§ II. — *Valeur de* $\Lambda_{n,n'}$.

Comme nous l'avons prouvé dans un précédent Mémoire, on a

$$\Lambda_{n,n'} = m' \Sigma P_{h,h'} Q_{-h,-h'} e^{(h\varpi + h'\varpi')\sqrt{-1}}, \tag{1}$$

la valeur de $P_{h,h'}$ étant nulle lorsque les valeurs numériques de h, h' diffèrent de l'unité, et la valeur de $Q_{h,h'}$ étant de la forme

$$Q_{h,h'} = q_h q'_{h'}. \tag{2}$$

Comme on a d'ailleurs

$$P_{1,1} = \tfrac{1}{2}\nu e^{\Phi\sqrt{-1}}, \qquad P_{-1,-1} = \tfrac{1}{2}\nu e^{-\Phi\sqrt{-1}},$$
$$P_{-1,1} = \tfrac{1}{2}\mu e^{\Pi\sqrt{-1}}, \qquad P_{1,-1} = \tfrac{1}{2}\mu e^{-\Pi\sqrt{-1}},$$

l'équation (1) peut être réduite à

$$\begin{cases} \Lambda_{n,n'} = \dfrac{m'}{2}\nu\left(q_{-1}q'_{-1}e^{(\varpi+\varpi'+\Phi)\sqrt{-1}} + q_1\ q'_1 e^{-(\varpi+\varpi'+\Phi)\sqrt{-1}}\right) \\ \qquad + \dfrac{m'}{2}\mu\left(q_1\ q'_{-1}e^{(\varpi'-\varpi+\Pi)\sqrt{-1}} + q_{-1}q'_1 e^{-(\varpi'-\varpi+\Pi)\sqrt{-1}}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Quant aux valeurs de

$$q_1,\quad q'_1,$$

elles sont données, sous forme d'intégrales définies, par les équations

$$q_1 = a\left(\frac{\varepsilon}{2\eta}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\eta e^{\psi\sqrt{-1}})^2 (1-\eta e^{-\psi\sqrt{-1}})\, e^{-(\psi+nT)\sqrt{-1}}\, d\psi, \tag{4}$$

$$q'_1 = a'^{-2}\left(\frac{\varepsilon'}{2\eta'}\right)^{-1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-n'T\sqrt{-1}} \frac{e^{-\psi\sqrt{-1}}}{(1-\eta' e^{-\psi\sqrt{-1}})^2}\, d\psi; \tag{5}$$

et, pour déduire de ces formules les valeurs de

$$q_{-1},\quad q'_{-1},$$

il suffira d'y changer, dans les exponentielles, le signe de ψ ou de ψ'. D'ailleurs, comme on a

$$dT' = (1-\varepsilon'\cos\psi')\, d\psi = \left(\frac{\varepsilon'}{2\eta'}\right)(1-\eta e^{\psi\sqrt{-1}})(1-\eta' e^{-\psi\sqrt{-1}}),$$

une seule intégration par parties, appliquée à la formule (5), donnera

$$q'_1 = -a'^{-2}\frac{n'}{\eta'}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\eta' e^{\psi\sqrt{-1}})\, e^{-n'T\sqrt{-1}}\, d\psi. \tag{6}$$

Si, dans les formules (4) et (5), on substitue pour T, T' leurs valeurs tirées des équations

$$T = \psi - \varepsilon\sin\psi, \qquad T' = \psi - \varepsilon'\sin\psi',$$

alors, en posant, pour abréger,

$$\mathscr{E}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-k\psi\sqrt{-1}}\, e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}}\, d\psi, \tag{7}$$

on trouvera

$$\begin{cases} q_1 = a\left(\dfrac{\varepsilon}{2\eta}\right)^2 [(1+3\eta^2)\mathscr{E}_{n+1} - \eta\mathscr{E}_{n+2} - 3(\eta+\eta^3)\mathscr{E}_n + (3\eta^2+\eta^4)\mathscr{E}_{n-1} - \eta^3\mathscr{E}_{n-2}], \\ q_{-1} = a\left(\dfrac{\varepsilon}{2\eta}\right)^2 [(1+3\eta^2)\mathscr{E}_{n-1} - \eta\mathscr{E}_{n-2} - 3(\eta+\eta^3)\mathscr{E}_n + (3\eta^2+\eta^4)\mathscr{E}_{n+1} - \eta^3\mathscr{E}_{n+2}]; \end{cases} \tag{8}$$

puis, en nommant $\mathscr{E}'_k$ ce que devient $\mathscr{E}_k$ quand on remplace ε par ε' et n par n', on trouvera encore

$$\begin{cases} q'_1 = -n'a'^{-2}\left(\dfrac{1}{\eta'}\mathscr{E}'_{n'} - \mathscr{E}'_{n'-1}\right), \\ q'_{-1} = n'a'^{-2}\left(\dfrac{1}{\eta'}\mathscr{E}'_{n'} - \mathscr{E}'_{n'+1}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Ainsi, chacun des quatre coefficients

$$q_1,\quad q_{-1},\quad q'_1,\quad q'_{-1}$$

se trouve exprimé à l'aide d'un petit nombre de valeurs de la transcendante

$$\mathscr{E}_k \quad \text{ou} \quad \mathscr{E}'_k,$$

dont la forme est donnée par l'équation (7). On peut tirer d'ailleurs facilement de l'équation (7) la valeur de la transcendante dont il s'agit, développée en série convergente. En effet, comme on a

$$e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}} = e^{\frac{n\varepsilon}{2}e^{\psi\sqrt{-1}}}\, e^{-\frac{n\varepsilon}{2}e^{-\psi\sqrt{-1}}},$$

il suffira de développer chacune des exponentielles

$$e^{\frac{n\varepsilon}{2}e^{\psi\sqrt{-1}}}, \quad e^{-\frac{n\varepsilon}{2}e^{-\psi\sqrt{-1}}}$$

suivant les puissances ascendantes de ε, pour en conclure que la valeur $\mathscr{E}_k$, ou le coefficient de

$$e^{k\psi\sqrt{-1}}$$

dans le développement de la fonction

$$e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}},$$

se réduit, quand k est positif, à

$$(10)\qquad \mathscr{E}_k = \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^k}{1.2\ldots k}\left[1 - \frac{1}{k+1}\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^4}{1.2} - \ldots\right] = (-1)^k\mathscr{E}_{-k}.$$

Cette dernière équation fournit, en général, le moyen de calculer facilement la quantité $\mathscr{E}_k$. La valeur qu'elle donne pour $\mathscr{E}_k$ est évidemment positive et inférieure à l'unité quand on a

$$\tfrac{1}{2}n\varepsilon \geq \sqrt{k+1}.$$

Pour de grandes valeurs de k, on aura sensiblement

$$\frac{1.2.3\ldots k}{k^k} = (2\pi k)^{\frac{1}{2}}e^{-k},$$

$$1 - \frac{1}{k+1}\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^4}{1.2} - \ldots = e^{-\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{k+1}},$$

et, par suite,

$$(11)\qquad \mathscr{E}_k = \left(\frac{\frac{1}{2}n\varepsilon}{k}\right)^k(2\pi k)^{-\frac{1}{2}}e^k e^{-\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{k+1}}.$$

Les formules qui précèdent fournissent le moyen de calculer très facilement le coefficient $A_{n,n'}$, surtout lorsque n, n' sont de très grands nombres. Dans un prochain article, je donnerai l'application des mêmes formules à la détermination du coefficient $B_{n,n'}$.

147.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le développement du reste qui complète la série de Taylor en une série nouvelle.*

C. R., T. XIII, p. 842 (25 octbre 1841).

J'ai donné dans un précédent Mémoire les règles de la convergence des séries qui naissent du développement des fonctions explicites ou implicites, et prouvé que ces séries restent généralement convergentes tant que les fonctions et leurs dérivées du premier ordre restent continues. D'ailleurs les principes, desquels j'ai déduit cette proposition dans le Mémoire de 1831, fournissent eux-mêmes les développements d'un grand nombre de fonctions en série, et en particulier les séries de Lagrange, de Taylor et de Maclaurin. Je vais aujourd'hui déduire des mêmes principes une formule nouvelle qui peut être employée avec avantage dans la solution de divers problèmes. Cette nouvelle formule sert à convertir le reste, qui complète la série de Taylor, en une autre série dont les divers termes sont respectivement proportionnels, non plus aux dérivées de divers ordres de la fonction que l'on considère, mais aux dérivées de même ordre de cette fonction et de plusieurs autres qui forment avec elle une progression géométrique dont la raison est la variable même. D'ailleurs la nouvelle série jouit, comme la série de Taylor, de cette propriété remarquable que, si on l'arrête à un terme donné, il sera facile de calculer une limite de l'erreur commise en vertu de l'omission des termes suivants. Dans plusieurs cas, par exemple, quand la fonction donnée se réduit à une puissance d'un binôme, la nouvelle série peut converger très rapidement dans ses premiers termes, et elle fournit alors le moyen de calculer sans peine, avec une grande approximation, le reste propre à compléter la série de Newton. Ce n'est pas tout; les développements de diverses fonctions transcendantes peuvent être complétés de la même manière par des séries qui, étant très convergentes dans leurs premiers termes, permet-

tent d'évaluer avec facilité les restes de ces développements. Parmi ces fonctions, on doit distinguer les logarithmes, les arcs de cercle correspondants à une tangente ou à un sinus donné, diverses intégrales définies, etc.

Je viens d'indiquer les principaux résultats auxquels conduisent les formules que renferme le présent Mémoire. Dans un second article, je montrerai la grande utilité de ces formules appliquées à la Mécanique céleste, et en particulier au développement de la fonction perturbatrice.

ANALYSE.

§ Ier. — *Considérations générales.*

Soient $f(x)$ une fonction de la variable x, et

$$\zeta = ze^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont le module z soit supérieur à x. Si la fonction $f(x)$ et sa dérivée du premier ordre restent finies et continues pour un module de x inférieur à z, on aura

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - x}\, dp.$$

Donc, si l'on attribue à la variable x un certain accroissement h, tellement choisi que le module de la somme $x+h$ reste inférieur à z, on aura encore

$$(2) \qquad f(x+h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - x - h}\, dp.$$

D'ailleurs, l'équation (1), différentiée n fois de suite par rapport à x, donnera généralement

$$(3) \qquad \frac{1}{1.2\ldots n} D_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}}\, dp.$$

Si maintenant on développe, dans la formule (2), le rapport

$$\frac{1}{\zeta - x - h}$$

en une progression géométrique ordonnée suivant les puissances ascendantes de h, on trouvera

$$(4) \qquad \frac{1}{\zeta - x - h} = \frac{1}{\zeta - x} + \frac{h}{(\zeta - x)^2} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(\zeta - x)^n} + \frac{h^n}{(\zeta - x)^n (\zeta - x - h)},$$

et, eu égard à l'équation (3), la formule (2) donnera

$$(5) \qquad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \dfrac{h}{1} D_x f(x) + \dfrac{h^2}{1.2} D_x^2 f(x) + \ldots \\ \qquad\qquad + \dfrac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} D_x^{n-1} f(x) + r_n, \end{cases}$$

la valeur de r_n étant

$$(6) \qquad r_n = \frac{h^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{(\zeta - x)^n (\zeta - x - h)}\, dp.$$

La formule (5), qui fournit la valeur de $f(x+h)$, offre pour second membre la série de Taylor avec le reste r_n qui complète cette série arrêtée après le $n^{\text{ième}}$ terme. On sait d'ailleurs que ce reste peut encore être présenté sous la forme

$$(7) \qquad r_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1} D_x^n f(x+h-z)\, dz.$$

On a donc identiquement

$$(8) \qquad \frac{h^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{(\zeta - x)^n (\zeta - x - h)}\, dp = \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} D_x^n f(x+h-z)\, dz.$$

Concevons maintenant que, dans l'équation (6), on développe le rapport

$$\frac{1}{\zeta - x - h},$$

suivant les puissances ascendantes de ζ à l'aide de la formule

$$(9) \qquad \frac{1}{\zeta - x - h} = -\left[\frac{1}{x+h} + \frac{\zeta}{(x+h)^2} + \ldots + \frac{\zeta^{m-1}}{(x+h)^m}\right] + \frac{\zeta^m}{(x+h)^m (\zeta - x - h)}.$$

On en conclura, eu égard à la formule (3),

$$(10)\quad r_n = -\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x+h}\,\mathrm{D}_x^{n-1}\,\mathrm{f}(x)+\dfrac{1}{(x+h)^2}\,\mathrm{D}_x^{n-1}[x\,\mathrm{f}(x)]+\ldots\\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{(x+h)^m}\,\mathrm{D}_x^{n-1}[x^{m-1}\,\mathrm{f}(x)]\end{array}\right\}+\iota_m,$$

la valeur de ι_m étant

$$(11)\qquad \iota_m = \frac{h^n}{(x+h)^m}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{m+1}\,\mathrm{f}(\zeta)}{(\zeta-x)^n\,(\zeta-x-h)}\,dp,$$

ou, ce qui revient au même, en vertu de l'équation (8),

$$(12)\quad \iota_m = \frac{1}{(x+h)^m}\int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\,\mathrm{D}_x^n[(x+h-z)^m\,\mathrm{f}(x+h-z)]\,dz.$$

Lorsque, x et h étant réels, la fonction $\mathrm{f}(z)$ est elle-même réelle, et reste continue avec sa dérivée entre les limites $z=0$, $z=x+h$, on tire des formules (7) et (12)

$$(13)\qquad r_n = \frac{h_n}{1.2\ldots n}\,\mathrm{D}_x^n\,\mathrm{f}(x+\theta h),$$

et

$$(14)\qquad \iota_m = \frac{h^n}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{(x+h)^m}\,\mathrm{D}_x^n[(x+\theta h)\,\mathrm{f}(x+\theta h)],$$

θ désignant un nombre compris entre les limites 0, 1, et dont la valeur, variable avec x, ne doit être substituée dans les formules (13) et (14) qu'après que l'on aura effectué les différentiations relatives à x, en considérant le produit θh comme constant.

Quoique le second membre de la formule (9) offre une progression géométrique divergente, il arrivera souvent que la série comprise dans le second membre de l'équation (10) commencera par converger très rapidement. Alors on pourra se servir de cette série pour calculer avec une grande approximation le reste r_n de la série de Taylor. L'équation (14), ou les équations du même genre que l'on pourrait déduire de la formule (12), si la quantité h et la fonction $\mathrm{f}(z)$ devenaient imaginaires, serviront à fixer les limites de l'erreur commise dans l'évaluation approximative du reste r_n.

Si, dans les formules (5), (10), (12) et (14), on remplace x par zéro, et h par x, on obtiendra d'autres formules dont on pourra souvent faire usage pour déterminer, avec une grande approximation, le reste qui complète la série de Maclaurin, et pour fixer les limites des erreurs commises dans l'évaluation de ce même reste.

§ II. — *Développement d'une puissance d'un binôme.*

Lorsque, dans les formules (5), (10), (12) et (14) du § Ier, on pose

$$\mathrm{f}(x) = x^s,$$

s désignant une quantité réelle, on obtient des équations qui fournissent, non seulement le développement connu de

$$(x+h)^s$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de h, mais encore le reste r_n de cette série, développé lui-même en une seconde série qui converge très rapidement dans ses premiers termes, quand le nombre n devient très grand, et qui jouit, comme la première, de cette propriété remarquable, qu'on peut, en l'arrêtant à un terme quelconque, déterminer facilement une limite de l'erreur commise en vertu de l'omission des termes suivants. En effet, dans cette hypothèse et en posant, pour abréger,

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{1.2\ldots n} = (s)_n,$$

on trouvera

$$(1)\quad (x+h)^s = x^s + (s)_1 h x^{s-1} + (s)_2 h^2 x^{s-2} + \ldots + (s)_{n-1} h^{n-1} x^{s-n+1} + r_n,$$

$$(2)\quad r_n = -h^n x^{s-n+1}\left[\frac{(s)_{n-1}}{x+h} + \frac{(s+1)_{n-1}}{(x+h)^2} + \ldots + \frac{(s+m-1)_{n-1}}{(x+h)^m}\right] + \iota_m,$$

$$(3)\quad \iota_m = (s+m)_n\,\frac{nh^n}{(x+h)^m}\int_0^h z^{n-1}(x+h-z)^{s+m-n}\,dz,$$

$$(4)\quad \iota_m = (s+m)_n\,\frac{h^n}{(x+h)^m}(x+\vartheta h)^{s+m-n},$$

θ désignant un nombre renfermé entre les limites 0, 1. Or, d'une part, lorsque n devient très grand, la série que renferme l'équation (2) converge très rapidement dans ses premiers termes, dont la somme est

$$\frac{(s)_{n-1}}{x+h}+\frac{(s+1)_{n-1}}{(x+h)^2}+\frac{(s+2)_{n-1}}{(x+h)^3}+\dots$$
$$=\frac{(s)_{n-1}}{x+h}\left[1+\frac{s+1}{s-n+2}\frac{1}{x+h}+\frac{(s+1)(s+2)}{(s-n+2)(s-n+3)}\frac{1}{(x+h)^2}+\dots\right];$$

et, d'autre part, la formule (4), ou les formules analogues que l'on déduirait de l'équation (3), si h ou x devenait imaginaire, fournissent immédiatement une limite du reste qui complète la seconde série arrêtée après le terme dont le rang est m.

Si, dans les formules précédentes, on remplace x par l'unité, et h par x, elles donneront

$$(5)\qquad (1+x)^s=x+(s)_1x+(s)_2x^2+\dots+(s)_{n-1}x^{n-1}+r_n,$$

$$(6)\qquad r_n=-x^n\left[\frac{(s)_{n-1}}{1+x}+\frac{(s+1)_{n-1}}{(1+x)^2}+\dots+\frac{(s+m-1)_{n-1}}{(1+x)^m}\right]+\varepsilon_m,$$

$$(7)\qquad \varepsilon_m=(s+m)_n\frac{nx^n}{(1+x)^m}\int_0^x z^{n-1}(1+x-z)^{s+m-n}dz,$$

$$(8)\qquad \varepsilon_m=(s+m)_n\frac{x^n}{(1+x)^m}(1+\theta x)^{s+m-n}.$$

Enfin, si, dans ces dernières équations, on remplace x par $-x$, et s par $-s$, alors, en posant, pour abréger,

$$\frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{1.2\dots n}=[s]_n,$$

on trouvera

$$(9)\qquad (1-x)^{-s}=1+[s]_1x+[s]_2x^2+\dots+[s]_{n-1}x^{n-1}+r_n,$$

$$(10)\qquad r_n=x^n\left(\frac{[s]_{n-1}}{1-x}+\frac{[s-1]_{n-1}}{(1-x)^2}+\dots+\frac{[s-m+1]_{n-1}}{(1-x)^m}\right)+\varepsilon_m,$$

$$(11)\qquad \varepsilon_m=[s-m]_n\frac{nx^n}{(1-x)^m}\int_0^x z^{n-1}(1-x-z)^{m-s-n}dz,$$

$$(12)\qquad \varepsilon_m=[s-m]_n\frac{x^n}{(1-x)^m}(1-\theta x)^{m-s-n}.$$

Si l'on divise par s les deux membres de chacune des équations (5), (6), (7), (8); si d'ailleurs, après avoir écrit, pour abréger,

$$r_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_m$$

au lieu de

$$\frac{r_n}{s} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_m}{s},$$

on réduit s à zéro, alors on verra le rapport

$$\frac{(1+x)^s-1}{s}$$

se réduire simplement à

$$l(1+x),$$

et l'on trouvera

$$(13)\qquad l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+r_n,$$

$$(14)\qquad r_n=\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n-1}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n-2}\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1.2}{(n-2)(n-3)}\frac{1}{(1+x)^3}-\dots+(-1)^{m+1}\frac{1.2\dots(m-1)}{(n-2)\dots(n-m)}\frac{1}{(1+x)^m}\right]+\varepsilon_m,$$

$$(15)\qquad \varepsilon_m=(-1)^{m+n+1}\frac{1.2.3\dots m}{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}\frac{x^n}{(1+x)^m}\int_0^x z^{n-1}(1+x-z)^{m-n}dz,$$

$$(16)\qquad \varepsilon_m=(-1)^{m+n+1}\frac{1.2.3\dots m}{n(n-1)\dots(n-m)}\frac{x^n}{(1+x)^m}(1+\theta x)^{m-n}.$$

Aux applications que nous venons de faire, des formules établies dans le § I, on pourrait en joindre beaucoup d'autres. Nous nous bornerons ici à en indiquer quelques-unes.

Si dans les formules (13), (14), (15) on remplace x par $x\sqrt{-1}$, celles que l'on obtiendra fourniront, non seulement le développement connu de arc tang$x$, mais encore le reste qui le complète, développé lui-même en une série qui sera très convergente dans ses premiers termes quand n aura une grande valeur.

Si dans l'intégrale

$$\int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\text{arc sin}\,x$$

on substitue pour $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ sa valeur tirée des formules (9) et (10), on obtiendra, non seulement le développement connu de la fonction arc sin$x$, mais encore le reste qui le complète, développé lui-même en une série qui sera très convergente dans ses premiers termes, quand n sera très grand. Des remarques semblables sont applicables aux intégrales de la forme

$$\int_0^x (1-x^2)^{-s}\,dx,$$

ainsi qu'à une multitude d'autres, et en particulier à certaines intégrales que l'on rencontre dans la Mécanique céleste, comme nous l'expliquerons plus en détail dans un autre Article.

En terminant ce Mémoire, nous observerons que les formules (1), (2), (3), (4) peuvent se déduire, non seulement des principes établis dans le § I, mais aussi de l'équation

$$\int_0^\infty \frac{z^{-s}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin \pi s},$$

qui subsiste pour des valeurs de s comprises entre les limites 0, 1, ou plutôt de la formule

$$(x+h)^{-s} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0 \frac{z^{-s}\,dz}{x+h+z},$$

que l'on tire de l'équation précédente, en y remplaçant z par $\frac{z}{x+h}$.

148.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Note sur la substitution des anomalies excentriques aux anomalies moyennes, dans le développement de la fonction perturbatrice.*

C. R., t. XIII, p. 850 (25 octobre 1841).

Le calcul des perturbations des mouvements planétaires exige le développement de la fonction perturbatrice en une série de termes proportionnels aux puissances entières des exponentielles trigonométriques qui offrent pour arguments les anomalies moyennes. Or ce développement peut être déduit de celui dans lequel les exponentielles trigonométriques offriraient pour arguments, non plus les anomalies moyennes, mais les anomalies excentriques. Il y a plus; on passera très facilement du second développement au premier, si l'on a commencé par former pour chaque planète une Table qui présente les diverses valeurs d'une certaine transcendante dont M. Bessel s'est occupé dans un beau Mémoire, présenté à l'Académie de Berlin en 1824, et sur laquelle j'ai rappelé dernièrement l'attention des géomètres. Dans la précédente Note, je me suis proposé, comme M. Bessel, de montrer les avantages que présente l'emploi de cette transcendante dans le développement de la première partie de la fonction perturbatrice. Je vais montrer aujourd'hui comment la même transcendante peut servir au développement de la seconde partie de la même fonction, je veux dire, de la partie dépendante de l'action mutuelle de deux planètes.

ANALYSE.

Conservons les mêmes notations que dans la Note du 4 octobre, et soit toujours

$$(1) \qquad R = \frac{m'r}{r'^2}\cos\delta + \ldots - \frac{m'}{\iota} - \ldots$$

la fonction perturbatrice. On aura

$$(2) \qquad R = \Sigma (m, m')_{n,n'} e^{(nT + n'T')\sqrt{-1}},$$

$$(3) \qquad (m, m')_{n,n'} = A_{n,n'} - B_{n,n'},$$

$A_{n,n'}$ et $B_{n,n'}$ étant les coefficients du produit

$$e^{nT\sqrt{-1}}\, e^{n'T'\sqrt{-1}},$$

dans les développements des termes $\frac{m'r}{r'^2}\cos\delta$ et $\frac{m'}{\iota}$. On aura d'ailleurs,

comme nous l'avons remarqué,

$$(4)\quad \begin{cases} A_{n,n'} = \dfrac{m'}{2}\nu\left[q_{-1}q'_{-1}\,e^{(\varpi+\varpi+\Phi)\sqrt{-1}} + q_1\ q'_1\,e^{-(\varpi+\varpi+\Phi)\sqrt{-1}}\right] \\ \qquad + \dfrac{m'}{2}\mu\left[q_1\ q'_{-1}\,e^{(\varpi'-\varpi+\Pi)\sqrt{-1}} + q_{-1}q'_1\,e^{-(\varpi'-\varpi+\Pi)\sqrt{-1}}\right], \end{cases}$$

les valeurs de q_1, q'_1 étant fournies par les équations

$$(5)\quad \begin{cases} q_1 = \left(\dfrac{\varepsilon}{2\eta}\right)\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\eta e^{\psi\sqrt{-1}})^2 r e^{-(\psi+nT)\sqrt{-1}}\,d\psi, \\ q'_1 = -\,a'^{-2}\dfrac{n'}{\eta'}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\eta' e^{\psi'\sqrt{-1}})e^{-n'T\sqrt{-1}}\,d\psi', \end{cases}$$

et les valeurs de r, T étant

$$(6)\qquad r = a(1-\varepsilon\cos\psi), \qquad T = \psi - \varepsilon\sin\psi.$$

Par suite, si l'on pose

$$(7)\qquad \mathcal{E}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-k\psi\sqrt{-1}}\,e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}}\,d\psi,$$

et si l'on nomme $\mathcal{E}'_k$ ce que devient $\mathcal{E}_k$ quand on passe de la planète m à la planète m', les valeurs de

$$q_1, \quad q'_1$$

se déduiront aisément de celles de la transcendante $\mathcal{E}_k$ supposées connues, à l'aide des formules (8) et (9) de la page 345. Ajoutons que, si l'on nomme $\mathfrak{D}_k$ une seconde transcendante déterminée par la formule

$$(8)\quad \mathfrak{D}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(n-k)\psi\sqrt{-1}}\,e^{-nT\sqrt{-1}}\,dT = \frac{n-k}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{(n-k)\psi\sqrt{-1}}\,e^{-nT\sqrt{-1}}\,d\psi,$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(9)\qquad \mathfrak{D}_k = \mathcal{E}_k - \frac{\varepsilon}{2}(\mathcal{E}_{k+1} + \mathcal{E}_{k-1}) = \frac{n-k}{n}\mathcal{E}_k,$$

on pourra, aux formules (8) de la page 345, substituer les suivantes

$$(10)\quad \begin{cases} q_1 = a\left(\dfrac{\varepsilon}{2\eta}\right)(\mathfrak{D}_{n+1} - 2\eta\,\mathfrak{D}_n + \eta^2\,\mathfrak{D}_{n-1}), \\ q_{-1} = a\left(\dfrac{\varepsilon}{2\eta}\right)(\mathfrak{D}_{n-1} - 2\eta\,\mathfrak{D}_n + \eta^2\,\mathfrak{D}_{n+1}). \end{cases}$$

Quant aux valeurs de q'_1, q'_{-1}, elles seront toujours

$$(11)\quad \begin{cases} q'_1 = -\,n'a'^{-2}\left(\dfrac{1}{\eta'}\mathcal{E}'_{n'} - \mathcal{E}'_{n'-1}\right), \\ q'_{-1} = \quad n'a'^{-2}\left(\dfrac{1}{\eta'}\mathcal{E}'_{n'} - \mathcal{E}'_{n'+1}\right). \end{cases}$$

Cherchons maintenant la valeur de $B_{n,n'}$, et concevons que l'on commence par développer $\frac{m'}{\iota}$ suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques

$$e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

On obtiendra ainsi une équation de la forme

$$(12)\qquad \frac{m'}{\iota} = \sum C_{l,l'}\,e^{l\psi\sqrt{-1}}\,e^{l'\psi'\sqrt{-1}},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives de l, l'. Cela posé, en représentant toujours par

$$B_{n,n'}$$

le coefficient du produit

$$e^{n'T\sqrt{-1}}\,e^{n'T\sqrt{-1}},$$

dans le développement de $\frac{m'}{\iota}$, on tirera de la formule (12)

$$(13)\qquad B_{n,n'} = \sum C_{l,l'}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(l\psi+l'\psi')\sqrt{-1}}\,e^{-(nT+n'T')\sqrt{-1}}\,dT\,dT'.$$

D'ailleurs, en vertu de l'équation

$$T = \psi - \varepsilon\sin\psi,$$

on trouvera

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-l\psi\sqrt{-1}}\, e^{-nT\sqrt{-1}}\, dT = \mathfrak{O}_{n-l}.$$

Donc la formule (13) donne simplement

$$(14)\qquad B_{n,n'} = \Sigma C_{l,l'}\, \mathfrak{O}_{n-l}\mathfrak{O}'_{n'-l'} = \Sigma \frac{ll'}{nn'} C_{l,l'}\, \mathscr{E}_{n-l}\mathscr{E}_{n'-l'},$$

le signe Σ s'étendant aux diverses valeurs positives, nulles ou négatives de l, l'. Les formules (10), (11) et (14) suffisent pour montrer combien il est utile de construire, ainsi que l'a fait M. Bessel, une Table propre à fournir les diverses valeurs de la transcendante $\mathscr{E}_k$, de laquelle $\mathfrak{O}_k$ se déduit aisément à l'aide de l'équation (9). Cette Table étant construite, la détermination de $B_{n,n'}$ se trouve réduite au développement de $\frac{1}{\iota}$ suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{\psi\sqrt{-1}},\quad e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

Au reste, la même conclusion se déduirait des deux formules que M. Jacobi a données dans le *Journal de M. Crelle* (XVe Volume, 1836), pour la détermination des coefficients de $\cos nT$ et de $\sin nT$, dans les développements de $\cos l\psi$ et de $\sin l\psi$, et qui se trouvent comprises l'une et l'autre dans la formule (9).

