N°. XVIII.

Q. F. F. Q. S.

DISSERTATIO
INAUGURALIS
PHYSICO-ANATOMICA
DE
MOTU MUSCULORUM,

Quam

Pro ſummis in Arte Medica Honoribus
& Privilegiis Doctoralibus
rite capeſſendis

Publice examinandam obtulit ad d. 16. Martii 1694,

JOHANNES BERNOULLI, Basil.

Edita primum BASILEÆ, 1694: iterum VENETIIS 1721: tertium NEAPOLI, 1734.

Hujus vero pars Mathematica inſerta eſt Actis Erudit. Lipſ. Ann. 1694. Menſ. Maio, pag. 200.

DISSERTATIO
DE
MOTU MUSCULORUM.

PRÆLOQUIUM.

DIU mecum pensitans quamnam corporis humani partem seligerem, cujus functiones quamoptime ex legibus mechanicis explicari possent, illam tandem, quæ apud Anatomicos sub Musculi *nomine venit, dignissimam censui; cum ob nobilitatem partis ipsius, tum ob evidentiam demonstrationum mathematicarum & quidem ex interiori Geometria petitarum, quibus tota quæ de Musculo habetur doctrina muniri potest. Animus autem non est specialem hîc tradere Musculorum descriptionem & anatomiam; hoc utique jam satis superque factum habemus a præstantissimis quibusvis Anatomicis, qui hocce in seculo excelluerunt & etiamnum excellunt, nec si*

liberet

liberet angustæ dissertationis spatium permitteret. Institutum nostrum est generalem adumbrare ideam structuræ Musculorum, quantum nempe necessitas urget ad modum operandi & subsequentes inde motiones animales rite explicandas: qua in re Incomparabilis Viri Joh. Alphonsi BORELLI *vestigiis insistemus, amplectendo ejus hypothesin, quam tamen nimis oscitanter applicuisse ostendemus, quando suis machinulis vel vesiculis fibrarum muscularium figuram rhomboidalem attribuit; ubi simul apparebit, hancce figuram rectilineam præ aliis ipsis assignasse, tum facilitatis ergo, nimirum ut commodiori calculo relationes virium dilatantium ad resistentias supputaret, tum etiam quia justam & debitam figuram (quam circularem esse ex natura pressionis liquidorum demonstrabimus) & quæ exinde emergunt vires distendentes, non potuit non ignorare absque novo calculo* Integralium *dicto, qui tum temporis profundissima caligine adhucdum tectus latitabat, cujusque prima stamina magno Geometræ* LEIBNITIO *debemus. Exhibebimus etiam curvam, cujus ordinatim applicatis denotantibus resistentias per minima crescentes, abscissæ ejusdem indigitabunt quantitates spirituum animalium impensorum vel deperditorum, id quod* BORELLUS *ne quidem apice digitorum tetigit. Hoc ipsum etiam ansam nobis præbebit gradus roboris & lassitudinum Musculis inductarum determinandi. Tibi,* Candide Lector, *nostrum hoc conamen rudiore & festinante manu adumbratum commendamus; quod si non displicuerit, in posterum, quando per otium licebit, ea qua impræsentiarum, ob plurimas alias distractiones, neglecta fuere, duplici fœnore resarcire adnitemur.*

DISSER-

DISSERTATIO
DE
MOTU MUSCULORUM.

§. I.

RATIONEM initurus de motu Musculorum, primum omnium structuram Musculi in qua plerique recentiores Anatomici consentiunt, quatenus phænomenis paulo accuratius explicandis conducit, breviter exponam. Musculus itaque, qui est pars organica, constat ex membrana, carne, arteriis, venis, nervis & tendine. *Membrana* instar integumenti totum involvit Musculum, sub qua innumeræ conspiciuntur fibræ colore sanguineo saturatæ; hanc fibrarum compagem communiter *carnem* vocant, quæ desinit in substantiam quandam albicantem consistentiæ nerveæ, quam *tendinem* appellare Anatomici consueverunt: hic plerumque in principio seu *capite*, & fine seu *cauda* Musculi reperitur; intermediam

 Musculi

Musculi partem *ventrem* nominant. Totam musculosam substantiam perreptant innumeræ *arteriæ*, *venæque* capillares, & *nervi*; illæ ut sanguinem tum nutritioni, tum motui Musculorum destinatum afferant & auferant, hi ut succum spirituosum subministrent, qui cum sanguine mistus subitaneam illam ebullitionem efficit, de qua mox fusius, quique vehiculum est sensuum externorum, & animæ fidelis famulus, omnia eidem, quæ corpus intra & extra quocunque modo afficiunt annuncians. Notandum porro Musculum dispesci in plures fasciculos, quorum quilibet sua propria membranula munitus formam exhibet prismatis triangularis, quadrati, pentagonalis, aliusve generis: hi fasciculi constituuntur ex pluribus filamentis tendinosis quæ apud STENONEM * *fibræ motrices* audiunt; filamenta autem vel fibras hasce esse tendinosas, patet ex eo, quod rubedo illa, quæ a sanguinis affluxu oritur per aquam confertim affusam iterum ablui, fibrisque color omnino candidus reddi possit; ita ut non minus colore quam consistentia tendines æmulentur; & revera fibræ tendinum nihil aliud sunt, quam continuationes muscularium, inque eo solo differunt, quod illæ arctius quam hæ juxta se ponuntur, & proinde sanguinem, nisi quantum sufficit ad nutritionem, in interstitia sua non admittunt: hinc fit quod in motu Musculorum tendines non inflentur & abbrevientur, sed mere passive se habeant.

II.

Notat BORELLUS † fibras musculares post elixationem inflari, & microscopio inspectas esse columellas similes virgultis arborum, & substantia quadam spongiosa plenas; ex quo conjicit quamlibet fibram muscularem esse porosam, seu excavatam. Cæterum fibræ fasciculorum colligantur, & quasi vinciuntur ab aliis fibrillis transversariis parallelis, quæ cum prioribus texturam reticularem efficere videntur, id quod in Musculis diu coctis, non sine oblectamento, videre est: hasce fibrillas,

* *Elem. Myolog. Spec.* Def. 1.
† Lib. *de Motu Animal.* Part. I. Prop. I.

brillas, non autem fibras ipsas musculares, contractionem inire Cl. Jo. MAJOW * statuit, sed minus congrue, & contra omnium saniorum Anatomicorum sententiam. Ego nullum alium ipsis attribuo usum, quam ut vinctura sua transversaria impediant, ne fibræ motrices in actu inflationis nimium divaricentur, & ex ordinato suo situ disturbentur; sic cavum cujusque columellæ, vel fibræ motricis, distinguitur ope hujus ligaturæ in æqualia internodia, quæ plures cellulas, vel vesiculas, efformant; quæ vesiculæ flaccidæ sunt, & lateribus suis connivent, quando Musculus otiatur, & quæ distenduntur quando operatur, & adipiscuntur figuram ovalem similem annulis catenæ, quos BORELLUS passim *machinulas rhomboidales* nominat; sed perperam, ut infra ostendam. Obiter adhuc innuendum, ligationes hasce transversarias laxas esse, ut omnibus vesiculis communicatio intercedere, & vis motiva, seu materia inflans, æqualiter quaquaversum sese expandere possit.

III.

Hactenus memorata præcipua sunt, quæ circa fabricam Musculi simplicis observantur. Quid autem proprie Musculum moveat, varii varie de eo sentiunt; quorum omnium opiniones discutere velle, non est ex nostro instituto: Missa vero Veterum facultate incorporea naturali, Musculos immediate, ut loquuntur movente, videamus quid unus vel alter hac de re censuerit. Experient. STENO, in suo Myologico specimine, Musculum contrahi arbitratur sine novæ materiæ accessione; nimirum per solam mutationem figuræ, commigrando a parallelogrammo obliquangulo in rectius, quæ opinio prorsus ridicula, & pro mero lusu ingenii Authoris habenda: præterquam enim quod hoc modo contractio Musculi rectanguli explicari non possit, nisi penetratio corporis statuatur, concipi nequit, à quo Musculus moveatur, & quale ejus sit primum movens, vel qua ratio-

* Tract. *de Motu Muscul.* cap. 2.

ratione tritum illud Axioma Phyſicum defendi poſſit; *Omne quod movetur, movetur ab alio*: vix enim puto ab immediata animæ voluntate machinam corpoream huc illuc transferri poſſe; ſecus reſectis, aut conſtrictis nervis, non video quid Muſculos a motu impediret, niſi forſan velis animæ hoc pacto viam eſſe præciſam, vel interceptam, per quam ex meditullio cerebri ad membra exteriora ſpatiari conſuevit, ad imperium ſuum ibi exercendum; ſed hoc foret animam concipere nimis corpoream. Aliis inſuper quamplurimis argumentis evertitur ſyſtema *Stenonianum*, ſuper quo conſulantur BORELLUS * & MAJOW †. Veram, quemadmodum ego arbitror, cauſam contractionis Muſculorum attigerunt, qui illam ab inflatione quadam deduxerunt, inter quos præcipui ſunt WILLISIUS §, & bini modo memorati Viri: qui omnes in eo conveniunt, quod in Muſculis oriatur ebullitio, quæ fibras diſtendat, ut in longitudine amittant quod in latitudine acquirunt.

IV.

Iis itaque generaliter aſſentimur; & ſtatuimus cum BORELLO, nervos eſſe congeriem tubulorum ſubſtantia quadam ſpongioſa repletorum, quæ ſubſtantia ſemper turget, & plena eſt fluido ſumme volatili, a cerebro ſuppeditato, ejus naturæ, ut, ſi cum ſanguine commiſceatur, ſubitaneam effervescentiam pariat. Et hoc fluidum illud ipſum eſt, quod vulgo *Spirituum animalium* nomen habet. Si anima imperat, vel exercet actum volitionis; hoc fieri non poteſt, quin ex neceſſitate mirabilis unionis, quam Omnipotens DEUS inter animam noſtram & corpus conſtituit, & quæ nos hactenus latet & uſque latebit, quin, inquam, fiat in cerebro localis quædam agitatio Spirituum animalium qui, vellicando principium alicujus nervi, concutiant per totam longitudinem Spiritus intra contentos; non ſecus ac fit

* Lib. *de Motu Animal.* Part. I. Prop. 5.
† Tract. *de Motu Muſc.* Cap. 1.
§ Exercit. *de Motu Muſcul.*

fit in baculo, cujus extremitate una vel tantillum commota, altera pariter ob contiguitatem partium commovebitur. Sic itaque, ab irritatione principii nervi, guttula extrema Fluidi ad nervos ſpectantis ex altero oſculo levi vibratione ejicitur, & hoc modo, ex omnibus aliis nervulorum per Muſculum diſperſorum oſculis, ſimul ad nutum voluntatis, totidem guttulæ evomuntur: quemadmodum autem ſpongia liquore turgida guttulas pendulas effluere non ſinit; ſic etiamſi oſcula iſta extrema nervorum ſemper ſint patula, guttulæ tamen Fluidi modo memorati ſponte & ſine actuali concuſſione non excidunt; quia ſubſtantia ſpongioſa nervorum eis loco valvularum inſervit.

V.

Quando igitur ab imperio voluntatis, vel a conſuetudine naturæ (quod fit in motibus involuntariis) eo, quo dixi, modo innumeræ guttulæ per totam Muſculi molem, quæ inſtar ſpongiæ perpetuo ſanguine humectata eſt, ſimul ejiciuntur ex orificiis nervulorum; tunc earum particulæ tenuiſſimæ, ſpiculis ſuis ſubtiliſſimis impingendo in particulas ſanguineas tenuiores, eaſdem diffringunt, & inſito aëri condenſato exitum præbent, qui ſeſe expandendo (ut docui in Diſſertatione mea *de Efferveſcentia & Fermentatione*) ebullitionem & ſubſequentem inde Muſculorum inflationem producit. His autem jam video quid objici poſſit, qui nempe fiat, ut poſt ebullitionem Muſculus iterum detumeſcat, & priſtinum ſtatum acquirat, id quod momento accidit; videtur enim quod, ſecundum mea principia, pro explicatione efferveſcentiæ poſita, Muſculus poſt primam ebullitionem perpetuo inflatus manere debeat; non aliter ac factum eſt in experimento pulveris pyrii, * ubi ſpatium in tubo recurvato, in quod aër inſitus poſt accenſionem pulveris ſeſe extendebat, continuo manebat extenſum, nec iterum concidebat, eo modo quo credit BORELLUS † accidere id muſculis, in qui-

* Diſſert. *De Efferv. & Ferm.* §. XXII. pag. 33. ſq.
† Lib. *de Motu Anim.* Part. II. Prop. 29.

quibus ſcilicet autumat particulas ebullientes, rapidiſſime circumgyrando, vacuitates grandiuſculas efformare, quæ, poſt peractam ebullitionem, iterum concidant & ad priſtinum ſpatium redigantur; ſed hoc non eſſe veram cauſam effervefcentiæ in ea, quam dixi, Diſſertatione §. XVII. abunde commonſtravi.

VI.

Ut itaque aliter difficultati allatæ obviam eatur, noſtraque principia ſalventur; ſtatuamus oportet, dari, præter aërem craſſum quem ſpiramus, alium ſubtiliorem, qui, utut etiam elaſticus, nullo modo percipi poteſt, quippe qui omnes poros corporum libere penetrat. Poſitionem hanc non adeo abſurdam eſſe, patet ex eo, quod, inter aërem craſſiorem, & materiam ſubtilem, vel æthercam, quæ procul dubio incomparabiliter tenuior eſt illo, alia utique exiſtat materia, & quidem omnium gradum, ne detur ſaltus in rerum natura; hæc materia non poteſt non eſſe elaſtica, eandem ob cauſam ob quam eſt aër nobis appoſitus; nempe a continuo motu materiæ æthereæ, quæ omnes particulas craſſiores & minus agitatas, tanquam obſtaculum, a ſe invicem divellere & ſeparare, ſibique liberum tranſitum parare conatur. Hujuſmodi itaque materiam, vel auram elaſticam ſubtiliorem, & quidem condenſatam, præter aërem craſſiorem, qui inſigniores corporum poros vel cellulas replet, etiam in minimis clauſtris hoſpitari nemo dubitabit, qui noſtras rationes, quas in Diſſertatione *de Efferv. & Ferm.* attulimus, bene perpenderit. Hoc præſuppoſito, dicimus particulas Fluidi ſubtiliſſimi ad nervos pertinentis adeo eſſe ſubtiles, delicatas & teneras, ut earum ſpicula (quæ ad leviſſimum tactum ſtatim hebetari pono) non niſi minimos particularum ſanguinearum porulos aperire valeant, ex quibus dein ſubtilior illa aura elaſtica condenſata proſilit, quæ, ſui juris facta, ſeſe ſubito expandit, & primo impetu totam Muſculi molem inflat; ſed illico, ob exiguitatem ſummam particularum ſuarum, per poros apertos Muſculi libere erumpit, inque aërem externum avolat;

lat; propterea neceſſe eſt ut, poſt ebullitionem, Muſculus momento iterum detumeſcat, niſi jugiter novæ inſtillentur commemorati Fluidi guttulæ, quæ novam & novam pariendo ebullitionem Muſculum in continua inflatione conſervent.

VII.

Interim fieri nequit, quin, in tanta copia particularum Fluidi nervorum, aliquæ dentur fortioribus ſpiculis præditæ, quæ etiam majuſculos quoſdam particularum ſanguinearum meatus perfringere valent; ex quibus inter ebulliendum aliquid craſſi aëris erumpit, qui cum poros Muſculi & cutis apertos penetrare non poſſit, plurimis in locis ſacculos efformat in quibus colligitur & ſubſiſtit: hinc proveniunt iſtæ veſiculæ aëre plenæ, piſi interdum magnitudinem adæquantes, quæ ſub cute & in interſtitiis faſciculorum muſcularium ſparſim conſpiciuntur. Ab hoc præcipuam cauſam hydropis ſiccæ vel tympanitis dependere ſuſpicor; cum ſcilicet fluidum nervorum nimia acredine peccat, ut ab illo ingens copia pororum ampliorum particularum ſanguinis, quibus ineſt aër craſſior, recludatur; aër iſte craſſus, qui tam ubertim advenit ſeque dilatat, & ob tubulorum cutaneorum anguſtiam intra manere cogitur, præcipuas quas reperit corporis caveas, præſertim imi ventris, mole ſua occupat, & ibi tenſionem dolorificam creat.

VIII.

Quemadmodum ex aucta acredine Spirituum animalium, quæ vehementiorem, quam par eſt, excitat in Muſculis ebullitionem, oriri poſſe diximus tympanitem, quod forſan nemo ante nos animadvertit; ita e contrario nimia mollities ſpiculorum Spirituum animalium, ob quam effervefcentia in Muſculis diminuitur, vel plane aboletur, paralyſin facit. Popularis huc uſque fuit error inter Medicos, cum creditum fuerit, paralyſin unice provenire a præpedito Spirituum animalium influxu; quod

quod tamen interdum minime verum est, uti ex hoc solo patet, quod utplurimum in paralysi sensus non debilitatur; quod tamen semper fieri deberet, si illa a solo Spirituum animalium influxu denegato dependeret: nam si nervi ex. gr. obstructione laborant, evidens est non solum Spiritibus advenientibus, sed etiam refluentibus, qui nempe sensus in cerebro producunt, viam intercludi; & sic sensus, si non omnino aboleretur, saltem magna ex parte imminueretur. Genuina itaque causa paralyseos aliquando potest esse diminuta, vel abolita effervescentia in Musculis; quod accidit, quando aut fluidum nervorum, quantacunque etiam quantitate influat, vim suam pungitivam amittit, aut particulæ sanguineæ nimis durescunt, & ita quidem, ut ab acuminibus commemorati fluidi diffringi non possint.

IX.

Ex hac hypothesi facile etiam esset explicare cætera motuum Musculorum symptomata, ut motus spasmodicos, seu convulsivos, rigorem & tremorem membrorum, oscitationem, & pandiculationem, & quæ sunt alia; sed hoc est extra nostrum propositum, quod imprimis eo collimat, ut phænomena naturalia motus animalis accuratius perscrutemur. Jam supra (ut in orbitam revertamur) annotavimus, fibras motrices Musculorum colligari in transversum ab aliis fibrillis, ita ut quælibet fibra muscularis (quæ sine his fibrillis columellam excavatam repræsentat) in totidem spatiola dividatur, quorum tamen caveæ communicationem inter se habent per totam longitudinem fibræ motricis, ob laxam ligaturam fibrillarum transversariarum: quodlibet spatiolum, vel internodium, ex calculo BORELLI,* adæquat vigesimam partem unius digiti: quando Musculus inflatur, singula spatiola in latitudinem explicantur, & replentur aura illa elastica de qua supra §. V. Oppido nunc liquet spatiola ista repleta non posse acquirere figuram rhomboi-

* Lib. de Motu Animal. Part. I. Prop. 105.

boidalem, ut existimat BORELLUS; secus enim unica tantum requireretur particula, quæ instar cunei sese insinuaret intra latera unius spatioli, ut diducendo simpliciter latera exiguum rhombum efformaret: sed præter quam quod inflatio hac ratione non peragitur, (siquidem durante ebullitione, secundum ipsum BORELLUM, particulæ motum Musculorum excitantes non lineis rectis, ut actio cunei postulat, sed in circulum moventur;) insuper etiam spatiolum, cujus longitudo æqualis est vigesimæ parti digiti, ideoque satis sensibilis, infinities quasi majus est unica particula auræ elasticæ, quæ ut supra diximus, non solum insensibilis, & aëre communi multo subtilior est, sed etiam exilissimos poros corporis apertos penetrat; unde colligitur quodvis spatiolum, vel, si secundum BORELLUM loqui velimus, quamvis machinulam, distendi non ab una sola, tanquam a cuneo, sed simul ab infinitis particulis elasticis, quæ omnes æquali vi in parietes machinularum agunt, & proinde ipsis non rhombi figuram, sed aliam curvilineam conciliabunt, quam nunc indagabimus.

X.

Qui solis rationibus & conjecturis physicis acquiescunt, naturamque pressionis fluidorum vel tantillum perspectam habent, absque calculo videbunt figuram hanc aliam non esse quam circularem: cum enim natura fluidorum sit premere secundum lineam perpendicularem ad superficiem cui insistunt; cumque aëris elastici pressio undiquaque sit æqualis, & proinde fibra muscularis machinulæ, quæ perfecte flexilis ponitur, ubique æqualibus viribus extrorsum pellatur; statim apparet curvaturam fibræ ubique æquabilem fore, & proin circularem: nulla enim ratio est, cur unum curvæ punctum magis minusve a centro distare debeat quam alterum. Cui autem hæc minus satisfaciunt, examinet nostrum calculum geometricum, per quem in eandem curvam incidimus, & qui ratiocinium nostrum physicum, cujus beneficio per transennam quasi curvæ spe-

ſpeciem prævidimus, mirificè confirmabit: eum igitur apponimus:

Tab. V. Fig. I. *Sit ABC fibra, vel ſi mavis filum perfecte flexile, in extremitatibus A & C affixum, quod in omnibus ſuis punctis B trahitur vel pellitur perpendiculariter ad ſuam curvaturam potentia æquali & indefinite parva, quæ hic denotatur per lineolam BH; quæritur curvaturæ ſpecies.* Eſto abſciſſa AF $= x$, ejus differentiale Ff $= dx$; applicata FB $= y$, ejus differentiale GB $= dy$; curva AB $= s$, ejus differentiale Bb $= ds$; BH (potentia pellens & multiplex ipſius Bb) $= nds$. Quia nunc quælibet potentia pellens BH dividi poteſt in duas laterales, horizontalem BE & verticalem BD, quæ rectangulum DE conſtituunt, cujus diagonius eſt ipſa BH: erunt, ob ſimilitudinem triangulorum BGb & BDH, BE $= ndy$ & BD $= ndx$. Quoniam autem potentia ſuſtinens in A ſemper eadem & conſtans manet, ubicunque etiam filum præter quam in C figatur, ceu cuilibet attendenti patebit; ponatur illa $= a$: ſed ex mechanicis conſtat, eam tantam eſſe quanta foret, ſi loco fili curvi AB ſubſtituerentur duo alia fila recta tangentia alligata in punctis A & B, quæ traherentur in puncto concurſus I a duabus potentiis L & K, una horizontali LI, & altera verticali KI, quarum illa omnibus potentiis horizontalibus BE, hæc autem omnibus verticalibus BD ſimul ſumptis æquivaleret; verum omnes BE æquantur integr. ndy quod eſt $= ny$, & omnes BD $=$ integr. ndx quod eſt $= nx$: ideoque potentia L $= ny$, & potentia K $= nx$; igitur ut inveniatur potentia partialis in A, quæ nimirum requiritur ad ſuſtinendam ſolummodo potentiam L, faciendum eſt, ceu docet Celeb. Varignon in ſua *Propoſitione fundamentali ponderum ſuſpenſorum* * ut ſinus anguli AIB, vel ejus complementi ad duos rectos KIB, ad ſinum ang. MIB, id eſt ut IM ad MG, ſed ut bG ad GB, id eſt, ut dx ad dy; ita potentia L, ſeu ny, ad potentiam partialem

* Projet d'une Nouvelle Méchanique. *Pag.* 11.

lem in A, quæ itaque invenitur $= \frac{nydy}{dx}$: quia nunc directio potentiæ K eſt ipſa tangens KI, ſuſtinebitur hæc tota a puncto A; ideoque potentiæ partiali inventæ $\frac{nydy}{dx}$ addenda eſt potentia K, ſeu nx, ad habendam potentiam totalem & conſtantem in A, quam poſuimus $= a$; & ſic eliciemus hanc æquationem differentialem $\frac{nydy}{dx} + nx = a$, quæ, multiplicata per dx, dat $nydy + nxdx = adx$, ſumptiſque integralibus habebitur $\frac{1}{2}nyy + \frac{1}{2}nxx = ax$ ſeu $yy + xx = \frac{2ax}{n}$; quæ æquatio oſtendit curvam quæſitam ABC eſſe circularem, cujus radius vel ſemidiameter $= \frac{1}{n}a$. *Q. E. I.* Ubi notandum potentiam ſuſtinentem in B, ſeu, quod tantundem eſt, vim firmitatis quæ requiritur ne filum rumpatur, per Prop. Præcl. Varignonii modo allegatam, reperiri ubique æqualem potentiæ ſuſtinenti in A. Si præterea velimus rationem invenire inter vires inflantes, & vires ſuſtinentes, ſeu firmitatis fili requiſitæ, id eſt, ſi creſcentibus, vel decreſcentibus n, aut BH, determinare libeat in qua ratione creſcant, vel decreſcant, potentiæ ſuſtinentes in A, vel B, manentibus interim radiis circulorum æqualibus, ponatur BH $= mds$ & potentia ſuſtinens in A, vel B $= b$, & habebitur hæc æquatio $yy + xx = \frac{2bx}{m}$; quia autem radii ponuntur æquales, erit $\frac{b}{m} = \frac{a}{n}$, ideoque $n : m = a : b$, hoc eſt, vires ſuſtinentes, vel firmitatis requiſitæ, ſunt in ratione virium inflantium; id quod etiam Frater meus ita invenit, ut videre licet in regulis, quas publicavit, † pro determinatione curvaturæ veli.

X I.

Methodo, qua uſi ſumus in hac ſupputatione, fere tota niti-

† *Act. Erudit. Lipſ.* 1692. *Maj. pag.* 203.

nititur curvarum quas velarias & catenarias apellamus indago. Si quis etenim ejus veſtigia ſequatur, & in calculo differentialium & integralium ſit mediocriter verſatus, facile omnium, quæ paſſim in *Actis Lipſienſibus* & *Diario Pariſienſi*, ac fortaſſe alibi ſuper hac materia publicavimus, & a Celeb. Viris LEIBNITIO & HUGENIO publicata ſunt, penetrabit demonſtrationem, totumque deteget myſterium, quod inter plures, quos novi etiam perſpicaciſſimos, latebat Mathematicos, inque ſui admirationem rapiebat: Sed proſequamur propoſitum. Vidimus modo filum, quod in omnibus ſuis punctis tenditur ad perpendiculum a viribus æqualibus, curvari in circulum; unde concludimus veſiculas, vel machinulas fibrarum muſcularium, quarum latera utique æqualiter, & in omnibus ſuis punctis perpendiculariter premuntur ab aura elaſtica, non eſſe rhomboidales, ſed circulares; ita ſi Muſculus nullam appenſam reſiſtentiam ſuperandam haberet, machinulæ in perfectos & integros circulos perexiguos expanderentur: ſed quia Muſculus ſemper pondera, & reſiſtentias, ſi non forinſecus advenientes, ſaltem ſui ipſius & oſſium ſubmovere debet; fit ut machinulæ non integram adipiſcantur figuram circularem; reſiſtentia enim impedit quo minus in longitudine ſe ſatis contrahere poſſint: non ſecus ac fieri ſolet cum iſtis ampullis, quas infantes ex lotura ſaponis conficiunt; hæ enim, ob æquabilem aëris expanſi vim (quam elaſticam vocant,) in perfectam ſphæram intumeſcunt; ſed cum interdum guttula in fundo ampullæ adheret, tunc ob gravitatem guttulæ, ampulla tantillum elongatur & ex Sphæra mutatur in Sphæroidem ex circumvolutione ſegmenti circularis factam: pariter itaque machinulæ muſculares, quas ut planas conſideramus, habebunt figuram ex duobus ſegmentis æqualibus ejuſdem circuli com-
TAB. V. *Fig.* 2. poſitam, ut monſtrat *Fig. II*: ex quibus pluribus, in longitudine ſimiliter inſtar annulorum catenæ poſitis, formatur fi-
Fig. 3. bra motrix (*Vid. Fig. III.*) quarum aliquæ, ſimul ſumptæ ſecundum longitudinem & parallelo ſitu juxta ſe coaptatæ, conſti-
Fig. 4. tuunt faſciculum muſcularem, ceu oſtendit *Fig. IV.* ubi etiam conſ-

piciuntur fibræ transverſariæ, quæ ligaturas laxas efficiunt, ut materia inflans omnes machinulas ſimul & libere penetrare poſſit.

XII.

His ita ſe habentibus, ſupputare licebit rationem inter vim dilatantem & reſiſtentias, ſeu quanta requiratur elaſticitas auræ motivæ pro ſingulis elevationibus reſiſtentiarum ſemper æqualium; cujus rei gratia fere totum Opus *Borellianum* confectum eſt: Sit itaque machinula muſcularis BEADB, compoſita ex duobus ſegmentis circularibus BDA, & BEA; & C centrum arcus AEB; ductiſque radiis CA, CE, ille TAB. V.
ad extremitatem, hic per medietatem machinulæ, ita ut DE *Fig.* 5.
ſit latitudo maxima, quam bifariam ſecat in R longitudo maxima AB, ſeu chorda arcus AEB vel ADB: quoniam nunc ang. EAC = recto = RAC + ACR, erit ang. EAR = ACR; ideoque arcus AE eſt menſura anguli EAR, vel duplus BEA menſura dupli anguli AED: Hinc, datis ſemilongitudine lateris machinulæ, id eſt, arcus AE, in partibus æqualibus 100000, & ſemiangulo dilatationis EAR; inveniri poteſt ſublevatio reſiſtentiæ z, quæ nempe eſt æqualis exceſſui, quo arcus AEB ſuperat ſuam chordam AB, vel duplo exceſſui, quo arcus AE ſuperat ſuum ſinum rectum AR; quod ita peragitur. Fiat ut peripheria circuli ad radium, id eſt, ut 44 ad 7; ita numerus graduum peripheriæ 360 ad quartum $57 \frac{3}{11}$, qui erit æqualis longitudini radii in gradibus: facto nunc, ut numerus graduum ang. EAR, vel arcus EA, ad $57 \frac{3}{11}$; ita numerus partium æqualium 100000 longitudinis arcus EA, ad quartum, qui erit æqualis numero partium æqualium radii AC, qualium arcus EA continet 100000: habebitur tandem longitudo ipſius AR, nimirum faciendo, ut ſinus totus ad ſinum ang. EAR, vel arcus EA; ita numerus inventus partium radii AC ad quartum, qui erit æqualis numero partium æqualium ipſius AR, qualium arcus EA continet 100000; duplus itaque exceſſus arcus AE ſupra ſinum AR inventum, erit elevatio reſiſtentiæ z quæſita. *Q. E. I.*

XIII.

Poſtquam elevationes hoc modo inventæ ſunt, vires dilatatrices respectivas pro singulis illis ita determinabimus. Supra §. X. posuimus potentiam curvam, in quolibet puncto, vel potius in quâlibet differentiali curvæ, ad perpendiculum prementem $= nds$: vis itaque dilatans, vel elasticitatis auræ motivæ absoluta, qua latera machinulæ dilatantur, exprimitur per n; sed ibidem invenimus, ponendo vim sustinentem, vel firmitatis in quolibet fili puncto requisitæ $= a$, radium arcus circuli in quem filum incurvatur fore $= \frac{1}{n} a$.

TAB. V. Fig. 5. Quia vero per Prop. modo allegatam Cl. VARIGNONII, resistentia z est ad vim sustinentem in B, cujus utique directio est ipsa tangens BF, ut sinus anguli EBD ad sinum anguli EBR, erit $a = \frac{z \times sin.\,EBR}{sin.\,EBD}$, & sic substituto in quantitate $\frac{1}{n} a$, loco a ejus valore, habebitur radius (per modum supra propositum inventus, quem itaque vocemus r) $= \frac{z \times sin.\,EBR}{n \times sin.\,EBD}$; ideoque vis elasticitatis absoluta auræ motivæ $n = \frac{z \times sin.\,EBR}{r \times sin.\,EBD}$: ac propterea vis, qua premitur semilatus machinulæ, id est n AE erit $= \frac{100000\, z \times sin.\,EBR}{r \times sin.\,EBD}$.

XIV.

Calculi hujus beneficio constructa est præsens Tabella, ad imitationem illius quam BORELLUS * pro sua hypothesi confecit; quæ, si conferatur cum nostra, videbitur ingens discrimen, tum quod ad vires motivas, tum quod ad elevationes attinet; ubique enim eas, aut justo majores, aut justo minores facit. Cæterum, ex Tabella colligimus, ab initio inflationis, cum angulus semidilatationis EAR valde acutus est, resistentiam permagnam habere rationem ad vim absolutam elasticitatis auræ motivæ; siquidem angulo EAR existente 30 min. resistentia erit ad vim elasticitatis ut 22900000 ad 1. Unde satis colligere est, quam debili admodum ebullitione opus sit in Musculis, ad immensam, imo incredibilem, energiam Musculorum

* Lib. *de Motu animalium.* Part. 1. Prop. 99.

rum efficiendam; potentia quippe, qua Musculi vasta pondera elevant, longe major est quam gravitas ponderum, utpote quæ multo remotiora sunt ab hypomochlio quam Musculorum insertio. Hac itaque in re, natura non utitur instrumentis, scilicet ossibus ad ponderum elevationes faciliores reddendas; ossa enim vices subeunt vectis inversi, in quo nempe pondera superanda ab articulatione, tanquam a fulcro, seu hypomochlio, majorem, vis autem movens, seu Musculus, minorem obtinet distantiam. Hinc si pondera Musculis nulla omnino re interjecta possent alligari, plusquam centies, imo interdum millies, majora elevarentur pondera, quam modo ordinario.

Hæc si bene perpendamus, citra omnem hæsitationem conveniemus, minimam inflationem Musculorum datam quamvis resistentiam superare, & proinde tenerrimum infantem quantamcunque molem elevare posse; sed quanto resistentia major est vi motiva elasticitatis, tanto elevatio minus sensibilis evadit; ita ut vasta pondera, quibus elevandis, vel amovendis, vires nostras impendimus, omnino quiescere videantur, quæ tamen revera e suo loco moventur. Hæc cum ita sint, admiratio facile cessabit, quam afferre potest experimentum illud, quod teste WALLISIO * *Oxoniæ* & *Londini* institutum fuerat, cum inflata vesica bubula, cujus adminiculo flatus spiritus humani, per angustam fistulam ingredientis, elevare notabiliter poterat pondus 50, 60, 70 aut etiam plurium librarum, pro viribus pulmonum flantis; adde & pro angustia fistulæ. Experimentum hoc, non solum facilius ex supra dictis explicari, sed etiam longe exactius per principia nostra, quæ & veram vesicæ figuram, & aëris elaterium, ut vocant, quod ipsi proprium est, ponunt, ad calculum potest revocari, quam fecit WALLISIUS; ut pote qui, commodioris, sed minus exacti calculi gratia, genuinam figuram sphæroidalem vesicæ inflatæ ademit, in ejusque locum substituit rhombum solidum; plane ut fecit BORELLUS cum suis machinulis; præter hoc, etiam ipsum aëris elaterium non consideravit, quod tamen unice præstat dilatationis officium: hinc fieri nequit, quin calculus *Wallisianus* a vero multum abludat, ideoque error satis fiat notabilis.

* *Mechan.* Cap. XV. Prop. 3.

Positis	Arcu E A, vel ang. E A R, qui est semiss. E A D	Longitudine arcus A E. & resistentiæ z in part. æqu.	erit	Radius A C vel E C	Sinus rectus A R	Elevatio resistentiæ.	Vis sustinens, seu requisitæ firmitatis fibræ muscularis.	Vis absoluta elasticitatis auræ motivæ, quam proxime.	Vis elasticitatis auræ motivæ, qua premitur semilatus machinulæ A E.
	gr. m								
	0 0	100000		infinit.	100000	0	50000	0	0
	0.30	100000		11454546	99958	84	50002	$\frac{1}{229}$ paul. min.	435
	1. 0	100000		5727273	99954	92	50007	$\frac{1}{114}$ p. m.	873
	1.30	100000		3818182	99948	104	50017	$\frac{1}{76}$ p. m.	1309
	2. 0	100000		2863636	99939	122	50030	$\frac{1}{57}$ p. m.	1747
	3. 0	100000		1909091	99914	162	50068	$\frac{1}{38}$ p. m.	2622
	5. 0	100000		1145454	99832	336	50191	$\frac{1}{22}$ p. m.	4381
	10.0	100000		572727	99454	1192	50774	$\frac{1}{11}$ p. m.	8865
	15.0	100000		381818	98822	2356	51764	$\frac{1}{7}$ p. m.	13557
	20.0	100000		286363	97942	4116	53209	$\frac{1}{5}$ p. m.	18582
	30.0	100000		190909	95454	9092	57735	$\frac{1}{3}$ p. m.	30242
	45.0	100000		127272	89994	20012	70710	$\frac{1}{2}$ paul. plus.	57145
	60.0	100000		95454	82665	34670	100000	1 p. p.	104708
	70.0	100000		81818	76883	46234	146191	2 p. m.	178678
	80.0	100000		71590	70492	59016	287968	4 p. p.	403785
	85.0	100000		67379	67122	65756	573709	9 p. m.	851465
	90.0	100000		63636	63636	72728	infinit.	infinit.	infinit.

