jactantiæ eſſe dicat, quidni & ipſe ſuas problematum difficiliorum *curvæ catenariæ, velariæ, iſochronæ, &c.* enodationes &c. methodoſque, quas diu poſſidere ſe dicit, publico bono promulgat, ſuppreſſo ſuo nomine? Quantum ad ipſas, quas edidit, ſolutiones, hujusmodi Problemata, noſtro more tractata, nullum, aut perbrevem calculum requiſiverunt, aut ex ſola contemplatione infinite parvorum, adhibita quadam dexteritate, fluxerunt. Calculi vero, quos inſtituit, admodum ſunt perplexi; quos ut examinarem, a me impetrare non potui. Problema *Curvæ ſolidi minimæ reſiſtentiæ* vocat magis arduæ diſquiſitionis, quam Problema *celerrimi deſcenſus*; ſed tale fuit DUILLERIO forte, qui genuinam ſolvendi methodum non habebat. Hoc enim Problema tantæ facilitatis deprehendo, ut ad ejus ſolutionem nullo prorſus calculo fuerit mihi opus; nam charta & calamo deſtitutus, & in lecto decumbens, ſolius imaginationis ope plenarie id ſolvi.

TAB. XIV. N°. LIV. *Fig.* I.

Eſto curva quæſita BFN (*Figur.* 1.), quæ ex revolutione ſua circa BM deſcribat ſolidum, in quod minima fiat reſiſtentia, ſi moveatur ſecundum plagam ipſius axis BM. Elementa applicatarum NM concipiantur diviſa in partes æquales NR, RP: ſint NL, LF duo elementa curvæ reſpondentia elementis NR, RP: producatur RL ad O, ita ut LO infinite parvum ſit reſpectu RL. Ductis NO, FO, erit, ex natura *Minimi*, reſiſtentia in Zonam ex converſione elementi curvæ NLF (quod ut duas lineolas rectas NL, LF conſidero,) factam æqualis reſiſtentiæ in Zonam ex converſione lineolarum NO, OF, adeoque reſiſtentia Zonæ NL — reſiſt. Zonæ NO = reſiſtentiæ Zonæ FO — reſiſt. Zonæ FL. Jam vero, aſſumta hypotheſi communi, qua & NEWTONUS utitur p. 325 ſeqq. * nimirum reſiſtentiam obliquam in NL eſſe ad reſiſtentiam directam in NR, ut NR^2 ad NL^2; exprimentur reſiſtentiæ elementorum curvæ, ex. gr. ipſius NL, per $NR^3 : NL^2$, adeoque reſiſtentia Zonæ NL per $MN \times NR^3 : NL^2$. Hinc igitur $MN \times NR^3 : NL^2 - MN \times NR^3 : NO^2 = MR \times RP^3 : FO^2 - MR \times RP^3 : FL^2$. Sunt autem OT, LS differentiæ ipſarum NO, NL, & LF, OF harum reſpectu incomparabiles, ideoque $MN \times NR^3 : NL^2 - MN \times NR^3 : NO^2$ tantumdem quod $2\, MN \times NR^3 \times TO : NO^3$; & $MR \times RP^3 : FO^2 - MR \times RP^3 : FL^2$ tantumdem quod $2\, MR \times RP^3 \times LS : FO^3$. Hoc igitur illi eſt æquale. Et diviſis per $2\, NR^3$ & $2\, RP^3$ (quæ per hyp. ſunt æqualia) provenit $MN \times TO : NO^3 = MR \times LS : FO^3$. Ut autem TO, LS, incomparabiles cum reliquis, eliminemus; obſervo quod, propter triangula ſimilia, $NO : RO = LO : TO$, adeoque $TO = RO \times LO : NO$. Et, ob eandem rationem, $LS = VF \times LO : FO$. Subſtitutis itaque hiſce valoribus loco TO & LS, & diviſis per communem LO, habebimus æquationem elementis conſtantem $MN \times RO : NO^4 = MR \times VF : FO^4$ affectam ſuis reſpective applicatis. Unde concludo curvam quæſitam BFN ejus eſſe naturæ, ut ſuppoſitis elementis applicatarum æqualibus, applicata quævis multiplicata per reſpondens elementum abſciſſæ, & diviſa per biquadratum elementi reſpondentis curvæ, producat quantitatem conſtanti æqualem. Quæ ergo conſtans, ſervata lege homogeneorum, ſumatur ad lubitum. Hinc ſi BM vocetur x; MN, y; NR, RP, &c. dy; RO, dx; NO $[\sqrt{(dx^2 + dy^2)}] = ds$; fiet $y\,dx : ds^4 =$ huic aſſumtæ quantitati conſtanti & homogeneæ $a : dy^3$; quæ reducta dat hanc æquationem differentialem primi gradus $y\,dy^3\, dx = a\,ds^4$, quæ curvæ quæſitæ naturam exprimit. Ubi notandum, proprietatem hujus curvæ a Dn. NEWTONO ſine analyſi & ſine demonſtratione traditam p. 327, ſi reſolvatur in æquationem, eandem omnino dare quam hic inveni. Miror profecto DUILLERIUM ſuam ſimpliciorem, hanc vero perplexiorem

* Phil. Natur. Princip. Mathem. Lib. II. Sect. VII. Prop. 34.

xiorem dicentem; cum tamen hæc illam exhibeat facile, non vero vice versa, nisi summa cum difficultate; quam ipse sane non facile superabit, id est, non facile a cognita proprietate radii osculantis ad proprietatem tangentis ascendet; cum tamen contra, nullo labore, ex proprietate tangentis proprietas radii osculantis innotescat.

Cum tamen maxima adhuc difficultas supersit, ut constructio ex proprietate, seu æquatione, jam inventa eliciatur; ecce eam satis elegantem, quæ tantum supponit Logarithmos: Nempe ad axem CE (*Figur.* 2.) describantur duæ curvæ, una algebraica DAH, altera transcendens IK; hac lege, ut posita abscissa CE, m; applicata illius EH sit $= m^3 : aa + 2m + aa : m$, applicata vero hujus EK sit $= 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$ [posito lm significare log. ipsius m,] erunt KE, EH, coordinatæ curvæ quæsitæ. Ad quam igitur construendam aliud nihil opus est, quam ut ad CM, applicatis parallelam, tanquam ad axem, ducatur & producatur perpendicularis KM in N, ita ut MN sit $=$ EH; puncta enim N erunt in curva quæsita BN, quæ nempe circa CN conversa producit solidum, in quod si moveatur secundum plagam axis CM, fluidum faciat resistentiam minimam. *Q. E. F.*

TAB. XIV. N°. LIV. Fig. 2.

Et curvæ † æquatio transcendens exponentialis erit, $m^{4a^3 la} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3x}$ Ubi la significat logarithmum ipsius a.

Ex P. S. *ejusdem.* Dum posteriores hasce lineas scribo, Tuas secundas litteras cum adjunctis schedis accipio. Percurrens obiter ultimam plagulam scripti DUILLERII reperio constructionem, quæ cum mea nonnihil affinitatis habere videtur. Sed eam examinare jam non licet; certus saltem sum, quod eam non invenisset ex sua solutione, nisi *Newtoniana* proprietate adjutus; quod patuisset, si methodum, qua ad eam pervenit, adjecisset. Cæterum vides quam brevi tempore, quam promte hæc omnia expedierim. Triduum enim est, quod tuas priores cum chartis *Fatianis*, quæ hisce meis ansam

* IK, Vid. Num. LVI. sub finem.

ansam dederunt, accepi. Miror vero operam ingentem quam FATIUS huic problemati impendit, non tantum describendo in ampliori, ut vocat, charta, sed & calculando integram Tabulam. Ut jam ipsi propria verba reddi possint. Nam *e vestigio in arenam descendi*, etsi *Problema* fuerit, *cui solvendo Autor opportunum otium nactus fuit, cui tractando diu insudavit, quod amavit & ardentiori studio prosecutus fuit, quod mihi hactenus ignotum in libro delituit. Id me interim paratum corripuit, quamvis ideo propria studia non deseruerim:* quod & ipse potuisset facere, si adeo, ut asserit ipse, methodos nostras in potestate habuisset.

N°. LV.

DOMINI MARCHIONIS HOSPITALII

Facilis & expedita Methodus inveniendi Solidi rotundi, in quod, secundum axem motum, minor fiat a reside fluido resistentia, quam in quodvis aliud ejusdem longitudinis & latitudinis.

DONO misit ad me nuper D. FATIO librum ab ipso *de murorum inclinatione, fructiferas ad arbores sustinendas, benigniorique Soli ostendendas aptissima*, Londini recens editum; ad calcem cujus reperi solutionem Problematis, de *Solido rotundo in quod minima fiat resistentia.* Hujus autem Solidi affectionem jamjam unam notaverat Doctissimus NEWTONIUS, pag. 327 * exquisiti Libri sui, *de Philosophiæ naturalis principiis Mathematicis*; cujus inveniendæ artificium cum illic celatum sit, nil ex ea lucis sperandum esse Clarissimus FATIO existimat. Ut ut sit, quam hic detexit, ejusdem Curvæ proprietas, viam eum a *Newtoniana* diversam inivisse liquido monstrat. Atque hinc id consilii mentem subiit; ut hanc sagacissimi NEWTONII viam exquirerem; nec spe (ut reor) vana, cum eandem, quam ille, fuerim affecutus affectionem Curvæ quæsitæ. Perfacilis autem Methodi, qua usus sum, eo lubentius copiam facio, quod ea solvendis aliis quamplurimis ejusmodi quæstionibus inservire possit. Sit igitur

Acta Erudit. Lips. 1699. Aug. pag. 354. *Memoires de l'Acad. Royale des Sciences de* Paris. 1999 pag. 107. Ed. de Paris. pag. 147. Ed. de Holl.

PROBLE-

* Lib. II. Sect. VII. Prop. 34. schol.

PROBLEMA.

TAB.XIV. Nº LV. Fig. 1. *Invenire Curvam DM, quæ circa axem AL rotata, deſcribat ſuperficiem Solidi, quod in fluido quieto motum ſecundum axis directionem ab L verſus A, minorem patiatur reſiſtentiam, quam Solidum quodvis aliud, per eadem puncta D & M pari ratione deſcriptum, inibique ſimillime motum.*

Fig. 2. SOLUTIO. Fingantur rectulæ MN, NO, quaſi latera duo Polygoni infiniti-lateri quod conſtituit Curvam quæſitam. Tum ordinatim applicatis MP, NQ, ad axem AL, huic parallela fiat GNF, cui ad angulos etiam rectos occurrant OG & MF, ut & recta DM lateri MN.

