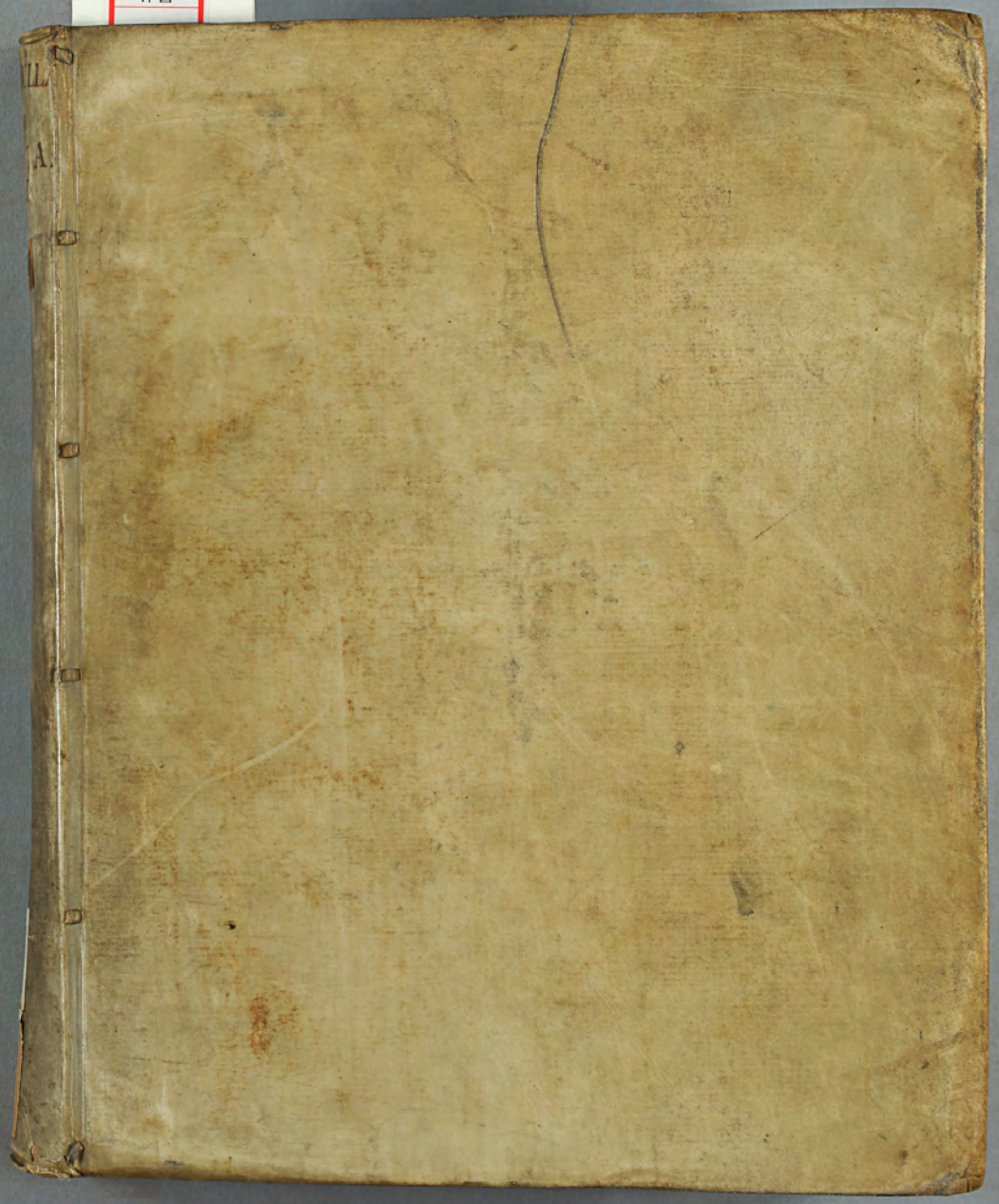


4 vols.

Dno

Штаммъ

JOHANNIS BERNOULLI OPERA OMNIA,

IN QUATUOR TOMOS DISTRIBUTA.

J. Rieber pinx. G. F. Schmidt Sculp. Paris.

A Lausanne et Geneve, chez MARC-MICHEL BOUSQUET et Comp. 1743.

JOHANNIS BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS, Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, Socii &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA, quam hactenus inedita.

TOMUS PRIMUS,

Quo continentur ea

Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.

J. Hiefort.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLII.

Cum Privilegio Sacræ Cesareæ Majestatis, & Serenis. Poloniæ Regis, Elect. Saxon.

CAROLO FRIDERICO,

POTENTISSIMO

BORUSSORUM

REGI.

REX AUGUSTISSIME,

QUOS inſcribere Philoſophis Veteres ſolebant Tractatus philoſophicos mathematicosque, hos Principibus Viris dicare Auctores

tores amant hodierni. Nobis feliciori-bus Indulgentia conceſſum eſt Tua, ut magni Geometræ ac Philoſophi Johannis Bernoulli *Opera liceat offerre Regi Philoſopho, qui quantum Dignitate ſupra vulgus hominum poſitus es, tantum excellis ingenii animique magnitudine, & virtutibus omnibus quæ Regiam Majeſtatem ornant. Nam cum mature intellexiſſes animum humanum nulla re propius ad illud, unde ſuam traxit originem, Divinitatis exemplar accedere, quam veritate cognita & da-*

ta

ta hominibus ſalute, ita ſemper Vitam inſtituiſti Tuam, ut perpetuo ad eos fines omnia retuliſſe, nec unquam mentis aciem ab eis deflexiſſe conſtet. Itaque, cum ingentem & præclaram illam animam, quam Sceptro Solioque deſtinaverat DEUS, difficilibus temporibus ac negotiis exercere decreviſſet; unus, in illo ætatis flore, grave onus imperii ſic ſuſcepiſti, ut Regnum Clementia ipſa & Conſilium gubernaſſe, bellum indixiſſe Juſtitia & Moderatio, geſſiſſe Prudentia & Virtus, pacem denique Fides ac

Temperantia fecisse videantur. Quibus artibus, vere Regiis, id consecutus es, ut dum Europa bellorum miseriis vexatur fere tota, fortunatos illos Populos, Tutelæ Tuæ commissos, credamus armorum incommoda tulisse, tantum ut pacis dulcedine magis capiantur. Fruere Tua Gloria, REX MAXIME, quæ non continebitur propiorum temporum regionumque finibus, sed, Solis instar, simul ut exortus est, omnia luce sua complentis, & ipso progressu vires ac splendorem acquirentis, ad extremas

mas penetravit gentes, ad ultima secula permanabit. Posteris nunciabit Historia Regem visu & auditu juxta venerabilem, amabilem, comem in socios subditosque, mansuetum in hostes, invictum bello, pacis amantem, generis humani bono natum, ævi nostri decus & delicias. Nec te silebunt Musæ; sed sive Principibus perlegenda scribentem, sive scribenda facientem ultro canent, tam amæniores illæ, quam istæ severiores, quarum omnium Cultor esse non dedignaris, cum ingenio locoque Pa-

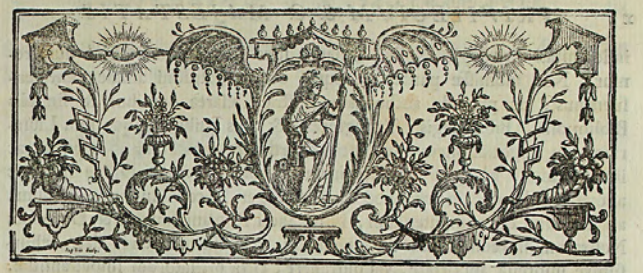
Patronus sis atque Præsidium: Litteratos enim, & quos Tibi Tua Terra tulit, & quos ad Tuam Aulam undique accersis, eo excipis vultu, eo prosequeris favore, ut esse Tibi in deliciis Alumni Musarum videantur. Honorifica autem illa invitatio, qua, non sine Orbis eruditi plausu, Bernoullium *nostrum, una cum doctissimis Filiis, ad Te vocavisti, non sinebat ut aliud quam Tuæ Majestatis Patrocinium ambirent Viri commendatissimi scripta, facitque ut nec Tanto Rege prorsus indignum, nec*

nec Tibi displiciturum confidamus munusculum. Quod ut benigne aspicias, & eo accipias animo, quo soles conatus bonorum, precibus humillimis supplicamus,

MAJESTATIS TUÆ

Deditissimi Devotissimi Servi
MARCUS-MICHAEL BOUSQUET
& Socii.

PRIVILE-



PRIVILEGIUM,

SACRÆ CÆSAREÆ MAJESTATIS.

CAROLUS SEPTIMUS DIVINA FAVENTE CLEMENTIA Electus Romanorum Imperator Semper Auguſtus, ac Germaniæ & Bohemiæ Rex, utriuſque Bavariæ & Superioris Palatinatus Dux, Comes Palatinus Rheni, Archidux Auſtriæ, Landgravius Leuchtenbergæ, &c. Agnoſcimus & notum facimus tenore præſentium Univerſis, quòd, cùm Nobis *Marcus Michael Bouſquet*, ejuſque Socii humillimè exponi curârint, quem in modum *Joannis Bernoulli Opera omnia tam antea ſparſim edita, quàm hactenus inedita in quatuor Tomos diſtributa, in Quarto*, prelo committere reſolverint, vereantur autem, nè Æmulorum invidiâ hanc Editionem imitantium impendii & laboris fructu fruſtrentur, ideoque Nobis demiſſè ſupplicârint, quatenus eorum

* * indem-

indemnitati Privilegiò Noſtrò Cæſareo ſuccurrere clementiſſimè dignaremur, Nos ſubmiſſæ pariter & æquæ eorum petitioni annuendum cenſuerimus, ac proinde authoritate Noſtra Cæſarea omnibus & ſingulis Bibliopolis, Bibliopegis, Typographis & aliis quibuſcumque rem Librariam ſeu negotiationem exercentibus firmiter inhibemus, vetamus ac interdicimus, nè quis ſupranominata *Joannis Bernoulli Opera* ſub hoc aliòve Titulo nec in toto nec in parte, per Decem Annorum ſpatium, ab hodierno die computandum, intra Sacri Romani Imperii & Ditionum Noſtrarum hæreditariarum fines recudere, vel aliis recudenda dare, aliorſùmve impreſſa apportare, vel diſtrahere, citra præfatorum Impetrantium, hæredùmque ac Succeſſorum voluntatem & aſſenſum in ſcriptis obtentum auſit vel præſumat. Si quis verò ſecus faciendo Privilegium hoc Noſtrum ſeu Interdictum violare contemnereque præſumpſerit, eum non ſolùm ejuſmodi exemplaribus ubicunque locorum repertis, perperam quippe recuſis ſeu apportatis (quæ dictus *Marcus Michael Bouſquet*, ejuſque Socii ſive propria authoritate ſive Magiſtratus illius loci auxilio ſibi vindicare poterunt) de facto privandum, ſed & Decem marcarum auri puri pœnâ Ærario ſeu Fiſco Noſtro Cæſareo & parti læſæ ex æquo pendendâ, omni ſpe veniæ ſublata, mulctandum decernimus, dummodò tenor hujus Noſtri Privilegii in fronte Libri impreſſus reperiatur, & conſueta quinque Exemplaria Conſilio Noſtro Imperiali Aulico exhibeantur. Mandamus itaque omnibus & Singulis Noſtris & Sacri Romani Imperii Dominiorùmque Noſtrorum hæreditariorum ſubditis & fidelibus dilectis tam Eccleſiaſticis quàm Secularibus, cujuſcunque ſtatûs, gradûs, dignitatis aut ordinis exſtiterint, præſertim verò iis, qui in Magiſtratu conſtituti vel ſuo vel Superiorum ſuorum loco aut nomine jus juſtitiàmque adminiſtrant, ne quempiam Privilegium hoc Noſtrum Cæſareum impunè violare, ſpernere aut tranſgredi patiantur, ſed ſi quos contumaces compererint, conſtituta à Nobis mulctâ eos puniri, & quibuſcunque modis idoneis coërceri curent, quàtenus & ipſi graviſſimam Noſtram indignationem & prædictam pœnam evitare voluerint. Harum teſtimoniò literarum, Manu Noſtra ſubſcriptarum & Sigilli Noſtri Cæſarei appreſſione munitarum, quæ dabantur Francofurti ad Mœnum die duodecima Junii Anno

Anno milleſimo ſeptingenteſimo quadrageſimo Secundo, Regnorum Noſtrorum Romani & Bohemici primo.

CAROLUS.

L. S.

Vt. JOANNES GEORGIUS Comes à Königsfeld.

Ad Mandatum Sac. Cæſ. Majeſtatis proprium.

J. J. HAYECK *de Waldſtätten.*

PRIVILEGIUM,

SERENISS. POLONIÆ REGIS ELECT. SAXON.

ER ALLERDURCHLÄUCHTIGSTE, GROSSmächtigste Fürst und Herr, Herr FRIEDRICH AUGUST, König in Pohlen, des Heiligen Römischen Reichs Erz-Marschall und Churfürst zu Sachsen, auch Burgraf zu Magdeburg, &c. hat auf beschehenes unterthänigstes Ansuchen Marci Michael Bousquet *und* Compagnie, *Buchhändlere zu* Lausanne *und* Genf, *gnädigst bewilliget, daß sie* Johannis Bernoulli, Matheseos Professoris, Opera Omnia, tam antea sparsim edita quam hactenus inedita, in IV. Tomos distributa, cum Figuris, *unter Höchstgedacht Sr. Königl. Majest. und Churfürstl. Durchl.* Privilegio *drucken lassen und führen mögen, dergestalt, daß in Dero Churfürstenthum Sachsen, derselben* incorporirten *Lan-*

Landen und Stifftern kein Buchhändler noch Drucker oberwehntes Buch in denen nächsten von untengesezten dato an, zehen Jahren, bey Verlurst aller nachgedruckten Exemplaria, *und ein hundert Rheinischen Gold-Gulden Strafe, weder nachdrucken, noch auch, da dasselbe an andern Orthen gedrucket wäre, darinnen erkauffen und verhandlen, wogegen sie gemeltes Buch fleissig corrigiren, aufs zierlichste drucken, und gut weiß Papier darzu nehmen zu lassen, auch so offt es aufgeleget wird, von jedem Druck und* Format *zwanzig* Exemplaria *in Sr. Königl. Majest. und Churfürstl. Durchl. Ober-*Consistorium *ehe es verkaufft wird, auf ihre Kosten einzuschicken schuldig, und dieß* Privilegium *niemanden, ohne Höchstgedachter Sr. Königl. Majest. und Churfürstl. Durchl. Vorwissen und Einwilligung zu cediren befügt seyn soll; Gestalt er bey solchem* Privilegio *auf die bewilligten zehen Jahr geschiezet und gehandhabet, auch, da diesem jemand zu wiederhandlen, und sie um* Execution *desselben ansuchen würden, solche ins Werck gerichtet, und die gesezte Strafe eingebracht werden soll. Jedoch daß sie längstens binnen fünff Jahren, und zwar bey Verlurst des* Privilegii, *den Druck zu Stande bringen und die gewöhnlichen* Exemplaria *würcklich liefern.*

Inmittelst, und zu ubrkund dessen, ist dieser Schein, bis das Original-Privilegium *ausgefertiget werden kan, und statt desselben in Sr. Königl. Majest. und Churfürstl. Durchl. Kirchen-Rath- und Ober-*Consistorio *unterschrieben und besiegelt, ausgestellet worden, welchen sie durch den bestellten Bücher-Inspectorn Johann Zacharias Trefur denen Buchhändlern zu insinuiren, widrigen falls die Insinuation vor null und nichtig erkannt werden soll; so geschehen zu Dresden, am* 13. *Julii* 1742.

(L. S.)

L. G. VON HOLZENDORFF.

CHRISTIAN FRIEDRICH TEUCHER.

LETTRE

Ecrite par l'Auteur Monſieur JEAN BERNOULLI, au Libraire & Imprimeur *Marc Michel Bouſquet.*

VOus voilà enfin, Monſieur, *preſque au bout de l'impreſſion de mes petits Ouvrages, puiſque je viens de recevoir une bonne portion des feuilles du* IVme. *& dernier Tome. Je ne puis que vous marquer mon contentement & vous remercier de tous les ſoins, de la diligence, de l'exactitude & des grandes dépenſes que vous employés à l'impreſſion de ce Livre; je trouve que vous lui faites plus d'honneur qu'il ne merite, & je ſouhaite que vous n'ayés jamais lieu de vous en repentir, car vous ſavés* Monſieur, *que je n'ai d'autre part à l'edition de ce Recueil, que celle d'y avoir conſenti, non ſans peine à la verité, ni ſans avoir long tems reſiſté à vos preſſantes ſollicitations & à celle des perſonnes que vous avés miſes en œuvre pour cela.*

En

En effet Monſieur, *du grand nombre de Piéces Anecdotes qui y entrent, j'en aurois ſuprimé pluſieurs, & laiſſé paſſer peu que je n'euſſe au moins retouchées, ſi j'avois été l'editeur de ce Recueil; parce que quantité ont été compoſées dans ma jeuneſſe, & beaucoup d'autres que je n'ai fait qu'écrire fort à la hâte, ſur les premieres feuilles volantes qui ſe trouvoient ſous ma main, ſimplement pour mon uſage, & ſans m'imaginer qu'elles duſſent jamais voir le jour, comme le Public le remarquera ſans peine: c'eſt donc pour être à l'abri de toute critique, que je déclare, que la publication de ces Piéces informes, ne doit être attribuée qu'à vôtre empreſſement. Ainſi ne trouvés pas mauvais que, perſiſtant dans la reſolution que j'ai priſe de ne point paroitre là dedans, je refuſe la Préface que vous me demandés. Si vous croyés qu'il en faille abſolument une, je vous conſeille de vous adreſſer au ſavant Profeſſeur qui a eu la bonté de ſe charger de la direction, & avec tant d'exactitude.*

En revanche, & puiſque j'ai tant fait que de conſentir à l'impreſſion du Recueil de mes écrits, je vous accorde la déclaration autentique que vous ſouhaités de ce conſentement; je vais plus loin encore, je déclare que je n'avouerai jamais aucune edition

tion que quelqu'un d'autre que vous pourroit en faire dans la suite.

Je suis

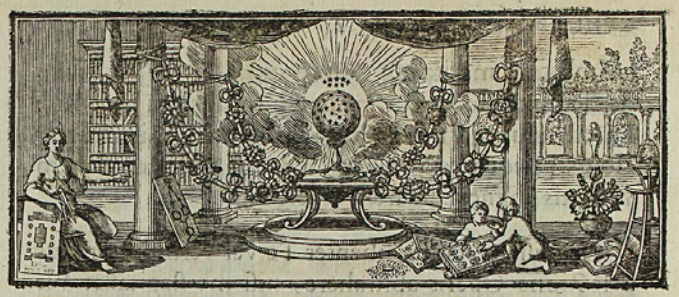
Monsieur,

à Basle le 9. Janvier 1743.

Vôtre très humble & très obéïssant Serviteur,

JEAN BERNOULLI
Prof. des Mathem.

EDITOR



EDITOR LECTORI S.

ON detinebo te multis verbis. Neque enim aut Tua, Lector candide, postulare videtur utilitas, aut meum ingenium fert, ut id exequar quod fere solent omnes qui in aliorum Scriptis edendis curam aliquam & operam ponunt, eum scilicet quem elegerunt multis commendare verbis, & in cœlum laudibus efferre. Quæ sint Viri præstantissimi *Johannis* BERNOULLII in rem mathematicam remque phi-

 losophi-

losophicam merita, & notum omnibus est, & abunde declarat iste, quem in manibus habes, Thesaurus: Ea est insuper Viri modestia, ut a justissimis refugiat elogiis: neque ego vellem laudes illius deterere quem vix satis digne laudarent disertissimi.

Omisissem itaque libenter Te vel verbulo longius a lectione Operis abstrahere, nisi me flagitasset Vir de litteris bene meritus *Marcus-Michaël Bousquet*, ut quæ ad hujus Editionis finem modumque pertinent exponerem. Hæc paucis habe.

Cum intellexisset honestissimus Bibliopola Celeberrimi BERNOULLII Opera, manu diurna nocturnaque Mathematicis versanda, a multis valde desiderari; &, impetrata prius Auctoris venia, omnium simul emendate ac nitide edendorum consilium cepisset: me rogavit, ut istud propositum suum, non sine multis curis magnisque sumptibus perficiendum, sed quod Matheseos Studiosis utilissimum confitebar, saltem consiliis juvarem: ego vero, *Bernoulliani* nominis amantissimus, operam, qualem pro modulo meo conferre possum, denegare non sustinui.

Primum igitur nobis curæ fuit omnia Viri clarissimi Scripta prius edita colligere; quæ res, vere dicam, ali-

aliquid laboris requirebat & diligentiæ, usque adeo dispersa fuse lateque jacebant. Partem ex *Actis Eruditorum Lipsiensibus*, partem ex *Parisiensi Diario Eruditorum* extraximus: multa deprompsimus ex *Historia & Actis Academiæ Regiæ Scientiarum*, nonnulla ex *Miscellaneis Berolinensibus*, quædam ex *Commentariis Academiæ Petropolitanæ*, alia aliunde elicuimus. Unde singula excerpta sint docet uniuscujusque Dissertationis margini adfixa inscriptio.

His autem omnibus, quæ jam Tua dici poterant, quanquam non satis essent tua antequam in unum cogerentur, duo accedunt Tibi, quisquis es qui studio mathematico delectaris, gratissima futura. Primum, Lectiones de Calculo integralium, Parisiis olim in usum Nob. *Marchionis* HOSPITALII conscriptæ, quæ quidem in manibus nonnullorum versabantur & quasi custodiebantur, necdum tamen in vulgus exierant: alterum Schediasmata multa varii argumenti, nunc primum e Nostri scriniis educta, quæ quanti sint pretii malumus Te, Lector, ex eorum lectione judicare, quam ex Auctoris plus æquo suas opes extenuantis verecundia. Sint quædam, ut ipse vocat, juvenilia; at in his BERNOULLII juventutem agnosces: Et quæ tanquam in chartam cursim conjecta

elevat, multis aliorum Scriptis perpolitis fructuosiora invenies.

Utinam modo hæc ἀνέκδοτα in manus nostras aliquanto citius venissent, ut suo quodque ordine collocari & ad alias agnatasque Dissertationes referri potuisset. Etenim, quæ collegeramus Numeris distinguenda, atque ordine disponenda fuerunt: In ea vero dispositione, vel rerum ordo, vel temporum servandus videbatur. Et erant sane rationes quæ istam, erant quæ illam distributionem suaderent. Omnibus tandem diu perpensis, Numeros nostros secundum tempora, quibus in publicum emissi sunt, digerere satius visum est: sive quod sic positi historicam veluti Tabellam Geometriæ recentioris exhibeant; & hac ratione melius inventionum fontes atque gradus indicentur, sæpiusque appareat qua data occasione, qua cogitationum serie, quo ratiociniorum contextu, quibus aliarum propositionum auxiliis nova veritas detecta sit; id quod ad Artem inveniendi promovendam permagni momenti est: sive quod aliter Opuscula non pauca, quæ diversa sæpe capita complectuntur, in partes secanda & quasi lanianda fuissent; id autem nefas duximus. Quo tamen, servata ratione temporum, & ipsæ res, quantum fieri posset, nexu quo-

quodam colligarentur, ad calcem plerorumque Numerorum notam adjecimus indicem Numeri alterius qui præcedentis veluti continuatio est. Sic fit ut, his notis monitoribus aut ducibus, nullo negotio possis Dissertationes, quarum eadem materia est, ex ordine singulas evolvere.

Bernoullianis Operibus, ut inter se cohærerent aptius & melius intelligerentur, esse intermiscenda Schediasmata quædam aliunde supmta censuerunt amici quidam nostri rerum harum peritissimi. Controversias enim, aiebant, quæ multæ Auctori cum doctis intercesserunt, quomodo cognosces penitus, nisi quicquid in utramque partem dictum est audiveris? Et animadversiones in Scriptum aliquod legere quid attinet, nisi Scriptum ipsum habeas ante oculos? Paruimus amicorum monitis, hisque auctoribus non dubitavimus id cum BERNOULLIO consociare sine quo BERNOULLIUS non satis perfecte intelligeretur: Eoque libentius hoc amplexi sumus consilium, quod aliter Te, Benevole Lector, ad libros rariores & magno pretio comparandos amandare non semel necesse fuisset. Titulum tamen Operis nunquam obliti sumus, ac veriti ut in nimiam molem excrescerent

hæc volumina, aliorum Scripta *Bernoullianis*, nisi parce & restricte, non adjunximus; quæ longiora fuissent, vel decurtata dedimus, vel omnino rejecimus; neve cum propriis aliena confunderentur, ista minoribus litteris imprimi voluimus.

Doctus sermones utriusque linguæ, Noster Latine Galliceque scripsit. Ambiguum habuimus, utrum ea, ex quibus iste liber conflatus est, Opuscula sua, qua conscriptum est unumquodque, lingua edere, an exhibere Latine omnia vel omnia Gallice præstaret. Sunt enim quibus placuisset magis consensus quidam & veluti sermonis unitas. Vicit tamen aliorum sententia, vetantium ne pro Scriptis *Bernoullianis* daremus versiones ab Auctoris mente forsan aberrantes. Sane nonnulla sunt, quæ minus commode Latinis propriisque vocabulis redderentur, qualia quæ ad Manuariam nauticam pertinent; & quæcunque Latine scripta sunt Gallice vertere minus aptum videbatur. Quoniam vero ex eruditarum ac prope universalium linguarum numero jam sunt & Gallica & Latina, [nam inter Eruditos qui non intelligant utramque paucos esse arbitramur;] credidimus, in tanta rerum copia & argumentorum dissimilitudine, futu-

futurum ut aures vel delicatissimæ sermonis varietate non offenderentur.

Monendus es præterea, Lector Amice, in usu characterum signorumque algebraïcorum, secutos esse nos fere semper *Leibnitianum* morem, qui typothetis commodior minuit errandi periculum; quam ob rem a plurimis nunc usurpatur. Itaque multiplicatio uno, divisio duobus punctis interpositis notatur; proportio, hæc enim rationum æqualitas est, æqualitatis signo indicatur; pro vinculis tam radicum, quam productorum aut quotorum, quæ olim incertis linearum super litteras ductibus exprimebantur, rectius unci, aut parentheses adhibentur: quod ulterius exponere, cum pervulgata sint & jam usitatissima, nihil necesse est.

Cæterum, ut emendate prodiret Opus, quanta absentes potuimus diligentia providimus: maculas non paucas, quibus adspersæ sunt editiones priores, delevimus; quæ oculorum aciem fugerunt, vel Operariorum incuria inter excudendum admissa sunt menda, ea ut ipse tollas rogamus: Indices, tam Opusculorum singulorum quam rerum in toto Opere præcipue notandarum, ut adjicerentur curavimus.

Tu,

Tu, quanto ſtudio Tua cauſa labor iſte ſuſceptus a nobis eſt, tanta fructum ejus humanitate accipe, & noſtros qualeſcunque conatus proba. Vale. Dabam GENEVÆ, Cal. Mart. 1743.

N°. I. DISSER-

N°. I.

DISSERTATIO DE EFFERVESCENTIA ET FERMENTATIONE

Nova Hypotheſi fundata,

Quam

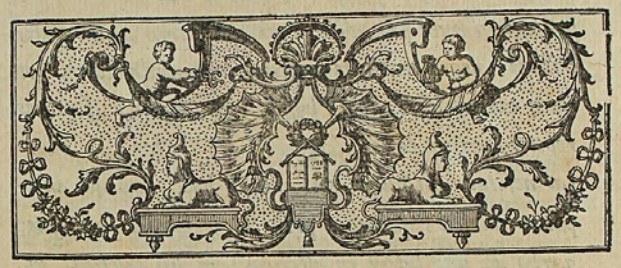
Publice diſcutiendam exhibuit

JOANNES BERNOULLI, BASIL.

AUCTOR.

D. 19 Septembr. Ann. CIↃIↃCXC.

Edita primum BASILEÆ 1690. iterum VENETIIS 1721. tertium, NEAPOLI 1734.



PRÆFATIO.

JAMJAM *mihi videor videre quosdam Delicatulos appositam hanc crambem toties, nedum bis, coctam adeo fastidientes, ut, ne in faciem respuant, verear; fateor meis & ipsis faucibus non arrisisse, ipsimetque coquo nauseam movisse;*

Namque inamarescunt epulæ sine fine petitæ.

