ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
19554 Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

Ire SÉRIE. — TOME IX.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC XCVI

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

277.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur l'emploi des variables complémentaires dans le développement des fonctions en séries.*

C. R., T. XX, p. 280 (3 février 1845).

On appelle, en Arithmétique, *nombres complémentaires* [1] deux nombres dont la somme est une unité d'un certain ordre; et l'on dit de même, en Géométrie, que deux angles sont *compléments* l'un de l'autre, lorsque leur somme équivaut à un angle droit. En transportant cette locution dans l'analyse algébrique, nous appellerons *variables complémentaires* deux variables dont la somme sera l'unité. L'objet de ce Mémoire est de montrer les grands avantages que présente l'em-

[1] En étendant cette définition, on a dit encore que deux nombres étaient *compléments* l'un de l'autre, quand ils offraient pour somme un nombre donné. L'usage des compléments dans les opérations de l'Arithmétique est l'objet spécial d'un Ouvrage publié en 1823 par M. Berthevin. En parcourant dernièrement cet Ouvrage, j'y ai trouvé, pour le calcul abrégé du produit de deux nombres, quelques règles dont chacune coïncide au fond avec celle que j'ai rapportée dans le *Compte rendu* de la séance du 16 novembre 1840 [page 795 [a]], et qui s'y trouve exprimée en termes tellement simples que, pour la démontrer, il suffirait de traduire son énoncé en formule algébrique.

[a] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. V, p. 431.

ploi des variables complémentaires dans le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives, d'une ou de plusieurs variables.

ANALYSE.

§ I. — *Considérations générales.*

Soit

$$x = r e^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont r désigne le module et p l'argument. Nommons y une autre variable liée à x par l'équation

$$x + y = 1. \tag{1}$$

Je dirai que les deux variables x, y, dont la somme est l'unité, sont *complémentaires* l'une de l'autre. Soit maintenant

$$z = \frac{y}{x} \tag{2}$$

le rapport des deux variables complémentaires y et x. On tirera des équations (1) et (2), non seulement

$$y = 1 - x, \qquad z = \frac{1}{x} - 1, \tag{3}$$

mais encore

$$x = 1 - y, \qquad \frac{1}{x} = 1 + z. \tag{4}$$

Or il suit évidemment des formules (4) que toute fonction entière de x et de $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire tout polynôme composé de termes proportionnels à des puissances entières, positives, nulle et négatives de x, pourra être transformé en une fonction entière des deux variables y, z; et, réciproquement, il suit des formules (3) que toute fonction entière des deux variables z, y pourra être transformée en un semblable polynôme. Donc, lorsqu'une fonction $F(x)$ de la variable x aura été développée suivant les puissances entières, positives, nulle et néga-

tives de cette variable, il suffira de recourir aux équations (4) pour transformer ce développement en une série ordonnée suivant les puissances entières, mais positives de y, z. Si, au contraire, par un moyen quelconque, on est parvenu à développer $F(x)$ en une série simple, ou même en une série double, ordonnée suivant les puissances entières, mais positives de y et z, il suffira de recourir aux équations (3) pour transformer cette série en un développement ordonné suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de la variable x. Il y a plus : on doit étendre cette remarque au cas où la fonction $F(x)$ serait développable en une série ordonnée suivant des puissances fractionnaires ou irrationnelles des variables y, z; ce qui arriverait, par exemple, si $F(x)$ pouvait être considérée comme le produit d'un facteur équivalent à une puissance positive ou négative, fractionnaire ou irrationnelle de la variable y, par un autre facteur développable en série ordonnée suivant les puissances entières et positives des deux variables y, z.

Il arrive souvent que le développement de la fonction $F(x)$ en une série ordonnée suivant les puissances entières de la variable x exige de longs calculs, et qu'il est, au contraire, facile de développer cette fonction en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable complémentaire y, et du rapport z ou $\frac{y}{x}$ de ces deux variables. Alors les transformations que nous venons de mentionner deviennent très utiles, et, par conséquent, la considération de la variable complémentaire fournit le moyen d'abréger notablement le travail.

D'ailleurs les formules que fournissent les diverses transformations dont nous venons de parler subsistent seulement sous certaines conditions et supposent évidemment la convergence des séries transformées. Il est essentiel de connaître ces conditions, et c'est pour y parvenir que nous avons établi la plupart des théorèmes énoncés dans la dernière séance. Nous allons, dans le paragraphe suivant, présenter quelques observations qui permettront d'introduire dans notre analyse une précision plus grande, et de donner aux théorèmes dont il s'agit une extension nouvelle.

§ II. — *Théorèmes généraux.*

Dans le Mémoire que renferme le *Compte rendu* de la séance du 20 janvier dernier, nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soit*

$$x = r e^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont p *désigne l'argument. Soit encore* $F(x)$ *une fonction de* x *qui se décompose en deux facteurs représentés, l'un par* $\varpi(x)$, *l'autre par* $f(y)$, y *étant lui-même fonction de* x; *et supposons que* $f(y)$ *reste fonction continue de* y *pour tout module de* y *qui ne surpasse pas une certaine limite* y. *Enfin, soit* A_n *le coefficient de* x^n *dans le développement de* $F(x)$ *en série ordonnée suivant les puissances entières de* x; *et posons*

$$Y = \frac{1}{\mathrm{y}}.$$

Au développement de $f(y)$ *en série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de* y *correspondra un développement de* A_n *qui sera convergent si la valeur trouvée de* Y *rend convergente la série modulaire qui correspond au développement de l'intégrale*

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\frac{\varpi(x)}{1-Yy}\,dp$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y.

Corollaire I. — Supposons maintenant que $\varpi(x)$ reste fonction continue de x, pour tout module de x inférieur à une certaine limite x. Concevons d'ailleurs que la valeur de n soit positive, la lettre n représentant un nombre entier quelconque, et que le développement de $F(x)$ en série ait été effectué pour un module r de x inférieur à x, mais très peu différent de x. Enfin prenons

$$y = 1 - x.$$

L'intégrale (1), dans laquelle on devra supposer le module r de x inférieur à la limite x, deviendra

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\frac{\varpi(x)}{1-Y+xY}\,dp,$$

et, en raisonnant comme à la page 134 [1], on prouvera que le développement de l'intégrale (2) en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de Y est convergent avec la série modulaire correspondante quand Y vérifie la condition

$$Y < 1.$$

Corollaire II. — Concevons à présent que l'on prenne, non plus

$$y = 1 - x,$$

mais

$$y = \frac{1-x}{x}.$$

L'intégrale (1) deviendra

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n+1}\frac{\varpi(x)}{(1+Y)x - Y}\,dp.$$

Or, si le rapport

$$\frac{Y}{1+Y}$$

est inférieur à la limite x, la valeur de l'intégrale (3), comme on l'a déjà remarqué (page 135) [2], sera ce que devient l'expression

$$\frac{\varpi(x) - \varpi(0) - \frac{x}{1}\varpi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varpi^{(n-1)}(0)}{(1+Y)x^n}$$

quand on y pose

$$x = \frac{Y}{1+Y}.$$

Donc, par suite, pour que le développement de l'intégrale (3), suivant les puissances entières et ascendantes de Y, reste convergent avec la série modulaire correspondante, il suffira que le développement de la

[1] *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 431.
[2] *Ibid.*, p. 432.

fonction

$$\varpi\left(\frac{Y}{1+Y}\right),$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y, reste lui-même convergent avec la série modulaire qui correspond à ce dernier développement. La condition que nous venons d'énoncer doit être généralement substituée aux conditions (9) de la page 135 [1], et s'accorde d'ailleurs avec elles dans le cas spécial que nous avions particulièrement en vue, c'est-à-dire dans le cas où $\varpi(x)$ se réduit à une puissance positive ou négative de $1-x$. En effet, si, pour fixer les idées, on pose, comme dans le *Compte rendu* de la séance du 27 janvier (page 217) [2],

$$\varpi(x)=(1-x)^{-s}, \tag{4}$$

on en conclura

$$\varpi\left(\frac{Y}{1+Y}\right)=(1+Y)^{s},$$

et il est clair que le développement de

$$(1+Y)^{s},$$

suivant les puissances ascendantes de Y, sera convergent avec la série modulaire correspondante, quand Y vérifiera la condition

$$Y<1.$$

D'autre part, lorsque l'on pose

$$\varpi(x)=(1-x)^{-s},$$

la limite x se réduit à l'unité, ce qui fait disparaître la première des conditions (9) en la réduisant à la formule

$$Y<\infty.$$

Ajoutons que, en vertu des observations précédentes, le théorème II de la page 137 [3] subsistera, non seulement quand la valeur de $\varpi(x)$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 432.
(2) *Ibid.*, p. 440.
(3) *Ibid.*, p. 434.

sera donnée par l'équation (4), mais encore dans le cas contraire, si, d'ailleurs, la valeur de Y rend convergente la série modulaire qui correspond au développement de la fonction

$$\varpi\left(\frac{Y}{1+Y}\right)$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y. Il y a plus : on pourra supposer, dans ce théorème, comme au commencement de ce paragraphe, que $\varpi(x)$ reste fonction continue de x seulement pour tout module de x inférieur à x, et que A_n représente le coefficient de x^n dans le développement de $F(x)$, calculé pour un module de x inférieur à la limite x, mais très peu différent de cette limite. En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Soit*

$$x=re^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont r *désigne le module et* p *l'argument. Soient, de plus,* $\varpi(x)$ *une fonction de* x *qui reste continue pour tout module de* x *inférieur à une certaine limite* x, *et* $f(y, z)$ *une fonction de* y, z *qui demeure continue pour tous les modules de* y, z *qui ne surpassent pas certaines limites* y, z. *Faisons d'ailleurs*

$$Y=\frac{1}{y}, \qquad Z=\frac{1}{z},$$

et nommons $F(x)$ *une fonction de* x *déterminée par le système des équations*

$$F(x)=\varpi(x)\,f(y,z), \tag{5}$$

$$y=1-x, \qquad z=\frac{1-x}{x}, \tag{6}$$

en sorte que, dans l'équation (5), x, y *représentent deux variables complémentaires, et* z *le rapport de ces variables. Enfin supposons que, pour un module de* x *inférieur à la limite* x, *mais très peu différent de cette limite, on ait développé la fonction* $F(x)$ *suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de* x, *et que, la lettre* n *désignant un nombre entier quelconque, on représente par* A_n *le coefficient de* x^n *dans le déve-*

loppement de $\mathrm{F}(x)$. *Alors, au développement de* $\mathrm{f}(y, z)$ *suivant les puissances entières et ascendantes de* y, z, *répondra un développement de* A_n *qui sera convergent avec la série modulaire correspondante si les valeurs de* Y, Z *vérifient la condition*

$$\mathrm{Y} + \mathrm{Z} < 1, \tag{7}$$

et si, d'ailleurs, la valeur trouvée de Y *rend convergente la série modulaire qui correspond au développement de*

$$\varpi\left(\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Y}}\right)$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y.

En partant du théorème qui précède et en raisonnant comme nous l'avons fait dans le Mémoire du 27 janvier (page 213, etc.) (¹), on établira la proposition suivante, qui se trouvera substituée au théorème II de la page 216 (²).

Théorème III. — *Soit* $\varpi(x)$ *une fonction de* x *qui reste continue, par rapport à la variable* x, *pour tout module de* x *inférieur à une certaine limite* x. *Soit, de plus,* $\mathrm{f}(y, z)$ *une fonction de* y, z *qui reste continue, par rapport à* y *et* z, *tant que le module de* y *ne surpasse pas une certaine limite* y, *ni le module de* z *une certaine limite* z. *Faisons d'ailleurs*

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{y}}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{1}{\mathrm{z}},$$

et nommons $\mathrm{F}(x)$ *une fonction de* x, *déterminée par le système des équations*

$$\mathrm{F}(x) = \varpi(x)\,\mathrm{f}(y, z),$$

$$y = 1 - x, \qquad z = \frac{1-x}{x}.$$

Supposons que, pour un module de x *inférieur à la limite* x, *mais très peu différent de cette limite, on ait développé la fonction* $\mathrm{F}(x)$ *suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de* x; *désignons par* n,

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 435, etc.
(²) *Ibid.*, p. 439.

m, m' *trois nombres entiers quelconques, et représentons :* 1° *par* A_n *le coefficient de* x^n *dans le développement de* $\mathrm{F}(x)$; 2° *par* $\mathrm{H}_{m,m'}$ *le coefficient du produit* $y^m z^{m'}$ *dans le développement de* $\mathrm{f}(y, z)$ *suivant les puissances entières et ascendantes de* y, z. *Enfin, concevons que la fonction* $\mathrm{f}(y, z)$ *renferme, avec* y *et* z, *divers paramètres*

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad a', \quad b', \quad \ldots;$$

admettons que, pour des valeurs nulles de ces paramètres, chacune des limites y, z *surpasse le nombre* 2, *et que les coefficients*

$$\mathrm{A}_n, \quad \mathrm{H}_{m,m'}$$

restent fonctions continues de

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad a', \quad b', \quad \ldots$$

pour des modules de ces paramètres inférieurs à certaines limites. Si, pour de semblables modules, les valeurs de y, z *sont telles que l'on ait constamment*

$$\mathrm{Y} + \mathrm{Z} < 1,$$

et que le développement de la fonction

$$\varpi\left(\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Y}}\right)$$

reste convergent avec la série modulaire correspondante, alors on aura toujours, entre les limites assignées aux modules des paramètres $a, b, \ldots, a', b', \ldots,$

$$\mathrm{A}_n = \Sigma\,\mathrm{H}_{m,m'}\,\Delta^{m+m'} k_{n-m}, \tag{8}$$

la somme qu'indique le signe Σ *s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives des nombres* m, m'; *la valeur de* k_n *étant*

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\,\varpi(x)\,dp, \tag{9}$$

et la lettre caractéristique Δ *des différences finies étant relative au nombre entier* n.

Corollaire I. — Si, pour fixer les idées, on suppose

$$\varpi(x) = (1-x)^{-s},$$

s désignant une quantité quelconque positive ou même négative, alors non seulement la limite x du module de x se trouvera réduite à l'unité, mais de plus, en posant, pour abréger,

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n},$$

on aura

$$k_n = [s]_n,$$

et par suite la formule (8) donnera

$$\text{(10)} \qquad A_n = \Sigma\, H_{m,m'}[s-m-m']_{n+m'}.$$

Corollaire II. — Si, dans la fonction

$$F(x) = \varpi(x)\, f(y,z),$$

on remplace le facteur $f(y, z)$ par un produit de la forme

$$\varphi(x)\,\chi\left(\frac{1}{x}\right),$$

alors, eu égard aux équations

$$x = 1-y, \qquad \frac{1}{x} = 1+z,$$

on aura identiquement

$$f(y,z) = \varphi(1-y)\,\chi(1+z);$$

puis on en conclura

$$\text{(11)} \qquad H_{m,m'} = (-1)^{m'} \frac{\varphi^{(m)}(1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\chi^{(m')}(1)}{1.2\ldots m'},$$

chacun des produits

$$1.2\ldots m, \quad 1.2\ldots m'$$

devant être remplacé par l'unité, quand le nombre m ou m' s'évanouit.

Corollaire III. — Si l'on suppose à la fois

$$\varpi(x) = (1-x)^{-s}, \qquad f(y,z) = \varphi(x)\,\chi\left(\frac{1}{x}\right)$$

et, par suite,

$$\text{(12)} \qquad F(x) = (1-x)^{-s}\,\varphi(x)\,\chi\left(\frac{1}{x}\right),$$

on tirera des formules (10) et (11)

$$A_n = \Sigma(-1)^m \frac{\varphi^{(m)}(1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\chi^{(m')}(1)}{1.2\ldots m'}[s-m-m']_{n+m'}.$$

Corollaire IV. — Concevons maintenant que, dans la formule (12), on pose

$$\varphi(x) = (1-ax)^{\mu}(1-bx)^{\nu}\ldots\Phi(x)$$

et

$$\chi(x) = (1-a'x)^{\mu'}(1-b'x)^{\nu'}\ldots X(x),$$

$\mu, \nu, \ldots, \mu', \nu', \ldots$ étant des exposants réels,

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad a', \quad b', \quad \ldots$$

des paramètres réels ou imaginaires dont les modules

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{b}, \quad \ldots, \quad \mathrm{a}', \quad \mathrm{b}', \quad \ldots$$

seront inférieurs à l'unité, et

$$\Phi(x), \quad X(x)$$

deux fonctions de x dont chacune reste continue pour tout module fini de x. Alors, en raisonnant comme dans le précédent Mémoire, on reconnaîtra que le théorème III de la page 222 (¹) s'étend au cas même où l'exposant s cesse d'être renfermé entre les limites 0, 1. On pourra donc énoncer encore la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soit* $F(x)$ *une fonction déterminée par une équation de la forme*

$$\text{(12)} \qquad F(x) = \frac{\varphi(x)\,\chi\left(\frac{1}{x}\right)}{(1-x)^s},$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 445.

s désignant une quantité quelconque positive ou négative. Supposons, d'ailleurs,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= (1-ax)^{\mu}(1-bx)^{\nu}\ldots\Phi(x),\\ \chi(x) &= (1-a'x)^{\mu'}(1-b'x)^{\nu'}\ldots\mathrm{X}(x),\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$\mu, \nu, \ldots, \mu', \nu', \ldots$ étant des exposants réels, $\Phi(x)$, $\mathrm{X}(x)$ deux fonctions toujours continues de x, et

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad a',\quad b',\quad \ldots$$

des paramètres dont les modules

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \ldots,\quad \mathrm{a}',\quad \mathrm{b}',\quad \ldots$$

soient tous inférieurs à l'unité. Enfin, supposons que, pour un module de x inférieur à la limite 1, mais très peu différent de l'unité, on développe la fonction $\mathrm{F}(x)$ suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de x, et que, n étant un nombre entier quelconque, on désigne par A_n le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{F}(x)$. Si le plus grand des rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{a}},\quad \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}},\quad \ldots,$$

joint au plus grand des rapports

$$\frac{\mathrm{a}'}{1-\mathrm{a}'},\quad \frac{\mathrm{b}'}{1-\mathrm{b}'},\quad \ldots,$$

fournit une somme inférieure à l'unité, alors on aura

$$\mathrm{A}_n = \Sigma(-1)^m \frac{\varphi^{(m)}(1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\chi^{(m')}(1)}{1.2\ldots m'}[s-m-m']_{n+m'}, \tag{14}$$

la valeur de $[s]_n$ étant déterminée par la formule

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

Corollaire I. — Si l'on nomme Y le plus grand des rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{a}},\quad \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}},\quad \ldots,$$

et Z le plus grand des rapports

$$\frac{\mathrm{a}'}{1-\mathrm{a}'},\quad \frac{\mathrm{b}'}{1-\mathrm{b}'},\quad \ldots,$$

on pourra énoncer très simplement le théorème IV en disant que, dans les suppositions admises, le coefficient A_n sera développable par la formule (14) en une série convergente, si l'on a

$$\mathrm{Y}+\mathrm{Z}<1. \tag{15}$$

Corollaire II. — On pourrait conclure immédiatement du théorème I (corollaire II) que la condition (15), supposée remplie, assure la convergence du développement de A_n correspondant au développement du seul facteur $\chi\left(\frac{1}{x}\right)$, suivant les puissances ascendantes de la variable $z = \frac{1}{x} - 1$. En effet, l'équation (12) sera évidemment réduite à la forme

$$\mathrm{F}(x) = \varpi(x)\,\mathrm{f}(z), \tag{16}$$

la valeur de z étant

$$z = \frac{1-x}{x}, \tag{17}$$

si l'on pose

$$\varpi(x) = (1-x)^{-s}\varphi(x),\qquad \mathrm{f}(z) = \chi(1-z), \tag{18}$$

et il est clair que, dans ce cas, eu égard à la seconde des équations (13), $\mathrm{f}(z)$ restera fonction continue de z, pour tout module de z inférieur au module représenté, dans la formule (15), par la lettre Z. Alors aussi au développement de $\mathrm{f}(z)$ suivant les puissances entières et ascendantes de z correspondra un développement de A_n qui, en vertu du théorème I (corollaire II), sera convergent avec la série modulaire correspondante, si la valeur trouvée de Z rend convergente la série modulaire qui correspond au développement de la fonction

$$\varpi\left(\frac{\mathrm{Z}}{1+\mathrm{Z}}\right)$$

suivant les puissances ascendantes de Z. Mais, eu égard aux formules (13) et (18), on aura

$$(19)\qquad \varpi(x) = (1-x)^{-s}(1-ax)^{\mu}(1-bx)^{\nu}\ldots\Phi(x),$$

par conséquent

$$(20)\qquad \varpi\left(\frac{Z}{1+Z}\right) = \frac{[1+(1-a)Z]^{\mu}[1+(1-b)Z]^{\nu}\ldots}{(1+Z)^{\mu+\nu+\ldots-s}}\,\Phi\left(\frac{Z}{1+Z}\right);$$

et il résulte de la formule (20) que la série modulaire correspondante au développement de $\varpi\left(\frac{Z}{1+Z}\right)$ sera convergente si le module Z reste inférieur, non seulement à l'unité, mais encore au plus petit des modules des rapports

$$\frac{1}{1-a},\quad \frac{1}{1-b},\quad \ldots.$$

Or ces deux conditions seront certainement remplies si les valeurs de Y, Z vérifient la formule (15), puisqu'alors on aura, par exemple,

$$Z + \text{mod.}\frac{a}{1-a} < 1,$$

$$Z < 1 - \text{mod.}\frac{a}{1-a},$$

et que le module de $\frac{1}{1-a}$ sera, ou égal, ou supérieur à la différence

$$1 - \text{mod.}\frac{a}{1-a}.$$

Corollaire III. — En vertu des formules

$$x = 1-y,\qquad \frac{1}{x} = 1-z,$$

l'équation (12) se réduit à

$$F(x) = (1-x)^{-s}\varphi(1-y)\chi(1+z),$$

et la valeur de A_n, donnée par la formule (14), est précisément celle

que l'on déduit de l'équation

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dp$$

quand on transforme $F(x)$ en une série double, en développant $\varphi(1-y)$ suivant les puissances ascendantes de y, et $\chi(1+z)$ suivant les puissances ascendantes de z. Ajoutons que, au lieu d'effectuer à la fois ces deux développements, on pourrait les effectuer l'un après l'autre, et qu'alors A_n se trouverait transformé, non plus en une série double, mais en une série simple dont chaque terme serait lui-même la somme d'une autre série simple. Or il est bon d'observer que les deux séries simples dont il s'agit peuvent être l'une et l'autre convergentes, dans le cas même où la série double qui renferme tous les termes contenus dans les deux séries simples serait divergente. Dans un prochain article, j'établirai ce fait important, et je montrerai le parti qu'on en peut tirer pour l'extension des nouvelles formules et de leurs applications à l'Astronomie.

278.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur des formules rigoureuses et dignes de remarque, auxquelles on se trouve conduit par la considération de séries multiples et divergentes.*

C. R., T. XX, p. 329 (10 février 1845).

J'ai déjà remarqué, dans un précédent Mémoire, l'usage légitime que l'on peut faire, dans certains cas, de séries simples et divergentes, pour obtenir les valeurs de certaines quantités, sinon avec une approximation indéfinie, du moins avec une approximation très grande, qui, souvent, est plus que suffisante pour les besoins du calcul. Dans ce nouveau Mémoire, j'irai plus loin et j'établirai une proposition qui semble paradoxale au premier abord. Je ferai voir comment, à l'aide de séries divergentes, on peut quelquefois déterminer les quantités inconnues, non plus seulement avec une grande approximation, mais, ce qui paraîtra plus étonnant, avec une approximation indéfinie, de manière à en obtenir des valeurs aussi approchées que l'on voudra. Or c'est effectivement ce qui peut arriver lorsque les séries employées dans le calcul sont multiples et divergentes. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons, en particulier, une fraction rationnelle qui offre pour numérateur l'unité et pour dénominateur cette même unité diminuée de la somme de deux variables. On pourra développer cette fraction rationnelle en une progression géométrique dont la raison sera la somme dont il s'agit, puis développer chaque terme de la progression en une série simple par la formule du binôme. On obtiendra ainsi une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières des deux variables. Or cette série double sera évidemment convergente, si les modules des deux variables fournissent une somme inférieure à l'unité. Dans le cas contraire, la série double deviendra certainement divergente, attendu que, parmi les termes correspondants à des puissances très élevées des deux variables, quelques-uns deviendront très considérables. Néanmoins il est facile de s'assurer que, si la somme algébrique des deux variables et le module de chacune d'elles restent inférieurs à l'unité, on pourra grouper les termes de la série double de manière à la transformer en une série simple convergente, dont chaque terme sera lui-même la somme d'une autre série simple convergente. On y parviendra, par exemple, en supposant que la première série simple soit ordonnée suivant les puissances ascendantes de la première variable, et la seconde série simple, suivant les puissances ascendantes de la seconde variable.

Il importe de faire connaître le parti qu'on peut tirer, dans la haute analyse, du fait important que je viens de signaler. Les formules auxquelles je suis parvenu de cette manière sont particulièrement utiles dans la théorie des mouvements planétaires. Elles permettent d'exprimer, par exemple, toute perturbation relative au système de deux planètes et correspondante à deux multiples donnés des anomalies

moyennes, par une simple fonction des deux nombres entiers qui servent de coefficients à ces anomalies.

Analyse.

Considérons, pour fixer les idées, une série double, et supposons cette série divergente. On pourra souvent, dans cette hypothèse, partager les termes en divers groupes, de telle sorte que les termes compris dans chaque groupe forment une série simple convergente, et que les sommes des séries simples correspondantes aux divers groupes forment à leur tour une autre série simple qui soit encore convergente. Pour démontrer la vérité de cette assertion, considérons, en particulier, la série double produite par le développement de la fonction

$$\frac{1}{1-x-y}$$

suivant les puissances ascendantes de x et de y. Cette série sera certainement convergente, si les modules x, y des deux variables x, y vérifient la condition

$$\mathrm{x}+\mathrm{y}<1. \tag{1}$$

Car, tant que cette condition sera remplie, la fonction

$$\frac{1}{1-x-y}$$

restera continue par rapport aux deux variables x, y. Alors, pour obtenir le développement en question, il suffira de développer d'abord la fraction $\frac{1}{1-x-y}$ suivant les puissances ascendantes de la somme $x+y$, puis de développer chacune de ces puissances par la formule du binôme. On trouvera ainsi, premièrement

$$\frac{1}{1-x-y}=1+(x+y)+(x+y)^2+\ldots, \tag{2}$$

puis

$$\frac{1}{1-x-y}=1+x+y+x^2+2xy+y^2+\ldots. \tag{3}$$

Or, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, le terme proportionnel au produit $x^n y^n$, dans le second membre de l'équation (3), sera évidemment

$$\frac{1.2\ldots 2n}{(1.2\ldots n)^2} x^n y^n.$$

De plus, le module de ce terme, ou le produit

$$\frac{1.2\ldots 2n}{(1.2\ldots n)^2} \mathrm{x}^n \mathrm{y}^n,$$

se réduira simplement, pour de grandes valeurs de n, au rapport

$$\frac{(4\mathrm{xy})^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

D'ailleurs ce rapport décroîtra indéfiniment avec $\frac{1}{n}$, si l'on a

$$(4) \qquad 4\mathrm{xy} < 1,$$

et, par suite, si l'on a $\mathrm{x} + \mathrm{y} < 1$, puisque, en vertu de la formule

$$(\mathrm{x} + \mathrm{y})^2 = 4\mathrm{xy} + (\mathrm{x} - \mathrm{y})^2,$$

la condition (1) entraîne toujours la condition (4). Mais, si l'on a, au contraire,

$$(5) \qquad 4\mathrm{xy} > 1,$$

le rapport dont il s'agit croîtra indéfiniment avec n. Donc la série double produite par le développement de la fonction

$$\frac{1}{1 - x - y}$$

cessera d'être convergente, et par suite la formule (3) cessera de subsister si la condition (5) se vérifie. Toutefois, si les modules des deux variables x, y et de leur somme $x + y$ restent tous trois inférieurs à l'unité, alors, en groupant convenablement les termes de la série double, on pourra la transformer en une série simple convergente dont chaque terme soit lui-même la somme d'une autre série simple

et convergente. En effet, on y parviendra en réunissant, dans chaque groupe, tous les termes dans lesquels les exposants des variables x, y offrent une somme donnée, ou bien encore tous les termes proportionnels à une même puissance de x, ou enfin tous les termes proportionnels à une même puissance de y. Cela posé, la transformation de la série double en série simple produira, dans le premier cas, la formule

$$(6) \qquad \frac{1}{1 - x - y} = 1 + (x + y) + (x^2 + 2xy + y^2) + \ldots,$$

qui ne diffère pas de l'équation (2), et, dans les deux autres cas, les formules

$$(7) \qquad \frac{1}{1 - x - y} = 1 + x(1 + y + y^2 + \ldots) + x^2(1 + 2y + 3y^2 + \ldots) + \ldots,$$

$$(8) \qquad \frac{1}{1 - x - y} = 1 + y(1 + x + x^2 + \ldots) + y^2(1 + 2x + 3x^2 + \ldots) + \ldots,$$

qui, eu égard aux équations

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x}, \qquad 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1 - x)^2}, \qquad \ldots,$$

peuvent s'écrire comme il suit :

$$(9) \qquad \frac{1}{1 - x - y} = 1 + \frac{x}{1 - y} + \frac{x^2}{(1 - y)^2} + \ldots,$$

$$(10) \qquad \frac{1}{1 - x - y} = 1 + \frac{y}{1 - x} + \frac{y^2}{(1 - x)^2} + \ldots.$$

La formule (6) et les équations (7), (8), ou (9), (10) se vérifient, par exemple, dans le cas où l'on suppose

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad y = -\tfrac{1}{3}.$$

Il suit de ce qu'on vient de dire qu'on peut faire servir à la détermination des valeurs numériques des fonctions les développements de ces fonctions en séries multiples, même divergentes, pourvu que les termes des séries divergentes puissent être groupés entre eux de manière à former, dans chaque groupe, une série simple convergente.

Cette observation importante nous permettra de donner une extension nouvelle aux formules obtenues dans les précédents Mémoires. C'est ce que nous montrerons, en commençant par généraliser encore quelques-uns des théorèmes que nous avons établis.

Soit

$$\mathrm{f}(x, y)$$

une fonction des variables x, y, qui reste continue par rapport à y, lorsque, en attribuant à x un certain module x, on suppose le module de y inférieur ou tout au plus égal à une certaine limite y. Posons d'ailleurs

$$z = \mathrm{y}\, e^{q\sqrt{-1}},$$

q désignant un argument réel. On aura, pour un module de y égal ou inférieur à y,

$$\mathrm{f}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z}{z-y}\, \mathrm{f}(x, z)\, dq, \tag{11}$$

et, pour développer $\mathrm{f}(x, y)$ suivant les puissances ascendantes de y, il suffira de développer le rapport

$$\frac{z}{z-y}$$

dans le second membre de la formule (11), en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de y. Soit

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots \tag{12}$$

la série ainsi obtenue. On aura, en désignant par m un nombre entier quelconque,

$$u_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{y}{z}\right)^m \mathrm{f}(x, z)\, dq. \tag{13}$$

Supposons maintenant que y devienne fonction de x, et que, le module de x étant x, l'on développe chaque terme de la série (12) en une nouvelle série ordonnée suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de x. Soient d'ailleurs

$$\mathrm{U}_0,\quad \mathrm{U}_1,\quad \mathrm{U}_2,\quad \ldots \tag{14}$$

les divers coefficients de x^n dans les développements ainsi calculés, n étant un nombre entier quelconque. Alors, en faisant

$$x = \mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\mathrm{U}_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n} u_m\, dp \tag{15}$$

et, par suite,

$$\mathrm{U}_m = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n} \left(\frac{y}{z}\right)^m \mathrm{f}(x, z)\, dp\, dq. \tag{16}$$

D'ailleurs, en vertu de l'équation (16), le module de U_m sera le même que celui de l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n} (\mathrm{Y}y)^m \mathrm{f}(x, z)\, dp\, dq,$$

la valeur de Y étant

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{y}}, \tag{17}$$

et il est aisé d'en conclure que la série (12) sera convergente, si la série dont le terme général est l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n} (\mathrm{Y}y)^m \mathrm{f}(x, z)\, dp \tag{18}$$

reste convergente, avec la série modulaire correspondante, pour toute valeur de z dont le module est y. Enfin il est clair que la série dont l'expression (18) est le terme général se confond avec le développement de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-n}}{1-\mathrm{Y}y}\, \mathrm{f}(x, z)\, dp$$

suivant les puissances ascendantes de Y. On peut donc énoncer généralement la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit* $\mathrm{f}(x, y)$ *une fonction de* x, y *qui reste continue, par rapport à* y, *pour un module* x *de la variable* x *que l'on suppose déterminée par l'équation*

$$x = \mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}},$$

et pour un module de y égal ou inférieur à une certaine limite y. *Soit d'ailleurs*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots$$

la série que fournit le développement de $f(x, y)$ *suivant les puissances ascendantes de* y, *dans le cas où le module de* y *ne surpasse pas* y, *et supposons que,* y *devenant fonction de* x, *chaque terme de la série*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots$$

soit développé suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de x. *Alors, la lettre* n *désignant un nombre entier quelconque, et la valeur de* Y *étant*

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{y}},$$

les coefficients de x^n *dans les développements des divers termes*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots$$

formeront une nouvelle série qui sera convergente avec la série modulaire correspondante, si le développement de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{-n}}{1 - \mathrm{Y}y} f(x, z)\,dp, \tag{19}$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y, *reste lui-même convergent avec la série modulaire correspondante,* z *désignant une variable distincte de* y, *et qui ait pour module* y.