Nous ferons, en terminant cette Note, une remarque essentielle. Quoique la sommation indiquée par le signe Σ dans la formule (14) embrasse, à la rigueur, un nombre infini de valeurs de l, l', cependant le nombre de celles dont on devra tenir compte pour obtenir en nombres la valeur de $B_{n,n'}$ sera fini et souvent peu considérable, attendu que, pour de grandes valeurs numériques de k, la valeur de $\mathscr{E}_k$, et par suite la valeur de $\mathfrak{O}_k$ donnée par la formule (9), seront généralement très petites. En effet, nous avons déjà reconnu, dans la Note précédente, que l'on a, pour des valeurs positives de k,

$$(15)\qquad \mathscr{E}_k = \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^k}{1.2\ldots k}\left[1 - \frac{1}{k+1}\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{1} + \ldots\right] = (-1)^k \mathscr{E}_{-k},$$

et nous en avons conclu que, pour de grandes valeurs positives de k, on a sensiblement

$$(16)\qquad \mathscr{E}_k = \left(\frac{\frac{1}{2}n\varepsilon}{k}\right)^k (2\pi k)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{k+1}}.$$

Or, comme chacun des facteurs renfermés dans le second membre de la formule (16) devient très petit pour de très grandes valeurs numériques de k, il en résulte que la transcendante $\mathscr{E}_k$ offre alors elle-même une très petite valeur numérique. Il suit d'ailleurs de la formule (7) que, dans tous les cas possibles, cette valeur numérique est rigoureusement inférieure au module du produit

$$e^{-k\psi\sqrt{-1}}\, e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire à l'unité. Remarquons encore que, dans le cas où l'on a

$$\tfrac{1}{2}n\varepsilon < \sqrt{k+1},$$

la série comprise entre parenthèses dans le second membre de la formule (15) est elle-même une quantité positive inférieure à l'unité.

149.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur le développement des fonctions en séries.*

C. R., t. XIII, p. 910 (8 novembre 1841).

Une fonction d'une ou de plusieurs variables peut être développée, dans beaucoup de cas, en une série convergente, simple ou multiple, dont les divers termes présentent une forme donnée. Ainsi, par exemple, une fonction d'une seule variable peut souvent être développée en une série dont les divers termes soient respectivement proportionnels aux puissances entières positives ou négatives de cette variable. Or, la forme du développement étant donnée, il est très impor-

tant de savoir si l'on peut obtenir ou un seul ou plusieurs développements de la même forme. La question est facile à résoudre, lorsque les divers termes doivent être proportionnels aux seules puissances entières et positives de la variable. Alors on prouve aisément que le développement est unique; mais la preuve fournie dans cette hypothèse n'est plus applicable au cas où le développement renfermerait à la fois des puissances positives et des puissances négatives de la variable. Il paraissait donc nécessaire d'examiner de nouveau la question, même pour les développements en séries ordonnées suivant les puissances entières des variables. En m'occupant de cet objet, je suis parvenu à établir divers théorèmes généraux relatifs à des développements de forme donnée. Je me bornerai aujourd'hui à énoncer quelques-uns d'entre eux, me réservant d'en développer les démonstrations et de traiter la même matière avec plus d'étendue dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

Il est facile d'établir les deux propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Si une série ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle ou imaginaire offre une somme nulle, tant qu'elle demeure convergente, chaque terme sera séparément nul.*

THÉORÈME II. — *Si une série convergente, et composée de termes proportionnels, les uns aux puissances entières positives, les autres aux puissances entières négatives d'une variable réelle ou imaginaire, offre une somme nulle, pour un module donné de cette variable, quelle que soit d'ailleurs la valeur de l'argument, chaque terme sera séparément nul.*

De ces deux propositions on déduit immédiatement les suivantes, dont la première était déjà connue.

THÉORÈME III. — *Une fonction continue d'une variable ne peut être développée que d'une seule manière en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable.*

THÉORÈME IV. — *Une fonction continue de la variable x ne peut être développée que d'une seule manière en une série convergente qui se compose de termes proportionnels aux puissances entières positives, nulle et négatives de cette variable, et dont la somme représente constamment cette fonction pour un module donné de la variable, quelle que soit d'ailleurs la valeur de l'argument.*

Le théorème IV cesserait d'être exact, si, pour le module donné de la variable, la fonction développée en une série convergente se trouvait représentée par la somme de cette série, non pour toutes les valeurs de l'argument, mais seulement pour celles qui seraient comprises entre des limites données.

On peut du théorème IV déduire un grand nombre de conséquences dignes de remarque. Pour en donner une idée, considérons une fonction rationnelle quelconque de la variable x. Cette fonction rationnelle pourra être regardée comme formée par l'addition d'une fonction entière et de diverses fractions simples dont chacune sera proportionnelle à une puissance négative d'un binôme. Or, une telle puissance étant toujours développable, ou suivant les puissances ascendantes, ou suivant les puissances descendantes de la variable, suivant que le module de cette variable est inférieur ou supérieur au module du terme constant du binôme, on doit en conclure qu'une fonction rationnelle de la variable x sera, pour un module donné de x, toujours développable en une série convergente dont les divers termes seront proportionnels, les uns aux puissances entières positives, les autres aux puissances entières négatives de la variable, et dont la somme représentera cette fonction, quel que soit l'argument de la variable. Cela posé, concevons que, par un moyen quelconque, on soit parvenu à déduire immédiatement une semblable série de la fonction rationnelle donnée, sans recourir à la décomposition de la même fonction rationnelle en fractions simples. Cette nouvelle série devra, en vertu du théorème IV, se confondre avec la première. A l'aide de cette seule observation, on peut facilement établir, non seulement les formules connues qui servent à déterminer les sommes des fonctions semblables des racines d'une équation algébrique donnée, mais encore une multitude d'autres formules, par

exemple, celles qu'ont obtenues Lagrange, Laplace et Paoli pour le développement en série d'une fonction de la racine la plus rapprochée de zéro, ou de la somme des fonctions semblables de plusieurs racines. On peut même, à l'aide du théorème IV, prouver que ces diverses formules sont applicables, non seulement aux racines des équations algébriques, mais encore, sous certaines conditions, aux racines des équations transcendantes.

ANALYSE.

Si une équation de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 0$$

subsiste, pour tout module de la variable x inférieur à une certaine limite, il suffira de réduire x à zéro dans cette équation, multipliée par un terme de la progression géométrique

$$1, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \ldots,$$

pour obtenir successivement les formules

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots$$

Cette démonstration très simple du théorème I peut être étendue, comme l'on sait, au théorème III. (*Voir* l'*Analyse algébrique*, Chap. VI.)

Concevons maintenant que le module de la variable réelle ou imaginaire x soit représenté par X, et l'argument de la même variable par p, en sorte qu'on ait

$$x = \mathrm{X} e^{p\sqrt{-1}}. \tag{1}$$

Si, pour une valeur donnée du module X, une équation de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{-1} x^{-1} + a_{-2} x^{-2} + \ldots = 0 \tag{2}$$

se vérifie, quelle que soit la valeur de l'argument p, il suffira d'intégrer par rapport à p, et entre les limites

$$p = 0, \quad p = 2\pi,$$

les deux membres de la formule (2), multipliés par

$$e^{np\sqrt{-1}}\,dp,$$

pour obtenir l'équation

$$a_n = 0, \tag{3}$$

n étant une quantité entière quelconque positive, nulle ou négative. Donc alors la formule (2) entraînera les équations

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_{-1} = 0, \quad a_{-2} = 0, \quad \ldots \tag{4}$$

Cette démonstration très simple du théorème II est fondée sur un artifice de calcul analogue à celui dont Euler a fait usage pour développer une fonction en série de termes proportionnels aux cosinus des multiples d'un même arc. D'ailleurs le théorème II, une fois établi, entraîne immédiatement le théorème IV, et toutes les conséquences qui dérivent de celui-ci.

Il importe d'observer que, si l'équation (2) était seulement établie pour des valeurs de l'argument p comprises entre certaines limites, elle n'entraînerait plus nécessairement les formules (4). A l'appui de cette observation, nous pouvons citer la formule

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \ldots - x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \ldots = 0, \tag{5}$$

qui subsiste, quand on y pose

$$x = e^{p\sqrt{-1}},$$

non pour toutes les valeurs possibles de l'argument p, mais seulement pour des valeurs de p comprises entre les limites

$$p = -\frac{\pi}{2}, \quad p = \frac{\pi}{2}.$$

Observons encore qu'à l'aide d'intégrations définies on peut réduire des séries de diverses formes à des séries ordonnées suivant les puissances entières positives ou négatives de certaines quantités. Ainsi, en

particulier, de ce qu'on a, pour des valeurs réelles et positives de r et de n,

$$\int_0^\infty \frac{r}{r^2+p^2}\cos np\,dp = \frac{\pi}{2}e^{-nr},$$

il résulte qu'une équation de la forme

$$f(p) = a_0 + a_1\cos p + a_2\cos 2p + \ldots, \tag{6}$$

quand elle subsiste, quel que soit l'angle p, entraîne la suivante :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{r}{r^2+p^2} f(p)\,dp = a_0 + a_1 e^{-r} + a_2 e^{-2r} + \ldots. \tag{7}$$

Pareillement, de ce qu'on a, pour des valeurs réelles et positives de r et de n,

$$\int_0^\infty \frac{p}{r^2+p^2}\sin np\,dp = \frac{\pi}{2}e^{-nr},$$

il résulte qu'une équation de la forme

$$f(p) = a_1\sin p + a_2\sin 2p + \ldots \tag{8}$$

entraîne la suivante :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p}{r^2+p^2} f(p)\,dp = a_1 e^{-r} + a_2 e^{-2r} + \ldots. \tag{9}$$

On a encore

$$\int_0^\infty \frac{p}{r^2+p^2}\sin p\,dp = \frac{\pi}{2}e^{-r},$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\infty \frac{p}{n^2r^2+p^2}\sin p\,dp = \frac{\pi}{2}e^{-nr};$$

de sorte que, si l'on pose

$$f(p) = a_0\frac{1}{p} + a_1\frac{p}{r^2+p^2} + a_2\frac{p}{4r^2+p^2} + \ldots, \tag{10}$$

on conclura la formule

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(p)\sin p\,dp = a_0 + a_1 e^{-r} + a_2 e^{-2r} + \ldots. \tag{11}$$

Il suit de ces remarques que le développement d'une fonction $f(p)$ en une série semblable à celle que renferme l'une des formules (6), (8), (10) peut être réduit au développement d'une certaine intégrale définie en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la quantité e^{-r}. Les mêmes remarques permettent aussi d'établir divers théorèmes analogues aux théorèmes I, II, III, IV, et il en résulte, par exemple, que le second membre de chacune des formules (6), (8), (10) ne peut s'évanouir, quel que soit p, sans que chacun de ses termes se réduise séparément à zéro. Ainsi encore, une fonction $f(p)$ de l'angle p ne pourra être développée que d'une seule manière en une série convergente de la forme de celle que renferme l'équation (10), si la somme de cette série doit représenter la fonction, quel que soit p. Si, pour fixer les idées, on suppose la fonction $f(p)$ réduite à

$$\frac{\pi}{2r}\,\frac{e^{\frac{\pi p}{r}} + e^{-\frac{\pi p}{r}}}{e^{\frac{\pi p}{r}} - e^{-\frac{\pi p}{r}}},$$

la série dont il s'agit sera nécessairement

$$\frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{p}{r^2+p^2} + \frac{p}{4r^2+p^2} + \ldots.$$

150.

CALCUL INTÉGRAL. — *Note sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées.*

C. R., t. XIII, p. 939 (15 novembre 1841).

Cette Note, qui sera publiée en entier dans les *Exercices de Mathématiques*, a pour objet la démonstration de diverses propriétés des fonctions et des sommes alternées. Je remarque, entre autres choses, que si, la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ étant rationnelle par rapport aux va-

riables $x, y, z, \ldots$, on pose

$$s = S[\pm f(x, y, z, \ldots)],$$

la somme alternée s sera de la forme

$$P\frac{W}{V},$$

P, V, W désignant des fonctions entières de $x, y, z, \ldots$, et P étant de la forme

$$P = (x-y)(x-z)\ldots(y-z);$$

puis, en partant de cette remarque, j'établis la formule

$$S\left[\pm\frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots}\right] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{P\varphi}{V},$$

n étant le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, ou des constantes $a, b, c, \ldots$, φ désignant ce que devient le produit P quand on y remplace ces variables par ces constantes, et la valeur de la fonction V étant déterminée par la formule

$$V = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(y-a)(y-b)(y-c)\ldots(z-a)(z-b)(z-c)\ldots.$$

Si, pour fixer les idées, on pose $n = 2$, on obtiendra la formule

$$\frac{1}{(x-a)(y-b)} - \frac{1}{(x-b)(y-a)} = -\frac{(a-b)(x-y)}{(x-a)(x-b)(y-a)(y-b)}.$$

Si l'on pose $n = 3$, on obtiendra la formule

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x-a)(y-b)(z-c)} + \frac{1}{(x-b)(y-c)(z-a)} + \frac{1}{(x-c)(y-a)(z-b)}\\ &- \frac{1}{(x-a)(y-c)(z-b)} - \frac{1}{(x-b)(y-a)(z-c)} - \frac{1}{(x-c)(y-b)(z-a)}\\ &= -\frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)(x-z)(y-z)}{(x-a)(x-b)(x-c)(y-a)(y-b)(y-c)(z-a)(z-b)(z-c)}.\end{aligned}$$

151.

Observations relatives à une Note présentée par M. Blanchet (1).

C. R., T. XIII, p. 960 (15 novembre 1841).

La Note que M. Blanchet vient d'ajouter aux beaux Mémoires qu'il a présentés à l'Académie traite une question importante dans la théorie des ondulations, la question de savoir ce que deviennent les valeurs

(1) MÉCANIQUE. — *Note sur les mouvements très petits qui subsistent entre les différentes nappes de l'onde, dans la propagation d'un ébranlement central;* par M. P.-H. BLANCHET.

Dans le préambule d'un Mémoire inséré au n° 8 du tome XIII des *Comptes rendus* (a), M. Cauchy dit que la dérivée de l'ordre $n-1$ de sa fonction principale s'évanouit toujours pour tous les points qui ne sont pas infiniment rapprochés de la surface de l'onde. Il étend ces conclusions au cas où l'état initial est quelconque. A la page 412 (b), qui termine le Mémoire, les mêmes conclusions sont reproduites.

Il suivrait de là qu'il n'y aurait rigoureusement rien entre les différentes nappes de l'onde. Cependant les formules que j'ai données dans mon dernier Mémoire conduisent à des conséquences contraires.

Les intégrales triples, que j'avais négligé d'écrire dans le troisième Mémoire, peuvent être présentées sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{8\pi^2}\int_{N't}^{Nt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\chi(s)\,\varphi_2^n(t,s)\frac{ds}{s}\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta, \\ -\frac{1}{8\pi^2}\int_{N't}^{Nt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\chi(s)\,\varphi_3^n(t,s)\frac{ds}{s}\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta, \end{cases}$$

comme on peut le voir dans le quatrième.

s a remplacé ρ, et l'on a fait les transformations

$$(2)\qquad \begin{cases} x-\lambda = \alpha\rho, & \alpha = \cos\varpi, \\ y-\mu = 6\rho, & 6 = \sin\varpi\cos\theta, \\ z-\nu = \gamma\rho, & \gamma = \sin\varpi\sin\theta; \end{cases}$$

$$(3)\qquad f(\lambda,\mu,\nu) = f(x-\alpha\rho, y-6\rho, z-\gamma\rho) = \chi(\rho).$$

La fonction $\chi(\rho)$ s'évanouit pour les valeurs de ϖ, θ et ρ, qui ne répondent pas à quelqu'un des points de l'espace primitivement ébranlés. Si donc les limites $N't$ et Nt de la première des intégrales (1) sont, l'une au delà, l'autre en deçà des valeurs de ρ pour lesquelles la fonction χ ne s'évanouit pas, on pourra prendre, pour limites de l'intégration

(a) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 388 (Extrait n° 142).
(b) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 302 et 303 (Extrait n° 142).

des inconnues entre les diverses nappes de la surface des ondes. M. Blanchet ayant cité un passage de l'un de mes Mémoires, je demanderai d'abord la permission de relire le commencement de ce passage. Voici ce que je disais dans le *Compte rendu* de la séance du 23 août dernier.

relatives à s, 0 et $+\infty$; car au fond la triple intégration se rapportera à toute la portion de l'espace primitivement ébranlée.

Si l'on fait, dans la première des intégrales (1), la transformation inverse de la transformation (2), on trouvera

$$(4)\qquad -\frac{1}{8\pi^3}\iiint f(\lambda,\mu,\nu)\varphi_2''\left[t,\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}\right]\frac{d\lambda\,d\mu\,d\nu}{\left[\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}\right]^3},$$

et les limites des λ, μ, ν seront $-\infty$ et $+\infty$, ou, si l'on veut, les limites de l'ébranlement primitif.

La seconde des intégrales (1) donnera un résultat semblable; φ_2'' sera remplacé par φ_3''.

Le radical

$$(5)\qquad \sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}$$

est du même ordre de grandeur que t, car il est compris entre des quantités de la forme Nt. D'ailleurs les fonctions φ_2'' et φ_3'' sont homogènes de l'ordre -1. Ainsi, en général, les intégrales de la forme (4) seront de même ordre que le volume de l'ébranlement primitif divisé par la quatrième puissance du radical (5).

Il faudrait donc que les fonctions φ_2 et φ_3 présentassent des particularités bien extraordinaires pour que les intégrales (1) fussent rigoureusement nulles.

Il est évident qu'on peut arriver à un résultat analogue dans le cas où la plus grande nappe n'enveloppe pas toutes les autres. Il suffit de substituer à la surface qui limiterait naturellement l'onde extérieure une certaine portion de surface développable au delà de laquelle il n'y a rigoureusement rien (*a*).

Cela posé, dans les valeurs générales des déplacements ξ, η, ζ, les fonctions qui expriment les déplacements à l'origine du mouvement produiront des termes de la forme des intégrales (1). Les fonctions qui expriment les vitesses initiales produiront des termes de même forme; seulement, au lieu des fonctions φ_2'', φ_3'', on aura des fonctions Φ_2', Φ_3'.

Dans les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, on aura encore des termes de même forme. Mais les déplacements primitifs amèneront dans les intégrales φ_2''', φ_3''', tandis que les vitesses initiales y donneront Φ_2'', Φ_3''.

Ainsi, il y aura des déplacements et des vitesses entre les nappes de l'onde. Toutefois ces déplacements et ces vitesses seront très petits par rapport à ceux qui auront lieu dans les nappes mêmes de l'onde, quand les dimensions de cette onde seront devenues très considérables par rapport aux dimensions de la portion de l'espace primitivement ébranlée. Si l'onde produit un phénomène sensible, ce phénomène pourra disparaître entre les nappes de l'onde à une assez grande distance de l'ébranlement primitif. Jamais il ne sera rigoureusement nul.

Ces conclusions s'accordent d'ailleurs avec les résultats obtenus par M. Poisson dans le cas de la propagation sphérique (t. X des *Mémoires de l'Académie*).

(*a*) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XIII, p. 197 et 339.

De la réduction que j'ai obtenue, il résulte que la dérivée de la fonction principale de l'ordre n — 1 se réduit, pour les points situés dans l'intérieur de l'onde, à une quantité infiniment petite, et, pour les points situés hors de cette même onde, à une quantité infiniment petite d'un ordre plus élevé. Jusque-là les calculs de M. Blanchet et les miens se trouvent complètement d'accord. Seulement, après avoir donné mes calculs, contre lesquels aucune objection ne s'est élevée jusqu'à ce jour, j'ai observé que des infiniment petits d'ordres supérieurs peuvent toujours être négligés relativement à des infiniment petits d'ordre moindre; et j'ai cru pouvoir conclure de cette observation qu'il n'existe rien entre les diverses nappes. M. Blanchet, sans attaquer mes formules, a déduit des siennes une conclusion contraire. Mais il reste ici une difficulté à résoudre: car on ne voit pas comment il arriverait que les conclusions auxquelles j'étais parvenu ne pussent se déduire de l'observation sur laquelle elles sont fondées. D'ailleurs la solution de la question agitée en ce moment repose sur des considérations tellement délicates que, avant de prononcer définitivement s'il existe quelque chose, ou s'il n'existe rien entre les nappes, il me paraît nécessaire de revoir tous les calculs, et de comparer entre elles les diverses formules. C'est ce que je me propose de faire. La Note de M. Blanchet sera un document nouveau qui pourra servir à éclaircir la question; et, si M. Blanchet a raison dans cette Note, je serai certainement le premier à lui rendre justice.

152.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et à la quadrature des surfaces.*

C. R., T. XIII, p. 1060 (6 décembre 1841).

Dans un Mémoire lithographié en 1832, j'ai donné les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *p désignant l'angle polaire que forme une droite* OO'

tracée à volonté dans un plan avec un axe fixe; S le système d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes, fermées ou non fermées; A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur la droite OO', *et* π *le rapport de la circonférence au diamètre, on aura*

$$S = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp. \tag{1}$$

Théorème II. — *p désignant l'angle formé par une droite quelconque* OO' *avec un axe fixe* OP; *q l'angle formé par le plan des deux droites* OP, OO' *avec un plan fixe qui renferme la première; S le système d'une ou de plusieurs surfaces planes ou courbes, et A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur un plan* HIK *perpendiculaire à la droite* OO'; *on aura*

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A\sin p\,dq\,dp. \tag{2}$$

Ces théorèmes entraînent évidemment les suivants :

Théorème III. — *Le périmètre d'un polygone ou d'une courbe est toujours égal ou inférieur à la circonférence d'un cercle qui aurait pour rayon le quart de la plus grande somme que puissent fournir les projections des diverses parties de ce périmètre sur un axe quelconque.*

Théorème IV. — *L'aire d'un polyèdre ou d'une surface courbe est toujours égale ou inférieure au double de la plus grande somme que puissent fournir les projections des diverses parties de cette aire sur un plan quelconque.*

D'autres théorèmes qui se rapportent aux quadratures et aux cubatures, et qui seront développés dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, se déduisent aisément des principes exposés dans mes Leçons orales à l'École Polytechnique. Je me bornerai à énoncer le suivant :

Théorème V. — *Supposons qu'une aire plane, renfermée dans le périmètre S d'un polygone convexe ou d'une courbe convexe, ait été partagée*

en rectangles égaux et très petits par deux systèmes de droites parallèles à deux axes donnés. Soient h, k les dimensions de chaque rectangle, mesurées parallèlement au premier et au second axe. Soient encore H et K les projections du contour S sur le premier ou sur le second axe. Si l'on prend pour valeur approchée de l'aire A la somme des rectangles qui sont entièrement renfermés dans cette aire, sans être traversés par le contour S, l'erreur commise sera inférieure au double de la somme

$$hK + kH.$$

Considérons maintenant une aire plane A renfermée entre les périmètres de deux polygones construits de manière que les côtés du second polygone, parallèles à ceux du premier, en soient constamment séparés par la distance h. L'aire A, composée de trapèzes dont les hauteurs seront égales à h, aura évidemment pour mesure le produit de la distance h par la demi-somme des périmètres des deux polygones donnés, ou, ce qui revient au même, par le périmètre d'un troisième polygone dont chaque côté divisera la distance h en parties égales. Or, il suffira de transformer ce troisième polygone en une courbe plane dont le rayon de courbure surpasse constamment la distance $k = \frac{1}{2}h$, pour obtenir la proposition suivante :

Théorème VI. — *Supposons que le centre d'un cercle, dont le diamètre est* $2k$, *se meuve, dans un plan donné, sur une courbe fermée, dont le rayon de courbure surpasse constamment le rayon k. L'aire comprise entre les deux enveloppes intérieure et extérieure de l'espace parcouru par le cercle aura pour mesure le produit*

$$2kS,$$

S désignant le périmètre de la courbe.

Le théorème précédent fournit un moyen facile de trouver la limite de l'erreur commise, quand on substitue à l'aire d'une courbe plane l'aire d'un polygone inscrit ou circonscrit à cette courbe.

Il peut aussi fournir des relations entre des intégrales définies. Pour donner un exemple de ces relations, supposons que la courbe sur

laquelle se meut le centre du cercle se confonde avec une ellipse dont les demi-axes soient

$$a \quad \text{et} \quad b < a.$$

Si l'on nomme x, y les coordonnées courantes de cette ellipse, on aura

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Si l'on nomme au contraire x, y les coordonnées courantes de la circonférence de cercle dont le rayon est k, et dont le centre se promène sur le périmètre de l'ellipse, on aura

$$(x - x)^2 + (y - y)^2 = k^2. \tag{4}$$

Ajoutons : 1° que l'excentricité ε de l'ellipse sera liée aux demi-axes a et b par les formules

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{ou} \qquad b = a(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}};$$

2° que le rayon k surpassera constamment le rayon de courbure ρ de l'ellipse, s'il est supérieur à la valeur minimum de ρ, c'est-à-dire au rapport

$$\frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2).$$

Cela posé, cherchons d'abord, dans le plan des x, y, les enveloppes intérieure et extérieure de l'espace que traverse le cercle représenté par la formule (4). Pour obtenir les équations de ces enveloppes, il suffira de joindre aux formules (3) et (4) celle que produit l'élimination de dx et de dy entre les mêmes formules différentiées par rapport à x et à y, savoir la formule

$$a^2 \frac{x - x}{x} = b^2 \frac{y - y}{y}, \tag{5}$$

puis d'éliminer x, y entre les formules (3), (4) et (5). Si, pour abréger, on représente par θ la valeur commune des deux membres de l'équation (5), on aura

$$x = \frac{a^2 x}{\theta + a^2}, \qquad y = \frac{b^2 x}{\theta + b^2},$$

en sorte que les formules (3), (4) donneront

$$\begin{cases} \dfrac{a^2 x^2}{(\theta + a^2)^2} + \dfrac{b^2 y^2}{(\theta + b^2)^2} = 1, \\ \dfrac{\theta^2 x^2}{(\theta + a^2)^2} + \dfrac{\theta^2 y^2}{(\theta + b^2)^2} = k^2; \end{cases} \tag{6}$$

et les enveloppes dont nous avons parlé seront les deux courbes représentées par l'équation en x et y que produira l'élimination de θ entre les formules (6). Si aux coordonnées rectangulaires x, y on substitue des coordonnées polaires r, p, liées aux premières par les équations

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p,$$

on tirera des formules (6)

$$r^2 = \left[\frac{a^2}{(\theta + a^2)^2}\cos^2 p + \frac{b^2}{(\theta + a^2)^2}\sin^2 p\right]^{-1}, \tag{7}$$

θ désignant une racine de l'équation du quatrième degré

$$(\theta^2 - a^2k^2)(\theta + b^2)^2\cos^2 p + (\theta^2 - b^2k^2)(\theta + a^2)^2\sin^2 p = 0. \tag{8}$$

Il est bon d'observer qu'en vertu de cette dernière équation le second membre de la formule (7) pourrait être réduit à une fonction entière de θ, et même à une fonction entière du troisième degré.

Soient maintenant

$$\theta_1, \quad \theta_2$$

les deux racines réelles de l'équation (8), relatives aux deux enveloppes; soient encore

$$r_1^2, \quad r_2^2$$

les valeurs correspondantes de r^2 tirées de la formule (7), et A l'aire comprise entre les deux enveloppes. On aura, en supposant $r_1^2 < r_2^2$,

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(r_2^2 - r_1^2)\,dp. \tag{9}$$

D'autre part, le périmètre S de l'ellipse sera, comme l'on sait, déterminé par la formule

$$S = a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}\,d\varphi. \tag{10}$$

Donc, en vertu du théorème VI, on aura

$$\int_{-\pi}^{\pi}(r_u^2-r_r^2)\,dp=4ak\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\,d\varphi. \tag{11}$$

Ainsi se trouve établie une relation entre deux intégrales définies, dont la première a cela de remarquable que la fonction sous le signe $\int$ dépend uniquement de deux racines réelles d'une équation du quatrième degré.

La formule (11) peut être aisément vérifiée dans des cas particuliers; et d'abord, si l'on suppose $b=a$, ou, ce qui revient au même, $\varepsilon=0$, les formules (8) et (7) donneront

$$\vartheta^2=a^2k^2,\qquad \vartheta=\pm ak,\qquad r^2=(a\pm k)^2.$$

On aura donc alors

$$r_u^2-r_r^2=(a+k)^2-(a-k)^2=4ak,$$

et, par suite,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(r_u^2-r_r^2)\,dp=8ak\pi,$$

comme le donnerait la formule (11).

