§ II. — *Méthode abrégée pour la sommation des valeurs d'une intégrale dont la dérivée renferme plusieurs fonctions implicites de la variable x.*

Soit $f(x)$ une fonction donnée de la variable x. Si à cette variable x on substitue une autre variable t liée à x par l'équation

$$F(x, t) = 0, \tag{1}$$

alors, en nommant $\Phi(x, t)$, $\Psi(x, t)$ les deux dérivées partielles de la fonction $F(x, t)$ relatives aux deux variables x, t, et

$$\tau, \quad \xi$$

deux valeurs particulières correspondantes de ces mêmes variables, on aura

$$\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx = -\int_{\tau}^{t} \frac{\Psi(x, t)}{\Phi(x, t)} f(x)\,dt. \tag{2}$$

Si, d'ailleurs, on représente par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

les diverses racines de l'équation (1), c'est-à-dire, les diverses valeurs de la variable x, considérée comme fonction de t en vertu de cette même équation, et si l'on pose, pour abréger,

$$s = \int_{\xi_1}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{\xi_2}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots = \sum \int_{\xi}^{x} f(x)\,dx, \tag{3}$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ étant les valeurs de $x_1, x_2, \ldots$ qui correspondent à $t = \tau$, on aura

$$s = -\int_{\tau}^{t} \mathcal{E}\frac{\Psi(x, t)}{((F(x, t)))} f(x)\,dt; \tag{4}$$

puis, en supposant que le rapport

$$\frac{\Psi(x, t)}{F(x, t)}$$

ne devienne infini qu'avec

$$\frac{1}{F(x, t)},$$

on tirera de la formule (4)

$$s = \mathcal{E}((f(x)))\int_{\tau}^{t} \frac{\Psi(x, t)}{F(x, t)}\,dt - \int_{\tau}^{t} \mathcal{E}\left(\left(f(x)\frac{\Psi(x, t)}{F(x, t)}\right)\right)dt, \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum \int_{\xi}^{x} f(x)\,dx = \mathcal{E}((f(x)))\,1\left[\frac{F(x, t)}{F(x, \tau)}\right] - \int_{\tau}^{t} \mathcal{E}\left(\left(f(x)\frac{\Psi(x, t)}{F(x, t)}\right)\right)dt. \tag{6}$$

On ne doit pas oublier que, dans la formule (6), la sommation indiquée par le signe Σ s'étend aux diverses valeurs de x qui vérifient l'équation (1).

Pour que la formule (6) subsiste, il n'est pas nécessaire que la dérivée de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx,$$

représentée par $f(x)$, soit une fonction explicite de la variable x; et l'on pourrait, dans la formule dont il s'agit, remplacer $f(x)$ par une fonction continue

$$f(x, y, z, \ldots)$$

de la variable x et d'autres variables y, z, ... qui seraient elles-mêmes des fonctions de x déterminées par certaines équations.

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que, dans la formule (6), on remplace $f(x)$ par $f(x, y)$, y étant une fonction de x, liée à x par une certaine équation

$$Y = 0, \tag{7}$$

dont le premier membre renferme x et y. Supposons, d'ailleurs, qu'à l'équation (7) on joigne une autre équation de la forme

$$\mathcal{F}(x, y, t) = 0 \tag{8}$$

dont le premier membre soit fonction de y et de la nouvelle variable t. Si l'on nomme

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots$$

les diverses racines de l'équation (7) résolue par rapport à y, c'est-à-dire, les diverses fonctions de x que cette équation donne pour valeurs de y, on pourra, dans la formule (6), remplacer successivement le facteur

$$f(x)$$

par chacune des fonctions

$$f(x,y_1),\quad f(x,y_2),\quad \ldots,$$

pourvu que l'on y remplace en même temps

$$F(x,t)$$

par l'une des fonctions

$$\vec{\sigma}(x,y_1,t),\quad \vec{\sigma}(x,y_2,t),\quad \ldots.$$

On trouvera, par exemple,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}\sum\int_\xi^x f(x,y_1)\,dx = {} & \mathcal{L}\left((f(x,y_1))\right)l\left[\frac{\vec{\sigma}(x,y_1,t)}{\vec{\sigma}(x,y_1,\tau)}\right]\\ & -\int_\tau^t \mathcal{L}\left((f(x,y_1)\,D_t l\,\vec{\sigma}(x,y_1,t)\right)\right)dt,\end{aligned}\right.$$

le signe Σ étant relatif aux seules valeurs de x qui vérifieront l'équation

$$\vec{\sigma}(x,y_1,t)=0.$$

Cela posé, combinons entre elles, par voie d'addition, la formule (9) et les formules analogues. Nommons

$$s$$

la somme totale des valeurs de l'intégrale

$$\int_\xi^x f(x,y)\,dx,$$

correspondantes, non seulement aux diverses valeurs y_1, y_2, ... de y considérée comme fonction de x, mais encore, pour chaque valeur de y, aux diverses valeurs de x qui vérifient l'équation (8), en sorte

qu'on ait

$$(10)\qquad s=\sum\int_\xi^x f(x,y_1)\,dx+\sum\int_\xi^x f(x,y_2)\,dx+\ldots,$$

le signe Σ se rapportant, dans le premier terme de la valeur de s, aux seules valeurs de x qui vérifient l'équation

$$\vec{\sigma}(x,y_1,t)=0,$$

dans le second terme, aux seules valeurs de x qui vérifient l'équation

$$\vec{\sigma}(x,y_2,t)=0,\qquad \ldots.$$

Enfin posons, pour abréger,

$$(11)\qquad f(x,y_1)\,l\,\vec{\sigma}(x,y_1,t)+f(x,y_2)\,l\,\vec{\sigma}(x,y_2,t)+\ldots=\Pi(x,t).$$

On trouvera

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}s=\mathcal{L}\left((f(x,y_1))\right)l\left[\frac{\vec{\sigma}(x,y_1,t)}{\vec{\sigma}(x,y_1,\tau)}\right]+\mathcal{L}\left((f(x,y_2))\right)l\left[\frac{\vec{\sigma}(x,y_2,t)}{\vec{\sigma}(x,y_2,\tau)}\right]+\ldots\\ -\int_\tau^t \mathcal{L}\left((D_t l\,\Pi(x,t))\right)dt.\end{aligned}\right.$$

Pour plus de simplicité, on peut écrire

$$(13)\qquad s=\mathcal{L}\left((\Pi(x,t)-\Pi(x,\tau))\right)-\int_\tau^t \mathcal{L}\left((D_t l\,\Pi(x,t))\right)dt,$$

pourvu que, dans l'expression

$$\mathcal{L}\left((\Pi(x,t)-\Pi(x,\tau))\right),$$

on étende l'extraction de résidus indiquée par le signe $\mathcal{L}$ aux seules valeurs de x qui rendent infinies les fonctions

$$f(x,y_1),\quad f(x,y_2),\quad \ldots.$$

Il est bon d'observer que, en vertu de la formule (11),

$$D_t l\,\Pi(x,t)$$

sera une fonction symétrique des racines de l'équation (7). On aura

donc par suite, sous les conditions indiquées par le calcul des résidus,

$$(14) \qquad \mathcal{E}((\mathrm{D}_t \mathrm{l}\,\Pi(x,t))) = \mathcal{E}\frac{\mathrm{D}_t \mathrm{l}\,\Pi\left(\frac{1}{x},t\right)}{((x^2))}.$$

Or, de la formule (13), jointe à la formule (14), on tirera

$$(15) \qquad s = \mathcal{E}((\Pi(x,t)-\Pi(x,\tau))) - \mathcal{E}\frac{\Pi\left(\frac{1}{x},t\right)-\Pi\left(\frac{1}{x},\tau\right)}{((x^2))}.$$

Supposons maintenant que, dans la formule (6), on remplace $\mathrm{f}(x)$ par

$$\mathrm{f}(x,y,z,\ldots),$$

$y, z, \ldots$ étant des fonctions de x, liées à x par certaines équations

$$(16) \qquad \mathrm{Y}=0, \quad \mathrm{Z}=0, \quad \ldots.$$

Supposons d'ailleurs qu'à l'équation (7) on joigne une autre équation de la forme

$$(17) \qquad \vec{\mathcal{F}}(x,y,z,\ldots,t)=0,$$

dont le premier membre soit fonction de $y, z, \ldots$ et de la nouvelle variable t. Si l'on nomme s la somme des valeurs de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} \mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\,dx,$$

correspondantes, non seulement aux divers systèmes des valeurs de $y, z, \ldots$, considérées comme fonctions de x, mais aussi aux diverses valeurs que fournira l'équation (17) pour la variable x considérée comme fonction de t; alors, par une marche entièrement semblable à celle que nous avons suivie tout à l'heure, on arrivera encore aux formules (13) et (15), pourvu que l'on pose

$$(18) \qquad \Pi(x,t) = \Sigma\,\mathrm{f}(x,y,z,\ldots)\,\mathrm{l}\,\vec{\mathcal{F}}(x,y,z,\ldots,t),$$

la sommation que le signe Σ indique s'étendant aux divers systèmes de valeurs de $y, z, \ldots$ qui vérifient les équations (16).

§ III. — *Exemples.*

Nous donnerons, dans d'autres Mémoires, de nombreuses applications des formules ci-dessus établies et en particulier de la formule (15) du § II. Aujourd'hui, pour mieux constater l'exactitude de cette formule, nous nous bornerons à en déduire quelques théorèmes déjà connus, ou quelques résultats que l'on puisse aisément vérifier à l'aide des méthodes d'intégration généralement adoptées.

Supposons d'abord que l'équation (7) du § II se réduise à

$$(1) \qquad y^n = \mathrm{X},$$

X étant une fonction entière de la seule variable x. Supposons encore que le premier membre $\vec{\mathcal{F}}(x,y,t)$ de l'équation

$$(2) \qquad \vec{\mathcal{F}}(x,y,t)=0,$$

soit une fonction entière des variables x, y, et que l'on ait

$$(3) \qquad \mathrm{f}(x,y)=\frac{\mathrm{f}(x)}{y},$$

$\mathrm{f}(x)$ désignant une fonction rationnelle de la variable x. Les diverses racines

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots$$

de l'équation (1) seront respectivement proportionnelles aux diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; d'où il suit que leurs puissances positives ou négatives, du degré m ou du degré $-m$, offriront une somme nulle, quand m sera un entier non divisible par n, en sorte qu'on aura, par exemple,

$$(4) \qquad \frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots=0.$$

D'ailleurs, si l'on pose, pour abréger,

$$(5) \qquad \varpi(x,t) = \frac{1}{y_1}\,\mathrm{l}\,\vec{\mathcal{F}}(x,y_1,t)+\frac{1}{y_2}\,\mathrm{l}\,\vec{\mathcal{F}}(x,y_2,t)+\ldots,$$

la formule (11) du § II donnera

$$\Pi(x,t) = f(x)\,\varpi(x,t); \tag{6}$$

et, comme de l'équation (5), combinée avec la formule (4), on tirera

$$\varpi(x,t) = \frac{1}{y_\iota}\,l\left[\frac{\vartheta(x,y,t)}{\vartheta(x,0,t)}\right] + \frac{1}{y_\varkappa}\,l\left[\frac{\vartheta(x,y_\varkappa,t)}{\vartheta(x,0,t)}\right] + \ldots,$$

il est clair que la fonction $\varpi(x,t)$ ne deviendra point infinie avec les facteurs

$$\frac{1}{y_\iota},\quad \frac{1}{y_\varkappa},\quad \ldots.$$

De cette remarque, jointe à l'équation (6), on conclura que, dans la formule (15) du § I, l'expression

$$\mathcal{E}((\Pi(x,t) - \Pi(x,\tau)))$$

peut être réduite à

$$\mathcal{E}[\varpi(x,t) - \varpi(x,\tau)]((f(x))).$$

Donc, en vertu de cette même formule, la valeur de la somme

$$s = \sum\int_\xi^x f(x,y)\,dx = \sum\int_\xi^x f(x)\frac{dx}{y} \tag{7}$$

sera

$$\left\{\begin{aligned}\sum\int_\xi^x f(x)\frac{dx}{y} &= \mathcal{E}[\varpi(x,t) - \varpi(x,\tau)]((f(x)))\\ &\quad - \mathcal{E}\frac{\varpi\left(\frac{1}{x},t\right) - \varpi\left(\frac{1}{x},\tau\right)}{((x^2))}\left(\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right).\end{aligned}\right. \tag{8}$$

On ne devra pas oublier que, dans le premier membre de la formule (8), la sommation indiquée par le signe Σ s'étend, non seulement à toutes les valeurs de y qui vérifient l'équation (1), mais aussi, pour chacune de ces valeurs de y, à toutes les valeurs de x qui vérifient l'équation (2).

Si, dans la formule (8), on pose en particulier

$$f(x) = \frac{1}{x-a},$$

a désignant une constante arbitrairement choisie, on trouvera simplement

$$\sum\int_\xi^x \frac{dx}{(x-a)y} = \varpi(a,t) - \varpi(a,\tau). \tag{9}$$

Enfin, si l'on prend $n = 2$, on aura, dans les formules (8) et (9),

$$\varpi(x,t) = \frac{1}{y_\iota}\,l\vartheta(x,y_\iota,t) + \frac{1}{y_\varkappa}\,l\vartheta(x,y_\varkappa,t),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,l\left[\frac{\vartheta(x,\sqrt{\mathrm{X}},t)}{\vartheta(x,-\sqrt{\mathrm{X}},t)}\right]. \tag{10}$$

La formule (8) coïncide au fond avec celles que renferme un Mémoire de M. Broch, inséré dans le t. 20 du *Journal de M. Crelle*, savoir, lorsque n est un nombre pair, avec la formule (58) de ce Mémoire, et lorsque n est un nombre impair, avec la formule (59) (*ibidem*). Le cas particulier où l'on suppose $n = 2$ est celui qu'Abel avait déjà traité (*voir* le t. I des *Œuvres d'Abel*, Mémoire XV). Ajoutons que, dans le cas où les fonctions implicites de x, représentées par y, z, ..., se réduisent à une seule, et où

$$\mathrm{Y},\quad \vartheta(x,y,t)$$

sont des fonctions entières des variables x, y, la fonction

$$\mathrm{f}(x,y)$$

étant elle-même une fonction rationnelle de ces variables, la valeur de la somme s pourrait être déterminée à l'aide d'une formule qui a été donnée par Abel dans le Mémoire couronné, et qui doit nécessairement s'accorder avec la formule (15) du § II.

Lorsque $f(x)$ se réduit à une fonction entière de x, dont le degré,

augmenté d'une unité, reste inférieur à la moitié du degré de la fonction X, la formule (8) donne simplement

$$\sum \int_{\xi}^{x} f'(x) \frac{dx}{y} = 0. \tag{11}$$

Cette dernière formule comprend, comme cas particulier, le théorème d'Euler relatif à l'intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{\varpi(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{\varpi(y)}} = 0,$$

dans laquelle $\varpi(x)$ représente une fonction entière de x du quatrième degré.

Concevons maintenant que l'on veuille se servir de la formule (15) du § II pour déterminer la somme s des diverses valeurs d'une intégrale dont la dérivée renferme deux fonctions implicites y, z de la variable principale x; et, pour donner un exemple de cette détermination dans un cas très simple, supposons que l'on ait

$$y^2 = \alpha + x, \qquad z^2 = \alpha - x, \tag{12}$$

α désignant une quantité positive. Supposons encore que la variable principale x soit liée à la nouvelle variable t par l'équation

$$y - z = t, \tag{13}$$

et que l'intégration relative à t s'effectue entre deux limites positives dont la plus grande ne dépasse pas $\sqrt{2\alpha}$. Comme on tirera des équations (12) et (13)

$$x^2 = t^2\left(\alpha - \frac{t^2}{4}\right), \tag{14}$$

et, par suite,

$$x = t\left(\alpha - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -t\left(\alpha - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

l'intégration relative à x s'effectuera elle-même entre deux limites ou positives ou négatives, mais dont les valeurs numériques ne dépasseront pas le nombre α. Ajoutons que l'on déduira de la première des formules (12) deux valeurs de y, savoir

$$y = \sqrt{\alpha + x}, \qquad y = -\sqrt{\alpha + x},$$

et de la seconde des formules (12) deux valeurs de z, savoir

$$z = \sqrt{\alpha - x}, \qquad z = -\sqrt{\alpha - x}.$$

Or, t restant par hypothèse positif et inférieur à $\sqrt{2\alpha}$, il faudra, pour vérifier l'équation (13), supposer nécessairement, ou

$$y = \sqrt{\alpha + x}, \qquad z = \sqrt{\alpha - x}, \qquad x = t\left(\alpha - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$y = -\sqrt{\alpha + x}, \qquad z = -\sqrt{\alpha - x}, \qquad x = -t\left(\alpha - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais l'équation (13) ne pourra plus être vérifiée si l'on y suppose

$$y = \sqrt{\alpha + x}, \qquad z = -\sqrt{\alpha - x},$$

ou bien

$$y = -\sqrt{\alpha + x}, \qquad z = \sqrt{\alpha - x}.$$

Cela posé, soit

$$f(x, y, z)$$

une fonction rationnelle quelconque de x, y, z, et faisons, pour abréger,

$$\xi = \tau\left(\alpha - \frac{\tau^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Xi = t\left(\alpha - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La somme

$$s = \sum \int_{\xi}^{x} f(x, y, z)\, dx$$

des valeurs de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} f(x, y, z)\, dx$$

qui correspondent, non seulement aux diverses valeurs de y et de z tirées des formules (12), mais aussi, pour chaque système de valeurs de y et de z, aux diverses valeurs de x tirées de la formule (13), se

réduira simplement à

$$s=\int_{\xi}^{\Xi} f(x,\sqrt{\alpha+x},\sqrt{\alpha-x})\,dx+\int_{-\xi}^{-\Xi} f(x,-\sqrt{\alpha+x},-\sqrt{\alpha-x})\,dx,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$s=\int_{\xi}^{\Xi}\left[f(x,\sqrt{\alpha+x},\sqrt{\alpha-x})-f(-x,-\sqrt{\alpha-x},-\sqrt{\alpha+x})\right]dx.$$

Telle est la somme dont l'équation (15) du § II déterminera la valeur. En d'autres termes, on aura

$$(16)\qquad s=\int_{\xi}^{x}\left[f(x,\sqrt{\alpha+x},\sqrt{\alpha-x})-f(-x,-\sqrt{\alpha-x},-\sqrt{\alpha+x})\right]dx,$$

les limites ξ, x de l'intégration relative à x étant liées à t et à τ par les formules

$$(17)\qquad \xi=\tau\left(\alpha-\frac{\tau^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad x=t\left(\alpha-\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si, pour fixer les idées, on prend

$$f(x,y,z)=\frac{f(x)}{y+z},$$

$f(x)$ étant une fonction rationnelle de x; alors, en posant, pour abréger,

$$(18)\qquad \begin{cases} \varpi(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}\,l\left(\dfrac{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}-t}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}+t}\right) \\ \qquad\quad +\dfrac{1}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}\,l\left(\dfrac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}-t}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}+t}\right), \end{cases}$$

on tirera de la formule (15) du § II

$$(19)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\xi}^{x}\frac{f(x)+f(-x)}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}\,dx \\ \quad=\alpha^{\frac{1}{2}}f(0)\,l\left(\dfrac{2\sqrt{\alpha}-t}{2\sqrt{\alpha}+t}\,\dfrac{2\sqrt{\alpha}+\tau}{2\sqrt{\alpha}-\tau}\right)+\mathcal{E}\left[\varpi(x,t)-\varpi(x,\tau)\right]((f(x))) \\ \qquad\qquad -\mathcal{E}\dfrac{\left[\varpi\left(\frac{1}{x},t\right)-\varpi\left(\frac{1}{x},\tau\right)\right]f\left(\frac{1}{x}\right)}{((x^2))}. \end{cases}$$

Si l'on pose, en particulier, $f(x)=1$, on trouvera

$$(20)\qquad \int_{\xi}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}=t-\tau+\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2}\left(l\,\frac{2\sqrt{\alpha}-t}{2\sqrt{\alpha}+t}-l\,\frac{2\sqrt{\alpha}-\tau}{2\sqrt{\alpha}+\tau}\right),$$

x étant toujours lié à t, et ξ à τ, par les formules (17) ou, ce qui revient au même, par les suivantes :

$$(21)\qquad t=\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x},\qquad \tau=\sqrt{\alpha+\xi}-\sqrt{\alpha-\xi}.$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier l'exactitude de la formule (20), soit à l'aide des méthodes d'intégration généralement suivies, soit même à l'aide de la seule différentiation de ses deux membres.

127.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable.*

C. R., t. XII, p. 1133 (21 juin 1841).

Les racines d'une équation qui renferme deux variables x, t, et que l'on résout par rapport à la variable x ou, ce qui revient au même, les racines d'une équation qui renferme, avec l'inconnue x, un paramètre variable t, jouissent de diverses propriétés qu'il importe de bien connaître. L'une de ces propriétés est que ces racines sont généralement des fonctions continues du paramètre variable, en sorte qu'elles varient avec ce paramètre par degrés insensibles. Il en résulte que, si, en vertu de la variation du paramètre, une racine réelle vient à disparaître, elle sera immédiatement remplacée par des racines imaginaires. Cette dernière proposition n'est pas à beaucoup près aussi évidente qu'elle semble l'être au premier abord. Il est d'autant plus nécessaire de la démontrer qu'elle ne subsiste pas sans condition. En effet, puisque la forme de l'équation entre x et t est entièrement arbitraire, rien n'empêche de donner pour racine x à cette équation une

fonction discontinue du paramètre t, par exemple, la fonction

$$e^{\frac{1}{t}};$$

et il est clair que, dans ce dernier cas, x variera très sensiblement, en passant d'une valeur très petite à une valeur très grande, si le paramètre t, en demeurant très voisin de zéro, passe du négatif au positif.

Pour que l'on soit assuré que la racine x, considérée comme fonction du paramètre t, reste continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à ce paramètre, il suffit que le premier membre de l'équation donnée reste lui-même fonction continue des deux variables x, t, dans le voisinage de la valeur particulière de t, et de la valeur correspondante de x. C'est ce que je démontre, en m'appuyant sur un théorème que j'ai donné dans un Mémoire présenté à l'Académie de Turin le 27 novembre 1831. De ce théorème, qui détermine, pour une équation algébrique ou transcendante, le nombre des racines réelles ou imaginaires assujetties à des conditions données, je déduis immédiatement la continuité de la fonction de t qui représente la racine x de l'équation donnée entre x et t; et j'en conclus, par exemple, que si, cette équation étant réelle, plusieurs racines réelles égales viennent à disparaître, elles se trouveront généralement remplacées par un pareil nombre de racines imaginaires.

Le § I du présent Mémoire est relatif à des équations entre x et t de forme quelconque. Dans le § II je considère des équations d'une forme particulière, savoir celles qui fournissent immédiatement la valeur de t en fonction de x. Parmi les équations de ce genre, on doit surtout remarquer celles qui donnent pour t une fonction réelle et rationnelle de x. Une semblable équation, résolue par rapport à x, ne peut avoir constamment toutes ses racines réelles, pour une valeur réelle quelconque de t, que sous certaines conditions, dont l'une est que les degrés des deux termes de la fraction rationnelle soient égaux, ou diffèrent entre eux d'une seule unité. Les autres conditions consistent en ce que les deux termes, égalés à zéro, fournissent deux nouvelles équations, dont toutes les racines soient réelles et inégales,

et que la suite de toutes ces racines réunies et rangées d'après leur ordre de grandeur offre alternativement une racine de l'une des deux nouvelles équations, puis une racine de l'autre. Lorsque ces diverses conditions sont remplies, on peut être assuré, non seulement que l'équation proposée, résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles et inégales pour une valeur quelconque de t, mais encore que chacune de ces racines, pour une valeur croissante de t, est toujours croissante ou toujours décroissante tant qu'elle reste finie. Quelques propositions établies par M. Richelot (*voir* le *Journal de M. Crelle*, t. 21, p. 313) se trouvent comprises dans celles que je viens d'énoncer.

Analyse.

Me proposant de publier dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* le Mémoire dont l'objet vient d'être indiqué, je me bornerai à énoncer ici les principaux théorèmes qui s'y trouvent renfermés, et qui, pour la plupart, se déduisent les uns des autres, en omettant les démonstrations que l'on retrouvera sans beaucoup de peine, surtout si l'on a égard à l'ordre dans lequel ces théorèmes sont présentés.

§ I. — *Considérations générales.*

Dans le § I, j'établis successivement les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Nommons*

$$\tau, \quad \xi$$

deux valeurs finies et correspondantes de t et de x, propres à vérifier l'équation

$$F(x, t) = 0, \tag{1}$$

et dans le voisinage desquelles la fonction $F(x, t)$ reste continue par rapport aux variables x, t. Si l'on attribue à la variable t une valeur très peu différente de τ, par conséquent une valeur de la forme

$$t = \tau + i,$$

i désignant un accroissement infiniment petit, positif ou négatif ou même imaginaire, l'équation (1), *résolue par rapport à* x, *offrira une ou plusieurs racines* x *très peu différentes de* ξ, *et dont chacune sera de la forme*

$$x = \xi + j,$$

j désignant encore une expression réelle ou imaginaire, infiniment petite, qui convergera en même temps que i vers la limite zéro. De plus, le nombre de ces racines sera précisément le nombre de celles qui se réduiront à ξ *dans l'équation*

$$F(x, \tau) = 0. \tag{2}$$

THÉORÈME II. — *$F(x, t)$ étant une fonction réelle et déterminée des variables x, t, nommons*

$$\xi, \quad \tau$$

deux valeurs réelles et finies de x et de t, qui vérifient l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

et dans le voisinage desquelles la fonction $F(x, t)$ reste continue. Si τ représente une valeur maximum ou minimum de t, c'est-à-dire si τ est toujours inférieur ou toujours supérieur aux valeurs réelles que t peut acquérir pour des valeurs réelles de x voisines de ξ, l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

résolue par rapport à x, offrira des racines imaginaires pour certaines valeurs réelles de t voisines de la valeur τ.

THÉORÈME III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si l'équation*

$$F(x, t) = 0,$$

après avoir acquis m racines réelles égales entre elles, pour une certaine valeur réelle τ de la variable t, vient tout à coup à perdre ces racines réelles, pour une racine réelle de t, très voisine de τ, celles-ci se trouveront remplacées par m racines imaginaires.

THÉORÈME IV. — *Si l'équation*

$$F(x, t) = 0,$$

résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de la variable t, cette dernière variable, considérée comme fonction de x, ne pourra jamais acquérir un maximum ou un minimum τ correspondant à une valeur ξ de x tellement choisie que $F(x, t)$ reste fonction continue dans le voisinage des valeurs ξ et τ des variables x et t.

THÉORÈME V. — *$F(x, t)$ désignant une fonction réelle des variables x, t, nommons*

$$\xi, \quad \tau$$

deux valeurs réelles de x et de t, propres à vérifier l'équation

$$F(x, t) = 0,$$

et dans le voisinage desquelles la fonction $F(x, t)$ reste continue, avec sa dérivée $\Psi(x, t)$ relative à la variable t. Soit m le nombre de racines égales à ξ dans l'équation

$$F(x, \tau) = 0,$$

en sorte que le rapport

$$\frac{F(x, \tau)}{(x - \xi)^m}$$

acquière, pour $x = \xi$, une valeur finie différente de zéro; et supposons que l'on puisse en dire autant de la fonction $\Psi(x, \tau)$. Enfin, nommons θ une racine primitive de l'équation

$$\theta^m = 1,$$

et posons

$$F(x, \tau) = (x - \xi)^m \mathcal{F}(x),$$

$$\Pi(x, i) = -\frac{F(x, \tau + i) - F(x, \tau)}{i \mathcal{F}(x)},$$

i désignant une quantité réelle. L'équation

$$F(x, \tau + i) = 0 \tag{3}$$

offrira, pour de très petites valeurs numériques de i, m racines très peu

différentes de ξ, *dont chacune vérifiera l'une des m équations de la forme*

$$(4) \qquad x-\xi=[i\Pi(x,i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad x-\xi=\theta^2[i\Pi(x,i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots,$$

si le signe de i est celui de la quantité

$$\Pi(\xi,0)=-\frac{\Psi(\xi,\tau)}{\mathfrak{F}(\xi)},$$

et l'une des m équations de la forme

$$(5) \qquad x-\xi=\theta[-i\Pi(x,i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad x-\xi=\theta^3[-i\Pi(x,i)]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots,$$

si le signe de i est contraire à celui de $\Pi(\xi,0)$.

Comme, parmi les équations (4), (5), on trouvera seulement deux équations réelles qui seront, ou deux des équations (4), si le nombre m est pair, ou l'une des équations (4) et l'une des équations (5) si m est impair, on conclura du théorème V que, dans l'hypothèse admise et pour $m>1$, quelques-unes des valeurs de x, propres à vérifier les formules (4) et (5), deviennent imaginaires. Ajoutons que chacune de ces valeurs de x pourra être immédiatement développée en série par la formule de Lagrange.

THÉORÈME VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si la valeur* ξ *de x représente, non une racine simple, mais une racine multiple de l'équation*

$$F(x,\tau)=0,$$

en sorte que, m racines étant égales à ξ, *le rapport*

$$\frac{F(x,\tau)}{(x-\xi)^m}$$

acquière, pour $x=\xi$, *une valeur finie différente de zéro, l'équation*

$$F(x,t)=0,$$

résolue par rapport à x, offrira des racines imaginaires pour certaines valeurs de t voisines de τ.

§ II. — *Sur les racines de l'équation* $t=\varpi(x)$.

Le § II de mon Mémoire se rapporte spécialement aux racines des équations de la forme

$$t=\varpi(x),$$

j'établis successivement, à l'égard de ces mêmes racines, les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — $\varpi(x)$ *étant une fonction réelle et déterminée de x, si la variable t, liée à la variable x par l'équation*

$$(1) \qquad t=\varpi(x),$$

acquiert une valeur maximum ou minimum τ *pour une valeur réelle et finie de x, représentée par* ξ, *et dans le voisinage de laquelle la fonction* $\varpi(x)$ *reste continue, l'équation* (1), *résolue par rapport à x, offrira des racines imaginaires, pour certaines valeurs de t, voisines de la valeur* τ.

THÉORÈME II. — *Si l'équation*

$$t=\varpi(x),$$

résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles, pour une valeur réelle quelconque de la variable t, cette dernière variable ne pourra jamais acquérir un maximum ou un minimum τ *correspondant à une valeur réelle* ξ *de x, dans le voisinage de laquelle la fonction* $\varpi(x)$ *resterait continue.*

THÉORÈME III. — $\varpi(x)$ *étant une fonction réelle et déterminée de x, supposons la variable t liée à la variable x par la formule*

$$t=\varpi(x).$$

Si l'équation

$$(2) \qquad \varpi(x)=\tau$$

offre m racines égales à ξ, *en sorte qu'on ait*

$$\varpi(x)-\tau=(x-\xi)^m\mathfrak{F}(x),$$

$\mathfrak{F}(x)$ désignant une fonction nouvelle qui acquière, pour $x = \xi$, une valeur finie différente de zéro, l'équation

$$\varpi(x) = \tau + t,$$

ou

$$(3) \qquad (x-\xi)^m = \frac{i}{\mathfrak{F}(x)},$$

offrira, pour de très petites valeurs numériques de i, m racines très peu différentes de ξ. Soit d'ailleurs θ une des racines primitives de l'équation

$$\theta^{2m} = 1.$$

Chacune des m racines de l'équation (3), correspondantes à de très petites valeurs numériques de i, vérifiera l'une des m formules

$$(4) \qquad x-\xi = \left[\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad x-\xi = \theta^2\left[\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots,$$

si le signe de i est en même temps celui de la quantité $\mathfrak{F}(x)$, et l'une des m formules

$$(5) \qquad x-\xi = \theta\left[-\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad x-\xi = \theta^2\left[-\frac{i}{\mathfrak{F}(x)}\right]^{\frac{1}{m}}, \qquad \ldots,$$

si le signe de i est contraire à celui de $\mathfrak{F}(\xi)$.