Corollaire I. — Si l'on suppose que, dans le théorème I, x, y représentent deux variables complémentaires, en sorte qu'on ait

$$y = 1 - x,$$

alors, d'après ce qui a été dit à la page 134 [1], on obtiendra pour l'intégrale (19) un développement qui restera convergent avec la série modulaire correspondante, quand on aura

$$\mathrm{Y} < 1. \tag{20}$$

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 431.

Corollaire II. — Si, dans le théorème I, on suppose

$$y = \frac{1-x}{x},$$

alors, d'après ce qui a été dit à la page 9, on obtiendra pour l'intégrale (19) un développement qui restera convergent avec la série modulaire correspondante, si le développement de la fonction

$$f\left(\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Y}}, z\right), \tag{21}$$

suivant les puissances entières et ascendantes de y, reste lui-même convergent avec la série modulaire qui correspond à ce dernier développement.

Corollaire III. — Supposons toujours que la fonction $f(x, y)$ reste continue par rapport à y, pour un module de y égal ou inférieur à y. Alors, θ étant un nombre quelconque, la fonction $f(x, \theta y)$ restera continue par rapport à y, pour un module de y égal ou inférieur à $\frac{\mathrm{y}}{\theta}$. Donc, si l'on substitue à la fonction $f(x, y)$ la fonction $f(x, \theta y)$, on devra, dans l'intégrale (19), remplacer le binôme

$$1 - \mathrm{Y}y = 1 - \mathrm{y}^{-1}y$$

par le binôme

$$1 - \left(\frac{\mathrm{y}}{\theta}\right)^{-1} y = 1 - \theta \mathrm{Y} y,$$

sans changer le facteur

$$f(x, z),$$

attendu qu'une valeur de ce facteur correspondante au module y de z sera, en même temps, une valeur de la fonction

$$f(x, \theta z),$$

correspondante au module $\frac{\mathrm{y}}{\theta}$ de z. Donc, lorsqu'on remplacera $f(x, y)$ par $f(x, \theta y)$, la condition (20) se trouvera remplacée par la formule

$$\theta \mathrm{Y} < 1, \tag{22}$$

et la fonction (21) par la suivante

$$\mathrm{f}\left(\frac{\theta \mathrm{Y}}{1+\theta \mathrm{Y}}, y\right). \tag{23}$$

D'ailleurs, dans le cas dont il s'agit, le développement de la fonction $\mathrm{f}(x, \theta y)$, suivant les puissances ascendantes de y, sera aussi le développement de cette fonction suivant les puissances ascendantes de θ. Donc le théorème I entraînera encore ceux que nous allons énoncer.

Théorème II. — *Soit* $\mathrm{f}(x, y)$ *une fonction de* x, y *qui reste continue, par rapport à* y, *pour un module* x *de la variable* x *que l'on suppose déterminée par l'équation*

$$x = \mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}},$$

et pour un module de y *égal ou inférieur à une certaine limite* y. *Supposons d'ailleurs que,* θ *étant un nombre quelconque, on pose*

$$y = 1 - x,$$

et que l'on développe

$$\mathrm{f}(x, \theta y) = \mathrm{f}[x, \theta(1-x)]$$

en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes de θ *et suivant les puissances entières de* x. *Alors,* n *étant un nombre entier quelconque, et la valeur de* Y *étant*

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{y}},$$

les divers coefficients de x^n, *dans la série double dont il s'agit, formeront une série simple qui sera convergente avec la série modulaire correspondante, si l'on a*

$$\theta \mathrm{Y} < 1 \tag{24}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\theta < \mathrm{y}. \tag{25}$$

Théorème III. — *Soit* $\mathrm{f}(x, y)$ *une fonction de* x, y *qui reste continue, par rapport à* y, *pour un module* x *de la variable* x *que l'on suppose dé-*

terminée par l'équation

$$x = \mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}},$$

et pour un module de y *égal ou inférieur à une certaine limite* y. *Supposons d'ailleurs que,* θ *étant un nombre quelconque, on pose*

$$y = \frac{1-x}{x},$$

et que l'on développe

$$\mathrm{f}(x, \theta y) = \mathrm{f}\left(x, \theta\,\frac{1-x}{x}\right)$$

en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes de θ *et suivant les puissances entières de* x. *Alors,* n *étant un nombre entier quelconque, et la valeur de* Y *étant*

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{y}},$$

les divers coefficients de x^n, *dans la série double dont il s'agit, formeront une série simple qui sera convergente avec la série modulaire correspondante, si le développement de la fonction*

$$\mathrm{f}\left(\frac{\theta \mathrm{Y}}{1+\theta \mathrm{Y}}, z\right) = \mathrm{f}\left(\frac{\theta}{\mathrm{y}+\theta}, z\right), \tag{26}$$

suivant les puissances ascendantes de θ, *reste lui-même convergent avec la série modulaire qui correspond à ce dernier développement, pour toute valeur de* z *qui offre un module égal* y.

Désignons maintenant, pour abréger, par $\mathrm{F}(x)$ la fonction de x représentée dans le théorème II par

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)]$$

ou, dans le théorème III, par

$$\mathrm{f}\left(x, \theta\,\frac{1-x}{x}\right).$$

Supposons toujours que cette fonction $\mathrm{F}(x)$ soit développée, d'une part, suivant les puissances ascendantes de θ, d'autre part, suivant les puissances entières de x, le module de x étant x. Concevons d'ailleurs que la série simple, formée dans le développement dont il s'agit, par les divers coefficients de x^n, série qui se trouvera ordonnée suivant les puissances ascendantes de θ, reste convergente, en vertu du théorème II ou III, pour toute valeur de θ inférieure à une certaine limite Θ; et nommons B_n la somme de cette série simple. Si l'on attribue à θ une valeur variable réelle ou même imaginaire, la somme B_n restera fonction continue de θ pour tout module de θ inférieur à Θ. Supposons à présent que l'on développe la fonction $F(x)$, non plus en une série double, mais en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de x, le module de x étant toujours x, et nommons A_n le coefficient de x^n dans le nouveau développement de $F(x)$. On aura généralement, pour de très petites valeurs de θ,

$$A_n = B_n. \tag{27}$$

En effet, puisque A_n et B_n seront les coefficients ou la somme des coefficients de x^n dans la série simple et la série double qui représenteront les deux développements de $F(x)$, il est clair que la formule (27) devra subsister tant que la série double sera convergente, ce qui aura certainement lieu lorsque les modules de x et de θ se rapprocheront assez, le premier de x, le second de zéro, pour que la fonction $F(x)$ devienne, en vertu d'un tel rapprochement, toujours continue par rapport aux deux variables x, θ. D'ailleurs l'équation (27), étant vérifiée pour de très petites valeurs de θ, devra continuer de subsister (*voir* la séance du 20 janvier, page 120) [1], tant que A_n et B_n resteront fonctions continues de θ. Elle devra donc subsister pour toute valeur de θ inférieure à la limite Θ, si la limite Θ est telle que la fonction A_n reste continue par rapport à θ pour tout module de θ inférieur à cette limite. Il y a plus : au lieu de supposer la limite Θ déterminée à l'aide du théorème II ou III, on pourra simplement astreindre cette limite à la condition que nous venons d'indiquer. Cela posé, on pourra évidemment, aux théorèmes II et III, joindre encore la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Soit* $f(x, y)$ *une fonction de* x, y *qui reste continue,*

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 415.

par rapport à y, *pour un certain module de* x *représenté par* x, *et pour un module de* y *inférieur à une certaine limite* y. *Supposons d'ailleurs que,* θ *désignant une nouvelle variable, on réduise, dans l'expression*

$$f(x, \theta y),$$

y *à une fonction de* x, *en sorte qu'on ait, par exemple,*

$$y = 1 - x \quad \text{ou} \quad y = \frac{1-x}{x}.$$

Enfin, développons

$$f(x, \theta y),$$

considérée comme fonction de x *et de* θ, *en série ordonnée suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de* x, *le module de* x *étant* x, *et nommons* A_n *le coefficient de* x^n *dans le développement ainsi obtenu. Non seulement* A_n *sera développable suivant les puissances ascendantes de la variable* θ, *tant que le module* θ *ne dépassera pas la limite au delà de laquelle* A_n *cesse d'être fonction continue de* θ, *mais, de plus, pour obtenir le développement de* A_n, *il suffira de réunir tous les coefficients de* x^n *qu'on obtient quand on développe* $f(x, \theta y)$ *en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes de* θ, *puis chaque terme de cette série simple en une nouvelle série ordonnée suivant les puissances entières de* x.

Aux diverses propositions que je viens d'établir, il convient de joindre encore un théorème très général et très utile, en vertu duquel le développement d'une fonction suivant les puissances entières d'une variable, calculé pour le cas où le module et l'argument de la variable offrent des valeurs très voisines de deux quantités données, conserve une forme inaltérable et demeure convergent, tandis que ce module et cet argument varient, pourvu que leurs variations simultanées soient telles que la fonction et sa dérivée ne cessent pas d'être continues, si d'ailleurs, dans le cas même où l'on tient compte de ces variations, les deux modules ou le module unique de la série simple, qui représentait primitivement le développement de la fonction, restent toujours inférieurs à l'unité. J'établirai, dans un prochain article, ce théorème général avec les conséquences importantes qui s'en déduisent, puis j'appliquerai mes formules à la solution de diverses questions et, en particulier, des problèmes d'Astronomie.

279.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur diverses propriétés remarquables et très générales des fonctions continues.*

C. R., T. XX, p. 375 (17 février 1845).

Les progrès réalisés de nos jours dans les diverses branches des Sciences physiques et mathématiques témoignent de l'ardeur avec laquelle l'esprit humain, créé pour connaître la vérité, s'attache à sa poursuite. Dans son impatience, il veut qu'une vérité déjà démontrée lui serve comme d'échelon pour arriver à une vérité plus difficile à saisir; il s'élève, il généralise, il essaye de s'élancer dans l'infini; et c'est précisément cette tendance de notre esprit qui a fait longtemps admettre en Analyse, comme un principe en quelque sorte évident, ce qu'on appelait la *généralité de l'Algèbre*, c'est-à-dire l'étendue indéfinie des formules algébriques obtenues dans certains cas particuliers. Plus tard on est parvenu à reconnaître que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. On a vu, dans mes précédents Mémoires, que la grande loi qui limite l'existence des formules est la *loi de continuité* des fonctions, dans le cas où l'on donne des *fonctions continues*, non pas la définition longtemps adoptée par les géomètres, mais celle que présente mon analyse algébrique. Toutefois, la règle que je viens de rappeler a une étendue plus grande encore que celle qui paraissait devoir lui être attribuée au premier abord. Considérons, pour fixer les idées, une variable réelle ou imaginaire. On pourra concevoir que l'on fasse varier par degrés insen-

sibles ou le module seul de cette variable, ou tout à la fois son module et son argument. Si, pour plus de commodité, on regarde ce module et cet argument comme propres à représenter dans un plan les coordonnées polaires d'un point mobile, les diverses valeurs de la variable et d'une fonction quelconque de cette variable correspondront aux divers points de ce plan. Cela posé, la fonction restera généralement continue, non pas seulement pour des valeurs du module renfermées entre certaines limites, ou, ce qui revient au même, pour toutes les positions du point mobile comprises entre deux cercles concentriques, mais pour tous les systèmes de valeurs du module et de l'argument qui satisferont à certaines conditions, c'est-à-dire pour toutes les positions du point mobile comprises entre certaines courbes. Or je prouve maintenant que ces courbes indiquent précisément les limites entre lesquelles subsiste l'équation qu'on obtient en égalant la fonction à zéro; en d'autres termes, je prouve que ces deux courbes indiquent précisément la région du plan pour laquelle subsiste la formule, région qui se trouvait notablement restreinte quand on avait recours aux théorèmes énoncés dans les précédents Mémoires, c'est-à-dire quand on substituait au système des deux courbes dont il s'agit le système de deux cercles concentriques tracés de manière à ne point couper les deux courbes.

Parmi les résultats importants que je déduis de mes nouvelles formules, il en est un qu'il me paraît utile de signaler.

On sait que les séries jusqu'à ce jour employées en Astronomie ne permettent pas de calculer, sans un travail pénible et souvent inexécutable, les perturbations planétaires d'un ordre un peu élevé. Je substitue à ces séries des séries nouvelles, dans la composition desquelles entre un nouvel élément ou paramètre digne de remarque et que je vais indiquer.

Concevons que l'on représente par deux lettres distinctes les deux exponentielles trigonométriques variables qui ont pour exposants les anomalies excentriques de deux planètes. La distance de ces planètes, exprimée à l'aide des deux lettres ou variables dont il s'agit, étant égalée à zéro, fournira une équation algébrique qui sera du quatrième degré par rapport à chaque variable; et, si l'on résout cette équation par rapport à la première variable, une seconde équation algébrique, qui ne renfermera plus que la seconde variable, aura pour racines les carrés des différences entre les racines de la première équation. Or celle des racines de la seconde équation qui offrira le plus grand module au-dessus de l'unité sera précisément l'élément principal qui entrera dans la composition des nouvelles séries, dont les divers termes dépendent tout à la fois de ce nouvel élément et de ceux qui ont été jusqu'ici considérés par les géomètres sous le nom d'*éléments elliptiques*.

Analyse.

§ I. — *Considérations générales.*

Nous commencerons par établir la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit*

$$x = re^{p\sqrt{-1}}$$

une variable réelle ou imaginaire, dont le module r et l'argument p pourront être censés représenter dans un plan les coordonnées polaires d'un point mobile P. *Soit, de plus,* $f(x)$ *une fonction de la variable* x, *qui demeure continue, par rapport à cette variable, pour toutes les positions que peut prendre le point mobile dans une certaine région du plan comprise entre deux courbes continues* abc..., ABC.... *Enfin, supposons que, dans le cas où le point mobile occupe, ou une position particulière correspondante à des valeurs déterminées de r et p, ou des positions voisines, la fonction* $f(x)$ *soit développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières de* x, *en sorte qu'on ait alors*

$$f(x) = \ldots a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) = \Sigma a_n x^n, \tag{2}$$

la somme qu'indique le signe Σ *s'étendant à toutes les valeurs entières,*

positives, nulle et négatives de n, *et les deux modules ou le module unique de la série, dont le terme général est* $a_n x^n$, *étant inférieurs à l'unité. L'équation* (2) *ne cessera pas de se vérifier si l'on fait varier par degrés insensibles la position du point mobile* P, *pourvu que ce point reste toujours renfermé entre les deux courbes* abc.... ABC...., *et que, pendant la durée de son mouvement, les deux modules ou le module unique de la série dont le terme général est* $a_n x^n$ *restent toujours inférieurs à l'unité.*

Démonstration. — Le point mobile P étant arrêté dans la position qui correspond aux valeurs données de r, p, nommons P′ un point voisin de P. Soit

$$x' = x + \xi \tag{3}$$

ce que devient x quand on passe du point P au point P′. Enfin nommons ρ le module, et ϖ l'argument de la différence

$$x' - x = \xi,$$

en sorte qu'on ait

$$\xi = \rho e^{\varpi\sqrt{-1}}.$$

Si le module ρ, supposé d'abord nul, vient à croitre, la fonction

$$f(x') = f(x + \xi)$$

restera fonction continue de ξ, tant que ce module ne sera pas assez considérable pour que le cercle décrit du point P comme centre, avec le rayon ρ, rencontre l'une des courbes abc..., ABC...; et alors on aura

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{\xi}{1} D_x f(x) + \frac{\xi^2}{1.2} D_x^2 f(x) + \ldots. \tag{4}$$

Si, dans cette dernière formule, on substitue la valeur de $f(x)$, tirée de l'équation (2), on trouvera

$$f(x+\xi) = \sum a_n x^n + \xi \sum \frac{n}{1} a_n x^{n-1} + \xi^2 \sum \frac{n(n-1)}{1.2} a_n x^{n-2} + \ldots. \tag{5}$$

Si maintenant on développe les sommes que renferme le second membre de la formule (5), on verra le second membre se transformer en une série double dont le terme général sera de la forme

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}a^n x^{n-m}\xi^m,$$

n désignant une quantité entière positive, nulle ou négative, m un nombre entier, nul ou positif, et le rapport

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$$

devant être remplacé par l'unité pour une valeur nulle de m. Il y a plus : cette série double sera précisément celle qu'on obtient quand on développe la somme

$$\Sigma a_n(x+\xi)^n,$$

attendu qu'on a généralement

$$(x+\xi)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\xi + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\xi^2 + \ldots + \xi^n.$$

Donc l'équation (5) pourra être réduite à la formule

$$\mathrm{f}(x+\xi) = \Sigma a_n(x+\xi)^n$$

ou, ce qui revient au même, à la formule

$$(6) \qquad \mathrm{f}(x') = \Sigma a_n x'^n,$$

si la série double en question est convergente. Or c'est ce qui aura certainement lieu, du moins pour une valeur de ρ suffisamment petite, si, comme on le suppose, les deux modules de la série simple qui a pour terme général $a_n x^n$ sont inférieurs à l'unité. En effet, nommons

$$\mathrm{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{k}_{,}$$

ces deux modules, k étant le module correspondant aux termes qui renferment des puissances positives de x; et soit r' le module de la variable imaginaire

$$x' = x + \xi.$$

Les deux modules de la série dont le terme général est

$$a_n x'^n = a_n x^n \left(\frac{x'}{x}\right)^n$$

seront évidemment

$$\mathrm{k}\frac{r'}{r}, \quad \mathrm{k}_{,}\frac{r}{r'}.$$

D'ailleurs le module r' étant, en vertu de l'équation (3), nécessairement compris entre les limites

$$r'-\rho, \quad r'+\rho,$$

le rapport

$$\frac{r'}{r}$$

se rapprochera indéfiniment de l'unité pour des valeurs décroissantes du module ρ, et l'on pourra en dire autant du rapport inverse

$$\frac{r}{r'}.$$

Donc, pour des valeurs décroissantes de ρ, les deux modules

$$\mathrm{k}\frac{r'}{r}, \quad \mathrm{k}_{,}\frac{r}{r'}$$

de la série dont le terme général est $a_n x'^n$ se rapprocheront indéfiniment des deux modules

$$\mathrm{k}, \quad \mathrm{k}_{,}$$

de la série dont le terme général est $a_n x^n$, et finiront, dans l'hypothèse admise, par devenir, comme k et $\mathrm{k}_{,}$, inférieurs à l'unité. Par suite, dans cette hypothèse, il suffira d'assigner une valeur suffisamment petite au module ρ de la différence $x'-x$, pour que l'équation (2) entraîne l'équation (6).

Ce n'est pas tout. Si les conditions énoncées dans le théorème I ne cessent pas d'être remplies quand on remplace x par x', alors, x'' étant supposé très voisin de x', on prouvera encore de la même manière qu'il suffit d'assigner une valeur suffisamment petite au module de la différence $x'' - x'$ pour que l'équation (6) entraîne la suivante

$$f(x'') = \Sigma a_n x''^n, \tag{7}$$

etc.

En d'autres termes, l'équation (2) ne cessera pas de se vérifier quand on y remplacera successivement x par x', puis x'', ...; et, comme la limite vers laquelle convergeront les termes de la suite

$$x, \quad x', \quad x'', \quad \dots$$

ne pourra être qu'une valeur de x correspondante à un point P situé sur l'une des courbes abc..., ABC..., ou une valeur de x pour laquelle un module au moins de la série dont le terme général est $a_n x^n$ se trouvera réduit à l'unité, nous devons conclure que, si l'on fait varier x par degrés insensibles, l'équation (2) ne cessera pas de se vérifier tant que les deux fonctions

$$f(x) \quad \text{et} \quad a_n x^n$$

satisferont aux conditions énoncées dans le théorème I.

Corollaire. — Si le coefficient a_n s'évanouit, quel que soit l'indice n, l'équation (2) se trouvera réduite à la formule

$$f(x) = 0,$$

et le théorème I à la proposition suivante :

Théorème II. — *Supposons que l'équation*

$$f(x) = 0 \tag{8}$$

se vérifie toujours pour des valeurs de x très voisines d'une valeur donnée. Si l'on vient à faire varier le module et l'argument de x par degrés insensibles, cette équation (8) *continuera de subsister tant que* $f(x)$ *restera fonction continue de x.*

On pourrait, au reste, démontrer directement cette dernière proposition et même en déduire le théorème I.

Si la fonction $f(x)$ est la différence de deux autres fonctions, il suffira d'égaler ces dernières entre elles pour obtenir une équation qui se confondra évidemment avec la formule (8). Donc le théorème II entraîne encore le suivant :

Théorème III. — *Supposons que deux fonctions de x soient toujours égales entre elles pour des valeurs de x très voisines d'une valeur donnée. Si l'on vient à faire varier x par degrés insensibles, ces deux fonctions seront encore égales tant qu'elles resteront l'une et l'autre fonctions continues de x.*

Les théorèmes précédents peuvent être facilement étendus au cas où il s'agit de fonctions de plusieurs variables. Alors on obtient, par exemple, à la place du théorème III, la proposition suivante :

Théorème IV. — *Supposons que deux fonctions de $x, y, z, \dots$ soient égales entre elles pour des valeurs réelles ou imaginaires de $x, y, z, \dots$ très voisines de valeurs données. Si l'on vient à faire varier $x, y, z, \dots$ par degrés insensibles, ces deux fonctions resteront encore égales tant qu'elles resteront l'une et l'autre fonctions continues de $x, y, z, \dots$.*

On pourrait, dans le théorème III ou IV, remplacer l'une des deux fonctions que l'on considère par la somme d'une série simple convergente; on pourrait même supposer les divers termes de cette série remplacés à leur tour par les sommes d'autres séries convergentes, et ainsi de suite. D'ailleurs la série double ou multiple qui renfermerait tous les termes compris dans les diverses séries simples pourrait être ou convergente ou divergente. Dans le premier cas, la fonction dont il s'agit serait ce qu'on appelle et ce qu'on doit appeler la *somme* de la série double ou multiple, supposée convergente. Dans le second cas, cette fonction deviendrait ce qu'on peut appeler la *somme syntagmatique* de la série double ou multiple, supposée divergente. En effet, puisqu'il suffit quelquefois de ranger dans un certain ordre les termes d'une série multiple, mais divergente, par exemple d'une série double, pour la transformer en une série simple et convergente dont chaque terme soit lui-même la somme d'une série simple et convergente, il est naturel d'exprimer la somme totale à laquelle on se trouve conduit par cet artifice à l'aide d'une épithète propre à exprimer que ces termes sont rangés dans un ordre déterminé. On sait, au reste, que cette épithète a été déjà employée dans la langue algébrique, et appliquée par M. Budan à quelques suites qu'il a rencontrées dans des recherches relatives à la théorie des équations.

§ II. — *Théorèmes relatifs à la détermination des coefficients que renferme le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances entières d'une variable.*

En partant des théorèmes établis dans le § I de ce Mémoire et dans les Mémoires précédents, on établira sans peine d'autres propositions importantes, que je vais énoncer.

Théorème I. — *Soit* $\mathrm{f}(x, y)$ *une fonction des variables* x, y *qui reste continue par rapport à ces variables, pour un module de* x *très voisin de la limite* x, *et pour un module de* y *inférieur à la limite* y. *Supposons d'ailleurs que, dans le cas où l'on attribue au facteur* θ *une valeur réelle, positive et inférieure ou tout au plus égale à l'unité, l'expression*

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)]$$

reste, pour un module de x *très voisin de* x, *fonction continue de* x *et de* θ. *Enfin concevons que, pour une valeur réelle ou imaginaire de* θ *correspondante à un très petit module, on développe la fonction*

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)],$$

1° *en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes de* x; 2° *en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes de* x *et de* θ; *et nommons*

$$A_n x^n, \quad H_{m,n}\theta^m x^n$$

les termes généraux de ces deux séries. Non seulement on aura, pour un très petit module de θ,

$$A_n = \Sigma H_{m,n}\theta^m, \tag{1}$$

la somme qu'indique le signe Σ *s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de* m; *mais, de plus, si l'on attribue à* θ *une valeur réelle et positive qui ne surpasse pas l'unité, l'équation* (1) *continuera de subsister, pourvu que cette valeur positive vérifie encore la condition*

$$\theta < \mathrm{y}. \tag{2}$$

Démonstration. — Concevons que, en admettant les suppositions énoncées, on attribue à la variable x un module très voisin de x; alors, pour un très petit module de θ, l'expression

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)]$$

sera fonction continue de x et de θ. Donc alors la série double, qui représentera le développement de cette fonction suivant les puissances ascendantes de x et de θ, sera convergente, et la formule

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)] = \Sigma A_n x^n = \Sigma H_{m,n}\theta^m x^n$$

entrainera l'équation

$$A_n = \Sigma H_{m,n}\theta^m.$$

Concevons maintenant que l'on fasse varier le facteur θ, en lui attribuant une valeur réelle et positive, et que, dans la fonction

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)],$$

on assigne à x un module qui diffère très peu de x, en désignant d'ailleurs l'argument variable de x par la lettre p. Tant que le facteur θ ne surpassera pas l'unité, l'expression

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)]$$

restera, par hypothèse, fonction continue de θ et de x, et l'on pourra en dire autant du coefficient A_n de x^n dans le développement de cette fonction, attendu que ce coefficient A_n pourra être censé déterminé par la formule

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\,\mathrm{f}[x, \theta(1-x)]\,dp. \tag{3}$$

Donc, en vertu du théorème I du § I, l'équation

$$\mathrm{A}_n = \Sigma \mathrm{H}_{m,n}\,\theta^m$$

continuera de subsister pour toute valeur réelle et positive de θ qui ne surpassera pas la limite 1, si d'ailleurs la série dont le terme général est

$$\mathrm{H}_{m,n}\,\theta^m$$

offre un module inférieur à l'unité. Or cette dernière condition sera certainement remplie, en vertu d'un théorème énoncé dans la dernière séance (p. 28), si l'on a

$$\theta < \mathrm{y}.$$

Corollaire I. — Posons

$$(4)\qquad \mathrm{f}(x, y) = (1-x)^{-s}\,\varphi(1-y),$$

s désignant une constante quelconque, et la valeur de $\varphi(x)$ étant donnée par la formule

$$(5)\qquad \varphi(x) = (1-ax)^{\mu}(1-bx)^{\nu}\ldots\Phi(x),$$

dans laquelle μ, ν, ... représentent des exposants réels, a, b, ... des coefficients dont les modules a, b, ... soient tous inférieurs à l'unité, et $\Phi(x)$ une fonction toujours continue de x. Alors on pourra évidemment prendre pour valeur de x un nombre inférieur à l'unité, mais d'ailleurs aussi rapproché que l'on voudra de l'unité. De plus, comme on tirera de la formule (5)

$$\varphi(1-y) = (1-a)^{\mu}(1-b)^{\nu}\ldots\left(1-\frac{a}{1-a}y\right)^{\mu}\left(1-\frac{b}{1-b}y\right)^{\nu}\ldots\Phi(1-y),$$

on pourra prendre pour y le plus petit d'entre les modules des rapports

$$\frac{1-a}{a},\quad \frac{1-b}{b},\quad \ldots,$$

et par suite la condition (2), que l'on peut encore présenter sous la forme

$$\frac{\theta}{\mathrm{y}} < 1,$$

sera vérifiée si les rapports

$$\frac{a\theta}{1-a},\quad \frac{b\theta}{1-b},\quad \ldots$$

offrent tous des modules inférieurs à l'unité. Donc elle sera vérifiée pour une valeur de θ réelle, positive et inférieure ou tout au plus égale à l'unité, si les modules des rapports

$$(6)\qquad \frac{a}{1-a},\quad \frac{b}{1-b},\quad \ldots$$

sont tous inférieurs à l'unité. Enfin, cette condition étant supposée remplie, on peut affirmer que, pour un module de x inférieur, mais sensiblement égal à 1, et pour une valeur de θ positive, mais inférieure ou tout au plus égale à l'unité, la valeur de

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)],$$

déterminée par le système des formules

$$\mathrm{f}[x, \theta(1-x)] = (1-x)^{-s}\,\varphi(1-\theta+\theta x),$$

$$\varphi(1-\theta+\theta x) = (1-a+a\theta)^{\mu}(1-b+b\theta)^{\nu}\ldots\left(1-\frac{a\theta x}{1-a+a\theta}\right)^{\mu}\left(1-\frac{b\theta x}{1-b+b\theta}\right)^{\nu}\ldots\Phi(1-\theta+\theta x),$$

restera fonction continue de x et de θ. Effectivement, pour démontrer cette assertion, il suffira évidemment de faire voir que les rapports

$$(7)\qquad \frac{a\theta x}{1-a+a\theta},\quad \frac{b\theta x}{1-b+b\theta},\quad \ldots$$

offriront tous des modules inférieurs à l'unité. Or, en premier lieu, le module de x étant supposé très voisin de l'unité, les rapports (7) se confondront sensiblement avec les suivants

$$\frac{a\theta}{1-a+a\theta},\quad \frac{b\theta}{1-b+b\theta},\quad \ldots,$$

ou, ce qui revient au même, avec les rapports

$$(8)\qquad \frac{a\theta}{1-a(1-\theta)},\quad \frac{b\theta}{1-b(1-\theta)},\quad \ldots$$

D'autre part, le module a de a étant inférieur à l'unité, le rapport

$$\frac{a\theta}{1-a(1-\theta)}$$

offrira un module égal ou inférieur à la fraction

$$\frac{\mathrm{a}\theta}{1-\mathrm{a}(1-\theta)}=\frac{1}{1+\frac{1-\mathrm{a}}{\mathrm{a}}\theta^{-1}},$$

par conséquent égal ou inférieur à la fraction

$$\frac{1}{1+\frac{1-\mathrm{a}}{\mathrm{a}}}=\mathrm{a}.$$

Donc les modules des rapports (8) seront respectivement inférieurs aux nombres

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \ldots.$$

Donc, si, en supposant la fonction $f(x, y)$ déterminée par le système des formules (4) et (5), on nomme

$$A_n x^n \quad \text{et} \quad H_{m,n}\theta^m x^n$$

les termes généraux des développements de la fonction

$$f[x, \theta - x],$$

suivant les puissances ascendantes de la seule variable x ou des deux variables θ, x, calculés pour le cas où le module de θ est très petit, et le module de x, inférieur, mais sensiblement égal à l'unité, non seulement on aura, pour de tels modules de x et de θ,

$$A_n = \Sigma H_{m,n}\theta^m,$$

mais, en vertu du théorème I, l'équation précédente subsistera encore pour toute valeur positive de θ qui ne surpassera pas l'unité, pourvu que chacun des rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{a}},\quad \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}},\quad \ldots$$

offre un module inférieur à l'unité.

Corollaire II. — Si, dans la formule

$$A_n = \Sigma H_{m,n}\theta^m,$$

on suppose le nombre θ réduit à l'unité, cette formule deviendra

$$A_n = \Sigma H_{m,n}.$$

Alors aussi la fonction

$$f[x, \theta(1-x)]$$

se réduira simplement, en vertu de la formule (4), à la fonction $F(x)$ déterminée par l'équation

$$F(x) = (1-x)^{-s}\varphi(x).$$

Cela posé, le corollaire I entraînera évidemment la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit* $F(x)$ *une fonction de* x *déterminée par le système des formules*

$$(9) \quad \begin{cases} F(x) = (1-x)^{-s}\varphi(x), \\ \varphi(x) = (1-ax)^{\mu}(1-bx)^{\nu}\ldots\Phi(x), \end{cases}$$

dans lesquelles s *désigne une constante quelconque,* μ, ν, ... *des exposants réels,* a, b, ... *des coefficients dont les modules sont inférieurs à l'unité, et* $\Phi(x)$ *une fonction toujours continue de* x. *Soit, de plus,* A_n *le coefficient de* x^n *dans le développement de* $F(x)$ *calculé pour un module de* x *inférieur à l'unité, et nommons* y *la variable complémentaire de* x *déterminée par l'équation*

$$y = 1 - x.$$

Non seulement on pourra présenter la valeur de $F(x)$ *sous la forme*

$$F(x) = (1-x)^{-s}\varphi(1-y),$$

mais, de plus, au développement de $\varphi(1-y)$ *suivant les puissances ascendantes de* y *correspondra un développement de* A_n, *qui sera convergent et représentera la valeur même de* A_n, *si les rapports*

$$\frac{a}{1-a},\quad \frac{b}{1-b},\quad \ldots$$

offrent tous des modules inférieurs à l'unité.

Corollaire. — Comme, en développant $\varphi(1-y)$, on trouve

$$\varphi(1-y) = \Sigma(-1)^m \frac{\varphi^{(m)}(1)}{1.2\ldots m} y^m,$$

comme on aura d'ailleurs évidemment

$$(1-x)^{-s} y^m = (1-x)^{-s+m} = \Sigma[s-m]_n x^n,$$

la valeur de $[s]_n$ étant

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n},$$

il suit du théorème I que si les modules des rapports

$$\frac{a}{1-a}, \quad \frac{b}{1-b}, \quad \ldots$$

sont tous inférieurs à l'unité, on aura

$$A_n = \Sigma(-1)^m [s-m]_n \frac{\varphi^{(m)}(1)}{1.2\ldots m}, \tag{10}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs nulle et positives de m, et le produit $1.2.3\ldots m$ devant être remplacé par l'unité dans le cas particulier où le nombre m s'évanouit.

