Dans d'autres articles, je montrerai l'usage qu'on peut faire de mes autres formules générales pour obtenir des simplifications nouvelles.

288.

Calcul intégral. — *Mémoire sur la détermination approximative des fonctions représentées par des intégrales.*

C. R., T. XX, p. 907 (31 mars 1845).

Lorsqu'une fonction est représentée par une intégrale et qu'on ne peut obtenir la valeur exacte de cette intégrale en termes finis, on a ordinairement recours à l'intégration par série. D'ailleurs, pour effectuer cette espèce d'intégration, il suffit de développer la fonction sous le signe $\int$ en une série convergente, puis d'intégrer chaque terme de la série obtenue. Or, on peut concevoir un nombre infini de développements divers d'une fonction donnée, même lorsque cette fonction dépend d'une seule variable. Car, en supposant que l'on attribue à cette variable une valeur près de laquelle la fonction reste continue, on pourra, par exemple, développer la fonction, ou suivant les puissances entières de la variable dont il s'agit, ou suivant les puissances entières de toute autre variable qui serait fonction continue de la première. Il résulte de cette observation qu'il existe une infinité de manières d'appliquer l'intégration par série à une intégrale donnée. Mais, parmi les développements divers qu'une intégrale peut ainsi acquérir, il importe de rechercher et de choisir ceux qui sont rapidement convergents. Une étude approfondie de la question m'a conduit à un principe général qui est éminemment propre à guider les géomètres dans cette recherche. Je vais exposer en peu de mots ce principe et les conséquences remarquables qui s'en déduisent.

Supposons que, dans une intégrale, la fonction sous le signe $\int$ ait été développée en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives d'une seule variable t. Cette série sera convergente si ses deux modules sont inférieurs à l'unité, et cette condition sera généralement remplie pour tout module de la variable t compris entre certaines limites qui permettront à la fonction de devenir infinie ou discontinue. Il y a plus : la série trouvée offrira, en général, une convergence rapide, lorsque le module de la variable sera fort éloigné des deux limites dont nous venons de parler; mais la convergence deviendra très lente dans le cas contraire. Or, pour remédier à cet inconvénient, il suffira évidemment de reculer ces deux limites, ou plutôt de les remplacer par des limites nouvelles, en considérant la fonction sous le signe $\int$ comme composée de deux facteurs dont le premier seul puisse devenir infini ou discontinu, quand le module de la variable atteint les deux limites primitivement calculées, et en développant le second facteur en série, sans altérer la forme du premier facteur. Si les nouvelles limites entre lesquelles le module de t peut varier, sans que le second facteur cesse d'être fini et continu, diffèrent notablement des limites primitivement calculées, alors, au développement de ce second facteur correspondra un développement de la fonction sous le signe $\int$ en une série nouvelle qui sera, en général, rapidement convergente, dans le cas où la convergence de la série primitivement obtenue devenait très lente. Si, d'ailleurs, le premier facteur est tel que l'on puisse facilement intégrer chaque terme de la nouvelle série, l'intégrale proposée pourra être représentée, avec une grande approximation, par la somme d'un petit nombre de termes.

Le principe général que nous venons d'établir s'applique avec succès à la détermination des mouvements des corps célestes. Les astronomes ont quelquefois exprimé le vœu que l'on parvînt à remplacer les développements ordinaires des coordonnées des planètes en séries de sinus et cosinus par d'autres développements plus convergents, composés de termes périodiques que l'on pût calculer facilement à l'aide de certaines Tables construites une fois pour toutes. Il y a plus : on a dit avec raison que, pour faciliter le calcul des perturbations observées dans les mouvements des planètes et des comètes, il pourrait être avantageux de substituer aux séries composées de termes périodiques des séries composées de termes non périodiques, dont l'usage serait restreint, pour chaque astre, à une portion de l'orbite que cet astre décrit. Mais quelle est précisément la nature des tentatives que les géomètres ont pu faire pour réaliser cette pensée? C'est ce que j'ignore; et, à ma connaissance, on ne trouve rien qui soit propre à éclaircir cette question dans les Ouvrages publiés jusqu'à ce jour. Après avoir reconnu les avantages qui s'attachent à la décomposition des fonctions en facteurs, dans la détermination des coefficients que renferment les développements connus de ces fonctions, j'ai voulu voir s'il ne serait pas possible de tirer parti de cette décomposition pour développer les intégrales que présente la théorie des planètes et des comètes elles-mêmes en séries nouvelles qui fussent rapidement convergentes, au moins pour des portions considérables des orbites. Le principe ci-dessus rappelé m'a indiqué la marche que je devais suivre pour obtenir de semblables séries, et il fait ainsi disparaître les difficultés que le problème semblait offrir au premier abord. Quelques lignes suffiront pour donner aux géomètres une idée nette des résultats que j'ai trouvés, et qui me paraissent mériter de fixer un moment l'attention de l'Académie.

Les variations des éléments elliptiques des planètes et des comètes sont généralement représentées par des sommes d'intégrales de divers ordres. Considérons en particulier les variations du premier ordre, qui peuvent toujours être réduites à des intégrales simples, et celles de ces intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ a pour dénominateur, ou la distance $\mathfrak{r}$ de deux planètes, ou le cube de $\mathfrak{r}$. En égalant la distance $\mathfrak{r}$ à zéro, on obtiendra une équation transcendante qui, résolue par rapport au temps t, admettra généralement une infinité de racines imaginaires; et à chacune de ces racines correspondra un facteur linéaire, mais imaginaire, de la distance $\mathfrak{r}$. Cela posé, le principe indiqué plus haut me conduit à décomposer la distance $\mathfrak{r}$ en deux facteurs réels, dont le premier soit le produit des deux facteurs

linéaires et conjugués, correspondants aux racines imaginaires qui offrent le plus petit module. En divisant l'unité par ce même produit, on obtient un premier facteur réel de la fonction qui se trouve renfermée sous le signe $\int$ dans chaque intégrale, savoir, le facteur dont la forme ne doit point être altérée. Quant à l'autre facteur, il convient de le développer en série ordonnée suivant les puissances ascendantes d'une variable nouvelle qui, différentiée par rapport au temps, donne pour dérivée précisément le rapport de l'unité au produit mentionné ci-dessus; et, en opérant de cette manière, on voit la valeur de chaque intégrale se réduire elle-même à une série dont les divers termes sont tous, à l'exception des premiers, respectivement proportionnels aux puissances entières, positives et négatives de la nouvelle variable.

Ajoutons qu'on obtiendra encore, pour représenter chaque intégrale, une série qui pourra être employée avec succès dans la détermination des mouvements des corps célestes, si, au produit dont nous avons parlé, on substitue le carré de la distance entre deux planètes assujetties à se mouvoir, dans des orbites circulaires, avec des éléments elliptiques choisis de manière que ce carré ait pour facteur ce même produit.

Dans les recherches que je viens d'analyser, j'ai ramené la détermination d'une intégrale à la décomposition de la fonction sous le signe $\int$ en deux facteurs, dont l'un reste inaltérable, tandis que l'autre se développe en série convergente; et j'ai, de plus, supposé le premier facteur choisi de manière que la substitution du second facteur à la fonction eût pour effet de reculer les limites entre lesquelles cette fonction demeurait finie et continue. Il n'est pas absolument nécessaire d'assujettir le premier facteur à cette dernière condition; et, pour obtenir le développement de l'intégrale en une série qui soit rapidement convergente, au moins dans ses premiers termes, il suffit souvent de considérer, comme premier facteur de la fonction sous le signe $\int$, une seconde fonction dont elle diffère très peu. Cette remarque fort simple permet de développer les coordonnées des corps célestes, ou plutôt les accroissements de ces coordonnées, dus aux forces perturbatrices, en séries qui paraissent dignes de remarque. Pour obtenir ces nouvelles séries, je décompose la fonction perturbatrice, ou plutôt la partie de cette fonction qui est réciproquement proportionnelle à la distance des deux planètes, en deux facteurs, dont le premier est de la forme que ce rapport acquiert quand les deux planètes se meuvent dans des orbites circulaires; puis, en laissant ce premier facteur inaltérable, je développe le second facteur suivant les puissances entières des exponentielles qui ont pour arguments les anomalies moyennes. Alors les inconnues se trouvent exprimées par des séries d'intégrales simples ou doubles dans chacune desquelles la fonction sous le signe $\int$ est le produit du premier facteur par une exponentielle trigonométrique dont l'argument est proportionnel au temps. Je prouve ensuite qu'on peut réduire l'évaluation numérique des intégrales à la construction de certaines Tables, et je montre comment on peut ramener : 1° la détermination des intégrales simples au calcul des seules transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce; 2° la détermination des intégrales doubles au calcul de deux autres transcendantes, qui sont ce que deviennent les premières quand on multiplie, dans chacune d'elles, la fonction sous le signe $\int$ par la variable à laquelle se rapporte l'intégration.

Il est bon d'observer qu'on peut modifier de diverses manières la méthode et les séries nouvelles que je viens de signaler, soit en faisant subir de légères modifications à la forme du facteur qu'on laisse inaltérable, soit en substituant au temps t une autre variable indépendante. Parmi les résultats auxquels on parvient en opérant de la sorte, on doit surtout distinguer ceux qu'on obtient quand on exprime toutes les variables en fonction de l'angle qui représente la différence entre les anomalies excentriques des deux astres que l'on considère.

Dans mes précédents Mémoires, j'ai donné des formules et des méthodes nouvelles pour le calcul des perturbations des planètes et des comètes, et j'ai montré les avantages que présentent ces méthodes par des applications numériques relatives à la théorie de Pallas et de Jupiter. Mais je supposais toujours les accroissements des coordonnées développés en séries qui conservaient la forme adoptée jusqu'à ce jour. Dans le présent Mémoire, je change la forme des séries elles-mêmes, et je n'ignore pas que cette innovation obligera les géomètres et les astronomes à changer complètement le système des opérations qu'ils emploient pour construire les Tables astronomiques. Toutefois, cette innovation semble destinée à prévaloir, non seulement en raison de l'économie de temps et de travail qu'elle entraînera nécessairement, mais aussi et surtout parce que les nouveaux développements s'appliquent avec succès au cas même où il s'agit de calculer les perturbations observées dans le mouvement de comètes dont l'excentricité devient fort considérable et s'éloigne peu de l'unité.

Analyse.

§ I. — *Considérations générales.*

Soit $f(x)$ une fonction donnée de la variable x, et supposons que l'on demande la valeur de l'intégrale

$$8 = \int f(x)\,dx, \tag{1}$$

prise à partir d'une certaine origine, cette intégrale n'étant pas du nombre de celles qui s'obtiennent en termes finis. On pourra, dans un grand nombre de cas, trouver assez facilement la valeur demandée à l'aide de l'intégration par séries. Pour y parvenir, il suffira de développer la fonction $f(x)$ en une série qui demeure convergente, du moins pour les valeurs de x comprises entre les limites de l'intégration. Il y a plus : on pourra effectuer cette opération d'une infinité de manières, en développant, par exemple, ou la fonction $f(x)$, ou même un facteur de cette fonction, en une série ordonnée suivant les puissances entières d'une variable liée à x par une équation donnée. Si, pour fixer les idées, on a non seulement

$$f(x) = \varphi(x)\chi(x), \tag{2}$$

mais encore, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites de l'intégration,

$$\chi(x) = u + v + w + \ldots, \tag{3}$$

la valeur de l'intégrale s, développée en série, sera

$$s = \int u\varphi(x)\,dx + \int v\varphi(x)\,dx + \int w\varphi(x)\,dx + \ldots. \tag{4}$$

D'ailleurs, pour que la formule (4) puisse servir à trouver aisément une valeur très approchée de l'intégrale s, il est nécessaire d'attribuer au facteur $\varphi(x)$ et au développement de $\chi(x)$ des formes telles que, d'une part, les intégrales

$$\int u\varphi(x)\,dx, \quad \int v\varphi(x)\,dx, \quad \int w\varphi(x)\,dx \tag{5}$$

se réduisent, ou à des fonctions exprimées en termes finis, ou, du moins, à des transcendantes dont on puisse calculer facilement la valeur, et que, d'autre part, la série de ces intégrales soit rapidement convergente. La première condition sera remplie si l'on réduit, par exemple, le facteur $\varphi(x)$ à une fonction rationnelle de la variable x, ou d'une exponentielle dont l'exposant serait proportionnel à x, et si, en même temps, on développe le facteur $\chi(x)$ suivant les puissances entières de cette variable ou de cette exponentielle. On pourrait même, à la fonction rationnelle dont nous venons de parler, substituer une fonction algébrique et, en particulier, un radical du second degré analogue à ceux que renferment les transcendantes elliptiques. D'ailleurs, en vertu d'un théorème établi dans le résumé des *Leçons sur le Calcul infinitésimal* (*voir* la trente-huitième Leçon) [1], la série (5) sera convergente lorsque la série

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots \tag{6}$$

restera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites de l'intégration; et l'on peut ajouter que, dans ce cas, une convergence rapide de la série (6) entraînera généralement une convergence rapide de la série (5). Mais comment doit-on opérer pour rendre la série (6) rapidement convergente, ou dans toute son étendue, ou au moins dans ses premiers termes? C'est ce que nous allons maintenant examiner.

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IV.

Supposons d'abord que la série (6) se réduise au développement de la fonction $\chi(x)$ suivant les puissances entières de la variable x. La rapidité de la convergence de cette série dépendra de la nature même de la fonction $\chi(x)$, et par conséquent de la nature du premier facteur $\varphi(x)$ de la fonction donnée $f(x)$. Si ce premier facteur se réduit à l'unité, le facteur $\chi(x)$ n'étant alors autre chose que la fonction $f(x)$ elle-même, la série (6) sera précisément le développement de $f(x)$ suivant les puissances entières de x, et restera convergente tant que le module de x ne dépassera pas les limites entre lesquelles il peut varier sans que la fonction $f(x)$ cesse d'être finie et continue. Nommons a et $a_{,}$ ces deux limites, $a_{,}$ étant la limite inférieure et a la limite supérieure. La série

$$\int u\,dx, \quad \int v\,dx, \quad \int w\,dx, \quad \ldots \tag{7}$$

qui, dans l'hypothèse admise, représentera le développement de l'intégrale s, sera convergente, si les limites de l'intégration demeurent comprises entre les deux modules $a_{,}$, a; et elle sera même rapidement convergente si ces limites restent placées à une distance considérable de ces modules. Supposons maintenant que, l'origine ou la limite inférieure de l'intégrale demeurant constante, la limite variable, c'est-à-dire la limite supérieure, se rapproche considérablement du module a. Alors la convergence de la série (7) deviendra généralement très lente; mais, pour retrouver un développement de s rapidement convergent, il suffira de substituer à la série (7) la série (5), en supposant, s'il est possible, le facteur $\varphi(x)$ tellement choisi, que la fonction $\chi(x)$ reste continue pour des modules de x notablement supérieurs au module a. Or il est souvent facile de remplir cette dernière condition. Supposons, pour fixer les idées, que a représente le module d'une valeur particulière a de x, pour laquelle la fonction $f(x)$

devienne infinie, en sorte que l'on ait

$$a = \mathrm{a}e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

α désignant un arc réel. Alors a sera une racine de l'équation

$$\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = 0. \tag{8}$$

Alors aussi $\mathrm{f}(x)$ sera généralement proportionnel au binôme

$$x - a$$

élevé à une puissance dont l'exposant sera négatif ou offrira du moins une partie réelle négative. Représentons cette puissance par

$$(x-a)^{-s},$$

et supposons qu'il soit possible de choisir l'exposant s de telle sorte que le produit

$$(x-a)^s\,\mathrm{f}(x)$$

ne devienne pas infini pour $x = a$. Enfin supposons que ce même produit ne cesse jamais d'être fini et continu, ou du moins ne cesse de l'être que pour un module b de x, placé à une distance notable du module a. Pour remplir la condition énoncée, il suffira de prendre

$$\varphi(x) = (x-a)^{-s}, \qquad \chi(x) = (x-a)^s\,\mathrm{f}(x), \tag{9}$$

ou bien

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-s}, \qquad \chi(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{s}\mathrm{f}(x), \tag{10}$$

ou encore

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-s}, \qquad \chi(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{s}\mathrm{f}(x). \tag{11}$$

Ajoutons que l'on pourrait attribuer à la fonction $\varphi(x)$ une infinité d'autres formes, pour lesquelles la condition énoncée serait satisfaite. On pourrait supposer, par exemple,

$$\varphi(x) = (e^x - e^a)^{-s}, \tag{12}$$

ou plus généralement

$$\varphi(x) = (\mathfrak{X} - \mathfrak{A})^{-s}, \tag{13}$$

$\mathfrak{X}$ désignant une fonction continue de x, et $\mathfrak{A}$ la valeur particulière que cette fonction acquiert pour $x = a$.

Lorsque la fonction $\mathrm{f}(x)$ est réelle, les racines de l'équation (8) sont généralement, ou des racines réelles, ou des racines imaginaires conjuguées deux à deux. Donc alors, si cette équation admet une racine imaginaire de la forme

$$x = \mathrm{a}e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

elle admettra une autre racine imaginaire de la forme

$$x = \mathrm{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}};$$

et si la fonction $\mathrm{f}(x)$ peut être considérée comme ayant pour facteur

$$\left(x - \mathrm{a}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right)^{-s},$$

elle aura encore pour facteur

$$\left(x - \mathrm{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)^{-s}.$$

Adoptons cette hypothèse, et supposons que le produit

$$\left(x - \mathrm{a}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right)^{s}\left(x - \mathrm{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)^{s}\mathrm{f}(x) = (x^2 - 2\mathrm{a}x\cos\alpha + \mathrm{a}^2)^s\,\mathrm{f}(x)$$

ne cesse d'être fini et continu, par rapport à x, que pour un module b de x placé à une distance notable du module a. Pour remplir la condition ci-dessus énoncée, il suffira de prendre

$$\varphi(x) = (x^2 - 2\mathrm{a}x\cos\alpha + \mathrm{a}^2)^{-s} \tag{14}$$

et, par suite,

$$\chi(x) = (x^2 - 2\mathrm{a}x\cos\alpha + \mathrm{a}^2)^{s}\,\varphi(x). \tag{15}$$

Nous venons de montrer, par des exemples, comment on peut déterminer le facteur $\varphi(x)$ de manière à rendre les séries (6) et (5) rapidement convergentes dans des cas où la convergence aurait été fort lente, si l'on eût pris simplement $\varphi(x) = 1$. Mais, dans ce qui vient d'être dit, nous avons supposé que la série (6) se réduisait au développement de $\chi(x)$ suivant les puissances entières de x. Dans cette hypothèse, le terme général de la série (6) est de la forme

$$k_n x^n,$$

n désignant une quantité entière positive ou négative, et par suite le terme général de la série (5) est de la forme

$$k_n \int x^n \varphi(x)\,dx.$$

Or l'intégrale renfermée dans celui-ci, savoir,

$$\int x^n \varphi(x)\,dx, \tag{16}$$

peut, ou s'exprimer sous forme finie, ou se réduire à des transcendantes connues, dans plusieurs des cas que nous avons considérés. Ainsi, en particulier, elle s'exprimera sous forme finie, si l'on prend pour $\varphi(x)$ une des fonctions

$$(x-a)^{-s},\quad \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-s},\quad \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-s},$$

en réduisant l'exposant s à un nombre entier ou fractionnaire, ou bien, si l'on prend pour $\varphi(x)$ la fonction

$$(x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2)^{-s},$$

en réduisant s à l'une des fractions

$$\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{3}{2},\quad \tfrac{5}{2},\quad \ldots.$$

Au reste, on étendra sans difficulté les raisonnements dont nous avons fait usage au cas où la série (6) serait ordonnée, non plus suivant les puissances entières de la variable x, mais suivant les puissances entières d'une autre variable y liée à x par une certaine équation. Si, pour fixer les idées, on supposait cette équation réduite à la formule

$$y = e^x,$$

alors, en posant comme ci-dessus

$$\varphi(x) = (e^x - e^a)^{-s},$$

et désignant par $k_n y^n$ le terme général de la série (6), on obtiendrait pour terme général de la série (5) un produit de la forme

$$k_n \int y^n (e^x - e^a)^{-s}\,dx.$$

Alors aussi l'intégrale

$$\int y^n (e^x - e^a)^{-s}\,dx = \int y^{n-1}(y - e^a)^{-s}\,dy$$

pourrait s'obtenir sous forme finie, si l'exposant s se réduisait à un nombre entier ou fractionnaire.

En terminant ce paragraphe, je ferai une dernière observation, et je remarquerai que, pour rendre la série (5) rapidement convergente, au moins dans ses premiers termes, il n'est pas absolument nécessaire d'assujettir le facteur $\varphi(x)$ à la condition particulière que nous avons indiquée. Il suffit généralement de prendre pour $\varphi(x)$ une fonction telle que le rapport

$$\chi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

se rapproche beaucoup de l'unité, pour toute valeur de x comprise entre les limites de l'intégration, puis, de développer ce rapport suivant les puissances ascendantes de paramètres qui soient très petits et du même ordre que la différence

$$\chi(x) - 1.$$

§ II. — *Applications diverses des principes établis dans le paragraphe I.*

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int f(t)\,dt, \tag{1}$$

la valeur de $f(t)$ étant donnée par l'équation

$$f(t) = (1 - 2\theta\cos t + \theta^2)^{-s}, \tag{2}$$

dans laquelle θ, s représentent deux nombres dont le premier soit compris entre les limites 0, 1; et supposons cette intégrale prise à partir de l'origine zéro. Comme, en vertu de la formule (2), la fonction $f(t)$ ne changera pas de valeur quand on fera croître l'angle t d'un multiple de la circonférence, on pourra, dans la détermination de l'intégrale (1), ramener tous les cas à celui où la valeur numérique de t serait supposée inférieure à π. Adoptons cette supposition, et concevons que l'on se propose d'appliquer l'intégration par série à l'intégrale (1). On pourra y parvenir assez simplement en développant le facteur $f(t)$ suivant les puissances entières de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{t\sqrt{-1}},$$

et comme, en posant

$$x = e^{t\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$1 - 2\theta\cos t + \theta^2 = (1-\theta x)\left(1-\frac{\theta}{x}\right),$$

on en conclura

$$(1-2\theta\cos t+\theta^2)^{-s} = (1-\theta x)^{-s}\left(1-\frac{\theta}{x}\right)^{-s}$$
$$= \Theta_0 + \Theta_1\left(x+\frac{1}{x}\right) + \Theta_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) + \ldots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \qquad (1+2\theta\cos t+\theta^2)^{-s} = \Theta_0 + 2\Theta_1\cos t + 2\Theta_2\cos 2t + \ldots,$$

la valeur de Θ_n étant déterminée par la formule

$$\Theta_n = \{[s]_n + [s]_1[s]_{n+1}\theta^2 + [s]_2[s]_{n+2}\theta^4 + \ldots\}\theta^n,$$

et la valeur de $[s]_n$ étant

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

D'ailleurs, on tirera de la formule (3), en supposant l'intégration effectuée à partir de l'origine zéro,

$$(4) \qquad \int f(t)\,dt = \Theta_0 t + 2\Theta_1\sin t + 2\Theta_2\frac{\sin 2t}{2} + \ldots.$$

De plus, comme l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{f(t)} = 0$$

pourra être présentée sous la forme

$$(6) \qquad (1-\theta x)\left(1-\frac{\theta}{x}\right) = 0,$$

cette équation, résolue par rapport à x, offrira deux racines, savoir :

$$(7) \qquad x = \theta, \qquad x = \frac{1}{\theta};$$

et par suite θ, $\frac{1}{\theta}$ seront les deux modules de chacune des séries que renferment les seconds membres des formules (3) et (4). Donc ces séries seront rapidement convergentes, si θ est un petit nombre; mais la convergence deviendra très lente, si θ se rapproche beaucoup de l'unité. Voyons comment il sera possible, dans ce dernier cas, d'obtenir, pour l'intégrale proposée, un développement plus convergent que la série déjà connue et reproduite par la formule (4).

L'équation (5) ou (6) peut s'écrire comme il suit

$$(8) \qquad \cos t = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right),$$

et, si l'on pose, pour abréger,

$$(9) \qquad \theta = e^{-\alpha},$$

elle deviendra

$$(10) \qquad \cos t = \cos(\alpha\sqrt{-1}).$$

Présentée sous cette dernière forme, et résolue par rapport à t, elle fournira une infinité de racines imaginaires déterminées par la formule

$$(11) \qquad t = 2n\pi \pm \alpha\sqrt{-1},$$

dans laquelle n désigne une quantité entière quelconque positive ou négative ; et parmi ces racines, celles qui offriront le plus petit module seront les deux suivantes :

$$t = \alpha\sqrt{-1}, \qquad t = -\alpha\sqrt{-1}. \tag{12}$$

Or les facteurs linéaires correspondants à ces deux racines, dans la fonction $f(t)$, seront

$$(t - \alpha\sqrt{-1})^{-s}, \quad (t + \alpha\sqrt{-1})^{-s};$$

et le produit de ces deux facteurs sera

$$(t^2 + \alpha^2)^{-s}.$$

Ajoutons que celles des racines de l'équation (5) qui offriront le plus petit module au-dessus de α seront

$$t = 2\pi \pm \alpha\sqrt{-1}, \qquad t = -2\pi \pm \alpha\sqrt{-1},$$

et que leur module commun

$$\sqrt{4\pi^2 + \alpha^2}$$

sera séparé par une distance notable du module α. Donc, en vertu de ce qui a été dit dans le § I, pour obtenir un développement très convergent de l'intégrale cherchée, il suffira de décomposer la fonction $f(t)$ en deux facteurs $\varphi(t)$, $\chi(t)$, dont le premier soit déterminé par la formule

$$\varphi(t) = (t^2 + \alpha^2)^{-s},$$

puis de développer le second facteur $\chi(t)$ en une série ordonnée suivant les puissances entières de t. On y parviendra sans peine, en observant que le trinôme

$$1 - 2\theta\cos t + \theta^2$$

est proportionnel au produit de tous les facteurs de la forme

$$1 - \frac{t}{2n\pi \pm \alpha\sqrt{-1}},$$

et qu'en conséquence $f(t)$ sera le produit de tous les facteurs de la forme

$$\left(1 - \frac{t}{2n\pi \pm \alpha\sqrt{-1}}\right)^{-s},$$

multiplié par le facteur constant $(1-\theta)^{-2s}$. Il en résulte que, si l'on fait, pour abréger,

$$c_m = \sum \frac{1}{(2n\pi + \alpha\sqrt{-1})^m}, \tag{13}$$

en supposant la somme qu'indique le signe Σ étendue aux seules valeurs entières positives et négatives de n, et en excluant la valeur $n = 0$, on aura

$$\chi(t) = \alpha^{2s}(1-\theta)^{-2s} e^{s(c_2 t^2 - \frac{1}{2} c_4 t^4 + \frac{1}{3} c_6 t^6 + \dots)}$$

et, par conséquent,

$$\chi(t) = \alpha^{2s}(1-\theta)^{-2s}\left[1 + st^2(c_2 - \tfrac{1}{2}c_4 t^2 + \dots) + \frac{s^2 t^4}{1.2}(c_2 - \dots)^2 + \dots\right].$$

En ordonnant ce dernier développement de $\chi(t)$ suivant les puissances entières et ascendantes de t, on obtiendra une équation de la forme

$$\chi(t) = k_0 + k_1 t^2 + k_2 t^4 + \dots, \tag{14}$$

et le module de la série comprise dans le second membre de cette équation sera précisément égal au module de celle que produit le développement de l'expression

$$\left(1 \pm \frac{t}{2\pi \pm \alpha\sqrt{-1}}\right)^{-s},$$

c'est-à-dire qu'il se réduira au rapport

$$\frac{t}{\sqrt{4\pi^2 + \alpha^2}}.$$

Ajoutons que ce rapport sera nécessairement inférieur à $\frac{1}{2}$, si, comme on l'a supposé, la valeur de t reste comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Donc alors le développement de $\chi(t)$ offrira une convergence rapide, et l'on pourra en dire autant, à plus forte raison, du développement correspondant de l'intégrale $\int f(t)\,dt$, qui se déterminera par la formule

$$\int f(t)\,dt = k_0 \int \frac{dt}{(t^2 + \alpha^2)^s} + k_1 \int \frac{t^2\,dt}{(t^2 + \alpha^2)^s} + \dots. \tag{15}$$

Observons, d'ailleurs, que chacune des intégrales comprises dans le second membre de cette formule pourra s'obtenir sous forme finie, si s est un nombre entier quelconque ou un nombre fractionnaire dont le dénominateur soit égal à 2.

Examinons en particulier le cas où l'on prend $s = \frac{1}{2}$. Alors, en effectuant l'intégration à partir de l'origine $t = 0$, on trouvera

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}} = \mathrm{l}\,\frac{t+\sqrt{t^2+\alpha^2}}{\alpha}. \tag{16}$$

Donc, en posant, pour abréger,

$$z = \frac{t+\sqrt{t^2+\alpha^2}}{\alpha},$$

on aura simplement

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}} = \mathrm{l}(z).$$

D'ailleurs, on tirera de ces formules

$$t = \frac{\alpha}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \qquad \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}} = \frac{dz}{z}$$

et, par suite,

$$\int \frac{t^{2n}\,dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} \int \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}. \tag{17}$$

Or, des équations (16) et (17), jointes à la formule (15), on déduira immédiatement la valeur de l'intégrale

$$\int \mathrm{f}(t)\,dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1-2\theta\cos t+\theta^2}},$$

exprimée par une série ordonnée suivant les puissances entières et paires de z, à laquelle s'ajoutera un terme proportionnel à $\mathrm{l}(z)$. Au reste, on peut obtenir encore la même série, à l'aide des considérations suivantes.

La formule

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\theta\cos t+\theta^2}} = \frac{\chi(t)}{\sqrt{t^2+\alpha^2}} \tag{18}$$

donne

$$\chi(t) = \left(\frac{t^2+\alpha^2}{1-2\theta\cos t+\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Or, concevons que la valeur précédente de $\chi(t)$ soit développée suivant les puissances entières de la variable z, liée à la variable t par l'équation

$$t = \frac{\alpha}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \tag{20}$$

et posons, en conséquence,

$$\chi(t) = h_0 + h_1\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + h_2\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + \ldots. \tag{21}$$

Des formules (18) et (21), jointes à l'équation

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}} = \frac{dz}{z},$$

on tirera

$$\int \mathrm{f}(t)\,dt = \int \left[h_0 + h_1\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + h_2\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + \ldots\right] \frac{dz}{z},$$

et par conséquent on trouvera, en effectuant les intégrations à partir des origines correspondantes $t = 0$, $z = 1$,

$$\int \mathrm{f}(t)\,dt = h_0\,\mathrm{l}(z) + \frac{h_1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{h_2}{4}\left(z^4 - \frac{1}{z^4}\right) + \ldots. \tag{22}$$

Concevons maintenant que l'on considère les deux intégrales

$$\int \frac{dt}{\iota}, \quad \int \frac{t\,dt}{\iota}, \tag{23}$$

en supposant la valeur de ι déterminée par la formule

$$\iota = (1 - 2\theta\cos\lambda t + \theta^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{24}$$

et les deux intégrales prises à partir de l'origine $t = 0$. On reconnaîtra immédiatement que la détermination de ces intégrales peut toujours être ramenée au cas où la valeur de t est renfermée entre les limites

$$-\frac{\pi}{\lambda}, \quad +\frac{\pi}{\lambda}.$$

Adoptons cette hypothèse, et concevons encore que l'on attribue au module θ une valeur peu différente de l'unité. Alors, en posant, comme ci-dessus,

$$\theta = e^{-\alpha}$$

et, de plus,

$$\frac{1}{\iota} = \mathrm{f}(t) = \varphi(t)\chi(t),$$

on prouvera que, pour obtenir des développements très convergents des intégrales proposées, il convient de prendre

$$\varphi(t) = (\lambda^2 t^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et de développer le seul facteur

$$\chi(t) = \left(\frac{\lambda^2 t^2 + \alpha^2}{1 - 2\theta\cos\lambda t + \theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

ou le produit $t\chi(t)$, suivant les puissances ascendantes de la variable z, liée à la variable t par l'équation

$$t = \frac{\alpha}{\lambda}\left(z - \frac{1}{z}\right), \tag{26}$$

de laquelle on tire

$$\frac{\lambda\, dt}{\sqrt{\lambda^2 t^2 + \alpha^2}} = \frac{dz}{z}.$$

En opérant ainsi, et supposant toujours le développement de $\chi(t)$ représenté par le second membre de la formule (21), on trouvera

$$\int \frac{dt}{\iota} = \frac{h_0}{\lambda}\mathrm{l}(z) + \frac{h_1}{2\lambda}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{h_2}{4\lambda}\left(z^4 - \frac{1}{z^4}\right) + \ldots \tag{27}$$

et

$$\int \frac{t\,dt}{\iota} = \frac{h_0 - h_1}{\lambda}\left(z - 2 + \frac{1}{z}\right) + \frac{h_1 - h_2}{3\lambda}\left(z^3 - 2 + \frac{1}{z^3}\right) + \ldots \tag{28}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{t\,dt}{\iota} = \frac{h_0 - h_1}{\lambda}\left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{h_1 - h_2}{3\lambda}\left(z^{\frac{3}{2}} - z^{-\frac{3}{2}}\right)^2 + \ldots. \tag{29}$$

On établirait avec la même facilité les formules qui serviraient à dé-

velopper, en séries très convergentes, les valeurs des intégrales

$$\int \iota\, dt \quad \text{et} \quad \int t\iota\, dt. \tag{30}$$

Observons d'ailleurs que, si l'on pose, pour plus de commodité,

$$x = e^{\lambda t\sqrt{-1}},$$

on aura, non seulement

$$\iota^2 = 1 - 2\theta\cos\lambda t + \theta^2 = (1 - \theta x)\left(1 - \frac{\theta}{x}\right),$$

mais encore

$$\mathrm{D}_t x = \lambda x\sqrt{-1}, \qquad \mathrm{D}_t \iota = \frac{\theta\lambda}{2}\,\frac{\frac{1}{x} - x}{\iota}\sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$\mathrm{D}_t(x^n\iota) = \frac{\lambda x\sqrt{-1}}{\iota}\left[n(1+\theta^2)x^n - \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\theta x^{n+1} - \left(n - \tfrac{1}{2}\right)\theta x^{n-1}\right]. \tag{31}$$

Or, de cette dernière formule, jointe aux équations

$$\mathrm{D}_t(t x^n \iota) = x^n\iota + t\,\mathrm{D}_t(x^n\iota), \qquad \iota = \frac{(1 - \theta x)(1 - \theta x^{-1})}{\iota}, \tag{32}$$

on conclura immédiatement que la détermination des intégrales de la forme

$$\int \frac{x^n\,dt}{\iota}, \quad \int \frac{t x^n}{\iota}\,dt, \tag{33}$$

et même de la forme

$$\int x^n\iota\, dt, \quad \int t x^n \iota\, dt, \tag{34}$$

peut être ramenée à la détermination des seules intégrales

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int \frac{dt}{\iota}, & \displaystyle\int \frac{x\,dt}{\iota}, \\ \displaystyle\int \frac{t\,dt}{\iota}, & \displaystyle\int \frac{tx\,dt}{\iota}. \end{array}\right. \tag{35}$$

Il y a plus : si l'on nomme μ un coefficient distinct de λ, on pourra développer l'exponentielle $e^{\mu t\sqrt{-1}}$ suivant les puissances ascendantes de $x = e^{\lambda t\sqrt{-1}}$, à l'aide de la formule

$$(36) \qquad e^{\mu t\sqrt{-1}} = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi\mu}{\lambda} \Sigma (-1)^n \frac{x^n}{\frac{\mu}{\lambda} - n},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de t comprises entre les limites $t = -\frac{\pi}{\lambda}$, $t = \frac{\pi}{\lambda}$, la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives de n; et la formule (36) continuera de subsister si l'on y remplace l'exponentielle

$$e^{\mu t\sqrt{-1}}$$

par une exponentielle de la forme

$$e^{\pm n'\mu t\sqrt{-1}},$$

n' désignant un nombre entier quelconque. Il en résulte que, si l'on pose

$$y = e^{\mu t\sqrt{-1}},$$

on pourra développer les puissances entières de y en séries ordonnées suivant les puissances entières de x. Donc, par suite, on pourra réduire encore la détermination des intégrales de la forme

$$(37) \qquad \int y^n \frac{dt}{\iota}, \quad \int t y^n \frac{dt}{\iota}, \quad \int y^n \iota\, dt, \quad \int y^n t \iota\, dt$$

à la détermination des transcendantes déjà indiquées, c'est-à-dire des intégrales (35).

Concevons à présent que l'on prenne pour r, dans les intégrales (30), (33), (34), etc., non plus la fonction de t que détermine la formule (24), mais la distance mutuelle de deux planètes, et que le temps soit désigné par la variable t. Alors, en raisonnant comme on vient de le faire, on pourra encore développer facilement en séries convergentes les intégrales (33), (34) et les intégrales du même genre qui serviront à exprimer les variations des éléments elliptiques. Seulement, lorsqu'on voudra évaluer les intégrales (35), le

facteur que nous avons désigné par $\varphi(t)$, et qui devra rester inaltérable dans chaque intégrale, ne sera plus le facteur

$$(\lambda^2 t^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

mais un facteur de la forme

$$[(t-\alpha)^2 + 6^2]^{-\frac{1}{2}},$$

les binômes $\alpha + 6\sqrt{-1}$, $\alpha - 6\sqrt{-1}$ désignant deux racines imaginaires et conjuguées de l'équation

$$(38) \qquad \iota^2 = 0,$$

résolue par rapport à t, savoir celles d'entre ces racines imaginaires qui offriront le plus petit module.

J'ajouterai qu'on pourra développer facilement les variations des éléments elliptiques en séries rapidement convergentes, si l'on attribue au facteur invariable $\varphi(t)$, non plus la forme que nous venons d'indiquer, mais une forme semblable à celle que prend le rapport $\frac{1}{\iota}$, quand les deux astres se meuvent dans des orbites circulaires. Alors on réduira aisément la détermination des inégalités produites dans le mouvement d'une planète m par l'action d'une autre planète m' à la détermination de quelques transcendantes, dont les valeurs pourront être fournies par certaines Tables à simple entrée, construites une fois pour toutes. Parmi les diverses méthodes qui produisent cet effet, on doit remarquer celle qui consiste à considérer le rapport $\frac{1}{\iota}$ comme une fonction de deux exponentielles trigonométriques variables dont la première a pour argument l'anomalie moyenne de la planète m', tandis que la seconde a pour argument la différence entre les anomalies moyennes des deux planètes, puis à développer le rapport $\frac{1}{\iota}$ en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de la première exponentielle. A ce développement de $\frac{1}{\iota}$ correspondent des séries d'intégrales qui représentent les variations des éléments elliptiques. D'ailleurs, pour réduire ces intégrales à un très petit nombre de transcendantes, il suffit de recourir aux formules que nous venons d'établir, et spécialement à la formule (36).