En second lieu, si l'on suppose k très petit, la formule (8) donnera sensiblement

$$\vartheta^2=k^2\frac{\dfrac{\cos^2p}{a^2}+\dfrac{\sin^2p}{b^2}}{\dfrac{\cos^2p}{a^4}+\dfrac{\sin^2p}{b^4}}; \tag{12}$$

et, en nommant Θ la valeur positive de ϑ fournie par l'équation (12), on aura encore, à très peu près,

$$r_u^2-r_r^2=\frac{4k^2}{\Theta}\left(\frac{\cos^2p}{a^2}+\frac{\sin^2p}{b^2}\right)^{-1}.$$

Cela posé, on tirera de la formule (11)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(\dfrac{\cos^2p}{a^4}+\dfrac{\sin^2p}{b^4}\right)^{\frac12}}{\left(\dfrac{\cos^2p}{a^2}+\dfrac{\sin^2p}{b^2}\right)^{\frac32}}dp=a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(\dfrac{\cos^2p}{a^4}+\dfrac{\sin^2p}{b^4}\right)^{\frac12}}{\left(\dfrac{\cos^2p}{a^2}+\dfrac{\sin^2p}{b^2}\right)^{\frac32}}dp=ab\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{\frac12}d\varphi.$$

Or, pour obtenir directement cette dernière formule, il suffit de prendre

$$a\cos\varphi=\cos p\left(\frac{\cos^2p}{a^2}+\frac{\sin^2p}{b^2}\right)^{-\frac12}.$$

153.

CALCUL INTÉGRAL. — *Note sur quelques théorèmes de Calcul intégral.*

C. R., T. XIII, p. 1087 (13 décembre 1841).

Je donne dans cette Note un théorème de Calcul intégral qui comprend comme cas particulier le théorème déjà connu à l'aide duquel on transforme en intégrale simple une intégrale multiple, produite par plusieurs intégrations relatives à une même variable. Je remarque, en outre, que ce dernier théorème peut être utilement appliqué à la détermination de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène. Enfin je me sers des formules ainsi obtenues pour éclaircir une difficulté qui a été soulevée dans la séance du 15 novembre, et que je vais rappeler en peu de mots.

Dans le préambule du Mémoire inséré au n° 8 du Tome XIII des *Comptes rendus* (1), j'ai considéré une fonction principale, propre à vérifier une équation caractéristique homogène de l'ordre n, entre trois coordonnées et le temps t; puis, en supposant que la valeur initiale de la dérivée de cette fonction, différentiée $n-1$ fois par rapport à t, dépendait de la distance à un centre fixe, et s'évanouissait toujours en

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 288.

dehors d'une sphère décrite du même centre avec un rayon très petit, j'ai dit que *cette dérivée se réduisait, pour les points situés dans l'intérieur de chaque onde, à une quantité infiniment petite, et, pour les points situés au dehors, à une quantité infiniment petite d'un ordre plus élevé.* J'ai cru pouvoir en conclure que la même dérivée *s'évanouit, dans l'hypothèse admise, pour tous les points qui ne sont pas infiniment rapprochés de la surface des ondes.* D'un autre côté, M. Blanchet, après avoir rappelé le passage que je viens de citer, a conclu de ses formules qu'*il y a des déplacements et des vitesses entre les différentes nappes de la surface des ondes;* et il a observé qu'il se trouvait en cela d'accord avec les résultats que M. Poisson a déduits des intégrales relatives aux ondes sphériques. Or, quoique ces diverses conclusions puissent paraître contradictoires au premier abord, cependant un examen attentif m'a conduit à reconnaître que la contradiction est seulement apparente. Ainsi, par exemple, en appliquant mes formules à des équations homogènes qui comprennent comme cas particulier celle dont M. Poisson s'est occupé, j'ai vu que, du moins pour ces équations, la dérivée de l'ordre $n-1$ de la fonction principale est effectivement nulle dans tous les points situés hors des diverses nappes, ou entre ces mêmes nappes, tandis que la fonction principale elle-même s'évanouit en dehors de la plus grande nappe, sans devenir nulle, ni entre les diverses nappes, ni en dedans de la plus petite. Ainsi, jusqu'à présent, rien n'infirme le théorème que j'avais énoncé. D'ailleurs les méthodes que j'ai données dans les précédents Mémoires, jointes à la remarque présentée au commencement de cette Note, fournissent les moyens de parvenir avec beaucoup de facilité à la valeur définitive de la fonction principale.

ANALYSE.

§ I. — *Théorèmes de Calcul intégral.*

THÉORÈME Ier. — *Soient*

$$u, \quad v$$

deux fonctions données d'une même variable s,

$$s=\tau, \qquad s=t$$

deux valeurs particulières de s, et supposons que la fonction v s'évanouisse pour $s=\tau$, avec ses dérivées d'un ordre inférieur à n. Si l'on pose

$$\text{(1)} \qquad U=\int_t^s\int_t^s\cdots\int_t^s u\,ds^n, \qquad V=D_s^n v,$$

on aura

$$\text{(2)} \qquad \int_\tau^t uv\,ds=(-1)^n\int_\tau^t UV\,ds.$$

Démonstration. — Pour établir la formule (2), il suffira évidemment d'appliquer n fois de suite l'intégration par parties à la transformation de l'intégrale

$$\int_\tau^t uv\,ds,$$

en faisant porter les différentiations sur le facteur v et sur les dérivées de ce facteur.

Corollaire I. — Si l'on suppose $\tau=0$, et si l'on indique à l'aide de la caractéristique

$$D_s^{-n}$$

n intégrations effectuées par rapport à la variable s, et à partir de $s=0$, la formule (2) pourra s'écrire comme il suit

$$\text{(3)} \qquad \int_0^t uv\,ds=\int_0^t D_s^{-n}u.D_s^n v\,ds.$$

Corollaire II. — Si, dans la formule (2), on pose

$$u=(t-s)^m,$$

m désignant une quantité positive, on trouvera

$$\text{(4)} \qquad \int_\tau^t (t-s)^m v\,ds=\int_\tau^t \frac{(t-s)^{m+n}}{(m+1)\ldots(m+n)}D_s^n v\,ds.$$

Dans cette dernière formule, comme dans l'équation (2), la fonction v est assujettie à la condition de s'évanouir avec ses dérivées d'un ordre égal ou inférieur à n, pour $s=\tau$. Or cette condition sera évidemment

remplie si l'on prend

$$v=\int_\tau^s\int_\tau^s\cdots\int_\tau^s f(s)\,ds^n,$$

et alors la formule (4) donnera

$$(5)\qquad \int_\tau^t (t-s)^m\int_\tau^s\int_\tau^s\cdots\int_\tau^s f(s)\,ds^{n+1}=\int_\tau^t\frac{(t-s)^{m+n}}{(m+1)\dots(m+n)}f(s)\,ds.$$

Si dans la formule (5) on pose $m=0$, et si en même temps on y remplace n par $n-1$, on obtiendra une équation qui pourra s'écrire comme il suit

$$(6)\qquad \int_\tau^t\int_\tau^t\cdots\int_\tau^t f(t)\,dt^{n+1}=\int_\tau^t\frac{(t-s)^n}{1.2\dots n}f(s)\,ds.$$

Or l'équation (6), dans laquelle nous pouvons remplacer n par $n-1$, renferme un théorème déjà connu [*voir* le *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal*, p. 140 (1)], et dont voici l'énoncé :

THÉORÈME II. — *L'intégrale multiple qui résulte de n intégrations effectuées par rapport à une même variable t, et à partir de l'origine* $t=\tau$, *sur une fonction donnée* $f(t)$, *peut être transformée en intégrale simple par l'équation*

$$(7)\qquad \int_\tau^t\int_\tau^t\cdots\int_\tau^t f(t)\,dt^n=\int_\tau^t\frac{(t-s)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f(s)\,ds.$$

§ II. — *Transformation de la fonction principale qui vérifie une équation linéaire aux différences partielles.*

Soit

$$F(x,y,z,\dots,t)$$

une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \dots, t$, entière, du degré n, et dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, que les variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad t,$$

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. IV.

réduites à quatre, représentent trois coordonnées rectangulaires et le temps. Enfin soit ϖ une fonction principale, assujettie à vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique

$$(1)\qquad F(D_x,D_y,D_z,D_t)\varpi=0,$$

et, pour $t=0$, les conditions

$$(2)\qquad \varpi=0,\quad D_t\varpi=0,\quad\dots,\quad D_t^{n-2}\varpi=0,\quad D_t^{n-1}\varpi=\varpi(x,y,z).$$

Les méthodes exposées dans les précédents Mémoires fourniront toujours, et dans beaucoup de cas avec une grande facilité, la valeur générale de

$$D_t^{n-1}\varpi,$$

c'est-à-dire la dérivée de l'ordre $n-1$ de la fonction principale. Or, pour revenir de cette dérivée à la fonction elle-même, il suffira évidemment d'effectuer n intégrations successives, par rapport à la seule variable t, et à partir de $t=0$. On y parviendra sans peine à l'aide de la formule (7) du § Ier. En effet, si l'on désigne par

$$f(t)$$

la valeur de $D_t^{n-1}\varpi$ considérée comme fonction de t, on aura, en vertu de cette formule,

$$(3)\qquad \varpi=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-2}}{1.2\dots(n-2)}f(s)\,ds.$$

Pour montrer une application de la formule (3), prenons

$$(4)\qquad \varpi(x,y,z)=\Pi(r)=\Pi(-r),$$

la valeur de r étant

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et supposons en outre que la fonction $F(x,y,z,t)$ se réduise à une fonction homogène de r et de t. Alors, en vertu d'une formule que j'ai donnée dans le *Compte rendu* de la séance du 19 juillet dernier

[p. 119 (1)], on aura

$$(5)\qquad D_t^{n-1}\varpi = \int \frac{\omega^{n-1}}{[F(u,v,w,\omega)]_\omega}\,\frac{(r+\omega t)\,\Pi(r+\omega t)+(r-\omega t)\,\Pi(r-\omega t)}{2r},$$

u, v, w étant assujettis à vérifier la condition

$$u^2+v^2+w^2=1.$$

Si d'ailleurs $F(x,y,z,t)$ est une fonction paire de t, les diverses valeurs de ω propres à vérifier l'équation

$$(6)\qquad F(u,v,w,\omega)=0$$

seront, deux à deux, égales aux signes près, mais affectées de signes contraires; et, par suite, la formule (5) pourra être réduite à

$$(7)\qquad D_t^{n-1}\varpi = \int \frac{\omega^{n-1}}{[F(u,v,w,\omega)]_\omega}\,\frac{(r-\omega t)\,\Pi(r-\omega t)}{r}.$$

Cela posé, concevons qu'à l'origine du mouvement la valeur de $D_t^{n-1}\varpi$, représentée par $\Pi(r)$, soit toujours nulle hors des limites très rapprochées

$$r=-\varepsilon,\qquad r=\varepsilon.$$

La valeur générale de $D_t^{n-1}\varpi$ s'évanouira évidemment, au bout du temps t, pour tous les points qui ne se trouveront pas renfermés dans l'épaisseur d'une onde comprise entre deux surfaces sphériques dont les équations seront de la forme

$$r=\omega t-\varepsilon,\qquad r=\omega t+\varepsilon;$$

elle s'évanouira donc, pour tous les points situés, par exemple, entre deux ondes de cette espèce, ou en dedans de l'onde la plus petite. Mais on ne pourra, en général, en dire autant de la valeur de ϖ, qui, en vertu des formules (4) et (7), sera

$$(8)\qquad \varpi = \int \frac{\omega^{n-1}}{[F(u,v,w,\omega)]_\omega}\int_0^t \frac{(t-s)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\,\frac{(r-\omega s)\,\Pi(r-\omega s)}{r}\,ds,$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, Série I, Tome IV, p. 253; Extrait n° 134.

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\qquad \varpi = (-1)^{n-2}\int \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{[F(u,v,w,\omega)]_\omega}\int_{r-\omega t}^{r}\frac{(r-s-\omega t)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\,s\,\Pi(s)\,ds.$$

Si de cette dernière formule on veut, en particulier, déduire la valeur de ϖ correspondante : 1° à un point situé en dehors de toutes les ondes; 2° à un point situé en dedans de la plus petite, on trouvera, dans le premier cas,

$$(10)\qquad \varpi = 0,$$

et, dans le second cas,

$$(11)\qquad \varpi = (-1)^{n-2}\int \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{[F(u,v,w,\omega)]_\omega}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{(r-s-\omega t)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\,s\,\Pi(s)\,ds.$$

Si l'équation caractéristique donnée se rapporte au mouvement d'un système isotrope, la fonction

$$F(x,y,z,t)$$

pourra être réduite à la forme

$$F(x,y,z,t)=[t^2-\Omega^2(x^2+y^2+z^2)]\,[t^2-\Omega'^2(x^2+y^2+z^2)],$$

Ω, Ω' désignant les vitesses de propagation des vibrations transversales et longitudinales. Alors l'équation (7) donnera

$$(12)\qquad \begin{cases} D_t^2\varpi = \mu\,\dfrac{(r-\Omega t)\,\Pi(r-\Omega t)+(r+\Omega t)\,\Pi(r+\Omega t)}{2r} \\ \qquad\quad +\nu\,\dfrac{(r-\Omega' t)\,\Pi(r-\Omega' t)+(r+\Omega' t)\,\Pi(r+\Omega' t)}{2r}, \end{cases}$$

les valeurs de μ, ν étant

$$(13)\qquad \mu=\frac{\Omega^2}{\Omega^2-\Omega'^2},\qquad \nu=\frac{\Omega'^2}{\Omega'^2-\Omega^2}.$$

Cela posé, supposons que la valeur initiale $\Pi(r)$ de $D_t^2\varpi$ s'évanouisse pour une valeur numérique de r supérieure à ε. Alors, en supposant

$$r>\varepsilon,$$

on verra la formule (12) se réduire à

$$D_t^2 \varpi = \mu \frac{(r-\Omega t)\,\Pi(r-\Omega t)}{2r} + \nu \frac{(r-\Omega' t)\,\Pi(r-\Omega' t)}{2r}, \tag{14}$$

et la formule (9) donnera

$$\begin{cases} \varpi = \dfrac{\mu}{4\Omega^3 r}\displaystyle\int_{r-\Omega t}^{r} (r-s-\Omega t)^2 s\,\Pi(s)\,ds \\ \quad + \dfrac{\nu}{4\Omega'^3 r}\displaystyle\int_{r-\Omega' t}^{r} (r-s-\Omega' t)^2 s\,\Pi(s)\,ds. \end{cases} \tag{15}$$

Alors aussi la propagation du mouvement donnera naissance à deux ondes comprises, au bout du temps t, la première entre les surfaces sphériques représentées par les équations

$$r = \Omega t - \varepsilon, \qquad r = \Omega t + \varepsilon,$$

la seconde entre les surfaces sphériques représentées par les équations

$$r = \Omega' t - \varepsilon, \qquad r = \Omega' t + \varepsilon.$$

Or si, pour fixer les idées, on suppose

$$\Omega' > \Omega,$$

on tirera de la formule (15) : 1° pour un point situé en dehors des deux ondes

$$\varpi = 0; \tag{16}$$

2° pour un point compris entre les deux ondes

$$\varpi = -\frac{\nu}{2\Omega'^3 r}(r-\Omega' t)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^2\,\Pi(s)\,ds; \tag{17}$$

3° pour un point situé en dedans des deux ondes

$$\varpi = -\frac{1}{2r}\left(\mu\frac{r-\Omega t}{\Omega^3} + \nu\frac{r-\Omega' t}{\Omega'^3}\right)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^2\,\Pi(s)\,ds,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (13),

$$\varpi = \frac{1}{2\Omega\Omega'(\Omega+\Omega')}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^2\,\Pi(s)\,ds. \tag{18}$$

Si l'on supposait en particulier $\Pi(s)$ réduit à une constante h, on aurait, dans les formules (17), (18),

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^2\,\Pi(s)\,ds = \tfrac{2}{3}h\varepsilon^3.$$

Il suit d'ailleurs de ces formules que, dans le mouvement d'un système isotrope de molécules, et dans le cas où l'équation caractéristique devient homogène, la fonction principale ϖ, toujours nulle en dehors des deux ondes, cesse de s'évanouir entre ces ondes et en dedans de la plus petite. Ces conclusions s'étendent au cas même où les valeurs initiales de ϖ seraient représentées, non plus par $\Pi(r)$, mais par $\varpi(x, y, z)$. Dans ce dernier cas, la valeur générale de ϖ se déduira aisément des formules que nous venons d'établir, jointes à l'une de celles que renferme le *Compte rendu* de la séance du 5 juillet dernier [*voir* la formule (14), p. 9 (1)]. C'est ce que nous expliquerons plus en détail dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

Dans un nouvel Article, nous généraliserons les résultats auxquels nous venons de parvenir, et nous donnerons d'autres applications de la formule (3).

154.

CALCUL INTÉGRAL. — *Note sur la réduction de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène.*

C. R., t. XIII, p. 1127 (20 décembre 1841).

Prenons pour variables indépendantes trois coordonnées rectangulaires x, y, z et le temps t. Soit d'ailleurs $F(x, y, z, t)$ une fonction de

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 210. Extrait n° 129.

ces variables, entière, homogène, du degré n, et dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. Enfin supposons que, $F(x, y, z, t)$ étant une fonction paire de t, l'on nomme ϖ une fonction principale assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique homogène

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\,\varpi = 0; \tag{1}$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \Pi(r), \tag{2}$$

la valeur de r étant donnée par la formule

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

et la fonction $\Pi(r)$ étant telle que l'on ait

$$\Pi(-r) = \Pi(r).$$

D'après ce qui a été dit dans le *Compte rendu* de la séance du 23 août dernier [page 408, formule (8)] (1), on aura

$$\varpi = -\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{L}\frac{\omega^{n-2}s\,\Pi(s)}{(F(u, v, w, \omega))_\omega}\sin p\,dq\,dp, \tag{3}$$

les valeurs de u, v, w, ω, s étant déterminées par les formules

$$u = \cos p, \quad v = \sin p\cos q, \quad w = \sin p\sin q, \tag{4}$$

$$F(u, v, w, \omega) = 0, \tag{5}$$

$$s = ux + vy + wz - \omega t. \tag{6}$$

Si d'ailleurs la fonction

$$\Pi(r)$$

s'évanouit hors des limites

$$r = -\varepsilon, \quad r = \varepsilon,$$

ε désignant un nombre très petit, il importera surtout de calculer la partie de ϖ correspondante à une nappe de la surface des ondes, dans

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 299. Extrait n° 142.

le cas où le point (x, y, z) sera très rapproché de cette nappe. Or une nappe déterminée de la surface des ondes correspond à une racine déterminée de l'équation (5). De plus, l'équation (6), lorsqu'on y considère ω comme une fonction déterminée de u, v, w, établit une relation entre les angles polaires p, q; et par suite représente un cône qui coupe suivant une certaine courbe la sphère décrite de l'origine comme centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur. Nommons K l'aire mesurée sur la surface sphérique dans l'intérieur de cette courbe, en supposant que le point (x, y, z) soit très rapproché de la surface des ondes, ou plutôt d'une nappe de cette surface, et qu'un plan tangent mené à la surface dans le voisinage du point (x, y, z) ne la traverse pas. Il est aisé de s'assurer que, pour des valeurs finies de r, la partie de ϖ correspondante à la nappe que l'on considère se réduira sensiblement à la partie qui répond à cette nappe dans l'expression

$$-\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\rho}\mathcal{L}\frac{\omega^{n-2}}{(F(u, v, w, \omega))_\omega}s\,\Pi(s)\,D_s K\,ds, \tag{7}$$

les valeurs de u, v, w étant déterminées en fonction des coordonnées x, y, z, ou, ce qui revient au même, en fonction des rapports

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r},$$

par la formule (5) jointe aux suivantes

$$\begin{cases} ux + vy + wz = \omega t > 0, \\ \dfrac{x}{D_u\omega} = \dfrac{y}{D_v\omega} = \dfrac{z}{D_w\omega} = t, \end{cases} \tag{8}$$

et ρ désignant la plus grande valeur que s puisse acquérir.

Exemple. — Supposons que la surface caractéristique, c'est-à-dire la surface généralement représentée par la formule

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

se réduise à la sphère dont l'équation est

$$t^2 = \Omega^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

Ω désignant une quantité positive. Alors la valeur de ω, qui doit rester positive, en vertu de la première des formules (8), sera simplement

$$\omega = \Omega;$$

et si, dans l'équation (6) réduite à

$$ux + vy + wz = s + \Omega t,$$

on considère u, v, w comme représentant des coordonnées variables et rectangulaires, cette équation sera celle d'un plan dont la distance à l'origine se trouvera exprimée par le rapport

$$\frac{\Omega t + s}{r}.$$

L'aire K du segment intercepté par ce plan sur la surface de la sphère dont l'équation est

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

aura évidemment la valeur que détermine la formule

$$K = 2\pi\left(1 - \frac{\Omega t + s}{r}\right).$$

On aura donc, dans le cas présent,

$$D_t K = -\frac{2\pi}{r}.$$

De plus, r étant la valeur maximum de $ux + vy + wz$, la plus grande valeur que puisse acquérir la quantité

$$s = ux + vy + wz - \Omega t$$

sera $r - \Omega t$. On aura donc

$$\rho = r - \Omega t,$$

et la partie de l'expression (7) correspondante à $\omega = \Omega$ sera

$$-\frac{1}{2\Omega r}\int_{-\varepsilon}^{r-\Omega t} s\,\Pi(s)\,ds.$$

Or, dans l'exemple que l'on considère, l'expression précédente repré-

sentera précisément la valeur générale de ϖ, en sorte qu'on aura, pour des valeurs finies de r,

$$\varpi = -\frac{1}{2\Omega r}\int_{-\varepsilon}^{r-\Omega t} s\,\Pi(s)\,ds,$$

$$D_t\varpi = \frac{(r - \Omega t)\,\Pi(r - \Omega t)}{2r}.$$

Ces conclusions s'accordent avec celles que nous avons obtenues dans la précédente Note.

Dans un autre Article, nous montrerons comment on peut généralement calculer l'aire ci-dessus représentée par la lettre K.

155.

CALCUL INTÉGRAL. — *Addition à la Note insérée dans le* Compte rendu *de la précédente séance.*

C. R., t. XIII, p. 1130 (20 décembre 1841).

Lorsque, pour un système isotrope de molécules, les équations du mouvement deviennent homogènes, les déplacements

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

d'une molécule, mesurés parallèlement aux axes, se déduisent de la fonction principale ϖ à l'aide des formules que j'ai données dans la 7ᵉ et la 8ᵉ livraison des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. Or, de ces formules combinées avec les équations (16), (17), (18) de la page 1094 (¹), il résulte que, dans le mouvement dont il s'agit, les déplacements, et par suite les vitesses des molécules s'évanouissent, en dedans et en dehors des deux ondes propagées, et même entre ces deux ondes. Quant à la fonction principale, dont la dérivée du troisième

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 382, 383. Extrait n° 153

ordre est constamment nulle, pour les points non situés dans l'épaisseur de l'une des ondes, si elle cesse de s'évanouir au bout du temps t, pour un point situé entre les deux ondes, ou en dedans de la plus petite, cela tient évidemment à ce qu'un tel point a dû certainement, avant la fin du temps t, se trouver renfermé dans l'épaisseur de l'onde la plus grande, ou même successivement dans l'épaisseur de l'onde la plus grande, et dans l'épaisseur de la plus petite. Observons encore que, dans la formule (15) de la page 1093 (1), on peut remplacer la seconde limite r de chacune des intégrales que renferme le second membre par la limite ε.

Observons enfin que, si l'on combine la formule (5) de la page 1091 (2) avec la formule (14) de la page 9 (3), on retrouvera l'équation (15) de la page 123 (4), les valeurs λ, μ, ν étant données par les formules (12) de la page 122 (5), dans lesquelles on devra poser

$$p = \omega t.$$

Si le premier membre $F(x, y, z, t)$ de l'équation caractéristique était fonction, non plus de t et du rayon vecteur r, mais de t et de $\varkappa$, le carré de $\varkappa$ étant une fonction homogène du second degré en x, y, z, la valeur générale de $D_t^{n-2}\varpi$ se trouverait encore exprimée par une intégrale double, en vertu d'une formule qu'il est facile d'obtenir. Cette dernière formule, analogue à l'équation (15) de la page 123, comprendrait comme cas particulier la formule (20) de la page 206 du Tome I[er] des *Exercices* (6).

Nous remarquerons en finissant que, dans la formule (14) de la page 119 (7), on doit remplacer évidemment le produit ωt par le rapport $\frac{\omega t}{Q}$, la valeur de Q étant celle que donne l'équation (3) de la

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 382. Extrait n° 133.
(2) *Id.* Id. p. 380. » n° 133.
(3) *Id.* Id. p. 210. » n° 129.
(4) *Id.* Id. p. 258. » n° 134.
(5) *Id.* Id. p. 257. » n° 134.
(6) *Id.* S. II, t. XI. *Nouveaux Exercices.*
(7) *Id.* S. I, T. VI, p. 254. Extrait n° 134.

page 98 (1). C'est ce que l'on reconnaîtra sans peine en effectuant le calcul indiqué à la page 118 (2).

156.

CALCUL INTÉGRAL. — *Note sur diverses transformations de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène.*

C. R., t. XIV, p. 2 (3 janvier 1842).

Les mêmes choses étant posées que dans le *Compte rendu* de la séance du 20 décembre dernier, considérons de nouveau la fonction principale ϖ déterminée par la formule

$$(1) \qquad \varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\,\frac{\omega^{n-2}s\,\Pi(s)}{[F(u, v, w, \omega)]_\omega}\sin p\,dq\,dp,$$

les valeurs de u, v, w, s étant

$$(2) \qquad u = \cos p, \qquad v = \sin p\cos q, \qquad w = \sin p\sin q,$$

$$(3) \qquad s = ux + vy + wz - \omega t.$$

L'équation (1) pourra s'écrire comme il suit

$$(4) \qquad \varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\,\frac{(s-\varsigma)^{n-2}s\,\Pi(s)}{[F(ut, vt, wt, s-\varsigma)]_s}\,t\sin p\,dq\,dp,$$

la valeur de ς étant

$$(5) \qquad \varsigma = ux + vy + wz,$$

et l'on pourra d'ailleurs considérer u, v, w comme représentant les coordonnées rectangulaires d'un point situé à l'unité de distance de

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 233. Extrait n° 133.
(2) *Id.* Id. p. 253. » n° 134.

l'origine des coordonnées. Concevons maintenant que, cette origine restant la même, on transforme les coordonnées rectangulaires

$$u, \quad v, \quad w$$

en d'autres coordonnées rectangulaires

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}.$$

Les équations de transformation seront de la forme

$$(6) \qquad \begin{cases} u = \alpha\,\mathrm{u} + \alpha'\mathrm{v} + \alpha''\mathrm{w}, \\ v = \beta\,\mathrm{u} + \beta'\mathrm{v} + \beta''\mathrm{w}, \\ w = \gamma\,\mathrm{u} + \gamma'\mathrm{v} + \gamma''\mathrm{w}, \end{cases}$$

les coefficients

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \qquad \alpha', \quad \beta', \quad \gamma', \qquad \alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma''$$

étant propres à vérifier les formules

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, & \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, & \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, & \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0; \end{cases}$$

et aussi les suivantes :

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0. \end{cases}$$

De plus, en posant, pour abréger,

$$(9) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = \mathfrak{X}, \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \mathfrak{Y}, \qquad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = \mathfrak{Z},$$

on tirera de la formule (5)

$$(10) \qquad \varsigma = \mathfrak{X}\,\mathrm{u} + \mathfrak{Y}\,\mathrm{v} + \mathfrak{Z}\,\mathrm{w}.$$

Enfin, en posant

$$(11) \qquad \mathrm{u} = \cos p, \qquad \mathrm{v} = \sin p \cos q, \qquad \mathrm{w} = \sin p \sin q,$$

on pourra, dans la formule (1) ou (4), remplacer le produit

$$\sin p\, dq\, dp \qquad \text{par} \qquad \sin p\, dq\, dp,$$

et l'on aura, par suite,

$$(12) \qquad \varpi = -\frac{\mathrm{D}_t^{n-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathfrak{L} \frac{(s-\varsigma)^{n-2} s\,\Pi(s)}{(\mathrm{F}(ut, vt, wt, s-\varsigma))_s}\, t \sin p\, dq\, dp,$$

les valeurs de u, v, w, ς étant déterminées en fonction des angles polaires p, q par les équations (6) et (10) jointes aux formules (11).