THÉORÈME IV. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et déterminée de la variable x, et cette variable étant liée à la variable t par l'équation*

$$t = \varpi(x),$$

nommons ξ une valeur réelle de x qui représente m racines réelles égales de l'équation

$$\varpi(x) = \tau,$$

en sorte que le rapport

$$\frac{\varpi(x)-\tau}{(x-\xi)^m}$$

acquière, pour $x = \xi$, une valeur finie différente de zéro. Si la fonction $\varpi(x)$ reste continue dans le voisinage de la valeur $x = \xi$, l'équation (1), ou

$$\varpi(x) = t,$$

résolue par rapport à x, offrira des racines imaginaires pour certaines valeurs réelles de t voisines de τ.

THÉORÈME V. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et déterminée de x, qui ne cesse d'être continue qu'en devenant infinie, si l'équation*

$$t = \varpi(x),$$

résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de t, non seulement chacune des deux équations

$$(6) \qquad \varpi(x) = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{1}{\varpi(x)} = 0$$

aura pareillement toutes ses racines réelles, mais, de plus, deux racines réelles distinctes de l'équation (6) comprendront toujours entre elles une seule racine réelle de l'équation (7), et, réciproquement, deux racines réelles distinctes de l'équation (7) comprendront toujours entre elles une seule racine réelle de l'équation (6).

THÉORÈME VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème V, si les racines réunies des équations (6) et (7) sont rangées par ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, les divers termes de cette suite appartiendront alternativement à l'une et à l'autre équation; si d'ailleurs on nomme*

$$a, \quad a'$$

deux racines consécutives de l'équation (7), la seconde de ces racines a' pouvant être remplacée par l'infini positif ∞, et la première a par l'infini négatif $-\infty$, la variable

$$t = \varpi(x)$$

sera toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que la variable x passera de la limite a à la limite a'.

Pour montrer une application très simple des théorèmes qui précèdent, supposons

$$\varpi(x) = \operatorname{tang} \alpha x,$$

α désignant une constante réelle. Alors l'équation (1), réduite à

$$t = \operatorname{tang} \alpha x,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$t = \frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x},$$

aura, comme on sait, toutes ses racines x réelles. Donc, en vertu des théorèmes V et VI, les racines des deux équations (6) et (7), ou

$$\sin \alpha x = 0 \qquad \text{et} \qquad \cos \alpha x = 0,$$

étant réunies et rangées par ordre de grandeur, appartiendront alternativement à l'une et à l'autre équation, ce qui est exact. De plus, la fonction

$$t = \operatorname{tang} \alpha x$$

sera toujours croissante, tandis que la variable x croîtra, en passant d'un terme quelconque de la série

$$\dots \quad -\frac{3\pi}{2\alpha}, \quad -\frac{\pi}{2\alpha}, \quad \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \frac{3\pi}{2\alpha}, \quad \dots,$$

qui offre les diverses racines de l'équation $\cos \alpha x = 0$, rangées par ordre de grandeur, au terme suivant.

Dans les théorèmes qui précèdent, la fonction $\varpi(x)$ était supposée réelle. Dans ceux qui suivent, elle est de plus rationnelle, c'est-à-dire représentée par une fraction dont les deux termes se réduisent à des fonctions entières de la variable x.

THÉORÈME VII. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et rationnelle de x, si l'équation*

$$\varpi(x) = t,$$

résolue par rapport à x, a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de t, les degrés des deux termes de la fraction rationnelle $\varpi(x)$ seront égaux ou différeront entre eux d'une seule unité; de plus les racines de chacune des équations

$$\varpi(x) = 0, \qquad \frac{1}{\varpi(x)} = 0$$

seront réelles et inégales; enfin toutes ces racines réunies et rangées par ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, appartiendront alternativement à l'une et à l'autre équation.

THÉORÈME VIII. — *$\varpi(x)$ étant une fonction réelle et rationnelle de x, si les degrés des deux termes de cette fonction ou fraction rationnelle sont égaux ou diffèrent entre eux d'une seule unité; si d'ailleurs les racines de chacune des équations*

$$\varpi(x) = 0, \qquad \frac{1}{\varpi(x)} = 0$$

sont toutes réelles et inégales; si enfin ces racines, rangées par ordre de grandeur, appartiennent alternativement à l'une et à l'autre équation; alors, résolue par rapport à x, l'équation

$$\varpi(x) = t$$

aura toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de la variable t.

THÉORÈME IX. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème VIII, si l'on représente par*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 \quad \dots$$

les racines finies de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0,$$

rangées dans leur ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, la valeur de

$$t = \varpi(x)$$

sera toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que la variable x croîtra en passant d'un terme de la série

$$-\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots, \quad \infty \tag{8}$$

au terme suivant.

Posons, pour fixer les idées,

$$\varpi(x) = k\,\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

k désignant une constante réelle, et $\varphi(x)$, $\psi(x)$ désignant deux fonctions entières de x, dans chacune desquelles la plus haute puissance de x ait pour coefficient l'unité. L'équation

$$t = \varpi(x)$$

pourra s'écrire comme il suit

$$\frac{t}{k} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

et pour bien comprendre le théorème IX, il sera nécessaire de distinguer trois cas, suivant que la différence entre le degré de $\psi(x)$ et le degré de $\varphi(x)$ sera

$$1 \quad \text{ou} \quad 0 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Dans le premier cas, $-\infty$, $+\infty$ seront racines de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0,$$

et la valeur du rapport

$$\frac{t}{k}$$

croîtra sans cesse en passant de la limite $-\infty$ à la limite ∞, tandis que la variable x croîtra en passant d'un terme de la série (8) au terme suivant.

Dans le troisième cas, $-\infty$, $+\infty$ seront racines de l'équation

$$\varpi(x) = 0;$$

et, tandis que la variable x croîtra en passant d'un terme a' de la série (8) au terme suivant a'', la valeur du rapport

$$\frac{t}{k}$$

décroîtra sans cesse, en passant de la limite 0 à la limite $-\infty$, si l'on a $a' = -\infty$, de la limite ∞ à la limite zéro, si l'on a $a'' = \infty$, et de la limite ∞ à la limite $-\infty$, si a' et a'' conservent des valeurs finies.

Enfin, dans le second cas, $-\infty$, $+\infty$ seront racines de l'équation

$$\varpi(x) = k;$$

et, tandis que la variable x croîtra en passant d'un terme quelconque a' de la série (8) au terme suivant a'', la valeur du rapport

$$\frac{t}{k}$$

croîtra ou décroîtra sans cesse, en passant généralement de la limite $-\infty$ à la limite ∞, ou réciproquement, suivant que la plus petite racine b, de l'équation

$$\varpi(x) = 0$$

sera inférieure ou supérieure à la plus petite racine a, de l'équation

$$\frac{1}{\varpi(x)} = 0.$$

Ajoutons que la première des valeurs extrêmes du rapport $\frac{t}{k}$, si l'on a

$$a' = -\infty,$$

et la seconde, si l'on a

$$a'' = \infty,$$

devront cesser d'être infinies, et se réduiront simplement à l'unité.

128.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la détermination et la transformation d'un grand nombre d'intégrales définies nouvelles.*

C. R., t. XII, p. 1145 (21 juin 1841).

Des formules générales que j'ai données dans les *Exercices de Mathématiques*, et qui s'y trouvent déduites du calcul des résidus, fournissent immédiatement les valeurs d'une multitude d'intégrales définies, dont les unes étaient connues, les autres inconnues. Parmi ces formules, l'une des plus remarquables est celle qui détermine les valeurs des intégrales prises entre les limites $-\infty$, $+\infty$, et qui comprend comme

cas particuliers quelques résultats obtenus par Euler et par M. Laplace. Or mes dernières recherches sur le calcul des résidus permettent d'étendre considérablement cette même formule, ou plutôt de la remplacer par d'autres qui peuvent être appliquées à la détermination ou à la transformation d'un grand nombre d'intégrales définies nouvelles. Je vais expliquer en peu de mots la marche que j'ai suivie pour arriver aux nouvelles formules dont il est ici question.

Les théorèmes généraux de Calcul intégral que j'ai présentés à l'Académie dans les précédentes séances servent à déterminer ou à transformer une intégrale définie, relative à x, ou plutôt la somme s des valeurs de cette intégrale qui correspondent aux diverses valeurs de x considérée comme une fonction implicite d'une autre variable t. Supposons maintenant ces diverses valeurs représentées par autant d'intégrales dont chacune offre pour seconde limite l'origine de l'intégrale suivante. Il est clair que, dans ce cas particulier, la somme s pourra être réduite à une intégrale unique que les théorèmes dont il s'agit serviront à déterminer ou à transformer. Tel est le principe très simple à l'aide duquel je déduis des formules générales précédemment établies celles qui forment l'objet spécial de ce nouveau Mémoire.

Analyse.

§ I. — *Formules générales.*

La variable x étant liée à la variable t par l'équation

$$F(x, t) = 0, \tag{1}$$

nommons $\Phi(x, t)$, $\Psi(x, t)$ les dérivées partielles de la fonction $F(x, t)$, relatives à x et à t. Soient de plus

$$f(x) \quad \text{ou} \quad f(x, t)$$

une autre fonction de la variable x ou des deux variables x, t, et

$$\xi, \quad \tau$$

deux valeurs correspondantes de ces mêmes variables. On aura

$$\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx = -\int_{\tau}^{t} f(x)\,\frac{\Psi(x, t)}{\Phi(x, t)}\,dt, \tag{2}$$

ou, plus généralement,

$$\int_{\xi}^{x} f(x, t)\,dx = -\int_{\tau}^{t} f(x, t)\,\frac{\Psi(x, t)}{\Phi(x, t)}\,dt, \tag{3}$$

pourvu que chacune des variables x, t reste fonction continue de l'autre, entre les limites de l'intégration. Pour que cette condition soit remplie, lorsque les deux variables restent réelles, il est nécessaire et il suffit qu'elles varient simultanément par degrés insensibles et que, pour des valeurs croissantes de l'une, l'autre soit toujours croissante, ou toujours décroissante, du moins entre les limites que l'on considère.

Lorsque, dans une intégrale définie relative à x, on remplacera, comme on vient de le dire, la variable x par une nouvelle variable t, l'équation (1), qui caractérisera la relation établie entre les deux variables x et t, sera ce que nous appellerons l'équation *caractéristique*.

On ne devra pas oublier que la variable t est regardée comme fonction de x, dans le premier membre de la formule (3), et la variable x comme fonction de t dans le second membre. D'ailleurs l'équation (1), résolue, soit par rapport à t, soit par rapport à x, peut, dans une hypothèse comme dans l'autre, fournir ou une seule racine ou plusieurs racines diverses. Concevons, pour fixer les idées, que l'équation (1), résolue par rapport à x, fournisse diverses racines

$$x = x_1, \qquad x = x_2, \qquad \ldots$$

représentées par des fonctions de t qui se réduisent aux quantités

$$\xi = \xi_1, \qquad \xi = \xi_2, \qquad \ldots$$

dans le cas particulier où l'on suppose $t = \tau$. Puisque les deux variables x, t doivent, entre les limites de l'intégration, rester fonctions continues l'une de l'autre, il est clair qu'à chaque valeur de x, considérée

comme fonction de t, répondra, dans la formule (3), une seule valeur de t considérée comme fonction de x. Mais aux diverses valeurs de x, considérée comme fonction de t, correspondront généralement diverses valeurs de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx;$$

et, en nommant s la somme de ces valeurs, c'est-à-dire en posant, pour abréger,

$$(4) \qquad s=\int_{\xi_1}^{x_1} f(x,t)\,dx+\int_{\xi_2}^{x_2} f(x,t)\,dx+\ldots,$$

on tirera de la formule (3)

$$s=-\int_{\tau}^{t}\mathcal{E}\frac{f(z,t)\,\Psi(z,t)}{((F(z,t)))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad s=\int_{\tau}^{t}\mathcal{E}\frac{((f(z,t)\,\Psi(z,t)))}{F(z,t)}\,dt-\int_{\tau}^{t}\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z,t)\,\Psi(z,t)}{F(z,t)}\right)\right)dt,$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la variable auxiliaire z.

Avant d'aller plus loin, nous avons une remarque importante à faire. Dans chacune des intégrales que renferme la formule (4), t est considéré comme fonction de x. Mais la valeur de t en x pourra varier dans le passage d'une intégrale à une autre, si l'équation (1), résolue par rapport à t, offre plusieurs racines. En effet, la condition à laquelle cette valeur de t est assujettie, c'est que, dans chaque intégrale de la forme

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx,$$

elle se réduise à τ pour $x=\xi$. Or la valeur de t qui remplit cette condition peut changer de forme avec la valeur de ξ. Si, par exemple, on a

$$F(x,t)=x^3+tx+t^2-1 \qquad \text{et} \qquad \tau=0,$$

on trouvera pour valeurs de ξ

$$1 \qquad \text{et} \qquad -1.$$

Or l'équation

$$x^3+tx+t^2-1=0,$$

résolue par rapport à t, donnera

$$t=-\tfrac{1}{2}x+\sqrt{1-\tfrac{3}{4}x^2} \qquad \text{ou} \qquad t=-\tfrac{1}{2}x-\sqrt{1-\tfrac{3}{4}x^2};$$

et, de ces deux dernières valeurs de t, la première s'évanouira pour $x=1$, la seconde pour $x=-1$. Remarquons toutefois que, si, dans cet exemple, les deux valeurs de t étaient présentées sous la forme

$$t=\tfrac{1}{2}x\left(-1+\sqrt{\frac{4}{x^2}-3}\right), \qquad t=\tfrac{1}{2}x\left(-1-\sqrt{\frac{4}{x^2}-3}\right),$$

la première seule aurait la double propriété de s'évanouir à la fois pour $x=1$ et pour $x=-1$.

Revenons à la formule (5). Si le rapport

$$\frac{\Psi(z,t)}{F(z,t)}$$

ne devient infini que pour des valeurs nulles de $F(z,t)$, si d'ailleurs le résidu de la fraction

$$\frac{f\left(\frac{1}{z},t\right)\Psi\left(\frac{1}{z},t\right)}{z^2F\left(\frac{1}{z},t\right)},$$

relatif à une valeur nulle de z, offre une valeur déterminée, cette formule donnera

$$(6) \qquad s=\int_{\tau}^{t}\mathcal{E}\frac{\Psi(z,t)\,((f(z,t)))}{F(z,t)}\,dt-\int_{\tau}^{t}\mathcal{E}\frac{\Psi\left(\frac{1}{z},t\right)f\left(\frac{1}{z},t\right)}{((z^2))\,F\left(\frac{1}{z},t\right)}\,dt.$$

Si l'on remplace $f(x,t)$ par un produit de la forme

$$f(x)f(t),$$

l'équation (6) deviendra

$$(7)\quad s=\mathcal{E}((\mathrm{f}(z)))\int_\tau^t \frac{\Psi(z,t)}{\mathrm{F}(z,t)}f(t)\,dt-\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\int_\tau^t \frac{\Psi\left(\frac{1}{z},t\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{1}{z},t\right)}f(t)\,dt.$$

Enfin, si l'on remplace $\mathrm{f}(x,t)$ par une fonction $\mathrm{f}(x)$ de la seule variable x, ou par une fonction $f(t)$ de la seule variable t, on trouvera dans le premier cas

$$(8)\quad \int_{\xi_1}^{x_1}\mathrm{f}(x)\,dx+\int_{\xi_2}^{x_2}\mathrm{f}(x)\,dx+\ldots=\mathcal{E}((\mathrm{f}(z)))\,1\,\frac{\mathrm{F}(z,t)}{\mathrm{F}(z,\tau)}-\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\,1\,\frac{\mathrm{F}\left(\frac{1}{z},t\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{1}{z},\tau\right)},$$

et dans le second cas

$$(9)\quad \int_{\xi_1}^{x_1}f(t)\,dx+\int_{\xi_2}^{x_2}f(t)\,dx+\ldots=-\mathcal{E}\frac{1}{((z^2))}\int_\tau^t \frac{\Psi\left(\frac{1}{z},t\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{1}{z},t\right)}f(t)\,dt.$$

Parmi les formes diverses que peut acquérir la fonction $\mathrm{F}(x,t)$, on doit remarquer celles dans lesquelles les variables x, t sont séparées. Cette séparation aura lieu, par exemple, si l'on pose

$$\mathrm{F}(x,t)=t^n-\varpi(x),$$

n étant un nombre entier quelconque, et $\varpi(x)$ une fonction déterminée de x, c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'équation (1) se réduit à

$$(10)\qquad t^n=\varpi(x).$$

Dans ce cas, la formule (7) donnera

$$(11)\quad s=\mathcal{E}((\mathrm{f}(z)))\int_\tau^t \frac{nt^{n-1}}{t^n-\varpi(z)}f(t)\,dt-\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\int_\tau^t \frac{nt^{n-1}}{t^n-\varpi\left(\frac{1}{z}\right)}f(t)\,dt.$$

Si l'on suppose en particulier $n=1$, l'équation (10) sera réduite à

$$(12)\qquad t=\varpi(x),$$

et les formules (7), (9) donneront

$$(13)\quad s=\mathcal{E}((\mathrm{f}(z)))\int_\tau^t \frac{f(t)}{t-\varpi(z)}\,dt-\mathcal{E}\frac{\mathrm{f}\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\int_\tau^t \frac{f(t)}{t-\varpi\left(\frac{1}{z}\right)}\,dt,$$

$$(14)\quad \int_{\xi_1}^{x_1}f(t)\,dx+\int_{\xi_2}^{x_2}f(t)\,dx+\ldots=\mathcal{E}\frac{1}{((z^2))}\int_\tau^t \frac{f(t)}{\varpi\left(\frac{1}{z}\right)-t}\,dt.$$

§ II. — *Formules relatives au cas où les racines de l'équation caractéristique sont toutes réelles.*

Parmi les résultats que l'on peut déduire des principes établis dans le premier paragraphe, on doit surtout remarquer ceux que l'on obtient quand on suppose que l'équation caractéristique, résolue par rapport à la variable x, a toutes ses racines réelles pour une valeur réelle quelconque de la variable t.

Admettons cette hypothèse; supposons encore, pour plus de simplicité, que l'équation caractéristique se présente sous la forme

$$(1)\qquad t=\varpi(x),$$

$\varpi(x)$ désignant une fonction réelle et déterminée de x; et concevons d'abord que cette fonction $\varpi(x)$ se réduise à une fraction rationnelle. On pourra prendre

$$\varpi(x)=k\,\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

k désignant une constante réelle et $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions entières de x dans chacune desquelles le coefficient de la plus haute puissance de x se réduise à l'unité. Cela posé, chacune des deux équations

$$(2)\qquad \varpi(x)=0,$$

$$(3)\qquad \frac{1}{\varpi(x)}=0,$$

et par suite aussi chacune des deux équations

$$(4)\qquad \psi(x)=0,$$

$$(5)\qquad \varphi(x)=0,$$

aura toutes ses racines réelles et inégales. Supposons que ces racines, rangées d'après leur ordre de grandeur, de manière à former une suite croissante, soient respectivement

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots \tag{6}$$

pour l'équation (5), et

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \dots \tag{7}$$

pour l'équation (4). Suivant ce qui a été dit dans le précédent Mémoire, deux termes consécutifs de chacune des suites (6), (7) comprendront entre eux un seul terme de l'autre suite, et les degrés des fonctions entières

$$\psi(x) = (x - b_1)(x - b_2)\dots, \qquad \varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots$$

seront égaux ou différeront entre eux d'une seule unité. On aura donc trois cas à considérer suivant que la différence entre le degré de $\psi(x)$ et le degré de $\varphi(x)$ sera

$$1 \quad \text{ou} \quad 0 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Si l'on nomme n le nombre qui représente les degrés lorsqu'ils sont égaux, et le plus grand des deux, quand ils sont inégaux, ces mêmes degrés seront respectivement, dans le premier cas,

$$n \quad \text{et} \quad n-1;$$

dans le second cas

$$n \quad \text{et} \quad n;$$

dans le troisième cas

$$n-1 \quad \text{et} \quad n.$$

On aura par suite, dans le premier cas,

$$t = k\,\frac{(x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_n)}{(x - a_1)\dots(x - a_{n-1})}; \tag{8}$$

dans le second cas

$$t = k\,\frac{(x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_n)}{(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)}; \tag{9}$$

et dans le troisième cas

$$t = k\,\frac{(x - b_1)\dots(x - b_{n-1})}{(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)}. \tag{10}$$

Voyons maintenant quelles seront, pour ces trois valeurs de t, les valeurs de la somme désignée dans le premier paragraphe par la lettre s.

Dans le premier cas, tandis que la variable x passera d'un terme de la série

$$-\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_{n-1}, \quad \infty$$

au terme suivant, le rapport

$$\frac{t}{k}$$

croîtra sans cesse, en passant de la limite $-\infty$ à la limite ∞. Donc alors, dans les diverses formules du premier paragraphe, on pourra prendre pour

$$t \quad \text{et} \quad \tau$$

deux quantités finies quelconques. L'équation (8), résolue par rapport à x, fournira d'ailleurs, pour une valeur quelconque de t ou de τ, les valeurs correspondantes des quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n$$

ou

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \dots, \quad \xi_n,$$

qui se trouveront comprises, la première entre les limites $-\infty$, a_1, la seconde entre les limites a_1, a_2, ..., la dernière entre les limites a_{n-1}, ∞.

Si, pour fixer les idées, on prend

$$\tau = 0, \qquad \frac{t}{k} = \infty,$$

la formule (4) du § I donnera

$$s = \int_{b_1}^{a_1} f(x, t)\,dx + \int_{b_2}^{a_2} f(x, t)\,dx + \dots + \int_{b_n}^{\infty} f(x, t)\,dx. \tag{11}$$

Si l'on prend, au contraire,

$$\frac{\tau}{k} = -\infty, \qquad t = 0,$$

la même formule donnera

$$(12) \qquad s = \int_{-\infty}^{b_1} f(x,t)\,dx + \int_{a_1}^{b_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{b_n} f(x,t)\,dx.$$

Enfin, si l'on prend

$$\frac{\tau}{k} = -\infty, \qquad \frac{t}{k} = \infty,$$

on trouvera

$$s = \int_{-\infty}^{a_1} f(x,t)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{\infty} f(x,t)\,dx$$

ou, ce qui revient au même,

$$(13) \qquad s = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx.$$

D'ailleurs, la valeur de s que détermine la formule (11) ou (12) s'exprimera, en vertu de l'équation (6) du § I^{er}, à l'aide d'intégrales définies relatives à t, et prises entre deux limites dont l'une sera zéro, l'autre étant $\pm\infty$. La même équation, appliquée à la valeur de s que détermine la formule (13), donnera

$$(14) \qquad \pm\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}\left(\left(f(z,t)\right)\right) \frac{dt}{t-\varpi(z)} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}\frac{f(z,t)}{\left((z^2)\right)} \frac{dt}{t-\varpi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

le double signe $\pm$ devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que la constante k sera positive ou négative.

Considérons maintenant le second cas où la valeur de t en x est fournie par l'équation (9). Dans ce cas, tandis que la variable x passera d'un terme de la série

$$-\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n, \quad \infty$$

au terme suivant, le rapport

$$\frac{t}{k}$$

croîtra ou décroîtra sans cesse, suivant que l'on aura $a_i < b_i$ ou $b_i < a_i$. De plus les deux limites entre lesquelles croîtra ou décroîtra le rapport $\frac{t}{k}$ seront généralement $-\infty$ et $+\infty$ ou $+\infty$ et $-\infty$. Seulement l'une de ces limites se trouvera remplacée par l'unité quand l'une des limites de la variable x sera $-\infty$ ou ∞. Par conséquent on pourra prendre, pour

$$t \text{ et } \tau,$$

dans les diverses formules du § I^{er}, non plus deux quantités finies quelconques, mais deux quantités finies simultanément comprises, soit entre les limites

$$k \text{ et } \infty,$$

soit entre les limites

$$-\infty \text{ et } k.$$

Si d'ailleurs on nomme

$$(15) \qquad -\infty, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{n-1}, \quad \infty$$

les n racines de l'équation

$$\varpi(x) = k \qquad \text{ou} \qquad \psi(x) = \varphi(x),$$

l'équation (9), résolue par rapport à x, fournira, pour une valeur quelconque de t ou de τ, les valeurs correspondantes des quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

ou

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n,$$

qui se trouveront comprises, ou, la première entre les limites $-\infty$, a_1, la seconde entre les limites c_1, a_2, ..., la dernière entre les limites c_{n-1}, a_n; ou bien, la première entre les limites a_1, c_1, la seconde entre les limites a_2, c_2, ..., la dernière entre les limites a_n, ∞.

Si, pour fixer les idées, on prend

$$\tau = k, \qquad t = \frac{\infty}{b_1 - a_1} k,$$

la formule (4) du § I^er donnera

$$(16) \qquad s = \int_{-\infty}^{a_1} f(x,t)\,dx + \int_{c_1}^{a_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{a_n} f(x,t)\,dx.$$

Si l'on prend au contraire

$$\tau = \frac{-\infty}{b_1 - a_1} k, \qquad t = k,$$

la même formule donnera

$$(17) \qquad s = \int_{a_1}^{c_1} f(x,t)\,dx + \int_{a_2}^{c_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{\infty} f(x,t)\,dx;$$

et il suffira d'ajouter la somme (16) à la somme (17), pour obtenir une nouvelle somme équivalente à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx.$$

D'ailleurs la valeur de s, que détermine la formule (11) ou (12), s'exprimera, en vertu de la formule (6) du § I^er, à l'aide d'intégrales définies relatives à t, prises entre les limites

$$k, \quad \frac{\infty}{b_1 - a_1} k,$$

ou entre les limites

$$\frac{-\infty}{b_1 - a_1} k \quad \text{et} \quad k.$$

Donc, à l'aide d'intégrales de la même forme, mais prises entre les limites

$$\frac{-\infty}{b_1 - a_1} k \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{b_1 - a_1} k,$$

on pourra exprimer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx.$$

On se trouvera ainsi ramené de nouveau à la formule (14). Seulement, dans cette formule, le double signe ± devra être réduit au signe + ou au signe −, suivant que la constante $\frac{k}{b_1 - a_1}$ sera positive ou négative.

Si à la limite k de la variable t on substituait la limite zéro, il faudrait, à n termes consécutifs de la suite

$$-\infty, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \infty,$$

substituer les quantités

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n.$$

D'ailleurs zéro sera renfermé entre les deux limites

$$k \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{b_1 - a_1} k$$

ou entre les limites

$$\frac{-\infty}{b_1 - a_1} k \quad \text{et} \quad k,$$

suivant que les deux quantités k et $b_1 - a_1$ seront affectées de signes contraires ou du même signe. On pourra donc, suivant que l'une ou l'autre condition sera remplie, déterminer encore, après la substitution dont il s'agit et à l'aide des principes établis dans le § I^er, la valeur de la somme (16) ou (17), réduite, au signe près, à la suivante :

$$(18) \qquad \int_{a_1}^{b_1} f(x,t)\,dx + \int_{a_2}^{b_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\,dx.$$

Cette dernière somme comprend, comme cas particuliers, celles qui ont été déterminées par M. Richelot.

Considérons enfin le troisième cas où la valeur de t en x est fournie par l'équation (10). Dans ce cas, tandis que la variable x croitra en

passant d'un terme de la série

$$-\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n, \quad \infty$$

au terme suivant, le rapport

$$\frac{t}{k}$$

décroitra sans cesse en passant généralement de la limite ∞ à la limite $-\infty$. Seulement l'une de ces deux limites se trouvera remplacée par zéro quand l'une des limites de la variable x sera $-\infty$ ou ∞. Par conséquent, on pourra prendre pour

$$t \quad \text{et} \quad \tau,$$

dans les diverses formules du § I^er^, non pas deux quantités finies quelconques, mais deux quantités finies simultanément comprises, soit entre les limites

$$0 \quad \text{et} \quad \infty,$$

soit entre les limites

$$-\infty \quad \text{et} \quad 0.$$

D'ailleurs, l'équation (10), résolue par rapport à x, fournira, pour une valeur quelconque de t ou de τ, les valeurs correspondantes des quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

ou

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n,$$

qui se trouveront comprises, ou, la première entre les limites $-\infty$, a_1, la seconde entre les limites b_1, a_2, ..., la dernière entre les limites b_{n-1}, a_n; ou bien encore, la première entre les limites a_1, b_1, la seconde entre les limites a_2, b_2, ..., la dernière entre les limites a_n, ∞.

Si, pour fixer les idées, on prend

$$\tau = 0, \qquad \frac{t}{k} = -\infty,$$

la formule (4) du § I^er^ donnera

$$(19) \qquad s = \int_{-\infty}^{a_1} f(x,t)\,dx + \int_{b_1}^{a_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{a_n} f(x,t)\,dx.$$

Si l'on prend, au contraire,

$$\frac{\tau}{k} = \infty, \qquad t = 0,$$

la même formule donnera

$$(20) \qquad s = \int_{a_1}^{b_1} f(x,t)\,dx + \int_{a_2}^{b_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{\infty} f(x,t)\,dx;$$

et il suffira d'ajouter la somme (19) à la somme (20) pour obtenir une nouvelle somme équivalente à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx.$$

D'ailleurs la valeur de s que détermine la formule (19) ou (20) s'exprimera, en vertu de la formule (6) du § I^er^, à l'aide d'intégrales définies relatives à t, et prises entre les limites

$$0 \quad \text{et} \quad -\infty.k,$$

ou

$$\infty.k \quad \text{et} \quad 0.$$

Donc, à l'aide d'intégrales de la même forme, mais prises entre les limites

$$\infty.k, \quad -\infty.k,$$

on pourra exprimer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx.$$

On se trouvera ainsi ramené encore à la formule (14). Seulement, dans cette formule, le double signe devra être réduit au signe $-$ ou au signe $+$, suivant que la constante k sera positive ou négative.

Je donnerai, dans d'autres articles, de nombreuses applications des formules générales que je viens d'établir et, en particulier, de la formule (14). J'examinerai aussi ce que deviennent ces diverses formules quand $\varpi(x)$ est une fonction transcendante.

129.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles partielles, et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique.*

C. R., t. XIII, p. 1 (5 juillet 1841).

J'ai donné, pour l'intégration d'un système quelconque d'équations linéaires aux différences partielles, une méthode générale qui réduit le problème à la formation de l'équation *caractéristique* et à la détermination de la fonction que j'ai nommée *fonction principale*. La formation de l'équation caractéristique ne présente aucune difficulté. Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, que les variables indépendantes, comme il arrive dans les problèmes de Mécanique, se réduisent à quatre variables qui représentent trois coordonnées x, y, z, et le temps t. La fonction principale devra être déterminée par la double condition de vérifier l'équation caractéristique et de s'évanouir pour une valeur donnée, par exemple, pour une valeur nulle de t, avec toutes ses dérivées relatives à t, jusqu'à celle dont l'ordre est inférieur d'une seule unité à l'exposant de la plus haute puissance de D_t que renferme cette équation. Si, d'autre part, cette plus haute puissance de D_t se trouve, comme il arrive d'ordinaire, multipliée par un coefficient constant, la fonction principale sera complètement déterminée par les conditions que nous venons d'énoncer, et elle pourra être représentée par une intégrale définie sextuple. Enfin, si le premier membre de l'équation caractéristique est une fonction homogène de

$$D_x,\quad D_y,\quad D_z,\quad D_t,$$

l'intégrale sextuple pourra être, comme je l'ai prouvé en 1830, réduite à une intégrale définie quadruple, ou même à une intégrale définie double, si la fonction homogène est du second degré.

Lorsque le système des équations proposées se rapporte à une question de Physique mathématique, alors il suit de la réduction ci-dessus mentionnée que si, à l'origine du mouvement, certaines fonctions des variables indépendantes ou de leurs dérivées n'ont de valeurs sensibles que dans un très petit espace, elles n'auront de valeurs sensibles, au bout du temps t, que dans l'intérieur de certaines surfaces courbes. Donc alors, la propagation du mouvement donnera naissance à certaines *ondes* sonores, lumineuses, etc., terminées intérieurement par les surfaces dont il s'agit. A de grandes distances des centres de mouvement, ces surfaces courbes deviendront sensiblement planes, et les mouvements propagés deviendront ce que j'ai nommé des *mouvements simples*. La considération directe de ces mouvements simples permet d'abréger considérablement les calculs, et d'obtenir avec une grande facilité les lois de la propagation à de grandes distances des centres d'ébranlement.