Au reste, je me propose de consacrer un nouvel article au développement spécial de celles d'entre ces formules qui ont pour objet la détermination des mouvements planétaires ([1]).

289.

Astronomie. — *Note sur l'application des nouvelles formules à l'Astronomie.*

C. R., T. XX, p. 996 (7 avril 1845).

J'ai lu, dans la dernière séance, un Mémoire sur la détermination approximative des fonctions représentées par des intégrales. A la suite de cette lecture, notre honorable confrère, M. Liouville, a présenté à l'Académie quelques observations. J'ai souscrit le premier à celle qui avait pour objet la mention du sujet de prix mis au concours en 1840. Quant au Mémoire lui-même et aux calculs qu'il renferme, je les avais crus d'abord, je l'avoue, attaqués par M. Liouville. Notre confrère a déclaré qu'il n'en était rien, et qu'il ne voulait point critiquer une méthode qu'il ne connaissait pas. J'ai été heureux d'entendre sa déclaration. Elle aurait dû être, je crois, plus que suffisante pour modérer l'ardeur belliqueuse d'un écrivain qui assistait, comme étranger, à cette discussion, et pour lui enlever tout prétexte de publier à cette occasion, contre l'Académie et contre ses membres,

([1]) M. Liouville présente verbalement quelques remarques sur la Communication que vient de faire M. Cauchy, et aussi sur le Rapport que le savant académicien a lu dans la séance du 17 mars, à laquelle M. Liouville n'assistait pas. Les observations de M. Liouville ne portent, du reste, que sur quelques-unes des assertions contenues dans ce Rapport et non sur les conclusions mêmes auxquelles il adhère volontiers.

un long réquisitoire, tout en déclarant que la question était du nombre de celles qui n'ont pas un rapport direct avec les objets de ses études. C'en serait bientôt fait de la science, si les savants et l'Académie devaient prendre pour unique règle de leur conduite les prescriptions de quelques auteurs chargés, dans certaines feuilles, de la rédaction des articles académiques; s'il fallait renoncer, quand ils l'exigent, non seulement à la carrière de l'enseignement et aux dignités scientifiques, mais encore à la culture même des sciences et à la publication des découvertes qu'on aurait pu faire. Les savants seraient bien à plaindre si, après s'être exténués de veilles et de fatigues pour contribuer au perfectionnement de l'Analyse et de la Géométrie, ils n'avaient, pour exciter et ranimer leur zèle, d'autre motif que les singuliers encouragements qui leur sont donnés, de temps à autre, par les feuilles dont je parle. Les mêmes écrivains, qui ne pardonneraient pas à un académicien d'oublier la date d'un Rapport ou d'un Programme, ont parfois, il faut l'avouer, des distractions bien étranges. Que, pendant plusieurs années consécutives, un membre de l'Académie expose une théorie nouvelle, qu'il en démontre les avantages, que cette théorie n'ait pas seulement pour objet le perfectionnement du Calcul intégral, qu'elle passe de la spéculation à la pratique, qu'elle se traduise en résultats positifs, en nombres et en chiffres, qu'elle offre un moyen prompt et facile de construire les Tables astronomiques, et réduise à quelques heures des calculs qui exigeaient des astronomes plusieurs mois ou plusieurs années de travail : ils se garderont bien d'en parler. Mais qu'un débat s'élève dans le sein de l'Académie, que, sur une question difficile, deux académiciens semblent ne pas être entièrement d'accord entre eux : des auditeurs s'empresseront de faire part au public d'une discussion qu'ils déclarent eux-mêmes n'avoir pas comprise, et s'exposeront ainsi à prêter aux paroles prononcées un sens contraire à celui qu'elles avaient en réalité. On dirait quelquefois qu'ils ne sont admis à nos séances que pour y entendre ce qu'on ne dit pas, et ne pas entendre ce qu'on y dit. Mais je m'arrête. J'aime à croire que l'auteur de l'article dont il s'agit, en relisant son œuvre, reconnaîtra lui-même qu'il est tombé, sur plusieurs points, dans des erreurs graves, et s'empressera de les rectifier. D'ailleurs, les moments de l'Académie sont trop précieux pour que je veuille plus longtemps m'occuper de cet incident. S'il n'eût intéressé que moi, j'aurais pu garder le silence. La bienveillance toute spéciale avec laquelle mes derniers Mémoires et les méthodes nouvelles qu'ils renferment ont été généralement accueillis par les géomètres, m'autorise dans la conviction où je suis que les avantages de ces méthodes seront reconnus par ceux-là mêmes qui, n'ayant point assisté à plusieurs de nos précédentes séances, n'ont pu suivre les développements que j'ai donnés; et l'assentiment de mes honorables confrères du Bureau des Longitudes, exprimé à moi-même en termes qui m'ont vivement touché, me dédommage amplement d'attaques qui sembleraient inspirées par les préventions les plus singulières et les moins faciles à comprendre, qui sembleraient avoir pour but de troubler la bonne harmonie qui règne au sein de cette Académie, en mettant, s'il était possible, les divers membres en contradiction les uns avec les autres. Mais, en laissant de côté cet article, je ne puis passer sous silence au moins une des questions soulevées dans le débat, une question qui intéresse trop directement le progrès des sciences, pour qu'il ne soit pas convenable d'en dire ici quelques mots.

L'Académie est instituée, sans aucun doute, pour favoriser le progrès des Sciences physiques et mathématiques, pour contribuer elle-même à ce progrès. C'est dans ce dessein qu'elle propose, chaque année, des sujets de prix. Quelquefois les questions mises au concours se trouvent circonscrites dans d'étroites limites. C'est ce qui est arrivé, par exemple, lorsque l'Académie a donné pour sujet de recherches aux géomètres le seul des théorèmes de Fermat qui soit encore à démontrer. Je doute que, dans ce cas-là même, l'Académie prétende interdire absolument aux savants de tous les pays, aux académiciens français ou étrangers, la faculté de résoudre la question, s'ils le peuvent, et de publier leur solution. J'admettrai néanmoins

très volontiers qu'il peut y avoir convenance à ce que la solution d'un problème ainsi limité ne soit pas rendue publique avant l'époque où le concours expire. Mais souvent aussi l'Académie adopte un programme énoncé en termes très vagues et très généraux. Ce programme dit, par exemple : Le prix sera donné au meilleur Ouvrage publié sur l'Analyse mathématique; ou bien encore, le programme est relatif aux applications de l'Analyse à l'Astronomie, et il propose aux géomètres de *perfectionner en quelque point essentiel la théorie des perturbations planétaires*. Or est-il permis de s'imaginer qu'en adoptant un tel programme l'Académie ait voulu arrêter le développement de la science, éteindre les lumières, suspendre les travaux du Bureau des Longitudes et de toutes les Sociétés savantes de l'Europe, enfin porter un arrêt de mort contre l'Astronomie, condamnée à ne profiter d'aucune découverte, et à suivre, dans la pratique, de vieilles méthodes très souvent impraticables, jusqu'à l'expiration du concours? Est-il possible de supposer qu'une pareille idée puisse entrer dans l'esprit de qui que ce soit? Et pourtant cette idée se trouve exprimée par écrit, et la feuille où elle est énoncée semble vouloir en prendre occasion pour incriminer celui auquel on a si souvent, mais inutilement, reproché d'avoir une conscience trop délicate, d'avoir témoigné par trop de sacrifices son dévouement à l'infortune, et d'avoir tenu, dans des temps difficiles, une conduite qu'honorent tous les partis. Quelquefois on a recours, en Géométrie, à ce qu'on appelle des démonstrations *ab absurdo*. Une démonstration de ce genre, appliquée à la question présente, ne suffirait-elle pas à montrer le côté faible de la thèse que je combats, et à convaincre même les personnes qui, par irréflexion, j'en suis sûr, ont pu adopter cette thèse, sans chercher d'abord à en prévoir ou approfondir les conséquences? L'Académie me rendra d'ailleurs cette justice, qu'il n'est pas possible de m'adresser ici le moindre reproche. Elle a vu, dans la dernière séance, avec quelle franchise, avec quelle loyauté j'ai déclaré que j'attendrais sa décision avant d'imprimer mon Mémoire. Les paroles prononcées par M. le Secrétaire perpétuel et l'adhésion unanime de mes honorables confrères n'ont pas laissé subsister le plus léger doute sur le parti que j'avais à prendre. Ce qu'il y a de plus remarquable dans cette affaire, c'est que mes nouvelles théories sont le développement d'une pensée émise il y a plusieurs années, c'est-à-dire au mois d'août 1841, dans l'un des Mémoires que j'ai publiés sur l'Astronomie, dans celui-là même qui avait particulièrement attiré l'attention des astronomes, et auquel ils ont paru attacher plus de prix. Il serait assez extraordinaire qu'il fût interdit à un géomètre français de publier les développements des théories qu'il a pu découvrir, et qu'il lui fût ordonné, sans doute pour la plus grande gloire des sciences et de la patrie, d'attendre que ses propres pensées soient peut-être mises en lumière par quelque savant étranger.

290.

ASTRONOMIE. — *Mémoire sur les séries nouvelles que l'on obtient, quand on applique les méthodes exposées dans les précédentes séances au développement de la fonction perturbatrice et à la détermination des inégalités périodiques des mouvements planétaires.*

C. R., T. XX, p. 1166 (21 avril 1845).

Dans les mouvements planétaires, les inégalités périodiques des divers ordres sont représentées, comme on le sait, par des intégrales simples ou multiples relatives au temps. De plus, les fonctions renfermées sous le signe $\int$, dans les intégrales dont il s'agit, se réduisent aux dérivées de la fonction perturbatrice, différentiée par rapport à un ou à plusieurs des éléments elliptiques; et, comme les valeurs de ces intégrales ne peuvent se calculer en termes finis, on a cherché à en obtenir des valeurs approchées à l'aide de l'intégration par séries. On a été conduit, de cette manière, à développer la fonction perturbatrice en une série dont chaque terme pût être facilement intégré par

rapport au temps. Cette condition se trouve remplie lorsque, en suivant la marche généralement adoptée jusqu'ici par les géomètres, on suppose chaque terme proportionnel au sinus ou au cosinus d'un angle représenté par une fonction linéaire des anomalies moyennes des deux planètes que l'on considère, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on suppose la fonction perturbatrice développée suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments ces anomalies moyennes. Mais la série ainsi obtenue a l'inconvénient d'être une série double, ordonnée suivant les puissances entières de deux variables distinctes, et d'être souvent peu convergente, ce qui oblige quelquefois à calculer, pour obtenir des approximations suffisantes, un très grand nombre de termes. Les formules et les méthodes que j'ai indiquées dans les précédents Mémoires permettent de faire disparaître ces difficultés. A la vérité, il semble au premier abord que, en suivant ces méthodes, on peut perdre quelque chose sous le rapport de la généralité, et que les formules trouvées, du moins dans certains cas, s'appliquent seulement à des portions considérables de l'orbite qu'un astre décrit. Mais on peut modifier ces formules de manière à en obtenir d'autres qui subsistent au bout d'un temps quelconque. On peut, d'ailleurs, appliquer ces formules de diverses manières au développement de la fonction perturbatrice. Enfin, on peut les combiner avec de nouveaux théorèmes auxquels mes recherches m'ont conduit, particulièrement avec deux propositions qui me paraissent dignes de remarque, et que je vais énoncer.

THÉORÈME I. — *Étant données deux exponentielles trigonométriques dont les arguments sont proportionnels au temps, et une fonction développable suivant les puissances entières de la première exponentielle, on pourra toujours représenter par une intégrale définie simple relative au temps la partie non périodique de l'intégrale indéfinie, dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ se réduirait au produit de la seconde exponentielle par la fonction donnée.*

THÉORÈME II. — *La fonction perturbatrice, ou même une fonction quelconque des anomalies excentriques de deux planètes, peut toujours être décomposée en deux parties, dont la première est évidemment la dérivée exacte par rapport au temps d'une autre fonction dont il est facile d'assigner la valeur, tandis que la seconde partie est une fonction finie de l'anomalie moyenne relative à l'une des planètes et d'une nouvelle variable liée aux deux anomalies moyennes par une équation très simple.*

Ce dernier théorème réduit l'intégration de la fonction perturbatrice à l'intégration d'une autre fonction qui peut être développée, à l'aide de la formule de Lagrange, en une série simple et rapidement convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes d'une fonction linéaire des deux excentricités.

J'ajouterai que, à l'aide des principes ci-dessus énoncés, on peut développer, ou la fonction perturbatrice, ou un facteur de cette fonction en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes, non plus de deux exponentielles trigonométriques, mais d'une seule exponentielle dont l'argument soit proportionnel au temps. On pourrait, d'ailleurs, prendre pour cet argument, ou l'une des anomalies moyennes, ou, ce qui paraît préférable, un angle équivalent, soit à la différence des anomalies moyennes, soit à cette différence augmentée d'une quantité constante.

§ I. — *Sur la série qu'on obtient quand on développe deux fonctions d'une seule variable suivant les puissances ascendantes de l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument cette même variable.*

Soit $f(\omega)$ une fonction de la variable ω qui reste finie et continue pour toutes les valeurs réelles de ω comprises entre les limites

$$\omega = -\pi, \qquad \omega = \pi.$$

En vertu des principes établis dans le second Volume des *Exercices de Mathématiques* [1], $f(\omega)$ sera généralement développable en série ordon-

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 366 et suiv.

née suivant les puissances entières de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{\omega\sqrt{-1}};$$

et, si l'on pose en conséquence

$$f(\omega) = \Sigma k_n e^{n\omega\sqrt{-1}}, \tag{1}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulle et négatives de n, on aura

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-n\omega\sqrt{-1}} f(\omega)\, d\omega. \tag{2}$$

Supposons maintenant que la fonction $f(\omega)$ reste finie et continue pour toutes les valeurs réelles et finies de la variable ω; et nommons υ l'angle variable qui, étant compris entre les limites

$$-\pi, \quad +\pi,$$

vérifie les deux conditions

$$\cos\upsilon = \cos\omega, \qquad \sin\upsilon = \sin\omega, \tag{3}$$

en sorte qu'on ait généralement

$$\omega = 2i\pi + \upsilon, \tag{4}$$

i désignant une quantité entière positive, nulle ou négative. Alors, à la place des formules (1) et (2), on obtiendra les deux équations

$$f(\omega) = \Sigma k_n e^{n\upsilon\sqrt{-1}}, \tag{5}$$

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-n\upsilon\sqrt{-1}} f(\omega)\, d\upsilon, \tag{6}$$

dont la seconde peut s'écrire comme il suit :

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-n\upsilon\sqrt{-1}} f(2i\pi + \upsilon)\, d\upsilon. \tag{7}$$

En partant des formules (5) et (7), on pourra aisément intégrer une ou plusieurs fois de suite la fonction $f(\omega)$ par rapport à la variable ω, ou, ce qui revient au même, par rapport à la variable υ. Concevons, pour fixer les idées, que l'on cherche la valeur de l'intégrale

$$\int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega)\,d\omega,$$

ω_0 désignant une valeur particulière de ω. Comme on aura

$$\int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega)\,d\omega = \int_0^{\omega} f(\omega)\,d\omega - \int_0^{\omega_0} f(\omega)\,d\omega,$$

le seul problème à résoudre sera évidemment de trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\omega} f(\omega)\,d\omega.$$

Il y a plus : comme on aura encore

$$\int_0^{\omega} f(\omega)\,d\omega = \int_0^{2i\pi} f(\omega)\,d\omega + \int_{2i\pi}^{\upsilon} f(\omega)\,d\upsilon$$

et

$$\int_{2i\pi}^{\omega} f(\omega)\,d\omega = \int_0^{\upsilon} f(\omega)\,d\upsilon,$$

il est clair que, si l'on pose, pour abréger,

$$(8)\qquad \Omega = \int_0^{2i\pi} f(\omega)\,d\omega = \int_0^{2\pi} \{ f(\upsilon) + f(2\pi+\upsilon) + \ldots + f[2(i-1)\pi+\upsilon] \}\,d\upsilon,$$

on aura définitivement

$$(9)\qquad \int_0^{\omega} f(\omega)\,d\omega = \Omega + \int_0^{\upsilon} f(\omega)\,d\upsilon,$$

et, par suite, eu égard à la formule (5),

$$(10)\qquad \int_0^{\omega} f(\omega)\,d\omega = \Omega + \Sigma k_n \frac{e^{n\upsilon\sqrt{-1}} - 1}{n\sqrt{-1}}.$$

Pour montrer une application très simple des formules (5) et (7), posons

$$f(\omega) = e^{\lambda\omega\sqrt{-1}},$$

λ désignant une quantité constante. Alors la formule (7) donnera

$$(11)\qquad k_n = e^{2\lambda i\pi\sqrt{-1}} \frac{\sin(\lambda-n)\pi}{(\lambda-n)\pi} = e^{\lambda(\omega-\upsilon)\pi\sqrt{-1}} \frac{\sin(\lambda-n)\pi}{(\lambda-n)\pi}.$$

On aura donc

$$(12)\qquad e^{\lambda\omega\sqrt{-1}} = e^{\lambda(\omega-\upsilon)\sqrt{-1}} \sum \frac{\sin(\lambda-n)\pi}{(\lambda-n)\pi} e^{n\upsilon\sqrt{-1}}.$$

§ II. — *Sur l'application des formules établies dans le § I, au calcul des inégalités périodiques des mouvements planétaires.*

Soient

$\mathfrak{r}$ la distance mutuelle de deux planètes m, m';
r, r' les distances de ces planètes au Soleil;
δ leur distance apparente, vue du centre du Soleil;
p, p' les longitudes des deux planètes;
ϖ, ϖ' les longitudes de leurs périhélies;
Π, Π' les distances apparentes de ces périhélies à la ligne d'intersection des orbites;
I l'inclinaison mutuelle de ces orbites;
T, T' les anomalies moyennes des deux planètes;
ψ, ψ' leurs anomalies excentriques;
ε, ε' les excentricités des deux orbites;

et posons, pour abréger,

$$\nu = \sin^2 \frac{I}{2}.$$

On aura, non seulement

$$(1)\qquad \mathfrak{r}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\delta,$$

mais encore

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\delta = {} & \cos(p - \varpi + \Pi - p' + \varpi' - \Pi') \\ & - 2\nu \sin(p - \varpi + \Pi)\sin(p' - \varpi' + \Pi'). \end{aligned} \right.$$

On aura, de plus,

$$(3)\qquad T = \psi - \varepsilon \sin\psi,$$

$$(4)\qquad \cos(p-\varpi) = \frac{\cos\psi - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi}, \qquad \sin(p-\varpi) = \frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi},$$

et les formules (3), (4) continueront de subsister, quand on y remplacera

$$p,\quad T,\quad \psi,\quad \varpi,\quad \varepsilon$$

par

$$p',\quad T',\quad \psi',\quad \varpi',\quad \varepsilon'.$$

D'ailleurs, en supposant ε, ε' et ν assez petits pour qu'on puisse, sans erreur sensible, les remplacer par zéro dans les formules (2), (3), (4), ..., on tirera de ces formules

$$p - \varpi = \psi = T, \qquad p' - \varpi' = \psi' = T',$$

et, par suite,

$$\cos\delta = \cos\omega,$$

la valeur de ω étant

$$(5)\qquad \omega = T - T' + \Pi - \Pi'.$$

On pourra donc prendre alors

$$\delta = \omega,$$

et généralement on peut dire que, pour des valeurs peu considérables de ε, ε', ν, la valeur de ω déterminée par la formule (5) représentera une valeur approchée de δ.

Soit maintenant R la fonction perturbatrice relative à la planète m, ou plutôt la partie de cette fonction qui se rapporte aux deux planètes m, m', on aura

$$(6)\qquad \mathrm{R} = -\frac{m'}{\iota} + \frac{m' r\cos\delta}{r'^2},$$

et, parmi les variations périodiques des éléments elliptiques de la planète m, celles qui seront du premier ordre par rapport aux masses se calculeront aisément si l'on sait intégrer une ou deux fois de suite, par rapport au temps, la fonction R et ses dérivées partielles prises

par rapport aux éléments dont il s'agit. Or, une semblable intégration ne pouvant s'effectuer en termes finis, on est obligé, pour résoudre la question, de recourir à l'intégration par série, et par conséquent de développer la fonction R en une série dont chaque terme puisse être facilement intégré par rapport au temps. Cette condition se trouve remplie lorsque, en suivant la marche généralement adoptée, on développe R en une série ordonnée suivant les puissances entières des deux exponentielles

$$e^{T\sqrt{-1}},\quad e^{T'\sqrt{-1}}.$$

Mais le développement ainsi obtenu a l'inconvénient d'être une série double, et la convergence de cette série est quelquefois assez lente pour obliger les géomètres à conserver, dans le calcul, un grand nombre de termes. Or il importe d'observer, en premier lieu, qu'on peut réduire la série double à une série simple en opérant comme il suit.

Soient μ et μ' les moyens mouvements des planètes m, m', et posons, pour abréger,

$$\lambda = \frac{\mu}{\mu-\mu'}, \qquad \lambda' = \frac{\mu'}{\mu-\mu'}.$$

On aura

$$(7)\qquad \lambda = \lambda' + 1.$$

De plus, comme les valeurs de T, T' seront de la forme

$$T = \mu(t-\tau), \qquad T' = \mu'(t-\tau'),$$

on en conclura

$$T - T' = (\mu-\mu')t - (\mu\tau - \mu'\tau').$$

Donc les parties variables des quantités

$$T,\quad T',\quad \omega$$

seront respectivement

$$\mu t,\quad \mu' t,\quad (\mu-\mu')t,$$

et, par suite, les exponentielles

$$e^{T\sqrt{-1}},\quad e^{T'\sqrt{-1}}$$

seront proportionnelles aux exponentielles

$$x = e^{\lambda\omega\sqrt{-1}}, \qquad x' = e^{\lambda'\omega\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, concevons que, la fonction R étant développée suivant les puissances entières de x et x', on nomme

$$A_{n,n'}$$

le coefficient du produit

$$x^n x'^{n'}$$

dans le développement dont il s'agit. On aura

$$R = \Sigma A_{n,n'} e^{n\lambda\omega\sqrt{-1}} e^{n'\lambda'\omega\sqrt{-1}}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (7),

$$R = \Sigma A_{n,n'} e^{n\omega\sqrt{-1}} e^{(n+n')\lambda'\omega\sqrt{-1}},$$

par conséquent

$$(8) \qquad R = \Sigma A_{n,n'-n} e^{n\omega\sqrt{-1}} e^{n'\lambda'\omega\sqrt{-1}}.$$

Soit d'ailleurs υ celui des angles, renfermés entre les limites $-\pi$, $+\pi$, qui vérifie les deux conditions

$$(9) \qquad \cos\upsilon = \cos\omega, \qquad \sin\upsilon = \sin\omega.$$

La différence

$$\omega - \upsilon$$

sera un multiple de 2π; et, en nommant l une quantité entière quelconque, on tirera de la formule (12) du § I

$$e^{n'\lambda'\omega\sqrt{-1}} = e^{n'\lambda'(\omega-\upsilon)\sqrt{-1}} \sum \frac{\sin(n'\lambda' - l)\pi}{(n'\lambda' - l)\pi} e^{l\upsilon\sqrt{-1}}.$$

En conséquence, la formule (8) donnera

$$R = \Sigma A_{n,n'-n} \frac{\sin(n'\lambda' - l)\pi}{(n'\lambda' - l)\pi} e^{n'\lambda'(\omega-\upsilon)\sqrt{-1}} e^{(n+l)\upsilon\sqrt{-1}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10) \qquad R = \Sigma A_{n-l,n'-n+l} \frac{\sin(n'\lambda' - l)\pi}{(n'\lambda' - l)\pi} e^{n'\lambda'(\omega-\upsilon)\sqrt{-1}} e^{n\upsilon\sqrt{-1}},$$

et, par suite,

$$(11) \qquad R = \Sigma A_n e^{n\upsilon\sqrt{-1}},$$

la valeur de A_n étant

$$(12) \qquad A_n = \sum \frac{\sin(n'\lambda' - l)\pi}{(n'\lambda' - l)\pi} A_{n-l,n'-n+l} e^{n'\lambda'(\omega-\upsilon)\sqrt{-1}}.$$

Ainsi la fonction perturbatrice R peut être développée en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{\upsilon\sqrt{-1}} = e^{\omega\sqrt{-1}};$$

et, dans cette série, le coefficient A_n de la $n^{\text{ième}}$ puissance de l'exponentielle dont il s'agit est déterminé par la formule (12), en vertu de laquelle il conservera la même valeur pour toutes les valeurs de ω comprises entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique

$$\ldots, \quad -4\pi, \quad -2\pi, \quad 0, \quad 2\pi, \quad 4\pi, \quad \ldots.$$

La fonction R étant développée, comme on vient de le dire, en une série ordonnée suivant les puissances entières de

$$e^{\upsilon\sqrt{-1}} = e^{\omega\sqrt{-1}},$$

il deviendra facile d'intégrer par rapport à R, ou cette fonction, ou la dérivée de cette fonction différentiée par rapport à l'un des éléments elliptiques. Les formules qu'on obtiendra de cette manière seront analogues à l'équation (10) du paragraphe précédent. D'ailleurs, des intégrales relatives à ω on déduira immédiatement les intégrales relatives à t, en ayant égard à la formule

$$d\omega = (\mu - \mu')\,dt,$$

de laquelle on tire

$$dt = \frac{d\omega}{\mu - \mu'}.$$

Des deux parties qui composent la fonction R, une seule est difficile à développer, savoir celle qui est réciproquement proportionnelle à la distance ι. Considérons séparément cette partie, ou, ce qui revient au même, le rapport $\frac{1}{\iota}$. Si, en opérant comme on vient de le dire, on développe ce rapport en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de l'exponentielle

$$e^{\omega\sqrt{-1}},$$

la série obtenue sera, il est vrai, une série simple, mais elle pourra n'être pas très rapidement convergente. Pour rendre la convergence plus rapide, il suffira, conformément au principe établi dans un précédent Mémoire, de décomposer la fonction $\frac{1}{\iota}$ en deux facteurs, dont le premier, étant d'une forme très simple, diffère peu de $\frac{1}{\iota}$, puis de laisser ce premier facteur inaltérable, et de développer le second facteur suivant les puissances entières de l'exponentielle

$$e^{\omega\sqrt{-1}}.$$

Si l'on nomme a, a' les demi grands axes des orbites décrites par les planètes m, m', une première valeur approchée du rapport $\frac{1}{\iota}$ sera l'expression

$$(a^2 - 2aa'\cos\omega + a'^2)^{-\frac{1}{2}},$$

à laquelle on pourra réduire le premier facteur de $\frac{1}{\iota}$. On pourra, d'ailleurs, dans cette hypothèse, intégrer par rapport à t les divers termes du développement de $\frac{1}{\iota}$, à l'aide de formules analogues aux équations (26), (27) de la page 182. Ajoutons qu'il sera facile de modifier ces équations de manière qu'elles deviennent applicables à toutes les époques du mouvement, et subsistent pour des valeurs quelconques de t.

§ III. — *Sur une transformation remarquable de la fonction perturbatrice.*

Conservons les notations adoptées dans le précédent paragraphe, et désignons par $F(\psi, \psi')$, ou la fonction perturbatrice R, ou même, plus

généralement, une fonction donnée des anomalies excentriques ψ, ψ', liées aux anomalies moyennes T, T' par les deux équations

$$(1) \qquad T = \psi - \varepsilon \sin\psi,$$

$$(2) \qquad T' = \psi' - \varepsilon' \sin\psi'.$$

Pour des valeurs de ε inférieures à une certaine limite, la fonction

$$F(\psi, \psi')$$

pourra être développée suivant les puissances ascendantes de ε, ou à l'aide du théorème de Lagrange relatif au développement des fonctions implicites, ou encore à l'aide de la formule

$$(3) \qquad F(\psi, \psi') = \mathcal{E} \frac{(1 - \varepsilon\cos\psi) F(\psi, \psi')}{(\psi - \varepsilon\sin\psi - T)},$$

de laquelle on tirera

$$(4) \qquad F(\psi, \psi') = \sum \mathcal{E} \frac{(1 - \varepsilon\cos\psi)\varepsilon^n \sin^n\psi\, F(\psi, \psi')}{((\psi - T)^{n+1})}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad F(\psi, \psi') = \sum \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} D_T^n[(1 - \varepsilon\cos T)\sin^n T\, F(T, \psi')],$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de n, et le produit $1.2\ldots n$ devant être remplacé par l'unité, quand n se réduit à zéro. D'autre part, comme les parties variables de T, T' seront respectivement

$$\mu t, \quad \mu' t,$$

si l'on désigne par ϖ une fonction quelconque de T, T' ou même de ψ, ψ', on aura généralement

$$D_t \varpi = \mu D_T \varpi + \mu' D_{T'} \varpi$$

et, par suite,

$$D_t = \mu D_T + \mu' D_{T'}.$$

Il en résulte que D_t sera généralement facteur de la différence

$$\mu^n D_{T'}^n - (-\mu' D_{T'})^n$$

et de la différence

$$D_{T'}^n - \left(-\frac{\mu'}{\mu} D_{T'}\right)^n.$$

Donc l'équation (5) pourra être présentée sous la forme

$$\text{(6)} \qquad F(\psi, \psi') = D_t s + \sum \frac{\left(-\frac{\varepsilon\mu'}{\mu}\sin T\right)^n}{1.2\ldots n}(1 - \varepsilon\cos T)\, D_{T'}^n F(T, \psi'),$$

s désignant une fonction nouvelle dont il sera facile d'assigner immédiatement la valeur. Ajoutons que, en vertu de la formule de Taylor, l'équation (6) pourra être réduite à

$$\text{(7)} \qquad F(\psi, \psi') = D_t s + (1 - \varepsilon\cos T)\, F(T, \Psi),$$

Ψ désignant une variable nouvelle que l'on déduira de ψ', en attribuant à T' un accroissement représenté par le produit

$$-\frac{\varepsilon\mu'}{\mu}\sin T.$$

Ainsi, dans l'équation (7), Ψ sera une fonction implicite de T et T', déterminée par la formule

$$\text{(8)} \qquad \Psi - \varepsilon\sin\Psi = T' - \frac{\varepsilon\mu'}{\mu}\sin T.$$

Si l'on applique le calcul des résidus à la détermination de la fonction

$$F(T, \Psi),$$

on trouvera

$$F(T, \Psi) = \mathcal{E}\,\frac{(1 - \varepsilon\cos\Psi)\, F(T, \Psi)}{\left(\Psi - T' - \varepsilon\sin\Psi + \frac{\varepsilon\mu'}{\mu}\sin T\right)}$$

et, par suite,

$$\text{(9)} \qquad F(T, \Psi) = \sum \frac{D_{T'}^n\left[(1 - \varepsilon'\cos T')\left(\varepsilon'\sin T' - \frac{\varepsilon\mu'}{\mu}\sin T\right)^n F(T, T')\right]}{1.2\ldots n}.$$

La formule (7) réduit la détermination de l'intégrale

$$\int F(\psi, \psi')\, dt$$

à la détermination de l'intégrale

$$\int F(1 - \varepsilon\cos T)\, F(T, \Psi)\, dt.$$

On doit remarquer d'ailleurs que les deux expressions

$$F(\psi, \psi'), \quad F(T, \Psi)$$

se trouvent représentées, la première par une série double, et la seconde par une série simple seulement, quand on les réduit l'une et l'autre à des fonctions explicites de T, T', en appliquant à la première la formule de Lagrange et, à la seconde, la formule (9). Ajoutons que, dans le passage de la série double à la série simple, la convergence pourra devenir sensiblement plus rapide si le rapport $\frac{\mu'}{\mu}$ est notablement inférieur à l'unité. C'est ce qui arrivera en particulier si l'on prend pour m la planète Pallas, et pour m' Jupiter, attendu qu'alors on aura sensiblement

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\mu'}{\mu}\varepsilon = \frac{1}{11}.$$

§ IV. — *Sur la détermination des parties non périodiques de certaines intégrales.*

Soit $f(\omega)$ une fonction développable suivant les puissances entières de l'exponentielle

$$e^{\omega\sqrt{-1}},$$

en sorte qu'on ait

$$\text{(1)} \qquad f(\omega) = \Sigma k_n e^{n\omega\sqrt{-1}},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives de n. Supposons d'ailleurs que l'équation (1) subsiste pour une valeur quelconque de ω, et prenons

$$s = \int_0^{\omega} e^{\lambda\omega\sqrt{-1}}\, f(\omega)\, d\omega, \tag{2}$$

λ étant une quantité constante. On aura, en vertu de la formule (1),

$$s = \Sigma k_n \frac{e^{(n+\lambda)\omega\sqrt{-1}} - 1}{(n+\lambda)\sqrt{-1}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$s = \Sigma k_n \frac{e^{(n+\lambda)\omega\sqrt{-1}}}{(n+\lambda)\sqrt{-1}} - \mathcal{C}, \tag{3}$$

la valeur de $\mathcal{C}$ étant

$$\mathcal{C} = \sum \frac{k_n}{(n+\lambda)\sqrt{-1}}. \tag{4}$$

Or, il est important d'observer que la constante $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la partie non périodique de s, peut être représentée par une intégrale définie simple. En effet, si, après avoir multiplié les deux membres de l'équation (2) par l'exponentielle $e^{-\lambda\omega\sqrt{-1}}$, on intègre ces deux membres entre les limites

$$\omega = -\pi, \qquad \omega = \pi,$$

une intégration par parties, appliquée au premier membre de l'équation dont il s'agit, donnera

$$\mathcal{C} = \frac{\sqrt{-1}}{2\sin\lambda\pi} \int_0^{\pi} \left[e^{\lambda(\omega-\pi)\sqrt{-1}}\, f(\omega) + e^{-\lambda(\omega-\pi)\sqrt{-1}}\, f(-\omega) \right] d\omega. \tag{5}$$

Dans d'autres articles, nous développerons les conséquences qui se déduisent des formules auxquelles nous sommes parvenu dans celui-ci.

291.

ASTRONOMIE. — *Mémoire sur des formules et des théorèmes remarquables, qui permettent de calculer très facilement les perturbations planétaires dont l'ordre est très élevé.*

C. R., T. XX, p. 1612 (2 juin 1845).

Les principes généraux que j'ai posés dans de précédents articles, et surtout dans le Mémoire du 17 mars de cette année, fournissent, quand on les applique à l'Astronomie, des résultats qui paraissent mériter l'attention des géomètres. Ces résultats seront l'objet spécial du présent Mémoire et de quelques autres que je me propose d'offrir plus tard à l'Académie. Les formules auxquelles je suis parvenu sont très simples et, par cela même, très propres au calcul des perturbations planétaires. Pour donner une idée des avantages que peut offrir leur emploi dans les calculs astronomiques, je vais énoncer ici deux théorèmes remarquables qui se déduisent immédiatement de ces formules.

Considérons le système de deux planètes m, m', et la fonction perturbatrice relative à ce système, ou plutôt la partie R de cette fonction qui est réciproquement proportionnelle à la distance des deux planètes. On calculera aisément les perturbations périodiques de la planète m, si l'on a d'abord développé la fonction R suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies moyennes, ou même les anomalies excentriques, le développement qu'on obtient dans le premier cas pouvant aisément se déduire de celui qu'on obtiendrait dans le second, à l'aide des transcendantes de M. Bessel. Cherchons, en particulier, le premier développement, et concevons qu'il s'agisse d'obtenir un terme correspondant à des perturbations d'un ordre élevé, c'est-à-dire un terme correspondant à des puissances très élevées des deux exponentielles. Ce terme sera évidemment connu, si l'on en connaît une valeur particulière correspondante à des valeurs particulières données des deux anomalies moyennes. Or on obtiendra sans peine une telle valeur en opérant comme il suit.

Construisons une *surface auxiliaire* qui ait pour abscisses rectangulaires les deux anomalies moyennes, et pour ordonnée z le carré de la distance mutuelle. Supposons d'ailleurs que, après avoir mené un plan tangent à cette surface par un point donné P, on cherche, sur le plan tangent, un autre point S qui ait pour abscisses les deux abscisses du point P augmentées de deux nombres entiers n' et n. Par la droite PS faisons passer un plan normal à la surface; projetons sur l'axe des z le rayon de courbure de la section normale ainsi obtenue, et concevons que la moitié de la projection algébrique de ce rayon de courbure soit substituée, dans la fonction perturbatrice, au carré de la distance mutuelle des deux planètes. Enfin, multiplions le résultat ainsi trouvé par le rapport de la distance des deux points P et S à la circonférence dont le rayon est l'unité. Le produit auquel on parviendra sera une nouvelle fonction des anomalies moyennes, que nous appellerons la *fonction auxiliaire* et qui renfermera, outre ces anomalies, les deux nombres entiers n', n. Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Concevons que l'on développe la fonction perturbatrice relative au système de deux planètes m, m', ou plutôt la partie de cette fonction qui est réciproquement proportionnelle à leur distance mutuelle, en une série ordonnée suivant les puissances entières de deux variables x, x' représentées par les exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies moyennes. Cherchons d'ailleurs, dans le développement ainsi formé, un terme proportionnel à des puissances très élevées, l'une négative, l'autre positive, de ces deux variables, les exposants des deux puissances étant, aux signes près, n et n'. Le terme dont il s'agit deviendra sensiblement égal à la fonction auxiliaire, pour un système particulier de valeurs imaginaires de deux variables x, x', savoir, pour des valeurs imaginaires qui, en réduisant à zéro la distance mutuelle de deux planètes, réduiront le module du rapport qu'on obtient en divisant l'unité par le produit des deux puissances à un module principal.*

Il est bon d'observer que l'expression analytique de la fonction auxiliaire peut être présentée sous une forme très simple. En effet, pour obtenir cette fonction auxiliaire, il suffit de diviser par la circonférence dont le rayon est l'unité le résultat qu'on obtient lorsque dans la fonction perturbatrice on substitue au carré de la distance mutuelle des deux planètes la moitié de la différentielle seconde de ce même carré, différentié deux fois de suite par rapport aux anomalies moyennes, après avoir remplacé, dans cette différentielle seconde, les différentielles des anomalies moyennes des planètes m et m' par les nombres entiers n' et n.

Ajoutons que l'on peut, sans inconvénient, remplacer tout à la fois dans la construction de la surface auxiliaire, dans la fonction auxiliaire et dans le théorème énoncé, les anomalies moyennes des deux planètes par leurs anomalies excentriques.