Si, pour plus de simplicité, on prend

$$(13) \qquad \frac{1}{\delta} = \frac{(s-\varsigma)^{n-2}}{\mathrm{F}(ut, vt, wt, s-\varsigma)},$$

la formule (12) deviendra

$$(14) \qquad \varpi = -\frac{\mathrm{D}_t^{n-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathfrak{L} \frac{s\,\Pi(s)}{(\delta)_s}\, t \sin p\, dq\, dp.$$

Ajoutons que, si l'on nomme

$$u_1, \quad v_1, \quad w_1, \quad \varsigma_1$$

ce que deviennent

$$u, \quad v, \quad w, \quad \varsigma$$

quand on y remplace v par $-\mathrm{v}$ et w par $-\mathrm{w}$, on pourra, dans la formule (14), supposer s déterminée, ou par l'équation (13), ou par la suivante :

$$(15) \qquad \frac{1}{\delta} = \frac{1}{2}\left[\frac{(s-\varsigma)^{n-2}}{\mathrm{F}(ut, vt, wt, s-\varsigma)} + \frac{(s-\varsigma_1)^{n-2}}{\mathrm{F}(u_1 t, v_1 t, w_1 t, s-\varsigma_1)}\right].$$

Revenons maintenant à la formule (12). On peut l'écrire comme il suit

$$(16) \qquad \varpi = -\sum \frac{\mathrm{D}_t^{n-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(s-\varsigma)^{n-2} s\,\Pi(s)}{\mathrm{D}_s \mathrm{F}(ut, vt, wt, s-\varsigma)}\, t \sin p\, dq\, dp,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines de l'équation

$$(17) \qquad \mathrm{F}(ut, vt, wt, s-\varsigma) = 0$$

résolue par rapport à s. Cela posé, concevons que l'on désigne par

$$\alpha, \quad \theta, \quad \gamma, \quad \vartheta, \quad \rho$$

les valeurs de

$$u, \quad v, \quad w, \quad \omega, \quad s$$

fournies par le système des formules

$$\mathrm{F}(u, v, w, \omega) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{x - t\mathrm{D}_u\omega}{u} = \frac{y - t\mathrm{D}_v\omega}{v} = \frac{z - t\mathrm{D}_w\omega}{w} = \varsigma - \omega t, \tag{19}$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, \tag{20}$$

jointes à la condition $ux + vy + wz > 0$. α, β, γ, θ, ρ seront des fonctions déterminées de x, y, z, t. De plus, après avoir remplacé la variable p par la variable s, on pourra dans le second membre de la formule (16) développer, sous le signe f, le coefficient de $s\Pi(s)$ en une série de termes qui aient pour facteurs les puissances ascendantes de $s - \rho$, et alors on obtiendra pour développement de ϖ une série qui ne renfermera plus que des intégrales relatives à s, attendu que les intégrations relatives à la variable q pourront s'effectuer à l'aide de formules tirées du calcul des résidus. C'est ce que j'expliquerai plus en détail dans un nouvel article.

P. S. — Si, dans l'équation (1), on pose pour abréger

$$s\Pi(s) = \mathrm{f}(s), \tag{21}$$

elle donnera

$$\mathrm{D}_t^{n-2}\varpi = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}\mathrm{f}(s)}{(\mathrm{F}(u, v, w, \omega))_\omega}\sin p\, dq\, dp. \tag{22}$$

Si d'ailleurs,

$$f(x, y, z, t)$$

désignant une fonction de x, y, z, t, entière, homogène et du degré m, on nomme

$$\square \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}$$

ce que devient cette fonction quand on y remplace les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad t$$

par

$$\mathrm{D}_x, \quad \mathrm{D}_y, \quad \mathrm{D}_z, \quad \mathrm{D}_t$$

ou par

$$u, \quad v, \quad w, \quad -\omega,$$

on tirera de la formule (22)

$$\mathrm{D}_t^{n-2}\square\varpi = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}\mathrm{f}^{(m)}(s)}{(\mathrm{F}(u, v, w, \omega))_\omega}\mathfrak{K}\sin p\, dq\, dp; \tag{23}$$

puis, en supposant que $\square\varpi$ ne renferme point de dérivées de ϖ relatives à t, et d'un ordre supérieur à $n - 2$, on conclura de l'équation (23)

$$\square\varpi = -\frac{\mathrm{D}_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}\mathrm{f}^{(m)}(s)}{(\mathrm{F}(u, v, w, \omega))_\omega}\mathfrak{K}\sin p\, dq\, dp. \tag{24}$$

On pourra d'ailleurs faire subir au second membre de l'équation (23) ou (24) des transformations analogues à celles que nous avons ci-dessus effectuées sur le second membre de l'équation (1). Les formules (23), (24), et celles qui s'en déduisent, fournissent le moyen d'obtenir avec une grande facilité les valeurs des inconnues qui vérifient un système d'équations linéaires aux différences partielles, lorsque l'équation caractéristique correspondante à ce système est une équation homogène dans laquelle les dérivées relatives à t sont d'ordre pair.

Si l'on prend en particulier $\square = \mathrm{D}_t$, la formule (23) donnera

$$\mathrm{D}_t^{n-1}\varpi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathfrak{L}\frac{\omega^{n-1}\mathrm{f}'(s)}{(\mathrm{F}(u, v, w, \omega))_\omega}\sin p\, dq\, dp. \tag{25}$$

Appliquons cette dernière formule à un exemple très simple et supposons

$$\mathrm{F}(x, y, z, t) = t^2 - \Omega^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right),$$

a, b, c, Ω désignant des quantités positives. L'équation (25) pourra être réduite à

$$\mathrm{D}_t\varpi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f}'(s)\sin p\, dq\, dp, \tag{26}$$

les valeurs de s et de ω étant déterminées par l'équation (3) jointe à la

formule

$$\omega = \Omega\left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

D'ailleurs les formules (18), (19), (20), jointes à la condition $\omega > 0$, donneront

$$\begin{cases} \vartheta = \Omega\left(\dfrac{\alpha^2}{a} + \dfrac{\beta^2}{b} + \dfrac{\gamma^2}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \dfrac{x}{\alpha} - \dfrac{\Omega^2 t}{a\vartheta} = \dfrac{y}{\beta} - \dfrac{\Omega^2 t}{b\vartheta} = \dfrac{z}{\gamma} - \dfrac{\Omega^2 t}{c\vartheta} = \rho = \mathfrak{X} - \vartheta t, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \end{cases} \tag{28}$$

et, en supposant u, v, w déterminés en fonction des angles polaires p, q par le système des formules (6) et (11), on tirera de l'équation (26)

$$D_t \varpi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f'(s)\sin p\, dq\, dp. \tag{29}$$

Si, dans cette dernière équation, on remplace la variable p par la variable s et si l'on développe ensuite le coefficient de $f'(s)$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $s - \rho$, alors, en supposant la valeur de $\Pi(s)$ toujours nulle hors des limites très resserrées

$$-\varepsilon, \quad \varepsilon,$$

on trouvera, au bout d'un temps fini t, et pour un point situé dans l'épaisseur de l'onde propagée,

$$\begin{cases} D_t \varpi = A_1 \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\rho} f'(s)\, ds + A_2 \int_{-\varepsilon}^{\rho} (s-\rho) f'(s)\, ds \\ \qquad\qquad + A_3 \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\rho} (s-\rho)^2 f'(s)\, ds + \dots, \end{cases} \tag{30}$$

ou, ce qui revient au même,

$$D_t \varpi = A_1 f(\rho) - A_2 \int_{-\varepsilon}^{\rho} f(s)\, ds - 2A_3 \int_{-\varepsilon}^{\rho} (s-\rho) f(s)\, ds - \dots, \tag{31}$$

la valeur de A_n étant donnée par la formule

$$A_n = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{E}\frac{\sin p}{(\mathfrak{V}^n)_p}\, dq, \tag{32}$$

dans laquelle on suppose

$$\mathfrak{V} = (u-1)\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z} - (\omega - \vartheta)t, \tag{33}$$

et le signe $\mathcal{E}$ relatif à la seule valeur zéro de la variable p. Sous cette condition et en vertu des formules que fournit le calcul des résidus, A_n se réduira toujours à une fonction déterminée de x, y, z, t. On trouvera, par exemple,

$$A_1 = \frac{1}{2}\left\{\rho^2 - \frac{\Omega^2 t}{\vartheta}\rho\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{\Omega^2}{\vartheta^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\right] + \frac{\Omega^6 t^2}{abc\vartheta^4}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

157.

CALCUL INTÉGRAL. — *Addition aux Notes insérées dans les* Comptes rendus *des séances précédentes.*

C. R., t. XIV, p. 8 (3 janvier 1842).

Dans la Note que renferme le *Compte rendu* de la séance du 13 décembre dernier, j'ai indiqué les moyens d'obtenir, sous une forme très simple, la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène; et, après avoir considéré en particulier le cas où l'équation donnée est celle qui représente les mouvements infiniment petits d'un système isotrope, j'ai ajouté, dans la séance du 20 décembre, que, pour déduire de la fonction principale les déplacements d'une molécule mesurés parallèlement aux axes, il suffisait de recourir aux formules établies dans les 7ᵉ et 8ᵉ livraisons des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. Quoique cette déduction ne présente aucune difficulté, elle n'est pas sans intérêt, puisqu'elle permet de suivre avec

plus de précision les phénomènes représentés par l'analyse. C'est ce qui me porte à exposer ici les détails des calculs que j'avais seulement indiqués.

Considérons un système isotrope de molécules et supposons que les déplacements d'une molécule, étant mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires, soient représentés, au bout du temps t, par ξ, η, ζ pour la molécule dont les coordonnées primitives étaient x, y, z. Les équations des mouvements infiniment petits du système (voir les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. Ier, p. 208) seront de la forme

$$(1)\qquad (D_t^2-E)\xi = FD_x\upsilon, \qquad (D_t^2-E)\eta = FD_y\upsilon, \qquad (D_t^2-E)\zeta = FD_z\upsilon,$$

E, F étant deux fonctions de

$$D_x^2+D_y^2+D_z^2,$$

entières, mais généralement composées d'un nombre infini de termes, et la valeur de υ étant

$$(2)\qquad \upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta.$$

Posons, pour abréger,

$$\nabla' = D_t^2 - E, \qquad \nabla'' = D_t^2 - E - (D_x^2+D_y^2+D_z^2)F, \qquad \nabla = \nabla'\nabla''.$$

Soit d'ailleurs ϖ la fonction principale assujettie :

1° A vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique

$$(3)\qquad \nabla\varpi = 0;$$

2° A vérifier pour $t = 0$ les conditions

$$\varpi = 0, \qquad D_t\varpi = 0, \qquad D_t^2\varpi = 0, \qquad D_t^3\varpi = \varpi(x,y,z).$$

Enfin désignons par

$$(4)\qquad \varphi(x,y,z), \quad \chi(x,y,z), \quad \psi(x,y,z), \quad \Phi(x,y,z), \quad X(x,y,z), \quad \Psi(x,y,z)$$

les valeurs initiales de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad D_t\xi, \quad D_t\eta, \quad D_t\zeta,$$

et par

$$\upsilon, \quad \chi, \quad \psi, \quad \Phi, \quad X, \quad \Psi$$

ce que devient la fonction principale ϖ quand on y remplace successivement la fonction arbitraire

$$\varpi(x,y,z)$$

par chacune des fonctions (4). Les valeurs générales de ξ, η, ζ seront

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = \nabla''(\Phi + D_t\varphi) + FD_x\varkappa, \\ \eta = \nabla''(X + D_t\chi) + FD_y\varkappa, \\ \zeta = \nabla''(\Psi + D_t\psi) + FD_z\varkappa, \end{cases}$$

la valeur de $\varkappa$ étant

$$(6)\qquad \varkappa = D_x(\Phi + D_t\varphi) + D_y(X + D_t\chi) + D_z(\Psi + D_t\psi).$$

Dans le cas particulier où les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, on a

$$E = \Omega^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2), \qquad F = \Omega'^2 - \Omega^2,$$

Ω, Ω' désignant les vitesses de propagation des vibrations transversales et longitudinales; puis on en conclut

$$\nabla' = D_t^2 - \Omega^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2), \qquad \nabla'' = D_t^2 - \Omega'^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2);$$

et par suite

$$\nabla = [D_t^2 - \Omega^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)][D_t^2 - \Omega'^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)].$$

Donc alors la fonction caractéristique se réduit au produit

$$[t^2 - \Omega^2(x^2+y^2+z^2)][t^2 - \Omega'^2(x^2+y^2+z^2)],$$

comme on le savait déjà. [*Voir* le *Compte rendu* de la séance du 13 décembre, p. 1093 (1).] Ajoutons que, dans ce cas particulier et en posant, pour abréger,

$$(7)\qquad \mu = \frac{\Omega}{\Omega^2 - \Omega'^2}, \qquad \nu = \frac{\Omega'^2}{\Omega'^2 - \Omega^2},$$

$$(8)\qquad \varpi_1 = \nabla''\varpi, \qquad \varpi_2 = \nabla'\varpi,$$

on aura, en vertu de la formule (6) de la page 210 des *Exercices d'Ana-*

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 381. Extrait n° 153.

lyse et de Physique mathématique, t. Ier,

$$(9)\qquad D_t^2\varpi = \mu\varpi_1 + \nu\varpi_2.$$

Observons enfin que, dans ce même cas, les formules (5) donneront

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi = [D_t^2 - \Omega'^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)](\Phi + D_t\varphi) + (\Omega'^2-\Omega^2)D_x\varkappa, \\ \eta = [D_t^2 - \Omega'^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)](X + D_t\chi) + (\Omega'^2-\Omega^2)D_y\varkappa, \\ \zeta = [D_t^2 - \Omega'^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)](\Psi + D_t\psi) + (\Omega'^2-\Omega^2)D_z\varkappa, \end{cases}$$

la valeur de $\varkappa$ étant déterminée par l'équation (6).

Supposons maintenant, pour plus de simplicité, que $\varpi(x, y, z)$ se réduise à une fonction de rayon vecteur

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}};$$

posons en conséquence

$$\varpi(x, y, z) = \Pi(r)$$

et, de plus,

$$\Pi(-r) = \Pi(r).$$

Alors on aura

$$(11)\qquad \begin{cases} D_t\varpi_1 = \dfrac{(r-\Omega t)\,\Pi(r-\Omega t) + (r+\Omega t)\,\Pi(r+\Omega t)}{2r}, \\ D_t\varpi_2 = \dfrac{(r-\Omega' t)\,\Pi(r-\Omega' t) + (r+\Omega' t)\,\Pi(r+\Omega' t)}{2r}, \end{cases}$$

et, en vertu de la formule (9),

$$(12)\qquad D_t^2\varpi = \mu D_t\varpi_1 + \nu D_t\varpi_2.$$

Cette dernière équation coïncide avec l'équation (12) de la page 1093 du Tome XIII des *Comptes rendus* (1). Si d'ailleurs $\Pi(r)$ s'évanouit pour une valeur numérique de r supérieure à ε, alors, en supposant

$$(13)\qquad r > \varepsilon,$$

on tirera de la formule (12)

$$(14)\qquad D_t^2\varpi = \mu\frac{(r-\Omega t)\,\Pi(r-\Omega t)}{2r} + \nu\frac{(r-\Omega' t)\,\Pi(r-\Omega' t)}{2r}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 381.

et, par suite,

$$(15)\qquad \varpi = \frac{\mu}{4\Omega^2 r}\int_{r-\Omega t}^{r}(r-s-\Omega t)^2 s\,\Pi(s)\,ds + \frac{\nu}{4\Omega'^2 r}\int_{r-\Omega' t}^{r}(r-s-\Omega' t)^2 s\,\Pi(s)\,ds,$$

ou, ce qui revient au même, r étant supposé $> \varepsilon$,

$$(16)\qquad \varpi = \frac{\mu}{4\Omega^2 r}\int_{r-\Omega t}^{\varepsilon}(r-s-\Omega t)^2 s\,\Pi(s)\,ds + \frac{\nu}{4\Omega'^2 r}\int_{r-\Omega' t}^{\varepsilon}(r-s-\Omega' t)^2 s\,\Pi(s)\,ds.$$

Alors aussi la propagation du mouvement donnera naissance à deux ondes comprises, au bout du temps t, la première entre les limites

$$(17)\qquad r = \Omega t - \varepsilon, \qquad r = \Omega t + \varepsilon,$$

la seconde entre les limites

$$(18)\qquad r = \Omega' t - \varepsilon, \qquad r = \Omega' t + \varepsilon.$$

Enfin, si, pour fixer les idées, on suppose

$$(19)\qquad \Omega' > \Omega,$$

c'est-à-dire, si la vitesse de propagation des vibrations longitudinales surpasse la vitesse de propagation des vibrations transversales, comme il arrive dans la théorie de la lumière (*voir* la 9e livraison des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, p. 312), les deux ondes seront séparées l'une de l'autre dès que l'on aura

$$(20)\qquad t > \frac{2\varepsilon}{\Omega' - \Omega};$$

et alors on tirera de la formule (16) : 1° pour un point situé en dehors des deux ondes propagées,

$$(21)\qquad \varpi = 0;$$

2° pour un point situé dans l'épaisseur de l'onde la plus rapide,

$$(22)\qquad \varpi = \frac{\nu}{4\Omega'^2 r}\int_{r-\Omega' t}^{\varepsilon}(r-s-\Omega' t)^2 s\,\Pi(s)\,ds;$$

3° pour un point situé entre les deux ondes,

$$\varpi = -\frac{\nu}{2\Omega^2}\frac{r-\Omega' t}{r}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^2\,\Pi(s)\,ds; \tag{23}$$

4° pour un point situé dans l'épaisseur de l'onde la plus lente,

$$\varpi = \frac{\mu}{4\Omega^2 r}\int_{r-\Omega t}^{\varepsilon}(r-s-\Omega t)^2 s\,\Pi(s)\,ds - \frac{\nu}{2\Omega^2}\frac{r-\Omega' t}{r}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^2\,\Pi(s)\,ds; \tag{24}$$

5° pour un point situé en dedans de l'onde la plus lente,

$$\varpi = \frac{1}{2\Omega\Omega'(\Omega+\Omega')}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s^2\,\Pi(s)\,ds. \tag{25}$$

Comme je l'ai déjà dit (*voir* la séance du 13 décembre dernier), il suit des formules (21), (23), (25) que, dans le mouvement d'un système isotrope de molécules, et dans le cas où l'équation caractéristique devient homogène, la fonction principale ϖ, toujours nulle en dehors des deux ondes proposées, cesse de s'évanouir entre ces ondes et en dedans de la plus petite. Mais, en vertu des mêmes formules, la valeur de $D_t^3\varpi$, et même celle de $D_t^2\varpi$ s'évanouiront pour tout point placé dans l'une des trois positions que nous venons d'indiquer. De plus, eu égard aux formules (10), dans lesquelles on a

$$u = D_t^{-2}\upsilon = \int_0^t\int_0^t \upsilon\,dt^2, \tag{26}$$

les déplacements et, par suite, les vitesses des molécules s'évanouiront pour tous les points situés en dehors ou en dedans des deux ondes propagées. M. Blanchet a remarqué avec justesse qu'on ne pouvait, en général, en dire autant des points situés entre les deux ondes. Toutefois il est bon d'observer que, même en ces derniers points, les déplacements et les vitesses se réduisent à zéro quand on suppose nulle la dilatation du volume représentée par la lettre υ, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand les vibrations longitudinales disparaissent; et comme, dans la théorie de la lumière propagée à travers un milieu isotrope, on fait abstraction des vibrations longitudinales, en se bornant à tenir compte de celles qui ont lieu sans changement de densité, on pourra conclure des formules précédentes, appliquées à cette théorie, que les vibrations lumineuses subsistent seulement dans l'épaisseur de l'onde la plus lente.

Les diverses conclusions auxquelles nous venons de parvenir s'étendent au cas même où la valeur initiale de ϖ serait représentée, non plus par $\Pi(r)$, mais par $\varpi(x, y, z)$. C'est ce que l'on reconnaît sans peine en joignant aux formules précédentes celles que renferme le *Compte rendu* de la séance du 5 juillet 1841 [1].

158.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur deux Mémoires de* M. Blanchet, *relatifs à la propagation du mouvement dans les milieux élastiques cristallisés, et en particulier à la délimitation des ondes.*

C. R., t. XIV, p. 389 (14 mars 1842).

L'Académie nous a chargés, MM. Sturm, Liouville, Duhamel et moi, de lui rendre compte de deux Mémoires de M. Blanchet, relatifs à la propagation du mouvement dans les milieux élastiques cristallisés, et en particulier à la délimitation des ondes dans les mouvements vibratoires. Les équations aux dérivées partielles, que l'auteur a considérées dans ces deux Mémoires, sont semblables pour la forme à celles que fournissent les principes établis par l'un de nous dans le Tome III des *Exercices de Mathématiques*, p. 188 [2], c'est-à-dire à celles qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules agissant les unes sur les autres à de très petites distances, et très peu écartées de leurs positions d'équilibre, dans le cas où l'on rend ces

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 202 et suiv.
(2) *Id.* S. II, T. VIII.

mêmes équations homogènes, en conservant seulement les dérivées du second ordre des trois inconnues différentiées par rapport aux variables indépendantes. C'est en appliquant à la discussion des intégrales générales de ces équations un des premiers théorèmes du calcul des résidus que l'auteur est parvenu à résoudre la question importante qu'il s'était proposée. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

L'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants se ramène facilement à l'intégration d'une seule équation linéaire qu'on peut nommer l'équation *caractéristique*. Supposons que ces équations se rapportent à un problème de Physique ou de Mécanique, et que l'espace auquel elles s'étendent reste indéfini. Alors, pour rendre plus facile l'étude des phénomènes qu'elles représentent, il convient d'obtenir les intégrales de ces mêmes équations, et par suite aussi l'intégrale de l'équation caractéristique, sous une forme telle que les fonctions arbitraires expriment les valeurs initiales des inconnues et de leurs dérivées prises par rapport au temps. La solution de ce dernier problème, soit pour les équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules, isotrope ou non isotrope, soit même pour une équation caractéristique quelconque, a été mentionnée ou développée dans divers Mémoires dont, pour abréger, nous nous dispenserons de donner ici l'analyse. Le cas où l'équation caractéristique devient homogène est l'objet spécial d'un Mémoire que renferme le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac, pour le mois d'avril 1830. On y démontre que les valeurs des inconnues généralement représentées par des intégrales définies sextuples peuvent être réduites, dans le cas énoncé, à des intégrales quadruples; puis, l'auteur conclut de son analyse que les phénomènes sonores, lumineux, etc., représentés par des équations caractéristiques homogènes, donnent naissance à des ondes qui ne laissent pas de traces de leur passage, et dont les surfaces se trouvent représentées par des équations qu'il apprend à former.

Au reste, le Mémoire que nous venons de rappeler déterminait seulement la limite intérieure des ondes représentées par des équations

caractéristiques homogènes. Il restait à déterminer leur limite extérieure. A la vérité, cette limite pouvait se conclure des formules déjà connues, lorsqu'il s'agissait d'un système isotrope; elle pouvait même se conclure, à l'égard des ondes lumineuses propagées dans les cristaux à deux axes, des formules obtenues par l'auteur des *Exercices* dans les Mémoires du 12 janvier et du 7 mars 1830 (1). Mais il importait de faire ressortir dans tous les cas cette délimitation des formules générales propres à représenter les vibrations d'un milieu élastique. Déjà, dans un précédent Mémoire, approuvé par l'Académie, sur le rapport de MM. Poisson et Sturm, M. Blanchet était parvenu à simplifier les formules dont il s'agit, et avait appliqué les intégrales quadruples présentées sous une forme nouvelle à la recherche des lois de la propagation des ondes curvilignes, après avoir substitué à l'une des variables, dans ces intégrales, l'inconnue de l'équation du troisième degré qui détermine la vitesse de propagation des ondes. En combinant les formules contenues dans le Mémoire que nous venons de rappeler avec les principes du calcul des résidus, et en transformant une somme d'intégrales en une autre somme de même espèce, par une analyse qui a quelque rapport avec celle dont l'un de nous fait usage dans un Mémoire que renferme le *Compte rendu* de la séance du 14 juin dernier, M. Blanchet est parvenu à démontrer que, dans un système moléculaire, dont les mouvements infiniment petits sont représentés par des équations homogènes, la limite extérieure de la portion vibrante est déterminée par la plus grande nappe de la surface des ondes, de même que la limite intérieure est déterminée par la plus petite.

Toutefois, pour arriver à ces conclusions, dans le premier des deux Mémoires dont nous rendons compte à l'Académie, M. Blanchet avait supposé que les diverses nappes de la surface des ondes ne se rencontrent pas. Dans le second Mémoire, l'auteur a examiné le cas où ces nappes se rencontrent; et, en ayant recours à la considération d'intégrales du genre de celles que l'un de nous a nommées *intégrales sin-*

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. IX.

gulières, il est parvenu à fixer encore, dans ce dernier cas, la limite extérieure des ondes propagées.

En terminant le second Mémoire, M. Blanchet indique la possibilité d'appliquer les principes qu'il vient d'exposer aux intégrales données par l'un de nous pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque.

A notre avis, le résultat obtenu par M. Blanchet est l'un des beaux théorèmes que présente l'Analyse appliquée aux questions de Physique mathématique. Nous croyons, en conséquence, que les deux Mémoires de M. Blanchet sont très dignes d'être approuvés par l'Académie, et insérés dans le Recueil des *Savants étrangers*.

159.

Notes ajoutées au Rapport qui précède.

C. R., t. XIV, p. 392 (14 mars 1842).

NOTE PREMIÈRE.

Sur l'intégration des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants.

L'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation linéaire que nous désignerons sous le nom d'*équation caractéristique*. On trouve cette remarque spécialement appliquée aux équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules, dans un Mémoire sur la théorie de la lumière, présenté à l'Académie des Sciences, par l'auteur des *Exercices de Mathématiques*, le 31 mai 1830, et publié par extrait, vers cette époque, dans le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac, puis dans les *Mémoires de l'Institut*. D'ailleurs ce problème, dans lequel on se propose d'intégrer une seule équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants, a été résolu; et les intégrales particulières et générales de semblables équations, exprimées, soit à l'aide de sinus ou de cosinus, soit même par des sommes d'exponentielles réelles ou imaginaires, ont été données depuis longtemps par divers géomètres. On doit surtout remarquer le beau Mémoire d'Euler, lu à l'Académie de Saint-Pétersbourg, le 28 octobre 1779 (1), Mémoire qui a pour titre : *Integratio æquationum differentialium linearium cujuscumque gradus et quotcumque variabiles involventium*, et dans lequel Euler représente par une somme d'exponentielles l'intégrale générale d'une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants d'un ordre quelconque. Ajoutons que les sommes d'exponentielles, quand on les compose d'un nombre infini de termes tellement choisis que deux termes consécutifs diffèrent infiniment peu l'un de l'autre, se transforment en intégrales définies du genre de celles qui ont été indiquées par divers auteurs, et que ces intégrales définies représentent encore les intégrales générales des équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants.

Toutefois, présentées sous les formes que nous venons de rappeler, les intégrales générales des équations linéaires ne suffisaient pas encore généralement à la solution des problèmes de Physique mathématique. Il manquait à cette solution la détermination des constantes que renferment en nombre infini les sommes d'exponentielles, ou, ce qui revient au même, la détermination des fonctions arbitraires renfermées sous le signe f dans les intégrales définies, et introduites par l'intégration. Pour effectuer cette détermination, il était d'abord nécessaire de trouver une formule qui pût servir à transformer une fonction donnée en une somme d'exponentielles composée d'un nombre fini ou infini de termes. La première formule de ce genre a été donnée par Lagrange dans le tome III des anciens Mémoires de Turin, publié en 1776. Cette formule convertit une fonction d'une seule variable en une somme d'exponentielles imaginaires, seulement pour toutes les

(1) Ce Mémoire a été imprimé dans le tome IV des *Acta nova de l'Académie de Saint-Pétersbourg*.

valeurs numériques de cette variable inférieures à une limite représentée par le nombre 1. Mais il suffit de changer l'unité à l'aide de laquelle on suppose les variables exprimées, pour que la limite 1 se trouve remplacée par une limite quelconque, qui peut croître indéfiniment et devenir infinie. A l'aide de cette seule observation, on peut, de la formule de Lagrange et d'une formule analogue donnée par Euler, tirer celles que M. Fourier a obtenues dans son premier Mémoire sur la théorie de la chaleur. D'autres formules du même genre, mais qui, pour la plupart, peuvent aisément se déduire de celles de M. Fourier, ont été successivement établies par les géomètres, et appliquées à diverses questions de Physique mathématique. On peut voir en particulier, à ce sujet, les Mémoires de MM. Poisson et Cauchy sur la théorie des ondes, un Mémoire de M. Fourier sur les vibrations de plaques élastiques, le XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, divers Articles insérés dans le IIe Volume des *Exercices de Mathématiques*, etc.

Dans les problèmes de Physique et de Mécanique et dans le cas où l'espace auquel s'étendent les équations du mouvement reste indéfini, la question à résoudre était généralement la suivante :

Étant donnée, entre une inconnue et plusieurs variables indépendantes qui ordinairement représentent trois coordonnées et le temps, une équation aux dérivées partielles et à coefficients constants, avec un dernier terme fonction des variables indépendantes, intégrer cette équation, de manière que les valeurs initiales de l'inconnue et de ses dérivées, prises par rapport au temps, se réduisent à des fonctions connues des coordonnées.