Sed quid faciendum? scio vilissima quoque edulia, si novo modo parentur & condiantur, tenellis alioquin palatis appetitum ciere. Hac itaque spe fretus,

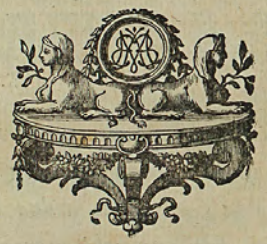
præsentem mihi præ aliis selegi materiam, utut satis tritam, nec a novitate multum commendabilem; tot enim extant libri, tot Physici, tot Chymici Auctores reperiuntur ea de re disceptantes, ut Lector quo se vertat nesciat; an hunc, vel illum, huic, vel isti anteponat dubitet, quemque prius legat hæreat suspensus: verbo ab uno latere in alterum tam diu fluctuet, ut, cum tandem omnes evolverit, oleum & operam perdidisse se pœniteat. Hic enim videas, qui rem suam rationibus & argumentis nescio quibus defendere satagunt; alios, qui contrarium docent auctoritatibus; alios, qui ab utraque parte discedentes, merces suas, nitido verborum mangonio obductas divendere conantur; paucis dicam, omnes fere dissentiunt, nec conveniunt nisi in hoc, quod pleraque eorum (ne dicam omnium) principia & hypotheses adeo sint obscuræ, confusæ, & imperceptibiles, ut iis superstructa ratiocinia Chimæram repræsentare videantur. Sed quid ita commoveor? quid alios increpo? agant alii quid velint, quid ad me? Jam audio oggannientes: Tune solus

lus omnibus numeris perfectus es? Tu rem nobis trades inculpabilem? Ecquis est iste, cujus

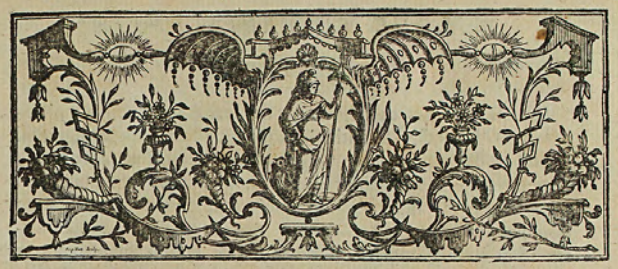
---- ---- ---- longe vicit sapientia cunctos?

Est sane rara avis in terris, fateor, silentium modo! silentium! compescite strepitum, quid ita vehementer in me effervescitis? Dicam quid sentiam; dari quidem Viros eruditos & summa celebritate conspicuos, quos absit ut comprehendam sub numero modo memoratorum & de quibus non nisi debito honoris & venerationis cultu mihi sermo erit; interim tamen materiam hanc, quam pro ingenii modulo explanandam suscepi, ideo ab illis imperfecte nobis traditam & insufficienter in ejus causam investigatum esse credo, non quod eorum captum excederet, sed potissimum quod sua ingenia, nunquam non gravioribus negotiis distrahi solita, ad magis ardua applicarent. Cum itaque Viri docti eam nobis mancam & mutilam reliquerint; Pseudo-physicorum vero & Pseudo-Chymicorum sententias satis confusas omnes corrigere & examinare velle, difficilius foret, quam Augiæ stabulum

bulum purgare : liceat ergo & mihi ſententiam meam in lucem proferre, quæ, an nova ſit, neſcio; hoc ſaltem ſcio, nullum hactenus in manus incidiſſe Auctorem eam in totum amplectentem. Si forte, Benevole Lector, novum hoc condimentum crambes hujus palato tuo placuerit, bene eſt; ſin minus, placeat ſaltem coquus. Vale.



DISSER-



DISSERTATIO
DE
EFFERVESCENTIA & FERMENTATIONE.

§. I.

FFERVESCENTIA, Ebullitio, ab *effervescendo*, *ebulliendo* Græcis dicitur βράσμα vel βρασμός, a verbo βράζω, *ferveo*, *bullio*. Fermentatio vero videtur etiam nomen profectum a *fervendo*, Græce ζέσις, hinc Fermentum in Sacra Scriptura appellatur ζύμη vel ζύμωμα quasi a ζέω, quod itidem ferveo significat; propter hanc rationem potus ex hordeo paratus, quem nos cerevisiam appellamus, Græcis dicebatur ζύθος, quia ope fermentationis conficitur; adeo ut inde liqueat, si vel ullo modo ab etymologia verborum argumentandum sit, Effervescentiam a Fermentatione, contra quamplurium sententiam, formaliter (ut loquuntur) non differre; quod tamen, in subsecuturis, solidioribus argumentis demonstrabo.

II.

II.

Peracta nominis descriptione, transeundum est ad definitionem rei. Per effervescentiam itaque hic non intelligitur, animi subitanea illa passio, quæ vulgo *ira* vel *excandescentia* vocatur; sic enim *irascentes* dicuntur *exæstuare*, *effervescere*, quorum quasi mens exæstuat, hinc Virgilius passim hominem valde iratum nominat *fervore furentem*, & alibi *tumida qui fervet ab ira*: forsan ideo irati *effervescere* dicuntur, quia eorum sanguis præter modum per totum corpus citatior currit, incalescit, ebullit, intumescit & sic veram effervescentiam subit; unde facies intense rubet, venæ turgent, oculi scintillant, vultus eorum est torvus & minax, dentibus frendent, ore spumant, calcant humum &c. Omnes hæ actiones, quæ oriuntur ab effervescentia totius corporis, primario agnoscunt pro causa passionem animi; ut itaque improprie loquendo, & sumendo causam pro effectu, animus ab ira *effervescere* & quasi ebullire dicatur.

III.

Missa autem hac effervescentia, progrediendum est ad propositum. Vera itaque Effervescentia physica & Fermentatio ita definiri potest; quod nempe sit *irregularis & intestinus partium corporis misti motus, solito intensior, nonnunquam cum, nonnunquam sine caloris sensu perceptibilis.* Quod si motus iste peragatur cum concitatissima ebullitione & stridore, subitoque incipiat & cito pereat, vocatur *Effervescentia.* Si vero lente tantum incipiens, sensim stadium suum absolvat, nec notabiliter ebulliat, quamvis bullulas emittendo diutius perseveret, vocatur *Fermentatio.* Non sine ratione autem in definitione requisitum est, ut corpus, quod Effervescentiam vel Fermentationem subire debet, sit mixtum ad minimum ex duobus aliis; corpus enim simplex (per *corpus simplex* hic intelligo, non quod per totum ex particulis homogeneis est conflatum, sed quodlibet corpus quod per se semper manet in eo statu in quo est) nunquam effervescet vel fermentabitur; quippe omne quod movetur, movetur ab alio; est ergo necesse, ut, si corporis simplicis particulæ solito rapidiores moveri debeant, accedat aliquid novi, quod hunc motum ipsis imprimat; hocce itaque modo non amplius simplex corpus, sed mixtum dicendum erit. Quandocunque igitur Effervescentia vel Fermentatio excitanda est, semper duo corpora sunt conjungenda; quodlibet enim seorsim positum manebit, & servabit statum eum quem habet; nulla enim ratio apparet, cur nunc potius & non prius motum hunc insolitum adeptum fuerit. Nec nos moratur, quod, post vindemias, mustum ex uvis expressum, sine ullo additamento, fermentari videatur, ac si motum a se ipso acquisivisset; ad hoc autem inferius sufficienter respondebitur.

IV.

Ex his patere arbitror, in quonam consistat Effervescentiæ & Fermentationis differentia, si unquam talis sit dicenda; aliter enim haud differunt quam gradu, vel, ut loqui solemus, secundum magis & minus. Effervescentia namque nihil aliud est quam intensior Fermentatio; debilior vero & remissior Effervescentia est Fermentatio dicenda. Sunt quidem aliqui, qui longe majorem differentiam inter illas constituunt; verum hoc nihil impedit; illorum quippe hypotheses & principia cum a meis sint aliena, fieri non potuit, quin in diversas quoque abierint opiniones; quanquam illos non redarguam, sed permittam cuique suum pulchrum esse; præsertim cum judicium sit penes Lectorem: interim tamen aliam differentiam inter Effervescentiam & Fermentationem non agnosco, quam modo memoratam. Anne causa deflagrationis repentinæ pulveris pyrii sicci, ex aliis fundamentis petenda est, quam ejusdem humectati & in massam subacti, deflagrationis successivæ? Vix credo; pulvis enim pyrius siccus ob eandem causam accenditur, ob quam humectatus; quamvis ille, ob siccitatem, subito flammam concipiat & sub-

bito evanescat, hic vero, ab humiditate impediatur ne tota massa simul comburatur; unde hic ignis per aliquod tempus durat: est ergo dicendum, duas has deflagrationes solo gradu differre; illam videlicet esse subitaneam & violentam, hanc autem successivam & debilem. Non aliter & Effervescentiam a Fermentatione differre puto: Si etenim duo corpora, quæ hanc vel illam excitare solent, sint subtilia & facile permiscibilia; statim ac congressa fuerint, efficient Effervescentiam; quia a mutua actione & retroactione non impediuntur, ob facilem permixtionem corporum; hinc motus, quem excitant, cito fit & cito perit: Si vero corpora congredientia sint impura, crassa & non facile penetrabilia; Fermentatio solummodo generabitur; quia actionem suam non primo impetu & simul exerere possunt, sed cum sensim tantum sibi invicem permisceantur, oritur diuturnus ille & debilis motus; qui nobis sub Fermentationis nomine venit.

V.

Quæ cum ita se habeant, & viderimus Effervescentiam a Fermentatione parum, aut nihil, differre; Lectorem Benevolum commonefactum volo, ut, si quid generale, vel utrique commune, in posterum, brevitatis ergo, de uno solo dicatur, pariter & de altero intelligat. Ideoque, ut in orbitam redeamus, videndum quomodo Effervescentia fieri possit. Fit autem illa, vel ex *duorum liquidorum*, vel ex *liquidi & solidi*, vel ex *duorum solidorum* permixtione; omnes enim ad hæc tria genera referri possunt: ubi notandum, quod priora duo sint vulgaria, & solo permiscendorum congressu, nullo agente extrinseco, Effervescentiam parere possint; ultimum vero genus non admodum hactenus cognitum est, quin potius aliquibus plane impossibile videtur: concipere enim nequeunt, qui fieri possit, ut duo solida si permisceantur (puta cum sint in pulverem contrita) motum producere possint, cum nec ipsa motum habeant: verum hoc est; ex sola mixtione nunquam orietur Effervescen-

vescentia, sicuti in liquidis quæ proprio motu intestino gaudent; ideoque, ad illam promovendam, opus est motore externo, ut ex subsequentibus fusius patebit.

VI.

Verum enimvero, antequam in triplicis hujus Effervescentiæ causas inquiramus, necesse est, ut ejus totum processum & historiam præliminemus. Quod ergo attinet ad Effervescentiam primi generis, illa sic peragitur: nimirum cum duo liquores effervescendo idonei invicem commiscentur, subito oritur innumerabilium bullularum superiora petentium congeries, cum vehementi stridore, ac si super rapidissimo igne coquerentur, nonnunquam intensus quoque sentitur calor, cum vapore & fumo attollente se in auras: interdum vero vix, ac ne vix quidem, incalescunt: postquam iterum deferbuerunt, (quod cito fiet) tum interdum in fundo conspicitur sedimentum simile materiæ cuidam terrestri, quod *præcipitatum* a Chymicis vocatur; interdum vero plane nihil videtur, adeo ut liquor mixtus, post effervescentiam, tam purus, tam pellucidus existat, ut ante, quinimo ne vestigium quidem ebullitionis præteritæ appareat. Effervescentia secundi generis, quæ oritur ex conjunctione liquidi & solidi, hoc modo fit: in ipso congressus momento, incipit ebullitio cum spuma, strepitu, & nonnunquam cum insigni calore & fumo ascendente; solidum, si non adeo compactum & grave sit, statim dissolvitur, ejusque fragmenta huc illuc disperguntur; alterum ascendit magno cum impetu, alterum ad fundum præceps ruit; unum alteri reluctatur, tendente hoc dextrorsum, altero sinistrorsum; liquor, qui modo pellucidus erat, induit pallidum colorem & turbulentus evadit; jucundum hocce spectaculum aliquanto diutius durat quam præcedens effervescentia, donec tandem omnia labore (ut sic dixerim) fessa quiescant; tum demum, solida materia in pulverem dissoluta dispersim in fundo conspicitur, & liquor pristinam pelluciditatem acquirit; ubi tamen notandum, quod non-

nonnunquam ſolidum illud, ſi verbi gratia, ſit metallum quoddam, adeo minutim diſſolvatur, ut liquori per totum immiſceatur, ſine notabili pelluciditatis diſpendio, ut quis putaret metallum durante ebullitione in auras avolaſſe, aut liquidi naturam induiſſe, cum tamen liquori formaliter adhuc inſit, quemadmodum ex præcipitatione patet. Quod ad tertii generis Effervescentiam attinet, quia unico tantum experimento ea ad oculum demonſtrari poteſt, differemus ejus hiſtoriam, donec ad experimenti ipſius explicationem perveniamus.

VII.

His ita recenſitis, procedamus ad cauſam mirabilis hujus Effervescentiæ inquirendam: quod ut eo felicius præſtemus, ante omnia neceſſe erit, ut præmittamus principia naturalia ſatis intelligibilia, & ab omnibus facile concedenda; ex quibus dein, more mathematico, rite demonſtrentur quæ demonſtranda ſunt, & ad leges mechanicas revocentur ſingula totius operationis phænomena. Quæ enim naturaliter peraguntur, quid opus eſt ut ipſis præternaturale quid attribuatur? ſicuti, ad Effervescentiam commode explicandam, quidam fecere, qui qualitates occultas neſcio quas conſtituerunt, ex quibus indiſcriminatim omnium rerum cauſas deduxerunt; generale ſane principium, & compendioſa philoſophandi methodus, ad quam addiſcendam triennium non requireretur. Sunt & aliqui, qui rem acu tetigiſſe putant, cum dicunt; dari certam quandam & innatam antipathiam inter corpora ad effervescendum opportuna; quæ cum conjunguntur, ob perpetuam inimicitiam unum alterum ſupprimere conari; hinc oriri

Iſta repentino ſurgentia prælia motu.

Sed, quæſo, quis corporibus illis poteſtatem præliandi indidit? quis claſſicum cecinit? annon vincendi deſiderium, pugnæ cupiditas, & odium inexpiabile, quo ſe mutuo proſequuntur, ſunt paſſiones animi? corpora ergo inanimata unde acquirunt illas?

illas? Jam ſcio; reſident, abſque omni dubio, in uno corpore, homunculi illi Pygmæi dicti, quos Plinius olim in extremis oris Indiæ quæſierat: hi cum gruibus congredientes, quæ nunc certo certius in altero latitabunt corpore, ſævum hunc & martialem conflictum excitant; non ſecus ac hodie fieri videmus, cum agmen Gallorum cuidam Germanorum turmæ occurrit, unde forte cruenta hæc oriatur effervescentia: ſed ridicula hæc ſunt commenta, aniculis digniora, quam ut in foro Philoſophico circumferantur.

VIII.

Interim linquamus has Veterum nugas, & diſpiciamus, quid ea de re Recentiores Chimici ſenſerint: Quorum plerique, uti jam in præfatione innui, rem adeo obſcure explicarunt, ut vix credibile ſit illos, quid ipſi dixerint, ſciviſſe; eorum quippe principia, quæ captu difficiliora ſunt quam corpora quæ ex iis conſtant, adeo ſunt confuſa, ut ſi interrogentur quid ſint, clare definire non poſſint. Tantum abeſt, ut de illis claram & diſtinctam ideam habeant, ut primis etiam viis, cum ratiocinari incipiunt, hæreant atque idem per idem (ut dici ſolet) explicare fruſtra conentur. Quæras enim ex quodam quid ſit Effervescentia? Reſpondebit: *Eſt motus ille præternaturalis, ortus ex congreſſu alcali & acidi.* Sed quid eſt alcali? *quod cum acido effervescit.* Quid ergo acidum? *quod cum alcali effervescit:* hem! quam ſolide. Vides ex illis, quam firmo fundamento Chymicorum principia inſiſtant, & quid de cæteris judicandum; quid de particulis ſalinis, quid de ſulphureis, quid de mercurialibus, quid de nitroſis; quid & de mixtis, ut de alcalicis-lixivialibus, de acido-ſulphureis, de nitro-aëreis, & quid de infinitis aliis: quæ omnia, ſi unquam in rerum natura exiſtant, mente tamen nec concipiunt, nec aliis quid ſint patefacere poſſunt. Dolendum ſane eſt, quod, cum Chymia ſit una ex præſtantiſſimis artibus & ſcientiis, Naturæ indagatores illam non in meliorem formam redegerint magiſque excoluerint. Scio qui-

quidem sola horrenda & monstrosa nomina quosdam absterruisse, ut ex iis, tanquam ex ungue leonem, arduum hujus scientiæ aditum patere crediderint: optandum itaque esset, ut barbaræ hæ voces eliminarentur, vel saltem recte definiretur quid per illas sit intelligendum; &, cum omnia ordine peragantur, nova quoque principia physica constituerentur: quo facto, dubium non esset, longe mirabiliora ex naturæ inexhausto mysteriorum fonte erui posse. Hoc mecum perpendens, vires meas experiar, annon & præsens negotium mechanicæ legibus explicare possim; ad quam normam, aliarum operationum Chymicarum causas pervestigare mihi difficile non esset. Nescio quidem quid sit alcali, nescio quid sit acidum, vel alia Chymicorum nomina: pono primo nihil ejusmodi existere, sed demum, an, & quid, ista sint omnia, ex positionibus naturalibus, & nunquam non facile concedendis, deducere conabor.

I X.

In hunc finem postulabo sequentia, tum per se satis nota, tum deinceps demonstranda: 1°. Aërem esse corpus valde fluidum & vi elastica præditum. 2°. Aërem compressum, & sui juris factum, qua data porta erumpere, seque in majus spatium extendere. 3°. Aërem sub liquore quovis contentum, nulloque alio obstaculo impeditum, sub forma bullæ sursum premi ad summitatem usque liquoris. 4°. In quovis corpore, & in qualibet ejus particula, contineri aliquid aëris & quidem compressi; hoc verum esse infra demonstrabo. 5°. Motum particularum concitatiorem excitare calorem. Præter has autem hypotheses generales, suppono & hæc specialia. 6°. Quod duo corpora, quæ invicem commixta effervescentiam producere debent, sint ex certis particulis ab aliis figura distinctis conflata; ideoque 7°. quod particulæ unius corporis sint tetraëdra, quæ nempe constant ex quatuor trianguliis isopleuris; Et hoc corpus voco *agens*. [*Fig.* 1.] 8°. Quod particulæ alterius corporis sint ex tetraëdris

Tab. I. *Fig.* 1. 2.

dris bases sibi mutuo obvertentibus compositæ; Et hoc corpus voco *patiens*. [*Fig.* 2.]

X.

His præsuppositis, difficile non erit veram, seu saltem probabilem, causam Effervescentiæ inquirere. Si enim duo corpora ad effervescendum opportuna, quorum unum *agens*, alterum *patiens* nuncupavi, congrediuntur, & eorum particulæ invicem intime miscentur; fit, ut quælibet particulæ corporis *agentis*, quas in hyp. 7. tetraëdricas posui, in quaslibet particulas *patientis*, figuram in hyp. 8. descriptam habentes, impingantur, & quia illarum particularum anguli prominentes, in harum sinuosos & concavos, cum impetu, cuneorum instar, infiguntur [*Fig.* 3.] aliter fieri nequit, quam ut particulæ corporis *patientis*, tantam vim sustinere non valentes, per medium diffindantur [*Fig.* 4.]; quo facto, aëri compresso, in ea, per hyp. 4. contento, exitus paratur, & tunc a carcere vinculisque suis liberatus, magno strepitu, per hyp. 2. erumpit, majusque spatium occupat, tandemque, per hyp. 3. sub forma infinitarum bullularum, ac si ab aqua ebulliente erumperet ad superficiem usque liquoris (si alterutrum ad effervescendum aptorum, vel utrumque, sit corpus liquidum) ascendit, ubi spumam, qualem in aqua saponis particulis saturata vehementerque quassata conspicimus, excitat; hinc mirum non est, quod ob aërem subito se expandentem, & e particulis exeundo has ad invicem allidentem, intensus nonnunquam producatur calor, per hyp. 5.

Tab. I. *Fig.* 3. 4.

X I.

Et hæc generalia phænomena communia sunt fere omnibus Effervescentiis, quorum causas ex his hypothesibus breviter &, ni fallor, satis perspicue me explicasse confido: interim obiter advertendum, quod Chymicorum acidum nihil aliud sit, quam id quod ego voco corpus *agens*; illorumque alcali mihi sub corporis

poris *patientis* nomine veniat : ſimulque apparet, cur poſt efferveſcentiam, ſi acidum & alcali, quæ nunc conjuncta ſunt, rurſus ope ignis, aut alia aliqua re ſeparentur, acidum illud cum alio alcali, quod nondum efferveſcentiam paſſum eſt, iterum quidem efferveſcere poſſit, alcali vero, quod ſemel efferbuit, cum alio acido nunquam amplius efferveſcat : evidens namque eſt ex hypotheſibus meis, acidi (liceat illas in poſterum ſic vocare) ſeu, quod idem eſt mihi, corporis *agentis* particulas efferveſcendo non mutari, ſicuti alcali vel corporis *patientis* particulæ mutantur ; ſiquidem illæ, poſtquam has diffregerint, integræ manent, ideoque ad ulterius efferveſcendum adhuc idoneæ ; hæ vero, quia ab illis diffringuntur, & aër intra contentus excluditur, mirum non eſt, ſi, poſt unam efferveſcentiam, nullam amplius efficere queant : verum nihilominus tamen eſt, quod nonnunquam (quamvis raro) acidum, æque ac alcali, poſt efferveſcentiam inidoneum reddatur ; illud autem inde fit, quando particulæ alcali ſunt nimis duræ, vel contra particulæ acidi ſunt nimis molles & debiles, ut efferveſcendo, & impingendo, anguli ejus abradantur, vel ſaltem obtundantur ; ex quo ſequitur, omnem ſimul etiam ejus vim efferveſcendi in poſterum obtundi. Perperam itaque Cl. BONTEKOE, *in ſuo Tract. de motu*, ſtatuit, non ſolum acidum, ſed & alcali, poſtquam efferbuerunt, ſi rurſus ſeparentur, vim ſuam efferveſcendi retinere ; cum hîc de ſolo acido id oſtenſum ſit : idcirco Cl. Vir ex hoc non recte argumentatur ; *magnam intercedere differentiam inter efferveſcentiam & fermentationem*, propter hanc rationem, *quia acidum & alcali poſt efferveſcentiam ſeparata iterum efferveſcant, quod vero inter particulas ex fermentatione ſuperſtites fieri nequeat.* Sed, tanti Viri pace ; nam præter hoc quod jam oſtendi, alcali poſt primam efferveſcentiam amplius non efferveſcere (niſi forſan ejus particulæ non omnes, a particulis acidi, in prima efferveſcentia, ſint diffractæ, quæ deinde ſecunda diffringi, & de novo efferveſcentiam generare poſſunt ; ſed hæc altera primam non ſpectat, quia ſaltem illæ particulæ, quæ in prima efferbuerunt, in ſecunda id amplius non faciunt)

faciunt) addi poteſt & hoc, quod ideo, poſt quaſdam fermentationes, particulæ ſuperſtites amplius fermentari nequeant ; nempe, ob eandem rationem, ob quam alcali particulæ, poſt efferveſcentiam, ulterius non efferveſcunt : nam iſta corpora, quæ ſine additamento, fermentari videntur, ut, ex. gr. vinum muſtum, hordeum in aqua maceratum, & alia ejuſmodi generis, ſolas alcali, ſeu ut ſupra nominavi, corporis patientis particulas in ſe habent ; ideoque, ad fermentationem producendam, opus eſt ut acidi, ſeu corporis agentis particulæ, extrinſecus adveniant, quæ illas diffringant, & fermentationem excitent : has autem merito ex aëre externo & ambiente derivamus ; ſiquidem variis experimentis conſtat, illum multis acidi particulis refertum eſſe : hinc, cum muſtum vel aliud fermenteſcibile aëri exponitur, ſenſim ejus particulæ acidæ ſeſe in poros muſti inſinuant, & cum hujus particulis alcalicis conjunguntur, illaſque modo ſupra commemorato divellunt, ut aëri incluſo exitum præbeant ; quo fit, ut putemus muſtum per ſe ſolum, ſine additione alterius, fermenteſcere : hinc etiam evenit, ut, poſt fermentationem primam, ulterius non fermentetur, quia acidi nullas, ſed tantum alcali particulas, in ſe continet ; jam ſupra autem demonſtravi alcali particulas non efferveſcere poſtquam ſemel efferbuerint.

XII.

Hæc & multa alia, quæ in efferveſcentia obſervantur, ex his hypotheſibus commode explicari poſſunt : ſolummodo itaque reſtat, ut videamus, an illæ quoque rationi & veritati conveniant, & quibus argumentis id probari queat. Quod ergo attinet ad duas ultimas hypotheſes ſpeciales, quibus nempe particulis acidi & alcali, hanc, & non aliam, figuram aſcripſi ; fatendum quidem eſt, nullo experimento id poſſe demonſtrari, ob exiguitatem particularum, quæ omnem aciem oculorum effugiunt & adminiculum microſcopiorum eludunt : ſufficit itaque mihi, ſi talem ipſis attribui figuram, quæ maxime convenit ad naturam effer-

 veſ-

vescentiæ explicandam, dummodo nec rationi, nec experientiæ repugnet : nam sicut Astronomi illam hypothesin Systematis Mundi pro vera amplectuntur, quæ phænomenis cœlestibus, & siderum motui explicando, optime conducit; quamvis certis & invictis argumentis veritatem illius demonstrare non possint; sed tam diu illam retinent, donec alia probabilior & commodior in lucem prodeat : liceat sic etiam, & hic ponere, quæ experientia quidem probari non possunt, illi tamen nec etiam adversantur. Interim rationes non desunt, ob quas posui particulas illas sic, & non aliter, figuratas esse. Particulæ enim acidi debent primo esse angulosæ, quia hoc patet ex gustu; nam si essent læves, vel teretes, linguam non ita vellicarent & quasi pungerent : deinde, ab omni parte æqualiter angulis debent esse instructæ; nam, si alicubi essent læves, sicuti conus, posset fieri ut, acido cum alcali congrediente, nulla effervescentia excitaretur; possent enim acidi particularum facies non angulosæ impingere in particulas alcali, & sic has non diffringerent, nullamque consequenter effervescentiam parerent : quod autem posuerim illas esse tetraëdra, & non cubos, vel octaëdra, vel alia corpora regularia, quæ etiam undiquaque æqualiter angulis suis sunt munita; hoc ideo factum est, quia tetraëdrum, inter corpora regularia, acutissimos habet angulos, & sic ad diffringendum aptissimos : nec etiam commodè possunt esse corpora irregularia, ut ex. gr. pyramides; nam quo anguli verticales in pyramide acutiores sunt, eo anguli ad basim sunt obtusiores; & sic posset accidere, ut anguli obtusi impingerentur in alcali particulas; quo rursus effervescentia plane non, aut saltem difficulter, perageretur : manet ergo, quod particulæ acidi, vel corporis *agentis*, sint tetraëdra. Quod autem particulæ alcali, vel corporis *patientis*, sint ut supra hyp 3. posui (concedendum quidem est, quod non necesse sit, ut exacte constent ex tetraëdris bases sibi mutuo obvertentibus; nam loco tetraëdrorum ponere possem quaslibet pyramides rectas triangulares, dummodo forment angulos sinuosos, qui commode excipere possint angulos prominentes particularum acidi) eodem

eodem fere modo demonstrari potest : nam sicuti particulæ acidi undiquaque debent habere angulos prominentes, sic particulæ alcali circumcirca angulis sinuosis debent esse instructæ; ut, quocunque acidi particula impingatur in particulam alcali, inveniat locum, a quo, ceu in sinum, recipiatur, & facilius eam diffringere possit.

XIII.