Comme l'ont remarqué les géomètres, les termes qu'il importe surtout de calculer, parce qu'ils peuvent fournir des perturbations sensibles, sont ceux qui répondent au cas où les nombres entiers n, n' sont à très peu près en raison inverse des moyens mouvements des deux planètes. En supposant cette condition remplie, on obtient, outre le premier théorème, un second théorème qui paraît digne de remarque, et dont voici l'énoncé :

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, cherchons, dans le développement de la fonction perturbatrice, un terme dans lequel les exposants n, n' soient à très peu près en raison inverse des moyens mouvements μ, μ' des deux planètes. Alors, pour obtenir la fonction auxiliaire, il suffira de multiplier le rapport de μ à n' par le rapport du rayon à la circonférence, et par la valeur que prend la fonction perturbatrice quand on y remplace le carré de la distance des deux planètes par la moitié de la dérivée seconde de ce carré différentié deux fois de suite par rapport au temps.*

On peut observer que, dans ce dernier cas, les équations simultanées desquelles on doit tirer les valeurs imaginaires des anomalies moyennes se réduisent, à très peu près, aux deux équations qu'on obtient quand on égale à zéro la distance mutuelle des deux planètes et la dérivée première de cette distance différentiée par rapport au temps.

Les propositions que je viens d'énoncer réduisent, comme on le voit, le calcul des perturbations d'un ordre élevé à la résolution d'équations simultanées qui doivent être vérifiées par des valeurs imaginaires des variables. Il importait donc d'obtenir un moyen facile de calculer les racines imaginaires de plusieurs équations simultanées. J'ai été assez heureux pour trouver une méthode générale et rigoureuse qui permet d'évaluer immédiatement ces racines, en réduisant leur recherche à la résolution d'équations simultanées du premier degré. Cette méthode sera indiquée succinctement dans le dernier paragraphe du présent Mémoire.

Analyse.

§ I. — *Sur le développement de la fonction perturbatrice.*

Soient, au bout du temps t,

r la distance de deux planètes m, m';
T, T' leurs anomalies moyennes;
ψ, ψ' leurs anomalies excentriques.

La fonction perturbatrice relative à la planète m offrira un terme proportionnel à $\frac{1}{r}$. On pourra d'ailleurs développer ce terme suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{T\sqrt{-1}},\quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

ou bien encore suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{\psi\sqrt{-1}},\quad e^{\psi'\sqrt{-1}};$$

et, si l'on nomme

$$\mathrm{A}_{n',n} \quad \text{ou} \quad \mathcal{A}_{n',n}$$

le coefficient de

$$e^{(n'T'+nT)\sqrt{-1}} \quad \text{ou de} \quad e^{(n'\psi'+n\psi)\sqrt{-1}}$$

dans le développement de $\frac{1}{r}$ on aura, d'une part,

$$\frac{1}{r} = \Sigma\Sigma\,\mathrm{A}_{n',n}\, e^{(n'T'+nT)\sqrt{-1}}, \tag{1}$$

d'autre part,

$$\frac{1}{r} = \Sigma\Sigma\,\mathcal{A}_{n',n}\, e^{(n'\psi'+n\psi)\sqrt{-1}}, \tag{2}$$

les sommes qu'indiquent les signes Σ s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulle et négatives de n et de n'.

Ajoutons que, sans altérer les formules (1) et (2), on pourra évidemment y changer le signe de n ou de n'. On pourra donc aux équations (1) et (2) substituer les suivantes

$$\frac{1}{r} = \Sigma\Sigma\,\mathrm{A}_{n',-n}\, e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r} = \Sigma\Sigma\,\mathcal{A}_{n',-n}\, e^{(n'\psi'-n\psi)\sqrt{-1}}, \tag{4}$$

les sommes qu'indiquent les signes Σ s'étendant toujours à toutes les valeurs entières positives, nulle et négatives de n et de n'.

Faisons maintenant, pour abréger,

$$\mathcal{R} = r^2$$

et

$$x = e^{T\sqrt{-1}}, \qquad x' = e^{T'\sqrt{-1}}.$$

On aura, en conséquence,

$$\frac{1}{r} = \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

et la formule (3) donnera simplement

$$\frac{1}{r} = \Sigma\Sigma\,\mathrm{A}_{n',-n}\, x^{-n} x'^{n'}. \tag{6}$$

Supposons d'ailleurs que, n, n' étant positifs, on attribue à x, x' des valeurs imaginaires qui, en réduisant la distance r à zéro, et par suite x' à une fonction de x, réduisent le module du rapport

$$\frac{1}{x^{-n} x'^{n'}} = x^n x'^{-n'}$$

à un module principal minimum. Les valeurs imaginaires correspondantes des anomalies moyennes T, T' vérifieront les deux équations simultanées

$$\mathcal{R} = 0, \qquad n' \mathrm{D}_T \mathcal{R} + n \mathrm{D}_{T'} \mathcal{R} = 0; \tag{7}$$

et, en attribuant à T, T' ces mêmes valeurs, puis à n et n' des valeurs positives très considérables, on déduira aisément des principes établis dans la séance du 17 mars dernier une valeur très approchée du terme qui, dans le développement de $\frac{1}{r}$, est proportionnel à l'exponentielle

$$e^{(n'T' - nT)\sqrt{-1}},$$

ou, ce qui revient au même, au produit

$$x^{-n} x'^{n'}.$$

On trouvera ainsi

$$\mathrm{A}_{n', -n} e^{(n'T' - nT)\sqrt{-1}} = \frac{1+\alpha}{2\pi} \left(\frac{n'^2 \mathrm{D}_T^2 \mathcal{R} + 2nn' \mathrm{D}_T \mathrm{D}_{T'} \mathcal{R} + n^2 \mathrm{D}_{T'}^2 \mathcal{R}}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

α étant infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n et de n'.

Si, au contraire, on assigne à ψ, ψ' des valeurs imaginaires qui, en réduisant r à zéro, réduisent le module de l'exponentielle

$$e^{(n\psi - n'\psi')\sqrt{-1}},$$

considérée comme fonction des variables $e^{\psi\sqrt{-1}}$, $e^{\psi'\sqrt{-1}}$, à un module principal minimum, ces valeurs imaginaires vérifieront les équations simultanées

$$\mathcal{R} = 0, \qquad n' \mathrm{D}_\psi \mathcal{R} + n \mathrm{D}_{\psi'} \mathcal{R} = 0; \tag{9}$$

et, en attribuant à ψ, ψ' ces mêmes valeurs, puis à n et à n' des valeurs positives très considérables, on trouvera

$$\mathcal{A}_{n', -n} e^{(n'\psi' - n\psi)\sqrt{-1}} = \frac{1+\alpha}{2\pi} \left(\frac{n'^2 \mathrm{D}_\psi^2 \mathcal{R} + 2nn' \mathrm{D}_\psi \mathrm{D}_{\psi'} \mathcal{R} + n^2 \mathrm{D}_{\psi'}^2 \mathcal{R}}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

α étant infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n et de n'.

Il est bon d'observer que, si l'on nomme ε, ε' les excentricités des orbites décrites par les planètes m, m', on aura

$$T = \psi - \varepsilon \sin\psi, \qquad T' = \psi' - \varepsilon' \sin\psi'$$

et, par suite,

$$e^{-nT\sqrt{-1}} = e^{-n\psi\sqrt{-1}} e^{n\varepsilon \sin\psi\sqrt{-1}}, \qquad e^{n'T'\sqrt{-1}} = e^{n'\psi'\sqrt{-1}} e^{-n'\varepsilon' \sin\psi'\sqrt{-1}}.$$

Lorsque, n, n' étant de grands nombres, les excentricités ε, ε' sont assez petites pour que les produits

$$n\varepsilon, \quad n'\varepsilon'$$

n'aient pas des valeurs considérables, on peut en dire autant des deux exponentielles

$$e^{n\varepsilon \sin\psi\sqrt{-1}}, \quad e^{-n'\varepsilon' \sin\psi'\sqrt{-1}},$$

qui offrent des arguments proportionnels à ces produits; et alors une valeur très approchée de $\mathrm{A}_{n', -n}$ peut se déduire de la formule (10) jointe à la suivante

$$\mathrm{A}_{n', -n} e^{(n'T' - nT)\sqrt{-1}} = \mathcal{A}_{n', -n} e^{(n'\psi' - n\psi)\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon\cos\psi)(1 - \varepsilon'\cos\psi'). \tag{11}$$

Les valeurs de $\mathrm{A}_{n', -n}$, auxquelles correspondent des perturbations sensibles des planètes m et m', sont principalement celles qu'on obtient dans le cas où le rapport des nombres entiers n, n' est à très peu près égal, non pas au rapport direct des moyens mouvements μ et μ' des deux planètes, mais au rapport inverse, en sorte qu'on ait sensiblement

$$\frac{n'}{n} = \frac{\mu}{\mu'}. \tag{12}$$

Or, comme on a rigoureusement

$$\mu \mathrm{D}_T \mathcal{R} + \mu' \mathrm{D}_{T'} \mathcal{R} = \mathrm{D}_t \mathcal{R} \tag{13}$$

et

$$\mu \mathrm{D}_T^2 \mathcal{R} + 2\mu\mu' \mathrm{D}_T \mathrm{D}_{T'} \mathcal{R} + \mu'^2 \mathrm{D}_{T'}^2 \mathcal{R} = \mathrm{D}_t^2 \mathcal{R}, \tag{14}$$

il est clair que, dans le cas dont il s'agit, on pourra remplacer la formule (8) par la suivante

$$\mathrm{A}_{n',-n}\, e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}} = \frac{1+\alpha}{2\pi}\,\frac{\mu}{n'}\left(\frac{1}{2}\mathrm{D}_t^2 \mathcal{R}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

α étant toujours infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n et de n'.

Ajoutons que, dans le même cas, les valeurs imaginaires de T, T', tirées des équations (7), seront très voisines des valeurs T, T' déterminées par les formules

$$\mathcal{R} = 0, \qquad \mathrm{D}_t \mathcal{R} = 0. \tag{16}$$

Néanmoins, on ne pourra pas toujours les substituer les unes aux autres, quand il s'agira d'évaluer les produits

$$nT, \quad n'T'$$

et de fixer par suite la valeur de l'exponentielle

$$e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}.$$

En effet, pour obtenir une valeur très approchée du produit nT par exemple, il est nécessaire de conserver, dans T, les quantités de l'ordre du rapport $\frac{1}{n}$.

Il est aisé de s'assurer que le premier membre de chacune des équations (7), (9) se réduit à une fonction algébrique et rationnelle des deux exponentielles

$$e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

Par suite, la résolution des deux équations (7) ou des deux équa-

tions (9) peut être réduite à la résolution d'une seule équation dont le premier membre soit une fonction entière d'une seule de ces exponentielles.

Remarquons encore que la résolution des équations (7) fournira généralement, non pas un seul système, mais plusieurs systèmes de valeurs imaginaires des exponentielles

$$x = e^{T\sqrt{-1}}, \qquad x' = e^{T'\sqrt{-1}}.$$

D'ailleurs ces systèmes seront conjugués deux à deux, de telle sorte que, dans le passage de l'un de ces systèmes au système conjugué, chacune des expressions imaginaires x, x' conserve le même argument, en prenant un module inverse; et, pour éviter des calculs inutiles, il conviendra de se borner à rechercher celui de ces systèmes qui, étant substitué dans la formule (8), fournira la valeur approchée de $\mathrm{A}_{n',-n}$. Or, en vertu des principes exposés dans la séance du 17 mars, la fonction $\mathcal{R}$ devra évidemment rester continue, tandis que les modules des expressions imaginaires

$$x = e^{T\sqrt{-1}}, \qquad x' = e^{T'\sqrt{-1}},$$

primitivement égaux à l'unité, varieront et se rapprocheront indéfiniment des modules des valeurs de x, x', déterminées par les équations (7). Il en résulte que, parmi les différentes valeurs de x, x' propres à vérifier ces équations, on devra chercher seulement celles qui offriront les modules les plus voisins de l'unité. Deux systèmes conjugués de valeurs de x, x' satisfont à cette dernière condition; et un seul de ces deux systèmes, savoir, celui que fournira pour le produit

$$x^n x'^{-n'}$$

un module inférieur à l'unité, offrira les valeurs de x et de x', ou plutôt de T et de T', qui devront être substituées dans la formule (8).

Observons d'ailleurs : 1° que le module de x ou de x' se rapprochera de l'unité, lorsque dans T ou dans T' le coefficient de $\sqrt{-1}$ se rapprochera de zéro; 2° que le module du produit

$$x^n x'^{-n'}$$

sera inférieur à l'unité, lorsque dans la différence

$$nT - n'T'$$

le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera positif.

§ II. — *Sur la résolution des équations simultanées.*

L'emploi des formules générales que nous avons établies dans le paragraphe précédent exige la résolution d'équations simultanées, par exemple la détermination des valeurs imaginaires de T, T' propres à vérifier les équations (7). D'ailleurs, en vertu des remarques faites à la fin de ce paragraphe, on devra résoudre ces équations de manière que les modules des exponentielles

$$x = e^{T\sqrt{-1}}, \quad x' = e^{T'\sqrt{-1}}$$

se rapprochent le plus possible de l'unité, et que le produit $x^n x'^{-n'}$ offre un module inférieur à l'unité. Enfin, en négligeant dans un premier calcul certaines quantités, par exemple les excentricités des deux orbites, ou l'une des excentricités et l'inclinaison, lorsque ces quantités sont très petites, on peut obtenir facilement des valeurs approchées des variables x, x' assujetties à vérifier les équations (7). On pourra ensuite achever la détermination des racines cherchées à l'aide d'une méthode générale qui fournit la résolution d'un système quelconque d'équations algébriques ou transcendantes, et que je vais indiquer en peu de mots.

Soient

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

n fonctions de n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

et supposons que ces fonctions restent continues, du moins pour des

modules de $x, y, z, \ldots$ compris entre certaines limites. Soient encore

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}, \quad \ldots$$

les valeurs particulières de $u, v, w, \ldots$ correspondantes à certaines valeurs réelles ou imaginaires

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots$$

des variables $x, y, z, \ldots$, les modules de x, y, z, ... étant renfermés entre les limites dont il s'agit, et nommons

$$\Delta\mathrm{u}, \quad \Delta\mathrm{v}, \quad \Delta\mathrm{w}, \quad \ldots$$

les accroissements de u, v, w, ... correspondants à certains accroissements

$$\Delta\mathrm{x}, \quad \Delta\mathrm{y}, \quad \Delta\mathrm{z}, \quad \ldots$$

de x, y, z, ... Enfin, désignons par

$$\mathrm{u}_1, \quad \mathrm{v}_1, \quad \mathrm{w}_1, \quad \ldots,$$

par

$$\mathrm{u}_2, \quad \mathrm{v}_2, \quad \mathrm{w}_2, \quad \ldots,$$

puis par

$$\mathrm{u}_3, \quad \mathrm{v}_3, \quad \mathrm{w}_3, \quad \ldots,$$

etc., des fonctions entières de Δx, Δy, Δz, ... qui soient respectivement du premier, du second, du troisième degré, et qui représentent les termes des divers ordres dans les développements de Δu, Δv, Δw, ... fournis par la série de Taylor, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{u}_1 = D_{\mathrm{x}}\mathrm{u}\,\Delta\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}\mathrm{u}\,\Delta\mathrm{y} + \ldots, \\ \mathrm{v}_1 = D_{\mathrm{x}}\mathrm{v}\,\Delta\mathrm{x} + D_{\mathrm{y}}\mathrm{v}\,\Delta\mathrm{y} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Alors, pour de très petits modules des accroissements Δx, Δy, Δz, ..., on aura rigoureusement

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta\mathrm{u} = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \mathrm{u}_3 + \ldots, \\ \Delta\mathrm{v} = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et, à très peu près,

$$(3)\qquad \Delta\mathrm{u} = \mathrm{u}_1,\quad \Delta\mathrm{v} = \mathrm{v}_1,\quad \ldots.$$

Cela posé, concevons qu'il s'agisse de trouver des valeurs de x, y, z, ... propres à résoudre les équations simultanées

$$(4)\qquad u = 0,\quad v = 0,\quad w = 0,\quad \ldots.$$

S'il existe de telles valeurs qui diffèrent peu de x, y, z, ..., on devra les obtenir en attribuant à x, y, z, ... certains accroissements $\Delta\mathrm{x}$, $\Delta\mathrm{y}$, $\Delta\mathrm{z}$, ..., choisis de manière à vérifier rigoureusement les équations

$$(5)\qquad \mathrm{u} + \Delta\mathrm{u} = 0,\quad \mathrm{v} + \Delta\mathrm{v} = 0,\quad \mathrm{w} + \Delta\mathrm{w} = 0,\quad \ldots,$$

et, approximativement, eu égard aux formules (3), les équations

$$(6)\qquad \mathrm{u} + \mathrm{u}_1 = 0,\quad \mathrm{v} + \mathrm{v}_1 = 0,\quad \mathrm{w} + \mathrm{w}_1 = 0,\quad \ldots.$$

Ces dernières équations seront du premier degré par rapport aux accroissements

$$\Delta\mathrm{x},\quad \Delta\mathrm{y},\quad \Delta\mathrm{z},\quad \ldots.$$

Nommons

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots$$

les valeurs qu'elles fournissent pour ces mêmes accroissements. Si, en posant

$$(7)\qquad x = \mathrm{x} + \xi,\quad y = \mathrm{y} + \eta,\quad z = \mathrm{z} + \zeta,\quad \ldots,$$

on obtient pour

$$\mathrm{u} + \Delta\mathrm{u},\quad \mathrm{v} + \Delta\mathrm{v},\quad \mathrm{w} + \Delta\mathrm{w},\quad \ldots$$

des expressions dont les modules soient inférieurs à ceux de u, v, w, ...; alors, en passant des valeurs de x, y, z, ..., représentées par x, y, z, ..., aux nouvelles valeurs représentées par $\mathrm{x} + \xi$, $\mathrm{y} + \eta$, $\mathrm{z} + \zeta$, ..., on aura fait un pas vers la résolution des équations (4). Dans le cas contraire, on devra aux valeurs

$$\mathrm{x} + \xi,\quad \mathrm{y} + \eta,\quad \mathrm{z} + \zeta,\quad \ldots$$

substituer des valeurs de la forme

$$\mathrm{x} + \theta\mathrm{x},\quad \mathrm{y} + \theta\mathrm{y},\quad \mathrm{z} + \theta\mathrm{z},\quad \ldots,$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité, et réduire successivement le facteur θ aux divers termes de la progression géométrique

$$\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{8},\quad \ldots,$$

jusqu'à ce que, aux valeurs de x, y, z, ..., représentées par

$$\mathrm{x} + \theta\xi,\quad \mathrm{y} + \theta\eta,\quad \mathrm{z} + \theta\zeta,\quad \ldots,$$

correspondent des modules de

$$\mathrm{u} + \Delta\mathrm{u},\quad \mathrm{v} + \Delta\mathrm{v},\quad \mathrm{w} + \Delta\mathrm{w},\quad \ldots,$$

respectivement inférieurs aux modules de

$$\mathrm{u},\quad \mathrm{v},\quad \mathrm{w},\quad \ldots.$$

Or, c'est ce qui finira nécessairement par arriver; car, puisque, en posant

$$\Delta\mathrm{x} = \xi,\quad \Delta\mathrm{y} = \eta,\quad \Delta\mathrm{z} = \zeta,\quad \ldots,$$

on aura, en vertu des formules (6),

$$(8)\qquad \mathrm{u}_1 = -\mathrm{u},\quad \mathrm{v}_1 = -\mathrm{v},\quad \mathrm{w}_1 = -\mathrm{w},\quad \ldots$$

et, par suite,

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi D_{\mathrm{x}}\mathrm{u} + \eta D_{\mathrm{y}}\mathrm{u} + \ldots = -\mathrm{u}, \\ \xi D_{\mathrm{x}}\mathrm{v} + \eta D_{\mathrm{y}}\mathrm{v} + \ldots = -\mathrm{v}, \end{cases}$$

il est clair que, en posant

$$(10)\qquad \Delta\mathrm{x} = \theta\xi,\quad \Delta\mathrm{y} = \theta\eta,\quad \Delta\mathrm{z} = \theta\zeta,\quad \ldots,$$

on tirera des formules (1)

$$(11)\qquad \mathrm{u}_1 = -\theta\mathrm{u},\quad \mathrm{v}_1 = -\theta\mathrm{v},\quad \ldots.$$

Or, en vertu de ces dernières équations, jointes aux formules (5), on aura

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathrm{u} + \Delta\mathrm{u} = (1-\theta)\mathrm{u} + \mathrm{u}_2 + \mathrm{u}_3 + \ldots, \\ \mathrm{v} + \Delta\mathrm{v} = (1-\theta)\mathrm{v} + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

et, comme, eu égard aux équations (10),

$$\mathrm{u}_2, \quad \mathrm{v}_2, \quad \mathrm{w}_2, \quad \ldots$$

seront proportionnels à θ^2,

$$\mathrm{u}_3, \quad \mathrm{v}_3, \quad \mathrm{w}_3, \quad \ldots$$

proportionnels à θ^3, etc., on conclura des formules (12) que, pour de très petites valeurs positives de θ, le module de $\mathrm{u}+\Delta\mathrm{u}$ deviendra inférieur à celui de u, le module de $\mathrm{v}+\Delta\mathrm{v}$ inférieur à celui de v, ...

En résumé, quelles que soient les valeurs de x, y, z, ..., représentées par x, y, z, ..., on pourra modifier ces valeurs par une première opération, de manière à faire décroître le module du premier membre de chacune des équations (4). Une seconde opération, semblable à la première, fera décroître encore les mêmes modules; et, ce décroissement n'ayant pas de terme, du moins tant que les fonctions proposées ne cessent pas d'être continues, on finira par résoudre ainsi les équations (4).

Lorsque les équations proposées se réduisent à une seule, les équations (6) ou (9) se réduisent à la seule formule

$$\xi \mathrm{D}_x u = -u, \tag{13}$$

de laquelle on tire

$$\xi = -\frac{u}{\mathrm{D}_x u}. \tag{14}$$

Cette dernière équation n'est autre que la formule donnée par Newton comme propre à fournir des valeurs approchées successives d'une racine réelle d'une équation donnée. Alors aussi la méthode que nous avons exposée s'éloigne peu de celle que Legendre a donnée pour la résolution approximative d'une seule équation, dans la dernière édition de la *Théorie des nombres*. Seulement, afin d'obtenir une règle positive de calcul, il nous a paru nécessaire de fixer avec précision les valeurs qu'il convenait d'attribuer successivement au nombre θ. L'indication de ces valeurs, omise par Legendre, vient en aide au cal-

culateur embarrassé de savoir comment il devait opérer pour passer, sans beaucoup de peine, d'une première à une seconde valeur approchée de la racine x.

La marche indiquée ne pourrait plus être suivie si, parmi les valeurs de

$$\mathrm{u}_1, \quad \mathrm{v}_1, \quad \mathrm{w}_1, \quad \ldots,$$

déterminées par les équations (1), une ou plusieurs devenaient identiquement nulles, indépendamment des valeurs attribuées à

$$\Delta\mathrm{x}, \quad \Delta\mathrm{y}, \quad \ldots.$$

Alors, toutefois, on pourrait encore modifier la méthode de manière à obtenir la résolution des équations (4). Supposons, pour fixer les idées, que, le nombre des variables x, y, ... étant réduit à deux, une ou plusieurs des expressions

$$\mathrm{u}_1, \quad \mathrm{u}_2, \quad \ldots,$$

et même une ou plusieurs des expressions

$$\mathrm{v}_1, \quad \mathrm{v}_2, \quad \ldots,$$

deviennent identiquement nulles, u_l étant, dans la suite u_1, u_2, ..., et v_m dans la suite v_1, v_2, ..., les premiers termes qui ne se réduisent pas identiquement à zéro. Alors, pour déterminer les valeurs de Δx, Δy ci-dessus représentées par ξ et η, on devra recourir, non plus aux équations

$$\mathrm{u}+\mathrm{u}_1=0, \qquad \mathrm{v}+\mathrm{v}_1=0,$$

mais aux deux suivantes

$$\mathrm{u}+\mathrm{u}_l=0, \qquad \mathrm{v}+\mathrm{v}_m=0. \tag{15}$$

Or la recherche des valeurs de Δx, Δy propres à vérifier simultanément les formules (15) pourra être réduite à la recherche des valeurs de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ qui vérifieront la seule équation

$$\left(-\frac{\mathrm{u}_l}{\mathrm{u}}\right)^m = \left(-\frac{\mathrm{v}_m}{\mathrm{v}}\right)^l$$

ou même la seule équation

$$(16)\qquad \left(-\frac{u_l}{u}\right)^{\frac{m}{d}} = \left(-\frac{v_m}{v}\right)^{\frac{l}{d}},$$

d étant le plus grand commun diviseur des nombres entiers l, m. Donc la résolution des deux équations simultanées

$$u = 0, \qquad v = 0$$

dépendra, dans le cas d'exception indiqué, de la résolution de la seule équation (16). On pourra d'ailleurs appliquer à cette dernière équation la méthode relative au cas où l'on considère une seule variable. Ajoutons que l'équation (16) pourra être résolue directement en termes finis, si le plus petit des nombres entiers, divisibles par l et par m, ne surpasse pas le nombre 4.

292.

Rapport sur la singulière aptitude d'un enfant de six ans et demi pour le calcul.

C. R., T. XX, p. 1629 (2 juin 1845).

L'Académie nous a chargés de constater le singulier phénomène que présente un enfant de six ans et demi, le jeune Prolongeau. L'aptitude de cet enfant pour le calcul est véritablement extraordinaire. Ainsi que nous en avons acquis la certitude, en lui adressant un grand nombre de questions, il résout de tête, avec beaucoup de facilité, les problèmes qui se rattachent aux opérations ordinaires de l'Arithmétique et à la résolution des équations du premier degré.

Les Commissaires, après avoir longtemps examiné le jeune Prolongeau, restent persuadés qu'il convient de cultiver avec discernement ses heureuses facultés, et que ceux qui seront chargés de diriger son instruction doivent éviter, pendant plusieurs années encore, de l'appliquer trop fortement à l'étude des sciences mathématiques. Ils croient qu'on fera sagement de ne pas vouloir cueillir trop tôt des fruits qui, selon toute apparence, réaliseront les espérances qu'on a conçues, si l'on a la patience d'attendre qu'ils parviennent à leur maturité.

Au reste, les Commissaires se plaisent à exprimer hautement l'intérêt que leur a inspiré le jeune Prolongeau doué, avant l'âge de sept ans, d'une intelligence précoce et d'une étonnante facilité pour le calcul. Ils espèrent que cet intérêt sera partagé par tous les amis des sciences.

293.

MÉCANIQUE. — *Notes relatives à la Mécanique rationnelle.*

C. R., T. XX, p. 1760 (23 juin 1845).

L'examen des titres des candidats à la place de Correspondant, vacante dans la Section de Mécanique, a reporté mon attention sur divers problèmes qui sont relatifs à la Mécanique rationnelle. Quelques-uns des résultats auxquels mes réflexions m'ont conduit deviendront l'objet de plusieurs articles qui seront publiés prochainement dans mes *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. Je me borne aujourd'hui à extraire de mon travail quelques recherches qui seront développées dans ces articles, et qui m'ont paru propres à intéresser l'Académie.

Note sur les équations générales d'équilibre d'un système de points matériels assujettis à des liaisons quelconques.

Les liaisons qui existent entre des points matériels sont toujours des liaisons physiques, et par conséquent dues à des actions moléculaires. Il y a plus : ces liaisons sont généralement produites par les actions mutuelles d'un très grand nombre de molécules. Ainsi, par exemple, un axe fixe de suspension n'est autre chose qu'un système de points matériels situés à très peu près sur une même droite, et retenus par une force de cohésion assez intense pour que les autres forces dont on tient compte dans le calcul n'aient pas le pouvoir de faire varier sensiblement la distance de deux quelconques de ces points. Mais, dans une première approximation, on peut ordinairement substituer à une liaison physique une liaison mathématique, représentée par une certaine équation de condition. On peut d'ailleurs arriver par deux routes différentes aux équations d'équilibre de plusieurs forces dont les points d'application sont supposés assujettis à des liaisons mathématiques. Le plus souvent on déduit ces équations du principe des vitesses virtuelles; mais on peut aussi les établir directement à l'aide de diverses méthodes. Le premier des Mémoires dans lequel les équations d'équilibre se trouvent établies directement est celui que M. Poinsot a publié dans le XIII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. L'auteur a commencé par examiner le cas où les liaisons qui existent entre plusieurs points mobiles sont représentées par des équations de condition qui renferment seulement les distances mutuelles de ces points; puis il a montré comment on pouvait passer du cas dont il s'agit au cas général où les liaisons sont représentées par des équations de condition quelconques entre les coordonnées des points mobiles, et il a ainsi retrouvé, comme on devait s'y attendre, les formules que Lagrange avait tirées du principe des vitesses virtuelles dans la *Mécanique analytique*. J'ai, dans les *Exercices de Mathématiques*, abordé immédiatement le cas général dont je viens de parler. Mais la méthode que j'ai suivie peut encore être simplifiée. Je demanderai à l'Académie la permission d'entrer à ce sujet dans quelques détails.

Lorsque plusieurs points assujettis à des liaisons mathématiques sont en équilibre sous l'action de certaines forces, chaque liaison peut être remplacée par les résistances qu'elle oppose aux mouvements des divers points matériels. Donc, pour obtenir les équations d'équilibre,

il suffit d'écrire que la force appliquée à chaque point mobile fait équilibre aux résistances que les diverses liaisons opposent au mouvement de ce point, ou, en d'autres termes, que cette force est la résultante de forces égales et contraires à ces résistances. D'ailleurs, des forces égales et contraires aux résistances qu'une seule liaison oppose aux mouvements de divers points mobiles sont précisément des forces capables de maintenir en équilibre les points assujettis à cette liaison. Donc la question peut toujours être réduite à la recherche des équations d'équilibre de points mobiles assujettis à une liaison unique. Enfin, il est facile de s'assurer que, dans ce cas, l'équilibre peut toujours avoir lieu sous l'action de forces convenablement dirigées, et dont l'une, arbitrairement choisie, peut offrir telle intensité que l'on voudra. Reste à savoir comment on peut déterminer, non seulement la droite suivant laquelle doit agir la force appliquée à chaque point, mais aussi le rapport entre deux forces appliquées à deux points distincts. Or cette détermination peut s'effectuer très simplement à l'aide des considérations suivantes.

Supposons que l'équilibre subsiste entre des forces appliquées à des points mobiles, ces points étant assujettis à une liaison unique. L'équilibre continuera évidemment de subsister, si l'on donne plus de fixité au système; par exemple, si plusieurs des points mobiles deviennent fixes, ou si l'on joint une seconde liaison à la première. Cela posé, soient A, A′ deux des points mobiles, pris au hasard, et supposons que l'on recherche les conditions auxquelles doivent satisfaire, dans le cas d'équilibre, les forces P, P′ appliquées à ces deux points. Pour y parvenir, il suffira de fixer tous les points mobiles, à l'exception de A et de A′, puis d'assujettir les points A et A′ à une liaison nouvelle qui permette de trouver facilement les conditions cherchées. Or la plus simple de toutes les liaisons, celle qui consiste à lier les deux points entre eux par une droite invariable, jouit précisément de cette propriété. En effet, supposons deux points A, A′ seuls mobiles et assujettis à deux liaisons dont l'une soit celle qu'établit entre eux une droite invariable dont ils forment les extrémités. Les six coordonnées des deux points, assujetties seulement à vérifier les deux équations qui représentent les deux liaisons dont il s'agit, pourront varier encore d'une infinité de manières, et, par suite, les mouvements virtuels des deux points, c'est-à-dire les mouvements compatibles avec les liaisons données, seront en nombre infini. On peut même remarquer que la courbe décrite par le point A dans un mouvement virtuel sera complètement arbitraire; car, en fixant à volonté la nature de cette courbe, on établira seulement deux équations nouvelles qui renfermeront les coordonnées du point A; et, si l'on en profite pour éliminer des deux premières équations ces trois coordonnées, on obtiendra une seule équation entre les coordonnées du point A'. Donc, en obligeant le point A à se mouvoir sur une certaine courbe, arbitrairement choisie, on obligera seulement le point A' à se mouvoir sur une certaine surface courbe; et alors au mouvement virtuel du point A pourra être censé correspondre, pour le point A', un mouvement virtuel en vertu duquel ce dernier point décrirait une courbe tracée à volonté sur la surface courbe dont il s'agit. Donc, en définitive, les mouvements virtuels des deux points A et A' assujettis à une liaison quelconque, et joints d'ailleurs l'un à l'autre par une droite invariable AA', sont des mouvements exécutés suivant deux courbes dont l'une est entièrement arbitraire.

Cela posé, il deviendra très facile de trouver les conditions d'équilibre de deux forces P, P', appliquées aux deux points A, A'. En effet, considérons un mouvement virtuel quelconque du système de ces deux points comme un mouvement qu'on les oblige à prendre, en fixant les deux courbes sur lesquelles il leur est permis de se déplacer. Cette fixation ne troublera pas l'équilibre. Il devra donc y avoir équilibre entre les forces P, P' lorsque leurs points d'application A, A', liés entre eux par une droite invariable, seront de plus assujettis à se mouvoir sur deux courbes fixes. Mais alors chacune des forces P, P' devra faire séparément équilibre aux deux résistances opposées aux mouvements de son point d'application par la courbe fixe et par la droite invariable. Les conditions de cet équilibre, exprimées analytiquement, détermineront à la fois et le rapport des deux forces P, P', et la direction de chacune d'elles.

Au reste, lorsque plusieurs points A, A', A'', ... sont en équilibre sous l'action de certaines forces P, P', P'', ..., alors, pour déterminer séparément la direction de la force appliquée à l'un d'entre eux, par exemple de la force P appliquée au point A, il suffit de laisser le point A seul mobile en fixant tous les autres. Alors, en effet, l'équation qui exprimait la liaison devient l'équation d'une surface que le point A est assujetti à décrire; et, comme, en fixant divers points, on ne peut troubler l'équilibre, on peut affirmer que la direction de la force P doit être perpendiculaire à la surface dont il s'agit. D'ailleurs, les directions des forces P, P', ... étant une fois déterminées, il ne reste plus qu'à trouver le rapport de deux quelconques d'entre elles. On y parviendra, pour deux forces données P, P', appliquées aux points A et A', en joignant ces deux points, comme on vient de le dire, par une droite invariable, et en fixant, d'ailleurs, tous les autres points donnés.

Dans les *Exercices de Mathématiques*, je ne m'étais pas borné à lier les deux points A, A' par une droite invariable. J'avais de plus fixé le milieu de cette droite; mais, comme on le voit, cette fixation, qui réduisait à deux courbes sphériques celles que les deux points étaient obligés de décrire dans un mouvement virtuel, n'est nullement nécessaire. Il y a plus : pour trouver le rapport de deux forces P, P', dont les points d'application A, A' sont assujettis à une liaison unique, il n'est pas absolument nécessaire de lier les points A, A' par une droite invariable. Il suffirait d'assujettir les deux points à ne pas s'écarter : 1° de deux courbes fixes, savoir de deux courbes correspondantes que ces points puissent décrire, en vertu de la liaison donnée, dans un mouvement virtuel quelconque; 2° d'une droite rigide et mobile sur laquelle ils pourraient glisser, cette droite étant choisie de manière à rendre obligatoire, pour les deux points, le mouvement virtuel dont il s'agit. Or, pour satisfaire à cette dernière condition, il suffit évidemment d'assujettir la droite mobile AA' à s'appuyer, non seulement sur les deux courbes fixes, mais en outre sur une troisième courbe ou directrice que l'on rendrait fixe elle-même, et qui pourrait, par exemple, renfermer constamment le milieu de la distance AA'; ou bien encore sur une surface cylindrique constamment touchée par la droite mobile. On pourrait aussi recourir à une idée dont M. Ampère s'est servi dans la démonstration qu'il a donnée du principe des vitesses virtuelles, et considérer la droite mobile comme la base d'un triangle dont le sommet, compris entre deux côtés d'une longueur invariable, serait assujetti à décrire une courbe fixe donnée. Au reste, quoiqu'on puisse assez facilement calculer le rapport des forces P, P', en supposant leurs points d'application situés sur une droite mobile et rigide, mais de longueur variable, le calcul est plus simple encore quand on se borne à lier l'un à l'autre par une droite invariable, comme nous l'avions fait d'abord.

Il pourrait arriver que les deux points A, A', assujettis à une seule liaison, ne pussent être joints l'un à l'autre par une droite invariable, sans devenir complètement immobiles. C'est ce qui aurait lieu, en effet, si les positions particulières des deux points étaient telles que leur distance mutuelle fût un minimum. Il semble que, dans ce cas, le rapport des deux forces P, P' ne pourrait plus être fourni par la première des méthodes que nous venons d'indiquer. Toutefois, pour tirer parti de cette méthode même, il suffirait de placer les points A, A', non plus dans les positions correspondantes au minimum de leur distance mutuelle, mais dans d'autres positions très voisines, que l'on pourrait rapprocher indéfiniment des premières; ou bien encore d'altérer très peu la liaison donnée et l'équation qui la représente, en ajoutant au premier membre de cette équation un terme que l'on pourrait rapprocher indéfiniment de zéro. Ce dernier artifice est précisément celui qu'a employé M. Poinsot pour déduire des conditions d'équilibre du levier coudé les conditions d'équilibre du levier droit.

Il est bon d'observer que plusieurs des considérations à l'aide desquelles nous avons déterminé le rapport de deux forces, dont les points d'application se trouvent assujettis à une liaison unique, peuvent servir à démontrer immédiatement le principe des vitesses virtuelles pour divers points assujettis à diverses liaisons.

Observons enfin que, dans le cas où l'on recherche les équations d'équilibre, pour un système de points matériels assujettis, non plus à des liaisons mathématiques, mais à des liaisons physiques, on peut toujours remplacer ces liaisons par les résistances qu'elles opposent aux mouvements des divers points du système. Seulement, ces résistances se réduisent alors aux pressions exercées sur le système par les points matériels que l'on considère comme étrangers à ce système, et comme servant à former les diverses liaisons auxquelles il se trouve assujetti.

Note relative à la pression totale supportée par une surface finie dans un corps solide ou fluide.