X V.

X V.

Ex iis quæ supra §. XI. diximus, & ex Tabella nostra liquet machinulam, vel vesiculam muscularem AEBD integram circularem figuram nunquam adipisci posse; quia nempe, eo in casu, vis absoluta elasticitatis infinities superare deberet resistentiam; id quod impossibile est: dantur itaque certi limites ad quos contractio musculorum non pertingit; maxima enim machinulæ contractio, seu resistentiæ elevatio *ad quam non*, est æqualis 72728 partibus earum, qualium semilongitudo lateris continet 100000: ex quo clarum est, quamvis machinulam, in maxima sua distensione, ad partem circiter sui tertiam non contrahi; id quod etiam de ipso musculo censendum, quia omnes machinulæ ex quibus constat similiter contrahuntur: contractio enim unius machinulæ est ad contractionem totius fibræ muscularis, ut longitudo illius ad longitudinem hujus. TAB. V. Fig. 5.

X V I.

Ut contemplationem nostram ulterius extendamus, considerandæ nobis veniunt ipsæ quantitates Spirituum animalium vel fluidi nervorum, quæ, manente elevatione resistentiarum semper eadem, pro singulis resistentiis impenduntur. Circa finem §. X. ostendimus, vires inflantes, id est, vires absolutas elasticitatum auræ motivæ, in æqualibus circulis, esse viribus sustinentibus proportionales: quoniam autem, manente sublevatione resistentiæ, vel angulo EBD semper eodem, vires sustinentes (ceu patet ex Prop. Cl. VARIGNONII) sunt in ratione resistentiarum z; oportet ut etiam resistentiæ elasticitatibus sint proportionales: sed pro concesso assumimus, quantitates auræ motivæ, & quantitates Spirituum animalium eandem semper servare rationem; hoc est, duplam, triplam, quadruplam copiam fluidi Spiritus animales constituentis excitare duplo, triplo, quadruplo densiorem auram motivam. Si nunc poneretur BOYLÆI principium, scilicet *densitates elasticitatibus esse proportionales*, quod in aëre communi sensibiliter verum est, res foret expedita; nimirum quia quantitates Spirituum animalium densitatibus auræ motivæ, & densitates elasticitatibus, elasticitates vero resistentiis proportionantur, essent etiam quantitates Spirituum animalium cum resistentiis in eadem ratione; hoc est, ad sustinendum pondus 100 librarum in eadem altitudine, & per idem temporis spatium, duplo major copia Spirituum animalium absumeretur, quam ad sustinendum pondus 50 librarum; & sic in aliis.

XVII.

Deprehenditur autem, si principium BOYLÆI accurate per experientiam examinatur, densitates elasticitatibus non omnino esse proportionales: differentia quidem exigua est & fere insensibilis, si experimentum instituitur cum aëre parum denso, sed sensibilis evadit cum aëre valde condensato; tunc enim elasticitates in majori ratione crescunt quam densitates: nostra itaque interest indagare, crescentibus densitatibus quomodo crescant elasticitates. In hunc finem, in dato volumine a concipio particulas aëris, vel auræ elasticæ, occupare spatium b, & materiam subtilem residuum voluminis spatium $a - b$: nunc, in æquali volumine a, aliam quantitatem auræ elasticæ c concipio, ita ut reliquum spatium materiæ subtilis sit $a - c$; ideoque, ceu fluit ex iis, quæ demonstravit Frater meus, * elasticitas aëris primi voluminis est ad elasticitatem secundi, in ratione composita ex reciproca spatiorum a materia subtili occupatorum & directa aëreorum, nempe ut $ab - bc$ ad $ac - bc$; sed densitas primi est ad densitatem secundi, in ratione directa spatiorum aëreorum, nempe ut b ad c; si itaque construatur curva ACD ad axem AF,

* Dissert. *de Gravitat. Ætheris*, pag. 37 & sq. pag. 93. edit. Genev.

AF, ejus naturæ, ut sumpta in axe AB $= a$, & ductis applicatis DF, CE, rectangulum sub BE & AF sit ad rectangulum sub BF & AE, ut DF ad CE; sumanturque abscissæ AE, AF pro densitatibus aëris in volumine per constantem lineam AB designato contenti, erunt applicatæ DF, CE ejusdem elasticitates. Si, more algebraïco, quæratur æquatio naturam curvæ ACD exprimens, invenietur, positis constante AB, a; & alia ad libitum assumpta BF, f; DF, g; abscissa AE, x; & applicata EC, y; hæc æquatio $fgx = aay - afy - axy + fxy$, quæ indicat curvam quæsitam esse Hyperbolam, & applicatam BG in B fore infinitam, adeoque Asymptoton Hyperbolæ; cujus centrum habetur producendo Asymptoton GB in R, ita ut BR sit quarta proportionalis ad AF, FD & BF; semiaxis transversus est æqualis mediæ proportionali inter BR & duplam AB. TAB. V. *Fig. 6.*

XVIII.

Ex his perspicuum est elasticitates, præsertim in aëre multum condensato, in longe majori ratione crescere quam ipsæ densitates; elasticitas etenim tandem abit in infinitum, quando densitas suum quidem maximum, sed nonnisi finitum gradum attingit. Hæc ut ad rem ipsam nunc applicemus: supra §. XVI. posuimus densitates auræ motivæ ejusdem voluminis quantitatibus Spirituum animalium impensorum, qui illam effervescendo cum sanguine produxerunt, esse proportionales; ibidem vero demonstravimus elasticitates proportionari resistentiis; ex quo igitur colligendum, ipsam etiam Hyperbolam ACD determinare relationem resistentiarum ad quantitates Spirituum absumptorum; id est, si CE, DF denotent resistentias, denotabunt AE, AF quantitates Spirituum absumptorum. Sit jam volumen machinulæ muscularis, vel, quod etiam valet, omnium Musculi machinularum simul sumptarum, quod

quod exprimitur per AB, 10 partium, BF, seu f, $=$ 1, FD, seu g, $=$ 100000; si nunc quantitas Spirituum, id est, AE, seu x, sit partium

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

per æquationem curvæ reperietur CE, seu y, id est, pondus elevandum, partium

1234. 2778. 4762. 7407. 11111.16666.25926.44444.100000. infinit

Hinc, ni fallor, ratio petenda est ejus, quod in dies experimur & etiam miramur, cur nempe magna pondera (ea saltem quæ viribus nostris proportionata sunt) non multo majori difficultate eleventur, ad eandem puta altitudinem, quam exigua. Omnis enim difficultas, in motionibus animalibus peragendis, unice, ut credo, provenit a dispendio Spirituum animalium; verum Spiritus in longe minori ratione absumuntur, quam sunt pondera elevanda; ita ut, si ex. gr. elevandum sit pondus duplum, non ideo etiam requirantur duplo plures Spiritus animales, ceu satis clarum est ex laterculo isto, ubi reperitur quod, ope quantitatis Spirituum animalium, quæ sit ut 8, elevetur pondus quadruplo majus, quam alia quantitate quæ sit ut 5; licet jactura Spirituum, illo in casu, ne quidem duplo major sit, quam jactura in hoc; ut pote quæ se habent ut 8 & 5: in hac igitur ratione etiam se habebunt difficultates, quæ sentiuntur in istiusmodi ponderibus attollendis.

XIX.

Utilis heic non minus quam curiosa incidit speculatio, nimirum, qua ratione æstimandi sint lassitudinum & roboris gradus. Pono æqualia dispendia Spirituum æquales lassitudines inducere, hoc est, lassitudines sese habere ut copiæ spirituum absumptorum: pono itidem, in sustinendo uno eodemque pondere, & quidem semper in eadem altitudine, temporibus æqualibus deperditum iri copias Spirituum æquales: hoc facile probabitur, cum enim hoc modo Musculus sit in continua tensione, op-

opportet, ut ad conservandam ejus inflationem, quovis momento suggeratur nova & æqualis Spirituum animalium quantitas; secus enim æquabilis ebullitio, quæ utique ad æqualem inflationem Musculi conservandam necessaria est, non efficeretur; hæc ergo stillicidia fluidi nervos implentis, quæ æquabili fluxu exprimuntur, consument Spiritus animales in ratione temporum, & proinde facient ut, in portando onere, vel sustinendo pondere, lassitudines inductæ se habeant in ratione temporum: sed si pondera sint inæqualia, & diversis temporibus, ab eodem Musculo in eadem altitudine sustinenda; erunt lassitudines in ratione composita ex ratione temporum, & ex ratione respondentium quantitatum Spirituum animalium uno momento absumptorum, quæ haberi possunt, ex præcedenti Tabella, vel melius, ex ipsa æquatione ad Hyperbolam.

XX.

Simili modo etiam gradus roboris determinare possemus: Non enim opus est, ut unus homo duplo majori copia Spirituum polleat, ut sit duplo robustior quam alius: posito nemque, duos istos homines æqualis esse corporis staturæ, id est, habere omnes suos Musculos respective similes & æquales; communiter dicere solemus alterum altero duplo, triplo robustiorem esse, cum duplo, triplo majus onus ad æqualem altitudinem elevare potis est: verum, ut jam satis ostendimus, onera vel pondera non sunt in ratione quantitatum Spirituum absumptorum, sed in multo majori; ideoque nonnunquam sufficit, ut quis vel tantillo plures Spiritus animales suppeditare possit quam alius, ad duplam, vel majorem vim exercendam. Sed quia tempus me deficit, & alia alio me vocant negotia, hæc quæ raptim scripsi fusius tractare non licet: id unicum monitum volo, cum hîc generalem Musculorum œconomiam, eorumque motionum explicationem tradere animus fuerit, me primario attendisse ad eos Musculos, qui motui corporis locali, seu externo, inserviunt: Hoc igitur Lectorem

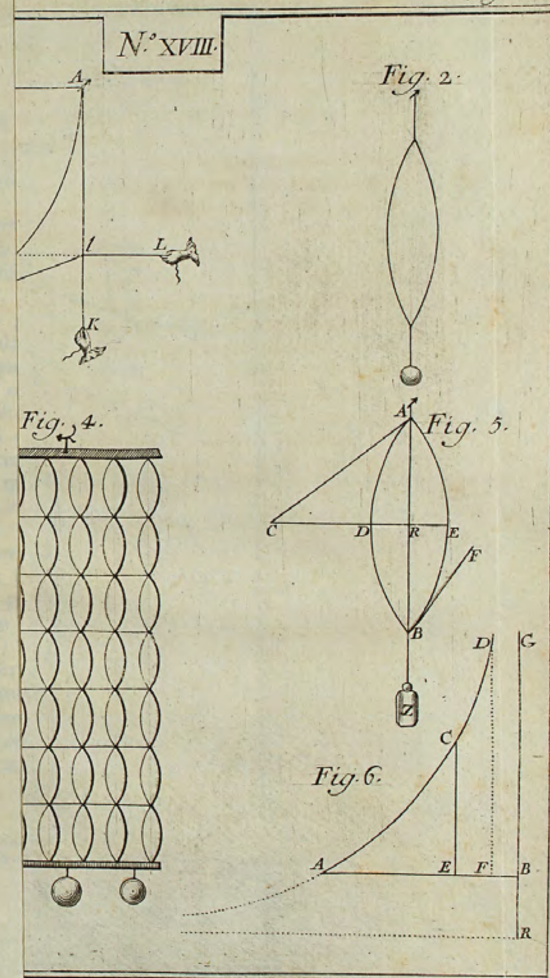
 non

non offendet, quod Musculos in genere ex fibris rectis & parallelis constare diximus: pauci enim, qui hanc structuram ad sensum non habent, quales sunt illi quos BORELLUS radiosos vocat, quoniam eorum fibræ instar radiorum convergere videntur, nihilo secius fibras suas fasciculis inclusas æquidistantes habent, ut ostendit BORELLUS. * Reliqui autem musculi, ut diaphragmatis, cordis, sphincterum, aliorumque, quorum fibræ, vel obliquo, vel spirali, vel circulari, semper tamen parallelo tractu procedunt, sicuti peculiari modo fabricati sunt, ita etiam suas peculiares obeunt functiones; quæ vero cum aliis in eo conveniunt, quod omnes omnium Musculorum actiones a machinularum ex quibus constant, inflatione dependeant: sic ut in tota humani corporis machina, ne minima quidem reperiatur particula in motu constituta, quæ non moveatur, vel immediate ab ipsa anima imperante, vel a Musculis; quorum nullus est, qui Leges mechanicas, quas hîc explicuimus, non stricte & continuo observet, usque dum vitæ necisque Arbiter, mirabilem corporis & animæ nexum dissolvens, universo machinæ motui imposuerit finem.

* Lib. *De Motu Animal.* Part. I. Prop. 80.

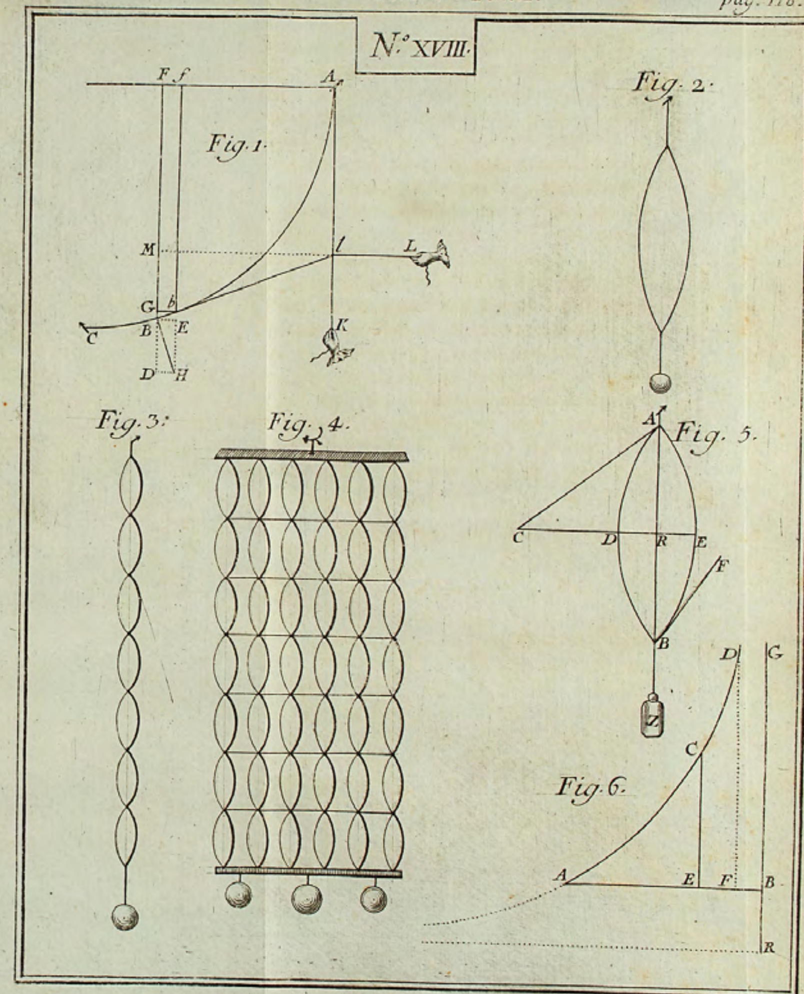
JOHAN-

Tab. V. *Tom. I.* *pag. 118.*



fibris rectis & pa-
anc structuram ad
BORELLUS ra-
diorum converge-
s inclusas æquidi-
* Reliqui autem
um, aliorumque,
circulari, semper
liari modo fabri-
functiones; quæ
es omnium Muf-
constant, inflatio-
ris machina, ne
constituta, quæ
imperante, vel
echanicas, quas
rvet, usque dum
& animæ nexum
rit finem.

OHAN-



JOHAN

Constructio facilis

Recta

JAM olim mihi t
levem autem o
temporis occupat
non statim vacabat
rum *mensem Junium*
sese offerebat prob
huic affinia. Ex q
perfectæ, & obiter
sum prosecutus. N
namen, perveni ad
tantior est, quod c
& faciliori modo,
nem curvæ mechanic
lantium in spiralibus

Constructioni me
partim, ut eam ex
etiam, & quidem
tum capiat, & no
non doctius evadit
Eruditi semper obs
LEIBNITIUM i
literato ostendisse r
gulari opere *Scient*
rus est; de quo,
pollicemur.

† Jac. BERNOUL
recessus æquabilis a punct
1694. Jun. pag. 276.

N°. XIX.

JOHANNIS BERNOULLI

Constructio facilis Curvæ recessus æquabilis a puncto dato, per Rectificationem Curvæ Algebraicæ.

JAM olim mihi tentatum præsens problema lubens confiteor; levem autem ob scrupulum, qui festinanti, & aliis tum temporis occupatissimo, occurrebat, quemque adeo diluere non statim vacabat, ab eo prorsus abstinui. Cum vero nuperum *mensem Junium* pervolverem, inscio mihi & inexpectanti sese offerebat problematis hujus Solutio *fraterna* †, aliaque huic affinia. Ex quorum occasione filum meæ solutionis imperfectæ, & obiter olim tentatæ, denuo aggressus & feliciter sum prosecutus. Non multus in illo fui, sed, leve post conamen, perveni ad constructionem, quæ fraterna tanto præstantior est, quod curvæ algebraicæ rectificatione idem præsto, & faciliori modo, quam quod *Frater* præstitit per rectificationem curvæ mechanicæ: Nec opus habeo radiis circulorum osculantium in spiralibus, qui tamen & ipsi nullo labore inveniuntur. Acta Erudit. 1694. Oct. pag. 394.

Constructioni meæ præfigam calculum, qui me eo perduxit, partim, ut eam ex fraterna deductam nemo existimet, partim etiam, & quidem præcipue, ut publicum exinde emolumentum capiat, & non meris constructionibus (quibus intellectis non doctius evadit) pascatur. Optandum sane esset, ut idem Eruditi semper observarent, & hac in re summum Geometram LEIBNITIUM imitarentur, qui egregia sua inventa Orbi literato ostendisse non contentus, viam insuper analyticam, singulari opere *Scientiam infiniti* complectente, propediem editurus est; de quo, ut de cæteris ejus conatibus, multum nobis pollicemur.

ANALY-

† Jac. BERNOULLI, *Solutio Problematis Leibnitiani, de Curva accessus & recessus æquabilis a puncto dato, mediante rectificatione curvæ elasticæ.* Act. Erudit. 1694. Jun. pag. 276.

A N A L Y S I S.

TAB. VI. N°. XIX. Ut ad inſtitutum redeam. Sit ABC curva quam quæri-mus, per quam nempe grave deſcendens (ex altitudine data PA prius delapſum) æqualibus temporibus æqualiter recedat a puncto dato A.

Radio AP deſcripta peripheria PFH, ductæ intelliguntur AB ſecans peripheriam in E, & BL, EG perpendiculares ad PA productam, itemque centro A arculus bβ, abſcindens ex AB particulam Bβ æqualem receſſui momentaneo, & proinde æqualem ei particulæ curvæ quam grave primo momento percurrit. Eſto nunc AP $= a$, AB $= x$, AG $= y$, arcus HE $= z$, Ee $= dz$, B$\beta = dx$, erit bβ (quia Ae : Ab = Ee : bβ) $xdz : a$, ideoque Bb $= \sqrt{(aadx^2 + xxdz^2)} : a$; quoniam autem B$\beta$ ſupponitur æqualis ei particulæ curvæ quam grave in A percurrit, æquali momento quo percurrit bB, erit bB ad Bβ, ut celeritas in B ad celeritatem in A, ut (ex natura gravium deſcenſus) $\sqrt{PL}$ ad $\sqrt{PA}$; ideoque $\frac{\sqrt{(aadx^2 + xxdz^2)}}{a}$: $dx = \sqrt{(\frac{xy}{a} + a)} : a$, id eſt, ſumendo quadrata, $aadx^2 + xxdz^2 : aadx^2 = xy + aa : aa$, & dividendo $xxdz^2 : aadx^2 = xy : aa$; reducta proportione ad æqualitatem, habetur $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dz}{\sqrt{y}}$; ſed, ex natura circuli, invenitur $dz = ady : \sqrt{(aa - yy)}$, ergo $dx : \sqrt{x} = ady : \sqrt{(aay - y^3)}$ quæ eſt æquatio differentialis pro curva quæſita; ubi indeterminatæ x & y cum ſuis differentialibus dx & dy, ſine ulteriori diſquiſitione, ſponte ſeparantur; ſecus ac fit, cum pro indeterminatis aliæ aſſumuntur lineæ: & hoc eſt, in quo totum myſterium conſiſtit; quod ſi LEIBNITIUM, in hoc ſupputandi genere verſatiſſimum, hucuſque latuit, mirum non eſt; ſiquidem caſu potius quam induſtria eo perveni-tur, utpote quod optioni fortuitæ & arbitrariæ indeterminatarum unice eſt tribuendum. Præcipuum autem quod agendum reſtat, eſt ut, ex jam inventa æquatione differentiali, problema quam commodiſſime conſtruatur. Per quadraturam ſpatii curvi-lineï

linei [cujus abſciſſa exiſtente y, applicata ſit $aa\sqrt{a} : \sqrt{(aay - y^3)}$] conſtrui poſſe nemo non videt; ſed quia in praxi non facile quadrantur ſpatia, tentandum illud eſt per rectificationem curvæ alicujus; quæ ſi poteſt eſſe algebraica, in leges Geometriæ cenſendus eſt peccare qui recurrit ad mechanicam; præſertim ſi hæc ipſa mechanica non minus operoſe per quadraturas ſpatiorum deſcribatur. Heic igitur meum, de quo nec *Fratri* adhuc conſtat, oſtendam modum, quo ad curvam algebraicam pervenitur, per cujus rectificationem problema conſtruitur. Æquationis differentialis inventæ $dx : \sqrt{x} = ady : \sqrt{(aay - y^3)}$ membri non integrabilis $ady : \sqrt{(aay \quad y^3)}$ [quod ita appello, quia ejus integrale vel ſummatorium in quantitatibus algebraicis non habetur] ſumo quadratum $aady^2 : (aay - y^3)$ illudque, vel ejus multiplum, ſubmultiplumve, per methodum *Diophanteam* divido in duo alia quadrata, quorum latera, ſi fieri poteſt, ſunt integrabilia; ſecus enim orietur tantum curva mechanica: hic itaque multiplum quadratum $a^3dy^2 : (2aaay - 2y^3)$ dividitur in hæc duo alia $(aa + 4ay + 4yy)\, dy^2 : (4ay + 4yy)$ & $(aa - 4ay + 4yy)\, dy^2 : (4ay - 4yy)$ quorum latera ſunt $(ady + 2ydy) : 2\sqrt{(ay + yy)}$ & $(ady - 2ydy) : 2\sqrt{(ay - yy)}$ horumque integralia $\sqrt{(ay + yy)}$ & $\sqrt{(ay - yy)}$. Ideoque constructa Curva AMONA, cujus abſciſſa AR $= \sqrt{(ay + yy)}$, & applicata MR $= \sqrt{(ay - yy)}$ [id eſt, cujus abſciſſæ & applicatæ reſpondeant applicatis Hyperboles æquilateræ & Circuli eandem diametrum a & eaſdem abſciſſas y habentium] erit elementum hujus curvæ $= dy\sqrt{(\frac{aa + 4ay + 4yy}{4ay + 4yy} + \frac{aa - 4ay + 4yy}{4ay - 4yy})} = \frac{dy\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2ay - 2y^3)}} = dx\sqrt{a} : \sqrt{2x}$; ideoque integrale primi eſt æquale integrali ultimi, id eſt, portio Curvæ AM $= \sqrt{2ax}$, proindeque $x = \overline{AM}^2 : 2a$.

Conſtructio. Ex his ſequitur conſtructio facillima problematis: Factis enim & poſitis quæ prius, producatur, ſi opus, AE ad B, ita ut AB ſit tertia proportionalis ad HP & AM; erit B in curva optata ABC, per quam grave deſcendens, ſi ex P ceciderit, æqualibus temporibus æqualiter a puncto A rece-

recedet. Demonſtrationem Syntheticam, quam quivis ex Analyſi præmiſſa ſtatim contexere poterit, omittimus. Primariæ etiam proprietates hinc facile deducuntur, quas recenſere animus non eſt; id unicum monuiſſe ſufficiat, non laminam, ſed tubum ſecundum lineam ABC incurvatum adhibendum eſſe; nam globulus deſcendendo non ubique inſiſtit convexitati curvæ. Cæterum, diſtantia puncti C, in quo curva ſemet ipſam ſecat, a vertice A, plus quam duplo major eſt AH; ſecus quam in Schemate nupero repræſentatur. Curva AMONA eſt quatuor dimenſionum, quæ etiam ſemet ipſam ſecat in A, & quæ continuata producit partem inferiorem ſimilem & æqualem ſuperiori, faciens angulum MAN, ejuſque oppoſitum, rectum. Peripheria HFP tranſit per ejus punctum S, remotiſſimum ab axe AO.

Opportune hic incidit modus conſtruendi Curvam Elaſticam, qui etiam per ſolas rectificationes Curvæ AMO & Ellipticæ cujuſdam peragitur, & proinde in praxi longe facilior quam is qui quadraturas ſpatiorum ſupponit. Semiaxibus, AO, & radio circuli AF perpendiculari ad AO, conſtruatur quadrans ellipticus FTO, & ducta quavis in eo applicata TQ, ſumatur $AR = \frac{AQ}{AF}\sqrt{(\overline{AF}^2 + \overline{AQ}^2)}$ appliceturque QZ = arcui elliptico TO, mulctato quarta proportionali ad AO, AF & AM; quo facto, erit punctum Z in Curva Elaſtica. Demonſtratio non minus facilis eſt quam conſtructio. Sit enim $AQ = x$, $QZ = y$, erit elementum arcus TO (ex natura Ellipſis) $= (aadx + xxdx) : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, & elementum curvæ AM (ex ejus natura & conſtr.) $= aadx\sqrt{2} : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, ideoque elementum quartæ proportionalis ad AO, AF & AM, erit $= aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, ergo Elem. TO — Elem. $\frac{AF \times AM}{AO}$, id eſt, Elem. $QZ = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)} = dy$, quæ eſt eadem æquatio, quam *Frater* exhibuit pro conſtruenda Elaſtica, quamque ſuſpicatus eſt, ſed perperam, nullatenus a cujuſdam ſectionis conicæ rectificatione dependere: dependet enim, ex parte ſaltem, a rectificatione curvæ Ellipticæ.

MODUS

N°. XX.

MODUS GENERALIS

Conſtruendi omnes æquationes differentiales primi gradus. Auctore JOHANNE BERNOULLI.

Acta Erud. Lipſ. 1694, Nov. pag. 435.

UNICUM potiſſimum eſt, quod adhuc deſideratur ad perficiendam methodum tangentium inverſam, ſeparatio nempe quantitatum indeterminatarum in æquationibus differentialibus primi gradus; pro qua plurimas regulas ſpeciales jam dudum inveni; generalis autem, per quam in quavis æquatione differentiali propoſita procedat ſeparatio indeterminatarum, vix ſperanda eſt. Quod cum jam ab aliquo tempore perpendiſſem, mentem ſubiit, an non poſſibile eſſet æquationem differentialem conſtruere, non adhibita ſeparatione iſta; quod tandem etiam ex voto ſucceſſit. Inter plures autem, quos detexi modos, præſens commodior videtur, qui, dum melior prodeat in lucem, ſacra quaſi erit anchora ad quam recurrendum, cum omnes regulæ pro ſeparatione indeterminatarum inſtitutæ naufragium faciunt.

Omnis æquatio differentialis primi gradus exprimi poteſt per hanc $sdx = zdy$; poſito literas s & z denotare quantitates formatas ex x, y & conſtantibus: ponatur nunc dy ad dx habere rationem ut m ad a, quæ utique in quolibet curvæ puncto variatur; æquatio differentialis mutabitur in hanc $as = mz$, quæ tres indeterminatas continet s, z & m, ſeu x, y & m; ejus itaque Locus eſt ad infinitas curvas algebraicas (quas *directrices* appellare liceat), quæ conſtruuntur, ponendo unam trium indeterminatarum, ſi vis m, conſtantem; inde enim emerget æquatio duarum duntaxat indeterminatarum, quæ format unam ex infinitis curvis directricibus: ponendo nunc hanc eandem m conſtantem majorem vel minorem, ha-

 bebi-

bebitur alia directrix, & continuando hoc in infinitum, infinitæ conſtruentur curvæ directrices ſuper eodem axe. Sic itaque m ad a, id eſt dy ad dx, omnes habebit poſſibiles rationes. Quo facto, inter duas quaslibet directrices elementaliter diſtantes duco lineolam, ita ut ſinus inclinationis ad axem ſit ad ſinum complementi, ut m, in his directricibus elementaliter diſtantibus ſumta, ad a; Hoc ſi ubique fiat, & tandem omnes ductæ lineolæ (manente una immobili) parallelo motu deprimantur vel elevantur, ſuis directricibus ſemper adhærentes, donec omnes ſibi invicem connectantur; orietur Curva quæſita.

Hinc liquet, uni eidemque æquationi differentiali infinitas ſatisfacere; prout enim lineola immobilis altius vel humilius ſumitur, ſemper alia prodibit curva. Hic notandum venit, ubi lineola ſuam reſpective directricem tangit, ibi curvam quæſitam habere punctum flexus contrarii; quod cuivis attendenti facile patebit. Hinc omnis æquatio differentialis, exceptis iis quarum directrices ſunt lineæ rectæ, exhibet curvas infinitas, quæ gaudent puncto flexus contrarii; inter quas unica poteſt eſſe cujus punctum flexus confunditur cum vertice, vel cum alio puncto, ita ut evaneſcat. Ex. gr. æquationi differentiali $axdx = yydy$, certum eſt reſpondere Parabolam cubicalem ſecundam $\frac{1}{2} axx = \frac{1}{3} y^3$, cujus quidem punctum flexus non exiſtit; infinitæ tamen aliæ dantur curvæ ejuſdem ſpeciei $\frac{1}{2} axx = \frac{1}{3} y^3 \pm b^3$ eidem æquationi differentiali $axdx = yydy$ ſatisfacientes, quæ omnes flexuras contrarias habent. Ex quibus perſpicuum eſt, ipſa hæc puncta flexuum formare aliam Curvam, quæ etiamſi curvæ ipſæ cujus ſunt puncta flexus ſint mechanicæ, ſemper tamen (quod memorabile prorſus eſt) erit algebraica. Exemplo res patebit: Eſto propoſita æquatio differentialis hæc $xxdx + yydx = aady$, quæ, an per ſeparationem indeterminatarum conſtrui poſſit, nondum tentavi: Verum, per generalem methodum præſcriptam ſi reſolvatur, prodibit hæc æquatio $xx + yy = am$, oſtendens omnes curvas directrices eſſe circulos concentricos, quorum centrum

trum commune eſt in ipſo initio abſciſſarum x: ſic itaque infinitæ conſtruentur curvæ, quæ omnes æquationem differentialem propoſitam includunt, quarumque puncta flexus exiſtunt in curva algebraica, quæ ita determinatur: Ex centro circulorum concentricorum ducatur perpendicularis ad axem, in eaque ſumatur punctum diſtans a centro $a \sqrt{(am : (aa + mm))}$ per quod ducta axi parallela ſecabit circulum, cujus radius eſt $\sqrt{am}$, in puncto quod erit ad curvam optatam: Vel ſi mavis, conſtruatur ad axem curva cujus æquatio ſit (poſitis abſciſſa r, & applicata s,) $s^3 + rrs = aar$, tranſibit hæc ipſa curva per puncta flexus omnium curvarum æquationis $xxdx + yydx = aady$ competentium.

Cæterum, idea iſta Conſtructionis univerſalis æquationum differentialium primi gradus, poterit etiam extendi ad differentiales ſecundi altioriſque gradus: Aliis autem, quibus plus vacat, perfectionis honorem relinquo.

N°. XXI.

ADDITAMENTUM

Effectionis omnium quadraturarum & rectificationum curvarum per ſeriem quandam generaliſſimam.

GENERALI, quem præmiſi, modo conſtruendi curvas ex æquatione data differentiali, ob multam affinitatem adnecto dimenſionem generalem ſpatiorum & curvarum: Qualem quidem etiam exhibuit Celeberrimus LEIBNITIUS in *Actis Erud. Mens. April.* 1693. * cujus methodus ingenioſe ſane excogitata multum placuit, eo quod ſeſe univerſaliter extendat ad quamcunque propoſitam curvam. Cum autem, in quovis exemplo, ſingularis calculus inſtituendus ſit, quo non niſi

* G. G. L. *Supplementum Geometriæ practicæ ſeſe ad problemata tranſcendentia extendens, ope novæ methodi generaliſſimæ per ſeries infinitas.* Act. Erud. 1693. April. pag. 178.

niſi ſingularis ſeries provenit quæſito reſpondens : placet hic apponere ſeriem univerſalem, quæ omnes quadraturas, rectificationes, aliorumque differentialium integralia generaliter exprimit.

Elementum ſpatii, curvæ, vel quodvis aliud, explicari poteſt per ndz (poſito n eſſe quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis & conſtantibus); ut itaque integrale ipſius ndz (quod per ſe ſolum, ob inſufficientia data, non eſt integrabile) ad ſeriem generalem revocetur, diſpiciendum eſt quid ipſi continuo addendum, idemque ab eo ſubtrahendum ſit, ita ut ſic, manente quantitate ndz ſemper eadem, integralia additorum demtorumque ſumi poſſint: In hunc finem ſequentem formo ſeriem, quæ ponit dz conſtantem, $ndz = +ndz + zdn - zdn - \frac{zzddn}{1.2.dz} + \frac{zzddn}{1.2.dz} + \frac{z^3dddn}{1.2.3.dz^2}$ &c. Ubi bini quilibet termini, immediate ſe ſubſequentes ſigniſque contrariis affecti, ſe multo deſtruunt; ita ut ſeries in infinitum continuata efficiat tantum ndz; quorumlibet vero etiam binorum terminorum immediate ſubſequentium & iiſdem ſignis affectorum ſumi poſſunt integralia. Hoc igitur modo habetur hæc ſeries univerſaliſſima: *Integr.* $ndz = +nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3ddn}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4dddn}{1.2.3.4.dz^3}$ &c. Quæ ſi in quocunque caſu applicetur, evaneſcent ſemper dn, ddn, $dddn$, &c. ut & dz, dz^2, dz^3, &c. quia earum relatio in dato caſu datur in quantitatibus algebraicis; & ſic tota ſeries conſtabit terminis pure algebraicis.

Exempla ſumamus Dn. LEIBNITII: Quærendus eſto logarithmus ex numero: Sit ratio, vel numerus $a + x$, qui brevitatis ergo appelletur r, & logarithmus ſit y; habebitur pro æquatione differentiali $dy = \frac{adx}{r}$, id eſt, logarithmus ſeu $y =$ *Int.* $(adx : r)$; hoc autem integrale ad ſeriem facile revocabitur; factis enim in ſerie univerſali $z = x$, $dz = dx$, $n = \frac{a}{r}$, $dn = $ (ob $dr = dx$) $- \frac{adx}{rr}$, $ddn = \frac{+1.2.adx^2}{r^3}$, $dddn = - \frac{1.2.3\,adx^3}{r^4}$ &c. convertetur illa in hanc ſpecialem $y = \frac{ax}{r^1} + \frac{axx}{2r^2} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4r^3}$ &c. quæ quamvis diverſa a Domini LEIBNITII, ejuſdem tamen eſt valoris.

Contra ſi dato logatithmo numerus ſit inveniendus; habebitur pro æquatione differentiali $dx = rdy : a$; factis ergo in ſerie univerſali $z = y$, $dz = dy$, $n = \frac{r}{a}$, $dn = $ (ob $dr = dx$) $\frac{rdy}{aa}$, $ddn = \frac{rdy^2}{a^3}$, $dddn = \frac{rdy^3}{a^4}$ &c. orietur $x = \frac{ry}{a} - \frac{ryy}{1.2aa} + \frac{ry^3}{1.2.3a^3} - \frac{ry^4}{1.2.3.4a^4}$ &c. ergo $\frac{x}{r}$, id eſt, $\frac{x}{a+x} = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{1.2.a^2} + \frac{y^3}{1.2.3.a^3} - \frac{y^4}{1.2.3.4.a^4}$, &c. Cognita itaque $\frac{x}{a+x}$ cognoſcetur etiam x.