Omnia hactenus posita rem, si non omnino certam, saltem probabilem reddunt : interim quod ad priores hypotheses generales attinet, illæ, procul dubio, prolixa demonstratione non indigent; siquidem ab omnibus pro veris recipiuntur; sola quarta excepta, quæ scrupulum movere potest : *quod* nempe *in corporibus & eorum particulis contineatur aliquid aëris, & quidem compressi.* Huic tamen, si rem attentius consideremus, & ratio & experientia suffragatur : nam cum quodlibet corpus suos poros habeat, necesse est, ut pori illi aëre jam sint repleti, vel non; si prius, habeo quod volo; si posterius, aër se demum in poros insinuabit, si nondum insit : quare? quia aër ubicunque ab alio aëre nullum obstaculum inveniens, in eum locum, ope sui elaterii irruit, & quod ab aëre vacuum est omnino replet, sicuti videmus in vase (ut BOYLE vocat) recipiente evacuato, cui si minimum foramen infligatur, dito citius aër externus perrumpet, spatiumque totum recipientis mole sua occupabit. Dantur quidem corpora (quod negandum non est) quæ poros adeo subtiles habent, ut ne unica particula aërea penetrare possit, qualia sunt vitra, lapides, gemmæ, metalla, & alia duriora corpora : nihilominus tamen in his aër jam inest; nam, cum nullum corpus tam perfecte incipiat generari, ut jam est in statu perfectionis; dici potest, quod ejusmodi corpora, in principio generationis, sint admodum mollia, laxa, & rara, & eorum pori satis patuli, & ampli, ut aërem externum recipere possint; quo fit ut, in continuatione generationis, etiamsi pori exteriores angustentur,

aër nihilominus in cellulis internis maneat, & proinde, durante generatione, aër intrinſecus condenſetur; quia, ſi pori interiores incipiunt coarctari, & aër inſitus, ob poros externos jam valde anguſtatos, amplius exire nequit; neceſſe eſt, ut & aër ipſe interior in minus ſpatium cogatur, ideoque externo denſior evadat; non ſecus, atque aër naturalis fluiditatis in veſica contentus, ipſius veſicæ compreſſione, fit denſior, ſeu ad minus volumen redigitur. Hinc itaque contingit, ut hæc corpora, cum ſunt in ſtatu ſuo perfectionis, etiamſi ſumme dura ſint, nihilominus aërem compreſſum contineant.

XIV.

Verum, præter has rationes, ſuppetunt etiam experimenta; quibus exiſtentia aëris in corporibus probari poteſt. Videmus enim, ſi aqua, vel alius liquor, ſuper igne coquatur, bullulas excitari; manifeſto certe aëris intra latentis indicio, qui ope ignis dilatatur, omniaque vincula, quibus retinebatur, ſolvit, &, ob levitatem, ad ſuperficiem uſque fertur, ubi tales bullulas format: hinc fit, ut piſces in aqua quæ ſemel ebulliit, vivere non poſſint, ob defectum nempe aëris, qui in ebullitione omnis exhalavit; aërem enim & piſces haurire æque neceſſe eſt, ac cætera animalia; in hunc finem eorum branchiæ conditæ ſunt, ut, illarum ope, aërem, qui ad vitam ſuſtentandam neceſſarius eſt, ab aqua ſecernant, uti de hac re recte ſenſit Cl. MAJOWIUS. Similiter liquoribus aërem ineſſe experimenta Boyliana confirmant: ſi enim in vaſe recipiente (ſic apellat R. BOYLE) liquor aliquis includatur, ex quo deinde, ope antliæ pneumaticæ, aër extrahatur; ſtatim videbimus innumeras bullulas aëreas (ſicuti in aquæ ebullitione) ex liquore prorumpere: nimirum, cum aëris externi preſſio ſublata eſt, particulæ aëreæ, in liquore hinc inde diſperſæ, ob vim ſuam elaſticam ſe extendunt, &, cum antea inconſpicuæ eſſent, nunc in bullulas viſibiles intumeſcunt, ac,

ac, ob modo allegatam rationem, ſummum petunt. Tale experimentum etiam inſtitui poteſt in corporibus ſolidis; ſumatur enim corpus quoddam, ſed non adeo durum, (quale ſunt lutum, creta, ceruſſa & aliæ materiæ terreſtres,) hocque indatur recipienti, &, ut bullulæ exeuntes eo melius conſpiciantur, affundatur aqua; poſtmodum, eodem ut ſupra modo, aër ex recipiente exantletur; quo facto, non ſolum ex aqua affuſa, ſed etiam ex illo corpore bullulas aëreas prodire obſervabitur: ex quo liquido conſtat, multum quoque aëris corporibus ſolidis ineſſe. Hinc etiam ratio petenda eſt, cur corpora duriora, ut ſunt lapis, vitrum, & alia, ſi in ignem injiciantur, diſſiliant & diſrumpantur: item, cur medio æſtatis fervore terra noſtra, aliquibus in locis, rimis & hiatibus quaſi fatiſcat. Hæc omnia, inquam, proveniunt ab aëre, qui in iſtis corporibus latet; nam, cum aër hic interior a calore externo agitatur, diſtenditur & explicatur; tunc, ſibi exitum quærendo, latera pororum magna vi & niſu divellit, & impetuoſe diffringit; ut hac ratione, totum corpus diſrumpatur; vel, ſi non adeo durum & compactum ſit, per rimas ſaltem & fiſſuras, aër interior ita agitatus libertatem ſuam quærat.

XV.

Allata experimenta ſatis, ni fallor, oſtendunt exiſtentiam aëris in corporibus; ſed & alterum nobis oſtendendum eſt, nimirum, quod aër iſte ſit aëre naturalis conſiſtentiæ denſior: hoc autem ſequenti experimento demonſtratur. Sumatur vaſculum, liquore quodam acido ſemiplenum, ut ACDB; & tubus aliquis vitreus EF, altera parte E clauſus, altera vero F apertus, impleatur eodem liquore; hujus vero orificio F indatur globulus G de luto, vel creta, in quibus nempe multæ particulæ alcali inſunt, confectus; ſtatimque indice ſuper orificium F poſito, invertatur tubus, & liquori in vaſculo contento immergatur orificium F; amoto digito, mox obſervabitur magnam effervescentiam excitari, quæ per aliquot horas durabit, TAB. I. *Fig.* 5.

rabit, donec omnis aër intra particulas alcali contentus, solutis vinculis quibus coarctabatur, ad superiora ascenderit, & materia terrestris subsederit; tum demum animadvertetur, aërem hunc, postquam despumaverit, in suprema parte, depresso liquore, magnum spatium E H occupare: quandoquidem autem superficies H liquoris in tubo altior est superficie liquoris in vasculo, erit aër, in spatio E H contentus, aliquantulum rarior aëre externo; proinde, ut fiat ejusdem consistentiæ, opus est, ut aut tubus altius immergatur, aut plus liquoris affundatur, donec interiori superficie interna coincidat cum superficie exteriori; quo facto, erit quidem spatium E H priori paululum contractius, & aër in eo contentus naturalis consistentiæ; nihilominus tamen adhuc majus erit duplo, triplo, quadruplo (pro diversitate materiæ terrestris ex qua globulus conficitur, quæ scilicet plus vel minus particularum alcali in se continet) quam quod tota moles globuli G occupat; quod certum indicium est, aërem istum, cum omnis adhuc in globulo continebatur, multo densiorem fuisse, quam aër externus est: posito enim globulum constare ex una parte materiæ terrestris, & ex una parte pororum, quibus nempe aër condensatus inest; vel, quod eodem recidit, spatium, quod materia terrestris occupat, esse æquale spatio, quod aër in poris contentus replet; si nunc spatium E H sit duplum spatii globuli totius; sequitur, aërem in globulo contentum quadruplo densiorem esse quam est aër externus; si triplum, sextuplo; si quadruplum, octuplo; & sic porro in subdupla ratione: si vero ponatur spatium materiæ terrestris non esse æquale spatio pororum, sed in alia ratione majoris vel minoris inæqualitatis, densitates aëris in globulo æque facile ad calculum revocari possunt; hæc autem hujus loci non sunt.

XVI.

Huic haud multum absimile experimentum instituit Cl. MAJOWIUS, sed in longe alium finem; ut nempe experiretur, *utrum*

utrum aër de novo generari possit; post varia namque experimenta quæ fecit, concludit tandem, hunc aërem, spatium E H occupantem, revera non aërem esse, sed solummodo auram quandam & halitum, qui ex globulo G ab æstu excitatus in tubo ascendit; & sic putavit, ipsam substantiam globuli in hanc auram mutari, sicuti aqua a calore in vaporem muratur. Ast videmus, quod vapor, si colligatur, iterum in aquam convertatur, ejusque naturam induat: aura autem hæc manebit aura, nec amplius in materiam globuli degenerabit: quid ergo dicendum? nihil aliud, quam quod sit aër, condensatus, in poris globuli jam præexistens, nec de novo generatus: habet quippe vim suam elasticam, ut aër naturalis; quod & ipse Cl. Vir non solum fatetur, sed etiam experimento quodam comprobat: anne autem datur aliud corpus fluidum & vi elastica præditum, præter aërem? vix puto. Affert quidem rationem, cur auræ huic naturam aëris denegaverit; quod videlicet experientia edoctus sit, auram prædictam vitæ sustinendæ non esse idoneam: quasi vero, quia vitam non sustentat, iccirco aër non esset: videmus & ipsum athmosphæricum nostrum aërem, tempore pestis, non solum vitæ sustinendæ non idoneum esse, sed prorsus noxium; anne iccirco tum desiit esse aër? absurdum foret hoc dicere. Non negandum quidem est, in spatio E H multas alias particulas, præter aërem, hospitari; quæ forsan, ob impetuosum effervescentiæ motum, ab ipso liquore acido, vel a globulo, abreptæ &, una cum aëre, sursum evectæ fuerunt: hinc mirum non est, si talis aër, istis miasmatibus refertus, & ab animalibus haustus, ipsis vitam conservare non valeat; præsertim cum pateat, & spiritum nitri, & globulum ferreum (quibus Cl. Vir utebatur) multis particulis impuris, & quasi venenatis, scatere, quæ, si per respirationem intro assumantur, massam sanguinis inquinare, mortemque inducere, facile queant: si forte, loco spiritus nitri, adhibuisset alium liquorem acidum benigniorem, ex. gr. spiritum vitrioli, &, loco globuli ferrei, sumsisset terrestrem, ut in nostro experimento; procul dubio animalculum ab isto aëre non interiisset, aut

aut ſaltem vitam diutius protraxiſſet; adeo ut inde colligere liceat, aërem, per ſe, animalculum non interfeciſſe, ſed tantummodo per accidens, quatenus nempe copioſis particulis diverſi generis, & ad vitam conſervandam ineptis, ſcateat.

XVII.

Verum ut noſtræ rei certiores ſimus, videlicet ipſam ſubſtantiam globuli in aërem ab æſtu non commutatam eſſe, ſed aërem revera jam in globulo præextitiſſe, ideoque non de novo generatum, inſtitui poteſt ſequens experimentum. Globuli terreſtris bene exiccati pondus, ante effervescentiam, accuratiſſime ad lancem examinetur; deinde, poſt effervescentiam, cum omnes particulæ globuli ad fundum ſubſederint, tota globuli maſſa, quæ nunc diſſoluta jacet, ſollicite ex liquore recolligatur, & (ut prius) bene exiccetur, tandem exiccatæ materiæ pondus iterum ope bilancis inquiratur; hoc facto, videbimus ſubſtantiam globuli nihil ponderis perdidiſſe, vel ſaltem vix centeſimam partem, quod forſan, durante effervescentia, cum aëre exhalavit: at ſecundum D. MAJOWIUM longe majorem partem ponderis amittere debuiſſet; ſiquidem ex ejus hypotheſi ſequitur, totam molem aëream, tubi ſupremam partem occupantem, ex ſubſtantia globuli fuiſſe abſumptam; ſicque pondus ejus notabiliter fore diminutum, quod tamen eſt contra experientiam. Obiter hic liceat perpendere Cel. *Alphonſi* BORELLI opinionem circa effervescentiam quæ † etiam experimento ſupra allato non admodùm congruit; exiſtimat enim in congreſſu acidi & alcali, cum ebullitio excitatur, ipſius acidi vel alcali particulas celerius moveri, & in gyrum motas aſcendentes has bullulas formare, *particulæ*, inquit *mobiliſſimæ, ſphærice ſe dilatando, ampullas bullularum efformant, non omnino denſas & plenas, ſed valde raras, nempe vacuitatibus grandiuſculis interceptis; Unde fit, ut facile concidant, & ad priſtinum ſpatium anguſtum redigi momento poſſint*: ex quibus clare apparet, Cel. Auctorem cauſam ebullitionis non ab aëre, in particulis alcali

† *Vid. Libr.* de Motu Animalium *Part. II. Prop.* 29.

alcali condenſato, deduxiſſe; cum crediderit, ipſas acidi & alcali particulas, ſaltem quæ admodum ſunt ſubtiles & mobiles, ſe ſphærice dilatare, & in gyrum moveri, ſicque amplius ſpatium acquirere; unde tales oriri bullulas, ac ſi eſſent ab aëre productæ, quamvis non ſint; proinde conſequi putabat, ut, poſtquam motus iſte particularum violentus ceſſaverit, bullulæ hæ iterum concidant, & particulæ, quæ in circulum gyrando illas formabant, rurſus conjungantur cum acido, vel alcali, a quo prius abripiebantur. Sed hoc non adeo veritati conſonum eſſe, liquet ex ſuperiori experimento; ſequeretur enim ex hypotheſi Auctoris, totum ſpatium EH, poſtquam effervescentia peracta ſit, omniſque motus & calor ceſſaverit, a liquore repletum iri; uti hoc ex ejus ſententia quilibet conjicere poteſt: experimur autem contrarium; nam etiamſi per annum in eo ſitu perſiſteret, nunquam tamen ſpatium EH liquore plenum obſervaretur: neceſſario itaque ſequitur, ut ſpatium illud ſit aëre naturali repletum, &, cum aliunde advenire nequeat (nam eum ex ſubſtantia acidi vel alcali generatum eſſe jam rejecimus) in ipſius globuli poris prius inſederit: quod, procul dubio, jam ſatis ſuperque, tum ratione, tum experientia, oſtenſum eſt.

XVIII.

Hac occaſione, mihi temperare non poſſum, quin moneam, quam commode corporum vis elaſtica ex noſtra hypotheſi explicari poſſit; poſito nempe (quod modo demonſtratum eſt) *quod in cujuslibet corporis poris ſit aër incluſus, & quod aër iſte ſit vi elaſtica præditus.* Omnia autem corpora, vel ſunt perfecte elaſtica, id eſt, qua celeritate inciderunt, ea celeritate reſiliunt; vel plane non ſunt elaſtica, id eſt, poſt ictum non repercutiuntur amplius; vel denique imperfecte ſunt elaſtica, id eſt, poſtquam inciderunt, reſiliunt quidem, ſed non ea celeritate qua impacta ſunt. Ad hoc itaque explicandum, intel-

ligatur multarum vesicularum, aëre quam densissime repletarum, congeries communi quodam velamento, undique perforato, stricte involvi, adeo ut videatur unum continuum corpus esse; facile nunc intellectu est, si hæc moles vesiculosa cum impetu versus terram, vel aliud durum corpus, projiciatur, eadem vi, qua advenerat, resilire necesse sit, si modo membranæ vesicularum impetum sustinere valeant; si vero quædam ob infirmitatem disrumpantur, evidens est, totam molem tanta vi, qua insiliit, non resilire; sic, si omnes vesiculæ diffringerentur, plane non repercuteretur: quis autem non videt, causam hujus resilitionis, vel non resilitionis, deducendam esse a solo elaterio aëris in vesiculis inclusi? ratione enim & experientia constat, aërem, qua vi comprimitur, eadem omnino sese restituere niti, ideoque, si ope percussionis vesiculæ coarctantur, necesse est, ut aër in illis contentus magis etiam condensetur; proinde, cum quælibet vesicula, eadem vi, qua comprimebatur, sese restituere conetur, fit ut tota compages vesicularum simul, tanta celeritate, quanta allisa est, resiliat: si vero forte contingat ut, in percussione, aliquæ vel plures rumpantur, tanta celeritate tota moles non repercutietur; nam illæ vesiculæ, quæ ruptæ sunt, & ex quibus aër inclusus, per porosum involucrum, expressus est, nullam vim prorsus habent sese extendendi; ideoque sola vis superstitum, quæ integræ ictum sustinuerunt, tanta non est, ut totum corpus, pristina celeritate, repellant; si itaque accideret, ut, per ictum, omnes vesiculæ rumperentur, tota moles vesicularum plane non repelleretur; quia tum nulla vis repellendi superesset, siquidem aër, qui illam in vesiculis unice causabatur, jam totus per velamentum porosum expulsus esset. Ut hoc nunc ad præsens negotium applicetur: quodlibet corpus huic moli vesiculosæ comparari potest; sicuti enim hæc tota ex pluribus vesiculis aëre repletis est composita, sic illud pariter suos innumerabiles poros denso aëre refertos habet; sciendum itaque, quod in uno corpore parietes pororum sint quidem flexiles, sed simul tenaces, adeo ut possint coarctari, ob flexibilitatem, sed non rumpi, ob tenacitatem; hinc, si cum impetu, versus aliud corpus, quod etiamsi non habeat vim elasticam, ictui tamen non cedat, pellatur, eodem impetu iterum (ob aërem in poris æquali vi, quæ per ictum compressus est, sese extendentem) retropelletur; & hoc corpus est, quod supra perfecte elasticum nuncupavi, qualia sunt silices, vitra, crystalla, gemmæ &c. omnia videlicet duriora, quæ malleo nequaquam molliuntur: corpora vero plane non elastica, ut sunt plumbum, stannum, & si qua sunt ejusmodi alia, poros ita habent dispositos, ut, si a quacunque vi minima comprimantur, aër, in illis inclusus, novam hanc pressionem non patiens, latera pororum mollia perrumpat, & in auram apertam exeat; hinc fit, ut hæc corpora post ictum non resiliant, nec pristinam figuram recuperent, ut videre est ex nota ab ictu ipsis inflicta: dantur insuper corpora imperfecte elastica, ut ferrum, argentum, aurum, & omnia fere metalla, quæ quidem resiliunt, sed celeritate diminuta; hoc autem inde evenit, quia, post ictum, aliqui pori, ob infirmitatem laterum, disrumpuntur, aliqui vero, ob firmiorem nexum, integri servantur; omnia itaque, quæ supra de mole vesiculosa dicta sunt, ea pariter & de his intelligi queunt. Quod ad cæteras corporum elasticitates attinet, quæ videlicet oriuntur ex contorsione, inflexione, tensione &c. omnes eæ ab eadem causa proveniunt; quia, in omnibus his actionibus, corporum pori angustantur, ideoque & aër inclusus comprimitur; unde illa in pristinum statum sese restituendi vis oritur; de quibus itaque plura verba facere hic lubenter supersedeo. Interim jam prævideo objectionem: quod nempe, cum corporum elasticitatem explicare voluerim, ipsius aëris vis elasticæ causam tanquam cognitam posuerim; quod cuipiam videretur, *hoc esse idem per idem explicare*, vel, ut loqui consuevimus, *id supponere quod est in quæstione*: verum quidem est, ex his causam elaterii aëris cognosci non posse; longe enim alius est loci, quam ut hic eam ex intimis naturæ penetralibus prolixe deducam; attamen, cum in jucundam hanc speculationem obiter inciderim, ostendere volui, quo pacto vis elastica omnium corporum origi-

originem ſuam ſoli debeat aëri elaſtico; adeo ut non opus ſit, ad ſingulas, & novas elaſticitatis ſpecies, nova quoque excogitare fundamenta.

XIX.

Si cui hæc minus perfecte explicata, aut ſuæ phantaſiæ non ad amuſſim ſatisfacere videantur, is ipſe, ut ſibi videbitur, corrigat, addat, vel demat, per me licet; interim revertamur ad propoſitum. Jam ſupra vidimus, quomodo, & ex quibus cauſis, effervescentia ex mixtione duorum liquidorum, quam primi generis, & ex mixtione liquidi & ſolidi, quam ſecundi generis effervescentiam nuncupavimus, peragatur; nunc ſequitur, ut videamus an, & unde, effervescentia ex mixtione duorum ſolidorum, quæ tertium genus conſtituit, oriatur. Patet autem ex iiſquæ ſupra dicta ſunt; primo, quod corpora, quæ effervescentiam excitare debent, id eſt, acidum & alcali, intime ſibi invicem miſceri neceſſe ſit; deinde, quod acidum & alcali, vel alterutrum ſaltem, debeat habere motum, ut particulæ acidi poſſint alcali particulas diffringere; quieſcendo enim hoc non efficient: duo itaque liquores effervescibiles, vel liquidum & ſolidum, ex ſola mutua combinatione, per ſe, ſine actione externa, effervescunt; liquidum enim, cum ſit in minutiſſimas particulas diviſum, facile cum altero liquido, vel ſolido, quoad omnes partes, in illius poros ſe inſinuando, in hujus penetrando, miſceri poteſt, & poſtquam eſt mixtum, liquidi particulæ, cum ſint in continuo motu, alterius liquidi, vel ſolidi, particulas haud difficulter diffringere valent. At neutrum horum requiſitorum in duobus ſolidis reperitur; ſolidorum enim particulæ, cum ſibi invicem ſint contiguæ, permiſceri nequeunt cum alterius ſolidi particulis; eſt ergo neceſſe; ut, ſi miſceri debeant, contiguitas illa ſolvatur, redigendo nempe ſolida in minutiſſimum pulverem, quo fiet, ut una particula unius ſolidi alteram alterius contingere poſſit; hoc enim eſt vera mixtio; cum quælibet particula unius cuilibet alterius juxta ponatur. Requiritur

ritur itaque ut duo ſolida effervescibilia, ſi effervescere debeant, conterantur primo in tenuiſſimum pulverem; deinde bene invicem miſceantur, ut minima minimis conjungantur: ſed hoc nondum ſufficit; neceſſe inſuper eſt, ut hæ particulæ miſtæ habeant quendam motum, quo particulæ acidi, ſeu corporis *agentis*, poſſint agere in particulas alcali, ſeu corporis *patientis*, eaſque diffringere: verumenimvero particulæ hæ ſolidorum mixtæ motum inteſtinum non habent, quemadmodum liquidorum: (pulverem enim ſubtiliſſimum in hoc duntaxat a liquido differre concipio, quod illius particulæ juxta ſe invicem quieſcant, hujus vero ſint in continuo motu:) ideoque motus extrinſecus ipſis tribuendus eſt, totam nimirum maſſam pulveriſatam concutiendo, agitando, comprimendo, vel quocumque alio modo; cætera ſi rite ſe habeant, non dubito, quin effervescentia, ex combinatione duorum ſolidorum, iiſdem effectibus æque ac duorum liquidorum, vel liquidi & ſolidi, produci poſſit. Hoc tamen monendum, quod hujuſmodi effervescentiæ hactenus fuerint inſolitæ; forſan ideo, quia modus operandi, & ſolida ad effervescendum opportuna præparandi, non innoteſcebat; vel etiamſi innotuiſſet, res tamen raro ex voto ſucceſſiſſet; quia pleraque ſolida effervescibilia, cum in pulverem rediguntur, vim effervescendi amittunt; nam, quamvis multas particulas acidi & alcali in ſe contineant, contingere tamen poteſt, ut in contritione vel contuſione ſolidorum, acidi particularum anguli abradantur, vel alcali particulæ contundantur; adeo ut utrovis modo ad effervescendum ineptæ evadant: eſt itaque unum ex raris contingentibus, ſi duo ſolida ad effervescendum idonea reperiantur, quorum particulæ acidi & alcali, conterendo in pulverem, integræ & incorruptæ perſtiterint. Hinc TH. BARTHOLINUS † raris ſuis obſervationibus annumerat experimentum, quo oſtendit regulum antimonii cum mercurio ſublimato, ſi pulveriſati bene miſceantur, effervescere poſſe; totamque operationem tradit, quæ ſententiam meam egregie confirmat; conſtat enim mercurium ſublimatum

† Act. Medic. *Part. II. Obſ.* 70.

multis acidi particulis ſcatere, ob vim ejus corroſivam, quæ, quia mercurius ſublimatus levi contritione in pollinem redigi poteſt, integræ manent; ſic etiam alcali particulæ, quibus regulus antimonii refertus eſt, poſt contritionem figuram ſuam immutatam retinere potuerunt, forſan ob earum duritiem & firmitatem: hi itaque duo pulveres, etiamſi probe miſceantur, *nullus tamen adhuc calor, nulla fumi graveolentis veſtigia* (ut verbis Auctoris utar) ſentientur, ob ſolum motus inteſtini defectum: quid igitur agendum? haud dubie ſuccurrendum ipſis eſt motu externo; ideoque (quod apprime hypotheſin noſtram illuſtrat) jubet Auctor, ut *pulveres permiſti vitro ſtrictioris orificii immittantur, immiſſique bacilli extremitate latiori continuo & valide comprimantur, ita ut ſuperficies pulveris ubique preſſa in arctum cogatur. Diu adhucdum quieſcit pulvis frigeſcitque, licet ad quadrantem horæ undique anguſtetur: ſed inſiſtatur, premendo ad quadrantem adhuc unum; & notabitur denique bacillum, qui ante ſuperficiem tantum lambebat, alte mox ſubire maſſam, & ad fundum uſque ſibi viam facere; quo viſo, dictum factum, craſſi fumi cooriuntur, vitrum incaleſcit, materia, quæ vitro continetur, extra oras ejus ſeſe evolvit, ſpumat, effervefcit, funditur & totum cubiculum gravi vapore confundit*: ex quibus clare apparet, ſolam preſſionem talia præſtitiſſe; nimirum hac preſſione particulæ acidi, quæ alcali particulas jam contingunt, ulterius propelluntur, illarumque anguli in harum ſinus arctius infiguntur; ut tandem alcali particulas diffringant, exitumque præbeant aëri incluſo, qui tales effectus modo recenſitos facit. En totum proceſſum habes hujus effervefcentiæ tertii generis, ejuſque veram cauſam; nobis namque non opus fuit, ut cum Auctore recurreremus ad particulas primi Elementi in pulvere dicto (dic potius in mente CARTESII) diſperſas.

X X.

Tranſeamus nunc ad alia Effervefcentiæ & Fermentationis phænomena. Experimur, in aëre ſumme frigido, nonnunquam fer-

fermentationem non peragi; cujus ratio hæc eſt, quia, tempeſtate valde frigida, aër, ceu notum eſt ex thermometris, plus ſolito condenſatur, proinde majorem vim elaſticam acquirit; poſſibile itaque eſt, ut hæc major ſit, vel ſaltem æque valens, ac elaterium aëris contenti intra particulas alcali, adeo ut, etiamſi hæ a particulis acidi diffringantur, attamen aër incluſus, ob reſiſtentiam præpollentem, vel æquipollentem, elaterii aëris ambientis, ſeſe extendere nequeat, ſicque tota fermentatio impediatur: hinc ſolent Piſtores & Matres familias maſſam panis fermentandam calidiori loco exponere, ut hac ope vis elaſtica aëris ambientis debilitetur, & aër maſſæ incluſus eo facilius ſe poſſit expandere. Ex ſupra dictis quoque conſtat, cur maſſa panis fermentata in furno attollatur, non vero fermentata, inſtar placentæ, depreſſa maneat: fermenti enim auxilio, particulæ alcali divelluntur; quo fit, ut condenſatus aër, in ipſis incluſus, ſeſe dilatet, totamque maſſam attollat: aër quippe iſte dilatatus, ob viſciditatem maſſæ, intra manere cogitur, nec, ſicut in fermentationibus liquorum, ſurſum fertur, inque auras avolat; ideoque, ſi furno calefacto indatur, adhuc magis aër iſte a calore extenditur, & ſic oportet, ut panis in tantam molem intumeſcat: ſi vero, maſſæ farinaceæ nullum fermentum addatur, a quo particulæ, in quibus aër condenſatus includitur, diffringi queant; mirum non eſt, quod panis in furno non attollatur; quia tum nulla adeſt vis extenſiva; ſiquidem aër, adhuc carcere ſuo detentus, vinculiſque non ſolutus, neque a calore, neque propria vi elaſtica ſe explicare valet. Hinc, ſi panis rite fermentatus per medium diſſecetur, tota ſubſtantia poroſa & laxa videbitur, in qua innumeræ conſpicientur caveæ & foramina, quibus nempe aër, ſui juris factus, inſidebat, ſeque extendendo ſinus iſtos formabat; cum contra, ſubſtantia panis non fermentati ſit admodum craſſa, compacta, & omnibus poris conſpicuis deſtituta, adinſtar caſei; quod certum indicium eſt aëris in alcali particulis adhuc latentis, vinculiſque coerciti, quominus vim ſuam extenſivam exerere potuerit. Neceſſe itaque eſt, quemadmodum patet ex dictis,

ctis, ut, si oporteat fermentationem debito modo perfici, materia fermentanda non sit in loco valde frigido, vel saltem non in aëre densiore, quam est aër in particulis alcali inclusus; secus enim fermentatio nunquam efficietur.