Tel est le problème que l'auteur des *Exercices* s'est proposé et a résolu dans ses Mémoires du 8 octobre 1821 et du 16 septembre 1822. (*Voir* le *Bulletin de la Société philomathique* et le XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.) Il a prouvé, dans ces Mémoires, qu'à l'aide des formules de transformation ci-dessus rappelées, et relatives aux fonctions de plusieurs variables, ou plutôt à l'aide d'une formule du même genre qui renferme sous le signe $\int$ une seule exponentielle trigonométrique, on pouvait ramener la solution du problème général au cas où le temps est la seule variable indépendante, c'est-à-dire au cas

où l'équation aux dérivées partielles se trouve remplacée par une simple équation différentielle. La détermination des fonctions arbitraires s'est ainsi trouvée réduite à une détermination de constantes arbitraires qui exigeait quelques artifices de calcul dans le cas où l'équation auxiliaire offrait des racines égales, mais que l'auteur a fini par rendre très facile dans tous les cas et même par supprimer entièrement, à l'aide du calcul des résidus. C'est ainsi qu'en perfectionnant de plus en plus la méthode exposée dans les Mémoires de 1821 et de 1822 l'auteur des *Exercices* est parvenu à une formule très simple et facile à retenir, qui sert à exprimer par une intégrale définie multiple la valeur de l'inconnue propre à vérifier une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants, dans le cas même où cette équation contient un dernier terme fonction des variables indépendantes. (*Voir* le *Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de Physique mathématique*, publié en 1827.) La méthode dont il s'agit, appliquée aux équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules, fournit les intégrales mentionnées ou développées par l'auteur des *Exercices* dans divers Mémoires présentés à l'Académie en 1829 et 1830 (1), et *ces intégrales*, comme il est dit dans le Mémoire du 12 janvier 1829 (Tome IX des *Mémoires de l'Académie*), *fournissent le moyen d'assigner les lois suivant*

(1) Ces Mémoires sont :

1° Un Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances, et sur la théorie de la lumière, présenté à l'Académie le 12 janvier 1829, et inséré par extrait dans le tome IX des *Mémoires de l'Académie*;

2° Un Mémoire sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux différences partielles, et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique, présenté à l'Académie le 12 avril 1830, et paraf par M. G. Cuvier, secrétaire perpétuel. (Le premier paragraphe de ce Mémoire a été imprimé dans le XXe Cahier du *Journal de l'École Poytechnique*);

3° Divers Mémoires sur la théorie de la lumière, présentés à l'Académie les 17 et 31 mai 1830, parafés par M. G. Cuvier, Secrétaire perpétuel, et publiés par extrait dans le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac, puis dans le tome X des *Mémoires de l'Académie*;

4° Le Mémoire sur la dispersion de la lumière, présenté à l'Académie les 19 juillet et 9 août 1830, paraf par M. Arago, secrétaire perpétuel, et publié d'abord par extrait dans le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac de juillet 1830, puis en totalité dans le format des *Exercices de Physique mathématique*.

lesquelles un ébranlement, primitivement produit en un point donné d'un système de molécules, se propage dans tout le système. On voit, par le texte même du Mémoire de janvier 1829 (*ibid.*), que, dès cette époque, l'auteur avait déjà traité, non seulement *le cas où l'élasticité du système reste la même en tous sens autour d'un point quelconque*, et où le système est en conséquence isotrope, mais aussi *le cas où l'élasticité du système reste la même en tous sens autour de tout axe parallèle à une droite donnée*. Il avait même reconnu que, dans ce dernier cas, *les coefficients* renfermés dans les équations aux dérivées partielles, et *dépendants de la nature du système, peuvent avoir entre eux des relations telles que la propagation d'un ébranlement, primitivement produit en un point du système, donne naissance à trois ondes sphériques ou ellipsoïdales;* puis, *en faisant abstraction de celle des trois ondes qui disparaît avec la dilatation du volume quand l'élasticité du système reste la même en tous sens*, il avait vu *les surfaces des deux ondes restantes se réduire au système d'une surface sphérique et d'un ellipsoïde de révolution, l'ellipsoïde ayant pour axe de révolution le diamètre de la sphère;* et, après avoir constaté *l'accord remarquable de ce résultat avec le théorème d'Huygens sur la double réfraction de la lumière dans les cristaux à un seul axe*, il avait conclu que *les équations du mouvement de la lumière sont comprises dans celles qui expriment le mouvement d'un système de molécules très peu écarté d'une position d'équilibre.*

Au reste, comme on peut le voir dans les 7ᵉ et 8ᵉ livraisons des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, les intégrales que fournit la méthode exposée dans le XIXᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* et dans le Mémoire *Sur l'application du calcul des résidus aux questions de Physique mathématique* coïncident, dans le cas particulier où le système est isotrope, avec les intégrales que renferme un Mémoire de M. Ostrogradsky, lu à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 10 juin 1829, cité par M. Poisson en octobre 1830 et publié, en 1831, dans le Tome Iᵉʳ des Mémoires de cette Académie. Elles sont analogues aux intégrales que renferme un Mémoire présenté par M. Poisson à l'Académie des Sciences le 11 octobre 1830, et même à celles que ce

géomètre avait données le 24 novembre 1828, mais dans lesquelles la détermination des fonctions arbitraires était demeurée incomplète.

Dans le cas général où l'élasticité du système n'est pas la même en tous sens, ni autour d'un point quelconque, ni autour de tout axe parallèle à une droite donnée, les valeurs des inconnues, fournies par la méthode générale que nous avons rappelée, se trouvent représentées par des intégrales définies sextuples. Mais on peut, à l'aide d'un changement de variables indépendantes, réduire les intégrales sextuples à des intégrales quadruples, dans le cas où l'équation devient homogène. Cette dernière proposition a été donnée par l'auteur des *Exercices* dans un Mémoire que renferme le *Bulletin des Sciences* (¹) de M. de Férussac pour le mois d'avril 1830 (page 273). Dans ce Mémoire, l'auteur conclut de son analyse que les phénomènes sonores, lumineux, etc., représentés par des équations homogènes aux dérivées partielles, donnent naissance à des ondes sonores, lumineuses, etc., qui ne laissent pas de traces de leur passage, et dont les surfaces se trouvent représentées par des équations qu'il apprend à former. D'ailleurs, comme le même auteur l'observe dans le Tome X des *Mémoires de l'Académie* [Mémoires des 31 mai et 7 juin 1830 (²)], les surfaces des ondes ainsi déterminées sont précisément les surfaces courbes qui ont pour enveloppes les ondes planes dont il a donné la théorie dans les *Exercices de Mathématiques*. Ajoutons que, dans le cas particulier où l'on considère un système de molécules dont l'élasticité reste la même en tous sens, les vitesses propres des molécules, mesurées à de grandes distances du centre d'ébranlement, offrent, dans les deux ondes propagées, les mêmes directions qu'elles offriraient si ces deux ondes étaient rigoureusement planes. Ces vitesses sont donc alors dirigées suivant des tangentes ou suivant des normales aux surfaces des ondes. En d'autres termes, les vibrations des molécules, mesurées loin du centre d'ébranlement, sont alors ou *longitudinales* ou *transversales* par rapport aux rayons vecteurs. M. Poisson, qui avait d'abord révoqué en doute les

(¹) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. II.
(²) *Id.* S. I, T. II.

vibrations transversales, a fini par les admettre lui-même et par tirer de ses formules la proposition que nous venons d'énoncer. En effet, ces vibrations transversales, admises par Fresnel, puis, données par l'auteur des *Exercices* comme résultat du calcul et spécialement comme une conséquence de la théorie des ondes planes, dans les Mémoires des 31 mai et 7 juin 1830, se trouvent déduites des intégrales générales du mouvement d'un système isotrope, à la fin du Mémoire que M. Poisson a lu à l'Académie des Sciences, le 11 octobre 1830.

NOTE DEUXIÈME.

Intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants, avec un dernier terme fonction des variables indépendantes.

Considérons, pour fixer les idées, quatre variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t$$

qui pourront être censées représenter trois coordonnées rectangulaires et le temps. Soit

$$F(x, y, z, t)$$

une fonction de ces variables, entière, du degré n par rapport à t, et dans laquelle, pour plus de simplicité, nous supposerons le coefficient de t^n réduit à l'unité. Supposons d'ailleurs que, ϖ étant une fonction inconnue, et

$$f(x, y, z, t)$$

une fonction donnée des quatre variables x, y, z, t, on assujettisse l'inconnue ϖ à vérifier : 1° quel que soit t, l'équation aux dérivées partielles

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varpi = f(x, y, z, t); \tag{1}$$

2° pour $t = 0$, des conditions de la forme

$$\varpi = \varpi_0(x, y, z), \quad D_t\varpi = \varpi_1(x, y, z), \quad \ldots, \quad D_t^{n-1}\varpi = \varpi_{n-1}(x, y, z). \tag{2}$$

Enfin concevons que,

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et} \quad f(x, y, z)$$

désignant deux fonctions des variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \quad \text{et} \quad x, \quad y, \quad z,$$

on pose, pour abréger, comme dans le deuxième Volume des *Exercices* [page 167 (1)],

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi(\alpha, \beta, \gamma) f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu)]\sqrt{-1}}\varphi(\alpha, \beta, \gamma) f(\lambda, \mu, \nu)\frac{d\alpha}{2\pi}\frac{d\beta}{2\pi}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{d\gamma}{2\pi}\frac{d\nu}{2\pi}.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Alors, en vertu de la formule (311) du Mémoire *Sur l'application du calcul des résidus aux questions de Physique mathématique* (2), on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}\varpi &= \mathcal{L}\frac{e^{st}}{[F(\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \gamma\sqrt{-1}, s)]_t}\frac{F(\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \gamma\sqrt{-1}, s) - F[\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \gamma\sqrt{-1}, \varpi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})]}{s - \varpi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}\\ &+ \int_0^t \mathcal{L}\frac{e^{s(t-\tau)}}{[F(\alpha\sqrt{-1}, \beta\sqrt{-1}, \gamma\sqrt{-1}, s)]_t} f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \tau)\, d\tau.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Il est bon d'observer que, dans la formule (4), l'intégrale relative à τ disparaît quand on a

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Ajoutons qu'après avoir développé, dans le premier des termes que renferme la valeur de ϖ, la fraction qui a pour dénominateur le binôme

$$s - \varpi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),$$

on doit avoir soin de remplacer les exposants de ϖ par des indices.

Dans les applications que l'on peut faire de la formule (4), il est bon de se rappeler que, d'après la définition même des fonctions de x, y, z représentées par la notation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),$$

on a généralement (Tome II des *Exercices de Mathématiques*, p. 168)

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)[\chi(\alpha, \beta, \gamma) f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})] = [\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\chi(\alpha, \beta, \gamma)] f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}). \tag{5}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII.
(2) *Id.* S. II, T. XV.

Observons encore qu'en vertu d'un théorème donné par M. Poisson dans le Mémoire du 19 juillet 1819, on a généralement

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \cos(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega t\, f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\,dt \\ \quad = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin p\, f(x+\Omega t\cos p,\ y+\Omega t\sin p\cos q,\ z+\Omega t\sin p\sin q)\,dq\,dp. \end{cases}$$

De plus, on peut de l'équation (6) tirer celles que l'auteur des *Exercices de Mathématiques* a données dans plusieurs Mémoires présentés à l'Académie en 1830, ou, ce qui revient au même, on peut de l'équation (6) déduire la formule

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \cos(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2d\beta\gamma+2e\gamma\alpha+2f\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} t\, f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\,dt \\ \quad = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin p\, f\Big(x+\frac{t\cos p}{\Omega},\ y+\frac{t\sin p\cos q}{\Omega},\ z+\frac{t\sin p\sin q}{\Omega}\Big)\frac{dq\,dp}{\Omega^2}, \end{cases}$$

dans laquelle on a

$$(8)\qquad \Omega^2 = \mathfrak{F}(\cos p,\ \sin p\cos q,\ \sin p\sin q),$$

en supposant

$$(9)\qquad \mathfrak{F}(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy,$$

et les constantes

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \quad \text{liées aux constantes} \quad a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,$$

de telle sorte que les équations

$$ax+fy+ez=x,\qquad fx+by+dz=y,\qquad ex+dy+cz=z$$

entraînent les suivantes :

$$ax+fy+ez=x,\qquad fx+by+dz=y,\qquad ex+dy+cz=z.$$

Pour montrer une application des formules qui précèdent, considérons un cas particulier traité par l'auteur des *Exercices*, non seulement dans le *Bulletin des Sciences* d'avril 1830, mais aussi dans les Mémoires

des 12 avril et 17 mai de la même année; et supposons que, le second membre de la formule (1) étant réduit à zéro, on pose, dans cette formule,

$$F(x,y,z,t) = t^2-(ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy);$$

cette même formule deviendra

$$(10)\qquad D_t^2\varpi = (aD_x^2+bD_y^2+cD_z^2+2dD_yD_z+2eD_zD_x+2fD_xD_y)\varpi.$$

Cela posé, si l'on désigne par

$$\varpi(x,y,z)\quad\text{et}\quad \Pi(x,y,z)$$

les valeurs initiales des fonctions

$$\varpi\quad\text{et}\quad D_t\varpi;$$

si d'ailleurs, en attribuant à Ω une valeur positive déterminée par le système des formules (8) et (9), on pose, pour abréger,

$$(11)\qquad \lambda = x+t\frac{\cos p}{\Omega},\qquad \mu = y+t\frac{\sin p\cos q}{\Omega},\qquad \nu = z+t\frac{\sin p\sin q}{\Omega},$$

et, de plus,

$$(12)\qquad \Theta = (abc-ad^2-be^2-cf^2+2def)^{\frac{1}{2}},$$

on trouvera [*Bulletin* d'avril 1830 (1)]

$$(13)\quad \begin{cases} \varpi = \dfrac{1}{4\pi\Theta}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin p\,\Pi(\lambda,\mu,\nu)\frac{dq\,dp}{\Omega^2} \\ \quad + \dfrac{1}{4\pi\Theta}D_t\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin p\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)\frac{dq\,dp}{\Omega^2}. \end{cases}$$

Si les fonctions

$$\varpi(x,y,z),\quad \Pi(x,y,z)$$

n'ont de valeurs sensibles que pour de très petites valeurs numériques de x, y, z, les intégrales définies que renferme le second membre de la formule (13) n'auront de valeurs sensibles que pour des valeurs de

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

x, y, z, t propres à vérifier sensiblement les formules

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les formules

$$x + \frac{t\cos p}{\Psi} = 0, \qquad y + \frac{t\sin p\cos q}{\Psi} = 0, \qquad z + \frac{t\sin p\sin q}{\Psi} = 0.$$

Or, de ces dernières, jointes à l'équation (8), on tirera

$$t^2 = \vartheta(x, y, z),$$

ou, ce qui revient au même,

$$t^2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy. \tag{14}$$

Donc la formule (13) conduira aux conclusions que l'auteur des *Exercices* a énoncées dans le Mémoire du 12 avril 1830 [*voir* le XXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1)], et que nous allons reproduire.

Supposons que l'équation

$$D_t^2\varpi = (aD_x^2 + bD_y^2 + cD_z^2 + 2dD_yD_z + 2eD_zD_x + 2fD_xD_y)\varpi$$

se rapporte à une question de Mécanique ou de Physique dans laquelle t représente le temps et x, y, z des coordonnées rectilignes; supposons d'ailleurs que les valeurs initiales de ϖ et de $D_t\varpi$ soient sensiblement nulles pour tous les points situés à une distance sensible de l'origine des coordonnées. Au bout du temps t, la variable ϖ n'aura de valeur sensible que dans le voisinage de la surface du second degré représentée par l'équation (14).

Cela posé, concevons que la quantité ϖ dépende des vibrations très petites d'un corps solide ou d'un fluide pondérable ou impondérable, et que ces vibrations, d'abord produites dans le voisinage de l'origine des coordonnées, se propagent dans l'espace, et donnent ainsi naissance à une onde sonore ou lumineuse. La surface de l'onde coïncidera, au bout du temps t, avec celle de l'ellipsoïde représenté par l'équation (14). *Par suite, la vitesse du son ou de la lumière, mesurée suivant le rayon vecteur r* de cet ellipsoïde, *sera la quantité représentée* par le rapport $\frac{r}{t}$.

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. I.

NOTE TROISIÈME.

Intégration des équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système isotrope de molécules.

Soient, dans un système isotrope de molécules,

x, y, z les coordonnées rectangulaires et initiales d'une molécule m, correspondantes à un état d'équilibre;

ξ, η, ζ les déplacements de la même molécule, au bout du temps t, mesurés parallèlement aux axes coordonnés;

$\upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta$ la dilatation du volume.

La valeur de υ sera déterminée par une équation de la forme

$$D_t^2\upsilon = \Omega^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\upsilon, \tag{1}$$

et les valeurs de ξ, η, ζ par des équations de la forme

$$[D_t^2 - \Omega_1^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\xi = (\Omega^2 - \Omega_1^2)D_x\upsilon. \tag{2}$$

[*Voir* les *Exercices de Mathématiques* pour l'année 1828, p. 180 et 211 (1).] La question se réduira donc à intégrer deux équations aux dérivées partielles et à coefficients constants, dont l'une offrira un second terme représenté par une fonction donnée des variables indépendantes. Si, d'ailleurs, on nomme

$$\varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z), \quad \Phi(x, y, z), \quad X(x, y, z), \quad \Psi(x, y, z)$$

les valeurs initiales de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \qquad D_t\xi, \quad D_t\eta, \quad D_t\zeta,$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$f(x, y, z) = D_x\varphi(x, y, z) + D_y\chi(x, y, z) + D_z\psi(x, y, z),$$
$$\vartheta(x, y, z) = D_x\Phi(x, y, z) + D_yX(x, y, z) + D_z\Psi(x, y, z),$$

les fonctions

$$f(x, y, z), \qquad \vartheta(x, y, z)$$

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII.

représenteront les valeurs initiales de

$$v, \quad D_t v.$$

L'équation (1) est entièrement semblable à celle qui détermine la propagation du son dans l'air. En vertu de la formule (4) de la Note II, elle aura pour intégrale

$$(3)\qquad \begin{cases} v = \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega t\, f(x,y,z) \\ \quad + \displaystyle\int_0^t \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega t\, \vartheta(x,y,z)\, dt. \end{cases}$$

Ajoutons que, en vertu de la même formule, la valeur de ξ déterminée par l'équation (2) sera de la forme

$$(4)\qquad \xi = \Xi + D_x w,$$

la valeur de Ξ étant

$$(5)\qquad \begin{cases} \Xi = \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega_i t\, \varphi(x,y,z) \\ \quad + \displaystyle\int_0^t \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega_i t\, \Phi(x,y,z)\, dt, \end{cases}$$

et la valeur de w étant assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t, l'équation aux dérivées partielles

$$(6)\qquad [D_t^2 - \Omega_i^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]w = (\Omega^2-\Omega_i^2)v;$$

2° à vérifier, pour $t=0$, les conditions

$$(7)\qquad w = 0, \qquad D_t w = 0.$$

Or, sous ces conditions, la formule (4) de la Note II donnera

$$(8)\qquad \begin{cases} D_t w = (\Omega^2-\Omega_i^2)\displaystyle\int_0^t \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega_i(t-\tau) \times \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega\tau\, f(x,y,z)\, d\tau \\ \quad + (\Omega^2-\Omega_i^2)\displaystyle\int_0^t \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega_i(t-\tau)\int_0^\tau \cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega\tau\, \vartheta(x,y,z)\, d\tau^2. \end{cases}$$

D'ailleurs, en posant, pour abréger,

$$(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \rho,$$

on a identiquement

$$(\Omega^2-\Omega_i^2)\int_0^t \cos\rho\Omega_i(t-\tau) \times \cos\rho\Omega\tau\, d\tau = \frac{\Omega\sin\rho\Omega t - \Omega_i\sin\rho\Omega_i t}{\rho} = \int_0^t (\Omega^2\cos\rho\Omega t - \Omega_i^2\cos\rho\Omega_i t)\, dt,$$

$$(\Omega^2-\Omega_i^2)\int_0^t \cos\rho\Omega_i(t-\tau)\int_0^\tau \cos\rho\Omega\tau\, d\tau^2 = \frac{\cos\Omega_i t - \cos\rho\Omega t}{\rho^2} = \int_0^t\int_0^t (\Omega^2\cos\rho\Omega t - \Omega_i^2\cos\rho\Omega_i t)\, dt^2.$$

Donc la formule (8) peut s'écrire comme il suit :

$$(9)\qquad \begin{cases} D_t w = \displaystyle\int_0^t \left[\Omega^2\cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega t - \Omega_i^2\cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega_i t\right] f(x,y,z)\, dt \\ \quad + \displaystyle\int_0^t\int_0^t \left[\Omega^2\cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega t - \Omega_i^2\cos(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Omega_i t\right] \vartheta(x,y,z)\, dt^2. \end{cases}$$

Or, cette dernière, combinée avec la formule trouvée en 1819 par M. Poisson, c'est-à-dire avec la formule (6) de la Note II, donnera

$$(10)\qquad \begin{cases} D_t w = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\Omega^2 f(\lambda,\mu,\nu) - \Omega_i^2 f(\lambda_i,\mu_i,\nu_i)]\, dq\, dp \\ \quad + \dfrac{D_t^{-1}}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\Omega^2\vartheta(\lambda,\mu,\nu) - \Omega_i^2\vartheta(\lambda_i,\mu_i,\nu_i)]\, dq\, dp, \end{cases}$$

le signe D_t^{-1} indiquant une intégration effectuée par rapport à t, à partir de $t=0$, et les valeurs de λ, μ, ν, λ_i, μ_i, ν_i étant

$$\lambda = x + \Omega t\cos p, \qquad \mu = y + \Omega t\sin p\cos q, \qquad \nu = z + \Omega t\sin p\sin q,$$
$$\lambda_i = x + \Omega_i t\cos p, \qquad \mu_i = y + \Omega_i t\sin p\cos q, \qquad \nu_i = z + \Omega_i t\sin p\sin q.$$

De plus, on tirera immédiatement de l'équation (10), en observant que w doit s'évanouir avec t,

$$(11)\qquad \begin{cases} w = \dfrac{D_t^{-1}}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\Omega^2 f(\lambda,\mu,\nu) - \Omega_i^2 f(\lambda_i,\mu_i,\nu_i)]\, dq\, dp \\ \quad + \dfrac{D_t^{-2}}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\Omega^2\vartheta(\lambda,\mu,\nu) - \Omega_i^2\vartheta(\lambda_i,\mu_i,\nu_i)]\, dq\, dp. \end{cases}$$

Les formules (4), (5) et (11) qu'on obtient, comme on vient de le voir, en combinant avec le théorème de M. Poisson la dernière formule du Mémoire de 1827 sur l'application du calcul des résidus aux questions de Physique mathématique, suffisent pour déterminer les lois de la propagation du mouvement dans les milieux isotropes. Ces formules sont précisément celles que j'ai mentionnées dans les livraisons 7 et 8 des *Exercices d'Analyse*, et que j'avais obtenues à l'époque où je m'occupais de la théorie des corps élastiques. Les manuscrits qui les renferment ne fixent pas avec précision leur date, que divers indices reportent à l'année 1828. Mais ce qui n'est pas douteux, c'est que le Mémoire du 12 janvier 1829 indique des formules tirées du Mémoire de 1827, non seulement comme *offrant, sous le signe f, les fonctions qui expriment, à l'origine du mouvement, les déplacements et les vitesses des molécules, mesurés parallèlement aux axes coordonnés*, mais encore comme *propres à fournir les lois suivant lesquelles un ébranlement produit en un point donné d'un système de molécules se propage dans tout le système*. Ajoutons que le Mémoire du 17 mai 1830 cite précisément le *théorème de M. Poisson* comme fournissant le moyen de réduction des intégrales correspondantes à un système isotrope, et que, relativement à un tel système, le Mémoire de janvier 1829 dit expressément (t. IX des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, p. 115) :

Si un système de molécules est tellement constitué que l'élasticité du système soit la même en tous sens, un ébranlement, primitivement produit en un point quelconque, se propagera de manière qu'il en résulte deux ondes sphériques animées de vitesses constantes, mais inégales.

Je rappellerai en finissant que les formules (4), (5) et (11) ne diffèrent pas au fond des intégrales que M. Ostrogradsky a données dans un Mémoire lu à l'Académie de Saint-Pétersbourg, le 10 juin 1829, cité par M. Poisson en octobre 1830, et publié en 1831.

NOTE QUATRIÈME.

Sur l'intégration des équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules dont l'élasticité reste la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à une droite donnée.

La question dont il s'agit ici, et sur laquelle je reviendrai dans un autre article, a été traitée, non seulement dans le Mémoire du 12 janvier 1829, mais aussi dans le Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 17 mai 1830, et parafé à cette époque par le Secrétaire perpétuel, M. Georges Cuvier.

Les formules qui sont relatives à cette question s'appliquent, à plus forte raison, au cas particulier où le système devient isotrope, et fournissent alors les résultats suivants.

Reprenons les équations (1) et (2) de la Note III, et posons, comme dans le Mémoire lithographié d'août 1836,

$$U = D_z\eta - D_y\zeta, \qquad V = D_x\zeta - D_z\xi, \qquad W = D_y\xi - D_x\eta.$$

On aura

$$[D_t^2 - \Omega^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]U = 0; \tag{1}$$

et l'on pourra encore, dans cette dernière équation, remplacer U par V ou par W. Cela posé, on connaîtra immédiatement, d'une part υ, et d'autre part U, V, W. D'ailleurs,

$$\upsilon, \quad U, \quad V, \quad W$$

étant connus, on connaîtra

$$(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\xi = D_x\upsilon + D_yW - D_zV,$$

et, par suite,

$$D_t^2\xi.$$

Or, on se trouvera ainsi ramené aux formules (4), (5) et (11) de la Note III qui peuvent, en conséquence, se déduire, non seulement de la dernière formule du Mémoire *Sur l'application du calcul des résidus*

aux questions de Physique mathématique, mais encore des formules établies dans le Mémoire du 17 mai 1830.

160.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur une Note de* M. Passot, *relative à la détermination de la variable indépendante dans l'analyse des courbes.*

C. R., t. XIV, p. 508 (4 avril 1842).

L'Académie nous a chargés, MM. Coriolis, Piobert et moi, de lui rendre compte d'une Note de M. Passot, relative à la détermination de la variable indépendante dans l'analyse des courbes. Avant d'exprimer notre avis au sujet de cette Note, nous pensons qu'il est convenable de rappeler les motifs qui ont engagé son auteur à la produire.

M. Passot a fait précédemment à l'Académie diverses Communications, qui ont été l'objet d'un Rapport lu à la séance du 30 novembre 1840. Il est dit, dans ce Rapport, que les expériences entreprises par M. Passot constatent certains faits que l'on doit considérer comme nouveaux; mais les Commissaires, en admettant ces faits, n'ont point admis les explications que M. Passot en avait données. C'est dans le dessein de faire prévaloir ses opinions théoriques que l'auteur a rédigé la Note dont il s'agit en ce moment. Les propositions nouvelles que cette Note renferme nous ont paru, dès le premier instant, inexactes; et, convaincus de cette inexactitude, nous aurions désiré que l'auteur nous dispensât d'en fournir la preuve. Mais l'insistance avec laquelle il réclame un Rapport nous engage à rompre le silence, et à entrer ici dans quelques détails.

Nous commencerons par convenir franchement et sans détour que, malgré les importants travaux des géomètres modernes, la solution exacte des problèmes de Mécanique rationnelle laisse encore beaucoup à désirer. Ainsi, en particulier, l'application des principes généraux

de la Mécanique à la théorie des machines, ou même simplement à la théorie des liquides ou des fluides, présente quelquefois des difficultés réelles, soit parce que les méthodes de calcul ne sont pas encore suffisamment perfectionnées, soit parce que dans chaque question l'on peut craindre d'avoir omis quelques données, soit enfin parce que la loi des actions moléculaires, dans les corps liquides ou fluides, n'est pas connue et définie avec assez de précision et d'exactitude. Mais ces difficultés sont complètement étrangères aux principes généraux de la Mécanique et du Calcul infinitésimal, établis sur des bases solides. En conséquence, elles ne peuvent devenir des motifs d'abandonner ces mêmes principes; et l'on doit même observer que, dans les questions plus simples auxquelles ceux-ci peuvent être appliqués plus facilement et plus rigoureusement, les résultats du calcul sont, pour l'ordinaire, conformes aux résultats de l'expérience.

Les remarques que nous venons de faire nous ramènent tout naturellement à la Note de M. Passot. En effet, les difficultés que peut offrir l'explication de certains phénomènes, dans les machines à réaction, n'ont aucun rapport avec la question agitée dans cette Note, et qui consiste à savoir si, dans les problèmes de Mécanique, il est ou non permis de prendre le temps pour variable indépendante. Ainsi la Note de M. Passot, fût-elle démonstrative à l'égard des propositions qu'elle contient, ne remplirait pas le but que l'auteur s'était proposé. Mais nous allons plus loin, et quelques réflexions bien simples suffiront pour montrer que ces propositions sont inadmissibles.

Lorsque plusieurs variables sont liées entre elles par diverses équations, quelques-unes de ces variables peuvent être considérées comme fonctions des autres qui prennent le nom de *variables indépendantes*. Supposons, en particulier, deux variables liées entre elles par une seule équation, c'est-à-dire, deux variables liées entre elles de telle sorte que, l'une étant donnée, l'autre s'en déduise. L'une des deux variables sera une fonction de l'autre considérée comme variable indépendante. Mais il est clair que le choix de la variable indépendante sera entièrement arbitraire. Ainsi, par exemple, dans la Mécanique,

l'espace parcouru par un point matériel qui se meut, et le temps employé à parcourir cet espace, sont deux variables dont l'une dépend de l'autre, et dont l'une quelconque peut être prise pour variable indépendante. Effectivement, on peut demander, à volonté, ou quel sera l'espace parcouru pendant un temps donné, ou quel sera le temps employé à parcourir un espace donné.