His ita paratis, conſtat rectulas MN & MF, ſecundum axis directionem motas ab L verſus A, iiſdem a fluido reſiſtentiæ viribus impediri, quæ actionis eſſent fluidi hujus, in eas quietas pari velocitate moti ab A verſus L. Atqui, hoc in caſu, vis ſeu niſus fluidi propellentis FM ab A verſus L, eſſet ad niſum ejuſdem prementis MN ab M verſus D, ut MD ad DP. Præterea, niſus hic ſecundum MD eſſet etiam ad ejuſdem fluidi niſum in MN ab A verſus L, ut MD ad DP. Ergo, ordinatim multiplicando, vis ſeu niſus fluidi propellentis FM, ab A verſus L, eſſet ad eum quo premit MN ad eaſdem partes, ut DM^2 ad DP^2; vel ut [ob ſimilia triangula DPM & MFN] MN^2 ad FM^2. Unde ſi fluidi, in rectas MN & MF impacti, velocitas exprimatur per conſtantem AB [a]; palam fit, totum fluidi niſum in planam & perpendiculariter obviam ſuperficiem, deſcriptam ab FM rotata circa AL, æquari producto ex hac ſuperficie per velocitatem a, ſeu (aſſumpta c in circuli peripheriam, cujus radius ſit a) producto $c \times MF \times MP$. Ergo ſi fiat MN^2 ad MF^2 ut $c \times MF \times MP$ ad $c \times MF^3 \times MP : MN^2$: quartus hic terminus vim etiam exprimet fluidi prementis ab A verſus L ſuperficiem, quam pariter deſcribit MN rotata circa AL; vel (quod eodem recidit) quantitas $c \times MF^3 \times MP : MN^2$ eam ipſam exhibebit reſiſtentiam, quam ſuperficies hæc, reipſa partes ad contrarias mota, patitur a reſide fluido. Eadem ratione conſtabit reſiſtentiam ſimilem, quam ab eodem fluido patitur ſuperficies orta ex rotato latere NO circa AL, indicari per $c \times OG^3 \times NQ : NO^2$.

Jam vero, fictis punctis M, O, & recta GF, quaſi poſitione datis in eodem plano cum axe AL; inquiro, quod debeat eſſe punctum N rectæ GF, in quo ſi conveniant rectulæ MN & ON, ſuperficies ex iiſdem circa AL rotatis orta minimam patiatur reſiſtentiam, ſive minorem, quam ſi concurſus earum fieret in alio quovis puncto rectæ GF.

Hoc

Hoc autem ut inveniatur punctum N; ſint conſtantes $MF = m$, $MP = f$, $OG = n$, $NQ = g$; & variabiles $FN = v$, $NG = t$: ac proinde etiam $MN^2 = mm + vv$ & $NO^2 = nn + tt$, ob triangula rectangula MFN & OGN. Ergo reſiſtentia [$c \times MF^3 \times MP : MN^2$] qua ſuperficiem, ortam ex rotato latere MN circa AL, impediri mox inventum eſt, erit $= cm^3 f : (mm + vv)$; Item & altera [$c \times OG^3 \times NQ : NO^2$] quam ſimiliter patitur ſuperficies, pari ratione orta ex latere NO, erit $= cn^3 g : (nn + tt)$. Unde, & ex Problematis conditionibus, ſequitur, quantitatem $cm^3 f : (mm + vv) + cn^3 g : (nn + tt)$ debere eſſe *minimum*; adeoque [juxta doctrinam Libri *Analyſeos infinite parvorum*] differentiam ejus æquandam eſſe zero: Quod ſi fiat, invenientur $2cm^3 fvdv : (mm + vv)^2 = - 2cn^3 gtdt : (nn + tt)^2$ atque hinc, cum ex FG [$v + t$], ob fixa puncta M & O conſtante, fluat $dv = - dt$, erit etiam $m^3 fv : (mm + vv)^2 = n^3 gt : (nn + tt)^2$ Ergo ducta $AB = a$, perpendiculari ad axem AL, cum BC & BH parallelis ad infiniti-lateri polygoni latera MN & NO; erit $4\,AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$, Ac etiam ſimiliter $4\,AB^2 \times AH : BH^3 = BH : NQ$. ſiquidem his ita poſitis, habebitur $m^3 fv : (mm + vv)^2 = a : 4 = n^3 gt : (nn + tt)^2$.

Conſtat igitur indolem, ſeu naturam hanc eſſe Curvæ quæſitæ DM, TAB.XIV. Nº. LV. Fig. 1.
ut aſſumta $AB = a$ in AK perpendiculari ad axem AL, ductaque BC parallela tangenti Curvam in quovis puncto M, ſemper & ubique $4\,AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$, applicatam hoc in reſpondenti puncto M.

Et vero cum hæc affectio Curvæ, tangentibus innixa tantum, primas duntaxat differentias in ejuſdem expreſſione requirat; nullatenus crediderim, quod afferit D. FATIO, hac ſimpliciorem eam eſſe quam ipſe protulit, quæ nimirum oſculi radios comprehendens, ſecundas differentias adhibet, ubi primæ nobis ſufficiunt. His adde, ex affectione mox inventa, Curvæ conſtructionem ultro fluere a ſola Hyperbolæ quadratura dependentem; quo ſane nil ſimplicius hac in quæſtione poteſt haberi. Sic autem Curva hæc conſtruitur.

Aſſumantur $AB = a$ in AK perpendiculari ad axem AL, & $AE = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$ in AL producta ad partes A; ſitque per E deſcripta Logarithmica FEN, cujus aſymptotus AK, & ſubtangens $= \frac{1}{4}a$; præterea, ponatur AC magnitudinis ad libitum, quam appello z, ducaturque CN, parallela ad AK, uſque ad occurſum cum Logarithmica in N. Tum ſi fiat $AK = aa : 4z + \frac{1}{2}z + z^3 : 4aa$, & $AP = zz : 4a + 3z^4 : 16a^3 - \frac{5}{48}a \pm CN$, nimirum $- CN$ cum eſt

$AC > AE$, & $+ CN$ cum est $AC < AE$; perficiaturque parallelogrammum KP; angulus ejus M, seu concursus laterum KM & PM, erit ad Curvam quæsitam DM.

Nam manente $AC = z$, si fiant insuper $AP = x$, & $PM = y$; affectio mox inventa Curvæ dabit AK seu PM $[y] = (a^4 + 2aazz + z^4) : 4aaz$, ac proinde etiam $dy = \frac{1}{2}dz + 3zzdz : 4aa - aadz : 4zz$. At siquidem (*hyp*) BC est parallela tangenti in M, est quoque $dx = zdy : a = zdz : 2a + 3z^3 dz : 4z - adz : 4z$, ejusque integralis AP $[x] = zz : 4a + 3z^4 : 16a^3 - \int(adz : 4z)$ + vel − constanti alicui quantitati $\frac{5}{48}a$; qua fit, ut evanescente CN, integrali nempe differentiæ $\mp adz : 4z$, evanescat & ipsa AP $[x]$. Ergo &c.

Hic porro notare juvat, Curvam DM axi AL propiorem esse nequire, quam in puncto D sui concursus cum AK. Ast ubi fit AC minor quam AE; alia Curvæ pars describitur DO concavitatis aversæ: adeo ut solidum quæsitum, concavum æque possit ac convexum esse; quod, inquam, notatu dignum videtur. Atque hinc, cum in istius constructione Curvæ Dn. FATIO assumat $AE = a$, & AC majorem semper quam AE; sequitur punctum, quod in Curva primum statuit, non omnium ejusdem axi proximum esse, solamque partem ejus convexam ab hoc *Authore* describi.

Cæterum monuisse sufficiat, spatii ADMP quadraturam, citra ullam ab Hyperbolæ quadratura dependentiam facile reperiri. Verum ab hac eadem quadratura pendent rectificatio Curvæ DM, dimensio superficiei ab ea circa axem rotata genitæ, & mensura resistentiæ qua superficies hæc impeditur a fluido. Quod autem hic de arcu DM, idem etiam sit dictum de altera Curvæ parte DO.

SCHOLIUM. Nunc quidem constat, Curvæ mox inventæ [quæ
TAB. XIV. N°. LV. *Fig.* 3. hic est ABCD] latera duo minima quæcunque AB, BC, convenientia in puncto B rectæ KN, parallelæ ad axem LP, circa eundem rotata describere superficiem minori objectam resistentiæ, quam si occurrerent ea sibi in alio quovis istius rectæ puncto. At non id æque patet de superficie orta ex simili rotatione trium quorumvis ejusdem Curvæ laterum AB, BC, CD, convenientium in punctis B, C, rectarum axi LP parallelarum NK, MH, fixis manentibus punctis extremis A & D; nimirum superficiem hanc impediri minus a fluido, quam si alibi his in rectis eadem latera convenirent. Ne autem quis, hac in re, vel minimum hæreat, en hujus etiam demonstrationem, quæ & superficiei ex quotvis ejusdem Curvæ lateribus simili ratione genitæ conveniat.

Iisdem igitur positis, quæ videntur in *fig.* 3, sint constantes $AK = m$,

$BH = n$, $DM = p$, $AP = f$, $BQ = g$, $CR = h$; & variabiles $BK = v$, $CH = t$, $CM = s$. Constat, ex superioribus, resistentias quæ fiunt in latuscula AB, BC, CD, exprimi per $cm^3 f : (mm + vv)$, $cn^3 g : (nn + tt)$, $cp^3 h : (pp + ss)$; adeo ut quantitas $cm^3 f : (mm + vv) + cn^3 g : (nn + tt) + cp^3 h : (pp + ss)$ debeat esse *minima*, ejusque differentia $2cm^3 fvdv : (mm + vv)^2 + 2cn^3 gtdt : (nn + tt)^2 + 2cp^3 hsds : (pp + ss)^2 = 0$. At, juxta Curvæ mox descriptæ affectionem superius inventam, est $\frac{1}{4}a = m^3 fv : (mm + vv)^2 = n^3 gt : (nn + tt)^2 = p^3 hs : (pp + ss)^2$. Ergo si harum singularum quantitatum loco, ponatur constans valor earum $\frac{1}{4}a$, fiet $cdv : 2a + cdt : 2a + cds : 2a = 0$, requisitum videlicet, ut superficies, orta ex rotatione circa axem trium ejusdem Curvæ laterum AB, BC, CD, minimam a fluido resistentiam patiatur. Atqui hoc ita esse liquet, ex eo quod NK $[v + t + s]$, ob fixa puncta A & D constans, differentias habeat $dv + dt + ds = 0$, sive $dv + dt = -ds$. Ergo &c.