XXI.

Pariter observamus, in loco clauso nihil effervescere, nihilque fermentari posse, ob eandem fere rationem, quam supra attulimus; jam enim ostendi, quod, præter discissionem particularum, requiratur etiam spatium, ut aër expulsus ex illis sese dilatare queat: si itaque duo liquores effervescendo idonei in vase quodam communi permisceantur; vas autem illud, hoc modo plenum, firmiter obstruatur; nulla prorsus excitabitur effervescentia: nam quamvis acidi particulæ diffringant particulas alcali, tamen aër in his contentus non poterit se expandere, quia omnia jam sunt plena; expansio quippe requirit spatium majus quam ante fuit; hocce itaque modo aër a particulis non secernetur, nullaque proin effervescentia generabitur. Hinc commode ratio reddi potest, cur, si quis vinum mustum diutius dulce servare, & a fermentatione præcavere velit, soleat dolium, vel vas, quo continetur, accurate & firmiter undiquaque obturare; nimirum, ope hujus obturationis, primo præscinditur omnis communicatio aëris externi cum musto, quem præcipuam causam fermentationis musti esse, supra innui; deinde, hac obstructione, omnis locus adimitur, quem aër erumpens e particulis solutis occupare posset; sicque cogitur intra terminos suos manere: cum autem quævis effervescentia, vel fermentatio, in hoc potissimum consistat, ut aër a particulis continentibus secernatur, sicut antea dixi; sequitur, ut, cum talis secretio in dolio fieri nequeat, vinum defæcari nunquam possit, sed in eo statu, in quo est, semper maneat necesse est: si vero, vel minima rimula, seu apertura, in dolio existat, aër iste, intra corpuscula coactus, omnem laborem eludens, ope vis suæ elasticæ, data hac porta, cum violentia erumpet; imo interdum, nisi dolium fortiter com-

compactum sit, aër hicce, sibi exitum quærens, latera dolii cum impetu & fragore disrumpit, sicque vini herus oleum, vel potius vinum, & operam perdit; en tantum aëris illa ipsa vis elastica valet! nam postquam particulæ alcali sunt solutæ, nulla quidem adhuc sentietur fermentatio; summus tamen nisus fermentandi adest, quem sola latera dolii coercere debent: magna ideoque requiritur firmitas, ne dolium dissiliat; quod melius ostendi potest hoc experimento. Sumatur ampulla vitrea strictioris orificii, impleaturque liquore quodam acido, & indatur globulus, qualem supra adhibuimus; dein illico ampullæ orificium hermetice, vel alio cæmento habili, claudatur; quo peracto, postquam incarceratus aër beneficio liquoris particulas globuli divellentis libertatem suam recuperaverit, hic effervescentiam parere nitens, vi sua elastica tantam virtutem extensivam exercebit in parietes ampullæ, ut, cum non amplius pares sint tantæ vi resistere, non sine impetu dissilire observentur: si vero forte contingeret, ut ampulla hunc conatum compescere satis valeat; plane nulla effervescentia animadvertetur, quandiu ampulla est obstructa; sed statim ac orificium aperitur, effervescentia confestim & subito se prodit: hujus ratio ex supra dictis oppido liquet; quam itaque ad nauseam usque hic non repetemus.

XXII.

Lectori spero haud ingratum fore, si, præsente occasione, ostendam quam longe & late hypotheses meæ se diffundant, ad alia naturæ mysteria detegenda. Nullus unquam, quantum scio, accensionem pulveris pyrii, ejusque violentiam, per modum effervescentiæ, explicuit; quam commode autem, ex principiis meis, ad Effervescentiam, & quidem ad genus secundum, referri possit breviter patefaciam. Siquidem ignis cum sit corpus liquidissimum, cujus particulæ in motu rapidissimo sunt constitutæ, quæ instar cuneolorum, quotiescunque in alterius corporis particulas, sinus illis congruentes, & ad recipiendum

aptos habentes, impingunt, has easdem divellunt & discindunt: respiciendo itaque ad hanc ignis actionem, quatenus nempe ignis habet vim dissolvendi & particulas diffringendi, haud incongrue dici potest ignem esse acidum; pulvis pyrius vero, quia maxima ex parte conficitur ex nitro, dubium non est, quin copiosis particulis alcali constet: hoc posito, difficile non erit veram causam violentiæ accensi pulveris pyrii assignare, si modo attendatur ad ea quæ §. XXI. dicta sunt, ubi ostensum est, quam ingentem vim impedita effervescentia exerceat in parietes vasis clausi: eadem & hic applicari possunt; si enim pulveri pyrio ignis admoveatur, idem est, ac si alcali & acidum misceantur invicem; nam statim ac ignis pulverem pyrium attigerit, illius particulæ acidæ, ob motum velocissimum, subito & quasi momento irruunt in hujus particulas alcali, easque diffringendo, aëri incluso, qui arctissime compressus est, exitum parant; quo fit, ut aër iste ex singulis particulis simul collectus, unitis viribus, ope vis suæ elasticæ (siquidem mirum in modum condensatus est, ut mox patebit) & a motu ignis adhuc magis agitatus, uno ictu, quæque impedimenta semoveat, & fortissima quoque obstacula perrumpat. Quis autem hoc miretur? cum quotidie videamus, quantum aëris vis elastica polleat; ceu Frater nupero experimento publice ostendit, aëris gravitatem, vel potius vim elasticam (quia experimentum, tam in conclavi clauso, quam sub dio, succedit) tantam esse, ut plus quam undecim centipondia non potuerint divellere bina hemisphæria cuprea, quorum diameter vix pedis dodrantem adæquat, postquam ex illis, sibi invicem adaptatis, ope antliæ pneumaticæ, aërem extraxisset: en tantum præstitit aëris naturalis consistentiæ vis elastica: nihil dicam ergo de sclopetis istis pneumaticis recenter inventis, quæ ope solius aëris condensati, globulum per asserem satis crassum trajiciunt. Si itaque tantus est effectus aëris vix decies densioris aëre naturali, quid non efficiet aër, ultra quam centies densior, qui in alcali particulis pulveris pyrii includitur? Tanta densitas, ad quam aër hactenus nullo artificio redigi potuit, omnem fidem superaret; nisi veritas posset

set demonstrari hoc experimento, quod non ita pridem cum Fratre meo feliciter institui. Sumpsimus nempe tubum recurvum ABC, (*Fig. 6.*) cujus unum crus AF satis longum, diametri circiter semipollicis, a parte A apertum; alterum vero brevius crus instructum erat ampulla C; in quam per orificium A, inverso tubo, immisimus quatuor granula pulveris pyrii; deinde crus AF implevimus aqua, usque ad B, illudque immersimus in vasculum oblongum HG itidem aqua plenum; hoc facto, totam machinam in locum temperatum per semihorium seposuimus, ut securi redderemur, aërem in spatio CFB contentum, interea temporis, ad naturalem consistentiam redactum esse, si forte a calore manuum, inter palpandum, rarefactus fuisset: hujus itaque rei certiores, tubum AFC ita constituimus, ut superficies aquæ in eo contentæ B, congrueret cum superficie aquæ externæ ambientis, quod tunc nobis indicium fuit, aërem in spatio CFB contentum plane ejusdem consistentiæ esse cum aëre externo; postmodum sumpsimus machinam, ita paratam, de loco suo temperato, radiisque solaribus exposuimus, quibus ope speculi caustici E, accendimus pulverem pyrium ampullæ C immissum; quod cum subito fieret, aqua in tubo subjecta BA, ob impetum, multum ultra limites deprimebatur (adeo ut nonnunquam, nisi portio tubi BA sit satis longa, per orificium A, non solum omnis aqua, sed aër, expelli possit) nobis autem non ad orificium usque pertigit superficies interna B; proinde res ex voto successit; ideoque machinam immutatam in priorem locum temperatum transtulimus, ubi aquam in tubo sensim rursum ascendere observavimus, nimirum ob duplicem causam, tum ob translationem ex loco calidiori in frigidiorem, tum ob subito incensum ignem iterum extinctum; tam diu, inquam, ascendit aqua; donec tota machina refriguisset, & pristinum statum, quem ante accensionem habebat, induisset; tum demum amplius non ascendit, sed quievit, etiam per tres vel quatuor horas, quandiu in isto statu permittebamus; sic itaque advertimus, non ad priorem terminum B usque ascendisse, sed notabiliter infra B, limitem D posuisse; proin-

TAB. I. *Fig. 6.*

proinde termino B prius notato, tubum parumper ſuſtulimus, donec ſuperficies aquæ interna D cum ſuperficie externa coincideret, adeo ut, hoc modo, aër in ſpatio CFD contentus iterum eſſet naturalis conſiſtentiæ; ideoque, quia aër voluminis CFB auctus fuerat volumine BD, concluſimus ex his, tantum aëris, quantum caperet ſpatium BD, neceſſario in quatuor iſtis granis pulveris pyrii antea inextitiſſe, ſiquidem aliunde provenire non potuiſſet; ſed prout judicavimus, ducenta granula pulveris pyrii vix adimpleviſſent ſpatium BD; poſito itaque unum granulum conſtare ex una parte materiæ terreſtris; quæ videlicet eſt continens aëris condenſati, & ex una parte ipſius aëris condenſati (quamvis credam hunc ab illa multum ſuperari) ſequitur exinde aërem, qui totum ſpatium BD occupabat, cum adhuc in granulis hæreret, centies atque amplius denſiorem fuiſſe aëre naturali. Hoc experimentum quam egregie hypotheſin meam confirmet, nemo non videt; illorum vero ſententiam uno ictu, quaſi deſtruit, qui putant tantam violentiam pulveris pyrii ab eo duntaxat provenire, quod pulvis pyrius ſubito flammam concipiat, & aër ambiens ab iſta valde agitatus in majus ſpatium ſe extendere nitatur; hinc quælibet obvia magno niſu diffringere, ſibique exitum parare autumant. Sed hanc non eſſe ſufficientem cauſam, experimentum noſtrum abunde comprobat; ſequeretur enim, illorum juxta ſententiam, ut, poſtquam motus iſte inteſtinus, quem ſubitanea flamma cauſabatur, ceſſaverit, totaque machina refriguerit, aqua ad priſtinam altitudinem B aſcendere deberet; nam nulla ratio apparet, cur nunc plus aëris quam prius tubo ineſſet. Eſt inſuper & aliud, quod per hanc ſententiam explicare nequeunt; cur nempe, ſi pulvis pyrius in pollinem conteratur, multum de violentia ſua amittat; hac enim contritione, non ſolum non impeditur, quo minus commode flammam concipere poſſit, ſed potius conceptio facilior redditur, quippe ignis melius, & celerius, pulverem pyrium contritum, quam eundem granulatum, penetrare poteſt; & ſic comminutio vim ejus potius augeret, quam diminueret; quod eſt contra experientiam: per noſtram vero

vero hypotheſin, rem clare & paucis explicare poſſumus; nimirum, cum pulvis pyrius conteritur, fieri nequit, quin, hac contritione, multæ particulæ, quibus aër condenſatus ineſt, ſimul diffringantur, & aër inſitus in auram apertam abeat; quocirca, mirum non eſt, quod pulvis pyrius contritus tantum effectum non præſtet, ſiquidem multum aëris condenſati (quem præcipuam cauſam eſſe violentiæ ſupra oſtendimus) ante accenſionem, conterendo, diſparuerit, & proinde conatus ejus redditus fuerit irritus.

XXIII.

Ne quid ſupereſſe videatur, quod per noſtra principia non explicari poſſit; paucis hic de eo motu, qui a Chymicis *Præcipitatio* dicitur, diſſeram: integram autem hujus doctrinam huc non afferam, tum quod hujus loci non ſit, tum quod nimis prolixum foret; poteſt enim præcipitatio contingere etſi effervescentia non præcedat; hanc vero, ob rationem modo memoratam non tractabo, ſed illam duntaxat, quæ poſt effervescentiam plerumque ſequitur; plerumque dico, quia non in omnibus effervescentiis, ſed in pluribus ſaltem, aliquid, inſtar materiæ terreſtris, ad fundum (ut Chymiæ Magiſtri loquuntur,) præcipitatur; quid itaque illud ſit, & unde veniat, (ſiquidem in limpidiſſimis quoque liquoribus id accidere obſervamus) curque, in aliquibus effervescentiis, nulla præcipitatio ſuccedat, breviter & ni fallor, ſatis perſpicue ex hypotheſi noſtra oſtendi poterit; quæ, ut eo facilius intelligantur, præmittam experimentum quoddam, ad cujus comparationem præſens negotium dein accommodabo. Sumatur vaſculum quoddam AB [*Fig.* 7.] aqua fere plenum, & ampullæ cujuſdam vitreæ, ut C, primo aëre tantum repletæ, orificium colli obturetur, hæcque immergatur in aquam ipſomet vaſculo contentam; ſi vero forte levior ſit aqua, adeo ut ſurſum prematur & ſuperficiem aquæ petat, tunc orificium ampullæ aperiatur, eique tantum aquæ immittatur, quantum ſufficit ad æqualem gravita-

vitatem constituendam inter aquam externam & ampullam; quo facto, obstruatur ampulla, & in aquam denuo immergatur, ex. gr. usque ad D; tum ampulla ob æqualitatem ponderis inter semetipsam, aqua aëreque repletam, & inter ejusdem molis aquam, æquilibrium servabit ubicunque ponatur, id est, neque sursum, neque deorsum, premetur, sed in ea altitudine, in qua est, hucusque semper manebit; si itaque, a vi quadam externa, disrumpatur ampulla, evidens est, in quiete non amplius mansuram, sed aërem, qui continebatur in ampulla, quique aqua specifice levior est, sub forma bullularum sursum ascensurum; fragmenta vero ampullæ vitreæ E, F, quia aqua specifice sunt graviora, ad fundum ferentur. Hæc si attentius considerentur, statim apparet, quid conferant ad præcipitationis post effervescentiam ortæ explicationem; ex his enim concludimus, materiam illam terrestrem, quæ, post effervescentiam, in fundo conspicitur, nihil aliud esse quam particulas alcali diffractas; nam ante effervescentiam, dum aëre adhuc sunt repletæ, in liquore hinc inde dispersim natando, nec sursum, nec fundum petunt, ob eandem particularum cum liquore gravitatem specificam; si vero huic liquori affundatur alius liquor, qui particulis acidi scateat, hæ particulas alcali diffringunt, & sic idem, quod in ampulla vitrea accidit, eveniet; nimirum aër, qui in particulis alcali continetur, ob levitatem sursum feretur, fragmenta vero particularum alcali, ob præpollentem gravitatem, ad fundum ruent, & hoc est quod Chymici *Præcipitationem* vocant. Dantur quidem Effervescentiæ, quæ nihil præcipitati post se relinquunt; illud autem non fit, nisi liquores ad effervescendum apti sint summe depurati, quorum nempe particulæ valde sunt subtiles & exiguæ; ideoque quod nulla præcipitatio subsequatur, ratio hæc est; quia, si particulæ alcali, quæ admodum sunt parvæ, a particulis acidi disrumpuntur, aër quidem intrinsecus sese extendens, sursum fertur; sed fragmenta particularum, quamvis liquore specifice sint graviora, tamen, ob summam exilitatem, ad fundum subsidere nequeunt; exiguitas enim ista efficit, ut vis

vis excessus specificæ gravitatis unius fragmenti sit minor, quam ut possit superare resistentiam frictionis, vel villorum, quibus particulæ mutuo implicantur: sic, ob eandem rationem, granula plumbea, in acervo milii dispersa, non subsiderent, quamvis plumbi specifica gravitas multo major sit quam milii; scabrities enim partium, quibus grana se mutuo contingunt, longe major est, quam ut superetur ab excessu gravitatis: sic particulæ aëreæ minutissimæ, solo contactu, sub aqua detinentur: sic contra nonnunquam exiles guttulæ aqueæ in aëre dispersæ sunt, quæ non decidunt; unde aërem humidum esse dicimus: sic mercurius, & alia metalla, a liquoribus corrosivis adeo minutim dissolvuntur, ut, etsi multo graviora sint quam liquores, penitus tamen cum illis misceantur, adeo ut ne vestigium quidem metalli appareat: sic videmus duos diversos liquores, etiamsi non sint ejusdem omnino specificæ gravitatis, invicem misceri posse: quorum omnium eadem est causa, quam prius assignavi, cur, post aliquas effervescentias, nullum sedimentum ad fundum ruat.

XXIV.

Naturam itaque præcipitationis, quæ effervescentiæ supervenit, quid nempe sit, & in quo consistat, ex hypothesi mea satis me explicasse confido; & si liceret falcem in alienam messem immittere, sine ullo fere labore possemus hic inferere causam præcipitationis illius, quæ, sine effervescentia, ex sola permixtione duorum liquorum peragitur: attendatur enim ad experimentum modo allatum; ubi statim apparet, si aquæ in vasculo AB contentæ, & in qua ampulla D æquilibrata est demersa, affundatur alius liquor aqua specifice levior, ita ut aqua & liquor invicem misceantur; apparet, inquam, ampullam D, ferri ad fundum non tamen frangi; cujus ratio alia non est, quam quod, ope affusionis novi liquoris, aqua levior reddatur, ideoque ampulla D, quæ antea ejusdem gravitatis erat atque aqua, nunc eadem gravior evadat; proinde uti ex Hydrostaticis patet,

tet, ut ad fundum ruat, neceſſe eſt. Ita etiam, ſi duo liquores diverſæ gravitatis, ex quibus præcipitari quid oportet, invicem miſcentur; tunc omnes grandiuſculæ maſſulæ, quæ graviori prius liquori æquilibratæ innatabant, nunc gravitate præpollentes ad fundum deſcendent, & ſic, ſine prægreſſa effervescentia, præciptiatio orietur.

XXV.

Hactenus memorata præcipua ſunt, quæ circa Effervescentias & Fermentationes obſervantur; reliqua, aut ſponte ex principiis noſtris fluunt, aut ſaltem longa diſquiſitione opus non habent; colorum v. gr. mutatio, quæ ſæpiſſime poſt effervescentiam vel fermentationem contingit, rem arduam non reddit; conſtat enim, diverſitatem coloris maxime conſiſtere in diverſo ſitu & figuratione particularum; quid ergo mirum, quod corpora effervescentiam paſſa alium ſubinde colorem induant? ſiquidem, effervescendo, & ſitus, & figura particularum mutetur, ut patet ex ſupra dictis; his igitur diutius non immoremur. Multa quidem explicanda reſtarent, quæ, in hac, vel illa, effervescentia, aut fermentatione, ſpecialiter occurrunt; hæc autem potius ab aliis circumſtantiis dependent, quam reapſe differunt a phænomenis generalibus: proinde iſta (ſiquidem facile hypotheſibus meis accommodari poſſe nullus dubito) aliis, quibus plus vacat, intacta relinquam: omnes enim ſpeciales caſus huc afferre velle, non paucas hujus Diſſertationis pagellas, ſed ingens volumen requireret: ſufficit, mihi, quod res eo redacta ſit, ut nil particulare occurrat, quod principia noſtra generalia ſubterfugiat, aut per illa, probabiliter ſaltem explicari non poſſit: hic ergo pedem figo. Faxit Deus O. M. ut hæc unice vergant in Nominis ſui gloriam.

APPEN-

APPENDIX.

VIxdum Diſſertationi huic colophonem impoſui, cum mihi præcipationis, & ſecretionis particularum naturam, ultimis pagellis breviter explicatam, ſedulo contemplanti, ex hujus occaſione, fortuito ſeſe obtulit modus conſtruendi, ope cujuſdam liquoris continuo fluentis, decantatum illud & ab omni ævo deſideratum Mobile Perpetuum pure artificiale; quem proinde hic, coronidis loco, ob materiæ affinitatem, Eruditis examinandum proponam. Neminem profecto latet, quam avide jam a longo tempore a Celeberrimis quoque Viris Motus iſte Perpetuus ſit quæſitus, quam ardenter efflagitatus: quid enim non excogitarunt? quot ſumptus non impenderunt? quantaſque non extruxerunt machinas? ſed omnia in caſſum,

Πάντα γέλως, καὶ πάντα κόνις, καὶ πάντα τὸ μηδέν.

Vexat etiamnum & torquet continuo multos cœca Perpetui hujus Mobilis cupido, eorumque ingenia adeo incitat, ut auribus animiſque Hominum Eruditorum abſurda de hac re etiam proferri videamus: quæ tamen hodie plerique Viri docti rejiciunt; unanimiter aſſeverantes, Motum Perpetuum, nec dari, nec inveniri poſſe: quæ opinio eouſque apud hos invaluit, ut ſatis temere pronuncient, ne audiendos quidem eſſe, qui tale quid ſe reperiſſe gloriarentur; quorum tamen rationes (ut fatear) ad me convincendum non ſufficiunt; quin potius aſſerere non erubeſcam Motum Perpetuum, non ſolum inventu poſſibilem, ſed prorſus inventum jam eſſe, ut quivis fatebitur, qui has legerit lineolas; & quid multis opus eſt? annon ipſa Natura (quæ nunquam non juxta leges mechanicas operari dicitur) poſſibile eſſe Mobile Perpetuum indicat? quid (ut

hoc ſolum memorem) perennis fluminum & aquarum fluxus aliud eſt, quam Motus Perpetuus? annon omnia mechanice peraguntur? ergo, fateris, quod limites legum mechanicarum non excedit, illud impoſſibile non eſt; quid proinde impedit, quo minus præeuntem Naturam hac in re, utut non tam perfecte imitari poſſimus? ut autem tandem finiam, poſſibilitasque Motus Perpetui artificialis ſalvetur, modum, quo conciliari poſſit, tibi oſtendam, de quo ne in ſiniſtram partem temere judicium feras, vel pro Titanico conatu interpreteris, hunc ut prius acriter perpendas, vel, ſi lubet, rei veritatem ipſe experiaris rogo.

Ante omnia præponenda ſunt ſequentia.

TAB. I. *Fig.* 8. I. Si ſint duo liquores diverſæ gravitatis, quorum gravitates ſint in ratione G ad L; erunt, viceverſa, altitudines cylindrorum æquiponderantium, & ſuper æquali baſi exiſtentium, in ratione L ad G.

II. Ideoque ſi altitudo A C (*Fig.* 8) liquoris unius in vaculo A D contenti, ſit ad altitudinem E F liquoris alterius in tubo utrinque aperto exiſtentis, ut L ad G; liquores ita poſiti quieſcent.

III. Proinde ſi A C ad E F ſit in majori ratione quam L ad G; liquor in tubo aſcendet; vel ſi tubus ſufficienter longus non ſit, liquor per orificium E prolabetur.

(Hæc ex Hydroſtaticis probantur)

IV. Poſſunt haberi duo diverſæ gravitatis liquores, qui conjuncti invicem miſcentur.

V. Poteſt haberi filtrum, colatorium, vel aliud ſecretorium, ope cujus liquor levior graviori immiſtus ab eodem iterum poteſt ſecerni.

CONSTRUCTIO.

His præſuppoſitis, Mobile Perpetuum ſic conſtruo. Sumantur in quacunque quantitate, ſi vis, in æquali, duo diverſæ gravitatis liquores invicem miſcibiles (qui per hyp. 4. poſſunt haberi) illorumque ratio gravitatis prius exploretur, quæ ſit ut G ad

G ad L gravioris ad leviorem, deinde illis permixtis impleatur vaſculum A D uſque ad A. Hoc facto ſumatur tubus utrinque apertus E F, ejus longitudinis, ut ſit $AC : EF > 2L : G + L$; hujus vero tubi orificium inferius F obſtruatur, vel potius obducatur, filtro, vel alia materia quadam, ſecernente liquorem leviorem a graviori (quæ per hyp. 5. etiam poteſt haberi;) tandem tubus hoc modo paratus liquori immergatur uſque ad fundum vaſculi C D; dico, liquorem continuo per tubi orificium F aſcenſurum, & per orificium E in ſubjectum liquorem prolapſurum.

DEMONSTRATIO.

Quia tubi orificium F obductum eſt filtro (per conſtr.) quod liquorem leviorem a graviori ſecernit; ſequitur, ut, ſi tubus immergatur ad fundum vaſculi, liquor ſolummodo levior, qui graviori eſt immiſtus, per filtrum in tubum aſcendere debeat, & quidem eouſque ultra ſuperficiem ambientis liquoris (per hyp. 2.) aſcenderet, ut eſſet $AC : EF = 2L : G + L$: quia vero (per conſtr) $AC : EF > 2L : G + L$, neceſſe eſt (per hyp. 3.) ut liquor levior, per orificium E, ſeſe exoneret in vaſculum ſubjectum, ibique denuo cum graviori conjungatur, & (per hyp. 4.) miſceatur de novo; qui dein, penetrando filtrum, in tubum rurſus aſcendat, iterumque per ſuperius orificium expellatur. Sic itaque fluxus continuabitur in perpetuum. *Q. E. D.*

COROLL.

Hinc commode reddi poteſt ratio, cur aqua, ex mari profundo ad ſumma uſque cacumina montium jugiter aſcendendo, ex iis ſaltuatim prorumpat & refluendo ſub forma fluminum, ſe refundat in Oceanum, ſicque Natura nobis Perpetuum ſiſtat Mobile. Hoc, inquam, non bene explicant illi, qui dicunt, eandem ob cauſam aquam ex mari in ſublimius ferri per terræ

 poros,

poros, ob quam liquor in tubulis peranguſtis aſcendat ultra ſuperficiem liquoris tubulos ambientis : nam, ſi ita res explicanda foret, nunquam demonſtrare poſſent, cur eadem aqua, in altum elevata, e terræ gremio prolabatur; videmus enim, in anguſtis iſtis tubulis, licet tantillum ſupra liquorem ambientem emineant, nunquam tamen extra eorum ora ſeſe evolvere, & in liquorem ſubſtratum decidere. Commodius itaque ſic explicatur : notum eſt, aquam, in qua multum ſalis eſt diſſolutum, graviorem eſſe eadem dulci; verum aqua marina, ut patet ex ſapore, multas particulas ſalinas in ſe continet; proinde erit gravior quam aqua fontana vel fluvialis : credibile itaque eſt, quod cum terra vicem gerat filtri, per cujus poros aqua ſolum dulcis tranſire poteſt, relictis ſalinis particulis, quæ gravitatem aquæ augent; aqua dulcis per terram longe altius aſcendere debeat, ob immenſam Oceani profunditatem, ita ut ad altiſſima quoque montium faſtigia, per preſſionem aquæ marinæ, protrudatur; ex quibus dein, cum ultra aſcendere nequeat, rivulorum inſtar emanet.

FINIS.

NOVUM

N°. II.

NOVUM THEOREMA PRO DOCTRINA SECTIONUM CONICARUM PER J. B. †

MIrum eſt, in materia veteribus ac recentioribus adeo trita, relictum eſſe aliquid, quod eorum induſtriam adhuc effugerit : præſertim proprietatem adeo generalem, cujuſmodi eſt hæc, quæ ſequitur. *Acta Eruditorum 1689. Novemb. pag. 586.*

Si in Triangulo per Axem Coni ACD, *demittatur a vertice in baſin perpendicularis* AI; *& ex ea abſcindatur* AN *æqualis perpendiculari* AB, *ex eodem vertice* A *in diametrum Coni-Sectionis* HO *demiſſæ; ac per* N *agatur* FE, *parallela baſi, ſecans crura Trianguli per axem in* F *&* E : *erit* FE *latus rectum Coni-Sectionis.*

. . . . . .

. . . . . .

Cum Fratri hæc aperuiſſem, mox eadem ſuis quoque demonſtrationibus munivit; quas, quia non inconcinnæ mihi viſæ ſunt, hic ſubjungam : quod in novo Theoremate facile merebitur veniam.

[Dicatur Latus rectum R, & ducantur AQ, parallela diametro HO, ſecans ipſam FE in G, atque AL, HZ parallelæ baſi CD, quarum illa diametro productæ occurrit in L, hæc ſecat ipſas AD in Z, & AQ in X : eruntque ſimilia Triangula AHX, AFG; AHZ, AFE, & MHZ, AGE: præterea HX = AG. Nam HX = AL, ob parallelogrammum HXAL, & AL = AG, ob æqualia & ſimilia Triangula ABL, ANG. (Eſt enim angulus LAN rectus æqualis angulo BAG recto; demtoque communi BAN, angulus LAB æqualis angulo NAG; præterea anguli ABL, ANG recti, & latus AB æquale lateri AN.) Igitur] TAB. I. N°. 2.

† *Jacobum* BERNOULLI, Autoris noſtri Fratrem.