Problema de inveniendo ſinu recto, ex dato arcu & radio, non minus facile expeditur: Sit enim arcus circuli y; ſinus rectus x; & radius a; & ponatur brevitatis gratia $\sqrt{(aa - xx)}$ ſeu ſinus complementi $= r$; erit æquatio differentialis $dx = rdy : a$, poſitis ergo in ſerie univerſali $z = y$, $dz = dy$, $n = r : a$ $dn = $ (ob $dr = - xdx : r$) $- \frac{xdy}{aa}$, $ddn = - \frac{rdy^2}{a^3}$, $dddn = \frac{xdy^3}{a^4}$, $ddddn = \frac{+rdy^4}{a^5}$ &c. reperitur $x = \frac{ry}{a} + \frac{xyy}{1.2aa} - \frac{ry^3}{1.2.3.a^3} - \frac{xy^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{ry^5}{1.2.3.4.5a^5}$ &c. Poſitis terminis cum x multiplicatis ad alteram partem, diviſiſque ſeriebus, habebitur $x : r$, id eſt, $x : \sqrt{(aa - xx)} = (y - \frac{y^3}{1.2.3.a^2} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5.a^5}$ &c) : $(a - \frac{yy}{1.2.a} + \frac{y^4}{1.2.3.4.a^3}$, &c.) Cognita itaque $x : \sqrt{(aa - xx)}$, cognoſcetur etiam x. Ubi hoc notatu dignum venit, quod ſeries denominatoris ſit æqualis ſinui complementi, quia ſecun-

ſecundum Dn. LEIBNITIUM invenitur ſeries numeratoris æqualis ſinui recto.

Ultimum exemplum in *Actis* allatum, eſt problema quod D. DE BEAUNE CARTESIO propoſuit, cujuſque conſtructionem jam olim in *Actis* dedi: Quæritur curva, in qua ſi coordinatæ ſunt s & y, ſubtangens ſit $= (yy - sy) : a$, id eſt, cujus æquatio differentialis ſit $ds = (ydy - sdy) : a$. Si libeat, data abſciſſa y, exprimere ordinatam s per ſeriem, ponatur $y - s = r$; & fiat in ſerie univerſali $z = y$, $dz = dy$, $n = r : a$, $dn = \left[\text{ob } dr = \frac{ady - ydy + sdy}{a}\right] \frac{ady - rdy}{aa}$, $ddn = \frac{-ady^2 + rdy^2}{a^3}$, $dddn = \frac{ady^3 - rdy^3}{a^4}$ &c. quo facto, obtinebitur $s = \frac{ry}{a} - \frac{(a-r)y^2}{1.2.a^2} - \frac{(a-r)y^3}{1.2.3.a^3} - \frac{(a-r).y^4}{1.2.3.4.a^4}$ &c. ideoque $(s - \frac{ry}{a}) : (-a + r)$ id eſt, $(as - yy + sy) : (-aa + ay - as) = \frac{yy}{1.2aa} + \frac{y^3}{1.2.3a^3} + \frac{y^4}{1.2.3.4a^4}$ &c. hinc data $(as - yy + sy) : (-aa + ay - as)$, dabitur etiam s.

Hoc in honorem Incomparabilis LEIBNITII monendum, quod per ejus methodum quæſita, ſtatim ſola, nec aliis quantitatibus implicita, proveniat; meam autem ab univerſalitate ſua multum commendabilem pariter non negabit.

N°. XXII.

N°. XXII.

ILLUSTRIS MARCHIONIS HOSPITALII

Solutio Problematis Phiſico-Mathematici ab erudito quodam Geometra propoſiti.

P R O B L E M A.

SIT pons ſublicius AB (vid. fig. 1, 2, 3,) *convertibilis circa axem A, ſitque trochleæ C circumductus funis B C M, cujus una extremitas ſuſtinet pontem, altera pondus vel ſacoma M. Quæritur qualis debeat eſſe curva C M N aut L M N, ſic ut ubicunque exiſtens pondus M in curva, ſemper æquilibrium faciat cum ponte A B.* *Acta Erud. Lipſ.* 1695 Febr. p. 56. TAB. VI. N°. XXII.

S O L U T I O.

Supponendo gravitatem pontis A B, quam conſidero collectam in puncto B, exprimi per verticalem A C, tres habentur differentes caſus: primus cum linea exprimens pondus M æquatur longitudini funis B C M, ſecundus cum ſuperat, tertius cum ſuperatur.

Conſtructio generalis pro omni caſu.

A quolibet puncto D peripheriæ Q D N deſcriptæ centro C & radio C Q æquali funi B C M, ducantur ſinus D G & radius C D. Et poſitis, longitudine funis B C M vel radio C Q $= a$, linea exprimente pondus M $= b$, abſciſſa C G $= z$; ſumatur C M $= 2a - 2bz : a$. Dico punctum M fore in curva quæſita. Hinc manifeſtum eſt, conſtructionem primi caſus, ubi $a = b$, evadere valde ſimplicem; etenim C M tantum ſumenda eſt dupla ipſius G Q. Sequuntur nunc quædam harum curvarum determinationes.

1. Accepta $z = aa : 2b$, tanget ducta perpendicularis ad A C curvam C M N aut L M N in puncto N, in quo peripheriam ſecat, & quod eſt horizonti proximum; ſic ut ſola portio C M N, aut L M N, ſerviat pro effectu qui proponitur.

2. Ducta horizontali A H æquali longitudini pontis, & poſita hypotenuſa C H $= c$, ſi accidit in duobus primis caſibus, ut a ſit $= c$, tota portio C M N utilis erit: ſin autem a excedit c; pars tantum M N ſatisfaciet, quæ determinatur ſumendo C G $= (aa + ac) : 2b$.

3. Curva in utroque priorum caſuum tranſit per centrum C : hoc cum diſcrimine, quod illa in primo caſu pro tangente habeat verticalem A C; in altero autem ab eadem oblique ſecetur, faciens angulum qui determinatur ſumpta $z = aa : b$. Curva tertii caſus non tranſit per centrum, ſed occurit verticali A C ad angulum rectum infra centrum in puncto L, ita ut $CL = 2a - 2b$.

4. Curva cujuſvis caſus in ſe ipſam redit; cum hac differentia, quod in primo & tertio ſecet normaliter verticalem A C, productam ſupra C, in unico tantum puncto diſtante a centro $2a + 2b$, in ſecundo autem caſu eandem adhuc ſecet in alio puncto, quod a centro diſtat $2a - 2b$: id eſt, quod hæ curvæ habeant formas quæ repræſentantur fig. 4, 5, 6.

5. Ut habeantur puncta maximæ latitudinis hârum curvarum, accipienda eſt $z = (aa \mp a\sqrt{(aa + 8bb)}) : 4b$. Unde liquet, quod, in primo & tertio caſu, non niſi falſa radix ſervire poſſit; quoniam vera æqualis aut major eſt radio : loco quod, in ſecundo, utraque, ut pote minor radio, utilis eſſe poteſt : Et reapſe fig. 5. ſatis oſtendit duas tunc maximas latitudines eſſe determinandas.

6. Curva tertii caſus L M N (fig. 3. 6.) gaudet puncto flexus contrarii inter puncta L & N, quod reperitur accipiendo $z = (aa + 2bb) : 3b$; radius circuli oſculatoris in vertice $L = (2aa - 4ab + 2bb) : (2b - a)$. Sumenda autem eſt $b = (a + c) : 2$; adeo ut pondus M, hoc caſu, ſit determinatum; licet, in reliquis duobus, omnino ſit arbitrarium.

7. Spatium integra curva incluſum æquatur quatuor ſuis circulis generatoribus, plus duobus circulis radio b deſcriptis; ita ut, in primo caſu, ubi $a = b$, hoc ſpatium contineat ſexies circulum ſuum generatorem.

8. In primo caſu, curva integra eſt æqualis ſexdecuplo radio circuli generatoris; eſt generatim, quælibet portio C M æquatur quatuor diametris R Q, minus quatuor ſubtenſis D R.

Cæterum hoc problema ſuam applicationem & uſum obtinere poteſt in Architectura militari. Mihi propoſitum fuit a Geometra quodam * in analyſi *Carteſiana* exercitatiſſimo, qui aſſeveravit ſe quidem reperiſſe tandem viam perveniendi ad ſolutionem; ſed opus habere, ut 27 analogias differentes inſtitueret, prius quam detegeret naturam curvæ; adeoque cum, ob nimiam prolixitatem valde operoſi calculi, ſolutionem imperfectam reliquiſſet, contentum fuiſſe determinatione approximante punctorum in curva; id quod ad praxin ſufficere credebat. Interim ex conſtructione præcedente ſatis colligere eſt, curvam hanc deſcriptu non minus facilem eſſe, quam quamlibet ſectionum conicarum. Methodum, qua uſus ſum, quæque eadem eſt cum *Leibnitiana*, nunc apponam; ut inde pateſcat, quantum erudito ejus *Auctori* debeatur, pro publicatione

* Dno. SAUVEUR.

inventi

inventi adeo utilis; cujus beneficio fores ex Matheſi in Phyſicam tam feliciter effregit.

Ante omnia auferri debet, quod mechanicum eſt in quæſtione, ut
pure Geometrica reddatur; quod ita facio. Conſidero gravitatem pon-
tis A B, tanquam pondus affixum in B, & mobile juxta quadrantem pe-
ripheriæ, centrum habentis in A, & radium lineam A B. Suppoſito au-
tem gravitatem hujus ponderis exprimi per verticalem A C; ex Staticæ
regulis certum eſt, lineam B C exprimere pondus, quod requiretur ad
ſuſtinendum pontem in hoc ſtatu : Si itaque curva C M N aut L M N
habeat proprietatem requiſitam; et ſi pondus, quod cum ponte æquili-
bratur, ſit in M; oportet ut ducta M K perpendiculari ad curvam in
puncto M, & facto, ut C K ad C M, ita pondus M, quod exprimo
per rectam b, ad quartam quandam proportionalem, hæc quarta linea
ſit æqualis ipſi B C. Quocirca deſcripto circulo, centro C, & radio C Q
æquali longitudini funis B C M, ſecante C M in D; & ducta D E paral-
lela A C, & æquali b; recta E M debet normaliter inſiſtere curvæ C M N
in puncto M: aut, quod eodem recidit, perpendicularis K M producta
ſecabit parallelam D E in puncto E, tali, ut intercepta D E ſit ſemper
æqualis eidem lineæ b; nam ob ſimilia triangula C M K, D M E, erit
$CK : CM = DE : DM$; &, ob radium C D æqualem B C M,
quarta hæc proportionalis D M, quæ exprimit potentiam, qua pondus
M trahit pontem A B, erit æqualis lineæ B C, quæ exprimit potentiam
qua pons A B reſiſtit ponderi M: adeo ut, in hoc rerum ſtatu, ſemper
æquilibrium fiat inter pontem A B & pondus M. Hoc igitur unicum
in quæſtione eſt, ut inveniatur curva, cujus perpendiculares dictam ha-
beant proprietatem. In hunc finem

Ducta P M F normali ad A C, & poſitis indeterminatis $CP = x$,
$PM = y$, & cognitis C Q, vel B C M, $= a$, $DE = b$, habebitur
ob triangulum rectangulum C P M, $CM = \sqrt{(xx + yy)}$ & ob ſimi-
lia triangula C M P, C D G; D G, vel P F, $= ay : \sqrt{(xx + yy)}$ &
$CG = ax : \sqrt{(xx + yy)}$. Ergo $PF - PM$, vel M F, $= ay : \sqrt{(xx}$
$\,+ yy) - y$, & $DE + CP - CG$, vel F E, $= b + x - ax :$
$\sqrt{(xx + yy)}$; verum ob ſimil. triangula M P K, M F E, M F $[ay :$
$\sqrt{(xx + yy)} - y] : FE\, [b + x - ax : \sqrt{(xx + yy)}] = MP :$
$PK = dx : dy$, ſiquidem recta K E debeat ſecare perpendiculariter cur-
vam in puncto M. Ideoque $bdx + xdx - axdx : \sqrt{(xx + yy)} =$
$aydy : \sqrt{(xx + yy)} - ydy$; quæ æquatio ſi integretur, dabit hanc al-
teram $a\sqrt{(xx + yy)} = bx + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}yy$ vel $bx + \frac{1}{2}xx + yy \mp ff$,
quæ eſt propria æquatio pro natura curvæ quæſitæ, ex qua nempe conſ-
tructio & determinationes præcedentes ſunt deductæ.

 JOHAN-

N°. XXIII.

JOHANNIS BERNOULLI

Animadversio in præcedentem Solutionem Illustris D. Marchionis HOSPITALII.

Demonstratio identitatis curvæ æquilibrationis *cum Cycloide descripta ex circumvolutione rotæ super rota æquali.*

Constructio generalis ejusdem curvæ inventa per communem Geometriam.

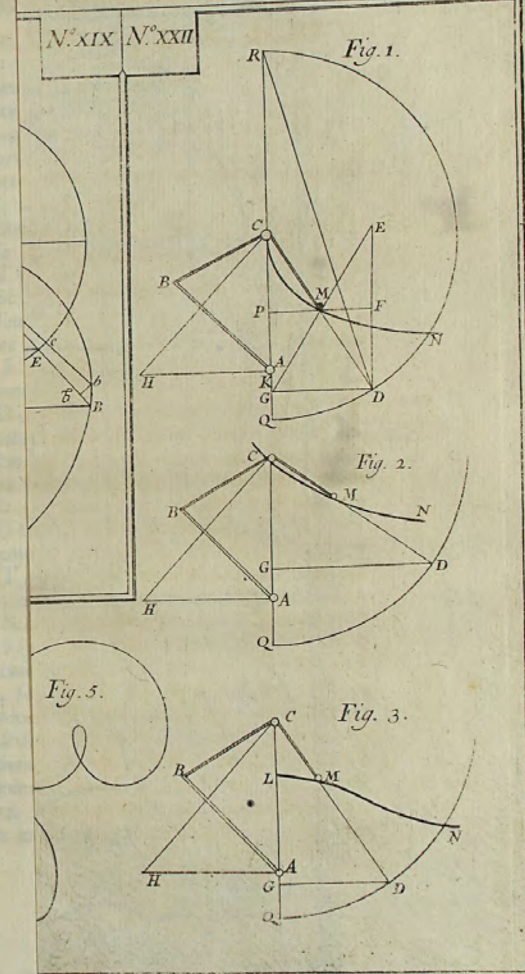
Solutio problematis fraterni anno 1694. *mens. Octobr. propositi,* &c.

Acta Erud. Lips. 1695 Febr. p. 59.

PRæstantiam alicujus problematis non tam æstimandam esse a difficultate, quam ab utilitate, satis ostendit præsens; cujus succinctam pariter & ingeniosam nobis tradit solutionem Illustris HOSPITALIUS; & quod practicum suum usum, non solum in Architectura militari, ut ipse solutionis Author animadvertit, sed etiam in civili, eumque amplissimum habere potest. Quanta ex. gr. molestia nonnunquam superanda est in aperiendis valvis cavarum, in attollendis alis officinarum, inque deducendis omnivarii generis portis. Quantacunque autem illa sit, ita tamen temperari potest per sacomata contraponderantia & laminas adaptatas, eam quam *Illustris Author* ipsis assignat habentes curvaturam, ut vel ab infante hujus modi machinæ sine periculo possint regi. Quot alii quotidiani usus exinde emergant, quilibet secum reputet.

Cum autem in resolutione problematum id præcipue intendamus; ut peractis quæ ad theoriam spectant, via inveniatur facilis, quæ nos ad constructionem simplicissimam deducat: eum construendi modum in praxi commodissimum censeo, qui peragitur, vel per fluxionem puncti, vel per tractionem *Leibnitianam:*

Tab. VI. *Tom. I.* *pag.* 132.



ULLI
. Marchionis

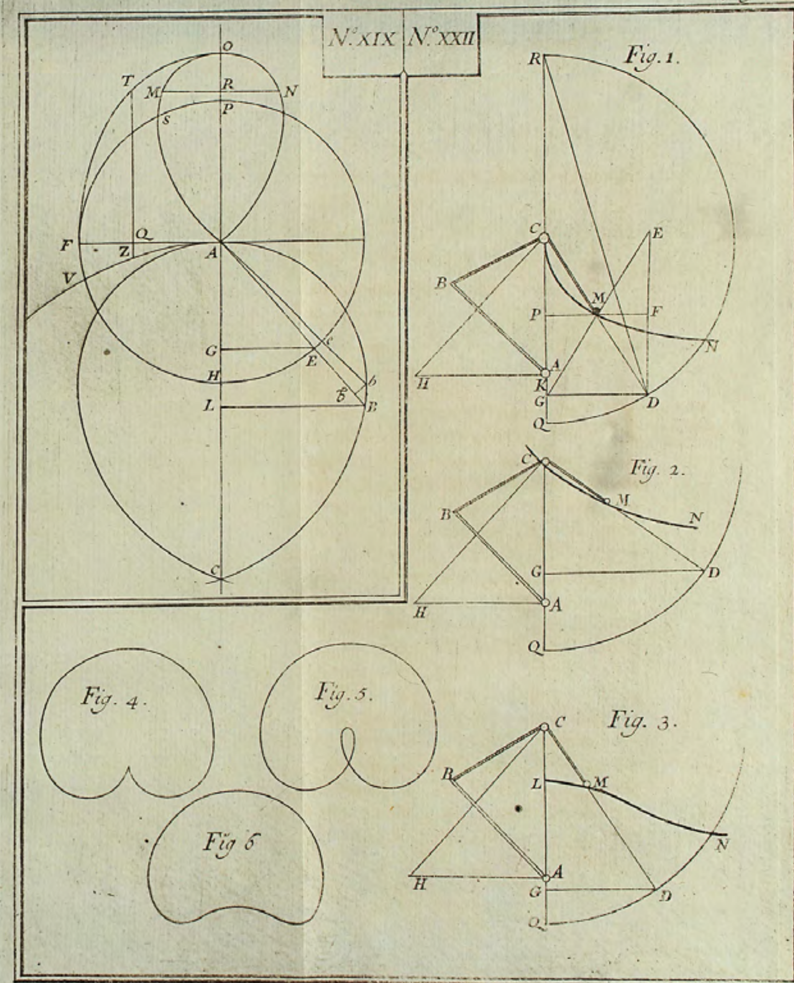
Cycloide def-
uali.

ommunem

r. propositi,

mandam esse
dit præsens ;
t solutionem
suum usum,
onis Author
mum habere
eranda est in
inarum, in-
ncunque au-
nata contra-
stris Author
fante hujus
lii quotidia-

tipue inten-
inveniatur
ducat : eum
, qui per-
n *Leibnitia-*
nam :



N°.
nam :
non t
tanqu
ex æ
ne su
reperi
esse e
& ad
Rc
sitque
vel ir
cyclo
bratic
produ
sumta
C Q
ducat
Quor
arcui
XS,
ctum
RS;
CG
milia
RC
RX
& qu
2a—
PIT
esse
quoc
geni
secur
prie
prol
dis

nam: descriptio quippe per inventionem punctorum in curva, non tam practica quam theoretica dicenda est. Ex hac tamen, tanquam ex regula, conditiones motus continui eliciuntur. Sic ex æquatione algebraica quam *Dn. Marchio* pro determinatione suæ curvæ, quam *æquilibrationis* appellare liceat, exhibuit, reperio ipsam hanc curvam, quod sane notatu dignum est, esse ex *cycloidalium* genere; & proinde motu, perquam simplici & ad praxin aptissimo, describi posse.

Rotetur enim circulus S O T super circulo æquali R V T, sitque initium rotationis V, & punctum describens M sumtum vel in ipsa peripheria T O, vel extra, vel intra eandem; dico cycloidem C M N hoc modo descriptam fore curvam æquilibrationis; quod sic demonstratur: Connexis centris R, S, producatur S M, donec concurrat cum producta R V, in X, sumtaque R C æquali S M, describatur circulus C Q D, radio C Q æquali radio genitoris, ex centro C per punctum M ducatur radius C M D, & ex D agatur perpendicularis D G. Quoniam nunc, ex natura cycloidis, arcus T V est æqualis arcui T O, erit angulus $XRS =$ angulo XSR, ergo $XR = XS$, proindeque ducta perpendicularis X T transibit per punctum contactus T, & ob $RC = SM$ erit C M parallela R S; ideoque ang. $GCD =$ ang. XRT; hinc triangula C G D, R T X, itemque triangula X R S, X C M sunt similia. Esto nunc R T, vel S T, vel $CD = a$, S M, vel $RC = b$, $CG = z$, erit $CG\ (z) : CD\ (a) = RT\ (a) : RX = aa : z$; ergo $RX - RC$, id est, $XC = aa : z - b$, & quoniam $XR : RS = XC : CM$, invenietur $CM = 2a - 2bz : a$; quæ cum sit eadem quantitas quam *Dn.* HOSPITALIUS invenit, sequitur & ipsam cycloidalem C M N esse curvam æquilibrationis *Hospitalianam*: ubi oppido patet, quod si punctum describens M sumatur in peripheria circuli genitoris T O, satisfaciet cyclois primo; si extra peripheriam, secundo; si intra eandem, tertio casui: hinc præcipuæ proprietates in præcedenti solutione recensitæ, quæ alias absque prolixiori calculo non inveniuntur, ex sola generatione cycloidis sponte fluunt. TAB. VII. N°. XXIII. *Fig.* 1.

 Placet

TAB. VII. N°. XXIII. Fig. 2. Placet nunc adnectere solutionem ejusdem problematis, sed generaliter propositi, nempe sic : *Data in plano verticali curva quavis AB; quæritur in eodem plano altera curva LM, ita ut duo pondera data B, M, communi funiculo BCM, trochleam positione datam C ambienti, alligata, & curvis ubicunque imposita, semper sibi mutuo æquilibrentur; vel quod tantundem est, minima vi moveri possint.*

Difficilius primo intuitu videtur hoc problema, quam quod per communem Geometriam solvi possit; partim ex eo quod in specialissimo casu, cum sc. curva data AB est peripheria circuli, solutio *Hospitaliana* involvit tangentium determinationem, partim etiam quod *celebris* ille, quisquis sit, *Analista Cartesianus*, post 27 institutas analogias, labore calculandi omnino fessus ab ulteriori disquisitione abstinuit. Verum enim vero si rite tractetur, tanta cum simplicitate expeditur, ut satis mirari nequeam, *Geometram* istum, per vigesimam septimam analogiam nondum eo pervenisse, quo tamen & quidem longe ulterius per unicam solam pervenitur, ceu ex jam dicendis patebit. Pro principio assumo notissimum illud Axioma staticum : *In omni motu gravium æquilibratorum, commune centrum gravitatis neque ascendit, neque descendit; sed perpetuo manet in eadem altitudine horizontali.* Ut hoc ad præsens negotium applicetur, curva quæsita debet habere proprietatem talem, ut duo pondera M, B habeant, in quovis situ, semper eundem horizontalem axem æquilibrii. Per ductam itaque verticalem CQ agatur utcunque horizontalis KIE (quæ constantem axem æquilibrii denotet); fiatque ut pondus datum M ad pondus datum B, ita distantia brevissima IH (quæ data est ob curvam datam AB) ad quartam IP, quæ ad partem contrariam sumenda est; & ducenda parallela PM, quæ secabit arculum, centro C & radio CM (differentia funiculi totius & partis datæ CB) descriptum, in puncto M, quod erit ad curvam optatam LM. Hoc enim modo fit, ut centrum gravitatis commune ponderum B, M semper existat in linea horizontali KIE, quæ cum sit ad arbitrium ducta,

ita duci potest, ut curva optata transeat per quodlibet punctum datum.

Ad uberiorem confirmationem sumatur pro curva data AB, circuli peripheria, quæraturque ex generali nostra solutione æquatio analytica pro curva LM; quæ reperietur quam apprime conspirare illi quam *Illustris Marchio* exhibuit; quæ tamen viis & principiis diversissimis inventa sunt, adeo ut vel maxime exinde conspicere liceat, *Naturam*, ceu immutabilium suarum legum memorem, sibi nunquam non constare.

Quod si principium supra allatum ad alia hujus modi problemata applicare lubeat, videbitur fœcundissimum illud esse; ut si ex. gr. funiculus non unam solam, sed plures alias trochleas ambit, (quod in praxi ita fieri nonnunquam necessitas urget, quando nempe ob certas circumstantias loci, vel alia impedimenta, curva æquilibrationis ponti sublicio non immediate adaptanda, ubi obstaculo foret, sed ab eodem longius removenda & in locum commodiorem quemcunque libuerit transferenda est,) vel si plures dantur curvæ, in quibus plura pondera data, uni vel pluribus funiculis in diversis distantiis alligata, per unum vel plura sacomata sint æquilibranda; vel si loco trochlearum sunt vectes in quorum extremitatibus funiculi cum ponderibus, curvis datis incumbentibus, adnectuntur: vel qualiscunque demum machinatio & quantumcunque composita ab Architecto excogitetur, curvæ æquilibrationis semper pari facilitate & quasi ludendo construuntur, cum alias in prolixitatem calculi insuperabilem incideremus, si ad imitationem solutionis præcedentis, auferendo quod mechanicum est, hasce quæstiones in pure geometricas mutare vellemus.

Hic itaque penitioris Geometriæ peritissimum LEIBNITIUM consultum velim, an non certæ regulæ inveniri possint pro illis problematis, quæ in abstracto proposita communem Geometriam quidem respuunt, in concreto autem eandem admittunt; ita ut non opus sit recurrere ad differentialium integraliumque calculum, cujus evidens exemplum habemus in *curvis* nostris *æquilibrationis*: quod quodam modo confirmare potest, quod

Frater

Frater in *nupero Actorum Octobr.* aſſerit, problema nimirum implicans curvam quæ neceſſario ſit algebraica, etiam neceſſario reſolvi poſſe per vulgares algebræ regulas. Cui generaliter dicto ego non aſſentior: Si enim, verbi gr. alicujus figuræ quadratura, vel ex tangentium ſubtangentiumve conditione aliqua curva (quam licet neceſſario algebraicam eſſe aliunde conſtaret) determinanda eſſet, id aliam per methodum, quam differentialium, huicve analogam, effici poſſe vix putem. Equidem acutiſſimus CRAIGIUS, in novi ſui Tractatus *De quadraturis* * anno 1693 impreſſi prima parte, proponit methodum pro dimetiendis figuris algebraicis, quarum quadratices ſunt algebraicæ; quæ methodus, beneficio æquationum, quas *eminenter continentes* appellat, per communem Geometriam, nempe per comparationem terminorum, more *Carteſiano* inſtitutam, peragitur. Tantum autem abeſt, ut illa ſit generalis, ut infinita dentur exempla, ad quæ ſe non extendit. Ratio eſt, quia tacite ſupponit, quamlibet quantitatem differentialem, affectam quantitate quadam irrationali, habere (ſi quod habeat) pro integrali, vel ſummatorio, quantitatem aliam, quæ neceſſario affecta ſit eadem quantitate irrationali; ex quo ingenioſus *Author* in ſubſequentibus figurarum quadrabilitatis conditiones deducere vult. In eundem adeo impingit errorem, quem in alio † redarguit, *quod* (ut propriis verbis utar) *ex ſua methodo figuram aliquam, quadraturam indefinitam recuſare concluſit, priuſquam demonſtraſſet methodum ſuam ad omnes figuras indefinite quadrabiles extendere.*

Subtilem etiam, ſed pariter non generalem modum, in *poſteriori Parte* ſui *Tractatus* tradit inveſtigandi quadratrices tranſcendentes, vel quod eodem recidit, reducendi quadraturas ſpatiorum ad extenſiones curvarum: ſed quam ingens ſupputandi labor

* *Tractatus Mathematicus, de Figurarum curvilinearum quadraturis, & locis geometricis. Autore* JOH. CRAIG. 4°. Londini 1693.

† Dn. DE TSCHIRNHAUSEN. Sunt autem hic allegata verba deſumpta ex ejuſdem JOH. CRAIGE *methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum quadraturas determinandi*, 4°. Lond. 1685. pag. 38.

labor requiratur, etiam pro leviſſimis exemplis, qualia ſunt circuli & hyperbolæ, ex ipſo *Authoris* calculo, quem tamen non integrum appoſuit, videre licet; adeo ut hæc methodus in ſpeculatione quidem perexımia, ſed ad praxin parum ſit idonea. Ob hanc rationem opinor *Authorem*, poſt adductum quartum exemplum quadrandæ figuræ cujus natura $z = \sqrt{(y^4 + a^4)}$ ſubſtitiſſe, quia haud dubie jam præviderat, quod in exemplis paulo difficilioribus calculus foret immenſæ prolixitatis, cui abſolvendo non una, vel altera tantum, hora ſufficeret.

Commodiorem ego puto viam, qua uſus ſum in conſtructione curvæ paracentricæ, per extenſionem curvæ algebraicæ; quæ via conſiſtit in diviſione quadrati differentialis propoſitæ in duo alia quadrata, quorum latera ſint integrabilia. * Sic abſque omni calculo ſtatim apparet, quadraturam dictæ figuræ $z = \sqrt{(y^4 + a^4)}$, haberi per extenſionem curvæ parabolæ cubicalis primæ: quadratum enim elementi vel differentialis hujus figuræ $y^4\,dy^2 + a^4\,dy^2$ dividitur in hæc duo quadrata $y^4\,dy^2$ & $a^4\,dy^2$, quorum latera $yy\,dy$ & $aa\,dy$ ſunt integrabilia: conſtructa ergo curva, cujus coordinatæ ſint ut integrabilia horum laterum, nempe ut $\frac{1}{3} y^3$, & aay (quæ utique eſt parabola cubicalis prima) & multiplicata per conſtantem, dimetietur figuram propoſitam $z = \sqrt{(y^4 + a^4)}$.

Scio quidem Celeberrimum *Dn.* LEIBNITIUM in ſua ſolutione Iſochronæ paracentricæ (*Act. m. Aug.* 1694. *pag.* 370.) eandem hanc quadraturam reducere ad extenſionem curvæ hyperbolicæ, cum ita loquitur: *Sane ſi quadranda eſſet figura ordinatarum* $\sqrt{(a^4 + x^4)}$, *per extenſionem curvæ hyperbolicæ res præſtaretur.* Verum Vir Celeb. demonſtrationem hujus publicare haud gravabitur: oſtenderetur enim curvas parabolæ cubicalis primæ, & hyperbolæ, ab invicem dependere, & unam alteram menſurare; id quod nobile prorſus, & omnino novum, eſſet inventum in Geometria.

Quantum ad ipſam paracentricæ ſolutionem *Leibnitianam*, multum gaudeo quod tam apte cum mea conveniat. Video exin-

* Supra N°. XIX. *pag.* 121.

exinde Celeberrimum ejus *Authorem*, uno tempore, similes fere meis, hac super re, habuisse cogitationes. Infinitas esse paracentricas respectu unius puncti, vel centri, post descensum ex data altitudine, neminem vel tantillum in calculo differentialium versatum latere potest; si modo consideret (quod in *Actis* jam passim innui) quamlibet quantitatem differentialem infinita habere integralia, sed non reciproce: quod tamen unicæ mentionem fecerim, id ideo factum, quia hæc omnium simplicissima est, quam in praxi præ cæteris adhiberi præstat. Siquidem omnes isochronarum paracentricarum species sub una generali solutione comprehenduntur; facile ex constructione mea demonstrare possem, nullas dari sub forma spiralium, quas *Nob. Dn.* HUGENIUS (*Act. Mens. Septembr. 1694*) determinandas proposuit.

TAB. VII. N°. XXIII. *Fig.* 3. Coronidis loco adjiciam solutionem problematis a *Fratre* propositi in nupero *Actorum Octobri.* * Quia curvæ H, I datæ sunt, erunt earum curvedines datæ: sunto ergo radius circuli osculantis in $H = r$, radius circuli osculantis in $I = s$, $HK = m$, $IK = n$, $GH = p$, $GI = q$, $HI\ [q - p] = t$. Abscindatur ex GH, si opus producta, quædam HL, quæ sit $= rspm^3 : (rqn^3 - spm^3)$, dico ductam lineam LK contingere curvam K in eodem puncto K. *Quod erat faciendum.*

G. G. L.

* *His verbis*; Datis tribus Curvis algebraicis G, H, I, & quarta K, quam formant intersectiones rectarum HK, IK, tangentium curvas H & I in iisdem punctis, in quibus tangens curvæ G ipsas secat; quærere tangentem quartæ K. *Act. Erudit.* 1694. Octob. p. 394.

N°. XXIV.

G. G. L. * NOTATIUNCULA

Ad constructiones Lineæ in qua Sacoma, æquilibrium cum pondere moto faciens, incedere debet, Februario *proximo datas. Et quædam de Quadraturis.*

JUcundissimum fuit solutionem *Dn. Marchionis* HOSPITALII egregiam problematis elegantis & utilis, tum Additiones ingeniosissimi *Dn. Johannis* BERNOULLII videre; quibus solutionem universaliorem & constructionem faciliorem reddit, meritoque rem notatu dignam censet, quod idem hic, & per differentiales, & per methodum Geometriæ communis, obtinetur: Cujus rei complura exempla & mihi occurrerunt. Et sane in concreto sæpe ostenduntur rerum origines connexionesque, in abstractis terminis non æque apparentes. Consideratio autem centri gravitatis, jam ipsa per se, compendium differentialium, seu summationem involvit; unde mirum non est, si per eam differentiales resummentur. Quod ut clarius appareat, ostendam, quomodo brevissima illa constructio, etiam ex differentialibus, statim & recta via, sine interventu centri gravitatis, nascatur. Nempe ex natura æquilibrii, quod semper manere supponitur, patet debere pondus M ductum in elementum ipsius IP, æquari ponderi B ducto in elementum ipsius IH: ita enim non plus descendetur quam ascendetur; seu erunt elementa descensuum, vel ascensuum, reciproce ut pondera. Quia ergo M in diff. IP æquale B in diff. IH; erit summando M in IP æquale B in IH; seu M ad B, ut IH ad IP; prorsus ut *Bernoulliana* constructio habet. Si intelligatur ipsa trochlea C non fixa manere, sed lineam, durante motu ponderum & sacomatum, (nam vicissim sibi sunt pondus, vel sacoma) describere, eadem tamen methodus locum habebit. Quemadmodum & in aliis similibus. Pulcherrimum autem est, quod notat, lineam a *Dn. Marchione* HOSPITALIO præscriptam ex genere Epicycloidum esse. *Acta Erudit. Lips.* 1695. April. pag. 184. TAB. VII. N°. XXIII. *Fig.* 2.

Quod vero observat summationem ordinatarum, quæ sunt ut $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ pendere ex dimensione curvæ parabolæ cubicæ; etiam Dn. *Marchio* me monuerat. Visus autem mihi sum, cum ista sub manibus haberem, connexionem videre cum dimensione curvæ hyperbolicæ; sed talia nunc resumere non licet, quæ aliquando curatius tractare spero.

* *Gothofredi Gulielmi* LEIBNITII.

De cætero video doctiſſimum Dn. *Joh.* BERNOULLIUM non probare, quod Dn. CRAIGIUS tacite ſuppoſuit in Tractatu *de Quadraturis*, quantitatem irrationalem habere ſummatricem etiam irrationalem ſimilem. Et fateor hoc ſine demonſtratione illic fuiſſe poſitum; ſed quoniam mihi methodo ſimili nonnihil, univerſaliore tamen, ni fallor, & breviore, talia tractanti, *principium* innotuit nondum, quod ſciam, in hoc argumento conſideratum, unde demonſtratio ad rem pertinens haberi poteſt; proponere hoc loco placet. Dico igitur terminum ſummandum & terminum ſummatorem, vel, quod eodem redit, differentiam & terminum differentiandum (*Dni.* BERNOULLII integralem vocant) habere eaſdem ambiguitates, ſeu radicum varietates, cum quævis radix termini det propriam ſeriem, ſuas quoque proprias differentias habentem. Et proinde ſi ſit y, differentia vel ſummandus, & v ſumma vel differentiandus; ſeu, ſi ſit $S.\, y\,dx = v$; ſequitur in æquatione, quæ exprimit relationem inter y & x, & in æquatione, quæ exprimit eam inter v & x, ipſas y & v aſcendere ad eaſdem dimenſiones. Sequitur etiam irrationalitates ſe ſimili modo habere; quippe quibus itidem varietas radicum indicatur. Certe *Cl.* CRAIGIUS non pauca attulit egregia; quæ faciunt, ut incrementa adhuc majora his ſcientiis ab eo ſperem. Multumque ejus ingenuitati debeo, quod meis meditationibus aliquid debere voluit. Si conſilium ejus ſciviſſem; potuiſſem fortaſſe aliqua ad methodi incrementum ſuppeditare. Utinam tantum illis abſtinuiſſet, quæ acerbe in Virum excellentis ingenii & doctrinæ dixit; cui, quæ ipſe innuit, imputare mihi nunquam in mentem venit.