Hæc utique demonstratio pari ratione convenit quatuor, quinque, imo quot volueris lateribus Curvæ mox descriptæ; atque ita tandem hæc ipsamet est quæ quæritur, hisque Problema cumulate solvitur.

N°. LVI.

JOHANNIS BERNOULLI

De Solido rotundo minimæ resistentiæ,

Addenda iis quæ de eadem materia habentur in Actis Anni *super. Mens.* Novembr.

LÆtus intellexi meam hujus Problematis solutionem non *Act. Erud.*
parum placuisse Eruditis, nec eos se melius *Fatianæ* solu- *Lips.* 1700.
tionis perplexitatem agnoscere potuisse, quam perspecta demum *Mai. pag.* 208.
meæ brevitate & simplicitate. Quandoquidem autem Constructionis analysis (quam tamen in Epistola expresseram) in excerptis fuerat omissa: eam rogatus lubentissime communicabo, & ne quid minimum ad plenariam hujus curvæ cognitionem desideretur, unum alterumve annotabo.

Perveneram ad æquationem differentialem primi gradus hanc $ydy^3\,dx = ads^4$, quam dixi curvæ quæſitæ naturam exprimere: Ut igitur ejuſdem Conſtructionis rationem detegam; ſubſtituatur valor ipſius ds, qui eſt $\surd(dx^2 + dy^2)$ ut habeatur $ydy^3\,dx = adx^4 + 2adx^2\,dy^2 + ady^4$; jam vero, cum indeterminatarum differentiæ ſint implicatæ; ad ſeparationem inſtituendam, tranſmutatione quadam opus eſt, quam ſæpe in intricatiſſimis caſibus feliciter adhibeo. Ponatur itaque $dx = mdy : a$ [id eſt, mdy diviſum per a; qua diviſionis expreſſione, exemplo Celeb. LEIBNITII, ad facilitandam Typothetæ operam, nunc iterum & in poſterum utar *], quo ſurrogato in æquatione, eaque poſtea diviſa per dy^4, prodibit æquatio algebraica hæc $aamy = m^4 + 2aamm + a^4$, adeoque $y = m^3 : aa + 2m + aa : m$ & $dy = 3mmdm : aa + 2dm - aadm : m^2$. Hinc $mdy : a$ ſeu $dx = 3m^3 dm : a^3 + 2mdm : a - adm : m$. Sumtis igitur horum integralibus, erit $x = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$. Sic igitur inventi ſunt valores coordinatarum x & y expreſſi per duas quantitates, unam tantum communem indeterminatam m involventes: Unde illa quam dedi in *Actis* reſultat con-
TAB. XIV. N°. LIV. *Fig.* 2. ſtructio. Notandum autem (quamvis ad rem ipſam parum faciat,) curvam IK male eſſe repræſentatam; ea enim cum recta CE non concurrit, ſed eodem fere modo quo curva HAD poſtquam aliquouſque ad CE appropinquavit, ab ea iterum recedit in infinitum, & magis magiſque accedit rectæ CM, quæ proinde communis eſt aſymtotos curvarum IK & DAH, hujus ad dextram, illius ad ſiniſtram communis axis CE. Animadverſione dignum eſt, duas illas curvas, licet diverſiſſimæ naturæ, unam quippe algebraicam, alteram tranſcendentem, ita tamen inter ſe conſpirare, ut ad axem ſuum communem CE accedere ſimul deſinant, vel ab eo recedere ſimul incipiant, id eſt, ut utriuſque curvæ punctum axi CE proximum æqualiter a recta CM diſtet; ſumta enim $CE = a\surd\frac{1}{3}$, erunt & EK, & EH om-

nium

* Eam ſemper in hac Editione, quia jam uſu invaluit, adhibuimus.

nium ſuarum reſpective applicatarum minimæ & quidem minima EH erit $= \frac{16}{9} a\surd 3$; & (poſito a pro unitate, ita ut $la = 0$) erit minima $EK = \frac{5}{12}a - l(a\surd\frac{1}{3})$, quæ quantitas eſt affirmans, quia logarithmus numeri unitate minoris, $l(a\surd\frac{1}{3})$ eſt quantitas negativa, quæ per conſequens negata vertitur in affirmantem.

Hic ſimultaneus curvarum acceſſus proximus, rationem jam manifeſtat, cur quæ ex illis conſtruitur curva ſolidi rotundi minimæ reſiſtentiæ BN, duas habeat partes convexitates ſibi mutuo obvertentes (quo fere modo ab Aſtronomis ſignum arietis vulgo pingitur) & deſinentes in acumen, quod punctum *reverſionis* appellare ſoleo (*point de rebrouſſement*) diſtans a CM intervallo quod eſt æquale minimæ applicatæ EH. Quam curvæ reverſionem eleganter etiam obſervatam video ab Illuſtriſſimo *Marchione* HOSPITALIO in *Actis ejuſdem Anni menſis Auguſti*, quanquam ex ejus conſtruendi modo non tam manifeſte ea appareat. Interim noſtræ ſolutiones mirifice conſentiunt; nec aliud in conſtruendi modo diſcrimen eſt, quam quod Illuſtriſſimus Vir ſyntheſi magis uſus fuerit quam analyſi; ut pote in animo habens proprietatem curvæ ab Acutiſſimo NEWTONO jam traditam, ad quam collineavit, ut oſtenderet ſuam æquationem (vid. pag. 313) $m^3 fv : (mm + vv)^2 = n^3 gt : (nn + tt)^2$, reſolvi poſſe in proportionem *Newtonianam* $4\,AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$; loco quod ego mere analytice, ſine ullius proprietatis ab alio jam præinventæ auxilio, ad quæſitum pervenerim.

Cæterum coordinatæ ab Illuſtr. Viro aſſignatæ $aa : 4z + \frac{1}{2}z + z^3 : 4aa$ & $z^2 : 4a + 3z^4 : 16a^3 - 5a : 48 \pm CN$ ſunt ſimillimæ meis, inverſo terminorum ordine $m^3 : aa + 2m + aa : m$ & $3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$; niſi quod quantitatem conſtantem, brevitatis gratia, neglexerim; quippe quæ in ipſa curva nihil mutat præter ſitum: ſic ut ſecundum axem ſuum retrorſum antrorſumve magis promoveatur, ea ipſa quantitate conſtante & arbitraria, quæ affirmative vel ne-

 gati-

gative ; pro lubitu , aſſumi poteſt : præterea quod mihi in expreſſione coordinatarum eſt a & m, id Illuſtr. *Marchioni* eſt $\frac{1}{4}a$ & $\frac{1}{4}z$: hoc exinde venit , quod NEWTONI proportionem $4AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$ ſecutus, poſuerit $m^3 fv : (mm + vv)^2 = \frac{1}{4}a$, cum tamen ſi feciſſet $AB^2 \times AC : BC^3 = BC : MP$ (quæ proportio non minus convenit curvæ , quam illa cujus primus antecedens hujus primi quadruplus eſt, imo alius quivis multiplus æque ſatisfaceret;) potuiſſet ponere ſimpliciter $m^3 fv : (mm + vv)^2 = a$; quod ſi fuiſſet factum, ad meas omnino perventum fuiſſet expreſſiones ; quæ, quod careant iſta inutili ſubquadruplicitate, quodam modo ſimpliciores ſunt : profecto neſcio cur Vir Illuſtr. vel ante eum ingenioſiſſimus NEWTONUS ſumendo 4 AB^2 potius quam ſimplex AB^2 voluerint entia multiplicare præter neceſſitatem.

Quod porro attinet ad figuram curvæ, elegantiſſime eam
TAB. XIV. N°. LV. *Fig.* 1. delineatam dedit Illuſtr. HOSPITALIUS, (vid. ejus *Fig.* 1) ſciendum tamen eſt, utramque curvæ partem DM & DO, ab utroque axe AL & AK magis ac magis removeri diſtantia quavis data majori, quod notari velim, ne quis putet partem DO, prout in Schemate exhibetur, in infinitum continuatam non niſi ad certum intervallum ab AK diſcedere.

Augulus quem curva DM, DO, in puncto reverſionis D facit cum axe conjugato AK, triens eſt anguli recti, adeoque complementum, ſeu duo trientes recti, erit inclinatio curvæ maxima & minima ad axem AL; nimirum maxima partis DM, minima vero partis DO : quod alicujus uſus eſſe poteſt in re nautica; quod ſi enim navis conſtrueretur ſecundum curvaturam DM, patet utique ambo proræ latera cum axe navis non poſſe majorem angulum capere quam ad ſummum 60 grad. Si vel tantillo major eſſet, jam non facillime aquam ſulcaret, inter omnes naves quæ ejuſdem eſſent amplitudinis & longitudinis. Monendum hic eſt non tantum convexam ſuperficiem a curvæ parte DM, vel concavam a parte DO, rotatis circa axem AL deſcriptas, minimam pati reſiſtentiam a fluido; ſed etiam perinde eſt ſi illius

illius ſumatur ſuperficies concava & hujus convexa. Illæ enim ſuperficies, ſive a P verſus A, ſive ab A verſus P moveantur, fluidum utrovis modo ſimiliter & æquali vi illis reſiſtit.

Veriſſimum eſſe deprehendo, quod Generoſus *Marchio* dicit, ſpatii ADMP quadraturam, citra ullam ab Hyperbolæ quadratura dependentiam facile reperiri: At quod idem etiam affirmet de ſolidi, ab hoc ipſo ſpatio circa axem rotato deſcripti, *cubatura*, ſeu potius *cylindratura* . non nihil feſtinantius pronunciavit; ſi revidere dignetur, comperiet eam citra Hyperbolæ quadraturam haberi non poſſe.