1. *In Parabola.* FG : HX = AG (HX) : AX ; proinde HXq = FG×AX ; est autem (a) HA : R = HA×AX : HXq (FG×AX) = HA : FG. Ergo FG vel FE = R. *Q. E. D.*

Aliter. AH : FG = AH : HX+HX : FG = AF : FG+HX (AG) : FG = AF×AG : FGq = AH : R (a). Ergo FG = R. *Q. E. D.*

2. *In Hyperbola & Ellipsi.* MH : FE = MH : HZ+HZ : FE = AG : GE+AX : AG (HX) = AG : GE+AG : GF = AGq : GE×GF = MH : R (b). Ergo FE = R. *Q. E. D.*

(a) *Apollon.* Conic. I. 11.
(b) *Apollon.* Conic. I. 12. & 13.

N°. III.

SPECIMEN CALCULI DIFFERENTIALIS IN DIMENSIONE PARABOLÆ HELICOIDIS

ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque, per J. B. †

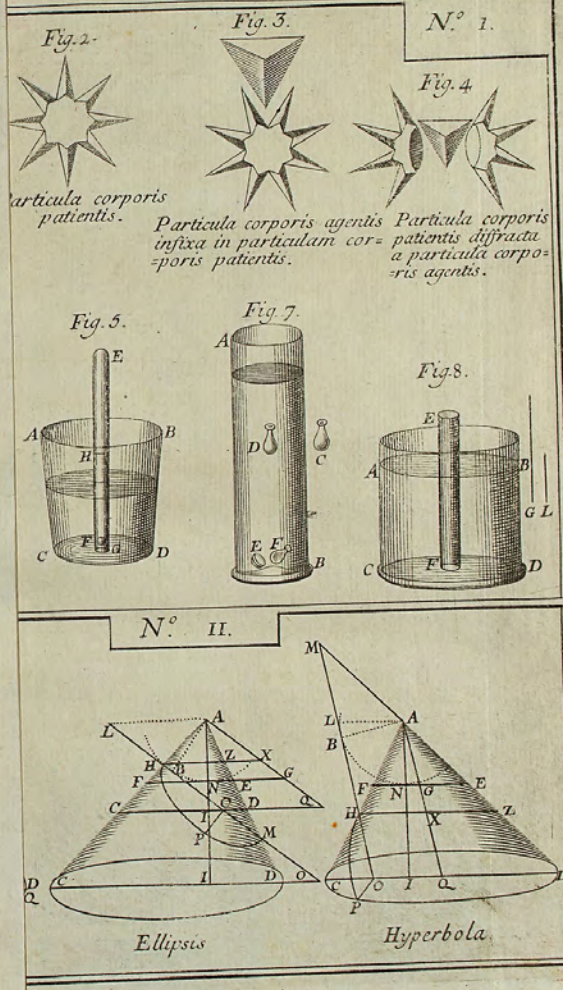
. . . . . .

Acta Eruditorum 1691. *Januar.* pag. 13. TAB. II. N°. 3.

CUM axis vulgaris Parabolæ curvatur in peripheriam Circuli BDM, curva BFGNA quæ per extremitates applicatarum CF, DG in centrum circuli A vergentium transit, dicitur nobis *Parabola helicoïdes*, vel, si mavis, *Spiralis Parabolica.* Esto. AB = r, . . . Arcus BC = x, CF = y . . . . . sitque CD particula circumferentiæ infinite parva, cui sit similis & concentricus arculus GE. Natura Curvæ $lx = yy$, adeoque $ldx = 2ydy$ . . . . . .

pag. 16. Id

† *Jacobus* BERNOULLI



ONIBUS.
AX; proinde
=HA×AX:
el FE=R.

FG=AF:
=AH: R

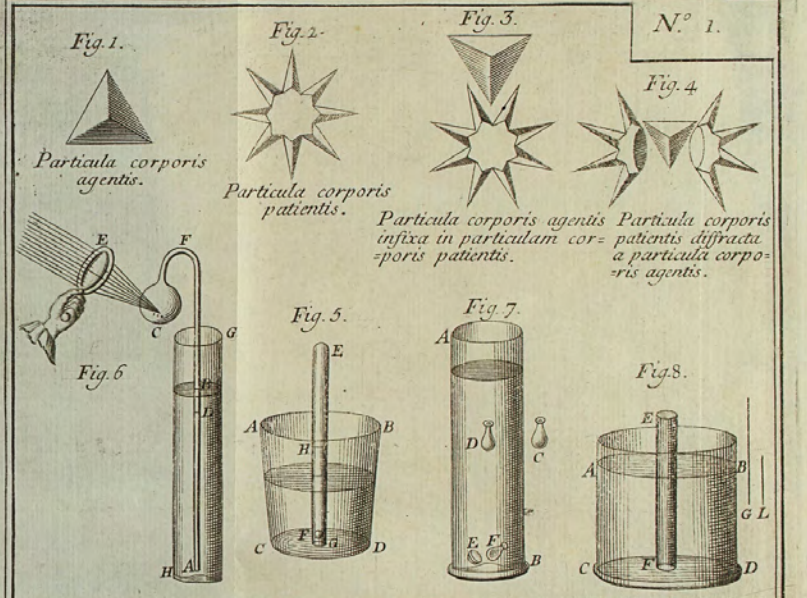
IH: HZ+
=AG: GE+
rgo FE=R.

NTIALIS
ICOIDIS
lutionibus,

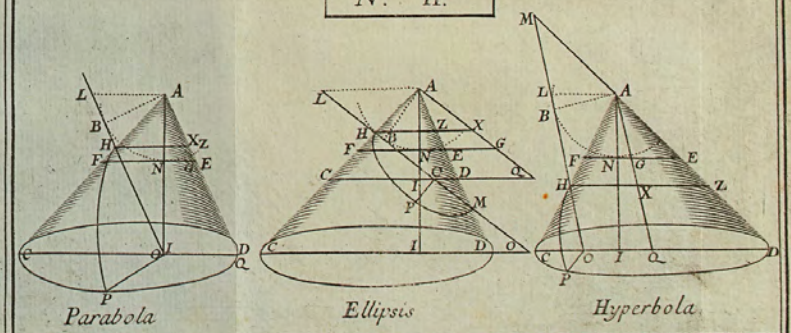
. . .
. . .

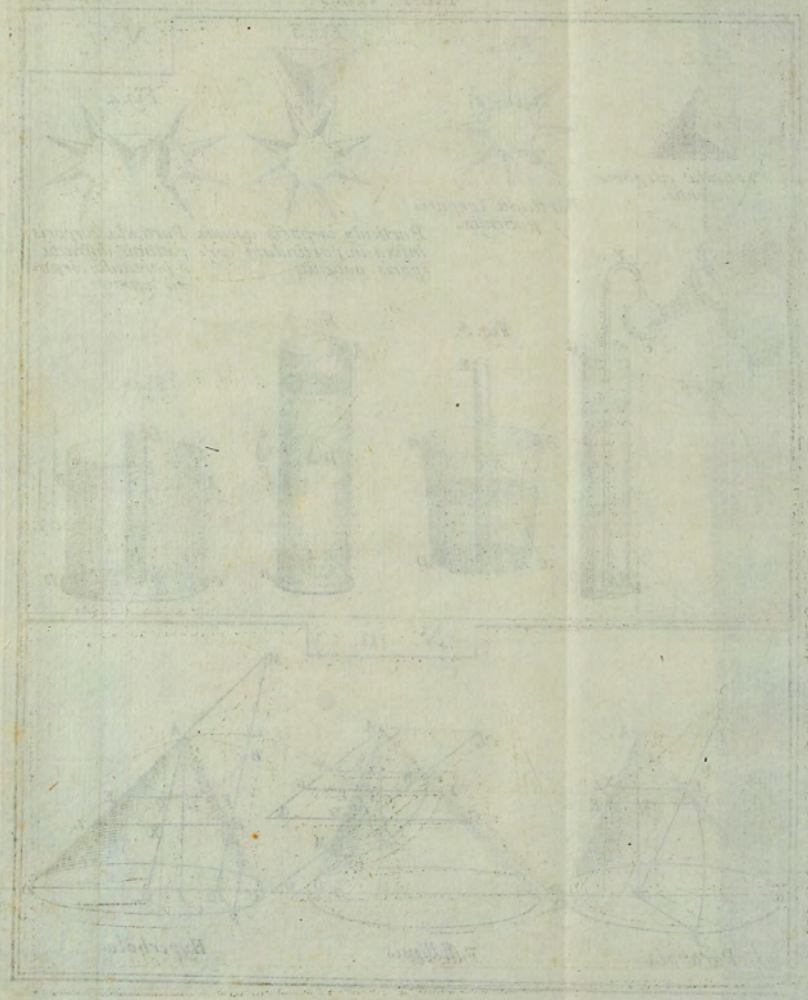
Circuli BDM,
CF, DG in
bola helicoïdes,
cus BC=x,
nfinite parva,
væ $lx=yy$,
. . . . .
. . . . .
Id

N.° I.



N.° II.





N°. III. *DI*

Id cum Fratre
protinus animadv
expressæ, aliam
centro A, interv
va M↓ talis, u
E G; erit propt
↓ r x, FEG, u
ponendo, tota
Ad inveniendum
quantitate (rdx—
ipsius dx, qui in n
cujus integrale yy
quæ si vocetur z =
$3rlz + 2y^3$ — 3
(y) & applicatam
cujusvis, hac ra
uno gradu altiore
sit *Spiralis Archim*
munis Parabola
pheriam, diamet
dignum est) &
sumto in recta
secans Parabolam
circuli BM, seca
tio portioni curv
comprehensum,
Spiralis convenie
qui de ejus detect
refert: quasi no
inventum, suop

Id cum Fratrem monuissem, in his quoque non leviter versatum, protinus animadvertit ille, posse cuilibet fere Spirali, æquatione algebraica expressæ, aliam curvam geometricam æqualem assignari. Descriptis enim, centro A, intervallo AF & AG, arcubus Fρ, Gπ; si concipiatur curva Mψ talis, ut applicatarum $\rho\varkappa$, $\pi\psi$ differentia $\nu\psi$ æquetur arcui EG; erit propter $\nu\varkappa = \pi\rho =$ EF, & $\nu\psi =$ EG, & angulos $\psi\nu\varkappa$, FEG, utrinque rectos, etiam $\psi\varkappa =$ FG, & proinde, componendo, tota portio curvæ Mψ æqualis toti portioni Spiralis BG. Ad inveniendum autem naturam curvæ Mψ, substituendus tantum in quantitate $(rdx - ydx) : r$ (quæ semper exprimit ipsam EG vel $\nu\psi$) valor ipsius dx, qui in nostra curva est $2ydy : l$, ut habeatur $2ydy : l - 2yydy : rl$; cujus integrale $yy : l - \frac{2}{3}y^3 : rl$ denotat longitudinem applicatæ $\pi\psi$; quæ si vocetur z, habebitur æquatio inter z & $yy : l - \frac{2}{3}y^3 : rl$, seu $3rlz + 2y^3 - 3ryy = 0$, quæ relationem exprimit inter abscissam Mπ (y) & applicatam $\pi\psi$ (z). In genere vero Spiralis Parabolica gradus cujusvis, hac ratione, commutatur in aliam Paraboloidem geometricam uno gradu altiorem. Sed & hoc observavimus, quod si curva ANIGB sit *Spiralis Archimedæa*, & describatur, vertice A, ad axem AK, communis Parabola Aμ, cujus parameter sit quarta proportionalis ad peripheriam, diametrum & radium circuli BDM; erunt (quod memoratu dignum est) & curvæ, & illis comprehensa spatia æqualia: nimirum, sumto in recta AM quovis puncto λ; si ad illud applicetur recta $\lambda\mu$, secans Parabolam in μ, & ducatur arcus λN concentricus peripheriæ circuli BM, secans Helicem in N; æquabitur perpetuo Helicis AN portio portioni curvæ parabolicæ Aμ; & spatium AN, recta AN & spirali comprehensum, Spatio parabolico A$\lambda\mu$A. Quam miram Parabolæ & Spiralis convenientiam, postmodum, apud WALLISIUM deprehendimus, qui de ejus detectione HOBBIUM & ROBERVALLIUM inter se disceptasse refert: quasi non possint plures, & tempore & loco dissidentes, in idem inventum, suopte ingenio, incidere.

SOLUTIO

N°. IV.

SOLUTIO PROBLEMATIS FUNICULARII,

exhibita à JOHANNE BERNOULLI, *Basil. Med. Cand.*

Acta Eruditorum 1691. Jun. pag. 274.

ANNUS fere est, cum, inter sermocinandum cum Cl. Fratre, mentio forte incidisset de natura Curvæ, quam Funis inter duo puncta fixa libere suspensus format. Mirabamur, rem omnium oculis & manibus quotidie expositam, nullius huc usque attentionem in se concitasse. Problema videbatur eximium & utile; at tum, ob prævisam difficultatem, tangere noluimus; statuimus itaque illud publice Eruditis proponere †; visuri num qui vadum tentare auderent: nesciebamus enim, quod jam inde a GALILÆI temporibus inter Geometras agitatum fuisset. Interea dignum censuit nodum hunc, cui solvendo se accingeret summus Geometra LEIBNITIUS, significavitque non multo post * se clave sua aditus problematis feliciter reseraſſe; concesso tamen & aliis tempore, intra quod, si nemo solveret, ipse solutionem suam publicaturus esset. Id animum addidit, ut problema denuo aggrederer, quod eo quidem cum successu factum, ut brevi, & ante termini à Viro Cel. positi exitum, ejus solutionem omnimodam & plenariam, qualem antea ne sperare quidem ausus fuissem, invenerim. Reperi autem Curvam nostram Funiculariam non esse geometricam, sed ex earum censu, quæ mechanicæ dicuntur; utpote cujus natura determinata æquatione algebraica exprimi nequit, nec nisi per relationem curvæ ad rectam, vel spatii curvilinei ad rectilineum, habetur; sic ut, ad illam describen-

† In *Actis Erudit.* 1690. *Maj.* pag. 219. his verbis: *Invenire, quam curvam referat Funis laxus, & inter duo puncta fixa libere suspensus.* Sumo autem, Funem esse lineam in omnibus suis partibus facillime flexilem.

* *Acta Erud.* 1690. *Jul.* pag. 360.

cribendam, alterius curvæ rectificatio, vel spatii curvilinei quadratura supponatur, ut ex sequentibus Constructionibus liquet.

Constr. I. Ductis normalibus CB, DE, sese secantibus in A; centroque C, ubivis sumpto in axe CB, & vertice A, descripta Hyperbola æquilatera AH; construatur curva LKF, quæ talis sit, ut ubique CA sit media proportionalis inter BH & BK; fiat rectangulum CG æquale spatio EABKF; erit, productis IG, HB, punctum concursus M in Curva Funicularia MAN. TAB. II. N°. IV. *Fig.* 1.

Constr. II. Descripta, ut prius, ad axem BA Hyperbola æquilatera BG; construatur ad eundem axem Parabola BH, cujus latus rectum æquetur quadruplo lateris recti vel transversi Hyperbolæ; ordinatimque applicata HA producatur ad E, ita ut recta GE sit æqualis lineæ Parabolicæ BH; dico punctum E esse in Curva Funicularia EBF. *Fig.* 2.

Ex his patet, Curvæ hujus EBF naturam per æquationem geometricam haberi non posse, nisi simul rectificatio lineæ Parabolicæ detur. Hujus autem & præcedentis Constructionis demonstrationem lubens omitto, ne Celeberrimo Viro primæ inventionis palmam vel præripiam, vel inventa sua super hac materia plane supprimendi ansam præbeam: sufficiet hic, si notabiliores hujus curvæ proprietates addidero.

1. Ducta tangente FD, erit AF. AD = BC : BF curvam. *Fig.* 2.
2. AE vel AF æquatur curvæ Parabolicæ BH, dempta recta AG.
3. Curva BE vel BF æqualis est rectæ AG; id est, portiones curvæ Funicularia ad axem applicatæ conficiunt Hyperbolam æquilateram: insignis est hujus curvæ proprietas.
4. Spatium Funicularium BAE vel BAF est æquale rectangulo sub BA & AF, diminuto rectangulo sub CB & FG.
5. Curva MNO, ex cujus evolutione describitur Funicularia BE, est tertia proportionalis ad CB & AG.
6. Recta vero evolvens EO est tertia proportionalis ad CB & CA.

7. Recta BM, usque ad principium curvæ MNO sumpta, æquatur ipsi CB.

8. MP est dupla ipsius BA.

9. Rectangulum sub CB & PO duplum est spatii Hyperbolici ABG.

10. Recta CP bisecta est in puncto A.

11. Curva EB est ad curvam MNO, ut recta CB ad rectam AG.

12. Si ad AG applicentur duo Rectangula AI, AK; quorum unum AI, ei quod sub semilatere transverso CB & recta FG comprehenditur rectangulo, alterum AK, quod ipsi spatio Hyperbolico BGA æquatur; & differentiæ latitudinum KI sumatur in axe a vertice B æqualis BL, erit punctum L centrum gravitatis curvæ Funicularia EBF.

13. Si super EF infinitæ intelligantur descriptæ curvæ ipsi Funicularia EBF æquales, illæque in rectas extendantur; & in singulis singulæ extensæ punctis applicentur rectæ ipsis respective distantiis a linea EF æquales; erit omnium spatiorum, quæ sic efficiuntur, illud quod a Funicularia gignitur, maximum.

Cœpit Hon. Frater speculationem hanc extendere etiam ad funes inæqualiter crassos, quorum crassities ad longitudinem relationem obtinet æquatione algebraica exprimibilem; notatque unum casum, quo problema per curvam simplicem mechanicam solvi possit: nempe si supponatur Figura Curvilinea ABDEG, cujus applicata GE sit reciproce in dimidiata ratione abscissæ AG, eaque sit in omnibus suis applicatis flexilis, hoc est, si concipiatur funis AG gravatus, in singulis suis punctis respectivis, rectis GE, vel (quod tantumdem est) differentiis applicatarum GH in Parabola AHI, aut denique portiunculis curvæ cycloidalis AHI (cujus vertex A;) isque, sic gravatus, suspendi intelligatur, ita ut punctum A sit omnium infimum, (quod fit, ubi connexum habuerit, a parte A, alium funem ejusdem longitudinis, & in æqualibus a punctio

Fig. 3.

puncto A distantiis æqualiter gravatum): tum jubet ad axem AG construere Hyperbolam æquilateram ABC, cujus vertex A, applicatamque BD producere ad E, ita ut rectangulum sub semilatere recto vel transverso, & linea DE, sit æquale spatio ADB; ostenditque punctum E esse ad curvam quæsitam AEF, quam funis dicta ratione gravatus format; ipsam vero curvam AE esse tertiam proportionalem ad rectum vel transversum latus Hyperbolæ, & applicatam ejus DB; tangentem EH haberi, sumpta IH quarta proportionali ad semilatus rectum, abscissam AD & applicatam DB; &c. Reperi autem, (quod memorabile est) curvam hanc AEF illam ipsam esse, ex cujus evolutione altera BE, quam uniformis crassitiei funis format, describitur; adeoque eandem cum curva MNO.

Fig. 4.

Fig. 2.

Notare convenit, quod si quis experimentis hæc examinare instituat, catenulam præ fune seligere debeat, quam, ob nimiam cum levitatem, tum rigiditatem, ad id ineptum deprehendimus. Ceterum, qui materiam hanc perficere & ampliare volet, poterit investigare naturam curvæ; quam refert funis in hypothesi a Terræ centro distantiæ finitæ; vel si supponatur insuper a proprio pondere extensibilis, aut quocunque alio modo gravatus; vel etiam, vice versa, qualiter illum gravare conveniat, ut referat lineam Parabolicam, Hyperbolicam, Circularem, aliamve quamcunque datam Curvam: Res enim omnino in potestate est.

Videatur horum omnium Demonstratio Analytica in Tom. III. *Videatur etiam* Nus. VII.

N°. V.

J. B. DEMONSTRATIO CENTRI OSCILLATIONIS

ex natura Vectis, reperta occasione eorum, quæ super hac materia in Historia Literaria Roterodamensi *recensentur Articulo* 2. *Mens. Jun.* 1690.

Acta Eruditorum 1691. *Jul.* pag. 317.

. . . . . .

. . . . . .

pag. 321. NOtum occasione præsentis materiæ Eruditis facio, Fratrem meum observasse, quod præter HUGENII Cycloidem, infinitæ dentur curvæ, per quas descendens grave oscillationes peragat isochronas: item non solum cum NEWTONO & TSCHIRNHAUSIO infinitas Cycloides animadvertisse, quæ sui evolutione se ipsas describant, sed & detexisse quampiam ex alio quam Cycloidalium genere, quæ eadem proprietate gaudeat.

N°. VI.

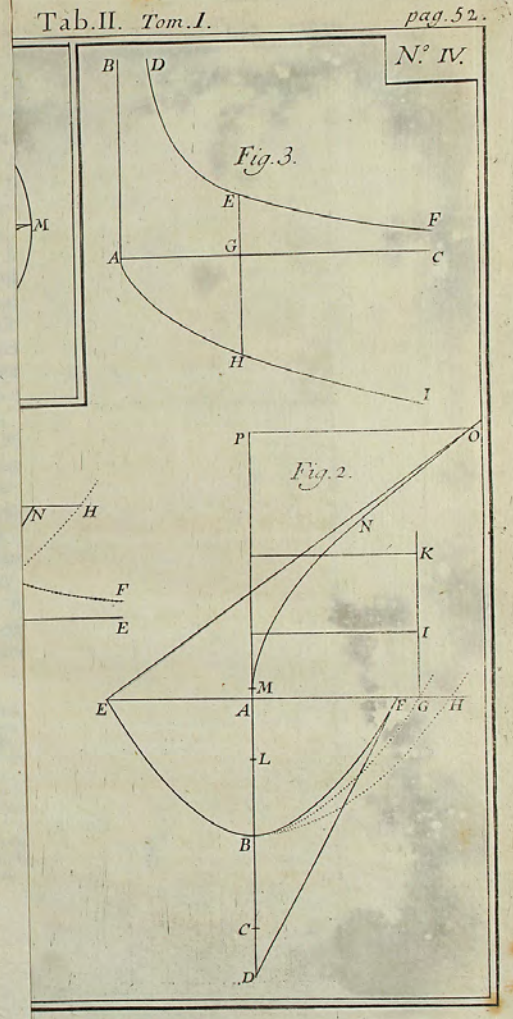
SOLUTIO CURVÆ CAUSTICÆ

Per vulgarem Geometriam Cartesianam; aliaque.
Auctore JOH. BERNOULLI, *Med. Cand.*

Acta Eruditorum 1692. *Januar.* p. 30. QUIA modus, quo naturam Curvæ Causticæ Nob. D.T.* primum consideratæ per vulgarem Geometriam inquisivi, diversamque deprehendi ab ea, quam applicatæ Semicirculi in punctis bisectionum formant, non cuivis obvius est; placet

TAB III. *Fig.* 6.

* Nob. *De Tschirnhausen* in *Actis Erud.* 1682. *Octob.* pag. 364. dixerat curvam quam perpetuo tangunt radii a semi-circulo reflexi, positis incidentibus parallelis, ita describi posse. Sit ECe semicirculus reflectens, AC semi-diameter radiis



ILLATIONIS
e super hac ma-
entur Articulo 2.

. . .
. . .

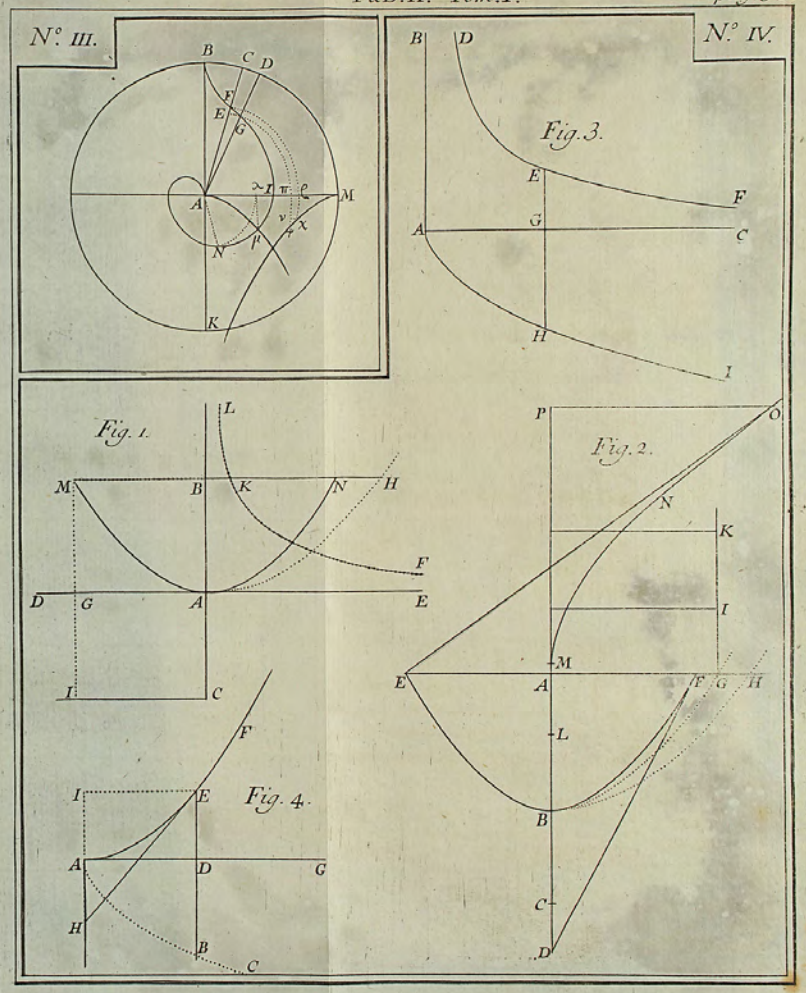
, Fratrem meum
n, infinitæ dentur
t isochronas: item
infinitas Cycloides
, sed & detexisse
eadem proprietate

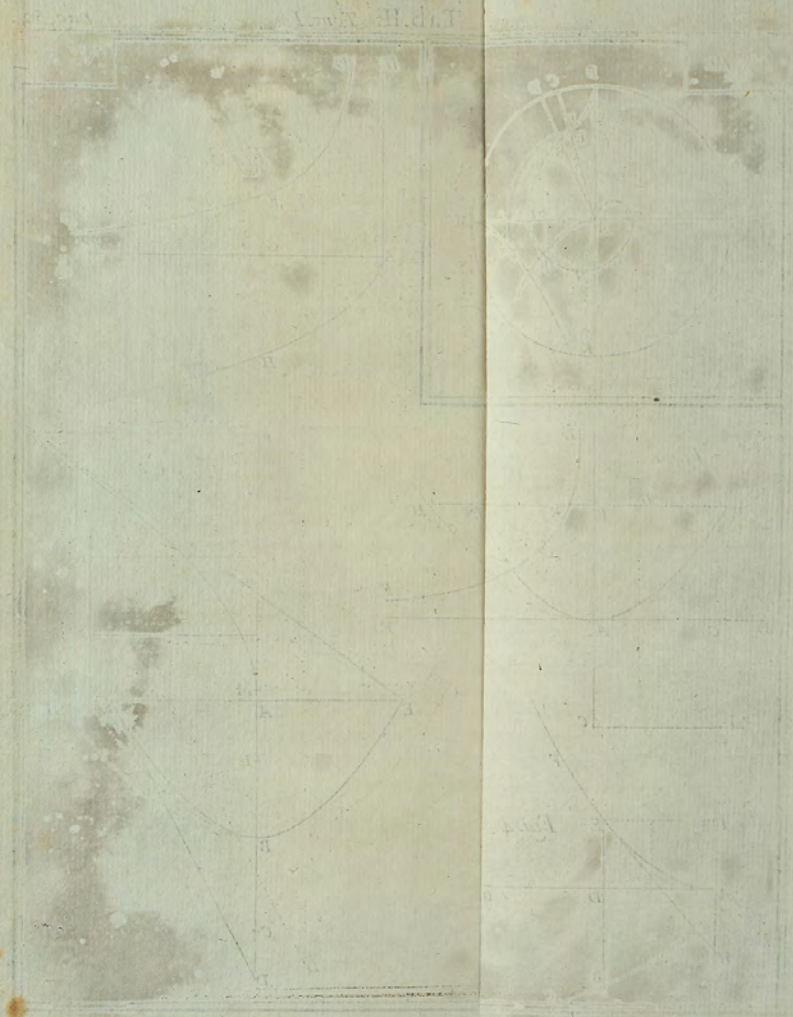
****

JSTICÆ
aliaque.
Cand.

cæ Nob. D.T.*
metriam inqui-
licatæ Semicir-
vis obvius est;
placet

g. 364. dixerat cur-
s incidentibus paral-
C semi-diameter ra-
diis





placet hic eum, in g
exponere : ubi prim
radius reflexus paral
inter centrum A &
los ACF = AC
ACD = CAB;

Hoc præliminato
Sint (*Fig. II.*) tres
CD, se mutuo sec
bet, ex hypothesi,
contactus radii BE
vam secaret; nec eti
que contra hypothe
puncta A & C mag
dent etiam ad se in
tetur punctum cont
concurrent quoque
natus sit, nimirum
concursum hunc ap
speciali exemplo ita
illud duci possit, q
per quodlibet aliud
concurrentiæ, sempe
duci possint, ita ut
vel tam KA = A
dictum est de punct

diis incidentibus FD, *fd*
semi-circuli EGA, Age
los ECe, EGA bisecetu
causticam EHB*he*. Hum
sen, in *Actis Erud.* 1690.
„ attinet, inquit, nuper
„ giis specimin ibus clarus
„ ad sex ascendere dimen
„ tantum esse dimensionu
„ prolixæ erant, cum n
„ prehendi errorem qui i

placet hic eum, in gratiam amatorum hujus Geometriæ, plenius exponere: ubi primo notare convenit, quod (*Fig. I.*) CB radius reflexus paralleli DC, sit æqualis ipsi AB, interceptæ inter centrum A & punctum intersectionis B. Nam ob angulos ACF = ACE & DCF = BCE, erit ACB = ACD = CAB; ergo BC = AB. *Q. E D.* TAB. III. *Fig.* 1.