N°. XXV.

EXCERPTA EX LITTERIS

Illuſtris D. Marchionis HOSPITALII *ad Joh.* BERNOULLI, *addenda ejus ſolutioni problematis æquilibrii in Actis Eruditorum Lipſienſibus An. 1695. pag. 56 inſertæ.*

Acta Erud. VIXDUM accepi poſtremas tuas, in quibus ſignificas eſſe tibi me-
Suppl. thodum conſtruendi generaliter per communem Geometriam *Pro-*
Tom. II. *blema æquilibrii*, cum & ipſe e veſtigio hujuſmodi conſtructionem erue-
Sect. VI. rem; quam mitto, ut videas quouſque tuæ conſpiret, eamque Actis Lip-
pag. 289. ſienſibus inſeri cures.

Eſto

Eſto in plano verticali data curva quæcunque VBH; *quæritur altera* CMN, *ita ut duo pondera data* B, M, *alligata communi filo* BCM *ambienti trochleam fixam* C, *curvis ubivis impoſita æquilibrentur.* TAB. VII. N°. XXV. *Fig.* 1.

Conſtr. Centro C, & radio CQ æquali filo BCM, deſcripto circulo QD, ac per quodvis curvæ punctum B ductis applicata BE, radioque CBD; fiat, ut pondus M ad pondus B, ita abſciſſa AE ad abſciſſam CP, & agatur PM parallela ipſi BE: quo facto, deſcriptus centro C, & intervallo BD arcus circuli ſecabit PM in puncto M, quod erit in curva quæſita.

Demonſtr. Concipiantur pondera B, M per minimum moveri, ita ut filum ſumat ſitum bCm, & ductis applicatis BE, be, & MP, mp, deſcribantur centro C arculi minimi BT, MO; & agantur axi parallelæ rectæ minimæ BS, MR, curvæque perpendicularis BK. Ex conſtructione, pondus M eſt ad pondus B ut AE ad CP, ut Ae ad Cp, ut $Ae - AE$, ſeu Ee, aut BS, ad $Cp - CP$, ſeu Pp, aut MR; ideoque $B \times BS = M \times MR$: quoniam vero $BCM = bCm$, ſequitur $Tb = Om$ & proinde $B \times BS : Tb = M \times MR : Om$. Jam ab angulis CBT, KBb rectis, ablato eodem CBb, relinquuntur æquales TBb, CBK. Ita etiam angulus SbB vel $EBb = CKB$, quia uterque cum angulo EBK conſtituit rectum. Ergo Tb eſt ad BS, ut ſinus anguli CBK ad ſinum anguli CKB: unde, ex ſtaticis regulis, colligitur $B \times BS : Tb$ exprimere conatum, quo pondus B agit in pondus M, & viciſſim demonſtrabitur $M \times MR : Om$ eſſe conatum, quo hoc agit in illud. Cumque hi conatus ſint æquales, æquilibrium fiet. *Q. E. D.*

Exinde ſatis liquet, punctum fixum trochleæ C cadere poſſe & ſupra, & infra, & in ipſum verticem curvæ VBH; adeoque originem abſciſſarum AE ad arbitrium infra horizontem AH eſſe ſumendum.

Coroll. Exiſtente curva VBH geometrica, erit & CMN geometrica.

JOH. BERNOULLI ADDITIO.

HAC occaſione proponam Geometris aliud jucundum Problema, curvæ, quæ cum Iſochrona tam *Hugeniana*, quam *Leibnitiana*, non parum affinitatis habet. Quæritur nimirum in plano verticali curva ABC, in qua corpus B, propria gravitate & libere deſcendens, premat curvam ſemper æquali vi centrifuga; vel, quod eodem redit, ut curvæ DE, ex cujus evolutione progignitur quæſita ABC, circumplicatum filum

 BE ſeſe

BE, ſeſe evolvendo, a pondere appenſo B æquales vires tendentes patiatur, adeoque quovis momento eadem fili firmitas requiratur.

Problemati huic ſatisfaciunt plures variorum graduum curvæ.

NB. *Ejus Problematis ſolutionem ab* HOSPITALIO *elaboratam videſis in* Comment. Acad. Reg. Scient. Pariſienſis *ad Annum* 1700. *pag.* 9. *Edit. Pariſ.*, *pag.* 11. *Edit. Amſtel.*

N°. XXVI.

JOANNIS BERNOULLI

Meditatio de Dimenſione linearum curvarum per circulares.

Acta Erud. Lipſ. 1695. Auguſt. pag. 374. ELEGANS eſt non minus quam ſubtile inventum, quod Nobiliſſimus HUGENIUS in pererudito ſuo Tractatu *De Horolog. Oſcillat.* pag. 76 publicavit; ubi modum tradit, *Dato ſphæroide lato, conſtruendi conoidem hyperbolicum; vel contra, dato conoide hyperbolico, conſtruendi ſphæroidem latum ejus modi, ut utriuſque ſimul ſuperficiei exhibeatur circulus æqualis:* poſtquam in præcedentibus oſtendiſſet, neutri ſeparatæ dari poſſe æqualem circulum, niſi poſita hyperbolæ quadratura. Optandum foret, ut Nob. Author inventum ſuum reddidiſſet univerſale; hoc eſt, methodum exhibuiſſet, data ſuperficie convexa quavis, conſtruendi aliam, quæ cum data æquetur ſpatio circulari. Ad cujus imitationem exhibituri ſumus modum generalem *ad datam curvam quamcunque e veſtigio aliam deſcribendi, quarum ſumma, vel differentia, æqualis ſit arcui circulari:* præliminata, pro hoc, inſigni & utiliſſima evolutarum proprietate.

TAB. VII. N°. XXVI. Eſto curva quæcunque ABC, ſuper qua incedere intelligatur recta rigida, vel regula DAE, ita ut partes regulæ partibus curvæ ſucceſſive applicentur: Dico duas curvas DLG, EMF, extremitatibus D, E, vel quibuſvis aliis regulæ punctis oppoſitis, hac rotatione deſcriptas, & ſimul ſumtas, fore æquales arcui circulari EO, radium habenti DE, & angulum ſubtendenti EDO æqualem angulo EPF, quem duæ in extremitatibus A & C tangentes conſtituunt.

DEM. Habeat enim regula ſitum quemcunque LBM, huicque proximum lBm; & ductæ concipiantur DN, Dn parallelæ ipſi LM, Lm: fient triangula LBl, MBm, & NDn ſimilia, ob LM, lm normales ad curvas DLG, EMF, & ob angulos LBl, MBm, NDn, æquales. Ideoque $BL : BM = Ll : Mm$; *componendo* $LM : BL = Ll + Mm : Ll$, & *permutando* $LM : Ll + Mm = BL : Ll$; quoniam autem LM, DN ſunt æquales (*per hyp.*) erit etiam $Ll + Mm = Nn$. Ergo omnes Ll & omnes Mm, id eſt curvæ DLG & EMF, una ſumtæ, æquantur omnibus Nn, id eſt arcui circulari ENO. Q. E. D.

Si alterutrum punctum deſcribens, ut E, ſumatur inter D & A; pari ratione demonſtrabimus, differentiam curvarum DLG & EMF eſſe æqualem arcui ENO.

Hinc oppido liquet propoſitum noſtrum, quo pacto nempe, ad datam curvam, promtiſſime infinitas alias conſtruere liceat, quarum quælibet, cum data, reducibilis ſit ad arcum circuli. Ut, ſi DLG ſit curva, vel portio curvæ data, in punctis ejus L ducendæ erunt rectæ perpendiculares ad curvam, & inter ſe æquales, LM; formabunt earum extremitates M curvam quæſitam EMF. Quam etiam motu continuo, ope fili, deſcribere poterimus, ſi nimirum curvæ datæ DLG evolutam ABC inverſe involvamus. Sic in univerſum verum eſt, duas quaſlibet curvas, una evolutione condeſcriptas, ſi concavitates obverſas habeant, facere ſummam; ſi vero concavitas unius convexitati alterius ſit obverſa, facere differentiam arcui æqualem.

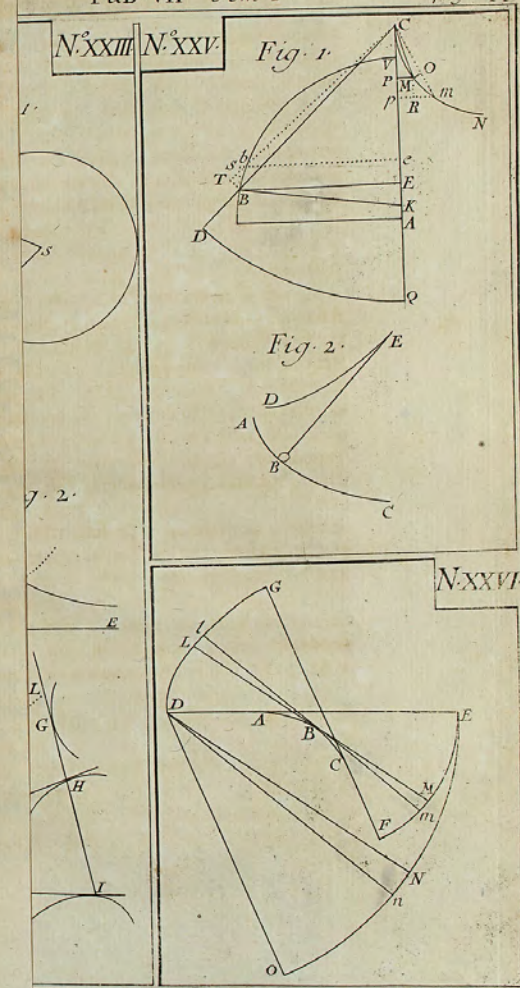
Ex his patere arbitror, utrum curva quædam propoſita connexionem habeat cum dimenſione arcus circularis. Omnis enim curva, cujus evoluta ABC duas habet partes BA, BC ſimiles & æquales, erit comparabilis cum arcu; quia, eo eo in casu, si sit CF = AD, curva FME congruit cum DLG; & sic ipsa DLG efficiet dimidium arcus ENO. Et contra, omnis curva genita ex evolutione curvæ duarum partium similium & æqualium, est reducibilis ad circularem. Animadversione etiam dignum inde fluit, quod, si ex infinitis evolutione condescriptis unica reperiatur rectificabilis, vel absolute, vel supposita extensione circularis; cæteræ omnes pariter per arcum circuli mensurabuntur. Plura alia, eaque non contemnenda, ex dictis facile deducuntur; quæ generali dimensioni curvarum indagandæ non mediocre lumen afferre poterunt.

Quod Celeberrimus LEIBNITIUS in nupero *Actorum Martio* * animadvertit, quantitatem irrationalem habere summatricem etiam irrationalem similem; plane nihil derogat objectioni meæ acutissimo CRAIGIO factæ. Sum enim & ego in eadem opinione cum D. LEIBNITIO; quod terminus summandus, & summator, iisdem lateribus, seu radicum signis, constare debeant. Sed ex hoc non sequitur, etiam ipsas quantitates lateribus involutas esse easdem; & hoc est quod Dn. CRAIGIUS supponere videtur, & contra quod objectio mea dirigitur. Complura in hanc rem exempla habentur, in quibus quantitates, licet summabiles, methodo tamen *Craigiana* summari non possunt; etiamsi quantitas y, more Authoris, quantum fieri potest, liberetur a vinculo, seu signo radicali. Ratio hujus est, quod interdum, præter hanc liberationem, etiam ipsa quantitas post signum radicale dividenda sit per aliam quantitatem: alias methodus ista non succedet. Verum de hac cautela in toto CRAIGII Tractatu altum ubique silentium.

* Supra N°. XXIV.

JOHAN-

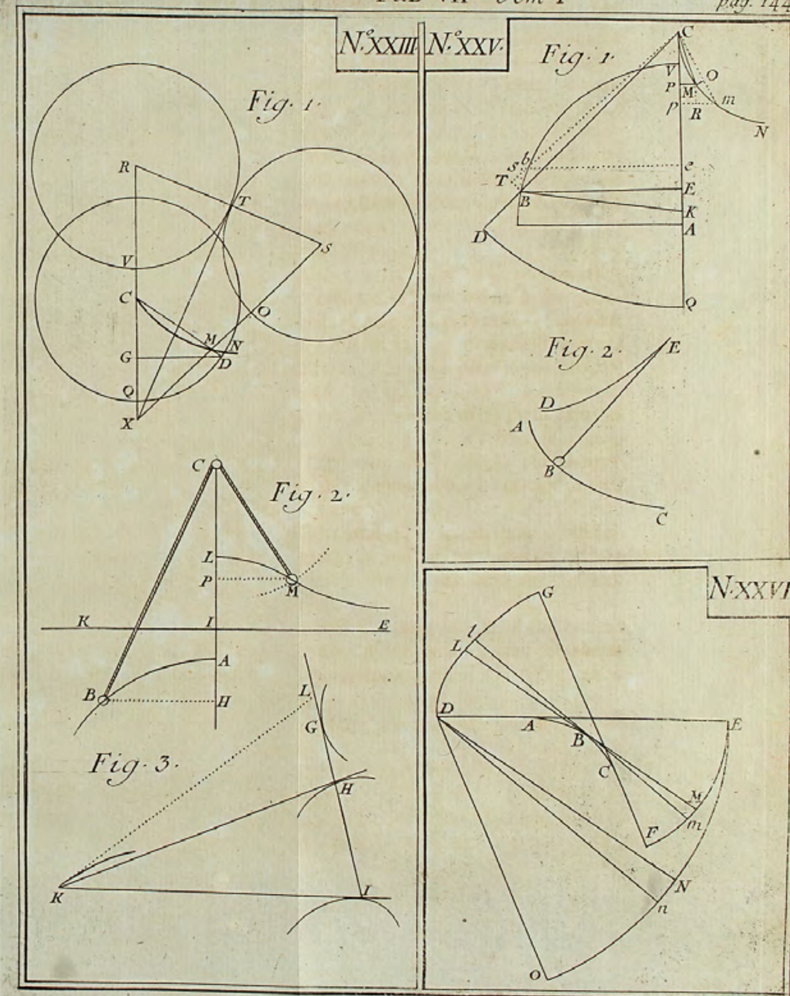
Tab. VII. Tom. I. pag. 144.



ME congruit cum
arcus ENO. Et
urvæ duarum par-
circularem. Ani-
ſi ex infinitis e-
ficabilis, vel ab-
eteræ omnes pari-
alia, eaque non
quæ generali di-
re lumen afferre

nupero *Actorum*
lem habere ſum-
nihil derogat ob-
Sum enim & ego
; quod terminus
ſeu radicum ſi-
uitur, etiam ipſas
& hoc eſt quod
tra quod objectio
ola habentur, in
odo tamen *Crai-*
s y, more Au-
culo, ſeu ſigno
præter hanc li-
um radicale divi-
odus iſta non ſuc-
AIGII Tractatu

JOHAN-



JOHA

Demonstratio Ana
Beaunianæ, *in*

QUos diu
WENTIIT
per mihi Amstel
rum alter, quem
inscribit, in eum
Auctor difficultat
tis in locis sibi
proponeret. Eas
nimum illius præ
queant. Quemad
lecta methodo su
mentis attentione
illis (ad quas q
TIUS solide resp
xat tangam, quo
Pag. 41. suaru
dam suam inter
& nulla necessita
in *Actis* Anno
nem problematis
vis optassem, ut
lentius constitisse
dus, nostræque
adeo non ægre
ciat, ut potius
faciendi ejus de
Joan. Bernoull

* Supra N°. XI.

N°. XXVII.

JOHANNIS BERNOULLI

Demonstratio Analytica & Synthetica suæ Constructionis Curvæ Beaunianæ, *in* Actis Erud. A. *1693. pag.* 234. *exhibitæ.* *

QUOS diu ante desideraveram, *D. Bernhardi* NIEUWENTIIT bini tractatus de Analysi infinitorum nuper mihi Amstelodamo transeunti in manus inciderunt; quorum alter, quem *Considerationes circa calculi differentialis usum* inscribit, in eum tantum finem videtur factus, ut Clarissimus Auctor difficultates, quas, in insolita nostra methodo, multis in locis sibi remoram injicere queritur, adimendas nobis proponeret. Eas revera tanti momenti non puto, ut vel minimum illius præstantiæ derogare, vel quempiam remorari queant. Quemadmodum enim, ex sola non satis clare intellecta methodo suboriuntur; sic nullus dubito, quin debita mentis attentione adhibita sponte disspareant. Ideoque relictis illis (ad quas quidem in universum celeberrimus LEIBNITIUS solide respondit in ultimo *Actor. Julio*) illud duntaxat tangam, quod me speciatim concernit. *Acta Erud. Lips.* 1696. Febr. pag. 82.

Pag. 41. suarum *Considerationum*, ad diversitatem ostendendam suam inter & meam methodum, quasi per digressionem, & nulla necessitate urgente, sibi impugnandam suscipit meam in *Actis* Anno *1693*, mense *Maio* publicatam constructionem problematis CARTESIO olim propositi. Quod (quamvis optassem, ut exhibuisset solutionem meliorem, quo luculentius constitisset, an eo usque sua sese extenderet methodus, nostræque proin anteferenda, & ab ea diversa esset) adeo non ægre fero, præsertim cum id summa modestia faciat, ut potius gaudeam, mihi occasionem suppeditari satisfaciendi ejus desiderio, quo hanc sui scrupuli enodationem

* Supra N°. XI.

efflagitare videtur. Laudanda enim eſt eorum ingenuitas, qui quod ſibi obſtaculo eſt candide fatentur, ut, illo ſublato, eo tutius progredi poſſint; non vero tot alii imitandi ſunt, qui malunt ignorare præclariſſima quæque, quam edoceri ab aliquo, quem vel ætate, vel dignitate, vel imaginaria quadam nominis celebritate, ſe inferiorem putant, & proin ipſam, quam nequeunt aſſequi, artem miſere traducunt. Eadem hæc ſors inevitabilis fuit novæ noſtræ Analyſi, quæ, ut ſui ignorantes ubique, ita etiam ſui oſores, quorum quoſdam ipſe novi, reperit. Quod præſtantiſſimus NIEUWENTIIT æquius animatus ſit, & nobis & arti noſtræ gratulor: ſpero enim illum, ubi celeberrimi LEIBNITII reſponſiones, & meam difficultatis ſuæ illuſtrationem mature perpenderit, ultro noſtram amplexurum methodum; ita ut forte brevi notabile incrementum hiſce ſtudiis acceſſurum ſit; præprimis ſi, junctis viribus, eo adnitamur.

Sed ne longius a ſcopo recedam; tantum abeſt, ut calculus ipſe, quem inſtituit, meam deſtruat conſtructionem, ut illam potius mirifice confirmet: cauſa autem erroris in hoc præcipue conſiſtit, quod, falſa hypotheſi nixus, credidit æquales differentiales habere etiam æquales integrales, vel ſummas; id quod abſolute dictum non ita ſe habet. Una enim eademque quantitas differentialis, ut jam ſæpius innui, infinitas habet integrales; veluti integralis ipſius dx non ſolum eſt x, ſed etiam poteſt eſſe x plus, vel minus, quavis alia quantitate data; idem quoque valet in omnibus aliis. Hinc, ſi reſolvendo aliquod problema pervenitur ad æquationem differentialem, infinitæ ſemper diverſæ, niſi omnes coincidant, ſolutiones ſatisfacient; quod Dn. LEIBNITIUS in paracentrica egregie obſervavit.

TAB. IV. N°. XI. & XXVII. *Fig.* 1. Nunc ut applicatio hujus eo melius perſpiciatur: Sit AIP curva, eo modo conſtructa, quo in *Actis* docui; ita nempe ut ad aſymptoton AB perpendicularem ad axem AK deſcripta Logarithmica DC, cujus ſubtangens AF ſit æqualis datæ r, & abſciſſa AK, vel BI, ſit æqualis portioni CH ipſi AB

AB parallelæ & inter C & tangentem DF interceptæ. Evin) cam ex calculo *Nieuvventiitiano* (quem hîc paucis repetam - hanc noſtram curvam eſſe eam ipſam quæ quæritur; cujus nimirum applicata IK ad ſubtangentem KM rationem habet, ut data r ad portionem applicatæ IL, reſectam a recta AL faciente angulum ſemirectum cum axe.

Vocentur (ductis lineis, ut apparent in Schemate) KI, y; KM, t; CB, z; AD, k; AK, x; IL, $y-x$; erunt, ex mea conſtructione, AF $=$ QB $= r$, & CH $=$ BI $=$ AK $= x$, unde & HG $= y-x$, & DG $= k-z$: tum ſit PO $=$ NB $=$ RS $= dy$, IO $= dx$, CS $= dz$. Hiſce poſitis, ex problematis conditione $y : t = r : y-x = dy : dx$, elicitur $xdy = ydy - rdx$; adeoque ſumtis integralibus, *omnia* $xdy = \frac{1}{2}yy - rx =$ trilineo BIA. Sed ex conſtructione problematis $k : r = k-z : y-x$. *Unde* $ky - kx = kr - rz$, & ductis omnibus in dy, fiet $ydy - rdy + rzdy : k = xdy$; ac tandem, ex natura Logarithmicæ, facto $rdz = -zdy$ (hic ſumitur ſignum $-$, quia creſcente z decreſcit y) erit $ydy - rdy - rrdz : k = xdy$.

Huc uſque optime ratiocinatur Clariſſimus NIEUWENTIIT; ſed conſequentia, quam inde petit, claudicat; concludit enim quantitatem $ydy - rdy - rrdz : k$ unicam habere quantitatem integralem $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k$, quando facit $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k = omn : xdy = \frac{1}{2}yy - rx$. Ego autem dico, quod hoc loco $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k$ non poteſt eſſe $= omn : xdy$. Evaneſcente enim trilineo BIA, ſeu $omn : xdy$, quantitas $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k$ non evaneſcit, ſed fit $= -rr$. Quod arguit, quod hoc ipſum, quod reſtat, $-rr$ ſub ſigno contrario addendum ſit, ut habeatur vera quantitas integralis hæc $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k + rr = omn : xdy$. Sed regeret forſan, qui fit, ut priori integratione $omn : xdy = \frac{1}{2}yy - rx$ non pariter aliqua quantitas data addenda vel demenda ſit? Hoc, inquam, fit, quia evaneſcente trilineo BIA, & ipſa quantitas $\frac{1}{2}yy - rx$ jam per ſe evaneſcit, abſque ut quadam data vel diminuatur, vel augeatur. Hoc ſi animadvertiſſet, non ſolum in hoc, ſed in in plurimis aliis locis, & præcipuis ſuis difficultatibus ſe facile extricaſſet, & vidiſſet noſtram conſtructionem ad nihil plane deducere, quod a veritate ſit alienum: Si enim æquetur $\frac{1}{2}yy - ry - rrz : k + rr$ cum ſuperius inventa $\frac{1}{2}yy - rx$, & dein reducantur membra; prodibit $ky - kx = kr - rz$, quæ omnino eadem eſt æquatio, quam ex conſtructione problematis elicuit. Ergo &c.

Sed ut anſam habeat, abſurditatem quam exinde emergentem credidit, ſi non publice revocandi, ſaltem probitatem noſtræ methodi tacite agnoſcendi; ſubnectam hic Demonſtrationem Syntheticam, quam ab illis etiam, qui vix communis Geometriæ limina ingreſſi, nedum qui penitioris noſtræ principia jam deguſtarunt, intelligi poſſe puto.

Ductis omnibus lineis, quas jubet in figura ſua huc tranlata, agatur inſuper HE parallela axi DAK. Jam $CG = IK$, & ablata $CH =$ (*per conſtr.*) $BI = AK =$ (*per hyp.*) KL, ergo reliqua HG, vel $EA, = IL$. Quoniam autem, *per conſtr.* $NP = RX$, & $BI = CH$; erit $NP - BI$, ſeu $IO, = RX - CH$, ſeu $RS - XV$; ideoque $PO : IO = RS : RS - XV = QB$ (ex proprietate Logar. AF): $QB - FE$ (EA, ſeu IL). Ergo $PO : IO$ ($= IK : KM$) $= AF$ (data r): IL. *Q. E. D.*

N°. XXVIII.

N°. XXVIII.

NOVA ET SINGULARIS GEOMETRIÆ PROMOTIO.

Circa dimenſionem quantitatum curvarum, per D. T. *

Acta Erudit. Lipſ. 1695. Nov. pag. 489.

CUM variæ in Matheſi dentur viæ ad eaſdem veritates inveniendas ducentes; plurimum in eo ponendum eſt ſtudii, ſimpliciſſima ut inveſtigetur. Quamvis enim hoc ipſum non ſit apprime neceſſarium in omnibus difficultatibus particularibus; maxime tamen requiritur in principiis fundamentiſque ponendis, quæ ita ſunt generalia, ut tota iiſdem Matheſis innitatur; ad quæ pertinet *Geneſis omnium curvarum.* Quapropter, poſtquam harum omnium facillimam deſcriptionem *per focos* reperi! ſtatim eandem cum publico communicavi, in *Medicina mentis* †; oſtendens, quam latum hæc campum nobis aperiat, infinitorumque novorum, ſingularium, & facillimo negotio decerpendorum inventorum feracem; ut augmentum veritatis, quod non unius eſt hominis, conjunctis viribus ab eruditis Viris eo melius promoveretur. Neque parvam mihi attulerunt lætitiam ea, quæ Dominus LEIBNITIUS, & doctiſſimorum nobile par fratrum BERNOULLIORUM jam præſtiterunt, *Actiſque* inſeruerunt *Eruditorum.* Sed cum hæc curvarum geneſis per focos nimiam præ ſe ferat ſimplicitatem, tantique momenti non videatur, ut ex ea tanta tamque præclara & utilia poſſint derivari; non ipſe ſolum alia nova inventa in *Actis Eruditorum* exhibui: ſed in poſteriori quoque *Medicinæ mentis* editione, alia quædam corollaria non vulgaria adjeci, ut alios quoque ad hanc rem penitius penſitandam excitarem. Nota mihi quidem plura, elegantia præſtantiaque, ſunt conſectaria, quorum hactenus nullam, niſi privatim apud Viros maximi ingenii, feci mentionem; arbitratus illa quondam, ob novitatem uſumque ſingularem, fore gratiora, cum publici juris ea faciendi mihi datur occaſio. Quoniam vero, an brevi hoc futurum ſit, cum eo non vivam in otio, quod hæc ſtudia vel maxime requirunt, neſcio; nonnulla ex his in publicum producere conſtituit, ejus quidem momenti, ut non diſplicitura credam Geometris: eo fine ut, vel hoc ipſo, augmen-

T 3

* DE TSCHIRNHAUSEN.

† *Medicina mentis & Corporis.* Lipſiæ. 1695. 4°.

mentum veritatis, ſin minus per me ipſum, per alios tamen, qui magis abundant otio, promoveatur.

I. Ex hac ergo curvarum geneſi per focos intellexi, præter unicam & ſimpliciſſimam *Hugenianam* evolutionem, dari innumeras alias, ita ut quælibet curva infinitis poſſit modis evolvi, ſequanturque hinc dimenſiones curvarum infinitis modis, ut alio tempore oſtendi. Perſpexi etiam, ipſam ſpatiorum curvilineorum dimenſionem generaliſſime hinc derivandam, & ea quidem ratione, quæ admodum ſimplex eſt, & in qua ſingularia hæc occurrunt. 1°. Uti notum pervulgatumque eſt, ſpatiorum circularium dimenſiones abſolvi ductu lineæ cujuſdam rectæ in arcum circuli: ita univerſaliter hoc ipſum omnibus competit *ſpatiis curvilineis*, ut ſcilicet ſint *æqualia producto alicujus rectæ in arcum curvæ alicujus*, occurruntque hic plurima circulari dimenſioni analoga. 2° *Curvæ, quarum ope reliquarum curvarum metior ſpatia*, quæque primæ quaſi curvæ exiſtunt, & præcipue ſunt conſiderandæ, proprietates habent valde notabiles; & in his, quod multis erit inexpectatum, *curvæ quoque ſunt mechanicæ*, quas CARTESIUS ex Geometria perperam, ut in *Medicina mentis* clare probavi, eliminavit, quarum proinde uſus hinc redditur in Geometria manifeſtior. 3°. *Curvæ illæ*, per quas menſurantur reliqua ſpatia, *in lineas rectas abeunt*, *cum ſpatium aliquod abſolute eſt quadrabile.* Unde facile ex ipſa geneſi dijudicari poteſt, utrum aliquod ſpatium quadrabile ſit, nec ne. Derivatur quoque inde, figuras clauſas non admittere quadraturam, intellige ordinariam; id quod conſentit cum iis, quæ habet Dominus NEWTON *; neque difficulter cognoſci poteſt, quænam figuræ clauſæ ſint; cum alias multa poſſint earum figurarum afferri exempla, quæ videntur quidem, nullatenus tamen ſunt clauſæ.

TAB.VII. N°.XXVIII. *Fig.* 1. Ut autem mens mea eo melius poſſit intelligi, exemplo, quod dictum eſt illuſtrabo. Sit ellipſis AFGE, ſumtoque radio, æquali ſemidiametro minori, deſcribatur ex centro C circumferentia BFD, tandemque pro lubitu ducatur ex C recta CG, & HG parallela AE; dico rectangulum ex recta AE in arcum circularem HD eſſe ſemper quadruplum ſectoris elliptici CGE; ac proinde hoc modo facile *ſpatium ellipticum in æquales partes ex puncto* C *dividi poteſt.* Idem obtinet in parabola & hyperbola, ſi his omnia, ut decet, adplicentur; ea tamen cum differentia, ut quemadmodum in ellipſi, prout jam vidimus, dimetienda adhibetur arcus curvæ circularis HD, talis curvæ, ubi normalis ad tangentem eſt conſtans, ſeu datæ rectæ æqualis; ita in hyperbola qualibet menſuranda adhibendus ſit arcus curvæ, in qua tangens ipſa eſt conſtans, ſeu datæ rectæ æqualis, adeoque curvæ, quæ ex mente CARTESII eſt mechanica; in parabola vero alia curva, ubi normalis ad tangentem & ipſa

* *Phil. Naturalis Principia Mathem.* Lib. I. Sect. VI. *Lemm.* 38.

ipſa tangens ſunt æquales conſtanti quantitati, hoc eſt, linea recta, aſſumatur. Atque ſic, unico theoremate, omnium Sectionum conicarum, per rectangulum ex conſtante recta in aliam curvam, aut rectam, ducta, traditur dimenſio. Quæ quidem ſpero Geometris non minus grata futura, quam monitum HUGENII, quo ſimile quid in hyperbola æquilatera a ſe deprehenſum indicavit; cum hæc omnia, modis plane diverſis eruta, multoque ſint univerſaliora, nec ſolum omnibus hyperbolis, ſed infinitis aliis curvis applicari poſſint.

Quænam autem porro hinc concluſiones in curvis ſuperiorum graduum, quæ tres pluresve focos habent, conſequantur, periti harum rerum, inſigni cum voluptate, per ſe ipſos facile experientur. Poſſem enim plura huc elegantia & univerſalia theoremata adferre; ſed ne ipſis deſiderium minuam hæc ſuo marte indagandi, unico tantum exemplo aſſertioni meæ fidem faciam.

Sit curva FG, quæ deſcripta ſit ope *quatuor focorum* A, B, C, D; TAB.VIII.
ſitque E centrum gravitatis quatuor punctorum A, B, C, D; dico, N°.XXVIII.
ſi ex quinque his punctis verſus duo puncta F & G, pro lubitu aſ- *Fig.* 2.
ſumta in curva, ducantur rectæ, *ſpatia AFG, BFG, CFG, DFG, quadrupla eſſe ſemper ſpatii EFC; ſi autem quinque eſſent foci, fore quintupla; & ſic porro in infinitum.* Sed de his ſatis.

II. Notum eſt in circulo circumferentias eſſe inter ſe ut diametros, & ſpatia circularia ſimilia ut diametrorum quadrata; non autem pervulgatum eſt, quod animadverti, dari unicum tale theorema pro omnibus curvis ejuſdem ſpeciei; ex quo *v. g.* curvarum ellipticarum & hyperbolicarum ratio ad invicem innoteſcit, quæ nos hactenus latuit, poſſuntque infinita nova & ſingularia circa omnes curvas derivari. Id quod ſpecimine aliquo illuſtrabo.

Sint duæ parabolæ AE & BD, quarum focus C, ducaturque recta TAB.VIII.
CDE. Dico *curvam parabolicam AE eſſe ad curvam parabolicam BD,* N°.XXVIII.
ut minoris latus rectum ad majoris latus rectum. Unde, ſi ratio laterum *Fig.* 3.
rectorum ſit dupla, curva AE dupla curvæ BD. Neque abſolute neceſſe eſt, ut eundem focum C habeant; poteſt enim punctum ad libitum aſſumi, & nihilominus tamen ratio, quam curvæ ad ſe invicem habent, determinari.

III. Cognita quoque eſt ratio, quam partes curvæ circularis ad ſe invicem habent; ſed circa quaſvis alias curvas, hæc nondum oſtenſa fuit a Geometris. Illis ergo forte non ingratum accidet, ſi ipſis ſignificavero, me methodi univerſalis eſſe compotem, *in qualibet curva, data portione ejuſdem, aliam ſemper aſſignandi, quæ datam rationem ad priorem obtinet;* cujus rei ſpecimen quoque exhibebo.

Sit parabola ACDEF, cujus focus B; ſitque data portio curvæ TAB.VIII.
CD, & alia aſſignanda EF, ita ut CD ſit ad EF, ut data linea GH N°.XXVIII.
ad *Fig.* 4.

ad IK. Ductis lineis B C & B D, fiat ut quadratum G H ad quadratum I K, ita recta B C ad rectam B E, & B D ad B F: Dico curvæ parabolicæ portionem C D ad E F eſſe in ratione data. Sit ex. gr. G H ad I K ut 1 ad 2, & fiat B E quadrupla B C, & B F quadrupla B D; erit portio curvæ E F dupla partis C D. Occurrit hic quidem caſus, ubi peculiaria quædam obſervanda; ſed cui demonſtratio præcedentium nota, facile videbit, quid ſibi agendum, aliaque egregia hinc eliciet, verbi gr. modum *in curvis aſſignandi ſpatia datam rationem habentia, licet ipſorum dimenſio ſit incognita*; prout hoc, in ſpecie circa præſens exemplum, in hyperbola æquilatera, cujus dimenſio analoga eſt parabolicæ, nova & hactenus incognita ratione fieri poteſt, ut aſſignentur ſpatia, quæ datam lineæ ad lineam rationem inter ſe habent; multaque inveniet alia præclara & plane nova theoremata, vel circa ipſas conicas ſectiones, quæ tamen hactenus nocturna diurnaque manu quaſi verſatæ fuerunt a Geometris. Demonſtrationes enim horum omnium afferre, & prolixum nimis foret & ſupervacuum, cum hæc inventa præcipue dicata ſint Geometris primi ordinis, quibus jam notum eſt, quomodo ex datis concluſionibus univerſalibus circa dimenſionem quantitatum, demonſtrationes via retrograda facile poſſint inveſtigari.

I V. Conſtitueram hic ſubſtinere, ſed commodum incidit in manus meas *Joh.* BERNOULLII *Meditatio de dimenſione linearum curvarum per circulares*; * quod egregium inventum & mirifice me delectavit, & effecit, ut hæc pauca adjicienda duxerim. Vir hic celeberrimus præcipue reſpexit, in eruendo hoc problemate, ad evolutionem *Hugenianam*: ſed quia juxta deſcriptionem meam curvarum per focos, quælibet curva infinitis modis poteſt evolvi; hinc ejus doctrina infinities amplificari poterit, adeoque Geometria ſingulare hoc modo augmentum recipiet. Addam vero & aliud, quod in tempus aliud reſervaveram. Notum eſt, quod dato cuilibet ſpatio infinita alia ſpatia, diverſæ naturæ, æqualia perfacile inveniri poſſint; ſed idem in curvis lineis efficiendi nemo adhuc oſtendit rationem, Si enim via ordinaria aggrediamur, ad tangentium methodum inverſam deducimur, cujus ingenioſiſſima nobis ſpecimina dedit illuſtriſſimus Vir *Marchio* HOSPITALIUS. Licet autem hanc quoque methodum probe excoluerim, & mihi fere omnimode ſatisfecerim, non tamen ea hic præſtat, quod comparari poſſit cum methodo univerſali, quam non ita pridem inveni, ope cujus *infinitæ diverſæ curvæ poſſunt deſignari datæ curvæ abſolute æquales.* Specimina hujus rei alio tempore exhibiturus ſum: jam enim vix licuit, ob circumſtrepentia negotia, ad amicorum inſtantiam præcedentia literis conſignare.