Concevons à présent que l'on passe du système de deux ou de plusieurs variables au système de leurs différentielles. Ces différentielles ne seront autre chose que *des quantités dont les rapports seront équivalents aux dernières raisons des accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément ces mêmes variables.* En vertu de cette définition, les différentielles des fonctions dépendront à la fois des variables indépendantes et des différentielles de ces variables. D'ailleurs, ces dernières différentielles pouvant être choisies arbitrairement, il sera, non pas nécessaire, mais convenable, de les réduire, pour plus de simplicité, à des constantes, c'est-à-dire à des quantités indépendantes des variables dont il s'agit. On admet généralement cette réduction, et nous ne ferons ici aucune difficulté de nous conformer à cet usage.

S'il s'agit de deux variables liées entre elles par une équation, on pourra considérer comme constante la différentielle de l'une ou de l'autre variable, suivant que l'on prendra l'une ou l'autre pour indépendante. Il peut d'ailleurs arriver que, pour une valeur particulière de la variable indépendante, la différentielle de la fonction devienne infiniment petite par rapport à la différentielle de la variable. Mais, dans ce cas même, il faudrait bien se garder d'affirmer que la différentielle de la fonction sera toujours nulle, et d'en conclure que la fonction devra changer de rôle, c'est-à-dire, se transformer en variable indépendante. En effet, non seulement une variable, dont la différentielle s'évanouit toujours, cesse d'être variable, et à plus forte raison variable indépendante; mais en outre la différentielle d'une fonction est généralement une quantité variable, dont les valeurs particulières doivent être soigneusement distinguées de la valeur générale. Si M. Passot n'avait pas omis cette distinction à la page 2 de sa Note, il

ne serait pas arrivé aux diverses propositions qu'il a énoncées; par exemple, à cette assertion que, dans les problèmes de Mécanique, *le temps ne peut être pris pour variable indépendante.*

Les Commissaires regrettent que les motifs qu'ils viennent d'expliquer ne leur permettent pas de proposer à l'Académie l'approbation de la Note soumise à leur examen.

161.

CALCUL INTÉGRAL. — *Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R., t. XIV, p. 740 (23 mai 1842).

J'ai montré, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, comment on pouvait intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre, quel que fût le nombre des variables indépendantes $x, y, \ldots$, et obtenir directement l'intégrale générale, c'est-à-dire, la valeur générale de l'inconnue assujettie à la double condition de vérifier cette équation aux dérivées partielles, et de se réduire, pour une valeur donnée de la variable x, à une autre fonction donnée des autres variables indépendantes $y, \ldots$. Comme on le sait d'ailleurs, l'intégrale générale peut aisément se déduire d'une intégrale particulière qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes; et, dans une précédente séance, M. Binet a déduit du calcul des variations une méthode propre à fournir des intégrales particulières de cette espèce. Je vais indiquer aujourd'hui un moyen fort simple de résoudre directement ce dernier problème.

Considérons d'abord, pour fixer les idées, une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre deux variables indépendantes x, y, et l'inconnue z. Cette équation sera de la forme

$$F(x, y, z, D_x z, D_y z) = 0; \tag{1}$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$D_x z = p, \qquad D_y z = q,$$

elle deviendra

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Soit maintenant

$$z = f(x, y, \alpha, \beta) \tag{3}$$

une valeur de z qui, renfermant deux constantes arbitraires α, β, ait la double propriété de vérifier l'équation (1), et de se réduire, pour une valeur donnée ξ de la variable x, à une certaine fonction de y, α, β représentée par $f(y, \alpha, \beta)$, en sorte qu'on ait identiquement

$$f(\xi, y, \alpha, \beta) = f(y, \alpha, \beta).$$

L'équation (3), différentiée par rapport à y, donnera

$$q = D_y f(x, y, \alpha, \beta). \tag{4}$$

Cela posé, concevons que des équations (3) et (4), résolues par rapport à α, β, on tire

$$\alpha = u, \qquad \beta = v, \tag{5}$$

u, v étant des fonctions déterminées de x, y, z, q; et nommons

$$U, \quad V$$

ce que deviennent u et v pour $x = \xi$. Les valeurs de α, β, tirées des équations

$$\begin{cases} z = f(y, \alpha, \beta), \\ q = D_y f(y, \alpha, \beta), \end{cases} \tag{6}$$

seront précisément

$$\alpha = U, \qquad \beta = V. \tag{7}$$

D'ailleurs, en considérant z et q comme des fonctions de x, y, déterminées par les équations (3) et (4), ou, ce qui revient au même, par les formules (5), on tirera de la seule équation

$$\alpha = u,$$

différentiée successivement par rapport à x et par rapport à y,

$$D_x u + D_x z\, D_z u + D_x q\, D_q u = 0,$$
$$D_y u + D_y z\, D_z u + D_y q\, D_q u = 0;$$

puis, en ayant égard aux formules

$$D_x z = p, \qquad D_y z = q, \qquad D_x q = D_y p,$$

on trouvera

$$\begin{cases} D_x u + p\, D_z u + D_y p\, D_q u = 0, \\ D_y u + q\, D_z u + D_y q\, D_q u = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Enfin, si l'on désigne par

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad P, \quad Q$$

les dérivées partielles de la fonction

$$F(x, y, z, p, q),$$

différentiée successivement par rapport à

$$x, \quad y, \quad z, \quad p, \quad q,$$

alors, en considérant toujours z, p, q comme fonctions de x, y, on tirera de la formule (2), différentiée par rapport à y,

$$Y + qZ + P\, D_y p + Q\, D_y q = 0, \tag{9}$$

et de cette dernière, combinée avec les formules (8),

$$P\, D_x u + Q\, D_y u + (Pp + Qq)\, D_z u - (Y + qZ)\, D_q u = 0. \tag{10}$$

Si l'on suppose que p soit éliminé du premier membre de la formule (10) à l'aide de l'équation (2), ce premier membre se réduira simplement, ou à zéro, ou à une fonction déterminée

$$\varphi(x, y, z, q)$$

de x, y, z, q. Mais cette dernière hypothèse est inadmissible; car, si elle se réalisait sans que la fonction $\varphi(x, y, z, q)$ se réduisît identique-

ment à zéro, l'équation

$$\bar{\varphi}(x, y, z, q) = 0$$

établirait entre

$$x, \quad y, \quad z, \quad q$$

une relation qui devrait subsister pour la valeur ξ de x; et par suite l'équation

$$\bar{\varphi}(\xi, y, z, q) = 0$$

établirait une relation entre les valeurs de ξ, y, qui peuvent être choisies arbitrairement, et les valeurs de z, q tirées des formules (6). Or, c'est là précisément ce que l'on ne saurait admettre, attendu que les formules (6) peuvent être remplacées par les équations (7), et que celles-ci peuvent être regardées comme propres à fournir les valeurs des constantes arbitraires α, β correspondantes à des valeurs données quelconques de y, z, q. Donc la fonction $\bar{\varphi}(x, y, z, q)$ doit se réduire identiquement à zéro; et, lorsqu'à l'aide de la formule (2) on élimine p de l'équation (10), cette dernière devient une équation linéaire aux dérivées partielles, à laquelle doit satisfaire u, considéré comme fonction des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad q.$$

Donc, en définitive, la fonction de x, y, z, q représentée par u est une intégrale particulière de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{P}\,\mathrm{D}_x u + \mathrm{Q}\,\mathrm{D}_y u + (\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q)\,\mathrm{D}_z u - (\mathrm{Y} + q\mathrm{Z})\,\mathrm{D}_q u = 0,$$

dans laquelle on suppose p déterminé par la formule (2); et cette intégrale particulière est celle qu'on obtient quand l'inconnue u est assujettie à prendre la valeur U pour $x = \xi$. On prouvera de même que la fonction v est encore une intégrale particulière de l'équation linéaire (11), savoir, l'intégrale qu'on obtient quand l'inconnue u est assujettie à prendre la valeur V pour $x = \xi$. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Supposons que, étant donnée l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, et à deux variables indépendantes,*

$$\mathrm{F}(x, y, z, \mathrm{D}_x z, \mathrm{D}_y z) = 0,$$

on cherche l'intégrale particulière qui vérifie, pour $x = \xi$, la condition

$$z = \mathrm{f}(y, \alpha, \beta),$$

$\mathrm{f}(y, \alpha, \beta)$ désignant une certaine fonction de la variable indépendante y et des deux constantes arbitraires α, β. Soient d'ailleurs

$$\alpha = \mathrm{U}, \qquad \beta = \mathrm{V}$$

les valeurs de α, β déduites des équations simultanées

$$z = \mathrm{f}(y, \alpha, \beta), \qquad q = \mathrm{D}_y \mathrm{f}(y, \alpha, \beta).$$

U, V *seront généralement des fonctions déterminées des trois variables*

$$y, \quad z, \quad q;$$

et, pour résoudre la question proposée, il suffira d'éliminer q entre les formules

$$\alpha = u, \qquad \beta = v,$$

dans lesquelles u, v désigneront deux valeurs particulières de l'inconnue d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre et à quatre variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad q.$$

Si l'on représente par

$$\mathrm{Y}, \quad \mathrm{Z}, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}$$

les dérivées partielles de

$$\mathrm{F}(x, y, z, p, q)$$

prises par rapport à

$$y, \quad z, \quad p, \quad q,$$

l'équation linéaire dont il s'agit sera ce que devient la suivante

$$\mathrm{P}\,\mathrm{D}_x u + \mathrm{Q}\,\mathrm{D}_y u + (\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q)\,\mathrm{D}_z u - (\mathrm{Y} + q\mathrm{Z})\,\mathrm{D}_q u = 0,$$

quand on élimine p à l'aide de la formule

$$\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0;$$

et les deux valeurs particulières u, v de l'inconnue u seront celles qui se réduisent, l'une à U, *l'autre à* V, *pour $x = \xi$.*

La méthode et les raisonnements, à l'aide desquels nous avons établi

le théorème qui précède, peuvent être appliqués dans tous les cas à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, quel que soit d'ailleurs le nombre des variables indépendantes; et l'on se trouve ainsi conduit au théorème général que nous allons énoncer.

THÉORÈME II. — *Soit ϖ une fonction inconnue des n variables indépendantes*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

assujettie à la double condition de vérifier : 1° quel que soit t, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, D_x\varpi, D_y\varpi, D_z\varpi, \ldots, D_t\varpi) = 0;$$

2° pour $t = \tau$, la formule

$$\varpi = f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta),$$

dans laquelle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ désignent des constantes arbitraires dont le nombre est égal à celui des variables $x, y, z, \ldots, t$. Posons d'ailleurs, pour abréger,

$$D_x\varpi = p, \quad D_y\varpi = q, \quad D_z\varpi = r, \quad \ldots, \quad D_t\varpi = s;$$

et soient

$$\alpha = U, \quad \beta = V, \quad \gamma = W, \quad \ldots$$

les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ tirées des formules

$$\begin{aligned}
\varpi &= f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta),\\
p &= D_x f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta),\\
q &= D_y f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta),\\
r &= D_z f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

U, V, W, ... représenteront des fonctions déterminées des $2n - 1$ quantités variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots;$$

et, pour résoudre la question proposée, il suffira d'éliminer

$$p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

entre les formules

$$\alpha = u, \quad \beta = v, \quad \gamma = w, \quad \ldots$$

dans lesquelles

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

désigneront n valeurs particulières de l'inconnue d'une équation linéaire, aux dérivées partielles du premier ordre, et à $2n$ variables indépendantes. Si l'on représente par

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots, \quad T, \quad \Pi, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad \ldots, \quad S$$

les dérivées partielles de

$$F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s)$$

prises par rapport à

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s,$$

l'équation linéaire dont il s'agit sera ce que devient la suivante

$$\begin{aligned}
&P D_x\varkappa + Q D_y\varkappa + R D_z\varkappa + \ldots + S D_t\varkappa\\
&\quad + (Pp + Qq + Rr + \ldots + Ss) D_\varpi\varkappa\\
&\quad - (X + p\Pi) D_p\varkappa - (Y + q\Pi) D_q\varkappa - (Z + r\Pi) D_r\varkappa - \ldots = 0,
\end{aligned}$$

quand on élimine s à l'aide de la formule

$$F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s) = 0;$$

et les n valeurs particulières

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

de l'inconnue $\varkappa$ seront celles qui se réduisent respectivement à

$$U, \quad V, \quad W, \quad \ldots,$$

pour $t = \tau$.

Puisque l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre peut immédiatement se déduire d'une intégrale particulière qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes, le théorème II réduit évidemment l'intégration d'une équation quelconque aux dérivées partielles du premier

ordre à l'intégration d'une équation linéaire du même ordre, dans laquelle le nombre des variables indépendantes est doublé. On peut d'ailleurs, comme on sait, réduire l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre à l'intégration d'un système d'équations différentielles. Mais cette seconde réduction conduit rarement à des équations différentielles intégrables; et, au lieu de l'opérer, il sera généralement plus avantageux d'appliquer directement à l'intégration de l'équation linéaire les formules générales que j'ai données dans un Mémoire lithographié de 1835. En effet, posons, pour abréger,

$$\square\varkappa = \frac{P}{S}\,D_x\varkappa + \frac{Q}{S}\,D_y\varkappa + \frac{R}{S}\,D_z\varkappa + \ldots + \left(\frac{Pp+Qq+Rr+\ldots}{S}+s\right)D_\varpi\varkappa$$
$$-\frac{X+p\Pi}{S}\,D_p\varkappa - \frac{Y+q\Pi}{S}\,D_q\varkappa - \frac{Z+r\Pi}{S}\,D_r\varkappa - \ldots$$

et

$$\nabla\varkappa = -\int_\tau^t \square\varkappa\,dt.$$

L'équation linéaire, que le théorème II substitue à l'équation proposée, deviendra

$$D_t\varkappa = -\square\varkappa,$$

et l'on tirera successivement de cette dernière

$$u = U + \nabla U + \nabla^2 U + \ldots,$$
$$v = V + \nabla V + \nabla^2 V + \ldots,$$
$$w = W + \nabla W + \nabla^2 W + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On obtiendra ainsi directement les valeurs de

$$u,\quad v,\quad w,\quad \ldots$$

développées en séries qui, dans plusieurs cas, pourront être sommées, et qui d'ailleurs pourront toujours être employées tant que la valeur numérique de la différence $t-\tau$ ne deviendra pas assez grande pour que ces séries cessent d'être convergentes.

Dans d'autres Articles je donnerai de nombreuses applications des

principes que je viens d'établir, et je montrerai comment ces principes peuvent être étendus à des équations d'ordre supérieur au premier, ou, ce qui revient au même, à des systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

162.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur une intégrale remarquable d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R., T. XIV, p. 769 (30 mai 1842).

Considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre une inconnue ϖ et n variables indépendantes

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

dont la dernière t peut être censée représenter le temps, dans les problèmes de Mécanique. L'intégration de cette équation pourra se réduire à l'intégration d'un système d'équations différentielles du premier ordre, ou bien encore, comme je l'ai remarqué dans la séance précédente, à l'intégration d'une seule équation linéaire aux dérivées partielles qui renfermera $2n$ variables indépendantes, et qui ne sera autre chose que l'équation caractéristique correspondante au système dont il s'agit. D'ailleurs, parmi les intégrales de ce système, il en est une qui ne contient d'autres constantes arbitraires que celles qui peuvent être censées désigner les valeurs initiales des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ et de l'inconnue ϖ. Or il est important d'observer que cette intégrale du système d'équations différentielles est en même temps une intégrale de l'équation donnée aux dérivées partielles. Ajoutons qu'elle se déduit immédiatement par élimination de n intégrales particulières de l'équation caractéristique, savoir, de celles qu'on obtient quand on prend successivement pour valeurs initiales de l'in-

connue de cette équation caractéristique chacune des quantités variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ \varpi.$$

Telles sont les propositions principales que je vais établir dans la présente Note.

Analyse.

Soit

$$(1)\qquad F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s) = 0$$

l'équation donnée aux dérivées partielles, dans laquelle on suppose

$$p = D_x\varpi, \qquad q = D_y\varpi, \qquad r = D_z\varpi \quad \ldots, \qquad s = D_t\varpi,$$

et nommons

$$X,\ Y,\ Z,\ \ldots,\ T,\ \Pi,\ P,\ Q,\ R,\ \ldots,\ S$$

les dérivées partielles de la fonction

$$F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s)$$

différentiée successivement par rapport à chacune des quantités variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,\ \varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,\ s.$$

L'intégration de l'équation (1) pourra être réduite, soit à l'intégration des $2n-1$ équations différentielles comprises dans la formule

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R} = \ldots = \dfrac{dt}{S} = \dfrac{d\varpi}{Pp + Qq + Rr + \ldots + Ss} \\ \qquad = \dfrac{dp}{-(X + p\Pi)} = \dfrac{dq}{-(Y + q\Pi)} = \dfrac{dr}{-(Z + r\Pi)} = \ldots, \end{cases}$$

s étant déterminé en fonction de

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,\ \varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots$$

par l'équation (1), soit à l'intégration de l'équation caractéristique

$$(3)\qquad \begin{cases} PD_x\theta + QD_y\theta + RD_z\theta + \ldots + SD_t\theta + (Pp + Qq + Rr + \ldots + Ss)D_\varpi\theta \\ \qquad - (X + p\Pi)D_p\theta - (Y + q\Pi)D_q\theta - (Z + r\Pi)D_r\theta - \ldots = 0. \end{cases}$$

Si, en particulier, on désigne par

$$u,\ v,\ w,\ \ldots$$

n fonctions déterminées de

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,\ \varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots$$

dont chacune, étant prise pour valeur de θ, vérifie l'équation (3), et par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \theta$$

n constantes arbitraires, il suffira, pour obtenir une intégrale de l'équation (1), d'éliminer

$$p,\ q,\ r,\ \ldots$$

entre les formules

$$(4)\qquad \alpha = u, \qquad \beta = v, \qquad \gamma = w, \qquad \ldots,$$

pourvu toutefois que les valeurs de

$$\varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,$$

tirées de ces formules, se réduisent, pour une valeur donnée τ de la variable t, à des expressions de la forme

$$\begin{aligned} \varpi &= f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta), \\ p &= D_x f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta), \\ q &= D_y f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta), \\ r &= D_z f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, pour que cette condition soit remplie, il suffit évidemment que les valeurs de

$$\varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,$$

tirées des formules (4), vérifient, pour $t = \tau$, les suivantes

$$(5)\qquad p = D_x\varpi, \qquad q = D_y\varpi, \qquad r = D_z\varpi, \qquad \ldots;$$

et comme, en supposant qu'il en soit ainsi, les formules (4) fourniront, avec une valeur de ϖ propre à représenter une intégrale parti-

culière de l'équation (1), les dérivées $p, q, r, \ldots$ de cette intégrale prises par rapport à $x, y, z, \ldots$, nous devons conclure qu'en vertu des équations (4) les conditions (5) seront vérifiées pour une valeur quelconque de t, si elles se vérifient pour la valeur particulière $t = \tau$.

D'autre part, si l'on regarde les équations (4) comme propres à déterminer

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

en fonction de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

on tirera de ces équations, différentiées par rapport à x,

$$\begin{aligned}
&D_x u + D_\varpi u\, D_x \varpi + D_p u\, D_x p + D_q u\, D_x q + D_r u\, D_x r + \ldots = 0,\\
&D_x v + D_\varpi v\, D_x \varpi + D_p v\, D_x p + D_q v\, D_x q + D_r v\, D_x r + \ldots = 0,\\
&D_x w + D_\varpi w\, D_x \varpi + D_p w\, D_x p + D_q w\, D_x q + D_r w\, D_x r + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$D_x \varpi = -\frac{S(\pm D_x u\, D_p v\, D_q w \ldots)}{S(\pm D_\varpi u\, D_p v\, D_q w \ldots)}, \tag{6}$$

chacune des sommes représentées à l'aide du signe S étant une fonction alternée dont les divers termes se déduisent les uns des autres par un ou plusieurs échanges opérés entre les seules lettres $u, v, w, \ldots$. Comme d'ailleurs l'équation (6) devra continuer de subsister quand on échangera entre elles les lettres

$$x \text{ et } y, \quad p \text{ et } q, \quad u \text{ et } v,$$

ou bien les suivantes

$$x \text{ et } z, \quad p \text{ et } r, \quad u \text{ et } w,$$

etc., il est clair que les conditions (5) pourront s'écrire comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned}
&p = -\frac{S(\pm D_x u\, D_p v\, D_q w \ldots)}{S(\pm D_\varpi u\, D_p v\, D_q w \ldots)},\\
&q = -\frac{S(\pm D_y v\, D_q u\, D_p w \ldots)}{S(\pm D_\varpi v\, D_q u\, D_p w \ldots)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Désignons maintenant par

$$\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z}, \quad \ldots, \quad \Omega, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}, \quad \ldots$$

les valeurs de u qui, étant propres à vérifier l'équation (3), se réduisent respectivement à

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

pour $t = \tau$. Les intégrales des équations (2) seront de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
&\xi = \mathfrak{X}, \quad \eta = \mathfrak{Y}, \quad \zeta = \mathfrak{Z}, \quad \ldots, \quad \omega = \Omega,\\
&\varphi = \mathfrak{P}, \quad \chi = \mathfrak{Q}, \quad \psi = \mathfrak{R}, \quad \ldots,
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega, \varphi, \chi, \psi, \ldots$ étant des constantes arbitraires propres à représenter les valeurs initiales de $x, y, z, \ldots, \varpi, p, q, r, \ldots$; et si, entre les seules équations

$$\xi = \mathfrak{X}, \quad \eta = \mathfrak{Y}, \quad \zeta = \mathfrak{Z}, \quad \ldots, \quad \omega = \Omega, \tag{9}$$

on élimine $p, q, r, \ldots$, on obtiendra une équation résultante

$$K = 0, \tag{10}$$

dont le premier membre K renfermera uniquement les quantités variables $x, y, z, \ldots, t, \varpi$ avec les constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots.$$

Cela posé, pour savoir si l'équation (10) représentera ou non une intégrale particulière de l'équation (1), il suffira, d'après ce qui a été dit ci-dessus, d'examiner si les formules (7) sont ou ne sont pas identiquement vérifiées, lorsqu'on réduit les fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

aux fonctions

$$\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z}, \quad \ldots, \quad \Omega;$$

il suffira même d'examiner si, dans ce cas, les équations (7) deviennent ou non identiques pour une valeur particulière de t, par exemple pour la valeur $t = \tau$. Or c'est là en effet ce qui arrivera, comme on peut

s'en assurer en attribuant à t, non pas précisément la valeur $t=\tau$, pour laquelle les derniers membres de la formule (7) se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$, mais une valeur très voisine de τ. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\square\vartheta=\frac{P}{S}D_x\vartheta+\frac{Q}{S}D_y\vartheta+\frac{R}{S}D_z\vartheta+\ldots+\left(\frac{P}{S}p+\frac{Q}{S}q+\frac{R}{S}r+\ldots+s\right)D_\varpi\vartheta$$
$$-\frac{X+p\Pi}{S}D_p\vartheta-\frac{Y+q\Pi}{S}D_q\vartheta-\frac{Z+r\Pi}{S}D_r\vartheta-\ldots,$$

et

$$\nabla\vartheta=-\int_\tau\square\vartheta\,dt,$$

alors, en attribuant à la différence $t-\tau$ un module assez petit pour que les séries demeurent convergentes, on aura

$$\mathfrak{X}=x+\nabla x+\nabla^2x+\ldots,$$
$$\mathfrak{Y}=y+\nabla y+\nabla^2y+\ldots,$$
$$\mathfrak{Z}=z+\nabla z+\nabla^2z+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Omega=\varpi+\nabla\varpi+\nabla^2\varpi+\ldots.$$

D'ailleurs, si l'on considère la différence $t-\tau$ comme une quantité très petite du premier ordre, on pourra en dire autant de l'intégrale

$$-\int_\tau^t\square\vartheta\,dt=-(t-\tau)\square\vartheta+\int_\tau^t(t-\tau)D_t\square\vartheta\,dt,$$

qui se réduira sensiblement à

$$-(t-\tau)\square\vartheta,$$

et les divers termes d'une série de la forme

$$\nabla\vartheta,\quad\nabla^2\vartheta,\quad\nabla^2\vartheta,\quad\ldots$$

seront respectivement des quantités du premier, du second, du troisième, ... ordre. Cela posé, en se bornant à écrire, dans les développements de $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ..., Ω, les termes du premier ordre, on aura

$$\mathfrak{x}=x-(t-\tau)\square x+\ldots,$$
$$\mathfrak{y}=y-(t-\tau)\square y+\ldots,$$
$$\mathfrak{z}=z-(t-\tau)\square z+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Omega=\varpi-(t-\tau)\square\varpi+\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{x}=x-\frac{P}{S}(t-\tau)+\ldots,$$
$$\mathfrak{y}=y-\frac{Q}{S}(t-\tau)+\ldots,$$
$$\mathfrak{z}=z-\frac{R}{S}(t-\tau)+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Omega=\varpi-\left(\frac{P}{S}p+\frac{Q}{S}q+\frac{R}{S}r+\ldots+s\right)(t-\tau)+\ldots.$$

Donc les formules (9) pourront s'écrire ainsi qu'il suit

$$(11)\qquad\begin{cases}\xi=x-\dfrac{P}{S}(t-\tau)+\ldots,\\ \eta=y-\dfrac{Q}{S}(t-\tau)+\ldots,\\ \zeta=z-\dfrac{R}{S}(t-\tau)+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega=\varpi-\left(\dfrac{P}{S}p+\dfrac{Q}{S}q+\dfrac{R}{S}r+\ldots+s\right)(t-\tau)+\ldots.\end{cases}$$

Or, en supposant les équations (4) réduites aux formules (11), il suffira, pour obtenir l'équation (6), de tirer la valeur de $D_x\varpi$ des formules (11) différentiées par rapport à x, en considérant

$$\varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad\ldots,\quad s$$

et, par suite,

$$\frac{P}{S},\quad\frac{Q}{S},\quad\frac{R}{S},\quad\ldots,$$

comme des fonctions explicites des seules variables $x, y, z, \ldots, t$. Mais, dans ce cas, la première et la dernière des formules (11) donneraient

$$(12)\qquad \begin{cases} 1 = (t-\tau)\,D_x\left(\dfrac{P}{S}\right)+\ldots, \\ D_x\varpi = (t-\tau)\,D_x\left(\dfrac{P}{S}p+\dfrac{Q}{S}q+\dfrac{R}{S}r+\ldots+s\right)+\ldots, \end{cases}$$

tandis que l'on tirera des autres

$$(13)\qquad D_x\left(\frac{Q}{S}\right)+\ldots=0, \qquad D_x\left(\frac{R}{S}\right)+\ldots=0, \qquad \ldots.$$

D'ailleurs, on conclura des formules (12)

$$(14)\qquad D_x\varpi = \frac{D_x\left(\dfrac{P}{S}p+\dfrac{Q}{S}q+\dfrac{R}{S}r+\ldots+s\right)+\ldots}{D_x\left(\dfrac{P}{S}\right)+\ldots}.$$

Enfin, en réduisant $t-\tau$ à zéro, on verra les formules (10) et (14) se réduire aux suivantes :

$$(15)\qquad D_x\left(\frac{Q}{S}\right)=0, \qquad D_x\left(\frac{R}{S}\right)=0, \qquad \ldots,$$

$$(16)\qquad D_x\varpi = \frac{D_x\left(\dfrac{P}{S}p+\dfrac{Q}{S}q+\dfrac{R}{S}r+\ldots+s\right)}{D_x\left(\dfrac{P}{S}\right)}.$$

D'autre part, en considérant

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s$$

comme fonctions de $x, y, z, \ldots, t$, on tirera de l'équation (1), différentiée par rapport à x,

$$(17)\qquad P\,D_x p + Q\,D_x q + R\,D_x r + \ldots + S\,D_x s = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18)\qquad \frac{P}{S}D_x p + \frac{Q}{S}D_x q + \frac{R}{S}D_x r + \ldots + D_x s = 0;$$

et, en vertu de cette dernière formule jointe aux équations (15), on aura, pour $t=\tau$,

$$D_x\left(\frac{P}{S}p+\frac{Q}{S}q+\frac{R}{S}r+\ldots+s\right)=p\,D_x\frac{P}{S}.$$

Donc l'équation (16) donnera simplement

$$(19)\qquad D_x\varpi = p.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, et pour $t=\tau$, l'équation (6) se trouvant réduite à la formule (19), la première des formules (7) se réduira elle-même à une équation identique

$$p = p.$$

La même remarque étant applicable à chacune des équations (7), il en résulte que l'équation (10) sera, comme nous l'avions annoncé, une intégrale particulière de l'équation (1).