Hoc præliminato, hujus Curvæ generationem sic concipio: Sint (*Fig. II.*) tres radii, prædicto modo reflexi, AF, BE, CD, se mutuo secantes in punctis G, H, I, quorum quilibet, ex hypothesi, curvam quæsitam tangit; ideoque punctum contactus radii BE non poterit esse in HB, secus AF curvam secaret; nec etiam erit in GE, alias DC secaret; utrumque contra hypothesin: erit ergo in GH. Intelligantur nunc puncta A & C magis appropinquari ad B; magis itaque accedent etiam ad se invicem puncta H & G, ut ita arctius limitetur punctum contactus; si ergo A & C coincidant in B, concurrent quoque G & H, adeo ut contactus plane determinatus sit, nimirum in concursu punctorum G & H. Liceat concursum hunc appellare *punctum concurrentiæ*, quod in hoc speciali exemplo ita comparatum est, ut unica linea EB per illud duci possit, quæ sit æqualis ipsi conterminæ KB, cum per quodlibet aliud punctum G vel H, cis vel ultra punctum concurrentiæ, semper duæ lineæ EB & DC, vel EB & AF, duci possint, ita ut tam KC = CD, quam KB = BE, vel tam KA = AF, quam KB = BE. Quod hactenus dictum est de puncto concurrentiæ in radio reflexo EB, pari- TAB. III. *Fig.* 2.

diis incidentibus FD, *fd* parallela, E *e* diameter iis perpendicularis; describantur semi-circuli EGA, A*g e*; & pars radii incidentis GD, intercepta inter semi-circulos EC*e*, EGA bisecetur in H: erit punctum H unum eorum, quæ constituunt causticam EHB*b e*. Hunc errorem hic refutat Noster, & cum ipse *De Tschirnhausen*, in *Actis Erud.* 1690. *Febr.* pag. 71. candide agnoscit. „Quod ad circulum „ attinet, inquit, nuper Dn. *Bernoulli*, Vir in hisce studiis eximie versatus & egre- „ giis specimin ibus clarus, observavit curvam quæ hic per reflexos radios formatur, „ ad sex ascendere dimensiones: ego vero ex calculo olim collegeram illam quatuor „ tantum esse dimensionum. Quapropter rationes denuo subducens, quæ satis olim „ prolixæ erant, cum nondum instructus essem necessariis compendiis, illico de- „ prehendi errorem qui irrepserat.

ter etiam intelligendum erit de omnibus aliis, in radiis reflexis FA, DC, &c. Ideoque problema propositum huc recidit: *Invenire naturam curvæ, quam formant puncta concurrentiæ radiorum reflexorum.*

TAB. III. *Fig.* 3. Ad hoc investigandum, ponatur more *Cartesiano* (*Fig. III.*) $AB = x$, perpendicularis $BC = y$, $AK = a$: inveniendа itaque est CD, quæ si producatur ad E, DE sit $= AE$; et resultans æquatio habebit duas radices æquales, quia supponitur C esse punctum concurrentiæ, per quod scil. unica linea DE ducitur, ita ut sit $= AE$: ponatur ergo $CD = z$ et $AE(ED) = m$, erit $CE = m - z$, $BE = \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)}$, et $AE = AB - BE = x - \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)} = m$: reducta æquatione invenitur $m = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$; porro quia $\sqrt{(aa - xx)} = GB$, erit $GC \times GH = (DC \times CF) = aa - xx - yy$, proinde $CF = (aa - xx - yy) : z$ & $DF = (aa - xx - yy + zz) : z$, & $EF = (aa - xx - yy + zz) : z - m$; ideoque $DE \times EF = (KE \times EI = aa - mm = (aa - xx - yy + zz)\, m : z - mm$; invenietur ergo $m = aaz : (aa - xx - yy + zz) = (xx - zz + yy) : 2x - 2z$; reducta æquatione habetur $z^4 - 2xxzz - 2yyzz - aazz + 2aaxz + x^4 + 2xxyy + y^4 - aaxx - aayy = 0$.

Hæc itaque æquatio, duas radices æquales habens, multiplicetur per duas progressiones arithmeticas

$$\begin{array}{llll} -0, & -1, & -2, & -3, & -4, \\ z^4 * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 & = 0 \\ & -2yyzz & & +2xxyy & \\ & -aazz & & +y^4 & \\ & & & -aaxx & \\ & & & -aayy & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} +4, & +3, & +2, & +1, & +0 \\ z^4 * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 & \\ & -2yyzz & & +2xxyy & \\ & -aazz & & +y^4 & \\ & & & -aaxx & \\ & & & -aayy & \end{array}$$

provenient duæ æquationes ☉ & ☿

$$\begin{array}{llll} \odot & 4xxzz & -6aaxz & -4x^4 & = 0 \\ & +4yyzz & & -8xxyy & \\ & +2aazz & & -4y^4 & \\ & & & +4aaxx & \\ & & & +4aayy & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} ☿ & 4z^4 * & -4xxzz & +2aaxz & = 0 \\ & & -4yyzz & & \\ & & -2aazz & & \end{array}$$

multipli-

multiplicetur ☉ per z & ☿ per $(xx + yy + \frac{1}{2}aa) : z$, provenit

$$\begin{array}{llll} 4xxz^3 & -6aaxzz & -4x^4z & = 0 \\ +4yyz^3 & & -8xxyyz & \\ +2aaz^3 & & -4y^4z & \\ & & +4aaxxz & \\ & & +4aayyz & \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{lll} 4xxz^3 * & -4x^4z & +2aax^3 = 0 \\ +4yyz^3 & -8xxyyz & +2aaxyy \\ +2aaz^3 & -4aaxxz & +a^4x \\ & -4y^4z & \\ & -4aayyz & \\ & -a^4z & \end{array}$$

quarum hanc ab illa si subtrahas, residuum, per aa divisum erit ☿

$$\begin{array}{llll} ☿ & 6xzz & -8xxz & +2x^3 = 0 \\ & & -8yyz & +2xyy \\ & & -aaz & +aax \end{array}$$

multiplicetur ☉ per $3x$, & ☿ per $2xx + 2yy + aa$, habebitur

$$\begin{array}{llll} 12x^3zz & -18aaxxz & -12x^3 & = 0 \\ +12xyyzz & & -24x^3yy & \\ +6aaxzz & & -12xy^4 & \\ & & +12aax^3 & \\ & & +12aaxyy & \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{lll} 12x^3zz & -16x^4z & +4x^5 = 0 \\ +12xyyzz & -32xxyyz & +8x^3yy \\ +6aaxzz & -16y^4z & +4aax^3 \\ & -10aaxxz & +4xy^4 \\ & -10aayyz & +4aaxyy \\ & -a^4z & +a^4x \end{array}$$

subtractione peracta, residuum est ☽

$$\begin{array}{llll} ☽ & 16x^4z & -16x^5 & = 0 \\ & +32xxyyz & -32x^3yy & \\ & +16y^4z & -16xy^4 & \\ & -8aaxxz & +8aax^3 & \\ & +10aayyz & +8aaxyy & \\ & +a^4z & -a^4x & \end{array}$$

multiplicetur ☿ per z, & ☿ per $\frac{1}{2}x$, habebitur

$$\begin{array}{llll} 6xz^3 & -8xxzz & +2x^3z & = 0 \\ & -8yyzz & +2xyyz & \\ & -aazz & +aaxz & \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{lll} 6xz^3 * & -6x^3z & +3aaxx = 0 \\ & -6xyyz & \\ & -3aaxz & \end{array}$$

& subtractionis residuum erit

$$\begin{array}{llll} & 8xxzz & -8x^3z & +3aaxx = 0 \\ + & 8yyzz & -8xyyz & \\ + & aazz & -4aaxz & \end{array}$$

quod

quod si subtrahatur ex duplo ⊙

$$\begin{array}{l} 8xxzz - 12aaxz - 8x^4 = 0 \\ + 8yyzz \quad - 16xxyy \\ + 4aazz \quad - 8y^4 \\ \qquad\qquad + 8aaxx \\ \qquad\qquad + 8aayy \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8xxzz - 8x^3z + 3aaxx = 0 \\ + 8yyzz - 8xyyz \\ + aazz - 4aaxz \end{array}$$

residuum erit

$$\begin{array}{l} 3aazz - 8aaxz - 8x^4 = 0 \\ \qquad + 8x^3z - 16xxyy \\ \qquad + 8xyyz - 8y^4 \\ \qquad\qquad + 5aaxx \\ \qquad\qquad + 8aayy \end{array}$$

hoc multiplicetur per $2x$, & ♀ per aa; erit

$$\begin{array}{l} 6aaxzz - 16aaxxz - 16x^5 = 0 \\ \quad + 16x^4z - 32x^3yy \\ \quad + 16xxyyz - 16xy^4 \\ \qquad\qquad + 10aax^3 \\ \qquad\qquad + 16aaxyy \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} 6aaxzz - 8aaxxz + 2aax^3 = 0 \\ \qquad - 8aayyz + 2aaxyy \\ \qquad - a^4z \quad + a^4x \end{array}$$

residuum

$$\begin{array}{l} ♀ \; 8aaxxz + 16x^5 = 0 \\ \quad - 16x^4z + 32x^3yy \\ \quad - 16xxyyz + 16xy^4 \\ \quad - 8aayyz - 8aax^3 \\ \quad - a^4z \quad - 14aaxyy \\ \qquad\qquad + a^4x \end{array}$$

addantur nunc ♀ & ☽, & dividendo per $2yy$ habebitur

$8xxz + 8yyz + aaz - 3aax = 0$, ideoque erit $z = 3aax : (8xx + 8yy + aa)$

& per æq. ♀ est $z = \dfrac{16x^5 + 32x^3yy + 16xy^4 - 8aax^3 - 14aaxyy + a^4x}{8aaxx - 16x^4 - 16xxyy - 8aayy - a^4}$

Multiplicando per crucem, & reducta æquatione ad cyphram, orietur tandem

$$\begin{array}{l} 64x^6 - 48aax^4 + 12a^4xx - a^6 = 0 \\ \quad + 192yx^4 - 96aayyxx - 15a^4yy \\ \qquad\qquad + 192y^4xx - 48aay^4 \\ \qquad\qquad\qquad + 64y^6 \end{array}$$

Hæc, quæ vera est æquatio naturam Curvæ determinans, ad pauciores dimensiones reduci nequit; cum per positionem $y =$

$y = \frac{1}{2}a$ æquatio $256x^6 - 27a^6 = 0$ irreducibilis oriatur: unde consequitur, diversam esse ab ea y, quam applicatæ semicirculi in punctis bisectionum formant; ut pote cujus natura per æquationem biquadraticam exprimitur,

$$\begin{array}{l} 16x^4 - 8aaxx + a^4 \\ \quad - 8ayxx - 2a^3y = 0 \\ \quad + 16yyxx + aayy \end{array}$$

Haud absimili modo invenitur natura curvæ ABC (*Fig.* 4), quæ talis est, ut a quocunque curvæ puncto B tangens utrimque protensa, & a cruribus anguli recti FA, FC intercepta, ED, sit æqualis constanti datæ. Invenio namque pro æquatione naturam curvæ exprimente (posito $FG = x$, $GB = y$, $ED = a$,) TAB. III. *Fig.* 4.

$$\begin{array}{l} x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6 \\ \quad + 3yyx^4 + 21aayyx^2 + 3a^4yy \\ \qquad + 3y^4x^2 - 3aay^4 = 0 \\ \qquad\qquad + y^6 \end{array}$$

Curvæ autem portio BC (ut & hoc moneam) æqualis est $\frac{3}{2}$ BD; proinde longitudo totius curvæ ABC æquatur $\frac{3}{2}$ AF, vel $\frac{3}{2}$ ED.

Insuper, natura curvæ CKIH, quæ ex evolutione curvæ ABC describitur, posito $FG = x$, $GI = z$, exprimitur per hanc æquationem

$$\begin{array}{l} 4x^6 - 12aax^4 + 12a^4xx - 4a^6 \\ \quad + 12zzx^4 - 24aazzx^2 + 12a^4zz \\ \qquad + 12z^4xx - 15aaz^4 = 0 \\ \qquad\qquad + 4z^6 \end{array}$$

Curvæ hæ habent hanc proprietatem insignem: spatium curvilineum BDC est ad spatium curvilineum DKC, ubique, ut 4 ad 5.

Facta FL & $FM = \frac{2}{3}$ AF, seu FC; ductisque MN & LN, parallelis FC & AF; erit punctum concursus N centrum gravitatis curvæ ABC.

Facta vero $FO = \frac{2}{3} FG$, erit centrum gravitatis portionis AB in linea parallela OP.

Facta $FQ = \frac{2}{3} GB$, erit centrum gravitatis portionis BC in linea parallela QR.

Cæterum animadvertit *Clarissimus Frater* methodum hanc posse generalem effici, & adhiberi ad determinandas naturas omnium Evolutarum & Causticarum, hoc est, curvarum, quæ per intersectiones perpendicularium aut radiorum reflexorum formantur. Etenim si duæ rectæ (*Fig.* 5.) BD, CD, fingantur esse perpendiculares ad curvam ACB, vel radiorum incidentium LB, LC reflexi, intersecantes sese in communi puncto D; sequitur utique, quod vice versa ex dato puncto D duæ quoque ejusmodi lineæ inflecti possint, quæ sint vel perpendiculares curvæ AB, vel reflexi radiorum in punctum L vergentium. Quocirca, si rectæ AE, ED, ut ut indeterminatæ, considerentur tantisper ut cognitæ & determinatæ, hoc est, punctum D ut datum; & quæratur exinde longitudo z, puta ipsius DB, vel BL, vel BG, vel AG, (prout hoc illudve simplicius videbitur); habebit æquatio longitudinem z exprimens, duas radices æquales quidem, sicubi puncta B & C indistantia, hoc est, punctum D in curva optata fuerit: quare, si porro dicta æquatio nota methodo tractetur, & eliminetur ex illa littera z, resultabit alia, quæ rationem indeterminatarum x & y, sive rectarum AE, ED, adeoque naturam curvæ quæsitæ exhibet. E quibus concludit, Geometriam vulgarem, si dextre adhibeatur, posse nonnunquam ad ea quoque Problemata extendi, quæ absque reconditiore indivisibilium Geometria solvi non posse credebantur; quanquam cætera cum hac neutiquam comparari mereatur. Speciatim annotat, Evolutam Parabolæ expeditiori calculo sic inveniri, quam nuper illam ope methodi infinite parvorum repererat. Positis enim

TAB. III. *Fig.* 5.

Latere

Latere recto Parab. $= a$

$AI = \frac{1}{2} a$

$IE = x$

$ED = y$

$BG = z$

erit $AG = \frac{zz}{a}$

$GF = \frac{1}{2} a$

$EF = \frac{ay}{2z}$

$AI + IE = AG + GF + FE$

$\frac{1}{2} a + x = \frac{zz}{a} + \frac{1}{2} a + \frac{ay}{2z}$

$x = \frac{zz}{a} + \frac{ay}{2z}$

$$\begin{array}{l|l} 2z^{3*} - 2axz + aay = 0 & 2z^{3*} - 2axz + aay = 0 \\ \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad\quad 3 & \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ -4axz + 3aay = 0 & 6z^3 - 2axz = 0 \\ z = 3ay : 4x & 3zz - ax = 0 \\ zz = 9aayy : 16xx & zz = ax : 3 \end{array}$$

Unde $9aayy : 16xx = ax : 3$, & $27ayy = 16x^3$.

N°. VII.

SOLUTION DU PROBLEME

de la Courbure que fait une Voile enflée par le Vent.

Par Mr. BERNOULLI, *Frére du Professeur à* Bâle.

TOus ceux qui auront lu avec attention, dans les Actes de *Leipsic* de l'année passée, les trois Solutions du problême de la nature de la courbe que fait une Chaine pendante, conviendront aisément que ce problême est un des plus curieux & des plus utiles que l'on ait résolu dans ce siécle. On ne peut pas non plus douter de sa difficulté, puisque plusieurs Géométres s'y sont appliqués depuis long-tems, & n'ont pu jusqu'à présent en donner aucune solution légitime. On y trouve des constructions très différentes, qui déterminent néanmoins une même courbe. Monsieur HUYGENS se sert du calcul des Sinus: Monsieur LEIBNITZ employe

Journal des Savans 1692. 16. Journal du 28. Avril. pag. 189. édit. de Paris, & pag. 280. éd. d'Amst.

la courbe des Logarithmes ; & je me ſuis ſervi de la rectification de la Parabole.

Mon *Frére*, Profeſſeur à *Bâle*, a pris de là occaſion de rechercher pluſieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux, & entr'autres celle que repréſente une voile enflée par le vent, en faiſant abſtraction de ſa peſanteur ; & il eſt arrivé à une équation différentielle de différentielle, qu'il me communiqua pendant que j'étois à *Genève*, ſans pourtant me faire part de la méthode dont il s'étoit ſervi. Il me preſſa en même temps d'en tirer une équation littérale ou algébrique, qui exprimât la nature de la courbe, ou du moins d'en déterminer les points par quelque conſtruction. Mais je ne tâchai ſeulement pas de le ſatisfaire, à cauſe de la difficulté qui me parut très-grande : car l'équation qu'il me propoſoit, étoit compoſée de deux ſortes de différentielles & d'intégrales.

Je ne penſois donc plus à ce problême, lors que je reçus nouvellement une Lettre, dans laquelle il me marque, qu'il a réduit l'autre équation à celle-ci : $adsddx = dy^3$ (a eſt une quantité conſtante ; dx eſt la différentielle de l'interceptée x ; ddx eſt la différentielle de dx ; dy la différentielle de l'appliquée y ; ds, qu'il ſuppoſe toujours égale, la différentielle de la courbe ;) & il m'excite encore d'achever la ſolution qu'il avoit commencée, & conduite juſqu'à cette équation ; ce qu'il tenoit apparemment pour deſeſperé.

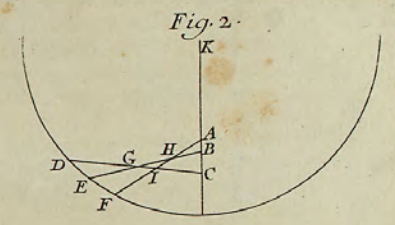
Ayant donc tenté la choſe, j'ai non ſeulement trouvé la méthode par laquelle il étoit venu à cette équation ; mais de plus j'ai réſolu entiérement le problême : car je trouve, ce qui eſt digne d'admiration, que la courbe de la Voile eſt la même que celle d'une Chaine.

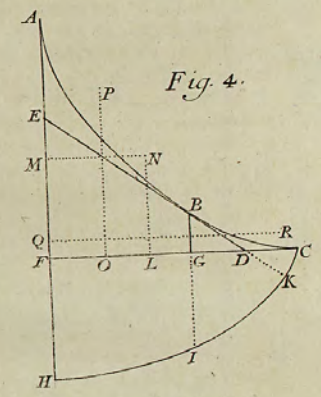
Si l'on conſulte, dans les Actes de Leipſic †, la conſtruction que j'ai donnée de cette derniére, l'on découvrira aiſément que cette équation $adsddx = dy^3$ lui convient. Je donnerai quand on voudra la maniére analytique, qui m'a conduit à la connoiſſance de cette courbe.

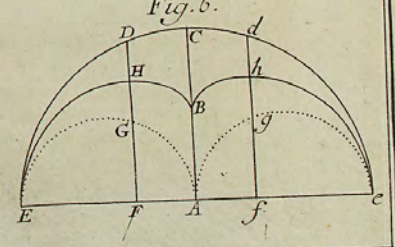
L'on peut ajoûter à ſes principales proprietés, qui ſe trouvent inſerées

† Cy-deſſus N°. IV.

N.° VI.







le la rectifica-

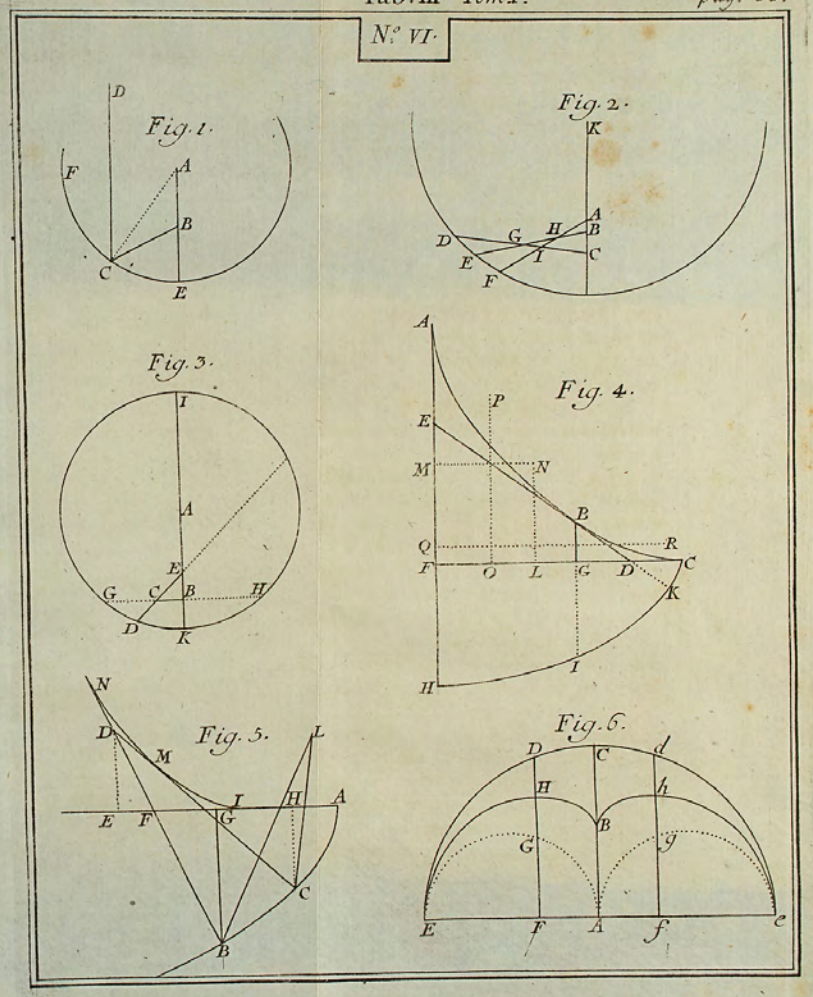
ccasion de re-
met tous les
epréſente une
ſa peſanteur;
différentielle,
e, ſans pour-
oit ſervi. Il
n littérale ou
ou du moins
on. Mais je
e la difficulté
ue propoſoit,
t d'intégrales.
que je reçus
arque, qu'il
(a eſt une
terceptée x;
e de l'appli-
érentielle de
olution qu'il
on; ce qu'il

t trouvé la
on; mais de
trouve, ce
Voile eſt la

conſtruction
ra aiſément
Je donnerai
onduit à la

ſe trouvent
inſerées

N.° VI.



inſérées dans lés
utilité dans les M
après.

Soit le levier
ché au point A
décrite la courbe
B, l'axe BE, &
quelconque D c
poids P, enſorte
touche la courb
(ce que l'on peu
autour d'une pou
je dis que le po
poids P; c'eſt-à
be BFG, & c
ment, à cauſe
courbe par rapor
pondant dans l'ax

J. B. * ADDI

C

Proximo Ma

VIXDUM ſub
de Cycloidib
litteras acciperem,
cavit; ſignificans,
rerit, quæ quoque
Hugenianam ſui ipſi
ſervaverit, eanden
eſſe: quæ omnia
neutri de alterius
conſtitiſſe &c. . . .

* *Jacobi* BE

inſerées dans les Actes de Leipſic, celle-ci qui peut avoir ſon utilité dans les Méchaniques, & que j'ai trouvée long-temps après.

Soit le levier AE indéfiniment étendu en C, & ſoit attaché au point A le poids P; ſoit priſe CB = CA, & ſoit décrite la courbe d'une Chaine, BFG, dont le ſommet ſoit B, l'axe BE, & le centre C*: Cela ſuppoſé, ſi d'un point quelconque D du levier BE, l'on pend un poids Q égal au poids P, enſorte que la direction ſoit ſelon le plan RS, qui touche la courbe BFG en F, où tombe l'appliquée DF; (ce que l'on peut faire aiſément, en faiſant paſſer le fil DHQ autour d'une poulie attachée en H directement au deſſus de F,) je dis que le poids Q contrebalancera dans cette ſituation le poids P; c'eſt-à-dire que ſi le poids Q ſe meut dans la courbe BFG, & que ſon mouvement, qui change continuellement, à cauſe de la différente inclinaiſon des points de la courbe par raport à l'horizon, ſoit appliqué au point correſpondant dans l'axe, il ſera toujours en équilibre avec le poids P. TAB. IV. N°. VII.

N°. VIII.

J.B. * ADDITIO AD SCHEDAM DE LINEIS CYCLOIDALIBUS, &c.

Proximo Maii Actorum horum menſe pag. 207. & ſeqq. exhibitam.

VIXDUM ſubmiſeram Editoribus Actorum nuperam ſpeculationem de Cycloidibus cæteriſque curvis, cum poſtridie à Fratre *Pariſius* litteras acciperem, in quibus nonnulla egregia huc ſpectantia communicavit; ſignificans, quod præter Cauſticam *Tſchirnhauſianam* aliam reperit, quæ quoque ſit Cyclois; quod deprehenderit Cycloidem vulgarem *Hugenianam* ſui ipſius ut evolutam, ſic cauſticam exiſtere; & quod obſervaverit, eandem proprietatem Spirali logarithmicæ..... communem eſſe: quæ omnia non ſine ſtupore perlegere potui, cum conſiderarem, neutri de alterius ſpeculationibus, has curvas concernentibus, quicquam conſtitiſſe &c..... *Acta Eruditorum* 1692. Jun. pag. 291.

* *Jacobi* BERNOULLI.

N°. IX.

SOLUTION DU PROBLEME *que Monsieur* DE BEAUNE *proposa autrefois à Mr.* DES CARTES, *& que l'on trouve dans la 79. de ses Lettres, Tom. 3.* Par Mr. G***

PROBLEME.

Journal des Savans 1692. 34e. Journal du 1. Septem. pag. 401. édit. de Paris & pag. 598. éd. d'Amst.

UNE ligne droite quelconque N étant donnée, & ayant mené deux autres lignes indéfinies AC, AI, en sorte que l'angle CAI soit de 45 degrés; On demande la maniére de décrire la courbe ABB; qui soit de telle nature que, si l'on mène d'un de ses points quelconques B l'ordonnée BC & la touchante BT, la raison de BC à CT soit toujours la même que celle de la droite donnée N à BI.

SOLUTION.

TAB. IV. N°. IX.

Ayant formé le quarré AG, qui a pour côté la droite AH égale à la ligne donnée N, l'on décrira entre les asymptotes GD, GH, par le point A, l'Hyperbole ALL; & ayant prolongé DA en E, en sorte que AE soit égal à AH, l'on prendra le rectangle EC égal à l'espace hyperbolique AKL; l'on prolongera les droites LK, FC, jusqu'à-ce qu'elles se rencontrent en un point M; & l'on prendra enfin IB égal à CM: je dis que le point B sera à la courbe qu'il faloit décrire.