Dans mes Mémoires de 1829 et de 1830, les deux méthodes que je viens d'indiquer se trouvent appliquées l'une et l'autre à la détermination de la surface des ondes que produit un ébranlement primitif dans un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. La première méthode est celle dont j'ai fait usage dans le Mémoire du 12 janvier 1829, dans une Note que renferme le *Bulletin* de M. de Férussac d'avril 1830, enfin dans le Mémoire qui a pour objet l'intégration d'une certaine classe d'équations aux différences partielles, et le phénomène dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique. La seconde méthode est celle que j'ai développée dans les *Exercices de Mathématiques*. Elle m'a conduit très facilement aux lois de la polarisation, et, en la suivant, dans les Mémoires des 31 mai et 7 juin 1830, je suis arrivé à conclure que Fresnel avait raison contre un illustre géomètre, en affirmant l'existence de vibrations transversales perpendiculaires aux directions des rayons lumineux. Il est juste d'observer que le même géomètre a reconnu depuis l'existence de ces vibrations et prouvé que leur propagation, avec la vitesse que j'avais calculée, était une conséquence nécessaire des intégrales générales. Ajoutons que les lois de la

polarisation, comme on devait s'y attendre, peuvent se déduire des intégrales générales aussi bien que de la considération des ondes planes. C'est ce que M. Blanchet avait très bien vu dès l'année 1830, et ce que nous aurons bientôt l'occasion de rappeler en rendant compte de l'important Mémoire qu'il a présenté dernièrement à l'Académie. Observons enfin que les intégrales sextuples, qui représentent les valeurs générales des inconnues propres à vérifier un système d'équations linéaires aux différences partielles, et qui, après leur réduction, fournissent les lois des phénomènes, peuvent elles-mêmes être considérées comme déduites de la considération des ondes planes. En effet, pour obtenir ces intégrales, il suffit de décomposer les fonctions de x, y, z, qui représentent les valeurs initiales des inconnues ou de leurs dérivées, en une infinité de parties respectivement proportionnelles à des exponentielles dont chacune a pour exposant une fonction linéaire; et il est clair que, si l'on représente par x, y, z des coordonnées rectilignes, les diverses valeurs d'une fonction linéaire de ces coordonnées correspondront à divers plans parallèles les uns aux autres. Par conséquent, la décomposition dont je parle, et qui s'effectue à l'aide de la formule de Fourier, ou plutôt à l'aide d'une formule du même genre que j'ai substituée à la première (*voir* le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*), revient à considérer l'état initial comme formé par la superposition d'une infinité d'ondes planes.

Nous avons maintenant une remarque importante à faire. Les phénomènes dont on se propose de trouver les lois, à l'aide des intégrales générales, sont ordinairement ceux qui se produisent lorsque les déplacements des molécules et leurs vitesses ne sont sensibles à l'origine du mouvement que dans un espace très resserré, par exemple dans le voisinage de l'origine des coordonnées. Mais alors l'emploi des formules, dont je parlais tout à l'heure, a le grand inconvénient de représenter un ébranlement initial circonscrit dans un très petit espace par la superposition d'une infinité d'ondes planes dont chacune s'étend à l'infini. Ayant recherché s'il ne serait pas possible de faire disparaître cet inconvénient, j'ai eu le bonheur de réussir. Le moyen par lequel

j'y suis parvenu m'a été suggéré par un fait digne, ce me semble, de l'attention des physiciens, et que j'ai déjà cité dans les 7^e et 8^e livraisons de mes *Exercices d'Analyse*. Je vais d'abord le rappeler en peu de mots.

Les mouvements simples et par ondes planes ne sont pas les seuls dans lesquels les inconnues puissent être exprimées par des fonctions finies des variables indépendantes : il existe d'autres mouvements où cette condition se trouve pareillement remplie. Ainsi, en particulier, lorsque, dans un système isotrope, les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, des intégrales en termes finis peuvent représenter des ondes sphériques du genre de celles que j'ai mentionnées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. II, p. 455 (1), savoir, des ondes dans lesquelles les vibrations moléculaires soient dirigées suivant les éléments de circonférences de cercles parallèles tracées sur des surfaces sphériques; ces vibrations étant semblables entre elles et isochrones pour tous les points d'une même circonférence. Pareillement, si ce qu'on appelle la surface des ondes est un ellipsoïde, des intégrales en termes finis représenteront encore des ondes ellipsoïdales. Ajoutons que ces diverses ondes auront, comme les ondes planes, la propriété remarquable de se propager en conservant toujours les mêmes épaisseurs. Cela posé, il était évident pour moi qu'il y aurait un grand avantage à considérer, s'il était possible, un ébranlement initial, circonscrit dans un très petit espace, comme résultant de la superposition, non plus d'une infinité d'ondes planes dont chacune s'étende à l'infini, mais d'une infinité d'ondes limitées, par exemple d'ondes sphériques ou d'ondes ellipsoïdales. Or cela est effectivement possible, comme le prouvent les formules nouvelles que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, et comme il était facile de le prévoir. Par suite, les lois de la propagation du mouvement dans les milieux isotropes, par exemple, peuvent se déduire immédiatement, et même sans calcul, de la connaissance

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. IV, p. 32.

des lois relatives à la propagation des ondes sphériques. Or, comme ces dernières se trouvent représentées par des intégrales en termes finis, que l'on obtient sans peine et sans le secours du Calcul intégral, il en résulte que, dans les milieux isotropes, les lois de la propagation du son, de la lumière, etc., peuvent être établies très simplement, de manière même que la plupart des raisonnements, auxquels on a recours, puissent être exposés dans les Traités élémentaires de Physique. La même observation s'applique au cas où la surface de l'onde est ellipsoïdale. Ajoutons que, dans tous les cas, il y aura un grand avantage à décomposer un ébranlement initial limité en ondes de la forme de celles qui peuvent se propager dans le milieu que l'on considère. Or cette forme peut être déterminée à l'avance et se déduit immédiatement de la forme même de l'équation caractéristique, comme je l'ai montré dans les divers Mémoires que j'ai publiés en 1830.

Au reste, la seule décomposition d'un ébranlement initial, circonscrit dans un très petit espace en ondes limitées renfermées dans ce même espace, est déjà très utile, quand même ces ondes n'auraient pas la forme de celles qui peuvent se propager dans le milieu que l'on considère et seraient, par exemple, réduites, dans tous les cas, à des ondes sphériques. En effet, il suffira de substituer une de ces ondes à l'état initial et de particulariser ainsi cet état pour que les intégrales générales, celles mêmes qui se déduisent de la considération des ondes planes, subissent de nouvelles réductions qui permettront de reconnaître plus facilement les lois des phénomènes; et ces lois une fois établies pour un état initial représenté, par exemple, par une seule onde sphérique, continueront de subsister pour un état initial représenté par un système d'ondes sphériques, c'est-à-dire pour un état initial quelconque.

Je me bornerai, dans le présent Mémoire, à établir les formules générales qui servent à décomposer un état initial en ondes d'une forme donnée, et à déduire de ces formules les intégrales qui représentent les ondes sphériques ou ellipsoïdales. Dans un autre Mémoire,

j'appliquerai les mêmes formules à l'intégration des équations homogènes, ou même non homogènes, par exemple de celles qui représentent les ondulations lumineuses dans le cas où l'on a égard à la dispersion de la lumière.

Analyse.

§ I^er^. — *Formules générales.*

On a, comme l'on sait, en désignant par ε une quantité positive, qui peut d'ailleurs être très petite,

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon\, dr}{\varepsilon^2 + r^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut, en désignant par θ une autre quantité positive et remplaçant r par $\theta^{\frac{1}{2}} r$,

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon\, dr}{\varepsilon^2 + \theta r^2} = \frac{\pi}{2\theta^{\frac{1}{2}}},$$

puis, en différentiant par rapport à θ et posant, après la différentiation, $\theta = 1$, $\varepsilon = 1$,

$$\int_0^\infty \frac{r^2\, dr}{(1 + r^2)^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^\infty \frac{r^2\, dr}{(1 + r^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ces dernières équations, que l'on peut d'ailleurs établir directement, vont nous fournir les moyens d'obtenir des formules générales relatives à la transformation des fonctions de trois variables indépendantes.

Soit

$$f(x, y, z)$$

une fonction arbitraire de trois variables x, y, z, qui pourront être considérées comme représentant trois coordonnées rectangulaires. Soit encore

$$(1) \qquad \iota = \vec{s}(x, y, z)$$

une fonction des mêmes variables, homogène, et tellement choisie que la surface représentée par l'équation (1), pour une valeur donnée de ι,

soit une surface convexe, par conséquent une surface continue, fermée de toutes parts et rencontrée en un seul point par un rayon vecteur mené à partir de l'origine, ou même à partir d'un point intérieur quelconque, dans une direction donnée. Enfin soit

$$\mathcal{R} = \vec{\mathcal{F}}(\lambda - x, \mu - y, \nu - z) \tag{2}$$

ce que devient $\varkappa$ quand on y remplace

$$x, \quad y, \quad z$$

par

$$\lambda - x, \quad \mu - y, \quad \nu - z,$$

λ, μ, ν désignant les coordonnées rectangulaires d'un nouveau point distinct du point (x, y, z); et supposons l'intégrale triple

$$s = \iiint \frac{\varepsilon\, f(\lambda, \mu, \nu)}{(\varepsilon^2 + \mathcal{R}^2)^2}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \tag{3}$$

étendue à toutes les valeurs de

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

qui répondent aux divers points d'un volume $\mathcal{V}$ dont l'enveloppe extérieure, composée de surfaces planes ou courbes, soit d'ailleurs convexe, comme la surface représentée par l'équation (1). Si l'on transforme les coordonnées rectangulaires

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

en coordonnées polaires p, q, r, en plaçant la nouvelle origine au point (x, y, z), à l'aide des formules connues

$$\lambda - x = r\cos p, \qquad \mu - y = r\sin p\cos q, \qquad \nu - z = r\sin p\sin q; \tag{4}$$

si d'ailleurs on suppose le point (x, y, z) renfermé lui-même dans le volume $\mathcal{V}$, on trouvera, puisque la fonction $\vec{\mathcal{F}}(x, y, z)$ est homogène et en supposant de plus qu'elle soit du premier degré,

$$\mathcal{R} = \Omega r, \tag{5}$$

la valeur de Ω étant

$$\Omega = \vec{\mathcal{F}}(\cos p, \sin p\cos q, \sin p\sin q) \tag{6}$$

et, par suite,

$$s = \iiint \frac{\varepsilon\, r^2 \sin p}{(\varepsilon^2 + \Omega^2 r^2)^2} f(x + r\cos p,\ y + r\sin p\cos q,\ z + r\sin p\sin q)\, dp\, dq\, dr, \tag{7}$$

l'intégration devant être effectuée par rapport aux variables p, q entre les limites

$$p = 0, \qquad p = \pi, \qquad q = 0, \qquad q = 2\pi,$$

et par rapport à r depuis une valeur nulle du rayon vecteur r jusqu'à la valeur ρ qui répond au point où la direction de ce même rayon, déterminée par les angles p et q, rencontre l'enveloppe du volume $\mathcal{V}$.

Concevons à présent que le nombre ε devienne infiniment petit. Alors le rapport

$$\frac{\varepsilon\, r^2 \sin p}{(\varepsilon^2 + \Omega^2 r^2)^2}$$

sera sensiblement nul, excepté dans le cas où r différera très peu de zéro, et où, par suite, on aura, sans erreur sensible,

$$f(x + r\cos p,\ y + r\sin p\cos q,\ z + r\sin p\sin q) = f(x, y, z).$$

Donc la formule (7) donnera sensiblement

$$s = f(x, y, z) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \frac{\varepsilon\, r^2 \sin p}{(\varepsilon^2 + \Omega^2 r^2)^2}\, dp\, dq\, dr. \tag{8}$$

Si, dans cette dernière équation, on remplace r par $\frac{\varepsilon r}{\Omega}$, elle donnera

$$s = f(x, y, z) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\Omega\rho}{\varepsilon}} \frac{r^2 \sin p}{(1 + r^2)^2} \frac{1}{\Omega^3}\, dp\, dq\, dr. \tag{9}$$

D'ailleurs, ε étant très petit, on aura sensiblement

$$\int_0^{\frac{\Omega\rho}{\varepsilon}} \frac{r^2}{(1 + r^2)^2}\, dr = \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(1 + r^2)^2}\, dr = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, si l'on pose, pour abréger,

$$\Theta = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin p}{\Omega^2}\,dq\,dp, \tag{10}$$

la formule (9) pourra être réduite à

$$\delta = \Theta\, f(x, y, z), \tag{11}$$

et l'équation (3) donnera

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\Theta}\iiint \frac{\varepsilon\, f(\lambda, \mu, \nu)}{(\varepsilon^2 + \mathcal{R}^2)^2}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \tag{12}$$

la valeur de $\mathcal{R}$ étant toujours déterminée par la formule

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}(\lambda - x, \mu - y, \nu - z),$$

et l'intégrale triple s'étendant à tous les systèmes de valeurs de λ, μ, ν qui répondent à des points renfermés dans le volume $\mathcal{V}$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que $\mathcal{F}(x, y, z)$ était une fonction homogène du premier degré. Mais il est clair que l'on parviendrait encore à la formule (12), dans le cas contraire, si le rapport $\frac{\mathcal{R}}{r}$ se réduisait à une constante finie et différente de zéro, pour une valeur nulle de r. Seulement alors la valeur de Θ ne serait plus celle que détermineraient les formules (6) et (10).

Pour montrer une application très simple de la formule (12), supposons l'équation (1) réduite à

$$\iota = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

La surface représentée par cette équation deviendra une surface sphérique; et, comme on trouvera

$$\Omega = 1, \qquad \Theta = \pi^2,$$

la formule (12) donnera

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2}\iiint \frac{\varepsilon\, f(\lambda, \mu, \nu)}{(\varepsilon^2 + \mathcal{R}^2)^2}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \tag{14}$$

la valeur $\mathcal{R}^2$ étant

$$\mathcal{R}^2 = (\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2 + (\nu - z)^2. \tag{15}$$

Or, pour des valeurs indéterminées de

$$\mathcal{R}, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

l'équation (15), si l'on y regarde les coordonnées

$$x, \quad y, \quad z$$

comme variables, représentera elle-même une sphère dont le rayon sera $\mathcal{R}$, le centre coïncidant avec le point (λ, μ, ν). Ainsi l'équation (14) peut être considérée comme servant à décomposer une fonction quelconque des coordonnées rectangulaires x, y, z en une infinité de termes dont chacun, étant de la forme

$$\frac{1}{\pi^2}\,\frac{\varepsilon\, f(\lambda, \mu, \nu)}{[\varepsilon^2 + (x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 + (z - \nu)^2]^2}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

conserve la même valeur, tandis que l'on parcourt la surface d'une sphère qui a pour centre le point (λ, μ, ν). Si, dans une question de Physique mathématique, la fonction

$$f(x, y, z)$$

représente le déplacement initial ou la vitesse initiale d'une molécule dans l'intérieur du volume $\mathcal{V}$, ou plus généralement la valeur initiale d'une inconnue quelconque u, la formule (14) pourra être considérée comme propre à décomposer l'état initial en une infinité d'autres états dont chacun offrirait ce qu'on peut appeler une *onde sphérique*, la valeur de l'inconnue u restant alors la même dans tous les points situés à la même distance du point (λ, μ, ν).

Dans le cas général, la formule (14) pourra être considérée comme servant à décomposer un état initial donné en une infinité d'autres du genre de celui qu'on obtient quand la valeur initiale d'une inconnue u dépend uniquement du paramètre ι de la surface représentée par l'équation (1). Chacun de ces derniers états offrira ce que nous appellerons

une *onde* ou sphérique, ou ellipsoïdale, etc., suivant que la surface représentée par l'équation (1) sera ou une sphère, ou un ellipsoïde, etc.

Si l'équation (1), se réduisant à celle d'un ellipsoïde, était de la forme

$$(16) \qquad \iota = (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy)^{\frac{1}{2}},$$

a, b, c, d, e, f désignant des quantités constantes, la formule (10) donnerait

$$(17) \qquad \Theta = \frac{\pi^2}{\mathfrak{D}},$$

$\mathfrak{D}$ étant une quantité positive déterminée par l'équation

$$(18) \qquad \mathfrak{D}^2 = abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def;$$

et, par suite, la formule (12) se réduirait à

$$(19) \qquad f(x, y, z) = \frac{\mathfrak{D}}{\pi^2} \int\int\int \frac{\varepsilon f(\lambda, \mu, \nu)}{(\varepsilon^2 + \mathfrak{R}^2)^2} d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

la valeur de $\mathfrak{R}^2$ étant

$$(20) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}^2 = a(x-\lambda)^2 + b(y-\mu)^2 + c(z-\nu)^2 \\ \qquad + 2d(y-\mu)(z-\nu) + 2e(z-\nu)(x-\lambda) + 2f(x-\lambda)(y-\mu). \end{cases}$$

Alors aussi l'équation (20) représenterait un ellipsoïde dont le centre coïnciderait avec le point (λ, μ, ν).

En terminant ce paragraphe, nous ferons encore une remarque. On pourrait déduire l'équation (14), et c'est même ainsi que je l'ai d'abord trouvée, de la formule

$$(21) \quad f(x, y, z) = \int\int\int\int\int\int e^{[\alpha(x-\lambda)+\delta(y-\mu)+\gamma(z-\nu)]\sqrt{-1}} f(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\delta}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi},$$

que j'ai substituée à la formule de Fourier (*voir* le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, ainsi que les *Exercices de Mathématiques*), et qui suppose l'intégration relative à chacune des variables auxiliaires α, δ, γ effectuée entre les limites $-\infty, \infty$. Quant aux intégrations relatives aux variables auxiliaires λ, μ, ν, elles devront être,

dans la formule (21), comme dans la formule (14), étendues à tous les points du volume $\mathcal{V}$, si la fonction $f(x, y, z)$ n'a de valeur sensible que dans l'intérieur de ce volume. Or la formule (21) peut s'écrire comme il suit

$$(22) \qquad f(x, y, z) = \int\int\int \mathfrak{A} f(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

la valeur de $\mathfrak{A}$ étant

$$(23) \qquad \mathfrak{A} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{[\alpha(x-\lambda)+\delta(y-\mu)+\gamma(z-\nu)]\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\delta\, d\gamma.$$

D'ailleurs, si les variables auxiliaires

$$\alpha, \quad \delta, \quad \gamma$$

sont considérées, dans l'équation (23), comme représentant des coordonnées rectangulaires, puis transformées en coordonnées polaires à l'aide des formules

$$\alpha = r\cos p, \qquad \delta = r\sin p\cos q, \qquad \gamma = r\sin p\sin q,$$

alors, en posant, pour abréger,

$$\iota = [(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$(x-\lambda)\cos p + (y-\mu)\sin p\cos q + (z-\nu)\sin p\sin q = \iota\cos\delta,$$

on trouvera

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\iota r\cos\delta\sqrt{-1}} r^2 \sin p\, dp\, dq\, dr.$$

Par suite, en considérant l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{\iota r\cos\delta\sqrt{-1}} r^2\, dr$$

comme la limite vers laquelle converge la suivante

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} e^{\iota r\cos\delta\sqrt{-1}} r^2\, dr,$$

tandis que le nombre ε s'approche indéfiniment de la limite zéro, et

ayant égard à la formule connue

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\nu\cos\delta)\sin p\,dp\,dq = 2\pi\int_0^{\pi} f(\nu\cos p)\sin p\,dp,$$

on aura définitivement

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+\nu^2)^2}. \tag{24}$$

Or cette dernière valeur de $\mathfrak{A}$, substituée dans l'équation (22), la fait effectivement coïncider avec l'équation (14).

§ II. — *Ondes sphériques ou ellipsoïdales.*

Supposons que, le polynôme

$$ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy$$

étant positif pour des valeurs quelconques de x, y, z, et la fonction

$$\mathrm{F}(x,y,z,t)$$

étant de la forme

$$\mathrm{F}(x,y,z,t) = ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy-t^2,$$

l'inconnue ϖ doive vérifier l'équation aux différences partielles

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_y,\mathrm{D}_z,\mathrm{D}_t)\varpi = 0, \tag{1}$$

les variables x, y, z, t représentant d'ailleurs trois coordonnées rectangulaires et le temps. On pourra satisfaire à l'équation (1), en posant

$$\varpi = \varpi(ux+vy+wz\pm st), \tag{2}$$

la lettre ϖ indiquant une fonction arbitraire, et u, v, w, s désignant des coefficients constants liés entre eux par la formule

$$\mathrm{F}(u,v,w,s) = 0. \tag{3}$$

Par suite, on vérifiera encore l'équation (1), si l'on pose

$$\varpi = \mathrm{K}\varpi(\nu\pm t), \tag{4}$$

la valeur de ν étant

$$\nu = \frac{ux+vy+wz}{s}, \tag{5}$$

et K désignant une fonction quelconque des coefficients u, v, w. D'ailleurs, pour une valeur constante de ν, l'équation (5) représentera un plan dont la position sera variable dans l'espace avec les valeurs des coefficients

$$u,\quad v,\quad w;$$

et la surface, enveloppe de ce plan, pourra encore être représentée par l'équation (5) pourvu que l'on y considère

$$u,\quad v,\quad w,\quad s,$$

non plus comme des quantités constantes, mais comme des fonctions de x, y, z déterminées par la formule

$$\frac{x}{\mathrm{D}_u s} = \frac{y}{\mathrm{D}_v s} = \frac{z}{\mathrm{D}_w s} = \frac{ux+vy+wz}{s} = \nu. \tag{6}$$

Or, sous cette condition et en posant, pour abréger,

$$\mathfrak{D} = (abc-ad^2-be^2-cf^2+2def)^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \mathrm{a} = \dfrac{bc-d^2}{\mathfrak{D}^2}, & \mathrm{b} = \dfrac{ca-e^2}{\mathfrak{D}^2}, & \mathrm{c} = \dfrac{ab-f^2}{\mathfrak{D}^2}, \\ \mathrm{d} = \dfrac{ef-ad}{\mathfrak{D}^2}, & \mathrm{e} = \dfrac{fd-be}{\mathfrak{D}^2}, & \mathrm{f} = \dfrac{de-cf}{\mathfrak{D}^2}, \end{cases} \tag{8}$$

on verra l'équation (5) se réduire à la suivante

$$\nu^2 = \mathrm{a}x^2+\mathrm{b}y^2+\mathrm{c}z^2+2\mathrm{d}yz+2\mathrm{e}zx+2\mathrm{f}xy, \tag{9}$$

qui, pour une valeur constante de ν, représente un ellipsoïde. Enfin on s'assurera aisément que la valeur de ϖ fournie par la formule (2), quand on y substitue la valeur de ν que donne la formule (9), continuera de vérifier l'équation (1), si l'on y suppose

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\nu}. \tag{10}$$

Ainsi

$$(11)\qquad \varpi = \frac{\varpi(\iota+\ell)}{\iota} \quad \text{et} \quad \varpi = \frac{\varpi(\iota-\ell)}{\iota}$$

représenteront deux intégrales particulières de l'équation (1).

Supposons maintenant que la valeur initiale de ϖ, correspondante à une valeur nulle de t, dépende uniquement de la quantité positive ι, considérée comme fonction de x, y, z en vertu de la formule (9). Si l'on représente cette valeur initiale par $f(\iota)$, en supposant nulle la valeur initiale de $D_t\varpi$, c'est-à-dire si l'on assujettit l'inconnue ϖ à vérifier, pour $t=0$, les deux conditions

$$\varpi = f(\iota), \qquad D_t\varpi = 0,$$

il est clair qu'on pourra prendre

$$(12)\qquad \varpi = \frac{\varpi(\iota+\ell)+\varpi(\iota-\ell)}{2\iota},$$

pourvu que l'on prenne, en supposant ι positif,

$$(13)\qquad \varpi(\iota) = \varpi(-\iota) = \iota f(\iota).$$

Or, si la valeur initiale $f(\iota)$ de ϖ n'est sensible qu'à de très petites distances de l'origine, et entre les limites

$$\iota = -\varepsilon, \qquad \iota = \varepsilon,$$

ε désignant un nombre très petit, la valeur de ϖ, au bout du temps t, ne sera sensible qu'entre les limites

$$(14)\qquad \iota = t-\varepsilon, \qquad \iota = t+\varepsilon,$$

par conséquent entre les surfaces des deux ellipsoïdes représentés par les équations (14). Ajoutons que, si l'épaisseur de l'onde comprise entre ces deux ellipsoïdes est mesurée dans le sens de la nouvelle coordonnée ι, cette épaisseur sera constante et représentée par 2ε. Observons enfin que la formule (19) du § I[er] permettra de ramener immédiatement le cas où la valeur initiale de ϖ serait d'une forme

quelconque, mais sensible seulement dans le voisinage de l'origine, au cas que nous venons de traiter.

Lorsqu'on suppose

$$a = b = c, \qquad d = e = f = 0,$$

on a par suite

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c}, \qquad \mathrm{d} = \mathrm{e} = \mathrm{f} = 0,$$

et l'équation (9), réduite à

$$(15)\qquad \iota^2 = \mathrm{a}(x^2+y^2+z^2),$$

représente, non plus un ellipsoïde, mais une sphère, lorsqu'on attribue à ι une valeur constante. Alors, par suite, les ondes ellipsoïdales se réduisent à des ondes sphériques.

Dans un prochain Article je montrerai comment la formule (12) fournit les lois de la propagation des ondes sphériques ou ellipsoïdales dans les milieux élastiques.

130.

Calcul intégral. — *Mémoire sur l'emploi de la transformation des coordonnées pour la détermination et la réduction des intégrales définies multiples.*

C. R., t. XIII, p. 33 (12 juillet 1841).

Dans un Article que renferme la 49[e] livraison des *Exercices de Mathématiques* (1), j'ai fait voir que le passage d'un système de coordonnées à un autre fournit le moyen d'établir quelques formules dignes de remarque, qui servent à la transformation ou à la réduction de certaines intégrales définies simples ou doubles, et qui comprennent, comme cas particulier, une formule donnée, en 1819, par M. Poisson.

(1) *OEuvres de Cauchy*, Série II, Tome IX.

Je me propose, dans ce nouveau Mémoire, d'établir quelques autres formules du même genre. Lorsqu'on les applique à la transformation de l'intégrale quadruple qui représente la fonction principale propre à vérifier une équation caractéristique homogène aux différences partielles, on voit cette intégrale prendre successivement diverses formes, parmi lesquelles se trouvent comprises celles que M. Blanchet a obtenues, dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville.

Analyse.

§ I^er^. — *Formules déduites de la transformation des coordonnées dans un plan.*

Soient x, y deux variables réelles, et

$$f(x), \quad f(x, y)$$

deux fonctions réelles de ces variables. Il est facile de voir que, si l'on représente par

$$\alpha, \quad \delta, \quad \alpha', \quad \delta'$$

des constantes réelles, on aura, non seulement

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

mais encore

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x + \alpha' y,\ \delta x + \delta' y)\, dx\, dy = \frac{1}{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy,$$

Ω désignant une quantité positive déterminée par la formule

$$(3) \qquad \Omega = \sqrt{(\alpha\delta' - \alpha'\delta)^2}.$$

Supposons maintenant que, dans la formule (2), on remplace les variables x, y, considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires, par des coordonnées polaires r, p, à l'aide des formules connues

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p,$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$x = ur, \qquad y = vr,$$

en posant, pour abréger,

$$(4) \qquad u = \cos p, \qquad v = \sin p;$$

on trouvera

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f[(\alpha u + \alpha' v)r,\ (\delta u + \delta' v)r]\, r\, dp\, dr = \frac{1}{\Omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(ur, vr)\, r\, dp\, dr.$$

Si d'ailleurs, en supposant

$$\iota = \sqrt{x^2 + y^2},$$

on fait, dans la formule (5),

$$f(x, y) = e^{-\iota} f\left(\frac{x}{\iota}, \frac{y}{\iota}\right),$$

alors, en ayant égard à l'équation

$$\int_0^{\infty} r e^{-r}\, dr = 1,$$

et posant, pour abréger,

$$(6) \qquad \Theta = [(\alpha u + \alpha' v)^2 + (\delta u + \delta' v)^2]^{\frac{1}{2}},$$

on tirera de la formule (5)

$$(7) \qquad \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\alpha u + \alpha' v}{\Theta}, \frac{\delta u + \delta' v}{\Theta}\right)\frac{dp}{\Theta^2} = \frac{1}{\Omega}\int_0^{2\pi} f(u, v)\, dp.$$

Si l'on supposait les coefficients

$$\alpha, \quad \alpha'; \quad \delta, \quad \delta'$$

assujettis à vérifier les conditions

$$(8) \qquad \alpha^2 + \delta^2 = 1, \qquad \alpha'^2 + \delta'^2 = 1, \qquad \alpha\alpha' + \delta\delta' = 0,$$

on aurait, par suite,

$$\Omega = 1, \qquad \Theta = 1;$$

et la formule (7) se trouverait réduite à

$$(9)\qquad \int_0^{2\pi} f(\alpha u+\alpha' v,\ \beta u+\beta' v)\,dp=\frac{1}{\Omega}\int_0^{2\pi} f(u,v)\,dp.$$

§ II. — *Formules déduites de la transformation des coordonnées dans l'espace.*

Soient

$$x,\quad y,\quad z$$

trois variables réelles,

$$f(x,y,z)$$

une fonction réelle de ces variables, et

$$\alpha,\quad \alpha',\quad \alpha'';\quad \beta,\quad \beta',\quad \beta'';\quad \gamma,\quad \gamma',\quad \gamma''$$

neuf constantes réelles. Il est aisé de s'assurer que, si l'on pose

$$(1)\qquad \Omega=\sqrt{(\alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma)^2},$$

on aura

$$(2)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z,\ \beta x+\beta' y+\beta'' z,\ \gamma x+\gamma' y+\gamma'' z)\,dx\,dy\,dz\\ \displaystyle=\frac{1}{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.\end{cases}$$

Supposons maintenant que, dans cette dernière formule, on remplace les variables

$$x,\quad y,\quad z,$$

considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires, par des coordonnées polaires

$$p,\quad q,\quad r,$$

à l'aide des formules connues

$$x=r\cos p,\qquad p=r\sin p\cos q,\qquad r=r\sin p\sin q,$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$x=ur,\qquad y=vr,\qquad z=wr,$$

en posant, pour abréger,

$$(3)\qquad u=\cos p,\qquad v=\sin p\cos q,\qquad w=\sin p\sin q.$$

On trouvera

$$(4)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f[(\alpha u+\alpha' v+\alpha'' w)r,\ (\beta u+\beta' v+\beta'' w)r,\ (\gamma u+\gamma' v+\gamma'' w)r]\,dq\,dp\,dr\\ \displaystyle=\frac{1}{\Omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(ur,vr,wr)\,r\sin p\,dq\,dp\,dr.\end{cases}$$

Si d'ailleurs, en supposant

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

on fait, dans la formule (4),

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}e^{-r} f\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right),$$

alors, en ayant égard à l'équation

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} r^3 e^{-r}\,dr=1,$$

et posant, pour abréger,

$$(5)\qquad \Theta=[(\alpha u+\alpha' v+\alpha'' w)^3+(\beta u+\beta' v+\beta'' w)^2+(\gamma u+\gamma' v+\gamma'' w)^2]^{\frac{1}{2}},$$

on tirera de la formule (4)

$$(6)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{\alpha u+\alpha' v+\alpha'' w}{\Theta},\ \frac{\beta u+\beta' v+\beta'' w}{\Theta},\ \frac{\gamma u+\gamma' v+\gamma'' w}{\Theta}\right)\frac{\sin p\,dq\,dp}{\Theta^3}\\ \displaystyle=\frac{1}{\Omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(u,v,w)\sin p\,dq\,dp.\end{cases}$$

Si l'on supposait les coefficients

$$\alpha,\quad \alpha',\quad \alpha'';\quad \beta,\quad \beta',\quad \beta'';\quad \gamma,\quad \gamma',\quad \gamma''$$

assujettis à vérifier les conditions

$$(7)\qquad \begin{cases}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, & \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,\\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0, & \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0, & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\end{cases}$$

on aurait, par suite,

$$\Omega = 1, \qquad \Theta = 1,$$

et la formule (5) se trouverait réduite à

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha u + \alpha' v + \alpha'' w,\ 6u + 6'v + 6''w,\ \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w)\sin p\, dq\, dp \\ \quad = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(u, v, w)\sin p\, dq\, dp. \end{cases}$$

Si les trois dernières des conditions (7) étaient seules remplies, alors, en posant

$$(9)\quad \rho = (\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \rho' = (\alpha'^2 + 6'^2 + \gamma'^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \rho'' = (\alpha''^2 + 6''^2 + \gamma''^2)^{\frac{1}{2}},$$

on trouverait

$$(10)\qquad \Omega = \rho\rho'\rho'', \qquad \Theta = (\rho^2 u^2 + \rho'^2 v^2 + \rho''^2 w^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque, dans la formule (8), on suppose la fonction $f(x, y, z)$ réduite à une fonction $f(x)$ de la seule variable x, on a simplement

$$(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha\cos p + \alpha'\sin p\cos q + \alpha''\sin p\sin q)\sin p\, dq\, dp \\ \quad = 2\pi\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos p)\sin p\, dp, \end{cases}$$

c'est-à-dire que l'on se trouve ramené à la formule donnée par M. Poisson, en 1819.