Il est bon d'observer que, de l'équation (1), jointe à la formule (2), on déduit immédiatement la suivante

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}=\ldots=\dfrac{dt}{S}=\dfrac{d\varpi}{Pp+Qq+Rr+\ldots+Ss} \\ \quad =\dfrac{dp}{-(X+pH)}=\dfrac{dq}{-(Y+qH)}=\dfrac{dr}{-(Z+rH)}=\ldots=\dfrac{ds}{-(S+sH)}, \end{cases}$$

dont les intégrales seront de la forme

$$(21)\qquad \begin{cases} \xi=\mathfrak{X}, \quad \eta=\mathfrak{Y}, \quad \zeta=\mathfrak{Z}, \quad \ldots, \quad \omega=\Omega, \\ \varphi=\mathfrak{P}, \quad \chi=\mathfrak{Q}, \quad \psi=\mathfrak{R}, \quad \ldots, \quad \varsigma=\mathfrak{S}, \end{cases}$$

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots, \Omega, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots, \mathfrak{S}$ désignant des fonctions déterminées de $x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s$, et les constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots, \quad \varsigma$$

étant liées entre elles par l'équation

$$(22)\qquad F(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, \omega, \varphi, \chi, \psi, \ldots, \varsigma) = 0.$$

Si des équations (21) on élimine s et ς, à l'aide des équations (1) et

(22), on retrouvera : 1° les formules (8); 2° une équation qui se déduira de ces mêmes formules. On peut donc aisément revenir des formules (21) aux formules (8), et, par conséquent, à l'équation (10). Il y a plus, pour obtenir cette dernière équation, il suffira toujours d'intégrer les équations différentielles comprises dans la formule (20), de manière que l'on ait, pour $t=\tau$,

$$(23)\quad x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,\quad \ldots,\quad \varpi=\omega,\quad p=\varphi,\quad q=\chi,\quad r=\psi,\quad \ldots,\quad s=\varsigma,$$

puis d'éliminer

$$p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,\quad s,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots,\quad \varsigma$$

entre les intégrales ainsi obtenues, jointes à l'équation (21).

Puisque l'intégrale (10) renferme, avec la constante donnée τ, n constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,$$

elle est, par rapport à l'équation (1), ce que Lagrange appelle une solution *complète*. Pour déduire de cette solution complète l'intégrale générale, il suffira, comme on sait, de poser

$$(24)\qquad \omega=\mathrm{f}(\xi,\eta,\zeta,\ldots),$$

ce qui rendra K fonction des seules constantes arbitraires

$$\zeta,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,$$

puis d'éliminer ces mêmes constantes, devenues variables, entre les équations

$$(25)\qquad \mathrm{K}=0,\quad \mathrm{D}_\xi\mathrm{K}=0,\quad \mathrm{D}_\eta\mathrm{K}=0,\quad \mathrm{D}_\zeta\mathrm{K}=0,\quad \ldots.$$

Alors l'inconnue ϖ aura nécessairement, avec les variables indépendantes

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

une relation qui dépendra de la forme de la fonction arbitraire représentée par $\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)$. D'ailleurs, pour $t=\tau$, les formules (9) coïncideront avec les n premières d'entre les équations (23), c'est-à-dire,

eu égard à la condition (24), avec les formules

$$(26)\quad x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,\quad \ldots,\quad \varpi=\mathrm{f}(\xi,\eta,\zeta,\ldots);$$

et l'élimination de ξ, η, ζ, ... entre ces dernières formules produira la suivante :

$$(27)\qquad \varpi=\mathrm{f}(x,y,z,\ldots).$$

Donc l'équation (10) a cela de remarquable, que, de cette dernière équation, jointe à la formule (24), on tire précisément l'intégrale générale présentée sous une forme telle que la valeur de l'inconnue ϖ, fournie par cette intégrale, se réduit à la fonction $\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)$, pour une valeur donnée τ de la variable t.

Appliquons maintenant les principes que nous venons d'établir à quelques exemples.

Supposons d'abord l'équation (1) réduite à la suivante :

$$(28)\qquad pqrs-xyzt=0.$$

Alors, en multipliant tous les rapports qui composent les divers membres de la formule (20) par le produit

$$(29)\qquad pqrs=xyzt,$$

on verra cette formule se réduire à

$$p\,dx=q\,dy=r\,dz=s\,dt=\tfrac{1}{4}d\varpi=x\,dp=y\,dq=z\,dr=t\,ds;$$

puis on en conclura

1°
$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x},\qquad \frac{dq}{q}=\frac{dy}{y},\qquad \frac{dr}{r}=\frac{dz}{z},\qquad \frac{ds}{s}=\frac{dt}{t},$$

par conséquent

$$(30)\qquad \frac{p}{x}=\frac{\varphi}{\xi},\qquad \frac{q}{y}=\frac{\chi}{\eta},\qquad \frac{r}{z}=\frac{\psi}{\zeta},\qquad \frac{s}{t}=\frac{\varsigma}{\tau};$$

2°
$$\tfrac{1}{4}d\varpi=\frac{\varphi}{\xi}x\,dx=\frac{\chi}{\eta}y\,dy=\frac{\psi}{\zeta}z\,dz=\frac{\varsigma}{\tau}t\,dt;$$

par conséquent

$$(31)\qquad \frac{1}{2}(\varpi-\omega)=\frac{\varphi}{\xi}(x^2-\xi^2)=\frac{\chi}{\eta}(y^2-\eta^2)=\frac{\psi}{\zeta}(z^2-\zeta^2)=\frac{\varsigma}{\tau}(t^2-\tau^2).$$

Enfin, en ayant égard à l'équation (22) ou, ce qui revient au même, à la formule

$$(32)\qquad \varphi\chi\psi\varsigma=\xi\eta\zeta\tau,$$

on tirera de la formule (31)

$$(33)\qquad \left(\frac{\varpi-\omega}{2}\right)^4=(x^2-\xi^2)(y^2-\eta^2)(z^2-\zeta^2)(t^2-\tau^2).$$

Or, il est facile de s'assurer que, dans le cas où l'on regarde ξ, η, ζ, ω comme désignant des constantes arbitraires, la formule (33) représente une intégrale de l'équation (28) ou (29). Car on tire de cette formule, en la différentiant par rapport à x, y, z ou t, après avoir pris les logarithmes des deux membres,

$$\frac{2}{\varpi-\omega}p=\frac{x}{x^2-\xi^2},\qquad \frac{2}{\varpi-\omega}q=\frac{y}{y^2-\eta^2},$$

$$\frac{2}{\varpi-\omega}r=\frac{z}{z^2-\zeta^2},\qquad \frac{2}{\varpi-\omega}s=\frac{t}{t^2-\tau^2};$$

par conséquent

$$pqrs=xyzt\,\frac{\left(\frac{\varpi-\omega}{2}\right)^4}{(x^2-\xi^2)(y^2-\eta^2)(z^2-\zeta^2)(t^2-\tau^2)}=xyzt.$$

Si maintenant on veut obtenir l'intégrale générale de l'équation (28), savoir, la valeur de ϖ qui se réduit pour $t=\tau$ à une fonction donnée $f(x,y,z)$ des trois variables x, y, z, il suffira de poser dans la formule (33)

$$\omega=f(\xi,\eta,\zeta),$$

puis d'éliminer ξ, η, ζ devenues variables entre l'équation

$$(34)\qquad \left[\frac{\varpi-f(\xi,\eta,\zeta)}{2}\right]^4=(x^2-\xi^2)(y^2-\eta^2)(z^2-\zeta^2)(t^2-\tau^2)$$

et les trois dérivées de cette équation successivement différentiée par rapport à chacune des trois quantités ξ, η, ζ.

Si l'équation donnée, étant de la forme

$$(35)\qquad pqr\ldots s=xyz\ldots t,$$

renfermait n variables indépendantes, alors, en opérant comme dans l'exemple précédent, on verrait l'équation (10) se réduire à

$$(36)\qquad \left[\frac{2}{n}(\varpi-\omega)\right]^n=(x^2-\xi^2)(y^2-\eta^2)(z^2-\zeta^2)\ldots(t^2-\tau^2).$$

Si l'équation donnée était de la forme

$$(37)\qquad F(p,q,r,\ldots,s)=0,$$

alors P, Q, R, ..., S seraient seulement fonctions de p, q, r, ..., s, et, de l'équation (20) réduite à

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\ldots=\frac{dt}{S}=\frac{dz}{Pp+Qq+Rr+\ldots+Ss}$$
$$=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dr}{0}=\ldots=\frac{ds}{0},$$

on tirerait

$$p=\varphi,\qquad q=\chi,\qquad r=\psi,\qquad \ldots,\qquad s=\varsigma,$$

$$(38)\qquad \frac{x-\xi}{P}=\frac{y-\eta}{Q}=\frac{z-\zeta}{R}=\ldots=\frac{t-\tau}{S}=\frac{\varpi-\omega}{Pp+Qq+Rr+\ldots+Ss}.$$

Alors aussi, pour obtenir l'équation (10), il suffirait d'éliminer p, q, r, ... entre les formules (38) jointes à l'équation (37). Ainsi, par exemple, si l'équation (37) se réduisait à

$$(39)\qquad p^2+q^2+r^2+\ldots+s^2=1,$$

l'équation (10) deviendrait

$$(40)\qquad (\varpi-\omega)^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2+\ldots+(t-\tau)^2.$$

Dans un autre article, je comparerai les résultats des deux méthodes d'intégration exposées, d'une part, dans cette Note, d'autre part, dans

le *Bulletin de la Société philomathique* de 1819. Cette comparaison montre qu'il existe entre les fonctions

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

et les fonctions

$$p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

des relations qui pourraient encore se déduire des principes établis dans un Mémoire de M. Jacobi, combinés avec les propositions que nous avons obtenues.

163.

CALCUL INTÉGRAL. — *Addition aux deux Notes sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R., T. XIV, p. 881, 13 juin 1842.

Il ne sera pas sans intérêt de comparer les résultats obtenus dans ces deux Notes avec ceux qu'ont trouvés MM. Jacobi et Binet, ainsi qu'avec ceux que j'avais trouvés moi-même dès l'année 1819, dans le *Bulletin de la Société philomathique* (janvier et février).

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à un nombre quelconque de variables indépendantes, on peut toujours déduire l'intégrale générale d'une quelconque des intégrales particulières, que Lagrange appelle *solutions complètes*, et qui renferment autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes. Par suite, on peut se proposer, ou de trouver directement l'intégrale générale, ou de trouver directement une solution complète quelconque, ou enfin de trouver directement une certaine solution qui mérite d'être remarquée, et qui renferme seulement les constantes arbitraires propres à représenter les valeurs initiales correspondantes que l'on attribue aux variables indépendantes dans l'intégration du système d'équations différentielles substitué à l'équation proposée. Le

premier problème a été complètement résolu dans mon Mémoire de 1819, le second dans une Note du 23 mai dernier; le troisième dans un Mémoire de M. Jacobi, que renferme le Tome III du Journal de M. Liouville; puis dans la Note présentée à l'Académie le 3 mai par M. Binet. La solution complète dont MM. Jacobi et Binet se sont spécialement occupés est aussi celle que, dans la séance du 30 mai, j'ai déduite de la méthode exposée dans la séance précédente, et caractérisée par quelques propriétés importantes. Il y a plus, dès 1819, j'avais déjà constaté l'existence de cette solution complète dans les cas particuliers que j'avais choisis pour exemple, et j'avais donné, dans le Bulletin cité, page 18, certaines formules à l'aide desquelles on peut établir généralement cette existence, comme l'a observé M. Jacobi. J'ajouterai que les formules dont il s'agit, ou plutôt celle qui en dérive, et que M. Binet a déduite du Calcul des variations, peuvent conduire elles-mêmes aux résultats que j'avais obtenus dans le *Bulletin de la Société philomathique*.

ANALYSE.

Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s) = 0,$$

dans laquelle

$$(2) \qquad p = D_x\varpi, \quad q = D_y\varpi, \quad r = D_z\varpi, \quad \ldots, \quad s = D_t\varpi,$$

c'est trouver pour

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s$$

des fonctions de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

qui vérifient simultanément la formule (1) et l'équation

$$(3) \qquad d\varpi = p\,dx + q\,dy + r\,dz + \ldots + s\,dt.$$

Lorsque les n variables x, y, z, $\ldots$, t restent indépendantes entre elles, l'équation (3) doit être vérifiée, quelles que soient leurs valeurs. Donc elle doit être vérifiée quand toutes ces valeurs, à l'exception d'une

seule, deviennent constantes, c'est-à-dire qu'alors l'équation (3) entraîne les formules (2).

Supposons maintenant que les $n-1$ variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots$$

deviennent fonctions de t et de constantes arbitraires. Les valeurs de

$$\varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,\quad s,$$

qui vérifient les formules (1) et (3), pourront elles-mêmes être considérées comme des fonctions de t et des constantes arbitraires dont il s'agit. Désignons, dans cette hypothèse, à l'aide de la caractéristique δ, une différentiation relative à une ou à plusieurs de ces constantes arbitraires, devenues variables, mais variant indépendamment de t. On tirera de l'équation (3)

$$d\,\delta\varpi = p\,d\,\delta x + q\,d\,\delta y + \ldots + dx\,\delta p + dy\,\delta q + \ldots + dt\,\delta s,$$

ou, ce qui revient au même,

$$d(\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - \ldots) = dx\,\delta p + dy\,\delta q + \ldots + dt\,\delta s - dp\,\delta x - dq\,\delta y - \ldots.$$

Or cette dernière équation se réduira simplement à une équation différentielle linéaire de la forme

$$(4)\qquad d(\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - r\,\delta z - \ldots) = \theta(\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - r\,\delta z - \ldots)\,dt,$$

si l'on choisit le facteur θ, de manière à vérifier la condition

$$(5)\qquad \begin{cases} (\theta p\,dt - dp)\,\delta x + (\theta q\,dt - dq)\,\delta y + (\theta r\,dt - dr)\,\delta r + \ldots - \theta\,dt\,\delta\varpi \\ \qquad + dx\,\delta p + dy\,\delta q + dz\,\delta r + \ldots + dt\,\delta s = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs, si l'on nomme

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},\quad \ldots,\quad \mathrm{T},\quad \Pi,\quad \mathrm{P},\quad \mathrm{Q},\quad \mathrm{R},\quad \ldots,\quad \mathrm{S}$$

les dérivées partielles de la fonction

$$\mathrm{F}(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s)$$

prises par rapport aux quantités

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,\quad s,$$

on tirera de l'équation (1), différentiée par rapport aux constantes arbitraires,

$$(6)\qquad \mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z + \ldots + \Pi\,\delta\varpi + \mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots + \mathrm{S}\,\delta s = 0;$$

et, par suite, pour vérifier l'équation (5), il suffira d'assujettir

$$\theta,\quad x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,\quad s,$$

considérées comme fonctions de t, à vérifier la condition

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\theta p\,dt - dp}{\mathrm{X}} = \dfrac{\theta q\,dt - dq}{\mathrm{Y}} = \dfrac{\theta r\,dt - dr}{\mathrm{Z}} = \ldots = \dfrac{-\theta\,dt}{\Pi} \\ \qquad = \dfrac{dx}{\mathrm{P}} = \dfrac{dy}{\mathrm{Q}} = \dfrac{dz}{\mathrm{R}} = \ldots = \dfrac{dt}{\mathrm{S}}. \end{cases}$$

Or on tire de la formule (7)

$$(8)\qquad \theta = -\frac{\Pi}{\mathrm{S}},$$

puis de cette même formule, combinée avec l'équation (3),

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{\mathrm{P}} = \dfrac{dy}{\mathrm{Q}} = \dfrac{dz}{\mathrm{R}} = \ldots = \dfrac{dt}{\mathrm{S}} = \dfrac{d\varpi}{\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{R}r + \ldots + \mathrm{S}s} \\ \qquad = \dfrac{dp}{-(\mathrm{X} + p\Pi)} = \dfrac{dq}{-(\mathrm{Y} + q\Pi)} = \dfrac{dr}{-(\mathrm{Z} + r\Pi)} = \ldots. \end{cases}$$

Pour passer immédiatement de la formule (7) à la formule (9), il suffit d'observer que des fractions égales entre elles sont encore égales à celle qu'on obtient quand on divise la somme des numérateurs de quelques-unes de ces fractions par la somme de leurs dénominateurs, et qu'on peut même, dans ces deux sommes, substituer aux deux termes de chaque fraction le produit de ces deux termes par un facteur arbitrairement choisi.

Concevons à présent que, s étant éliminé de la formule (9) à l'aide de l'équation (1), on intègre les $2n-1$ équations différentielles que comprend la formule (9). Leurs intégrales générales renfermeront $2n-1$ constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots,$$

qui pourront être censées représenter des valeurs particulières des variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots$$

correspondantes à une valeur donnée τ de la variable t; et ces intégrales elles-mêmes pourront être présentées sous les formes

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}=\xi, & \mathfrak{y}=\eta, & \mathfrak{z}=\zeta, & \ldots, & \Omega=\omega, \\ \mathfrak{P}=\varphi, & \mathfrak{Q}=\chi, & \mathfrak{R}=\psi, & \ldots, \end{cases}$$

les lettres

$$\mathfrak{x},\quad \mathfrak{y},\quad \mathfrak{z},\quad \ldots,\quad \Omega,\quad \mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q},\quad \mathfrak{R},\quad \ldots$$

désignant des fonctions déterminées de $x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots$, qui ne renfermeront aucune des constantes arbitraires, et qui se réduiront respectivement à

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots,$$

pour la valeur τ de t, en sorte qu'on aura, pour $t=\tau$,

$$(11)\qquad \begin{cases} x=\xi, & y=\eta, & z=\zeta, & \ldots, & \varpi=\omega, \\ p=\varphi, & q=\chi, & r=\psi, & \ldots. \end{cases}$$

Lorsque

$$\theta,\quad x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots$$

sont déterminés, en fonction de t et des constantes arbitraires, par les formules (8) et (10), alors, en posant, pour abréger,

$$(12)\qquad \Theta = e^{\int_\tau^t \theta\, dt},$$

et intégrant la formule (4) considérée comme une équation différentielle linéaire, on obtient, entre la valeur générale du polynôme

$$\partial\varpi - p\,\partial x - q\,\partial y - r\,\partial z - \ldots$$

et sa valeur initiale

$$\partial\omega - \varphi\,\partial\xi - \chi\,\partial\eta - \psi\,\partial\zeta - \ldots,$$

correspondante à $t=\tau$, une relation exprimée par la formule

$$(13)\qquad \partial\varpi - p\,\partial x - q\,\partial y - r\,\partial z - \ldots = \Theta(\partial\omega - \varphi\,\partial\xi - \chi\,\partial\eta - \psi\,\partial\zeta \ldots).$$

Jusqu'ici nous avons supposé que, dans les formules (10), les constantes arbitraires

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots$$

restaient indépendantes les unes des autres. Supposons maintenant qu'elles se trouvent assujetties à vérifier certaines équations de condition

$$(14)\qquad \lambda=0,\quad \mu=0,\quad \nu=0,\quad \ldots,$$

dont les premiers membres

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \ldots$$

représentent des fonctions données de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots,\quad \omega,\quad \varphi,\quad \chi,\quad \psi,\quad \ldots.$$

Si ces équations de condition sont telles que l'on ait

$$(15)\qquad \partial\omega = \varphi\,\partial\xi + \chi\,\partial\eta + \psi\,\partial\zeta + \ldots,$$

la formule (13) donnera généralement

$$(16)\qquad \partial\varpi = p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z + \ldots;$$

en d'autres termes, pour que la différence

$$\partial\varpi - p\,\partial x - q\,\partial y - r\,\partial z - \ldots$$

s'évanouisse, il suffira généralement que la différence

$$\partial\omega - \varphi\,\partial\xi - \chi\,\partial\eta - \psi\,\partial\zeta - \ldots$$

se réduise à zéro. Observons d'ailleurs que, chacune des équations (14) étant de la forme

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega, \varphi, \chi, \psi, \ldots) = 0,$$

si l'on en élimine les constantes arbitraires à l'aide des formules (10), on obtiendra une autre équation de la forme

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots, \Omega, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots) = 0,$$

qui établira une relation entre les quantités variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad \varpi,\quad p,\quad q,\quad r,\quad \ldots.$$

Concevons à présent que les équations de condition, c'est-à-dire les formules (14), soient en nombre égal à n. Si l'on en élimine

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots,\ \omega,\ \varphi,\ \chi,\ \psi,\ \ldots,$$

à l'aide des formules (10), elles se transformeront en n autres équations

$$\mathfrak{L}=0,\qquad \mathfrak{M}=0,\qquad \mathfrak{N}=0,\qquad \ldots \tag{17}$$

qui ne renfermeront plus que

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,\ \varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,$$

et pourront servir à déterminer

$$\varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots$$

en fonction de

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t.$$

Voyons maintenant dans quels cas les valeurs de

$$\varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,$$

ainsi obtenues, et la valeur correspondante de s tirée de l'équation (1) vérifieront la formule (3).

Pour que les valeurs de

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ \varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,\ s,$$

tirées des formules (1) et (10) et représentées par des fonctions déterminées de

$$t,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots,\ \omega,\ \varphi,\ \chi,\ \psi,\ \ldots,$$

deviennent propres à vérifier les équations (17), il suffit que, dans ces valeurs, les constantes arbitraires

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots,\ \omega,\ \varphi,\ \chi,\ \psi,\ \ldots,$$

cessant d'être indépendantes les unes des autres et de la variable t, soient assujetties à vérifier les conditions (14). Mais alors la valeur du polynôme

$$d\varpi - p\,dx - q\,dy - r\,dz - \ldots - s\,dt,$$

qui était nulle, en vertu de l'équation (3), se trouvera augmentée de la quantité

$$\delta\varpi - p\,\delta x - q\,\delta y - r\,\delta z - \ldots,$$

le signe δ indiquant une différentiation relative au système entier des constantes arbitraires. Donc, pour que l'équation (3) continue de subsister, il suffira que les équations de condition établies entre les constantes arbitraires, c'est-à-dire les équations (14), entraînent la formule (16), ou, ce qui revient au même, la formule (15). Donc, si les constantes arbitraires

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots,\ \omega,\ \varphi,\ \chi,\ \psi,\ \ldots$$

sont assujetties à vérifier n équations qui entraînent la formule (15), l'équation (1), considérée comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre, sera intégrée, c'est-à-dire vérifiée, en même temps que l'équation (3), par les valeurs de

$$\varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots$$

tirées des formules (17).

En résumé, par la méthode précédente, l'intégration de l'équation différentielle

$$d\varpi = p\,dx + q\,dy + r\,dz + \ldots + s\,dt,$$

dans laquelle les $2n+1$ variables

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,\ \varpi,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,\ s$$

sont liées entre elles par la formule (1), se trouve ramenée à l'intégration de la seule équation différentielle

$$\delta\omega = \varphi\,\delta\xi + \chi\,\delta\eta + \psi\,\delta\zeta + \ldots,$$

qui ne renferme plus que $2n-1$ variables. D'ailleurs, en vertu de cette dernière équation, dont le second membre renferme les différentielles des seules variables

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots,$$

ω ne peut être qu'une fonction de ces variables, et rien n'empêche de

supposer ces mêmes variables indépendantes. Or, dans cette supposition, la formule (15) donnera

$$(18)\qquad D_\xi \omega = \varphi, \quad D_\eta \omega = \chi, \quad D_\zeta \omega = \psi, \quad \dots$$

Si, pour fixer les idées, on représente par

$$f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

la valeur de ω, $f(\xi, \eta, \zeta, \dots)$ pourra être une fonction quelconque de ξ, η, ζ, ..., et les formules (18) donneront

$$(19)\qquad \begin{cases} \omega = f(\xi, \eta, \zeta, \dots), \\ \varphi = D_\xi f(\xi, \eta, \zeta, \dots), \\ \chi = D_\eta f(\xi, \eta, \zeta, \dots), \\ \psi = D_\zeta f(\xi, \eta, \zeta, \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces dernières formules représenteront, en effet, les intégrales les plus générales possibles de l'équation différentielle

$$\partial\omega = \varphi\,\partial\xi + \chi\,\partial\eta + \psi\,\partial\zeta + \dots.$$

Si l'on y substitue les valeurs de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \dots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \dots$$

tirées des formules (10), on obtiendra n autres équations

$$\mathfrak{L} = 0, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = 0, \quad \dots,$$

qui représenteront n intégrales de l'équation (3) jointes à la formule (1). Enfin, si entre ces n autres équations on élimine

$$p, \quad q, \quad r, \quad \dots,$$

on obtiendra une équation définitive

$$(20)\qquad \mathfrak{K} = 0,$$

qui renfermera seulement les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \dots, \quad t, \quad \varpi.$$

Donc cette équation définitive sera une intégrale de la formule (1), considérée comme une équation aux dérivées partielles. Elle en sera même l'intégrale générale, puisque la relation établie par cette intégrale entre les n variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad \dots, \quad t$$

et l'inconnue ϖ dépendra de la fonction

$$f(x, y, z, \dots),$$

c'est-à-dire d'une fonction arbitraire de $n - 1$ variables indépendantes.

Si l'on veut savoir à quoi se réduiront, pour $t = \tau$, les valeurs de

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \dots$$

tirées des formules

$$\mathfrak{L} = 0, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = 0, \quad \dots,$$

il suffira d'observer que, pour $t = \tau$, les formules (10) se réduisent aux formules (11), et que l'élimination des constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \dots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \dots$$

entre les formules (11) et (19) fournit les équations

$$(21)\qquad \begin{cases} \varpi = f(x, y, z, \dots), \\ p = D_x f(x, y, z, \dots), \\ q = D_y f(x, y, z, \dots), \\ r = D_z f(x, y, z, \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Donc la valeur générale de ϖ, fournie par l'équation (20), sera précisément celle qui a la double propriété de vérifier, quel que soit t, l'équation (1) considérée comme une équation aux dérivées partielles, et, pour $t = \tau$, la condition

$$(22)\qquad \varpi = f(x, y, z, \dots).$$

Il est bon d'observer que, étant donnée la valeur initiale $f(x, y, z, \dots)$ de l'inconnue ϖ, l'équation (22), combinée avec les formules (2),

entraînera, pour $t = \tau$, toutes les formules (21), desquelles on déduira immédiatement les formules (19), en substituant aux lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

les lettres

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots.$$

La même substitution suffira pour déduire la formule (15) de l'équation (3) réduite, pour une valeur constante τ de t, à la formule

$$dz = p\,dx + q\,dy + r\,dz + \ldots.$$

Nous avons jusqu'à présent laissé la fonction $f(x, y, z, \ldots)$, ou la valeur initiale de l'inconnue ϖ, entièrement arbitraire. Si cette valeur initiale était réduite à une fonction entièrement déterminée de ϖ et de n constantes arbitraires α, β, γ, ..., l'équation (20) représenterait, non plus l'intégrale générale, mais ce que Lagrange appelle une *solution complète* de l'équation (1).

Enfin, au lieu de laisser les constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

indépendantes l'une de l'autre, ce qui permet de passer de la formule (15) aux équations (18), on pourrait réduire séparément à zéro chaque terme de l'équation (15) en posant

$$\partial\xi = 0, \qquad \partial\eta = 0, \qquad \partial\zeta = 0, \qquad \ldots, \qquad \partial\omega = 0,$$

c'est-à-dire, en supposant

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega$$

indépendants des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots.$$

Donc les seules équations

$$(23) \qquad \mathfrak{X} = \xi, \qquad \mathfrak{Y} = \eta, \qquad \mathfrak{Z} = \zeta, \qquad \ldots, \qquad \Omega = \omega$$

fourniront des valeurs de

$$\varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

qui, étant exprimées en fonction de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

et de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega,$$

vérifieront simultanément les équations (1) et (3), quand on continuera de considérer ξ, η, ζ, ..., ω comme propres à représenter des constantes arbitraires. Si, entre les formules (23), on élimine

$$p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

on obtiendra une certaine équation

$$(24) \qquad K = 0$$

très distincte de la formule (20), et qui représentera, non plus une solution complète quelconque de l'équation (1), mais la solution complète dont j'ai signalé diverses propriétés remarquables dans la séance du 3 mai. Cette solution complète sera encore celle dont l'existence a été constatée, dans mon Mémoire de 1819, pour les cas particuliers traités dans ce Mémoire, et pour tous les cas, dans les Mémoires de M. Jacobi et de M. Binet.

Les calculs ci-dessus développés deviennent plus symétriques lorsqu'aux divers rapports compris dans la formule (9) on joint le suivant

$$\frac{ds}{-(T + sH)},$$

qui équivaut lui-même à chacun des autres. Alors aux intégrales (10) se joint une intégrale de la forme

$$s = \varsigma,$$

s étant une fonction déterminée de s, et ς une constante arbitraire liée avec les autres par la formule

$$F(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, \omega, \varphi, \chi, \psi, \ldots, \varsigma) = 0.$$

Observons encore que l'on pourrait réduire à une constante donnée et non arbitraire, non plus la valeur particulière τ de t, mais la valeur

particulière de l'une quelconque des autres variables indépendantes, ou même de l'inconnue ϖ, ou bien encore d'une autre variable liée à

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,\ \varpi$$

par une équation donnée. Dans ces diverses hypothèses, en opérant toujours de la même manière, on obtiendrait, au lieu de la formule (13), d'autres formules qui seraient toutes comprises, comme cas particuliers, dans la suivante :

$$(25)\qquad \begin{cases} \partial\varpi - p\,\partial x - q\,\partial y - r\,\partial z - \ldots - s\,\partial t \\ \quad = \Theta(\partial\omega - \varphi\,\partial\xi - \chi\,\partial\eta - \psi\,\partial\zeta - \ldots - \varsigma\,\partial\tau), \end{cases}$$

Dans l'équation (25), tout comme dans l'équation (13), on peut supposer à volonté que le signe ∂ indique des différentiations relatives, soit à tout le système des constantes arbitraires, soit à une partie de ce système. D'ailleurs, si, ω, φ, χ, ψ, ... étant fonctions de ξ, η, ζ, ..., la formule (13) se trouve une fois démontrée pour le cas où l'on fait varier une seule des quantités

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots,$$

elle se trouvera démontrée, par cela même, pour le cas où l'on fera varier toutes ces quantités simultanément. Cette simple observation suffit pour prouver que la formule (13) est une conséquence immédiate des équations établies dans le *Bulletin de la Société philomathique* (année 1819, pages 13 et 18).