Il est évident que la nature de cette ligne courbe ABB dépend de la quadrature de l'Hyperbole, & qu'ainsi elle est méchanique dans le sens de DES CARTES. Voici maintenant quelques-unes de ses proprietés.

1°. Elle

1°. Elle a pour asymptote la ligne DO parallèle à AI.

2°. Si l'on nomme AC x, BE y, l'espace ABC, compris par les droites AC, CB, & par la portion AB de la courbe, est $= xy - \frac{1}{2}yy + nx$.

3°. La distance du centre de gravité de l'espace ABC de la droite AC est $= n + (3xyy - 2y^3) : (6xy - 3yy + 6nx)$ & de AK, $= \frac{1}{2}n + (3xxy - y^3) : (6xy - 3yy + 6nx)$: & l'on a par conséquent les solides, demi-solides, &c. formés par la révolution de cet espace, tant autour de AC, que de AK, ou BC.

4°. Il est facile de déterminer les centres de gravité de ces demi-solides. Mais comme on a besoin d'une adresse particuliére pour rectifier cette courbe, en supposant la quadrature de l'Hyperbole, je propose ce problême aux Géomètres, les assurant qu'il mérite leur recherche.

Je ne mets point ici la démonstration, parce que ceux qui entendent ces matiéres, la trouveront aisément, & qu'il faudroit trop de discours pour la faire comprendre aux autres.

NB. *Cette piéce a été faite en commun par Mr.* le Marquis de L'HOPITAL *& par Mr.* BERNOULLI. *C'est pourquoi l'un & l'autre a cru être en droit de se l'attribuer; l'un dans une Lettre à Mr.* HUYGENS *dont il est fait mention dans* l'Histoire des Ouvrages des Savans (*Fevr.* 1693. *Art.* XI. *pag.* 256); *l'autre dans un* Mémoire *qu'on verra ci-après* N°. XI.

EXTRAIT

N°. X.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
de Monsieur BERNOULLI *Médecin.*

Journal des Savans 1693. 30. Journal, du 19. Janv. pag. 25. édit. de Paris, pag. 39. édition de Holland.

J'AI résolu le Problême, de trouver Géométriquement le jour du plus petit crépuscule ; ce qui a occupé mon *Frére*, Professeur de Mathématique à Bâle, & moi, depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce Problème est d'autant plus curieux, que je demeure par ma méthode *de maximis & minimis*, (qui est pourtant une des plus courtes,) dans un calcul prolixe & embarassé, qui se laisse à la fin réduire à une petite équation quarrée, que je transforme en cette simple proportion géométrique : *Comme le rayon, à la tangente de la moitié de l'arc crépusculaire, (qu'on suppose ordinairement de 18 degrés ;) ainsi le sinus de l'élevation du Pole, au sinus de la déclinaison méridionale cherchée du Soleil.* Quand on a sa déclinaison, on a aussi le lieu dans l'Ecliptique ; & partant le jour de l'année auquel se fait le plus court crépuscule. Supposé donc l'arc crépusculaire de 18 degrés, & la latitude de 48 degrés, 51 minutes, qui est celle de Paris ; on trouve, selon la règle que je viens de donner, que le plus petit crépuscule se fait à Paris, quand le Soleil décline vers le Midi de 6 degr. 50 min. Si on cherche maintenant le lieu dans l'Ecliptique, on trouvera que le Soleil doit être éloigné d'un des points équinoxiaux de 17 degr. 25 minutes, c'est-à-dire, qu'on aura le plus petit crépuscule à Paris le 18 jour avant le premier équinoxe, & le 18 après l'autre équinoxe.

SOLU-

N°. XI.

SOLUTIO PROBLEMATIS CARTESIO PROPOSITI
a Dn. DE BEAUNE, *exhibita a* JOH. BERNOULLI *Basileensi.*

Vide CARTESIUM, Epist. 79. Tom. 3.

PRIMA mea hujus problematis solutio, quæ reperitur tecto nomine in Diario Gallico 34, anni elapsi, * non minus quam Fratris, qui suam mihi, tum temporis Parisiis commoranti, transmiserat, supponit quadraturam spatii hyperbolici ; id quod constructionem in praxi impossibilem reddit. Ex eo autem tempore præsentem hanc adinveni, quæ ope Logarithmicæ vulgaris quam facillime peragitur, & propterea, ceu naturalior, priori longe anteferenda. Problema autem tale est : Invenire curvam AI, cujus applicata KI sit ad subtangentem KM, ut linea data N, ad portionem applicatæ IL interceptam inter curvam AI, & rectam AL angulum semirectum facientem cum axe AK.

Acta Eruditi. 1693. Mai. p. 234

TAB. IV. N°. XI. *Fig.* 1.

Solutio : Ad asymptoton AB, perpendicularem ad AK, construatur Logarithmica vulgaris DC, cujus subtangens AF sit æqualis lineæ datæ N : a puncto quolibet Logarithmicæ C ducantur CI parallela axi AK, & CG ad eundem perpendicularis secans tangentem Logarithmicæ DF in puncto H ; sumtaque BI æquali ipsi CH, dico punctum I esse ad curvam quæsitam AI.

Cæterum, recta ducta per F parallela ipsi AL est asymptotos curvæ AI ; spatium curvilineum AIB æquatur semiquadrato applicatæ KI, demto rectangulo sub data N & abscissa AK ; curva autem ipsa AI est ex earum numero, quarum rectificationes quidem in abstracto non habentur, longitudines tamen

* Supra N°. IX.

tamen per ipsasmet curvas construi & determinari possunt; quod Nob. Dn. HUGENIUS præstitit in nova sua Logarithmica, & ego jam olim in Logarithmica vulgari. Interim hasce tres curvas non solas, sed infinitas alias dari posse, reperio, quæ prædictam proprietatem habeant; id est, quarum rectificationes, ut & ipsarum spatiorum quadraturæ, quæ alias in potentia non sunt, per ipsarum curvarum naturam in lineis rectis & spatiis rectilineis determinari queant.

PROBLEMA AB ERUDITIS SOLVENDUM.

TAB. IV. N°. XI. *Fig.* 2. Quæritur, qualis sit curva ABC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abscissa AD sit ad tangentem BD, in ratione constante M ad N.

Problema hoc solutu dignum est, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione sit M ad N, curva ABC semper eadem facilitate motu quodam continuo describi potest, non obstante, quod curva, pro ratione M ad N, magis vel minus composita evadat; in casu quippe rationis æqualitatis, illico patet curvam ABC esse circulum: in reliquis, si M ad N est ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica; secus autem transcendentalis est. Quæritur generalis determinatio puncti in curva.

N°. XII.

AVIS AUX GEOMETRES.

Journal des Savans 1693. 28*e*. Journal du 20. Juill. pag. 336. édit. de Paris, pag. 498. édit. de Holland.

ON a déposé un Prix de soixante pistoles chez Mr. *Le Normand*, Notaire au Châtelet de Paris, pour la première personne qui résoudra la Question suivante.

Ayant une partie si petite qu'on voudra d'une Courbe géométrique, on demande une méthode pour résoudre une égalité donnée par le moyen de cette partie, & d'une autre ligne courbe, dont le lieu soit le plus simple qu'il sera possible.

L'on

L'on demande aussi que cette méthode paroisse publiquement, avant le premier de Janvier prochain; & qu'elle ne suppose aucune des règles qui sont de l'invention particuliére de Mr. ROLLE

Monsieur DES CARTES a proposé ce Problême, pour une des trois Sections Coniques seulement; & on n'en avoit jamais proposé un plus beau pour la résolution des égalités. Deplus cette résolution étant absolument nécessaire pour perfectionner toutes les parties des Mathématiques; il importe de savoir, s'il n'y a point pour cela de méthode qui soit différente de celles que Mr. ROLLE a données au Public.

N°. XIII.

SOLUTION D'UN PROBLEME
proposé dans le 28.ème *Journal de cette année*, 1693.
Par Mr. BERNOULLI *le Médecin.*

PROBLEME.

Journal des Savans 1693. 34*e*. Journal du 31. Aoust pag. 405. édit. de Paris, pag. 630. édit. de Holland.

AYant une partie si petite qu'on voudra d'une Courbe géométrique; on demande une méthode pour résoudre une égalité donnée par le moyen d'une autre ligne courbe, dont le lieu soit le plus simple qu'il sera possible.

SOLUTION.

J'appelle ici équations semblables, celles, qui étant du même degré, ont le même nombre de termes disposés de la même maniere, & affectés des mêmes signes, & dont les quantités connues, distribuées dans le même ordre, ont entr'elles une même raison. Ainsi ces deux équations

$$x^4 * + aaxx - abbx - c^4 = 0$$
$$\& \; z^4 * + ddzz - dffz - g^4 = 0$$

seront appellées semblables, parce que la derniére a un même

nombre de termes, dispofés dans le même ordre, & avec les mêmes fignes que la premiére, & dont les quantités connues d, f, g font telles, que $a : b = d : f$ & $b : c = f : g$ &c.

Je fuppofe que les racines des équations femblables, (ce qui eft facile à démontrer,) ont entr'elles la même raifon que les quantités connues difpofées de la même maniére, c'eft-à-dire, par exemple, que $x : z = a : d = b : f = c : g$, &c.

Je fuppofe de plus, que toute équation propofée peut être transformée, en une autre femblable, dont les racines ayent une raifon donnée avec celles de la propofée.

Soit maintenant l'équation folide $x^3 * + aax - b^3 = 0$ dont il faut trouver la racine x, par le moyen d'une portion donnée CB d'une parabole, qui a pour fommet A, pour paramètre la ligne AD, & pour ordonnées les droites BE, CG. On cherchera, par les règles de SCHOOTEN, les limites entre lefquelles la racine de l'équation propofée eft refferrée, & on trouvera, dans nôtre exemple, x plus grand que $b^3 : (aa + bb)$ & moindre que b. Cela pofé, il peut arriver différens cas, qu'il eft à propos d'expliquer en particulier.

TAB. IV. N°. XIII.

Premier cas, lorsque les limites font égales, ou tombent entre les appliquées données, BE, CG. Ayant pofé, felon DES CARTES, DA $= l$, AH $= p$, HI $= q$, IL $= r$, & LF $= x$; on formera une équation, qui étant comparée avec la propofée, donnera en termes connus des valeurs de p, q, r, telles, que le cercle décrit du centre I, du rayon IL, coupera la parabole en un point L, fitué entre les extrémités B, C, de la portion donnée. Ce qui eft évident, puifque l'on fuppofe dans ce cas la racine LF plus grande que BE, & moindre que CG.

Second cas, lorfque les limites ne font point refferrées entre les ordonnées BE, CG. On transformera l'équation propofée $x^3 * + aax - b^3 = 0$ en une autre femblable : $z^3 * + ccz - f^3 = 0$, dont la limite en deffous $f^3 : (cc + ff)$ foit égale à BE : ce qu'on fera par le moyen de ces proportions $\frac{b^3}{aa + bb} : \text{BE} = a : c = b : f$.

Or

Or fi la limite en deffus f de la transformée eft égale ou moindre que CG; ou trouvera fa racine LF par le premier cas; & faifant $c : a =$ LF (ou z) $: x$; cette quatriéme proportionnelle fera la racine de l'équation propofée x^3 &c.

Troifiéme & dernier cas, lorfque la limite en deffus f de l'équation transformée eft plus grande que CG. Ayant fait une progreffion Géométrique $\ddot{-} g, h, i, k$, &c. dont les deux premiers termes g, h, qui fervent à trouver les autres, foient BE, CG, & dont le dernier k foit égal ou plus grand que f; il eft évident que la racine z fera refferrée entre h & i, ou entre i & k, &c. Or pour la trouver, on transformera de nouveau la transformée $z^3 *$ &c. en d'autres femblables, $s^3 * + mms - n^3 = 0$ & $y^3 * + eey - d^3 = 0$, telles, que $h : g = c : m = f : n$, & $i : g = c : e = f : d$. D'où il fuit, que la feconde transformée s^3 &c. a fa racine s entre g, h, lorfque la racine z de la premiére eft entre h, i; & que la troifieme y^3 &c. a fa racine y entre g, h, lorfque la racine z de la premiére eft entre i, k. Si donc on cherche féparément la racine de chaque équation, il faudra néceffairement qu'il y en ait une qui tombe entre BE & CG. Que ce foit, par exemple, la racine s, ou LF, de la feconde équation s^3 &c. on trouvera auffi-tôt la racine cherchée x, en faifant $m : a = s : x$. Ce qui étoit propofé.

Cette méthode eft generale pour toutes fortes d'équations: Car fi l'on propofoit, par exemple, de trouver les racines d'une équation du douziéme degré, par une portion donnée d'une courbe de trois dimenfions; il faudroit employer une autre courbe de quatre dimenfions, & ayant trouvé les limites des racines de l'équation propofée, on feroit des équations femblables, & on chercheroit la pofition & l'efpèce de la courbe de quatre dimenfions, de la même maniére qu'on vient de faire celle du cercle.

Au refte, fi l'on trouve ici quelques difficultés, on eft prêt de les éclaircir, & de fatisfaire pleinement des Juges équitables.

N°. XIV.

REPONSE A Mr. BERNOULLI *le* MEDECIN, *au sujet d'une méthode, qui a paru sous son nom dans le Journal du 3 Août dernier.*

Journal des Savans 1693. 36. Journal du 14. Sept. pag. 425. edit. de Paris. pag. 660. édit. de Holl.

LA question qui a été proposée dans le Journal du 20 Juillet de cette année, (1693.) seroit facile à résoudre par les méthodes de Mr. ROLLE : mais pour s'accommoder aux inclinations de plusieurs personnes, on s'est engagé de donner un prix de soixante pistoles à ceux qui pourront résoudre ce problème sans se servir des productions de cet Auteur. Mr. BERNOULLI *le Médecin* en a donné une résolution dans le Journal du 31 Août ; & après avoir dit qu'elle est generale, il déclare *qu'il est prêt d'éclaircir toutes les difficultés qu'on y trouvera, & de satisfaire pleinement des Juges équitables.* Il seroit à desirer que M. BERNOULLI eût réussi dans son entreprise : nous aurions de lui une découverte fort considerable en Mathématique, pour un prix fort médiocre. Mais l'on trouve des *difficultés* dans sa résolution, qui peuvent beaucoup servir pour en découvrir les défauts, s'il veut se donner la peine de les *éclaircir.*

Pour réussir, il auroit eu besoin d'une méthode, qui fût suffisante pour résoudre par Géométrie les égalités de tous les degrés ; & celle qu'il cite, n'a été faite, & ne suffit que pour le troisiéme seulement. Toutefois il conclut pour sa résolution, comme si cette méthode particuliére étoit *generale. On chercheroit*, dit-il, *la position & l'espèce de la courbe, de la même maniére que l'on vient de faire celle du cercle.* A dire vrai, il auroit besoin que cette *maniére* fût *la même* dans tous les degrés, pour résoudre la question proposée. Mais comme cette règle du troisiéme degré est, selon lui, de Mr. DES CARTES, les sentimens de ce grand inventeur doivent être d'un grand poids en cette occasion, & l'on peut voir au naturel ce qu'il en pensoit dans le troisiéme Volume de ses Lettres, page 449, où il parle de sa Règle du sixiéme degré, en cette maniére : *J'ose dire qu'elle est la plus belle, & qui a été sans comparaison la plus difficile de toutes les choses qui ont été inventées en Géométrie, & qui le sera encore peut-être ci-après en plusieurs siécles, si ce n'est que je prenne moi-même la peine d'en chercher d'autres.*

Cela

Cela est d'autant plus considerable, que M. DES CARTES n'a écrit ses sentimens dans cet endroit, que pour les faire communiquer aux Mathématiciens ses adversaires, qui travailloient sur le même sujet. Et comme il ne fait consister la difficulté, dont il parle, que dans la maniére de règler *la position & l'espèce des courbes* ; on voit de-là combien il étoit éloigné de croire, que sa règle du troisiéme degré soit suffisante pour tous les degrés à l'infini. De plus, les sentimens de M. BERNOULLI ne sont pas seulement combattus par M. DES CARTES dont il emprunte la régle ; ils sont encore contraires à l'expérience, & aux sentimens des plus Savans Géomètres, parmi lesquels on peut compter son frére M. BERNOULLI le Mathématicien : Ainsi il seroit à souhaiter qu'il voulût bien *éclaircir* cette *difficulté.* Il pourra encore, pour cet *éclaircissement*, consulter le troisiéme Volume des Lettres de Mr. DES CARTES, page 116 ; & peut-être qu'il découvrira, si les égalités auxiliaires, que M. ROLLE a introduites, sont necessaires pour *trouver la position & l'espèce des courbes.* Il pourra encore voir l'usage d'une autre sorte d'auxiliaires, en comparant la page 412, du même Volume à l'inverse des tangentes, qui a paru depuis dans le Journal, * selon laquelle les degrés indéterminés deviennent les inconnues de ces auxiliaires, & par conséquent capables de toutes les modifications des racines. Mais pour donner un éclaircissement solide, sans sortir de son sujet ; il n'aura qu'à *trouver l'espèce & la position des courbes pour les égalités du douziéme degré*, qu'il a prises pour le second exemple de sa méthode ; & le détail qu'il en donnera fera voir ce que l'on en doit croire, quand même il se serviroit des auxiliaires, au lieu de se servir de la Règle du troisiéme degré, & qu'il les supprimeroit après en avoir tiré un Canon. Lorsqu'il aura donné les *éclaircissemens* necessaires aux *difficultés* qu'on vient de lui proposer, il permettra qu'on lui en propose d'autres sur sa résolution, qui ne sont pas moins considerables, ni moins difficiles à *éclaircir.* Cependant on a cru qu'il étoit bon de marquer ici une voye qui auroit suffi pour résoudre le problême proposé, s'il eût été permis de se servir des méthodes de Mr. ROLLE. Que z soit l'inconnue, c & $c + d$ ses hypothèses, & que a & $a + b$ soient les deux ordonnées, ou les deux distances extrêmes de la courbe donnée, on fera $bz = dx + cb - da$; & cette préparation, avec les méthodes de cet Auteur, résoudront généralement le problême. On peut couper la courbe donnée, & appliquer les méthodes sur chacune de ses parties, lorsque cela servira pour se procurer quelque avanta-

* 1693. 27. Journal. du 13 Juill. pag. 321 éd. de Paris, pag. 476. éd. de Holl. *Méthode pour former les Courbes Géométriques, par le moien de leurs Tangentes. Tirée des Lettres de* Remi Lochell.

avantage, ou pour éviter quelque inconvénient. Mais on donnera encore d'autres méthodes, où cela ne sera jamais necessaire, soit qu'on veuille trouver chaque racine séparément, ou plusieurs à la fois, & qu'on ne veuille point s'occuper du choix des réduites.

N°. XV.

REPONSE DE M. BERNOULLI *le* MEDECIN, *à l'Objection insérée, dans le Journal du 14. Septembre dernier, contre une Méthode qui a paru de lui dans le Journal du mois d'Août précédent.*

Journal des Savans 1694. 4. Journal, du 18. Janv. pag. 32. édit. de Paris pag. 45. éd. de Holl.

CE n'est pas depuis la publication de la question proposée dans le Journal du 20 Juillet, que j'ai trouvé la méthode pour la résoudre : long-temps auparavant, une personne de la premiére qualité, qui ne cède en rien aux premiers Mathématiciens de l'Europe, me l'avoit proposée en termes peu différens, & avoit fort approuvé la solution qu'on rejette ici. En effet, elle est si évidemment bonne, qu'il faut être partie, & s'être proposé de ne jamais se rendre, pour y trouver la moindre difficulté. Quoiqu'il en soit, je vois par avance que mon adversaire entreprend de faire trainer l'affaire le plus qu'il pourra, puisqu'il est prêt, dit-il, à proposer de nouvelles difficultés, dès que l'on aura satisfait aux premiéres. Mais que ne les a-t-il proposées toutes à la fois ? C'a été sans doute pour se reserver de faux-fuyans. Il lui a été facile d'en faire provision : car ces sortes de problêmes sont si generaux, qu'il est impossible d'en donner des solutions assez précises pour être à couvert de toutes les chicanes, quelques bonnes que ces solutions soient d'ailleurs. C'est pour cela que je pourrois fort bien me dispenser de répondre, comme d'une chose tout à fait inutile. Cependant, de peur que ceux qui n'auroient pas assez examiné ma méthode ne croyent que l'objection qu'on me fait soit de conséquence, j'y répondrai. Mais je déclare que

que c'est une fois pour toutes, laissant la décision de cette affaire aux personnes intelligentes & désintéressées, & sur tout m'en rapportant au jugement de Messieurs de l'Académie des Sciences.

La principale objection qu'on me fait, est que *pour réussir, j'aurois besoin d'une Méthode qui fût suffisante pour résoudre par Géométrie les égalités de tous les degrés ; & que celle que je cite, n'a été faite, & ne suffit que pour le troisiéme seulement.* J'avouë que j'ai besoin d'une telle Méthode, & que celle que j'ai citée n'a été faite que pour le troisiéme degré ; mais s'ensuit-il qu'elle ne suffise pas generalement pour tous les autres ? Il est vrai que l'application en devient très-pénible dans les égalités de plus de trois dimensions : toutefois la difficulté n'ôte pas la possibilité. L'autorité de M. DES CARTES ne prouve rien contre moi ; car tout ce qu'il dit à l'endroit marqué, n'aboutit qu'à faire entendre, que sa régle pour le sixiéme degré est très-difficile à pratiquer, & qu'il n'y a que lui qui en puisse trouver d'autres. Outre cela M. DES CARTES n'étoit pas infaillible ; & je ne doute pas même que, s'il étoit encore en vie, il ne revocât plusieurs choses qu'il a avancées. La maniére de M. SLUSE de construire les racines, n'est-elle pas beaucoup plus aisée & plus naturelle que celle de M. DES CARTES ? Quel cas n'a-t-il pas fait de sa maniére de trouver les tangentes des courbes ? Quel desir n'a-t-il pas témoigné de la sçavoir generalement ? Voyez comme il parle dans sa Géométrie, page 48. *J'ose dire que c'est ici le probléme le plus utile & le plus general, non seulement que je sçache, mais même que j'aye jamais desiré de sçavoir en Géométrie.*

Cependant sa Méthode ne s'étend qu'aux courbes géométriques ; outre qu'elle est très-prolixe. Mais aujourd'hui que l'on a trouvé un nouveau calcul, c'est un jeu d'enfant que de trouver les touchantes non seulement des courbes géométriques, mais aussi de celles qu'il appelle méchaniques. C'est en moins de rien que l'on trouve les *maxima* & *minima* : C'est pourtant ce qui a fait le plus de bruit entre lui & ses contemporains.

Tant s'en faut que mes ſentimens ſoient contraires à l'expérience, & au ſentiment des Géométres, qu'ils ſont plutôt favoriſés par l'une & par l'autre ; comme on peut le voir dans les *Actes de Leipſic* de l'année 1688, au mois de Juin, où mon Frére, par le moyen de deux courbes, dont il donne la poſition & l'eſpèce, réſout ſans aucune peine une égalité du neuviéme degré.

Au reſte, pour ne rien omettre, j'ai lû les pages 116 & 412 du troiſiéme Volume des Lettres de M. DES CARTES ; mais je n'y vois pas, ni ce que c'eſt que les égalités auxiliaires de M. ROLLE, ni ce qu'elles me pourroient ſervir *pour trouver la poſition & l'eſpèce des courbes*. Et tout ce que j'ai vu de M. ROLLE, c'eſt un petit écrit contre M. DE LAGNY, dans lequel il n'y a rien d'approchant.

Mais pour donner un éclairciſſement ſolide, ſans ſortir de mon ſujet, je n'ai qu'à trouver l'eſpèce & la poſition des courbes pour les égalités du douziéme degré. Oui je le veux : mais qu'on me promette qu'on en demeurera là, & qu'après cela toute la diſpute ſera terminée. Soit donc propoſée l'égalité generale du douziéme degré $y^{12} * \pm lly^{10} \pm m^3y^9 \pm n^4y^8$ &c. $= 0$. Pour la réſoudre par le moyen de deux courbes, il faut que j'en trouve *l'eſpèce & la poſition*. Je ſuppoſe donc à la Sluſienne $aax = y^3$ & à la place d'y^3 je mets dans l'égalité propoſée ſa valeur aax, ce qui me donne cette équation, $a^8x^4 * \pm a^4llayx^3 \pm a^6m^3x^3 \pm a^4n^4yyxx$ &c $= 0$ que l'on peut conſidérer comme ayant deux indéterminées x & y, & partant comme une égalité qui détermine la nature d'une courbe. Voilà donc déja l'eſpèce des deux courbes cherchées, dont l'une $aax = y^3$ eſt la premiére parabole cubicale ; & l'autre que je viens de trouver eſt de quatre dimenſions. Quant à leur poſition, elle ſe donne d'elle-même : car il n'y a qu'à les poſer en ſorte qu'elles ayent le ſommet & l'axe communs : alors les ordonnées qui paſſeront par les points d'interſection de ces courbes entr'elles, ſeront les racines de l'égalité propoſée.

N° XVI.

N°. XVI.

REMARQUES SUR LA REPONSE

qui a été inſerée ſous le nom de M. BERNOULLI *dans le 3e. Journal de cette année* (1694) *au ſujet d'un Probléme de Géométrie.*

JE voudrois bien n'être pas obligé de refuſer à M. BERNOULLI le ſilence qu'il me demande par ſa réponſe : Mais elle eſt publique, & ſes prétentions ſont telles que je ſuis engagé d'en dire mon ſentiment, pour ne pas encourir le ſoupçon de favoriſer l'erreur.

Journal des Savans 1694. 7. Journal, du 15. Fév. pag. 77. édit. de Paris pag. 172. édit. de Holl.

Il prétend avoir réſolu, dans le Journal du 31 Août dernier, le probléme qui avoit été propoſé avec un prix de 60 piſtoles, dans le Journal du 20 Juillet : Et je prétens que des Régles qu'il a données, à celles qu'il auroit dû donner pour le réſoudre, il n'y a pas moins de différence que du troiſiéme degré à un degré infiniment élevé.

Cependant il parle de ſa ſolution, en pluſieurs endroits de ſa réponſe, comme ſi l'on avoit grand tort d'y trouver à redire, & il s'écrie qu'*elle eſt ſi évidemment bonne, qu'il faut être partie, & s'être propoſé de ne jamais ſe rendre, pour y trouver la moindre difficulté.* Toutefois *il avoue qu'il auroit beſoin d'une méthode qui fût ſuffiſante pour réſoudre par Géométrie les égalités de tous les degrés, & que celle qu'il a citée n'a été faite que pour le troiſiéme ſeulement.* Enſuite il ajoute qu'*il eſt vrai que l'application de cette méthode du troiſiéme degré devient très-pénible dans les égalités de plus de trois dimenſions ; que toutefois la difficulté n'ôte pas la poſſibilité.*

Mais pour faire que la ſolution de M. BERNOULLI ſoit *bonne & generale*, comme il le prétend, il faut qu'elle ſatisfaſſe au problème propoſé ; & pour y ſatisfaire il ne ſuffit pas qu'il ſoit poſſible d'appliquer la méthode qu'il a citée, il faudroit encore une méthode pour régler cette application, ou bien en donner une autre qui fût équivalente aux deux enſemble ; & en quelque maniére que cela arrive, l'on a beſoin *que la méthode embraſſe tous les degrés, & qu'elle ſoit differente de celle que M.* ROLLE *a donnée pour le même ſujet.*

C'eſt encore une des conditions du probléme : *Que des deux courbes qui doivent concourir pour réſoudre par Géométrie une égalité quelconque, il faut qu'il y en ait une qui ſoit donnée, & que l'autre ſoit du degré le plus ſimple qu'il eſt poſſible.* Ainſi il étoit inutile que Mr. BERNOULLI ſe donnât la peine de recourir à la méthode de M. SLUSE, pour donner un *éclairciſſement ſolide* à ſa ſolution, parce que cette méthode ne ſuffit que dans les occaſions, où il eſt libre de prendre & de ſituer des courbes accommodantes ; & l'on peut voir auſſi, que bien loin d'*éclaircir* par cette méthode, la *poſition des courbes*, qu'il avoit donnée dans ſa ſolution, il a été obligé d'y faire un changement general.