On pourrait, dans les théorèmes qui précèdent, substituer à la variable complémentaire de x, déterminée par l'équation

$$y = 1 - x,$$

le rapport $\frac{1-x}{x}$ des deux variables complémentaires

$$x \quad \text{et} \quad 1-x.$$

Alors, à la place du théorème I, on obtiendra la proposition suivante :

Théorème III. — *Soit*

$$f(x, y)$$

une fonction des variables x, y, qui reste continue par rapport à y, pour un module de x très voisin de X, *et pour un module de y inférieur à la*

limite Y. *Supposons d'ailleurs que, dans le cas où l'on attribue au facteur θ une valeur réelle, positive et inférieure ou tout au plus égale à l'unité, l'expression*

$$f\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right)$$

reste, pour un module de x très voisin de X, *fonction continue de x et de θ. Enfin, concevons que, pour une valeur réelle ou imaginaire de θ correspondante à un très petit module, on développe la fonction*

$$f\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right),$$

1° en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de x; 2° en une série double ordonnée suivant les puissances entières de x et suivant les puissances ascendantes de θ; et nommons

$$A_n x^n, \quad H_{m,n} \theta^m x^n$$

les termes généraux de ces deux séries. Non seulement on aura, pour un très petit module de θ,

$$A_n = \Sigma H_{m,n} \theta^m, \tag{11}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de m, mais, de plus, si l'on attribue à θ une valeur réelle et positive qui croisse à partir de zéro, sans devenir supérieure à l'unité, l'équation (11) ne cessera pas de subsister, pourvu que l'expression

$$f\left(\frac{\theta}{Y+\theta}, z\right) \tag{12}$$

ne cesse pas d'être fonction continue de θ, dans le cas où, en représentant par la lettre z une nouvelle variable dont le module soit précisément Y, *on assigne à θ une valeur réelle ou imaginaire dont le module ne surpasse pas l'unité.*

Démonstration. — Concevons que, en admettant les suppositions énoncées, on attribue à la variable x un module très voisin de X.

Alors, pour un très petit module de θ, l'expression

$$\mathrm{f}\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right)$$

sera fonction continue de x et de θ. Donc alors la série double, qui représentera le développement de cette fonction suivant les puissances ascendantes de x et de θ, sera convergente, et la formule

$$\mathrm{f}\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right) = \Sigma \mathrm{A}_n x^n = \Sigma \mathrm{H}_{m,n} \theta^m x^n$$

entraînera l'équation

$$\mathrm{A}_n = \Sigma \mathrm{H}_{m,n} \theta^m.$$

Concevons maintenant que l'on fasse varier le facteur θ, en lui attribuant une valeur réelle et positive, et que, dans la fonction

$$\mathrm{f}\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right),$$

on assigne à x un module qui diffère très peu de x, en représentant l'argument variable de x par la lettre p. Tant que le facteur θ ne surpassera pas l'unité, l'expression

$$\mathrm{f}\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right)$$

restera, par hypothèse, fonction continue de θ et de x, et l'on pourra en dire autant du coefficient A_n de x^n dans le développement de cette fonction, attendu que ce coefficient A_n pourra être censé déterminé par la formule

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\, \mathrm{f}\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right) dp. \tag{13}$$

Donc, en vertu du théorème I du § I, l'équation

$$\mathrm{A}_n = \Sigma \mathrm{H}_{m,n} \theta^m$$

continuera de subsister, pour toute valeur réelle et positive de θ qui

ne surpassera pas la limite 1, si d'ailleurs la série dont le terme général est

$$\mathrm{H}_{m,n} \theta^m$$

offre un module inférieur à l'unité, ou, ce qui revient au même, si cette série ne cesse d'être convergente que pour une valeur de θ supérieure à l'unité. Or il suit, d'un théorème énoncé dans la séance du 10 février, que cette dernière condition sera généralement remplie, si le développement de la fonction

$$\mathrm{f}\left(\frac{\theta}{\mathrm{y}+\theta}, z\right)$$

reste lui-même convergent, avec la série modulaire correspondante, pour toute valeur de z dont le module est y. Donc cette même condition sera remplie, si l'expression

$$\mathrm{f}\left(\frac{\theta}{\mathrm{y}+\theta}, z\right)$$

reste fonction continue de θ, pour toute valeur réelle ou imaginaire de θ dont le module ne surpasse pas l'unité, et pour toute valeur de z qui offre un module égal à y.

Corollaire I. — Posons

$$\mathrm{f}(x, y) = (1-x)^{-s}\varphi(x)\chi(1+y), \tag{14}$$

s désignant une constante quelconque, et les valeurs de $\varphi(x)$, $\chi(x)$ étant déterminées par les formules

$$\varphi(x) = (1-ax)^{\mu}\ (1-bx)^{\nu} \ldots \Phi(x), \tag{15}$$

$$\chi(x) = (1-a'x)^{\mu'}(1-b'x)^{\nu'} \ldots \mathrm{X}(x), \tag{16}$$

dans lesquelles $\mu, \nu, \ldots, \mu', \nu', \ldots$ représentent des exposants réels $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ des coefficients dont les modules sont inférieurs à l'unité, et $\Phi(x)$, $\mathrm{X}(x)$ deux fonctions toujours continues de x. Alors on pourra prendre pour valeur de x un nombre inférieur à l'unité, mais aussi rapproché de l'unité que l'on voudra. De plus, comme on aura

$$\chi(1+y) = (1-a')^{\mu'}(1-b')^{\nu'}\ldots\left(1-\frac{a'y}{1-a'}\right)^{\mu'}\left(1-\frac{b'y}{1-b'}\right)^{\nu'}\ldots\mathrm{X}(1+y),$$

on pourra prendre pour y le plus petit d'entre les modules des rapports

$$\frac{1-a'}{a'},\quad \frac{1-b'}{b'},\quad \ldots;$$

et alors $\chi(1+z)$ restera constamment fonction continue de z, pour un module de z égal à y. Enfin, comme on aura

$$f\left(\frac{\theta}{y+\theta}, z\right) = \left(\frac{y}{y+\theta}\right)^{-s}\varphi\left(\frac{\theta}{y+\theta}\right)\chi(1+z)$$

et

$$\varphi\left(\frac{\theta}{y+\theta}\right) = (y+\theta)^{-\mu-\nu-\ldots}[y+(1-a)\theta]^{\mu}[y+(1-b)\theta]^{\nu}\ldots\Phi\left(\frac{\theta}{y+\theta}\right),$$

il est clair que, pour un module de z égal à y, et pour une valeur de θ positive, mais inférieure ou tout au plus égale à l'unité, l'expression

$$f\left(\frac{\theta}{y+\theta}, z\right)$$

restera fonction continue de θ, si y surpasse, non seulement θ, mais encore les modules des produits

$$(1-a)\theta,\quad (1-b)\theta,\quad \ldots,$$

et, à plus forte raison, si y surpasse, non seulement l'unité, mais encore les modules des différences

$$1-a,\quad 1-b,\quad \ldots.$$

Donc l'expression

$$f\left(\frac{\theta}{y+\theta}, z\right)$$

restera, dans l'hypothèse admise, fonction continue de θ, si chacun des rapports

$$\frac{1}{y},\quad \frac{1-a}{y},\quad \frac{1-b}{y},\quad \ldots$$

offre un module inférieur à l'unité, ou, ce qui revient au même, si les rapports

$$\frac{a'}{1-a'},\quad \frac{b'}{1-b'},\quad \ldots \tag{17}$$

et les produits de ces rapports par les différences

$$1-a,\quad 1-b,\quad \ldots \tag{18}$$

offrent tous des modules inférieurs à l'unité. D'ailleurs, cette condition étant supposée remplie, on prouvera sans peine, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons précédemment fait usage (*voir* le corollaire II du théorème I), que l'expression

$$f\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right) = f[x, \theta(x^{-1}-1)]$$

restera fonction continue de x et de θ pour un module de x inférieur, mais sensiblement égal à 1, et pour une valeur positive de θ qui ne surpasse pas l'unité.

Corollaire II. — Si, dans la formule (11), on réduit θ à l'unité, cette formule donnera simplement

$$\mathrm{A}_n = \Sigma\,\mathrm{H}_{m,n}.$$

D'ailleurs, quand on pose $\theta = 1$, la fonction

$$f\left(x, \theta\frac{1-x}{x}\right)$$

se réduit à

$$f\left(x, \frac{1-x}{x}\right),$$

et la formule (14) donne

$$f\left(x, \frac{1-x}{x}\right) = (1-x)^{-s}\varphi(x)\chi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela posé, les principes établis dans le théorème III et dans son corollaire I entraînent évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Soit* $\mathrm{F}(x)$ *une fonction de* x *déterminée par le sys-*

tème des formules

$$F(x) = (1-x)^{-s}\varphi(x)\chi\left(\frac{1}{x}\right), \tag{19}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = (1-ax)^{\mu}(1-bx)^{\nu}\ldots\Phi(x), \\ \chi(x) = (1-a'x)^{\mu'}(1-b'x)^{\nu'}\ldots X(x), \end{cases} \tag{20}$$

dans lesquelles s désigne une constante quelconque, $\mu, \nu, \ldots, \mu', \nu', \ldots$ *des exposants réels,* $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ *des coefficients dont les modules sont inférieurs à l'unité, et* $\Phi(x)$, $X(x)$ *deux fonctions toujours continues de* x. *Soit de plus* A_n *le coefficient de* x^n *dans le développement de la fonction* $F(x)$ *en série ordonnée suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de* x. *Enfin nommons* y *le rapport des variables complémentaires* $1-x$ *et* x, *en sorte qu'on ait*

$$y = \frac{1-x}{x}.$$

Non seulement la valeur de $F(x)$ *pourra être représentée sous la forme*

$$F(x) = (1-x)^{-s}\varphi(x)\chi(1+y); \tag{21}$$

mais, de plus, au développement de $\chi(1+y)$ *en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de* y *correspondra un développement de* A_n *qui sera convergent avec la série modulaire correspondante, et qui représentera la valeur même de* A_n, *si les rapports*

$$\frac{a'}{1-a'}, \quad \frac{b'}{1-b'}, \quad \ldots$$

et les produits de ces mêmes rapports par les différences

$$1-a, \quad 1-b, \quad \ldots$$

offrent tous des modules inférieurs à l'unité.

Corollaire I. — Chacun des rapports

$$\frac{a'}{1-a'}, \quad \frac{b'}{1-b'}, \quad \ldots$$

offrira certainement un module inférieur à l'unité, si chacun des coefficients offre un module inférieur à $\frac{1}{2}$.

Corollaire II. — Comme, par hypothèse, chacun des coefficients

$$a, \quad b, \quad \ldots$$

offre un module inférieur à l'unité, il en résulte que chacune des différences

$$1-a, \quad 1-b, \quad \ldots$$

offre certainement un module inférieur à 2. Il est aisé d'en conclure que les conditions énoncées dans le théorème IV seront remplies, si les modules des coefficients

$$a', \quad b', \quad \ldots$$

sont tous inférieurs, non seulement à $\frac{1}{2}$, mais encore à $\frac{1}{3}$. Alors, en effet, chacun des rapports

$$\frac{a'}{1-a'}, \quad \frac{b'}{1-b'}, \quad \ldots$$

offrira un module inférieur à $\frac{1}{2}$; d'où il suit que les produits de ces mêmes rapports par les différences

$$1-a, \quad 1-b, \quad \ldots$$

offriront tous des modules inférieurs à l'unité.

Dans un prochain article, je développerai les conséquences importantes qui peuvent se déduire en Analyse, et surtout en Astronomie, des propositions et des formules générales que je viens d'établir.

280.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur les séries syntagmatiques et sur celles qu'on obtient quand on développe des fonctions d'une seule variable suivant les puissances entières de son argument.*

C. R., T. XX, p. 463 (24 février 1845).

Il arrive souvent que les termes d'une série double et divergente peuvent être groupés entre eux de telle sorte que les termes renfermés dans chaque groupe forment une série simple convergente, et que les sommes des séries simples correspondantes aux divers groupes forment à leur tour une autre série simple convergente comme les premières. Les séries triples, quadruples, ..., lorsqu'elles sont divergentes, peuvent fournir matière à de semblables observations. Ainsi, une série multiple et divergente pourra quelquefois se transformer en un système de séries simples et convergentes de divers ordres, c'est-à-dire en un système dans lequel plusieurs séries de même ordre formeront, par leur réunion, une série de l'ordre immédiatement supérieur. La série simple de l'ordre le plus élevé donne alors pour somme la somme totale des termes de la série multiple, ajoutés les uns aux autres, non pas dans un ordre quelconque, mais dans un ordre déterminé. Pour exprimer cette circonstance, comme nous l'avons déjà dit (page 39), nous désignerons la somme dont il s'agit sous le nom de *somme syntagmatique*. Lorsque la série multiple proposée sera ordonnée suivant les puissances entières de plusieurs variables, nous supposerons communément les divers termes groupés de manière que chaque série simple se trouve ordonnée suivant les puissances entières d'une seule de ces variables. Si la série multiple devient convergente, la somme syntagmatique se confondra évidemment avec la somme unique de cette même série.

Pour abréger, nous appellerons *séries syntagmatiques* les séries qui

admettent des sommes syntagmatiques. Leur théorie, comme celle des séries convergentes, se trouve intimement liée à la loi de continuité des fonctions; et l'on peut établir à ce sujet des théorèmes qui paraissent dignes de l'attention des géomètres. Le premier paragraphe du présent Mémoire a pour objet la démonstration de plusieurs de ces théorèmes, et en particulier de ceux que je vais indiquer.

Concevons qu'une fonction de plusieurs variables reste continue quand on attribue aux modules de ces variables des valeurs qui diffèrent très peu de certaines valeurs déterminées. Alors la fonction sera développable en une série multiple et convergente ordonnée suivant les puissances entières des variables. Mais ce développement pourra changer de forme, si l'on vient à changer les valeurs dont il s'agit. Supposons, pour rendre le raisonnement plus facile à saisir, que l'on fasse varier les modules par degrés insensibles. La forme du développement de la fonction en série convergente restera généralement la même, tant que les variations des modules n'empêcheront pas la fonction de rester continue pour des valeurs quelconques des arguments des variables. Quand cette condition cessera d'être remplie, la série trouvée pourra devenir divergente; mais elle ne cessera pas d'être une série syntagmatique, dont la somme syntagmatique sera la fonction elle-même, si les variations des modules permettent du moins à cette fonction de rester continue pour des valeurs des arguments comprises entre certaines limites.

Il importe d'observer que, dans les séries convergentes ou syntagmatiques dont nous venons de parler, un terme proportionnel à des puissances entières données des diverses variables offre une valeur complètement déterminée. Si, pour calculer le coefficient de ces puissances, dans les termes dont il s'agit, on veut développer la fonction, en attribuant aux variables des valeurs telles que la série obtenue reste convergente, on pourra, il est vrai, y parvenir en effectuant des développements successifs correspondants aux diverses variables et en suivant dans cette opération un ordre qui sera complètement arbitraire. Mais cet ordre n'aura aucune influence sur la valeur du coefficient, représenté généralement par une intégrale multiple dont la valeur est complètement déterminée.

Il est bon de rappeler encore ici une observation déjà faite à la page 120 ([1]), savoir, que, pour la rigueur des démonstrations, on doit supposer remplie une condition qui, à la vérité, l'est généralement. D'ailleurs, on préviendra toute objection en écrivant, dans chaque théorème où il s'agit d'une fonction assujettie à rester continue, que cette fonction doit demeurer telle avec ses dérivées du premier ordre.

Le second paragraphe du présent Mémoire a pour objet la série qu'on obtient quand on développe une fonction de la variable x suivant les puissances entières de l'argument de cette variable. Je remarque d'abord que chaque puissance entière de la variable est le produit de la puissance semblable du module par une exponentielle trigonométrique toujours développable suivant les puissances entières de l'argument. Il en résulte qu'à un développement de la fonction, en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable, correspond toujours, sinon un développement convergent, du moins un développement syntagmatique de la même fonction en une série double ordonnée suivant les puissances entières de la variable et suivant les puissances ascendantes de l'argument. Mais, si l'on réduit cette série double à une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument, la série simple ainsi formée pourra être ou convergente ou divergente. Elle sera certainement convergente si la série double est convergente, et deviendra généralement divergente si la série double est seulement une série syntagmatique. Je montre, dans ce dernier cas, comment on doit s'y prendre pour substituer à la série devenue divergente une série convergente. Les formules auxquelles je parviens prouvent que très souvent on peut se servir encore des premiers termes de la série divergente pour calculer des valeurs très approchées de la fonction que l'on considère.

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 415.

Analyse.

§ I. — *Sur les séries syntagmatiques.*

Nommons

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

plusieurs variables dont les modules soient

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots,$$

et représentons par

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de $x, y, z, \ldots$. Si cette fonction reste continue par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, dans le voisinage de certaines valeurs particulières attribuées à leurs modules $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, alors, pour des valeurs des modules très voisines de celles dont il s'agit, la fonction sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$. C'est, en effet, ce que l'on peut démontrer à l'aide des considérations suivantes :

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que la fonction

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

soit de la forme

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \frac{1}{(a-x)(b-y)(c-z)\ldots}, \tag{1}$$

$a, b, c, \ldots$ désignant des constantes, réelles ou imaginaires, dont les modules soient

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{b}, \quad \mathrm{c}, \quad \ldots.$$

Comme on aura pour $\mathrm{x} < \mathrm{a}$, non seulement

$$\frac{1}{\mathrm{a}-\mathrm{x}} = \mathrm{a}^{-1} + \mathrm{a}^{-2}\mathrm{x} + \mathrm{a}^{-3}\mathrm{x}^2 + \ldots,$$

mais encore

$$\frac{1}{a-x} = a^{-1} + a^{-2}x + a^{-3}x^2 + \ldots,$$

et pour $\mathrm{x} > \mathrm{a}$, non seulement

$$\frac{1}{\mathrm{a}-\mathrm{x}} = -\mathrm{x}^{-1} - \mathrm{a}\,\mathrm{x}^{-2} - \mathrm{a}^2\mathrm{x}^{-3}\ldots,$$

mais encore

$$\frac{1}{a-x} = -x^{-1} - a x^{-2} - a^2 x^{-3}\ldots,$$

il est clair que, si aucune des différences

$$\mathrm{a}-\mathrm{x},\quad \mathrm{b}-\mathrm{y},\quad \mathrm{c}-\mathrm{z},\quad \ldots$$

ne se réduit à zéro, la fonction (1) sera toujours développable en une série multiple convergente ordonnée suivant les puissances entières de $x, y, z, \ldots$, avec la série modulaire correspondante, dont la somme sera représentée par la fraction

$$\frac{1}{(\mathrm{a}-\mathrm{x})(\mathrm{b}-\mathrm{y})(\mathrm{c}-\mathrm{z})\ldots}.$$

Supposons maintenant que la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ ne soit plus de la forme qu'indique l'équation (1), mais qu'elle reste continue par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$ tant que les modules $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ de ces variables ne deviennent pas supérieurs, le premier x, à une certaine limite a, le second y, à une certaine limite b, le troisième z, à une certaine limite c, ... Alors, en désignant par

$$u,\quad v,\quad w,\quad \ldots$$

de nouvelles variables dont les modules sont précisément

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \ldots;$$

par

$$\varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots$$

les arguments de ces nouvelles variables, et par N le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, on aura, non seulement pour une fonction $\mathrm{f}(x)$ de la seule variable x,

$$(2)\qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u}{u-x}\,\mathrm{f}(u)\,d\varphi,$$

mais encore

$$(3)\qquad \mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\mathrm{N}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots \frac{uvw\ldots\mathrm{f}(u, v, w, \ldots)}{(u-x)(v-y)(w-z)\ldots}\cdots d\varphi\, d\chi\, d\psi\ldots.$$

Or il suit immédiatement de la formule (3) : 1° que, dans l'hypothèse admise, la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ sera développable, avec le rapport

$$\frac{1}{(u-x)(v-y)(w-z)},$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances entières de $x, y, z, \ldots$; 2° que le terme proportionnel à

$$x^l y^m z^n \ldots,$$

dans le développement de $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$, sera

$$k_{l,m,n,\ldots}\, x^l y^m z^n \ldots,$$

la valeur de $k_{l,m,n,\ldots}$ étant

$$(4)\qquad k_{l,m,n,\ldots} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\mathrm{N}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots u^{-l} v^{-m} w^{-n}\ldots \mathrm{f}(u, v, w, \ldots)\, d\varphi\, d\chi\, d\psi\ldots.$$

Si, dans cette dernière équation, on remplace $u, v, w, \ldots$ par $x, y, z, \ldots$, alors, en nommant p l'argument de x, p' l'argument de y, p'' l'argument de z, on trouvera

$$(5)\qquad k_{l,m,n,\ldots} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\mathrm{N}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots x^{-l} y^{-m} z^{-n}\ldots \mathrm{f}(x, y, z, \ldots)\, dp\, dp'\, dp''\ldots.$$

D'ailleurs, pour obtenir cette dernière formule, il suffit évidemment de supposer que, par un procédé quelconque, on est parvenu à développer $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances entières de $x, y, z, \ldots$, de manière à obtenir une équation de la forme

$$(6)\qquad \mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \Sigma k_{l,m,n,\ldots}\, x^l y^m z^n,$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de $l, m, n, \ldots$, et qu'ensuite on intègre, par rapport aux angles $\varphi, \chi, \psi, \ldots$, entre les limites $-\pi$, $+\pi$, les deux membres de l'équation (6), multipliés par le produit $dp\,dp'\,dp'' \ldots$. Il en résulte que le coefficient $k_{l,m,n,\ldots}$ offre, avec l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (5), une valeur complètement déterminée et indépendante du procédé suivi pour le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ en une série multiple. Donc, si cette série multiple est fournie par des développements successifs, dont chacun se rapporte à une seule variable, elle restera identiquement la même, quel que soit l'ordre dans lequel on ait effectué les diverses opérations.

Observons encore que, en vertu de la formule (4), le module du coefficient $k_{l,m,n,\ldots}$ sera inférieur au rapport

$$\frac{s}{a^l b^m c^n \ldots}, \tag{7}$$

si l'on représente par s le plus grand module que puisse acquérir l'expression

$$f(u, v, w, \ldots) = f(a e^{\varphi\sqrt{-1}}, b e^{\chi\sqrt{-1}}, c e^{\psi\sqrt{-1}}, \ldots),$$

considérée comme fonction des angles $\varphi, \chi, \psi, \ldots$. Donc, par suite, les divers termes de la série multiple fournie par le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ offriront des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants du développement du produit

$$s \frac{abc\ldots}{(a - x)(b - y)(c - z)\ldots}. \tag{8}$$

Supposons à présent que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ reste continue par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, tant que les modules

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

de ces variables ne dépassent pas les limites supérieures

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

ou les limites inférieures

$$a_{,}, \quad b_{,}, \quad c_{,}, \quad \ldots.$$

Dans cette hypothèse, on se trouvera de nouveau conduit à des con-

clusions pareilles à celles que nous avons indiquées; et, pour les établir, il suffira de substituer aux équations (2) et (3) des équations analogues qui serviront encore à transformer en intégrales définies $f(x)$ et $f(x, y, z, \ldots)$. Si l'on représente par

$$u_{,}, \quad v_{,}, \quad w_{,}, \quad \ldots$$

ce que deviennent les variables

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

quand on y remplace les modules

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

par les modules

$$a_{,}, \quad b_{,}, \quad c_{,}, \quad \ldots,$$

la formule (2), en particulier, devra être remplacée par la suivante

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u}{u - x} f(u)\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u_{,}}{u_{,} - x} f(u_{,})\, d\varphi, \tag{9}$$

de laquelle on déduira sans peine l'équation qui devra être substituée à la formule (3). Alors aussi la somme qu'indique le signe Σ dans la formule (6) devra être étendue à des valeurs entières quelconques de $l, m, n, \ldots$. Enfin, dans les expressions (7), (8), s devra représenter le plus grand module que l'expression

$$f(u, v, w, \ldots),$$

considérée comme fonction des angles $\varphi, \chi, \psi, \ldots$, puisse acquérir, quand on attribue à la variable u un des modules a, $a_{,}$, à la variable v un des modules b, $b_{,}$, à la variable w un des modules c, $c_{,}$, ... Cela posé, on pourra évidemment énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Nommons*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

des variables dont les modules soient

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

Représentons par $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ *une fonction de ces variables, et supposons que cette fonction reste continue pour toutes les valeurs des modules*

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ \ldots$$

qui ne dépassent pas certaines limites supérieures

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \ldots$$

ni certaines limites inférieures

$$\mathrm{a}_{,},\ \mathrm{b}_{,},\ \mathrm{c}_{,},\ \ldots.$$

Non seulement, pour de telles valeurs des modules $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$, *la fonction sera développable, suivant les puissances entières des variables* $x, y, z, \ldots$, *en une série multiple et convergente qui sera unique, et conservera toujours la même forme, mais, de plus, les divers termes de cette série offriront des modules respectivement inférieurs aux modules des termes correspondants de la série convergente que fournit le développement du produit*

$$\mathrm{s}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}-\mathrm{x}}-\frac{\mathrm{a}_{,}}{\mathrm{a}_{,}-\mathrm{x}}\right)\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b}-\mathrm{y}}-\frac{\mathrm{b}_{,}}{\mathrm{b}_{,}-\mathrm{y}}\right)\left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}-\mathrm{z}}-\frac{\mathrm{c}_{,}}{\mathrm{c}_{,}-\mathrm{z}}\right)\cdots, \tag{10}$$

s *désignant la plus grande valeur que puisse acquérir l'expression*

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots),$$

considérée comme fonction des arguments des diverses variables, quand on attribue à la variable x *un des modules* $\mathrm{a}, \mathrm{a}_{,}$, *à la variable* y *un des modules* $\mathrm{b}, \mathrm{b}_{,}$, *à la variable* z *un des modules* $\mathrm{c}, \mathrm{c}_{,}, \ldots$.

Corollaire I. — Lorsque, la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ étant développable en série convergente, on désigne par

$$k_{l,m,n,\ldots}$$

le coefficient du produit

$$x^l y^m z^n \ldots$$

dans le développement, on a

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \Sigma k_{l,m,n,\ldots} x^l y^m z^n \ldots, \tag{11}$$

les sommations qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives des exposants $l, m, n, \ldots$. Pour fixer les idées, nous supposerons dorénavant les sommations relatives aux diverses variables, ou, ce qui revient au même, les sommations relatives aux divers indices effectuées successivement, et l'ordre dans lequel les variables seront écrites indiquera l'ordre dans lequel les sommations seront effectuées. Ainsi, en particulier, si les variables $x, y, \ldots$ se réduisent à deux, nous emploierons la formule

$$\mathrm{f}(x, y) = \Sigma k_{l,m} x^l y^m \tag{12}$$

pour exprimer que la fonction $\mathrm{f}(x, y)$ résulte de deux sommations successives relatives, la première à la variable x, la seconde à la variable y, ou, ce qui revient au même, pour exprimer que la fonction $\mathrm{f}(x, y)$ est la somme d'une série simple et convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de y, dont chaque terme est à son tour la somme d'une série simple et convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Au contraire, nous nous servirons de la formule

$$\mathrm{f}(x, y) = \Sigma k_{l,m} y^m x^l, \tag{13}$$

pour exprimer que la fonction $\mathrm{f}(x, y)$ est la somme d'une série simple et convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, dont chaque terme est lui-même la somme d'une série simple et convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de y. Il est bon d'observer que, lorsque, au lieu de remonter de la série double ou multiple à la fonction $\mathrm{f}(x, y)$ ou $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$, on redescend de cette fonction à la série multiple par une suite de développements partiels dont chacun se rapporte à une seule variable, ces développements partiels se présentent dans un ordre inverse de celui suivant lequel les sommations étaient effectuées, le premier développement devant être évidemment relatif à la série simple du rang le plus élevé. Observons encore que, la série multiple étant supposée convergente, l'ordre dans lequel les diverses sommations seront effectuées n'aura aucune influence sur leur résultat définitif. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'une série double, les formules (12) et (13) entraîneront immédiatement la suivante

$$\Sigma k_{l,m} x^l y^m = \Sigma k_{l,m} y^m x^l. \tag{14}$$

Corollaire II. — Jusqu'ici nous avons supposé que les modules x, y, z, ... des variables $x, y, z, \ldots$ ne dépassaient pas les limites supérieures

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{b}, \quad \mathrm{c}, \quad \ldots$$

ni les limites inférieures

$$\mathrm{a}_{,}, \quad \mathrm{b}_{,}, \quad \mathrm{c}_{,}, \quad \ldots$$

entre lesquelles ils peuvent varier, sans que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ cesse d'être continue pour des valeurs quelconques des arguments de $x, y, z, \ldots$. Supposons maintenant que les modules x, y, z, ..., continuant à varier par degrés insensibles, dépassent les limites dont il s'agit, et que le développement de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ devienne divergent. Concevons d'ailleurs que, avec les modules x, y, z, ..., on fasse varier encore, par degrés insensibles, les arguments de $x, y, z, \ldots$. La notation

$$\Sigma k_{l,m,n,\ldots} x^l y^m z^n \ldots,$$

en cessant de représenter la somme d'une série convergente, représentera du moins une *somme syntagmatique*, tant que chacune des séries simples produites par les diverses sommations restera convergente. Alors aussi, cette somme syntagmatique étant certainement une fonction continue des variables $x, y, z, \ldots$, il suit du théorème IV de la page 39 que la formule (11) ne cessera pas de subsister, si d'ailleurs la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ reste elle-même continue. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, concevons que les diverses sommations indiquées par le signe Σ, dans la formule* (11) *et autres semblables, soient effectuées successivement et indépendamment les unes des autres, en sorte que chacune d'elles ait pour*

objet le calcul de la somme ou des sommes d'une ou de plusieurs séries simples ordonnées suivant les puissances entières d'une même variable. Supposons d'ailleurs qu'à la suite du signe Σ on écrive les premières les variables auxquelles se rapportent les premières sommations. Supposons enfin que, après avoir attribué à $x, y, z, \ldots$ des valeurs dont les modules ne dépassent pas les limites supérieures a, b, c, ..., *ni les limites inférieures* a,, b,, c,, ..., *on fasse varier tout à la fois ces modules et les arguments des variables par degrés insensibles. Si les variations dont il s'agit, en détruisant la convergence de la série multiple produite par le développement de la fonction* $f(x, y, z, \ldots)$, *sont telles néanmoins que cette fonction ne cesse pas d'être continue, et que les séries simples correspondantes à chaque sommation ne cessent pas d'être convergentes, la formule* (11), *c'est-à-dire l'équation*

$$f(x, y, z, \ldots) = \Sigma k_{l,m,n,\ldots} x^l y^m z^n \ldots,$$

ne cessera pas de subsister pendant la durée des variations de $x, y, z, \ldots$; seulement l'expression

$$\Sigma k_{l,m,n,\ldots} x^l y^m z^n \ldots,$$

qui représentait d'abord la somme unique d'une série multiple convergente, pourra devenir la somme syntagmatique d'une série divergente.

Corollaire I. — D'après ce que nous avons dit, les conditions qui doivent être remplies pour que la formule (11) continue de subsister se réduisent à ce que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ et la somme syntagmatique

$$\Sigma k_{l,m,n,\ldots} x^l y^m z^n \ldots$$

restent l'une et l'autre continues. La dernière condition se vérifiera certainement tant que chacune des séries simples produites par les sommations successives opérées dans l'ordre suivant lequel les variables sont écrites restera convergente, ou, ce qui revient au même, tant que les développements successifs de $f(x, y, z, \ldots)$ pourront s'effectuer dans un ordre inverse. Cette remarque permet au calculateur de s'assurer, par la seule considération de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$, si les conditions sous lesquelles subsiste la formule (11) sont ou ne sont pas vérifiées.

Corollaire II. — Supposons que, dans la formule (11), on renverse l'ordre suivant lequel les variables sont écrites. Cette formule deviendra

$$(15) \qquad \mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \Sigma k_{l,m,n,\ldots} \ldots z^n y^m x^l,$$

la variable x étant alors celle à laquelle se rapportera la dernière sommation, ou, ce qui revient au même, le premier des développements successifs de la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$. Soit, d'ailleurs, A_l le coefficient de x^l dans cette fonction développée en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. L'équation

$$(16) \qquad \mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \Sigma A_l x^l,$$

comparée à la formule (15), fournira l'équation

$$(17) \qquad A_l = \Sigma k_{l,m,n,\ldots} \ldots z^m y^n;$$

et, comme cette dernière devra subsister tant que la formule (15) subsistera, il est clair qu'on pourra énoncer encore le théorème suivant :

Théorème III. — *Nommons*

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

une fonction des variables $x, y, z, \ldots$ qui reste continue pour des valeurs de $x, y, z, \ldots$ dont les modules soient très voisins de certains modules déterminés, et supposons que, pour de telles valeurs, on développe, comme on pourra toujours le faire, la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$: 1° *en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de x*; 2° *en une série multiple ordonnée suivant les puissances entières de $x, y, z, \ldots$. Soient d'ailleurs*

$$A_l x^l \quad \text{et} \quad k_{l,m,n,\ldots} \ldots z^n y^m x^l$$

les termes généraux de ces deux séries. Non seulement on aura, pour les

valeurs primitivement attribuées à $x, y, z, \ldots$,

$$(18) \qquad \Sigma A_l x^l = \Sigma k_{l,m,n,\ldots} \ldots z^n y^m x^l,$$

et, par suite,

$$(19) \qquad A_l = \Sigma k_{l,m,n,\ldots} \ldots z^n y^m,$$

mais on peut ajouter que l'équation (19) *ne cessera pas de subsister, si l'on fait varier à la fois les modules et les arguments de $y, z, \ldots$ par degrés insensibles, pourvu que ces variations, combinées avec une variation correspondante et convenable de x, permettent à la fonction*

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$$

et à la somme syntagmatique

$$\Sigma k_{l,m,n,\ldots} \ldots z^n y^m x^l$$

de rester l'une et l'autre continues par rapport à $x, y, z, \ldots$.