* N°. XXVI.

NB. *Videatur Nus.* XXX.

N°. XXIX.

G. G. L. * DE NOVO USU CENTRI GRAVITATIS AD DIMENSIONES,

Et ſpeciatim pro areis inter curvas parallelas deſcriptis, ſeu rectangulis curvilineis; ubi & de parallelis in univerſum.

Acta Erudit. Lipſ. 1695. Nov. *pag.* 93.

TAB. VIII. N°. XXIX.

PAPPUS * ſubindicaverat, quod GULDINUS †† expreſſius oſtendit, aream, motu debito generatam, æquari facto ex ductu mobilis generantis in viam ejus centri gravitatis. Hac regula potiſſimum uſi ſunt Geometræ, in motu rotationis circa certum quendam axem, pro metiendis ſolidis ac ſuperficiebus, quæ ſic generantur. Sed non minus ſuccedit negotium, ſi axis vel centrum continue mutetur, durante motu generantis; ut fit in evolutionibus curvarum & ſuperficierum. Itaque ſi curva A B ope fili D A B evolvatur, tunc pars fili, id eſt, initio recta D A, deſcribet aream D A (A) (D), vel brevius deſignando, D (A), duabus curvis parallelis condeſcriptis, D (D) & A (A) comprehenſam; quæ æquabitur rectangulo ſub recta A D, & recta æquali curvæ E (E) (iiſdem parallelæ) a centro, ſeu puncto rectæ A D medio E, deſcriptæ. Quin amplius, etiamſi pars ipſius mobilis ſucceſſive quieſcat & moveatur; tamen productum ex toto in viam centri gravitatis totius, areæ generatæ æquatur; quod & hic locum habet. Nempe totius fili D A B centrum gravitatis ſit G, in ſtatu primo; & (G) in ſtatu, ſeu ſitu ultimo, cum filum totum in rectam B (D) abiit. Sit linea G (G) locus continuus hujus centri; dico B (D) filum, in G (G), æquari D A B (D) D. Horum ut recordarer, fecit elegans theorema Dn. *Joh.* BERNOULLII, qui notavit duorum arcuum, evolutione condeſcriptorum, ut D (D) & A (A), differentiam, ſi convexitatem vertant ad eaſdem partes, ſummam, ſi ad contrarias, æquari arcui A H, ſectoris circularis, intercepti inter duos radios, D A, D H, æquales filo, vel regulæ, extremis ſuis punctis binos illos arcus deſcribenti, & parallelos ipſis D A, & (D) (A) extremis ſitibus fili.

* *Gothofredus Gulielmus* LEIBNITIUS.

† *Collect. Math.* ſub finem Præfationis ad Librum VII.

†† *Pauli* GULDINI, De centro gravitatis. Lib. II. p. 147.

Videantur Acta Augusti 1695. * His cum meo theoremate conjunctis, ſequitur differentiam (vel, collatis oppoſitis evolutionibus, ſummam) duorum (ut ſic dicam) rectangulorum (bicurvilineorum) condeſcriptorum, velut D (K) & L (A), modo ſint æquialta (nempe ſi DK = LA) poſſe menſurari ope dimenſionis circuli. Nam collocetur ipſi DK, vel LA, æqualis MN in recta DA, medio loco inter D & A; & deſcribantur ſimul parallelæ M (M) & N (N). Jam DL = KA, & DL in M (M) = D (L), & KA in N (N) = K (A). Ergo D(L) — K (A), id eſt, D (K) — L (A) = DL in M (M) — N (N) = DL in NP; poſito NP eſſe arcum circularem, centro M dicto modo deſcriptum, ſcilicet ut ſit MP parallela & æqualis ipſi (M) (N). Unum adhuc addam: quæ de parallelis noſtro more, id eſt generaliter acceptis, diximus, tam univerſalia eſſe, ut non tantum parallelis evolutione deſcriptis, ſed & rectis ac circularibus quadrent: licet in circularibus linea evolvenda evaneſcat in punctum; & pro rectis hoc punctum concipiendum ſit infinite remotum. Generaliter autem *parallelas* definio (lineas, vel ſuperficies) quarum intervalla (minima ſcilicet) ubique ſunt æqualia. Et cum *rectangulum*, (late ſumtum) figura ſit, quæ ſolos angulos rectos habet; conſequens eſt, figuram hic inter duas parallelas, earumque intervalla extrema (minima) contentam ut D (K) merito rectangulum appellari. Cæterum, ut hoc quoque adjiciam: *Data lineæ* (curvæ, vel rectæ) *parallelam ducere lineam*, problema eſt, quod etiam ſine evolutione conſtrui poteſt. Nempe ducatur recta perpendicularis ad lineam datam, & ex puncto ejus aliquo, tanquam centro, ac pertingente ab eo ad curvam perpendiculari, tanquam radio, deſcribatur circulus lineam datam tangens; qui, ſi volvatur ſuper ipſa, deſcribet centro ſuo lineam datæ parallelam. In eo tamen præſtat evolutio, quod ejus ope duci poteſt parallela datæ per punctum datum. Tantum enim opus eſt ex hoc puncto duci tangentem ad generatricem datæ, quæ ſimul & generatrix erit quæſitæ; tangente ducta partem fili faciente.

* Supra N°. XXVI.

JOHAN-

N°. XXX.

JOANNIS BERNOULLI

Supplementum defectus Geometriæ Carteſianæ *circa Inventionem Locorum.*

Annotata quædam in Schediaſmata Leibnitianum *&* Tſchirnhauſianum, *in ultimo Actorum Novembr. edita.*

De Complanatione ſuperficierum Conoidearum & Sphæroidearum.

Problema novum Mathematicis propoſitum.

I. QUANTUM Geometriæ incrementum acceſſerit, ex quo variæ infinitorum Methodi, inter quas Differentialis Calculus, nemine invidente, primas tenebit, inclaruerunt, mille inventorum exempla comprobant; quæ, ſi verum dicere fas eſt, noſtro hoc ævo, ut ſuperiora taceam, etiamnum pro deſperatis habebantur: quemadmodum ex plurimis modernorum Mathematicorum ſcriptis conjicere licet. Non quidem deſunt, qui meliora non edocti audacter nimis aſſerunt, nihil eſſe in tota Matheſi, pro quo communis Geometria, a CARTESIO aliiſque tradita, non ſufficit. Alii paulo æquioris judicii ab ea *infiniti* tantum conſiderationem excludunt; & hac in parte ejus imbecillitatem lubenter agnoſcunt, admittentes interim indiſcriminatim omnia, quæ circa finitas & ordinarias quantitates verſantur. Sed quid ſi oſtendam, etiam hic, multa deſiderari, quæ vulgarem Geometriam mirum quantum imperfectam relinquunt?

Acta Erud. Lipſ. 1696. Jun. pag. 264.

Notum eſt, potiſſimam *Carteſianæ* partem conſcriptam eſſe, pro inveniendis Locis & natura curvarum, tanquam materia in Geometricis ſummi momenti: Notum vero etiam eſt, quod methodus Auctoris ſemper ſupponat, certam quandam dari re-

 lationem

lationem punctorum in curva, ad puncta in recta poſitione data, quam axem vocat; pro qua relatione invenit æquationem algebraicam, unde curvæ naturam & conſtructionem determinat. Verum, ſi ex ſola mutua relatione ipſorummet curvæ punctorum, (nullis aliis conſideratis, vel datis) natura, vel conſtructio curvæ eruenda ſit; non video, qua ratione id obtinere liceat per regulas CARTESII. Nec etiam methodus infiniteſimalis ibi quicquam præſtare poterit. Non itaque ingratum Geometris fore puto, ſi novam, pro his & ſimilibus, mihi repertam eſſe, per ſolutionem unius vel alterius exempli, oſtendero.

Primum quod huic meditationi anſam dedit, erat decantatiſſima illa proprietas circuli, demonſtrata Propp. 35 & 36 Lib. III. EUCLIDIS. *Quod omnis recta per punctum datum ducta, & a circumferentia circuli terminata; habeat rectangulum ſegmentorum dato conſtanti æquale.* Quis eſt, qui non ſtatim pronuntiaret, hanc proprietatem eſſe circulo eſſentialem; & concluderet reciproce: *Ergo curva faciens rectangulum ſub ſegmentis cujusvis rectæ, per punctum datum ductæ, dato æquale, eſt peripheria circuli.* Ego vero contrarium ſtatuo, & dico ſic argumentantem enormiter hallucinari; ut pote reperiens, quod infinita dentur genera curvarum, quæ, non minus quam circumferentia circuli, dicta proprietate gaudeant; cum hoc ſolo diſcrimine, quod, in hac, ob ſimilitudinem partium ſuarum, punctum datum ubivis; in cæteris vero certo tantum loco poſſit ſumi. Quod ut clarius explicem, ſuppono, me hucuſque ignorare, quod ſit circulus, cui iſta proprietas conveniat, ſed mihi problematice proponi: *Invenire & conſtruere curvam ABC, ita ut, ex puncto dato D ducta quavis recta DEC, ſecante curvam in punctis E & C; rectangulum ſub ſegmentis DE, & DC ſit ſemper æquale eidem conſtanti dato.* Cui problemati, ut jam dixi, infinitis modis ſatisfieri poteſt: Ducta enim utcunque recta DAG, pro diametro, in qua abſciſſa DF, & ad hanc ordinatim applicata in quocunque angulo BF; aſſumatur quædam recta pro unitate; junctaque DB, vocetur DB, x & BF, y, Dico

TAB. VIII. N°. XXX. *Fig. 1.*

ſi fiat $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{2-\beta}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{2-\beta} + cx^{\gamma} + cx^{2-\gamma}$, vel $y =$ quantitati hoc modo quouſque libuerit continuatæ; fore ſemper punctum B in curva ABC, quæ quæritur. Ubi notandum, quod coefficientes a, b, c, &c. ut & poteſtates α, β, γ, &c. ſint conſtantes & arbitrariæ, affirmativæ, ſive negativæ; unde pateſcit, curvam ABC non ſolum, quoad dimenſionem, variare in infinitum, ſed etiam poſſe fieri tranſcendentem, ſi pro α, β, γ, &c. ſumantur numeri irrationales. Quod ſi eligamus æquationem ſimpliciſſimam, faciendo nempe $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha}$ & ponendo $\alpha = 0$, habebimus $y = axx + a$, vel ſuppletis homogeneis per quadratum unitatis, quod ſit an, erit $ny = xx + an$; quæ æquatio, ſi examinetur, videbitur eſſe ad circulum: adeo ut nunc ſatis liqueat, quod aſſerui, præter circulum, qui generaliſſimæ noſtræ ſolutionis ſpecialiſſimus exſtit caſus, innumeras alias altiorum graduum curvas conſtrui poſſe, quibus æqualitas rectangulorum ſub ſegmentis competit.

Sed nunc ad aliud progredior non minus curioſum: *Quæritur curva FHG, ita ut, ducta quavis recta GFB, ad poſitione datam DC in angulo dato; rectangulum ſub ſegmentis BG & BF ſit ſemper æquale conſtanti dato.* Ex Conicis patet, hyperbolam reſpondere quæſito; ſed præter illam, ſequentes infinitas curvas habe: Sumpta quadam recta pro unitate, ſit DC, y & CE, x; & facias $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{-\beta}$, vel $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + bx^{\beta} + bx^{-\beta} + cx^{\gamma} + cx^{-\gamma}$, vel $y =$ quantitati hoc modo ad lubitum continuatæ; atque ſic obtinebis ſolutiones infinitas. Hinc, ſumpta æquatione ſimpliciſſima, $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha}$, & poſito $a = 1$, prodibit æquatio $xy = axx + a$, pro hyperbola; quæ, ut circulus in ſuperiori exemplo, ſimpliciſſimi gradus eſt omnium reliquarum.

TAB. VIII. N°. XXX. *Fig. 2.*

Sed nimis prolixus ſim in exemplis, quorum duo jam prolata probitatem methodi ſatis ſuperque manifeſtant; tranſeo tandem ad problema, quod olim mihi, ſi bene memini, aliquis

 non

Tab. VIII. Nº. XXX. *Fig.* 3.

non infimæ notæ Geometra propoſuerat: Erat autem tale. *Quæritur qualis ſit curva ABCDE ita ut ducta per verticem A tangente AC, & alia utcunque ſecante curvam in punctis B & D, ſumma ſegmentorum DA & BA ſit ubique dupla ipſius tangentis AC.* SOLUT. Accepta quadam AE pro unitate, ex qua abſcindatur indeterminata AF, & ad AE, AF tertia proportionalis AG; Fiat ut AE ad AF, ſic FG ad quartam HD, quæ erigatur perpendiculariter ſuper AE, ita ut ſit ſinus arcus FD centro A & radio AF deſcripti, erit punctum D in curva optata. Vel ſi mavis expreſſionem litteralem, idem infinitis ſolutionibus præſtari poteſt, ſi fiat (poſitis AE $=1$, AF, vel AD, $=x$, DH $=y$) $y = x(x - xx)^n$; ubi n numerum quemvis conſtantem denotat.

Si qui alii in hiſce ſuarum methodorum vires experiri velint, quærant (*Fig. I.*) curvam ABC, ejus proprietatis, ut ducta a puncto dato D recta utcunque DEC, ſolidum ſub uno ſegmento DC, & quadrato alterius FB ſit conſtanti dato æquale.

II Cum hæc meditarer, accepi cum aliis ultimum horum *Actorum Novembrem*, ubi non ſine magno delectamento legi, quæ Illuſtre Virorum par LEIBNITIUS * & TSCHIRNHAUSIUS † publico impertierunt. Et quidem utrique vidi novum meum theorema menſi *Auguſto* ſuperioris Anni inſertum †† anſam ſuppeditaſſe, ut nova novis augerent: Celeb. LEIBNITIO perbene notante, differentiam vel ſummam rectangulorum curvilineorum & æquealtorum, una evolutione condeſcriptorum, æquari ſpatio circulari. Quæ inſuper habet de rectangulis curvilineis, & de curvis parallelis, pro more ejus ingenioſe excogitata ſunt. Omnino mihi placet ejus conſtructio ducendarum parallelarum, non adhibita evolutione; quam etiam, contra ac ipſe ſentit, præfero alteri illi per evolutionem factæ; tum, quod facilius circulus conſtruatur quam evoluta; tum etiam, quod per rotationem, non minus quam per evolutionem, parallela per punctum datum duci poſſit, ſi modo radius circuli fiat æqualis perpendiculari ex puncto dato ad curvam ductæ.

Quæ

* Nº. XXIX. † Nº. XXVIII. †† Nº. XXVI.

Quæ Nob. TSCHIRNHAUSIUS ex contemplatione focorum in curvis nobis dedit, ſatis oſtendunt, quantum hæc materia mereatur ut diligentius tractetur; fateor enim ſtupenda theoremata, & veritatis alioquin indaginis abſtruſiſſimæ, nullo interdum aut levi negotio, inde erui. Interim non perſcipicio, quomodo per aliam evolutionem quam *Hugenianam*, theorema meum de condeſcriptarum dimenſione demonſtrari, nedum ejus doctrina amplificari poſſit; cum, in demonſtratione neceſſario reſpiciendum ſit ad normalitatem radii evolventis ad curvam, quæ normalitas in ſola evolutione *Hugeniana* contingit. Adde, quod Vir acutiſſimus nondum docuerit modum generalem deſcribendi curvam quamlibet, per focos ſimplices, non lineares: quem ſi premit, rogandus eſt, ut communi bono illum in lucem emittat, eumque ex. gr. parabolæ cubicali per focos deſcribendæ applicet. Ardenter quoque deſideramus publicationem methodi univerſalis, cujus ſe compotem dicit Art. III, *In qualibet curva, data portione ejuſdem, aliam ſemper aſſignandi, qua datam rationem ad priorem obtinet.* Quin imo totum Mathematicorum Orbem ſibi obſtringet, & æternam laudem merebitur; ſi dabit demonſtrationem ſpeciminis, quod ibidem exhibuit, pro aſſignandis in curva parabolica portionibus in data ratione. Miror Celeb. Auctorem, pro perſpicacite ſua, non animadvertiſſe, quod hoc ſpecimen longe plus in receſſu habeat quam apparet. Det enim mihi demonſtrationem conſtructionis ſuæ; & ego ipſi dabo quadraturam hyperbolæ, & poinde rectificationem curvæ parabolicæ geometricam, in qua indaganda omnes, quotquot extiterunt Mathematici, hactenus fruſtra deſudarunt.

Cætera, quæ Nob. TSCHIRNHAUSIUS in dicto Schediaſmate profert, pereximia ſunt. Præprimis Art. I. notatu digniſſima eſt reductio ſectorum ellipticorum ad ſectores circulares; ex qua commode deducit diviſionem ſpatii elliptici in partes æquales; quamvis alias ſector ellipticus, & hyperbolicus, commodiſſime biſariam dividatur, biſecando tantum ſubtenſam arcus ſectoris per rectam e centro eductam. Obſervo inſuper,

conſtru-

TAB.VIII. N°.XXV. *Fig.* 1. constructionem Viri Nobilissimi etiam locum habere, si pro radio circumferentiæ BFD sumatur major ellipseos diameter, id est, quando ellipsis AFE cadit intra circulum BFD: Dico enim, etiam tunc rectangulum ex recta AE in arcum circularem HD esse semper quadruplum sectoris elliptici CGE. Mirari hic subit quod, pro mensuranda hyperbolæ area, velit adhibere arcum curvæ mechanicæ; cum tamen id fieri queat commodissime, ex ductu rectæ constantis in arcum curvæ geometricæ, nempe parabolæ, ceu notum est.

In fine Articuli primi elegans habetur theorema, quod tamen, meo judicio, non fluit ex natura focorum; quoniam longe universalius est, quam Celeb. Auctor illud proponit, sese extendens ad omnes curvas, sive sint per focos, sive aliter, quomodocunque, & si vis, libera manu descriptæ. Sit enim
TAB.VIII. No.XXV. *Fig.* 2. Curva quæcunque FG, sitque E centrum gravitatis quotcunque punctorum A, B, C, D, ad arbitrium sumtorum: si ex singulis hisce punctis ducantur rectæ ad duo quælibet puncta curvæ F & G; erit summa sectorum AFG, BFG, CFG, DFG, ad sectorem EFG, ut numerus punctorum ad unitaetm. *

Quod superest; non possum, quin hic, ex occasione utilissimi condescriptarum theorematis, insinuem me possidere modum generalem complanandi superficies omnes conoideas & sphæroideas, habentes axem ad basin rectum; & ex illis abscindendi portionem dato spatio, sive rectilineo, sive curvilineo, æqualem; utrumque ope solius quadratricis vulgaris. Ubi monendum tamen est, quod in aliquibus, ut in sphærica, conica, conoidea, parabolica, aliisque, absolute, & sine quadratrice, id præstari possit. Hinc ænigma Florentinum non solum in superficie sphærica, sed in quavis alia conoidea, vel sphæroidea, nullo labore & diversimode solvere licet. Hinc etiam emergit insignis coni recti proprietas; quam, quia a nemine hactenus animadversam scio, huc refero: *Si super basi coni recti elevetur prisma rectum, habens pro basi figuram quamcunque, sive rectilineam, sive curvilineam; abscindet hoc prisma ex*

* Videatur Nus. XXXIV.

ex superficie conica portionem, quæ erit ad basin prismatis, ut latus coni ad radium basis coni. Ex quo ultro patet, cuilibet spatio plano, sive quadrabili, sive non quadrabili, posse sumi absolute spatium æquale ex superficie coni recti, & vicissim. Item omnis portio superficiei conicæ rectæ, terminata a tribus pluribusve hyperbolis in cono factis, quorum axes sunt paralleli axi coni, est quadrabilis, utpote æqualis figuræ rectilineæ.

PROBLEMA NOVUM

Ad cujus solutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare TAB.VIII. N°.XXX. *Fig.* 4. *Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*

Ut harum rerum amatores instigentur, & propensiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis; sciant non consistere in nuda speculatione, ut quidem videtur, ac si nullum haberet usum; habet enim maximum, etiam in aliis scientiis quam mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim, (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam,) quanquam recta AB sit brevissima inter terminos A & B, non tamen illa brevissimo tempore percurritur; sed est curva AMB Geometris notissima; quam ego nominabo, si, elapso hoc anno, nemo alius eam nominaverit.

N°. XXXI.

JOHANNIS BERNOULLI

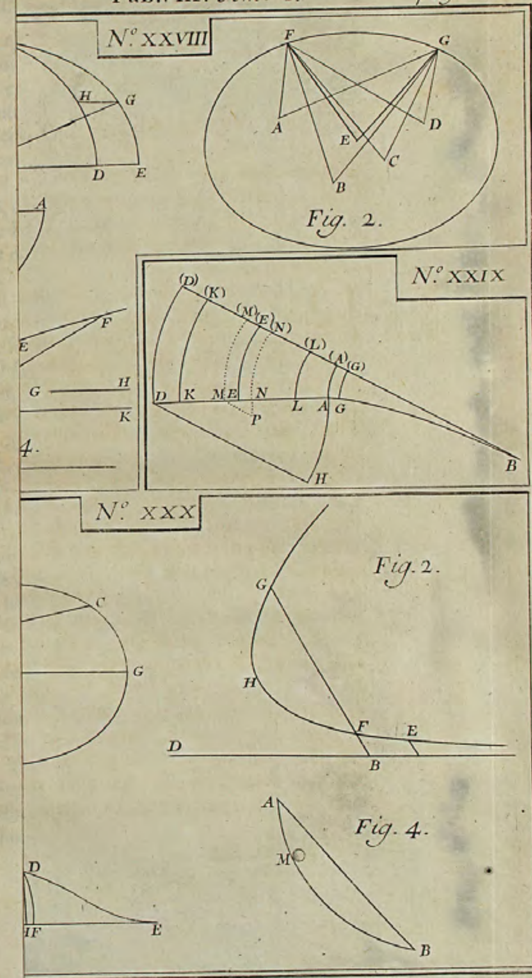
Tetragonismus universalis Figurarum Curvilinearum, per Constructionem Geometricam continue appropinquantem.
Addatur ad ea quæ in *Actis* 1694 *mense Novembr.* * de eadem materia habentur.

Acta Erud. Lipſ. 1696. Decemb. p. 551.

QUOD rarum olim & inuſitatum fuerat, nunc a duobus tribuſve luſtris nihil vulgarius, nihil tritius eſt apud Geometras, quam quadraturas ſpatiorum (algebraice non determinabiles) ad ſeriem infinitam, quod ultimum eſt refugium, revocare. Primus ego, & forte ſolus, publicavi *Act.* 1694 *menſe Novembr.* ſeriem univerſalem pro omnibus, ſine diſcrimine, ſpatiis quadrandis curviſque rectificandis; quam neque irrationalitas, neque implicatio indeterminatarum impedit. Non moror, multoque minus reſponſione dignor, quicquid quidam abganniat: Sufficit tanto applauſu præſtantiſſimorum Mathematicorum exceptam fuiſſe, quod privatæ ipſorum literæ teſtatum reddunt, ut non ſit, cur ejus me pœniteat; quin potius & in publicum, & in me, injurius eſſem, ſi diutius in chartis meis latitare paterer hanc ſecundam methodum, quæ alteri priori multis occaſionibus commode ſuccenturiari poteſt; eo quod prior illa, analytice expreſſa, applicatu difficilis evadit, in exemplis, ubi perplexus requiritur calculus; hæc vero, quam nunc traditurus ſum, nullam analyſin reſpiciens, ſpatiorum magis minuſve compoſitorum quadraturas pari ſimplicitate expedit; ſuppoſito tantum curvarum datarum datas eſſe, vel dari poſſe tangentes, ipſamque curvam propoſitam jam deſcriptam eſſe: hic enim nullas expeditiones analyticas, quibus ſeriei termini explicentur, adhibeo; ſed, quod inſoli-

* *Supra* N°. XXI.

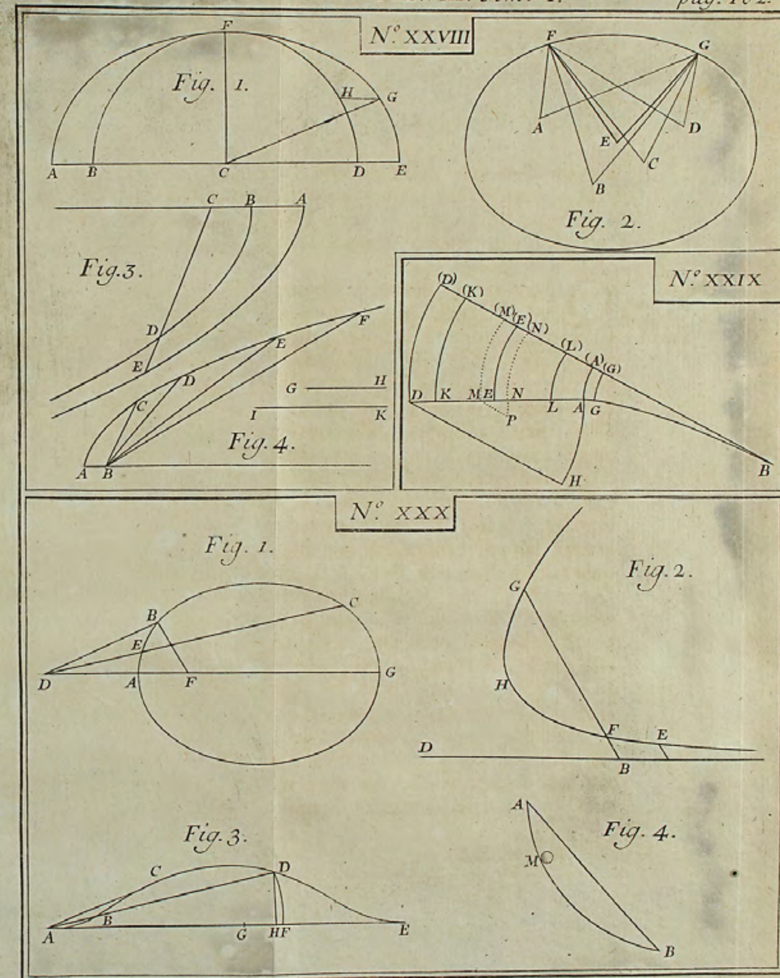
Tab.VIII. *Tom.* I. *pag.* 162.



LLI

per Construc-
ntem.
vembr. * de

nc a duobus
tius est apud
nice non de-
um est refu-
publicavi *Act.*
nnibus, fine
ndis; quam
atarum impe-
dignor, quic-
ræstantissimo-
vatæ ipsorum
e pœniteat;
essem, si diu-
n methodum,
succenturiari
pplicatu diffi-
ır calculus;
nalysin respi-
adraturas pa-
datarum da-
ram proposi-
iones analy-
ed, quod in-
soli-



ſolit um hactenus fuit qua
tructio geometrica, conſt
infinitum continuata, exh
quadrandæ ad rectangulum
Sit propoſita figura cur
dinatæ A B, B C; quærit
ptum rectangulum B L? c
Ob datam curvam A B, da
nova curva A D, hac leg
A M; hinc & hæc nova da
do conſtruatur ex A D,
A C, nimirum ut B E ſe
ex inventa tertia curva A
hac quinta A G; tum ſex
tinuari intelligatur. Hab
ad ſpatium curvilineum
B C ad B C + B D + B
Quod ſi alternatio ſign
qui excogitari poſſunt, n
A E, A F, A G, &c. d
B D ſit æqualis ipſi L M
— A N; B F = B E —
factis, dico rectangulum
A C B, ut B C ad B C
Notare convenit, non
A D, A E A F, &c.
repræſentavi: minimæ e
ductæ, ſufficiunt ad dete
G, &c.
Hoc etiam monendum
cere lubet, in nonnullis
re ut, delineatis jam alic
quæ interſecent applicata
ita ut punctum interſect
tandem ab eodem infinit

ſolitum hactenus fuit quadraturas ita determinare, ipſa conſtructio geometrica, conſtanti lege, eaque valde ſimplici, in infinitum continuata, exhibet veram rationem figuræ curvilineæ quadrandæ ad rectangulum circumſcriptum.

Sit propoſita figura curvilinea quæcunque ACB, cujus coordinatæ AB, BC; quæritur quam habeat rationem ad circumſcriptum rectangulum BL? cui quæſito ego ſic generaliter ſatisfacio. TAB. IX. N°. XXXI. Ob datam curvam AB, datur ejus tangens CM; deſcribatur ergo nova curva AD, hac lege, ut ubique BD ſit = ſemiſſi ipſius AM; hinc & hæc nova datur. Jam fiat tertia AE, quæ eodem modo conſtruatur ex AD, quo hæc ipſa AD conſtructa eſt ex AC, nimirum ut BE ſemper ſit $= \frac{1}{2}$ AN. Eadem hac lege, ex inventa tertia curva AE, deſcribatur quarta AF; & ex hac quinta AG; tum ſexta, ſeptima, & hoc in infinitum continuari intelligatur. Habebit rectangulum circumſcriptum BL ad ſpatium curvilineum ACB eam rationem, quam dupla BC ad $BC + BD + BE + BF + BG +$ &c.

Quod ſi alternatio ſignorum magis arrideat; en, ex pluribus qui excogitari poſſunt, modum hunc alterum: Curvæ AD, AE, AF, AG, &c. deſcribantur hac conditione, ut ubique BD ſit æqualis ipſi LM, ſeu $AC - AM$; $BE = BD - AN$; $BF = BE - AO$; & ita conſequenter: quibus factis, dico rectangulum BL fore ad figuram curvilineam ACB, ut BC ad $BC - BD + BE - BF +$ &c.

Notare convenit, non opus eſſe integras deſignare curvas AD, AE AF, &c. quas majoris intelligentiæ gratia ita repræſentavi: minimæ enim earum portiunculæ, prope BC ductæ, ſufficiunt ad determinandum interſectiones D, E, F, G, &c.

Hoc etiam monendum, quando methodum ad praxin deducere lubet, in nonnullis exemplis, ut in ipſo circulo, accidere ut, delineatis jam aliquot ex curvis AD, AE, AF, reliquæ interſecent applicatam BC infra punctum B, & quidem ita ut punctum interſectionis magis magiſque recedens a B, tandem ab eodem infinite diſtet; unde nihil determinati habebitur. Ne tamen, hiſce in caſibus, regula noſtra fiat inutilis, ſuumque non ſortiatur effectum; multis modis huic inconvenienti remederi licet: quorum tutiſſimus eſt, ut figura propoſita transformetur (quod quomodo fieri debeat, jam omnibus, & vel tyroni, notum eſt) in aliam, quæ terminetur curva aſymptotica. Sciendum enim, hujus modi ſpatia modo memoratæ incongruitati nunquam eſſe obnoxia.

Cæterum, non prætereundum puto, quod notavi, interdum, ubi ſpatia ſunt abſolute quadrabilia, ſeriem $BC+BD+BE+BF$ &c. in priori modo; vel $BC-BD+BE-BF+BG$, &c. in altero, fieri manifeſte ſummabilem; unde quadratura terminis finitis ſponte prodit: Ut quando curva propoſita AC eſt ex parabolarum genere cujuſvis gradus n, erit, ex proprietate parabolarum, BC ad AM in ratione conſtante n ad $n-1$, & propterea curva AD, ut & omnes reliquæ AE, AF, AG, erunt parabolæ ejuſdem gradus cum AC. Hinc per priorem modum ſeries $BC+BD+BE+BF$ &c. conſtituit vulgarem hanc progreſſionem geometricam in infinitum deſcendentem, $\frac{1}{1}BC+\frac{n-1}{2n}BC+\frac{(n-1)^2}{4nn}BC+\frac{(n-1)^3}{8n^3}$ &c. cujus ſumma, per communes regulas invenitur $=\frac{2n}{n+1}BC$. Dico itaque, rectangulum circum ſcriptum eſſe ad ſpatium parabolicum ACB, ut $2BC$ ad $\frac{2nBC}{n+1}$ id eſt, ut $n+1$ ad n; & hoc perfecte congruit cum eo, quod per infiniteſimalem calculum jam diu repertum habemus; non enim ut aliquid novi, ſed quatenus methodi hujus univerſalitatem commendat, huc refero. Pariter per poſteriorem modum, ſeries $BC-BD+BE-BF$ &c. hanc producit progreſſionem geometricam $\frac{1}{1}BC-\frac{1}{n}BC+\frac{1}{nn}BC-\frac{1}{n^3}BC$ &c. cujus ſumma $=\frac{n}{n+1}BC$. Habebit ergo rectan-

tangulum BL ad ſpatium ABC rationem, quam BC ad $\frac{n}{n+1}BC$, id eſt n ad $n+1$, ut ante.

N°. XXXII.

LECTORI BENEVOLO,

Profundioris in primis Matheſeos cultori, Salutem!

PRopoſuit in hiſce *Eruditorum Actis menſe hujus Ann. Junio*, pag. 269*. Vir Clariſſimus Dn. *Joh.* BERNOULLI, Mathematum hoc tempore in Academia Groningenſi Profeſſor publicus, Problema novum, & ad ejus ſolutionem Mathematicos invitavit; pollicitus ſemet eam publicaturum, ſi elapſo hoc anno, nemo alius eam promulgaverit. Cum vero hactenus nemo quicquam ad nos tranſmiſerit, quod ad Problematis illius ſolutionem ſpectaret, & dignum tamen Problema videretur, quod aliorum, ad quos forte *Junius Actorum noſtrorum* nondum pervenit, ingenia exerceret; atque perſuaſum inſuper haberemus, in Gallorum etiam & Italorum Ephemeridibus idem Problema propoſitum interea fuiſſe, & ad plurium adeo notitiam perveniſſe; prorogandum termimum Celeberrimus BERNOULLIUS cenſuit, ſolutionem ſuam ad feſtum uſque Paſchatis Anni proximi ſuppreſſurus. Itaque ſpatium Mathematicis ſuppetit experiendi vires ſuas, & Problematis, ubi eam conſecuti fuerint, ſolutionem, ſeu in *Actis* hiſce noſtris, ſeu in exterorum *Diariis* cum publico communicandi.

Acta Erudit Lipſ. 1696. Dec. pag. 560.

* *Supra* N°. XXX. pag. 162.

N°. XXXIII.

PROGRAMMA

Editum GRONINGÆ *A°.* 1697.

Acutissimis qui toto Orbe florent Mathematicis S. P. D.

JOHANNES BERNOULLI, MATH. P. P.

CUM compertum habeamus, vix quicquam esse quod magis excitet generosa ingenia, ad moliendum quod conducit augendis scientiis, quam difficilium pariter, & utilium quæstionum propositionem; quarum enodatione, tanquam singulari si qua alia via, ad nominis claritatem perveniant, sibique apud posteritatem æterna extruant monumenta: Sic me nihil gratius Orbi Mathematico facturum speravi, quam si imitando exemplum tantorum Virorum MERSENNI, PASCALII, FERMATII, præsertim recentis illius Anonymi Ænigmatistæ Florentini, * aliorumque, qui idem ante me fecerunt, præstantissimis hujus ævi Analystis proponerem aliquod Problema, quo, quasi lapide Lydio, suas methodos examinare, vires intendere, &, si quid invenirent, nobiscum communicare possent; ut quisque suas exinde promeritas laudes a nobis, publice id profitentibus, consequeretur.

Factum autem illud est ante semestre in *Actis Lips. m. Jun.* pag.

* *Vincentius* VIVIANI A°. 1692. Ænigma Geometricum proposuit, de miro opificio Testudinis quadrabilis Hemisphæricæ; Videantur *Acta Eruditorum* hujus anni, mens. Junio, *pag.* 274. vel Vita Viviani in Hist. Acad. Reg. Scient. Paris. A°. 1703.

pag. 269, * ubi tale Problema proposui, cujus utilitatem, cum jucunditate conjunctam, videbunt omnes, qui cum successu ei se applicabunt. Sex mensium spatium a prima publicationis die Geometris concessum est, intra quod, si nulla solutio prodiret in lucem, me meam exhibiturum promisi. Sed ecce elapsus est terminus, & nihil solutionis comparuit; nisi quod Celeb. LEIBNITIUS, de profundiore Geometria præclare meritus, me per literas certiorem fecerit, se jam feliciter dissolvisse nodum pulcherrimi hujus, uti vocabat, & inauditi antea Problematis; insimulque humaniter rogavit, ut præstitutum limitem ad proximum Pascha extendi paterer; quo interea apud Gallos, Italosque, idem illud publicari posset, nullusque adeo superesset locus ulli de angustia termini querelæ. Quam honestam petitionem non solum indulsi, sed ipse hanc prorogationem promulgare decrevi; visurus num qui sint, qui nobilem hanc & arduam quæstionem aggressuri, post longum temporis intervallum, tandem Enodationis compotes fierent. Illorum interim in gratiam, ad quorum manus *Acta Lipsiensia* non perveniunt, propositionem hic repeto.