Dans un article que renferme le Tome II de mes *Exercices* (1), j'ai observé que la pression exercée en un point donné d'un corps solide contre un élément de surface passant par ce point devait être généralement, non pas normale, mais oblique; et j'ai trouvé que cette pression, variable, non seulement en direction, mais aussi en grandeur, avec le plan de l'élément, pouvait aisément se déduire de trois pressions principales respectivement normales à trois plans perpendiculaires entre eux. J'ai fait voir aussi que la pression exercée contre un plan quelconque, en un point donné, pouvait être facilement calculée quand on connaissait les pressions exercées contre trois plans rectangulaires menés à volonté par le même point. Enfin j'ai donné plus tard, dans le Tome III (2), les formules générales et très simples qui servent à exprimer les valeurs de ces pressions dans un système de molécules, non pas comme l'avait fait M. Poisson, en adoptant une hypothèse particulière qui reproduisait, avec des pressions toujours normales et les mêmes en tous sens, les équations de mouvement

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 60 et suiv.
(2) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 253, et suiv.

données par M. Navier, mais en supposant que les molécules étaient distribuées d'une manière quelconque, et inégalement dans les divers sens, autour de chaque point. En établissant ces formules, j'avais admis, avec Poisson, que la pression exercée contre un élément de surface plane dans le système peut être considérée comme due, à très peu près, à l'action des molécules comprises dans un cylindre droit qui a pour base l'élément dont il s'agit. Mais il est plus exact de dire, avec M. de Saint-Venant, que, dans un système moléculaire, la pression exercée contre un élément de surface est la résultante des forces dont les directions traversent cet élément, et dont les centres sont situés d'un même côté par rapport au plan de l'élément. A la vérité, cette dernière définition, plus rigoureuse que la première, semble encore, ainsi que l'autre, laisser subsister un doute au premier abord. On est tenté de se demander si les forces diverses que l'on compose entre elles pour obtenir la pression, et que l'on peut regarder comme appliquées aux points où elles rencontrent la surface de l'élément supposé rigide, ont effectivement une résultante unique. En toute rigueur, on devrait les remplacer généralement par une force et par un couple; mais, comme l'a encore observé M. de Saint-Venant, on peut faire abstraction du couple, quand l'élément de surface est très petit. On peut même s'assurer que, dans les cas où chaque dimension de l'élément est considérée comme une quantité infiniment petite du premier ordre, la force résultante, sensiblement proportionnelle à l'élément, est, comme celui-ci, une quantité du second ordre, et le moment du couple une quantité du quatrième ordre seulement. C'est ce que l'on reconnaît sans peine, en observant que, d'une part, l'intensité des forces du couple dépend des variations très petites qu'éprouvent les actions moléculaires dans une étendue comparable aux dimensions de l'élément, et que, d'autre part, les points d'application des forces du couple sont séparés l'un de l'autre par une distance inférieure à la plus grande de ces dimensions. Il en résulte que le couple disparaît toujours dans la valeur générale de ce qu'on doit appeler la pression supportée par une surface en un point donné.

D'ailleurs, cette valeur générale est précisément celle que j'avais obtenue dans le Tome III de mes *Exercices de Mathématiques*.

Lorsque, dans un corps solide, on cherche la pression exercée, non plus contre une surface ou un élément de surface en un point donné, mais contre une surface plane ou courbe d'une étendue finie, le couple reparaît, sans qu'on puisse le négliger, du moins en général, et il donne précisément la mesure de ce qu'on nomme des *forces d'élasticité, de torsion*, etc. On peut même faire, à ce sujet, une remarque qui n'est pas sans importance. Dans plusieurs formules que renferme la *Mécanique analytique*, Lagrange introduit ce qu'il appelle le *moment d'une force d'élasticité*, et, pour trouver ce moment, il multiplie la force par la différentielle de l'angle qu'elle tend à diminuer. Il est clair que, pour obtenir le véritable sens des formules de Lagrange, on ne doit pas attribuer ici aux expressions qu'il a employées leur signification ordinaire. Une force unique appliquée à un point unique, savoir, au sommet d'un angle, ne peut en aucune manière tendre à faire varier cet angle. Mais on peut produire cet effet, soit en fixant un des côtés de cet angle, et appliquant à l'autre côté un couple de forces dont le plan soit celui de l'angle, soit en appliquant dans ce même plan deux couples différents aux deux côtés. Cela posé, les formules de Lagrange admettent une interprétation très précise, et qu'il paraît utile de signaler. Cette interprétation, que j'ai vainement cherchée dans la *Mécanique analytique*, se déduit immédiatement du théorème que je vais énoncer :

Si l'on applique aux deux extrémités d'une droite rigide deux forces composant un couple, la somme des moments virtuels de ces deux forces sera, au signe près, le produit qu'on obtient quand on multiplie le moment du couple par la vitesse virtuelle de la droite mobile, cette vitesse étant mesurée dans le plan du couple.

En conséquence, dans la *Mécanique analytique* de Lagrange, par ces mots *force d'élasticité tendant à diminuer un angle*, on doit toujours entendre le moment d'un couple appliqué à l'un des côtés de cet angle, c'est-à-dire la surface du parallélogramme construit sur les deux forces du couple.

Pour arriver à l'équation de la courbe élastique, Lagrange a examiné en particulier le cas où l'angle que la force d'élasticité tend à diminuer devient infiniment petit. M. Binet a donné une interprétation de la formule de Lagrange relative à ce cas, dans un Mémoire (Tome X du *Journal de l'École Polytechnique*) où il a considéré la force d'élasticité comme représentant la tension d'un fil rectiligne dont les extrémités sont fixées sur les deux côtés de l'angle à des distances égales et finies du sommet.

294.

MÉCANIQUE. — *Observations sur la pression que supporte un élément de surface plane dans un corps solide ou fluide.*

C. R., T. XXI, p. 125 (14 juillet 1845).

On connait les formules générales que j'ai données dans le Tome III des *Exercices de Mathématiques* (32ᵉ livraison, p. 218) [1], pour la détermination des pressions exercées, dans un système de molécules ou plutôt de points matériels, contre trois plans rectangulaires menés par l'un de ces points [2]. Ainsi que je l'ai observé dans une

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 259.

(2) Des formules équivalentes se trouvent à la page 375 d'un Mémoire publié par M. Poisson, dans le Tome VIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, et relatif au mouvement des corps élastiques. Si je n'ai pas mentionné ce fait dans l'article que renferme le *Compte rendu* de la séance du 23 juin, cela tient à ce que, ayant écrit cet article à la campagne, je n'ai pu consulter que mes souvenirs. Il est bien vrai, comme je l'ai dit, que les équations du mouvement des corps élastiques, déduites, dans le Mémoire de M. Poisson, de la considération des actions moléculaires, étaient précisément les équations particulières qu'avait obtenues M. Navier. Mais, après avoir donné des valeurs générales des pressions, M. Poisson avait transformé deux sommations en intégrations, et particularisé ainsi ces valeurs avant de les substituer dans les équations de mouve-

Note lue à l'Académie le 23 juin dernier, ces formules peuvent se déduire immédiatement de la définition qui consiste à regarder la pression supportée par un élément de surface plane comme la résultante des forces dont les directions traversent cet élément, et dont les centres sont situés d'un même côté par rapport au plan de l'élément, c'est-à-dire, en d'autres termes, de la définition qui a été adoptée par M. de Saint-Venant, et même, avant lui, par M. Duhamel. Afin de ne pas trop allonger l'article qui a été imprimé dans le *Compte rendu*, je m'étais abstenu d'y insérer la démonstration nouvelle que j'avais trouvée pour les formules dont il s'agit, me réservant de la donner dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. J'ai appris depuis que cette même démonstration, trouvée aussi par M. de Saint-Venant, sans que j'en eusse connaissance, avait été verbalement exposée par lui, dans une séance de la Société philomathique. Elle ne différait pas d'ailleurs de celle que M. de Saint-Venant a présentée lundi dernier à l'Académie, ce qui me dispensera de la transcrire. Mais je veux aujourd'hui joindre à ces observations diverses une remarque importante. Les formules ci-dessus mentionnées fournissent seulement des valeurs approximatives des pressions supportées dans un corps solide ou fluide par des éléments de surfaces planes. Or on peut obtenir, pour ces mêmes pressions, des valeurs beaucoup plus exactes, des valeurs dont l'exactitude serait rigoureuse s'il était permis de considérer le corps solide ou fluide comme une masse continue. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

ment tirées des formules que j'avais moi-même établies (*voir* le Tome II des *Exercices de Mathématiques*) [a] comme propres à fournir *les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices*. J'ajouterai que la date de la présentation du Mémoire de M. Poisson, rappelée en tête de ce Mémoire même, est antérieure à l'époque à laquelle a paru la 32ᵉ livraison des *Exercices*, quoique cette époque précède celle de la publication du Tome VIII des *Mémoires de l'Académie*. Je remarquerai enfin que, à la place de la densité, qui entre comme facteur dans les formules du Tome III des *Exercices*, on trouvait, dans les formules de M. Poisson, l'intervalle moléculaire moyen et que, dans son Mémoire, M. Poisson n'avait pas suffisamment défini cet intervalle moyen qu'il supposait être le même en tous sens.

(a) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 141.

ANALYSE.

Considérons un corps solide ou fluide comme une masse continue, dont les divers éléments se trouvent sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle; et soient, au bout du temps t,

x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point O, choisi arbitrairement dans ce corps solide ou fluide;
ρ la densité du corps au point O;
L, M, N trois points quelconques du plan mené par le point O, perpendiculairement à l'axe des x;
s une très petite surface, comprise dans le plan LMN, et renfermant le point O;
V le volume du corps.

Supposons d'ailleurs que les deux parties, dans lesquelles le volume V est divisé par le plan LMN, soient décomposées chacune en éléments très petits, et nommons

v' l'un quelconque des éléments de V, situés par rapport au plan LMN du côté des x positives;
$v_,$ l'un quelconque des éléments de V, situés par rapport au plan LMN du côté des x négatives;
m' la masse comprise sous le volume v';
$m_,$ la masse comprise sous le volume $v_,$;
$x+\mathrm{x}'$, $y+\mathrm{y}'$, $z+\mathrm{z}'$ les coordonnées d'un point P compris dans le volume v';
$x-\mathrm{x}_,$, $y-\mathrm{y}_,$, $z-\mathrm{z}_,$ les coordonnées d'un point Q compris dans le volume $v_,$;
r la distance du point Q au point P;
α, β, γ les cosinus des angles formés par la droite QP avec les demi-axes des coordonnées positives;
$m'm_,\mathrm{f}(r)$ l'action mutuelle des masses élémentaires m' et $m_,$, la fonction $\mathrm{f}(r)$ étant positive ou négative suivant que les deux masses s'attirent ou se repoussent.

Enfin, soient

$$\begin{matrix} A, & F, & E, \\ F, & B, & D, \\ E, & D, & C \end{matrix}$$

les projections algébriques des pressions exercées au point O, et du côté des coordonnées positives, contre trois plans parallèles aux plans coordonnés. Les produits

$$As,\quad Fs,\quad Es$$

devront représenter les sommes des projections algébriques, non pas de toutes les actions de la forme

$$m'm_,\mathrm{f}(r),$$

exercées par les masses élémentaires m' sur les masses élémentaires $m_,$, mais seulement de celles d'entre ces forces dont les directions traverseront la surface élémentaire s. D'ailleurs, les projections algébriques de la force

$$m'm_,\mathrm{f}(r),$$

considérée comme représentant l'action de m' sur $m_,$, seront respectivement

$$m'm_,\mathrm{f}(r)\cos\alpha,\qquad m'm_,\mathrm{f}(r)\cos\beta,\qquad m'm_,\mathrm{f}(r)\cos\gamma.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} As &= \mathrm{S}[m'm_,\mathrm{f}(r)\cos\alpha], \\ Fs &= \mathrm{S}[m'm_,\mathrm{f}(r)\cos\beta], \\ Es &= \mathrm{S}[m'm_,\mathrm{f}(r)\cos\gamma], \end{aligned}$$

les sommes qu'indique le signe S s'étendant aux projections algébriques des seules forces dont les directions traversent la surface s.

Considérons en particulier l'équation

$$As = \mathrm{S}[m'm_,\mathrm{f}(r)\cos\alpha], \tag{1}$$

et nommons ρ', $\rho_,$ les valeurs de la densité ρ correspondantes aux points P et Q. On aura, sans erreur sensible,

$$m' = \rho' v',\qquad m_, = \rho_, v_,$$

et, par suite,

$$As = \mathrm{S}[\rho'\rho_{,}\,\mathrm{f}(r)\cos\alpha\,.\,v'v_{,}]; \tag{2}$$

puis, en supposant que les éléments des volumes v', $v_{,}$ se réduisent à deux parallélépipèdes rectangles, et infiniment petits, dont l'un ait pour sommet le point P, l'autre le point Q, on transformera l'équation (2) en celle-ci

$$As = \int\int\int\int\int\int \rho'\rho_{,}\,\mathrm{f}(r)\cos\alpha\, d\mathrm{x}'\, d\mathrm{y}'\, d\mathrm{z}'\, d\mathrm{x}_{,}\, d\mathrm{y}_{,}\, d\mathrm{z}_{,}, \tag{3}$$

l'intégrale sextuple devant être étendue à toutes les valeurs des variables

$$\mathrm{x}', \quad \mathrm{y}', \quad \mathrm{z}', \quad \mathrm{x}_{,}, \quad \mathrm{y}_{,}, \quad \mathrm{z}_{,}$$

qui permettront à la droite PQ de traverser la surface s, en demeurant d'ailleurs comprises entre les limites inférieures

$$\mathrm{x}'=0, \quad \mathrm{y}'=-\infty, \quad \mathrm{z}'=-\infty, \quad \mathrm{x}_{,}=0, \quad \mathrm{y}_{,}=-\infty, \quad \mathrm{z}_{,}=-\infty$$

et les limites supérieures

$$\mathrm{x}'=\infty, \quad \mathrm{y}'=\infty, \quad \mathrm{z}'=\infty, \quad \mathrm{x}_{,}=\infty, \quad \mathrm{y}_{,}=\infty, \quad \mathrm{z}_{,}=\infty.$$

Il est vrai qu'en adoptant ces limites on semble supposer les dimensions du corps infinies, tandis qu'elles sont finies en réalité. Mais, pour tenir compte de cette dernière circonstance, il suffira de considérer la densité ρ comme une fonction de x, y, z, qui s'évanouira toujours quand le point O cessera d'être un point intérieur du corps. Soit $\varpi(x, y, z)$ une telle fonction, et supposons que l'on ait

$$\rho = \varpi(x, y, z). \tag{4}$$

On aura encore, dans la formule (3),

$$\rho' = \varpi(x+\mathrm{x}', y+\mathrm{y}', z+\mathrm{z}'), \qquad \rho_{,} = \varpi(x-\mathrm{x}_{,}, y-\mathrm{y}_{,}, z-\mathrm{z}_{,}). \tag{5}$$

Posons maintenant, pour plus de commodité,

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}'+\mathrm{x}_{,}, \qquad \mathrm{y} = \mathrm{y}'+\mathrm{y}_{,}, \qquad \mathrm{z} = \mathrm{z}'+\mathrm{z}_{,}. \tag{6}$$

Alors

$$x+\mathrm{x}, \quad y+\mathrm{y}, \quad z+\mathrm{z}$$

seront évidemment les coordonnées de l'extrémité R d'une droite OR $= r$ menée par le point O parallèlement à la droite QP; et, si dans le second membre de la formule (3) on substitue aux variables $\mathrm{x}_{,}$, $\mathrm{y}_{,}$, $\mathrm{z}_{,}$ les variables x, y, z, on aura, en vertu de l'équation (6),

$$As = \int\int\int\int\int\int \rho'\rho_{,}\,\mathrm{f}(r)\cos\alpha\, d\mathrm{x}'\, d\mathrm{y}'\, d\mathrm{z}'\, d\mathrm{x}\, d\mathrm{y}\, d\mathrm{z}. \tag{7}$$

On peut supposer, dans la formule (7), les intégrations effectuées : 1° par rapport aux variables x, y, z entre les limites inférieures

$$\mathrm{x}=0, \quad \mathrm{y}=-\infty, \quad \mathrm{z}=-\infty$$

et les limites supérieures

$$\mathrm{x}=\infty, \quad \mathrm{y}=\infty, \quad \mathrm{z}=\infty;$$

2° par rapport à la variable x' entre les limites

$$\mathrm{x}'=0, \qquad \mathrm{x}'=\mathrm{x};$$

3° par rapport aux variables y' et z' entre des limites telles que la droite QP reste renfermée dans le cylindre droit ou oblique dont la surface s est la base, et dont la génératrice est parallèle à OR. Or, en adoptant cette supposition, on aura, non seulement

$$\int\int d\mathrm{y}'\, d\mathrm{z}' = s,$$

mais encore, à très peu près, pour de très petites valeurs de s,

$$\frac{\mathrm{x}'}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{y}'}{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{z}'}{\mathrm{z}}; \tag{8}$$

et, par suite, en prenant

$$\theta = \frac{\mathrm{x}'}{\mathrm{x}}, \tag{9}$$

on trouvera sensiblement

$$\mathrm{x}'=\theta\mathrm{x}, \qquad \mathrm{y}'=\theta\mathrm{y}, \qquad \mathrm{z}'=\theta\mathrm{z}. \tag{10}$$

Cela posé, pour de très petites valeurs de s, la formule (7) donnera sensiblement

$$As = s\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega\,\mathrm{f}(r)\cos\alpha\, d\mathrm{x}\, d\mathrm{y}\, d\mathrm{z}$$

et, par suite,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega\, \mathrm{f}(r) \cos\alpha\, d\mathrm{x}\, dy\, dz, \tag{11}$$

la valeur de Ω étant

$$\Omega = \int_0^{\mathrm{x}} \rho'\rho_{\prime}\, d\mathrm{x}' \tag{12}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la première des formules (10),

$$\Omega = \mathrm{x}\int_0^1 \rho'\rho_{\prime}\, d\theta. \tag{13}$$

Il est bon d'observer que, dans l'équation (13), ρ' et $\rho_{\prime}$ seront des fonctions de θ déterminées par le système des formules (5), jointes aux équations (6) et (10); en sorte qu'on aura

$$\left\{\begin{aligned} \rho' &= \varpi(x + \theta\mathrm{x},\ y + \theta\mathrm{y},\ z + \theta\mathrm{z}), \\ \rho_{\prime} &= \varpi[x - (1-\theta)\mathrm{x},\ y - (1-\theta)\mathrm{y},\ z - (1-\theta)\mathrm{z}]. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

En d'autres termes, ρ' et $\rho_{\prime}$ devront, dans l'équation (13), représenter la densité du corps en deux points G, H dont les coordonnées seront, d'une part,

$$x + \theta\mathrm{x}, \quad y + \theta\mathrm{y}, \quad z + \theta\mathrm{z},$$

d'autre part,

$$x - (1-\theta)\mathrm{x}, \quad y - (1-\theta)\mathrm{y}, \quad z - (1-\theta)\mathrm{z}.$$

D'ailleurs, ces deux points seront évidemment situés sur la droite OR, à la distance r l'un de l'autre, et à des distances du point O représentées par les produits

$$\theta r, \quad (1-\theta) r,$$

la distance θr étant mesurée, à partir du point O, dans le sens des x positives, et la distance $(1-\theta)r$ dans le sens des x négatives.

En adoptant les valeurs de ρ', $\rho_{\prime}$ déterminées par les équations (14), et posant, pour abréger,

$$\omega = \int_0^1 \rho'\rho_{\prime}\, d\theta, \tag{15}$$

on tirera de l'équation (13)

$$\Omega = \omega\mathrm{x},$$

et par suite la formule (11) donnera

$$A = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\mathrm{x}\, \mathrm{f}(r)\cos\alpha\, d\mathrm{x}\, dy\, dz. \tag{16}$$

On trouvera de même

$$F = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\mathrm{x}\, \mathrm{f}(r)\cos6\, d\mathrm{x}\, dy\, dz \tag{17}$$

et

$$E = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\mathrm{x}\, \mathrm{f}(r)\cos\gamma\, d\mathrm{x}\, dy\, dz. \tag{18}$$

D'ailleurs la droite OR $= r$ étant égale et parallèle à la droite QP, on aura nécessairement

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = r^2 \tag{19}$$

et

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{x}}{r}, \qquad \cos6 = \frac{\mathrm{y}}{r}, \qquad \cos\gamma = \frac{\mathrm{z}}{r}. \tag{20}$$

Donc les formules (16), (17), (18) donneront

$$\left\{\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\mathrm{x}^2 \frac{\mathrm{f}(r)}{r}\, d\mathrm{x}\, dy\, dz, \\ F &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\mathrm{x}\mathrm{y} \frac{\mathrm{f}(r)}{r}\, d\mathrm{x}\, dy\, dz, \\ E &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\mathrm{x}\mathrm{z} \frac{\mathrm{f}(r)}{r}\, d\mathrm{x}\, dy\, dz. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Enfin, comme on n'altérera pas le produit $\rho'\rho_{\prime}$ en y remplaçant θ par $1-\theta$, et en substituant aux quantités x, y, z les quantités $-$x, $-$y, $-$z, on conclura de la formule (15) que cette dernière substitution n'altère pas la valeur de ω. Donc, par suite, on pourra, dans les formules (21), substituer au signe

$$\int_0$$

le signe

$$\int_{-\infty}^{0},$$

ou même le signe

$$\int_{-\infty}^{\infty},$$

pourvu que, dans le dernier cas, on réduise chacun des seconds membres à sa moitié. On aura donc encore

$$(22)\qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\int\int\int \omega x^2 \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ F = \frac{1}{2}\int\int\int \omega xy \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ E = \frac{1}{2}\int\int\int \omega xz \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

pourvu que chaque intégration soit effectuée entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de la variable x, ou y, ou z.

Par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, on obtiendrait sans peine les valeurs de

$$F,\ B,\ D$$

ou de

$$E,\ D,\ C,$$

et l'on trouverait définitivement

$$(23)\qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\int\int\int \omega x^2 \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ B = \frac{1}{2}\int\int\int \omega y^2 \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ C = \frac{1}{2}\int\int\int \omega z^2 \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} D = \frac{1}{2}\int\int\int \omega yz \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ E = \frac{1}{2}\int\int\int \omega zx \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \\ F = \frac{1}{2}\int\int\int \omega xy \frac{f(r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

chaque intégration étant effectuée entre les limites $-\infty$, $+\infty$ de la variable x, y ou z.

Si l'on suppose l'espace décomposé en volumes élémentaires de dimensions très petites, et dont l'un quelconque, représenté par v, renferme le point R, les équations (23), (24) pourront être, sans erreur sensible, réduites aux formules

$$(25)\qquad A = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{S}\left[\omega x^2 \frac{f(r)}{r} v\right],\quad \ldots,$$

$$(26)\qquad D = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{S}\left[\omega yz \frac{f(r)}{r} v\right],\quad \ldots,$$

les sommes qu'indique le signe S s'étendant à tous les volumes élémentaires v qui renfermeront des points pour lesquels ω ne s'évanouira pas.

Adoptons maintenant l'hypothèse généralement admise, savoir, que les actions moléculaires décroissent très rapidement quand les molécules s'éloignent les unes des autres, et supposons ce décroissement assez rapide pour que, dans les formules (25), (26), on puisse, sans erreur sensible, réduire $f(r)$ à zéro quand r cesse d'être très petit. Alors les limites inférieures et supérieures des variables x, y, z, liées à r par l'équation (19), pourront être réduites à des quantités négatives et positives, très rapprochées de zéro. Par suite, pour des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, les valeurs de ρ', $\rho_{,}$, fournies par les équations (14), différeront très peu de la valeur de ρ fournie par l'équation (4), et la formule (15) donnera sensiblement

$$\omega = \rho^2.$$

Il y a plus : si l'on nomme m la masse comprise sous le volume v, on aura encore, à très peu près,

$$m = \rho^2,\qquad \rho m = \rho^2 v = \omega v,$$

et par suite les formules (25), (26) donneront

$$(27)\qquad A = \frac{\rho}{2}\,\mathrm{S}\left[m x^2 \frac{f(r)}{r}\right],\quad \ldots,$$

$$(28)\qquad D = \frac{\rho}{2}\,\mathrm{S}\left[m yz \frac{f(r)}{r}\right],\quad \ldots.$$

Ces dernières formules coïncident avec celles que j'ai données dans le Tome III des *Exercices de Mathématiques* (¹), page 218.

295.

Mémoire sur les secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales, et sur l'accord des théories mathématiques et physiques avec la véritable philosophie.

C. R., T. XXI, p. 134 (14 juillet 1845).

En rédigeant quelques articles qui paraîtront prochainement dans mes *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, je me suis vu conduit à un nouvel examen des notions et des principes qui servent de base à la Mécanique rationnelle. La lecture attentive d'un Mémoire publié dans le *Journal des Savants*, en 1837, par notre honorable confrère M. Chevreul, a été pour moi une autre occasion d'approfondir le même sujet. L'avantage que présente la culture simultanée des diverses branches des sciences mathématiques, physiques et naturelles, au sein d'une même Académie, consiste précisément en ce que ces sciences peuvent se prêter de mutuels secours, s'éclairer les unes les autres. Toutes les vérités se lient, s'enchaînent entre elles; et, comme le Mémoire de M. Chevreul se rapportait à des questions dont je me suis moi-même occupé, notre confrère a bien voulu me témoigner le désir que ces questions devinssent pour moi l'objet de méditations nouvelles. Les conclusions auxquelles je suis parvenu s'accordent, ainsi que je l'expliquerai plus tard, avec celles que notre confrère a énoncées à la fin de son Mémoire. D'ailleurs, les réflexions que m'a suggérées une étude sérieuse des faits rappelés dans ce Mémoire paraissent propres, non seulement à intéresser les amis des sciences

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 260.

mathématiques, physiques, naturelles, et d'une saine philosophie, mais encore à dissiper les préventions soulevées dans quelques esprits contre certaines théories physiques et mathématiques. Pour ce double motif, mon travail sera, je l'espère, accueilli avec bienveillance par les membres de l'Académie.

On a quelquefois accusé les géomètres et les physiciens de vouloir appliquer à la recherche de toutes les vérités les procédés du calcul et l'Analyse mathématique. Sans doute on ne doit rien exagérer; sans doute on peut abuser de tout, même des chiffres; mais il est juste aussi d'avouer que, dans un grand nombre de circonstances, la science des nombres et la méthode analytique peuvent nous aider à découvrir ou du moins à reconnaître la vérité. L'ordre admirable établi dans cet univers par l'Auteur de la nature est souvent étudié avec succès par le physicien ou le géomètre, qui se trouve saisi d'admiration au moment où il parvient, avec Newton, à soulever un coin du voile sous lequel se dérobaient à nos yeux des secrets qu'on avait crus impénétrables, et à remonter des phénomènes observés aux lois qui les régissent. Je sais que cet ordre peut être envisagé sous un triple point de vue, qu'on doit distinguer l'ordre physique, l'ordre intellectuel, l'ordre moral; mais, dans la recherche des vérités qui se rapportent à chacun de ces trois ordres, les calculs et les nombres peuvent ne pas être sans utilité. Dans l'ordre physique, les sciences de calcul n'ont pas seulement pour but de compter les objets sensibles, d'en faire le dénombrement; le plus souvent elles servent à mesurer ces objets, ou plutôt leurs attributs, leurs qualités, et même leurs affections diverses. La Géométrie mesure les dimensions des corps, leurs surfaces, leurs volumes; la Mécanique mesure leurs déplacements, leurs mouvements, leurs vitesses, les espaces qu'ils parcourent, et le temps qu'ils emploient à les parcourir. Elle mesure même leurs tendances au mouvement, les pressions auxquelles ils sont soumis, et celles qu'ils exercent sur d'autres corps. Enfin la science des nombres, appliquée à l'ordre physique, sert à discuter les faits ainsi qu'à les lier entre eux, et devient souvent un puissant moyen de découverte.

Il importe d'ajouter que, même dans l'ordre intellectuel, même dans l'ordre moral, les nombres peuvent quelquefois être employés avec avantage. Les causes qui contribuent à perfectionner l'intelligence de l'homme et à le rendre meilleur se manifestent par leurs effets. L'heureuse influence qu'exercent nécessairement sur les individus et sur la société des doctrines vraies, de bonnes lois, de sages institutions, ne se trouve pas seulement démontrée par le raisonnement et par la logique, elle se démontre aussi par l'expérience. Par conséquent, la Statistique offre un moyen en quelque sorte infaillible de juger si une doctrine est vraie ou fausse, saine ou dépravée, si une institution est utile ou nuisible aux intérêts d'un peuple et à son bonheur. Il est peut-être à regretter que ce moyen ne soit pas plus souvent mis en œuvre avec toute la rigueur qu'exige la solution des problèmes; il suffirait à jeter une grande lumière sur des vérités obscurcies par les passions; il suffirait à détruire bien des erreurs.

Mais laissons, dans ce moment, reposer la Statistique dont nous pourrons, dans une autre circonstance, faire mieux comprendre l'importante mission, et revenons à la Mécanique.

Ce qui caractérise surtout la Mécanique, ce qui la distingue plus nettement des autres sciences de calcul, c'est la notion de la *force*. Mais, qu'est-ce que la force? Est-ce un être, ou l'attribut d'un être? La force est-elle matérielle ou immatérielle? Si, comme on l'admet généralement, la force dirige et modifie le mouvement de la matière, ne serait-il pas absurde de croire qu'elle est matérielle; et, si elle est immatérielle, comment peut-on la mesurer, la calculer, la représenter par des nombres et par des chiffres? Enfin, les forces dont s'occupe la Mécanique sont-elles distinctes de celles que l'on considère dans les sciences physiques et naturelles, dans les sciences morales elles-mêmes? Sont-elles distinctes en particulier de celle qu'on nomme la force vitale? Toutes ces questions se rattachent et se lient intimement aux recherches consignées par M. Chevreul dans le savant Mémoire qui a pour titre : *Considérations générales, et inductions relatives à la matière des êtres vivants*. D'ailleurs, toutes ces questions paraissent

d'autant plus dignes d'être étudiées et approfondies, non seulement par les amis d'une saine et haute philosophie, mais encore par les géomètres, les chimistes et les physiciens, qu'une telle étude, en éclairant les bases sur lesquelles reposent plusieurs branches des sciences mathématiques, contribuera, d'une part, à rendre plus facile l'enseignement de ces sciences, et, d'autre part, à détruire des objections spécieuses, élevées contre elles avec une apparence de raison. Des esprits timides et irréfléchis s'étonnent, se scandalisent peut-être de voir l'Analyse mathématique entreprendre de soumettre à ses calculs, non seulement les objets sensibles, non seulement la matière et ses attributs, mais aussi quelquefois ce qui paraît immatériel, et la force en particulier. On s'étonne surtout de voir les physiciens, les chimistes et les géomètres parler des attractions et répulsions qui représentent ce qu'on appelle les actions mutuelles de divers points. On demande s'il est possible d'admettre que des points matériels agissent à distance les uns des autres. On demande si la force n'est pas d'une nature évidemment supérieure à celle de la matière dont elle dirige les mouvements; si, pour ce motif, la force ne doit pas être considérée comme l'expression d'une volonté, comme un produit, comme une émanation de l'intelligence; et si attacher la force à une matière inerte, la clouer pour ainsi dire à un point matériel, ce n'est pas vouloir matérialiser en quelque sorte l'intelligence elle-même. On voit que je n'ai pas dissimulé l'objection. Je vais maintenant y répondre, ainsi qu'aux diverses questions précédemment énoncées.

Pour éclaircir le sujet, je commencerai par rappeler la distinction déjà indiquée de l'ordre physique, de l'ordre intellectuel, de l'ordre moral. A ces trois ordres correspondent évidemment trois sortes de phénomènes, dans lesquels interviennent trois sortes de forces, les unes physiques, les autres intellectuelles ou morales. Les forces que je nommerai *physiques* sont celles qui, dans un système de points en repos, se manifestent par des pressions, par une tendance du système au mouvement, et qui, dans le cas où le système vient à se mouvoir, modifient sans cesse les vitesses acquises par les différents points.

Les forces *intellectuelles* sont, par exemple, celles que Kepler a su appliquer à la démonstration des lois qui portent son nom, et Newton à la découverte du principe de la gravitation universelle. Enfin, les forces *morales* sont celles d'une jeune fille qui, née souvent au sein de l'opulence et dans un rang élevé, mais dévorée d'une ambition que la terre a peine à comprendre, embrasse volontairement la pauvreté pour devenir la servante des pauvres, et s'empresse d'échanger les fêtes, les honneurs, les plaisirs qui l'attendaient dans le monde, contre une vie obscure et pénible, contre une vie de labeur, de dévouement et de sacrifices.

La distinction de l'ordre physique, de l'ordre intellectuel, de l'ordre moral est universellement admise. La distinction des forces physiques, intellectuelles et morales est tout aussi incontestable, et ne sera certainement contestée, dans notre siècle, par aucun de ceux qui ont puissamment contribué aux progrès des sciences. Il est par trop évident qu'une pensée, un raisonnement, la découverte d'un théorème d'Analyse, ou de Calcul intégral, ne peut être le produit d'une combinaison d'atomes, l'effet d'une pression, d'une force physique, l'effet de quelques actions et réactions moléculaires; et, aux yeux du vrai philosophe, aux yeux du vrai savant, vouloir faire de la pensée une sécrétion d'un organe matériel serait aussi peu raisonnable que de chercher combien il y a de mètres dans une heure, ou de grammes dans une minute. Tout ami sincère de la Science sent très bien que, dans l'intérêt de la vérité, comme dans l'intérêt des peuples, il importe de ne pas confondre l'ordre moral ou intellectuel avec l'ordre physique, l'intelligence avec la matière, l'homme avec la brute; de ne pas considérer les actions d'un être libre comme nécessaires, comme le résultat d'une aveugle et irrésistible fatalité.

Un autre point, que la Science ne conteste pas assurément, c'est qu'il ne saurait y avoir d'effet sans cause, de lois sans législateur. Remonter des effets aux causes est précisément l'un des grands problèmes dont la solution est quelquefois l'objet d'un calcul inventé par le génie de Pascal, du Calcul des probabilités. Demandez à ce calcul si

l'*Iliade* et l'*Odyssée* sont l'œuvre du hasard ou d'un grand poète; il n'hésitera pas à se prononcer en faveur de la dernière hypothèse. Le Calcul des probabilités, si on le consulte, attribuera toujours l'œuvre à un ouvrier; et même il proclamera cet ouvrier d'autant plus habile, d'autant plus intelligent, que l'œuvre sera plus parfaite. Donc, selon les principes mêmes du Calcul des probabilités, les savants de nos jours sont bien assurés de raisonner juste, lorsque, après avoir découvert quelques-unes de ces lois si belles, si générales, si fécondes, qui régissent le cours des astres et les vibrations des atomes, quelques-unes de ces lois qui suffisent pour maintenir l'harmonie de cet univers et opérer sous nos yeux de si étonnants phénomènes, ils parviennent à la conclusion qu'ont énoncée avant eux les Newton, les Fermat, les Euler, les Cuvier, les Haüy, les Ampère, et tirent, non seulement du spectacle que les mondes offrent à notre admiration, mais encore des conquêtes de la science, et en particulier des découvertes modernes, cette conséquence très légitime, que les merveilles de la nature sont l'œuvre d'une puissance, d'une sagesse, d'une intelligence infinie, d'un être auquel tous les autres doivent l'existence et la vie, d'un être duquel émane, par une transmission plus ou moins directe, plus ou moins immédiate, toute force, toute puissance physique, intellectuelle ou morale.

Ces prémisses étant posées, abordons le problème qu'il s'agissait de résoudre, et cherchons à deviner ce que c'est que la force, particulièrement la force physique, la seule dont s'occupe la Mécanique rationnelle.

D'abord il est évident que la force physique n'est ni un être matériel, ni même un attribut essentiel de la matière.

La force physique n'est point un être matériel. On ne saurait confondre une portion de matière, un point matériel, avec une force qu'on lui applique.

La force physique n'est même pas un attribut essentiel de la matière. Un des principes fondamentaux de la Mécanique rationnelle, c'est précisément que la matière est *inerte* et incapable par elle-même de changer son état de repos ou de mouvement, c'est que, pour changer cet état, pour imprimer à un point matériel une vitesse qu'il n'avait pas, ou pour modifier, soit en grandeur, soit en direction, la vitesse acquise, il faut appliquer une force au point dont il s'agit. Mais on aurait pu laisser le point matériel dans son état primitif et l'abandonner à son *inertie*. En d'autres termes, la force appliquée à ce point aurait pu ne pas l'être; elle ne saurait donc être considérée comme un attribut essentiel de ce même point. Un corps placé près de la surface de la Terre est attiré vers cette surface par la force de la pesanteur; mais cette pesanteur est si peu essentielle au corps qu'elle s'affaiblira et s'éteindra de plus en plus si le corps, s'éloignant de la surface de notre globe, est transporté d'abord à la distance qui nous sépare de la Lune, puis à des distances de plus en plus grandes. Aussi, dans le bel Ouvrage qui a pour titre *Philosophiæ naturalis Principia mathematica* (liber tertius, *Regulæ philosophandi*), Newton a-t-il dit expressément : *Gravitatem corporibus essentialem esse minime affirmo.*

La force physique serait-elle un être spirituel, ou, du moins, un attribut essentiel d'un tel être? Avant de répondre à cette question, il sera convenable d'examiner les faits et de les appeler à notre aide.

Nous rencontrons, dans la nature, des forces physiques qui ne dépendent pas de nous, et que l'on pourrait nommer *permanentes*. d'autres que nous créons en quelque sorte, qui naissent ou s'éteignent à notre gré.

Un corps pesant est posé sur un plan horizontal; il tend à faire descendre ce plan : il exerce contre lui une certaine pression. Cette pression, dont la direction est déterminée et verticale, dont l'intensité, pareillement déterminée, dépend de la nature et du volume des corps, est précisément ce que nous appelons une *force* physique. Mais cette force physique ne dépend pas de nous. La pesanteur des corps à la surface de la Terre, la gravitation universelle, les forces électriques et magnétiques, les actions et réactions moléculaires sont des forces physiques permanentes, qui subsistent sans nous, et même malgré nous, que nous pouvons quelquefois mettre en œuvre, ou opposer les unes aux autres, mais qui sont indépendantes de notre volonté.

Au contraire, les forces physiques, à l'aide desquelles nous imprimons à notre propre corps, à nos pieds, à nos mains, tantôt un mouvement déterminé, tantôt une simple tendance au mouvement, sont des forces qui, loin d'être permanentes comme la pesanteur et les actions moléculaires, naissent à l'instant où nous le voulons, subsistent tant que nous le voulons, et attendent nos ordres pour s'éteindre et disparaître entièrement. Il n'est pas en notre pouvoir d'anéantir la pression verticale que le poids de notre corps exerce contre le sol qui nous porte; mais nous pouvons faire naître à notre gré la pression horizontale qu'exerce notre main contre un obstacle qui nous barre le passage, et que nous chassons devant nous, contre un volet que nous fermons. Cette pression est une force physique dont nous disposons évidemment, et, dans la natation, dans la marche, dans la course, de telles forces s'empressent, pour ainsi dire, d'exécuter les ordres que dicte notre volonté.