In excerptis litterarum mearum in fine † habentur hæc verba: † pag. 312.
Et curvæ æquatio tranſcendens exponentialis erit , *&c.* Supple , *Et curvæ IK* &c. Modum perveniendi ad hanc æquationem exponentialem, ſeu ut mihi etiam dicitur *percurrentem* , pariter rogatus hic pando : Quoniam EK, ſeu CM, ſeu TAB. XIV. N°. LIV. Fig. 2.
$x = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$; multiplicata per $4a^3$, & deinde reducta, habebitur $4a^3 lm = 3m^4 + 4aamm - 4a^3 x$; cujus membrum prius $4a^3 lm$ eſt quantitas logarithmica; alterum vero cum ſit quantitas ordinaria, ut pariter logarithmicæ formam induat, multiplico totam æquationem per logarithmum aliquem conſtantem, qui uniformatis litterarum gratia, ſit la [jam vero pro unitate alia quævis quam a ſumenda eſt, alias foret $la = 0$] erit itaque $4a^3\, la . lm = (3m^4 + 4aamm - 4a^3 x)\, la$; at cum æqualium logarithmorum æquales ſint numeri, ſumtis hujus æquationis quantitatibus numeralibus, ſecundum geneſin & regulas logarithmorum, proveniet hæc æquatio percurrens ſeu exponentialis $m^{4a^3 la} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3 x}$ prout in *Actis* habetur. Si jam pro la, quæ eſt quantitas determinata, ponas b, æquatio libera erit a logarithmis, & referri debet in cenſum pure percurrentium, de quibus fuſius egi in *Actis An.* 1697, *m. Martio.* *

Occaſione id ferente, ingratum non erit, ſi hic oſtendero,

* Supra N°. XXXVI.

to, quam latum usum habeat illa transmutandi methodus, qua statim usus sum pro constructione æquationis differentialis $ydy^3dx = ads^4$, seu $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$; ne quis itaque arbitretur, eam pro hoc speciali exemplo tantum succedere, neve temere me dixisse, in intricatioribus feliciter eam posse adhiberi: Dico, omnis æquatio differentialis, in qua alterutra indeterminatarum deficit, hac methodo construibilis est; nec refert qualicunque modo differentiales dx, dy, & altera indeterminata x, vel y, earumque potestates, quot & quotæcunque inter se fuerint implicatæ: quo sane nescio, an unquam generalius quid fuerit traditum, in hoc abstruso differentialium implicatarum separationis negotio, quod unicum est adhuc, cujus perfectio pro universali hujusmodi æquationum constructione desideratur. Methodus autem, de qua sermo, ita habet: si ex. gr. deficiat x, ponatur $dx = mdy : a$, quo substituto in æquatione proposita loco dy, manifestum est, æquationem inde ortam divisibilem fore per aliquam potestatem ipsius dy, ita ut, præter quantitates ordinarias, in æquatione nihil habeatur; unde inter m & y proveniet æquatio pure algebraica, exprimens naturam alicujus curvæ pariter algebraicæ, cujus abscissæ y, & spatia curvæ istis respondentia [$\int mdy$] divisa per constantem a, dabunt coordinatas curvæ quæsitæ pro constructione æquationis differentialis propositæ. Ut rem exemplo illustrem, esto hæc æquatio $y^5dx^5 + aaydx^4dy = a^3dy^5$, quæritur constructio curvæ æquationi respondentis: Fiat $dx = mdy : a$, quod surrogetur in æquatione, & habebitur $y^5m^5dy^5 : a^5 + ym^4dy^5 : aa = a^3dy^5$; & divisa per $dy^5 : a^5$ proveniet æquatio algebraica $y^5m^5 + a^3ym^4 = a^8$.

TAB. XIV. N°. LIV. *Fig.* 2. Facta itaque huic æquationi convenienter curva algebraica IK in qua CM, y; MK, m; fiat MN æqualis spatio CMKI diviso per constantem a, vel simpliciter fiat MN ubique in ratione spatii CMKI, dico punctum N fore in curva optata. Alias, quæ mihi sunt, regulas pro perfectione methodi tangentium inversæ, cum sint extra institutum, hic omitto, partim jam alibi datas, partim forte adhuc dandas.

DEMON-

N°. LVII.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS LEIBNITIANI

Vires vivas esse in duplicata ratione celeritatum.

Concipe corpus C moveri oblique in elastrum L, velocitate CL, ut 2, angulo inclinationis CLP existente 30 grad. cujus nempe sinus est semissis radii CL. Suppono autem eam esse resistentiam in elastro, ut ad illud tendendum requiratur præcise unus velocitatis gradus in illo corpore, si perpendiculariter impingeret. Quid ergo jam fiet post incursionem obliquam corporis in elastrum L? Quoniam motus per CL componitur, ut notum est, ex duobus collateralibus per CP, & PL; & cum CP, secundum quam corpus directe impingit in elastrum L, exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, consumetur hic motus per CP, tenso elastro, [perinde enim esset, ac si Corpus C, celeritate CP, perpendiculariter incurreret in elastrum, quod, per hypothesin, eam celeritatem destruere potest] remanente corporis celeritate & directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM sit $= PM = \sqrt{3}$ [ponitur enim $CL = 2$], & applicato in M alio simili elastro faciente cum LM angulum LMQ, cujus sinus $LQ = CP = 1$; per eandem rationem manifestum est corpus C, post tensionem elastri L, tensurum esse elastrum M, amisso motu per LQ, & servato motu per QM. Prolongata itaque QM ad N, ut fiat $MN = QM = \sqrt{2}$; ibique substituto elastro simili tertio constituente cum MN angulum MNR semi-rectum, quo scilicet MR iterum sit $= CP = 1$; patet similiter, motum per MR totum impendi in tensionem elastri N, corpore interim moveri pergente directione & celeritate $RN = 1$. Denique si hac celeritate residua impingat perpendiculariter in elastrum O, huic flectendo totam suam vim reliquam dabit: ipsum

WOLF. *Elementa Matheseos universæ* El. Mechanicæ. cap. VII. §. 327. Tom. II. pag. 62. Edit. Genev.

ipſum itaque corpus ad quietem redigetur. Hiſce ita præmiſſis, patet nunc potentiam corporis C tantam fuiſſe, ut per ſe ſolum tendere poſſit præciſe quatuor elaſtra, ad quæ ſingula ſeorſim tendenda requiritur dimidia velocitas corporis æqualis ipſi C; adeoque, cum effectus illius quadruplo major ſit, quam effectus hujus, evidens eſt quoque vim corporis, velocitate 2 grad., quadruplam eſſe vis corporis ejuſdem vel æqualis, velocitate 1 gr. Haud abſimili modo demonſtrarem corpus C, velocitate 3 gr. tendere poſſe 9 elaſtra, ad quorum unum tendendum, unus velocitatis gradus in eo corpore requiritur, & tandem, in genere, numerum elaſtrorum tenſorum ſemper eſſe quadratum numeri graduum velocitatis. Unde igitur ſequetur, Vires corporum æqualium eſſe in duplicata ratione celeritatum. *Q. E. D.*

Videatur Tom. II. Nus. CXXXV.

N°. LVIII.

CYCLOIDIS PRIMARIÆ

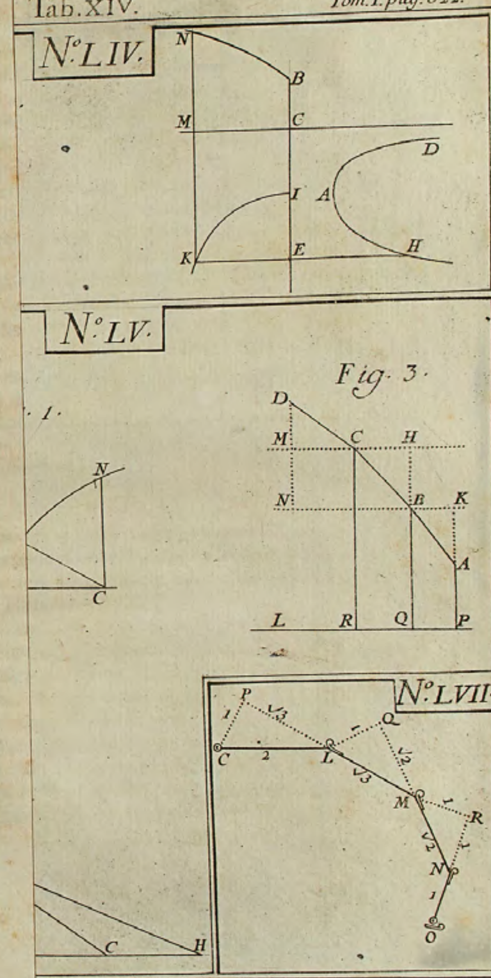
Segmenta innumera Quadraturam recipientia; aliorumque ejuſdem ſpatiorum quadrabilium determinatio: poſt varias illius fortunas nunc primum detecta

a Joh. BERNOULLIO.

Acta Erud. Lipſ. 1699. Jul. pag. 316. *Memoires de l'Acad. des Sciences de Paris.* 1699. p. 134. Edit. de Paris. p. 180. Edit. de Holl.

PRæciſe centum ſunt anni, (anno nimirum 1599, uti Author eſt TORRICELLIUS,) quod inſignis hæc Curva GALILÆO primum fuerit conſiderata, & ab eo *Cycloidis* nomen acceptum in hunc uſque diem geſſerit. Poſtea MERSENNUS, cui primam inventionem vindicant Galli, hoc velut pomum Eridos in turbam projecit; cui certatim, & ſumma animi contentione, ſe accinxere præſtantiſſimi illius temporis Geometræ, TORRICELLIUS, LALOVERA, ROBERVALLIUS, CARTESIUS, alii: unde, ut fieri ſolet, tot accenſæ

Tab. XIV. *Tom. I. pag.* 322.