La formule (4) avait été donnée par M. Pfaff. En intégrant cette formule, on obtient l'équation (13), qui est digne de remarque, et qui se tire immédiatement, comme on vient de le voir, des formules comprises dans mon Mémoire de 1819. La formule (13) elle-même a été obtenue par M. Binet. Enfin, une formule analogue à l'équation (13), et à laquelle on parvient, en posant, dans l'équation (21),

$$\partial\omega = 0,$$

savoir

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\partial\varpi - (p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z + \ldots + s\,\partial t) \\ &\quad = -\Theta(\varphi\,\partial\xi + \chi\,\partial\eta + \psi\,\partial\zeta + \ldots + \varsigma\,\partial\tau), \end{aligned}$$

a été donnée par M. Jacobi. Les principales différences qui existent entre l'analyse dont j'ai fait usage dans le Mémoire de 1819, et les calculs employés par MM. Jacobi et Binet, consistent : 1° en ce que je me suis servi de la formule (13), en supposant successivement la caractéristique ∂ relative à chacune des constantes arbitraires ξ, η, ζ, ... pour établir l'équation (20), tandis que MM. Jacobi et Binet se sont servis, l'un de la formule (26), l'autre de la formule (13), pour établir l'équation (24). Ajoutons que dans la Note de M. Binet, comme dans les calculs qui précèdent, les différentiations sont relatives au système entier des constantes arbitraires, tandis que dans mon Mémoire de 1819 elles se rapportaient, pour chaque formule, à une seule des constantes arbitraires

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots.$$

Enfin, dans mon Mémoire de 1819, les constantes arbitraires qui représentent les valeurs initiales des diverses variables étaient, comme on vient encore de le faire, immédiatement introduites dans les calculs, et non substituées à d'autres constantes, comme dans les Mémoires des deux géomètres dont il s'agit.

164.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles.*

C. R., T. XIV, p. 894 (13 juin 1842).

En augmentant le nombre des inconnues dans un système d'équations différentielles, ou aux dérivées partielles, d'un ordre quelconque, on peut toujours ramener l'intégration de ce système à celle d'un autre système d'équations du premier ordre. On conçoit donc que le Calcul intégral aux différences partielles peut être réduit à l'intégration

d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. En cherchant les moyens d'effectuer cette dernière intégration, je suis parvenu à des résultats qui me paraissent dignes de quelque intérêt, et que je vais indiquer en peu de mots.

On sait que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, lorsque cette équation est linéaire par rapport à l'inconnue et à ses dérivées, ou même seulement par rapport aux dérivées de l'inconnue, peut se réduire à l'intégration d'un système d'équations différentielles. Je trouve qu'on peut en dire autant d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, lorsque ces équations, étant linéaires par rapport aux dérivées des inconnues, peuvent servir à exprimer des fonctions linéaires semblables des dérivées de la première, de la seconde, de la troisième, etc. inconnue, à l'aide des diverses inconnues et des variables indépendantes. D'ailleurs, dans chaque fonction linéaire, le coefficient de chaque dérivée peut être une fonction quelconque de toutes les variables.

Lorsque des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre ne sont pas linéaires, on peut toujours ramener leur intégration à celle d'un système d'équations auxiliaires aux dérivées partielles du premier ordre, qui soient linéaires au moins par rapport aux dérivées des inconnues, et qui offrent pour variables indépendantes toutes les variables comprises dans les équations données. Les équations auxiliaires étant intégrées, l'intégration des équations données sera réduite à celle d'un système d'équations différentielles.

Enfin on sait que l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre peut se déduire immédiatement d'une intégrale particulière qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes. On peut démontrer pareillement que les intégrales générales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre peuvent se déduire immédiatement d'un système d'intégrales particulières dont chacune renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes, chacune des constantes étant renfermée dans une seule de ces équations. Dans un

prochain article, je développerai les diverses propositions que je viens d'énoncer.

165.

CALCUL INTÉGRAL. — *Remarques diverses sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R., T. XIV, p. 952 (20 juin 1842).

Dans la séance précédente, j'ai rappelé la méthode dont je m'étais servi en 1819 (*Bulletin de la Société philomathique*) pour intégrer complètement les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quel que fût d'ailleurs le nombre des variables indépendantes, et j'ai comparé cette méthode à celles qui ont été données depuis cette époque par M. Jacobi et par M. Binet. Il m'a semblé utile d'examiner s'il ne serait pas possible d'appliquer à ces mêmes équations la méthode dont Lagrange et Charpit ont fait usage, de manière à lever les difficultés que cette application semblait présenter au premier abord. Tel est l'objet de la présente Note. En approfondissant le sujet, je suis parvenu, non seulement à faire disparaître les difficultés dont il s'agit, mais encore à déduire de mon analyse quelques propositions nouvelles, et en particulier la suivante.

Supposons que l'équation donnée renferme, avec les variables indépendantes

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t,$$

dont l'une t peut représenter le temps, une inconnue ϖ, et ses dérivées partielles du premier ordre

$$p,\ q,\ r,\ \ldots,\ s$$

relatives aux diverses variables indépendantes. Si les équations différentielles, que l'on substitue à cette équation aux dérivées partielles, sont intégrées, et si le système de leurs intégrales générales est décom-

posé en deux autres systèmes qui offrent respectivement : 1° les valeurs initiales de x, y, z, ...; 2° les valeurs initiales des dérivées p, q, r, ..., et de l'inconnue ϖ, exprimées en fonction de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots,$$

on obtiendra une solution complète de l'équation aux dérivées partielles, non seulement en supposant les valeurs des dérivées p, q, r, ... déterminées en fonction de x, y, z, ..., t, ϖ par le premier système d'intégrales générales, mais encore en supposant, avant cette détermination, une ou plusieurs intégrales du premier système remplacées par une ou plusieurs intégrales correspondantes du second système, savoir, l'intégrale qui renferme la valeur initiale de x, par l'intégrale qui renferme la valeur initiale de la dérivée relative à x; l'intégrale qui renferme la valeur initiale de y, par l'intégrale qui renferme la valeur initiale de la dérivée relative à y, etc. D'ailleurs, les valeurs p, q, r, ... étant une fois déterminées en fonction de x, y, z, ..., t, ϖ, on pourra, dans tous les cas, en déduire celle de s, à l'aide de l'équation donnée, puis celle de ϖ, en intégrant la formule

$$d\varpi = p\,dx + q\,dy + r\,dz + \ldots + s\,dt.$$

166.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R., T. XIV, p. 953 (20 juin 1842).

Suivant une remarque énoncée dans mon dernier Mémoire, et plus anciennement dans un article de M. Jacobi que renferme le deuxième Volume du *Journal de Crelle*, on peut toujours intégrer des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, lorsque ces équations fournissent les valeurs de fonctions linéaires semblables

des dérivées des diverses inconnues. Dans ce nouveau Mémoire, je considère le cas général où des équations linéaires simultanées ne satisfont plus à la condition que je viens de rappeler, et je prouve qu'alors même on peut souvent réduire leur intégration à celle d'un système d'équations différentielles. J'indique les conditions qui doivent être remplies pour que cette réduction soit possible, et des transformations remarquables que peuvent subir les équations données, dans le cas où quelques-unes seulement de ces conditions se vérifient. Enfin je montre comment les principes établis dans ce nouveau Mémoire peuvent être étendus et appliqués à l'intégration d'équations non linéaires.

167.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur un théorème fondamental, dans le Calcul intégral.*

C. R., T. XIV, p. 1020 (27 juin 1842).

Dans la théorie des équations, les géomètres ont avec raison considéré comme fondamentale la question de savoir si toute équation a une racine. Pareillement, dans le Calcul intégral, une des questions les plus importantes, une question fondamentale, consiste évidemment à savoir si toute équation différentielle ou aux dérivées partielles peut être intégrée, et si un système de semblables équations peut l'être pareillement. Or, ce qui a droit de nous surprendre au premier abord, c'est que, malgré les nombreux travaux des géomètres sur le Calcul intégral, cette question si importante ne se trouve nulle part résolue dans toute sa généralité. A la vérité, l'existence des intégrales générales des équations différentielles, qui renferment une seule variable indépendante, se trouve maintenant établie par deux méthodes diverses que j'ai données, la première dans mes Leçons à l'École Polytechnique, la seconde dans un Mémoire lithographié de 1835. A la vérité encore,

l'existence des intégrales générales des équations aux dérivées partielles se trouve établie dans certains cas où l'on parvient à intégrer ces équations, par exemple lorsqu'elles se réduisent, soit à une seule équation du premier ordre, soit à des équations linéaires dans lesquelles les coefficients des inconnues et de leurs dérivées demeurent constants. Mais un système quelconque d'équations différentielles ou aux dérivées partielles admet-il toujours un système correspondant d'intégrales générales? Tel est le problème dont la solution m'a paru digne de l'attention des géomètres. Cette solution repose sur des considérations que je vais indiquer en quelques mots.

Depuis longtemps les géomètres, en supposant, sans le démontrer, que toute équation différentielle ou aux dérivées partielles admet une intégrale générale, ont regardé la formule de Taylor comme un moyen de développer cette intégrale en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières d'un accroissement i attribué à une variable indépendante t, qui peut être censée représenter le temps. D'ailleurs, à l'aide d'un théorème général que j'ai donné en 1831, et qui est relatif au développement des fonctions, on peut s'assurer que, dans le cas où la série obtenue est convergente, la somme de cette série vérifie, comme intégrale, l'équation différentielle ou aux dérivées partielles, au moins pour des valeurs numériques ou pour des modules de l'accroissement i qui ne dépassent pas une limite fixe. Il y a plus, la même remarque est applicable aux sommes des séries que l'on obtient, lorsqu'en admettant l'existence des intégrales générales d'un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, on cherche à développer ces intégrales par la formule de Taylor. Mais, dans tous les cas, il restait à démontrer que les séries obtenues étaient convergentes, du moins pour des modules de i suffisamment petits. Or ce but peut être atteint à l'aide d'un théorème fondamental qui détermine, non seulement une limite en deçà de laquelle le module de i peut varier arbitrairement sans que les séries obtenues cessent d'être convergentes, mais encore une limite de l'erreur que l'on commet en arrêtant chaque développement après un certain nombre de termes. La démonstration

de ce théorème fondamental repose, comme on le verra ci-après, sur les principes du nouveau calcul que j'ai nommé *calcul des limites*, et sur un artifice d'analyse qui peut recevoir de nombreuses et utiles applications.

ANALYSE.

Sur les modules des fonctions et sur les limites de ces modules.

Considérons d'abord une seule fonction

$$u = f(x, y, z, \ldots, t)$$

de diverses variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t;$$

attribuons à ces variables des accroissements imaginaires

$$\overline{x}, \quad \overline{y}, \quad \overline{z}, \quad \ldots, \quad \overline{t}$$

dont les modules, représentés par

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots, \quad \mathrm{t},$$

soient tellement choisis que, pour ces mêmes modules, ou pour des modules plus petits, l'expression

$$f(x+\overline{x}, y+\overline{y}, z+\overline{z}, \ldots, t+\overline{t})$$

reste fonction continue des arguments et des modules des accroissements imaginaires

$$\overline{x}, \quad \overline{y}, \quad \overline{z}, \quad \ldots, \quad \overline{t};$$

enfin soit

$$\iota = \Lambda f(x+\overline{x}, y+\overline{y}, z+\overline{z}, \ldots, t+\overline{t}) \tag{1}$$

le plus grand des modules que puisse acquérir l'expression

$$f(x+\overline{x}, y+\overline{y}, z+\overline{z}, \ldots, t+\overline{t}),$$

quand on y fait varier les arguments des accroissements imaginaires

$$\overline{x}, \quad \overline{y}, \quad \overline{z}, \quad \ldots, \quad \overline{t},$$

en laissant leurs modules invariables. On aura, d'après les principes

du calcul des limites, non seulement

$$\operatorname{mod} f(x, y, z, \ldots, t) < \iota,$$

mais encore

$$\operatorname{mod} D_x^l D_y^m \ldots D_t^n f(x, y, z, \ldots, t) < N \frac{\iota}{x^l y^m \ldots t^n}, \tag{2}$$

la valeur de N étant

$$N = (1.2\ldots l)(1.2\ldots m)\ldots(1.2\ldots n).$$

D'autre part, si la fonction $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ devient réciproquement proportionnelle à chacune des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

c'est-à-dire si l'on pose

$$u = f(x, y, z, \ldots, t) = a x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1},$$

a désignant une quantité constante, on en conclura

$$D_x^l D_y^m \ldots D_t^n f(x, y, z, \ldots, t) = N \frac{u}{(-x)^l (-y)^m \ldots (-t)^n}; \tag{3}$$

et, si dans le second membre de la formule (3) on remplace

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u$$

par

$$-x, \quad -y, \quad -z, \quad \ldots, \quad \iota,$$

on retrouvera évidemment le second membre de la formule (2). En conséquence, on peut énoncer généralement la proposition suivante :

Théorème I. — *Concevons que, dans une fonction donnée de diverses variables*

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

on attribue à ces variables des accroissements imaginaires dont les modules

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

soient tels que, pour ces modules et pour des modules plus petits, la fonction reste continue par rapport aux arguments et aux modules des accroissements imaginaires dont il s'agit. Soit d'ailleurs ι le plus grand des modules

de la fonction qui correspondent aux modules

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

des accroissements. Si, avant de faire croître les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

on différentie une ou plusieurs fois la fonction donnée par rapport à une ou à plusieurs de ces variables, on obtiendra une dérivée d'un certain ordre; et, pour trouver une limite supérieure au module de cette dérivée, il suffira :

1° de réduire la fonction donnée à un produit de la forme

$$a x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1};$$

2° de calculer, pour ce cas particulier, la valeur de la dérivée, et d'y remplacer le produit $u = a x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}$ par ι, ou, ce qui revient au même, la constante a par le produit $\iota x y z \ldots t$, puis les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

par les modules

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

pris chacun avec le signe —.

La proposition que nous venons d'établir entraine immédiatement le théorème fondamental dont voici l'énoncé :

Théorème II. — *Soient*

$$I_0, \quad I_1 i, \quad I_2 i^2, \quad \ldots \tag{4}$$

les divers termes d'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes d'une certaine variable i; et concevons que, dans cette série, les coefficients

$$I_0, \quad I_1, \quad I_2, \quad \ldots$$

se réduisent à des polynômes composés de termes dont chacun soit le produit d'un nombre constant ou plus généralement d'une constante positive par les dérivées de divers ordres de diverses fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

ou même par des puissances de ces dérivées. Soient d'ailleurs

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

les variables qui entrent dans les fonctions $u, v, w, \ldots$ *; soient encore*

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}$$

les modules d'accroissements imaginaires attribués à ces variables, et tellement choisis que, pour ces modules ou pour des modules plus petits, les fonctions, modifiées en vertu de ces accroissements, restent continues par rapport aux arguments et aux modules des accroissements dont il s'agit. Enfin soient

$$\mathfrak{r},\quad \mathfrak{r}',\quad \mathfrak{r}'',\quad \ldots$$

les plus grands modules des fonctions $u, v, w, \ldots$ *correspondants aux modules* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ *des accroissements imaginaires des variables. Pour obtenir des quantités positives*

$$\mathfrak{d}_0,\quad \mathfrak{d}_1,\quad \mathfrak{d}_2,\quad \ldots$$

respectivement supérieures aux modules des coefficients

$$\mathrm{I}_0,\quad \mathrm{I}_1,\quad \mathrm{I}_2,\quad \ldots,$$

il suffira de calculer ces coefficients dans le cas particulier où chacune des fonctions $u, v, w, \ldots$ *devient le rapport d'un facteur constant*

$$a,\quad \text{ou}\quad a',\quad \text{ou}\quad a'',\quad \ldots$$

au produit des variables qu'elle renferme, puis d'attribuer aux variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

et aux constantes

$$a,\quad a',\quad a'',\quad \ldots$$

les valeurs déterminées par le système des formules

$$(5)\qquad \begin{cases} x = -\mathrm{x}, & y = -\mathrm{y}, & z = -\mathrm{z}, & \ldots, & t = -\mathrm{t}, \\ u = \mathfrak{r}, & v = \mathfrak{r}', & w = \mathfrak{r}'', & \ldots. \end{cases}$$

Corollaire I. — Nommons $\mathfrak{r}$ le module de i. Si la série

$$(6)\qquad \mathfrak{d}_0,\quad \mathfrak{d}_1\mathfrak{r},\quad \mathfrak{d}_2\mathfrak{r}^2,\quad \ldots$$

est convergente, on pourra en dire autant à plus forte raison de la

série (4). Soient, dans cette hypothèse,

$$(7)\qquad \mathrm{S} = \mathrm{I}_0 + \mathrm{I}_1 i + \mathrm{I}_2 i^2 + \ldots$$

et

$$(8)\qquad s = \mathfrak{d}_0 + \mathfrak{d}_1 \mathfrak{r} + \mathfrak{d}_2 \mathfrak{r}^2 + \ldots.$$

Si, pour calculer les sommes S et s, on arrête les deux séries après un même nombre de termes, le reste de la série (4) offrira évidemment un module inférieur au reste correspondant de la série (6). D'ailleurs, si la somme s peut être présentée sous une forme finie, elle pourra évidemment se déduire d'une valeur particulière de la somme S, par l'artifice de calcul qui sert à transformer I_n en $\mathfrak{d}_n$, et par la substitution du module $\mathfrak{r}$ à la variable i.

Corollaire II. — Les valeurs des inconnues qui doivent vérifier des équations différentielles ou aux dérivées partielles se développent, par la formule de Taylor ou de Maclaurin, en séries précisément semblables à la série (4). Donc les principes que nous venons d'établir s'appliquent à l'intégration de ces équations par séries, et, pour démontrer l'existence de leurs intégrales générales dans tous les cas, il suffit d'intégrer ces équations dans le cas particulier où chacune des fonctions qui forment leurs seconds membres devient réciproquement proportionnelle aux quantités variables dont elle dépend. C'est ce que nous expliquerons plus en détail dans les prochaines séances.

168.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur certaines solutions complètes d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R., T. XIV, p. 1026 (27 juin 1842).

Soit donnée, entre n variables indépendantes

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t$$

et l'inconnue ϖ, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, \ldots, t, \varpi, p, q, r, \ldots, s) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle on a

$$p = D_x\varpi, \quad q = D_y\varpi, \quad r = D_z\varpi, \quad \ldots, \quad s = D_t\varpi.$$

Si les équations différentielles, que l'on substitue à cette équation aux dérivées partielles, sont intégrées de manière que, pour $t = \tau$, on ait

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad \varpi = \omega, \quad \ldots, \quad p = \varphi, \quad q = \chi, \quad r = \psi, \quad \ldots,$$

les intégrales obtenues pourront être présentées sous la forme

$$\begin{cases} \mathfrak{X} = \xi, & \mathfrak{Y} = \eta, & \mathfrak{Z} = \zeta, & \ldots & \Omega = \omega, \\ \mathfrak{P} = \varphi, & \mathfrak{Q} = \chi, & \mathfrak{R} = \psi, & \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots, \Omega, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots$ désignant des fonctions de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$$

qui ne renfermeront aucune des constantes arbitraires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots;$$

et si, en supposant que ces constantes arbitraires deviennent variables, on désigne, avec M. Binet, par la caractéristique δ une différentiation relative à leur système, on pourra, comme j'en ai fait la remarque (1), ramener l'intégration de l'équation (1), ou, ce qui revient au même, l'intégration de l'équation différentielle

$$d\varpi = p\,dx + q\,dy + r\,dz + \ldots + s\,dt, \tag{3}$$

dans laquelle les $2n + 1$ variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t, \quad \varpi, \quad p, \quad q, \quad r, \quad \ldots, \quad s$$

sont liées entre elles par la formule (1), à l'intégration de l'équation différentielle

$$\delta\omega = \varphi\,\delta\xi + \chi\,\delta\eta + \psi\,\delta\zeta + \ldots, \tag{4}$$

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 451. Extrait n° 163.

qui ne renferme plus que $2n - 1$ variables

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots.$$

Or on vérifie évidemment l'équation (4) en supposant constantes, ou les quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \omega, \tag{5}$$

ou les quantités

$$\varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots, \quad \omega - \varphi\xi - \chi\eta - \psi\zeta - \ldots; \tag{6}$$

ou bien encore en supposant constantes l'une des deux quantités ξ, φ, avec l'une des deux quantités η, χ, avec l'une des deux quantités ζ, ψ, ..., en même temps que l'expression à laquelle se réduit le polynôme

$$\omega - \varphi\xi - \chi\eta - \psi\zeta - \ldots$$

lorsque, parmi les termes négatifs

$$-\varphi\xi, \quad -\chi\eta, \quad -\psi\zeta, \quad \ldots,$$

on conserve seulement ceux dans lesquels les premiers facteurs sont considérés comme constants. Cette simple observation fournit immédiatement, et sans aucune intégration nouvelle, les diverses solutions complètes dont j'ai parlé dans la Note que renferme le *Compte rendu* de la dernière séance. Ainsi, en particulier, il en résulte que l'on obtiendra une solution complète en supposant les valeurs de l'inconnue ϖ et de ses dérivées $p, q, r, \ldots$ déterminées, soit par le système des équations (1), soit par le système des suivantes

$$\mathfrak{P} = \varphi, \quad \mathfrak{Q} = \chi, \quad \mathfrak{R} = \psi, \quad \ldots, \quad \Omega - \mathfrak{P}\mathfrak{X} - \mathfrak{Q}\mathfrak{Y} - \mathfrak{R}\mathfrak{Z} - \ldots = \upsilon, \tag{7}$$

$\varphi, \chi, \psi, \ldots, \upsilon$ désignant des constantes arbitraires. Plus généralement, on obtiendra une solution complète, si l'on suppose les valeurs de ϖ, $p, q, r, \ldots$ déterminées par l'une des équations

$$\mathfrak{X} = \xi, \quad \mathfrak{P} = \varphi,$$

jointe à l'une des équations

$$\mathfrak{Y}=\eta, \qquad \mathfrak{Z}=\zeta,$$

puis à l'une des équations

$$\mathfrak{x}=\zeta, \qquad \mathfrak{R}=\psi, \qquad \ldots,$$

et enfin à l'équation

$$\Omega-\mathfrak{P}(\mathfrak{X}-\xi)-\mathfrak{Q}(\mathfrak{Y}-\eta)-\mathfrak{R}(\mathfrak{z}-\zeta)\ldots=\text{const.},$$

et si dans ces diverses équations on considère chacune des lettres

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \varphi, \quad \chi, \quad \psi, \quad \ldots$$

comme représentant une constante arbitraire.

FIN DU TOME VI DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SIXIÈME.

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

NOTES ET ARTICLES EXTRAITS DES COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Pages

112. Calcul intégral. — Sur les intégrales multiples 5

113. Mécanique céleste. — Méthodes propres à simplifier le calcul des inégalités périodiques et séculaires des mouvements des planètes 16

114. Mécanique céleste. — Sur les variations séculaires des éléments elliptiques dans le mouvement des planètes 34

115. Rapport sur une Note de M. *Paulet* (de Genève), relative à un théorème dont le théorème de Fermat ne serait qu'un cas particulier 49

116. Arithmétique. — Rapport sur une méthode abrégée de multiplication, présentée à l'Académie par M. *Thoyer* 49

117. Arithmétique. — Addition au Rapport sur une méthode de calcul, présentée à l'Académie par M. *Thoyer*, employé à la Banque de France 53

118. Analyse mathématique. — Mémoire sur diverses formules d'Analyse 63

119. Analyse algébrique. — Sur le développement d'une fonction entière du sinus et du cosinus d'un arc en série ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de cet arc 78

120. Sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques 86

121. Analyse mathématique. — Note sur la formation des fonctions alternées qui servent à résoudre le problème de l'élimination 87

122. Analyse mathématique. — Mémoire sur diverses formules relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres 99

Pages

123. Analyse mathématique. — Mémoire sur diverses formules relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres ... 113

124. Analyse mathématique. — Rapport sur un Mémoire de M. *Broch*, relatif à une certaine classe d'intégrales ... 146

125. Analyse mathématique. — Mémoires sur des formules générales qui se déduisent du Calcul des résidus et qui paraissent devoir concourir notablement aux progrès de l'Analyse infinitésimale ... 149

126. Analyse mathématique. — Sur la détermination et la réduction des intégrales dont les dérivées renferment une ou plusieurs fonctions implicites d'une même variable ... 159

127. Analyse mathématique. — Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable ... 175

128. Analyse mathématique. — Sur la détermination et la transformation d'un grand nombre d'intégrales définies nouvelles ... 187

129. Analyse mathématique. — Mémoire sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles partielles, et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique ... 202

130. Calcul intégral. — Mémoire sur l'emploi de la transformation des coordonnées pour la détermination et la réduction des intégrales définies multiples ... 217

131. Calcul intégral. — Mémoire sur diverses transformations remarquables de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène aux différences partielles ... 225

132. Calcul intégral. — Mémoire sur l'intégration des systèmes d'équations linéaires aux différences partielles ... 231

133. Calcul intégral. — Mémoire sur la réduction de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène ... 232

134. Calcul intégral. — Méthode abrégée pour l'intégration des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants ... 244

135. Calcul intégral. — Note sur la transformation des sommes d'intégrales ... 260

136. Physique mathématique. — Mémoire sur la surface caractéristique correspondante à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, et sur la surface des ondes ... 263

137. Physique mathématique. — Mémoire sur l'emploi des fonctions principales, représentées par des intégrales définies doubles, dans la recherche de la forme des ondes sonores, lumineuses, etc ... 267

138. Calcul des résidus. — Rapport sur un Mémoire de M. *Oltramare*, relatif au calcul des résidus ... 277

139. Mécanique céleste. — Méthode nouvelle pour le calcul des inégalités des mouvements planétaires, et en particulier des inégalités à longues périodes ... 280

140. Physique mathématique. — Note sur la surface des ondes lumineuses dans les cristaux à deux axes optiques ... 283

Pages

141. Calcul intégral. — Note sur l'intégrale définie double qui sert à l'intégration d'une équation caractéristique homogène ... 287

142. Calcul intégral. — Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène, et sur les conséquences qu'entraîne cette réduction ... 288

143. Calcul intégral. — Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une fonction caractéristique homogène, et sur les conséquences qu'entraîne cette réduction ... 303

144. Calcul intégral. — Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène ... 315

145. Calcul intégral. — Mémoire sur l'intégration des équations homogènes en termes finis ... 326

146. Mécanique céleste. — Note sur une transcendante que renferme le développement de la fonction perturbatrice relative au système planétaire ... 341

147. Analyse mathématique. — Sur le développement du reste qui complète la série de *Taylor* en une série nouvelle ... 347

148. Mécanique céleste. — Note sur la substitution des anomalies excentriques aux anomalies moyennes, dans le développement de la fonction perturbatrice ... 354

149. Analyse mathématique. — Note sur le développement des fonctions en séries ... 359

150. Calcul intégral. — Note sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées ... 365

151. Observations relatives à une Note présentée par M. *Blanchet* ... 367

152. Analyse mathématique. — Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et à la quadrature des surfaces ... 369

153. Calcul intégral. — Note sur quelques théorèmes de Calcul intégral ... 375

154. Calcul intégral. — Note sur la réduction de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène ... 383

155. Calcul intégral. — Addition à la Note insérée dans le *Compte rendu* de la précédente séance ... 387

156. Calcul intégral. — Note sur diverses transformations de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène ... 389

157. Calcul intégral. — Addition aux Notes insérées dans les *Comptes rendus* des séances précédentes ... 395

158. Physique mathématique. — Rapport sur deux Mémoires de M. *Blanchet*, relatifs à la propagation du mouvement dans les milieux élastiques cristallisés, et en particulier à la délimitation des ondes ... 401

159. Notes ajoutées au Rapport qui précède ... 404

160. Analyse mathématique. — Rapport sur une Note de M. *Passot*, relative à la détermination de la variable indépendante dans l'analyse des courbes ... 420

Pages

161. CALCUL INTÉGRAL. — Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 423

162. CALCUL INTÉGRAL. — Sur une intégrale remarquable d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre 431

163. CALCUL INTÉGRAL. — Addition aux deux Notes sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre 444

164. CALCUL INTÉGRAL. — Mémoire sur l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles 457

165. CALCUL INTÉGRAL. — Remarques diverses sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 459

166. CALCUL INTÉGRAL. — Mémoire sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre 460

167. CALCUL INTÉGRAL. — Mémoire sur un théorème fondamental, dans le Calcul intégral 461

168. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Note sur certaines solutions complètes d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre 467

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME VI DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

13717 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

貴重書