Corollaire I. — Les conditions énoncées dans le théorème III, et sous lesquelles la formule (19) continue de subsister, se trouveront évidemment remplies, si les variations attribuées à $x, y, z, \ldots$ sont telles que la fonction $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ et les divers termes de son développement suivant les puissances entières de x restent fonctions continues des variables $x, y, z, \ldots$, pour les modules acquis par ces diverses variables et pour des arguments quelconques des variables $y, z, \ldots$.

Corollaire II. — Pour éclaircir ce qui vient d'être dit par un exemple très simple, réduisons $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ à une fonction de deux variables, et supposons, en particulier,

$$(20) \qquad \mathrm{f}(x, y) = (1 - x)^{-s} \left[1 - a - ay\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right]^{-t},$$

s, t désignant des exposants réels, et a une constante dont le module soit inférieur à l'unité. La fonction $\mathrm{f}(x, y)$ sera certainement continue par rapport à x et y, si, en attribuant à x un module inférieur, mais sensiblement égal à l'unité, on attribue à y un module très petit. Alors, en posant, pour abréger,

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n},$$

on tirera de l'équation (20)

$$f(x,y) = (1-a)^{-t}\,\Sigma[t]_m\,[s-m]_{n+m}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m y^m x^n;$$

et par suite, si l'on nomme A_n le coefficient de x^n dans le développement de $f(x,y)$ en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de x, on aura, pour un très petit module de y,

$$(21) \qquad A_n = (1-a)^{-t}\,\Sigma[t]_m\,[s-m]_{n+m}\left(\frac{a}{1-a}\right)^m y^m.$$

Supposons maintenant que x et y viennent à varier. Comme la formule (20) donnera, non seulement

$$f(x,y) = (1-a)^{-t}(1-x)^{-s}\left(1+\frac{ay}{1-a}\right)^{-t}\left(1-\frac{ay}{1-a+ay}x\right)^{-t},$$

mais encore

$$f(x,y) = (1-a)^{-t}(1-x)^{-s}\left[1-\frac{ay}{1-a}\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]^{-t},$$

il est clair que la fonction $f(x,y)$ et les divers termes de son développement, suivant les puissances ascendantes de x, resteront fonctions continues de x, y, si le module de x et les modules des trois expressions

$$\frac{ay}{1-a}, \quad \frac{ay}{1-a+ay}x, \quad \frac{ay}{1-a}\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

restent inférieurs à l'unité. Sous ces conditions, la formule (21) continuera de subsister. D'ailleurs, il ne sera pas nécessaire que ces conditions se vérifient pour un argument quelconque de x : il suffira qu'elles se vérifient pour un argument de x sensiblement nul ou même égal à zéro, c'est-à-dire pour une valeur réelle et positive de x. Enfin, comme on pourra prendre pour cette valeur positive un nombre inférieur à la

limite 1, mais aussi rapproché que l'on voudra de l'unité, et par suite réduire sensiblement le produit

$$\frac{ay}{1-a+ay}x$$

au rapport

$$\frac{ay}{1-a+ay},$$

et le produit

$$\frac{ay}{1-a}\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

à zéro, nous devons conclure que les conditions, sous lesquelles subsistera la formule (21), se réduiront aux deux suivantes :

$$\text{mod.}\,\frac{ay}{1-a} < 1, \qquad \text{mod.}\,\frac{ay}{1-a+ay} < 1.$$

§ II. — *Développement des fonctions d'une seule variable en séries ordonnées suivant les puissances entières de l'argument de cette variable.*

Nommons x une variable dont x soit le module et p l'argument, en sorte qu'on ait

$$x = \mathrm{x}e^{p\sqrt{-1}}.$$

Soit encore $f(x)$ une fonction de x qui reste continue pour toute valeur du module x qui ne dépasse pas une certaine limite supérieure a, ni une certaine limite inférieure $\mathrm{a}_{\prime}$. La fonction $f(x)$ sera, pour une telle valeur de x, développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières de la variable x, ou, ce qui revient au même, suivant les puissances ascendantes du module x; et, si l'on nomme k_n le coefficient de x^n dans le développement de la fonction, on aura

$$(1) \qquad f(x) = \Sigma k_n x^n,$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives de n. De plus, si l'on substitue à x sa valeur dans le second membre de la formule (1), on trouvera

$$(2) \qquad f(x) = \Sigma k_n X^n e^{np\sqrt{-1}}.$$

D'ailleurs $e^{np\sqrt{-1}}$ sera, pour une valeur quelconque de n, développable suivant les puissances ascendantes de p par la formule

$$e^{np\sqrt{-1}} = \Sigma \frac{(n\sqrt{-1})^m}{1.2\ldots m} p^m,$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de m, et le produit $1.2\ldots m$ devant être remplacé par l'unité quand m s'évanouit. Donc la formule (2) donnera encore

$$(3) \qquad f(x) = \Sigma k_n \frac{(n\sqrt{-1})^m}{1.2\ldots m} p^m X^n,$$

la première des sommations qu'indique le signe Σ étant relative aux diverses valeurs de m. Ainsi la fonction $f(x)$, développée d'abord en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de x, sera encore développable en une série double et convergente, ou du moins en une série double syntagmatique ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument p et suivant les puissances entières du module X. Lorsque cette série double sera convergente, on pourra renverser l'ordre des sommations et substituer à l'équation (3) cette autre formule

$$(4) \qquad f(x) = \Sigma k_n \frac{(n\sqrt{-1})^m}{1.2\ldots m} X^n p^m.$$

Alors aussi, en posant, pour abréger,

$$h_m = \Sigma k_n \frac{(n\sqrt{-1})^m}{1.2\ldots m} X^n,$$

on trouvera

$$(5) \qquad f(x) = \Sigma h_m p^m,$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de m.

Il est bon d'observer que, dans l'équation

$$x = X e^{p\sqrt{-1}},$$

on peut toujours supposer l'argument p compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Adoptons cette supposition. Pour que la série double produite par le développement de la fonction

$$f(x) = f(X e^{p\sqrt{-1}})$$

reste convergente, il suffira que l'expression

$$f(X e^{p\sqrt{-1}}),$$

considérée comme fonction de deux variables X et p, reste continue par rapport à ces variables, dans le cas même où chacune d'elles, sans changer de module, deviendrait imaginaire; et comme, dans ce cas, pour un module de p compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$, le module de l'exponentielle trigonométrique $e^{p\sqrt{-1}}$ ne pourrait dépasser la limite supérieure e^{π}, ni la limite inférieure $e^{-\pi}$, il suffira que, des deux produits

$$X e^{\pi}, \quad X e^{-\pi},$$

le premier ne puisse devenir supérieur à la limite a, ni le second inférieur à la limite $a_{,}$. En d'autres termes, il suffira que les logarithmes népériens des rapports

$$\frac{a}{X}, \quad \frac{X}{a_{,}}$$

surpassent tous deux le nombre

$$\pi = 3,14159265\ldots.$$

D'autre part, en désignant par u, v deux variables nouvelles qui aient pour modules a, $a_{,}$, et pour argument un angle variable φ, on aura

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u}{u-x} f(u)\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{v}{v-x} f(v)\, d\varphi.$$

Ce n'est pas tout : si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}\right)=\theta,$$

l'équation

$$u-x=0 \tag{7}$$

pourra s'écrire comme il suit

$$e^{\theta+\varphi\sqrt{-1}}=e^{p\sqrt{-1}},$$

et cette équation, résolue par rapport à p, offrira une infinité de racines de la forme

$$p=\varphi-\theta\sqrt{-1}+2i\pi, \tag{8}$$

i désignant une quantité entière positive ou négative. On trouvera, par suite,

$$\frac{u}{u-x}=\sqrt{-1}\sum\frac{1}{p-(\varphi+2i\pi)+\theta\sqrt{-1}}, \tag{9}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de i. De même, en posant

$$\mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}_{,}}\right)=\theta_{,},$$

on trouvera

$$\frac{v}{v-x}=\sqrt{-1}\sum\frac{1}{p-(\varphi+2i\pi)-\theta_{,}\sqrt{-1}}. \tag{10}$$

Cela posé, on tirera évidemment de la formule (6)

$$\mathrm{f}(x)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum\left[\frac{\mathrm{f}(u)}{p-(\varphi+2i\pi)+\theta\sqrt{-1}}-\frac{\mathrm{f}(v)}{p-(\varphi+2i\pi)-\theta_{,}\sqrt{-1}}\right]d\varphi. \tag{11}$$

Lorsque le nombre π est effectivement compris entre les limites θ, $\theta_{,}$, qui représentent les logarithmes népériens des rapports $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$, $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}_{,}}$, on peut développer suivant les puissances ascendantes de p chacune des fractions comprises sous le signe $\int$ dans le second membre de la formule (11), et alors on obtient la valeur de $\mathrm{f}(x)$, développée à son tour

suivant les puissances ascendantes de p, par une formule qui s'accorde nécessairement avec l'équation (5). Ajoutons que, si dans le second membre de la formule (11) on nomme $\mathcal{P}$ la partie correspondante à une valeur nulle de i, on aura

$$\mathcal{P}=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\mathrm{f}(u)}{p-\varphi+\theta\sqrt{-1}}-\frac{\mathrm{f}(v)}{p-\varphi-\theta_{,}\sqrt{-1}}\right]d\varphi \tag{12}$$

et, par suite,

$$\mathcal{P}=\Sigma c_m p^m, \tag{13}$$

la valeur de c_m étant

$$c_m=\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\mathrm{f}(u)}{(\varphi-\theta\sqrt{-1})^{m+1}}-\frac{\mathrm{f}(v)}{(\varphi-\theta_{,}\sqrt{-1})^{m+1}}\right]d\varphi. \tag{14}$$

Remarquons enfin que, des formules (5) et (13), on tirera

$$\mathrm{f}(x)-\mathcal{P}=\Sigma(h_m-c_m)p^m$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{f}(x)=\mathcal{P}+\Sigma(h_m-c_m)p^m. \tag{15}$$

Supposons maintenant que le nombre π cesse d'être renfermé entre les limites θ, $\theta_{,}$. Alors les équations (5) et (13) cesseront d'être exactes, attendu que les fractions renfermées sous le signe $\int$, dans la valeur de $\mathcal{P}$, cesseront d'être toujours développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de p. Mais il n'en sera pas de même des autres fractions renfermées sous le signe $\int$ dans le second membre de la formule (11), attendu que, pour une valeur de i différente de zéro et pour une valeur de φ comprise entre les limites $-\pi$, $+\pi$, les modules des expressions imaginaires

$$\varphi+2i\pi+\theta\sqrt{-1},\quad \varphi+2i\pi-\theta_{,}\sqrt{-1}$$

seront toujours supérieurs au nombre π. Donc alors la formule (15) continuera de subsister. Ainsi, dans le cas où le développement de $\mathrm{f}(x)$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de p

deviendra divergent, il suffira de modifier la série obtenue, comme l'indique la formule (15), pour retrouver un développement convergent auquel devra s'ajouter la valeur de ϖ déterminée par l'équation (12). Remarquons encore que, dans la formule (12), les fractions comprises sous le signe $\int$ pourront généralement se développer, pour certaines valeurs de φ, suivant les puissances ascendantes de p, et, pour d'autres valeurs de φ, suivant les puissances descendantes de p, et que, en conséquence, la fonction ϖ sera toujours développable, suivant les puissances ascendantes et descendantes de p, en une série dont les coefficients seront des intégrales prises entre des limites qui dépendront elles-mêmes de l'argument p.

Je développerai, dans d'autres articles, les conséquences les plus remarquables des nouvelles formules que je viens d'établir.

281.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur les approximations des fonctions de très grands nombres.*

C. R., T. XX, p. 481 (24 février 1845).

Au moment où il s'agissait de proposer un sujet de prix pour les Sciences mathématiques, un de nos confrères remarquait avec raison que les travaux des géomètres sur la détermination des fonctions de très grands nombres laissaient encore beaucoup à désirer. J'ai, il est vrai, dans un précédent Mémoire, étendu la théorie de leurs approximations, en établissant des formules qui comprennent, comme cas particuliers, celles que Laplace avait données. Mais, dans le Mémoire de 1827, je me suis borné au calcul du premier terme de la série qui représente la fonction dont on cherche la valeur approchée. Ayant réfléchi de nouveau sur cet objet, j'ai été assez heureux pour obtenir une théorie générale qui fournit, avec les valeurs approchées des

fonctions, leurs développements en séries convergentes ou en séries syntagmatiques dont les sommes représentent les fonctions elles-mêmes. Cette théorie nouvelle est fondée sur la considération de la série qu'on obtient quand on développe une fonction d'une seule variable suivant les puissances entières de l'argument de cette variable. Les formules auxquelles je parviens renferment une transcendante unique, savoir l'intégrale de l'exponentielle négative qui a pour exposant le carré d'une variable. Mes formules peuvent être appliquées, avec un égal succès, et aux problèmes du calcul des chances et aux problèmes astronomiques. Elles fournissent un nouveau moyen de calculer aisément les mouvements des planètes, et, en particulier, les inégalités périodiques d'un ordre élevé.

Dans un prochain article, j'exposerai en détail les calculs et les résultats que je viens d'indiquer sommairement.

282.

Analyse mathématique. — *Note sur les modules principaux des fonctions.*

C. R., T. XX, p. 546 (3 mars 1845).

Soit

$$x = r e^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire, dont r désigne le module et p l'argument. Soit encore

$$f(x) = f(r e^{p\sqrt{-1}})$$

une fonction de la variable x, qui reste continue avec sa dérivée du premier ordre, par rapport à r et à p, pour des valeurs du module r très voisines d'un certain module x. Enfin soit R le module de la fonction

$$f(r e^{p\sqrt{-1}}).$$

Si, dans cette fonction, l'on fait varier seulement l'argument p, R acquerra des valeurs diverses, parmi lesquelles se trouveront des maxima et minima correspondants aux valeurs de p, qui vérifieront la condition

$$D_p R = 0. \tag{1}$$

Soit $\mathcal{R}$ le plus grand des maxima ou le *maximum maximorum* de R, considéré comme fonction de p. $\mathcal{R}$ sera une fonction de la seule variable r; et, pour la valeur x du module r, $\mathcal{R}$ acquerra une valeur déterminée. Supposons maintenant que, r venant à croître à partir de la valeur x, la fonction $\mathcal{R}$ diminue; on aura

$$D_r \mathcal{R} < 0. \tag{2}$$

D'ailleurs $\mathcal{R}$ est ce que devient R quand on y suppose p réduit à une fonction de r, déterminée par la formule (1); et, comme on aura, dans cette supposition,

$$D_r \mathcal{R} = D_r R + D_p R \, D_r p,$$

par conséquent, eu égard à la formule (1),

$$D_r \mathcal{R} = D_r R, \tag{3}$$

il est clair qu'à la condition (2) on pourra substituer la suivante :

$$D_r R < 0. \tag{4}$$

Concevons à présent que, le module r croissant toujours, la fonction R ne cesse pas d'être finie et continue. Le *maximum maximorum* d R relatif à l'argument p, c'est-à-dire la fonction de r désignée par $\mathcal{R}$, ne pourra cesser de décroître, pour croître ensuite, qu'après avoir atteint une valeur minimum. Cette valeur minimum sera ce que j'appellerai un *module principal* de la fonction $f(x)$. D'ailleurs, ce module principal étant tout à la fois un maximum de R, considéré comme fonction de p et un minimum de $\mathcal{R}$, répondra généralement à des valeurs de r et p qui vérifieront les conditions

$$D_p R = 0, \qquad D_r \mathcal{R} = 0, \tag{5}$$

$$D_p^2 R < 0, \qquad D_r^2 \mathcal{R} > 0. \tag{6}$$

Ajoutons que de la formule (3), jointe à l'équation (1), on tirera

$$D_r^2 \mathcal{R} = D_r^2 R - \frac{(D_p D_r R)^2}{D_p^2 R},$$

et que, en vertu de cette dernière équation, jointe à la formule (3), on pourra réduire les conditions (5), (6) aux suivantes :

$$D_p R = 0, \qquad D_r R = 0, \tag{7}$$

$$D_p^2 R < 0, \qquad D_r^2 R - \frac{(D_p D_r R)^2}{D_p^2 R} > 0. \tag{8}$$

Il y a plus : si l'on nomme

$$s \quad \text{et} \quad S$$

les logarithmes népériens des modules

$$r \quad \text{et} \quad R,$$

en sorte qu'on ait

$$r = e^s, \qquad R = e^S, \tag{9}$$

il est clair que s croîtra indéfiniment avec r, et S avec R. Il en résulte qu'en considérant R, non plus comme une fonction de r et p, mais comme une fonction de s et p, on pourra substituer aux formules (1) et (4) les conditions

$$D_p S = 0, \qquad D_s S < 0, \tag{10}$$

et aux formules (7), (8) les suivantes :

$$D_p S = 0, \qquad D_s S = 0, \tag{11}$$

$$D_p S < 0, \qquad D_s^2 S - \frac{(D_p D_s S)^2}{D_p^2 S} > 0. \tag{12}$$

Il nous reste à faire voir que, pour décider si les formules (9), (11) ou (12) sont ou ne sont pas vérifiées, il suffit de recourir à la seule considération de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées du premier et du second ordre, prises par rapport à la variable x.

Si l'on nomme P l'argument de $f(x)$, en sorte qu'on ait

$$f(x) = R e^{P\sqrt{-1}}, \tag{13}$$

les valeurs de x, $f(x)$, exprimées en fonction de s, p, S, P, seront

$$x = e^{s+p\sqrt{-1}}, \qquad f(x) = e^{S+P\sqrt{-1}}. \tag{14}$$

Donc, si l'on considère x, S, P comme des fonctions de s, p, et si l'on pose, pour abréger,

$$f'(x) = D_x f(x), \qquad f''(x) = D_x^2 f(x),$$

on trouvera, non seulement

$$D_p x = x\sqrt{-1}, \qquad D_s x = x,$$
$$D_p^2 x = -x, \qquad D_p D_s x = x\sqrt{-1}, \qquad D_s^2 x = x,$$

mais encore

$$D_p(S + P\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, D_s(S + P\sqrt{-1}), \tag{15}$$
$$D_p^2(S + P\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, D_p D_s(S + P\sqrt{-1}) = -D_s^2(S + P\sqrt{-1}), \tag{16}$$

les valeurs de $D_s(S + P\sqrt{-1})$, $D_s^2(S + P\sqrt{-1})$ étant

$$D_s(S + P\sqrt{-1}) = \frac{x f'(x)}{f(x)}, \qquad D_s^2(S + P\sqrt{-1}) = x D_x \frac{x f'(x)}{f(x)}, \tag{17}$$

et, par suite,

$$\begin{cases} D_p S = -D_s P, & D_p P = D_s S, \\ D_p^2 S = -D_p D_s P = -D_s^2 S, & D_p^2 P = D_p D_s S = -D_s P. \end{cases} \tag{18}$$

Or, comme on tire des équations (17) et (18)

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = D_s S - D_p S\sqrt{-1}$$

et

$$D_s^2 S = -D_p^2 S,$$

les formules (11) pourront être évidemment réduites à la seule formule

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = 0, \tag{19}$$

et les conditions (12) à la seule condition

$$D_p^2 S < 0, \tag{20}$$

puisque, en supposant la condition (20) vérifiée, on aura

$$D_s^2 S - \frac{(D_p D_s S)^2}{D_p^2 S} = -D_p^2 S\left[1 + \left(\frac{D_p D_s S}{D_p S}\right)^2\right] > 0.$$

On doit observer, en outre : 1° que dans l'équation (19) on peut laisser de côté la racine

$$x = 0,$$

à laquelle correspondrait une valeur nulle de $D_p^2 S$; 2° qu'on pourra omettre pareillement le diviseur $f(x)$, si, comme nous l'avons supposé, on se borne à faire varier le module r entre des limites telles que la fonction $f(x)$ ne cesse pas d'être continue. On pourra donc alors réduire l'équation (19) à celle-ci :

$$f'(x) = 0. \tag{21}$$

Ajoutons que, en vertu des formules (15), (16) et (17), les conditions (10) se réduiront évidemment à ce que la valeur du produit

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} \tag{22}$$

soit réelle, mais négative, et la condition (20) à ce que la partie réelle du produit

$$x D_x \frac{x f'(x)}{f(x)} \tag{23}$$

reste positive. Remarquons enfin que, dans le cas où l'équation (21) se vérifie, l'expression (23) peut être réduite au produit

$$\frac{x^2 f''(x)}{f(x)}.$$

Cela posé, on pourra évidemment énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient*

$$x = r e^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire, dont r désigne le module, et $f(x)$ *une fonction de la variable* x, *qui reste continue avec sa dérivée du premier ordre,* *dans le voisinage d'une valeur particulière* X *attribuée au module* r. *Soient encore R le module de la fonction* $f(x)$, *et* $\mathfrak{R}$ *le* maximum maximorum *de R, considérée comme fonction de la seule variable p. Enfin supposons que, le module r venant à croître à partir de la valeur* X, *sans que la fonction* $f(x)$ *cesse d'être continue, le module* $\mathfrak{R}$ *commence par décroître, pour croître ensuite. Non seulement la valeur de p, à laquelle correspondra le module* $\mathfrak{R}$, *donnera pour le produit*

$$\frac{x f'(x)}{f(x)}$$

une valeur réelle qui, d'abord négative, finira par changer de signe, en passant par zéro, mais, de plus, ce changement de signe aura précisément lieu à l'instant où le module $\mathfrak{R}$, *devenant un minimum, sera réduit à ce que nous appelons un* module principal *de la fonction* $f(x)$; *et alors la valeur de* x, *en vérifiant l'équation*

$$f'(x) = 0,$$

rendra généralement positive la partie réelle du produit

$$\frac{x^2 f''(x)}{f(x)}.$$

Ajoutons que, réciproquement, si ces deux conditions sont vérifiées, pour une valeur donnée de x, *la valeur correspondante de R sera un module principal de* $f(x)$.

Corollaire I. — Nous avons ici considéré le cas général où la partie réelle de $f''(x)$ ne s'évanouit pas pour une valeur de x qui vérifie l'équation

$$f'(x) = 0.$$

Dans le cas contraire, pour décider si un module principal de la fonction $f(x)$ correspond à la valeur trouvée de x, on ne pourrait plus se borner à la seule considération de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées du premier et du second ordre. Il faudrait, comme dans la théorie ordinaire des maxima et minima, faire encore entrer en ligne de compte les dérivées d'un ordre supérieur au second, ou du moins la première de celles qui ne se réduiraient pas à zéro.

Corollaire II. — Pour montrer une application très simple du théorème ci-dessus énoncé, posons

$$f(x) = x^{-n} e^x,$$

n étant un nombre quelconque. Dans ce cas, l'équation (19) ou (21), réduite à la formule

$$x - n = 0,$$

offrira une seule racine finie, savoir

$$x = n.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\frac{x^2 f''(x)}{f(x)} = n > 0,$$

on conclura du théorème ci-dessus énoncé que la fonction

$$x^{-n} e^x$$

admet un seul module principal, qui se confond avec la valeur minimum calculée pour le cas où la variable x reste réelle. Ce module principal, correspondant à la valeur n de x, se trouve représenté par le produit

$$n^{-n} e^n.$$

283.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur les approximations des fonctions de très grands nombres.*

C. R., T. XX, p. 552 (3 mars 1845).

La théorie nouvelle et générale que je vais établir repose, comme je l'ai déjà dit dans la dernière séance, sur la considération de la série simple qu'on obtient quand on développe une fonction d'une seule variable suivant les puissances entières de l'argument de cette variable.

Après avoir montré dans le premier paragraphe qu'on peut faire servir ce développement à la détermination du terme constant ou même d'un terme quelconque de la série simple qui représente la même fonction développée suivant les puissances entières du module, j'examine les conséquences importantes qui se déduisent de cette vérité pour l'approximation des fonctions de très grands nombres, et je prouve, en particulier, que la détermination approximative d'une fonction qui renferme un facteur élevé à une très haute puissance peut être généralement ramenée à la détermination du module principal de ce facteur. Il y a plus : je fais voir comment on peut développer de telles fonctions en séries rapidement convergentes, qui permettent de les calculer avec une exactitude aussi grande que l'on voudra. Parmi les résultats auxquels je suis ainsi parvenu, il en est un surtout qui paraît digne de remarque, et que je vais immédiatement énoncer.

Soit $F(x)$ une fonction de x, qui renferme un facteur élevé à une très haute puissance, en sorte qu'on ait

$$F(x) = \mathfrak{X}^n f(x),$$

n désignant un très grand nombre, et $\mathfrak{X}$ étant lui-même fonction de x. Supposons d'ailleurs que la fonction $F(x)$ reste continue avec sa dérivée du premier ordre, pour tout module de x qui ne dépasse pas une certaine limite supérieure a, ni une certaine limite inférieure $\mathrm{a}_{,}$. Supposons encore qu'une certaine valeur k de x offre un module x compris entre ces limites, et qu'à cette valeur corresponde un module principal de la fonction $\mathfrak{X}$. Enfin, nommons a la valeur particulière du produit

$$\frac{1}{2}\,\frac{x^2\mathfrak{X}''}{\mathfrak{X}},$$

correspondante à $x = k$, et A le terme indépendant de la variable x dans le développement de $F(x)$ suivant les puissances entières de cette variable. Si les logarithmes népériens des rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}},\quad \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}_{,}}$$

surpassent tous deux le nombre

$$\pi = 3,14159265\ldots,$$

on aura

$$A = e^{-nD_n}\,\frac{F\left[k\,e^{\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + F\left[k\,e^{-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp,$$

la lettre caractéristique D_n indiquant une différentiation relative à n, et les facteurs symboliques devant être remplacés par leurs développements suivant les puissances entières de D_n. Ajoutons qu'à ces mêmes développements correspondra un développement très convergent de A, qui renfermera la seule transcendante

$$\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp = \frac{1}{\sqrt{an}}\int_0^{\pi\sqrt{an}} e^{-p^2}\,dp$$

et qui, pour de très grandes valeurs de n, se réduira sensiblement à son premier terme, c'est-à-dire à la moitié du rapport

$$\frac{F(k)}{\sqrt{n\pi a}}.$$

Ce n'est pas tout : la moitié de ce rapport représentera encore, à très peu près, la valeur de A correspondante à de grandes valeurs de n, dans le cas même où les logarithmes népériens des quantités $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$, $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}_{,}}$ ne seront pas l'un et l'autre supérieurs au nombre π.

Dans le second et le troisième paragraphes, j'applique la nouvelle théorie à la solution de divers problèmes et à l'établissement des formules générales à l'aide desquelles on détermine facilement les perturbations d'un ordre élevé dans les mouvements des corps célestes.

284.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur les approximations des fonctions de très grands nombres.*

C. R., T. XX, p. 691 (17 mars 1845).

Nous allons exposer ici, avec quelques développements, la théorie nouvelle qui fait l'objet de ce Mémoire, et qui repose sur les bases déjà indiquées dans de précédents articles (*voir*, en particulier, le *Compte rendu* de la séance du 3 mars 1845).

Analyse.

§ I. — *Considérations générales.*

Nommons x une variable dont x soit le module et p l'argument, en sorte qu'on ait

$$x = \mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}}.$$

Soit encore $f(x)$ une fonction de x qui reste continue, avec sa dérivée du premier ordre, pour toute valeur du module x qui ne dépasse pas une certaine limite supérieure a, ni une certaine limite inférieure $\mathrm{a}_{,}$. Enfin, posons

$$\theta = \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}\right), \qquad \theta_{,} = \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}_{,}}\right),$$

la lettre caractéristique l indiquant un logarithme népérien. Si le nombre

$$\pi = 3,14159265\ldots,$$

qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, est inférieur aux deux nombres θ, $\theta_{,}$, alors, d'après ce qui a été dit dans la dernière séance, la fonction

$$f(x) = f(\mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}}),$$

dans laquelle la valeur numérique de p peut être supposée inférieure

à π, sera toujours développable en une série simple et convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument p; et, en désignant par

$$h_m p^m$$

le terme général de cette série, on aura

$$f(x) = \Sigma\, h_m p^m, \tag{1}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de m. Si, au contraire, le nombre π surpasse les deux limites θ, $\theta_{,}$, ou seulement l'une d'elles, alors, en désignant par ϖ la plus petite de ces limites, il faudra supposer la valeur numérique de p inférieure à ϖ, pourvu que la fonction $f(x)$ reste développable en série convergente suivant les puissances ascendantes de p. Donc alors, en désignant, comme ci-dessus, par $h_m p^m$ le terme général du développement, on devra restreindre la formule (1) au cas où, abstraction faite du signe, l'argument p restera inférieur à ϖ.

Faisons voir maintenant que, si l'on suppose connu le développement de la fonction $f(x)$ en une série simple ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument p, on pourra en déduire, avec facilité, le terme constant ou même un terme quelconque du développement de la même fonction en une série simple ordonnée suivant les puissances entières du module x, ou, ce qui revient au même, suivant les puissances entières de la variable x.

Nommons k_n le coefficient de x^n dans le développement de $f(x)$ effectué suivant les puissances entières de x, pour un module x de x renfermé entre les limites a et $\mathrm{a}_{,}$, de sorte qu'on ait

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_{-1} x^{-1} + k_{-2} x^{-2} + \ldots, \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) = \Sigma\, k_n x^n, \tag{3}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives de n. On tirera de l'équation (2)

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\,dp. \tag{4}$$

Il y a plus : en remplaçant, sous le signe $\int$, x par $\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}$, on tirera de la formule (4)

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}\right) dp \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}\right) + \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp. \tag{6}$$

Cela posé, si la limite ϖ, qui représente le plus petit des deux nombres θ, $\theta_{,}$, vérifie la condition $\varpi > \pi$, on tirera des formules (1) et (4), ou, ce qui revient au même, des formules (1) et (6),

$$k_0 = \frac{1}{\pi}\Sigma h_{2m}\frac{\pi^{2m+1}}{2m+1}, \tag{7}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulle et positives de m. Si, au contraire, on a $\varpi < \pi$, on pourra remplacer l'équation (4) par la suivante

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varpi}^{\varpi} \mathrm{f}(x)\,dp + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}\right) + \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp, \tag{8}$$

et l'on tirera de cette dernière, combinée avec la formule (1),

$$k_0 = \frac{1}{\pi}\Sigma h_{2m}\frac{\varpi^{2m+1}}{2m+1} + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}\right) + \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp. \tag{9}$$

Les séries dont les sommes entrent dans les formules (7) et (9) seront certainement convergentes. Mais on peut leur substituer d'autres séries plus rapidement convergentes, en opérant comme je vais l'indiquer.

Supposons que, dans la formule (4) ou (8), on décompose, sous le

signe $\int$, $\mathrm{f}(x)$ considérée comme fonction de p, en deux facteurs $\varphi(p)$ et $\chi(p)$, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{f}(x) = \varphi(p)\,\chi(p). \tag{10}$$

Supposons encore que le facteur $\varphi(p)$, tout comme la fonction

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}\right),$$

reste, avec sa dérivée, fonction continue de p, pour tout module de p inférieur à ϖ. Alors, pour un tel module, on pourra développer ce facteur $\varphi(p)$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de p; et, en désignant par

$$c_m$$

le coefficient de x^m dans le développement obtenu, on aura

$$\varphi(p) = \Sigma c_m p^m; \tag{11}$$

puis, en combinant la formule (10) avec la formule (11), on trouvera

$$\mathrm{f}(x) = \Sigma c_m p^m \chi(p). \tag{12}$$

Or on tirera évidemment de cette dernière équation, jointe à la formule (4) ou (8), 1° en supposant $\varpi > \pi$,

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\Sigma c_m \int_{-\pi}^{\pi} p^m \chi(p)\,dp; \tag{13}$$

2° en supposant $\varpi < \pi$,

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\Sigma c_m \int_{-\varpi}^{\varpi} p^m \chi(p)\,dp + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}\right) + \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\,e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2}\,dp. \tag{14}$$

On doit remarquer particulièrement le cas où, dans les formules (13), (14), on suppose

$$\chi(p) = e^{\mathrm{P}},$$

P désignant une fonction entière de p. Alors, en effet, les deux exponentielles

$$e^{\mathrm{P}}, \quad e^{-\mathrm{P}}$$

restent, avec leurs dérivées, fonctions continues de l'argument P, et par suite la fonction $\varphi(p)$, déterminée par l'équation (10), de laquelle on tire

$$\varphi(p) = e^{-p}\,\mathrm{f}(x), \tag{15}$$

remplit certainement la condition de rester continue avec sa dérivée en même temps que la fonction $\mathrm{f}(x)$. Il y a plus : si, pour fixer les idées, on pose

$$\chi(p) = e^{ap\sqrt{-1}},$$

a désignant une constante réelle ou imaginaire, alors, comme on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ap\sqrt{-1}}\,dp = \frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (p\sqrt{-1})^m e^{ap\sqrt{-1}}\,dp = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{D}_a^m \frac{\sin a\pi}{a},$$

on tirera de la formule (13)

$$k_0 = \frac{1}{\pi}\sum \frac{c_m}{(\sqrt{-1})^m}\,\mathrm{D}_a^m \frac{\sin a\pi}{a} \tag{16}$$

ou, ce qui revient au même,

$$k_0 = \frac{1}{\pi}\,\varphi\left(\frac{\mathrm{D}_a}{\sqrt{-1}}\right)\frac{\sin a\pi}{a}, \tag{17}$$

la valeur de $\varphi(p)$ étant, en vertu de la formule (10),

$$\varphi(p) = e^{-ap\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}).$$

Si, au contraire, on pose

$$\chi(p) = e^{-ap^2},$$

alors, comme on aura

$$\int_{-\pi}^{\pi} p^{2m} e^{-ap^2}\,dp = (-1)^m\,\mathrm{D}_a^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ap^2}\,dp$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} p^{2m+1} e^{-ap^2}\,dp = 0,$$

on tirera de la formule (13)

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\,\Sigma(-1)^m c_{2m}\,\mathrm{D}_a^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ap^2}\,dp \tag{18}$$

ou, ce qui revient au même,

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\varphi\left(\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right) + \varphi\left(-\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right)}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ap^2}\,dp, \tag{19}$$

la valeur de $\varphi(p)$ étant

$$\varphi(p) = e^{ap^2}\,\mathrm{f}(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}). \tag{20}$$

Les formules (16), (17), (18), (19), toutes déduites de l'équation (13), se rapportent au cas où l'on a $\varpi > \pi$. Si l'on avait, au contraire, $\varpi < \pi$, ces formules devraient être remplacées par celles que l'on déduirait de l'équation (14). Alors, par exemple, à la place de la formule (19), on obtiendrait la suivante :

$$k_0 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\varphi\left(\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right) + \varphi\left(-\mathrm{D}_a^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right)}{2}\int_{-\varpi}^{\varpi} e^{-ap^2}\,dp + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p) + \varphi(-p)}{2}\,e^{-ap^2}\,dp. \tag{21}$$

Jusqu'ici, en supposant connu le développement de la fonction $\mathrm{f}(x)$ suivant les puissances ascendantes de l'argument p, nous nous sommes borné à déduire de ce développement la valeur de k_0, c'est-à-dire le terme constant de la série qui représente le développement de la même fonction suivant les puissances entières de la variable x. Si l'on voulait obtenir, non plus la valeur de k_0, mais celle de la constante k_n qui sert de coefficient à x^n dans le dernier développement, il suffirait évidemment de remplacer, dans les diverses formules, la fonction $\mathrm{f}(x)$ par le rapport

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{x^n},$$

attendu que, en vertu de l'équation (2), k_n sera précisément le terme constant du développement de ce rapport en série ordonnée suivant les puissances entières de x. On arrivera encore aux mêmes conclusions, si l'on observe que de la formule (2), divisée par x^n, on tire

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\, f(x)\, dp. \tag{22}$$

Une fonction donnée d'un très grand nombre n peut être considérée comme représentant le coefficient x^n dans une série ordonnée suivant les puissances entières de x. Telle est, en particulier, la fonction k_n, déterminée par la formule (22). Rien n'empêche d'ailleurs de supposer que, dans les calculs précédents, on remplace la fonction $f(x)$ par une autre qui dépende elle-même du nombre n, et renferme, par exemple, un facteur élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance.