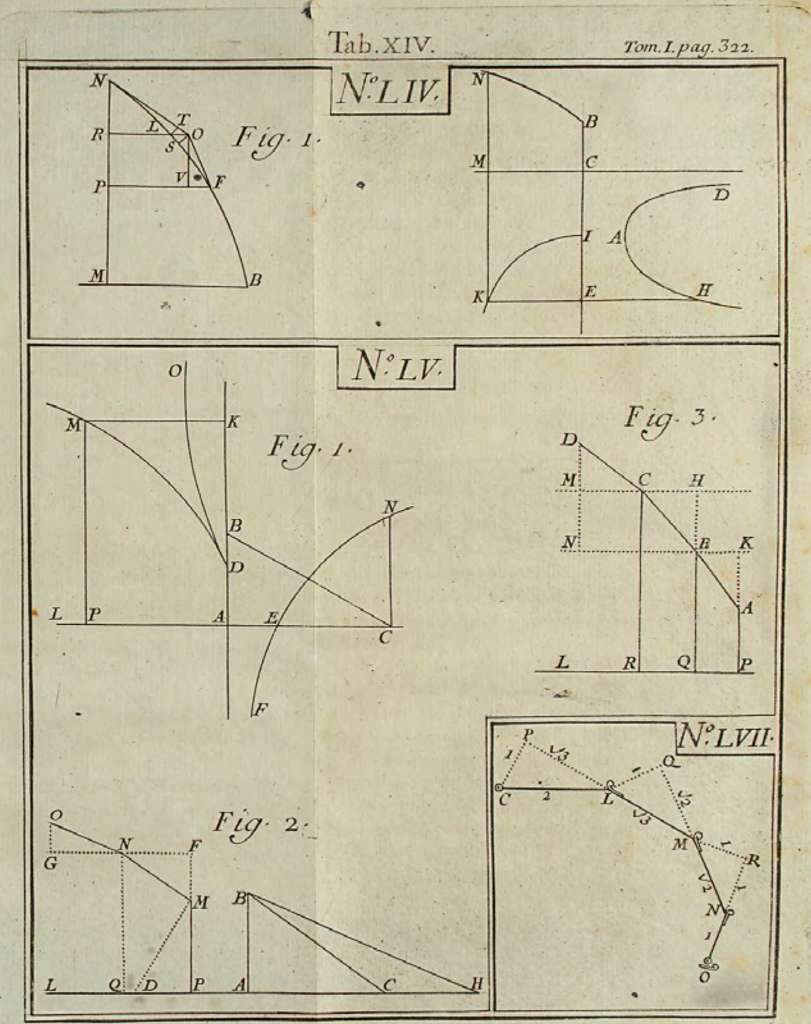


tur. Hisce ita præ-
C tantam fuisse, ut
uor elastra, ad quæ
dia velocitas corporis
illius quadruplo ma-
quoque vim corpo-
vis corporis ejusdem
mili modo demonstra-
posse 9 elastra, ad
tis gradus in eo cor-
numerum elastrorum
graduum velocitatis.
qualium esse in dupli-

MARIÆ

a; aliorumque ejusdem
: post varias
detecta
O.

nirum 1599, uti Au-
d insignis hæc Curva
& ab eo *Cycloidis* no-
. Postea MERSEN-
Galli, hoc velut po-
atim, & summa ani-
illius temporis Geo-
RA, ROBERVAL-
eri solet, tot accen-
sæ



N°. I

ſæ ſunt
VALL
primi i
partem
proſcid
idque r
ne verſa
tis, ex
ria ad T
Mathem
continen
Unum t
logizat;
preſſiſſe.
Hæc
longe ac
rumdam
ſeu PA
fabulam
tum lega
de Cyclo
ſcripſit.
pra Mat
ingenii c
ducere r
træ non
intacta i
Hinc
menſio
ſolidorum
centrorum
& indag
da, quæ
rum, de

ſæ ſunt lites, TORRICELLIUM inter præſertim & ROBERVALLIUM, qui præ aliis primarum Cycloidis proprietatum primi inventoris titulum ambientes, & ægre alter alterum in partem honoris admittentes, miſerum in modum ſe mutuo proſciderunt, atque nefandi, proh pudor! plagii inſimularunt; idque non minori vehementia, quam ſi pro patria in diſcrimine verſante militaſſent: ut videre eſt ex eriſticis hinc inde editis, exque prælonga ROBERVALLII Epiſtola expoſtulatoria ad TORRICELLIUM, prout illa habetur in *Operibus Mathematicis & Phyſicis*, *Pariſiis*, 1693 impreſſis; in quibus continentur inventa *Robervalliana*, nonnulla ſatis ingenioſa. Unum tamen alterumve deprehendi, ubi Author fœde paralogizat; ut mirer Editorem errores non animadvertiſſe & ſuppreſſiſſe.

Hæc vero velitatio viam præparabat, & quaſi præludebat longe acriori pugnæ non diu poſt ſubortæ, ex occaſione quorumdam problematum ſuper Cycloide, a DETTONVILIO, ſeu PASCALIO, cum annexo præmio propoſitorum; cujus fabulam toto cœlo notiſſimam ſi quis ignorat, illius Tractatum legat, ut & WALLISII *Præfationem ad Tractatum* ſuum *de Cycloide*, & quæ ad HUGENIUM, hac de re, prolixe ſcripſit. Ex eo tempore nullus extitit, qui vel tantillum ſupra Mathematicorum vulgus ſibi ſapere viſus eſt, qui ad hanc ingenii cotem ſuas vires acuere, atque novi quid exinde producere non tentaverit: interim primi quoque ordinis Geometræ non minus aſſidui ſemper fuere, in perſcrutandis quæ alii intacta imperviaque reliquiſſent.

Hinc, præter illa vulgaria dudum cognita, qualia ſunt dimenſio lineæ Cycloidis, comparatio ſpatii cum circulo, & ſolidorum variorum ex converſione ortorum cum cylindris, centrorum gravitatis determinatio, &c. alia majoris momenti & indaginis abſtruſioris poſſidemus; inter quæ merito referenda, quæ incomparabilis HUGENIUS de identitate evolutarum, deque tautochoniſmo, [a me non ita pridem breviſſime demonstrato *] primus, & post eum subtilissimus NEWTONUS in pereruditis suis Operibus † prodiderunt: quibus addi possent, quæ quondam Parisiis excogitavi, quorum nonnulla *Frater* recenset in *Actis* 1692, pag. 292 ††. At non postremum locum obtinet Quadratura segmenti recti, cujus subtensa distat a vertice Cycloidis quarta parte axis; quod semi-hexagono [concinnius ego dicerem triangulo æquilatero, tantumdem enim est,] æquale ostendit HUGENIUS: huic superaccedit alterum illud segmentum obliquum, cujus quadratura Celeb. LEIBNITIUM pro primo inventore agnoscit. Denique Brachystochronismus, seu celerrimus descensus, novissime a nobis detectus †††, inter primarias Cycloidis nostræ proprietates, nemine refragante, merito sibi locum vendicat primum; quod & Frater agnoscere videtur, dum eum inventorum omnium circa Cycloidem factorum quasi coronidem, ultra quam nihil amplius sperandum, deprædicat. (Vid. *Act.* 1697, p. 214.)

At vero non prius de palæstra discedere velle videtur, quam per integrum exactum sæculum omnia sua exuisset mysteria, nobisque pandisset quidquid in extremis haberet recessibus suis. Prodit enim, ecce denuo, in scenam nobilis nostra Curva, spectatoribus quasi cum agonizante hoc sæculo valedictura, ut tandem candide sistat infinitorum suorum segmentorum, aliorumque spatiorum Quadraturam: quod quanti sit, aliis judicandum relinquo, qui sciunt Cl. WALLISIUM, limatissimi judicii Virum, segmentum illud HUGENIANUM quadrabile [quod unicum facit ex infinitis nostris,] dignum satis reputasse, cujus primam inventionem, non uno in loco, WRENNIO suo pro virili assereret; ne scilicet gloriæ Anglicanæ, cujus strenuum vindicem agit, aliquid decederet, quod de jure ipsi competere ratus est Vir perspicacissimus.

Ut

* Supra N°. XLIX.
† Philos. Nat. Princ. Math. Lib. I. Sect. X. Prop. 48--53.
†† Supra N°. VIII.
††† N°. XXXVII.

Ut ad rem veniam: Sit Cyclois primaria EAG, cujus basis EG, axis AF, circulus generator ALF: Ductæ pro lubitu duæ applicatæ IB & KD, illa a centro H, hæc a vertice A æqualiter distantes, determinabunt in Cycloide duo puncta B & D, quibus junctis recta BD, ductisque LF & MF: Dico *Segmentum Cycloidicum BCDB fore quadrabile, æquale nimirum (in Fig. I.) summæ triangulorum rectilineorum LFI + MFK, & (in Fig. II.) differentiæ eorumdem LFI — MFK:* quod sic demonstro. Concipiantur ductæ HL, HM; item NAO, parallela basi EG; & BN, DO parallelæ axi AF. Applicatis IB, KD (*Fig. I.*) existentibus ad partes oppositas, erit segm. BCDB = trapezio BNOD demtis duobus trilineis ANB & AOD; Est autem trapez. BNOD = ($\frac{1}{2}$BN + $\frac{1}{2}$DO) in NO = [ob HI = AK] $\frac{1}{2}$HA in NO = $\frac{1}{2}$HA in NA + $\frac{1}{2}$HA in OA. Jam ex natura Cycloidis, $\frac{1}{2}$HA in NA = $\frac{1}{2}$HA in (arcum AL + rect. LI) = sectori LHA + triang. LHF = sectori LFA; eodem modo demonstratur $\frac{1}{2}$HA in OA = sect. MFA. Hinc trapez. BNOD = sect. LFA + sect. MFA. Quoniam vero iterum, ex natura Cycloidis, trilin. ANB = segm. circ. AIL, & trilin. AOD = segm. circ. AKM; ablatis AIL & AKM, a sectoribus AFL & AFM, remanebunt duo triangula rectilinea LFI + MFK = trapez. BNOD — ANB — AOD = segmento cycloidis BCDB. *Q. E. D.* Porro applicatis IB, KD (*Fig. II.*) existentibus ad partes easdem; segm. BCDB = trapez. BNOD — trilin. ANB + trilin. AOD. Jam prioribus vestigiis insistendo habetur trapez. BNOD = $\frac{1}{2}$HA in NA — $\frac{1}{2}$HA in OA = sect. LFA — sect. MFA; surrogatis igitur, loco trilineorum ANB, AOD, ipsis æqualibus segm. circ. AIL, AKM, prodibit sector LFA — sect. MFA — AIL + AKM, id est triang. rectil. LFI — MFK = segmento Cycloid. BCDB. *Q. E. D.*

TAB. V. N°. LVIII. *Fig.* 1. *Fig.* 2.

COROLL. I. Si puncta K & I coincidunt, manifestum est, haberi [*Fig.* I.] segmentum rectum *Hugenianum* = triangulo æquilatero, circulo generatori inscripto, coalescentibus quippe in unum triangulis LFI & MFK.

Ss 3 Co-

COROLL. II. Quod ſi vero puncta K, & I, in ipſum verticem & centrum cadant, prodit tunc, in utraque *Fig.* ſegmentum obliquum *Leibnitianum*, æquale ſoli triangulo LFI; altero MFK evaneſcente: quod quidem LFI tunc, ut patet, quartam efficit partem quadrati circulo generatori inſcripti.