Ces forces physiques, si promptes à nous obéir, seraient-elles des êtres spirituels? Adopter cette idée, ce serait vouloir, sans aucune nécessité, sans y être autorisé ni par l'observation, ni par la Science, ni par une saine philosophie, multiplier les êtres à l'infini. D'ailleurs, est-il possible de considérer comme un être véritable ce qui, suivant nos désirs, suivant nos caprices, naît ou s'évanouit, reparaît ou rentre dans le néant?

Il y a plus : si l'être auquel obéit une force physique, ou celui dont elle nous semble émaner, est, non pas l'être souverain et indépendant, le seul être qui existe par lui-même, mais, au contraire, un être dépendant qui n'existe que par la volonté du Créateur, on ne saurait dire que cette force soit un attribut essentiel de cet être. Elle est seulement un don qu'il a reçu, mais qui pourrait cesser de lui appartenir. Nous-mêmes nous sentons que la force physique est à notre disposition dans l'état de santé, mais que nous pouvons la perdre, qu'elle peut nous être enlevée par la maladie. Nous sentons, par conséquent, que cette force n'est pas notre puissance propre, un effet certain de notre nature; et c'est précisément parce que nous ne sommes pas la cause première d'une force physique dont nous disposons à notre gré, que nous ne savons pas nous expliquer comment notre volonté peut la produire. Tout ce que nous pouvons constater, c'est que la force physique nous est prêtée, mais pour un temps seulement, mais dans une certaine mesure, et sous certaines conditions; et ce que nous pouvons affirmer encore, c'est que ces conditions sont très souvent des conditions physiques et matérielles. Les forces physiques dont chaque homme dispose se trouvent renfermées dans certaines limites qui dépendent de son organisation. Aux variations que subira cette organisation dans le cours de la vie correspondront des variations très sensibles dans l'intensité de ces forces physiques. Cette intensité, faible dans l'enfance, croîtra dans l'adolescence et décroîtra dans la vieillesse, après avoir atteint sa valeur maximum dans l'âge mûr et à une époque de la vie qui sera variable avec les climats, avec les tempéraments, ou même avec les individus. Bien plus, que l'organisation éprouve une altération fortuite, qu'elle soit modifiée par un choc violent, ou qu'une congestion se forme au cerveau, et, à l'instant, les forces physiques disparaîtront, ou du moins elles seront considérablement diminuées.

Nous avons parlé des forces physiques qui nous sont étrangères, qui agissent sous nos yeux, mais sans nous et hors de nous; puis de celles dont nous nous servons pour mettre notre propre corps en mouvement, et dont nous disposons à notre gré. Il importe d'ajouter que, outre ces dernières, certaines forces physiques nous sont départies pour notre conservation, pour nos besoins, sans que nous puissions disposer d'elles. Ainsi, par exemple, les forces physiques appliquées à la digestion, à l'assimilation, à la nutrition, sont évidemment des forces qui, étant indépendantes de nous, aussi bien que la pesanteur et les actions moléculaires, ne sont pas mises en œuvre par notre volonté. D'aileurs ces forces peuvent nous être enlevées, tout comme celles dont notre volonté dispose. Par conséquent, elles ne sont pas un attri-

but essentiel de nos organes ou de notre intelligence; elles ne viennent pas de nous.

Que devons-nous conclure de ce qui précède? On ne saurait considérer la force physique, ni comme un être matériel ou spirituel, ni comme un attribut essentiel de la matière ou d'aucune intelligence créée. Le seul être dont elle émane nécessairement est l'être nécessaire. Elle est une expression de sa volonté. Lorsque des corps de même nature, ou de natures diverses, sont placés en présence les uns des autres, lorsque ces corps se meuvent ou restent en repos, certains rapports s'établissent entre eux, certains phénomènes se reproduisent constamment suivant des lois invariables, et l'équilibre se constitue ou le mouvement s'exécute comme si ces lois créaient des causes permanentes de repos ou de mouvement. Les forces physiques sont précisément ces causes fictives auxquelles nous attribuons l'équilibre ou le mouvement des corps, sans avoir jamais à craindre de voir nos prévisions contredites par l'expérience; ces causes secondaires qui existent bien, si l'on veut, mais à la manière des lois, et pas autrement; ces causes qui tirent toute leur puissance, toute leur vertu des lois mêmes dont elles sont l'expression la plus simple, ou plutôt de la volonté du législateur.

Un exemple rendra ces notions générales plus claires et plus faciles à saisir.

Pour expliquer un grand nombre de phénomènes, spécialement la chute des corps graves vers la Terre et les mouvements des corps célestes, il suffit d'admettre avec Newton que deux corps, placés l'un en présence de l'autre, tendent à se rapprocher. D'ailleurs, cette tendance à laquelle les corps obéissent autant qu'ils le peuvent est, pour ainsi dire, un fait constaté par l'expérience. Elle est constatée, dans l'état d'équilibre des corps, par des pressions analogues à celles qu'un corps pesant exerce contre un plan horizontal qui le soutient. Elle est constatée, dans l'état de mouvement, par l'altération de la vitesse. Considérons, pour fixer les idées, la Terre circulant autour du Soleil. Cette planète, parvenue à un point quelconque de son orbite, devrait, en vertu de la vitesse acquise, se mouvoir indéfiniment en ligne droite; mais elle est ramenée à chaque instant vers le Soleil dont elle tend à se rapprocher, et cette tendance modifie sans cesse, en grandeur et en direction, la vitesse acquise, de manière à transformer la droite que la Terre aurait décrite en une ellipse dont le centre du Soleil occupe l'un des foyers. Comme le démontrent les faits et le calcul appuyé sur l'observation, la tendance de deux corps à un rapprochement mutuel est d'autant plus grande que les deux corps sont plus voisins l'un de l'autre, et varie en raison inverse du carré des distances, mais en raison directe des masses. Elle constitue ce qu'on appelle la loi ou la force de la *gravitation universelle;* et il est juste de reconnaître que ces deux noms lui conviennent, puisqu'elle est tout à la fois et l'expression la plus simple, le résumé d'une loi établie par le Créateur, et une puissance que cette loi confère, pour ainsi dire, à deux corps mis en présence l'un de l'autre, ou plutôt à deux points matériels.

Ce que nous avons dit de la force de la gravitation peut se dire également de toute force physique. Une force physique appliquée à un corps, à un être matériel, est l'expression d'une loi établie par le Créateur; c'est, en quelque sorte, une propriété que cette loi confère à l'être matériel; c'est l'obligation qui est imposée à cet être d'obéir constamment et invariablement à la loi dont il s'agit.

On parle quelquefois de la puissance des lois portées par des législateurs humains et de l'influence de ces lois sur la société. Cette influence est incontestable; mais elle s'exerce seulement sur des êtres libres. Ce que nous appelons le pouvoir des lois humaines a évidemment pour base l'acquiescement de notre volonté qui se soumet ou se conforme à celle des législateurs. Mais l'acquiescement de notre volonté n'est plus nécessaire à l'exécution des lois portées par le Créateur pour la conservation du monde physique. A ces lois obéissent sans le vouloir, et souvent sans le savoir, les êtres organisés et les êtres inorganiques, les animaux, les végétaux, les pierres elles-mêmes. Sans doute la matière est inintelligente; mais elle obéit, sans le savoir, à une intelligence souveraine. Sans doute cette obéissance passive est pour nous un mystère; mais un mystère analogue se retrouve dans ce qu'on appelle l'instinct chez les animaux, chez l'homme lui-même. Cet instinct n'est-il pas l'obéissance passive par laquelle ils concourent, même sans le savoir, à l'exécution des lois établies par le souverain législateur?

Il resterait maintenant à dire ce que c'est que la force vitale, ce que c'est que la vie. Mais, pour ne pas fatiguer l'attention de l'Académie, je renverrai l'examen de ces questions à un second Mémoire, et je terminerai celui-ci par quelques réflexions qui paraissent devoir intéresser particulièrement les physiciens et les géomètres.

La force de la pesanteur et les autres forces permanentes, attractives ou répulsives, dont s'occupe la Mécanique rationnelle, sont généralement des forces dont chacune exprime la tendance de deux corps ou plutôt de deux points matériels à se rapprocher ou à s'éloigner l'un de l'autre. Une telle force doit être naturellement supposée proportionnelle à chacune des deux masses que l'on considère, et par conséquent au produit de ces deux masses. Naturellement aussi elle doit être une fonction de la distance. Mais, outre les forces qui se manifestent quand deux points matériels sont placés en présence l'un de l'autre, et que l'on pourrait appeler, pour cette raison, des actions *binaires*, ne devrait-on pas admettre, au moins dans certaines circonstances, des actions *ternaires, quaternaires*, etc., dont chacune dépendrait des positions relatives de trois, de quatre, etc. points placés en présence l'un de l'autre, et serait proportionnelle au produit des masses de ces divers points. Cette supposition paraît appuyée par l'analogie et semble même indiquée par plusieurs phénomènes. On sait que la combinaison de deux corps est souvent favorisée par la présence d'un troisième. Ainsi, par exemple, comme l'a observé M. Dœbereiner, le platine réduit en éponge facilite la combinaison de l'oxygène et de l'hydrogène. De plus, les expériences de M. Mitscherlich, en prouvant que les forces moléculaires sont modifiées par la température, donnent lieu de croire qu'il faut considérer les molécules des corps plutôt comme des systèmes d'atomes ou de points matériels, que comme des masses continues; et, dans la première de ces deux hypothèses, la cristallisation semble indiquer une tendance des atomes à se grouper entre eux de manière à constituer les sommets de certains polyèdres de formes déterminées. On ne voit même *a priori* rien qui empêche d'admettre des actions moléculaires dont les directions et les intensités dépendraient en partie des vitesses de points matériels, ou au moins des directions de ces vitesses. C'est précisément ce qu'a fait Ampère dans sa théorie des phénomènes électrodynamiques, et de l'action mutuelle de deux courants électriques. J'ajouterai ici une remarque qui me semble utile pour fixer la signification précise de ce qu'on appelle un *courant électrique*. Je crois, avec la plupart des physiciens, que, dans un tel courant, ce qui se déplace et se propage avec une très grande vitesse, ce n'est pas le fluide électrique, mais plutôt un mouvement résultant de compositions et décompositions successives de ce fluide, ou peut-être même un mouvement analogue aux vibrations sonores ou lumineuses de l'air ou du fluide éthéré.

Les seules actions binaires dont la loi nous soit bien connue sont celles qui varient en raison inverse du carré de la distance. Si les actions ternaires, quaternaires, etc. étaient de l'ordre des rapports qu'on obtient en divisant l'unité par les cubes, ou les puissances quatrièmes, etc., des distances, ou même d'un ordre plus élevé, elles s'affaibliraient pour des distances considérables, de manière à pouvoir être négligées vis-à-vis des actions binaires, ce qui expliquerait comment il arrive qu'alors la considération des actions binaires suffit à l'explication des phénomènes.

Au reste, je ne propose ici les actions ternaires, quaternaires, etc. que comme une hypothèse à laquelle il pourrait être bon de recourir s'il était prouvé qu'en admettant seulement des actions binaires on ne peut parvenir à se rendre compte de tous les faits observés.

296.

Géométrie. — *Mémoire sur de nouveaux théorèmes de Géométrie et, en particulier, sur le module de rotation d'un système de lignes droites menées par les divers points d'une directrice donnée.*

C. R., T. XXI, p. 273 (30 juillet 1845).

Les résultats obtenus dans ce Mémoire seront développés dans les prochaines séances.

297.

Géométrie analytique. — *Sur divers théorèmes de Géométrie analytique.*

C. R., T. XXI, p. 305 (4 août 1845).

On connaît l'élégant théorème de Géométrie analytique qui fournit le cosinus de l'angle compris entre deux droites dont les positions sont déterminées à l'aide des cosinus des angles que forment ces droites avec trois axes rectilignes et rectangulaires. Suivant ce théorème, si l'on multiplie l'un par l'autre les cosinus des deux angles que les deux droites forment avec un même axe, la somme des trois produits de cette forme, correspondants aux trois axes, sera précisément le cosinus de l'angle compris entre les deux droites. Concevons maintenant que les trois axes donnés, cessant d'être rectangulaires, comprennent entre deux des angles quelconques, et au système de ces trois axes joignons un second système d'axes respectivement perpendiculaires aux plans des trois premiers. Les axes primitifs seront eux-mêmes perpendiculaires aux plans formés par les nouveaux axes, et les deux systèmes d'axes seront ce que nous appellerons deux systèmes d'*axes conjugués*. Nous dirons, en particulier, que l'un de ces axes, pris dans l'un des deux systèmes, a pour *conjugué* celui des axes de l'autre système qui ne le coupe pas à angles droits. Cela posé, le théorème rappelé ci-dessus, et relatif à un système d'axes rectangulaires, se trouve évidemment compris dans un théorème général dont voici l'énoncé :

Théorème. — *Considérons, d'une part, deux droites quelconques, d'autre part, deux systèmes d'axes conjugués. Supposons d'ailleurs que, en attribuant à chaque droite et à chaque axe une direction déterminée, on multiplie l'un par l'autre les cosinus des angles que forme un axe du premier système avec la première droite, et l'axe conjugué du second système avec la seconde droite, puis que l'on divise le produit ainsi obtenu par le cosinus de l'angle que ces deux axes conjugués comprennent entre eux. La somme des trois quotients de cette espèce, correspondants aux trois couples d'axes conjugués, sera précisément le cosinus de l'angle compris entre les deux droites données.*

Pour démontrer immédiatement ce théorème, il suffit de projeter la première droite sur la seconde, en observant que cette droite peut être considérée comme la diagonale d'un parallélépipède dont les arêtes seraient parallèles aux axes du second système.

Il est bon d'observer qu'on peut échanger entre elles les deux droites données sans échanger entre eux les deux systèmes d'axes; d'où il suit que le théorème énoncé fournit deux expressions différentes du cosinus de l'angle renfermé entre les deux droites.

On pourrait aussi, au cosinus de l'angle que forme un axe du second système avec la seconde droite ou avec l'axe conjugué du premier système, substituer le sinus de l'angle que cette droite ou cet axe conjugué forme avec le plan des deux autres axes du second système. Toutefois, en opérant cette substitution, on devrait convenir de regarder l'angle formé par une droite avec un plan tantôt comme positif, tantôt comme négatif, suivant que la direction de cette droite pourrait être représentée par une longueur mesurée à partir du plan donné, d'un certain côté de ce même plan ou du côté opposé. On se trouverait ainsi ramené à une formule qui ne diffère pas au fond de celles qu'ont proposées, pour la transformation des coordonnées

obliques, divers auteurs, et spécialement M. Français. On pourrait d'ailleurs, de ces dernières formules, revenir directement au théorème énoncé. Ainsi ce théorème peut être considéré à la rigueur comme implicitement renfermé dans des formules déjà connues. Observons néanmoins que les auteurs de ces formules les avaient établies sans parler de la convention que nous avons indiquée, et qui nous paraît nécessaire pour dissiper toute incertitude sur le sens des notations adoptées.

J'ajouterai ici une remarque qui, je crois, n'avait pas encore été faite, c'est que, du théorème particulier relatif au cas où les axes sont rectangulaires, on peut déduire, immédiatement et sans figure, la formule que Lagrange a donnée pour base à la Trigonométrie sphérique.

Enfin je joins à cette Note une formule dont je donnerai la démonstration dans un autre article, et qui fait connaître une propriété remarquable de deux courbes quelconques tracées à volonté sur une surface courbe.

Analyse.

§ I. — *Sur quelques théorèmes de Géométrie analytique.*

Les énoncés de plusieurs des théorèmes fondamentaux de la Géométrie analytique se simplifient lorsqu'on a soin de distinguer les *projections absolues* d'un rayon vecteur, sur des axes coordonnés rectangulaires, des *projections algébriques* de ce même rayon vecteur, ainsi que je l'ai fait dans les préliminaires de mes *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*. On peut même, avec avantage, étendre la distinction des projections absolues et des projections algébriques au cas où le rayon vecteur est projeté sur des droites quelconques, les projections pouvant d'ailleurs être ou orthogonales ou obliques. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient r, s deux longueurs mesurées sur deux droites distinctes, et dans des directions déterminées, savoir, la première entre deux points donnés A et B, dans la direction AB; la seconde entre deux autres points C et D, dans la direction CD. Pour projeter la longueur r, et ses deux extrémités A, B, sur la droite CD, il suffira de mener, par les points A et B, deux plans parallèles à un plan fixe donné. Les points a et b, où ces deux plans rencontreraient la droite CD, seront précisément les *projections* des deux points A, B; et si l'on nomme ρ la distance qui sépare le point b, c'est-à-dire la projection du point B, du point a, c'est-à-dire de la projection du point A, cette distance ρ, mesurée dans la direction ab, sera précisément la *projection* orthogonale ou oblique de la longueur r, savoir, la *projection orthogonale*, si le plan fixe donné est perpendiculaire à la droite CD, et la *projection oblique* dans le cas contraire. D'ailleurs les directions des longueurs s, ρ, mesurées sur une même droite, la première dans le sens CD, la seconde dans le sens ab, seront nécessairement, ou une seule et même direction, ou deux directions opposées l'une à l'autre. Cela posé, la *projection absolue* ρ, prise dans le premier cas avec le signe $+$, dans le second cas avec le signe $-$, sera précisément ce que nous appellerons la *projection algébrique* de la longueur r sur la direction de la longueur s.

Concevons maintenant que, en faisant usage de la notation généralement adoptée, on désigne par (r, s) l'angle aigu ou obtus que forment entre elles deux longueurs r, s, mesurées chacune dans une direction déterminée. Alors, en supposant les projections orthogonales, on aura évidemment

$$\rho = r\cos(r, \rho).$$

De plus, la projection algébrique de r, sur la direction de s, sera $+\rho$ ou $-\rho$, suivant que la direction de ρ sera la direction même de s, ou la direction opposée; et, comme on aura, dans le premier cas,

$$\cos(r, \rho) = \cos(r, s),$$

dans le second cas

$$\cos(r, \rho) = -\cos(r, s),$$

il en résulte que la projection algébrique de r sur la direction de s

sera représentée, dans l'un et l'autre cas, par le produit

$$r\cos(r, s). \tag{1}$$

Supposons à présent que les projections, au lieu d'être orthogonales, soient obliques, et, après avoir mené une droite perpendiculaire au plan fixe, nommons t une longueur mesurée sur cette droite dans une direction déterminée. Alors les projections absolues et même les projections algébriques des longueurs r et ρ, sur la direction de t, seront évidemment égales entre elles. On aura donc

$$\rho\cos(\rho, t) = r\cos(r, t)$$

et, par suite,

$$\rho = r\frac{\cos(r, t)}{\cos(\rho, t)}. \tag{2}$$

De plus, pour obtenir la projection algébrique de la longueur r sur la direction de s, il suffira de prendre ρ avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que la direction de ρ sera la direction de s ou la direction opposée; il suffira donc de remplacer, dans le second membre de la formule (2), la quantité $\cos(\rho, t)$ par la quantité $\cos(s, t)$ égale, au signe près, à la première. Donc la projection algébrique de r sur la direction de s sera

$$r\frac{\cos(r, t)}{\cos(s, t)}. \tag{3}$$

Supposons maintenant qu'un point mobile P passe de la position A à la position B, en parcourant, non plus la longueur r, mais les divers côtés u, v, w, ... d'une portion de polygone qui joigne le point A au point B, et attribuons à chacun de ces côtés la direction indiquée par le mouvement du point P. Soit d'ailleurs p la projection du point mobile P sur la droite CD, et nommons toujours a, b les projections respectives des deux points A, B sur la même droite. Tandis que le point mobile P passera de la position A à la position B, en parcourant successivement les diverses longueurs u, v, w, ..., le point mobile p passera de la position a à la position b, en parcourant successivement sur la droite CD les projections des diverses longueurs u, v, w, ..., et l'une quelconque de ces projections, celle de u par exemple, sera parcourue dans le sens indiqué par la direction du rayon vecteur ρ ou dans le sens opposé, suivant que la projection algébrique de la longueur u sur la direction de ρ sera positive ou négative. Il en résulte que la longueur ρ, ou la projection algébrique de la longueur r sur la direction de ρ, sera équivalente à la somme des projections algébriques des longueurs u, v, w, ... sur la même direction. Par suite aussi, puisque la direction de s est toujours, ou la direction même de ρ, ou la direction opposée, si l'on projette, d'une part, la longueur r, d'autre part, les longueurs u, v, w, ... sur la direction de s, on obtiendra une projection algébrique de r équivalente à la somme des projections algébriques de u, v, w, ... Donc, en supposant les projections orthogonales, on trouvera

$$(4)\qquad r\cos(r,s) = u\cos(u,s) + v\cos(v,s) + w\cos(w,s) + \ldots.$$

Ces prémisses étant établies, concevons que les positions des différents points de l'espace soient rapportées à trois axes obliques qui partent d'un même point O. Nommons x, y, z trois longueurs portées sur les trois axes, et mesurées chacune, à partir du point O, dans une direction déterminée. Soient encore

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

trois longueurs mesurées, à partir du point O, sur trois axes respectivement perpendiculaires aux plans

$$\mathrm{yz},\quad \mathrm{zx},\quad \mathrm{xy}.$$

Concevons, de plus, que l'on construise un parallélépipède dont la longueur r soit la diagonale, les trois arêtes u, v, w étant respectivement parallèles aux axes sur lesquels se mesurent les longueurs x, y, z, et attribuons à ces trois arêtes les directions indiquées par le mouvement d'un point qui passe, en parcourant ces mêmes arêtes, de l'extrémité A de la diagonale r à l'extrémité B. Enfin, projetons cette

diagonale et les trois arêtes sur la direction d'une longueur quelconque s. On aura, en vertu de la formule (4),

$$(5)\qquad r\cos(r,s) = u\cos(u,s) + v\cos(v,s) + w\cos(w,s),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\qquad \cos(r,s) = \frac{u}{r}\cos(u,s) + \frac{v}{r}\cos(v,s) + \frac{w}{r}\cos(w,s).$$

D'ailleurs, u étant précisément la projection absolue qu'on obtient pour la longueur r, quand on projette cette longueur sur l'axe de x, à l'aide de plans parallèles au plan fixe des yz, on aura, en vertu de la formule (2),

$$(7)\qquad u = r\frac{\cos(r,\mathrm{X})}{\cos(u,\mathrm{X})},$$

par conséquent,

$$(8)\qquad \frac{u}{r} = \frac{\cos(r,\mathrm{X})}{\cos(u,\mathrm{X})},$$

et cette dernière formule continuera évidemment de subsister quand on y remplacera u par v, et X par Y, ou u par w, et X par Z. Donc l'équation (6) donnera

$$(9)\quad \cos(r,s) = \frac{\cos(r,\mathrm{X})\cos(u,s)}{\cos(u,\mathrm{X})} + \frac{\cos(r,\mathrm{Y})\cos(v,s)}{\cos(v,\mathrm{Y})} + \frac{\cos(r,\mathrm{Z})\cos(w,s)}{\cos(w,\mathrm{Z})}.$$

D'autre part, il est clair qu'on n'altérera pas le second membre de la formule (9) si l'on y remplace, séparément ou simultanément, u par x, v par y, w par z. En effet, la direction de u étant ou la direction de x ou la direction opposée, on aura, dans le premier cas,

$$\cos(u,s) = \cos(\mathrm{x},s),\qquad \cos(u,\mathrm{X}) = \cos(\mathrm{x},\mathrm{X}),$$

dans le second cas,

$$\cos(u,s) = -\cos(\mathrm{x},s),\qquad \cos(u,\mathrm{X}) = -\cos(\mathrm{x},\mathrm{X}),$$

et dans les deux cas,

$$\frac{\cos(u,s)}{\cos(u,\mathrm{X})} = \frac{\cos(\mathrm{x},s)}{\cos(\mathrm{x},\mathrm{X})}.$$

Donc la formule (9) pourra être réduite à la suivante :

$$(10)\quad \cos(r,s)=\frac{\cos(r,\mathrm{X})\cos(s,\mathrm{x})}{\cos(\mathrm{x},\mathrm{X})}+\frac{\cos(r,\mathrm{Y})\cos(s,\mathrm{y})}{\cos(\mathrm{y},\mathrm{Y})}+\frac{\cos(r,\mathrm{Z})\cos(s,\mathrm{z})}{\cos(\mathrm{z},\mathrm{Z})}.$$

Ajoutons que les axes sur lesquels se mesurent les longueurs

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

étant, par hypothèse, perpendiculaires aux plans

$$\mathrm{yz},\quad \mathrm{zx},\quad \mathrm{xy},$$

les axes sur lesquels se mesurent les longueurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z}$$

seront eux-mêmes perpendiculaires aux plans

$$\mathrm{YZ},\quad \mathrm{ZX},\quad \mathrm{XY}.$$

Donc ces deux systèmes d'axes, que nous nommerons *systèmes d'axes conjugués* (l'axe sur lequel se mesure X étant le *conjugué* de l'axe sur lequel se mesure x, etc.), pourront être échangés entre eux dans la formule (10), et l'on aura encore

$$(11)\quad \cos(r,s)=\frac{\cos(r,\mathrm{x})\cos(s,\mathrm{X})}{\cos(\mathrm{x},\mathrm{X})}+\frac{\cos(r,\mathrm{y})\cos(s,\mathrm{Y})}{\cos(\mathrm{y},\mathrm{Y})}+\frac{\cos(r,\mathrm{z})\cos(s,\mathrm{Z})}{\cos(\mathrm{z},\mathrm{Z})}.$$

Chacune des formules (10), (11) est une expression analytique du théorème fondamental énoncé dans le préambule du présent article.

Si, en faisant coïncider le point A avec le point O, et les demi-axes des coordonnées positives avec les directions des longueurs

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

on nomme

$$x,\quad y,\quad z$$

les coordonnées rectilignes du point A, rapportées à ces demi-axes, alors x sera précisément la projection algébrique du rayon vecteur r sur la direction de x, la projection étant effectuée à l'aide de plans parallèles au plan des yz, et perpendiculairement à X. Donc alors on

obtiendra x en remplaçant, dans l'expression (3), s par x, et t par X; en sorte qu'on aura

$$(12)\quad \begin{cases} x=r\dfrac{\cos(r,\mathrm{X})}{\cos(\mathrm{x},\mathrm{X})}. \\ y=r\dfrac{\cos(r,\mathrm{Y})}{\cos(\mathrm{y},\mathrm{Y})}, \\ z=r\dfrac{\cos(r,\mathrm{Z})}{\cos(\mathrm{z},\mathrm{Z})}. \end{cases}$$

On trouvera de même

Alors aussi on pourra évidemment, dans la formule (5), remplacer les quantités u, v, w par les coordonnées x, y, z, qui seront respectivement égales, aux signes près, à ces mêmes quantités, pourvu que l'on remplace en même temps les trois angles

$$(u,s),\quad (v,s),\quad (w,s)$$

par les angles

$$(\mathrm{x},s),\quad (\mathrm{y},s),\quad (\mathrm{z},s),$$

respectivement égaux aux trois premiers ou à leurs suppléments. On aura donc encore

$$(13)\quad r\cos(r,s)=x\cos(\mathrm{x},s)+y\cos(\mathrm{y},s)+z\cos(\mathrm{z},s).$$

On peut immédiatement déduire des formules (12) et (13) celles qui servent à la transformation des coordonnées obliques. En effet, soient

$$x,\quad y,\quad z$$

de nouvelles coordonnées du point B, relatives à de nouveaux axes rectilignes qui continuent de passer par le point O; et supposons que, pour le nouveau système d'axes, les longueurs, précédemment représentées par

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z},$$

deviennent

$$\mathrm{x}_{,},\ \mathrm{y}_{,},\ \mathrm{z}_{,},\ \mathrm{X}_{,},\ \mathrm{Y}_{,},\ \mathrm{Z}_{,}.$$

Alors, en vertu des formules (12), on aura, par exemple,

$$(14)\quad x_{,}=\frac{r\cos(r,\mathrm{X}_{,})}{\cos(\mathrm{x}_{,},\mathrm{X}_{,})};$$

et, d'ailleurs, la formule (13) donnera

$$(15)\qquad r\cos(r, X_,) = x\cos(\mathrm{x}, X_,) + y\cos(\mathrm{y}, X_,) + z\cos(\mathrm{z}, X_,).$$

On trouvera donc

$$(16)\qquad x_, = \frac{x\cos(\mathrm{x}, X_,) + y\cos(\mathrm{y}, X_,) + z\cos(\mathrm{z}, X_,)}{\cos(\mathrm{x}, X_,)}.$$

Quant aux valeurs de $y_,$, $z_,$, on les obtiendra en remplaçant $X_,$ par $Y_,$ ou par $Z_,$ dans les deux termes de la fraction qui représente ici la valeur de $x_,$, et, de plus, x par y ou par z dans le dénominateur.

Si les axes coordonnés deviennent rectangulaires, alors les axes sur lesquels se mesurent les longueurs x, y, z se confondront avec les axes sur lesquels se mesurent les longueurs X, Y, Z, et, par suite, les formules (10), (12), (16) donneront simplement, comme on devait s'y attendre,

$$(17)\qquad \cos(r, s) = \cos(r, \mathrm{x})\cos(s, \mathrm{x}) + \cos(r, \mathrm{y})\cos(s, \mathrm{y}) + \cos(r, \mathrm{z})\cos(s, \mathrm{z}),$$

$$(18)\qquad x = r\cos(r, \mathrm{x}),\qquad y = r\cos(r, \mathrm{y}),\qquad z = r\cos(r, \mathrm{z}),$$

$$(19)\qquad x_, = x\cos(\mathrm{x}, \mathrm{x}_,) + y\cos(\mathrm{y}, \mathrm{x}_,) + z\cos(\mathrm{z}, \mathrm{x}_,).$$

§ II. — *Sur la formule que Lagrange a donnée pour base à la Trigonométrie sphérique.*

Considérons un angle solide trièdre, dont les côtés soient prolongés, à partir du sommet O, dans des directions déterminées OA, OB, OC. Nommons r, s, t trois longueurs mesurées à partir du point O dans ces mêmes directions, et représentons par

$$a,\quad b,\quad c$$

les angles plans

$$(s, t),\quad (t, r),\quad (r, s).$$

Enfin soient

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

les angles dièdres opposés à ces angles plans. On pourra, comme

Lagrange l'a fait voir, déduire toute la Trigonométrie sphérique de la seule formule

$$(1)\qquad \cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

J'ajoute que cette formule est comprise, comme cas particulier, dans celle qui sert à évaluer l'angle de deux droites dont les positions sont rapportées à un système d'axes rectangulaires, c'est-à-dire que la formule (1) est une conséquence immédiate de la formule (17) du § I. C'est ce que je vais démontrer en peu de mots.

Rapportons la position d'un point quelconque à trois axes rectangulaires menés par le point O, et prolongés chacun dans une direction donnée. Supposons d'ailleurs que de ces trois axes rectangulaires le premier soit précisément celui sur lequel se mesure la longueur r, le deuxième étant situé dans le plan rs, et dirigé par rapport à r du même côté que la longueur s. Enfin, supposons le troisième axe dirigé par rapport au plan rs du même côté que la longueur t. Si, pour fixer les idées, on nomme $s_,$, $t_,$ deux longueurs mesurées sur le deuxième et sur le troisième axe dans les directions de ces mêmes axes, alors la formule (17) du § I, appliquée à la détermination de l'angle a compris entre les directions des longueurs s et t, donnera

$$(2)\qquad \cos(s, t) = \cos(s, r)\cos(t, r) + \cos(s, s_,)\cos(t, s_,) + \cos(s, t_,)\cos(t, t_,).$$

D'ailleurs, $t_,$ étant perpendiculaire au plan rs, et par conséquent à s, on aura

$$(3)\qquad \cos(s, t_,) = 0.$$

De plus, $s_,$ étant perpendiculaire à r, et dirigé par rapport à r du même côté que s, on aura

$$(4)\qquad \cos(s, s_,) = \sin(s, r).$$

Enfin, pour obtenir la projection algébrique de t sur la direction de $s_,$, ou le produit $t\cos(t, s_,)$, il suffira évidemment de projeter d'abord t sur le plan $s_,t_,$ perpendiculaire à r, puis la projection absolue τ ainsi obtenue et déterminée par l'équation

$$\tau = t \sin(t, r)$$

sur la direction de $s_{,}$. Donc la projection algébrique de t sur $s_{,}$ sera

$$\tau \sin(\tau, s_{,}) = t \sin(t, r) \cos(\tau, s_{,}),$$

en sorte qu'on aura

$$t \sin(t, s_{,}) = t \sin(t, r) \cos(\tau, s_{,})$$

et, par suite,

$$\cos(t, s_{,}) = \sin(t, r) \cos(\tau, s_{,}).$$

Mais l'angle $(\tau, s_{,})$, compris entre les longueurs τ et $s_{,}$, mesurées perpendiculairement à r, dans les deux plans rt, rs, et dirigées, par rapport à r, la première du même côté que la longueur t, la seconde du même côté que la longueur s, sera précisément l'angle dièdre α, compris entre les deux plans rt, rs. On aura donc encore

$$\cos(t, s_{,}) = \sin(t, r) \cos\alpha. \tag{5}$$

Si maintenant on substitue dans l'équation (2) les valeurs de

$$\cos(s, t_{,}), \quad \cos(s, s_{,}), \quad \cos(t, s_{,}),$$

fournies par les équations (3), (4), (5), on obtiendra la formule

$$\cos(s, t) = \cos(s, r)\cos(t, r) + \sin(s, r)\sin(t, r)\cos\alpha, \tag{6}$$

c'est-à-dire l'équation (1).

§ III. — *Sur une propriété remarquable de deux systèmes de lignes tracées sur une surface courbe.*

Supposons que la position d'un point mobile P, assujetti à rester sur une certaine surface courbe, soit déterminée à l'aide de deux coordonnées quelconques ou paramètres variables s, t. On pourra tracer sur ces surfaces : 1° un système de courbes dont chacune corresponde à une valeur constante de t; 2° un système de courbes dont

chacune corresponde à une valeur constante de s. Cela posé, nommons

ς l'arc d'une courbe appartenant au premier système, c'est-à-dire d'une courbe sur laquelle s seul varie;

τ l'arc d'une courbe appartenant au second système, c'est-à-dire d'une courbe sur laquelle t seul varie;

δ l'angle formé en un point P de la surface par les arcs ς, τ de deux courbes qui appartiennent, l'une au premier système, l'autre au second;

ρ_s le rayon de courbure de l'arc ς, mesuré à partir du point P;

ρ_t le rayon de courbure de l'arc τ, mesuré à partir du point P;

$\rho_{,}$, $\rho_{,,}$ les rayons de courbure principaux de la surface au même point.

Enfin nommons, pour abréger, θ_s, θ_t les angles que forment, au point P, le rayon vecteur ρ_s avec l'arc τ, et le rayon vecteur ρ_t avec l'arc s; puis désignons par $(\rho_{,}, \rho_{,,})$ l'angle qui se trouve compris entre les rayons de courbure principaux $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$, et qui se réduit toujours à o ou à π. On aura généralement

$$\begin{aligned}
&\frac{D_s D_t \cos\delta}{D_s\varsigma\, D_t\tau} - \frac{D_t \dfrac{\cos\theta_s}{\rho_s}}{D_t\tau} - \frac{D_s \dfrac{\cos\theta_t}{\rho_t}}{D_s\varsigma} + \frac{\cos(\rho_{,}, \rho_{,,})}{\rho_{,}\rho_{,,}} \sin^2\delta \\
&\quad + \frac{1}{\sin^2\delta} \left\{ \begin{aligned} &\frac{D_s\cos\delta}{D_s\varsigma}\frac{D_t\cos\delta}{D_t\tau}\cos\delta + \left(\frac{\cos\theta_s}{\rho_s}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta_t}{\rho_t}\right)^2 + 2\frac{\cos\theta_s}{\rho_s}\frac{\cos\theta_t}{\rho_t}\cos\delta \\ &- \left(\frac{\cos\theta_s}{\rho_s} + 2\frac{\cos\theta_t}{\rho_t}\cos\delta\right)\frac{D_s\cos\delta}{D_s\varsigma} - \left(\frac{\cos\theta_t}{\rho_t} + 2\frac{\cos\theta_s}{\rho_s}\cos\delta\right)\frac{D_t\cos\delta}{D_t\tau} \end{aligned} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Dans un prochain article, j'établirai cette formule remarquable et d'autres du même genre, puis je montrerai diverses conséquences importantes de ces deux formules qui comprennent, comme cas particuliers, des équations déjà connues.

298.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur divers théorèmes d'Analyse et de Calcul intégral.*

C. R., T. XXI, p. 407 (18 août 1845).

Les résultats auxquels je suis parvenu dans ce Mémoire devant être publiés dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, je me bornerai à indiquer ici, en peu de mots, quelques-uns d'entre eux.

§ I. — *Théorèmes divers d'Analyse.*

Soient

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & h_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & h_n \end{matrix}$$

des quantités représentées par n lettres diverses

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h,$$

auxquelles on applique successivement les n indices

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n,$$

en sorte que le nombre total de ces quantités soit n^2.

Soient, de plus,

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

n autres quantités, et

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

n fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$, déterminées par n équations de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots = u, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots = v, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots = w, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Enfin, supposons que les valeurs des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

et d'une nouvelle variable s soient déterminées par la formule

$$(2) \qquad \frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \ldots = s,$$

jointe aux équations (1). En vertu de cette formule, s vérifiera généralement une certaine équation de condition

$$(3) \qquad F(s) = 0,$$

dont le degré sera n, et dont le premier membre sera ce que devient la fonction alternée

$$(4) \qquad S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n)$$

quand on y suppose chacune des n quantités

$$a_1, \quad b_2, \quad c_3, \quad \ldots, \quad h_n$$

diminuée de la variable s, c'est-à-dire quand on y remplace a_1 par $a_1 - s$, puis b_2 par $b_2 - s$, ..., puis, enfin, h_n par $h_n - s$. Il en résulte que l'expression (4) sera précisément égale au produit des n racines de l'équation (3).

Il est bon d'observer que, pour obtenir l'équation (3), il suffit généralement d'éliminer $x, y, z, \ldots$ de la formule (2), en tenant compte des équations (1). A la vérité, dans certains cas particuliers, l'élimination, effectuée d'une certaine manière, abaisserait le degré de l'équation (3) au-dessous du nombre n. Mais on retrouverait alors l'équation complète du degré n, en commençant par éliminer $x, y, z, \ldots$ des équations

$$(5) \qquad \frac{u}{x} = s, \qquad \frac{v}{y} = s_{\prime}, \qquad \frac{w}{z} = s_{\prime\prime}, \qquad \ldots,$$

substituées à la formule (2), et en posant ensuite dans l'équation résultante $s_{\prime} = s$, $s_{\prime\prime} = s$, ..., après avoir réduit le premier membre de cette équation à une fonction linéaire de chacune des quantités $s, s_{\prime}, s_{\prime\prime}, \ldots$, en faisant disparaître, au besoin, les dénominateurs.