Supposons, pour fixer les idées, que, dans le second membre de la formule (22), on remplace $f(x)$ par le produit

$$x^n \mathfrak{X}^n f(x),$$

$\mathfrak{X}$ désignant une nouvelle fonction de x, et nommons A_n ce que devient alors k_n, ou, ce qui revient au même, nommons A_n ce que devient la valeur de k_0 déterminée par la formule (4), lorsqu'on remplace, dans le second membre de cette équation, la fonction $f(x)$ par le produit

$$\mathfrak{X}^n f(x) = F(x).$$

On aura

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{X}^n f(x)\, dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, dp. \tag{23}$$

Supposons d'ailleurs que $\mathfrak{X}$, comme $f(x)$, reste, avec sa dérivée, fonction continue de la variable x, pour tout module de cette variable qui ne dépasse pas la limite supérieure a, ni la limite inférieure $a_{\prime}$. Enfin, supposons que l'on prenne, non plus

$$\chi(p) = e^{-ap^2},$$

mais

$$\chi(p) = e^{-anp^2}$$

et, par suite,

$$\varphi(p) = e^{anp^2} F(x) = e^{anp^2} F\left(\mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}}\right). \tag{24}$$

Alors, à la place des formules (18), (19), on obtiendra deux autres équations du même genre; et, en se servant de la caractéristique D_n pour indiquer une différentiation relative à n, on trouvera : 1° si l'on a $\varpi > \pi$,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varphi\left[\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right] + \varphi\left[-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]}{2}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\, dp; \tag{25}$$

2° si l'on a $\varpi < \pi$,

$$\left\{\begin{aligned} A_n = {} & \frac{1}{\pi}\,\frac{\varphi\left[\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right] + \varphi\left[-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]}{2}\int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\, dp \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p) + \varphi(-p)}{2}\, e^{-anp^2}\, dp. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Il est bon d'observer que, dans les seconds membres des formules (25) et (26), le facteur symbolique

$$\frac{\varphi\left[\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right] + \varphi\left[-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]}{2}$$

est toujours réductible, par le développement de la fonction qu'indique la lettre φ, à une fonction entière de la caractéristique D_n. On arriverait à la même conclusion, en songeant que les valeurs de A_n, fournies par les équations (25) et (26), ne diffèrent pas de celles que donnent les formules

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi(p) + \varphi(-p)}{2}\, e^{-anp^2}\, dp, \tag{27}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varpi} \frac{\varphi(p) + \varphi(-p)}{2}\, e^{-anp^2}\, dp + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p) + \varphi(-p)}{2}\, e^{-anp^2}\, dp, \tag{28}$$

quand on y substitue, dans l'intégrale prise à partir de l'origine zéro, le développement de $\varphi(p)$. Ajoutons que si, dans ces formules, on remplace p par $\frac{p}{\sqrt{n}}$, elles deviendront respectivement

$$(29)\qquad \mathrm{A}_n = \frac{1}{\pi\sqrt{n}}\int_0^{\pi\sqrt{n}} \frac{\varphi\left(\frac{p}{\sqrt{n}}\right)+\varphi\left(-\frac{p}{\sqrt{n}}\right)}{2}\, e^{-ap^2}\,dp,$$

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_n = {} & \frac{1}{\pi\sqrt{n}}\int_0^{\varpi\sqrt{n}} \frac{\varphi\left(\frac{p}{\sqrt{n}}\right)+\varphi\left(-\frac{p}{\sqrt{n}}\right)}{2}\, e^{-ap^2}\,dp \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{\varpi}^{\pi} \frac{\varphi(p)+\varphi(-p)}{2}\, e^{-anp^2}\,dp. \end{aligned}\right.$$

Les formules (25) et (26) ou (29) et (30) fournissent le moyen d'obtenir aisément, avec une grande approximation, la valeur approchée de A_n. Pour le faire voir, considérons d'abord le cas particulier où l'on a $\mathrm{x} = 1$, et où un module principal de la fonction $\mathcal{X}$ correspond précisément à la valeur 1 de la variable x. Alors, si l'on désigne par

$$\mathcal{X}',\quad \mathcal{X}'',\quad \mathcal{X}''',\quad \ldots$$

les dérivées successives de la fonction $\mathcal{X}$ différentiée par rapport à x, non seulement l'équation

$$(31)\qquad \mathcal{X}' = 0$$

sera vérifiée quand on posera $x = 1$; mais, de plus, la valeur correspondante du produit

$$\frac{x^2\mathcal{X}''}{\mathcal{X}}$$

offrira généralement, pour partie réelle, une quantité positive. Supposons la constante a réduite précisément à la moitié de cette valeur. Comme, en vertu de l'équation

$$x = \mathrm{x}\, e^{p\sqrt{-1}},$$

on aura généralement

$$\mathrm{D}_p x = x\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{D}_p\mathcal{X} = x\mathcal{X}'\sqrt{-1},\qquad \mathrm{D}_p^2\mathcal{X} = -x\,\mathrm{D}_x(x\mathcal{X}'),\qquad \ldots,$$

et, par suite, pour $x = 1$,

$$\mathrm{D}_p\mathcal{X} = 0,\qquad \mathrm{D}_p^2\mathcal{X} = -2a\mathcal{X},\qquad \ldots,$$

le développement de $\mathcal{X}$ suivant les puissances ascendantes de p se réduira, pour la valeur 1 de la variable x, à un produit de la forme

$$\mathfrak{s}(1 - ap^2 + \ldots),$$

$\mathfrak{s}$ désignant la valeur de $\mathcal{X}$ qui correspond à $x = 1$. Donc le développement du produit

$$\mathcal{X} e^{ap^2} = \mathcal{X}(1 + ap^2 + \ldots)$$

sera de la forme

$$\mathfrak{s}(1 + bp^3 + \ldots),$$

et la valeur de $\varphi(p)$, donnée par l'équation

$$\varphi(p) = e^{anp^2}\,\mathrm{F}(x) = \mathcal{X}^n e^{anp^2}\,\mathrm{f}(x),$$

sera de la forme

$$(32)\qquad \varphi(p) = \mathfrak{s}(1 + bp^3 + \ldots)^n\,\mathrm{f}\left(e^{p\sqrt{-1}}\right).$$

Donc, si l'on pose de nouveau

$$\varphi(p) = \Sigma c_m p^m,$$

c'est-à-dire si l'on désigne par c_m le coefficient de p^m, dans la fonction $\varphi(p)$ développée suivant les puissances ascendantes de p, on aura

$$c_0 = \mathfrak{s},\qquad c_2 = -\mathfrak{s}\frac{\mathrm{f}'(1) + \mathrm{f}(1)}{2},\qquad \ldots,$$

et pour $m > 1$, le coefficient c_m, considéré comme fonction de n, sera d'un degré inférieur ou tout au plus égal à $\frac{m}{3}$. Donc, enfin, dans le développement de la somme

$$\varphi\left(\frac{p}{\sqrt{n}}\right) + \left(-\frac{p}{\sqrt{n}}\right),$$

le premier terme se réduira simplement à

$$\mathfrak{s}\,\mathrm{f}(1) = \mathrm{F}(1),$$

les deux termes suivants étant de l'ordre de $\frac{1}{n}$, deux autres étant de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$, et ainsi de suite. Il en résulte que, pour de grandes valeurs de n, les intégrales, prises à partir de l'origine zéro, dans les seconds membres des formules (29), (30), se développeront en des séries très rapidement convergentes, ainsi que les produits de ces intégrales par $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme on aura d'ailleurs sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$\int_0^{\pi\sqrt{n}} e^{-ap^2}\,dp = \int_0^{\infty} e^{-ap^2}\,dp = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{33}$$

nous devons conclure qu'en négligeant, vis-à-vis de l'unité, les termes de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou d'un ordre plus élevé, on tirera de la formule (29)

$$A_n = \frac{1}{2}\,\frac{F(1)}{\sqrt{n\pi a}}, \tag{34}$$

et de la formule (30), jointe à l'équation (24),

$$A_n = \frac{1}{2}\,\frac{F(1)}{\sqrt{n\pi a}}(1+\alpha), \tag{35}$$

la valeur de α étant

$$\alpha = 2n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\varpi}^{\pi}\frac{F\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)+F\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2F(1)}\,dp. \tag{36}$$

J'ajoute qu'alors α sera sensiblement nul, et qu'en conséquence la formule (35) pourra être réduite, sans erreur sensible, à la formule (34). Effectivement, puisqu'à la valeur 1 de x correspond un module principal de la fonction $\mathfrak{X}$, il est clair que, si l'on nomme $\mathfrak{R}$ le module de $\mathfrak{X}$ pour $p=0$, et $\lambda\mathfrak{R}$ le module de $\mathfrak{X}$ pour une valeur numérique de p comprise entre les limites ϖ et π, λ sera un nombre inférieur à l'unité. Soit d'ailleurs μ la plus grande valeur que puisse acquérir le rapport

$$\frac{f(x)}{f(1)}$$

quand p varie, abstraction faite du signe, entre les limites dont il s'agit. Le module de l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (36) sera évidemment inférieur à la quantité

$$(\pi-\varpi)\lambda^n\mu;$$

et, comme le produit de cette quantité par $n^{\frac{1}{2}}$ sera sensiblement nul pour de très grandes valeurs de n, on pourra en dire autant de la valeur de α que fournira l'équation (36).

Si, en supposant le nombre n très grand, on veut obtenir pour A_n, non pas seulement une première valeur approchée de la fonction A_n, mais encore, à l'aide de plusieurs approximations successives, des valeurs de plus en plus exactes, on devra remplacer la formule (34) par les formules (25), (26); et alors on pourra se servir de diverses méthodes pour déterminer approximativement les intégrales renfermées dans ces formules, après avoir transformé les deux intégrales dont zéro est l'origine, à l'aide des deux équations

$$\int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\,dp = \frac{1}{\sqrt{an}}\int_0^{\varpi\sqrt{an}} e^{-p^2}\,dp, \tag{37}$$

$$\int_0^{\varpi\sqrt{an}} e^{-p^2}\,dp = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} - \int_{\varpi\sqrt{an}}^{\infty} e^{-p^2}\,dp. \tag{38}$$

Il suit d'ailleurs évidemment de la formule (37) que les dérivées successives de l'intégrale

$$\int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\,dp,$$

différentiée par rapport à n, ne renferment pas d'autre transcendante que cette intégrale même. Ajoutons que, si, dans la formule (25) ou (26), on substitue la valeur de $\varphi(p)$, tirée de l'équation (24), on obtiendra la valeur de A_n sous une forme qui se prête facilement aux approximations successives. On trouvera ainsi : 1° en supposant $\varpi > \pi$,

$$A_n = e^{-nD_n}\,\frac{F\left[Xe^{\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]+F\left[Xe^{-\left(\frac{D_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp; \tag{39}$$

2° en supposant $\varpi > \pi$,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_n &= e^{-n\mathrm{D}_n}\,\frac{\mathrm{F}\left[\mathrm{x}\,e^{\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]+\mathrm{F}\left[\mathrm{x}\,e^{-\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi}\int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\,dp \\ &\quad + \int_{\varpi}^{\pi}\frac{\mathrm{F}\left(\mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{F}\left(\mathrm{x}\,e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\pi}\,dp. \end{aligned}\right.$$

Jusqu'ici nous avons supposé que la valeur 1 de la variable x correspondait à un module principal de la fonction $\mathcal{X}$. Supposons maintenant que le module de $\mathcal{X}$ devienne un module principal, non plus pour $x = 1$, mais pour une autre valeur réelle ou imaginaire de x, représentée par k. Si, dans la fonction

$$\mathrm{F}(x) = \mathcal{X}^n\,\mathrm{f}(x),$$

qui reste continue par hypothèse pour tout module de x compris entre la limite supérieure a et la limite inférieure $\mathrm{a}_{\prime}$, on substitue à la variable x une autre variable y liée à x par l'équation

$$x = ky,$$

on aura identiquement

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(ky),$$

et le module principal de $\mathrm{F}(x)$ ou $\mathrm{F}(ky)$ correspondra certainement au module 1 de la variable y. De cette considération seule on déduira facilement les formules qui, dans la nouvelle supposition, devront être substituées aux formules (34), (39) et (40). Concevons que, pour abréger, l'on désigne toujours par a la valeur du produit

$$\frac{1}{2}\,\frac{x^2\mathcal{X}''}{\mathcal{X}}$$

correspondante au module principal de $\mathcal{X}$, ou, ce qui revient au même, à la racine $x = k$ de l'équation

$$\mathcal{X}' = 0$$

résolue par rapport à x. La partie réelle de la constante a sera généralement positive; et, si le module de la constante k est renfermé entre

les limites a, $\mathrm{a}_{\prime}$, le coefficient A_n de x^n dans le développement de $\mathrm{F}(x)$ sera, pour de très grandes valeurs du nombre n, déterminé avec une grande approximation, non plus par l'équation (34), mais par la formule

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}(k)}{\sqrt{n\pi a}};$$

de sorte qu'on aura

$$(41)\qquad \mathrm{A}_n = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}(k)}{\sqrt{n\pi a}}(1+\alpha),$$

α étant très rapproché de zéro, pour de très grandes valeurs de n. Si d'ailleurs, après avoir calculé les modules des rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{k},\quad \frac{k}{\mathrm{a}_{\prime}},$$

on nomme ϖ le logarithme népérien du plus petit de ces deux modules, on aura rigoureusement : 1° en supposant $\varpi > \pi$,

$$(42)\qquad \mathrm{A}_n = e^{-n\mathrm{D}_n}\,\frac{\mathrm{F}\left[k\,e^{\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]+\mathrm{F}\left[k\,e^{-\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-anp^2}\,dp;$$

2° en supposant $\varpi < \pi$,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_n &= e^{-n\mathrm{D}_n}\,\frac{\mathrm{F}\left[k\,e^{\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]+\mathrm{F}\left[k\,e^{-\left(\frac{\mathrm{D}_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\pi}\int_0^{\varpi} e^{-anp^2}\,dp \\ &\quad + \int_{\varpi}^{\pi}\frac{\mathrm{F}\left(k\,e^{p\sqrt{-1}}\right)+\mathrm{F}\left(k\,e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2\pi}\,dp. \end{aligned}\right.$$

§ II. — *Applications diverses des formules établies dans le premier paragraphe.*

Considérons d'abord la fonction

$$\mathrm{F}(x) = x^{-n}e^{nx}.$$

On pourra la présenter sous la forme

$$(1)\qquad \mathrm{F}(x) = \mathcal{X}^n,$$

la valeur de $\mathfrak{X}$ étant

$$\mathfrak{X} = x^{-1} e^x. \tag{2}$$

D'ailleurs, si l'on nomme A_n le terme constant de la série qui représente le développement du produit $x^{-n} e^{nx}$ suivant les puissances entières de x, ou, ce qui revient au même, si l'on nomme A_n le coefficient de x^n dans le développement de l'exponentielle e^{nx}, on aura

$$A_n = \frac{n^n}{1.2\ldots n} = \frac{n^n}{\Gamma(n+1)}. \tag{3}$$

Ajoutons que, dans le cas présent, la fonction $F(x)$ restera continue, avec sa dérivée, dans le voisinage de toute valeur finie de x, distincte de zéro, et que la fonction $\mathfrak{X}$ acquerra le module principal e^n pour la valeur 1 de x, à laquelle correspondra la valeur $a = \frac{1}{2}$ du produit

$$\frac{1}{2}\,\frac{x^2 \mathfrak{X}''}{\mathfrak{X}}.$$

Cela posé, il résulte de la formule (41) du § I qu'on aura sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Pour parler avec exactitude, on aura

$$A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}(1+\alpha), \tag{4}$$

α désignant un nombre qui deviendra infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n. De plus, en développant suivant les puissances de D_n les facteurs symboliques renfermés dans l'équation (42) du § I, on trouvera

$$A_n = \frac{e^n}{\pi}\left[1 + \frac{n}{2.3} D_n^2 + 4\left(\frac{n}{2.3}\right)^2 D_n^4 + \ldots\right] \int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2} n p^2}\, dp, \tag{5}$$

et l'on aura d'ailleurs

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2} n p^2}\, dp = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - 2\pi^{\frac{1}{2}} \int_{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\pi}^{\infty} e^{-p^2}\, dp\right). \tag{6}$$

Enfin, comme, pour de grandes valeurs de n, le facteur binôme, dans le second membre de l'équation (6), se réduira sensiblement à l'unité, il en résulte qu'alors une valeur très approchée de A_n sera donnée par la formule

$$A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi}}\left[1 + \frac{n}{2.3} D_n^2 + 4\left(\frac{n}{2.3}\right)^2 D_n^4 + \ldots\right] n^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante :

$$A_n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(1 + \frac{1}{12n} + \ldots\right). \tag{8}$$

L'équation (8) s'accorde avec l'équation connue qui se déduit de la formule donnée par Stirling pour la sommation des logarithmes des nombres naturels, et qui détermine la valeur approchée de $\frac{1}{A_n}$. Mais ces équations fournissent les développements de A_n ou de $\frac{1}{A_n}$ en séries qui, dans la réalité, sont divergentes; et, lorsqu'on veut s'en tenir à des formules rigoureuses, il convient de substituer à l'équation (6) ou (7) l'équation (5), qui offre un développement de A_n toujours convergent.

Supposons maintenant que, m, n, s étant des nombres très considérables, et la caractéristique Δ des différences finies étant relative à la lettre s, il s'agisse de calculer la valeur de

$$\Delta^m s^n.$$

On aura évidemment

$$\Delta^m s^n = 1.2\ldots n A_n,$$

A_n étant le coefficient de x^n dans le développement du produit

$$e^{sx}(e^x - 1)^m,$$

ou, ce qui revient au même, le terme indépendant de x dans le développement de la fonction

$$F(x) = x^{-n} e^{sx}(e^x - 1)^m. \tag{9}$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$\frac{m}{n} = \mu, \qquad \frac{n}{s} = \varsigma,$$

l'équation (9) donnera

$$\mathrm{F}(x) = \mathfrak{X}^n,$$

la valeur de $\mathfrak{X}$ étant

$$\mathfrak{X} = x^{-1} e^{\varsigma x} (e^x - 1)^\mu. \tag{10}$$

Cela posé, le module de $\mathfrak{X}$ deviendra un module principal pour la valeur réelle de x qui vérifiera la formule

$$\varsigma + \frac{\mu}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} = 0;$$

et, si l'on nomme k cette valeur réelle, alors, pour de grandes valeurs de n, on aura, en vertu de l'équation (41) du § I,

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{sk}(e^k - 1)^m}{k^{n+1}} \left(\frac{n}{k^2} - \frac{m}{e^k - 2 + e^{-k}} \right)^{-\frac{1}{2}} (1 + \alpha), \tag{11}$$

α désignant une quantité qui deviendra infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n. La formule (11) s'accorde avec une équation trouvée par Laplace, et dont j'ai donné une démonstration nouvelle dans le *Mémoire sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies* [1]. Mais, dans cette formule, α reste inconnu; et, si l'on veut obtenir une valeur exacte de A_n, représentée par la somme d'une série convergente, il suffira d'appliquer à la détermination de cette valeur, non plus la formule (41), mais la formule (42) du § I, en supposant la fonction $\mathrm{F}(x)$ déterminée par le système des formules (1) et (10).

Il est bon d'observer que le cas général où l'on suppose la valeur de $\mathrm{F}(x)$ donnée par une équation de la forme

$$\mathrm{F}(x) = \mathfrak{X}^n \mathrm{f}(x), \tag{12}$$

$\mathfrak{X}$ et $\mathrm{f}(x)$ désignant deux fonctions déterminées de x, peut être

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. I. — Voir *Journal de l'École Polytechnique*, XXVIII^e Cahier.

ramené au cas où $\mathrm{F}(x)$ serait simplement de la forme

$$\mathrm{F}(x) = \mathfrak{X}^n,$$

puisque, de cette dernière forme, on déduit la précédente, en remplaçant $\mathfrak{X}$ par le produit

$$\mathfrak{X}[\mathrm{f}(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

Il en résulte que, dans les équations (42), (43) du § I, on peut prendre pour k, ou la valeur de x correspondante à un module principal de la fonction $\mathfrak{X}$, ou la valeur de x correspondante à un module principal de la fonction

$$\mathfrak{X}[\mathrm{f}(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

Au reste, il est clair que ces deux valeurs de x déterminées, la première par l'équation

$$\mathfrak{X}' = 0, \tag{13}$$

la seconde par l'équation

$$\mathfrak{X}' + \frac{1}{n} \mathfrak{X} \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = 0, \tag{14}$$

seront très peu différentes l'une de l'autre, lorsque, n étant un très grand nombre, le rapport $\frac{1}{n}$ deviendra très petit. D'ailleurs la valeur k de x, déterminée par l'équation (13) ou (14), doit toujours, en vertu des principes établis, offrir un module qui ne dépasse pas les limites a, a$_{\prime}$, entre lesquelles le module de $\mathfrak{X}$ peut varier sans que la fonction $\mathfrak{X}$ et même la fonction $\mathrm{F}(x)$ cessent d'être continues par rapport à la variable x.

Il peut arriver que la fonction $\mathfrak{X}$, qui se trouve élevée à la $n^{\text{ième}}$ puissance dans le second membre de la formule (12), n'offre point de module principal correspondant à un module de x qui ne dépasse pas les limites a, a$_{\prime}$. Il peut même arriver que la fonction $\mathfrak{X}$ n'offre point de module principal correspondant à aucune valeur finie de x. C'est ce qui aura lieu, en particulier, si l'on suppose

$$\mathfrak{X} = x \quad \text{ou} \quad \mathfrak{X} = x^{-1}.$$

Dans des cas semblables, la détermination de A_n, c'est-à-dire du terme constant que renferme le développement de la fonction $F(x)$, ne peut plus s'effectuer de la même manière, c'est-à-dire à l'aide de l'équation (41), (42) ou (43) du § I. Mais on ne doit pas renoncer, pour ce motif, à établir des formules qui fournissent, pour de grandes valeurs de n, ou une valeur très approchée, ou même le développement de A_n en une série très rapidement convergente. Alors, en effet, de telles formules peuvent encore se déduire de l'équation (12) du § I. Nous allons entrer à ce sujet dans quelques détails.

Supposons, pour fixer les idées, que, dans la formule (12), on ait

$$\mathfrak{X} = x^{-1}$$

et, par suite,

$$F(x) = x^{-n}\,\mathrm{f}(x). \tag{15}$$

Supposons encore la fonction $\mathrm{f}(x)$ décomposable en deux facteurs, dont l'un soit une certaine puissance d'un binôme de la forme

$$x - k,$$

par conséquent, d'un binôme proportionnel à la différence

$$1 - \frac{x}{k},$$

en sorte qu'on ait, par exemple,

$$\mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} f(x) \tag{16}$$

et, par suite,

$$F(x) = x^{-n}\left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} f(x). \tag{17}$$

Enfin, supposons que la fonction $f(x)$ reste continue, avec sa dérivée, pour tout module de x qui ne dépasse pas la limite supérieure a, ni la limite inférieure $a_{,}$; et que ces deux limites comprennent entre elles le module de la constante k. Si l'on nomme x un module de la variable x, compris entre ces limites, mais inférieur au module de k, et A_n le terme indépendant de x, dans le développement de $F(x)$ correspondant à ce module, et ordonné suivant les puissances entières de x, on aura

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dp, \tag{18}$$

la valeur de x étant

$$x = \mathrm{x}\,e^{p\sqrt{-1}}. \tag{19}$$

Il y a plus : si l'on nomme h une constante dont le module, inférieur à celui de k, se trouve lui-même renfermé entre les limites a, $a_{,}$, on pourra, dans l'équation (18), supposer la valeur de x déterminée, non seulement par la formule (19), mais encore par la suivante

$$x = h\,e^{p\sqrt{-1}}; \tag{20}$$

et, en prenant, pour abréger,

$$\lambda = \frac{h}{k}, \tag{21}$$

on tirera de l'équation (18), jointe aux formules (17) et (20),

$$A_n = \frac{h^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - \lambda\,e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} f\left(h\,e^{p\sqrt{-1}}\right)dp. \tag{22}$$

Enfin, si dans l'équation (22) on fait varier h de manière à le rapprocher indéfiniment de la limite k, le rapport $\lambda = \frac{h}{k}$ s'approchera indéfiniment de la limite 1, et, en passant aux limites, on trouvera

$$A_n = \frac{k^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} f\left(k\,e^{p\sqrt{-1}}\right)dp \tag{23}$$

ou, ce qui revient au même,

$$A_n = \frac{k^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\left(n+\frac{s}{2}\right)p\sqrt{-1}}\left(-2\sin\frac{p}{2}\sqrt{-1}\right)^{-s} f\left(k\,e^{p\sqrt{-1}}\right)dp, \tag{24}$$

pourvu toutefois que l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (23) ou (24) conserve une valeur finie et déterminée. Cette dernière condition sera remplie, si la constante s offre ou une valeur négative, ou une valeur positive, mais inférieure à l'unité. Alors, en effet, on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-p\sqrt{-1})^{-s}\,dp = \frac{1}{\pi}\cos\frac{s\pi}{2}\int_{0}^{\pi}p^{-s}\,dp = \frac{\pi^{-s}}{1-s}\cos\frac{s\pi}{2};$$

et, par suite, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-p\sqrt{-1})^{-s}\,dp$$

ayant une valeur finie et déterminée, on pourra en dire autant, non seulement de l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-2\sin\frac{p}{2}\sqrt{-1}\right)^{-s}dp,$$

mais encore de la valeur de A_n donnée par l'équation (23) ou (24), et cette valeur de A_n se confondra précisément avec celle que fournira l'équation (22) pour des valeurs infiniment petites de $1-\lambda$.

Il nous reste à montrer le parti qu'on peut tirer, pour la détermination de A_n, des formules que nous venons d'établir, en supposant que l'on développe dans la formule (22) la fonction

$$f(h\,e^{p\sqrt{-1}})$$

ou, dans les formules (23) et (24), la fonction

$$f(ke^{p\sqrt{-1}}),$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de p.

Le développement de la fonction $f(ke^{p\sqrt{-1}})$ suivant les puissances ascendantes de p a pour premier terme

$$f(k);$$

et, si l'on pose, pour abréger,

$$f(ke^{p\sqrt{-1}}) = f(k) + pP, \tag{25}$$

P sera une fonction de p qui restera continue avec ses dérivées des

divers ordres, dans le voisinage d'une valeur nulle de p, pour laquelle on a

$$P = f'(k)\sqrt{-1}.$$

Comme on trouvera d'ailleurs, pour des valeurs entières de n,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-np\sqrt{-1}}(1-e^{p\sqrt{-1}})^{-s}\,dp = [s]_n, \tag{26}$$

la valeur de $[s]_n$ étant

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n}, \tag{27}$$

on tirera de l'équation (23), jointe à la formule (25),

$$A_n = [s]_n k^{-n} f(k)(1+\alpha), \tag{28}$$

la valeur de α étant

$$\alpha = \frac{1}{2\pi[s]_n f(k)}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-np\sqrt{-1}}(1-e^{p\sqrt{-1}})^{-s}\,pP\,dp. \tag{29}$$

D'autre part, comme on aura

$$(1-e^{p\sqrt{-1}})^{-s} = e^{-\frac{1}{2}sp\sqrt{-1}}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p}\right)^{-s}(-p\sqrt{-1})^{-s},$$

l'équation (29) pourra être représentée sous la forme

$$\alpha = \frac{1}{2\pi[s]_n}\int_{-\pi}^{\pi}(-p\sqrt{-1})^{1-s}e^{-np\sqrt{-1}}\chi(p)\,dp, \tag{30}$$

la valeur de $\chi(p)$ étant

$$\chi(p) = e^{-\frac{1}{2}sp\sqrt{-1}}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p}\right)^{-s}P\sqrt{-1};$$

et il est clair que la fonction de p, ici représentée par $\chi(p)$, restera, tout comme la fonction P, finie et continue, avec ses dérivées des divers ordres, dans le voisinage d'une valeur nulle de p. Cela posé, en intégrant par parties et faisant porter l'intégration sur le facteur

$$e^{-np\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\alpha = \frac{N}{n[s]_n}, \tag{31}$$

la valeur de N étant

$$\left\{\begin{aligned} N = {} & (-1)^{n+1}\tfrac{1}{2}\pi^{-s}\left[e^{\frac{1}{2}\pi s\sqrt{-1}}\chi(\pi) - e^{-\frac{1}{2}\pi s\sqrt{-1}}\chi(-\pi)\right] \\ & + \frac{s-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}(-p\sqrt{-1})^{-s}\left[\chi(p) - p\chi'(p)\sqrt{-1}\right]dp. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Mais une intégrale de la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}(-p\sqrt{-1})^{-s}\psi(p)\,dp$$

est équivalente à l'expression

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}s - np\right)\sqrt{-1}}\psi(p) + e^{-\left(\frac{\pi}{2}s - np\right)\sqrt{-1}}\psi(-p)}{2}\,p^{-s}\,dp,$$

et par suite, quand on a $s < 1$, elle offre un module inférieur au produit de l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p^{-s}\,dp = \frac{\pi^{-s}}{1-s}$$

par le plus grand des modules de $\chi(p)$ correspondants à des valeurs de p comprises entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Donc, si l'on nomme $\mathcal{S}$ le plus grand des modules qu'acquiert, pour de telles valeurs de p, la différence

$$\chi(p) - p\chi'(p)\sqrt{-1},$$

le dernier des deux termes dont se compose le second membre de l'équation (32) offrira un module inférieur au produit

$$\mathcal{S}\pi^{n-s};$$

et par suite la valeur de N, que fournit l'équation (32), demeurera finie pour des valeurs infiniment grandes de n.

Ce n'est pas tout. On tire de la formule (27)

$$[s]_n = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)\Gamma(n+1)}, \tag{33}$$

et des formules (3) et (4)

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\delta), \tag{34}$$

δ désignant un nombre qui s'évanouit avec $\frac{1}{n}$; et la formule (34) continue, comme l'on sait, de subsister dans le cas même où n cesse d'être un nombre entier. Cela posé, l'équation (33) donnera sensiblement, pour de très grandes valeurs de n,

$$[s]_n = \frac{1}{n^{1-s}\Gamma(s)}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{n[s]_n} = n^{-s}\Gamma(s). \tag{35}$$

Or, de la formule (35), jointe à l'équation (31), il résulte évidemment que, pour de très grandes valeurs de n, le rapport

$$\frac{1}{n[s]_n},$$

et même la valeur de α, se réduiront sensiblement à zéro, si l'on suppose s compris entre les limites 0, 1. Donc, dans cette supposition, le second terme α du facteur binôme $1+\alpha$, que renferme la formule (28), deviendra infiniment petit en même temps que $\frac{1}{n}$; et alors, en négligeant le second terme, on tirera de la formule (28) une valeur de A_n, qui sera très approchée pour de très grandes valeurs de n.