Si, dans l'équation (6), on pose

$$f(x, y, z) = \left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{Q}}\right)^3 f\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}}\right),$$

les valeurs de $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ étant

$$\mathfrak{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathfrak{P} = hx + ky + lz, \qquad \mathfrak{Q} = (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy)^{\frac{1}{2}},$$

il suffira, pour satisfaire aux trois dernières des conditions (7), de

prendre pour

$$\alpha,\ 6,\ \gamma,\ 0;\ \alpha',\ 6',\ \gamma',\ 0';\ \alpha'',\ 6'',\ \gamma'',\ 0''$$

trois systèmes de valeurs de

$$\alpha,\ 6,\ \gamma,\ 0,$$

choisis de manière à vérifier la formule

$$(12)\qquad \frac{a\alpha + f6 + e\gamma}{\alpha} = \frac{f\alpha + b6 + d\gamma}{6} = \frac{e\alpha + d6 + c\gamma}{\gamma} = 0,$$

et correspondants aux trois racines de l'équation en 0, que l'on obtiendrait en éliminant de cette formule α, 6, γ. Supposons d'ailleurs que les équations

$$(13)\quad \begin{cases} ax + fy + ez = x, \\ fx + by + dz = y, \\ ex + dy + cz = z, \end{cases}$$

étant résolues par rapport à x, donnent

$$(14)\quad \begin{cases} x = ax + fy + ez, \\ y = fx + by + dz, \\ z = ex + dy + cz. \end{cases}$$

Enfin nommons P, Q ce que deviennent $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ quand on y remplace

$$x,\ y,\ z \text{ par } u,\ v,\ w,$$

et posons

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathrm{K} = (ah^2 + bk^2 + cl^2 + 2dkl + 2elh + 2fhk)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

On tirera de la formule (6)

$$(16)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\right)\frac{\sin p\, dq\, dp}{\mathrm{P}^3} = \frac{2\pi}{\mathrm{K}^3\mathfrak{D}}\int_0^{\pi} f(\mathrm{K}\cos p)\frac{\sin p\, dq}{\cos^2 p\sqrt{\cos^2 p}}.$$

Cette dernière équation coïncide avec l'une de celles que j'ai données dans la 49e livraison des *Exercices de Mathématiques*.

Avant de terminer ce paragraphe, nous citerons encore une formule générale à laquelle on se trouve conduit par la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires. Si, dans l'équation connue

$$(17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ \quad = \displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\infty} f(ur,vr,wr)\,r^2\sin p\,dq\,dp\,dr, \end{cases}$$

on remplace

$$f(x,y,z) \quad \text{par} \quad e^{-\sqrt{x^2}} f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right),$$

et si l'on pose d'ailleurs

$$(18)\qquad V=\frac{y}{x}=\frac{v}{u}=\operatorname{tang} p\cos q, \qquad W=\frac{z}{x}=\frac{w}{u}=\operatorname{tang} p\sin q,$$

on trouvera

$$(19)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(V,W)\frac{\sin p\,dq\,dp}{\cos^2 p\sqrt{\cos^2 p}}=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(V,W)\,dV\,dW.$$

Nous avons, dans ce Mémoire, employé, pour la réduction des intégrales définies doubles, des transformations de coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires ou polaires. On obtiendrait de nouvelles réductions du même genre si l'on employait, comme je l'ai fait autrefois dans le cours de Mécanique de la Faculté des Sciences, des coordonnées d'une nature quelconque, en considérant un point de l'espace comme déterminé par l'intersection de trois surfaces courbes, dont chacune se trouverait représentée en coordonnées rectangulaires par une équation qui renfermerait un paramètre variable. C'est là, au reste, un sujet sur lequel je me propose de revenir dans un autre Article.

131.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur diverses transformations remarquables de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène aux différences partielles.*

C. R., T. XIII, p. 40 (12 juillet 1841).

Supposons que

$$F(x,y,z,t)$$

représente une fonction de x, y, z, t, homogène du degré n, et dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. Nommons d'ailleurs ϖ une fonction principale assujettie à vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique homogène

$$(1)\qquad F(D_x,D_y,D_z,D_t)\varpi=0,$$

et, pour $t=0$, les conditions

$$(2)\qquad \varpi=0, \quad D_t\varpi=0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-1}\varpi=\varpi(x,y,z).$$

La valeur générale de ϖ, comme je l'ai fait voir dans le *Bulletin* de M. de Férussac, en 1830, et, plus récemment, dans mes *Exercices d'Analyse*, pourra être représentée par une intégrale définie quadruple. On aura, en effet,

$$(3)\qquad \varpi=-\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2^4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum\frac{\omega^{n-1}t^2\sin p\sin\vartheta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{(\!(F(u,v,w,\omega))\!)}\,\frac{dq\,dp\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2\hat{\delta}\sqrt{\cos^2\hat{\delta}}},$$

le signe $\sum$ étant relatif aux diverses valeurs de la variable auxiliaire ω, considérée comme racine de l'équation

$$(4)\qquad F(u,v,w,\omega)=0;$$

les valeurs λ, μ, ν, $\cos\hat{\delta}$ étant déterminées par les formules

$$(5)\qquad \lambda=x+\alpha s, \qquad \mu=y+\beta s, \qquad \nu=z+\gamma s,$$

$$(6)\qquad \cos\hat{\delta}=\alpha u+\beta v+\gamma w;$$

et les valeurs de α, $\mathfrak{C}$, γ, u, v, w, s étant

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha = \cos\vartheta, & \mathfrak{C} = \sin\vartheta\cos\tau, & \gamma = \sin\vartheta\sin\tau, \\ u = \cos p, & v = \sin p\cos q, & w = \sin p\sin q; \end{cases}$$

$$(8)\qquad s = \frac{\omega t}{\cos\delta}.$$

Ajoutons que la caractéristique

$$D_t^{2-n}$$

devra être réduite à D_t si l'on a $n = 2$, remplacée par l'unité, si l'on a $n = 3$, et indiquera $n - 3$ intégrations effectuées par rapport à t, à partir de l'origine $t = 0$, si le nombre entier n devient supérieur à 3.

Il est bon d'observer que, la fonction

$$F(x, y, z, t)$$

étant homogène, les racines ω de l'équation

$$(9)\qquad F(hu, hv, hw, \omega) = 0$$

seront les produits de h par les racines correspondantes de l'équation (4), quel que soit d'ailleurs le facteur h. Cela posé, n étant le degré de $F(x, y, z, t)$, on pourra généralement remplacer la formule (3) par celle-ci

$$(10)\qquad \varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{2^4\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-1}t^2\sin p\sin\vartheta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{(\mathrm{F}(hu,hv,hw,\omega)))}\,\frac{dq\,dp\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}},$$

pourvu qu'à la formule (8) on substitue la suivante :

$$(11)\qquad s = \frac{\omega t}{h\cos\delta}.$$

Si, pour fixer les idées, on prend $h = \frac{1}{u} = \frac{1}{\cos p}$, on aura

$$(12)\qquad \varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{2^4\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-1}t^2\sin p\sin\vartheta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{\left(\left(\mathrm{F}\left(1,\frac{v}{u},\frac{w}{u},\omega\right)\right)\right)}\,\frac{dq\,dp\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}},$$

la valeur de s étant

$$(13)\qquad s = \frac{\omega t\cos p}{\cos\delta} = \frac{\omega t}{\alpha + \mathfrak{C}\,\mathrm{tang}p\cos q + \gamma\,\mathrm{tang}p\sin q}.$$

On peut observer encore que le dernier membre de la formule (13) et la fonction

$$\mathrm{F}\left(1, \frac{v}{u}, \frac{w}{u}, \omega\right) = \mathrm{F}(1, \mathrm{tang}p\cos q, \mathrm{tang}p\sin q, \omega)$$

ne renferment l'angle p que sous le signe tang, et que, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{tang}p = k,$$

on aura généralement

$$(14)\qquad \int_0^{\pi} f(k)\,\frac{\sin p\,dp}{\cos^3 p\sqrt{\cos^2 p}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\sqrt{k^2}\,dk.$$

Cela posé, la formule (12) donnera

$$(15)\qquad \varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{2^4\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-1}t^2\sin\vartheta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{(\mathrm{F}(1, k\cos q, k\sin q, \omega)))}\,\frac{\sqrt{k^2}}{\mathrm{K}^3}\,d\tau\,d\vartheta\,dq\,dk,$$

pourvu que l'on pose

$$(16)\qquad \mathrm{K} = \sqrt{\left(\frac{\cos\delta}{\cos p}\right)^2} = \sqrt{(\alpha + \mathfrak{C}k\cos q + \gamma k\sin q)^2}$$

et

$$(17)\qquad s = \frac{\omega t}{\mathrm{K}}.$$

Les formules établies dans le précédent Mémoire fournissent aussi divers moyens de transformer le second membre de l'équation (3) ou (12).

Supposons, par exemple, que l'on veuille appliquer à cette transformation la formule (8) de la page 222. L'application pourra s'effectuer de deux manières différentes. En effet, on pourra, ou remplacer les variables u, v, w, considérées comme représentant les coordonnées rectan-

gulaires d'un point situé à l'unité de distance de l'origine, par d'autres coordonnées rectangulaires de la forme

$$\alpha u + \alpha' v + \alpha'' w, \quad \beta u + \beta' v + \beta'' w, \quad \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w,$$

ou remplacer les variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma,$$

considérées pareillement comme représentant les coordonnées rectangulaires d'un point situé à l'unité de distance de l'origine, par d'autres coordonnées rectangulaires de la forme

$$u\alpha + u'\beta + u''\gamma, \quad v\alpha + v'\beta + v''\gamma, \quad w\alpha + w'\beta + w''\gamma.$$

L'angle δ se trouvera remplacé, dans le premier cas, par p; dans le second cas, par ϑ; et, par suite, on tirera de la formule (12), dans le premier cas,

$$(18) \quad \varpi = -\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}t^2 \sin p \sin\vartheta\, \varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathfrak{V}))} \frac{dq\,dp\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2 p\sqrt{\cos^2 p}},$$

la valeur de $\mathfrak{v}$ étant

$$(19) \quad \mathfrak{v} = \vec{\sigma}\left(\alpha + \alpha'\frac{v}{u} + \alpha''\frac{w}{u},\ \beta + \beta'\frac{v}{u} + \beta''\frac{w}{u},\ \gamma + \gamma'\frac{v}{u} + \gamma''\frac{w}{u},\ \omega\right),$$

et la valeur de s étant

$$(20) \quad s = \omega t.$$

Au contraire, dans le second cas, on tirera de la formule (3)

$$(21) \quad \varpi = -\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}t^2 \sin p \sin\vartheta\, \varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathrm{F}(u,v,w,\omega)))} \frac{dq\,dp\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2\vartheta\sqrt{\cos^2\vartheta}},$$

les valeurs de λ, μ, ν, s étant

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda = x + (u\alpha + u'\beta + u''\gamma)s, \\ \mu = y + (v\alpha + v'\beta + v''\gamma)s, \\ \nu = z + (w\alpha + w'\beta + w''\gamma)s; \end{cases}$$

$$(23) \quad s = \frac{\omega t}{\cos\vartheta}.$$

Si maintenant on pose $k = \tang p$ dans la formule (18), on trouvera

$$(24) \quad \varpi = -\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}t^2 \sin\vartheta\, \varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathfrak{V}))} \sqrt{k^2}\, d\tau\, d\vartheta\, dq\, dk,$$

la valeur de $\mathfrak{v}$ étant

$$(25) \quad \mathfrak{v} = \mathrm{F}[\alpha + k(\alpha'\cos q + \alpha''\sin q),\ \beta + k(\beta'\cos q + \beta''\sin q),\ \gamma + k(\gamma'\cos q + \gamma''\sin q),\ \omega];$$

puis, en remplaçant k par $\frac{k}{t}$, et ω par $\frac{s}{t}$, on trouvera

$$(26) \quad \varpi = -\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\frac{s^{n-1}\sin\vartheta\, \varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathcal{S}))} \sqrt{k^2}\, d\tau\, d\vartheta\, dq\, dk,$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la variable s, la valeur de $\mathcal{S}$ étant

$$(27) \quad \mathcal{S} = \mathrm{F}[\alpha t + (\alpha'\cos q + \alpha''\sin q)k,\ \beta t + (\beta'\cos q + \beta''\sin q)k,\ \gamma t + (\gamma'\cos q + \gamma''\sin q)k,\ s],$$

et les valeurs de λ, μ, ν étant données par les formules

$$(5) \quad \lambda = x + \alpha s, \qquad \mu = y + \beta s, \qquad \nu = z + \gamma s.$$

Si, au contraire, on pose $k = \tang\vartheta$ dans la formule (21), on trouvera

$$(28) \quad \varpi = -\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}t^2 \sin p\, \varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathrm{F}(u,v,w,\omega)))} \sqrt{k^2}\, d\tau\, dp\, dq\, dk,$$

les valeurs de λ, μ, ν étant déterminées par les formules

$$(29) \quad \begin{cases} \lambda = x + [u + (u'\cos\tau + u''\sin\tau)k]\omega t, \\ \mu = y + [v + (v'\cos\tau + v''\sin\tau)k]\omega t, \\ \nu = z + [w + (w'\cos\tau + w''\sin\tau)k]\omega t; \end{cases}$$

puis, en remplaçant k par $\frac{k}{t}$, on trouvera

$$(30) \quad \varpi = -\frac{D_t^{\frac{1}{2}-n}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}\sin p\, \varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathrm{F}(u,v,w,\omega)))} \sqrt{k^2}\, d\tau\, dp\, dq\, dk,$$

les valeurs de λ, μ, ν étant

$$(31)\qquad \begin{cases} \lambda = x + [ut + (u'\cos\tau + u''\sin\tau)k]\omega, \\ \mu = y + [vt + (v'\cos\tau + v''\sin\tau)k]\omega, \\ \nu = z + [wt + (w'\cos\tau + w''\sin\tau)k]\omega. \end{cases}$$

Les formules (24), (26), et celle que l'on déduirait de la formule (18), en ayant égard à l'équation (19) de la page 224, s'accordent avec les formules trouvées par M. Blanchet, dans le cas où l'équation caractéristique est du sixième ordre, et qui peuvent être étendues, comme il l'a remarqué lui-même, au cas où cette équation caractéristique serait d'un ordre plus élevé.

Lorsque

$$F(x, y, z, t)$$

se réduit à une fonction homogène de t et de la variable r déterminée par la formule

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

la valeur de s, déduite de l'équation

$$(32)\qquad s = 0,$$

dans laquelle on suppose s défini par la formule (27), se réduit à une fonction du binôme

$$k^2 + t^2.$$

Comme alors on a

$$D_t s = \frac{t}{k} D_k s,$$

et, par suite, en nommant $f(s)$ une fonction quelconque de s,

$$D_t f(s) = \frac{t}{k} D_k f(s),$$

la formule (26) donne

$$(33)\qquad \varpi = \frac{1}{4\pi} D_t^{2-n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} t \, \mathcal{L} \frac{s^{n-1} \sin\theta \, \varpi(\lambda, \mu, \nu)}{((F(\alpha t, \beta t, \gamma t, s)))} \, d\tau \, d\theta,$$

pourvu que le produit

$$r^3 \varpi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \varpi(x, y, z)$$

se réduise à zéro avec $\frac{1}{r}$.

Dans un autre Mémoire, nous montrerons ce que deviennent les formules précédentes, quand on particularise la fonction $\varpi(x, y, z)$, et nous déduirons des formules ainsi obtenues les lois des mouvements représentés par un système d'équations aux différences partielles.

132.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur l'intégration des systèmes d'équations linéaires aux différences partielles.*

C. R., T. XIII, p. 46 (12 juillet 1841).

Ce Mémoire a pour objet la détermination de la fonction principale qui vérifie l'équation caractéristique correspondante à un système donné d'équations linéaires.

Le premier paragraphe se rapporte au cas où l'équation caractéristique est homogène. Dans ce cas, la fonction principale, comme je l'ai prouvé en 1830, peut être réduite à une intégrale quadruple. La décomposition de l'état initial en ondes sphériques me fournit une réduction nouvelle, et la fonction principale, correspondante à chaque onde sphérique, se trouve simplement représentée par une intégrale double.

Le second paragraphe est relatif au cas où l'équation caractéristique cesse d'être homogène. Alors, en substituant à l'équation caractéristique donnée une autre équation, qui en diffère peu et soit homogène, j'obtiens la valeur de la fonction principale, par le moyen d'une série dont chaque terme se calcule aisément à l'aide du théorème relatif aux équations linéaires, auxquelles on ajoute un second membre que l'on suppose fonction des variables indépendantes.

133.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur la réduction de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène.*

C. R., t. XIII, p. 97 (19 juillet 1841).

Considérons un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants, dans lesquelles les variables indépendantes soient les trois coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de l'espace, et le temps t. Si l'équation caractéristique, correspondante au système des équations données, est homogène, la fonction principale, propre à vérifier cette équation caractéristique, pourra être représentée à l'aide d'une intégrale quadruple, comme je l'ai prouvé, il y a longtemps, dans mes Leçons au Collège de France (*voir*, dans le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac, le Cahier d'avril 1830). Or, pour que cette intégrale quadruple se réduise à une intégrale double, il suffit que la fonction arbitraire de x, y, z, de laquelle dépend la fonction principale, se réduise à une fonction de la distance du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées. On peut d'ailleurs, comme je l'ai montré dans un précédent Mémoire, ramener à ce cas particulier le cas plus général où la fonction arbitraire dont il s'agit prend une forme quelconque.

La réduction que j'obtiens est fondée sur l'emploi d'une formule que j'ai donnée dans la 49ᵉ livraison des *Exercices de Mathématiques*. Je rappellerai cette formule dans le premier paragraphe du présent Mémoire, et je la ferai servir dans le second paragraphe à la réduction énoncée.

ANALYSE.

§ Iᵉʳ. — *Formules préliminaires.*

Supposons que, les valeurs de u, v, w étant

$$(1) \qquad u = \cos p, \qquad v = \sin p \cos q, \qquad w = \sin p \sin q,$$

P, Q représentent des fonctions réelles des variables u, v, w, et que ces fonctions soient déterminées par les formules

$$(2) \qquad P = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

$$(3) \qquad Q = (a u^2 + b v^2 + c w^2 + 2 d v w + 2 e w u + 2 f u v)^{\frac{1}{2}},$$

a, b, c, d, e, f; α, β, γ désignant des constantes réelles. Concevons encore que les équations

$$(4) \quad au + fv + ew = \mathcal{O}, \qquad fu + bv + dw = \mathcal{V}, \qquad eu + dv + cw = \mathcal{W},$$

étant résolues par rapport à u, v, w, donnent

$$(5) \quad u = a\mathcal{O} + f\mathcal{V} + e\mathcal{W}, \qquad v = f\mathcal{O} + b\mathcal{V} + d\mathcal{W}, \qquad w = e\mathcal{O} + d\mathcal{V} + c\mathcal{W}.$$

Enfin posons

$$(6) \qquad \Theta = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2 def)^{\frac{1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(7) \qquad \frac{1}{\Theta} = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2 def)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$(8) \qquad K = (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2 d\beta\gamma + 2 e\gamma\alpha + 2 f\alpha\beta)^{\frac{1}{2}},$$

et nommons $f(x)$ une fonction quelconque de x. Une formule établie dans la 49ᵉ livraison des *Exercices de Mathématiques*, et qui se déduit aussi des calculs que j'ai présentés à l'Académie dans la dernière séance, donnera

$$(9) \qquad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right) \frac{\sin p\, dq\, dp}{Q^3} = \frac{2\pi}{\Theta} \int_0^{\pi} f(K \cos q) \sin p\, dp.$$

On peut, dans les formules qui précèdent, considérer les variables

$$u, \quad v, \quad w,$$

qui vérifient l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

comme représentant les trois coordonnées rectangulaires d'un point A

situé à l'unité de distance de l'origine O. Si d'ailleurs les coefficients

$$\alpha, \quad 6, \quad \gamma$$

vérifient la condition

$$\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = 1, \tag{10}$$

ils pourront être censés représenter encore les coordonnées d'un point B situé à l'unité de distance de l'origine; et, si l'on nomme δ l'angle compris entre les droites OA, OB, on aura évidemment

$$\cos\delta = \alpha u + 6v + \gamma w = P; \tag{11}$$

d'où il résulte que l'équation (10) pourra s'écrire comme il suit

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{\cos\delta}{Q}\right)\frac{\sin p\,dq\,dp}{Q^2} = \frac{2\pi}{\Theta}\int_0^{\pi} f(K\cos\rho)\sin p\,dp. \tag{12}$$

Considérons maintenant, d'une part la droite OB représentée par l'équation

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{6} = \frac{z}{\gamma}, \tag{13}$$

et, d'autre part, l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 1. \tag{14}$$

Cette dernière équation pourra se mettre sous la forme

$$\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z = 1,$$

pourvu que l'on pose

$$\begin{cases} ax + fy + ez = \mathfrak{X}, \\ fx + by + dz = \mathfrak{Y}, \\ ex + dy + cz = \mathfrak{Z}. \end{cases} \tag{15}$$

Supposons d'ailleurs le point (x, y, z) choisi sur la surface de l'ellipsoïde de manière que le plan tangent, mené par ce point à l'ellipsoïde, soit perpendiculaire à la droite OB. On aura

$$\frac{\mathfrak{X}}{\alpha} = \frac{\mathfrak{Y}}{6} = \frac{\mathfrak{Z}}{\gamma} = \frac{\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z}{\alpha x + 6y + \gamma z} = \frac{1}{\alpha x + 6y + \gamma z}; \tag{16}$$

et, comme les équations (15) donneront

$$\begin{cases} x = a\mathfrak{X} + f\mathfrak{Y} + e\mathfrak{Z}, \\ y = f\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + d\mathfrak{Z}, \\ z = e\mathfrak{X} + d\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}, \end{cases} \tag{17}$$

on tirera de la formule (16), après avoir réuni les termes correspondants des trois premières fractions, respectivement multipliés : 1° par les coefficients a, f, e; 2° par les coefficients f, b, d; 3° par les coefficients e, d, c,

$$\frac{1}{\alpha x + 6y + \gamma z} = \frac{x}{a\alpha + f6 + e\gamma} = \frac{y}{f\alpha + b6 + d\gamma} = \frac{z}{e\alpha + d6 + c\gamma};$$

puis on conclura de cette dernière formule, en réunissant les termes correspondants des trois dernières fractions, respectivement multipliés par α, 6, γ,

$$\frac{1}{\alpha x + 6y + \gamma z} = \frac{\alpha x + 6y + \gamma z}{K^2},$$

et par conséquent

$$K = \pm(\alpha x + 6y + \gamma z).$$

Donc, la quantité positive K représentera la valeur numérique du produit

$$\alpha x + 6y + \gamma z,$$

c'est-à-dire, la distance de l'origine au plan qui touche l'ellipsoïde représenté par l'équation (14), et qui est perpendiculaire à la droite OB. Cette conclusion suppose que les coefficients α, 6, γ vérifient la condition (10). Dans le cas contraire, K serait le produit de la distance dont il s'agit par la longueur $\sqrt{\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2}$. Quant à la quantité Θ, elle représentera, dans tous les cas, le quotient qu'on obtient en divisant l'unité par le produit des trois demi-axes de l'ellipsoïde (14), ou, ce qui revient au même, par le $\frac{1}{8}$ du volume du parallélépipède circonscrit.

Observons encore que, dans tous les cas, la valeur de K^2 sera ce que devient la fonction

$$P = \alpha u + 6v + \gamma w$$

quand on y substitue les valeurs de u, v, w tirées des formules

$$au + fv + ew = \alpha, \qquad fu + bv + dw = \beta, \qquad eu + dv + cw = \gamma,$$

ou, ce qui revient au même, des équations

$$\frac{1}{2} D_u Q^2 = \alpha, \qquad \frac{1}{2} D_v Q^2 = \beta, \qquad \frac{1}{2} D_w Q^2 = \gamma. \tag{18}$$

De plus, pour obtenir la quantité Θ^2, il suffira de poser

$$\frac{\frac{1}{2} D_u Q^2}{u} = \frac{\frac{1}{2} D_v Q^2}{v} = \frac{\frac{1}{2} D_w Q^2}{w} = \theta, \tag{19}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{au + fv + ew}{u} = \frac{fu + bv + dw}{v} = \frac{eu + dv + cw}{w} = \theta, \tag{20}$$

puis d'éliminer u, v, w de la formule (20), et de faire $\theta = 0$ dans le premier membre de l'équation résultante

$$(a-\theta)(b-\theta)(c-\theta) - (a-\theta)d^2 - (b-\theta)e^2 - (c-\theta)f^2 + 2def = 0, \tag{21}$$

écrite sous une forme telle que le coefficient de θ^3 se réduise à -1. On peut dire aussi que la valeur de Θ^2 sera le produit des trois racines de l'équation en θ.

Si, dans l'équation (8), on remplace la fonction f par sa dérivée f', l'intégration indiquée dans le second membre pourra s'effectuer, et l'on trouvera

$$\frac{f(K) - f(-K)}{K} = \frac{\Theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'\left(\frac{P}{Q}\right) \frac{\sin p \, dq \, dp}{Q^3}. \tag{22}$$

Si, de plus, $f(x)$ désigne une fonction impaire de x, on aura

$$f(K) = -f(-K),$$

et par suite

$$\frac{f(K)}{K} = \frac{\Theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'\left(\frac{P}{Q}\right) \frac{\sin p \, dq \, dp}{Q^3}. \tag{23}$$

Soient maintenant

$$\varsigma = ux + vy + wz, \tag{24}$$

et

$$\iota = (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

ce que deviennent P et K quand on y remplace

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \quad \text{par} \quad x, \quad y, \quad z.$$

La formule (22) donnera

$$\frac{f(\iota) - f(-\iota)}{\iota} = \frac{\Theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'\left(\frac{\varsigma}{Q}\right) \frac{\sin p \, dq \, dp}{Q^3}; \tag{26}$$

puis, en supposant que $f(x)$ soit une fonction impaire de x, c'est-à-dire, en supposant que l'on ait

$$f(x) = -f(-x),$$

on en conclura

$$\frac{f(\iota)}{\iota} = \frac{\Theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'\left(\frac{\varsigma}{Q}\right) \frac{\sin p \, dq \, dp}{Q^3}. \tag{27}$$

Enfin, si l'on pose

$$a = b = c = 1, \qquad d = e = f = 0,$$

on aura, par suite,

$$a = b = c = 1, \qquad d = e = f = 0,$$
$$\Theta = 1, \qquad Q = 1,$$

et la formule (26) donnera

$$\frac{f(r) - f(-r)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'(\varsigma) \sin p \, dq \, dp, \tag{28}$$

la valeur de r étant

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \tag{29}$$

puis on en conclura, si $f(x)$ est une fonction impaire de x,

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'(\varsigma) \sin p \, dq \, dp. \tag{30}$$

D'ailleurs, $f(x)$ étant par hypothèse une fonction impaire de la variable x, si l on pose

$$\frac{f(x)}{x} = f(x),$$

$f(x)$ sera une fonction paire de la même variable. Donc les formules (27) et (30) pourront servir à transformer une fonction paire du radical

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

ou même du radical χ déterminé par la formule (25), en une intégrale double, dont chaque élément, considéré comme fonction de x, y, z, dépendra de la seule variable

$$\varsigma = ux + vy + wz,$$

c'est-à-dire, d'une fonction linéaire des trois variables x, y, z. Cette transformation remarquable fournit une méthode directe d'intégration pour les équations linéaires, comme nous l'expliquerons dans un autre Mémoire.