PROBLEMA
MECHANICO-GEOMETRICUM
De Linea celerrimi descensus.

Determinare lineam curvam data duo puncta, in diversis ab Horizonte distantiis, & non in eadem recta verticali posita connectentem, super qua mobile, propria gravitate decurrens, & a superiori puncto moveri incipiens, citissime descendat ad punctum inferius.

SEnsus Problematis hic est: Ex infinitis lineis, quæ duo illa data puncta conjungunt, vel ab uno ad alterum duci possunt,

* Supra N°. XXX. pag. 161.

possunt, eligatur illa, juxta quam, si incurvetur lamina tubi canalisve formam habens, ut ipsi impositus globulus, & libere dimissus, iter suum ab uno puncto ad alterum emetiatur tempore brevissimo.

Ut vero omnem ambiguitatis ansam præcaveamus; scire B. L. volumus, nos hic admittere GALILÆI hypothesin, de cujus veritate, seposita resistentia, jam nemo est saniorum Geometrarum qui ambigat, *Velocitates scilicet acquisitas gravium cadentium esse in subduplicata ratione altitudinum emensarum*; quanquam alias nostra solvendi methodus universaliter ad quamvis aliam hypothesin sese extendat.

Cum itaque nihil obscuritatis supersit; obnixe rogamus omnes, & singulos hujus ævi Geometras, accingant se promte, tentent, discutiant quicquid in extremo suarum methodorum recessu absconditum tenent. Rapiat qui potest præmium, quod Solutori paravimus; non quidem auri, non argenti summam, quo abjecta tantum & mercenaria conducuntur ingenia, a quibus ut nihil laudabile, sic nihil, quod scientiis fructuosum, expectamus; sed cum virtus sibi ipsi sit merces pulcherrima, atque gloria immensum habeat calcar, offerimus præmium, quale convenit ingenui sanguinis Viro, consertum ex honore, laude, & plausu; quibus magni nostri Apollinis perspicacitatem, publice & privatim, scriptis & dictis coronabimus, condecorabimus, & celebrabimus.

Quod si vero festum Paschatis præterierit, nemine deprehenso, qui quæsitum nostrum solverit; nos quæ ipsi invenimus publico non invidebimus: Incomparabilis enim LEIBNITIUS solutiones tum suam, tum nostram, ipsi jam pridem commissam, protinus, ut spero, in lucem emittet; quas si Geometræ, ex penitiori quodam fonte petitas perspexerint, nulli dubitamus, quin angustos vulgaris Geometriæ limites agnoscant, nostraque proin inventa tanto pluris faciant, quanto pauciores eximiam nostram quæstionem soluturi extiterint, etiam inter illos ipsos, qui per singulares, quas tantopere commendant, methodos, interioris Geometriæ latibula non solum

solum intime penetrasse, sed etiam ejus pomœria, Theorematis suis aureis, nemini ut putabant cognitis, ab aliis tamen jam longe prius editis, mirum in modum extendisse gloriantur.

PROBLEMA ALTERUM
PURE GEOMETRICUM

Quod priori subnectimus, & Strenæ loco Eruditis proponimus.

AB EUCLIDIS tempore vel Tyronibus notum est; Ductam utcunque a puncto dato rectam lineam, a Circuli peripheria ita secari, ut rectangulum duorum segmentorum, inter punctum datum & utramque peripheriæ partem interceptorum, sit eidem constanti perpetuo æquale. Primus ego ostendi, in eodem *Actorum Jun.* pag. 265, * hanc proprietatem infinitis aliis Curvis convenire, illamque adeo Circulo non esse essentialem: Arrepta hinc occasione, proposui Geometris determinandam Curvam, vel Curvas, in quibus non rectangulum, sed solidum sub uno & quadrato alterius segmentorum æquetur semper eidem: sed a nemine hactenus solvendi modus prodiit; exhibebimus eum, quandocumque desiderabitur. Quoniam autem non nisi per Curvas transcendentes quæsito satisfacimus; en aliud, cujus solutio per mere algebraicas in nostra est potestate.

Quæritur Curva ejus proprietatis, ut duo illa segmenta, ad quamcunque potentiam datam elevata & simul sumta, faciant ubique unam eandemque summam.

Casum simplicissimum, existente sc. numero potentiæ 1, ibidem in *Actis*, pag 266. † jam solutum dedimus; generalem vero solutionem, quam etiamnum premimus, Analystis eruendam relinquimus.

Dabam Groningæ, ipsis Cal. Jan. 1697.

NB. *Videatur Num.* XXXVII.

* Supra N°. XXX.
† N°. XXX.

Nº. XXXIV.

RESPONSIO AD OBSERVATIONES DOMINORUM BERNOULLIORUM,

Qua in Actis Eruditorum *mense* Junio *hujus anni continentur*, per D. T. *

Acta Erud. Lipſ. 1696 Nov. p. 519.

PErſpexi, paucas ante hebdomadas, in *Actis Erud.* menſis *Junii*, quæ Celeberrimi BERNOULLII, circa meditata mea Geometrica, quæ menſe *Novembr.* 1695. † publicata ſunt, annotarunt; in quæ utinam incidiſſem tali tempore, quo Viris, tam ſingulari præditis eruditione, eo potuiſſem, quo ipſi deſiderant, modo ſatisfacere. Verum enim vero, continuis itineribus, & ejus generis occupationibus, quæ ab hoc argumento diverſiſſimæ ſunt, diſtractus fui; facileque prævidi, vix mihi conceſſum iri ante hyemem inſtantem his ſtudiis dare operam. Quo factum eſt, ut ſatius duxerim pauca interim, quam nihil, reſpondere.

TAB. VIII. Nº. XXVIII. *Fig.* 1.

Primum ergo ea in ſententia me fuiſſe profiteor, recte & ex ordine me facturum, ſi facilia & nova exempla mearum Methodorum generalium exhiberem; ut alii ex his intelligerent, quo modo illas ad omnes alias curvas applicare, &, ſi ipſis ita viſum foret, mecum augmentum veritatis promovere poſſent. Qua propter, etſi theorema circa *Fig.* 1. de Ellipſi, aliis, imo infinitis modis demonſtrari poteſt, nihil tamen hoc theſi meæ officit, qua novum hoc eſſe theorema, quod ad omnes pertinet ſectiones conicas, & (quod præcipuum eſt) ejusmodi via omnes curvas menſurari aſſero. Quam quidem methodum ſingularem plane eſſe puto; neque miror Cl. *Joh.* BERNOULLIUM hujus theorematis momentum pro ea, qua pollet, ingenii acie, bene perſpexiſſe.

TAB. VIII. Nº. XXVIII. *Fig.* 2.

Quod attinet ad theorema *Fig.* 2........ D. *Joh. Bernoullii* verba. *Seſe extendens ad omnes curvas, ſive ſint per focos, ſive aliter quomodocunque, & ſi vis, libera manu deſcriptæ*, innuere videntur in ea ipſum eſſe ſententia, non omnes curvas per focos deſcribi poſſe, ejus contrarium facile demonſtrari poteſt............

Methodum tangentium inverſam ante aliquot annos magno in pretio me habuiſſe, jam vero eandem non leves ob cauſas, eo loco non amplius a

* DE TSCHIRNHAUSEN. † Supra Nº. XXVIII.

a me haberi fateor: neque tamen quemquam, cujus ingenium ad eam excolendam fertur, animus eſt retrahere. Et quamvis, ante annos bene multos, methodum illam eo deduxi, ut nihil hactenus propoſitum viderim, quod ejus ope, cum operam dare ei licuit, non potuerim determinare, ipſaſque adeo non ita pridem proprietates tangentium, quæ pluribus curvis ſunt communes: in ea tamen opinione ſemper fui, non eſſe hanc genuinam viam determinandi curvarum deſcriptiones & dimenſiones: & quia nunc mihi tantum temporis non relinquitur vacuum ad hæc ſtudia perſequenda, lubenter hæc aliis relinquo, & quod mihi ſuppetit otium tribuo hujus generis ſtudiis eo ordine tractandis, qui mihi pariter & publico maxime conducere videtur.

Quæ pertinent ad focos in qualibet curva ſpeciali, jam in *Medicina mentis* pertractavi, oſtendique, quantum ſufficit harum rerum peritis, quomodo omnes certo ſint determinandi. Quamvis enim, mea ſententia, quælibet curva, ex. gr. circulus, infinitos habet focos, omnes tamen ita poſſunt inveniri; cujus rei, jam in *Actis Eruditorum*, exhibui ſpecimina. Id tamen negare non poſſum, peculiaria hic dari compendia, ſine quibus ordinaria Analyſi hanc rem ſuperare pæne impoſſibile eſt, lubensque ſi quis huic rei, quam maxime utilem in tota matheſi, meo quidem tenui judicio, eſſe cenſeo, incumbere vellet, in commune conferrem, & cum ipſo, quæ mihi jam ſunt cognita, communicarem: quamvis in parabolæ cubicæ focis determinandis non adeo magna ſit difficultas, ut jam diu, cum in illos inquirerem, comperi.

Ad menſurandam aream hyperbolæ, arcum adhibui curvæ mechanicæ; quia ſtatim hinc conſequitur per eam, qua utor, methodum, idemque ſucceſſus in ellipſi & parabola, imo omnibus curvis deprehenditur; quod etiam Dno. HUGENIO placuiſſe video in hyperbola, & tanquam ſingulare quiddam Geometris conſiderandum fuiſſe propoſitum; a me autem longe univerſalius fuit præſtitum. Dimenſio Areæ hyperbolicæ per arcum parabolæ quam HEURATIUS jam detexit, tam naturaliter, ſecundum hanc univerſalem viam non provenit; niſi forſan non rite genuina ſecutus ſum veſtigia, ad quæ tamen, in ulteriori diſquiſitione, probe attendere decrevi.

TAB. VIII. Nº. XXVIII. *Fig.* 4.

Porro quod attinet ad ſpecimen, quod in *Fig.* 4. de parabolæ portionibus inter ſe conferendis dedi: non poſſum non candide fateri, me, cum incidiſſem in viam, qua univerſaliter partes curvæ inter ſe poſſunt comparari, ſtatim hujus rei deprehendiſſe momentum: ſed cum in applicatione calculi, difficultas ſurgeret non exigua, a ſimpliciſſimis incepiſſe, &, inter alia quoque, incidiſſe in curvam parabolicam; in qua principio quidem, ſe difficultates non exiguæ offerebant; quæ tamen evaneſcebant, poſtquam inveneram univerſalia quædam theoremata, ſimplicia illa quidem, necdum tamen ſatis no-

nota, pro omnibus ſectionibus conicis, ex quibus omnia, quæ de illis hactenus innotuerunt, faciliori longe, quam ſolet fieri, via derivantur. Cum ergo rem totam cum Viro ingenioſo communicaſſem, ipſeque calculum ſibi optime conſtare confirmaſſet; conſtitui aliquid proferre in publicum, ipſamque rem ulterius perſequi. Non licuit tamen hac in re procedere ultra, niſi paucos ante menſes, reperique methodum ipſam plane certam, calculumque ſatis exactum eſſe. Quoniam vero uſus ſum aliqua ſuppoſitione, quam omnes quidem, qui in calculo indefinite parvorum verſantur, adhibent, in errorem tamen inducere poſſe quandoque mihi conſtat, dum ſæpe ſumma quantitatum indefinite parvorum, quæ ſemper reſtant, quantitatem finitam conſtituit; rem alio plane aggreſſus ſum modo, qui nullam ſuppoſitionem quæ ſcrupulo cuidam ſit obnoxia, requirit; jamque ipſum calculum, qui magnus ſatis eſt, abſolvi. Cum vero nondum mihi de ejus exactitudine certo conſtet; ſupprimam interim concluſum; eritque mihi hoc, quamprimum dabitur tempus commodum, prima mea diſquiſitio; qua finita, plura ſpecimina, ipſamque forſan methodum communicabo: quam nunc quidem confirmo certam eſſe & univerſalem, ad partes omnes, non ejuſdem curvæ duntaxat, ſed quarumvis diverſarum curvarum, interſe comparandas; ut ita quid fieri aut non fieri poſſit, innoteſcat. Tandem quod ſpectat ad Dn. *Joh.* BERNOULLI pulcherrimum & maxime ingenioſum inventum; diverſa curvas ad curvam circularem reducendi; nihil eſt quod ei velim objicere. Interim, facile mihi erit demonſtrare, idem poſſe infinitis modis, per meas curvarum evolutiones augeri: apparetque hinc quam arduum ſit quandoque in aliorum cogitata penetrare, quæ tamen a noſtris non adeo ſint remota. Cumque Vir, cujus ingenium ſingulare prorſus, capaciſſimumque mihi ſatis notum eſt, quamvis ad ipſum fontem, *Medicinam mentis*, digitum intenderim, hæc non ſatis fuerit aſſecutus; valde dubito alium id eruere poſſe. Ille vero ut videat, quam paratus ſim ejus excellenti ingenio obſequi; non pigebit commemorare, quemadmodum ipſius methodo omnes curvæ, quæ per Evolutionem *Hugenianam* deſcribuntur, hoc eſt, quæ unicum, ſecundum me, focum habent, ad circularem lineam poſſunt reduci; ita mea methodo, curvas, quæ duos habent focos ad ellipſin, hyperbolam, aut parabolam; quæque tres, quatuor, &c. focos habent, ſemper ad curvas geometricas ſuperiorum graduum reduci poſſe: quod, quanta ſit Geometriæ promotio, nemo non videt; ut proinde mirum foret, quemquam, qui vel hoc unum perſpexerit, meliorem deſcriptionem abſolute omnium curvarum conceptibilium vel deſiderare poſſe illa, quæ in *Medicina mentis* traditur. Quod ſi nec hoc mentem meam fortaſſis exprimat ſatis, lubens totam communicabo Methodum. Cæterum occaſione ejus quod Dn. *Joh.* BERNOULLI commemorat, proprietatem circuli, quod rectangula rectarum ſe interſecantium inter ſe ſemper ſint æqualia, non eſſe circulo eſſentialem; non poſſum quin addam, me ſingularia habere theoremata univerſalia, quæ viam muniant ad novam doctrinam locorum, aliam ab ea quam DES-CARTES docuit. Hujus generis aliquod ſpecimen jam ante biennium, cum Dn. LEIBNITIO communicavi, valdeque mihi probabile videtur dictam proprietatem abſolute omnibus curvis competere. Id autem certiſſimum eſt, in ipſa quoque parabola, hyperbola, & ellipſi, hanc veritatem, quod, duabus rectis ſe interſecantibus, rectangula ſegmentorum inter ſe infinitis modis certa ratione ſint æqualia, demonſtrari poſſe.

Ultimo, & hoc publico indicaſſe forſan operæ pretium erit, quod ad curvilineorum diviſionem pertinet. Notum eſt ARCHIMEDEM aream circuli, per lineam ſpiralem, in partes rationales diviſiſſe; id quod per neotericos, imprimis Dn. SLUSIUM in *Miſcellaneis*, per infinitas ſpirales in ratione numeri ad numerum factum quoque eſt. Hanc rem ulterius promovit *Jacobus* GREGORIUS, & in *Geometria Univerſali*, Prop. 62. pag. 113, quadrantem circuli per curvas geometricas, quæ per gradus aſcendunt, rationabiliter partitus eſt. Mihi vero nota eſt Methodus hæc omnia poſt ſe relinquens, quippe cum, ejus ope, quodlibet ſpatium duabus rectis & curva geometrica terminatum, quamvis non ſit quadrabile, in ratione datæ lineæ ad lineam per unicam curvam geometricam, idque infinitis modis, dividatur; ſimulque, cum ſpatium datum eſt quadrabile, quadratura hæc infinitis modis determinetur. Id quod, cum neſciam in ſimile quid incidiſſe hactenus quemquam, publico indicare volui; cui quoque rem ipſam, ſi eam acceptam illi fore intellexero, impertiri, data occaſione, non gravabor.

N°. XXXV.

JOHANNIS BERNOULLI

De Conoidibus & Sphæroidibus quædam.

Solutio Analytica Æquationis in Actis A°. 1695, pag. 553. *propoſitæ.* *

Notatiunculæ in Reſponſionem a Nob. D. T. *nupero Novembri editam*, † *&c.*

Acta Eruditorum Lipſ. 1697. Mart. pag. 113.

QUod, in *Actis Eruditorum menſe Junio* ſuperioris Anni, ‡ de Conoidum & Sphæroidum ſuperficiebus complanandis inſinuavi, in tranſitu velut attigeram; neque ejus mentionem injeciſſem publice, niſi, inter ſcribendum, in mentem mihi incidiſſet elegans illa coni recti proprietas, quam publico impertiendam duxi; ſubindicando ſimul fontem, ex quo fluebat. Eſt vero materia illa talis, in qua excolenda nemo male ſuam operam collocabit; eruenda enim reſtant egregia; cui rei fidem faciam novo, & facili, ſed eleganti theoremate.

TAB. IX. No. XXXV.

Eſto curva qualiſcunque ABC convertenda circa duos axes DE, & DF, conſtituentes quemcunque angulum EDF; ſitque recta GDH perpendicularis ad lineam angulum eundem biſecantem, cui parallela EF. Dico ſuperficiem, quæ oritur ex converſione curvæ ABC circa DE, una cum ſuperficie orta ex converſione ejuſdem ABC circa DF, eſſe ad ſuperficiem ſolam genitam ex circumvolutione curvæ ABC circa GH, ut EF ad ED. Idem intellige etiam de ſolidis, quæ fiunt ex triplici iſta converſione ſegmenti ACB, vel ſectoris ADC, vel alterius cujuſvis figuræ. Unde, exiſtente angulo EDF $= \frac{2}{3}$ recti, erunt duæ converſiones circa axes DE, DF, ſimul æquales converſioni circa GH: reliquis vero in caſibus, ſi fiat curva

* A Fratre *Jac.* BERNOULLIO

† Supra N°. preced.

‡ N°. XXX.

curva *abc* ſimilis expoſitæ ABC, ita ut ducta utcunque D*b* ſit ad DB, ut EF ad mediam proportionalem inter EF & ED, erunt duæ ſimul ſuperficies, factæ ex converſione curvæ ABC circa DE & DF, æquales ſuperficiei deſcriptæ a curva *abc* converſa circa GH. Sin autem D*b* ſit ad DB, ut EF ad primam duarum mediarum proportionalium inter EF & ED, erunt duo ſolida figuræ ACB, circa DE & DF rotatæ, æqualia ſolido figuræ *acb* circa GH converſæ. Hinc patet, qua ratione Sphæroidibus, oblongo & depreſſo, ab eadem quacunque elliptoide deſcriptis & ſimul ſumtis, æquale ſolidum; illorumque ſuperficiebus una ſuperficies æqualis conſtrui poſſit. Id quod HUGENIO quondam erat unum ex maxime deſideratis.

Jam addam hîc ſolutionem analyticam (quia hactenus nulla comparuit) æquationis differentialis a Fratre propoſitæ *in Actis Dec.* 1695. Compellatus enim a Celeberrimo LEIBNITIO ut ei me accingerem; videnſque & ipſum non nihil operæ ſolutioni impendiſſe, & Fratrem, iteratis vicibus Mathematicos provocando, ſuum problema pluris quam ab initio credideram æſtimaſſe; invitationi diutius deeſſe nolui. En igitur ſolutionem, quam per ſemiquadrantem horæ inſtituta meditatio mihi ſuggeſſit, quamque Dn. LEIBNITIO, ſi horum recordari dignetur, jam tum perſcripſi, antequam conſtructio fraterna comparuiſſet.

Æquatio propoſita eſt hæc: $ady = ypdx + by^n qdx$ (ubi a & b quantitates datas & conſtantes, n poteſtatem quamvis literæ y; p & q quantitates utcunque datas per x denotant;) ſeparandæ ſunt in illa literæ indeterminatæ x & y, cum ſuis differentialibus, a ſe invicem; ut ſaltem per quadraturas conſtrui poſſit: id quod ſic facio. Ut poteſtas n deprimatur, ponendum eſt $y = v^{n:(1-n)}$, unde propoſita mutatur in hanc ulterius reſolvendam $\frac{1}{1-n} adv = vpdx + bqdx$, quæ reſpondet formulæ *Leibnitianæ* in *Martio* 1696. traditæ. Sed hac depreſſiopreſſione poteſtatis mihi non opus eſt: immediate enim conſequor finem ponendo $y = mz$, ideoque $dy = mdz + zdm$; quibus ſubſtitutis in æquatione propoſita, habebitur $azdm + amdz = mzpdx + bm^n z^n qdx$. Nunc, ut hæc æquatio quatuor terminorum ad duos redigatur, pono $amdz = mzpdx$, id eſt $adz : z = pdx$; unde cum habeatur z per x, aut algebraice, aut ſaltem tranſcendenter, eſto $z = \xi$ (per ξ intelligo quantitatem datam per x & conſtantes.) Quoniam vero, deſtructis $amdz$ & $mzpdx$ in æquatione tranſmutata, remanet $azdm = bm^n z^n qdx$, ſeu ſurrogato valore ipſius, z, $a\xi dm = bm^n \xi^n qdx$, id eſt $am^{-n} dm = b\xi^{n-1} qdx$; hinc pariter habetur m per x, nimirum $\frac{a}{-n+1} m^{-n+1} = b\int \xi^{n-1} qdx$: poſito ergo $m = X$ (quantitati itidem ex x & conſtantibus compoſitæ) proveniet $y = (zm) = \xi X =$ quantitati pure dependenti ab x & conſtantibus. Q. E. F.

Hæc dum ſcribo, pervenit ad me Nobiliſſimi Dn. TSCHIRNHAUSII ſchediaſma proximo *Actorum Novembri* inſertum. Per totum, fateor, profundas ſagaciſſimi ingenii meditationes ſpirat; doleo ſolum aſſequi me non poſſe, utrum noſtras obſervationes circa ipſius meditata geometrica approbet, an vero improbet. Abſit, ut putem Virum hunc, nulli in cognitione abſtruſioris Geometriæ ſecundum, improbare velle talia, quæ quandocunque libuerit, evidentiſſimis demonſtrationibus munire poſſum. Lubens ergo merito credam, quædam fuiſſe ab ipſo propoſita in *Nov.* 1695, * quæ limitanda erant; quæ autem limitatio nec a Fratre, nec a me (qui fere eandem haud ex communicato objecimus,) percipi potuit. Neque jam in dubium vocabo, acutiſſimum Authorem mirandas poſſidere methodos generales, quarum utinam nos participes faceret; ne, ſi quid ipſi humanitus accideret, talia nulli oblivioni tradenda ſimul interirent. Paucis interim notabo, quæ in noviſſima iſta reſponſione animadvertere licuit.

Etiam

* Supra N°. XXVIII.

Etiamnum ſuſtineo, quod theorema *fig.* 2, expoſitum *ſeſe extendat ad omnes curvas, ſive ſint per focos, ſive aliter quomodocunque &, ſi vis, libera manu deſcriptæ.* Quod autem Vir celeberrimus inde infert, me eſſe in ea ſententia, non omnes curvas per focos deſcribi poſſe, plane non ſequitur: quaſi vero una eademque curva, per focos deſcripta, non poſſet etiam mille aliis modis deſcribi. Exemplo nobis ſit, vel ſola Ellipſis, quæ, non tantum per filum, ſed etiam per regulam ſecundum latera anguli recti progredientem, aliterque, æque facile formatur. Hoc duntaxat ex aſſertione mea legitime ſequitur; theorema illud valere in omnibus curvis, non quatenus per focos tantum, ſed utcunque progenitæ conſiderentur. Atque ſic, ſalva mea aſſertione, non nego omnes curvas habere focos, ſaltem lineares; an vero etiam habeant ſimplices, ſeu puncta, ex quibus ſemper per fila delineari poſſint, hactenus a nemine demonſtratum eſt.

TAB. VIII. N°. XXVIII. *Fig.* 2.

Quod præterea Vir ingenioſiſſimus innuit, *methodum tangentium inverſam, ante aliquot annos, magno in pretio ſe habuiſſe; jam vero tandem, non leves ob cauſas, eo loco non amplius a ſe haberi,* indicium utique eſt, ſibi eam adeo planam & tritam feciſſe, ut ipſi jam ut ludus ſit habendus; unde cum *nihil hactenus propoſitum viderit,* (ut ait) *quod ejus ope, cum operam dare ei licuit, non potuerit determinare;* videre deſidero alterum illum modum *parabolæ portiones inter ſe conferendi,* quem priori ſuo ſubſtituit, & cum pluribus ſpeciminibus communicandum pollicetur. Cæterum ingenue fateor, me nondum poſſe perſpicere, ex omnibus illis quæ allegat, quomodo theorema meum de reductione curvarum ad circulares, per alias evolutiones quam *Hugenianam,* augeri poſſit. Pro hoc, ſi habet methodum quam offert, grato animo excipiam, ſi quandocunque communicare libuerit. Hoc tamen in anteceſſum præmonendum duco, non opus eſſe ut curvæ reducantur ad extenſiones ellipſeos, hyperbolæ, parabolæ, altioriſve curvæ, ſi id fieri poſſit per circulares, tanquam poſt rectam ſimpliciſſimas. Verum enim vero omnis omnino curva, quotcuncunque etiam habeat focos, per unicum ſemper poteſt deſcribi, id eſt, per evolutionem *Hugenianam.* Non video igitur, cur recurrendum eſſet ad evolutiones magis compoſitas; cum idem perpetuo obtineri poſſit per ſimpliciſſimam.

Subnectit Vir eruditiſſimus, ſe habere *ſingularia theoremata univerſalia* pro nova doctrina locorum; aſſeritque ſibi valde probabile videri, æqualitatem rectangulorum rectarum ſe inter ſecantium, (quam ego, præterquam circulo, infinitis aliis curvis competere nuper oſtendi) abſolute omnibus communem eſſe. Id quidem facile largior, ſi duas tantum rectas ſe interſecantes intelligat; ut fere innuere videtur, quando dicit *certiſſimum id eſſe, in ipſa quoque parabola, hyperbola, & ellipſi, hanc veritatem, quod duabus rectis ſe interſecantibus rectangula ſegmentorum inter ſe infinitis modis certa ratione ſint æqualia, demonſtrari poſſe.* Sed ridiculum prorſus fuiſſet ſi tale quid ut novum venditare voluiſſem; ſiquidem, prima ſtatim attentione, cuivis obvium eſt, omnem curvam, ſi non ſit circulus, poſſe a circulo ſecari in quatuor punctis; per quorum bina & bina tranſeuntes lineæ rectæ habebunt utique ſegmentorum rectangula æqualia; adeo ut hoc de omnibus curvis, non ſolum probabile, ſed omnino certum ſit. At ſenſus mei inventi longe alius eſt. Non enim duas ſaltem, ſed infinitas, ſed omnes rectas e puncto quodam egredientes, quæ ſecent curvas, volo ut faciant rectangula ſegmentorum ſuorum æqualia; atque hoc omnibus curvis convenire nemo demonſtrabit, cum contrarium potius in ipſis tribus ſectionibus conicis evinci poſſit. Quod ſupereſt, ſi theorematum ſuorum vires experiri velit, ſat amplam materiam habet applicandi illa in inquiſitione curvæ, quam in *Actorum menſe Junio* inſolutam relinquo; ut ſcilicet ſolidum ſub uno ſegmento & quadrato alterius, ſit ubique eidem æquale; cujus ſolutio mihi reperta eſt. Item quod nuper publice propoſui, quærat curvam, ita ut ſumma ſegmentorum ad potentiam datam elevatorum ſit perpetuo eadem. Hiſce, aliiſque, ſi ſatisfecerit (ut non dubitamus) Vir perſpicaciſſimus, haud aptiorem anſam nobis præbebit, de inventis

ipſius

ipſius pro merito ſentiendi, quam ſi methodos ipſas, quas huc uſque latere nos voluit, tandem candide aperuerit.

N°. XXXVI.

JOHANNIS BERNOULLI

Principia Calculi Exponentialium, ſeu Percurrentium.

Mirari ſubit, Cl. Dn. NIEUWENTIIT *in Conſiderationibus ſuis ſecundis* nuper editis, conqueri celeberrimi LEIBNITII reſponſiones non tanti ſe ponderis deprehendiſſe, quæ objectionibus ſuis primum motis per totum ſatisfacerent. Credebam equidem noſtram calculandi methodum ſemet ipſam ſatis commendare, vel ſolo conſenſu tot tantorumque inventorum, in quæ, hactenus diverſis licet inſiſtentes viis, incidimus, quæque nullius unquam falſitatis convinci poterunt: quod ſane a methodo ſuſpecta, nedum erronea, expectari nec poteſt, nec debet Eſto nobis, inſtar omnium, unicum exemplum famoſi illius problematis catenarii; cujus ſolutiones; ad unum egregie conſpirantes, illuſtre Virorum par, HUGENIUS & LEIBNITIUS exhibuerunt; quibus ſimul mea acceſſit, ne in minimis quidem diſſentiens; Nob. HUGENIO ſua analyſi, nobis vero noſtra, ſed felicius utentibus: hac enim duce, eo uſque ultra ſimplicem ſolutionem proceſſimus, ut ipſe HUGENIUS mirabundus faſſus fuerit ingenue (vid. *Hiſtor. Oper. Erud.* quæ *Roterodami* editur, menſe Febr. 1693, p. 251.) ſe non poſſe imaginari, quomodo calculus eo nos perduxerit. *Acta Erud. Lipſ. 1697. Mart. pag. 125.*

Sed nolim hic reſpondere novis objectionibus Dn. NIEUWENTIIT; quod ipſe Acutiſſimus LEIBNITIUS, cujus potiſſimum res agitur, ſi ipſi neceſſum viſum fuerit (de quo tamen dubito) bonam cauſam vindicare non differet. Ultimam duntaxat aggrediar ſectionem *Secundarum* harum *Conſide-*

ratio-

rationum; ut, quod jam aliquoties facere volui, anſam habeam exponendi modum tractandi æquationes curvarum, in quibus indeterminata exponentes ingreditur. Cujus inventionem eatenus mihi attribuere fas eſt; quod, jam ante quinquennium, ſponte mea eo penetraverim, Dn. LEIBNITIO non monente, ut ipſe fatetur in *Actis Anni* 1695, p. 314; quod utique non leve argumentum deberet eſſe, apud Dn. NIEUWENTIIT præſertim valiturum, calculum differentialem, exponentialibus curvis adhibitum, plane nullis laborare difficultatibus. Gaudebo interim, ſi explicatio mea prolixior Doctiſſimo NIEUWENTIITIO ſcopulum, quem forte in ſuccincta nimis *Leibnitiana* offendit, ſummoverit: ſin minus, pro publico tamen laboraſſe non pigebit.

Quantitatem elevatam ad potentiam indeterminatam (antequam hæc etiam LEIBNITIO conſiderata intellexiſſem) vocabam *percurrentem*, quia omnes poſſibiles dimenſiones quaſi percurrit. Hinc æquationes quantitatibus hujuſmodi conſtantes, ipſæque curvæ per illas deſignatæ, eodem mihi nomine veniebant. Quoniam vero *exponentialium* appellatio magno noſtro Geometræ arriſit, in illius honorem, hoc alterum nomen & ego aſciſcam; miſſo priori, ne, quod ſubinde accidit, diverſa ejuſdem rei denominatio Lectori confuſionem pariat.

Exponentialem igitur quantitatem concipiebam, ut medium quid inter algebraicam & tranſcendentem: accedit enim ad algebraicam, eo quod terminis finitis, ut ut indeterminatis, conſtet; ad tranſcendentem vero, quod nulla conſtructione algebraica exhiberi poſſit. Hinc colligere eſt, quam ſuperfluus fuerit jocus HUGENII, curvas exponentiales appellando *hypertranſcendentes*; cum ſerio potius, & congrue, illas nominare potuiſſet *hypotranſcendentes*. Eſt enim & ipſa Logarithmica (omnium profecto tranſcendentium ſimpliciſſima) ex hoc curvarum genere; omneſque aliæ exponentiales, ope hujus, conſtrui, & earum tangentes determinari poſſunt, ut ex jam dicendis patebit. Tria interim ſunt, quæ maxime ſuſpen-

penſum tenent Dn. NIEUWENTIIT, quo minus aſſenſum tribuat. 1. Quomodo una eademque indeterminata poſſit eſſe, in curva Logarithmica, de applicatarum genere, & ſimul abſciſſa alterius cujuſdam curvæ. 2. Quomodo ex æquatione $x^v = y$, deducatur hæc æquatio $vlx = ly$ (per lx, ly, lz, &c. intelligo logarithmos ipſarum x, y, z, &c.) 3. Quomodo lx poſſit eſſe $= \int \frac{dx}{x}$. Hæc ergo ſatis alias trita, quorum *originem ſe ignorare* fatetur, ipſum edocebo.

Eſto DE axis curvæ HGF, illique perpendicularis DC, axis Logarithmicæ AB: producatur applicata FE, donec occurrat Logarithmicæ AB in B, a quo demiſſa perpendicularis BC æqualis erit abſciſſæ DE: eſt autem BC applicata Logarithmicæ; ergo patet, qua ratione abſciſſæ DE cujuſcunque curvæ HGF, poſſint eſſe de applicatarum genere, non ſolum in Logarithmica, ſed in quavis etiam alia curva AB, & quidem ita, ut ſalva maneat relatio inter DE & EF, quocunque etiam modo creſcat DE, ſive æqualiter, ſive inæqualiter; adeo ut, ſumtis ex. gr. differentiis axis Logarithmicæ Cc æqualibus, nihilominus differentialis Fg ad differentialem Ee, ſeu ipſa FE ad ſubtangentem EL, ſuam generalem perpetuo ſervet relationem. Ad demonſtrandum ſecundum, quod vlx ſit $= ly$, inſpiciat, ſi placet, vulgares, quæ proſtant, Tabulas Logarithmicas, quæ e veſtigio ipſum docebunt, Logarithmum numeri quadrati, cubi, biquadrati, &c. eſſe duplum, triplum, quadruplum, &c. radicis: unde generaliter Logar. $x^v = v\,l\,x$; quid ergo ſi $x^v = y$, annon & eorum Logarithmi ſunt æquales, id eſt, $vlx = ly$? Supereſt tertium, quod ita oſtendo; ſi AD $= 1 =$ ſubtang. & BC $=$ numero, erit ut conſtat, DC Logarithmus ejuſdem; eſt autem, ex natura Logarithmicæ, ſubtang. in $Bn = BC$ in Cc, & per conſequens $Bn : BC = Cc$; hinc ſi BC ſit x, y, z, &c. & DC, lx, ly, lz, &c. erit $dx : x$, TAB. IX. N°. XXXVI.

dy:

$dy : y$, $dz ; z$, &c. $= dlx$, dly, dlz, &c. ergo etiam ſummæ $\int\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dy}{y}$, $\int\frac{dz}{z}$, &c. $= lx$, ly, lz, &c. Unde ſatis mirari nequeo, Doctiſſ. NIEUWENTIIT, qui eandem fere demonſtrationem ſibi format, hic diſcrimen quærere in literis, concedendo $\int\frac{dy}{y} = ly$, ſed dubitando an etiam $\int\frac{dx}{x} = lx$; quaſi arbitraria denominatio mutationem rei afferat. Regeret quidem, id de omnibus indeterminatis valere ſi abſolute conſiderentur; ſed hic x & y conſiderandas eſſe certo ad invicem reſpectu. Aſt quid tum? demonſtratio generalis eſt, & nulla conditione, nullo reſpectu limitata. Demonſtratum enim eſt, quacunque ratione creſcant Dc, DE ſeu bc, BC, quocunque demum appellentur nomine, ſive x, ſive y; ſive abſolute, ſive reſpective conſiderentur, perpetuo earum Logarithmos eſſe Dc, DC. Quod autem aſſumatur AD $= 1 =$ ſubtang. id compendii gratia tantum fit; quamcunque enim quantitatem, quidni ergo & ſubtangentem, unitati ſubſtituere tuto licet, ſi modo ad aſſumtam cæteræ omnes referantur. Diſcuſſis jam, ut opinor, difficultatum nebulis, venio ad ipſam exponentialium tractationem.