Comme il suffiroit de lire avec un peu d'attention les autres endroits de sa réponse, pour s'apercevoir qu'ils ne prouvent rien contre moi, & qu'ils sont contraires à ses sentimens; je ne donnerai point les observations que j'y ai faites, afin de me conformer en cela à ses intentions.

Mais il y a des difficultés importantes, qu'il a touchées dans sa solution, sans en parler dans sa réponse: Et il est bon de les remarquer, parce qu'il est nécessaire de s'en démêler pour résoudre le probléme. C'est de donner une méthode pour trouver les limites des racines de toutes les égalités, qui soit aussi generale que celle que M. ROLLE a donnée sur ce sujet, & qui en soit différente. Et il est certain que celle que M. BERNOULLI a citée pour ce besoin, est très-défectueuse; ce qui se peut vérifier très-facilement & fort vite, avec des connoisseurs, dans une conférence.

Ainsi il se trouvera que M. BERNOULLI n'a point satisfait aux difficultés capitales du probléme, & même que l'on seroit infiniment éloigné d'y satisfaire par les méthodes qu'il a citées pour ce sujet.

Ce probléme suppose aussi que l'on prépare l'égalité proposée; & cette préparation se peut faire fort aisément par le moyen d'une régle que je donnai sur ce sujet dans le Journal du 14 Septembre dernier. * Pour y réussir par la régle de M. BERNOULLI, l'on auroit besoin de transformer & *de résoudre* une suite d'égalités, du moins aussi composées que celle qui est en question: & comme il ne donne point de détermination analytique pour juger de celle qui réussit, il se trouvera pour cette raison, & pour d'autres encore dont on ne parle point, que sa régle est inutile dans l'usage. Mais après tout il y a un tour ingénieux, qui marque en lui & de l'esprit & de l'Algèbre.

Je consens qu'il prenne Messieurs de l'Académie Royale des Sciences pour juges de notre différend, quoique j'aye de fortes raisons pour en recuser quelques-uns. Il me suffit qu'ils veuillent bien signer le jugement qu'ils en porteront, & qu'il me soit communiqué.

La méthode, que j'avois promise, pour faire évanouïr les inconnues qui sont communes à plusieurs égalités, consiste à les multiplier par des quantités pleinement indéterminées, dont l'origine soit l'inconnue même que l'on veut faire évanouïr. Ensuite on compare les produits entr'eux, savoir les termes de l'un aux termes de l'autre, chacun à son pareil: d'où il resulte des égalités auxiliaires, qui ont pour inconnues les indéterminées introduites, & dont la résolution donne ce que l'on demande. Et generalement parlant, pour appliquer l'Algèbre à l'Algèbre même, pour l'appliquer aux courbes géométriques & aux questions qui s'y reduisent, un des meilleurs moyens d'y réussir, c'est de supposer des égalités pleinement indéterminées, pour en tirer des égalités auxiliaires. Cela sera expliqué dans la suite. *Q. D. B. V.*

* Cy dessus N°. XIV. pag. 71.

N°. XVII.

Q. D. B. V.

POSITIONES LOGICÆ DE PROPOSITIONIBUS

Quas, cum appositis

POSITIONIBUS MISCELLANEIS

Speciminis loco

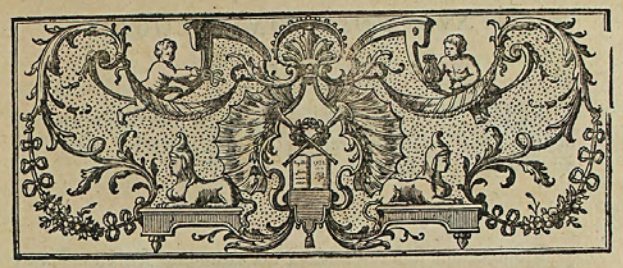
Publicè Ventilandas proposuit

Ad d. 27. *Novembris* MDCXCIII.

JOANNES BERNOULLI

MED. CANDID.

Editæ primum BASILEÆ 1693.



POSITIONES
LOGICÆ
DE
PROPOSITIONIBUS.

§. I.

I comparando ideas, unam alteri convenire, vel non convenire, reperimus; actio hæc mentis vocatur *Judicium*.

II.

Cum autem illas ideas conjungimus, vel ab invicem separamus, ope copulæ *est*, vel explicitæ, vel implicitæ; formamus *Enunciationem* vel *Propositionem*: quæ erit *affirmans*, si ideas conjungimus; & *negans*, si separamus.

III.

III.

Illæ ideæ, de quibus prædicatur, id eſt, vel affirmatur vel negatur, ſunt *Subjectum*; reliquæ, quæ prædicantur, ſunt *Prædicatum* enunciationis.

IV.

Si Subjectum ſumitur in tota ſua latitudine ſeu extenſione; Enunciatio dicitur *univerſalis*: excipe cum ſubjectum eſt terminus ſingularis, tunc enim ipſa Enunciatio dicitur *ſingularis*.

V.

Sed ſi reſtringitur ad partem indeterminatam ſuæ extenſionis; erit *particularis*.

VI.

Si tota quædam idea continetur ſub alia, poterit illa ſemper univerſaliter affirmari de hac? Sic, quia omne quod concipio in *figura*, etiam concipio in *triangulo*; poſſum formare hanc propoſitionem univerſalem, *Omne triangulum eſt figura*: quæ univerſalitas dici poteſt *eſſentialis*, ad diſtinctionem *accidentalis*.

VII.

Omnes enim illæ propoſitiones *accidentaliter* univerſales ſunt, in quibus idea prædicati non continetur ſub idea ſubjecti: Ut, *Omnis homo eſt mortalis*, eſt enunciatio univerſalis accidentalis; idea enim mortalitatis non comprehenditur ſub idea hominis.

VIII.

Hinc omnes propoſitiones, in quibus genus, vel differentia, vel

vel utrumque, univerſaliter affirmatur de ſpecie, ſunt univerſales eſſentiales: eæ autem proprium nomen propoſitionis non merentur, & rectiùs propoſitiones *verbales* dici poſſent, quatenus nempe in meris verbis conſiſtunt; nam duas vel plures ideas non conjungo, ſi unam eandemque, vel partem ſui, diverſo nomine notatam, de ſe ipſa prædico.

IX.

Una eademque propoſitio poteſt eſſe univerſalis eſſentialis uno, & accidentalis alio reſpectu: ſic ſi dico, *Omnis parabola habet quadrata applicatarum abſciſſis proportionalia*; ſi proportionalitas abſciſſarum & quadratorum applicatarum ſumitur pro differentia Parabolæ, propoſitio erit eſſentialiter; ſin autem pro proprio, erit accidentaliter univerſalis.

X.

Una eademque idea poteſt convenire pluribus aliis diverſiſſimis; hinc prædicatum enunciationis affirmantis, licet univerſalis, non ſumitur univerſaliter, ſed tantum ſecundum partem ſuæ extenſionis, in qua cum ſubjecto convenit.

XI.

Ex quo ſequitur, Propoſitionem univerſalem affirmantem ſimpliciter converti non poſſe.

XII.

Si quædam idea alteri non convenit; evidens eſt, quod ſecundum totam ſuam extenſionem eidem non conveniat; hinc prædicatum enunciationis negantis, etiamſi particularis, ſumitur univerſaliter.

XIII.

Hinc quoque Propositio particularis negans non convertitur simpliciter.

XIV.

Duabus speciebus oppositionum, *contrarietati* & *contradictioni*, accenseri potest tertia, composita ex utraque; illa videlicet quæ fit ex enunciatione singulari, ut: *Wilhelmus est Rex*, *Wilhelmus non est Rex*. Hæ enim enunciationes possunt esse concontrariæ, quia qualitate tantum differunt, & conveniunt quantitate, utpote utraque singularis æquipollens universali: sed etiam sunt contradictoriæ, quia semper una vera & altera falsa est; id quod contradictoriis duntaxat competit.

XV.

Si utraque duarum propositionum contrariarum est falsa, necessario utraque subcontrariarum erit vera; & vicissim: servatis iisdem propositionis subjecto & prædicato.

XVI.

Sed si alterutra contrariarum est vera, erit necessario una subcontrariarum vera & altera falsa.

XVII.

Enunciationes affirmantes possunt mutari (manente eodem sensu) in negantes, & vice versa negantes in affirmantes; Sed mutatæ habebunt prædicatum, quod in Scholis vocatur *infinitum*, per adjunctam particulam *non*: Sic enunciatio hæc affirmans, *Omnis homo est peccator*, mutatur in hanc æquivalentem negantem, *Nullus homo est non peccator*. Hæc autem negans, *Nulla ma-*

materia cogitat, vertitur in hanc affirmantem, *Omnis materia est non cogitans*.

XVIII.

Hinc patet, qua ratione quatuor modi Syllogismorum primæ figuræ redigi possint ad duos tantum: nam Syllogismi in *Celarent* & *Ferio* mutantur in *Barbara* & *Darii*. Sic etiam sex modi Syllogismorum tertiæ figuræ rediguntur ad tres; & etenim *Felapton*, *Bocardo*, & *Ferison*, mutantur in *Darapti*, *Disamis*, & *Datisi*.

XIX.

Ubi notandum est, quod hac ratione omnes Syllogismi primæ & tertiæ figuræ, qui concludunt negative, possint mutari in alios qui concludunt affirmative.

XX.

Syllogismi secundæ figuræ reduci quidem possunt ad duos modos, mutando scilicet *Cesare* in *Camestres*, & *Festino* in *Baroco*, vel vice versa; sed semper concludent negative.

XXI.

Ratio hujus est, quia, in prima & tertia figura, major propositio & conclusio mutantur in suas infinitas, & minor propositio manet: in secunda autem figura, manente conclusione, major & minor evadunt infinitæ.

XXII.

Ad tres species enunciationum, *simplicium*, *complexarum*, & *compositarum*, addi potest quarta *vagarum*; in quibus nempe subjectum, nec expresse, nec sensu determinatur; quales sunt

interrogatoriæ & *imperatoriæ*: in his enim ſubjectum ad libitum ſuppleri poteſt; ceu in hac, *Siſte gradum viator*. Ad determinandum ſubjectum hujus enunciationis, verti poteſt in hanc, *mea voluntas eſt ut ſiſtas gradum*; ubi *mea voluntas* erit ſubjectum: Si autem illam ita vertiſſem, *Tu viator rogaris ut ſiſtas gradum*, habebit pro ſubjecto *Tu viator*.

XXIII.

Pariter enunciatio hæc, *Dic cur hîc*, eſt vaga; quippe quæ varia ſubjecta admittit. Proprie autem loquendo, hujus modi expreſſiones non ſunt enunciationes; ſi quidem intentio loquentis nec eſt affirmare, nec negare aliquid, & proinde in ſe ſpectatæ nec veræ ſunt, nec falſæ.

XXIV.

Ideoque operatio mentis, quam iſtæ expreſſiones producunt in eo ad quem proferuntur, medium quaſi tenet inter apprehenſionem ſimplicem & judicium. Nam plus quam apprehenſionem ſimplicem excitant; quia mens in nuda contemplatione idearum non acquieſcit, ſed inſuper determinatur ad reſpondendum, aut ad faciendum id quod jubetur: minus autem quam judicium excitant; ideo, quia mens nec convenientiam, nec diſconvenientiam idearum, id eſt, nec affirmationem nec negationem format.

XXV.

Dantur enunciationes, in quibus ſubjectum poteſt ſumi pro parte prædicati, & pars prædicati pro ſubjecto; quæ proinde poſſent appellari indifferentes; qualis eſt hæc: *Non cuivis homini contingit adire Corinthum*: ubi *aliquis homo* eſt ſubjectum, quia de eo prædicatur non poſſe *adire Corinthum*; ſed etiam *adire Corinthum*, quod modo fuerat pars prædicati, poteſt eſſe ſubjectum, quia de eo prædicatur *non cuivis homini contingere*.

XXVI.

XXVI.

Eodem modo in hac propoſitione, *Soli Deo gloria*; ſubjectum poteſt eſſe utrumque, tam *Deus* quam *gloria*; illud, quia de *Deo* affirmatur, ipſi ſoli deberi gloriam; hoc autem, quia de *gloria* affirmatur, illam deberi ſoli Deo: ſed utrumvis ſumatur pro ſubjecto, erit alterum pars prædicati.

XXVII.

Si ad Enunciationes *inceptivas* & *deſitivas*, quæ vulgo ad exponibiles referuntur, id eſt, ad illas quæ ſenſu ſunt compoſitæ, adjungi poteſt tertia ſpecies *continuativarum*; eodem jure illis etiam annumeramus quartam *intermiſſivarum*, in quibus res in eo ſtatu in quo extituræ ſunt nondum exiſtunt; ut cum dico: *Bellum inter Gallos & Germanos nondum eſt finitum*.

XXVIII.

Etiamſi *continuativæ* & *intermiſſivæ* unum idemque eſſe videantur, quippe in utriſque res in ſuo ſtatu permanere dicuntur; nihilominus eandem differentiam inter illas ſtatuimus, quæ eſt *inceptivas* inter & *deſitivas*: in his enim etiam utriſque, res, quem antea habebant, ſtatum amplius haud habere dicuntur.

XXIX.

Cæterum, poſſent his annumerari aliæ ſpecies exponibilium, ſcilicet *adventivæ*, ut, *Mox habebimus ſolſtitium hybernum*; *præteritivæ*, qualis, *Ingenium quondam fuerat pretioſius auro*; & *præſentativæ*, ut hæc, *At nunc barbaria eſt grandis habere nihil*.

XXX.

Omnes enim hæ enunciationes ſenſu ſunt compoſitæ; ſiquidem

dem unum affirmantes vel negantes, eodem tempore alterum tacite vel affirmant vel negant.

XXXI.

Et hoc modo permultæ ſunt enunciationes, quæ pro ſimplicibus habitæ ad exponibiles referri poſſunt.

ADNEXA MISCELLANEA.

I.

OMnis enunciatio univerſalis, non ſolum pro complexa, ſed prorſus pro compoſita haberi poteſt.

II.

Enunciationes univerſales affirmantes, in quibus differentia prædicatur de ſpecie, ſimpliciter non poſſunt converti; contra Auctorem *Artis cogitandi.*

III.

Demonſtratio ejuſdem Auctoris, numeri denarii modorum Syllogiſmorum inſufficiens eſt: demonſtrat enim tantum non poſſe eſſe plures, non autem non poſſe eſſe pauciores.

IV.

Syllogiſmus hic, *Omnis homo honeſtus dicere poteſt mendacium.* Atqui *Nullus homo honeſtus eſt vitioſus.* Ego *Aliquis, qui non eſt vitioſus, poteſt dicere mendacium*, quam optime concludit; tametſi contra ultimam legem generalem & contra primam tertiæ figuræ peccare videtur.

V.

V.

Dicendo veritatem non nunquam mentimur; & contra dicendo mendacium non ſemper mentimur.

VI.

Homo vitioſiſſimus poteſt interdum facere actionem virtutis præclaram.

VII.

Regula proportionis quæ traditur in Syſtemate *Heerebordiano*, *Quorum duorum unum alicui tertio ſingulari & incommunicabili convenit, alterum non convenit, ea quoque inter ſe non conveniunt*, fallax eſt; Et exemplum quod ibi adjungitur, non niſi per accidens eſt verum. Ex eo enim quod ARISTOTELI convenit fuiſſe Philoſophum, & non convenit fuiſſe Athenienſem, inepte deducitur, *Ergo aliquis Athenienſis non fuit Philoſophus*; omnes quippe Athenienſes potuiſſent eſſe Philoſophi: Sed, ut abſurditas hujus ſequelæ magis pateſcat, loco *Philoſophi* ſubſtituatur *homo*; & ſic ſequeretur, quoniam ARISTOTELI convenit fuiſſe *hominem*, & non convenit fuiſſe *Athenienſem*, aliquem Athenienſem non fuiſſe hominem: quod utique ridiculum eſt.

VIII.

Principium, *Non datur ſaltus in rerum natura*, eſt fœcundiſſimum, quo uno ictu deſtruuntur *tria elementa* CARTESII.

IX.

Ex ſuppoſitione vacui diſſeminati, natura motus commodiſſime explicari poteſt; ſine quo vacuo, tota moles univerſi eſſet compactum quid, duriſſimum, & immobile.

X.

X.

Ideoque præſtat fateri, quod natura corporis nondum omnino perſpecta ſit; quam illabi, per ſuppoſitionem plenitudinis, in tales inconvenientias.

X I.

Velle naturam reflexionis & refractionis explicare per axioma hoc, *Natura facit viam breviſſimam*, eſt obſcurum per æque obſcurum explicare. Adde quod, quoad reflexionem, illud locum non habeat niſi in ſuperficiebus convexis, planis, & quibuſdam concavis; in quamplurimis enim aliis facit viam longiſmam.

X I I.

Qui ſuſpenſionem mercurii in Barometro deducit a gravitate aëris, is naturam aëris non ſatis perſpectam habet.

X I I I.

Poteſt haberi idea rei non ſolum non exiſtentis, ſed prorſus impoſſibilis.

X IV.

Dantur extenſa, quorum partes non ſunt contiguæ.

X V.

Dantur gradus in quiete, id eſt, una quies major eſt altera, vel unum corpus magis quieſcit quam alterum.

X V I.

Si mus mingit in mare, totus Oceanus commovetur.

X V I I.

X V I I.

Elementum corporis gravis (videlicet illa corporis particula quæ ſine poro eſt, vel quæ inter duos proximos poros interjicitur) infinito - infinities majus eſt, quam maximus globulus materiæ ætheriæ, quæ per impulſum ſuum gravitatem corporum cauſatur.

X V I I I.

Minima vis percuſſionis major eſt quam maxima vis ponderis.

X I X.

Radius viſivus aut ſolaris non procedit in linea recta, ſed in curva.

X X.

Luna non magis eſt Planeta, quam ſatellites Saturni & Jovis.

X X I.

Lumen quod obſervatur in plano Eclipticæ, tempore æquinoxiorum, ante ortum & poſt occaſum Solis, & quod paucis retro annis a D. CASSINO Aſtronomo Regio Pariſienſi detectum fuit, mirifice confirmat vorticem Solis, & Terræ, cæterorumque Planetarum circumgyrationem.

X X I I.

Omnis numerus primus differt unitate a multiplo ſenarii, exceptis 2 & 3.

XXIII.

Ideoque certa datur lex in progressione numerorum primorum, quæ, quantum scio, a nemine hactenus fuit observata. Illa autem talis est: Constructis duabus seriebus, quarum una contineat multiplices senarii unitate diminutos, altera autem eosdem multiplices unitate auctos; ex quibus seriebus, si expunguntur illi qui oriuntur ex multiplicatione unius præcedentis in se & duorum quorumcunque præcedentium, (ostendere enim possum omnes numeros compositos in istis duabus seriebus contentos produci ex multiplicatione duorum præcedentium, vel esse quadratos præcedentium) erunt reliqui omnes numeri primi possibiles, qui in serie naturali numerorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. reperiuntur, exceptis 2 & 3.

XXIV.

Solutio mea Problematis de construendis radicibus æquationum ope portionis curvæ datæ, quod non ita pridem in Diario Parisiensi apparuit, * legitima est; & objectiones quas Autor Problematis in contrarium movit, nihil valent: quin imo totus sum persuasus, si res deveniat ad judices incorruptos Matheseosque gnaros, præmium primo solutori promissum mihi adjudicatum iri.

XXV.

D. PAPINI objectiones (videsis *Act. Erud. Lips.* An. 1691. m. Majo) contra meum perpetuum mobile † pari passu ambulant; ejus enim possibilitatem potius confirmant quam destruunt.

XXVI.

Ex hoc solo, quod curvæ spirales non possunt esse geometri-

* Supra N°. XIII. Videantur Numeri XII-XVI.
† In appendice ad Num. I. pag. 41.

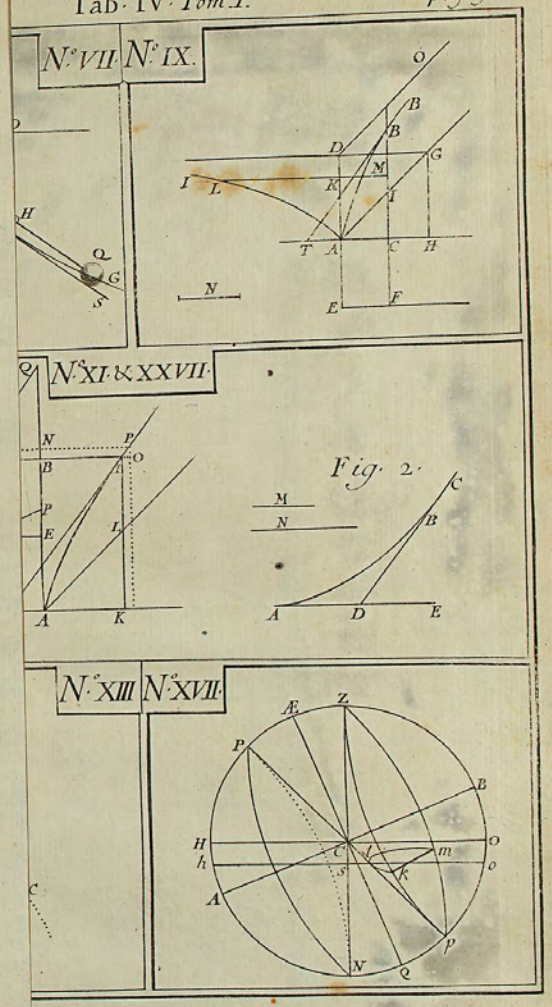
metricæ, ut pote quæ a linea recta in infinitis punctis secantur, legitime infertur, circuli, aliorumque spatiorum, & curvarum in se redeuntium quadraturas & rectificationes impossibiles esse.

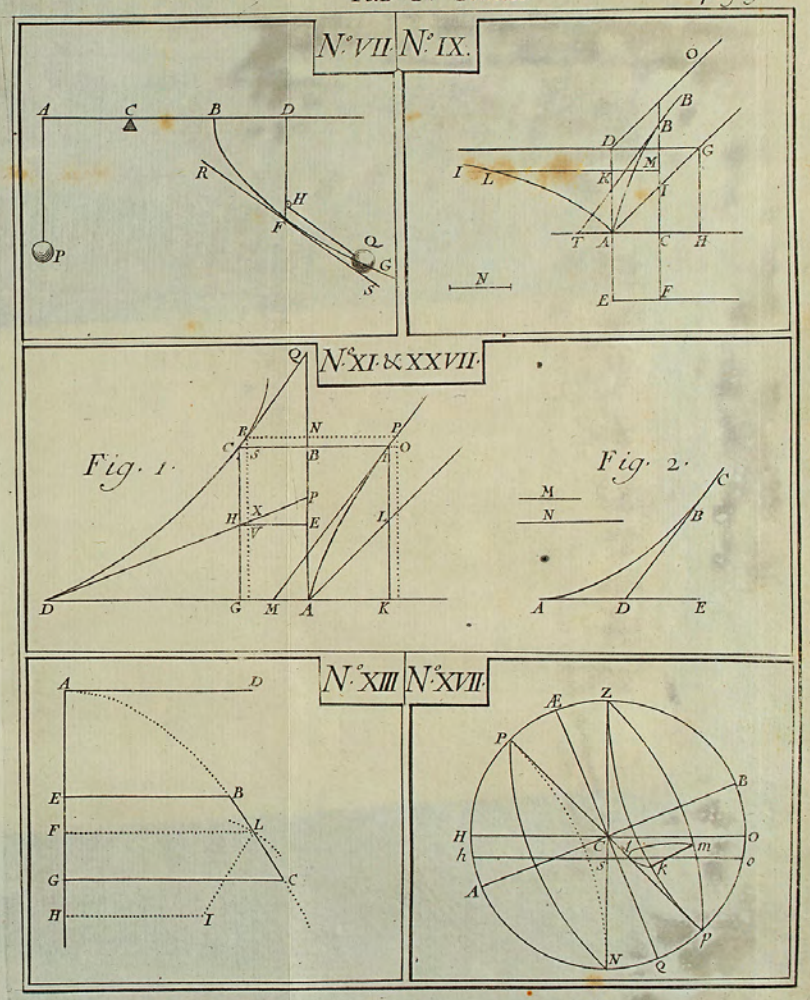
XXVII.

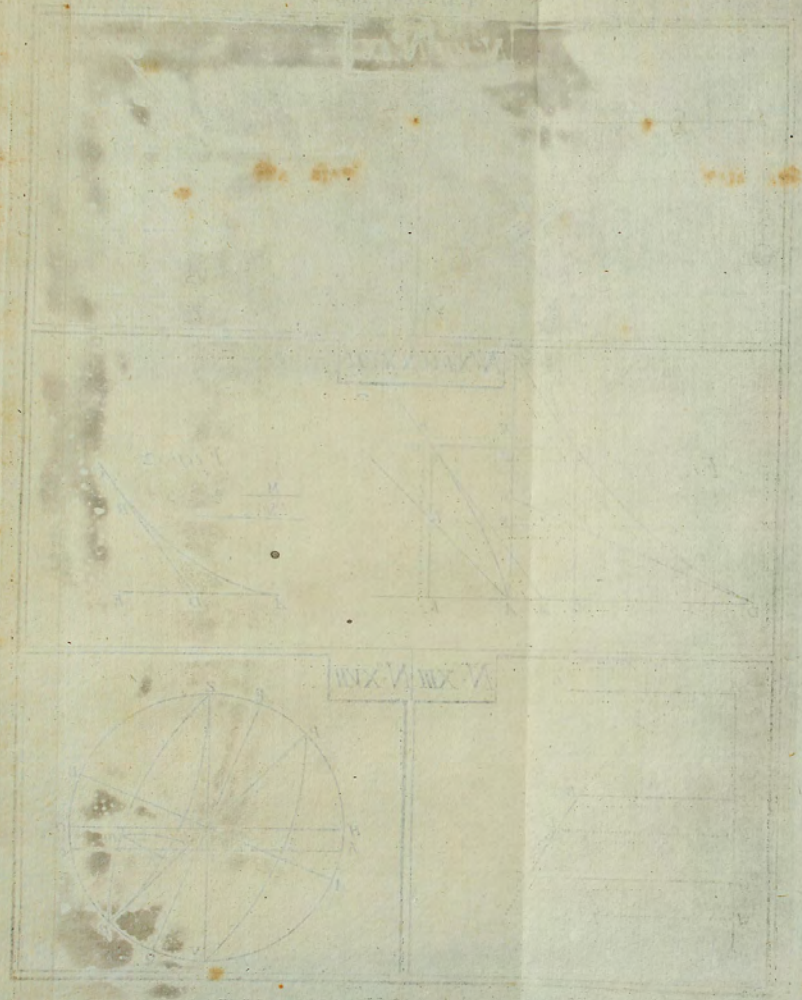
Coronidis loco Cl. Competitoribus proponitur sequens Problema, cujus solutionem tentabunt per suas methodos, sive syntheticas sive analyticas: Alicubi locorum observatur, Sole obtinente altitudinem meridianam 45 grad. extremitatem umbræ a bacillo ad planum horizontale verticaliter erecto projectæ, describere illo die hyperbolam, cujus axis transversus æquatur longitudini bacilli. Quæritur quo Terræ loco, & quo anni die, observatio sit facta. ℞. ---- * Solutionem nostram scisitanti in conflictu aperiemus.

* Manifestum est inspicientibus Figuram, in qua A B, axis mundi; HO, horizon, *ho*, planum horizontale; Z, Zenith; N, Nadir; CS, bacillus cujus apex C; ÆQ, Æquator; P N, parallelus a sole die quæsito descriptus; P C N, conus luminosus; Z C *p*, conus umbrosus, cujus sectio *l k m*, a plano horizontali facta hyperbola est axem transversum habens *l s* æqualem bacillo CS; Manifestum est, inquam, angulos S C *l*, *l* CO, & H C P, arcumque H P esse 45°. & H N, 90°. Ergo N H P, 135°. cujus dimidium P A, 67°. 30′. Unde ablato P H, 45°, remanet H A seu B O, elevatio poli, 22°. 30′: ex qua habetur Terræ locus. Rursus auferendo P A, 67°. 30′. ex A Æ, 90°. remanet Æ P, solis declinatio, 22°. 30′. ex qua datur anni dies. TAB. IV. N. XVII.

F I N I S.


N.° VII.
N.° IX.
N.° XI. & XXVII.
Fig. 2.
N.° XIII.
N.° XVII.


N.° VII.
N.° IX.
N.° XI. & XXVII.
Fig. 1.
Fig. 2.
N.° XIII.
N.° XVII.



DISS
INA
PHYSIC

MOTU

Pro ſummis
& P

Publice examin

JOHANN

Edita primum BA

Hujus vero
Lipſ.