Concevons maintenant que, à la place des n variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,$$

on considère n^2 quantités nouvelles

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1, & \ldots, \\ x_2, & y_2, & z_2, & \ldots, \\ x_3, & y_3, & z_3, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

qui se trouvent représentées à l'aide des indices

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

successivement appliqués à ces variables; et désignons encore par

$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ \ldots,$$

ou par

$$u_2,\ v_2,\ w_2,\ \ldots,$$

ou par

$$u_3,\ v_3,\ w_3,\ \ldots,$$
$$\ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots$$

les valeurs qu'on obtiendra pour

$$u,\ v,\ w,\ \ldots,$$

en appliquant aux lettres

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

l'indice 1, ou l'indice 2, ou l'indice 3, ... Enfin, supposons que, n variables nouvelles étant représentées par

$$\alpha,\ 6,\ \gamma,\ \ldots,$$

on assujettisse ces dernières variables et la variable s à vérifier, non plus la formule (2), mais la suivante

$$(6) \qquad \frac{u_1\alpha + u_2 6 + u_3\gamma + \ldots}{\alpha} = \frac{v_1\alpha + v_2 6 + v_3\gamma + \ldots}{6} = \frac{w_1\alpha + w_2 6 + w_3\gamma + \ldots}{\gamma} = \ldots = s.$$

L'équation

$$(7) \qquad s = 0,$$

produite par l'élimination de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, aura pour premier membre s ce que devient la fonction alternée

$$(8) \qquad S(\pm u_1 v_2 w_3 \ldots)$$

quand on y suppose chacune des n quantités

$$u_1,\ v_2,\ w_3,\ \ldots$$

diminuée de la variable s; et le produit des n racines de cette équation sera précisément la fonction (8).

Mais, d'autre part, si l'on pose, pour abréger,

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha x_1 + 6 x_2 + \gamma x_3 + \ldots = \mathfrak{X}, \\ \alpha y_1 + 6 y_2 + \gamma y_3 + \ldots = \mathfrak{Y}, \\ \alpha z_1 + 6 z_2 + \gamma z_3 + \ldots = \mathfrak{Z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

la formule (6) deviendra

$$(10) \qquad \frac{a_1\mathfrak{X} + b_1\mathfrak{Y} + c_1\mathfrak{Z} + \ldots}{\alpha} = \frac{a_2\mathfrak{X} + b_2\mathfrak{Y} + c_2\mathfrak{Z} + \ldots}{6} = \frac{a_3\mathfrak{X} + b_3\mathfrak{Y} + c_2\mathfrak{Z} + \ldots}{\gamma} = \ldots = s.$$

Posons maintenant

$$(11) \qquad \mathfrak{D} = S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n),$$

et nommons

$$\begin{matrix} A_1, & A_2, & A_3, & \ldots, & A_n, \\ B_1, & B_2, & B_3, & \ldots, & B_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ H_1, & H_2, & H_3, & \ldots, & H_n \end{matrix}$$

les coefficients respectifs des quantités

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots, & b_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ h_1, & h_2, & h_3, & \ldots, & h_n, \end{matrix}$$

dans le second membre de la formule (12). On aura dès lors, identiquement,

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n = \mathfrak{D}, & \ldots, & H_1 a_1 + H_2 a_2 + \ldots + H_n a_n = 0, \\ A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots + A_n b_n = 0, & \ldots, & H_1 b_1 + H_2 b_2 + \ldots + H_n b_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n = 0, & \ldots, & H_1 h_1 + H_2 h_2 + \ldots + H_n h_n = \mathfrak{D}, \end{array}\right.$$

et par suite on tirera de la formule (10)

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}\mathcal{X} = s(A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma + \ldots), \\ \mathfrak{D}\mathcal{Y} = s(B_1\alpha + B_2\beta + B_3\gamma + \ldots), \\ \mathfrak{D}\mathcal{Z} = s(C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, si l'on élimine α, β, γ, ... de ces dernières formules, jointes aux équations (9), on trouvera

$$(14)\quad \mathrm{S}[\pm(\mathfrak{D}x_1 - sA_1)(\mathfrak{D}y_2 - sB_2)(\mathfrak{D}z_3 - sC_3)\ldots] = 0.$$

L'équation (14) devant se confondre avec l'équation (7), les coefficients des puissances semblables de s, dans ces deux équations, devront être proportionnels entre eux. On obtiendra ainsi diverses formules dignes de remarque. Si, en particulier, on compare entre eux les coefficients des puissances extrêmes, on trouvera

$$(15)\quad \mathrm{S}(\pm u_1 v_2 w_3 \ldots) = \mathcal{K}\,\mathrm{S}(\pm x_1 y_2 z_3 \ldots),$$

la valeur de $\mathcal{K}$ étant

$$(16)\quad \mathcal{K} = \frac{\mathfrak{D}^n}{s(\pm A_1 B_2 C_3 \ldots)}.$$

D'ailleurs comme, en supposant les quantités

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\quad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$$

toutes réduites à zéro à l'exception de

$$x_1,\ y_2,\ z_3,\ \ldots,$$

et prenant d'ailleurs

$$x_1 = y_2 = z_3 = \ldots = 1,$$

on réduira le système des quantités

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\quad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$$

au système des quantités

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\quad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\quad c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,$$

la formule (15) donnera encore

$$(17)\quad \mathcal{K} = s(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots) = \mathfrak{D}.$$

Donc on tirera des formules (15) et (16)

$$(18)\quad \mathrm{S}(\pm u_1 v_2 w_3 \ldots) = s(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots)\, s(\pm x_1 y_2 z_3 \ldots)$$

et

$$(19)\quad \mathrm{S}(\pm A_1 B_2 C_3 \ldots) = \mathfrak{D}^{n-1}.$$

Les équations (18), (19) étaient déjà connues, et font partie de celles que j'ai données, il y a longtemps, dans le *Journal de l'École Polytechnique*. Mais la méthode que nous venons de suivre pour y parvenir, et à l'aide de laquelle on peut aussi établir directement d'autres formules du même genre, nous a paru ne pas être sans intérêt.

§ II. — *Théorèmes de Calcul intégral.*

Considérons une intégrale multiple de la forme

$$(1)\quad \iiint \ldots \mathrm{k}\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

le nombre des variables x, y, z, ... étant égal à n, et supposons que l'on substitue aux variables x, y, z, ... d'autres variables u, v, w, ..., liées aux premières par n équations données. Alors, en adoptant la méthode suivie par Lagrange, pour le cas de trois variables, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* de 1773, on trouvera

$$(2)\quad \iiint \ldots \mathrm{k}\, dx\, dy\, dz \ldots = \iiint \ldots \mathrm{k}\Lambda\, du\, dv\, dw \ldots,$$

A étant la valeur numérique de la fonction différentielle alternée

$$S(\pm D_u x D_v y D_w z \ldots).$$

D'ailleurs, en vertu des principes établis dans le § I, cette valeur numérique sera précisément le produit des n racines de l'équation

$$(3) \qquad s = 0,$$

qu'on obtient en éliminant les différentielles

$$du, \quad dv, \quad dw, \quad \ldots$$

de la formule

$$(4) \qquad \frac{dx}{du} = \frac{dy}{dv} = \frac{dz}{dw} = \ldots = s \quad (^1),$$

jointe aux équations qui expriment dx, dy, dz, ... en fonctions linéaires de du, dv, dw, ... De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Étant donnée une intégrale multiple relative à n variables* $x, y, z, \ldots$, *si l'on veut à ces variables en substituer d'autres*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

liées aux premières, directement ou indirectement, par des équations données, et trouver le coefficient par lequel on doit alors multiplier la fonction sous le signe $\int$, *il suffira de former l'équation en s, et du degré n, à laquelle on parvient quand on élimine toutes les différentielles de la formule* (4), *puis de prendre, pour le coefficient cherché, le produit des n racines de cette équation, ou plutôt la valeur numérique de ce produit.*

Cette proposition fournit une règle d'autant plus commode dans la pratique qu'elle s'applique au cas même où les variables $x, y, z, \ldots$

(1) On ne doit pas confondre $\frac{dx}{du}$, ou le rapport de la différentielle totale de x à la différentielle du u, avec la dérivée

$$D_u x = \frac{d_u x}{du},$$

qui est le rapport de la différentielle partielle $d_u x$ à du.

seraient des fonctions implicites des variables nouvelles $u, v, w, \ldots$, les unes étant liées aux autres par des équations quelconques, qui pourraient même renfermer des variables auxiliaires. Il suffira, dans tous les cas, d'éliminer toutes les différentielles. D'ailleurs, si l'élimination effectuée d'une certaine manière abaissait le degré n de l'équation (3), il suffirait, pour faire disparaître cet inconvénient, de recourir à l'artifice de calcul indiqué dans le § I.

Il importe d'observer que, dans le cas où les racines de l'équation (3) sont toutes réelles, le théorème énoncé peut être démontré directement avec la plus grande facilité, et presque sans calcul.

Remarquons encore qu'à l'équation (3) on pourrait sans inconvénient substituer la formule

$$(5) \qquad \pm\frac{dx}{du} = \pm\frac{dy}{dv} = \pm\frac{dz}{dw} = \ldots = s,$$

en fixant arbitrairement le signe qui précède chaque rapport.

Appliquons en particulier le théorème énoncé au cas où il s'agit de remplacer les n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

par d'autres variables

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

liées aux premières par des équations de la forme

$$(6) \qquad x = ru, \qquad y = rv, \qquad z = rw, \qquad \ldots,$$

la quantité u étant elle-même une fonction de $u, v, w, \ldots$, déterminée par l'équation

$$(7) \qquad f(u, v, w, \ldots) = 1.$$

Alors, en posant, pour abréger,

$$(8) \qquad \Theta = f(u, v, w, \ldots),$$

on trouvera

$$(9) \qquad \pm A = r^{n-1} \frac{u D_u\Theta + v D_v\Theta + w D_w\Theta + \ldots}{D_u\Theta}.$$

Si Θ se réduit à une fonction de $u, v, w, \ldots$ homogène et du premier degré, on aura simplement

$$\pm \Lambda = r^{n-1}\frac{\Theta}{D_r\Theta}. \tag{10}$$

La transformation que nous venons d'indiquer est surtout utile dans le cas où il s'agit de transformer une intégrale

$$\int\int\int \ldots \mathrm{k}\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

étendue à toutes les valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui vérifient la condition

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots) \leqq \theta, \tag{11}$$

θ désignant une constante quelconque. Alors, en effet, dans l'intégrale transformée, l'intégration relative à la variable r peut être supposée effectuée entre les limites constantes

$$r = 0, \qquad r = \theta. \tag{12}$$

Lorsque la fonction $\mathrm{f}(u, v, w, \ldots)$ se réduit à la somme

$$u^2 + v^2 + w^2 + \ldots,$$

on peut à la transformation précédente faire succéder la transformation connue qui permet de remplacer, dans le cas de deux ou de trois variables, des coordonnées rectangulaires par des coordonnées polaires. Alors aussi, en supposant : 1° que k dépende de deux fonctions de $x, y, z, \ldots$, entières et homogènes, l'une du premier, l'autre du second degré; 2° que l'intégrale (1) s'étende à toutes les valeurs réelles, positives ou négatives, de $x, y, z, \ldots$, on pourra réduire cette intégrale à une intégrale double, en suivant la marche que j'ai tracée, pour le cas de trois variables, dans la 49e livraison des *Exercices de Mathématiques* [1]. Il y a plus : l'intégrale (1), dans l'hypothèse admise, pourra être réduite à une intégrale simple, si k est le produit de deux facteurs dont l'un dépende uniquement du rapport

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IX, p. 373 et suiv.

qui existe entre la première fonction homogène et la racine carrée de la seconde, l'autre facteur étant une exponentielle dont l'exposant soit proportionnel à cette racine carrée.

299.

GÉOMÉTRIE. — *Rapport sur un Mémoire de* M. OSSIAN BONNET, *concernant quelques propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces.*

C. R., T. XXI, p. 564 (8 septembre 1845).

L'Académie nous a chargés, MM. Poncelet, Lamé et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire qui lui a été présenté par M. Ossian Bonnet et qui se rapporte à des propriétés générales des surfaces courbes et des lignes tracées sur ces surfaces. Dans ce Mémoire, l'auteur ne se borne pas à donner des démonstrations nouvelles, et généralement très simples, de diverses propositions et formules relatives à la théorie des surfaces courbes, et en particulier des propositions que M. Gauss a établies dans le beau Mémoire intitulé : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Mais les méthodes auxquelles M. Bonnet a eu recours, en s'appuyant principalement sur des considérations géométriques, jointes à l'emploi des infiniment petits, l'ont conduit encore à des propositions et à des formules qui n'étaient pas connues.

Nous avons vérifié une grande partie des formules nouvelles obtenues par M. Bonnet, et nous en avons constaté l'exactitude. Nous avons surtout remarqué celles qui sont relatives à deux systèmes de lignes orthogonales, tracées sur une surface courbe. Lorsque ces lignes se réduisent aux lignes de courbure, les formules établies par M. Bonnet se confondent en partie avec celles qui ont été données par divers auteurs, spécialement par M. Lamé et par M. Bertrand. Mais, lorsque la condition énoncée cesse d'être remplie, alors, pour retrouver des formules qui offrent quelque analogie avec celles qui étaient déjà connues, il convient d'introduire dans le calcul, ainsi que l'a fait M. Bonnet, un nouvel élément, savoir, l'angle que forme le plan osculateur de chaque courbe avec le plan tangent à la surface, ou, ce qui revient au même, l'angle que forme, en un point donné de la surface, le rayon de courbure d'une courbe appartenant à l'un des systèmes donnés avec la tangente de la courbe qui appartient à l'autre système. Au reste, on peut s'assurer, comme l'a fait le rapporteur, que les formules ainsi établies par M. Bonnet sont comprises elles-mêmes, comme cas particuliers, dans d'autres formules plus générales, relatives à deux systèmes quelconques de lignes tracées sur une surface courbe, et formant entre elles, en chaque point, un certain angle qui peut être à volonté ou aigu, ou obtus, ou même variable suivant une loi quelconque d'un point à un autre.

Parmi les propositions déjà connues que M. Bonnet a retrouvées et démontrées fort simplement à l'aide de ses méthodes, on doit remarquer le beau théorème de M. Gauss, relatif à la transformation des surfaces. Suivant ce théorème, pour qu'une surface puisse s'appliquer sur une autre sans déchirure ni duplicature, il est nécessaire que les points de ces surfaces se correspondent deux à deux, de telle sorte que la courbure de la première surface, c'est-à-dire la moyenne géométrique entre ses deux courbures principales, soit, en un point quelconque, équivalente à la courbure de la seconde surface dans le point correspondant. En démontrant ce théorème et la proposition réciproque, M. Bonnet a donné aussi le caractère analytique qui distingue deux lignes correspondantes tracées sur les deux surfaces courbes. Nous ferons d'ailleurs, au sujet du théorème dont il s'agit, une observation qui ne pourra manquer d'intéresser l'Académie, car elle a pour objet une remarque inédite de Lagrange. S'il est souvent possible de transformer, comme on vient de le dire, une surface donnée sans déchirure ni duplicature, on peut affirmer que le problème deviendra insoluble, toutes les fois que la surface, étant convexe et fermée, devra rester telle après la transformation. Cette dernière proposition

est une conséquence immédiate de la démonstration que l'un de nous a donnée du théorème d'Euclide, dans un Mémoire dont la date remonte à l'année 1812. Lagrange, en accueillant ce Mémoire avec bienveillance, voulut bien indiquer dès lors à l'auteur la conséquence que nous venons de rappeler.

On doit remarquer encore, dans le Mémoire de M. Bonnet, la détermination générale de ce que M. Gauss avait nommé la *valeur sphérique* d'une aire tracée sur une surface courbe. M. Bonnet a donné, à ce sujet, une formule qui s'applique au cas où le contour dans lequel l'aire se trouve comprise est une ligne quelconque, et non pas seulement, comme la formule de M. Gauss, au cas où le contour se compose de lignes dont le plan osculateur est en chaque point normal à la surface donnée.

En résumé, les Commissaires pensent que le Mémoire de M. Bonnet est digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

300.

Analyse mathématique. — *Sur le nombre des valeurs égales ou inégales que peut acquérir une fonction de n variables indépendantes, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque.*

C. R., T. XXI, p. 593 (15 septembre 1845).

Je m'étais déjà occupé, il y a plus de trente années [1], de la théorie des permutations, particulièrement du nombre des valeurs que les fonctions peuvent acquérir; et dernièrement, comme je l'expliquerai plus en détail dans une prochaine séance, M. Bertrand a joint quelques nouveaux théorèmes à ceux qu'on avait précédemment établis, à ceux que j'avais moi-même obtenus. Mais à la proposition de Lagrange,

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. I.
Voir le *Journal de l'École Polytechnique*, XVII^e Cahier, p. 1.

suivant laquelle le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est toujours un diviseur du produit $1.2.3\ldots n$, on avait jusqu'ici ajouté presque uniquement des théorèmes concernant l'impossibilité d'obtenir des fonctions qui offrent un certain nombre de valeurs. Dans un nouveau travail, j'ai attaqué directement les deux questions qui consistent à savoir : 1° quels sont les nombres de valeurs que peut acquérir une fonction de n lettres; 2° comment on peut effectivement former des fonctions pour lesquelles les nombres de valeurs distinctes soient les nombres trouvés. Mes recherches sur cet objet m'ont d'ailleurs conduit à des formules nouvelles relatives à la théorie des suites, et qui ne sont pas sans intérêt. Je me propose de publier, dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (1), les résultats de mon travail avec tous les développements qui me paraîtront utiles; je demanderai seulement à l'Académie la permission d'en insérer des extraits dans le *Compte rendu*, en indiquant quelques-unes des propositions les plus remarquables auxquelles je suis parvenu.

Analyse.

§ I. — *Considérations générales.*

Soit Ω une fonction de n variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots.$$

Ces variables pourront être censées occuper, dans la fonction, des places déterminées; et, si on les déplace, en substituant les unes aux autres, la fonction Ω prendra successivement diverses valeurs

$$\Omega',\quad \Omega'',\quad \ldots,$$

dont l'une quelconque Ω' pourra être ou égale à Ω, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables $x, y, z, \ldots$ supposées indépendantes, ou généralement distincte de la valeur primitive Ω, à laquelle elle ne

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XIII.

deviendra égale que pour certaines valeurs particulières de $x, y, z, \ldots$ propres à vérifier l'équation

$$\Omega' = \Omega.$$

Dans ce qui suit, je m'occuperai uniquement des propriétés dont les fonctions jouissent, en raison de leur forme, et non pas en raison des systèmes de valeurs que les variables peuvent acquérir. En conséquence, quand il sera question des valeurs *égales* entre elles que la fonction Ω peut acquérir quand on déplace les variables $x, y, z, \ldots$, il faudra toujours se souvenir que ces valeurs sont celles qui restent égales, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables $x, y, z, \ldots$. Ainsi, par exemple, si l'on a

$$\Omega = x + y,$$

les deux valeurs que pourra prendre la fonction Ω, quand on déplacera les deux variables, savoir

$$x + y \quad \text{et} \quad y + x,$$

seront *égales* entre elles, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées à x et à y. Mais si l'on avait

$$\Omega = x + 2y,$$

les deux valeurs de la fonction, savoir

$$x + 2y \quad \text{et} \quad y + 2x,$$

seraient deux valeurs *distinctes*, qu'on ne pourrait plus appeler *valeurs égales*, attendu qu'elles seraient le plus souvent inégales, et ne deviendraient égales que dans le cas particulier où l'on aurait $y = x$.

Si l'on numérote les places occupées par les diverses variables $x, y, z, \ldots$ dans la fonction Ω, et si l'on écrit à la suite les unes des autres ces variables $x, y, z, \ldots$ rangées d'après l'ordre de grandeur des numéros assignés aux places qu'elles occupent, on obtiendra un certain *arrangement*

$$xyz\ldots,$$

et, quand les variables seront déplacées, cet arrangement se trouvera remplacé par un autre, qu'il suffira de comparer au premier pour connaître la nature des déplacements. Cela posé, ces diverses valeurs d'une fonction de n lettres correspondront évidemment aux divers arrangements que l'on pourra former avec ces n lettres. D'ailleurs, le nombre de ces arrangements est, comme l'on sait, représenté par le produit

$$1.2.3\ldots n.$$

Si donc l'on pose, pour abréger,

$$N = 1.2.3\ldots n,$$

N sera le nombre des valeurs diverses, égales ou distinctes, qu'une fonction de n variables acquerra successivement quand on déplacera de toutes les manières, en les substituant l'une à l'autre, les variables dont il s'agit.

On appelle *permutation* ou *substitution* l'opération qui consiste à déplacer les variables, en les substituant les unes aux autres, dans une valeur donnée de la fonction Ω, ou dans l'arrangement correspondant. Pour indiquer cette substitution, nous écrirons le nouvel arrangement qu'elle produit au-dessus du premier, et nous renfermerons le système de ces deux arrangements entre parenthèses. Ainsi, par exemple, étant donnée la fonction

$$\Omega = x + 2y + 3z,$$

où les variables x, y, z occupent respectivement la première, la seconde et la troisième place, et se succèdent en conséquence dans l'ordre indiqué par l'arrangement

$$xyz,$$

si l'on échange entre elles les variables y, z qui occupent les deux dernières places, on obtiendra une nouvelle valeur Ω' de Ω, qui sera distincte de la première, et déterminée par la formule

$$\Omega' = x + 2z + 3y.$$

D'ailleurs, le nouvel arrangement correspondant à cette nouvelle valeur sera

$$xzy,$$

et la substitution par laquelle on passe de la première valeur à la seconde se trouvera représentée par la notation

$$\binom{xzy}{xyz},$$

qui indique suffisamment de quelle manière les variables ont été déplacées. Les deux arrangements xzy, xyz compris dans cette substitution forment ce que nous appellerons ses *deux termes*, ou son *numérateur* et son *dénominateur*. Comme les numéros qu'on assigne aux diverses places qu'occupent les variables dans une fonction sont entièrement arbitraires, il est clair que l'arrangement correspondant à une valeur donnée de la fonction est pareillement arbitraire, et que le dénominateur d'une substitution quelconque peut être l'un quelconque des N arrangements formés avec les n variables données. On arrivera immédiatement à la même conclusion en observant qu'une substitution quelconque peut être censée indiquer un système déterminé d'opérations simples, dont chacune consiste à remplacer une lettre du dénominateur par une lettre du numérateur, et que ce système d'opérations ne variera pas si l'on échange entre elles d'une manière quelconque les lettres du dénominateur, pourvu que l'on échange entre elles, de la même manière, les lettres correspondantes du numérateur. Il en résulte qu'une substitution, relative à un système de n variables, peut être présentée sous N formes différentes dont nous indiquerons l'équivalence par le signe $=$. Ainsi, par exemple, on aura

$$\binom{xzy}{xyz} = \binom{xyz}{xzy} = \binom{yxz}{zxy} = \ldots.$$

Observons encore que l'on peut, sans inconvénient, effacer toute lettre qui se présente à la même place dans les deux termes d'une substitution donnée, cette circonstance indiquant que la lettre ne doit pas être déplacée. Ainsi, en particulier, on aura

$$\binom{xzy}{xyz} = \binom{zy}{yz}.$$

Lorsqu'on a ainsi éliminé d'une substitution donnée toutes les lettres qu'il est possible d'effacer, cette substitution se trouve réduite *à sa plus simple expression*.

Le *produit* d'un arrangement donné xyz par une substitution $\binom{xzy}{xyz}$ sera le nouvel arrangement xzy qu'on obtient en appliquant cette substitution même à l'arrangement donné. Le *produit* de deux substitutions sera la substitution nouvelle qui fournit toujours le résultat auquel conduirait l'application des deux premières, opérées l'une après l'autre, à un arrangement quelconque. Les deux substitutions données seront les deux *facteurs* du produit. Le produit d'un arrangement par une substitution ou d'une substitution par une autre s'indiquera par l'une des notations qui servent à indiquer le produit de deux quantités, le multiplicande étant placé, suivant la coutume, à la droite du multiplicateur. On trouvera ainsi, par exemple,

$$\binom{xzy}{xyz} xyz = xzy$$

et

$$\binom{yxuz}{xyzu} = \binom{yx}{xy}\binom{uz}{zu}.$$

Il y a plus : on pourra, dans le second membre de la dernière équation, échanger sans inconvénient les deux facteurs entre eux, de sorte qu'on aura encore

$$\binom{yxuz}{xyzu} = \binom{uz}{zu}\binom{yx}{xy}.$$

Mais cet échange ne sera pas toujours possible, et souvent le produit de deux substitutions variera quand on échangera les deux facteurs entre eux. Ainsi, en particulier, on trouvera

$$\binom{yx}{xy}\binom{zy}{yz} = \binom{yzx}{xyz} \quad \text{et} \quad \binom{zy}{yz}\binom{yx}{xy} = \binom{zxy}{xyz}.$$

Nous dirons que deux substitutions sont *permutables* entre elles, lorsque leur produit sera indépendant de l'ordre dans lequel se suivront les deux facteurs.

Pour abréger, nous représenterons souvent par de simples lettres

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots,$$

ou par des lettres affectées d'indices,

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots,$$

les arrangements formés avec plusieurs variables. Alors la substitution qui aura pour termes A et B se présentera simplement sous la forme

$$\binom{B}{A},$$

et l'on aura

$$\binom{B}{A} A = B,$$

$$\binom{C}{B}\binom{B}{A} = \binom{C}{A},$$

....

De plus, si, en appliquant à l'arrangement C la substitution $\binom{B}{A}$, on produit l'arrangement D, on aura, non seulement

$$\binom{B}{A} C = D,$$

mais encore

$$\binom{B}{A} = \binom{D}{C}.$$

Le nombre total des substitutions relatives au système de n variables $x, y, z, \ldots$ est évidemment égal au nombre N des arrangements que l'on peut former avec ces variables, puisqu'en prenant pour dénominateur un seul de ces arrangements, le premier par exemple, on peut prendre pour numérateur l'un quelconque d'entre eux. La substitution dont le numérateur est le dénominateur même peut être censée se réduire à l'unité, puisqu'on peut évidemment la remplacer par le facteur 1 dans les produits

$$\binom{A}{A}C = C,$$

$$\binom{A}{A}\binom{D}{C} = \binom{D}{C}\binom{A}{A} = \binom{D}{C}.$$

Une substitution $\binom{B}{A}$, multipliée par elle-même plusieurs fois de suite, donne pour produits successifs son carré, son cube, et généralement ses diverses puissances, qui sont naturellement représentées par les notations

$$\binom{B}{A}^2,\quad \binom{B}{A}^3,\quad \ldots.$$

D'ailleurs, la série qui aura pour termes la substitution $\binom{B}{A}$ et ses diverses puissances, savoir

$$\binom{B}{A},\quad \binom{B}{A}^2,\quad \binom{B}{A}^3,\quad \ldots,$$

ne pourra jamais offrir plus de N substitutions réellement distinctes. Donc, en prolongeant cette série, on verra bientôt reparaître les mêmes substitutions. On prouve aisément que la première de celles qui reparaîtront sera équivalente à l'unité, et qu'à partir de celle-ci les substitutions déjà trouvées se reproduiront périodiquement dans le même ordre. Donc le nombre i des termes distincts de la série sera toujours la plus petite des valeurs entières de i pour lesquelles se vérifiera la formule

$$\binom{B}{A}^i = 1.$$

Le nombre i ainsi déterminé, ou le degré de la plus petite des puissances de $\binom{B}{A}$ équivalentes à l'unité, sera ce que nous appellerons le *degré* ou l'*ordre* de la substitution $\binom{B}{A}$.

Supposons maintenant qu'une substitution réduite à sa plus simple

expression se présente sous la forme

$$\binom{yz\ldots vwx}{xy\ldots uvw},$$

c'est-à-dire qu'elle ait pour objet de remplacer x par y, puis y par z, ..., et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne à une dernière variable w, qui devra être remplacée par la variable x de laquelle on était parti. Pour effectuer cette substitution, il suffira évidemment de ranger sur la circonférence d'un cercle *indicateur*, divisée en parties égales, les diverses variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,\quad w,$$

en plaçant la première, la seconde, la troisième, ... sur le premier, le second, le troisième, ... point de division, puis de remplacer chaque variable par celle qui, la première, viendra prendre sa place, lorsqu'on fera tourner dans un certain sens le cercle indicateur. Pour ce motif, nous donnerons à la substitution dont il s'agit le nom de *substitution circulaire*. Nous la représenterons, pour abréger, par la notation

$$(x, y, z, \ldots, u, v, w);$$

et il est clair que, dans cette notation, une quelconque des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,\quad w$$

pourra occuper la première place. Ainsi, par exemple, on aura identiquement

$$(x, y, z) = (y, z, x) = (z, x, y).$$

L'ordre n d'une substitution circulaire sera évidemment le nombre même des lettres qu'elle renferme. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que, n étant l'ordre de la substitution circulaire

$$(x, y, z, \ldots, u, v, w),$$

la puissance $l^{\text{ième}}$ de cette substitution, savoir

$$(x, y, z, \ldots, u, v, w)^l,$$

sera une nouvelle substitution de l'ordre n, si l et n n'ont pas de facteurs communs, ou, en d'autres termes, si l est premier à n. Si, au contraire, l cesse d'être premier à n, alors, k étant le plus grand commun diviseur des nombres l, n, et h étant le quotient de la division de n par k, la substitution

$$(x, y, z, \ldots, u, v, w)^l$$

sera le produit de h substitutions circulaires de l'ordre k. Ainsi, par exemple, on aura, en posant $n = 4$,

$$(x, y, z, u)^2 = (x, z)(y, u), \qquad (x, y, z, u)^3 = (x, u, z, y);$$

et l'on trouvera pareillement, en posant $n = 6$,

$$\begin{aligned}
(x, y, z, u, v, w)^2 &= (x, z, v)(y, u, w),\\
(x, y, z, u, v, w)^3 &= (x, u)(y, v)(z, w),\\
(x, y, z, u, v, w)^4 &= (x, v, z)(y, w, u),\\
(x, y, z, u, v, w)^5 &= (x, w, v, u, z, y).
\end{aligned}$$

§ II. — *Propriétés diverses des substitutions, et décomposition d'une substitution donnée en substitutions primitives.*

Il est facile de s'assurer qu'une substitution quelconque, relative à un nombre quelconque de variables, est toujours un produit de substitutions circulaires; ainsi, par exemple, on a

$$\binom{uzyx}{xyzu} = (x, u)(y, z), \qquad \binom{zuvyx}{xyzuv} = (x, z, v)(y, u).$$

Cela posé, soit $\binom{B}{A}$ une substitution de l'ordre i, relative à un nombre n de variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots;$$

$\binom{B}{A}$ sera nécessairement ou une substitution circulaire, ou le produit de plusieurs substitutions circulaires dont quelques-unes pourront renfermer une seule lettre et se réduire à l'unité. Ces substitutions circulaires seront ce que nous appellerons les *facteurs circulaires* de $\binom{B}{A}$. Deux quelconques d'entre elles, étant composées de lettres diverses, seront évidemment permutables. Donc tous les facteurs circulaires de $\binom{B}{A}$ seront permutables entre eux et représenteront des substitutions qui pourront être effectuées dans un ordre quelconque. Il y a plus : comme deux substitutions égales seront nécessairement permutables entre elles, si l'on élève $\binom{B}{A}$ à des puissances quelconques, on obtiendra de nouvelles substitutions qui seront permutables entre elles, ainsi que leurs facteurs représentés par des puissances des facteurs circulaires de $\binom{B}{A}$.

Supposons, pour fixer les idées, que les variables comprises dans les divers facteurs circulaires de $\binom{B}{A}$ soient respectivement

Dans le premier facteur.....	α,	β,	γ,	...
Dans le second facteur......	λ,	μ,	ν,	...
Dans le troisième facteur...	φ,	χ,	ψ,	...
....	..,	..,	..,	...,

en sorte qu'on ait

$$\binom{B}{A} = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)(\lambda, \mu, \nu, \ldots)(\varphi, \chi, \psi, \ldots). \tag{1}$$

Alors, l étant un nombre entier quelconque, on aura encore

$$\binom{B}{A}^l = (\alpha, \beta; \gamma, \ldots)^l (\lambda, \mu, \nu, \ldots)^l (\varphi, \chi, \psi, \ldots)^l;$$

et, pour que l vérifie l'équation

$$\binom{B}{A}^l = 1, \tag{2}$$

il faudra qu'on ait séparément

$$(3) \quad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)^l = 1, \qquad (\lambda, \mu, \nu, \ldots)^l = 1, \qquad (\varphi, \chi, \psi, \ldots)^l = 1, \qquad \ldots.$$

Or les seules valeurs de l propres à vérifier l'équation (2) seront l'ordre i de la substitution $\binom{B}{A}$ et les multiples de i. Pareillement les valeurs de l propres à vérifier l'une quelconque des formules (3) seront l'ordre du facteur circulaire qui entre dans cette formule et les multiples de cet ordre. Cela posé, soient

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots$$

les nombres qui représentent les ordres respectifs des substitutions circulaires

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),\quad (\lambda, \mu, \nu, \ldots),\quad (\varphi, \chi, \psi, \ldots),\quad \ldots;$$

non seulement on aura

$$a+b+c+\ldots=n,$$

attendu que les divers groupes

$$\begin{array}{llll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, \\ \lambda, & \mu, & \nu, & \ldots, \\ \varphi, & \chi, & \psi, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

devront renfermer en somme les n lettres auxquelles se rapporte la substitution $\binom{B}{A}$, mais, de plus, on conclura sans peine de ce qui précède que l'ordre i de la substitution $\binom{B}{A}$ sera le plus petit nombre divisible à la fois par a, par b, par c, etc.

Lorsque deux substitutions

$$\binom{B}{A},\quad \binom{D}{C}$$

différeront uniquement par la forme des lettres qui, dans ces deux substitutions, occuperont les mêmes places, et qu'en conséquence ces deux substitutions offriront le même nombre de facteurs circulaires et le même nombre de lettres dans les facteurs circulaires correspondants, nous dirons qu'elles sont semblables entre elles. Alors on aura nécessairement

$$\binom{A}{C}=\binom{B}{D}$$

et, par suite, aussi

$$\binom{C}{A}=\binom{D}{B}.$$

Il est facile de calculer le nombre des substitutions

$$\binom{B}{A},\quad \binom{D}{C},\quad \ldots,$$

semblables entre elles et à $\binom{B}{A}$, que l'on peut former avec n lettres. Soit $\mathfrak{N}$ ce nombre, et supposons que la substitution $\binom{B}{A}$ ait pour facteurs g substitutions circulaires de l'ordre a, h substitutions circulaires de l'ordre b, k substitutions circulaires de l'ordre c, etc. On aura, non seulement

$$ga+hb+kc+\ldots=n, \tag{4}$$

mais encore

$$\mathfrak{N}=\frac{N}{(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)\ldots a^g b^h c^k\ldots}. \tag{5}$$

Si maintenant on désigne par

$$\Sigma\mathfrak{N}$$

la somme des valeurs de $\mathfrak{N}$ correspondantes aux divers systèmes de nombres qui peuvent représenter des valeurs de $a, b, c, \ldots$ propres à vérifier l'équation (1), en d'autres termes, si l'on désigne par $\Sigma\mathfrak{N}$ la somme des valeurs de $\mathfrak{N}$ correspondantes aux diverses manières de partager le nombre n en parties égales ou inégales, alors $\Sigma\mathfrak{N}$ devra être précisément le nombre total des substitutions que l'on peut former avec n lettres. On aura donc

$$\Sigma\mathfrak{N}=N \tag{6}$$

et, par suite,

$$\sum\frac{1}{(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)\ldots a^g b^h c^k\ldots}=1. \tag{7}$$

Cette dernière équation paraît digne de remarque. Si, pour fixer les idées, on pose $n = 5$, on trouvera

$$\begin{aligned} n = 5 &= 4 + 1 = 3 + 2 \\ &= 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \end{aligned}$$

et par suite l'équation (7) donnera

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{2^2} + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = 1,$$

ce qui est exact. Si dans la somme $\Sigma \mathfrak{N}$ on comprenait seulement celles des valeurs de $\mathfrak{N}$ qui correspondent à des valeurs des nombres a, b, c, ..., supérieures à l'unité, alors, à la place de la formule (7), on obtiendrait la suivante

$$(8) \quad \sum \frac{1}{(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)\ldots a^g b^h c^k \ldots} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n},$$

dont le second membre se réduit à $\frac{1}{e}$, pour des valeurs infinies de n, e désignant la base des logarithmes népériens. Ainsi, en particulier, si l'on prend $n = 5$, on trouvera

$$n = 5 = 3 + 2$$

et

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.4.5}.$$

Considérons maintenant plusieurs substitutions

$$\binom{B}{A}, \quad \binom{D}{C}, \quad \binom{F}{E}, \quad \ldots$$

relatives aux n lettres $x, y, z, \ldots$. J'appellerai substitutions *dérivées* toutes celles que l'on pourra déduire des substitutions données, multipliées une ou plusieurs fois les unes par les autres ou par elles-mêmes dans un ordre quelconque, et les substitutions données, jointes aux substitutions dérivées, formeront ce que j'appellerai un *système de substitutions conjuguées*. L'*ordre* de ce système sera le nombre total des substitutions qu'il présente, y compris la substitution qui offre

deux termes égaux et se réduit à l'unité. Si l'on désigne par I cet ordre, et par

$$i, \quad i', \quad i'', \quad \ldots$$

les ordres des substitutions données, I sera toujours divisible par chacun des nombres $i, i', i'', \ldots$. D'ailleurs I sera toujours un diviseur du produit

$$\mathrm{N} = 1.2\ldots n.$$

Ajoutons que, étant donné un système de substitutions conjuguées, on reproduira toujours les mêmes substitutions, rangées seulement d'une autre manière, si on les multiplie séparément par l'une quelconque d'entre elles, ou bien encore si l'une quelconque d'entre elles est séparément multipliée par elle-même et par toutes les autres.

Lorsque les substitutions données sont permutables entre elles, l'ordre I du système ne peut surpasser le produit

$$i i' i'' \ldots$$

des ordres des substitutions données.

Lorsque les substitutions données se réduisent à une seule

$$\binom{B}{A},$$

les substitutions dérivées se confondent avec les puissances de $\binom{B}{A}$, et l'ordre I du système avec l'ordre i de la substitution donnée.