Quantitates exponentiales ſunt diverſorum graduum, quorum infimus (qui hactenus tantum fuerat conſideratus) eſt, quando exponens conſtat indeterminatis ordinariis, ut y^m, x^n, z^p; poſito m, n, p, eſſe quantitates ſimpliciter indeterminatas. Quantitas exponentialis ſecundi gradus eſt, cum exponens ipſe eſt quantitas exponentialis ut y^{m^n}; & ſic in univerſum, quantitas exponentialis cujuſcunque gradus habet pro exponente quantitatem exponentialem gradus proxime præcedentis. Idem etiam intellige de æquationibus & curvis exponentialibus ad ſuos gradus referendis. Nota interim, quod ſi æquatio conſtet ex diverſis diverſorum graduum exponentialibus, tunc æquatio, ut & curva per illam deſignata, ſortietur nomen a potiori. De quibus omnibus hæc habe:

Eſto

Eſto curva Logarithmica quævis AB, ſumtaque ſubtangente pro unitate, & ipſi æqualis prima applicata AD; ordinata BC quovis modo varians, ſive ſit de applicatarum, ſive de abſciſſarum genere alterius cujuſcunque curvæ, ſi modo per minima creſcat, ſive æqualiter, ſive inæqualiter, ſit $= x, y, z$; adeoque DC $= lx$, ly, lz; B$n = dx$, dy, dz; C$c = dlx$, dly, dlz, &c. $=$ (ut ſupra oſtenſum) $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, $\frac{dz}{z}$ &c. Unde fluit regula generalis: *Differentiale Logarithmi utcunque compoſiti eſt æquale differentiali numeri diviſo per numerum*; ut, $dl\sqrt{(xx+yy)} = (xdx+ydy) : (xx+yy)$.

Ad differentiandam ergo quantitatem exponentialem primi gradus m^n; fiat $m^n = t$, ergo $nlm = lt$; & differentiando, juxta calculum differentialem, $lmdn + ndlm = dlt$; at per regulam generalem $dlm = dm : m$ & $dlt = dt : t$; ideoque $lmdn + ndm : m = dt : t =$ (ob $m^n = t$) $dt : m^n$; unde dt ſeu $dm^n = m^n lmdn + nm^{n-1} dm$; id quod ſuggerit regulam primam ſpecialem pro exponentialibus primi gradus; poſſunt enim pro m & n quantitates intelligi quomodocunque ex indeterminatis compoſitæ.

Eſto jam exponentialis ſecundi gradus m^{n^p}, ponatur illa æqualis t, adeoque $n^p\ lm = lt$: ſumtis utrobique differentialibus modo communi, $n^p dlm + lmdn^p = dlt$; quoniam autem per regulam primam ſpecialem $dn^p = pn^{p-1}dn + n^p lndp$; & per regulam generalem $dlm = dm : m$, $dlt = dt : t$; habebitur regula ſecunda ſpecialis pro exponentialibus ſecundi gradus, quæ hæc eſt $dm^{n^p} = n^p m^{n^p-1} dm + pn^{p-1} m^{n^p} lmdn + n^p m^{n^p} lmlndp$. Eodem modo inveniuntur regulæ ſequentes pro altiorum graduum exponentialibus. Nec difficilius differentiantur quantitates quomodocunque ex illis compoſitæ, ut $dm^n p^q = p^q dm^n + m^n dp^q$; ubi ſi ſurrogetur valor ipſarum dp^q, dm^n modo ſupra inventus, prodibit differentiale quæſitum.

Hacte-

Hactenus explicata ſufficiunt pro generali exponentialium differentiandarum adumbratione: videamus paucis applicationem in uno alterove exemplo; quorum ſi aliam ſolutionem a noſtra diverſam tradiderit, vel ſaltem noſtram a vero abludere demonſtrarit Cl. NIEUWENTIIT, nobis magnus erit Apollo, cui libenter manu victas dabimus.

I Conſtruenda eſt curva, cujus natura exprimitur per hanc æquationem exponentialem $x^x = y$: ejuſque tangens determinanda. Sumtis Logarithmis, habetur $x\,lx = ly$: facta itaque Logarithmica AB, cujus ſubtangens ſit $= 1 =$ AD, ſitque DE vel BC $= x$, erit DC $= lx$; & per conſequens ſi fiat AD : BC = DC : DM, erit DM $= ly$, & MN $= y$ cui ſi æqualis applicetur EF ad abſciſſam DE, erit punctum F in curva optata HGF. Tangens in F determinatur ſic: Per regulam primam ſpecialem $dy = x^x dx + x^x\, lx\, dx =$ (ſubſtituto y loco x^x) $y dx + y lx dx$, id eſt $y + y lx : 1 = dy : dx = y :$ ſubtang. $= \frac{1}{1 + lx}$. Hinc, ſumta EL tertia proportionali ad AD + DC & AD, erit FL tangens; quam proin in terminis ordinariis, id eſt, finitis, expreſſimus. Judicet jam Dn. NIEUWENTIIT, quo jure vehementer adeo exprobret Dn. LEIBNITIO, ac ſi ſui oblitus neſcio quod enorme crimen in Geometriam perpetraſſet, dum in NIEUWENTIITIANA methodo (meritiſſime) reprehendit, quod *non exhibeat rationem* dx *ad* dy, *ſubtangentialis ad ordinatam, in terminis ordinariis expreſſam, neque adeo ductu linearum aſſignabilium conſtrui poſſit.* Etenim, per ordinarium & aſſignabile, non ſolum algebraicam, ſed etiam tranſcendentem quantitatem, ſi modo ſit finita, comprehendit LEIBNITIUS. Circuli utique peripheria terminis algebraicis exprimi nequit; an ideo non eſt ordinaria, ſeu finita? an ideo minus aſſignabilis, cum tamen unico ductu circini aſſignetur? Hanc de aſſignabilitate mentem fuiſſe LEIBNITII, venari potuiſſet ex eodem, quem citat, *Actorum* loco, verſa ſaltem pagina A. 1695, p.

315, l. 15, ubi acutiſſimus Author diſtinguit quantitatum genera in *ordinarias*, *infiniteſimas primas ſeu differentiales*, *differentio-differentiales ſeu infiniteſimas ſecundas*, &c. manifeſto certe indicio, per *ordinarias* nihil aliud intelligere quam quantitates finitas. Præterea fallitur Dn. NIEUWENTIIT, quando *rationis ſubtangentis ad ordinatam expreſſionem in terminis ordinariis* (algebraicis vult dicere) *impoſſibilem plane arbitratur, in caſu quo ipſa curvæ æquatio in terminis ordinariis exponi nequit.* Conſideret, ut de poſſibilitate convincatur, vel ſolam cycloidem primariam, cujus, ut ut tranſcendentis, ordinata tamen ad ſubtangentem rationem habet pure algebraicam, eam ſcil. quam obtinet abſciſſa ad applicatam circuli genitoris, ut notum eſt.

Sed revertimur ad curvam noſtram, cujus notabiles quaſdam proprietates recenſuiſſe non abs re erit; ideo præſertim quod ſummus LEIBNITIUS eam, a me ipſi primo propoſitam, ſua applicatione nequaquam indignam reputarit; quin potius, occaſione illorum quæ ſuper hac aliaque materia repereram & ipſi præſcripſeram, ipſe multa alia ſcitu digniſſima animadverteret, mecumque viciſſim communicaret.

Applicatæ AG, DH, ſubtangens puncti G, & AD, omnes inter ſe & ſubtangenti Logarithmicæ ſunt æquales.

Item, ducta ex H applicata ad Logarithmicam HP, & PR parallela ipſi HD ſecante curvam in O, erit OR omnium ordinatarum breviſſima, id eſt, punctum O omnium curvæ punctorum minime diſtat ab axe DE.

Habemus etiam generalem methodum quadrandi hujuſmodi figuras, quam ipſe LEIBNITIUS, licet ei conſimilem invenerit pro ingenii quo pollet acumine, haud tamen facile obviam eſſe ultro agnovit. Hanc interim animadverto quadraturam præ omnibus aliis memorabilem, quæ, ob curioſam ſeriem qua exprimitur, mirifice placuit huic Geometræ. Si enim AD, vel DH, vel AG vocetur 1, erit ſpatium DAGOH = ſummæ hujus ſeriei $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ &c. *

* Videatur demonſtr. N°. CXLVIII. Tom. II.

II. Quod ſi proponatur curva, cujus æquatio $x^y = a$; habebitur ad Logarithmos redacta $ylx = la$, unde, ut ſupra, per Logarithmicam factum eſt, elicitur curvæ conſtructio. Differentiando autem, per Reg. 1. ſpec. erit $xlxdy = - aydx$, id quod ſubtangentem determinat.

III. Eſto curvæ æquatio $x^x = a^y$, & proinde $xlx = yla$, quod conſtructioni inſervit. Sumtis, per Reg. 1. ſpec. differentialibus, obtinetur $dx + lxdx = lady$; ex quo pariter ſubtangentis determinatio fluit. Obſervatu dignum hic venit, quod hujus figuræ quadratura citra ſeriem poſſit exhiberi, eſt enim $\int ydx = (2xxlx - xx) : 4\,la$.

IV. Si proponeretur $a^x = y$, adeoque $xla = ly$; prodiret $yladx = dy$, id eſt ſubtangens foret $= 1 : la =$ conſtanti; unde concludendum, æquationem propoſitam ipſiſſimæ Logarithmicæ competere: unico ergo ductu calami *planam regiamque*, qualem Dn. NIEUWENTIIT deſiderat, *viam aperui*, *Logarithmicam, hoc tempore nulli non cognitam, ad æquationem exponentialem reducendi.*

V. Eſto jam exponentialis plurium terminorum, ex gr. $x^x + x^c = x^y + y$: ſumtis ſeparatim differentialibus cujuſque termini per reg. 1. ſpec. reperietur $dx^x = x^x dx + x^x lxdx$, $dx^c = cx^{c-1} dx$, $dx^y = yx^{y-1} dx + x^y lxdy$; quæ rite diſpoſita dabunt æquationem hanc $x^x dx + x^x lxdx + cx^{c-1} dx - yx^{y-1} dx = x^y lxdy + dy$; facto itaque ut dy ad dx, id eſt, ut $x^x + x^x lx + cx^{c-1} - yx^{y-1}$ ad $x^y lx + 1$, ita y ad quartam, erit hæc quarta ſubtangens quæſita curvæ propoſitæ: Nota interim, quod multitudo terminorum conſtructionem plane non impediat, cum enim, mediante Logarithmica, ſingulis ſeorſim aſſignari poſſit quantitas æqualis; patet utique quantitates iſtas, hoc modo aſſignatas & ſimul ſumtas, formare illam ipſam, quæ quæritur.

Exempla huc uſque allata abunde illuſtrabunt proceſſum inſtituendum in aliis primi gradus exponentialibus; exque illis haud difficulter perſpicitur, quomodò methodus applicanda ſit ad altiores gradus; in omnibus enim par operandi ratio obſervanda eſt: quam ſi Nob. HUGENIUS tantæ raritatis & inſolentiæ deprehendit, ut non niſi ægre admiſerit; jam ſane, ſi etiamnum in vivis eſſet, haud egrius eſſet admiſſurus quam ipſum calculum differentialem, quem, ab initio mediocriter ſatis, poſtea vero, perſpecto inſigni ejus uſu, tanti æſtimabat, ut ejus præſtantiam & probitatem ultro agnoſcere & palam profiteri non fuerit dedignatus, ceu liquet ex iis, quæ exhibuit in *Actis* an. 1693, p. 475; ubi ipſe ingenue aſſerit, occaſione mei in eodem anno propoſiti problematis, ſe ad tales Geometriæ ſubtilitates perveniſſe, ope calculi differentialis, ad quas, ſine illo, vix admiſſus fuiſſet. Tanti itaque Viri libera confeſſio invitare deberet Doct. Dn. NIEUWENTIIT ad ſimilem ingenuitatem; vel ſiquidem illius authoritate uti velit, ut id faciat ad amplectendum potius, quam ad labefactandum noſtram analyſin.

N°. XXXVII.

JOHANNIS BERNOULLI

Curvatura Radii in Diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis a ſe in Actis 1696, p. 269, *propoſiti, de invenienda* Linea Brachyſtochrona, *id eſt, in qua grave a dato puncto ad datum punctum breviſſimo tempore decurrit; & de* Curva Synchrona, *ſeu radiorum unda, conſtruenda.*

TOT quidem hactenus apparuerunt methodi, quas *Maximorum* & *Minimorum* vocant, ut nihil fere tam ſubtile reſtare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine penetrare ſe poſſe non putent illi, qui ſe vel autores ipſos, vel autorum aſſeclas gloriantur. Interim jurent, quantum

Acta Erudit. Lipſ. 1697. Mai. *pag.* 206.

volent, in verba magiſtri; videbunt, ſi tentare velint, noſtrum problema minime coërceri intra anguſtos methodorum ſuarum limites, qui eo uſque tantum ſeſe extendunt, ſi, ex datis pluribus infinitiſve quantitatibus invenienda ſit una *maxima* vel *minima*. Verum ubi ipſæ quantitates, quod in noſtro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis ſunt determinatæ, quam id ipſum quod quæritur; hoc opus, hic labor eſt. Ipſi illi inſignes Viri, CARTESIUS, FERMATIUS, aliique, qui olim ita acriter pro præſtantia ſuæ cujuſque methodi, tanquam pro focis & aris militabant, aut pro ipſis nunc eorum ſectatores, ingenue fateantur neceſſe eſt, non niſi methodos ab ipſis traditas ſcientibus hic aquam hærere. Non meum eſt, nec etiam volo, aliorum inventa explodere. Præſtiterunt utique multa, & finem quem ſibi propoſuerant egregie conſecuti ſunt. Quemadmodum enim de hujusmodi Maximorum & Minimorum conſideratione nil quicquam in eorum ſcriptis reperitur: ita pariter, pro aliis quam communibus reſolvendis, ſuas methodos non venditarunt.

Non ego polliceor univerſalem methodum, quam quis fruſtra quæreret; ſed peculiares modos, non ſolûm quidem in hoc, ſed & in pluribus aliis ſuccedentes, quibus Problema hoc feliciter enodavi; ſolutionemque meam, dum alii alias quærerent, Celeb. LEIBNITIO ſtatim ſubmittere decrevi; ut illam quondam cum publico communicaret cum ſua, ſi quam reperiret; de quo quidem non dubitabam, ſagaciſſimi Viri ingenium plus ſatis compertum habens: & reapſe, dum hæc ſcribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohoneſtat, intelligo, ſupra ſpem ipſi placuiſſe Problema meum, & (quod illum, ut dicit, pulchritudine ſua, ut pomum Evam, ad ſe traheret) protinus ſolutionis factum eſſe compotem. Quid alii præſtiterint, exitus monſtrabit: dignum utique oportet ſit hoc Problema, cui ſolvendo aliquid temporis conſecrent Geometræ, cum tanto Viro, negotiis licet diſtractiſſimo, tale viſum fuerit, ut horam ſuam non inutiliter collocaſſe exiſtimaverit. Et id ipſum illis ſatis lucri eſto, quod, ſi ſolverint, ad ſecretiſ-

ſimas

ſimas veritates, quas ſine hoc vix ut aſſequantur, aditum habituri ſint.

Merito quidem miramur, quod HUGENIUS primus invenit, in *Cycloide vulgari* grave facere deſcenſus tautochronos, a quocunque *Cycloidis* puncto incipiat moveri: ſed neſcio, an non obſtupeſcas plane, cum dixero, hanc ipſiſſimam *Cycloidem*, ſeu *Tautochronam Hugenianam*, eſſe noſtram *Brachyſtochronam* quæſitam; ad cujus cognitionem duabus viis perveni, indirecta altera, altera directa. Inſiſtendo priori, mirum conſenſum detexi inter curvitatem radii luminis in medio continue variante, & *Curvam* noſtram *brachyſtochronam*; aliaque obſervavi, in quibus neſcio quid arcani ſubeſt, quod proderit in Dioptricis. Quamobrem verum erit, quod in propoſitione Problematis aſſerueram, *non in nuda ſpeculatione, ſed in aliis ſcientiis*, in Dioptricis puta, *uſum habere quam maximum*. Sed ut quæ diximus re ipſa confirmentur, en priorem ſolvendi modum!

FERMATIUS in Epiſtola ad DE LA CHAMBRE (Vid. *Epiſt.* CARTESII Lat. Tom. III, p. 147, & FERMATII Opera Mathem. p. 156 ſeqq.) ſtabilivit, radium luminis ex medio rariori in denſius tranſeuntem ita refringi ad perpendicularem, ut, habita ratione temporis, radius (qui a puncto luminante ad punctum illuminatum ſucceſſive procedere ſupponitur) viam faciam breviſſimam: ex quo principio oſtendit, ſinum anguli incidentiæ eſſe ad ſinum anguli refractionis in mediorum ratione data directa raritatum, vel reciproca denſitatum; id eſt in ipſa ratione velocitatum, quibus radius media penetrat. Quod poſtea acutiſſimus LEIBNITIUS in *Act. Erud.* 1682, p. 185 ſeqq. & mox Celeb. HUGENIUS in ſuo Tractatu *de Lumine*, p. 40, ſuccinctius demonſtrarunt, ipſumque principium phyſicum, vel metaphyſicum potius, quod FERMATIUS ſua demonſtratione geometrica contentus, & facile nimis de jure ſuo decedens, CLERSELERIO urgente, deſeruiſſe videtur, validiſſimis argumentis adſtruxerunt.

Si nunc concipiamus medium non uniformiter denſum, ſed

velut

velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas distinctum, quarum interstitia sint repleta materia diaphana raritatis certa ratione accrescentis vel decrescentis; manifestum est, radium, quem ut globulum consideramus, non emanaturum in linea recta, sed in curva quadam (notante id jam & ipso HUGENIO in eodem Tractatu *de Lumine*, sed ipsam curvæ naturam minime determinante) quæ ejus sit naturæ, ut globulus per illam decurrens celeritate continue aucta vel diminuta, pro ratione graduum raritatis, brevissimo tempore perveniat a puncto ad punctum. Constat quoque, cum sinus refractionum in singulis punctis sint respective ut raritates medii vel celeritates globuli, curvam habere eam proprietatem, ut sinus inclinationum suarum ad lineam verticalem sint ubique in eadem ratione celeritatum. Quibus præmissis, nullo negotio perspicitur, *Curvam Brachystochronam* illam ipsam esse, quam formaret radius transiens per medium, cujus raritates essent in ratione velocitatum, quas grave verticaliter cadendo acquireret. Sive enim velocitatum incrementa dependeant a natura medii magis minusve resistentis, ut in radio; sive abstrahatur a medio, & ab alia causa acceleratio eadem tamen lege generari intelligatur, ut in gravi; cum utroque in casu curva brevissimo tempore percurri supponatur, quid vetat, quo minus altera in alterius locum substitui possit?

Sic generaliter solvere licet Problema nostrum, quamcunque statuamus accelerationis legem. Eo enim reductum est, ut quæ-
TAB. IX. N°. XXXVII. Fig. 1. ratur curvatura radii in medio secundum raritates, prout libuerit, variante. Esto ergo medium FGD (*Fig.* 1) terminatum ab horizontali FG, in qua punctum radians A, verticalis AD axis curvæ datæ AHE, cujus applicatæ HC determinant raritates medii in altitudinibus AC, vel velocitates radii, seu globuli, in punctis M; radius incurvatus ipse qui quæritur, AMB. Vocentur AC, x; CH, t; CM, y; differentialis Cc, dx; diff. nm, dy; diff. Mm, dz; constans quædam ad arbitrium assumta, a; Erit accepta Mm pro sinu toto, mn sinus anguli refractionis seu inclinationis curvæ ad verticalem, &

& proinde per ea, quæ modo diximus, mn est ad HC in ratione constante, id est, $dy : t = dz : a$; quod hanc suggerit æquationem, $ady = tdz$, seu $aady^2 = ttdz^2 = ttdx^2 + ttdy^2$; quæ reducta generalem dabit æquationem differentialem $dy = tdx : \sqrt{(aa - tt)}$ pro curva AMB quæsita. Atque adeo una opera duo insignia problemata, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis petebam, resolvi; ostendique, quamvis ex diversissimis Matheseos partibus sint desumta, ejusdem tamen esse naturæ.

Sumamus jam specialem casum, & quidem hypothesin communem a GALILÆO primitus introductam & demonstratam, quod velocitates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum emensarum; in hoc enim proprie quæstionis tenor consistit. Quo supposito, curva data AHE erit parabola id est, $tt = ax$ & $t = \sqrt{ax}$, quæ si substituantur in æquatione generali, habebitur hæc $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ ex qua concludo *Curvam Brachystochronam* esse *Cycloidem vulgarem*. Si enim circulus GLK, cujus diameter $= a$, rotetur super AG, & initium rotationis sit in ipso A; describet punctum K cyloidem, quæ reperietur eandem habere æquationem differentialem $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, positis AC, x, & CM, y; potest tamen hoc a priori & analytice inveniri sic: $dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = xdx : \sqrt{(ax - xx)} = adx : 2\sqrt{(ax - xx)} - (adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax - xx)}$; est autem $(adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax - xx)}$ differentialis quantitas, cujus summa $\sqrt{(ax - xx)}$ seu LO; & $adx : 2\sqrt{(ax - xx)}$ est differentialis ipsius arcus GL; ideoque, summata æquatione $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, habebitur y seu CM = GL − LO, ergo MO = CO − GL + LO; quoniam vero (assumta CO = semiperipheriæ GLK) CO − GL = LK, erit MO = LK + LO, &, ablata communi LO, erit ML = LK; quod docet curvam KMA esse Cycloidem.

Ostendendum adhuc restat, (ut problemati plenissime satisfiat

fiat) quomodo a puncto dato, tanquam vertice, describenda sit *Brachystochrona*, seu Cyclois, transitura per aliud punctum datum; quod sic facillime expeditur: Conjungantur duo puncta data A, B, (Fig. II.) per lineam rectam AB, & super horizontali AL describatur Cyclois, quæcunque libuerit, initium sumens in A, secansque rectam AB in R; quo facto, fiat ut AR ad AB, ita diameter circuli genitoris Cycloidis ARS ad quartam, quæ erit diameter circuli genitoris Cycloidis quæsitæ ABL transituræ per B.

TAB. IX. N°. XXXVII. *Fig. 2.*

Antequam finiam, non possum, quin iterum admirationem meam prodam, animo revolvens inexpectatam illam identitatem *Tautochronæ Hugenianæ* nostræque *Brachystochronæ*. Quod notabile præterea existimo, illud est, quod hæc identitas in sola hypothesi GALILÆI reperitur: adeo ut, vel ex eo, conjicere liceat, illam naturæ esse consentaneam; quod, quemadmodum semper operari solet modo simplicissimo, ita & hic per unam eandemque lineam præstet duo diversa officia, cum in quavis alia hypothesi, duabus ad id opus esset lineis, alia nempe pro oscillationibus æque diuturnis, & alia pro celerrimo descensu. Ut, si ex. gr. celeritates gravium cadentium essent, non in subduplicata, sed subtriplicata ratione altitudinum; *brachystochrona* foret algebraica, *tautochrona* autem transcendens; verum si celeritates essent ut ipsæ altitudines; utraque fieret algebraica, illa quidem cicularis, hæc vero recta.

Non ingratum fore Geometris judico, si appendicis loco, solutionem ipsis dedero problematis consideratione pariter dignissimi, quod ex occasione præcedentis inter scribendum in mentem incidit: *Quæritur in plano verticali (* fig. III. *) curva PB, quam* Synchronam *appellare liceat, ad cujus singula puncta B, grave ex A descendens per Cycloides conterminas AB æquali tempore perveniret.* Sit AG horizontalis, & AP verticalis. Sensus problematis talis est, ut descripta super AG Cycloide quacunque, abscindatur ex illa portio AB, ad quam percurrendam ex A descendens grave idem tempus requirat, quod requireret ad decidendum ex determinata altitudine verticali AP; quo peracto, erit punctum B in *Curva Synchrona* PB quam quærimus.

TAB. IX. N° XXXVII. *Fig 3.*

Si attente considerentur ea, quæ supra diximus de radio luminis; haud obscure patebit, hanc curvam eam ipsam esse, quam HUGENIUS in suo Tract. *de Lumine*, pag 44, in schemate suo per lineam BC repræsentat, vocatque *undam*; quæ, quemadmodum omnes radios ex puncto luminoso emanantes normaliter secat, ceu optime notat HUGENIUS; ita & nostra PB omnibus Cycloidibus AB, commune initium A habentibus, ad angulos rectos occurrit. Quod si Problema, hoc modo in pure Geometricum reductum, proponere libuisset: *Invenire* scilicet *curvam, quæ omnes Cycloides communis initii normaliter secat*; profecto res magnæ molis fuisset Geometris; ex altera autem facie, qua descensum gravium respicit consideratum, ita facillime construo. Sit Cycloidis ABK circulus genitor GLK, ejusque diameter GK: abscindatur arcus GL æqualis mediæ proportionali inter determinatam assumtam AP, & diametrum GK; dico ductam LB parallelam horizontali AG, secare Cycloidem ABK in puncto B. Si quis methodum suam in aliis exercere velit, quærat lineam, quæ ordinatim positione datas curvas (non quidem algebraicas, quod haud arduum foret, sed) transcendentes, ex. gr. Logarithmicas super communi axe, & per idem punctum ductas, ad angulos rectos secat.

N°. XXXVIII.

LETTRE DE Mr. JEAN BERNOULLI

A Monsieur BASNAGE, *Docteur en Droit*, *Auteur de* l'Histoire des Ouvrages des Savans.

Sur le Probléme des Isoperimetres.

MONSIEUR,

Histoire des Ouvrages des Sçavans. Juin 1697. pag. 452.

IL y a précisément un an que je proposai le Probléme de la plus vîte descente, dans les *Actes de Leipsic*, comme tout nouveau, ne sçachant pas alors qu'il avoit été tenté déja par GALILE'E. J'accordai aux Géométres six mois de tems pour s'y appliquer; promettant de publier mes resolutions, si après le terme expiré il ne se trouvoit personne qui donnât les siennes. Cependant Mr. LEIBNITZ, ce grand Géométre, n'eut pas plutôt appris la nouvelle de ce Probléme, qu'il le jugea digne de son application, & de celle de tous les plus habiles Mathématiciens de l'Europe. Il me fit donc l'honneur de m'écrire, pour me mander qu'il en étoit heureusement venu à bout; mais qu'il le trouvoit si beau & si curieux, (à cause de l'adresse toute singuliére dont il s'y falloit prendre) qu'il me prioit de prolonger le terme jusqu'à Pâques *1697*, pour avoir le tems de divulguer aussi ce Probléme dans les païs éloignés; particuliérement en Italie, & en France, où les *Actes de Leipsic* ne pourroient arriver que fort tard.

Ne pouvant donc refuser cette demande à une Personne pour qui j'ai toute l'estime qui est dûë à un homme, qui a tant de rares mérites en toute sorte de Sciences; j'ai pris le dessein de notifier aux Géométres cette prorogation, par un imprimé que je donnai au jour, * au commencement de cette année; ne doutant nullement, qu'il n'y en eût quelques-uns, qui ne recevant pas réguliérement les *Actes de Leipsic*, seroient bien aises d'apprendre par là la proposition du Probléme, & à qui par conséquent il pourroit prendre envie de perdre (s'il faut ainsi dire) quelques heures à une recherche si utile, qui aide à pénétrer dans la plus fine Géométrie.

En effet mon imprimé tomba entre les mains de plusieurs personnes, qui n'avoient pas su auparavant la premiére publication: Cependant comme on trouve toujours de différens Juges, mon Probléme eut le malheur d'être présenté à un certain Mathématicien dans nôtre voisinage. Il répondit avec dédain: *que ce Probléme étoit bon pour les Allemans*, *mais que les Hollandois n'y répondroient pas*. Suivant en cela la coutume de ceux qui méprisent, d'un air impérieux, tout ce qui surpasse leur foible portée, comme le renard de la Fable. *Spernit indoctus quod nequit assequi.*

Il y eut d'autres Juges plus équitables, qui à la vérité ont bien reconnu la beauté de mon Probléme, & qui ont même employé toutes leurs forces pour rompre la barriére; mais faute de nôtre nouvelle Analyse, ou pour n'y être pas suffisamment versés, ils ont été obligés de lâcher prise, malgré toute la viguеur de leur violens efforts; sans pourtant que cela leur ait fait perdre en rien l'estime qu'ils avoient conçûë pour nôtre question si rare, qui leur a donné quelque peine, mais non point inutile; car elle aura été recompensée par le plaisir qu'ils ont eu de faire de nouvelles découvertes, qu'ils n'auroient peut-être jamais faites sans cette occasion, & même de voir le défaut de leur méthode, & avec le tems le remède qu'il faut y apporter.

C'est ainsi, Monsieur, que mon Probléme ayant passé par l'examen de plusieurs en Hollande, demeura tout irrésolu. Il passa donc de là en Angleterre, là où j'avois grande espérance qu'il trouveroit un destin plus favorable, puisqu'il y a dans ce païs-là

* N°. XXXIII.

païs-là quelques excellens Géométres qui se servent adroitement de nôtre méthode, ou d'une autre tout-à-fait semblable à la nôtre. Effectivement le mois de Janvier des *Transactions Philosophiques* * imprimées à Londres, que vous avez eu la bonté de m'envoyer, me fait voir que je ne me suis point trompé, y ayant trouvé une Construction de la *Courbe de la plus vite descente*, parfaitement convenable à la nôtre. Quoique l'Auteur de cette Construction, par un excès de modestie ne se nomme pas; nous savons pourtant indubitablement par plusieurs circonstances que c'est le célébre Mr. NEWTON: & quand même nous ne le saurions point d'ailleurs, ce seroit assez de le connoître par cet échantillon, comme *ex ungue leonem.* Ce savant Homme est très-digne de la louange, que j'ai promise à ceux qui donneroient une résolution légitime de ma question. J'avouë néanmoins que toute grande que je penserois la faire, elle seroit petite à l'égard de celles, qu'il s'est déja acquises, par la publication de son Ouvrage incomparable; dans lequel il fait voir tant de profondeur, & tant de pénétration d'esprit, que dès le moment que ce Probléme me vint en pensée, ces deux excellens Maîtres, savoir Mrs LEIBNITZ & NEWTON, se présentérent les premiers à mon esprit, comme capables de dénouer le nœud, quand personne autre ne le seroit.

Il seroit à souhaiter seulement que Mr. NEWTON eût fait comme nous, c'est-à-dire, qu'il eût aussi publié la méthode qui l'a conduit à la connoissance de la Courbe cherchée; car c'est de là que le Public tire le plus de profit: ou du moins, s'il a voulu cacher l'analyse, il n'auroit pas mal fait, & il ne feroit pas mal encore, d'affermir sa Construction par une Démonstration synthétique, telle que ma méthode m'a fournie; par laquelle je prouve démonstrativement, à la maniére des Anciens, qu'il n'y a qu'une seule ligne courbe tirée d'un point à l'autre, selon laquelle le corps pesant descende au moindre tems, & que cette Courbe est la *Cycloïde commune*

* *Transf. Phil.* N°. 224. pag. 384.

mune, ou comme quelques-uns l'appellent la *Roulette*; ce qui détruit entiérement la pensée d'un certain Mathématicien * du premier rang, qui croyoit, qu'il y avoit plusieurs lignes courbes qui pouroient satisfaire au requis.

Cependant ayant trouvé deux différentes méthodes, une indirecte, & une directe, qui déduit la résolution du fondement même de la chose, en considérant les *maxima & minima*, laquelle m'a mené à cette démonstration synthétique dont je viens de parler; je n'en ai pourtant publié que l'indirecte; partie, que je la croyois suffisante pour convaincre celui qui voudroit douter de la vérité de nos résolutions, partie aussi, qu'elle donne en même tems la résolution de deux fameux Problémes d'Optique, dont feu Mr. HUYGENS fait mention dans son *Traité de la Lumiére*, pag. 44. sans en oser entreprendre la détermination; savoir de trouver la courbure du rayon de la lumiére, & la courbure de l'*Onde* de la lumiére, c'est-à-dire la ligne qui coupe perpendiculairement tous les rayons partans d'un même point lumineux: car je fais voir, ce qui est admirable, que si un diaphane commençant par le point lumineux, & descendant verticalement change continuellement de rareté, en même raison que sont les vitesses acquises d'un corps pesant qui tombe du même point lumineux, la Courbe de la plus vite descente sera précisément la même que celle du rayon, c'est-à-dire, que l'une & l'autre sera la Roulette ou la Cycloïde; & la Courbe que j'appelle *Synchrone*, & dont je donne une Construction tres-simple, savoir celle qui détermine les portions, parcouruës en tems égaux, de toutes les Cycloïdes décrites d'un même commencement, & sur une même base horizontale, sera aussi parfaitement la même que celle de l'Onde, qui se fait dans ledit diaphane par le point rayonnant; car l'une & l'autre sera perpendiculaire à ces Cycloïdes.

Il est aussi à remarquer, que cette identité de ces Courbes, ne se rencontre pas seulement dans l'hypothèse de GALILÉE,

* DE TSCHIRNHAUSEN. Voiés *Acta Erudit. Lips.* 1697. Mai. pag. 221.

LILE'E, lorſque les viteſſes acquiſes des chutes ſont en raiſon ſousdoublée des hauteurs verticales ; mais en toute autre hypothèſe. De ſorte que ces deux ſpéculations, priſes de deux ſi différentes parties des Mathématiques, telles que ſont la Dioptrique & la Méchanique, ont entre elles une liaiſon abſolument néceſſaire & eſſentielle.

Voilà donc la raiſon pourquoi je n'ai donné au jour que la voye indirecte, en ſupprimant encore la directe ; * ce que Mr. LEIBNITZ lui-même m'a conſeillé de faire, voyant que celle-ci, toute ſimple qu'elle eſt, étoit d'une grande conſéquence, dont quelques-uns, qui ſont accoutumés de faire parade aux dépens d'autrui, ſe pourroient finement ſervir pour en tirer quelques petites nouvelles découvertes, ce qui leur ſuffiroit déja pour s'en attribuer la poſſeſſion & toute la gloire de l'invention. Cependant, comme je n'envie rien aux honnêtes gens, je n'ai pas fait difficulté de communiquer cette méthode à Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL, qui comme Mr. LEIBNITZ, l'a fort approuvée, en y remarquant je ne ſai quoi de ſurprenant & d'extraordinaire. Je ne refuſe pas non plus d'en faire part à qui voudra; on n'a qu'à me la demander par un mot de Lettre.

Mr. LEIBNITZ, en cherchant nôtre Courbe de queſtion, eſt parvenu d'abord à une très-belle proprieté, qui n'a point été conſiderée juſqu'à préſent; voici ce que c'eſt. Si on s'imagine une ligne droite verticale, tirée du point ſupérieur d'où le poids commence à deſcendre le long de la Courbe, les ordonnées, ou les lignes droites horizontales compriſes entre la droite verticale & entre la Courbe, ſeront en même raiſon que les Segmens correſpondans d'un Cercle décrit ſur la plus grande largeur de la Courbe, & qui en touche la baſe. Or il démontre, dans ce qu'il vient de publier, que cette proprieté convient à la Cycloïde, dont le Cercle generateur eſt celui même qui a les Segmens proportionels aux ordonnées extérieures de la Cycloïde. Nous pouvons tirer grand uſage de cet-te

* Voiez la Méthode directe N°. CIII.

te nouvelle découverte ; Car comme la *Quadratrice* de DINOSTRATE eſt propre pour la ſection des Angles ou des ſecteurs de Cercles; ainſi la Cycloïde, outre qu'elle fait la même choſe, nous apprend maintenant une maniére très-aiſée de couper les Segmens circulaires en raiſon donnée, ce qui, à mon avis, eſt de beaucoup plus important. La Cycloïde eſt donc préferable à la Quadratrice; d'autant plus qu'on la peut décrire par un mouvement continu très-ſimple, au lieu que celle-ci ne ſe conſtruit que par l'invention de pluſieurs points.

Pour revenir à nôtre ſujet, Mr. LEIBNITS remarque en GALILE'E deux fautes conſiderables: c'eſt que cet homme-là, qui étoit, ſans contredit, le plus clairvoyant de ſon tems dans cette matiére, étant cependant deſtitué de nôtre nouvelle Analyſe, vouloit conjecturer que la Courbe de la *Chainette* étoit une Parabole *, & que celle de la *plus vite deſcente* étoit un Cercle †: au lieu que la premiére, comme Mr. LEIBNITS a fait voir le premier, ſe détermine par les Logarithmes, ou, comme j'ai montré, par les arcs paraboliques étendus en lignes droites ; & au lieu que la ſeconde, dont je ſuis le premier inventeur, eſt la Cycloïde, c'eſt-à-dire, qu'elle ſe conſtruit par la rectification des arcs circulaires: en ſorte que dans l'une & l'autre, GALILE'E a deviné quelque choſe d'approchant.