COROLL. III. Patet etiam, ex omnibus ſegmentis quadrabilibus nullum eſſe, cujus ſubtenſa BD tranſeat infra medietatem radii AH; adeoque illorum omnium, quæ *Fig.* I. & II non comprehenduntur, quadraturas eſſe impoſſibiles.

Hæc de ſegmentis quadrabilibus Cycloidis. Ecce jam innumeros ſectores Cycloidales quadraturam pariter admittentes, curioſorum in gratiam huc referendos, ut habeant quo alant ſuam mirabilis hujus Curvæ admirationem. Si a puncto I, quod (*Fig.* III.) a centro H iterum tantumdem diſtare ſuppono, quantum diſtat punctum K a vertice A, ducantur duæ rectæ IB, ID, ad puncta B, D, in quibus applicata BKD Curvæ occurrit; item duæ aliæ rectæ FL, FM, ad puncta L, M, in quibus eadem circulum ſecat. Dico ſectorem Cycloidicum IBAD, æqualem exiſtere triangulo iſoſceli LFM. Quod quidem ad modum præcedentem tam facile demonſtrari poteſt, ut actum agere mihi viderer, ſi peculiarem pro hoc contexerem demonſtrationem. Notare hic convenit, concurrentibus punctis I & K, ſectorem BID degenerare in ſegmentum rectum HUGENII: at vero I in A, & K in H pervenientibus, mutari eundem in duo ſegmenta obliqua LEIBNITII; adeo ut duplici ratione Illuſtrium horum Virorum inventa ſub generaliſſimis noſtris, tanquam ſpeciales caſus, contineantur.

TAB. XV. N°. LVIII. *Fig.* 3.

Cæterum quamvis ex omnibus ſegmentis, quæ ſubtenſam ad axem normalem habent, unicum ſit quadrabile; fieri tamen quam maxime poteſt, contra opinionem *Celebris cujuſdam Geometræ* * (vid. *Act.* 1687, p. 526.) ut infinita alia ſpatia exiſtant quadrabilia: cui aſſerto, præter ſegmenta & ſectores quos hac-

* De Tſchirnhauſen.

hactenus dedimus, ſequentia exempla fidem facient. Vocetur radius circuli HA, a; HK, x; (*Fig.* IV.) Jam ſi ſumatur HK vel $x = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}a\sqrt{41}$, & ad K applicetur KD, ſecans circulum in M; fiatque arcus ML = arcui AM; ducta per L applicata BI, habebitur ſpatium, vel zona cycloidalis IKDB = [ductis rectis AM, AL, HM, HL,] triangulis rectilineis HAL + IAL − HAM − KAM.

TAB. XV. N°. LVIII. *Fig.* 4.

Porro ſi HK vel x fiat = radici hujus æquationis cubicæ, $12x^3 - 10aax - a^3 = 0$; & arcus ML ſumatur duplus ipſius arcus AM; erit zona IKDB iterum quadrabilis. Atque ſic pro ratione arcuum AM & ML, ſi modo ſit numeri ad numerum, invenio ſemper æquationem algebraicam magis minuſve compoſitam, cujus radix x novam perpetuo determinabit zonam quadraturæ ſubjectam. Hujuſmodi zonarum determinationem, haud ſane vulgari methodo repertam, aliquid mirabile in ſe continere puto; dum non, ut ſegmenta quidem & ſectores, una generali conſtructione aſſignari poſſunt. Ejuſdem methodi uſu, varia alia ſpatia cycloidalia, quadraturarum capacia, algebraice determinantur: quæ omnia huc afferre ſupervacaneum duco, præſertim cum perſpicacioribus arduum non ſit futurum, illa ex jam dictis eruere, noviſque augere.

JACO-

N°. LIX.

JACOBI BERNOULLI

Quadratura Zonarum Cycloïdalium demonſtrata.

Acta Erud. Lipſ. 1699. Sept. pag. 427.

OMnia, quæ circa quadraturas ſpatiorum Cycloïdalium inveniri poſſunt, una Cycloïdis proprietate dudum detecta nituntur, & ex ea tam aperte fluunt, ut Viri celeberrimi HUGENIUS & LEIBNITIUS, qui duo ejus ſegmenta quadrarunt, non potuiſſent non pari facilitate cætera omnia ſegmenta & ſectores quadrabiles reperire, ſi animum intendere voluiſſent.

TAB. XV. N°. LVIII. *Fig.* 2. & 4.

Cum enim, ut vulgo notum BL, æquetur arcui circulari AL, & ſpatium externum ABN ſegmento circulari ALI, poterit, proprietatis hujus ope, ſpatium Cycloïdicum quodvis imaginabile eo reduci, ut non niſi figuræ rectilineæ & ſegmenta quædam circularia habeantur; idcirco, ut ſpatium fiat quadrabile, illi tantum termini, qui ex ſegmentis circularibus conſtant, mutuo ſe deſtruere ſunt fingendi, & nihilo æquales ponendi; [quod fundamentum ſolutionis eſt,] e qua deinde ſuppoſitione, quantitates aſſumtæ facile determinantur. Quæritur ex. gr. quantæ ſint aſſumendæ rectæ HK, HI, ut zona IKDB quadraturam admittat: Pono HA $= a$, HK $= x$, HI $= z$, KM $= p$, IL $= q$, AM vel DM $= s$, AL vel BL $= t$; erunt ſectores AHM $= \frac{1}{2} as$, & AHL $= \frac{1}{2} at$; adeoque ſegmenta AKM [ADO] $=$ AHM $-$ KHM $= \frac{1}{2} as - \frac{1}{2} px$, & AIL [ABN] $=$ AHL $-$ IHL $= \frac{1}{2} at - \frac{1}{2} qz$. Sed ſegmentum cycloïdicum AKD $=$ KO $-$ ADO $=$ KO $-$ AKM $=$ AK $\times$ (KM $+$ MD) $-$ AKM $=$ AK $\times$ (KM $+$ AM) $-$ AKM $= (a - x) \times (p + s) - \frac{1}{2} as + \frac{1}{2} px = ap - \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} as - xs$; & pariter ſegmentum alterum AIB $= aq - \frac{1}{2} qz + \frac{1}{2} at - zt$; ac proinde zona IKDB $=$ AIB $-$ AKD $= aq - \frac{1}{2} qz - ap + \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} at - zt - \frac{1}{2} as + xs$; ubi liquet, quatuor priora membra denotare figuras mere rectilineas, ſolaſque quantitates reliquas, quas ingrediuntur t & s, impedire quo minus zona ſit quadrabilis: facio ergo has æquales nihilo, ut ſit $\frac{1}{2} at - zt - \frac{1}{2} as + xs = 0$; ubi ſi poſuero t habere ad s rationem quamcunque [numeri tamen ad numerum,

rum, ut uno arcu dato alter geometrice conſtrui poſſit,] ſemper habebo æquationem, quæ, litteris t & s eliminatis, relationem ipſius z ad x patefaciet; nempe, ſi $t = 2s$ fiet $z = \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} x$; ſi $t = 3s$, habetur $z = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} x$; ſi $t = 4s$, erit $z = \frac{3}{8} a + \frac{1}{4} x$, & ſic perpetuo in eadem progreſſione. Cumque etiam ex data recta HK, ſinu nempe complementi arcus AM, pervulgata analyſi reperiri poſſit ſinus complementi arcus dupli, tripli, quadrupli, &c. poterit adhuc z in aliis terminis inveniri; nempe ſi $t = 2s$; erit $z = (2xx - aa) : a$; ſi $t = 3s$, $z = (4x^3 - 3aax) : aa$; ſi $t = 4s$, $z = (8x^4 - 8aaxx + a^4) : a^3$, &c. qui valores cum ſuperioribus, ſinguli cum ſingulis collati, novas porro æquationes ſubminiſtrabunt, per quas ipſa quoque x, ſeu HK, determinabitur.

Atque ad eundem modum infinita alia ſpatia quadrabilia detegi poſſunt. Sic reperiri poteſt ex. gr. ſector quadrabilis DAB rectis AB, AD comprehenſus, vel Zona BDLM, arcu cycloïdali BD & circulari LM intercepta, quæ quidem perpetuo ſectoris dupla eſt. Exiſtente namque HK ſeu $x = \frac{1}{8} a + \frac{1}{8} \sqrt{33}$, vel $x = a \sqrt{\frac{5}{6}}$, vel $32x^4 - 32aaxx - a^3 x + 4a^4 = 0$; &c. & aſſumto arcu AL vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, &c. ipſius AM, erit ſubinde ſector BAD $=$ Triang: HAL $-$ Triang: HAM, & Zona differentiæ Triangulorum dupla.

Methodum vero tam facilem haud alia fini pandere volui, quam ut Frater, exemplo meo, ad paria præſtanda incitatus, mei quoque Problematis Iſoperimetrici promiſſam analyſin tandem aliquando nobis impertiat.

N°. LX.

JOHANNIS BERNOULLI,

Ad novas spatiorum Cycloidalium quadraturas, in Actis *1699, mense* Jul. *exhibitas Augmentum; Et de Centro gravitatis quadam.*

Acta Erud. Lips. 1700. Jun. pag. 266.

MOmenti alicujus, & nobile satis inventum esse; quod in *Actis* exhibui, quadraturæ infinitorum spatiorum, præsertim vero segmentorum, hujus per integrum seculum decantatissimæ curvæ, testatur splendidum judicium mihi perscriptum, quod de eo tulit *Regia Scientiarum Academia*, cui id, ante quam publicarem, submiseram. Interim plane non miror, quod, glacie a me prius fracta, inventus sit modus spatia cycloidalia quadraturas admittentia determinandi. Nihil enim factum video, quod non a quovis mediocri ingenio, nedum a perspicacioribus, fieri posse prævidebam; testibus verbis quæ in fine Schediasmatis mei *Act. superioris anni, pag.* 320, * non inconsulto adjeci: *Ejusdem methodi usu, varia alia spatia cycloidalia, quadraturarum capacia, algebraice determinantur, quæ omnia huc afferre supervacaneum duco, præsertim cum perspicacioribus arduum non sit futurum illa ex jam dictis eruere, novisque augere.* Superest tamen circa hanc materiam feracissimus novorum inventorum campus, sed quæ paulo plus artificii requirunt, quam jam exhibita; adeo ut multum desit quo minus totum pensum absolutum sit: horumque nonnulla specimina hic dabo. Videamus autem prius, quid in solutione *Fraterna* Zonarum quadrabilium, *Act. anni 1699, pag.* 427, † animadverterim.