Supposons maintenant que l'ordre i de la substitution

$$\binom{B}{A}$$

soit décomposé en facteurs

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

premiers entre eux. Je prouve que, dans ce cas [1], *la substitution*

[1] Pour établir cette proposition fondamentale, je m'appuie sur un théorème d'arithmétique dont voici l'énoncé :

Supposons que, le nombre entier i étant décomposé en facteurs a, b, c, ... premiers

$\binom{B}{A}$ *et ses puissances peuvent être censées former un système de substitutions conjuguées, dérivées des seules substitutions*

$$\binom{B}{A}^{\frac{i}{a}}, \quad \binom{B}{A}^{\frac{i}{b}}, \quad \binom{B}{A}^{\frac{i}{c}}, \quad \ldots.$$

Cela posé, admettons que, $p, q, r, \ldots$ étant les facteurs premiers de i, on ait

$$i = p^g q^h r^k \ldots.$$

On pourra prendre

$$(9) \qquad a = p^g, \quad b = q^h, \quad c = r^k, \quad \ldots,$$

et alors chacune des substitutions

$$(10) \qquad \binom{B}{A}^{\frac{i}{a}}, \quad \binom{B}{A}^{\frac{i}{b}}, \quad \binom{B}{A}^{\frac{i}{c}}, \quad \ldots$$

aura seulement pour facteurs circulaires des substitutions dont les ordres se réduiront aux puissances d'un seul nombre premier. Cette propriété remarquable des substitutions (10) est très utile dans la théorie des permutations, où les substitutions jouent un rôle analogue à celui que remplissent les racines primitives dans la théorie des équations binaires. Pour cette raison, et supposant que les valeurs de $a, b, c, \ldots$ sont données par les formules (9), je désignerai les substitutions (10) sous le nom de *substitutions primitives*, et je les appellerai *facteurs primitifs* de la substitution $\binom{B}{A}$.

Dans un prochain article j'expliquerai comment les principes que

entre eux, on désigne par l un nombre entier quelconque inférieur à i, on pourra toujours satisfaire à l'équivalence

$$i\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \ldots\right) \equiv l \pmod{i}$$

par des valeurs entières de $x, y, z, \ldots$ respectivement inférieures à $a, b, c, \ldots$.

je viens d'énoncer conduisent à la détermination du nombre des valeurs distinctes que peut acquérir une fonction Ω de n variables indépendantes $x, y, z, \ldots$.

301.

Analyse mathématique. — *Sur le nombre des valeurs égales ou distinctes que peut acquérir une fonction de n variables, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque* (suite).

C. R., T. XXI, p. 668 (22 septembre 1845).

Je me bornerai, pour l'instant, à indiquer, dans cet article, quelques-uns des principaux résultats de mon travail. Les propositions que j'énoncerai ici se trouveront d'ailleurs démontrées et développées dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

§ I. — *Sur les diverses formes que peut prendre une fonction symétrique ou non symétrique de n variables.*

Considérons une fonction Ω de n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

et supposons que cette fonction reste continue pour chacun des systèmes de valeurs attribuées aux variables dont il s'agit. Prenons d'ailleurs

$$(1) \qquad N = 1.2.3\ldots n.$$

Lorsqu'on permutera les variables entre elles de toutes les manières possibles, on obtiendra N valeurs diverses de la fonction Ω, et deux quelconques de ces valeurs pourront être, ou *égales* entre elles, quels que soient $x, y, z, \ldots$, ou généralement inégales et *distinctes* l'une de l'autre. Si l'on nomme m le nombre des valeurs distinctes de la fonction Ω, et M le nombre de ses valeurs égales, chacune des valeurs distinctes pourra prendre M formes diverses, et par suite on aura

$$mM = N. \tag{2}$$

En vertu de cette formule, qui était déjà connue, la détermination du nombre des valeurs distinctes d'une fonction se trouve ramenée à la détermination du nombre des valeurs égales, ou, ce qui revient au même, à la détermination du nombre des permutations que l'on peut effectuer sur les variables $x, y, z, \ldots$, sans altérer la fonction Ω.

Concevons maintenant que l'on essaye de partager la suite des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

en plusieurs autres suites ou *groupes*, en réunissant deux variables dans un même groupe toutes les fois que l'on peut faire passer l'une à la place de l'autre, à l'aide d'une substitution quelconque, sans altérer la valeur de la fonction Ω. Il arrivera de deux choses l'une : ou les divers groupes que l'on essayera de former se réduiront à un seul; ou l'on obtiendra effectivement plusieurs groupes distincts les uns des autres. Dans le premier cas, on pourra, sans altérer la valeur de Ω, faire passer toutes les variables à la place occupée dans la fonction par l'une quelconque d'entre elles, et je dirai, pour cette raison, que la fonction est *transitive*. Au contraire, la fonction sera dite *intransitive* quand on ne pourra, sans altérer sa valeur, faire passer certaines variables à certaines places. Parmi les fonctions transitives, on doit distinguer la fonction *symétrique*, dont toutes les valeurs sont égales entre elles, en sorte qu'on a, pour une telle fonction,

$$m = 1, \qquad M = N.$$

Parmi les fonctions intransitives, on doit distinguer celles dont toutes les valeurs sont distinctes ou, en d'autres termes, celles pour lesquelles on a

$$m = N, \qquad M = 1,$$

chaque groupe étant alors réduit à ne renfermer qu'une seule variable.

Une *substitution*, opérée sur les variables comprises dans la fonction Ω, peut, ou déplacer toutes les variables, ou déplacer seulement plusieurs d'entre elles, en laissant les autres *immobiles*.

Cela posé, considérons d'abord une fonction transitive de plusieurs variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

Soient toujours Ω cette fonction et M le nombre de ses valeurs égales, dans le cas où toutes les variables restent mobiles. Comme une variable quelconque pourra occuper la première place, si l'on nomme $\mathfrak{M}$ le nombre des valeurs égales que peut acquérir la fonction, quand une variable reste immobile, ou, ce qui revient au même, quand on considère Ω comme une fonction de $n-1$ variables, on aura

$$M = n\mathfrak{M}. \tag{3}$$

D'ailleurs le nombre des valeurs distinctes de Ω considéré : 1° comme une fonction de n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots;$$

2° comme une fonction de $n-1$ variables

$$y, \quad z, \quad \ldots,$$

sera, dans le premier cas, en vertu des formules (2) et (3),

$$m = \frac{1.2\ldots n}{M} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{\mathfrak{M}}, \tag{4}$$

et, dans le second cas,

$$\frac{1.2\ldots(n-1)}{\mathfrak{M}}.$$

Donc ces deux nombres seront égaux, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Soit Ω une fonction transitive de n variables*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

et désignons par m le nombre des valeurs distinctes de cette fonction, dans *le cas où toutes les variables restent mobiles, m sera en même temps le nombre des valeurs distinctes de Ω, dans le cas où une variable x deviendra immobile, et par conséquent le nombre des valeurs distinctes de Ω considéré comme fonction des seules variables y, z, ...*

Exemple. — Supposons

$$n = 3 \quad \text{et} \quad \Omega = x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y.$$

En considérant Ω comme fonction des trois variables

$$x, \quad y, \quad z,$$

on reconnaîtra que les seules substitutions qui n'altèrent pas cette fonction sont les deux substitutions circulaires

$$(x, y, z), \quad (x, z, y),$$

dont l'une est le carré de l'autre. On aura donc, dans le cas présent,

$$M = 3, \quad \text{et par suite,} \quad m = \frac{1.2.3}{3} = 2.$$

Si maintenant on suppose que x devienne immobile, il ne sera plus possible d'échanger entre eux y et z. Donc, si l'on considère Ω comme fonction des seules variables y, z, le nombre $\mathfrak{M}$ des valeurs égales de cette fonction sera l'unité, et le nombre de ses valeurs distinctes, représenté par le rapport $\frac{1.2}{\mathfrak{M}}$, sera encore égal à 2.

Supposons maintenant que Ω soit une fonction intransitive. Alors la suite des n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

se partagera en plusieurs autres suites ou groupes

$$\begin{array}{llll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, \\ \lambda, & \mu, & \nu, & \ldots, \\ \varphi, & \chi, & \psi, & \ldots, \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \ldots, \end{array}$$

que l'on formera aisément en s'astreignant à la seule condition de

réunir toujours, dans un même groupe, deux variables dont l'une pourra prendre la place de l'autre en vertu d'une substitution quelconque. Soient

a le nombre des variables α, β, γ, ... comprises dans le premier groupe;
b le nombre des variables λ, μ, ν, ... comprises dans le second groupe;
c le nombre des variables φ, χ, ψ, ... comprises dans le troisième groupe;
....

On aura évidemment

$$(5) \qquad a + b + c + \ldots = n.$$

Lorsqu'on a, comme on vient de le dire, partagé en plusieurs groupes le système des n variables comprises dans une fonction intransitive Ω, toute substitution qui n'altère pas la valeur de Ω se borne à déplacer des variables dans un seul groupe, ou dans plusieurs groupes simultanément. Or il arrive souvent que les déplacements divers, simultanément opérés dans les divers groupes, en vertu d'une substitution qui n'altère pas la valeur de Ω, peuvent aussi s'effectuer séparément et indépendamment les uns des autres, sans que la fonction Ω soit altérée. Lorsque cette condition sera remplie, nous dirons que les divers groupes sont *indépendants* les uns des autres. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$n = 5 \quad \text{et} \quad \Omega = x^2y + xy^2 + zuv.$$

Alors les deux groupes

$$\begin{array}{c} x, \quad y, \\ z, \quad u, \quad v, \end{array}$$

que l'on pourra former avec les cinq variables x, y, z, u, v, seront indépendants l'un de l'autre, attendu que toute substitution qui, sans altérer la valeur de Ω, déplacera les variables, produira, dans chaque groupe, des déplacements qui pourront s'effectuer isolément, sans que la valeur de Ω soit altérée.

Au contraire, les groupes formés avec les variables ne seraient plus indépendants les uns des autres, si l'on prenait $n = 4$,

$$\Omega = x^3 y + z^2 u.$$

Alors, en effet, les deux groupes formés avec les quatre variables x, y, z, u seraient

$$\begin{matrix} x, & z, \\ y, & u, \end{matrix}$$

et la seule substitution qui, sans altérer la valeur de Ω, déplacerait les variables, serait celle qui consiste à échanger simultanément x avec z, et y avec u. La valeur de Ω serait évidemment altérée, si l'on se bornait à échanger entre elles les deux variables x et z.

La détermination du nombre des valeurs égales et du nombre des valeurs distinctes d'une fonction intransitive Ω qui renferme n variables $x, y, z, \ldots$ peut être ramenée à la détermination de ces deux nombres, pour des fonctions qui renferment moins de n lettres, ainsi que nous allons l'expliquer.

Soient toujours

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, \\ \lambda, & \mu, & \nu, & \ldots, \\ \varphi, & \chi, & \psi, & \ldots, \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \ldots \end{matrix}$$

les divers groupes formés avec les n variables $x, y, z, \ldots$, chaque groupe étant composé de variables dont l'une peut prendre la place de l'autre, sans que la valeur de Ω soit altérée, et supposons d'abord ces divers groupes indépendants les uns des autres. Soit, dans cette hypothèse, A le nombre des valeurs égales que peut acquérir Ω quand on se borne à déplacer les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ que renferme le premier groupe, en considérant ces variables comme seules mobiles ou, ce qui revient au même, le nombre des valeurs égales de Ω considéré comme fonction des seules variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Soit pareillement B le nombre des valeurs égales de Ω considéré comme fonction des seules variables $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Soit encore C le nombre des valeurs égales de Ω considéré comme fonction des seules variables $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ et ainsi de suite. Le nombre total M des valeurs égales de Ω, considéré comme fonction des seules variables $x, y, z, \ldots$, sera déterminé par la formule

$$M = ABC\ldots. \tag{6}$$

D'ailleurs, si l'on désigne toujours par a, ou par b, ou par c, ... le nombre des variables comprises dans le premier, dans le deuxième, dans le troisième, ... groupe, les facteurs

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots$$

seront respectivement des diviseurs des produits

$$1.2\ldots a, \quad 1.2\ldots b, \quad 1.2\ldots c, \quad \ldots,$$

et, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathcal{A} = \frac{1.2\ldots a}{A}, \quad \mathcal{B} = \frac{1.2\ldots b}{B}, \quad \mathcal{C} = \frac{1.2\ldots c}{C}, \quad \ldots, \tag{7}$$

$\mathcal{A}$ représentera le nombre des valeurs distinctes de Ω considéré comme fonction des seules variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ comprises dans le premier groupe; $\mathcal{B}$ le nombre des valeurs distinctes de Ω considéré comme fonction des seules variables $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ comprises dans le deuxième groupe; $\mathcal{C}$ le nombre des valeurs distinctes de Ω considéré comme fonction des seules variables $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ comprises dans le troisième groupe, etc. Ajoutons que, si l'on pose, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \frac{N}{(1.2\ldots a)(1.2\ldots b)(1.2\ldots c)\ldots} \\ &= \frac{1.2.3\ldots n}{(1.2\ldots a)(1.2.b\ldots)(1.2\ldots c)\ldots}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

c'est-à-dire, si l'on désigne par $\mathfrak{N}$ le coefficient du produit

$$r^a s^b t^c \ldots$$

dans le développement du polynôme

$$(r+s+t+\ldots)^n,$$

on tirera des formules (2), (6), (7), ...

$$m = \mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}, \quad \ldots \tag{9}$$

Considérons maintenant le cas où les divers groupes formés avec les variables $x, y, z, \ldots$ ne sont plus indépendants les uns des autres. Je suis parvenu à démontrer que, dans ce cas encore, les nombres M et m, c'est-à-dire le nombre des valeurs égales et le nombre des valeurs distinctes de la fonction Ω, pourront être déterminés à l'aide des formules (6) et (9), si l'on attribue aux facteurs A, B, C, ... ou $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... les valeurs que je vais indiquer. On devra, dans le cas dont il s'agit, représenter par A le nombre des valeurs égales que pourra obtenir Ω, en vertu de substitutions correspondantes à des permutations diverses des variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ comprises dans le premier groupe; par B le nombre des valeurs égales que pourra obtenir Ω, en vertu de substitutions qui, sans déplacer α, β, γ, ..., correspondront à des permutations diverses des variables λ, μ, ν, ... comprises dans le second groupe; par C le nombre des valeurs égales que pourra obtenir Ω, en vertu de substitutions qui, sans déplacer ni $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ni $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, produiront des permutations diverses des variables $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ comprises dans le troisième groupe. Il pourra d'ailleurs arriver que des permutations diverses des variables comprises dans l'un des groupes entraînent des permutations correspondantes des variables comprises dans les groupes suivants, en sorte qu'on soit obligé, pour ne pas altérer la valeur de Ω, d'effectuer simultanément ces permutations correspondantes. Il y a plus : la correspondance dont il s'agit ici devra certainement avoir lieu, au moins pour quelques permutations, dans l'hypothèse admise que les divers groupes ne sont pas tous indépendants les uns des autres. Quant aux facteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., ils devront toujours être déterminés à l'aide des formules (7); et l'on peut démontrer qu'alors chacun d'eux sera

encore propre à représenter le nombre des valeurs distinctes d'une certaine fonction des variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ou $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, ou $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ comprises dans le premier, ou dans le second, ou dans le troisième, ... groupe.

Pour faire mieux comprendre ce qui précède, appliquons la formule (9) à quelques exemples.

Exemple I. — Supposons $n = 5$,

$$\Omega = x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + uv.$$

Alors les seules substitutions qui n'altéreront pas la valeur de Ω seront les deux substitutions circulaires

$$(x, y, z), \quad (u, v)$$

et les dérivées de ces deux substitutions. Alors aussi, en vertu de ces deux substitutions et de leurs dérivées, on pourra faire passer à la place l'une de l'autre ou les variables x, y, z, ou les variables u, v, sans que jamais une variable de l'un des groupes

$$x, \quad y, \quad z,$$
$$u, \quad v$$

se trouve substituée à une variable de l'autre groupe. D'ailleurs toute substitution qui aura la propriété de ne pas altérer la valeur de Ω, par exemple la suivante

$$(x, y, z)(u, v),$$

sera toujours le produit de deux substitutions

$$(x, y, z), \quad (u, v),$$

dont chacune jouira séparément de cette propriété, et sera relative aux variables comprises dans un seul groupe. Donc les deux groupes seront indépendants l'un de l'autre. Ajoutons que, le premier groupe étant composé de trois variables, le second de deux, on aura, dans le cas présent,

$$a = 3, \quad b = 2.$$

D'autre part Ω, considéré comme fonction des seules variables x, y, z, offrira trois valeurs égales et deux valeurs distinctes; on aura donc

$$A = 3, \quad \mathcal{A} = 2.$$

Au contraire, en considérant Ω comme fonction de u, v, on trouvera

$$B = 2, \quad \mathcal{B} = 1.$$

Enfin, le coefficient N du produit

$$r^3 s^2,$$

dans le développement du binôme

$$(r+s)^5,$$

sera le nombre 10. On aura donc

$$\mathfrak{N} = 10,$$

et par conséquent les formules (6), (9) donneront

$$M = 3.2 = 6,$$
$$m = 10.2.1 = 20.$$

Exemple II. — Si l'on pose $n = 6$,

$$\Omega = x^2 yz + u^2 vw.$$

Alors, avec les six lettres x, y, z, u, v, w, on pourra former deux groupes

$$x, \quad u,$$
$$y, \quad z, \quad v, \quad w.$$

Mais ces deux groupes ne seront pas indépendants l'un de l'autre. Alors aussi on trouvera

$$a = 2, \quad A = 2, \quad \mathcal{A} = 1,$$
$$b = 4, \quad B = 4, \quad \mathcal{B} = 6,$$
$$\mathfrak{N} = 15$$

et, par suite,

$$M = 2.4 = 8,$$
$$m = 15.1.6 = 90.$$

Il importe d'observer que, dans le cas auquel se rapporte la formule (9), c'est-à-dire dans le cas où la fonction Ω est intransitive, chacun des nombres a, b, c, ... est inférieur à n, et qu'en conséquence la valeur de $\mathfrak{N}$ déterminée par la formule (8) est, ou égale, ou supérieure à n. On aura, en particulier, $\mathfrak{N} = n$, si les groupes formés comme il a été dit ci-dessus se réduisent à deux, le premier étant composé de $n-1$ variables, l'autre de n variables seulement. Alors on trouvera

$$a = n-1, \quad b = 1, \quad \mathcal{B} = 1, \quad \mathfrak{N} = n,$$

et la formule (9) donnera

$$m = n\mathcal{A}. \tag{10}$$

Dans tout autre cas, $\mathfrak{N}$ surpassera n, et il en sera de même, à plus forte raison, du nombre m, qui, en vertu de la formule (9), sera toujours un multiple de $\mathfrak{N}$.

En terminant ce paragraphe, nous ajouterons, aux remarques déjà faites, une observation qui n'est pas sans importance, c'est que *le nombre des valeurs égales d'une fonction quelconque de n variables est toujours évidemment l'ordre d'un certain système de substitutions conjuguées.*

§ II. — *Sur diverses propriétés des fonctions transitives.*

Soit Ω une fonction transitive de n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

On pourra, sans altérer cette fonction, faire passer une variable quelconque à la place de x. Mais, x devenant immobile, Ω, considéré comme fonction de $n-1$ variables seulement, pourra cesser d'être une fonction transitive. Cela posé, il importe de remarquer une propriété singulière de certaines fonctions transitives. Elle est exprimée par un théorème, que je suis parvenu à établir, et qui peut s'énoncer comme il suit.

Théorème. — *Supposons que* Ω *soit tout à la fois une fonction transitive des n variables*

$$x, \; y, \; z, \; \ldots$$

et une fonction intransitive de $n-1$ *variables*

$$y, \; z, \; \ldots.$$

Supposons encore que ces dernières variables se partagent en groupes indépendants les uns des autres, quand on réunit deux variables dans un même groupe, toutes les fois que l'on peut faire passer l'une à la place de l'autre, sans altérer Ω, *à l'aide d'une substitution qui laisse immobile la variable* x. *Alors,* x *redevenant mobile, on pourra partager la suite des n variables*

$$x, \; y, \; z, \; \ldots$$

en plusieurs autres suites ou groupes

$$\begin{array}{llll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, \\ \lambda, & \mu, & \nu, & \ldots, \\ \varphi, & \chi, & \psi, & \ldots, \\ ., & ., & ., & \ldots, \end{array}$$

ces groupes étant tellement composés, que toute substitution qui n'altérera pas la valeur de Ω *aura pour effet unique ou de déplacer des variables dans chaque groupe, ou d'échanger les groupes entre eux, et ces groupes étant ordinairement indépendants les uns des autres, en sorte que des déplacements simultanément effectués dans les divers groupes, en vertu d'une substitution qui n'altérera pas la valeur de* Ω, *pourront aussi s'effectuer séparément, sans altération de cette même valeur.*

Lorsqu'une fonction transitive Ω remplit les conditions énoncées dans ce théorème, les divers groupes

$$\begin{array}{llll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, \\ \lambda, & \mu, & \nu, & \ldots, \\ \varphi, & \chi, & \psi, & \ldots, \\ ., & ., & ., & \ldots, \end{array}$$

formés avec les n variables

$$x, \; y, \; z, \; \ldots,$$

renferment tous le même nombre a de variables et, par conséquent, ce nombre a est un diviseur de n. Cela posé, soit

$$k = \frac{n}{a}.$$

Nommons A le nombre des valeurs égales que peut acquérir Ω, en vertu de substitutions dont chacune se borne à déplacer les variables comprises dans un seul groupe, et K le nombre des valeurs égales que Ω peut acquérir, quand on se borne à échanger les groupes entre eux. Le nombre total M des valeurs égales de Ω sera évidemment déterminé par la formule

$$M = KA^k. \tag{1}$$

D'ailleurs le nombre m des valeurs distinctes de Ω se trouvera toujours lié au nombre M par l'équation

$$mM = N, \tag{2}$$

la valeur de N étant

$$N = 1.2.3\ldots n. \tag{3}$$

Soient maintenant

$$\mathcal{K} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}$$

deux nombres liés à K et A par les formules

$$\mathcal{A} = \frac{1.2\ldots a}{A}, \qquad \mathcal{K} = \frac{1.2\ldots k}{K}. \tag{4}$$

$\mathcal{A}$ sera le nombre des valeurs distinctes d'une fonction de a variables; $\mathcal{K}$ sera pareillement le nombre des valeurs distinctes d'une certaine fonction de k variables; et, en posant, pour abréger,

$$\mathcal{N} = \frac{1.2.3\ldots n}{(1.2\ldots k)(1.2.3\ldots a)^k}, \tag{5}$$

on tirera des formules (1), (2), (3), (4)

$$m = \mathcal{N}\mathcal{H}\mathcal{A}^k. \tag{6}$$

En vertu de la formule (6), m sera certainement un multiple du nombre entier représenté par $\mathcal{N}$.

Dans un prochain article, j'indiquerai les conséquences importantes qui se déduisent de la formule (6) et des principes établis dans le § I.

302.

Analyse mathématique. — *Sur le nombre des valeurs égales ou distinctes que peut acquérir une fonction de n variables, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque.*

C. R., T. XXI, p. 727 (29 septembre 1845).

Nous allons, dans cet article, indiquer brièvement les moyens d'établir diverses propositions dignes de remarque, et relatives au nombre des valeurs égales ou distinctes qu'une fonction peut acquérir.

§ I. — *Théorèmes relatifs aux fonctions symétriques.*

On sait que l'on nomme fonction *symétrique* de plusieurs variables une fonction dont la valeur ne varie pas quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque.

De plus, en vertu des définitions adoptées dans le précédent article, une fonction Ω de n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

est *transitive*, lorsqu'on peut, sans altérer la valeur de Ω, faire passer toutes les variables à la place occupée par l'une quelconque d'entre elles. Elle est *intransitive* dans le cas contraire.

D'ailleurs, il a été prouvé que le nombre m des valeurs distinctes

d'une fonction transitive Ω de n variables $x, y, z, \ldots$ est en même temps le nombre des valeurs distinctes de Ω considéré comme fonction de $n-1$ variables seulement. Lorsque le nombre m se réduit à l'unité, la fonction transitive Ω devient nécessairement symétrique.

Cela posé, il est facile d'établir les propositions suivantes :

Théorème I. — *Soit Ω une fonction de n variables*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

Supposons d'ailleurs cette fonction symétrique par rapport à certaines variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

dont le nombre a vérifie la condition

$$a > \frac{n}{2}.$$

Enfin, supposons que, parmi les variables restantes

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots,$$

dont le nombre b vérifie évidemment les conditions

$$n = a + b, \qquad b < \frac{n}{2},$$

une ou plusieurs, que j'appellerai ρ, ς, ..., puissent passer à la place occupée par l'une des variables α, β, γ, ..., en vertu d'une substitution qui n'altère pas la valeur de Ω. Alors Ω sera nécessairement fonction symétrique des variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots, \quad \rho, \quad \varsigma, \quad \ldots.$$

Démonstration. — En faisant subir aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

un déplacement quelconque, on déduira toujours de Ω une fonction qui sera symétrique, ou par rapport aux variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

ou par rapport à celles qui occuperont leurs places. En d'autres termes, après un déplacement quelconque des n variables x, y, z, ..., il existera toujours un groupe composé de a variables dont Ω sera fonction symétrique; et, puisque a, par hypothèse, surpasse $\frac{n}{2}$, ce groupe devra toujours renfermer au moins une des variables α, β, γ, ... qui le composaient primitivement. Cela posé, concevons que, sans altérer Ω, on puisse faire entrer ρ dans ce groupe, en le faisant passer à la place primitivement occupée par l'une des variables α, β, γ, ... Alors ρ se trouvera renfermé dans le groupe dont il s'agit, avec l'une au moins de ces variables, avec α par exemple. Donc Ω sera fonction symétrique de ρ et de α; en sorte que, sans altérer Ω, on pourra échanger entre elles ces deux variables. D'ailleurs, cette propriété dont jouiront les variables ρ et α tiendra évidemment, non pas à la forme des lettres qui représentent ces variables, mais à la place qu'elles occupaient dans la fonction Ω et à la nature de cette fonction. Enfin, il est clair qu'avant de faire entrer ρ dans le groupe primitivement composé des variables α, β, γ, ... dont Ω était fonction symétrique, on pouvait permuter ces variables d'une manière quelconque, et, par conséquent, faire passer à la place de α l'une quelconque d'entre elles. Donc, dans l'hypothèse admise, on peut, sans altérer Ω, échanger ρ, non seulement avec α, mais encore avec l'une quelconque des variables

$$\beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

et, par suite, Ω est une fonction symétrique, non seulement des a variables

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

mais encore des $a+1$ variables

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \rho.$$

On prouvera de même que, si la variable ς peut entrer aussi dans le groupe primitivement formé par les a variables

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

et, par conséquent, dans le groupe primitivement formé par les $a+1$ variables

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \rho,$$

Ω sera fonction symétrique des $\alpha+2$ variables

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \rho,\ \varsigma;$$

et, en continuant de la sorte, on obtiendra définitivement la proposition énoncée.

Corollaire. — Le théorème I entraîne évidemment la proposition suivante :

Théorème II. — *Si une fonction transitive Ω de n variables x, y, z, ... est en même temps symétrique par rapport à plusieurs de ces variables, savoir, par rapport aux variables*

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

et si d'ailleurs le nombre a de ces dernières variables surpasse $\frac{n}{2}$, alors Ω sera nécessairement fonction symétrique des n variables x, y, z, ...

Corollaire I. — Si, n étant supérieur à 2, une fonction transitive Ω de n variables x, y, z, ... est en même temps fonction symétrique de $n-1$ variables y, z, ..., elle sera nécessairement fonction symétrique de toutes les variables x, y, z, ...

Corollaire II. — Si, n étant supérieur à 3, une fonction transitive Ω de n variables x, y, z, u, ... est en même temps fonction symétrique de $n-2$ variables z, u, ..., elle sera nécessairement fonction symétrique de toutes les variables, à moins que l'on n'ait $n=4$. Si n se réduisait effectivement au nombre 4, alors, en posant, par exemple,

$$\Omega = xy + zu,$$

on obtiendrait pour Ω une fonction transitive de quatre variables, qui serait symétrique par rapport à deux variables x et y ou z et u, sans être symétrique par rapport aux quatre variables x, y, z, u.

Corollaire III. — Si, n étant supérieur à 4, une fonction transitive Ω de n variables $x, y, z, u, v, \ldots$ est en même temps fonction symétrique de $n-3$ variables $u, v, \ldots$, elle sera nécessairement fonction symétrique de toutes les variables, à moins que l'on n'ait $n=5$ ou $n=6$. Il est d'ailleurs aisé de s'assurer qu'on ne doit pas même exclure le cas où l'on aurait $n=5$, et qu'une fonction transitive de cinq variables ne peut être symétrique par rapport à deux d'entre elles sans être symétrique par rapport à toutes ces variables.

Corollaire IV. — Si, n étant supérieur à 5, une fonction transitive Ω de n variables $x, y, z, u, v, w, \ldots$ est en même temps fonction symétrique de $n-4$ variables $v, w, \ldots$, elle sera nécessairement fonction symétrique de toutes les variables, à moins que l'on n'ait $n=6$, $n=7$, ou $n=8$. D'ailleurs on reconnaîtra encore facilement que le cas où l'on aurait $n=7$ ne doit pas être excepté.

Corollaire V. — Les propositions énoncées dans les corollaires III et IV ne subsistent plus quand on a $n=6$ ou $n=8$; et, si l'on pose en particulier $n=6$, alors, en prenant, par exemple,

$$\Omega = xy + zu + vw$$

ou

$$\Omega = xyz + uvw,$$

on obtiendra une fonction transitive qui sera symétrique par rapport à deux ou trois variables sans être symétrique par rapport à toutes, et qui offrira, en effet, dans le premier cas, quinze valeurs distinctes; dans le second cas, dix valeurs distinctes seulement.

§ II. — *Formules et propositions diverses qui se rapportent aux fonctions transitives.*

Il arrive souvent que les n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

renfermées dans une fonction transitive Ω, peuvent être partagées en

divers groupes

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, \\ \lambda, & \mu, & \nu, & \ldots, \\ \varphi, & \chi, & \psi, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

tellement composés que toute substitution qui n'altère pas la valeur de Ω ait pour effet unique, ou de déplacer des variables dans chaque groupe, ou d'échanger les groupes entre eux, sans altérer leur composition. Nous dirons alors que la fonction Ω est une fonction *transitive complexe*. Pour une telle fonction, les divers groupes formés avec les variables renferment tous le même nombre a de lettres, et par suite, si l'on nomme k le nombre des groupes, on a

$$ka = n. \tag{1}$$

On doit en conclure que chacun des nombres k et a est un diviseur de n. Si, d'ailleurs, on nomme K le nombre des valeurs égales que peut acquérir une fonction transitive complexe Ω quand on se borne à échanger entre eux les divers groupes formés avec les variables, et L le nombre des valeurs égales que la même fonction peut acquérir quand on se borne à déplacer des variables dans un ou plusieurs groupes, sans déplacer les groupes eux-mêmes; le nombre total M des valeurs égales de Ω sera évidemment déterminé par l'équation

$$M = KL. \tag{2}$$

Soit maintenant m le nombre des valeurs distinctes de la fonction transitive complexe Ω, et posons

$$N = 1.2.3\ldots n, \tag{3}$$

on aura

$$m = \frac{N}{M}. \tag{4}$$

D'autre part, on prouvera facilement que les nombres

$$K, \quad L$$

sont respectivement diviseurs des produits

$$1.2\ldots k, \quad (1.2\ldots a)^k,$$

et, en posant, pour abréger,

$$\mathcal{K} = \frac{1.2\ldots k}{K}, \qquad \mathcal{L} = \frac{(1.2\ldots a)^k}{L}, \tag{5}$$

$$\mathcal{N} = \frac{1.2\ldots n}{(1.2\ldots k)(1.2\ldots a)^k}, \tag{6}$$

on tirera des formules (2) et (4)

$$m = \mathcal{N}\mathcal{K}\mathcal{L}. \tag{7}$$

Si les divers groupes formés avec les variables x, y, z, ... sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire, en d'autres termes, si des déplacements simultanément effectués dans les divers groupes, en vertu d'une substitution qui n'altère pas la valeur de Ω, peuvent aussi s'effectuer séparément sans altération de cette valeur, alors la valeur de L sera de la forme

$$L = A^k, \tag{8}$$

A désignant le nombre des valeurs égales que pourra obtenir la fonction Ω, en vertu des substitutions qui se borneront à déplacer des variables dans un seul groupe. Alors aussi, en posant, pour abréger,

$$\mathcal{A} = \frac{1.2\ldots a}{A}, \tag{9}$$

on aura

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}^k; \tag{10}$$

et des formules (2), (7), jointes aux équations (8), (10), on déduira immédiatement la formule (1) de la page 305 et la formule (6) de la page 306, savoir,

$$M = KA^k, \tag{11}$$

$$m = \mathcal{N}\mathcal{K}\mathcal{A}^k. \tag{12}$$

Pour montrer une application fort simple des formules (2) et (7), supposons $n = 6$,

$$\Omega = xy^2z^3uv^2w^3 + yz^2x^3vw^2u^3 + zx^2y^3wu^2v^3.$$

Alors Ω sera une fonction transitive complexe des six variables x, y, z, u, v, w, avec lesquelles on pourra former deux groupes

$$\begin{matrix} x, & y, & z, \\ u, & v, & w, \end{matrix}$$

qui ne seront pas indépendants l'un de l'autre. On aura, par suite,

$$a = 3, \qquad k = 2.$$

On trouvera, d'ailleurs,

$$K = 2, \qquad \mathcal{K} = \frac{1.2}{2} = 1, \qquad L = 3, \qquad \mathcal{L} = \frac{(1.2.3)^2}{3} = 12,$$

$$\mathcal{N} = \frac{1.2.3.4.5.6}{(1.2)(1.2.3)^2} = 10,$$

et l'on en conclura

$$M = 2.3 = 6,$$

$$m = 10.1.12 = 120.$$

Pour montrer une application des formules (11) et (12), supposons $n = 4$, et

$$\Omega = xy + zu.$$

Alors Ω sera une fonction transitive complexe des quatre variables x, y, z, u, avec lesquelles on pourra former deux groupes

$$\begin{matrix} x, & y, \\ z, & u, \end{matrix}$$

qui seront indépendants l'un de l'autre. On aura, par suite,

$$a = 2, \qquad k = 2.$$

On trouvera d'ailleurs

$$K = 2, \qquad \mathcal{K} = \frac{1.2}{2} = 1, \qquad A = 2, \qquad \mathcal{A} = \frac{1.2}{2} = 1,$$

$$\mathcal{N} = \frac{1.2.3.4}{(1.2)(1.2)^2} = 3,$$

et l'on en conclura

$$M = 2.2^2 = 8,$$
$$m = 3.1.1 = 3.$$

On peut encore établir à l'égard des fonctions transitives diverses propositions dignes de remarque, et en particulier les suivantes :

Théorème I. — *Supposons que Ω soit tout à la fois une fonction transitive de n variables*

$$x, \; y, \; z, \; \ldots$$

et une fonction intransitive de $n-1$ variables

$$y, \; z, \; \ldots.$$

Supposons d'ailleurs indépendants les uns des autres les divers groupes que l'on obtient quand, x demeurant immobile, on réunit toujours dans un même groupe deux variables dont l'une peut passer à la place de l'autre, sans que la valeur de Ω soit altérée. Enfin soit a le nombre des variables comprises dans le groupe ou dans les groupes qui en renferment le plus, et supposons que l'un des groupes de a lettres se compose des variables

$$\alpha, \; \beta, \; \gamma, \; \ldots.$$

Lorsqu'on voudra rendre immobile, non plus la variable x, mais une quelconque des variables situées hors du groupe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, le même groupe se reproduira toujours.

Démonstration. — En effet, le groupe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant l'un de ceux que l'on forme quand on suppose x immobile, et étant, dans cette hypothèse, indépendant de tous les autres, on pourra, sans altérer la valeur de la fonction Ω, faire passer une quelconque des variables de ce groupe à la place d'une autre, par exemple β à la place de α, en opérant des substitutions qui ne renfermeront aucune des variables situées hors du groupe, et, par conséquent, en laissant immobile chacune de ces dernières variables. Donc deux variables choisies arbitrairement dans le groupe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se trouveront réunies encore dans l'un des groupes que l'on formera en laissant immobile une variable quelconque t située hors de ce groupe. Mais, la fonction Ω étant supposée transitive, t pourra prendre la place de x; par suite, les groupes que l'on formera en laissant t immobile seront semblables aux groupes que l'on formera en laissant x immobile; et, dans les deux cas, les groupes correspondants offriront nécessairement les mêmes nombres de lettres. Donc, puisque a est le nombre maximum des lettres dans les groupes formés quand x est immobile, a sera aussi le nombre maximum des lettres comprises dans les groupes que l'on formera, en laissant t immobile; et, puisqu'alors un des groupes renfermera les a lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, il n'en renfermera pas d'autres. Donc le groupe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se reproduira toujours dans le cas où on laissera immobile l'une quelconque des variables situées hors de ce groupe.

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, soient*

$$\alpha, \; \beta, \; \gamma, \; \ldots$$

et

$$\lambda, \; \mu, \; \nu, \; \ldots$$

deux groupes de n lettres, correspondants, le premier, au cas où l'on suppose immobile une certaine variable x, le second, au cas où l'on suppose immobile une autre variable y. Si le nombre a vérifie la condition

$$2a < n, \tag{13}$$

c'est-à-dire si le nombre a est inférieur à $\frac{n}{2}$, alors les deux groupes dont il s'agit n'offriront pas de lettres communes, quand ils seront distincts l'un de l'autre.

Démonstration. — En effet, la condition (13) étant supposée remplie, il existera, parmi les n variables

$$x, \; y, \; z, \; \ldots,$$

au moins une variable t située en dehors des deux groupes

$$\alpha, \; \beta, \; \gamma, \; \ldots,$$
$$\lambda, \; \mu, \; \nu, \; \ldots,$$

dont chacun renferme a lettres. Donc, chacun de ces deux groupes se reproduira quand on laissera t immobile (théorème I); et, par suite, si ces deux groupes sont distincts l'un de l'autre, ils n'offriront pas de lettres communes.