Revenons maintenant à la formule (22), et supposons que le nombre π soit inférieur à ceux qui représentent les logarithmes népériens des modules des deux rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{h}, \quad \frac{h}{\mathrm{a}_{\prime}}.$$

Dans cette hypothèse, l'expression

$$f\left(he^{p\sqrt{-1}}\right)$$

sera développable en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'argument p; et, si l'on pose

$$(36)\qquad f\left(he^{p\sqrt{-1}}\right) = \Sigma c_m p^m,$$

on verra l'équation (22) se réduire à la formule

$$(37)\qquad \mathrm{A}_n = \frac{h^{-n}}{2\pi}\Sigma\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1-\lambda e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} c_m p^m\, dp.$$

Si d'ailleurs on fait, pour abréger,

$$(38)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1-\lambda e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp = \mathcal{N},$$

on aura, par suite,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1-\lambda e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} p^m\, dp = \left(\sqrt{-1}\right)^m \mathrm{D}_n^m \mathcal{N},$$

et de cette dernière formule, jointe à l'équation (22), on tirera

$$(39)\qquad \mathrm{A}_n = h^{-n} f\left(he^{-\mathrm{D}_n}\right)\mathcal{N}.$$

Si, dans l'équation (39), on fait varier h de manière à le rapprocher indéfiniment de la limite k, le rapport

$$\lambda = \frac{h}{k}$$

s'approchera indéfiniment de la limite 1; et, en passant aux limites, on tirera de la formule (39)

$$(40)\qquad \mathrm{A}_n = k^{-n} f\left(ke^{-\mathrm{D}_n}\right)\mathcal{N},$$

la valeur de $\mathcal{N}$ étant

$$(41)\qquad \mathcal{N} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1-e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp;$$

par conséquent on aura

$$(42)\qquad \mathrm{A}_n = \frac{1}{2\pi}k^{-n} f\left(ke^{-\mathrm{D}_n}\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1-e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp,$$

pourvu que la série dont la somme sera représentée par l'expression symbolique

$$f\left(he^{-\mathrm{D}_n}\right)\mathcal{N}$$

reste convergente dans le cas même où l'on posera $\lambda = 1$. Ajoutons que cette dernière condition sera certainement remplie si le nombre π est inférieur à ceux qui représentent les logarithmes népériens des modules des deux rapports

$$\frac{\mathrm{a}}{k},\quad \frac{k}{\mathrm{a}_{,}},$$

et si d'ailleurs la constante s offre ou une valeur négative, ou une valeur positive, mais inférieure à l'unité. Alors, en effet, on pourra substituer à la formule (22) la formule (23), puis, à l'équation (36), une équation de la forme

$$(43)\qquad f\left(ke^{p\sqrt{-1}}\right) = \Sigma c_m p^m;$$

et de l'équation (43), combinée avec la formule (23), on déduira immédiatement les formules (40) et (41) ou, ce qui revient au même, la formule (42).

Il pourrait arriver que, dans la formule (16), la fonction $f(x)$ fût décomposable en deux facteurs qui seraient développables, le premier suivant les puissances positives de x, pour tout module de x inférieur à une certaine limite a, le second suivant les puissances négatives de x ou, ce qui revient au même, suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$, pour tout module de x supérieur à une certaine limite

$$\mathrm{a}_{,} < \mathrm{a}.$$

En désignant par $\varphi(x)$ et par $\chi\left(\frac{1}{x}\right)$ ces deux facteurs, on aurait

$$f(x) = \varphi(x)\,\chi\left(\frac{1}{x}\right),$$

par conséquent

$$\mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \varphi(x)\, \chi\left(\frac{1}{x}\right). \tag{44}$$

Alors aussi, en supposant toujours les modules des constantes h et k renfermés entre les limites

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{a}_{,},$$

et nommant A_n le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{f}(x)$ correspondant à un module de x renfermé entre les mêmes limites, on tirerait de la formule (39)

$$A_n = h^{-n} \varphi(h e^{-D_n})\, \chi(h^{-1} e^{D_n})\, \mathcal{N}, \tag{45}$$

la valeur de $\mathcal{N}$ étant déterminée par l'équation (38); et de la formule (40)

$$A_n = k^{-n} \varphi(k e^{-D_n})\, \chi(k^{-1} e^{D_n})\, \mathcal{N}, \tag{46}$$

la valeur de $\mathcal{N}$ étant déterminée par l'équation (41).

Enfin, il pourrait arriver que, dans la formule (16), on eût

$$f(x) = \mathrm{F}\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

$\mathrm{F}(u, v)$ désignant une fonction des variables u, v qui resterait continue, avec ses dérivées du premier ordre, pour des modules de ces variables respectivement inférieurs à certaines limites

$$\mathrm{a}, \quad \frac{1}{\mathrm{a}_{,}},$$

et qui serait par conséquent développable, pour de tels modules, suivant les puissances ascendantes de u et de v. Alors la formule (16) donnerait

$$\mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \mathcal{F}\left(x, \frac{1}{x}\right); \tag{47}$$

et, en supposant les limites $\mathrm{a}, \frac{1}{\mathrm{a}_{,}}$ toutes deux supérieures aux modules des constantes h, k, on tirerait de la formule (39)

$$A_n = h^{-n} \mathcal{F}(h e^{-D_n}, h^{-1} e^{D_n})\, \mathcal{N}, \tag{48}$$

la valeur de $\mathcal{N}$ étant toujours déterminée par l'équation (38), et de la formule (40)

$$A_n = k^{-n} \mathcal{F}(k e^{-D_n}, k^{-1} e^{D_n})\, \mathcal{N}, \tag{49}$$

la valeur de $\mathcal{N}$ étant déterminée par l'équation (41).

Les équations symboliques (45) et (46) ou (48) et (49) ne sont pas, il est vrai, plus générales que les formules (39) et (40), desquelles nous les avons déduites. Mais ce qui les rend dignes de remarque, c'est que par un simple changement de notation, ces équations symboliques peuvent être immédiatement transformées en d'autres, qui reproduisent des résultats déjà obtenus dans les précédents Mémoires, comme je vais le montrer en peu de mots.

En supposant que la caractéristique Δ des différences finies se rapporte à la lettre n, on a

$$e^{D_n} = 1 + \Delta \tag{50}$$

et, par suite,

$$e^{-D_n} = \frac{1}{1 + \Delta} \tag{51}$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^{-D_n} = 1 - \nabla,$$

la valeur de ∇ étant

$$\nabla = \frac{\Delta}{1 + \Delta}. \tag{52}$$

Or, en vertu des formules (50) et (51), l'équation (48) donnera

$$A_n = h^{-n} \mathcal{F}(h - h\nabla, h^{-1} + h^{-1}\Delta)\, \mathcal{N}, \tag{53}$$

et l'équation (49) donnera

$$A_n = k^{-n} \mathcal{F}(k - k\nabla, k^{-1} + k^{-1}\Delta)\, \mathcal{N}. \tag{54}$$

Ce n'est pas tout : comme, pour des valeurs entières de n, on tirera de la formule (38)

$$\mathcal{N} = [s]_n \lambda^n,$$

et de la formule (41)

$$\mathcal{N} = [s]_n,$$

l'équation (53) pourra être réduite à la suivante

$$\mathrm{A}_n = h^{-n}\,\mathfrak{F}(h - h\nabla, h^{-1} + h^{-1}\Delta)\,\{[s]_n \lambda^n\}, \tag{55}$$

et l'équation (54) à la suivante

$$\mathrm{A}_n = k^{-n}\,\mathfrak{F}(k - k\nabla, k^{-1} + k^{-1}\Delta)\,[s]_n. \tag{56}$$

On se trouvera donc ainsi conduit à deux nouvelles équations symboliques, desquelles on tirera la valeur de A_n en développant le facteur symbolique

$$\mathfrak{F}(h - h\nabla, h^{-1} + h^{-1}\Delta) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F}(k - k\nabla, k^{-1} + k^{-1}\Delta)$$

suivant les puissances ascendantes des lettres caractéristiques ∇ et Δ. Si, pour fixer les idées, on part de la formule (56), alors, en opérant comme on vient de le dire, on obtiendra pour le développement de A_n une série double dont le terme général sera proportionnel à l'expression

$$\nabla^m \Delta^{m'} [s]_n$$

ou, ce qui revient au même, à l'expression

$$\Delta^{m+m'} \frac{[s]_n}{(1+\Delta)^m} = \Delta^{m+m'} [s]_{n-m} = [s - m - m']_{n+m'},$$

m, m' étant deux nombres entiers quelconques. Il y a plus : ce développement sera précisément celui auquel on parviendra en observant, d'une part, que, pour obtenir le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{f}(x)$, il suffit de multiplier par k^{-n} le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{f}(kx)$; d'autre part, qu'on a, en vertu de la formule (47),

$$\mathrm{f}(kx) = (1 - x)^{-s}\,\mathfrak{F}(kx, k^{-1}x^{-1}) \tag{57}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{f}(kx) = (1 - x)^{-s}\,\mathfrak{F}(k - ky, k^{-1} + k^{-1}z), \tag{58}$$

les valeurs de y, z étant

$$y = 1 - x, \qquad z = \frac{1 - x}{x}, \tag{59}$$

et en cherchant les divers coefficients de x^n, dans les divers termes de la série double qui représentera le développement du produit

$$(1 - x)^{-s}\,\mathfrak{F}(k - ky, k^{-1} + k^{-1}z)$$

suivant les puissances ascendantes des variables y, z, par conséquent dans des termes dont chacun sera proportionnel à un produit de la forme

$$(1 - x)^{-s} y^m z^{m'} = x^{-m'} (1 - x)^{-s+m+m'}.$$

Cela posé, on déduira sans peine des principes établis dans les précédentes séances, et spécialement dans les séances du 3 et du 24 février, les conditions sous lesquelles subsistera la formule (56). On établira ainsi, en particulier, la proposition suivante :

Théorème. — *Soit* $\mathrm{f}(x)$ *une fonction de* x, *décomposable en deux facteurs dont le premier soit de la forme*

$$\left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s},$$

s *désignant un exposant réel, et* k *une constante quelconque. Supposons de plus que le second facteur de* $\mathrm{f}(x)$ *soit représenté par la fonction*

$$\mathfrak{F}\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

qui reste continue par rapport à x, *avec sa dérivée du premier ordre, pour tout module de* x, *compris entre deux limites, l'une supérieure* a, *l'autre inférieure* $\mathrm{a}_{,}$, *entre lesquelles se trouve renfermé le module de la constante* k. *On pourra pour un module de* x, *supérieur à la limite* $\mathrm{a}_{,}$ *et inférieur au module de* k, *développer la fonction*

$$\mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \mathfrak{F}\left(x, \frac{1}{x}\right)$$

en une série simple et convergente ordonnée suivant les puissances entières de la variable x. *Soit* A_n *le coefficient de* x^n *dans cette même série,* n *étant un nombre entier quelconque. Si la fonction de* y, z, *représentée par l'expression*

$$\mathfrak{F}(k - ky, k^{-1} + k^{-1}z),$$

reste continue avec ses dérivées du premier ordre pour des modules des variables y, z, *respectivement inférieurs à certaines limites*

$$\mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

qui vérifient la condition

$$\frac{1}{\mathrm{y}}+\frac{1}{\mathrm{z}}<1, \tag{60}$$

alors, pour obtenir la valeur de A_n *développée en une série double et convergente, il suffira de développer, suivant les puissances ascendantes de* ∇ *et* Δ, *le facteur symbolique*

$$\mathfrak{F}(k-k\nabla,\ k^{-1}+k^{-1}\Delta),$$

renfermé dans le second membre de la formule

$$\mathrm{A}_n=k^{-n}\,\mathfrak{F}(k-k\nabla,\ k^{-1}+k^{-1}\Delta)\,[s]_n, \tag{56}$$

et d'avoir égard aux deux équations

$$[s]_n=\frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n},\qquad \nabla^m\Delta^{m'}[s]_n=[s-m-m']_{n+m'},$$

qui subsistent pour des valeurs quelconques des nombres entiers n, m, m'. *De plus, si les modules* y, z, *sans vérifier la condition* (60), *satisfont du moins aux deux suivantes*

$$\frac{1}{\mathrm{y}}<1,\qquad \frac{1}{\mathrm{z}}<1, \tag{61}$$

alors, la série double qui représentera le développement de A_n, *en vertu de la formule* (56), *sera, sinon une série convergente, du moins une série syntagmatique dont la somme syntagmatique se confondra précisément avec la valeur cherchée de* A_n.

Corollaire I. — Puisque la fonction $\mathfrak{F}\left(x, \frac{1}{x}\right)$ reste continue, par hypothèse, pour un module de x égal au module de k, elle acquerra nécessairement pour $x=k$ une valeur finie. Supposons d'ailleurs, comme nous le ferons désormais, que cette valeur finie diffère de

zéro; alors, en vertu de la formule

$$\mathrm{f}(x)=\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-s}\mathfrak{F}\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

k sera certainement une valeur de x propre à vérifier l'équation

$$\mathrm{f}(x)=0, \tag{62}$$

si la constante s est négative, et à vérifier, au contraire, l'équation

$$\frac{1}{\mathrm{f}(x)}=0, \tag{63}$$

si la constante s est positive.

Corollaire II. — Supposons que l'unité soit comprise entre la limite inférieur a et le module de k. Alors la valeur de A_n, que détermine le théorème énoncé, pourra représenter le coefficient de x^n dans le développement de $\mathrm{f}(x)$ correspondant au module 1 de la variable x. Si d'ailleurs la constante s est positive, k sera, comme nous l'avons dit (corollaire I), une des racines de l'équation (63), et même celle de ces racines qui offrira le plus petit module au-dessus de l'unité, puisque la fonction $\mathrm{f}(x)$ devra, dans l'hypothèse admise, rester continue et par conséquent finie, pour tout module de x compris entre la limite 1 et le module de k.

Corollaire III. — La formule générale

$$\nabla^m\Delta^{m'}[s]_n=[s-m-m']_{n+m'}$$

donne successivement

$$\begin{array}{lll} \Delta\,[s]_n=[s-1]_{n+1}, & \nabla[s]_n=[s-1]_n, & \\ \Delta^2[s]_n=[s-2]_{n+2}, & \nabla\Delta[s]_n=[s-2]_{n+1}, & \nabla^2[s]_n=[s-2]_n \end{array}$$

et, par suite,

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\Delta[s]_n}{[s]_n}=\dfrac{s-1}{n+1}, & \dfrac{\nabla[s]_n}{[s]_n}=\dfrac{s-1}{s+n-1}, & \\ \dfrac{\Delta^2[s]_n}{[s]_n}=\dfrac{s-1}{n+1}\,\dfrac{s-2}{n+2}, & \dfrac{\nabla\Delta[s]_n}{[s]_n}=\dfrac{s-1}{n+1}\,\dfrac{s-2}{s+n-1}, & \dfrac{\nabla^2[s]_n}{[s]_n}=\dfrac{s-1}{s+n-1}\,\dfrac{s-2}{s+n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Or il résulte de ces diverses formules que, dans le cas où le nombre n deviendra très considérable, le développement de A_n tiré de l'équation (56) pourra être, sans erreur sensible, réduit à un petit nombre de termes, puisque, à la suite d'un premier terme représenté par le produit

$$[s]_n k^{-n} \mathfrak{F}(k, k^{-1}),$$

ce développement offrira deux termes de l'ordre du rapport $\frac{1}{n}$, puis trois termes de l'ordre du rapport $\frac{1}{n^2}$, etc. Ajoutons que, en vertu des mêmes formules, l'équation (56) donnera

$$A_n = [s]_n k^{-n} \mathfrak{F}(k, k^{-1})(1+\alpha), \tag{64}$$

α devant être infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de n. D'ailleurs l'équation (62) ne diffère pas de la formule (28), et par conséquent cette dernière formule continue de subsister quand on suppose remplie, ou la condition (60), ou du moins les conditions (61).

§ III. — *Formules relatives aux fonctions de deux variables. Application de ces formules à l'Astronomie.*

Soit

$$F(x, y)$$

une fonction de deux variables x, y, qui reste continue, avec ses dérivées du premier ordre, pour des modules de ces variables très voisins de l'unité. Cette fonction sera, pour de tels modules, développable en une série double et convergente, ordonnée suivant les puissances entières de x et de y. Cela posé, nommons m, n deux nombres entiers, et

$$A_{m,n}$$

le coefficient du produit

$$x^m y^n$$

dans le développement ainsi obtenu. Les formules établies dans ce Mémoire et dans les précédents fourniront divers moyens de déve-

lopper le coefficient dont il s'agit, ou même les quatre coefficients

$$A_{m,n}, \quad A_{-m,n}, \quad A_{m,-n}, \quad A_{-m,-n}$$

des quatre produits

$$x^m y^n, \quad x^{-m} y^n, \quad x^m y^{-n}, \quad x^{-m} y^{-n},$$

en séries rapidement convergentes, dont les sommes pourront être sensiblement réduites à leurs premiers termes quand les nombres m, n deviendront très considérables. Pour donner une idée des résultats auxquels on parvient de la sorte, cherchons, en particulier, la formule qui, pour de très grandes valeurs de m et de n, fournira la valeur très approchée du coefficient

$$A_{-m,n}.$$

Concevons que les deux équations

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{F(x, y)} = 0, \tag{2}$$

étant résolues par rapport à y, offrent des racines dont les modules soient pour l'équation (1) inférieurs, et pour l'équation (2) supérieurs à l'unité. Soit d'ailleurs, parmi les racines de la seconde équation, v celle qui offre le plus petit module au-dessus de l'unité; et, pour mieux fixer les idées, supposons la fonction $F(x, y)$ de la forme

$$F(x, y) = \left(1 - \frac{y}{v}\right)^{-s} f(x, y), \tag{3}$$

la constante s étant positive, la racine v pouvant être fonction de x, et $f(x, y)$ désignant une fonction de x, y, qui reste continue par rapport à y, avec ses dérivées du premier ordre, pour tout module de y compris entre des limites dont la plus petite soit inférieure à l'unité, et la plus grande supérieure au module de v. Si l'on nomme A_n le coefficient de y^n dans le développement de $F(x, y)$, on aura, en vertu de la formule (28) du § II,

$$A_n = [s]_n v^{-n} f(x, v)(1 + \epsilon), \tag{4}$$

ϵ devant être infiniment petit en même temps que $\frac{1}{n}$.

D'autre part, quand A_n sera connu, il suffira pour obtenir $A_{-m,n}$ de chercher le terme indépendant de x dans le développement du produit

$$A_n x^m$$

ordonné suivant les puissances entières de x. D'ailleurs, en vertu de la formule (4), on aura

$$A_n x^m = [s]_n x^m v^{-n} f(x, v)(1 + 6), \tag{5}$$

et, dans le second membre de l'équation (5), le produit $x^m v^{-n}$ peut être considéré comme représentant une puissance très élevée, savoir la $n^{\text{ième}}$ puissance du produit

$$x^{\frac{m}{n}} v^{-1}.$$

Donc, pour appliquer à la détermination de $A_{-m,n}$ la formule (41) du § I, on devra chercher d'abord la valeur de x correspondante au module principal du produit $x^{\frac{m}{n}} v^{-1}$ ou, ce qui revient au même, la valeur de x correspondante au module principal du produit

$$x^m v^{-n}.$$

Nommons u cette valeur de x. Si, le module de x venant à croître ou à décroître à partir de l'unité, la fonction de x représentée par A_n reste continue, avec sa dérivée du premier ordre, pour tout module de x qui ne dépasse pas certaines limites entre lesquelles se trouve renfermé, non seulement le module 1, mais encore le module de u, on tirera de la formule (5), jointe à l'équation (41) du § I,

$$A_{-m,n} = [s]_n u^m v^{-n} \frac{f(u, v)}{2\sqrt{\pi a m}}(1 + \alpha), \tag{6}$$

α devant être infiniment petit en même temps que les rapports $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, la valeur de a étant

$$a = -\tfrac{1}{2} x D_x\left(\frac{x D_x v}{v}\right), \tag{7}$$

et la valeur de x devant être réduite à u dans le second membre de l'équation (7).

Pour montrer une application des formules qui précèdent, considérons le cas où les deux variables x, y représentent les exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies excentriques ψ, ψ', relatives à deux planètes données. La distance $\imath$ de ces deux planètes aura pour carré une fonction rationnelle de x, y, qui sera entière et du second degré par rapport à chacune des variables

$$x, \quad y, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y}.$$

Il en résulte que l'équation

$$\imath^2 = 0 \tag{8}$$

pourra être réduite à une équation entre les deux variables x, y, qui sera, par rapport à chacune d'elles, algébrique et du quatrième degré seulement. D'autre part, la fonction perturbatrice, relative au système des deux planètes, sera la somme de deux quantités, dont l'une sera proportionnelle au rapport

$$\frac{1}{\imath},$$

et les perturbations périodiques d'un ordre élevé pourront se déduire assez facilement de la détermination des coefficients qui correspondront à des termes, dont le rang sera considérable, dans le développement de $\frac{1}{\imath}$ en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, y. Cela posé, nommons

$$A_{-m,n}$$

le coefficient de

$$x^{-m} y^n$$

dans le développement de $\frac{1}{\imath}$. Pour de très grandes valeurs de m et n, une valeur très approchée de ce coefficient sera fournie par l'équation (6), pourvu que l'on prenne

$$F(x, y) = \frac{1}{\imath}. \tag{9}$$

Si d'ailleurs on pose, pour plus de commodité,

$$\mathcal{R} = \iota^2, \tag{10}$$

l'équation (8) deviendra

$$\mathcal{R} = 0, \tag{11}$$

et la formule (9) donnera

$$F(x, y) = \mathcal{R}^{-\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Or il est clair que, dans le cas présent, la valeur particulière de y, représentée par v, sera une racine de l'équation (2) réduite à la formule (11); et, de plus, il résulte de l'équation (12) que l'on aura

$$s = \tfrac{1}{2}. \tag{13}$$

Enfin, comme je l'ai déjà remarqué, on a sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$[s]_n = \frac{1}{n^{1-s}\Gamma(s)}$$

et, par suite, en posant $s = \frac{1}{2}$,

$$[s]_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Donc la formule (6) donnera

$$\Lambda_{-m,n} = \frac{f(u, v)}{2\pi} \cdot \frac{u^m v^{-n}}{\sqrt{amn}}(1 + \alpha). \tag{14}$$

D'ailleurs, on reconnaitra sans peine que, dans cette dernière formule, u, v représentent des valeurs particulières de x, y, propres à vérifier les deux équations simultanées

$$\mathcal{R} = 0, \qquad \frac{x}{m} D_x \mathcal{R} + \frac{y}{n} D_y \mathcal{R} = 0. \tag{15}$$

Dans de prochains articles, nous examinerons de nouveau la formule (14) avec les conditions sous lesquelles elle subsiste, et nous discuterons aussi la formule analogue qui sert à déterminer les coefficients d'un rang très élevé dans le développement de $\frac{1}{\iota}$ en une série

double ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques dont les arguments représentent, non plus les anomalies excentriques, mais les anomalies moyennes des deux planètes.

285.

Astronomie. — *Rapport sur un Mémoire de M.* Le Verrier, *qui a pour objet la détermination d'une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Pallas.*

C. R., T. XX, p. 767 (17 mars 1845).

On sait que la théorie des petites planètes, découvertes au commencement de ce siècle, s'est refusée jusqu'ici à tout calcul précis, en déconcertant les efforts des astronomes et des géomètres. Les positions de ces astres, données à l'avance dans les éphémérides, diffèrent toujours assez notablement de celles qu'indiquent plus tard les observations. En vain l'Académie a-t-elle proposé cette théorie comme sujet de prix. Le concours n'a produit aucun Mémoire digne de l'importance du sujet. Les excentricités et les inclinaisons des orbites de Cérès, de Pallas, de Junon et de Vesta n'étant plus renfermées dans les limites compatibles avec l'usage des méthodes de calcul jusqu'à présent appliquées aux planètes anciennes, on ne voyait plus comment il serait possible de fixer les inégalités périodiques des mouvements des nouveaux astres, surtout lorsqu'il s'agissait d'inégalités dont l'ordre était fort élevé. On doit savoir gré à M. Le Verrier de n'avoir point reculé devant la pensée d'attaquer un problème si difficile; on doit lui savoir plus de gré encore d'avoir atteint le but qu'il s'était proposé, et d'avoir prouvé, par un exemple très remarquable, que le problème pouvait être résolu.

Lorsqu'on multiplie par 18 le moyen mouvement de Jupiter et par 7 celui de Pallas, les deux produits ainsi obtenus diffèrent entre eux d'un angle très petit, qui est seulement de 1631″ sexagésimales. Cette circonstance permet de croire qu'il existe dans le mouvement de Pallas une perturbation sensible correspondante à cet angle. A la vérité, cette perturbation est du onzième ordre par rapport aux puissances des excentricités et des inclinaisons; mais on aurait tort d'en conclure qu'elle doit être négligée.

Dans la première partie de son Mémoire, M. Le Verrier développe, avec beaucoup de sagacité, divers raisonnements propres à dissiper cette illusion. Il observe, avec justesse, que, dans le cas où les excentricités et les inclinaisons cessent d'être très petites, les séries, pour demeurer convergentes, doivent être principalement ordonnées, non plus suivant les puissances entières de ces éléments, mais suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes ou des anomalies, et que, dans ce cas, la grandeur de l'inclinaison peut devenir elle-même favorable à la convergence des séries. Ne pouvant plus alors se servir des développements connus, M. Le Verrier a eu la hardiesse d'appliquer à la détermination de l'inégalité cherchée, des formules d'interpolation relatives au système de deux variables. Disons maintenant quelques mots du résultat auquel il est parvenu.

Comme un de nos honorables confrères le rappelait dans une précédente séance, il est quelquefois arrivé que des travaux considérables s'appuyaient sur de longs calculs, qui, en raison de leur longueur même, n'avaient pu être vérifiés d'un bout à l'autre par les examinateurs, et il en est résulté que, en s'occupant de matières déjà traitées par leurs devanciers, des auteurs ont pu signaler de graves inexactitudes dans des Mémoires qui avaient d'abord été l'objet d'une approbation non contestée. Les Commissaires nommés pour examiner le Mémoire de M. Le Verrier n'ont pas voulu que l'Académie pût avoir à craindre rien de semblable, en adoptant les conclusions de leur Rapport; et, pour dissiper tous les doutes, sans être obligés de recommencer le grand et utile travail auquel M. Le Verrier s'était livré, ils ont cherché s'il ne serait pas possible de vérifier par une autre voie le résultat de ses calculs. Heureusement, le moyen d'y parvenir s'est

offert à eux, dans les méthodes nouvelles que l'un d'eux a déjà présentées à l'Académie. Nous allons indiquer ici les vérifications qu'ils ont obtenues, nous réservant d'en exposer les bases numériques dans quelques Notes placées à la suite du Rapport.

D'après M. Le Verrier, la perturbation cherchée du moyen mouvement de Pallas s'élève, dans son maximum, à 895″ sexagésimales. L'angle, qui doit être retranché, sous le signe sinus, des multiples des anomalies moyennes, est de 29°7′.

Ces conclusions ont été vérifiées de deux manières et à l'aide de deux méthodes différentes.

D'après la première méthode, l'inégalité cherchée s'élève dans son maximum à 906″,6, et l'angle qui doit être retranché des multiples des anomalies moyennes est de 29°3′55″.

Ainsi, les deux vérifications, qui s'accordent parfaitement entre elles, s'accordent encore parfaitement avec le résultat trouvé par M. Le Verrier. Il y a plus, et il importe de le remarquer, la très petite différence qui existe entre ce résultat et les nôtres est seulement de l'ordre des erreurs que pouvait amener l'usage des Tables de logarithmes à sept décimales, dont M. Le Verrier s'était servi.

En résumé, les Commissaires pensent que le Mémoire sur la grande inégalité de Pallas fournit de nouvelles preuves de la sagacité que M. Le Verrier avait déjà montrée dans d'autres recherches, que ce Mémoire est très digne de l'approbation de l'Académie, et qu'il mérite d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

286.

Astronomie. — *Notes jointes au Rapport qui précède, et rédigées par le Rapporteur.*

C. R., T. XX, p. 769 (17 mars 1845).

NOTE PREMIÈRE.

Sur les variations du moyen mouvement.

Soient

m, m' les masses de deux planètes;
r, r' les distances de ces planètes au Soleil, au bout du temps t;
$\mathfrak{r}$ leur distance mutuelle;
δ leur distance apparente, vue du centre du Soleil;
T, T' leurs anomalies moyennes;
μ, μ' leurs moyens mouvements;
a, a' les demi grands axes de leurs orbites.

Si l'on prend pour unité la masse du Soleil, on aura

$$\mu = a^{-\frac{3}{2}}(1+m)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mu' = a'^{-\frac{3}{2}}(1+m')^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

et T, T' seront de la forme

$$T = \mu(t-\tau), \qquad T' = \mu'(t'-\tau'). \tag{2}$$

Si d'ailleurs on nomme R la fonction perturbatrice relative à la planète m, alors, en faisant varier, avec le temps t, les éléments elliptiques de cette planète, on trouvera

$$D_t a = \frac{2}{a\mu^2} D_\tau R, \tag{3}$$

la valeur de R étant

$$R = -\frac{m'}{\mathfrak{r}} - \ldots + \frac{m' r \cos\delta}{r'^2} + \ldots; \tag{4}$$

et, comme la première des formules (1) donnera

$$\frac{D_t\mu}{\mu} + \frac{3}{2}\frac{D_t a}{a} = 0,$$

on tirera de l'équation (3)

$$D_t\mu = -\frac{3}{a^2\mu} D_\tau R. \tag{5}$$

Concevons maintenant que l'on développe le rapport $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}};$$

et supposons que, dans ce développement, on représente par $A_{n',-n}$ le coefficient de l'exponentielle

$$e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}},$$

qui a pour argument la différence $n'T' - nT$. Si l'on pose, pour plus de commodité,

$$2A_{n',-n} = \mathfrak{M} e^{\Omega\sqrt{-1}},$$

les termes correspondants aux deux arguments

$$n'T' - nT, \quad nT - n'T',$$

dans le développement du rapport $-\frac{m'}{\mathfrak{r}}$, seront

$$-\tfrac{1}{2}m'\mathfrak{M} e^{(n'T'-nT+\Omega)\sqrt{-1}}, \quad -\tfrac{1}{2}m'\mathfrak{M} e^{-(n'T'-nT+\Omega)\sqrt{-1}};$$

et, par suite, la somme de ces deux termes sera

$$-m'\mathfrak{M}\cos(n'T' - nT + \Omega).$$

Or, pour de grandes valeurs de n, n', cette somme deviendra sensiblement égale au terme correspondant de la fonction perturbatrice. Donc, si l'on nomme $\Delta\mu$ la partie de μ correspondante à l'argument $\pm(n'T' - nT)$, on tirera de la formule (5)

$$D_t\Delta\mu = \frac{3m'}{a^2\mu}\mathfrak{M} D_\tau \cos(n'T' - nT + \Omega). \tag{6}$$

D'autre part, les formules (2) donneront

$$n'T' - nT = (n'\mu' - n\mu)t - n'\mu'\tau' + n\mu\tau,$$

et l'on aura, par suite,

$$D_\tau(n'T' - nT) = \frac{n\mu}{n'\mu' - n\mu} D_t(n'T' - nT).$$

Donc la formule (6) pourra être réduite à

$$(7) \qquad D_t\Delta\mu = \frac{3m'n}{(n'\mu' - n\mu)a^2} \mathfrak{N} D_t \cos(n'T' - nT + \Omega).$$

En intégrant deux fois de suite cette dernière équation, par rapport à t, et en conservant seulement dans chaque intégrale les termes périodiques, on trouvera

$$(8) \qquad \Delta \int \mu \, dt = \frac{3m'n}{(n'\mu' - n\mu)^2 a^2} \mathfrak{N} \sin(n'T' - nT + \Omega).$$

De plus, en négligeant la masse m vis-à-vis de l'unité, dans la première des formules (1), on aura

$$\mu = a^{-\frac{3}{2}}, \qquad \frac{1}{a^2} = \mu^2 a,$$

et, par suite, la formule (8) donnera

$$(9) \qquad \Delta \int \mu \, dt = 3m'na \left(\frac{\mu}{n'\mu' - n\mu}\right)^2 \mathfrak{N} \sin(n'T' - nT + \Omega).$$

Telle est la formule qui détermine les inégalités périodiques, produites dans le moyen mouvement de la planète m par l'action de la planète m', ou plutôt celles d'entre ces inégalités qui sont du premier ordre par rapport à la masse m'. En vertu de cette même formule, la variation $\Delta \int \mu \, dt$ du moyen mouvement ne restera sensible, pour de grandes valeurs des nombres n, n', que dans le cas où le dénominateur

$$(n'\mu' - n\mu)^2$$

sera très petit, c'est-à-dire dans le cas où le rapport $\frac{n'}{n}$ différera très peu du rapport $\frac{\mu}{\mu'}$. Ajoutons qu'on trouvera aisément les valeurs de n, n' qui rempliront cette condition, si l'on développe le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ en fraction continue.