Quand à la reſolution de Mr. le *Marquis* de l'HOSPITAL, qui paroit dans le même mois de Mai des *Actes de Leipſic* ‡; elle s'accorde auſſi parfaitement avec les nôtres. Il n'a pas ajoûté l'analyſe ; mais, comme il m'a fait ſavoir par une Lettre particuliére, ſa méthode eſt fondée ſur mes principes, que je lui avois communiqués autrefois, pour la recherche generale des *funiculares*, ou des Courbes des *chainettes*, lorſqu'on conſidére les cordes ou les chaines d'une peſanteur *non-uniforme*. Ainſi Mr. le Marquis a réduit avec adreſſe la Courbe de la plus vite deſcente à une eſpéce de *funi-*

* GALILÆI. *De Motu & Mechanic.* Dial. II. pag. 131. Edit. Bat. 1699.
† GALILÆI *Ibid.* Dial. III. Prop. 36. Schol. *pag.* 209.
‡ *Acta Erud. Lipſ.* 1697. Mai. pag. 217.

funiculaire; ce qui eſt aſſûrément fort curieux. Il avoue que ce Probléme, qu'il n'a reſolu que ſur la fin du dernier terme, lui a paru très-difficile; mais qu'il étoit empêché de s'y appliquer plutôt ſérieuſement, par une longue maladie.

Il me reſte encore à dire quelque choſe ſur la réſolution de mon *Frére*; ce que je fais d'autant plus volontiers, que j'y trouve de nouvelles propoſitions, qui me touchent en particulier. Il ne nie pas que mon Probléme ne ſoit dans le nombre de ceux, qui par leur ſubtilité ſont beaucoup au deſſus des autres, qui ſe réſolvent par la méthode ordinaire des *Maximorum & Minimorum.* Il eſt à préſumer, (puiſqu'il dit qu'étant ſollicité par Mr. LEIBNITZ, il n'a plus voulu éviter la *peine* de s'y attacher,) que ce Probléme l'a occupé long-tems, & qu'il lui a donné grande peine. En effet, il croyoit pendant long-tems avec GALILE'E, que nôtre Courbe étoit un Cercle: ce dont je m'étonne, puiſque ces ſortes de Problémes ne ſont point ſujets à un grand travail, ni à un calcul prolixe, ou pénible; comme ſont ordinairement les Problémes algébraiques: au moins je puis dire, qu'à l'heure que je me ſuis propoſé ce Probléme, je l'ai auſſi réſolu; non point par hazard, comme quelqu'un ſe perſuade, mais de propos déliberé, comme s'il m'avoit été propoſé par un autre. Mrs. LEIBNITZ & NEWTON en diront autant; car l'un & l'autre s'eſt rendu maître de la ſolution le premier jour qu'ils ont vu le Probléme.

Quoiqu'il en ſoit, mon Frére trouva enfin la véritable reſolution, par une méthode tout-à-fait la même, ou fort peu differente de celle de Mr. LEIBNITZ, dont il lui a plu me faire part il y a long-tems, dans ſes Lettres particulières; nonobſtant que je trouve dans celle de Mr. LEIBNITZ le raiſonnement plus ſuccint, ſans tous ces détours *d'analogies*, dont mon Frére ſe ſert pour appuyer le ſien. Ainſi donc mon Frére fait le quatriéme de ceux, que les trois grandes Nations, l'Allemagne, l'Angleterre, & la France, chacune le ſien, nous ont donné, pour concourir avec moi dans une ſi belle recherche,

che, en trouvant tous une même vérité. Ce merveilleux accord eſt donc capable de ſervir de preuve de la bonté de nos méthodes, auprès de ceux qui n'ont pas le tems de les examiner, ou qui, ſans les entendre, les veulent renverſer.

Mon Frére fait auſſi mention *de Curva refractionis*, c'eſt-à-dire, de la courbure du rayon de la lumiére; diſant qu'en ſuivant les mêmes traces, on la trouvera avec une pareille facilité; cependant je ſuis étonné qu'il n'ait pas vû que ces deux Courbes (qu'il croioit différentes) n'en ſont qu'une ſeule, comme j'ai dit ci-deſſus.

A l'occaſion de ces ſpéculations, mon Frére nous aſſûre, qu'il s'eſt procuré un accès libre à la connoiſſance des choſes beaucoup plus ſublimes & plus difficiles. Pour en donner un échantillon, il nous propoſe à ſon tour deux autres Problémes, s'adreſſant particuliérement à moi, en ces termes. *Si vicem reddere volet, (Frater) ſequens generale tentabit: Quæritur ex omnibus iſoperimetris, ſuper communi baſi BN conſtitutis, illa BFN, quæ non ipſa quidem maximum comprehendat ſpatium, ſed faciat, ut aliud curva BZN comprehenſum ſit maximum, cujus applicata PZ ponitur eſſe in ratione quavis multiplicata, vel ſubmultiplicata, rectæ PF, vel arcus BF, hoc eſt, quæ ſit quotacunque proportionalis ad datam A & rectam PF, curvamve BF? Huic ne detrectare poſſit, adjungimus alterum, quod majorem cum ſuo affinitatem habet; ubi quæritur, quænam ex infinitis Cycloidibus idem initium habentibus, ac ſuper eadem baſi horizontali conſtitutis, illa ſit, per quam deſcendens grave, minimo tempore, ex initio communi ad datum perpendiculum appellat.* TAB. X. N°. XXXVIII.

Et cum iniquum ſit, ut quis, ex labore in alterius gratiam, & cum proprii temporis diſpendio, rerumque ſuarum damno ſuſcepto, nihil emolumenti percipiat; prodit Non nemo, pro quo caveo, qui ſoluturo Fratri, ultra laudes promeritas, honorarium 50 imperialium decrevit; hac tamen lege, ut intra tertium ab hujus publicatione menſem ſe ſuſcepturum promittat, ipſaſque ſolutiones finito

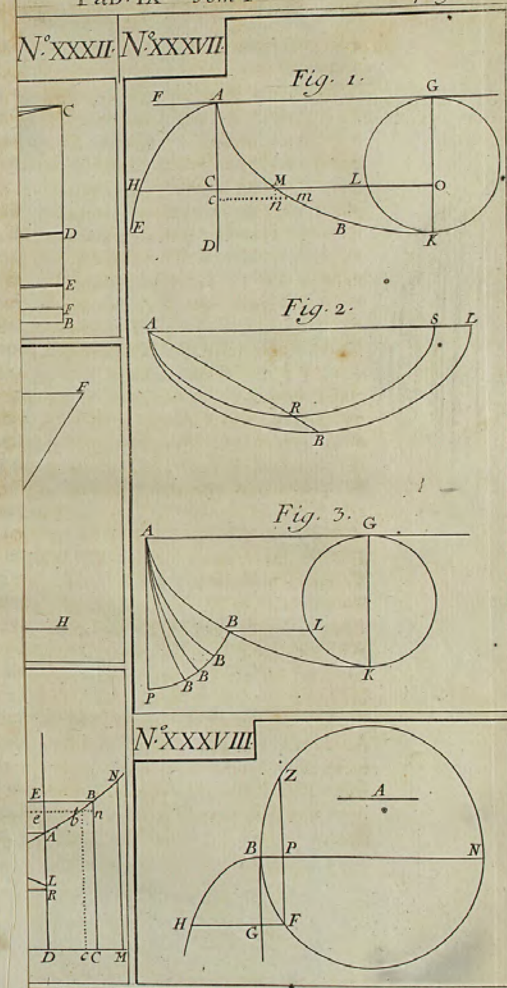
 anno,

anno, utcunque licet per quadraturas, exhibeat. Hoc enim elapso, si nemo dederit, meas exhibebo, &c.

Quelques difficiles que ces Problémes paroissent, je n'ai pas manqué de m'y attacher à l'instant même que je les ai lus : mais voyez avec quel succès ; au lieu de trois mois qu'on me donne pour sonder le gué, & au lieu de tout le reste de cette année pour trouver la résolution, je n'ai employé en tout que trois minutes de tems pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le mystére ; & bien au delà : Car je donnerai les resolutions mille fois plus generales que ne sont les Problémes, savoir qu'au lieu qu'on veut seulement que PZ soit comme une certaine puissance de PF ; j'enseignerai une régle generale pour décrire la Courbe cherchée BFN, lorsque PZ doit être composée de PF, & de la donnée A, de quelque façon qu'on se puisse imaginer, c'est-à-dire, si sur l'axe BG parallele à PF on conçoit une Courbe donnée quelconque BH, dont les ordonnées GH ; j'énonce le Probléme generalement ainsi : *On demande la construction de la Courbe BFN, qui de toutes les isopérimétres soit telle, qu'ayant pris sur les appliquées prolongées FP, les lignes PZ, égales aux GH appliquées correspondantes de la Courbe donnée BH, il s'en fasse une autre Courbe BZN, dont l'espace enfermé NBZN soit le plus grand de tous les autres imaginables, qui se pourroient ainsi faire par les autres isopérimétres BFN.* Y a-t-il donc rien de si general que cela? Car, selon la proposition de mon Frére, la Courbe donnée BH ne seroit que du genre des paraboles ; au lieu que ma construction est également facile, quelle que soit la Courbe BH.

Pour ce qui est de l'autre Probléme, par lequel on demande d'entre toutes les Cycloïdes, qui ont le même commencement & la même base horizontale, celle suivant laquelle le corps pesant arrive le plus vite à une ligne verticale donnée ; il est vrai que c'est là proprement le Probléme, pour la resolution duquel ce genereux *Non nemo* me promet le prix de 50 écus

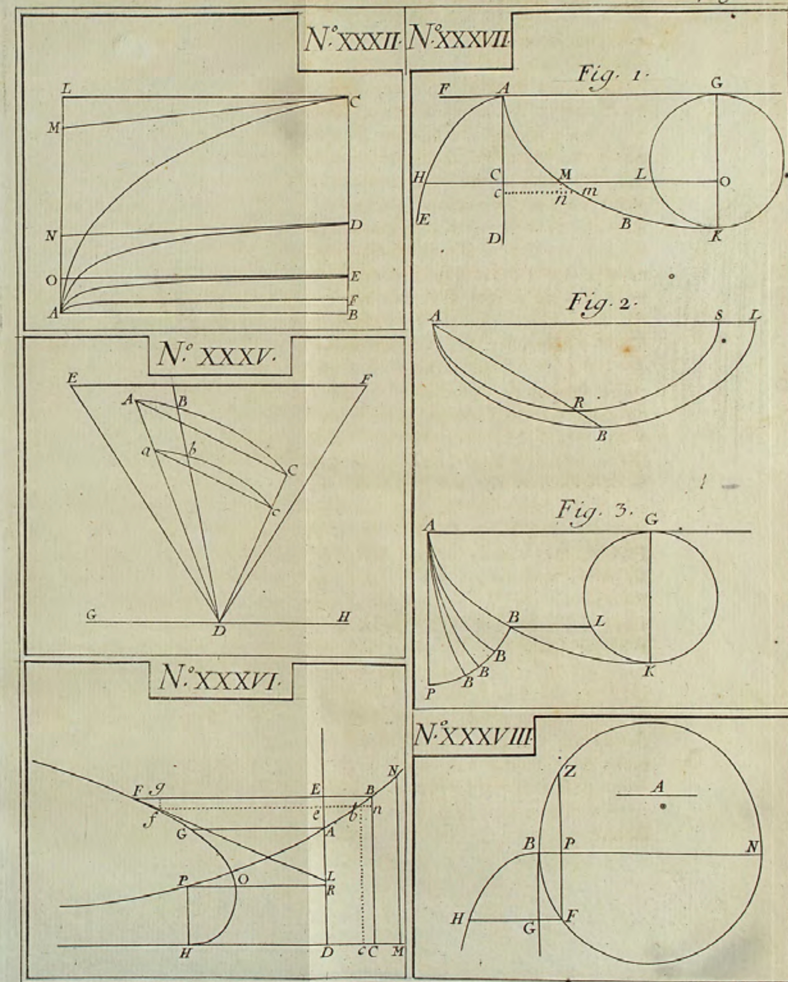
Tab. IX. Tom. I. pag. 202.



at. Hoc enim elapſo,

paroiſſent, je n'ai
même que je les ai
lieu de trois mois
au lieu de tout le
olution, je n'ai em-
s pour tenter, com-
e myſtére; & bien
s mille fois plus ge-
oir qu'au lieu qu'on
e certaine puiſſance
le pour décrire la
doit être composée
lque façon qu'on ſe
BG paralléle à PF
que BH, dont les
generalement ainſi:
*BFN, qui de toutes
les appliquées prolon-
appliquées correſpon-
iſſe une autre Courbe
le plus grand de tous
faire par les autres*
ſi general que cela?
, la Courbe donnée
es; au lieu que ma
que ſoit la Courbe

r lequel on deman-
e même commence-
ſuivant laquelle le
e verticale donnée;
eme, pour la reſolu-
omet le prix de 50
écus



écus blancs;
effroyableme
qu'il y eût
pendant, vo
inconstante
épineux, m'
douce, très
trouvé que
cloïde il fau
prend toute
tout cela n'e
blié sur la C
ra bien surpr
des *Actes*, c
le n'en deme
aussi le Prob
cente, c'est-
Courbes de
des Cercles
si desesperé,
contente de
mis & Minim
Au reste,
tions, & je
nécessaire qu
entre les ma
honnête hom
Mr. LEIBN
même tems
pendant je p
gagner, mai
j'ai destiné c
Car j'aurois
m'a donné f
tems, si ce

écus blancs; d'ou je conclus que la difficulté lui en a paru si effroyablement grande, qu'il ne pouvoit point se persuader qu'il y eût homme au monde capable de la surmonter. Cependant, voici comme la Fortune se joue des hommes; cette inconstante ne lui ayant montré qu'un chemin très-rude & très-épineux, m'a été si favorable, qu'elle m'a mené par une voye douce, très-courte, & tres-aisée; par laquelle j'ai même plus trouvé que je ne cherchois. Car je détermine aussi quelle Cycloïde il faut prendre, si à la place de la droite verticale, on prend toute autre ligne oblique donnée de position. Enfin tout cela n'est qu'un simple Corollaire de ce que j'ai déja publié sur la Courbe *Synchrone*; en sorte que nôtre *Non nemo* sera bien surpris de se voir satisfait sur sa question au même mois des *Actes*, où il la propose. Ma méthode est si féconde, qu'elle n'en demeure pas là; mais elle passe plus outre, en resolvant aussi le Probléme, si à la place des Courbes de la plus vite descente, c'est-à-dire, à la place des Cycloïdes, on substitue des Courbes de quelque autre espéce que ce soit; par exemple, des Cercles, ou des paraboles; ce que mon Frére tient pour si desesperé, que sans le vouloir seulement entreprendre, il se contente de l'avoir proposé, disant: *Qui speculationem de Maximis & Minimis promovere volet, tentabit. Nobis sufficiat proposuisse.*

Au reste, j'ai déja envoyé à Mr. LEIBNITS mes résolutions, & je l'ai prié d'être nôtre Juge; il est donc juste, & nécessaire que l'Inconnu prometteur remette de même le prix entre les mains du Juge; ce qu'il ne refusera pas de faire étant honnête homme, comme j'espére. Aussi-tôt que cela sera fait, Mr. LEIBNITS publiera mes résolutions, & prononcera en même tems la Sentence, si elles seront légitimes ou non. Cependant je proteste, par avance, que ce n'est pas l'envie de gagner, mais uniquement l'interêt des pauvres, pour lesquels j'ai destiné cet argent, qui me fait agir avec empressement: Car j'aurois honte de prendre de l'argent pour une chose, qui m'a donné si peu de peine, & qui ne m'a point fait perdre de tems, si ce n'est ce que j'employe à écrire ceci. Quand même elle m'auroit donné quelque occupation, ce n'eſt pas là le moyen de recompenſer l'eſprit: l'ardeur noble, qu'il ſent pour ces belles ſciences, eſt bien au deſſus de tout l'argent, & la moindre découverte qu'on y fait vaut plus que toutes les richeſſes. Ce ne ſont donc que les ames mercenaires, qui me voudront blâmer, parce que je n'ai pas auſſi promis une ſomme d'argent, lorſque j'ai propoſé mes Problémes. Je dis cela, afin que celui qui a voulu exercer ſa libéralité, en m'offrant un prix, ſache qu'il feroit tort aux pauvres, & non point à moi, s'il vouloit retracter ſa parole. Je ſuis *&c.*

N°. XXXIX.

PROBLEMES A RESOUDRE.

Journal des Savans 1697. 33. Journal du 26. Aouſt p. 394. Ed. de Paris, pag. 636. Edit. de Holl.

VOICI quelques Problémes *De Maximis & Minimis*, que Monſieur BERNOULLI, Profeſſeur à *Groningue*, propoſe aux Géométres, qui croyent avoir des méthodes pour toutes les queſtions de cette nature.

I. Deux points étant donnés ſur une ſuperficie convexe, on demande une maniére d'y décrire géométriquement d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte; ſuppoſé que cette ſurface ſoit géométrique, telles que celles de la Sphère, du Cone, du Cylindre, dans leſquelles le Probléme eſt fort facile, de quelque maniére que les points ſoient ſitués; mais dans les Conoïdes, & dans les Sphéroïdes, il devient très-difficile. C'eſt pourquoi on propoſe pour exemple la ſuperficie du Conoïde parabolique, dans laquelle il faille tirer la ligne la plus courte, qui joint deux points ſitués, non pas dans le même Méridien, [ce qui ſeroit encore facile, puiſque la ligne recherchée ſeroit la portion du même Méridien compriſe entre ces deux points;] mais ſitués dans des Méridiens differens:

ferens: J'appelle ici *Méridien* toute parabole tirée du ſommet du Conoïde juſqu'à ſa baſe.

II. Toutes les ellipſes poſſibles, ACB, ACB, ACB, &c. étant décrites ſur l'axe AB donné de grandeur, & en ayant retranché des Segmens égaux CDB, CDB, CDB, &c. On demande lequel de ces Segmens a le point C, le plus proche du point B; c'eſt-à-dire, qu'il faut determiner l'ellipſe ACB, dans laquelle la droite CB ſoit la plus courte. TAB. X. N°. XXXIX. *Fig.* 1.

III. Les mêmes choſes ſuppoſées, on demande la nature & les touchantes de la Courbe CCC.

IV. Sur l'axe BA donné de poſition étant décrites toutes les Courbes d'une même eſpèce, par exemple, toutes les paraboles BC, BC, BC, &c. Et en ayant coupé des arcs égaux BC, BC, BC, &c. On demande le point C le plus proche du point B; c'eſt-à-dire, qu'il faut déterminer lequel de ces arcs a la plus courte ſoutendente BC. TAB. X. N°. XXXIX. *Fig.* 2.

V. Les mêmes choſes ſuppoſées, on demande la nature & les touchantes de la Courbe CCC.

VI. Une ligne droite DD étant donnée de poſition, laquelle rencontre les Courbes BC aux points D; On demande le plus petit de tous les arcs BD.

Voiez N°. LI. *Art.* 2.

N°. XL.

LETTRE DE Mr. BERNOULLI,

Professeur de Groningue, *à Mr.* VARIGNON. *Du* 15. *Octobre* 1697. *

Sur le Probléme des Isopérimétres.

Journal des Savans 1697. 39. Journal du 2e. Dec. p. 458. Edit. de Paris, pag. 737. Edit. de Holl.

IL y a près de trois mois que je vous fis part de quelques nouveaux Problémes, proposés par mon Frére dans les *Actes de Leipsic*, au mois de *Mai* dernier. Il les a, dit-il, imaginés à l'occasion de celui que j'avois proposé sur la plus vite descente des corps pesans, lequel a été assez favorablement reçu, tant ici *(Hollande)* qu'aux pays étrangers; témoins les excellentes solutions, qui en ont été données par les plus savans Géométres de ce tems, & qui toutes s'accordent merveilleusement avec la mienne.

Vous vous souviendrez, qu'en vous communiquant ces nouveaux Problémes, je vous dis en même tems que j'en avois trouvé les solutions, le même jour que le mois de *Mai* de ces *Actes* m'étoit tombé entre les mains, & de plus qu'elles étoient infiniment plus generales que les conditions de ces Problémes ne le demandoient. Je ne me serois peut-être pas attaché si-tôt à cette recherche, si je n'y eusse été comme obligé par un défi, qu'une louable émulation, qui est entre mon Frére & moi, lui a fait me faire nommément à moi & en particulier. Un Inconnu même, dont mon Frére est le garant, y ajoute une promesse de 50 imperiales, ou écus blancs, pourvu que j'accepte publiquement ce défi dans trois mois, & que je donne les solutions requises avant la fin de cette année. Je ne manquai donc pas, dès le lendemain du jour que ces Problémes vinrent à ma connoissance, de donner avis à Messieurs les Collecteurs des *Actes de Leipsic*, que j'en avois déja trouvé les solutions, les priant d'en avertir le Public. * Je ne manquai pas non plus d'envoyer incontinent mes Solutions à Mr. LEIBNITZ, & de les lui remettre comme en dépôt, avec l'analyse qui m'y avoit conduit; sûr que je ne pouvois mieux m'adresser en ce rencontre qu'à ce Géométre incomparable. Je le suppliai de vouloir bien être nôtre Juge, ne doutant nullement que mon Frére ne s'en rapporte très volontiers à lui. Mr. LEIBNITZ y consentit, pourvu que de part & d'autre on en soit content. Tout ce que je viens de dire, se trouve inseré dans l'*Histoire des Ouvrages des Savans*, au mois de *Juin* †; où je donne aussi mes remarques sur les diverses solutions de mon Probléme de la plus vite descente, qui ont paru dans les *Actes de Leipsic*.

* On trouve un Extrait de cette Piéce en Latin, dans les *Actes de Leipsic* 1698. Janv. pag. 52.

Cependant, comme le tems s'en va expirer, & que je n'entends plus rien de l'Inconnu prometteur, j'ai jugé qu'il ne faloit plus attendre sa réponse, de peur qu'il ne laissât couler tout doucement le tems préfix, & qu'il ne me chicanât en suite sur mon retardement.

Voici donc, Monsieur, mes solutions. Je m'assure que vous les trouverez dignes d'être communiquées au Public; & ce d'autant plus que mon Frére fait une estime singuliére de ses Problémes, tant pour leur subtilité, que pour leur difficulté. Avant que de les proposer, parlant de figures isopérimétres, il dit qu'on croit communément, mais sans démonstration, *(vulgo creditur, & recte, sed sine demonstratione)* que le Cercle est la plus grande de toutes les figures d'un même circuit: mais il n'a pas pris garde, que PAPPUS l'a très-bien démontré dans les *Collections Mathématiques*, Liv. 5. Prop. 10. Je ne m'arrêterai donc pas à le prouver. Je dirai seulement en passant,

* Ce qu'ils firent, dans les *Actes* de 1697. Octob. pag. 485.
† Cy-dessus N°. XXXVIII.

ſant, qu'il y a long-tems que je fis part à Mr. LEIBNITZ d'une méthode que mon Frére me demande à cette occaſion, comme s'il étoit le premier qui fût tombé ſur cette ſpéculation, qui eſt de trouver la courbe funiculaire, ou de la chainette, par la conſideration *de Maximis & Minimis*, en ne faiſant reflexion que ſur ce que le centre de gravité de la chaine doit deſcendre le plus bas qu'il eſt poſſible. Il ſuffit que Mr. LEIBNITZ en ſoit témoin; des raiſons particuliéres m'empêchent de publier ma méthode.

TAB. X. N°. XL. Fig. 1. Venons au fait. La premiére queſtion eſt telle: *D'entre toutes les Courbes iſopérimétres conſtituées ſur un axe déterminé BN, on demande celle, comme BFN, qui ne comprenne pas elle-même le plus grand eſpace; mais qui faſſe qu'un autre compris par la Courbe BZN ſoit le plus grand, après avoir prolongé l'appliquée EP, de ſorte que PZ ſoit en raiſon quelconque multipliée, ou ſous multipliée, de l'appliquée PF, ou de l'arc BF; c'eſt-à-dire, que PZ ſoit la tantiéme proportionnelle que l'on voudra d'une donnée A, & de l'appliquée PF, ou de l'arc BF.* Le ſens de cette queſtion eſt de *déterminer la Courbe BFN entre une infinité d'autres de même longueur qu'elle, dont les appliquées PF ou les arcs BF élevés à une puiſſance donnée, & exprimés par d'autres appliquées PZ, faſſent le plus grand eſpace BZN.*

J'ai plus d'une ſolution de ce Probléme: mais je ne mettrai ici que la plus ſimple; elle ſuffit. Soit l'expoſant de la puiſſance, n; une droite arbitraite, a; PF, ou BG, x; BP, ou GF, y; que l'on prenne GF ou $y = \int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ Je dis que le point F ſera à la Courbe requiſe BFN, tellement que faiſant PZ en raiſon de la puiſſance n de l'appliquée PF, l'eſpace BZN ſera le plus grand de tous ceux qui ſe pourroient ainſi former par d'autres Courbes conſtitués ſur BN, & de même longueur que BFN.

D'où il eſt manifeſte, que ſi $n = 1$, la courbe BFN ſera la demi-circonference d'un cercle; car y ou $\int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ devien-

deviendra $= \int(x dx : \sqrt{(aa - xx)}) = a - \sqrt{(aa - xx)}$. Or c'eſt juſtement ce qui doit arriver, la courbe BZN étant, dans ce cas, la même que BFN.

En faiſant $n = 2$, c'eſt-à-dire, PZ comme les quarrés de PF, la Courbe BFN eſt celle que repréſente un linge preſſé d'une liqueur, & que mon Frére attribuë auſſi à ſon Elaſtique.

Que ſi $n = \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, ſi les PZ ſont en raiſon ſous-doublée des PF, alors BFN ſera la Roulette ou Cycloïde ordinaire. De ſorte que voilà encore une très-belle proprieté de cette fameuſe courbe, contre l'attente de ceux qui croyoient, qu'après la découverte de la plus vite deſcente, que nous y venons de faire, il n'y reſtoit plus rien à découvrir. Ce n'eſt pas encore tout: J'oſe avancer, & au premier loiſir que j'aurai, je le ferai voir par un échantillon, qui ne déplaira pas aux Géométres, * que nonobſtant toutes les recherches, & le rigoureux examen, que les plus habiles ont fait de cette courbe depuis tant d'années, elle a encore bien des proprietés très-conſiderables, qui leur ſont échappées.

Au reſte, je remarque en general, que toutes les fois que n eſt une fraction dont le numerateur eſt l'unité, & le dénominateur un nombre pair quelconque, la courbe BFN ſe pourra toujours conſtruire par la quadrature du Cercle; & ſi le dénominateur eſt un nombre impair quelconque, alors la courbe BFN ſera tout à fait Algébraïque: † par exemple, ſi $n = \frac{1}{3}$, ou ſi PZ eſt en raiſon ſouſtriplée de PF, l'on aura $y = 2a - (2a^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}})\sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

Avant que de paſſer outre, il ne ſera pas hors de propos de donner ici une ſolution infiniment plus generale que ne requiert le Probléme; en ſuppoſant que PZ, au lieu de n'être que comme une puiſſance donnée de PF, ſoit maintenant compoſée, comme l'on voudra, de PF & de données: com-

* Voiez N°. LVIII.
† Voiez N°. CXIV.

me si l'on décrit une courbe donnée quelconque BH sur l'axe BG, paralelle à PF, & qu'appliquant $PZ = GH$, on veuille que l'espace BZN soit le plus grand: Je dis, que pour construire la Courbe BFN, il faut prendre GF, ou $y = \int (b\,dx : \sqrt{(aa - bb)})$; j'appelle b l'intégrale ou la somme des GH $dx : x$. * D'où il est évident, pour ce qui est de l'arc BF, qui fait l'autre partie du Probléme, que quand même PZ ou GH seroit non seulement comme une puissance donnée de l'arc BF, mais aussi composé que l'on voudra de cet arc, de PF, & de données, on aura toujours une équation differentielle, si ce n'est pas du premier, au moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la Courbe BFN.

Je ne puis passer sous silence une très-belle proprieté que j'ai rencontrée sur nôtre Courbe considerée en general: C'est que le rayon FS de la développée, ou du Cercle baisant, est toujours à la portion FR comprise entre la courbe & sa base, comme b est à FZ ou GH †. Et par conséquent, dans le cas simple qu'on me propose, lorsque PZ ou GH $= x^n$, on aura toujours FS & FR en raison constante, savoir $FS : FR = 1 : n$. Il est aussi à remarquer, que dans la même courbe, où $\int x^m\,dx$ est un *Maximum*, $\int (dt : x^m)$ sera un *Minimum*; je prends dt pour l'élement de la courbe. C'est ce qui fait que m étant $\frac{1}{2}$, la Courbe BFN, comme nous avons remarqué ci-dessus, doit être la même que celle de la plus vite descente; puisque dans celle-ci $\int (dt : \sqrt{x})$ est un *Minimum* par sa nature.

Mais en voilà assez, Monsieur, sur le premier Probléme ‡. L'autre consiste à *déterminer la Cycloïde, qui entre toutes* *celles*

* *L'Autheur a corrigé ceci dans le* N°. XLII. *Il veut qu'on lise*, J'appelle b les ordonnées GH; & pour ce qui est de l'arc BF, &c.

† *Dans le* N°. XLII. *l'Autheur remarque qu'il faut lire*, comme b est à GT, aiant tiré BT paralelle à la tangente en H, ou, si l'on aime mieux, comme la soutangente de la Courbe BH est à l'abscisse BG.

‡ On trouvera les Démonstrations de tout ceci dans les N°. LXXV. & sur tout CIII.

celles qu'on peut décrire d'une même origine & sur une même ligne horizontale, ait cet avantage, que sa portion comprise entre l'origine & une verticale donnée soit parcouruë dans le moindre tems possible, c'est-à-dire, en moins de tems que toute autre portion des autres Cycloïdes, pareillement comprise entre l'origine & la verticale donnée.

Il semble par la maniére de parler de mon Frére, que c'est pour la solution de ce seul Probléme, (quand même je n'aurois pas resolu le premier) que nôtre Inconnu me promet le prix de 50 écus; car c'est en me proposant ce Probléme-ci, qu'il dit, *prodit Non nemo, pro quo caveo, qui soluturo Fratri, ultra laudes promeritas, honorarium* 50 *imperialium decrevit.* Ainsi il faut qu'il l'ait jugé difficile. Cependant, si je me contentois de répondre simplement à la question, je le pourrois faire en trois mots; car il est visible que la solution de ce Probléme n'est qu'un petit Corollaire, qui se tire immédiatement de ce que j'ai dit de la Courbe Synchrone, dans le mois de *Mai* des *Actes* * dont il s'agit ici. Je dis donc, pour découvrir ce mystère, que *la Cycloïde décrite par un Cercle, dont la circonférence soit égale au double de la distance entre l'origine & la verticale donnée, satisfait à la question.* Mais pénétrons plus avant. Si au lieu d'une verticale, on suppose une ligne droite quelconque donnée de position, ou même une ligne courbe, le Probléme n'en deviendra pas plus difficile; puis qu'il est visible par la nature de ma *Synchrone*, que la Cycloïde cherchée sera toujours celle qui rencontre à angle droit la ligne donnée de position. Pour en trouver présentement le Cercle generateur, il n'y a qu'à décrire au hazard un Cercle, qui touche l'horizontale au point où elle est coupée par la droite donnée de position; faire ensuite, comme l'arc de ce Cercle retranché du côté de l'origine des Cycloïdes par la ligne donnée de position, est à son diamétre, ainsi la partie de l'horizontale interceptée entre l'origine & l'intersection soit à une quatriéme: Cette quatriéme sera le diamétre du Cercle generateur de la Cycloïde cherchée. C'est ainsi que mon Frére, voulant me proposer cette question comme difficile, y devoit substituer

* N°. XXXVII.

 tou-

toute ligne droite donnée de poſition, au lieu de la verticale, pour me la faire dans toute ſon étenduë: Je m'étonne que ſa méthode ne le lui ai pas ſuggeré.

On voit donc que je lui ai plus que ſuffiſamment répondu, & qu'ainſi je pourrois finir ici. Mais comme j'ai trouvé encore une autre ſolution de ce dernier Probléme, laquelle s'étend non ſeulement aux Cycloïdes, mais auſſi à toutes les Courbes ſemblables, & ſemblablement poſées; il me prend envie de la communiquer encore, & ce d'autant plus que mon Frére paroit en parler comme d'une choſe déſeſperée, juſqu'à ne vouloir pas même la tenter, ſe contentant de l'avoir ſeulement propoſée: *Qui ſpeculationem,* dit-il, *de Maximis & Minimis promovere volet, tentabit; nobis ſufficiat propoſuiſſe.* Il donne pour exemples les Cercles, ou les Paraboles à ſubſtituer à la place des Cycloïdes de ce Probléme. Pour moi, je l'énonce &

TAB. X. N°. XL. *Fig.* 2. le reſouds generalement ainſi. *Soient* AGB, AHD, &c. *des Courbes données ſemblables & ſemblablement poſées; GC une droite donnée de poſition; On demande par laquelle de ces Courbes, un corps peſant commençant à deſcendre de leur origine commune A, arrive dans le moindre tems à la droite donnée GC.*

SOLUT. Ayant choiſi une des Courbes ſemblables pour conſtante, comme AGB, on nommera l'ordonnée BL, y; la Courbe AGB, z; enſuite on tirera à chaque point B une touchante BR, que l'on prendra $= \frac{1}{2}\sqrt{y}\int(dz:\sqrt{y})$; en ſorte que les extrémités R de toutes ces touchantes décriront une Courbe nouvelle AOR; laquelle étant décrite, il faut tirer une ligne droite AR paralelle à GC; du point R, auquel elle coupe la courbe AOR, on ménera une droite RB qui touche la courbe AGB au point B, duquel ſi l'on tire la droite AB qui coupe GC en D, & que l'on faſſe ſur AD une courbe AHD ſemblable à AGB; Je dis que la Courbe AHD ſera celle, par laquelle le corps deſcendant parviendra le plus vite à la droite GC.

En certains cas particuliers le Probléme devient fort facile; Par

Par exemple, ſi les courbes AGB, AHD, &c. ſont des Cercles, alors la conſtruction s'en fait fort aiſément par la rectification d'une Courbe que mon Frére comparoit autrefois à un *nœud de ruban*, dont nous nous étions ſervi pour la conſtruction de l'Iſochrone paracentrique de Mr. LEIBNITZ *: De ſorte que ces deux Problémes ont entr'eux une dépendance mutuelle; c'eſt-à-dire, que par la conſtruction de l'un l'on aura celle de l'autre. Si AGB, AHD, &c. ſont des Paraboles, le Probléme ſe reduit de même à la rectification d'une courbe.

J'ai ſuppoſé que les courbes AGB, AHD, &c. étoient ſemblables: j'ai pourtant auſſi une méthode, pour quand elles ne le ſont pas. Mais parce que je n'ai pas encore eu le loiſir de la mettre dans tout ſon jour, & que la conſtruction en devient fort embarraſſée dans l'exemple le plus ſimple des courbes diſſemblables AGB, AHD; quand même elles ne ſeroient que des Ellipſes conſtituées ſur un axe commun; je la remettrai dans une autre occaſion; ceci ſuffiſant tant à mon Frére, qu'à l'Inconnu prometteur, pour leur donner une ſatisfaction qui ſurpaſſera ſans doute l'attente qu'ils avoient de moi; puiſque cette réponſe comprend beaucoup plus qu'ils ne me demandoient. Me voilà donc ſurabondamment quitte: Il ne reſte plus qu'à l'Inconnu prometteur de s'aquitter auſſi. S'il ne le fait pas, qu'il ſçache que c'eſt aux pauvres, plûtôt qu'à moi qu'il fait tort; mon deſſein ayant toujours été de leur faire diſtribuer cet argent, tant à cauſe que ces ſolutions m'ont trop peu coûté pour en profiter, que pour lui faire voir que je ne ſuis point mercenaire, & que la gloire ſuffit pour m'engager.

P. S. Je viens de recevoir une Lettre de M. le *Marquis de l'*HOSPITAL, par laquelle il me mande qu'il a auſſi reſolu le ſecond Probléme de mon Frére, où il s'agit de déterminer la Cycloïde, qui rencontrant une ligne verticale donnée, ſoit parcouruë dans moins de tems qu'aucune autre, décrite de la même origine & ſur la même horizontale.

Dd 3 AVIS

* C'eſt la Courbe AMONA du N°. XIX.