Corollaire. — La fonction Ω étant supposée transitive, une variable quelconque t pourra passer à la place de α, sans que la valeur de Ω soit altérée; donc, une variable quelconque t fera nécessairement partie d'un groupe semblable au groupe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et composé pareillement de a lettres. Donc, les mêmes choses étant posées que dans les théorèmes I et II, si l'on réunit toujours dans un même groupe deux variables dont l'une peut prendre la place de l'autre, en vertu d'une substitution qui, sans altérer la valeur de Ω, déplace moins de n lettres, les divers groupes que l'on formera renfermeront chacun a variables, et deux quelconques de ces groupes n'offriront pas de lettres communes. Or, comme cette faculté qu'on aura de pouvoir séparer les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

en groupes distincts et composés chacun de a variables tiendra évidemment, non pas à la forme des lettres qui représentent les variables, mais aux places qu'elles occupent dans la fonction Ω, et à la nature de cette fonction, il est clair que, après une substitution quelconque, les mêmes groupes devront se reproduire, quel que soit le nombre des lettres déplacées. Donc, une substitution quelconque aura toujours pour effet unique, ou de déplacer des lettres dans chaque groupe, ou d'échanger les groupes entre eux, en laissant invariable la composition de chaque groupe. Enfin, les groupes devront être nécessairement déplacés par toute substitution qui fera passer à la place l'une de l'autre deux variables comprises dans deux groupes différents composés chacun de a lettres. Donc, dans l'hypothèse admise, la fonction Ω sera du nombre de celles que nous appellerons fonctions *transitives complexes*, si le nombre a surpasse l'unité; et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Supposons que Ω soit tout à la fois une fonction transitive de n variables*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

et une fonction intransitive de $n-1$ variables

$$y, \quad z, \quad \ldots.$$

Supposons d'ailleurs indépendants les uns des autres les divers groupes qu'on obtient quand, x demeurant immobile, on réunit toujours dans un même groupe deux variables dont l'une peut passer à la place de l'autre sans que la valeur de Ω soit altérée. Enfin, soit a le nombre des variables comprises dans le groupe ou dans les groupes qui en renferment le plus. Si le nombre a est inférieur à $\frac{n}{2}$, mais supérieur à l'unité, Ω sera une fonction transitive complexe des n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

qui pourront être partagées en groupes composés chacun de a lettres tellement choisies, que toute substitution qui n'altérera pas la valeur de Ω aura pour effet unique, ou de déplacer des variables dans chacun de ces groupes, ou d'échanger ces groupes entre eux.

Exemple. — Pour obtenir une fonction Ω de n variables, sur laquelle se vérifie le théorème qu'on vient d'énoncer, il suffit de prendre $n = 6$ et

$$\Omega = xyz^2u^2v^3w^3 + zuv^2w^2x^3y^3 + vwx^2y^2z^3u^3.$$

Alors, x demeurant immobile, Ω est une fonction intransitive des cinq variables

$$y, \quad z, \quad u, \quad v, \quad w,$$

qui se partagent en trois groupes, indépendants et non permutables entre eux, dont chacun renferme une ou deux variables, ces trois groupes étant

$$\begin{array}{l} y, \\ z, \; u, \\ v, \; w. \end{array}$$

Mais, quand x redevient mobile, Ω est évidemment une fonction transitive complexe des six variables

$$x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w,$$

qui se partagent en trois groupes indépendants et permutables entre eux, dont chacun renferme deux variables, ces trois groupes étant

$$\begin{array}{l} x,\ y, \\ z,\ u, \\ v,\ w. \end{array}$$

Corollaire I. — Le théorème précédent peut être étendu au cas même où l'on aurait $a = \frac{n}{2}$. En effet, soient, dans ce cas,

$$\begin{array}{l} \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots, \\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots \end{array}$$

deux groupes, composés chacun de a lettres, dont on obtient le premier en laissant immobile la variable x, le second en laissant immobile une autre variable y. S'ils offrent une ou plusieurs lettres communes, il existera au moins une variable t située au dehors de chacun d'eux, et par suite ils ne pourront être distincts l'un de l'autre (*voir* le théorème I). Donc, s'ils sont distincts, ils renfermeront chacun la moitié des variables $x, y, z, \ldots,$ comprises dans la fonction Ω, et cette fonction sera une fonction transitive complexe des variables $x, y, z, \ldots,$ qui pourront être partagées en deux groupes composés chacun de a variables.

Corollaire II. — Supposons maintenant que le nombre a soit supérieur à $\frac{n}{2}$, et posons

$$n - a = b.$$

Alors on aura

$$b < \frac{n}{2},$$

et, parmi les groupes que l'on formera en laissant immobile une

variable x, un seul sera composé de a lettres

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.$$

Nommons

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots$$

les lettres qui resteront en dehors de ce groupe et qui seront en nombre égal à b. Chacune d'elles jouira de cette propriété remarquable que, si on la rend immobile, le groupe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se reproduira toujours. Il y a plus : le groupe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ cessera évidemment de se reproduire si l'on rend immobile une des variables comprises dans ce groupe; et par suite les b variables

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots$$

formeront un nouveau système ou groupe de variables qui jouiront, exclusivement à toutes autres, de la propriété dont il s'agit. Mais la fonction Ω étant, par hypothèse, une fonction transitive, un autre groupe de b variables

$$\lambda',\ \mu',\ \nu',\ \ldots$$

jouira encore de la même propriété relativement à un autre groupe de a variables

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \ldots;$$

et, non seulement le groupe

$$\lambda',\ \mu',\ \nu',\ \ldots$$

devra être distinct du groupe

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

mais, de plus, ces deux groupes n'offriront pas de lettres communes. En continuant ainsi, on verra, dans l'hypothèse admise, les n variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

se partager en divers groupes, composés chacun de b variables tellement choisies, que deux quelconques de ces groupes n'offriront pas de lettres communes. D'ailleurs, il est clair que, après une quelconque des substitutions qui n'altèrent pas la valeur de Ω, ces mêmes groupes devront toujours se reproduire, et l'on doit en conclure que Ω sera une fonction transitive complexe. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème IV. — *Supposons que Ω soit tout à la fois une fonction transitive de n variables*

$$x, \ y, \ z, \ \ldots$$

et une fonction intransitive de $n-1$ variables

$$y, \ z, \ \ldots .$$

Supposons, d'ailleurs, indépendants les uns des autres les divers groupes qu'on obtient quand, x demeurant immobile, on réunit toujours dans un même groupe deux variables dont l'une peut passer à la place de l'autre, sans que la valeur de Ω soit altérée. Enfin, soit a le nombre des variables comprises dans le groupe qui en renferme le plus, et posons

$$b = n - a.$$

Si le nombre a est supérieur à $\frac{n}{2}$, Ω sera une fonction transitive complexe des n variables

$$x, \ y, \ z, \ \ldots,$$

qui pourront être partagées en groupes composés chacun de b lettres tellement choisies, que toute substitution qui n'altérera pas la valeur de Ω aura pour effet unique, ou de déplacer des variables dans chacun de ces groupes, ou d'échanger ces groupes entre eux.

Exemple. — Pour obtenir une fonction Ω de n variables, sur laquelle se vérifie le théorème qu'on vient d'énoncer, il suffit de prendre $n = 6$ et

$$\Omega = xy + zu + vw.$$

Alors, x demeurant immobile, Ω est une fonction intransitive des

cinq variables

$$y, \ z, \ u, \ v, \ w,$$

qui se partagent en deux groupes indépendants et non permutables entre eux, composés, le premier, d'une seule variable y, le second, de quatre variables z, u, v, w. Mais, quand x redevient mobile, Ω est une fonction transitive complexe des six variables

$$x, \ y, \ z, \ u, \ v, \ w,$$

qui se partagent en trois groupes indépendants et permutables entre eux, savoir :

$$\begin{array}{l} x, \ y, \\ z, \ u, \\ v, \ w. \end{array}$$

Des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir le théorème III suffiraient encore évidemment pour démontrer la proposition suivante :

Théorème V. — *Soient Ω une fonction transitive des n variables*

$$x, \ y, \ z, \ \ldots,$$

et l un des nombres entiers inférieurs à n. Supposons d'ailleurs que, dans le cas où une variable x demeure immobile, les variables restantes

$$y, \ z, \ \ldots$$

se partagent en plusieurs groupes indépendants les uns des autres, quand on réunit dans un même groupe deux variables dont l'une peut passer à la place de l'autre, en vertu d'une substitution qui n'altère pas la valeur de Ω, et qui déplace l variables au plus. Enfin, soit a le nombre des variables comprises dans le groupe ou dans les groupes les plus considérables. Si le nombre a est inférieur à $\frac{n}{2}$, Ω sera une fonction transitive complexe des variables

$$x, \ y, \ z, \ \ldots,$$

et ces variables se partageront en groupes distincts composés chacun de *a lettres tellement choisies, que toute substitution qui n'altérera pas la valeur de Ω aura pour effet unique, ou de déplacer des variables dans chaque groupe, ou d'échanger les groupes entre eux.*

Pour qu'une fonction Ω de n variables

$$x, \; y, \; z, \; \ldots$$

soit effectivement une fonction transitive complexe, il est nécessaire que les groupes formés avec les diverses variables, de manière à remplir les conditions que nous venons de rappeler, renferment chacun plusieurs variables; en d'autres termes, il est nécessaire que le nombre a des variables comprises dans chaque groupe surpasse l'unité.

Si le nombre a se réduisait à l'unité, cela signifierait que, la variable n devenant immobile, toutes les autres variables $y, z, \ldots$ le deviennent également. Alors on pourrait affirmer : 1° que la fonction transitive, représentée par Ω dans le théorème III, offre précisément n valeurs égales; 2° que toute substitution qui n'altère pas la valeur de Ω est, ou une substitution circulaire de l'ordre n, ou le produit de k substitutions circulaires de l'ordre $\frac{n}{k}$, le nombre k étant un diviseur de n. Au reste, je reviendrai sur ce sujet dans un autre article, où j'indiquerai la forme générale des substitutions qui laissent intacte la valeur de Ω, en déplaçant le moins de variables qu'il est possible, et où je montrerai que, si l'on multiplie l'une par l'autre deux substitutions quelconques, l'ordre de la substitution nouvelle ainsi obtenue ne sera jamais altéré quand on échangera entre eux les deux facteurs.

303.

Analyse mathématique. — *Sur le nombre des valeurs égales ou inégales que peut acquérir une fonction de n variables indépendantes, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque.*

C. R., T. XXI, p. 779 (6 octobre 1845).

§ I. — *Recherches nouvelles sur les substitutions.*

Soit Ω une fonction donnée de n variables

$$x, \; y, \; z, \; \ldots,$$

et désignons par de simples lettres P, Q, R, ... des substitutions relatives à ces mêmes variables. Si l'on nomme a l'ordre de la substitution P, a sera la plus petite des valeurs entières de l pour lesquelles se vérifiera la formule

$$P^l = 1. \tag{1}$$

De plus, l et k étant des nombres entiers quelconques, on aura généralement

$$P^{ka+l} = P^l. \tag{2}$$

Pour assigner une signification précise à la notation P^{-l}, il suffit d'étendre, par analogie, l'équation (2) au cas même où l devient négatif. Alors on trouve

$$P^{-l} = P^{ka-l} \tag{3}$$

et, en particulier,

$$P^{-1} = P^{a-1}. \tag{4}$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $a = 6$ et

$$P = (x, y, z)(u, v),$$

on aura

$$P^{-1} = P^5 = (x, z, y)(u, v).$$

D'ailleurs, si la substitution P fait passer une certaine variable y à la place d'une autre variable x, il est clair que, réciproquement, x viendra remplacer y en vertu de la substitution

$$P^{a-1} = P^{-1}.$$

Nous dirons, pour cette raison, que la substitution P^{-1} est l'*inverse* de la substitution P. Dans le cas particulier où l'on a

$$P = (x, y),$$

on a aussi

$$P^{-1} = (x, y),$$

puisqu'une substitution circulaire du second ordre a pour effet unique de remplacer l'une par l'autre deux variables données. Dans le cas général, les facteurs circulaires dans lesquels pourra se décomposer la substitution P^{-1} seront évidemment *inverses* des facteurs circulaires dans lesquels se décomposera la substitution P.

Ajoutons que l'inverse de la substitution P^l est évidemment P^{-l}.

Soient maintenant

$$P, \quad Q$$

deux substitutions différentes, la première de l'ordre a, la seconde de l'ordre b, et posons

$$R = PQ, \qquad S = QP.$$

On en conclura

$$R^2 = PQPQ, \qquad S^2 = QPQP,$$

etc.; puis on tirera de ces diverses équations

$$RP = PS,$$
$$R^2P = PS^2,$$
$$\dots\dots\dots,$$

et généralement

$$R^lP = PS^l, \tag{5}$$

l étant un nombre entier quelconque. Or il résulte évidemment de l'équation (5) que, des deux formules

$$R^l = 1, \qquad S^l = 1, \tag{6}$$

la première entraînera toujours la seconde et réciproquement. Donc la plus petite valeur entière de l, propre à vérifier la première formule, sera aussi la plus petite valeur entière de l propre à vérifier la seconde. Donc R et S seront toujours deux substitutions de même ordre, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Si l'on multiplie deux substitutions l'une par l'autre, on obtiendra pour produit une troisième substitution dont l'ordre ne variera pas quand on échangera entre eux les deux facteurs.*

Ainsi, par exemple, si l'on multiplie : 1° (x, y) par (y, z); 2° (y, z) par (x, y), on obtiendra pour produit, dans le second cas comme dans le premier, une substitution du second ordre, et l'on trouvera

$$(y, z)(x, y) = (x, z, y), \qquad (x, y)(y, z) = (x, y, z).$$

Deux substitutions étant toujours inverses l'une de l'autre, quand leur produit est l'unité, on en conclut que la substitution PQ a pour inverse $Q^{-1}P^{-1}$, et que, pareillement, la substitution P^hQ^k a pour inverse $Q^{-k}P^{-h}$.

Concevons maintenant que la suite

$$1, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad \dots \tag{7}$$

représente un système de substitutions conjuguées. Si l'on nomme a l'ordre de la substitution P, la suite (7) devra renfermer, en premier lieu, les substitutions

$$1, \quad P, \quad P^2, \quad \dots, \quad P^{a-1}. \tag{8}$$

Soit, d'ailleurs, Q une des substitutions qui font partie de la suite (7), sans être renfermées dans la suite (8). La suite (7) renfermera les substitutions

$$Q, \quad PQ, \quad P^2Q, \quad \dots, \quad P^{a-1}Q, \tag{9}$$

et aucune de celles-ci ne pourra se confondre avec l'une des substitutions

$$1, \quad P, \quad P^2, \quad \dots, \quad P^{a-1};$$

car, si l'on avait, par exemple,

$$P^k Q = P^h,$$

on en conclurait

$$Q = P^{h-k}.$$

Soit encore R une substitution qui fasse partie de la suite (7), sans être renfermée ni dans la suite (8), ni dans la suite (9). La suite (7) renfermera nécessairement les substitutions

$$R,\quad PR,\quad P^2R,\quad \ldots,\quad P^{a-1}R,$$

et aucune de ces dernières ne sera comprise ni dans la suite (8), ni même dans la suite (9); car, si l'on avait, par exemple,

$$P^k R = P^h Q,$$

on en conclurait

$$R = P^{h-k} Q.$$

En continuant ainsi, on partagera finalement la suite des substitutions conjuguées

$$1,\quad P,\quad Q,\quad R,\quad \ldots$$

en plusieurs suites

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} 1, & P, & P^2, & \ldots, & P^{a-1}, \\ Q, & PQ, & P^2Q, & \ldots, & P^{a-1}Q, \\ R, & PR, & P^2R, & \ldots, & P^{a-1}R, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dont chacune renfermera a substitutions diverses. Donc, si l'on nomme I le nombre des substitutions conjuguées

$$1,\quad P,\quad Q,\quad R,\quad \ldots,$$

ou, ce qui revient au même, l'ordre de leur système, I sera un multiple de a. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *L'ordre d'un système de substitutions conjuguées est divisible par l'ordre de chacune de ces substitutions.*

Corollaire. — Il importe d'observer que, en raisonnant toujours de

la même manière, on pourrait intervertir l'ordre des facteurs, et substituer ainsi au Tableau (10) un Tableau de la forme

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} 1, & P, & P^2, & \ldots, & P^{a-1}, \\ Q, & QP, & QP^2, & \ldots, & QP^{a-1}, \\ R, & RP, & RP^2, & \ldots, & RP^{a-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

On peut encore établir la proposition suivante :

Théorème III. — *Soient*

$$P,\quad Q$$

deux substitutions, la première de l'ordre a, la seconde de l'ordre b, et supposons qu'aucune des substitutions

$$P,\quad P^2,\quad \ldots,\quad P^{a-1}$$

ne se retrouve parmi les substitutions

$$Q,\quad Q^2,\quad \ldots,\quad Q^{b-1},$$

en sorte que l'équation

$$(12)\qquad P^h = Q^k$$

ne se vérifie jamais, excepté dans le cas où l'on a

$$P^h = 1,\qquad Q^k = 1.$$

Supposons encore que les deux suites

$$(13)\qquad P,\quad PQ,\quad P^2Q,\quad \ldots,\quad P^{a-1}Q$$

et

$$(14)\qquad Q,\quad QP,\quad QP^2,\quad \ldots,\quad QP^{a-1}$$

offrent précisément les mêmes substitutions, rangées seulement suivant deux ordres différents. Alors toutes les dérivées des deux substitutions P, Q *seront comprises dans chacune des formes*

$$(15)\qquad P^hQ^k,\quad Q^kP^h,$$

et, par suite, ces dérivées offriront un système de substitutions conjuguées dont l'ordre sera égal au produit ab.

Démonstration. — En effet, pour déduire les dérivées dont il s'agit les unes des autres, et pour les déduire même des substitutions P et Q, il suffira d'effectuer des multiplications successives dans lesquelles le multiplicateur sera toujours P ou Q, le multiplicande étant l'une des dérivées déjà obtenues. Or, si dans ces multiplications on emploie une seule fois le facteur Q, la forme la plus générale du produit obtenu R sera

$$R = P^h Q P^{h'},$$

et, dans l'hypothèse admise, on pourra réduire ce produit R à l'une quelconque des deux formes $P^h Q$, QP^h, puisqu'on pourra échanger le facteur Q avec l'un quelconque des facteurs P^h, $P^{h'}$, en modifiant convenablement la valeur de h ou h'. Si l'on emploie deux fois le facteur Q, la forme la plus générale du produit obtenu R sera

$$R = P^h Q P^{h'} Q P^{h''}.$$

Mais on pourra encore échanger chacun des facteurs Q avec une puissance quelconque de P, en modifiant convenablement le degré de cette puissance, et réduire ainsi R à l'une des formes $P^h Q^2$, $Q^2 P^h$, ... Cela posé, les seules dérivées qui pourront être distinctes les unes des autres seront évidemment celles qui sont renfermées dans le Tableau

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} 1, & P, & P^2, & \ldots, & P^{a-1}, \\ Q, & PQ, & P^2Q, & \ldots, & P^{a-1}Q, \\ Q^2, & PQ^2, & P^2Q^2, & \ldots, & P^{a-1}Q^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ Q^{b-1}, & PQ^{b-1}, & P^2Q^{b-1}, & \ldots, & P^{a-1}Q^{b-1}, \end{array}\right.$$

ou bien encore dans le Tableau

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} 1, & P, & P^2, & \ldots, & P^{a-1}, \\ Q, & QP, & QP^2, & \ldots, & QP^{a-1}, \\ Q^2, & Q^2P, & Q^2P^2, & \ldots, & Q^2P^{a-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ Q^{b-1}, & Q^{b-1}P, & Q^{b-1}P^2, & \ldots, & Q^{b-1}P^{a-1}. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, toutes les substitutions comprises dans chacun de ces Tableaux seront certainement distinctes les unes des autres. Car, si l'on suppose, par exemple,

$$P^h Q^k = P^{h'} Q^{k'},$$

h, h' étant deux termes de la suite $0, 1, 2, \ldots, a-1$, et k, k' deux termes de la suite $0, 1, 2, \ldots, b-1$, on en conclura

$$P^{h-h'} = Q^{k'-k},$$

et, dans l'hypothèse admise, cette dernière équation entraînera les deux conditions

$$h \equiv h' \pmod{a}, \qquad k' \equiv k \pmod{b},$$

par conséquent, les deux suivantes

$$h' = h, \qquad k' = k.$$

Enfin, tous les termes du Tableau (16) ou (17) étant distincts les uns des autres, le nombre de ces termes, qui représentera l'ordre du système de substitutions conjuguées, sera évidemment égal au produit ab.

Parmi les substitutions que l'on peut former avec n variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

l'une des plus simples est la substitution circulaire

$$P = (x, y, z, \ldots),$$

dont l'ordre a est précisément le nombre n.

Si l'on représente les diverses variables par une seule lettre x, successivement affectée des indices

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1,$$

alors on aura

$$(18)\qquad P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Si d'ailleurs on regarde comme pouvant être indifféremment remplacés l'un par l'autre deux indices dont la différence se réduit à un multiple de n, de sorte qu'on ait, pour une valeur quelconque du nombre entier l,

$$x_l = x_{n+l} = x_{2n+l} = \ldots,$$

alors, faire subir à une fonction donnée Ω la substitution P^h, ce sera remplacer généralement x_l par x_{l+h}, ou, en d'autres termes, ce sera faire croître l'indice l d'une variable quelconque de la quantité h.

Après la substitution circulaire P, qui renferme toutes les variables, l'une des substitutions les plus simples est celle qu'on obtient quand on multiplie l'indice l d'une variable quelconque par un nombre r premier à n. Nommons Q une telle substitution. Faire subir à une fonction donnée Ω la substitution Q^k, ce sera évidemment multiplier l'indice l d'une variable quelconque par r^k.

Cela posé, il est clair que, faire subir à une fonction donnée la substitution

$$Q^k P^h,$$

ce sera remplacer l'indice l d'une variable quelconque par l'indice

$$r^k(l+h).$$

Au contraire, faire subir à une fonction donnée la substitution

$$P^{h'} Q^k,$$

ce sera remplacer l'indice l d'une variable quelconque par l'indice

$$h' + r^k l.$$

Donc on aura généralement

$$P^{h'} Q^k = Q^k P^h, \tag{19}$$

si l'on a

$$h' + r^k l = r^k(l+h),$$

ou, ce qui revient au même, si l'on a

$$h' = r^k h.$$

Mais alors l'équation (19) donnera

$$P^{r^k h} Q^k = Q^k P^h. \tag{20}$$

On peut donc énoncer généralement la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Représentons par*

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

n variables distinctes, et supposons généralement $x_l = x_{n+l} = x_{2n+l} = \ldots$. *Soit d'ailleurs*

$$P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

enfin, soit r un nombre premier à n, et représentons par Q *la substitution qu'on obtient quand on remplace x_l par x_{rl}. Alors on aura, pour des valeurs entières quelconques de h et de k,*

$$P^{r^k h} Q^k = Q^k P^h. \tag{21}$$

Corollaire. — Il est bon d'observer que la substitution P et ses diverses puissances, quand elles ne se réduisent pas à l'unité, renferment les n variables données

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}.$$

Au contraire, la substitution Q et ses puissances laissent toujours immobile au moins la variable x_0, même dans le cas où n est un nombre premier. Donc les substitutions désignées par P et Q dans le théorème IV ne peuvent jamais vérifier la formule

$$P^h = Q^k,$$

si ce n'est dans le cas où l'on a $P^h = 1$, $Q^k = 1$. D'autre part, en posant $k=1$, on tire de la formule (21)

$$P^{rh} Q = Q P^h, \tag{22}$$

et il résulte de cette dernière que, dans l'hypothèse admise, les deux suites

$$\begin{array}{l} Q, \quad PQ, \quad P^2Q, \quad \ldots, \quad P^{n-1}Q, \\ Q, \quad QP, \quad QP^2, \quad \ldots, \quad QP^{n-1} \end{array}$$

offrent précisément les mêmes substitutions diversement rangées. Enfin Q sera évidemment, ou une substitution circulaire, ou le produit de plusieurs substitutions circulaires de même ordre, cet ordre étant précisément le plus petit nombre entier i que vérifie la formule

$$r^i \equiv 1 \pmod{n}. \tag{23}$$

Cela posé, les théorèmes III et IV entraîneront la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème IV, les dérivées des substitutions* P, Q *seront toutes comprises sous chacune des deux formes*

$$P^h Q^k, \quad Q^k P^h.$$

De plus, si l'on nomme i le plus petit nombre entier propre à vérifier la formule (23), *i sera précisément l'ordre de la substitution* Q, *et l'ordre du système de toutes les substitutions dérivées de* P *et* Q *sera équivalent au produit*

$$ni.$$

Corollaire I. — n étant un nombre entier quelconque, et r l'un des nombres premiers à n, l'exposant l de la puissance à laquelle il faut élever la *base* r pour obtenir un nombre équivalent, suivant le module n, à un reste donné, est ce qu'on nomme l'*indice* de ce reste. Cela posé, le plus petit nombre i propre à vérifier la formule

$$r^i \equiv 1 \pmod{n}$$

n'est autre chose que le plus petit des indices de l'unité. Ce même nombre i est aussi celui qui indique combien l'on peut obtenir de restes différents, en divisant par n les termes de la progression géométrique

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad r^3, \quad \ldots,$$

et qui a été, pour cette raison, dans un précédent Mémoire, désigné sous le nom d'*indicateur*. D'ailleurs, pour un module donné n, l'indicateur i dépend de la base r et devient un maximum, quand cette base r est une *racine primitive* du module n. Ajoutons que, si l'on nomme I l'indicateur maximum, chacun des indicateurs correspon-

dants aux diverses bases représentées par la suite des nombres premiers à n sera égal à I ou à un diviseur de I. Observons enfin que, si l'on pose

$$n = p^f q^g, \quad \ldots,$$

$p, q, \ldots$ étant les facteurs premiers de n, I sera le plus petit nombre qui soit divisible à la fois par chacun des produits

$$p^{f-1}(p-1), \quad q^{g-1}(q-1), \quad \ldots,$$

l'un de ces produits, savoir celui qui répond au facteur 2, devant être remplacé par sa moitié, quand n est pair et divisible par 8.

Corollaire II. — Si n se réduit à une puissance d'un nombre premier p, en sorte qu'on ait

$$n = p^f,$$

on trouvera

$$I = p^{f-1}(p-1) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Corollaire III. — Si n se réduit à un nombre premier, on aura simplement

$$I = n - 1.$$

Les observations que nous venons de faire conduisent immédiatement à la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — *Concevons que, n variables indépendantes étant représentées par les termes de la suite*

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

on regarde comme pouvant être indifféremment remplacés l'un par l'autre deux indices dont la différence est un multiple de n, et posons

$$P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Soient d'ailleurs r une racine primitive du module n, et I l'indicateur maximum relatif à ce module, c'est-à-dire le plus petit des indices de l'unité correspondants à la base r. Soit enfin Q *la substitution qui consiste à remplacer généralement x_l par x_{rl}. L'ordre de la substitution* Q *sera l'in-*

dicateur maximum I, et l'ordre du système des substitutions dérivées de P *et de* Q *sera représenté par le produit*

$$nI.$$

Corollaire I. — Si n est un nombre premier, on aura simplement $I = n - 1$, et, par suite, l'ordre du système des substitutions dérivées de P et de Q sera représenté par le produit

$$n(n-1).$$

Corollaire II. — Concevons maintenant que l'on représente par a un diviseur quelconque de n, et par b un diviseur quelconque de I. Concevons encore que, dans la formule

$$\mathrm{P}^{r^k h}\mathrm{Q}^k = \mathrm{Q}^k\mathrm{P}^h, \tag{24}$$

où h et k désignent deux nombres entiers quelconques, on remplace h par ah, et k par bk; on trouvera

$$\mathrm{P}^{r^{bk}ah}\mathrm{Q}^{bk} = \mathrm{Q}^{bk}\mathrm{P}^{ah},$$

puis en posant, pour abréger,

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}^a, \qquad \mathrm{S} = \mathrm{Q}^b, \tag{25}$$

on obtiendra la formule

$$\mathrm{R}^{r^{bk}h}\mathrm{S}^k = S^k\mathrm{R}^h, \tag{26}$$

dans laquelle R, S représenteront deux substitutions dont la première sera de l'ordre $\frac{n}{a}$, la seconde de l'ordre $\frac{I}{b}$. Cela posé, à l'aide de raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir le théorème V, on déduira immédiatement de la formule (26) la proposition suivante :

Théorème VII. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VI, si l'on nomme a un diviseur quelconque de n, et b un diviseur quelconque de I, les deux substitutions*

$$\mathrm{P}^a, \quad \mathrm{Q}^b$$

et leurs dérivées formeront un système de substitutions conjuguées, dont l'ordre sera

$$\frac{nI}{ab}.$$

Au lieu de représenter les diverses variables par une même lettre successivement accompagnée d'indices divers, on pourrait continuer à les représenter par différentes lettres, puis assigner à chaque variable un numéro propre à indiquer le rang qu'elle occuperait dans la série de ces lettres $x, y, z, \ldots$ écrites à la suite l'une de l'autre, suivant un ordre arbitrairement choisi. Alors la substitution désignée par Q dans les théorèmes précédents serait celle qui consiste à remplacer la variable correspondante au numéro l par la variable correspondante au numéro rl, ou plutôt au numéro équivalent au reste de la division du produit rl par le nombre n.

Supposons, pour fixer les idées, $n = 5$; alors cinq variables, représentées par les lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad u, \quad v,$$

pourront être censées correspondre aux numéros

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

Alors aussi, en multipliant les quatre premiers numéros par le facteur r, on obtiendra les produits

$$r, \quad 2r, \quad 3r, \quad 4r;$$

et, si l'on pose $r = 2$, ces produits, divisés par 5, donneront pour restes

$$2, \quad 4, \quad 1, \quad 3.$$

Ainsi, dans cette hypothèse, la substitution que nous avons désignée par Q aura pour effet de substituer aux variables dont les numéros étaient

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4$$

les variables dont les numéros sont

$$2, \quad 4, \quad 1, \quad 3,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, de substituer aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad u$$

les variables

$$y, \quad u, \quad x, \quad z.$$

On aura donc

$$Q = (x, y, u, z).$$

Cela posé, on conclura du théorème V que les dérivées des deux substitutions circulaires

$$P = (x, y, z, u, v), \qquad Q = (x, y, u, z)$$

sont toutes de la forme

$$P^h Q^k, \quad Q^k P^h,$$

et que l'ordre du système de ces dérivées est égal au produit

$$5.4 = 20$$

des nombres 5 et 4 qui représentent les ordres des substitutions P et Q. Ajoutons que, en vertu de la formule (20), on aura généralement

$$P^{2^k h} Q^k = Q^k P^h.$$

§ II. — *Sur la formation de fonctions qui offrent un nombre donné de valeurs égales ou un nombre donné de valeurs distinctes.*

Soit Ω une fonction donnée de n variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

Si certaines substitutions n'altèrent pas la valeur de Ω, toutes les dérivées de ces substitutions jouiront de la même propriété; et, par suite, *si l'on nomme*

$$1, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad \ldots$$

les substitutions diverses qui n'altéreront pas la valeur de la fonction Ω, celles-ci formeront toujours un système de substitutions conjuguées, dont l'ordre M sera précisément le nombre des valeurs égales de Ω.

On peut aussi démontrer la proposition réciproque, dont voici l'énoncé :

Théorème. — *Si M substitutions*

$$1, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad \ldots,$$

correspondantes au système de n variables $x, y, z, \ldots$, forment un système de substitutions conjuguées, on pourra toujours trouver une fonction Ω de ces variables, qui offre M valeurs égales.

Démonstration. — Soit s une fonction finie et continue de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

choisie arbitrairement parmi celles dont toutes les valeurs sont inégales, et posons, pour abréger,

$$N = 1.2\ldots n.$$

Les valeurs inégales de s, en nombre égal à N, correspondront aux divers arrangements que l'on pourra former avec les variables x, y, z, ...; et, si l'on nomme

$$s, \quad s_{\prime}, \quad s_{\prime\prime}, \quad \ldots$$

celles de ces valeurs qui seront fournies par les substitutions

$$1, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad \ldots,$$

appliquées à la fonction s; si d'ailleurs on représente par

$$F(s, s_{\prime}, s_{\prime\prime}, \ldots)$$

une fonction symétrique, finie et continue de s, $s_{\prime}$, $s_{\prime\prime}$, ..., cette dernière fonction ne pourra être altérée par aucune des substitutions dont il s'agit. Il est aisé d'en conclure que, si l'on pose

$$\Omega = F(s, s_{\prime}, s_{\prime\prime}, \ldots),$$

le nombre des valeurs égales de Ω sera égal à M ou à un multiple de M. Il y a plus : le nombre des valeurs égales de Ω ne sera un multiple de M que dans certains cas particuliers, par exemple lorsque, s

étant une fonction linéaire de $x, y, z, \ldots$, on prendra pour Ω, ou la somme $s + s_{,} + s_{,,} + \ldots$, ou une fonction de cette somme. Mais le plus souvent le nombre des valeurs égales de

$$\Omega = \mathrm{F}(s, s_{,}, s_{,,}, \ldots)$$

sera précisément M. On peut en particulier démontrer qu'il en sera ainsi quand on posera

$$\Omega = s s_{,} s_{,,} \ldots,$$

en prenant pour s une fonction linéaire de $x, y, z, \ldots$, déterminée par une équation de la forme

$$s = ax + by + cz + \ldots,$$

et en supposant que, dans cette même équation, les coefficients $a, b, c, \ldots$ des diverses variables sont des quantités inégales dont la somme ne s'évanouit pas. Admettons, en effet, cette hypothèse, et soit Ω' une des valeurs qu'on obtient pour la fonction Ω, en lui appliquant une substitution T non comprise dans la suite

$$1, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}, \quad \mathrm{R}, \quad \mathrm{S}, \quad \ldots.$$

Soit d'ailleurs

$$s' = a'x + b'y + c'z + \ldots$$

ce que devient s en vertu de la substitution T, les coefficients

$$a', \quad b', \quad c', \quad \ldots$$

étant les coefficients donnés

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots,$$

rangés dans un nouvel ordre. La fonction Ω' renfermera, au lieu du facteur s, le facteur s' qui ne sera pas compris dans Ω. Donc il sera impossible que l'on ait

$$\Omega' = \Omega,$$

quels que soient $x, y, z, \ldots$. Car, si cette condition était remplie, tout système de valeurs de $x, y, z, \ldots$, propre à vérifier l'équation

$$s' = 0 \quad \text{ou} \quad a'x + b'y + c'z + \ldots = 0,$$

entraînerait les formules

$$\Omega' = 0, \quad \Omega = 0,$$

et, par suite, l'une des formules

$$s = 0, \quad s_{,} = 0, \quad s_{,,} = 0, \quad \ldots,$$

par exemple l'équation

$$s = 0 \quad \text{ou} \quad ax + by + cz + \ldots = 0.$$

Or, des deux équations

$$a'x + b'y + c'z + \ldots = 0, \quad ax + by + cz + \ldots = 0,$$

dans lesquelles on a

$$a' + b' + c' + \ldots = a + b + c + \ldots,$$

l'une ne pourrait entraîner constamment l'autre que dans le cas où l'on aurait

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \ldots = \frac{a' + b' + c' + \ldots}{a + b + c + \ldots} = 1.$$

Par conséquent, dans l'hypothèse admise, Ω' sera distinct de Ω, et l'on pourra en dire autant de toutes les valeurs de Ω produites par des substitutions distinctes de

$$1, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}, \quad \mathrm{R}, \quad \mathrm{S}, \quad \ldots.$$

Donc ces dernières substitutions, dont aucune n'altérera la valeur de Ω, seront les seules qui jouissent de cette propriété; et leur nombre, représenté par M, sera aussi le nombre des valeurs égales de la fonction

$$\Omega = s s_{,} s_{,,} \ldots.$$

Corollaire I. — Le nombre des valeurs de la fonction Ω resterait évidemment égal à M si, au lieu de supposer

$$s = ax + by + cz + \ldots, \tag{1}$$

$$\Omega = s s_{,} s_{,,} \ldots, \tag{2}$$

on supposait

$$s = x^a y^b z^c \ldots, \tag{3}$$

$$\Omega = s + s_{\prime} + s_{\prime\prime} + \ldots. \tag{4}$$

Rien n'empêche, d'ailleurs, de réduire, dans l'équation (3), les exposants

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots,$$

aux nombres entiers

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n.$$

Alors la fonction Ω, déterminée par l'équation (4), est une fonction entière de $x, y, z, \ldots$, et son degré, indépendant de M, se trouve constamment représenté par le nombre triangulaire

$$\frac{n(n-1)}{2} = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Au contraire, la fonction Ω, déterminée par la formule (2), est une fonction entière de $x, y, z, \ldots$ du degré M.

Corollaire II. — Soit I l'indicateur maximum correspondant au module n. Soient, de plus, a un diviseur de n, et b un diviseur de I. Nous avons vu, dans le § I, que l'on peut toujours obtenir un système de substitutions conjuguées dont l'ordre soit égal au produit

$$nI,$$

ou même au rapport

$$\frac{nI}{ab}.$$

Donc, aussi, on pourra toujours, avec n lettres $x, y, z, \ldots$, composer une fonction Ω qui offre un nombre M de valeurs égales, la valeur de M étant déterminée par la formule

$$M = nI, \tag{5}$$

ou, plus généralement, par la formule

$$M = n\frac{I}{ab}. \tag{6}$$

Ajoutons que le nombre m des valeurs distinctes de cette fonction, constamment déterminé par l'équation

$$m = \frac{1.2\ldots n}{M}, \tag{7}$$

sera, dans le premier cas,

$$m = \frac{1.2\ldots(n-1)}{I}, \tag{8}$$

dans le second cas,

$$m = \frac{1.2\ldots(n-1)}{I}ab. \tag{9}$$

Si m se réduit à un nombre premier, on aura $I = n - 1$, et la formule (8) donnera

$$m = 1.2\ldots(n-2). \tag{10}$$

Ainsi, n étant un nombre premier quelconque, on pourra former avec n lettres une fonction telle que le nombre de ses valeurs distinctes soit égal au produit

$$1.2\ldots(n-2).$$

Cette remarque avait été déjà faite (*voir* la *Résolution des équations numériques*, de Lagrange, Note XIII). Au reste, dans un autre article, j'indiquerai les conséquences les plus importantes des formules que je viens d'établir, et je comparerai les résultats qui s'en déduisent avec ceux qui étaient déjà connus.

Corollaire III. — Si l'on prend successivement pour m les nombres

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10,$$

les valeurs correspondantes de I seront

$$1, \quad 2, \quad 2, \quad 4, \quad 2, \quad 6, \quad 2, \quad 6, \quad 4,$$

et, par suite, les valeurs de m tirées de la formule (8) seront

$$1, \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 60, \quad 120, \quad 2520, \quad 6720, \quad 90720.$$