Supposons, pour fixer les idées, que m représente la masse de Jupiter, et m' celle de Pallas. Alors on aura

$$\mu = 280711'', \qquad \mu' = 109256'',$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{280711}{109256} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}}$$

Donc alors le rapport $\frac{n'}{n}$ différera très peu du rapport $\frac{\mu}{\mu'}$, si l'on prend

$$\frac{n'}{n} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{18}{7},$$

et, par suite, si l'on prend

$$n = 7, \qquad n' = 18.$$

Adoptons cette hypothèse, et substituons dans l'équation (9) les valeurs de a et de m' correspondantes à Pallas et à Jupiter, savoir,

$$a = 2,77263 \quad \text{et} \quad m' = \frac{1}{1050}.$$

On aura

$$3nm' = \frac{21}{1050} = \frac{2}{100}, \qquad 3nm'a = \frac{2a}{100} = \frac{5,54526}{100},$$

et, par suite, la formule (9) donnera

$$(10) \qquad \Delta \int \mu \, dt = \frac{5,54526}{100} \left(\frac{280711}{1631}\right)^2 \mathfrak{N} \sin(18T' - 7T + \Omega).$$

Enfin, si, pour réduire en secondes sexagésimales le second membre de la formule (10), on multiplie ce second membre par le rapport

$$\frac{1296000}{2\pi},$$

dont le logarithme est

$$5,3144251,$$

la variation $\Delta\int\mu\,dt$, exprimée en secondes sexagésimales, deviendrait

$$\Delta\int\mu\,dt = \frac{\mathfrak{M}}{0,00000000029515}\sin(18T' - 7T + \Omega); \tag{11}$$

et le maximum de cette variation sera le rapport

$$\frac{\mathfrak{M}}{0,00000000029515}.$$

Donc la variation dont il s'agit sera connue à une seconde près, si la valeur de $\mathfrak{M}$ est calculée avec une approximation telle que l'erreur commise sur cette valeur ne surpasse pas le nombre

$$0,00000000029515,$$

et, à plus forte raison, si cette erreur est inférieure au nombre

$$\frac{3}{10^{9}}.$$

Les diverses méthodes que nous avons exposées dans nos précédents Mémoires permettent de calculer facilement l'angle Ω et le module $\mathfrak{M}$ avec une approximation supérieure à celle que nous venons d'indiquer. Ainsi que nous l'expliquerons dans les Notes suivantes, une de ces méthodes nous a donné

$$\mathfrak{M} = 0,0000026759\ldots, \qquad \Omega = -29°3'55''.$$

Une autre méthode nous a donné

$$\mathfrak{M} = 0,0000026750\ldots, \qquad \Omega = -29°3'25''.$$

Donc les valeurs de $\Delta\int\mu\,dt$, tirées de la formule (5) à l'aide de ces

deux méthodes, seront respectivement

$$\Delta\int\mu\,dt = (906'',6)\sin(18T' - 7T - 29°3'55''),$$

$$\Delta\int\mu\,dt = (906'',3)\sin(18T' - 7T - 29°3'25'').$$

NOTE DEUXIÈME.

Sur la distance mutuelle de deux planètes.

Conservons les notations adoptées dans la première Note; et soient, de plus,

ψ, ψ' les anomalies excentriques des planètes m, m';
p, p' leurs longitudes;
ϖ, ϖ' les longitudes de leurs périhélies;
Π, Π' les distances apparentes de ces périhélies à la ligne d'intersection des deux orbites;
ε, ε' les excentricités de ces deux orbites;
I leur inclinaison mutuelle.

Enfin, posons

$$\eta = \tan g(\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\varepsilon), \qquad \eta' = \tan g(\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\varepsilon'),$$

$$\nu = \sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}.$$

Le carré de la distance $\mathfrak{r}$ des deux planètes se trouvera déterminé par le système des formules

$$\mathfrak{r}^2 = r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2, \tag{1}$$

$$\cos\delta = (1-\nu)\cos(p - \varpi + \Pi - p' + \varpi' - \Pi') + \nu\cos(p - \varpi + \Pi + p' - \varpi' + \Pi'), \tag{2}$$

auxquelles on devra joindre, non seulement les équations

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\psi), \tag{3}$$

$$\cos(p - \varpi) = \frac{\cos\psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\psi}, \qquad \sin(p - \varpi) = \frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\sin\psi}{1 - \varepsilon\cos\psi}, \tag{4}$$

dont les deux dernières peuvent être remplacées par la seule formule

$$(5)\qquad e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}} = e^{\psi\sqrt{-1}}\,\frac{1-\eta e^{-\psi\sqrt{-1}}}{1-\eta e^{\psi\sqrt{-1}}},$$

mais encore les équations semblables qu'on obtiendra en substituant la planète m' à la planète m.

La valeur de ι^2 donnée par la formule (1) peut être évidemment réduite à celle que fournit l'équation

$$(6)\qquad \iota^2 = \rho + \varsigma,$$

les valeurs de ρ et de ς étant de la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho = \mathrm{h} &+ \mathrm{k}\cos(\psi-\psi'-\alpha) - \mathrm{b}\cos(\psi-\mathrm{6}) - \mathrm{b}'\cos(\psi'-\mathrm{6}') \\ &+ \mathrm{c}\cos(\psi+\psi'-\gamma), \end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \varsigma = \mathrm{i}\cos 2\psi + \mathrm{i}'\cos 2\psi'.$$

D'ailleurs les angles

$$\alpha,\quad \mathrm{6},\quad \mathrm{6}',\quad \gamma$$

et les modules

$$\mathrm{b},\quad \mathrm{b}',\quad \mathrm{c},\quad \mathrm{h},\quad \mathrm{k},\quad \mathrm{i},\quad \mathrm{i}'$$

se trouveront liés aux sept paramètres

$$a,\quad a',\quad \varepsilon,\quad \varepsilon',\quad \Pi,\quad \Pi',\quad \nu$$

par des équations faciles à former, dont les deux dernières seront

$$(9)\qquad \mathrm{i} = \tfrac{1}{2}a^2\varepsilon^2,\qquad \mathrm{i}' = \tfrac{1}{2}a'^2\varepsilon'^2.$$

On pourra même, sans recourir à toutes ces équations, déterminer très aisément les angles et les modules dont il s'agit à l'aide des formules (6), (7), (8), (9). Effectivement, des équations (1), (2) jointes aux formules (3) et (4), et de l'équation (8) jointe aux formules (9), on pourra toujours déduire les valeurs de ι^2, de ς^2, et par suite de

$$\rho = \iota^2 - \varsigma,$$

correspondantes à des valeurs données des anomalies excentriques ψ, ψ'. Donc, si l'on représente par $F(\psi,\psi')$ le second membre de la formule (7), c'est-à-dire si l'on pose

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{h} + \mathrm{k}\cos(\psi-\psi'-\alpha) - \mathrm{b}\cos(\psi-\mathrm{6}) - \mathrm{b}'\cos(\psi'-\mathrm{6}') \\ &\qquad\qquad + \mathrm{c}\cos(\psi+\psi'-\gamma) = F(\psi,\psi'); \end{aligned}\right.$$

$F(\psi,\psi')$ sera une fonction des variables ψ, ψ' dont la valeur pourra être aisément déterminée pour chaque système de valeurs de ces variables. On tirera de la formule (10)

$$(11)\qquad \mathrm{h} + \mathrm{k}\cos(\psi-\psi'-\alpha) + \mathrm{c}\cos(\psi+\psi'-\gamma) = \frac{F(\psi+\pi,\psi'+\pi) + F(\psi,\psi')}{2},$$

$$(12)\qquad \mathrm{b}\cos(\psi-\mathrm{6}) + \mathrm{b}'\cos(\psi'-\mathrm{6}') = \frac{F(\psi+\pi,\psi'+\pi) - F(\psi,\psi')}{2},$$

et de la formule (11)

$$(13)\qquad \mathrm{h} = \frac{F(\psi+\pi,\psi'+\pi) + F(\psi+\pi,\psi') + F(\psi,\psi'+\pi) + F(\psi,\psi')}{4},$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{k}\cos(\psi-\psi'-\alpha) + \mathrm{c}\cos(\psi+\psi'-\gamma) \\ &\quad = \frac{F(\psi+\pi,\psi'+\pi) - F(\psi+\pi,\psi') - F(\psi,\psi'+\pi) + F(\psi,\psi')}{4}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, l'équation (13) fournira immédiatement la valeur de h, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées à ψ, ψ'. Si l'on y fait, en particulier, $\psi = 0$, $\psi' = 0$, elle donnera

$$(15)\qquad \mathrm{h} = \frac{F(\pi,\pi) - F(\pi,0) - F(0,\pi) + F(0,0)}{4}.$$

De plus, on déduira aisément des formules (12) et (14) les valeurs des quatre modules

$$\mathrm{b},\quad \mathrm{b}',\quad \mathrm{k},\quad \mathrm{c}$$

et des quatre angles

$$\mathrm{6},\quad \mathrm{6}',\quad \alpha,\quad \gamma,$$

en attribuant, dans chaque formule, aux angles ψ, ψ' des valeurs qui permettent d'éliminer aisément l'un des termes du premier membre.

Veut-on, par exemple, déterminer b et β, il suffira de poser successivement dans la formule (12)

$$\psi' = 0, \qquad \psi' = \pi.$$

Alors cette formule fournira deux équations desquelles on tirera la valeur du produit

$$\mathrm{b}\cos(\psi - \beta)$$

que l'on réduira simplement à b, en posant $\psi = \beta$, puis à $\mathrm{b}\cos\beta$ ou à $\mathrm{b}\sin\beta$, en posant $\psi = 0$ ou $\psi = \frac{\pi}{2}$. On connaîtra donc ainsi, avec le module b, les deux produits $\mathrm{b}\sin\beta$, $\mathrm{b}\cos\beta$, par conséquent le sinus et le cosinus de l'angle β. On connaîtra donc cet angle lui-même, que l'on peut supposer renfermé entre les limites $-\pi$, $+\pi$.

Il est bon d'observer que, en vertu des formules (9), les rapports

$$\frac{\mathrm{i}}{a^2} = \frac{1}{2}\varepsilon^2, \qquad \frac{\mathrm{i}'}{a'^2} = \frac{1}{2}\varepsilon'^2$$

seront très petits quand les excentricités ε, ε' seront peu considérables. Si l'on suppose même

$$\varepsilon = \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire si l'excentricité atteint sensiblement la limite au-dessus de laquelle elle ne s'élève pas dans notre système planétaire, on trouvera

$$\frac{\mathrm{i}}{a^2} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

Il est aisé d'en conclure que, dans ce système, ς sera généralement très petit par rapport à r^2, en sorte que, dans une première approximation, on pourra réduire la formule (6) à la suivante :

$$\mathrm{r}^2 = \rho. \tag{16}$$

Observons encore que des formules rigoureuses (6), (7), (8) on tire

$$\mathrm{r}^2 = \mathrm{H} + \mathrm{K}\cos(\psi' - \omega) + \mathrm{i}'\cos 2\psi', \tag{17}$$

H, K, ω étant des fonctions de l'angle ψ déterminées par le système des équations

$$\mathrm{H} = \mathrm{h} - \mathrm{b}\cos(\psi - \beta) + \mathrm{i}\cos 2\psi, \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{K}\cos\omega &= \mathrm{k}\cos(\psi - \alpha) + \mathrm{c}\cos(\psi - \gamma) - \mathrm{b}'\cos\beta', \\ \mathrm{K}\sin\omega &= \mathrm{k}\sin(\psi - \alpha) - \mathrm{c}\sin(\psi - \gamma) - \mathrm{b}'\sin\beta'. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \qquad x' = e^{\psi'\sqrt{-1}},$$

les formules (7), (8) donneront

$$\left\{\begin{aligned} 2\rho = 2\mathrm{h} &+ \mathrm{k}\left(\frac{x}{x'}e^{-\alpha\sqrt{-1}} + \frac{x'}{x}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right) + \mathrm{c}\left(xx'e^{-\gamma\sqrt{-1}} + \frac{1}{xx'}e^{\gamma\sqrt{-1}}\right) \\ &- \mathrm{b}\left(x e^{-\beta\sqrt{-1}} + \frac{1}{x}e^{\beta\sqrt{-1}}\right) - \mathrm{b}'\left(x' e^{-\beta'\sqrt{-1}} + \frac{1}{x'}e^{\beta'\sqrt{-1}}\right), \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$2\varsigma = \mathrm{i}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \mathrm{i}'\left(x'^2 + \frac{1}{x'^2}\right). \tag{21}$$

En vertu des équations (20), (21) jointes à la formule (6), le carré r^2 sera une fonction rationnelle de x, x'. Il y a plus : considéré comme fonction des quatre quantités

$$x, \quad \frac{1}{x}, \quad x', \quad \frac{1}{x'},$$

le carré r^2 sera du second degré par rapport à chacune d'elles, et du premier degré seulement si, dans la valeur de r^2, on néglige la quantité ς qui, comme nous l'avons vu, restera généralement très petite.

De l'équation (6) jointe aux formules (20), (21) ou, ce qui revient au même, de l'équation (17) jointe aux formules (18), (19), on conclut aisément que la valeur de r^2 peut être présentée sous la forme

$$\mathrm{r}^2 = \frac{\left(1 - \mathfrak{a}x'e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \mathfrak{a}x'^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \mathfrak{b}x'e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \mathfrak{b}x'^{-1}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)}{\mathfrak{K}^2}, \tag{22}$$

les modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{K}$ et l'angle φ étant des fonctions de la variable ψ qui se déduisent des trois quantités ci-dessus désignées par H, K, ω

à l'aide des formules établies dans un précédent Mémoire (*voir* le *Compte rendu* de la séance du 9 décembre 1844). Il en résulte que l'équation

$$\iota^2 = 0, \tag{23}$$

résolue par rapport à x', admet quatre racines de la forme

$$\mathfrak{a} e^{\varphi\sqrt{-1}},\quad \mathfrak{a}^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}},\quad \mathfrak{b} e^{-\varphi\sqrt{-1}},\quad \mathfrak{b} e^{\varphi\sqrt{-1}}.$$

On peut d'ailleurs choisir les modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ de la première et de la troisième racine de manière qu'ils vérifient la condition

$$\mathfrak{b} < \mathfrak{a} < 1. \tag{24}$$

Ajoutons que la quantité $\mathcal{K}$ se trouve liée aux modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ par la formule

$$\mathcal{K}^2 = \frac{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathrm{i}'}, \tag{25}$$

et que si l'on pose, pour abréger,

$$\theta = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\arcsin\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\right), \tag{26}$$

l'équation (23) pourra s'écrire comme il suit :

$$\left(1 + \theta x' e^{-\omega\sqrt{-1}}\right)\left(1 + \theta x'^{-1} e^{\omega\sqrt{-1}}\right) + \frac{\theta\mathrm{i}'}{\mathrm{K}}\left(x'^2 + \frac{1}{x'^2}\right) = 0. \tag{27}$$

Dans le cas où l'on désigne par m' une des anciennes planètes, i' est généralement très petit, et pour obtenir les deux racines

$$\mathfrak{a} e^{\varphi\sqrt{-1}},\quad \mathfrak{b} e^{-\varphi\sqrt{-1}},$$

il suffit d'appliquer la méthode des approximations successives, donnée par Newton, à l'équation (27) présentée sous la forme

$$x'\left(x' + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}\right) + \frac{\theta\mathrm{i}'}{\mathrm{K}}\,\frac{1 + x'^4}{1 + \theta x' e^{-\omega\sqrt{-1}}} = 0.$$

Alors, les premières valeurs approchées de ces deux racines étant les

deux valeurs de x' que fournit l'équation

$$x'\left(x' + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

la première approximation nous conduit aux formules

$$\mathfrak{a} e^{\varphi\sqrt{-1}} = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}},\qquad \mathfrak{b} e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 0, \tag{28}$$

que l'on vérifie en prenant, d'une part,

$$\mathfrak{a} = \theta,\qquad \varphi = \pi + \omega, \tag{29}$$

et, d'autre part,

$$\mathfrak{b} = 0. \tag{30}$$

De plus, la seconde approximation donne, d'une part,

$$\mathfrak{a} e^{\varphi\sqrt{-1}} = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{\mathrm{i}'}{\mathrm{K}}\,\frac{\theta^{-2} e^{-2\omega\sqrt{-1}} + \theta^2 e^{2\omega\sqrt{-1}}}{\theta^{-1} - \theta}\right), \tag{31}$$

d'autre part,

$$\mathfrak{b} e^{-\varphi\sqrt{-1}} = -\frac{\mathrm{i}'}{\mathrm{K}} e^{-\omega\sqrt{-1}}, \tag{32}$$

et par suite la seconde valeur approchée de $\mathfrak{b}$ est

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathrm{i}'}{\mathrm{K}}. \tag{33}$$

Alors aussi, en prenant pour valeurs approchées de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ celles que fournissent les équations (29) et (33), on tire de la formule (25)

$$\mathcal{K}^2 = \frac{2\theta}{\mathrm{K}}. \tag{34}$$

Il peut être utile, comme nous le verrons dans les Notes suivantes, de connaître la valeur *maximum maximorum* du module $\mathfrak{a}$ ou θ considéré comme fonction de ψ. On y parviendra en appliquant les règles connues à la recherche des maxima de ce module. Si l'on veut trouver, en particulier, les maxima de θ, on observera que, en vertu de la formule (24), ces maxima correspondent aux maxima du rapport $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}$, par conséquent aux valeurs de ψ qui vérifient la formule

$$\frac{D_\psi K}{K} - \frac{D_\psi H}{H} = 0. \tag{35}$$

Or, pour réduire le premier membre de cette formule à une fonction connue de ψ, il suffira d'y substituer la valeur de H, tirée de l'équation (18), et de la valeur de K, tirée des équations (19), c'est-à-dire la valeur de K déterminée par la formule

$$\left\{\begin{aligned} K^2 = {} & [k\cos(\psi-\alpha) + c\cos(\psi-\beta) - b'\cos\beta']^2 \\ & + [k\sin(\psi-\alpha) - c\sin(\psi-\beta) - b'\sin\beta']^2. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Lorsque la planète m est Pallas, et la planète m' Jupiter, alors, en prenant pour unité la distance de la Terre au Soleil, on a

$$a = 2,77263, \qquad a' = 5,202798;$$

alors aussi l'on trouve

$$\varepsilon = 0,242, \qquad \varepsilon' = 0,048162;$$

et, en adoptant l'ancienne division de la circonférence, on a encore

$$\Pi = -53^\circ 48' 20'', \qquad \Pi' = -163^\circ 22' 5'',$$
$$I = 34^\circ 15' 36''.$$

En partant de ces données, on obtient facilement les valeurs des angles

$$\alpha, \quad \beta, \quad \beta', \quad \gamma$$

et celles des modules

$$h, \quad k, \quad c, \quad b, \quad b', \quad i, \quad i'.$$

En comparant ces modules au carré du demi grand axe a' de l'orbite de Jupiter, on trouve, en réalité,

$$\begin{aligned} h &= 1,2981273\,a'^2, & k &= 0,9579587\,a'^2, & & \\ b' &= 0,2839067\,a'^2, & b &= 0,1631624\,a'^2, & c &= 0,0881646\,a'^2, \\ i &= 0,0083159\,a'^2, & i' &= 0,0011598\,a'^2 & & \end{aligned}$$

et

$$\alpha = 70^\circ 21' 26'',$$
$$\beta' = -47^\circ 9' 54'', \qquad \beta = 16^\circ 10' 54'', \qquad \gamma = 28^\circ 22' 54''.$$

La valeur ici trouvée pour i' étant à peu près $\frac{1}{1000}$ de a'^2, et par conséquent très petite, il en résulte que, dans la théorie de Pallas et de Jupiter, le module $\mathfrak{a}$ sera sensiblement égal au module θ, et le module $\mathfrak{b}$ sensiblement nul. Si l'on cherche alors le *maximum maximorum* de θ, on reconnaîtra qu'il répond à une anomalie excentrique de 230° environ; et, si l'on pose en réalité

$$\psi = 230^\circ,$$

on trouvera

$$\theta = 0,646, \qquad \mathfrak{a} = 0,645, \qquad \mathfrak{b} = 0,000889.$$

NOTE TROISIÈME.

Sur les développements de la fonction perturbatrice en séries ordonnées suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques dont les arguments sont, ou les anomalies moyennes, ou les anomalies excentriques.

Quand on cherche les perturbations d'un ordre élevé, produites dans le mouvement de la planète m par l'action de la planète m', la fonction perturbatrice peut être, sans erreur sensible, réduite au terme réciproquement proportionnel à la distance $\mathfrak{r}$. Alors, pour développer la fonction perturbatrice en une série double ordonnée suivant les puissances ascendantes des exponentielles dont les arguments sont

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

il suffit de construire le développement de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ en une semblable série. D'ailleurs ce développement peut aisément se déduire du développement de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ en une série double, ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques

$$x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \qquad x' = e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soit A_n le coefficient de l'exponentielle $e^{nT\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{1}{r}$ en série ordonnée suivant les puissances entières de $e^{T\sqrt{-1}}$, et $\mathcal{A}_n$ le coefficient de $e^{n\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{1}{r}$ en série ordonnée suivant les puissances entières de $x = e^{\psi\sqrt{-1}}$. On aura, non seulement

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} e^{-nT\sqrt{-1}}\, dT, \tag{1}$$

mais encore

$$\frac{1}{r} = \Sigma \mathcal{A}_l x^l = \Sigma \mathcal{A}_{n-l}\, x^{n-l}, \tag{2}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives de l. On aura donc, par suite,

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\Sigma \mathcal{A}_{n-l}\int_{-\pi}^{\pi} x^{n-l} e^{-nT\sqrt{-1}}\, dT. \tag{3}$$

Mais, en intégrant par partie et ayant égard à la formule

$$D_t x = x\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{n-l} e^{-nT\sqrt{-1}}\, dT = \frac{n-l}{n}\mathcal{E}_l,$$

la valeur de $\mathcal{E}_l$ étant déterminée par l'équation

$$\mathcal{E}_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-l} e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\, d\psi. \tag{4}$$

Donc la formule (3) donnera simplement

$$A_n = \sum\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{A}_{n-l}\,\mathcal{E}_l. \tag{5}$$

Ajoutons que, en vertu de la formule (4), $\mathcal{E}_l$ sera précisément le coefficient de x_l dans le développement de l'exponentielle

$$e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)},$$

ordonné suivant les puissances entières de x. Le facteur $\mathcal{E}_l$, déterminé comme on vient de le dire, est la transcendante de M. Bessel. Pour en obtenir le développement en série convergente, il suffit de décomposer l'exponentielle

$$e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)},$$

dans laquelle nous poserons, pour abréger,

$$\frac{n\varepsilon}{2} = c,$$

en deux facteurs de la forme

$$e^{cx}, \quad e^{-\frac{c}{x}},$$

puis de développer chacun de ces facteurs et leur produit en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de c. En opérant ainsi, on trouve, pour une valeur positive de l, non seulement

$$\mathcal{E}_{-l} = (-1)^l\,\mathcal{E}_l, \tag{6}$$

mais encore

$$\mathcal{E}_l = \frac{c^l}{1.2\ldots l}\vartheta_l, \tag{7}$$

la valeur de ϑ_l étant

$$\vartheta_l = 1 - \frac{c}{1}\,\frac{c}{l+1} + \frac{c^2}{1.2}\,\frac{c^2}{(l+1)(l+2)} - \ldots \tag{8}$$

De plus, si l'on commence par déduire de l'équation (8) la valeur de ϑ_l, pour deux valeurs consécutives de l, par exemple pour $l=7$ et pour $l=8$, on obtiendra ensuite, avec la plus grande facilité, les valeurs de ϑ_l correspondantes à de moindres valeurs de l, à l'aide de la formule

$$\vartheta_{l-1} = \vartheta_l - \frac{c^2}{l(l+1)}\vartheta_{l+1}. \tag{9}$$

J'ai calculé de cette manière les valeurs diverses qu'on obtient pour $\mathcal{E}_l$, dans le cas où l'on fait coïncider la planète m avec Pallas, en posant d'ailleurs $n=7$, ou avec Jupiter, en posant d'ailleurs $n=18$.

J'ai trouvé, dans le premier cas,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{E}_0 = 0,4014505 2, & \mathcal{E}_1 = 0,5774091, & \mathcal{E}_2 = 0,2802605, \\ \mathcal{E}_3 = 0,0843629, & \mathcal{E}_4 = 0,0185457, & \mathcal{E}_5 = 0,0032200, \\ \mathcal{E}_6 = 0,0002928, & \mathcal{E}_7 = 0,0000567, & \mathcal{E}_8 = 0,0000061, \\ \mathcal{E}_9 = 0,0000006, & \mathcal{E}_{10} = 0,0000000, & \end{array}\right.$$

et, dans le second cas,

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{E}_0 = 0,82075740, & \mathcal{E}_1 = 0,39399300, & \mathcal{E}_2 = 0,08823648, \\ \mathcal{E}_3 = 0,01294772, & \mathcal{E}_4 = 0,00141646, & \mathcal{E}_5 = 0,00012357, \\ \mathcal{E}_6 = 0,00000897, & \mathcal{E}_7 = 0,00000056, & \mathcal{E}_8 = 0,00000003, \\ \mathcal{E}_9 = 0,00000000. & & \end{array}\right.$$

Les valeurs de $\mathcal{E}_l$ étant ainsi calculées, on pourra facilement déduire de la formule (5) la valeur du coefficient A_n, quand on connaîtra celles des coefficients

$$\ldots,\quad \mathcal{A}_{n-2},\quad \mathcal{A}_{n-1},\quad \mathcal{A}_n,\quad \mathcal{A}_{n+1},\quad \mathcal{A}_{n+2},\quad \ldots.$$

Il y a plus : si, en prenant pour m' Jupiter et pour m Pallas, on nomme

$$A_{n',-n} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{n',-n}$$

les coefficients respectifs des exponentielles

$$e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad e^{(n'\psi'-n\psi)\sqrt{-1}}$$

dans les développements de $\frac{1}{r}$ en séries doubles ordonnées suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques dont les arguments sont T, T' ou ψ, ψ', alors, en joignant aux valeurs trouvées de $\mathcal{E}_l$ la formule

$$(12)\qquad A_{n',-n} = \sum\left(1 - \frac{l'}{n'}\right)\left(1 - \frac{l}{n}\right)\mathcal{A}_{n'-l',-n+l}\,\mathcal{E}_l\,\mathcal{E}_{l'},$$

on déduira aisément de cette formule la valeur de $A_{n',-n}$ correspondante à $n' = 18$, $n = 7$, quand on connaîtra les diverses valeurs de

$$\mathcal{A}_{n'-l',-n+l}.$$

pourvu que l'on considère les indices variables l, l' comme étant relatifs, le premier à Pallas, le second à Jupiter, et qu'en conséquence on ait recours à la Table (10) pour déterminer les diverses valeurs de $\mathcal{E}_l$, puis à la Table (11) pour déterminer les diverses valeurs de $\mathcal{E}_{l'}$.

En résumé, il suit des formules (5) et (12), que, en supposant connu le développement de $\frac{1}{r}$ en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments sont les anomalies excentriques, on peut facilement obtenir le développement de $\frac{1}{r}$ en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments soient les anomalies moyennes. D'ailleurs, les formules nouvelles que j'ai données dans les précédents Mémoires permettent de construire directement et avec facilité le dernier de ces deux développements. J'ai appliqué, en effet, d'une part, la formule (5), d'autre part, les nouvelles formules dont il s'agit, à la détermination de la grande inégalité de Pallas, et je suis ainsi parvenu, comme on le verra dans les Notes suivantes, aux résultats précédemment indiqués.

287.

Astronomie. — *Suite des Notes annexées au Rapport sur le Mémoire de* M. Le Verrier, *et relatives à la détermination des inégalités périodiques des mouvements planétaires* (*voir le* Compte rendu *de la séance du* 17 *mars*).

C. R., T. XX, p. 825 (24 mars 1845).

NOTE QUATRIÈME.

Développement du rapport de l'unité à la distance de deux planètes en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments sont les anomalies excentriques.

Conservons les mêmes notations que dans les Notes précédentes. Représentons, en conséquence, par r la distance des deux planètes

m, m', par ψ, ψ' leurs anomalies excentriques, par n, n' deux nombres entiers donnés; et soit toujours $\mathcal{A}_n$ le coefficient de l'exponentielle

$$e^{n\psi\sqrt{-1}} = x^n$$

dans le développement de $\frac{1}{\iota}$ en une série ordonnée suivant les puissances entières de la variable

$$x = e^{\psi\sqrt{-1}}.$$

On aura

$$\frac{1}{\iota} = \ldots \mathcal{A}_{-2}x^{-2} + \mathcal{A}_{-1}x^{-1} + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 x + \mathcal{A}_2 x^2 + \ldots; \tag{1}$$

puis on tirera de la formule (1)

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\,\frac{1}{\iota}\,d\psi; \tag{2}$$

et, comme l'exponentielle

$$x^{-n} = e^{-n\psi\sqrt{-1}}$$

aura pour module l'unité, on conclura de l'équation (2) que le module de $\mathcal{A}_n$ est inférieur au plus grand module de $\frac{1}{\iota}$. Il y a plus : en supposant que l'on désigne par l un nombre entier quelconque, et que l'on indique à l'aide de la lettre caractéristique Σ une somme de termes semblables, correspondants aux diverses valeurs de x qui vérifient l'équation

$$x^l = 1, \tag{3}$$

on tirera encore de la formule (2)

$$\frac{1}{l}\sum \frac{x^{-n}}{\iota} = \mathcal{A}_n + \mathcal{A}_{n+l} + \mathcal{A}_{n+2l} + \ldots + \mathcal{A}_{n-l} + \mathcal{A}_{n-2l} + \ldots, \tag{4}$$

et, par suite,

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{l}\sum \frac{x^{-n}}{\iota} - s, \tag{5}$$

la valeur de s étant

$$s = \mathcal{A}_{n+l} + \mathcal{A}_{n+2l} + \ldots + \mathcal{A}_{n-l} + \mathcal{A}_{n-2l} + \ldots. \tag{6}$$

Donc à l'équation (2) on pourra substituer la formule

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{l}\sum \frac{x^{-n}}{\iota}, \tag{7}$$

si le nombre l est assez considérable pour qu'on puisse, sans erreur sensible, négliger la somme que représente la lettre s.

Si, dans les formules (2), (5), (6), on remplace n par $-n$, on trouvera, non seulement

$$\mathcal{A}_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\iota}\,d\psi, \tag{8}$$

mais encore

$$\mathcal{A}_{-n} = \frac{1}{l}\sum \frac{x^n}{\iota} - s, \tag{9}$$

la valeur de s étant

$$s = \mathcal{A}_{-n+l} + \mathcal{A}_{-n+2l} + \ldots + \mathcal{A}_{-n-l} + \mathcal{A}_{-n-2l} + \ldots. \tag{10}$$

Cela posé, on pourra évidemment à l'équation (9) substituer la suivante

$$\mathcal{A}_{-n} = \frac{1}{l}\sum \frac{x^n}{\iota}, \tag{11}$$

si le nombre l est assez considérable pour qu'on puisse, sans erreur sensible, négliger la somme s, déterminée par la formule (10).

Enfin, si l'on nomme $\mathcal{A}_{n'}$ le coefficient de l'exponentielle

$$e^{n'\psi'\sqrt{-1}},$$

dans le développement de $\frac{1}{\iota}$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable

$$x' = e^{\psi'\sqrt{-1}},$$

et si l'on indique par le signe Σ une somme de termes semblables et correspondants aux diverses valeurs de x' qui vérifient l'équation

$$x'^{l'} = 1, \tag{12}$$

on aura, non seulement

$$\mathcal{A}_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x'^{-n'}}{\iota}\, d\psi', \tag{13}$$

mais aussi

$$\mathcal{A}_{n'} = \frac{1}{l'}\sum \frac{x'^{-n'}}{\iota} - s', \tag{14}$$

la valeur de s' étant

$$s' = \mathcal{A}_{n'+l'} + \mathcal{A}_{n'+2l'} + \ldots + \mathcal{A}_{n'-l'} + \mathcal{A}_{n'-2l'} + \ldots; \tag{15}$$

et à l'équation (14) on pourra évidemment substituer la suivante

$$\mathcal{A}_{n'} = \frac{1}{l'}\sum \frac{x'^{-n'}}{\iota}, \tag{16}$$

si le nombre l' est assez considérable pour que l'on puisse, sans erreur sensible, négliger la somme s' déterminée par la formule (15).

Soit maintenant

$$\mathcal{A}_{n',-n}$$

le coefficient de l'exponentielle

$$e^{(n'\psi'-n\psi)\sqrt{-1}}$$

dans le développement de $\frac{1}{\iota}$ en série ordonnée suivant les puissances entières des deux variables

$$x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \qquad x' = e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

On aura, non seulement

$$\mathcal{A}_{n',-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{A}_{n'}\, x^{n}\, d\psi, \tag{17}$$

mais encore

$$\mathcal{A}_{n',-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{A}_{-n}\, x'^{-n'}\, d\psi', \tag{18}$$

et l'on tirera de l'équation (18), combinée avec les formules (9) et (13),

$$\mathcal{A}_{n',-n} = \frac{1}{l}\,\Sigma\,\mathcal{A}_{n'}\, x^{n} - \iota, \tag{19}$$

la valeur de ι étant

$$\iota = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s\, x^{n}\, d\psi, \tag{20}$$

puis de l'équation (17), combinée avec les formules (14) et (8),

$$\mathcal{A}_{n',-n} = \frac{1}{l'}\,\Sigma\,\mathcal{A}_{-n}\, x'^{-n'} - \iota', \tag{21}$$

la valeur de ι' étant

$$\iota' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s'\, x'^{-n'}\, d\psi'. \tag{22}$$

Il est bon d'observer que, les modules de x^{n} et de $x'^{-n'}$ étant égaux à l'unité, les modules de ι et de ι' seront respectivement inférieurs, en vertu des formules (20) et (22), le premier, au plus grand module de la somme représentée par s, le second, au plus grand module de la somme représentée par s'. Donc, pour obtenir la valeur du coefficient $\mathcal{A}_{n',-n}$, avec un degré donné d'approximation, en sorte que l'erreur commise ne surpasse pas une certaine limite fixée d'avance, il suffira d'employer, au lieu de l'équation (19), la formule

$$\mathcal{A}_{n',-n} = \frac{1}{l}\,\Sigma\,\mathcal{A}_{n'}\, x^{n}, \tag{23}$$

en supposant l choisi de manière que le module de la somme s reste toujours inférieur à la limite dont il s'agit, ou, au lieu de l'équation (21), la formule

$$\mathcal{A}_{n',-n} = \frac{1}{l'}\,\Sigma\,\mathcal{A}_{-n}\, x'^{-n'}, \tag{24}$$

en supposant l' choisi de manière que le module de la somme s' reste toujours inférieur à cette même limite.