§ II. — *Réduction de la fonction principale correspondante à une équation caractéristique homogène.*

Soit

$$\mathrm{F}(x, y, z, t)$$

une fonction des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

homogène, du degré n, et dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. La fonction principale ϖ, correspondante à l'équation caractéristique

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \mathrm{D}_t)\varpi = 0, \tag{1}$$

sera

$$\varpi = -\frac{\mathrm{D}_t^{3-n}}{2^3\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}t^2\sin\rho\sin\vartheta\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((\mathrm{F}(u,v,w,\omega)))}\frac{dq\,d\rho\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}, \tag{2}$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la variable auxiliaire ω, pourvu que l'on pose

$$\begin{cases} u = \cos p, & v = \sin\rho\cos q, & w = \sin\rho\sin q, \\ \alpha = \cos\vartheta, & \hat{\mathrm{e}} = \sin\vartheta\cos\tau, & \gamma = \sin\vartheta\sin\tau, \end{cases} \tag{3}$$

$$\cos\delta = \alpha u + \hat{\mathrm{e}} v + \gamma w, \tag{4}$$

$$\lambda = x + \alpha s, \qquad \mu = y + \hat{\mathrm{e}} s, \qquad \nu = z + \gamma s, \tag{5}$$

$$s = \frac{\omega t}{\cos\delta}. \tag{6}$$

Supposons maintenant que

$$\varpi(x, y, z),$$

ou la valeur initiale de $\mathrm{D}_t^{n-1}\varpi$, se réduise à une fonction paire de la seule variable

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{7}$$

en sorte qu'on ait

$$\varpi(x, y, z) = \Pi(r) = \Pi(-r). \tag{8}$$

Si l'on pose

$$\rho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, \tag{9}$$

on aura encore

$$\varpi(\lambda, \mu, \nu) = \Pi(\rho) = \Pi(-\rho)$$

et, par suite,

$$\varpi = -\frac{\mathrm{D}_t^{3-n}}{2^3\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}t^2\sin\rho\sin\vartheta\Pi(\rho)}{((\mathrm{F}(u,v,w,\omega)))}\frac{dq\,d\rho\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}. \tag{10}$$

D'ailleurs, on tirera des formules (5) et (9)

$$\rho^2 = r^2 + s^2 + 2s\varkappa, \tag{11}$$

la valeur de $\varkappa$ étant

$$\varkappa = \alpha x + \hat{\mathrm{e}} y + \gamma z, \tag{12}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (6),

$$\rho^2 = \frac{\omega^2 t^2 + 2\omega t u \cos\delta + r^2 \cos^2\delta}{\cos^2\delta}. \tag{13}$$

Donc, si la lettre Q désigne une quantité positive déterminée par la formule

$$Q^2 = \omega^2 t^2 + 2\omega t u \cos\delta + r^2 \cos^2\delta,$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$\left\{ \begin{aligned} Q = \omega^2 t^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\omega t (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha u + \beta v + \gamma w) \\ + r^2 (\alpha u + \beta v + \gamma w)^2, \end{aligned} \right. \tag{14}$$

on aura simplement

$$\rho^2 = \frac{Q^2}{\cos^2\delta}, \tag{15}$$

et la formule (10) deviendra

$$\varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{2^3\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E} \frac{\omega^{n-1} t^2 \sin p \sin\vartheta \Pi\left(\frac{Q}{\cos\delta}\right)}{((F(u, v, w, \omega)))} \frac{dq\, dp\, d\tau\, d\vartheta}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}. \tag{16}$$

Il importe d'observer qu'en vertu des équations (4) et (14) $\cos\delta$ et Q^2 seront deux fonctions entières homogènes de α, β, γ, l'une du premier degré, l'autre du second. Cela posé, si, dans la formule (12) du § II, on échange entre eux les deux systèmes de quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \quad \text{et} \quad u, \quad v, \quad w,$$

alors, en posant

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \Pi\left(\frac{1}{x}\right),$$

on trouvera

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Pi\left(\frac{Q}{\cos\delta}\right) \frac{\sin\vartheta\, d\tau\, d\vartheta}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}} = \frac{2\pi}{K^2\Theta} \int_0^{\pi} \Pi\left(\frac{1}{K\cos\vartheta}\right) \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta\sqrt{\cos^2\vartheta}}; \tag{17}$$

la valeur de K^2 étant celle qu'on obtient quand on substitue, dans le trinôme

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = \cos\delta,$$

les valeurs de α, β, γ tirées des équations

$$\tfrac{1}{2} D_\alpha Q^2 = u, \qquad \tfrac{1}{2} D_\beta Q^2 = v, \qquad \tfrac{1}{2} D_\gamma Q^2 = w; \tag{18}$$

et la valeur de Θ^2 étant le produit des trois racines de l'équation en θ à laquelle on parvient en éliminant α, β, γ de la formule

$$\frac{\tfrac{1}{2} D_\alpha Q^2}{\alpha} = \frac{\tfrac{1}{2} D_\beta Q^2}{\beta} = \frac{\tfrac{1}{2} D_\gamma Q^2}{\gamma} = \theta. \tag{19}$$

Comme on aura d'ailleurs, en vertu de la formule (14), jointe aux équations (4) et (12),

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} D_\alpha Q^2 &= \omega^2 t^2 \alpha + (r^2 \cos\delta + u\omega t) u + \omega t x \cos\delta, \\ \tfrac{1}{2} D_\beta Q^2 &= \omega^2 t^2 \beta + (r^2 \cos\delta + u\omega t) v + \omega t y \cos\delta, \\ \tfrac{1}{2} D_\gamma Q^2 &= \omega^2 t^2 \gamma + (r^2 \cos\delta + u\omega t) w + \omega t z \cos\delta, \end{aligned}$$

les formules (18) donneront

$$\frac{\omega t\alpha + x\cos\delta}{u} = \frac{\omega t\beta + y\cos\delta}{v} = \frac{\omega t\gamma + z\cos\delta}{w} = \frac{1 - r^2\cos\delta - u\omega t}{\omega t}; \tag{20}$$

puis en posant, pour abréger,

$$ux + vy + wz = \varsigma, \tag{21}$$

et réunissant les termes correspondants des trois premières fractions comprises dans la formule (20), après les avoir respectivement multipliées : 1° par u, v, w; 2° par x, y, z, on trouvera

$$\frac{(\omega t + \varsigma)\cos\delta}{1} = \frac{u\omega t + r^2\cos\delta}{\varsigma} = \frac{1 - r^2\cos\delta - u\omega t}{\omega t};$$

par conséquent

$$\frac{(\omega t + \varsigma)\cos\delta}{1} = \frac{1}{\varsigma + \omega t}, \qquad \cos\delta = \left(\frac{1}{\varsigma + \omega t}\right)^2.$$

Donc la valeur cherchée de K^2 sera

$$K^2 = \left(\frac{1}{\varsigma + \omega t}\right)^2. \tag{22}$$

En opérant de la même manière, on tirera de la formule (19)

$$(23)\qquad \begin{cases} \vartheta - \omega^2 t^2 = \dfrac{(r^2\cos\delta + \varkappa\omega t)u + \omega t x\cos\delta}{\alpha} \\ \qquad\quad = \dfrac{(r^2\cos\delta + \varkappa\omega t)v + \omega t y\cos\delta}{6} \\ \qquad\quad = \dfrac{(r^2\cos\delta + \varkappa\omega t)w + \omega t z\cos\delta}{\gamma} \end{cases}$$

et

$$(24)\qquad \vartheta - \omega t(\omega t + \varsigma) = r^2 + \omega t\frac{\varkappa}{\cos\delta} = r^2(\omega t + \varsigma)\frac{\cos\delta}{\varkappa};$$

puis, en éliminant de la formule (24) le rapport $\frac{\cos\delta}{\varkappa}$, on trouvera

$$(25)\qquad [\vartheta - \omega t(\omega t + \varsigma)]^2 - \vartheta r^2 = 0.$$

Cette dernière équation en ϑ fournit seulement deux racines dont le produit

$$\omega^2 t^2(\omega t + \varsigma)^2$$

est ce que devient le premier membre quand on y pose $\vartheta = 0$. Mais la racine qui nous manque ici est facile à retrouver, et se réduit évidemment à

$$\omega^2 t^2,$$

puisqu'on vérifie la formule (23) en posant

$$\vartheta = \omega^2 t^2, \qquad \cos\delta = 0, \qquad \varkappa = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\vartheta = \omega^2 t^2, \qquad \alpha u + 6v + \gamma w = 0, \qquad \alpha x + 6y + \gamma z = 0.$$

Donc la valeur de Θ^2, ou le produit des trois racines de l'équation la plus générale en ϑ, à laquelle on puisse arriver en éliminant α, 6, γ de la formule (19), sera

$$(26)\qquad \Theta^2 = \omega^3 t^3(\omega t + \varsigma)^2 = \frac{\omega^3 t^3}{K^2}.$$

Donc, K et Θ devant être positifs, on aura

$$(27)\qquad K\Theta = \omega^3 t^3.$$

Si aux formules (17), (22), (27) on joint encore la suivante

$$D_t\int_0^{\pi} f\left(\frac{\omega t + \varsigma}{\cos\vartheta}\right)\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta}} = -2\omega\frac{f(\omega t + \varsigma)}{\omega t + \varsigma},$$

qu'il est facile d'établir, dans le cas où $f(x)$ est une fonction paire qui se réduit à zéro pour des valeurs infinies de x, alors, en supposant que le produit

$$\iota^3\Pi(\iota)$$

s'évanouisse avec $\frac{1}{\iota}$, on tirera de la formule (16)

$$(28)\qquad \varpi = \frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}(\omega t + \varsigma)\,\Pi(\omega t + \varsigma)}{((F(u, v, w, \omega)))}\sin p\, dq\, dp.$$

Telle est l'intégrale double à laquelle se réduit la fonction principale ϖ, lorsque la valeur initiale $\varpi(x, y, z)$ de $D_t^{n-1}\varpi$ est fonction de la seule variable

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$ se réduisait, non plus à une fonction de r, mais à une fonction du radical ι déterminé par une équation de la forme

$$(29)\qquad \iota = (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy)^{\frac{1}{2}},$$

alors, au lieu de l'équation (28), on obtiendrait la suivante

$$(30)\qquad \varpi = \frac{\Theta}{4\pi}D_t^{2-n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}(\omega t + \varsigma)\,\Pi\left(\frac{\omega t + \varsigma}{Q}\right)}{((F(u, v, w, \omega)))}\frac{\sin p}{Q^2}\, dq\, dp,$$

la valeur de $\frac{1}{\Theta}$ étant

$$(31)\qquad \frac{1}{\Theta} = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est ce que l'on parviendra encore à reconnaître en raisonnant toujours comme nous venons de le faire.

En terminant ce paragraphe, nous ferons remarquer que l'on arriverait encore facilement aux formules (28) et (30) si l'on appliquait les transformations précédentes, non plus à l'équation (2), mais à l'équation (21) de la page 228 (*voir* le *Compte rendu* de la séance du 12 juillet dernier).

134.

CALCUL INTÉGRAL. — *Méthode abrégée pour l'intégration des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants.*

C. R., T. XIII, p. 109 (19 juillet 1841).

Comme je l'ai prouvé, dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématiques*, l'intégration d'un système d'équations linéaires, différentielles ou aux dérivées partielles, et à coefficients constants, peut être réduite à la détermination de la fonction principale. Si, pour fixer les idées, on suppose que les équations linéaires données se rapportent à un problème de Physique ou de Mécanique, le temps fera partie des variables indépendantes; et si, alors, comme il arrive d'ordinaire, le coefficient de la plus haute puissance de D_t dans l'équation caractéristique, se réduit à l'unité, la fonction principale se trouvera complètement déterminée par la double condition de vérifier l'équation caractéristique dont l'ordre sera un certain nombre entier n, et de s'évanouir, pour une valeur donnée, par exemple, pour une valeur nulle du temps, avec ses dérivées relatives au temps et d'un ordre inférieur à $n-1$. Quant à la dérivée de l'ordre $n-1$, elle devra se réduire, pour une valeur nulle de la variable indépendante t, soit à une constante donnée, soit à une fonction donnée des autres variables indépendantes, suivant qu'il s'agira d'intégrer des équations différentielles linéaires ou des équations linéaires aux dérivées partielles.

Pour évaluer la fonction principale telle que je viens de la définir, j'ai eu recours, dans les *Exercices d'Analyse*, à la formule de Fourier, ou plutôt à une formule du même genre que j'ai substituée à la première, et fait servir à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Lorsque les équations données se rapportent à un problème de Physique ou de Mécanique, elles renferment en général, avec le temps t, trois autres variables indépendantes, qui peuvent être censées représenter des coordonnées rectangulaires; et la fonction principale, calculée comme je viens de le dire, se trouve représentée par une intégrale définie sextuple. Pour reconnaître les lois des phénomènes, on est obligé de faire subir à cette intégrale sextuple diverses réductions. Parmi ces réductions on doit particulièrement remarquer celles qui se rapportent au cas où l'équation caractéristique est homogène. Alors, comme je l'ai prouvé en 1830, l'intégrale sextuple est généralement réductible à une intégrale quadruple. Elle sera même, comme je viens de le montrer dans le précédent Mémoire, réductible à une intégrale double, si la valeur initiale de la fonction principale prend certaines formes particulières, si, par exemple, elle dépend uniquement de la distance d'un point variable à l'origine des coordonnées.

L'importance des réductions que je viens de rappeler m'a engagé à rechercher s'il ne serait pas possible d'obtenir directement les formules réduites. J'ai été assez heureux pour y parvenir. On verra dans ce nouveau Mémoire que, en se servant du calcul des résidus, on peut, non seulement obtenir avec une grande facilité la fonction principale correspondante à une équation différentielle caractéristique, mais encore passer de cette fonction principale à celle qui vérifie une équation caractéristique aux dérivées partielles, homogène ou non homogène, et en particulier, à l'intégrale double ou à l'intégrale quadruple qui représente la fonction principale pour une équation caractéristique homogène.

ANALYSE.

§ I. — *Sur la fonction principale qui vérifie une équation différentielle linéaire.*

Soit $F(t)$ une fonction entière de t du degré n, dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. Soit en outre ϖ une fonction principale assujettie à vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique

$$F(D_t)\varpi = 0, \tag{1}$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \theta, \tag{2}$$

θ désignant une quantité constante. Pour que l'équation (1) soit vérifiée, il suffira que l'on prenne

$$\varpi = e^{st},$$

s désignant une racine de l'équation

$$F(s) = 0, \tag{3}$$

ou plus généralement

$$\varpi = \mathcal{L}\frac{\Theta e^{st}}{((F(s)))}, \tag{4}$$

Θ pouvant désigner une quantité constante, ou une fonction entière de s. Comme on aura d'ailleurs, en supposant $m < n - 1$,

$$\mathcal{L}\frac{s^m}{((F(s)))} = 0,$$

et, en remplaçant m par $n - 1$ dans la formule précédente,

$$\mathcal{L}\frac{s^{n-1}}{((F(s)))} = 1,$$

la valeur de ϖ donnée par la formule (4) vérifiera évidemment les conditions (2) si l'on y pose $\Theta = \theta$. Donc la valeur cherchée de la fonction principale ϖ sera

$$\varpi = \mathcal{L}\frac{\theta e^{st}}{((F(s)))}.$$

§ II. — *Sur les fonctions principales dont les dérivées offrent des valeurs initiales qui dépendent seulement d'une fonction linéaire des variables indépendantes.*

Soit

$$F(x, y, z, \ldots, t)$$

une fonction de plusieurs variables x, y, z, t, entière, du degré n, et dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, que les variables x, y, z, t, réduites à quatre, représentent trois coordonnées rectangulaires et le temps. Enfin, soit ϖ une fonction principale assujettie à vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varpi = 0, \tag{1}$$

et pour $t = 0$ les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \varpi(x, y, z). \tag{2}$$

On pourra aisément trouver la valeur générale de ϖ si, l'équation caractéristique étant homogène, la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$, représentée par $\varpi(x, y, z)$, dépend uniquement d'une fonction linéaire des variables indépendantes x, y, z, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$\varpi(x, y, z) = \Pi(ux + vy + wz), \tag{3}$$

u, v, w désignant des coefficients constants, ou, ce qui revient au même,

$$\varpi(x, y, z) = \Pi(\varsigma), \tag{4}$$

la valeur de ς étant

$$\varsigma = ux + vy + wz. \tag{5}$$

C'est en effet ce qui résulte des considérations suivantes.

Il est clair que, pour vérifier l'équation (1), il suffira de prendre

$$\varpi = e^{ux+vy+wz+st} = e^{\zeta+st},$$

s désignant une racine quelconque de l'équation

$$F(u, v, w, s) = 0, \tag{6}$$

ou plus généralement

$$\varpi = \int \frac{\Theta e^{ux+vy+wz+st}}{((F(u, v, w, s)))} = \int \frac{\Theta e^{\zeta+st}}{((F(u, v, w, s)))}, \tag{7}$$

Θ désignant une fonction entière quelconque de u, v, w, s, et le signe $\int$ étant relatif à la variable auxiliaire s. Cela posé, concevons d'abord que l'équation (3) se réduise à

$$\varpi(x, y, z) = \vartheta e^{ux+vy+wz}, \tag{8}$$

ϑ désignant un coefficient constant. Comme on aura, en supposant $m < n-1$,

$$\int \frac{s^m}{((F(u, v, w, s)))} = 0,$$

et, en remplaçant m par $n-1$,

$$\int \frac{s^{n-1}}{((F(u, v, w, s)))} = 1,$$

la valeur de ϖ, donnée par la formule (7), vérifiera évidemment l'équation (1) avec les conditions (2), si l'on y pose $\Theta = \vartheta$, c'est-à-dire si l'on prend

$$\varpi = \int \frac{\vartheta e^{ux+vy+wz+st}}{((F(u, v, w, s)))}, \tag{9}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi = \int \frac{\vartheta e^{\zeta+st}}{((F(u, v, w, s)))}. \tag{10}$$

On arriverait à la même conclusion en observant que la valeur de ϖ donnée par la formule (7) vérifie l'équation différentielle

$$F(u, v, w, D_t)\varpi = 0,$$

et, en intégrant cette équation différentielle par la méthode exposée dans le § I^er^, de manière à remplir, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-1}\varpi = 0, \quad D_t^n\varpi = \vartheta e^{ux+vy+wz}.$$

Concevons maintenant qu'à la formule (8) on substitue celle-ci :

$$\varpi(x, y, z) = \vartheta e^{h(ux+vy+wz)}, \tag{11}$$

h, ϑ désignant deux coefficients constants. Alors, au lieu de la formule (9), on obtiendra la suivante

$$\varpi = \int \vartheta \frac{e^{h(ux+vy+wz)+st}}{((F(hu, hv, hw, s)))}, \tag{12}$$

que l'on peut écrire comme il suit :

$$\varpi = \int \frac{\vartheta e^{h\zeta+st}}{((F(hu, hv, hw, s)))}. \tag{13}$$

Si $F(x, y, z, t)$ devient une fonction homogène des variables x, y, z, t, on tirera de la formule (13), en y posant $s = h\omega$,

$$\varpi = \int \frac{\vartheta}{h^{n-1}} \frac{e^{h(\zeta+\omega t)}}{((F(u, v, w, \omega)))}, \tag{14}$$

le signe $\int$ étant relatif à la variable auxiliaire ω. Pour faire disparaître, dans l'équation (14), le diviseur h^{n-1}, il suffira de différentier $n-1$ fois les deux membres par rapport à t. On trouvera ainsi

$$D_t^{n-1}\varpi = \int \frac{\omega^{n-1}}{((F(u, v, w, \omega)))} \vartheta e^{h(\zeta+\omega t)}; \tag{15}$$

puis, en intégrant autant de fois et indiquant à l'aide de la caractéristique D_t^{-1}, ou D_t^{-2}, ou D_t^{-3}, ..., placée devant une fonction de t, le résultat d'une, de deux, de trois, ... intégrations successives effectuées par rapport à t, à partir de $t = 0$, on tirera de la formule (15)

$$\varpi = D_t^{1-n} \int \frac{\omega^{n-1}}{((F(u, v, w, \omega)))} \vartheta e^{h(\zeta+\omega t)}. \tag{16}$$

Supposons maintenant que, l'équation caractéristique étant homogène, la valeur initiale $\varpi(x, y, z)$ de $D_t^{n-1}\varpi$ soit donnée par la formule (3) ou (4)

$$\varpi(x, y, z) = \Pi(ux + vy + wz) = \Pi(\varsigma).$$

La fonction $\Pi(x)$ pourra être décomposée en termes de la forme

$$\vartheta e^{hx},$$

le nombre de ces termes étant fini ou infini, et l'exposant h de x dans chaque terme pouvant être réel ou imaginaire, comme je l'ai fait voir dans le second Volume des *Exercices de Mathématiques*, p. 112 (1). On pourra donc supposer

$$\Pi(x) = \Sigma\vartheta e^{hx}, \tag{17}$$

le signe Σ indiquant une somme relative aux diverses valeurs que h et ϑ peuvent acquérir. Cela posé, l'équation (4) donnera

$$\varpi(x, y, z) = \Sigma\vartheta e^{h\varsigma}; \tag{18}$$

et, comme la valeur de ϖ, correspondante à la valeur précédente de $\varpi(x, y, z)$, sera nécessairement la somme des valeurs de ϖ qu'on obtiendrait en substituant successivement les diverses valeurs de h et de ϑ dans le second membre de l'équation (16), on tirera de cette équation

$$\varpi = D_t^{1-n}\int \frac{\omega^{n-1}}{((F(u, v, w, \omega)))}\Sigma\vartheta e^{h(\varsigma+\omega t)}, \tag{19}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varpi = D_t^{1-n}\int \frac{\omega^{n-1}}{((F(u, v, w, \omega)))}\Pi(\varsigma + \omega t). \tag{20}$$

Si l'équation caractéristique cessait d'être homogène, alors, de l'équation (12) combinée avec la formule de Fourier, ou plutôt avec la suivante

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{h(x-k)\sqrt{-1}}\Pi(k)\,dh\,dk,$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, t. VII.

on conclurait

$$\varpi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{e^{st+h(\varsigma-k)\sqrt{-1}}\Pi(k)}{((S))}\,dh\,dk, \tag{21}$$

la valeur de s étant

$$s = F(hu\sqrt{-1}, hv\sqrt{-1}, hw\sqrt{-1}, s), \tag{22}$$

et le signe $\int$ étant relatif à la variable auxiliaire s.

§ III. — *Sur les fonctions principales dont les dérivées offrent des valeurs initiales qui dépendent seulement d'une fonction entière des variables indépendantes, homogène et du second degré.*

Les mêmes choses étant posées que dans le § II, concevons que la valeur initiale $\varpi(x, y, z)$ de $D_t^{n-1}\varpi$ dépende d'une fonction entière de x, y, z, homogène et du second degré. Si, en supposant cette fonction toujours positive, on désigne par ι sa racine carrée prise positivement, on aura

$$\varpi(x, y, z) = \Pi(\iota) = \Pi(-\iota), \tag{1}$$

la valeur de ι étant par exemple de la forme

$$\iota = (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Or la valeur précédente de $\varpi(x, y, z)$ pourra être transformée en une intégrale double, dont chaque élément, considéré comme fonction de x, y, z, dépende seulement d'un trinôme de la forme

$$ux + vy + wz.$$

Si, pour plus de simplicité, on prend

$$a = b = c = 1, \qquad d = e = f = 0,$$

le radical ι se réduira au rayon vecteur r déterminé par la formule

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3}$$

D'ailleurs, si, en nommant $f(r)$ une fonction quelconque de r, on pose

$$u = \cos p, \qquad v = \sin p \cos q, \qquad w = \sin p \sin q, \tag{4}$$

et, de plus,

$$\varsigma = ux + vy + wz, \tag{5}$$

on aura, en vertu d'une formule donnée par M. Poisson en 1819,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varsigma)\sin p\, dq\, dp = 2\pi\int_0^{\pi} f(ru)\sin p\, dp,$$

puis on en conclura, en remplaçant $f(r)$ par $f'(r)$,

$$\frac{f(r)-f(-r)}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f'(\varsigma)\sin p\, dq\, dp. \tag{6}$$

Donc, si l'on pose

$$f(r) = r\,\Pi(r), \tag{7}$$

alors, en ayant égard à la condition

$$\Pi(r) = \Pi(-r), \tag{8}$$

on trouvera

$$\Pi(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f'(\varsigma)\sin p\, dq\, dp. \tag{9}$$

On pourra donc considérer la valeur initiale $\Pi(r)$ de $D_t^{n-1}\varpi$ comme la somme d'un nombre infini de termes, dont chacun dépendra uniquement d'une fonction linéaire de x, y, z, savoir, de la variable

$$\varsigma = ux + vy + wz.$$

La valeur de ϖ correspondante à la somme de tous ces termes se déduira, si l'équation caractéristique devient homogène, de la formule (20) du paragraphe précédent; et, en vertu de cette formule,

jointe à l'équation (9), on aura, dans l'hypothèse admise,

$$\varpi = \frac{D_t^{1-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-1} f'(\varsigma+\omega t)}{(F(u,v,w,\omega))}\sin p\, dq\, dp, \tag{10}$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la variable auxiliaire ω. Si d'ailleurs on a égard à la formule

$$\omega f'(\varsigma+\omega t) = D_t f(\varsigma+\omega t) = D_t[(\varsigma+\omega t)\Pi(\varsigma+\omega t)],$$

on trouvera définitivement

$$\varpi = \frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-2}(\varsigma+\omega t)\Pi(\varsigma+\omega t)}{(F(u,v,w,\omega))}\sin p\, dq\, dp. \tag{11}$$

Si, l'équation caractéristique étant toujours homogène, la valeur initiale $\varpi(x,y,z)$ de $D_t^{n-1}\varpi$ se trouvait représentée, non plus par $\Pi(r)$, mais par $\Pi(v)$, alors, à l'aide des formules établies dans le précédent Mémoire, on obtiendrait l'équation

$$\varpi = \frac{\Theta}{4\pi} D_t^{2-n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\frac{\omega^{n-2}(\varsigma+\omega t)\,\Pi\left(\frac{\varsigma+\omega t}{Q}\right)}{(F(u,v,w,\omega))}\frac{\sin p}{Q^2}\, dq\, dp, \tag{12}$$

la valeur de $\frac{1}{\Theta}$ étant

$$\frac{1}{\Theta} = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas particulier où

$$F(x,y,z,t)$$

se réduit à une fonction homogène de t et de $x^2+y^2+z^2$, alors

$$F(u,v,w,s)$$

devient indépendant de u, v, w, puisque les formules (4) donnent

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Donc alors, en vertu de l'équation (6), la formule (11) donnera

$$\varpi = D_t^{1-n}\mathcal{E}\frac{\omega^{n-1}}{(F(u,v,w,\omega))}\frac{(r+\omega t)\Pi(r+\omega t)+(r-\omega t)\Pi(r-\omega t)}{2r}. \tag{13}$$

Pareillement, si

$$F(x, y, z, t)$$

se réduisait à une fonction homogène de t et de v^2, on tirerait de la formule (12), jointe à l'équation (26) du § I^{er} du précédent Mémoire,

$$(14)\qquad \varpi = D_t^{1-n} \sum \frac{\omega^{n-1}}{((F(u, v, w, \omega)))} \frac{(\iota+\omega t)\,\Pi(\iota+\omega t) + (\iota-\omega t)\,\Pi(\iota-\omega t)}{2\iota}.$$

Si l'équation caractéristique cessait d'être homogène, alors, en substituant à la formule (20) du § II la formule (21) du même paragraphe, on obtiendrait pour valeur de la fonction principale ϖ, non plus une intégrale double, comme dans la formule (11) ou (12), mais une intégrale quadruple : par exemple, en supposant la valeur initiale $\varpi(x, y, z)$ de $D_t^{n-1}\varpi$ représentée par

$$\Pi(r) = \Pi(-r),$$

et faisant toujours, pour abréger,

$$f(r) = r\,\Pi(r),$$

on trouverait, au lieu de la formule (11),

$$(15)\qquad \varpi = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(k)\sin p}{((s))}\, e^{xt+h(\zeta-k)\sqrt{-1}}\, dq\, dp\, dh\, dk,$$

la valeur de s étant

$$(16)\qquad s = F(hu\sqrt{-1},\ hv\sqrt{-1},\ hw\sqrt{-1},\ s),$$

et le signe $\sum$ étant relatif à la variable auxiliaire s.

Si $F(x, y, z, t)$, sans être homogène, se réduisait à une fonction de t et de r, la valeur de s donnée par la formule (16) deviendrait indépendante de u, v, w; et, comme on aurait, en vertu de l'équation (6),

$$(17)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{h\zeta\sqrt{-1}}\sin p\, dq\, dp = 4\pi\frac{\sin hr}{hr},$$

la formule (15) se trouverait réduite à la suivante :

$$(18)\qquad \varpi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum \frac{\sin hr}{hr}\,\frac{f'(k)}{((s))}\, e^{xt+h(\zeta-k)\sqrt{-1}}\, dh\, dk.$$

Celle-ci s'applique particulièrement à la propagation de la lumière dans les milieux isotropes, quand on tient compte de la dispersion.

§ IV. — *Détermination générale de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique aux dérivées partielles.*

Les mêmes choses étant posées que dans le § II, si la valeur initiale $\varpi(x, y, z)$ de $D_t^{n-1}\varpi$ prend une forme quelconque, on pourra du moins la transformer en une intégrale triple dont chaque élément dépende d'une seule quantité représentée par une fonction de x, y, z, entière et du second degré. En effet, d'après une formule établie dans un précédent Mémoire, on aura

$$(1)\qquad \varpi(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2}\iiint \frac{\varepsilon\,\varpi(\lambda, \mu, \nu)}{(\varepsilon^2+\rho^2)^2}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

la valeur de ρ^2 étant

$$(2)\qquad \rho^2 = (\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2 + (\nu - z)^2,$$

et la lettre ε désignant une quantité positive infiniment petite qui devra être définitivement réduite à zéro. Si, dans le cas où l'on considère λ, μ, ν comme représentant des coordonnées rectangulaires, la fonction $\varpi(\lambda, \mu, \nu)$ s'évanouit pour tout point (λ, μ, ν) renfermé dans l'intérieur d'un certain volume $\mathfrak{V}$, on pourra, dans la formule (1), supposer indifféremment la triple intégration étendue, soit à tous les points de ce volume, soit à tous les points de l'espace, c'est-à-dire, à toutes les valeurs réelles de λ, μ, ν.

Concevons maintenant que l'on se propose de calculer la fonction principale ϖ. Cette fonction sera une somme d'éléments correspondants aux diverses valeurs initiales de $D_t^{n-1}\varpi$ qui pourraient être représentées par les divers éléments de l'intégrale triple comprise dans le

second membre de la formule (1). On aura donc

$$\varpi = \frac{1}{\pi^3}\int\int\int \varkappa\varpi(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \tag{3}$$

si l'on nomme $\varkappa$ la valeur particulière de ϖ qui répondrait à une valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$ représentée par le rapport

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}.$$

Or, pour obtenir cette valeur particulière $\varkappa$, il suffira de recourir à l'une des formules (11) ou (15) du § III, en y remplaçant la fonction

$$x\,\Pi(x) = f(x)$$

par le rapport

$$\frac{\varepsilon x}{(\varepsilon^2+x^2)^2},$$

que l'on peut présenter à volonté sous l'une ou l'autre des formes

$$-\tfrac{1}{2}D_\varepsilon\frac{x}{\varepsilon^2+x^2}, \quad -\tfrac{1}{2}D_x\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2},$$

et en supposant ς déterminé, non plus par l'équation (5) du § III, mais par la suivante

$$\varsigma = u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu), \tag{4}$$

attendu que, pour déduire ρ de r, il suffira de substituer à x, y, z les différences

$$x-\lambda, \quad y-\mu, \quad z-\nu.$$

En opérant comme on vient de le dire et supposant d'abord l'équation caractéristique homogène, on tirera de la formule (11) du § III

$$\varkappa = \frac{D_t^{\frac{n}{2}-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}}{((F(u,v,w,\omega)))}\,\frac{\varepsilon(\varsigma+\omega t)}{[\varepsilon^2+(\varsigma+\omega t)^2]^2}\sin p\,dq\,dp, \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varkappa = -\frac{D_t^{\frac{n}{2}-n}}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-3}}{((F(u,v,w,\omega)))}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(\varsigma+\omega t)^2}\sin p\,dq\,dp, \tag{6}$$

et, par suite,

$$\varkappa = \frac{D_t^{\frac{n}{2}-n}}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-3}}{F(u,v,w,\omega)}\,\frac{\varepsilon}{((\varepsilon^2+(\varsigma+\omega t)^2))}\sin p\,dq\,dp, \tag{7}$$

les valeurs de u, v, w étant toujours

$$u = \cos p, \qquad v = \sin p\cos q, \qquad w = \sin p\sin q, \tag{8}$$

et le signe $\mathfrak{L}$ étant relatif à la variable auxiliaire ω.

Si, au contraire, l'équation caractéristique cesse d'être homogène, on tirera de la formule (15) du § III

$$\varkappa = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin p}{((\delta))}\,e^{it+h(\varsigma-k)\sqrt{-1}}\,D_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+k^2}\,dh\,dk\,dq\,dp, \tag{9}$$

la valeur de s étant

$$\delta = F(hu\sqrt{-1},\ hv\sqrt{-1},\ hw\sqrt{-1},\ s). \tag{10}$$

Si $F(x,y,z,t)$ se réduisait à une fonction homogène des seules variables t et $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, alors, en partant, non plus de la formule (11), mais de la formule (13) du § III, on obtiendrait une valeur de $\varkappa$ déterminée, non plus par l'équation (6), mais par la suivante :

$$\varkappa = D_t^{\frac{n}{2}-n}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}}{((F(u,v,w,\omega)))}\,\frac{1}{4\rho}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(\rho-\omega t)^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(\rho+\omega t)^2}\right]. \tag{11}$$

Concevons maintenant que, cette dernière valeur de $\varkappa$ étant substituée dans la formule (3), on remplace les variables λ, μ, ν, considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires, par des coordonnées polaires

$$\rho, \quad \vartheta, \quad \tau,$$

en posant

$$\lambda = x+\alpha\rho, \qquad \mu = y+\beta\rho, \qquad \nu = z+\gamma\rho, \tag{12}$$

$$\alpha = \cos\vartheta, \qquad \beta = \sin\vartheta\cos\tau, \qquad \gamma = \sin\vartheta\sin\tau. \tag{13}$$

La formule (3) deviendra

$$\varpi = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\rho^2\varkappa\varpi(\lambda,\mu,\nu)\sin\vartheta\,d\tau\,d\vartheta\,d\rho, \tag{14}$$

et, comme l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon\rho\, d\rho}{\varepsilon^2+(\rho\pm\omega t)^2}$$

se réduira, pour de très petites valeurs de ε, ou à zéro, ou au produit

$$\pi t\sqrt{\omega^2},$$

suivant que le second terme $\pm\omega t$ du binôme

$$\rho\pm\omega t$$

sera positif ou négatif, on tirera de la formule (11), jointe à l'équation (14),

$$\varpi=\frac{1}{4\pi}D_t^{2-n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{L}\frac{\omega^{n-1}\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((F(\alpha,\beta,\gamma,\omega)))}\,t\sin\vartheta\, d\tau\, d\vartheta, \tag{15}$$

le signe $\mathcal{L}$ étant toujours relatif à la variable auxiliaire ω. Nous avons pu ici substituer, sans inconvénient, la fonction $F(\alpha,\beta,\gamma,\omega)$ à la fonction $F(u,v,w,\omega)$, attendu que, dans l'hypothèse admise, la formule

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=u^2+v^2+w^2=1$$

entraîne l'équation

$$F(u,v,w,\omega)=F(\alpha,\beta,\gamma,\omega)=F(1,0,0,\omega).$$

Lorsque $F(x,y,z,t)$ est une fonction homogène quelconque des variables x,y,z,t, alors, en posant

$$\cos\delta=u\alpha+v\beta+w\gamma, \tag{16}$$

on tire de la formule (4), jointe aux équations (12),

$$\varsigma=-\rho\cos\delta; \tag{17}$$

puis, en effectuant l'intégration relative à ρ, on tire des formules (6) et (14)

$$\varpi=-\frac{1}{2^{1-n}\pi^2}D_t^{2-n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{L}\frac{\omega^{n-1}\,t^2\sin p\sin\vartheta\,\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((F(u,v,w,\omega)))}\,\frac{dq\,dp\,d\tau\,d\vartheta}{\cos^2\delta\sqrt{\cos^2\delta}}, \tag{18}$$

les valeurs de λ,μ,ν étant données par les formules

$$\lambda=x+\frac{\omega t}{\cos\delta}\alpha,\qquad \mu=y+\frac{\omega t}{\cos\delta}\beta,\qquad \nu=z+\frac{\omega t}{\cos\delta}\gamma. \tag{19}$$

On se trouvera donc ainsi ramené à l'intégrale quadruple à laquelle j'étais parvenu, par une marche toute différente, dans mes Leçons au Collège de France.