In

* Supra N°. LVIII. pag. 327.
† Supra N°. LIX.

In æquatione, ad quam pervenit, terminos illos, qui ex arcubus circularibus constant, æquales ponit nihilo, (quod fundamentum esse solutionis meæ recte quidem, sed facile augurari poterat,) unde residui æquationis termini meras figuras rectilineas designant: Sic in æquatione zonæ IKDB $= aq - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs$, facit terminos, in quibus arcus s & t reperiuntur æquales nihilo, nempe $\frac{1}{2}ta - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$, ubi si ponatur t habere ad s rationem quamcunque *numeri tamen ad numerum*, (de qua cautela, unde artificium hausisse videtur, præmonui in *Schediasmate meo, pag.* 327, l. 11, 12.) habetur æquatio, quæ litteris t & s eliminatis, relationem ipsius z ad x patefacit; nempe si $t = 2s$ fit $z = (a + 2x) : 4$; si $t = 3s$ habetur $z = (2a + 2x) : 6$; si $t = 4s$, est $z = (3a + 2x) : 8$, & sic perpetuo in eadem progressione: Optime, sed quidquid est negotii hujus, ex ipso schematismo meo generaliter sic brevissime explico. Concipiatur punctum medium inter A & H, quod vocetur P: dico, si quærantur arcus AM, AL, rationem habentes reciprocam distantiarum suorum sinuum a puncto P, id est, qui sint ut PI ad PK; erit, si P cadit extra K & I, differentia segmentorum cycloidalium BAI, DAK, id est Zona IKDB, quadrabilis; sin intra cadit, erit summa segmentorum eorumdem (quæ ad partes oppositas sumi possunt, ut fiat figura unico arcu cycloidali & meris rectis comprehensa, qualis repræsentatur (in *Fig.* I. per IBADKI) iterum quadrabilis. Revera igitur quæstio huc redit, ut pervulgata analysi, ex sinu arcus AM, quæratur sinus arcus multipli submultiplive alicujus; cujus quidem tres primos tantum casus simplicissimos exhibet *Frater*, sed in quibus nulla omnino elucet progressionis uniformitas pro altioribus arcuum multiplicibus, nedum pro eorum submultiplicibus, determinandis. Quocirca ut Problemata Zonarum quadrabilium generaliter solvat, quærat, rogo, sinum arcus habentis ad arcum expositum rationem, ut n ad 1; ut ita habeatur formula universalis, quam ego adinveni, pro quavis arcus multiplicatione vel divisione;

Tt 2 unde

unde jam intricatiſſimum ſectionum angularium Problema, pleniſſime & ſimul univerſaliſſime, ſolutum habemus: namque per n intelligo numerum quemvis, ſive integrum ſive fractum, imo & ſurdum: quod, an a quoquam hactenus tentatum, mihi nondum conſtat. *

At vero miſſis iſtis, en quædam ſpecimina modo ſupra promiſſa, quæ dixi ſolo illo fundamento a *Fratre* indicato non niti, quæque, ſi nulli alii ſuppeterent ſolvendi fontes, deſperata forent: Ut ſi, ex omnibus ſegmentis cycloidicis rectis, quæratur quodnam illud ſit, cujus centrum gravitatis *algebraice*, id eſt, citra ullam quadraturam, determinari queat. Eſto

TAB. XV. N°. LVIII. &c. *Fig.* 3.

radius $AH = a$, $AK = x$, arcus $AL = t$: reperietur diſtantia centri gravitatis ſegmenti cycloidici BADB a vertice A, $= (6xxt - 3aat + (4xx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - xx)}) : (12xt - 6at + (6x + 6a)\sqrt{(2ax - xx)})$; ubi tam in denominatore, quam in numeratore littera t, ſeu arcus circularis involvitur: quem igitur ſi eliminare vellemus, nudo illo fundamento adhibito, ponendo ſcilicet quantitates, ubi t reperitur, utrobique æquales nihilo, ita ut tam $6xxt - 3aat = 0$, quam $12xt - 6at = 0$, proveniret ex illa æquatione, $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, ex hac vero, $x = \frac{1}{2}a$, quæ ſimul ſtare non poſſunt. Talis igitur arcuum circularium deſtructio, in hac, aliiſque ſimilibus occaſionibus, prorſus inutilis eſt: interim alia nobis ſunt adminicula, quibus quæſiti clauſtra reſeramus. Eorum unum hoc eſt: pono quantitates, ubi t reperitur, in numeratore eandem habere rationem ad quantitates ubi t reperitur in denominatore, quam habent reliquæ numeratoris quantitates, ad reliquas denominatoris quantitates: id eſt, pono $6xxt - 3aat$, ad $12xt - 6at$ [ſeu $2xx - aa$, ad $4x - 2a$] ut $(4xx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - xx)}$ ad $(6x + 6a)\sqrt{(2ax - xx)}$ [ſeu $4xx + ax + 3aa$ ad $6x + 6a$] id quod dat $x = 2a$; hac operatione fit, ut $(6xxt - 3aat + (4xx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - xx)}) : (12xt - 6at + (6x + 6a)\sqrt{(2ax - xx)})$ convertatur in $(6xxt - 3aat) : (12xt - 6at)$ quod jam per communem t dividi poteſt, & fit

* Vide Num. LXIX.

fit $(6xx - 3aa) : (12x - 6a) =$ [ob $x = 2a$] $\frac{7}{6}a$ unde ſequitur, facta $x = 2a$, ſeu ſumta $AK = AF$, ſegmentum cycloidicum, quod hoc caſu degenerat in ſpatium cycloidis totale, habere ſuum centrum gravitatis diſtans a vertice A, $\frac{7}{6}a$, ſeu $\frac{7}{12}$ totius diametri circuli generatoris; & hoc unicum eſſe omnium ſegmentorum rectorum, cujus centrum gravitatis, independenter ab ulla quadratura, ſit aſſignabile.

Eadem methodo ſi quæratur, quænam portio curvæ cycloidalis AB, converſa circa axem AK, deſcribat ſuperficiem conoideam, habentem centrum gravitatis algebraice determinabile, reperietur iterum, AK ſumendam eſſe æqualem AF: atque tunc centrum gravitatis ſuperficiei, a Cycloide tota ABE circa axem AF deſcriptæ, diſtare a vertice A, $\frac{2}{3}$ AH, ſeu $\frac{1}{3}$ axis totius AF; & ſic præter integram ſuperficiem cycloidis circa axem converſæ, aliam partialem nullam dari quæſito reſpondentem.

Quod ſi vero idem poſtuletur pro ipſo conoide, id eſt, pro ſolido ſegmenti recti circa axem converſi; reſpondeo rem eſſe omnino impoſſibilem: ſingula enim iſtorum ſolidorum (nullo excepto,) ut & totum conoides, vel potius ſemiſphæroides EAG, centri gravitatis determinationem non admittunt, niſi aſſumta quadratura circuli, vel dimenſione arcus circularis.

Interim, quod memorabile eſt, inveni ſectorem ſolidum IBAD, qui nempe oritur ex converſione ſectoris plani IAB circa axem AI, qui unicus eſt inter infinitos alios, cujus centrum gravitatis ſub poteſtatem algebraicam cadit: quem, non obſtante, quod hic methodum meam maxima parte aperuerim, inveniendum *Fratri* propono. Quæro itaque ab ipſo, quis ille ſit ſector planus AIB, qui rotatus circa AI faciat ſectorem ſolidum, in quo ſit centrum gravitatis independens ab ulla quadratura vel rectificatione; hoc quod a me præſtitum eſt. Non provocationis cauſa, multo minus ad oſtentationem ipſi propoſitum volo; ſed tantum, ut illi de hujuſmodi inventis benignius ſentire anſam ſuppeditem; ſi forte in hoc plus negotii deprehenderit, quam initio putaverat.

Cæterum & hoc prætermitti non debet: quæ hanc circa materiam dicta ſunt, ſive de particularibus ſpatiorum quadraturis, ſive de centris gravitatis in uno alterove caſu algebraice aſſignabilibus, deque aliis id genus; ea multis aliis lineis curvis commode & eleganter applicari poſſe: ex. gr. illi curvæ, quam ROBERVALLIUS vocat *Trochoidis*, id eſt *Cycloidis Sociam*, vel *Comitem*; quæ ejus temporis Geometris non minus fere quam ipſa Cyclois celebrata fuit; quamque etiam WALLISIO ſub nomine *Curvæ ſinuum verſorum*, aliiſque noſtrorum annorum Mathematicis egregiis conſideratam reperio. Generatur autem applicando ubique ad K rectam æqualem arcui circulari AL, vel etiam motu quodam continuo, aliiſque modis, quos vide apud ROBERVALLIUM, qui de ea, juxta & de Cycloide, fuſe ſcripſit, deditque quidquid fere deſiderari poteſt: ſit pro ſpatiorum ſolidorumque variis modis factorum dimenſione; ſit pro eorumdem centrorum gravitatis, ut ut per quadraturas, determinatione; nihil tamen de ipſius Curvæ longitudine habet, quæ reperitur æqualis circumferentiæ ellipſis alicujus, in qua axis major duplus eſt ſuæ parametri. De algebraicis vero caſibus, de quibus hic ſermo, nec apud ipſum, nec apud alios, vel hilum extat. Dico itaque, etiam in hujus curvæ ſpatio infinita eſſe ſegmenta abſolute quadrabilia. Ductis enim duabus applicatis, una ad dextram, altera ad ſiniſtram, & a centro circuli generatoris hinc inde æqualiter diſtantibus; recta connectens applicatarum extremitates abſcindet ſegmentum, quod eſt æquale rectangulo ſub diametro, & ſub correſpondenti applicata circuli: reliqua de ſectoribus, zonis, conoidum ſuperficiebus & ſolidis, ut & de centris gravitatis, quod unicuique nunc pateant, lubens prætereo.

Deberem hic aliquid dicere de Cycloidibus *contractis* & *protractis*, etenim etiam hiſce fere omnia competunt quæ de *primaria* oſtendi. Suffecerit autem, ſi hic generalem regulam indicavero, pro determinatione omnium ſegmentorum abſolute quadrabilium, ſive in *contractis*, ſive in *protractis Cycloidibus*: alii qui plus otii nacti ſunt, reliqua ex dictis facile indagabunt.