Des formules (23) et (16), ou (24) et (11), on tire immédiatement

$$\mathcal{A}_{n',-n} = \frac{1}{ll'}\sum \frac{x^{n}\, x'^{-n'}}{\iota}, \tag{25}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de x, x' qui vérifient les équations (3) et (12).

Les formules (11), (16), et par suite la formule (25) qui se déduit des deux premières, ne diffèrent pas des formules d'interpolation connues depuis longtemps, et relatives à une ou à deux variables. Déjà, dans le § III du Mémoire publié en 1832, j'avais indiqué ces formules d'interpolation comme applicables au développement de la fonction perturbatrice. On peut effectivement, lorsque les nombres n, n' deviennent considérables, faire servir l'équation (25), ou d'autres formules du même genre, à la détermination des coefficients que renferme le développement dont il s'agit. Mais il est plus simple de combiner l'équation (23) ou (24) avec d'autres formules que je vais maintenant rappeler.

Comme je l'ai remarqué dans la deuxième Note, la valeur de $\mathfrak{r}$ est de la forme

$$(26)\qquad \mathfrak{r}^2 = \frac{(1-\mathfrak{a}x'e^{-\varphi\sqrt{-1}})(1-\mathfrak{a}x'^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}})(1-\mathfrak{b}x'e^{\varphi\sqrt{-1}})(1-\mathfrak{b}x'^{-1}e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{\mathcal{K}^2},$$

les modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathcal{K}$ et l'angle φ étant des fonctions de la variable ψ. Cela posé, on aura

$$(27)\qquad \frac{1}{\mathfrak{r}} = \mathcal{K}(1-\mathfrak{a}x'e^{-\varphi\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mathfrak{a}}{x'}e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}(1-\mathfrak{b}x'e^{\varphi\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mathfrak{b}}{x'}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Soient d'ailleurs

$$\mathfrak{A}_{n'} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}_{n'}$$

les coefficients de $x^{n'}$ dans les développements des deux produits

$$(1-\mathfrak{a}x')^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mathfrak{a}}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad (1-\mathfrak{b}x')^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mathfrak{b}}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et faisons, pour abréger, non seulement

$$[\tfrac{1}{2}]_{n'} = \frac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2.4.6\ldots 2n'},$$

mais encore

$$(28)\qquad \mathfrak{l} = \frac{\mathfrak{a}^2}{1-\mathfrak{a}^2}.$$

On trouvera, pour des valeurs positives de n',

$$(29)\qquad \mathfrak{A}_{n'} = \mathfrak{A}_{-n'} = [\tfrac{1}{2}]_{n'}\frac{\mathfrak{a}^{n'}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}}\mathfrak{J}_{n'},$$

la valeur de $\mathfrak{J}_{n'}$ étant

$$(30)\qquad \mathfrak{J}_{n'} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2n'+2}\mathfrak{l} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1.3}{(2n'+2)(2n'+4)}\mathfrak{l}^2 + \ldots.$$

On aura donc, pour des valeurs positives de n',

$$(31)\qquad \mathfrak{A}_{n'} = \mathfrak{A}_{-n'} = [\tfrac{1}{2}]_{n'}\frac{\mathfrak{a}^{n'}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{2n'+2}\frac{\mathfrak{a}^2}{1-\mathfrak{a}^2}+\ldots\right)$$

et pareillement

$$(32)\qquad \mathfrak{B}_{n'} = \mathfrak{B}_{-n'} = [\tfrac{1}{2}]_{n'}\frac{\mathfrak{b}^{n'}}{\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{2n'+2}\frac{\mathfrak{b}^2}{1-\mathfrak{b}^2}+\ldots\right).$$

En adoptant ces valeurs de $\mathfrak{A}_{\pm n'}$ et de $\mathfrak{B}_{\pm n'}$, on tirera de la formule (27)

$$(33)\qquad \frac{1}{\mathfrak{r}} = \mathcal{K}\,\Sigma\,\mathfrak{A}_{n'}x'^{n'}e^{-n'\varphi\sqrt{-1}}\,\Sigma\,\mathfrak{B}_{n'}x'^{n'}e^{n'\varphi\sqrt{-1}},$$

chacune des sommes qu'indique le signe Σ devant être étendue à toutes les valeurs entières, positives, nulle et négatives de n'. Enfin, si l'on égale entre eux les coefficients de $x^{n'}$ dans les développements des deux membres de la formule (33), on trouvera

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_{n'} = \mathcal{K}e^{-n'\varphi\sqrt{-1}}(&\mathfrak{B}_0\mathfrak{A}_{n'} + \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_{n'+1}e^{-2\varphi\sqrt{-1}} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_{n'+2}e^{-4\varphi\sqrt{-1}} + \ldots \\ &+ \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_{n'-1}e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_{n'-2}e^{4\varphi\sqrt{-1}} + \ldots).\end{aligned}\right.$$

On peut assez facilement, et avec un degré d'approximation fixé *a priori*, déterminer la valeur de $\mathcal{A}_{n',-n}$, en joignant l'équation (34) à la formule (23), ou l'équation analogue qui fournirait la valeur de $\mathcal{A}_n$ à la formule (24).

Dans le cas où le nombre n' devient considérable, les formules (31), (32) donnent, à très peu près,

$$(35)\qquad \mathfrak{A}_{n'} = \mathfrak{A}_{-n'} = [\tfrac{1}{2}]_{n'}\frac{\mathfrak{a}^{n'}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}},$$

$$(36)\qquad \mathfrak{B}_{n'} = \mathfrak{B}_{-n'} = [\tfrac{1}{2}]_{n'}\frac{\mathfrak{b}^{n'}}{\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}}.$$

D'ailleurs, dans notre système planétaire, le module $\mathfrak{b}$, dont la première valeur approchée se réduit à zéro [*voir* la formule (30) de la deuxième Note], reste généralement très petit. Donc, appliquée à ce système, la formule (36) donnera sensiblement

$$\mathfrak{D}_0 = 1, \quad \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_{-1} = 0, \quad \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_{-2} = 0, \quad \ldots.$$

Donc, en vertu des formules (34), (35), on aura encore à très peu près, pour des valeurs positives de n',

$$\mathcal{A}_{n'} = [\tfrac{1}{2}]_{n'} (1 - \mathfrak{a}^2)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{K} \mathfrak{a}^{n'} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}}. \tag{37}$$

Il y a plus : comme, pour de grandes valeurs de n', on a sensiblement

$$[\tfrac{1}{2}]_{n'} = \frac{1}{\sqrt{\pi n'}},$$

la formule (37) pourra être remplacée par la suivante :

$$\mathcal{A}_{n'} = \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{\pi n' (1 - \mathfrak{a}^2)}} \mathfrak{a}^{n'} e^{-n'\varphi\sqrt{-1}}. \tag{38}$$

NOTE CINQUIÈME.

Développement du rapport de l'unité à la distance de deux planètes en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments sont les anomalies moyennes.

Nommons toujours r la distance des deux planètes m, m'. Soient T, T' leurs anomalies moyennes liées aux anomalies excentriques ψ, ψ' par les équations

$$T = \psi - \varepsilon \sin\psi, \quad T' = \psi' - \varepsilon' \sin\psi', \tag{1}$$

dans lesquelles ε, ε' représentent les excentricités des orbites; et posons, non seulement

$$x = e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad x' = e^{\psi'\sqrt{-1}}, \tag{2}$$

mais encore

$$u = e^{T\sqrt{-1}}, \quad u' = e^{T'\sqrt{-1}}. \tag{3}$$

On aura, en vertu des formules (1),

$$u = x e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \quad u' = x' e^{-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}. \tag{4}$$

Représentons d'ailleurs par n, n' deux nombres entiers; par

$$\mathcal{A}_{-n}, \quad \mathcal{A}_{n'}, \quad \mathcal{A}_{n',-n}$$

les coefficients de

$$x^{-n}, \quad x'^{n'}, \quad x'^{n'} x^{-n}$$

dans les développements de $\frac{1}{r}$ en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de x ou de x', ou en une série double ordonnée suivant les puissances entières de x et de x'; enfin par

$$\mathrm{A}_{-n}, \quad \mathrm{A}_{n'}, \quad \mathrm{A}_{n',-n}$$

les coefficients de

$$u^{-n}, \quad u'^{n'}, \quad u'^{n'} u^{-n}$$

dans les développements de $\frac{1}{r}$ en une série simple ordonnée suivant les puissances entières de u ou de u', ou en une série double ordonnée suivant les puissances entières de u et de u'. On pourra, en supposant connues les diverses valeurs du coefficient $\mathcal{A}_{-n}$ ou du coefficient $\mathcal{A}_{n'}$, en déduire assez facilement, à l'aide des formules rappelées dans les Notes précédentes, la valeur du coefficient $\mathrm{A}_{n',-n}$ surtout lorsque les nombres n, n' deviendront considérables. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

On a généralement

$$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{A}_{n'} u^n \, dT. \tag{5}$$

D'autre part, si l'on substitue la planète m' à la planète m, les formules (4) et (5) de la troisième Note (*voir* page 138) donneront

$$\mathrm{A}_{n'} = \sum \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{A}_{n'-l'} \mathcal{E}_{l'}, \tag{6}$$

$\mathcal{E}_{l'}$ désignant le coefficient de $x'^{l'}$ dans le développement de l'exponentielle

$$e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}$$

en une série ordonnée suivant les puissances entières de x', et la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de l'. Enfin, si l'on désigne par k' un nombre entier déterminé, dont la valeur soit très grande, la formule (14) de la Note précédente donnera

$$\mathcal{A}_{n'-l'} = \frac{1}{k'}\sum \frac{x'^{l'-n'}}{\iota} - s', \tag{7}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de x' qui vérifient l'équation

$$x'^{k'} = 1, \tag{8}$$

et la valeur de s' étant

$$s' = \mathcal{A}_{n'-l'+k'} + \mathcal{A}_{n'-l'+2k'} + \ldots + \mathcal{A}_{n'-l'-k'} + \mathcal{A}_{n'-l'-2k'} + \ldots. \tag{9}$$

Cela posé, comme on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^n}{\iota}\, dT = \mathrm{A}_{-n},$$

on tirera évidemment des formules (5), (6) et (7)

$$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{k'}\sum\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}_{l'}\,\mathrm{A}_{-n}\,x'^{l'-n'} - i', \tag{10}$$

la valeur de i' étant

$$i' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}_{l'}\,s'\,u^n\,dT. \tag{11}$$

Il y a plus : comme, en supposant la somme qu'indique le signe Σ étendue à toutes les valeurs entières de l', on aura identiquement

$$e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)} = \Sigma\,\mathcal{E}_{l'}\,x'^{l'}, \tag{12}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned}\sum\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}_{l'}\,x'^{l'} &= \left(1-\frac{x'}{n'}\mathrm{D}_{x'}\right)e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\\ &= \left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right]e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\\ &= \left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right]\left(\frac{x'}{u'}\right)^{n'},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

la formule (10) donnera

$$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{k'}\,\Sigma\,\mathrm{A}_{-n}\,u'^{-n'}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right] - i', \tag{14}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de x' qui vérifient l'équation (8). On trouvera pareillement

$$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{k}\,\Sigma\,\mathrm{A}_{n'}\,u^n\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] - i, \tag{15}$$

la somme qu'indique le signe Σ, dans la formule (15), s'étendant à toutes les valeurs de x qui vérifient l'équation

$$x^k = 1, \tag{16}$$

et la valeur de i étant déterminée par le système des formules

$$i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l\,s\,u'^{-n'}\,dT, \tag{17}$$

$$s = \mathcal{A}_{-n+l-k} + \mathcal{A}_{-n+l-2k} + \ldots + \mathcal{A}_{-n+l+k} + \mathcal{A}_{-n+l+2k} + \ldots. \tag{18}$$

Ajoutons que le signe Σ, dans la formule (17), devra s'étendre à toutes les valeurs entières de l, et que la quantité $\mathcal{E}_l$ sera le coefficient de x^l dans le développement de l'exponentielle

$$e^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

en une série ordonnée suivant les puissances entières de x. Remarquons enfin que, si l'on échange entre elles les planètes m, m', et par suite les quantités $-n$, n', on obtiendra, à la place de la formule (6), la formule semblable

$$A_{-n}=\sum\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{A}_{-n+l}\mathcal{E}_l, \tag{19}$$

la somme qu'indique le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de l.

Lorsque le nombre k deviendra notablement supérieur au nombre n, ou le nombre k' au nombre n', les modules des sommes s, s', et par suite les modules de i et i', seront généralement très petits. On pourra donc alors, sans erreur sensible, remplacer l'équation (14) par la formule

$$A_{n',-n}=\frac{1}{k'}\Sigma A_{-n}\,u'^{-n'}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right], \tag{20}$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$A_{n',-n}=\frac{1}{k'}\Sigma A_{-n}\,u'^{-n'}(1-\varepsilon'\cos\psi'), \tag{21}$$

et l'équation (15) par la formule

$$A_{n',-n}=\frac{1}{k}\Sigma A_{n'}\,u^{n}\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right], \tag{22}$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$A_{n',-n}=\frac{1}{k}\Sigma A_{n'}\,u^{n}(1-\varepsilon\cos\psi). \tag{23}$$

Donc alors on pourra, de l'équation (21) jointe à la formule (19), et de l'équation (23) jointe à la formule (6), déduire une valeur très approchée du coefficient $A_{n',-n}$. Il y a plus : on pourra facilement estimer le degré d'approximation ainsi obtenu, en cherchant une valeur approchée du module de i ou de i', ou plutôt d'une limite supérieure à ce module. Concevons, pour fixer les idées, qu'on veuille savoir quel est le degré d'approximation auquel on parvient quand on réduit l'équation (14) à la formule (21), en négligeant i'. On remarquera, d'une part, que l'erreur commise, dans cette hypothèse, sur le module de $A_{n',-n}$ ne peut surpasser le module de i'; d'autre part, que, le module de u^n étant l'unité, le module de i' sera, en vertu de la formule (11), inférieur au module maximum de la somme

$$\sum\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}_l s'. \tag{24}$$

On pourra d'ailleurs calculer aisément une valeur approchée de cette somme, en joignant à l'équation (9) l'équation (38) de la quatrième Note, c'est-à-dire la formule

$$\mathcal{A}_{n'}=\frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\pi n'(1-\mathfrak{a}^2)}}\mathfrak{a}^{n'}e^{-n'\varphi\sqrt{-1}}, \tag{25}$$

et en observant que cette formule continue de subsister quand on y remplace $\mathcal{A}_{n'}$ par $\mathcal{A}_{-n'}$ et $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$; de sorte qu'on a encore à très peu près

$$\mathcal{A}_{-n'}=\frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\pi n'(1-\mathfrak{a}^2)}}\mathfrak{a}^{n'}e^{n'\varphi\sqrt{-1}}. \tag{26}$$

Considérons en particulier le cas où la différence $k'-n'$ est notablement supérieure aux valeurs de l' pour lesquelles $\mathcal{E}_{l'}$ conserve une valeur sensible, et supposons encore que $\mathfrak{a}$ reste sensiblement inférieur à l'unité. Alors, $\mathfrak{a}^{k'}$ étant un petit nombre, la valeur approchée de s' tirée des formules (9) et (26) sera

$$s'=\mathcal{A}_{n'-l'-k'}=\frac{\mathcal{H}(1-\mathfrak{a}^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi(k'-n'+l')}}\mathfrak{a}^{k'-n'+l'}e^{(k'-n'+l')\varphi\sqrt{-1}},$$

ou encore, à très peu près,

$$s'=\frac{\mathcal{H}(1-\mathfrak{a}^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi(k'-n')}}\mathfrak{a}^{k'-n'+l'}e^{(k'-n'+l')\varphi\sqrt{-1}}. \tag{27}$$

Or, en substituant cette valeur approchée de s' dans la somme (24) et ayant égard à l'équation (13), on obtiendra la formule approximative

$$\sum\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}_{l'}s'=\mathcal{L}(k'-n')^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{a}^{k'-n'}e^{(k'-n')\varphi\sqrt{-1}}, \tag{28}$$

la valeur de $\mathcal{L}$ étant déterminée par le système des deux formules

$$(29)\quad \begin{cases} \mathcal{L} = \dfrac{\mathcal{X}}{\sqrt{\pi(1-\mathfrak{a}^2)}}\left[1 - \dfrac{\varepsilon'}{2}\left(x' + \dfrac{1}{x'}\right)\right] e^{\frac{n'\varepsilon'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}, \\ x' = \mathfrak{a} e^{\varphi\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Soit maintenant Λ le module de $\mathcal{L}$, et $\mathfrak{z}$ le module de la somme

$$\sum\left(1 - \frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}_r s'_r.$$

On aura, en vertu de la formule (28),

$$(30)\quad \Lambda(k'-n')^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{a}^{k'-n'} = \mathfrak{z}.$$

Or, de l'équation (30), dont le premier membre décroit sans cesse pour des valeurs croissantes de la différence $k'-n'$, on déduirait sans peine la valeur approchée de cette différence, si l'on supposait connues les valeurs de $\mathfrak{z}$ et de $\mathfrak{a}$. Pour y parvenir très simplement, dans le cas où le module $\mathfrak{z}$ est très petit, il suffit d'observer que l'on tire de l'équation (30)

$$(k'-n')\mathrm{L}(\mathfrak{a}^{-1}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{L}(k'-n') = \mathrm{L}(\mathfrak{z}^{-1}\Lambda),$$

par conséquent

$$(31)\quad k'-n' = \frac{\mathrm{L}(\mathfrak{z}^{-1}\Lambda)}{\mathrm{L}(\mathfrak{a}^{-1})} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{L}(k'-n)}{\mathrm{L}(\mathfrak{a}^{-1})},$$

puis d'appliquer à l'équation (31) la méthode des substitutions successives, en considérant

$$\frac{\mathrm{L}(\mathfrak{z}^{-1}\Lambda)}{\mathrm{L}(\mathfrak{a}^{-1})}$$

comme la première valeur approchée de la différence

$$k'-n',$$

et déduisant chaque nouvelle valeur approchée de celle qui la précède, par la substitution de celle-ci dans le second membre de l'équation (31).

Il importe d'observer que, pour de très petites valeurs de ε', la pre-

mière des formules (29) donne, à très peu près,

$$(32)\quad \Lambda = \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\pi(1-\mathfrak{a}^2)}}\, e^{-\left(\frac{n'+1}{2}\frac{1}{\mathfrak{a}} - \frac{n'-1}{2}\mathfrak{a}\right)\varepsilon'\cos\varphi},$$

la valeur de $\mathcal{X}^2$ étant celle que fournit l'équation (25) de la deuxième Note. Observons encore que la valeur de $\mathfrak{z}$, déterminée par la formule (30), dépend, non seulement du nombre $k'-n'$, mais aussi de l'argument ψ, dont $\mathfrak{a}$ et Λ sont tous deux fonctions. Si, en attribuant à la différence $k'-n'$ une valeur constante, très considérable, on fait varier l'angle ψ, le module $\mathfrak{z}$ variera proportionnellement au produit

$$\Lambda\mathfrak{a}^{k'-n'},$$

dont la plus grande valeur correspondra sensiblement à la plus grande valeur de $\mathfrak{a}$. En effet, les valeurs maxima de ce produit, considéré comme fonction de ψ, se déduiront de la formule

$$(33)\quad \mathrm{D}_\psi\mathfrak{a} + \frac{1}{k'-n'}\mathrm{D}_\psi\Lambda = 0;$$

et, pour de grandes valeurs de $k'-n'$, cette équation se réduira sensiblement à la suivante.

$$(34)\quad \mathrm{D}_\psi\mathfrak{a} = 0,$$

c'est-à-dire à celle qui fournit les valeurs maxima de $\mathfrak{a}$. Ajoutons que, pour des valeurs croissantes de ψ, le produit

$$\Lambda\mathfrak{a}^{k'-n'}$$

croitra, tant que le premier membre de la formule (33) sera positif, et que, pour de très grandes valeurs de $k'-n'$, le signe de ce premier membre est en même temps le signe de la dérivée $\mathrm{D}_\psi\mathfrak{a}$, excepté lorsque la valeur de ψ diffère peu de l'une de celles qui vérifient la formule (34).

Si l'on assujettit le module $\mathfrak{z}$ à ne point dépasser une certaine limite supérieure, la résolution de l'équation (31) fera connaitre la limite correspondante au-dessous de laquelle ne pourra s'abaisser la différence $k' - n'$. Si la limite assignée à ε est très petite, la valeur correspondante de $k' - n'$, tirée de la formule (31), sera très considérable, et le *maximum maximorum* de cette valeur, considérée comme fonction de ψ, répondra sensiblement au *maximum maximorum* du module $\mathfrak{a}$. Il en résulte qu'on peut déterminer *a priori* la valeur qu'il conviendra d'attribuer à k', pour que les formules précédentes fournissent une perturbation du moyen mouvement ou de l'un quelconque des éléments elliptiques avec un degré d'approximation donné.

Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'obtenir, à une seconde près, la grande inégalité du moyen mouvement de la planète Pallas, savoir, celle qui est due à l'action de Jupiter et qui correspond à l'argument $18T' - 7T$, les deux lettres T, T' représentant les anomalies moyennes de ces deux planètes. Alors, comme nous l'avons vu dans la première Note, il suffira que l'erreur commise sur le module de $2A_{n',-n}$ ne surpasse pas

$$\frac{3}{10^7}.$$

Il suffira donc que l'erreur commise sur le module de $A_{n',-n}$ ne surpasse pas le rapport

$$\frac{1,5}{10^7},$$

et l'on pourra prendre, pour limite de ε,

$$\varepsilon = \frac{1,5}{10^7}.$$

D'autre part, si l'on cherche le *maximum maximorum* de $\mathfrak{a}$, on reconnaîtra qu'il répond à une anomalie excentrique de 230° environ; et si l'on pose en réalité

$$\psi = 230°,$$

on trouvera, non seulement, comme on l'a déjà dit dans la deuxième Note,

$$\mathfrak{a} = 0,645, \qquad \mathfrak{b} = 0,000889,$$

et, par suite,

$$\mathcal{K}^2 = \frac{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{i'} = 0,0366, \qquad \mathcal{K} = 0,1912,$$

mais encore

$$\varphi = -26°9'30'',$$

et, par suite, en vertu de la formule (32),

$$\Lambda \doteq 0,09473.$$

Cela posé, l'équation (31) deviendra

$$k' - n' = 41,012 - 2,629\,\mathrm{L}(k' - n').$$

Or cette dernière équation, résolue par rapport à $k' - n'$, donnerait à très peu près

$$k' - n' = 36,90.$$

Donc le maximum de l'erreur commise sur l'inégalité cherchée ne pourra être que d'environ une seconde sexagésimale, si l'on applique à la détermination de cette inégalité les formules (21) et (19), en supposant

$$k' - n' > 36,$$

ou, ce qui revient au même, puisque l'on a $n' = 18$,

$$k' > 54. \tag{35}$$

Si l'on veut appliquer à la détermination de l'inégalité cherchée, non plus les formules (21) et (19), mais les formules (23) et (6), alors, en raisonnant toujours de la même manière, on obtiendra sans difficulté la condition à laquelle k devra satisfaire pour que l'erreur commise soit d'environ une seconde sexagésimale, et l'on reconnaîtra que cette condition est

$$k > 29. \tag{36}$$

La condition (36) se trouve vérifiée lorsque dans la formule (23) on suppose la somme qu'indique le signe Σ étendue à toutes les valeurs de ψ qui représentent des arcs inférieurs à la circonférence et multiples d'un arc de 10°. En effet, dans cette hypothèse, on a $k = 36$. Alors, en désignant par $\mathfrak{A}$ la partie réelle du produit

$$A_{n'} u^{n} (1 - \varepsilon \cos\psi),$$

et posant, en conséquence,

$$(37)\qquad A_{n'}u^n(1-\varepsilon\cos\psi)=\mathcal{A}+\mathcal{C}\sqrt{-1},$$

on peut assez facilement déterminer les diverses valeurs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$, à l'aide de la formule (6) jointe à l'équation (34) de la quatrième Note. En opérant ainsi, et calculant les valeurs des produits

$$10^9\mathcal{A},\quad 10^9\mathcal{C},$$

correspondantes aux dix-sept termes de la progression arithmétique

$$140°,\quad 150°,\quad 160°,\quad \ldots,\quad 290°,\quad 300°,$$

on trouvera

Pour	$\psi = 140°$	$10^9\mathcal{A} = +\ 6$	$10^9\mathcal{C} = +\ 11$
»	150	+ 28	− 13
»	160	− 15	− 85
»	170	− 228	− 85
»	180	− 581	+ 351
»	190	− 492	+ 1766
»	200	+ 1652	+ 4184
»	210	+ 7753	+ 5469
»	220	+15902	+ 982
»	230	+17377	− 9445
»	240	+ 7720	−15267
»	250	− 2200	− 9932
»	260	− 3664	− 2228
»	270	− 1241	+ 555
»	280	+ 10	+ 345
»	290	+ 75	+ 8
»	300	− 2	− 15
	Sommes totales	+42100	−23399

Les valeurs des produits

$$10^9\mathcal{A},\quad 10^9\mathcal{C},$$

qui correspondent aux autres termes de la progression arithmétique

$$(38)\qquad 0°,\quad 10°,\quad 20°,\quad \ldots,\quad 360°,$$

seront sensiblement nulles; et, par suite, les sommes totales des diverses valeurs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{C}$, correspondantes aux divers termes de

la progression (38), seront respectivement

$$+\frac{42100}{10^9},\quad -\frac{23399}{10^9}.$$

On aura donc

$$(39)\qquad \Sigma A_{n'}u^n(1-\varepsilon\cos\psi)=\frac{42100-23399\sqrt{-1}}{10^9}.$$

Donc la formule (21), dans laquelle on devra prendre $k=36$, donnera

$$(40)\qquad A_{n',-n}=\frac{11694-6500\sqrt{-1}}{10^{10}};$$

et par suite, si l'on pose, comme dans la première Note,

$$2A_{n',-n}=\mathcal{N}e^{\Omega\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\mathcal{N}=\frac{26759}{10^{10}},\qquad \Omega=-29°3'55''.$$

Soit maintenant R la fonction perturbatrice relative à la planète Pallas, et nommons ΔR la partie de cette fonction qui correspond à l'argument $\pm(n'T'-nT)$. On aura

$$\Delta R=A_{n',-n}\,e^{(n'T'-nT+\Omega)\sqrt{-1}}+A_{-n',n}\,e^{-(n'T'-nT+\Omega)\sqrt{-1}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(41)\qquad \Delta R=\mathcal{N}\cos(n'T'-nT+\Omega).$$

De plus, en nommant μ le moyen mouvement de Pallas dans l'orbite elliptique, on trouvera

$$D_t\Delta\mu=\frac{3m'n}{(n'\mu'-n\mu)a^2}D_t\Delta R$$

ou, ce qui revient au même,

$$(42)\qquad D_t\Delta\mu=\frac{3m'n}{(n'\mu'-n\mu)a^2}\mathcal{N}D_t\cos(n'T'-nT+\Omega);$$

puis on en conclura, en intégrant deux fois de suite et conservant seulement dans chaque intégrale les termes périodiques,

$$\Delta \int \mu \, dt = \frac{3 m' n}{(n'\mu' - n\mu)^2} a^2 \mathfrak{N} \sin(n'T' - nT + \Omega$$

ou, à très peu près,

$$\Delta \int \mu \, dt = 3 m' n a \left(\frac{\mu}{n'\mu' - n\mu} \right)^2 \mathfrak{N} \sin(n'T' - nT + \Omega). \tag{43}$$

En substituant dans cette dernière formule les valeurs de m', n, n', μ, μ', a, $\mathfrak{N}$ et Ω, on trouve, non seulement

$$\Delta \int \mu \, dt = \frac{\mathfrak{N}}{0,0000000029515} \sin(18T' - 7T + \Omega), \tag{44}$$

mais encore

$$\Delta \int \mu \, dt = (906'',6) \sin(18T' - 7T - 29^\circ 3' 55''). \tag{45}$$

Telle est la formule qui détermine, à une seconde près, la grande inégalité du moyen mouvement de Pallas, savoir, celle qui est due à l'action de Jupiter, et qui est du premier ordre par rapport aux masses.

NOTE SIXIÈME.

Sur les moyens de simplifier le calcul des inégalités périodiques des mouvements planétaires.

Les calculs développés dans la cinquième Note peuvent encore être simplifiés à l'aide des nouvelles formules que j'ai données dans mes précédents Mémoires. Je me bornerai, pour le moment, à indiquer la simplification que produit une de ces formules, savoir l'équation (56) de la page 112.

Conservons les mêmes notations que dans les Notes précédentes, et supposons de plus que, l'équation

$$\iota^2 = 0 \tag{1}$$

étant résolue par rapport à x', on nomme ξ' celle de ses racines qui

offre le plus petit module au-dessus de l'unité. On aura identiquement

$$\xi' = a^{-1} e^{\varphi\sqrt{-1}}, \tag{2}$$

et ι, considéré comme fonction de x', aura pour facteur l'expression

$$\left(1 - \frac{x'}{\xi'}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, comme on aura

$$A_{n'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u'^{-n'}}{\iota'} \, dT'$$

ou, ce qui revient au même,

$$A_{n'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x'^{-n'} \frac{1 - \varepsilon' \cos\psi'}{\iota} e^{\iota'\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} \, d\psi',$$

la valeur de ι' étant

$$\iota' = \frac{n'\varepsilon'}{2},$$

on en conclura que $A_{n'}$ représente le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{1 - \frac{\varepsilon'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)}{\iota} e^{\iota'\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}$$

en une série ordonnée suivant les puissances entières de x'. D'ailleurs, cette même fonction aura pour facteur

$$\left(1 - \frac{x'}{\xi'}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

et, si l'on désigne l'autre facteur par $\mathcal{F}\left(x', \frac{1}{x'}\right)$, c'est-à-dire si l'on pose

$$\mathcal{F}\left(x', \frac{1}{x'}\right) = \frac{\left(1 - \frac{x'}{\xi'}\right)^{\frac{1}{2}}}{\iota} \left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] e^{\iota'\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}, \tag{3}$$

la formule (56) de la page 112 donnera

$$(4)\qquad A_{n'} = \xi'^{-n'}\mathfrak{F}(\xi' - \xi'\nabla, \xi'^{-1} + \xi'^{-1}\Delta)\,[\tfrac{1}{2}]_{n'},$$

la lettre caractéristique Δ étant relative au nombre n', et la caractéristique ∇ étant liée à Δ par la formule

$$(5)\qquad \nabla = \frac{\Delta}{1+\Delta}.$$

Si maintenant on développe le second membre de l'équation (4), en s'arrêtant aux premières puissances de Δ et de ∇, on trouvera sensiblement

$$(6)\qquad A_{n'} = \mathcal{S} e^{\varpi},$$

les valeurs de $\mathcal{S}$ et de ϖ étant

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathcal{S} = [\tfrac{1}{2}]_{n'}\mathcal{K}(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\xi'^{-n'}, \\ \varpi = \iota'\left(\xi' - \frac{1}{\xi'}\right) - \frac{\varepsilon'}{4}\left(\xi + \frac{1}{\xi'}\right) - \frac{1}{4n'}\,\frac{a^2}{1-a^2}. \end{cases}$$

Or, de l'équation (6), jointe aux formules (2) et (7), on déduira directement la valeur de $A_{n'}$ correspondante à une valeur donnée de ψ, sans être forcé de calculer les diverses valeurs de $\mathcal{A}_{n',-l}$, et de la transcendante de M. Bessel, comme on était obligé de le faire quand on avait recours à la formule (6) de la Note précédente. En appliquant ces formules à la recherche de la grande inégalité de Pallas, et posant, comme ci-dessus,

$$A_{n'}u^{n}(1-\varepsilon\cos\psi) = \mathcal{B} + \mathcal{C}\sqrt{-1},$$

nous avons obtenu sans peine les diverses valeurs des produits

$$10^9\mathcal{B},\quad 10^9\mathcal{C},$$

correspondantes aux valeurs de ψ que renferme la progression arithmétique

$$140^\circ,\quad 150^\circ,\quad \ldots,\quad 300^\circ,$$

et nous avons trouvé

Pour $\psi = 140^\circ$	$10^9\mathcal{B} = +7$	$10^9\mathcal{C} = +11$
» 150	» +29	» −14
» 160	» −14	» −85
» 170	» −228	» −83
» 180	» −580	» +354
» 190	» −492	» +1764
» 200	» +1650	» +4186
» 210	» +7748	» +5467
» 220	» +15894	» +987
» 230	» +17373	» −9440
» 240	» +7720	» −15264
» 250	» −2198	» −9934
» 260	» −3663	» −2228
» 270	» −1240	» +556
» 280	» +9	» +345
» 290	» +75	» +8
» 300	» −1	» −15
Sommes totales.....	+42089	−23385

D'après le Tableau qui précède, on aura

$$\Sigma A_{n'}u^{n}(1-\varepsilon\cos\psi) = \frac{42089 - 23385\sqrt{-1}}{10^9}$$

et, par suite,

$$A_{n',-n} = \frac{11692 - 6496\sqrt{-1}}{10^{10}}.$$

On en conclura

$$\mathcal{N} = \frac{26750}{10^{10}},\qquad \Omega = -29^\circ 3' 25''.$$

Donc, en vertu de la formule (44) de la cinquième Note, l'inégalité cherchée du moyen mouvement de Pallas sera

$$(8)\qquad \Delta\int\mu\,dt = (906'',3)\sin(18T' - 7T - 29^\circ 3' 25'').$$

Cette dernière équation s'accorde parfaitement avec celle que nous avons obtenue dans la Note précédente. Elle s'accorde aussi avec les calculs de M. Le Verrier, qui a trouvé

$$\Delta\int\mu\,dt = (895'')\sin(18T' - 7T - 29^\circ 4').$$