Enfin, lorsque l'équation caractéristique cesse d'être homogène, alors, en ayant égard aux formules

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+k^2}e^{hk\sqrt{-1}}\,dk=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+k^2}e^{-hk\sqrt{-1}}\,dk=\pi e^{-\varepsilon\sqrt{h^2}},$$

$$D_\varepsilon^2 e^{-\varepsilon\sqrt{h^2}}=h^2e^{-\varepsilon\sqrt{h^2}},$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}f(\alpha\rho,\beta\rho,\gamma\rho)\,\rho^2\sin\vartheta\,d\tau\,d\vartheta\,d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha\rho,\beta\rho,\gamma\rho)\,\rho^2\sin\vartheta\,d\tau\,d\vartheta\,d\rho,$$

et réduisant définitivement ε à zéro, on tirera des formules (3) et (9)

$$\varpi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varpi(\lambda,\mu,\nu)}{((8))}\,e^{it-hp\cos\delta\sqrt{-1}}h^2\rho^2\sin p\sin\vartheta\,\frac{dq\,dp\,dh\,d\tau\,d\vartheta\,d\rho}{(2\pi)^3}. \tag{20}$$

On se trouve ainsi ramené à la formule (9) de la page 197 des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (1).

Dans un autre Mémoire, je montrerai comment les formules que je viens d'établir fournissent les lois des phénomènes auxquelles se rapportent les systèmes d'équations linéaires, aux dérivées partielles, dans les questions de Physique mathématique.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XI.

135.

CALCUL INTÉGRAL. — *Note sur la transformation des sommes d'intégrales.*

C. R., T. XIII, p. 181 (26 juillet 1841).

Soit donnée, entre deux variables x, t, une certaine équation

$$F(x,t)=0, \tag{1}$$

que je nommerai l'équation caractéristique. Soient d'ailleurs

$$x_1,\quad x_2,\quad \dots$$

les diverses racines de cette équation résolue par rapport à la variable x, et

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \dots$$

les valeurs particulières de ces racines, correspondantes à une valeur donnée τ de la variable t. Si l'on pose, pour abréger,

$$\Psi(x,t)=D_t F(x,t),$$

et si l'on désigne par $f(x,t)$ une nouvelle fonction des variables x, t, on aura, comme je l'ai remarqué dans un précédent Mémoire,

$$\int_{\xi_1}^{x_1} f(x,t)\,dx+\int_{\xi_2}^{x_2} f(x,t)\,dx+\dots=-\int_\tau^t \mathcal{L}\frac{f(x,t)\Psi(x,t)}{(F(x,t))_x}\,dt\ (^1),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum\int_\xi^x f(x,t)\,dx=-\int_\tau^t \mathcal{L}\frac{f(x,t)\Psi(x,t)}{(F(x,t))_x}\,dt, \tag{2}$$

pourvu que chacune des variables x, t reste fonction continue de l'autre entre les limites de l'intégration. Dans le premier membre de la formule (2) le signe $\sum$ indique une somme de termes relatifs aux diverses racines de l'équation (1).

(1) Pour plus de simplicité, nous remplacerons désormais les doubles parenthèses du calcul des résidus par deux crochets trapézoïdaux. De plus, à la suite du dernier crochet, nous placerons la variable à laquelle se rapporte le signe $\mathcal{L}$, ainsi que M. Blanchet l'a fait dans ses derniers Mémoires, en adoptant notre nouvelle notation.

Si, dans la formule (2), on remplace la fonction $f(x,t)$ par le rapport

$$\frac{f(x,t)}{\Psi(x,t)},$$

on trouvera

$$\sum\int_\xi^x \frac{f(x,t)}{\Psi(x,t)}\,dx=-\int_\tau^t \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{(F(x,t))_x}\,dt. \tag{3}$$

Si les diverses racines de l'équation (1) reprennent les mêmes valeurs pour les deux limites τ et t de l'intégration relative à la variable t, en sorte qu'on ait

$$x_1=x_2=\dots \quad\text{et}\quad \xi_1=\xi_2=\dots, \tag{4}$$

on pourra, dans l'équation (3), faire passer le signe Σ sous le signe $\int$. Si d'ailleurs l'équation (1) fournit le même nombre de racines, soit qu'on la résolve par rapport à x, soit qu'on la résolve par rapport à t; si, par exemple, $F(x,t)$ représente une fonction entière de x et de t, qui soit du même degré par rapport à x et à t, l'équation (3) pourra s'écrire comme il suit :

$$\int_\xi^x \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{(F(x,t))_t}\,dx=-\int_\tau^t \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{(F(x,t))_x}\,dt. \tag{5}$$

On obtiendra donc alors la formule

$$\int_\xi^x \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{(F(x,t))_t}\,dx+\int_\tau^t \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{(F(x,t))_x}\,dt=0, \tag{6}$$

dont le premier membre offre deux termes qui diffèrent l'un de l'autre, en ce seul point, que l'opération appliquée dans l'un des deux termes à la variable x se trouve appliquée dans l'autre à la variable t.

Au reste, pour que la formule (5) ou (6) subsiste, il n'est pas absolument nécessaire que les conditions (4) se trouvent remplies. En effet, supposons que la fonction $f(x,t)$ soit du nombre de celles qui s'évanouissent pour des valeurs de la variable x situées hors de cer-

taines limites $x = a$, $x = b$; supposons de plus chacune des quantités a, b renfermée : 1° entre les limites ξ_1 et x_1; 2° entre les limites ξ_2 et x_2, etc. Enfin concevons que toutes les différences

$$x_1 - \xi_1, \quad x_2 - \xi_2, \quad \ldots$$

étant des quantités de même signe, le signe de chacune d'elles soit encore celui de la différence $b - a$. La formule (3) pourra être réduite à

$$\sum \int_a^b \frac{f(x,t)}{F(x,t)}\,dx = -\int_\tau^t \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{[F(x,t)]_x}\,dt, \tag{7}$$

et par conséquent à

$$\int_a^b \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{[F(x,t)]_t}\,dx = -\int_\tau^t \mathcal{L}\frac{f(x,t)}{[F(x,t)]_x}\,dt, \tag{8}$$

si le nombre des racines de l'équation caractéristique reste le même quand on la résout par rapport à x et quand on la résout par rapport à t. Or, la fonction $f(x,t)$ s'évanouissant dans l'hypothèse admise hors des limites a, b, il est clair que la formule (8) coïncidera exactement avec l'équation (5).

Des fonctions qui s'évanouissent toujours hors de certaines limites se rencontrent fréquemment dans les problèmes de Physique mathématique. On voit avec quelle facilité on peut établir, pour ce genre de fonctions, la formule (8). C'est à cette circonstance que tient le succès de la méthode employée par M. Blanchet, dans un récent Mémoire, où il applique le calcul des résidus à la recherche d'une limite extérieure des ondes dont j'avais donné la limite intérieure en 1830.

En terminant cette Note, nous avons encore à faire une remarque importante. La formule (5) suppose que les valeurs de t en x, tirées de l'équation caractéristique, restent fonctions continues de la variable x entre les limites de cette variable représentées par ξ et x; et que réciproquement les valeurs de x en t, tirées de l'équation caractéristique, restent fonctions continues de la variable t, entre les limites de cette variable représentées par τ et t. C'est ce qui aura effectivement lieu si

la variable t est toujours croissante, ou bien toujours décroissante, tandis que l'autre variable passe de la limite ξ à la limite x. Mais cette même condition n'est plus rigoureusement nécessaire à l'existence de la formule (8); et si, pour fixer les idées, on suppose

$$t > \tau,$$

alors, pour que la formule (8) subsiste, il suffira évidemment que les diverses fonctions de x, propres à représenter les diverses racines de l'équation caractéristique, résolue par rapport à t, soient toujours croissantes et renfermées entre les limites τ et t, tandis que l'on fera passer x, par degrés insensibles, de la limite a à la limite b. D'ailleurs, pour que ces racines croissent toujours dans l'intervalle dont il s'agit, il sera nécessaire et il suffira que les valeurs de $D_x t$ tirées de l'équation caractéristique, c'est-à-dire, les valeurs du rapport

$$-\frac{D_x F(x,t)}{D_t F(x,t)},$$

se réduisent, pour une valeur quelconque de x comprise entre a et b, à une quantité affectée du même signe que la différence $b - a$.

136.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la surface caractéristique correspondante à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, et sur la surface des ondes.*

C. R., T. XIII, p. 184 (26 juillet 1841).

Ce Mémoire, qui sera inséré en entier dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (1), est relatif à deux surfaces qui jouent un grand rôle dans les questions de Physique ou de Mécanique dont la solution dépend d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XII.

La première surface, que je nomme la *surface caractéristique*, est celle qui se trouve représentée par l'équation caractéristique elle-même, quand on y remplace les dérivées partielles des divers ordres, relatives aux variables indépendantes x, y, z, t, par les puissances des divers ordres de ces mêmes variables considérées comme représentant trois coordonnées rectangulaires et le temps.

La seconde surface est celle que l'on nomme la *surface des ondes*, et qui, dans un mouvement simple, persistant, où les durées des vibrations moléculaires demeurent constantes, touche, au bout d'un temps quelconque t, des ondes planes, infiniment minces, diversement inclinées sur trois plans rectangulaires, mais parties au premier instant d'un même centre pris pour origine des coordonnées.

Je donne, dans le paragraphe premier de ce Mémoire, les moyens d'obtenir généralement l'équation de la surface des ondes.

Je montre dans le second paragraphe les relations dignes de remarque qui existent entre la surface caractéristique et la surface des ondes, et j'établis en particulier les propositions suivantes (1).

Théorème I. — *Si la surface des ondes correspondante à une équation homogène se change en surface caractéristique, réciproquement la surface caractéristique se changera en surface des ondes.*

Il résulte immédiatement de ce théorème que, l'équation de la surface des ondes étant donnée, on peut en déduire l'équation caractéristique, moyennant une élimination semblable à celle par laquelle on passe de la seconde équation à la première.

Théorème II. — *Lorsque l'équation caractéristique est homogène, les rayons ν, r, menés de l'origine, au bout du temps t, à deux points correspondants de la surface caractéristique et de la surface des ondes, jouissent de cette propriété, que chacun d'eux, multiplié par la projection de l'autre sur lui-même, fournit un produit constant égal au carré de t.*

(1) Les théorèmes que nous énonçons ici se déduisent assez facilement de formules déjà connues, et spécialement de celles que j'ai données dans le *Bulletin* de M. de Férussac (avril 1830). Cette remarque, à ce qu'il paraît, avait déjà été faite par quelques personnes, et en particulier par M. Blanchet; mais elle ne se trouve énoncée nulle part.

Il résulte de ce théorème que les quatre points qui représentent les extrémités des deux rayons vecteurs et les projections de l'extrémité de l'un sur l'autre se trouvent placés sur une même circonférence de cercle.

Théorème III. — *Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles qui conduit à une équation caractéristique homogène, pour déduire la surface des ondes de la surface caractéristique, ou réciproquement, il suffit de porter, sur chaque rayon vecteur mené de l'origine à l'une des deux surfaces, une longueur représentée par le rapport entre le carré du temps et ce même rayon vecteur; puis de faire passer par l'extrémité de cette longueur un plan perpendiculaire à ce rayon. L'autre surface sera celle que le plan dont il s'agit touchera constamment dans les diverses positions qu'il peut acquérir.*

Je joins ici quelques-unes des formules établies dans les deux paragraphes du Mémoire.

Analyse.

§ I. — *Considérations générales.*

Soit

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varpi = 0 \tag{1}$$

l'équation caractéristique donnée, x, y, z, t désignant trois coordonnées rectangulaires et le temps. L'équation de la surface caractéristique sera

$$F(x, y, z, t) = 0, \tag{2}$$

et, pour obtenir l'équation de la surface des ondes, il suffira d'éliminer

$$u, \quad v, \quad w$$

entre les formules

$$S = 0, \tag{3}$$

$$ux + vy + wz + st = 0, \tag{4}$$

$$\frac{x}{D_u S} = \frac{y}{D_v S} = \frac{z}{D_w S}, \tag{5}$$

la valeur de S étant

$$S = F(u, v, w, s), \tag{6}$$

et les rapports

$$\frac{u}{s}, \quad \frac{v}{s}, \quad \frac{w}{s}$$

étant supposés réels, dans le cas même où u, v, w, s deviennent imaginaires. Lorsque la fonction $F(x, y, z, t)$ n'est pas homogène, s reste dans l'équation de la surface des ondes, et les dimensions de cette surface varient généralement avec s.

Lorsque la fonction $F(x, y, z, t)$ devient homogène, s se trouve éliminée avec u, v, w, et disparait de l'équation de la surface des ondes. On peut donc alors donner à s une valeur arbitraire, et, en posant

$$s = t,$$

on peut remplacer u, v, w par les coordonnées d'un point situé sur la surface caractéristique. Si l'on nomme

$$x, \quad y, \quad z$$

ces coordonnées, afin de les distinguer des coordonnées x, y, z d'un point situé sur la surface des ondes, on verra les équations (3), (4), (5) se réduire à

$$(7) \qquad \begin{cases} S = 0, \\ xx + yy + zz + t^2 = 0, \\ \dfrac{x}{D_x S} = \dfrac{y}{D_y S} = \dfrac{z}{D_z S}, \end{cases}$$

la valeur de S étant

$$(8) \qquad S = F(x, y, z, t).$$

§ II. — *Rapports qui existent entre la surface caractéristique et la surface des ondes, dans le cas où l'équation caractéristique devient homogène.*

Soient, dans le cas que l'on considère,

$$(1) \qquad S = 0 \quad \text{et} \quad \delta = 0$$

les équations de la surface caractéristique et de la surface des ondes; alors

$$S = F(x, y, z, t) \quad \text{et} \quad \delta = \vec{\delta}(x, y, z, t)$$

seront deux fonctions homogènes de t et des coordonnées

$$x, \quad y, \quad z, \quad \text{ou} \quad x, \quad y, \quad z.$$

Alors aussi les coordonnées, relatives à deux points correspondants des deux surfaces, seront liées entre elles par les équations

$$(2) \qquad xx + yy + zz = t^2,$$

$$(3) \qquad \frac{x}{D_x S} = \frac{y}{D_y S} = \frac{z}{D_z S}, \qquad \frac{x}{D_x \delta} = \frac{y}{D_y \delta} = \frac{z}{D_z \delta}.$$

Soient maintenant r, r les rayons vecteurs menés de l'origine aux points (x, y, z) et (x, y, z) des deux surfaces, et θ l'angle aigu compris entre ces rayons vecteurs. L'équation (2) donnera

$$(4) \qquad rr \cos\theta = t^2,$$

et, en vertu des formules (3), le plan tangent mené à l'une des surfaces par l'extrémité de l'un de ces rayons vecteurs sera perpendiculaire à l'autre rayon.

Ces remarques entraînent les théorèmes précédemment énoncés.

Ajoutons que, si l'on considère t comme une fonction de x, y, z déterminée par l'équation $S = 0$, ou

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

cette fonction vérifiera l'équation aux différences partielles

$$\vec{\delta}(D_x t, D_y t, D_z t, -1) = 0.$$

137.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur l'emploi des fonctions principales, représentées par des intégrales définies doubles, dans la recherche de la forme des ondes sonores, lumineuses, etc.*

C. R., T. XIII, p. 188 (26 juillet 1841).

Les intégrales que j'ai données, dans la dernière séance, pour les systèmes d'équations aux différences partielles, sont éminemment

propres à faire connaître les diverses circonstances des mouvements que ces équations peuvent représenter dans un problème de Physique ou de Mécanique. Je montrerai, dans une suite de Mémoires, comment on peut déduire de ces mêmes intégrales les lois d'un grand nombre de phénomènes que j'ai analysés d'une autre manière à diverses époques, et en particulier les lois de la polarisation, de la dispersion, de la diffraction, dans la théorie de la lumière. Je me bornerai aujourd'hui à la détermination générale de la forme des ondes qui se propagent dans l'espace, quand la fonction principale doit vérifier une équation caractéristique homogène. J'avais prouvé, en 1830, que cette fonction principale peut être réduite à une intégrale quadruple. J'ai obtenu, dans la dernière séance, une réduction nouvelle, en supposant la valeur initiale de la fonction principale décomposée en plusieurs parties, dont chacune dépend uniquement de la distance à un centre fixe; et j'ai donné en outre un moyen de trouver directement l'intégrale double à laquelle cette supposition m'a conduit. On verra, dans ce nouveau Mémoire, avec quelle facilité l'intégrale double dont il s'agit fournit d'une part la limite intérieure des ondes telle que je l'avais déterminée en 1830, et d'autre part une limite extérieure du genre de celle qu'a obtenue dernièrement M. Blanchet.

Analyse.

§ I. — *Limite intérieure des ondes représentées par une équation caractéristique.*

Prenons pour variables indépendantes trois coordonnées rectangulaires x, y, z et le temps t. Soit d'ailleurs

$$F(x, y, z, t)$$

une fonction de ces variables indépendantes, entière, homogène, et du degré n. Enfin, soient

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

la distance du point (x, y, z) à l'origine, et ϖ une fonction principale

assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varpi = 0; \tag{1}$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \Pi(r). \tag{2}$$

On aura, comme nous l'avons prouvé dans la dernière séance,

$$\varpi = \frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\,\frac{\omega^{n-2}(\varsigma + \omega t)\Pi(\varsigma + \omega t)}{(F(u, v, w, \omega))_\omega}\sin p\,dq\,dp, \tag{3}$$

les valeurs de u, v, w, ς étant

$$u = \cos p, \qquad v = \sin p\cos q, \qquad w = \sin p\sin q, \tag{4}$$

$$\varsigma = ux + vy + wz. \tag{5}$$

Donc la valeur générale de $D_t^{n-1}\varpi$ sera

$$D_t^{n-1}\varpi = \frac{1}{4\pi}D_t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\,\frac{\omega^{n-2}(\varsigma + \omega t)\Pi(\varsigma + \omega t)}{(F(u, v, w, \omega))_\omega}\sin p\,dq\,dp, \tag{6}$$

et il est aisé de s'assurer que cette valeur générale remplit, comme cela devait être, la condition de se réduire à $\Pi(r)$ pour une valeur nulle de t.

Supposons maintenant que la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$, représentée par $\Pi(r)$, n'ait de valeur sensible que dans le voisinage de l'origine des coordonnées, en sorte qu'elle s'évanouisse constamment quand la valeur numérique de r n'est pas très petite. L'intégrale double qui, en vertu de la formule (6), représente, au bout du temps t, la valeur de $D_t^{n-1}\varpi$, et même celle qui représentera la valeur de $D_t^{n-2}\varpi$, se réduiront évidemment à zéro si les valeurs de x, y, z sont sensiblement différentes de celles qui permettent de vérifier l'équation

$$\varsigma + \omega t = 0, \tag{7}$$

ou

$$ux + vy + wz + \omega t = 0. \tag{8}$$

Or cette dernière équation représente un plan dont la position varie dans l'espace avec les valeurs des coefficients u, v, w; et la surface, que touche ce plan dans toutes les positions qu'il peut acquérir au bout du temps t, est précisément celle que nous avons nommée *surface des ondes*. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si le phénomène qui dépend de la valeur de* $D_t^{n-1}\varpi$, *et paraît ou disparaît avec elle, n'est primitivement sensible que dans un espace infiniment petit, qui renferme l'origine des coordonnées, il ne sera sensible au bout du temps t que dans l'intérieur de la surface des ondes.*

Si l'espace, dans lequel le même phénomène était primitivement sensible, cessait d'être infiniment petit et se trouvait renfermé dans une certaine enveloppe, alors, pour obtenir la surface dans l'intérieur de laquelle il disparaîtrait au bout du temps t, il suffirait de décomposer la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$ en parties dont chacune serait uniquement sensible dans l'intérieur d'une sphère infiniment petite, et représentée par une fonction de la distance au centre de la sphère. Cette décomposition pouvant toujours s'effectuer en vertu des formules que j'ai données dans les séances précédentes, on déduira immédiatement du théorème I la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Si le phénomène qui dépend de la valeur de* $D_t^{n-1}\varpi$, *et paraît ou disparaît avec elle, n'est primitivement sensible que dans un volume fini terminé par une certaine enveloppe, pour obtenir la surface dans l'intérieur de laquelle ce même phénomène disparaîtra, au bout du temps t, il suffira de transporter cette enveloppe dans l'espace, de manière que chacun de ses points décrive une droite égale et parallèle au rayon vecteur* OA *mené de l'origine* O *des coordonnées à un point quelconque* A *de la surface des ondes qui aurait cette origine pour centre. La surface cherchée sera la moins étendue de celles que limitera de toutes parts l'enveloppe ainsi transportée, dans les diverses positions qu'elle pourra prendre, eu égard aux diverses positions du point* A.

§ II. — *Limite extérieure des ondes représentées par une équation caractéristique homogène.*

Considérons de nouveau la fonction principale ϖ déterminée par la formule (3) du § I, c'est-à-dire, par l'équation

$$\varpi = \frac{D_t^{\frac{1}{2}n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\omega^{n-2}(\varsigma+\omega t)\,\Pi(\varsigma+\omega t)}{(F(u,v,w,\omega))_\omega}\sin p\,dq\,dp, \tag{1}$$

dans laquelle on a

$$u=\cos p,\qquad v=\sin p\cos q,\qquad w=\sin p\sin q, \tag{2}$$

$$\varsigma = ux+vy+wz. \tag{3}$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$s=\varsigma+\omega t, \tag{4}$$

alors, aux diverses valeurs de ω considéré comme racine de l'équation

$$F(u,v,w,\omega)=0, \tag{5}$$

correspondront autant de valeurs de s qui vérifieront la formule

$$F(ut,vt,wt,s-\varsigma)=0, \tag{6}$$

et l'équation (5) pourra s'écrire comme il suit

$$\varpi = \frac{1}{4\pi}D_t^{\frac{1}{2}n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{E}\frac{s\,\Pi(s)}{(8)_s}\,t\sin p\,dq\,dp, \tag{7}$$

la valeur de $\frac{1}{8}$ étant

$$\frac{1}{8}=\frac{(s-\varsigma)^{n-2}}{F(ut,vt,wt,s-\varsigma)}. \tag{8}$$

Comme on aura d'ailleurs généralement

$$\int_0^{2\pi}f(v,w)\,dq=\int_0^{2\pi}f(-v,-w)\,dq,$$

attendu que v, w changent de signe avec $\sin q$ et $\cos q$ quand on fait croître ou diminuer l'angle q de la demi-circonférence π, il est clair

que, dans la formule (8), on pourra changer les signes de v, w, et supposer en conséquence

$$\frac{1}{\delta} = \frac{(s-\varsigma_1)^{n-2}}{F(ut, -vt, -wt, s-\varsigma_1)}, \tag{9}$$

la valeur ς_1 étant

$$\varsigma_1 = ux - vy - wz. \tag{10}$$

Il y a plus : on pourra substituer dans la formule (7), non seulement l'une quelconque des valeurs de $\frac{1}{\delta}$ fournies par les équations (8) ou (9), mais aussi la moyenne entre ces deux valeurs, savoir

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{2}\left[\frac{(s-\varsigma)^{n-2}}{F(ut, vt, wt, s-\varsigma)} + \frac{(s-\varsigma_1)^{n-2}}{F(ut, -vt, -wt, s-\varsigma_1)}\right]. \tag{11}$$

Or cette dernière valeur de $\frac{1}{\delta}$ sera une fonction rationnelle de u, v, w qui ne sera point altérée quand on y remplacera v par $-v$, et w par $-w$; et puisque, en vertu des formules (2), on aura

$$v = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\cos q, \qquad w = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\sin q, \tag{12}$$

il est clair que le second membre de la formule (11), considéré comme fonction de u et de l'angle q, sera une fonction rationnelle de u. On peut même observer que ce second membre, après la réduction des deux fractions qu'il renferme au même dénominateur, sera représenté par une fraction nouvelle dont le dénominateur et le numérateur seront, eu égard aux formules (12), le premier du degré $2n$, et le second du degré $2n-2$ par rapport à la variable u. Il suit immédiatement de cette observation que la valeur de $\frac{1}{\delta}$, déterminée par la formule (11) et les équations (12), vérifiera la condition

$$\mathfrak{L}\frac{1}{(\delta)_u} = 0. \tag{13}$$

Remarquons d'ailleurs que la formule (7) pourra s'écrire comme il suit

$$\varpi = \frac{1}{4\pi} D_t^{n-2} \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \mathfrak{L}\frac{s\,\Pi(s)}{(\delta)_s}\, t\, dp\, du. \tag{14}$$

Soit maintenant r le rayon vecteur mené de l'origine au point A qui a pour coordonnées rectangulaires x, y, z. On aura

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

De plus, on pourra considérer les quantités p, q comme représentant deux des coordonnées polaires d'un autre point B situé, à l'unité de distance de l'origine, sur un rayon vecteur qui formerait avec le demi-axe des x positives l'angle p, et dans un plan qui, passant par ce rayon vecteur, formerait avec le plan des x, y l'angle q. Cela posé, nommons δ l'angle compris entre les rayons vecteurs OA, OB. On trouvera

$$\varsigma = r\cos\delta; \tag{15}$$

et par suite l'équation (4) donnera

$$s = r\cos\delta + \omega t. \tag{16}$$

Enfin, si l'on nomme φ l'angle formé par le rayon vecteur r avec l'axe des x, et $q+\iota$ l'angle formé par le plan qui renferme cet axe et ce rayon avec le plan des x, y, on aura évidemment

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi\cos(q+\iota), \qquad z = r\sin\varphi\sin(q+\iota),$$

et par suite la formule (3) donnera

$$\varsigma = r(\cos\varphi\cos p + \sin\varphi\cos\iota\sin p),$$

puis on conclura de cette dernière, comparée à l'équation (15),

$$\cos\delta = \cos\varphi\cos p + \sin\varphi\cos\iota\sin p. \tag{17}$$

Supposons à présent : 1° que la fonction $\Pi(s)$ soit toujours nulle, excepté entre les limites

$$s = -\varepsilon, \qquad s = \varepsilon,$$

ε désignant un nombre très petit; 2° que l'on attribue à la variable x une valeur positive très considérable. Alors la fonction $\Pi(s)$ s'évanouira toujours quand la valeur numérique de s ne sera pas très petite. D'ailleurs, r étant très grand avec x, la valeur de s déterminée par l'équa-

tion (16), et que l'on peut mettre sous la forme

$$r\left(\cos\delta + \frac{\omega t}{r}\right),$$

ne pourra devenir très petite qu'avec le binôme

$$\cos\delta + \frac{\omega t}{r},$$

et par conséquent avec $\cos\delta$, puisque, r étant très grand, $\frac{\omega t}{r}$ sera très voisin de zéro. Ainsi, dans l'hypothèse admise, lorsque la valeur de s donnée par l'équation (16) fournira une valeur de $\Pi(s)$ différente de zéro, on aura sensiblement

$$\cos\delta = 0, \tag{18}$$

et, en vertu de la formule (17),

$$\frac{\cos p}{-\sin\varphi\cos\iota} = \frac{\sin p}{\cos\varphi} = \frac{1}{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\iota)^{\frac{1}{2}}}, \tag{19}$$

attendu que $\sin p$ et $\cos\varphi$ seront positifs. Il est aisé d'en conclure que cette valeur de s sera généralement croissante avec la variable

$$u = \cos p.$$

En effet, on tirera des formules (16) et (17)

$$D_p s = r(-\cos\varphi\sin p + \sin\varphi\cos\iota\cos p) + t\,D_p\omega,$$

ou à très peu près, eu égard à la formule (19),

$$D_p s = -r\left[(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\iota)^{\frac{1}{2}} - \frac{t}{r}D_p\omega\right]; \tag{20}$$

et, comme la valeur précédente de $D_p s$ sera évidemment négative pour de très grandes valeurs de r, si $D_p\omega$ conserve toujours une valeur finie, il en résulte que la valeur correspondante de

$$D_u s = -\sin p\,D_p s \tag{21}$$

sera généralement positive. Cette conclusion subsistant dans le cas

même où v, w changent de signe, et où ς se trouve remplacé par ς_1, on peut affirmer que, pour de très grandes valeurs positives de x, les valeurs de s, pour lesquelles $\Pi(s)$ ne s'évanouira pas, croîtront, dans la formule (14), avec la variable u. Donc alors, en substituant à la variable u la variable s, on aura, en vertu de la formule (8) de la page 262,

$$\varpi = -\frac{D_t^{\frac{3}{2}-a}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathfrak{L}\frac{s\Pi(s)}{(\delta)_u}\,t\,dp\,ds, \tag{22}$$

puis, eu égard à l'équation (13),

$$\varpi = 0. \tag{23}$$

Ajoutons que l'équation (23) continuera de subsister tant que la valeur de $D_u s$ sera positive entre les limites

$$s = -\varepsilon, \qquad s = \varepsilon. \tag{24}$$

Donc, si ε, comme on le suppose, est sensiblement nul, la fonction principale ϖ s'évanouira au bout du temps t, tant que la valeur positive de x ne sera pas assez petite pour que l'on ait simultanément

$$s = 0, \qquad D_u s = 0. \tag{25}$$

La première des équations (25) qui, en vertu des formules (3) et (4), se réduit à

$$ux + vy + wz + \omega t = 0, \tag{26}$$

est précisément l'équation en x, y, z qui représente, au bout du temps t, un plan tangent à la surface des ondes, et perpendiculaire à la droite dont chaque point répond aux deux coordonnées polaires p et q. Cela posé, l'équation en x, y, z, t, produite par l'élimination de x entre les formules (25), représentera évidemment, pour une valeur donnée de l'angle q, la surface cylindrique circonscrite à la surface des ondes, et dont la génératrice sera parallèle au plan qui, passant par l'axe des x, formerait l'angle q avec le plan des x, y. Il en résulte que la plus grande des valeurs positives de x, qui permettront aux for-

mules (25) de subsister simultanément, sera l'abscisse du plan perpendiculaire à l'axe des x, et qui touchera les diverses surfaces cylindriques de ce genre, correspondantes aux diverses valeurs de l'angle q. En d'autres termes, cette plus grande valeur de x sera l'abscisse du point de la surface des ondes le plus éloigné du plan des y, z, dans le sens des x positives. D'ailleurs, la surface des ondes, correspondante à une équation caractéristique homogène, présente, comme il est facile de s'en assurer, une forme et des dimensions indépendantes des directions attribuées aux axes rectangulaires des x, y, z. Donc, relativement à cette surface, le demi-axe des x positives peut avoir une direction quelconque; et ce que nous avons dit suffit pour démontrer que les deux plans qui, étant parallèles à un plan donné arbitrairement, limiteront, au bout du temps t, la surface des ondes de part et d'autre de l'origine, limiteront aussi, à la même époque, l'espace en dehors duquel la fonction principale ϖ sera constamment nulle. Donc la fonction principale ϖ s'évanouira toujours en dehors de la plus grande nappe de la surface des ondes, si cette plus grande nappe est une surface convexe. Si le contraire arrive, on pourra du moins affirmer que la fonction principale ϖ s'évanouira en dehors de la surface qu'on obtiendrait en conservant les portions saillantes de la surface des ondes, et substituant aux portions rentrantes de cette même surface des portions de surface développables dont chaque génératrice, extérieure à la surface des ondes, la toucherait en deux points différents. Ces conclusions s'accordent avec celles qu'a obtenues M. Blanchet en appliquant le calcul des résidus à la détermination des intégrales triples auxquelles il avait réduit les intégrales quadruples que nous avons citées dans un précédent Mémoire.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la valeur de $D_p\omega$, tirée de l'équation (5), restait toujours finie. Pour étendre les conclusions que nous avons obtenues au cas où cette condition n'est pas satisfaite, on pourra recourir à la théorie des intégrales singulières. C'est ce que nous montrerons dans un autre Article, où nous rechercherons aussi ce que devient la fonction principale, quand la nappe

extérieure des ondes n'est pas convexe, entre les portions rentrantes de cette nappe et les portions de surfaces développables dont nous avons parlé.