Eſto

Eſto radius circuli generatoris, ſeu diſtantia puncti deſcribentis a centro rotationis $= a$, radius vero circuli ſuper recta rotati $= b$; applicentur duæ ordinatæ ad partes axis, ſive eaſdem, ſive oppoſitas, quæ a vertice Cycloidis ita diſtent, ut earum diſtantiæ ſimul ſumtæ ſint $= 2a - aa : b$. Dico lineam rectam connectentem extremitates duarum harum applicatarum reſecare ſegmentum quadrabile in iſta *Cycloide*, quæ erit vel *contracta*, vel *protracta*, prout a, vel b, major eſt. Hoc autem ſegmentum, ſi applicatæ ſunt ad eaſdem partes, erit $= (b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y)\sqrt{(2ax - xx)} - (b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)\sqrt{(2ay - yy)}$; ſin ad oppoſitas erit $= (b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y)\sqrt{(2ax - xx)} + (b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x)\sqrt{(2ay - yy)}$ intelligo per x & y diſtantias duarum applicatarum a vertice Cycloidis, ita ut $x + y$ ſit $= 2a - aa : b$. Unde patet ſi $2a - aa : b$ ſit, vel nihilo æqualis, vel quantitas negativa, id eſt ſi $2a$ ſit $=$ vel $<$ $aa : b$; ſeu ſi b ſit $=$ vel $<$ $\frac{1}{2}a$, ſegmentum quadrabile fore tunc imaginarium, adeoque impoſſibile. Hinc memorabile fluit, omnes quidem *Cycloides protractas* habere infinita ſegmenta quadrabilia, ſed non omnes *contractas*: Etenim illæ tantum, quæ b majus habent quam $\frac{1}{2}a$, pariter gaudent infinitis hujuſmodi ſegmentis, reliquæ vero omnes, ne unico quidem.

JAC. B.

N°. LXI.

JAC. B.* QUADRATURA ZONARUM CYCLOIDALIUM PROMOTA

Problema item centri gravitatis ſectoris ſolidi Cycloïdici ſolutum.

Confer. *Acta Lipſ.* pag. 316 & 427. Anni 1699. †

Acta Erud. Lipſ. 1700. Decemb. pag. 551.

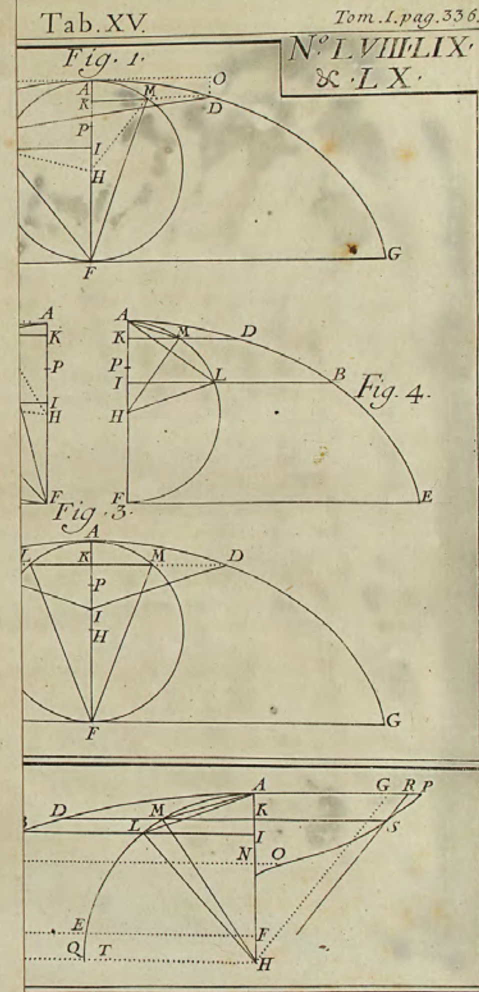
TAB. XV. N°. LI.

QUemadmodum Problema Sectionis Angularis in ratione determinata numeri ad numerum, algebraïcum eſt; ſed indefinite in data ratione quacunque, tranſcendens: ita quoque Zonæ Cycloïdales quadrabiles, qualis IKDB, algebraïce quidem determinantur, ſicubi ratio arcuum AM & AL datur in numeris; indefinite vero, & generaliter, nulla æquatione algebraïca finita exhiberi poſſunt; quamvis interim Problema facillime conſtruere liceat, hoc modo: Sit AC portio Cycloïdis, A vertex, AH axis, AQ quadrans circuli genitoris, H centrum circuli. Fiat AP perpendicularis & æqualis ipſi AH, datoque in ea ubivis puncto G, biſecetur GP in R, ac junctæ HG ducatur parallela recta RS. Trajecta porro indefinite recta EF parallela ipſi HQ, quæ ſecet Cycloïdem in C, circulum genitorem in E, & axem in F; abſcindatur in HQ quarta proportionalis ad AH, AG & CE, quæ ſit HF: centro T, radio circuli genitoris, deſcribatur arcus circuli ſecans Cycloïdem in duobus punctis, quorum remotius ab axe ſit V, per quod tranſeat recta VN, parallela ipſi HQ. & producta in O, ut ſit NO = HF; erit O ad curvam quandam OSP, quæ rectam RS ſecabit in puncto optato S: hinc enim ſi demittatur in axem SK parallela HQ, eique abſcindatur æqualis HI, ac per K & I agantur rectæ KD & IB, itidem parallelæ ipſi HQ, quæque ſecent Cycloïdem in D & B, circulum genitorem in M & L, erit & Zona IKDB quadrabilis, hoc eſt, æqualis triangulis rectilineis HAL — HAM + IAL — KAM; & arcus AM ad AL in ratione data AG ad AH, ut requirebatur. Demonſtrationem, quæ intellecta noſtra Analyſi ** p. 427. A. 1699. neminem latere poteſt, addere ſuperſedeo. Inventio porro ſectoris ſolidi IBAD, (Fig. 3. Tab. XV. N°. LVIII) oriundi ex converſione ſectoris plani IAB circa axem AI, qui centrum gravitatis habeat algebraïce determinabile, calculum requirit prolixum magis, quam arduum. Salvo enim hujus errore, reperio quod, poſita $AH = 1$, ſumtaque $AK = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $KI = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$, diſtantia centri gravitatis ſectoris a vertice A, ſit futura $(9 + 22\sqrt{\frac{1}{2}}) : (6 + 30\sqrt{\frac{1}{2}})$.

Videatur Nus. LXIX.

Nouvelle

* Jacobi BERNOULLI. † Nris. LVIII. & LIX. ** N°. LIX. pag. 329.



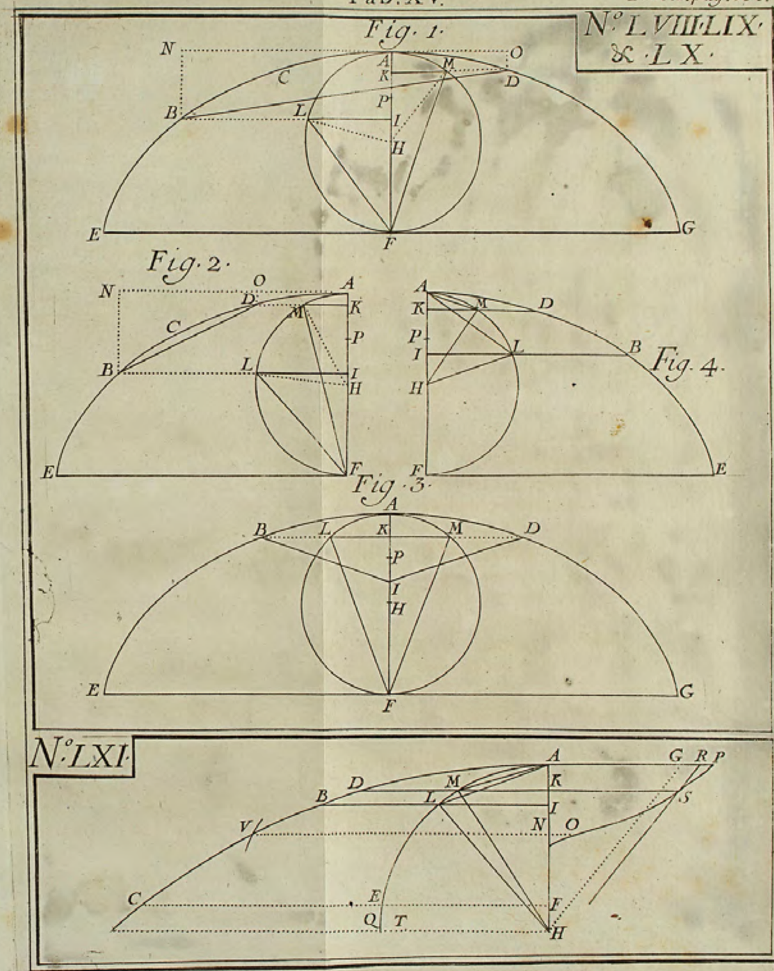
ZONARUM
OMOTA
Cycloïdici solutum.
nni 1699. †

is in ratione determi-
; sed indefinite in data
næ Cycloïdales quadra-
antur, sicubi ratio ar-
vero, & generaliter,
nt; quamvis interim
Sit AC portio Cycloï-
genitoris, H centrum
AH, datoque in ea
HG ducatur paralle-
F parallela ipsi HQ,
in E, & axem in F;
I, AG & CE, quæ
batur arcus circuli se-
motius ab axe sit V,
& producta in O, ut
OSP, quæ rectam RS
tur in axem SK pa-
er K & I agantur rec-
ue secent Cycloïdem in
Zona IKDB quadra-
— HAM + IAL
AG ad AH, ut re-
tra Analysi ** p. 427.
edeo. Inventio porro
LVIII) oriundi ex
qui centrum gravitatis
prolixum magis, quam
d, posita AH = 1,
$\sqrt{2}$, distantia centri
$\sqrt{\tfrac{1}{2}}$) : ($6 + 30\sqrt{\tfrac{1}{2}}$).
Nouvelle

** N°. LIX. pag. 329.

Tab. XV.

Tom. I. pag. 336.



Nouve

Par

Extraite c

A IA *Tr*

le Phenc

metre de

pée, qu'

gent, en

une gran

dans la p

312; je

d'autant

perfectio

ja fait d'

si la mê

prochât

de M. C

été obse

l'autre.

ditations

cessaires

mément

que j'ai

maniere

Barome

sorte qu

ne se

Joan.