L'enveloppe de l'espace en dehors duquel s'évanouit, au bout du temps t, une fonction principale, dont la valeur n'était primitivement sensible que dans le voisinage d'un point, est ce qu'on peut nommer la surface extérieure d'une onde primitivement concentrée en ce point. Cette surface étant connue, on en déduira la surface extérieure d'une onde primitivement renfermée dans un volume fini, à l'aide de la construction géométrique indiquée dans le théorème II du § I.

138.

CALCUL DES RÉSIDUS. — *Rapport sur un Mémoire de* M. Oltramare, *relatif au calcul des résidus.*

C. R., t. XIII, p. 296 (2 août 1841).

L'Académie nous a chargés, M. Sturm et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire présenté par M. Oltramare, et qui a pour titre : *Recherches sur le calcul des résidus*. On sait que les principes de ce nouveau calcul, développés par l'un de nous en 1826, ont été, depuis cette époque, appliqués, non seulement à l'intégration des équations linéaires et à la solution des problèmes de Physique mathématique, mais encore à la détermination des intégrales définies et à diverses questions d'Analyse, soit par l'auteur lui-même, soit par d'autres géomètres, parmi lesquels on doit distinguer MM. Tortolini, Richelot, Ostrogradsky et Bouniakowski. Les recherches de M. Oltramare sont principalement relatives aux propriétés dont jouissent, dans le calcul des résidus, deux fonctions *inverses* l'une de l'autre, c'est-à-dire deux variables dont chacune est déterminée en fonction de l'autre par une équation algébrique ou même transcendante. Parmi les théorèmes qu'établit M. Oltramare,

nous en citerons d'abord un qui se rapporte au cas où l'équation donnée est algébrique, et qui se trouve énoncé dans les termes suivants :

Si $\varphi(z)$ est une fonction quelconque de la variable z, uniforme ou multiforme, donnée par une équation algébrique, et qui, pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de z, conserve une valeur finie, le résidu intégral de la somme des valeurs de cette fonction sera précisément égal au résidu intégral de la somme des valeurs de sa fonction inverse.

M. Oltramare observe avec raison que le théorème s'étend au cas même où l'on remplacerait la fonction inverse de $\varphi(z)$ par ce qu'il nomme la fonction *inverse de seconde espèce*, c'est-à-dire, pour parler exactement, par la fonction inverse de la somme des valeurs de $\varphi(z)$.

La démonstration que donne M. Oltramare du théorème énoncé se déduit rigoureusement de la règle établie pour la détermination du résidu intégral d'une fonction, à la page 134 du premier Volume des *Exercices de Mathématiques* (1). On pourrait même simplifier cette démonstration, comme nous allons le faire voir.

Considérons une équation algébrique entre x et y, dont le premier membre soit une fonction entière du degré m par rapport à x, du degré n par rapport à y et du degré $m+n$ par rapport au système des deux variables; ce qui exige que le coefficient du terme proportionnel à x^m et à y^n ne s'évanouisse pas. En vertu de la règle que je rappelais tout à l'heure, le résidu intégral de la somme des valeurs de x considéré comme fonction de t et le résidu intégral de la somme des valeurs de t considéré comme fonction de x, dépendront uniquement l'un et l'autre des coefficients des quatre termes qui renfermeront les puissances x^m ou x^{m-1} de x, et y^n ou y^{n-1} de y. Donc, quels que soient les nombres m et n, ces résidus conserveront les valeurs qu'ils prendraient si les coefficients de ces quatre termes subsistaient seuls, tous les autres coefficients étant nuls; ce qui permettrait de réduire l'équation donnée à une équation du premier degré en x et y, ou de la forme

$$Axy + Bx + Cy + D = 0.$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 169.

Mais alors chacun des deux résidus dont il s'agit se réduirait au rapport

$$\frac{BC - AD}{A^2}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Deux variables x, y étant déterminées, l'une en fonction de l'autre, par une équation algébrique, dans laquelle un même terme renferme à la fois la puissance la plus élevée de x et la puissance la plus élevée de y, le résidu intégral de la somme des valeurs de x, et le résidu intégral de la somme des valeurs de y, seront égaux entre eux, et dépendront des coefficients des quatre termes qui renfermeront la puissance x^m ou x^{m-1} de x avec la puissance y^n ou y^{n-1} de y. Ils resteront donc invariables, si, sans altérer ces quatre coefficients, on fait varier tous les autres ou même les nombres entiers m et n.

Les théorèmes démontrés par M. Oltramare, pour les fonctions qui représentent des racines d'équations algébriques, ne peuvent pas être étendus sans restriction aux diverses fonctions transcendantes. Aussi l'auteur s'est-il borné à les établir pour certaines fonctions de cette espèce. D'ailleurs, dans les derniers paragraphes de son Mémoire, il a déduit, des formules rappelées ou établies dans les premiers, des sommations et des transformations de séries qui paraissent dignes de remarque, et propres à intéresser les géomètres.

En résumé, les Commissaires pensent que le Mémoire de M. Oltramare est digne d'être approuvé par l'Académie et inséré, avec une réduction à laquelle l'auteur a consenti, dans le Recueil des *Savants étrangers*.

Nota. — Pour obtenir le résidu de x considéré comme fonction de y, et le résidu de y considéré comme fonction de x, quand les variables x, y sont liées entre elles par l'équation

$$Axy + Bx + Cy + D = 0, \tag{1}$$

il suffit d'observer que ces résidus ne varieront pas si l'on remplace

$$x \text{ par } x + \alpha, \qquad y \text{ par } y + \epsilon,$$

en choisissant α, β de manière à faire disparaître les termes du premier degré. Mais alors l'équation deviendra

$$Axy + D' = 0,$$

la valeur de D′ étant $D - \frac{BC}{A}$. Donc, par suite, chacun des deux résidus sera égal à

$$-\frac{D'}{A} = \frac{BC - AD}{A^2}.$$

139.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Méthode nouvelle pour le calcul des inégalités des mouvements planétaires, et en particulier des inégalités à longues périodes.*

C. R., t. XIII, p. 317 (9 août 1841).

Le calcul des inégalités séculaires et périodiques des mouvements planétaires dépend surtout du développement de la fonction perturbatrice en série de termes proportionnels aux diverses puissances entières, positives, nulles, ou négatives, d'exponentielles trigonométriques, dont les arguments sont les anomalies moyennes des mouvements dont il s'agit. Le coefficient de chacun de ces termes doit se réduire à une fonction des éléments elliptiques de deux planètes, et le coefficient du terme général de la série varie, d'une part avec ces éléments, d'autre part avec les exposants n, n' des puissances auxquelles on élève les deux exponentielles trigonométriques correspondantes aux deux planètes que l'on considère. Dans les Traités d'Astronomie, les coefficients des divers termes se trouvent, pour l'ordinaire, successivement déduits les uns des autres, ce qui entraîne de longs calculs, et ne permet pas de reconnaître facilement les erreurs que l'on aurait pu commettre. Pour remédier à ces inconvénients, j'ai donné, dans mes Mémoires sur la Mécanique céleste, des formules qui offrent le moyen de calculer

directement le coefficient de chaque terme. Ces formules sont particulièrement utiles lorsque les exposants n, n' sont peu considérables. Mais, dans le cas contraire, elles n'abrègent pas assez les calculs pour qu'ils ne soient encore très pénibles; et l'on n'a jusqu'ici trouvé aucune méthode à l'aide de laquelle on puisse déterminer facilement la valeur très approchée d'un coefficient correspondant à de grandes valeurs de n, n'. Le besoin urgent que l'on aurait d'une semblable méthode en Astronomie m'était encore représenté dernièrement par M. Le Verrier, qui vient de terminer, à l'aide de ses formules d'interpolation, un grand et difficile travail sur la planète Pallas. Cédant aux instances de ce jeune savant, j'ai dirigé mes recherches vers un problème dont la solution peut épargner aux astronomes tant de fatigues et tant de veilles. J'ai été assez heureux pour atteindre le but de mes efforts. Me proposant de publier successivement dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* les résultats de ces nouvelles recherches, j'en donnerai seulement de courts extraits dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Je me bornerai pour aujourd'hui à indiquer les principes généraux sur lesquels s'appuie la nouvelle méthode. D'autres articles en offriront l'application au calcul des mouvements des corps célestes.

Le présent Mémoire est divisé en deux paragraphes.

Le premier paragraphe est relatif à certaines propriétés des fonctions entières et réelles des sinus et des cosinus d'un même angle. Il est aisé de voir qu'une semblable fonction peut toujours être transformée en une fonction rationnelle d'une seule variable, savoir de la tangente trigonométrique de la moitié de cet angle. J'en conclus que si, après avoir égalé à zéro une semblable fonction, on résout l'équation ainsi formée, par rapport à l'exponentielle trigonométrique dont l'argument est l'angle ci-dessus mentionné, on obtiendra des racines qui, prises deux à deux, offriront pour modules deux nombres inverses l'un de l'autre. D'ailleurs des formules, que j'ai données dans les *Exercices de Mathématiques*, fournissent divers moyens de décomposer l'équation dont il s'agit en deux autres qui offrent, la première, toutes les racines

dont les modules sont inférieurs à l'unité, la seconde, toutes les racines dont les modules surpassent l'unité.

Le deuxième paragraphe est relatif au calcul du terme général, dans le développement d'une fonction en série de termes proportionnels aux diverses puissances entières, positives, nulle, ou négatives, d'une exponentielle trigonométrique. On prouve aisément que le coefficient du terme général peut être représenté par une intégrale relative à l'angle qui sert d'argument à l'exponentielle, la différence entre les valeurs extrêmes de cet angle étant la circonférence même. Considérons, en particulier, le cas où cette intégrale représente le coefficient de la $n^{ième}$ puissance de l'exponentielle trigonométrique, la valeur numérique de n étant un nombre très considérable; et supposons d'ailleurs que la fonction donnée offre pour facteur une puissance négative, entière ou fractionnaire, d'une fonction réelle et entière du sinus et du cosinus de l'argument. Si l'équation auxiliaire que l'on obtiendra en égalant cette fonction à zéro est résolue par rapport à l'exponentielle trigonométrique, on pourra, sous certaines conditions que le calcul indique (1), déduire de cette résolution la valeur de l'intégrale exprimée à l'aide d'une série très convergente; et même, pour obtenir le premier terme de la série, il ne sera pas nécessaire de chercher toutes les racines de l'équation formée comme on vient de le dire. Ce premier terme, qu'on pourra se contenter de calculer seul, quand la valeur numérique de n deviendra très grande, dépendra uniquement de la racine qui offrira le module le plus voisin de l'unité, ce module étant d'ailleurs compris entre les limites 0 et 1. Cette remarque fournit, dans la Mécanique céleste, le moyen d'obtenir très promptement celles des inégalités périodiques dont le calcul offrait jusqu'à présent les plus grandes difficultés.

Au reste, les intégrales relatives à des angles dont les valeurs extrêmes diffèrent entre elles d'une circonférence entière ne se rencontrent pas seulement dans les problèmes d'Astronomie, mais aussi dans une multitude d'autres, par exemple, dans la théorie des transcendantes elliptiques et dans les questions de Physique mathématique. Mes nouvelles formules pourront donc être utiles dans les questions de ce genre; ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre Article.

(1) Les conditions dont il s'agit sont que les modules de toutes les racines diffèrent de l'unité; que, parmi les modules supérieurs à l'unité, le plus petit surpasse $\sqrt{2}$; enfin que le double de celui-ci soit inférieur à chacun des suivants diminué de l'unité.

140.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Note sur la surface des ondes lumineuses dans les cristaux à deux axes optiques.*

C. R., t. XIII, p. 319 (9 août 1841).

En partant des formules que j'ai données dans la séance du 26 juillet, et en ayant recours à un artifice de calcul que j'ai indiqué dans les préliminaires des applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie, on passe très facilement de l'équation que Fresnel a obtenue pour représenter, dans les cristaux à deux axes optiques, la surface des ondes lumineuses, à l'équation caractéristique correspondante, et réciproquement. Je joins ici ce calcul, qui peut intéresser à la fois les physiciens et les géomètres.

Sous certaines conditions que j'ai données dans un Mémoire présenté à l'Académie le 20 mai 1839, et qui paraissent remplies lorsque l'éther se propage dans un cristal à deux axes optiques, la détermination des mouvements infiniment petits des molécules éthérées se ramène à l'intégration d'une équation caractéristique qui, lorsqu'on néglige la dispersion, se réduit sensiblement à la suivante

$$D_t^2\varpi - [(b+c)D_x^2 + (c+a)D_y^2 + (a+b)D_z^2]D_t^2\varpi + (bcD_x^2 + caD_y^2 + abD_z^2)(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\varpi = 0,$$

ϖ désignant la fonction principale, x, y, z trois coordonnées rectangulaires, t le temps, et a, b, c des constantes positives. Donc alors la

surface caractéristique est représentée par l'équation

$$t^4-[(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2]t^2 +[bcx^2+cay^2+abz^2](x^2+y^2+z^2)=0,$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$\frac{x^2}{t^2-av^2}+\frac{y^2}{t^2-bv^2}+\frac{z^2}{t^2-cv^2}=0, \tag{1}$$

x, y, z désignant les coordonnées rectangulaires d'un point de cette surface, et le rayon vecteur v, mené de l'origine au point (x, y, z), étant lui-même déterminé par la formule

$$v^2=x^2+y^2+z^2.$$

Désignons maintenant par S le premier membre de l'équation (1). Pour passer du point (x, y, z) de la surface caractéristique au point correspondant (x, y, z) de la surface des ondes lumineuses, il suffira (*voir* la page 267) d'éliminer x, y, z entre les formules

$$xx+yy+zz+t^2=0 \tag{2}$$

et

$$\frac{x}{D_x S}=\frac{y}{D_y S}=\frac{z}{D_z S}. \tag{3}$$

Or, si l'on pose, pour abréger,

$$\Theta=\frac{ax^2}{(t^2-av^2)^2}+\frac{by^2}{(t^2-bv^2)^2}+\frac{cz^2}{(t^2-cv^2)^2}, \tag{4}$$

la formule (3) deviendra

$$\frac{x}{x\left(\Theta+\frac{1}{t^2-av^2}\right)}=\frac{y}{y\left(\Theta+\frac{1}{t^2-bv^2}\right)}=\frac{z}{z\left(\Theta+\frac{1}{t^2-cv^2}\right)}. \tag{5}$$

Si, dans cette dernière, on combine par voie d'addition les termes correspondants des trois rapports, après avoir multiplié respectivement

ces termes par les facteurs

$$\frac{ax}{t^2-av^2},\quad \frac{by}{t^2-bv^2},\quad \frac{cz}{t^2-cv^2};$$

alors, en ayant égard à l'équation (1) présentée sous la forme

$$\frac{ax^2}{t^2-av^2}+\frac{by^2}{t^2-bv^2}+\frac{cz^2}{t^2-cv^2}=-1,$$

on obtiendra un nouveau rapport dont le dénominateur sera nul; et comme ce nouveau rapport devra être équivalent aux trois premiers, son numérateur devra encore s'évanouir. On trouvera ainsi

$$\frac{axx}{t^2-av^2}+\frac{byy}{t^2-bv^2}+\frac{czz}{t^2-cv^2}=0; \tag{6}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{xx}{t^2-av^2}+\frac{yy}{t^2-bv^2}+\frac{zz}{t^2-cv^2}=-1. \tag{7}$$

Si, en revenant à la formule (5), on y combine, par voie d'addition, les termes des trois rapports qu'elle contient, après avoir respectivement multiplié ces termes : 1° par les facteurs

$$x,\quad y,\quad z;$$

2° par les facteurs

$$x,\quad y,\quad z;$$

alors, en nommant r le rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z), ou, ce qui revient au même, en posant, pour abréger,

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

et ayant égard aux équations (1), (2), (7), on trouvera

$$\frac{t^2}{\Theta v^2}=\frac{r^2}{1+\Theta t^2},$$

par conséquent

$$\Theta=\frac{t^2}{r^2v^2-t^4}. \tag{8}$$

Enfin, si l'on substitue la valeur précédente de Θ dans la formule (5), cette formule deviendra

$$\frac{\frac{x}{r^2-at^2}}{\frac{x}{t^2-av^2}}=\frac{\frac{y}{r^2-bt^2}}{\frac{y}{t^2-bv^2}}=\frac{\frac{z}{r^2-ct^2}}{\frac{z}{t^2-cv^2}}. \tag{9}$$

Or il résulte évidemment de cette dernière que, sans altérer l'équation (6), on peut y remplacer les trois quantités

$$\frac{x}{t^2-av^2},\quad \frac{y}{t^2-bv^2},\quad \frac{z}{t^2-cv^2}$$

par les trois autres quantités

$$\frac{x}{r^2-at^2},\quad \frac{y}{r^2-bt^2},\quad \frac{z}{r^2-ct^2},$$

qui sont respectivement proportionnelles aux trois premières. En opérant ainsi, l'on verra l'équation (6) se réduire à la formule

$$\frac{ax^2}{r^2-at^2}+\frac{by^2}{r^2-bt^2}+\frac{cz^2}{r^2-ct^2}=0. \tag{10}$$

Cette dernière est précisément l'équation de la surface des ondes obtenue par Fresnel, et présentée sous la forme la plus simple. Elle pourrait encore s'écrire comme il suit :

$$\frac{x^2}{r^2-at^2}+\frac{y^2}{r^2-bt^2}+\frac{z^2}{r^2-ct^2}=1. \tag{11}$$

Ajoutons que, si l'on posait

$$\frac{1}{a}=a,\qquad \frac{1}{b}=b,\qquad \frac{1}{c}=c,$$

l'équation (10) deviendrait

$$\frac{x^2}{t^2-ar^2}+\frac{y^2}{t^2-br^2}+\frac{z^2}{t^2-cr^2}=0. \tag{12}$$

Donc, la surface caractéristique étant représentée par l'équation (1), il

suffira, pour obtenir la surface des ondes, de remplacer dans cette équation (1) les nombres

$$a,\quad b,\quad c$$

par les nombres inverses

$$a=\frac{1}{a},\qquad b=\frac{1}{b},\qquad c=\frac{1}{c}.$$

Réciproquement, la surface des ondes étant celle que représente l'équation (12), la surface caractéristique sera nécessairement celle que représente la formule (1); et par suite, si, en admettant pour surface des ondes lumineuses celle que Fresnel a donnée, on cherche l'équation caractéristique propre à représenter les lois des vibrations de l'éther dans les cristaux à deux axes optiques, on trouvera que cette équation caractéristique est précisément celle de laquelle nous sommes partis, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$\begin{aligned}&D_t^2\varpi-[(b+c)D_x^2+(c+a)D_y^2+(a+b)D_z^2]D_t^2\varpi\\&+(bcD_x^2+caD_y^2+abD_z^2)(D_x^2+D_y^2+D_z^2)\varpi=0.\end{aligned}$$

141.

CALCUL INTÉGRAL. — *Note sur l'intégrale définie double qui sert à l'intégration d'une équation caractéristique homogène.*

C. R., t. XIII, p. 365 (16 août 1841).

L'auteur annonce une réduction nouvelle de l'intégrale double à l'aide de laquelle il est parvenu à représenter la fonction principale ϖ correspondante à une équation caractéristique homogène de l'ordre n, dans le cas où la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$ dépend seulement en chaque point de la distance r à un centre fixe. Il se propose de développer dans un prochain Article cette réduction nouvelle, et les conséquences remarquables qui s'en déduisent.

142.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène, et sur les conséquences qu'entraîne cette réduction.*

C. R., t. XIII, p. 397 (23 août 1841).

Dans le dernier *Compte rendu*, j'ai annoncé une réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène d'un ordre donné n. Pour obtenir cette réduction, et la déduire de l'intégrale double à l'aide de laquelle j'ai précédemment représenté cette fonction, il suffit de supposer infiniment petit le rayon ε de la sphère dans laquelle se trouve renfermé l'état initial, et en dehors de laquelle s'évanouit la valeur initiale de la dérivée de la fonction principale de l'ordre $n-1$. Si l'on nomme *surface des ondes* celle que j'ai désignée sous ce nom en 1830, il suffira de promener sur cette surface le centre d'une sphère dont le rayon serait ε, pour que cette sphère engendre une onde qui aura partout la même épaisseur égale au diamètre de la sphère. Or, de la réduction que j'ai obtenue, il résulte que la dérivée de la fonction principale de l'ordre $n-1$ se réduit, pour les points situés dans l'intérieur de cette onde, à une quantité infiniment petite, et, pour les points situés hors de cette même onde, à une quantité infiniment petite d'un ordre plus élevé. Mais, cette dernière pouvant toujours être négligée par rapport à une quantité infiniment petite d'ordre moindre, on doit en conclure que la dérivée de l'ordre $n-1$ de la fonction principale s'évanouit toujours hors de l'onde dont nous avons parlé, quelle que soit sa forme, et même entre les diverses nappes de cette onde; par conséquent elle s'évanouit, dans l'hypothèse admise, pour tous les points qui ne sont pas infiniment rapprochés de la surface des ondes, telle que je l'ai définie dans le *Bulletin de M. de Férussac* du mois d'avril 1830.

La fonction principale étant déterminée comme je viens de le dire,

dans le cas où le rayon ε est infiniment petit, pour étendre cette détermination et les conclusions précédemment obtenues au cas où l'état initial est quelconque, il suffit de recourir aux formules de transformation que j'ai données dans une des précédentes séances.

Le Mémoire où ces divers résultats seront exposés en détail devant être publié en entier dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, je me contenterai d'indiquer ici brièvement les formules auxquelles je parviens et les théorèmes qui s'en déduisent.

ANALYSE.

PREMIÈRE PARTIE. — PRÉLIMINAIRES.

§ I^er^. — *Théorème d'Analyse et de Géométrie.*

Soient

$$x,\quad y,\quad z$$

trois coordonnées rectangulaires, liées aux trois coordonnées polaires

$$p,\quad q,\quad r$$

par les équations connues

$$x = ur, \qquad y = vr, \qquad z = wr,$$

dans lesquelles on a

$$(1) \qquad u = \cos p, \qquad v = \sin p \cos q, \qquad w = \sin p \sin q.$$

Soient de plus

$$s = f(x, y, z)$$

une certaine fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z, et $\mathfrak{R}$ la racine positive de l'équation

$$(2) \qquad \mathfrak{R}^2 = (\mathrm{D}_x s)^2 + (\mathrm{D}_y s)^2 + (\mathrm{D}_z s)^2.$$

La formule

$$(3) \qquad s = 0$$

représentera une certaine surface courbe LMN; et si, les valeurs des

coordonnées polaires p, q sont précisément celles qui déterminent la direction de la normale menée à la surface courbe LMN par le point (x, y, z), on aura

$$\frac{u}{D_x\delta} = \frac{v}{D_y\delta} = \frac{w}{D_z\delta} = \pm\frac{1}{\partial\mathcal{R}}. \tag{4}$$

Enfin, si l'on nomme x, y, z les coordonnées courantes du plan tangent mené à la surface courbe par le point (x, y, z), l'équation de ce plan sera

$$u(x - x) + v(y - y) + w(z - z) = 0, \tag{5}$$

et pourra être présentée sous la forme

$$ux + vy + wz = \theta, \tag{6}$$

θ désignant une fonction déterminée des angles p, q, savoir, celle à laquelle on parvient quand on élimine x, y, z de l'expression

$$ux + vy + wz$$

à l'aide des formules (3) et (4). Ajoutons que, pour retrouver l'équation (3), il suffira d'éliminer p, q entre l'équation

$$ux + vy + wz = \theta \tag{7}$$

et les dérivées de cette dernière différentiée successivement par rapport à p et par rapport à q. Cela posé, on établira sans peine, soit à l'aide de l'Analyse seule, soit à l'aide de la Géométrie et de l'Analyse combinées ensemble, les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Si le point (x, y, z) est situé, non plus sur la surface* LMN *représentée par l'équation* (3), *mais à une très petite distance de cette surface, δ cessera de s'évanouir; et, si l'on nomme ρ la distance dont il s'agit, on aura sensiblement*

$$\rho = \pm\frac{\delta}{\partial\mathcal{R}}, \tag{8}$$

la valeur de $\mathcal{R}$ étant tirée de la formule (2).

THÉORÈME II. — *Si, le point (x, y, z) étant situé sur la surface* LMN, *le plan tangent mené à cette surface ne la traverse pas, l'aire de la section faite dans la surface par un plan parallèle mené à la distance ρ du premier sera sensiblement proportionnelle à cette distance quand celle-ci deviendra très petite. Alors, en effet, cette même aire sera sensiblement égale au produit*

$$\Theta\rho,$$

Θ désignant l'aire de l'ellipse dont les coordonnées courantes

$$x, \quad y, \quad z$$

vérifieront le système des deux équations

$$\begin{cases} x^2 D_x^2\delta + y^2 D_y^2\delta + z^2 D_z^2\delta + 2yz\, D_y D_z\delta + 2zx\, D_z D_x\delta + 2xy\, D_x D_y\delta = \pm 2\mathcal{R}, \\ x\, D_x\delta + y\, D_y\delta + z\, D_z\delta = 0. \end{cases} \tag{9}$$

On peut observer que l'ellipse dont il s'agit ici est précisément celle qui a été nommée *indicatrice* par M. Charles Dupin, et que, des équations (9), la première représente la surface d'un ellipsoïde, la seconde un plan diamétral de ce même ellipsoïde.

Observons encore que la valeur de Θ, telle qu'elle se trouve définie dans le théorème précédent, se réduit à une fonction de x, y, z qui est complètement déterminée quand la fonction $\mathcal{F}(x, y, z)$ est connue. On pourra donc calculer la fonction de x, y, z représentée par Θ, non seulement pour un point situé sur la surface LMN, mais encore pour un point situé hors de cette surface.

THÉORÈME III. — *Si le point (x, y, z) est situé hors de la surface* LMN, *mais à une très petite distance ρ de cette surface, et de manière à pouvoir devenir le sommet d'un cône à base finie circonscrit à la surface* LMN, *la courbe de contact de cette surface et de la surface conique sera généralement très peu différente d'une ellipse, et l'aire de cette ellipse sera sensiblement égale au produit*

$$\Theta\rho.$$

THÉORÈME IV. — *Si l'on promène sur la surface* LMN *le centre d'une sphère dont le rayon soit s, l'espace traversé par cette sphère sera limité*

par deux enveloppes, l'une intérieure, l'autre extérieure, et la normale menée par un point quelconque à la surface LMN *sera en même temps normale aux deux enveloppes, qu'elle traversera en deux points dont la distance sera le diamètre* $2s$ *de la sphère génératrice. L'espace dont il s'agit sera donc une espèce d'*onde *qui offrira partout la même épaisseur. Ajoutons que, pour obtenir l'enveloppe extérieure ou intérieure de cette onde, il suffira de promener dans l'espace le plan représenté, non plus par l'équation* (7), *mais par la suivante*

$$ux + vy + wz = \theta \pm s, \tag{10}$$

c'est-à-dire, d'éliminer les angles p, q *entre cette équation et ses deux dérivées relatives à ces angles. L'équation* (10) *elle-même sera celle d'un plan tangent à l'enveloppe extérieure ou intérieure de l'onde, et séparé, par la distance* s, *du plan parallèle et tangent à la surface* LMN.

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans les théorèmes III et IV, et la distance* s *étant très petite, ainsi que* ρ, *si le point* (x, y, z) *devient le sommet d'un cône à base finie, circonscrit, non plus à la surface* LMN, *mais à l'enveloppe extérieure de l'onde, dont l'épaisseur est* $2s$, *l'aire de contact de cette enveloppe et de la surface conique se réduira sensiblement à une ellipse, et l'aire de cette ellipse sera sensiblement égale au produit*

$$\Theta(\rho - s),$$

ρ *désignant toujours la distance du point* (x, y, z) *à la surface* LMN.

§ II. — *Théorèmes de Calcul intégral.*

Considérons l'intégrale définie

$$\int_{\xi}^{x} f(x, t)\, dx, \tag{1}$$

dans laquelle

$$\xi, \quad x$$

désignent deux valeurs réelles de la variable x, et $f(x, t)$ une fonction

réelle des deux variables x, t liées entre elles par une certaine équation caractéristique

$$F(x, t) = 0. \tag{2}$$

Soient d'ailleurs

$$\tau, \quad t$$

les valeurs particulières de la variable t correspondantes aux valeurs particulières

$$\xi, \quad x$$

de la variable x; et supposons, pour fixer les idées, que dans l'intégrale (1) la seconde limite surpasse la première, en sorte qu'on ait

$$x > \xi.$$

Si, tandis que x varie et croît en passant de la limite ξ à la limite x, la variable t est toujours croissante ou toujours décroissante, chacune des dérivées

$$D_t x, \quad D_x t$$

sera toujours positive dans le premier cas, toujours négative dans le second, entre les limites des intégrations, et l'on aura

$$\int_{\xi}^{x} f(x, t)\, dx = \int_{\tau}^{t} f(x, t)\, D_t x\, dt, \tag{3}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{\xi}^{x} f(x, t)\, dx = \int_{\tau}^{t} \frac{f(x, t)}{D_x t}\, dt. \tag{4}$$

Or on conclut de cette dernière formule : 1° lorsqu'on a $t > \tau$, et, par suite, $D_x t > 0$,

$$\int_{\xi}^{x} f(x, t)\, dx = \int_{\tau}^{t} \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt;$$

2° lorsqu'on a $t < \tau$, et, par suite, $D_x t < 0$,

$$\int_{\xi}^{x} f(x, t)\, dx = \int_{t}^{\tau} \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt.$$

Si l'on nomme a la plus petite et b la plus grande des deux valeurs extrêmes τ, t de la nouvelle variable t, on aura dans les deux cas

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{f(x,t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\,dt.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soient x, t deux variables réelles liées entre elles par une certaine équation caractéristique, $f(x,t)$ une fonction réelle de ces mêmes variables, et*

$$\xi, \quad x$$

deux valeurs particulières de x, dont la seconde surpasse la première, en sorte qu'on ait

$$x > \xi.$$

Supposons d'ailleurs que la variable t, considérée comme fonction de x, soit toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que l'on fait croître x entre les limites

$$x = \xi, \qquad x = x.$$

Enfin nommons a la plus petite et b la plus grande des valeurs extrêmes de la variable t, correspondantes aux valeurs extrêmes ξ et x de la variable x, de sorte qu'on ait encore

$$b > a.$$

On trouvera

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{f(x,t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\,dt. \tag{5}$$

Corollaire. — Si la fonction $f(x,t)$ était du nombre de celles que l'on rencontre souvent dans les questions de Physique mathématique, et s'évanouissait toujours, pour des valeurs de t situées hors de certaines limites

$$t = \alpha, \qquad t = \theta > \alpha,$$

alors, en vertu de l'équation (5), on aurait premièrement

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx = 0, \tag{6}$$

si α et θ étaient situés hors des limites a, b; secondement

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx = \int_{\alpha}^{b} \frac{f(x,t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\,dt, \tag{7}$$

si α seul était compris entre les limites a, b; troisièmement

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx = \int_{a}^{\theta} \frac{f(x,t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\,dt, \tag{8}$$

si θ seul était compris entre les limites a, b; enfin, quatrièmement,

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx = \int_{\alpha}^{\theta} \frac{f(x,t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\,dt, \tag{9}$$

si α, θ étaient tous deux compris entre les limites a et b.

Jusqu'ici nous avons supposé que la variable t, considérée comme fonction de x, en vertu de l'équation caractéristique, était toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que la variable x croissait en passant de la limite ξ à la limite x. Considérons maintenant le cas où cette condition ne serait pas remplie, et où, en passant de la limite ξ à la limite x, la variable x acquerrait successivement diverses valeurs

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_n$$

correspondantes à des valeurs maxima ou minima

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \tau_3, \quad \ldots, \quad \tau_n$$

de la variable t. Alors chacune des fonctions dérivées

$$D_t x, \quad D_x t$$

conserverait le même signe, tandis que x varierait entre deux limites représentées par deux termes consécutifs de la suite

$$\xi, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad x;$$

et, après avoir décomposé l'intégrale (1) en plusieurs parties à l'aide de la formule

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx = \int_{\xi}^{\xi_1} f(x,t)\,dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,t)\,dx + \ldots + \int_{\xi_n}^{x} f(x,t)\,dx, \tag{10}$$

on pourrait appliquer à chacune de ces parties le théorème I. On se trouvera ainsi conduit à cet autre théorème.

THÉORÈME II. — *Soient x, t deux variables réelles liées entre elles par une certaine équation caractéristique, $f(x, t)$ une fonction réelle de ces mêmes variables, et*

$$\xi, \quad x$$

deux valeurs particulières de x dont la seconde surpasse la première, en sorte qu'on ait

$$x > \xi.$$

Soient d'ailleurs, entre les limites ξ et x,

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n$$

les valeurs successives de x pour lesquelles t, considérée comme fonction de x, devient un maximum ou un minimum; enfin soient

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_n$$

les valeurs correspondantes de y, propres à représenter des maxima ou minima de la variable t. Si l'on nomme

$$a, \quad b$$

deux termes consécutifs de la suite

$$\tau, \quad \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_n, \quad t, \tag{11}$$

a étant le plus petit de ces deux termes, et b le plus grand, on aura

$$\int_\xi^x f(x, t)\, dt = \sum \int_a^b \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt, \tag{12}$$

le signe Σ indiquant une somme d'intégrales correspondantes aux divers systèmes de valeurs de a et de b.

Corollaire I. — Supposons, par exemple, que, n étant égal à 2, la variable t, considérée comme fonction de x, devienne un maximum pour $x = \xi_1$, et un minimum pour $x = \xi_2$; alors la formule (12) donnera

$$\int_\xi^x f(x, t)\, dx = \int_\tau^{\tau_1} \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt + \int_{\tau_2}^{t} \frac{f(x, t)^2}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt.$$

Corollaire II. — Si la fonction $f(x, t)$ était du nombre de celles que l'on rencontre souvent dans les questions de Physique mathématique, et s'évanouissait hors de certaines limites

$$t = \alpha, \qquad t = \theta > \alpha,$$

alors, dans le second membre de la formule (12), chaque intégrale de la forme

$$\int_a^b \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt$$

pourrait être remplacée par zéro, lorsque α, θ seraient situés hors des limites a, b; par une intégrale de la forme

$$\int_\alpha^b \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt \quad \text{ou} \quad \int_a^\theta \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt,$$

si α seul ou θ seul était renfermé entre les limites a, b; enfin par l'intégrale

$$\int_\alpha^\theta \frac{f(x, t)}{\sqrt{(D_x t)^2}}\, dt,$$

si α et θ étaient renfermés tous deux entre ces limites.

Corollaire III. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si le facteur $f(x, t)$ s'évanouit pour une valeur quelconque de t, renfermée entre la plus petite et la plus grande des quantités

$$\tau, \quad \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_n, \quad t,$$

on aura

$$\int_\xi^x f(x, t)\, dx = 0. \tag{13}$$

Corollaire IV. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème II, si la fonction $f(x, t)$ s'évanouit hors des limites

$$t = \alpha, \qquad t = \theta > \alpha,$$

et si ces limites sont renfermées entre deux termes consécutifs quel-

conques de la suite

$$\tau,\quad \tau_1,\quad \tau_2,\quad \ldots,\quad \tau_n,\quad 1,$$

on aura

$$\int_\xi^x f(x,t)\,dx = \sum \int_\alpha^\beta \frac{f(x,t)}{\sqrt{(Dx\,t)^2}}\,dt. \tag{14}$$

Il est important d'observer que, dans les diverses intégrales définies dont la somme composera le second membre de l'équation précédente, la fonction sous le signe f prendra généralement diverses formes, eu égard aux diverses valeurs de la variable x, considérée comme fonction de la variable t.

DEUXIÈME PARTIE. — DÉTERMINATION DE LA FONCTION PRINCIPALE CORRESPONDANTE A UNE CARACTÉRISTIQUE HOMOGÈNE.

§ I^er^. — *Considérations générales.*

Prenons pour variables indépendantes trois coordonnées rectangulaires x, y, z et le temps t. Soit d'ailleurs

$$F(x,y,z,t)$$

une fonction de ces variables indépendantes, entière, homogène, du degré n et dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. Enfin, soient

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

la distance du point (x,y,z) à l'origine des coordonnées, et ϖ une fonction principale assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t, l'équation caractéristique homogène

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varpi = 0; \tag{1}$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \qquad D_t\varpi = 0, \qquad \ldots, \qquad D_t^{n-2}\varpi = 0, \qquad D_t^{n-1}\varpi = \Pi(r). \tag{2}$$

On pourra d'ailleurs supposer que $\Pi(r)$ représente une fonction paire de r, en sorte que l'on ait

$$\Pi(-r) = \Pi(r); \tag{3}$$

et alors on trouvera, comme nous l'avons montré dans une précédente séance,

$$\varpi = \frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\,\frac{\omega^{n-2}(\zeta+\omega t)\Pi(\zeta+\omega t)}{(F(u,v,w,\omega))_\omega}\sin p\,dq\,dp, \tag{4}$$

les valeurs de u, v, w, ζ étant

$$u = \cos p, \qquad v = \sin p\cos q, \qquad w = \sin p\sin q, \tag{5}$$

$$\zeta = ux + vy + wz. \tag{6}$$

D'autre part, comme on a généralement

$$\mathcal{E}(f(\omega))_\omega = -\mathcal{E}(f(-\omega))_\omega,$$

il en résulte qu'à la formule (4) on pourra encore substituer la suivante

$$\varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\,\frac{\omega^{n-2}(\zeta-\omega t)\Pi(\zeta-\omega t)}{(F(u,v,w,-\omega))_\omega}\sin p\,dq\,dp. \tag{7}$$

Supposons maintenant que $F(x,y,z,t)$ soit, comme il arrive ordinairement dans les problèmes de Mécanique, une fonction paire de t, c'est-à-dire une fonction entière de t^2. On aura

$$F(u,v,w,-\omega) = F(u,v,w,\omega).$$

Par conséquent, la formule (7) donnera

$$\varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{E}\,\frac{\omega^{n-2}(\zeta-\omega t)\Pi(\zeta-\omega t)}{(F(u,v,w,\omega))_\omega}\sin p\,dq\,dp. \tag{8}$$

Alors aussi l'équation

$$F(u,v,w,\omega) = 0, \tag{9}$$

résolue par rapport à ω, fournira des racines égales deux à deux au signe près, mais affectées de signes contraires; et, en supposant toutes ces racines réelles, on reconnaîtra aisément que, dans le second membre de la formule (8), la partie correspondante aux racines positives de l'équation (9) ne diffère pas de la partie correspondante aux racines

négatives. On pourra donc supposer le signe $\sum$ relatif aux seules racines positives, pourvu que l'on double le résultat ainsi obtenu. Donc, si l'on pose, pour abréger,

$$\Phi(u, v, w, \omega) = D_\omega F(u, v, w, \omega) \tag{10}$$

et

$$\varsigma - \omega t = s, \tag{11}$$

la formule (8) donnera

$$\varpi = -\frac{D_t^{2-n}}{2\pi} \sum \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\omega^{n-2} s \Pi(s)}{\Phi(u, v, w, \omega)} \sin p \, dq \, dp, \tag{12}$$

le signe $\sum$ indiquant une somme de termes semblables et correspondants aux diverses racines positives de l'équation (9). Donc si, en prenant pour ω l'une de ces racines, on nomme Q la fonction de l'angle q déterminée par l'équation

$$Q = -\int_0^{\pi} \frac{\omega^{n-2} s \Pi(s)}{\Phi(u, v, w, \omega)} \sin p \, dp, \tag{13}$$

on aura simplement

$$\varpi = \frac{D_t^{2-n}}{2\pi} \sum \int_0^{2\pi} Q \, dq. \tag{14}$$

Lorsque dans la formule (11) on substitue la valeur de ς tirée de l'équation (6), on obtient la suivante

$$ux + vy + wz = \omega t + s, \tag{15}$$

qui représente, quand on y considère x, y, z comme variables, un plan perpendiculaire à la droite dont la direction est déterminée par les angles polaires p, q. Si, en attribuant au paramètre s une valeur constante, on attribue successivement aux angles p, q des valeurs diverses, le plan dont il s'agit prendra successivement diverses positions dans l'espace, de manière à toucher constamment une certaine surface LMN. Pour obtenir l'équation de cette même surface, que nous représenterons par

$$\vartheta(x, y, z, t, s) = 0, \tag{16}$$

il suffira d'éliminer s entre l'équation (15) et ses dérivées relatives aux angles p, q, dont u, v, w, ω sont des fonctions en vertu des formules (5) et (9). Donc, en considérant s comme une fonction de p, q, déterminée par la formule (15), il suffira d'éliminer p, q entre cette formule et les deux suivantes :

$$D_p s = 0, \qquad D_q s = 0. \tag{17}$$

Si, s étant réduit à zéro, l'on écrit pour abréger $\vartheta(x, y, z, t)$ au lieu de $\vartheta(x, y, z, t, 0)$, l'équation (16), réduite à la forme

$$\vartheta(x, y, z, t) = 0, \tag{18}$$

sera celle de la surface que nous avons appelée surface des ondes, et qui est constamment touchée par le plan dont l'équation est

$$ux + vy + wz = \omega t. \tag{19}$$

D'ailleurs si, dans la formule (16), on attribue successivement à s deux valeurs égales au signe près, mais affectées de signes contraires, par exemple, $s = -\varepsilon$, et $s = \varepsilon$, les deux équations ainsi obtenues, savoir,

$$\vartheta(x, y, z, t, -\varepsilon) = 0, \qquad \vartheta(x, y, z, t, \varepsilon) = 0, \tag{20}$$

représenteront les deux enveloppes intérieure et extérieure d'une onde qui offrirait l'épaisseur constante 2ε, et qui serait engendrée par une sphère d'un rayon égal à ε, le centre de la sphère étant assujetti à parcourir la surface des ondes représentée par la formule (18). Observons encore : 1° que les équations (17) réunies représenteront une droite normale à la surface des ondes ainsi qu'aux enveloppes extérieure et intérieure de l'onde dont nous venons de parler; 2° que la première des équations (17), réunie à l'équation (15), représentera une droite tangente à la surface LMN et parallèle au plan des yz; 3° que la seconde des équations (17), réunie à l'équation (15), représentera une droite tangente à la surface LMN et en même temps comprise dans le plan normal perpendiculaire au plan des yz.

A l'aide des remarques que nous venons de faire, et des théorèmes établis dans la première Partie de ce Mémoire, on parviendra aisément

à la valeur de l'intégrale double

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\omega^{n-2}s\,\Pi(s)}{\Phi(a,c,w,\omega)}\sin p\,dq\,dp \tag{21}$$

comprise dans le second membre de la formule (12), par conséquent à la valeur de la fonction principale ϖ, et aux lois des mouvements représentés par une équation caractéristique homogène, si la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$ s'évanouit au dehors de la sphère qui a pour centre l'origine et pour rayon une longueur infiniment petite ε; c'est-à-dire, en d'autres termes, si la fonction paire de s représentée par $\Pi(s)$ s'évanouit hors des limites

$$s=-\varepsilon, \qquad s=\varepsilon.$$

Ainsi, par exemple, en considérant ε comme une quantité infiniment petite du premier ordre, et supposant d'abord le point (x, y, z) situé, au bout du temps t, hors de l'onde comprise entre les surfaces représentées par les équations (20), on reconnaîtra que la valeur de Q, déterminée par la formule (13), se réduit généralement à une quantité infiniment petite du troisième ordre. On devra seulement excepter le cas où l'angle q acquerra une valeur telle que la première des équations (17) soit sensiblement vérifiée, c'est-à-dire, une valeur telle qu'une tangente menée à la surface des ondes, parallèlement au plan des y, z, et par le point (x, y, z), vienne toucher cette surface en un point où la direction de la normale corresponde sensiblement à cette même valeur de q. On en conclura que, dans l'hypothèse admise, et quand le point (x, y, z) sera situé hors de l'onde infiniment mince, comprise entre les surfaces représentées par l'équation (20), l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Q}\,dq,$$

et par suite la partie de la fonction principale ϖ correspondante à cette intégrale, ou, ce qui revient au même, à l'intégrale (21), se réduiront simplement à zéro, ou du moins à des quantités infiniment petites du troisième ordre. D'ailleurs il est aisé de s'assurer qu'il n'en sera plus

ainsi quand le point (x, y, z) sera compris entre les surfaces représentées par les équations (20), et qu'alors l'intégrale (21) deviendra seulement, avec le carré de s, une quantité infiniment petite du deuxième ordre. On se trouvera donc ramené par les considérations précédentes aux conclusions énoncées dans le préambule du présent Mémoire.

Au reste, ces considérations seront développées dans les paragraphes suivants, qui renfermeront en outre la détermination de l'intégrale (21), et par suite la détermination de la fonction principale ϖ, non seulement dans le cas où la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$ ne diffère de zéro que pour les points situés dans l'intérieur d'une sphère infiniment petite, mais encore dans le cas général où cette condition n'est pas remplie, et où la valeur initiale de $D_t^{n-1}\varpi$ se trouve représentée, entre certaines limites finies, par une fonction connue $\varpi(x, y, z)$ des trois coordonnées x, y, z.

143.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène, et sur les conséquences qu'entraîne cette réduction.*

C. R., T. XIII, p. 455, 30 août 1841.

DEUXIÈME PARTIE. — DÉTERMINATION DE LA FONCTION PRINCIPALE CORRESPONDANTE A UNE ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE HOMOGÈNE.

§ II. — *Sections infiniment petites faites dans la surface des ondes et dans la surface caractéristique par les plans correspondants.*

Les mêmes choses étant posées que dans le § I^er^, considérons, au bout du temps t, deux points correspondants

C, D

situés, le premier, sur la surface caractéristique, le second, sur la surface des ondes; et soient

x, y, z

les coordonnées rectangulaires du premier point,

$$x, \quad y, \quad z$$

celles du second. Non seulement ces coordonnées vérifieront respectivement les équations des deux surfaces, savoir

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, t) = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{F}(x, y, z, t) = 0;$$

mais, de plus, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{S} = \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, t), \qquad s = \mathfrak{F}(x, y, z, t),$$

on aura encore (*voir* la page 267)

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z + t^2 = 0$$

et

$$\text{(4)} \qquad \frac{x}{\mathrm{D}_\mathrm{x}\mathrm{S}} = \frac{y}{\mathrm{D}_\mathrm{y}\mathrm{S}} = \frac{z}{\mathrm{D}_\mathrm{z}\mathrm{S}},$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{D}_x s} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{D}_y s} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{D}_z s}.$$

Si d'ailleurs, comme il arrive ordinairement dans les problèmes de Mécanique, $\mathrm{F}(x, y, z, t)$ est une fonction entière de t^2, on aura

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, t) = \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, -t) = \mathrm{F}(-\mathrm{x}, -\mathrm{y}, -\mathrm{z}, t) = \mathrm{F}(-\mathrm{x}, -\mathrm{y}, -\mathrm{z}, -t),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = \mathfrak{F}(x, y, z, -t) = \mathfrak{F}(-x, -y, -z, t) = \mathfrak{F}(-x, -y, -z, -t).$$

Donc alors toute droite menée par l'origine O des coordonnées sera un diamètre de la surface caractéristique et de la surface des ondes, et ces deux surfaces auront pour centre commun l'origine elle-même.

Soient maintenant

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

les deux rayons vecteurs OC, OD menés de l'origine aux points correspondants C, D; et δ l'angle compris entre les rayons vecteurs. On aura

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z = \mathrm{r}r\cos\delta,$$

et de l'équation (2), réduite à

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{r}r\cos\delta = -t^2,$$

on conclura que δ est un angle obtus. Mais, si le point D, situé sur la surface des ondes à l'extrémité d'un certain diamètre, est transporté à l'autre extrémité de ce même diamètre, les coordonnées

$$x, \quad y, \quad z$$

changeront de signes, c'est-à-dire que l'on devra remplacer

$$x, \quad y, \quad z \qquad \text{par} \qquad -x, \quad -y, \quad -z.$$

Or, après ce changement de signe, qui n'altérera point les formules (2), (4), (5), la formule (3) se trouvera remplacée par la suivante

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z = t^2;$$

et alors, comme on se trouvera conduit, non plus à l'équation (7), mais à celle-ci

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{r}r\cos\delta = t^2,$$

les points correspondants C, D de la surface caractéristique et de la surface des ondes seront évidemment situés de manière que l'angle δ, compris entre les rayons vecteurs OC, OD, se réduise à un angle aigu.

Nommons à présent p, q les angles polaires qui déterminent la direction de la normale menée par le point D à la surface des ondes, cette normale étant prolongée dans un sens tel qu'elle forme avec le prolongement du rayon vecteur r un angle aigu; et faisons

$$\text{(11)} \qquad u = \cos p, \qquad v = \sin p\cos q, \qquad w = \sin p\sin q.$$

Le cosinus de l'angle aigu dont il s'agit sera

$$\text{(12)} \qquad \frac{ux + vy + wz}{r},$$

et, par suite, le trinôme

$$ux + vy + wz$$

sera une quantité positive. Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$R = [(D_x S)^2 + (D_y S)^2 + (D_z S)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{R} = [(D_x \delta)^2 + (D_y \delta)^2 + (D_z \delta)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

on aura

$$\frac{u}{D_x \delta} = \frac{v}{D_y \delta} = \frac{w}{D_z \delta} = \pm \frac{1}{\mathfrak{R}}, \tag{15}$$

et, de la formule (15) combinée avec l'équation (5), on tirera

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \pm \frac{1}{r}.$$

On devra même, dans la dernière formule, réduire le double signe au signe +, attendu que, les trois rapports

$$\frac{u}{x}, \quad \frac{v}{y}, \quad \frac{w}{z}$$

étant égaux, chacun d'eux sera encore égal à la fraction

$$\frac{ux + vy + wz}{xx + yy + zz} = \frac{ux + vy + wz}{rr\cos\delta},$$

dont les deux termes seront positifs. On aura donc

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \frac{ux + vy + wz}{rr\cos\delta} = \frac{1}{r}, \tag{16}$$

et, par suite,

$$\frac{ux + vy + wz}{r} = \cos\delta. \tag{17}$$

Le premier membre de la formule (17) étant précisément l'expression (12), il en résulte que l'angle aigu δ, compris entre les rayons vecteurs correspondants r, r, est en même temps l'angle aigu compris entre le rayon vecteur r, ou OD, et la normale menée par le point D à

la surface des ondes. Au reste, cette conclusion pouvait être facilement prévue, puisqu'en vertu d'un théorème énoncé dans un précédent Mémoire (*voir* le théorème III de la page 265), le plan tangent au point D à la surface des ondes sera perpendiculaire au rayon vecteur r.

On tire de la formule (16)

$$x = ur, \qquad y = vr, \qquad z = wr. \tag{18}$$

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans l'équation caractéristique

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

elle donnera

$$F(ur, vr, wr, t) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$F\left(u, v, w, \frac{t}{r}\right) = 0;$$

et, par suite,

$$\frac{t}{r} = \omega,$$

ou

$$r = \frac{t}{\omega}, \tag{19}$$

ω désignant une racine positive de l'équation

$$F(u, v, w, \omega) = 0. \tag{20}$$

Or, en vertu des formules (18), (19), l'équation (9) deviendra

$$ux + vy + wz = \omega t. \tag{21}$$

Cette dernière, lorsqu'on y considère x, y, z comme variables, représente évidemment un plan qui, passant par le point D, coupe à angles droits la normale menée par ce point à la surface des ondes. Ce plan est donc précisément le plan tangent à la surface des ondes. Donc les coordonnées x, y, z du point D vérifieront, non seulement l'équation (21), mais encore ses dérivées relatives aux angles p, q; ou, ce

qui revient au même, eu égard à la condition

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{22}$$

à laquelle sont assujettis u, v, w, elles vérifieront la formule

$$\frac{x - t\mathrm{D}_u\omega}{u} = \frac{y - t\mathrm{D}_v\omega}{v} = \frac{z - t\mathrm{D}_w\omega}{w}, \tag{23}$$

où l'on considère ω comme une fonction de u, v, w déterminée par l'équation (20). D'ailleurs, comme, en vertu de l'équation (20), ω sera une fonction de u, v, w, homogène et du premier degré, on aura

$$u\mathrm{D}_u\omega + v\mathrm{D}_v\omega + w\mathrm{D}_w\omega = \omega,$$

et, par suite, on tirera des formules (21), (22), (23)

$$\frac{x - t\mathrm{D}_u\omega}{u} = \frac{y - t\mathrm{D}_v\omega}{v} = \frac{z - t\mathrm{D}_w\omega}{w} = 0,$$

$$\frac{x}{\mathrm{D}_u\omega} = \frac{y}{\mathrm{D}_v\omega} = \frac{z}{\mathrm{D}_w\omega} = t = \frac{r}{[(\mathrm{D}_u\omega)^2 + (\mathrm{D}_v\omega)^2 + (\mathrm{D}_w\omega)^2]^{\frac{1}{2}}}; \tag{24}$$

puis, de celle-ci, combinée avec la formule (17),

$$\cos\delta = \frac{\omega}{[(\mathrm{D}_u\omega)^2 + (\mathrm{D}_v\omega)^2 + (\mathrm{D}_w\omega)^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{25}$$

Telle sera l'équation à l'aide de laquelle on pourra déterminer $\cos\delta$ en fonction de u, v, w, ou, ce qui revient au même, en fonction des angles p, q.

Passons maintenant du point D, ou (x, y, z), situé sur la surface des ondes, au point C, ou (x, y, z), situé sur la surface caractéristique ; et nommons

u, v, w

ce que deviennent dans ce passage les trois quantités u, v, w. Il est clair qu'à la place des formules (15), (16), (17) et (18) on obtiendra les suivantes

$$\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{D}_x\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{D}_y\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{D}_z\mathrm{S}} = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}, \tag{26}$$

et

$$\frac{\mathrm{u}}{x} = \frac{\mathrm{v}}{y} = \frac{\mathrm{w}}{z} = \frac{\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z}{rr\cos\delta} = \frac{1}{r}, \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z}{\mathrm{r}} = \cos\delta, \tag{28}$$

$$x = \mathrm{u}r, \quad y = \mathrm{v}r, \quad z = \mathrm{w}r. \tag{29}$$

La formule (28) montre que l'angle aigu δ, compris entre les rayons vecteurs r, r, est en même temps l'angle aigu compris entre le rayon vecteur r ou OC et la normale menée par le point C à la surface caractéristique. Cette conclusion pourrait encore se déduire du théorème III de la page 265.

Concevons à présent qu'aux points correspondants

C et D

on substitue deux autres points correspondants

G et H

situés, le premier sur la surface caractéristique tout près du point C, le second sur la surface des ondes tout près du point D. Soient d'ailleurs

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1$$

les coordonnées du point G, et

$$x_i, \quad y_i, \quad z_i$$

les coordonnées du point H. Les formules (1), (2), (3), (4) et (5) continueront de subsister quand on y remplacera x, y, z par x_i, y_i, z_i, et x, y, z par x_i, y_i, z_i, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand on attribuera aux variables

$$x_i, \quad y_i, \quad z_i, \qquad \mathrm{x}_i, \quad \mathrm{y}_i, \quad \mathrm{z}_i$$

les accroissements très petits

$$x_i - x, \quad y_i - y, \quad z_i - z, \qquad \mathrm{x}_i - \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}_i - \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}_i - \mathrm{z}.$$

Or, si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de ces accrois-

sements, les variations que subiront les quantités

$$S,\quad D_x S,\quad D_y S,\quad D_z S,$$

et si, dans les développements obtenus, on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, alors on tirera de l'équation (1)

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l}(x_i-x)D_x S+(y_i-y)D_y S+(z_i-z)D_z S\\ +\frac{1}{2}[(x_i-x)^2 D_x^2 S+(y_i-y)^2 D_y^2 S+\ldots+2(y_i-y)(z_i-z)D_y D_z S+\ldots]=0,\end{array}\right.$$

et la formule (4), que l'on peut écrire comme il suit

$$(31)\quad \frac{D_x S}{x}=\frac{D_y S}{y}=\frac{D_z S}{z}=\pm\frac{R}{r},$$

entraînera cette autre formule

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x_i-x)\dfrac{D_x S}{x}-(x_i-x)D_x^2 S-(y_i-y)D_x D_y S-(z_i-z)D_x D_z S}{x_i}\\ =\dfrac{(y_i-y)\dfrac{D_y S}{y}-(x_i-x)D_x D_y S-(y_i-y)D_y^2 S-(z_i-z)D_y D_z S}{y_i}\\ =\dfrac{(z_i-z)\dfrac{D_z S}{z}-(x_i-x)D_x D_z S-(y_i-y)D_y D_z S-(z_i-z)D_z^2 S}{z_i}.\end{array}\right.$$

Enfin l'on tirera de la formule (9)

$$(33)\quad x_i x+y_i y+z_i z=\mathrm{x}x+\mathrm{y}y+\mathrm{z}z.$$

Soit maintenant s la distance du point H au plan tangent mené par le point D à la surface des ondes, ou, ce qui revient au même, la projection de la distance DH sur la normale menée par le point D à cette surface; on aura

$$(34)\quad s=u(x-x_i)+v(y-y_i)+w(z-z_i).$$

Pareillement, si l'on nomme s la distance du point G au plan tangent mené par le point C à la surface caractéristique, on aura

$$(35)\quad \mathrm{s}=\mathrm{u}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_i)+\mathrm{v}(\mathrm{y}-\mathrm{y}_i)+\mathrm{w}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_i);$$

et des formules (34), (35) on tirera, eu égard aux équations (18) et (29),

$$(36)\quad rs-r\mathrm{s}=\mathrm{x}_i x+\mathrm{y}_i y+\mathrm{z}_i z-\mathrm{x}x_i-\mathrm{y}y_i-\mathrm{z}z_i.$$

Cela posé, imaginons que l'on ajoute d'une part les numérateurs, d'autre part les dénominateurs des trois fractions comprises dans la formule (32), après les avoir respectivement multipliés par les facteurs

$$\mathrm{x}_i-\mathrm{x},\quad \mathrm{y}_i-\mathrm{y},\quad \mathrm{z}_i-\mathrm{z};$$

alors, eu égard aux équations (30), (31), (33) et (36), on obtiendra pour résultat la fraction

$$(37)\quad \pm\frac{rs-r\mathrm{s}}{x_i(\mathrm{x}_i-\mathrm{x})+y_i(\mathrm{y}_i-\mathrm{y})+z_i(\mathrm{z}_i-\mathrm{z})}\frac{\mathrm{R}}{r},$$

qui devra être égale à chacune des trois autres, et par conséquent très petite en même temps que les différences

$$x_i-x,\quad y_i-y,\quad z_i-z,\quad \mathrm{x}_i-\mathrm{x},\quad \mathrm{y}_i-\mathrm{y},\quad \mathrm{z}_i-\mathrm{z}.$$

Donc, la valeur de R étant généralement différente de zéro, le rapport

$$(38)\quad \frac{rs-r\mathrm{s}}{x_i(\mathrm{x}_i-\mathrm{x})+y_i(\mathrm{y}_i-\mathrm{y})+z_i(\mathrm{z}_i-\mathrm{z})}$$

devra lui-même être petit. Mais, eu égard aux formules (33), (18) et (34), on aura

$$\begin{aligned}&x_i(\mathrm{x}_i-\mathrm{x})+y_i(\mathrm{y}_i-\mathrm{y})+z_i(\mathrm{z}_i-\mathrm{z})\\ &=\mathrm{x}(x-x_i)+\mathrm{y}(y-y_i)+\mathrm{z}(z-z_i)\\ &=[u(x-x_i)+v(y-y_i)+w(z-z_i)]\,\mathrm{r}=rs.\end{aligned}$$

Donc le rapport (38) se réduira simplement à

$$1-\frac{r}{s}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{r}};$$

et, pour que ce rapport soit très petit, il faudra que l'on ait sensiblement

$$(39)\quad \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{r}}=\frac{s}{r},$$

ou, ce qui revient au même,

$$s = \frac{r}{r} s. \tag{40}$$

En vertu de cette dernière équation, la distance s du point G au plan tangent, mené par le point C à la surface caractéristique, dépend uniquement du rapport $\frac{r}{r}$ et de la distance s du point H au plan tangent mené par le point D à la surface des ondes. Donc, si le point H, très rapproché du point D, varie sur la surface des ondes en restant toujours à la même distance du plan qui la touche en D, le point correspondant G variera sur la surface caractéristique de manière à rester toujours à la même distance du plan tangent qui la touche en C. Donc, si l'on nomme H, H′, H″, ... les diverses positions que prendra successivement le point D sur la surface des ondes, et G, G′, G″, ... les positions correspondantes du point G sur la surface caractéristique, les deux courbes

$$HH'H''\ldots \quad \text{et} \quad GG'G''\ldots,$$

tracées sur les deux surfaces, seront les contours de deux sections planes et très petites, faites dans les deux surfaces par des plans correspondants qui seront parallèles aux deux plans tangents menés par les points D et C.

Comme nous l'avons remarqué dans les préliminaires, si, après avoir mené à une surface courbe, en un point donné, un plan tangent qui ne la traverse pas, on coupe cette surface par un second plan parallèle au premier, et séparé de celui-ci par une très petite distance s, l'aire de la section ainsi obtenue sera sensiblement proportionnelle à s. On peut même observer qu'elle sera sensiblement égale au produit de s par la circonférence d'un cercle qui aurait pour rayon la moyenne géométrique entre les rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface au point donné. Cette moyenne géométrique est ce que nous appellerons le *rayon de moyenne courbure*. Supposons en particulier que l'on détermine les rayons de moyenne courbure pour le point D de la surface des ondes, et pour le point correspondant C de la surface caractéristique. Si, le temps t venant à varier, le point D se meut sur

une certaine droite OD menée par l'origine O, le point C se mouvra lui-même sur une droite correspondante OC; et, non seulement les coordonnées

$$x,\ y,\ z;\ \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}$$

des points D et C varieront proportionnellement à t, mais on pourra encore en dire autant des rayons de moyenne courbure des deux surfaces en ces deux points, attendu que les deux surfaces, représentées par les équations homogènes (1) et (2), resteront toujours, comme on sait, semblables à elles-mêmes. D'ailleurs, les rayons vecteurs

$$r,\ \mathrm{r},$$

mesurés constamment dans les mêmes directions OD, OC, croîtront aussi proportionnellement au temps. Donc les rayons de moyenne courbure des deux surfaces aux points D et C croîtront dans le même rapport que les rayons vecteurs

$$r,\ \mathrm{r},$$

et pourront être représentés le premier par kr, le second par kr, les coefficients

$$k,\ \mathrm{k}$$

étant déterminés pour chaque direction du rayon vecteur r, ou r. Il est en effet aisé de s'assurer que les coefficients k, k seront seulement fonctions des rapports

$$\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r},$$

ou, ce qui revient au même, des rapports

$$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}},\ \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}},\ \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{r}}.$$

Les trois derniers rapports se réduisant précisément aux trois quantités ci-dessus représentées par

$$u,\ v,\ w,$$

on peut dire encore que les deux coefficients k, k se réduiront toujours à des fonctions déterminées de u, v, w. D'ailleurs, les rayons de cour-

bure moyenne qui correspondront aux points D et C étant représentés par les produits

$$kr \quad \text{et} \quad \mathrm{kr},$$

si par ces points on mène : 1° deux plans tangents, l'un à la surface des ondes, l'autre à la surface caractéristique; 2° des plans sécants, parallèles aux plans tangents, et séparés de ceux-ci par la très petite distance

$$s \quad \text{ou} \quad \mathrm{s},$$

les deux aires des deux sections obtenues

$$HH'H''\ldots, \quad GG'G''\ldots$$

se trouveront sensiblement représentées par les produits

$$2\pi krs, \quad 2\pi \mathrm{krs}. \tag{41}$$

Concevons maintenant qu'à l'aide de rayons vecteurs menés des points H, H', H'', ..., ou G, G', G'', ... à l'origine des coordonnées, on projette les deux aires dont il s'agit : 1° sur les surfaces des sphères qui ont cette origine pour centre et pour rayons les rayons vecteurs r et r; 2° sur la surface de la sphère qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Puisque les rayons vecteurs r et r, qui aboutissent aux points D et C, forment, en ces mêmes points, des angles égaux à δ avec les normales menées à la surface des ondes ou à la surface caractéristique, les projections des aires

$$2\pi krs, \quad 2\pi \mathrm{krs},$$

sur les surfaces sphériques dont les rayons sont r et r, se réduiront évidemment aux deux produits

$$2\pi krs\cos\delta, \quad 2\pi \mathrm{krs}\cos\delta. \tag{42}$$

Ajoutons qu'il suffira de diviser ces produits par les carrés de r et de r, pour obtenir les projections des mêmes aires sur la surface sphérique dont le rayon est l'unité. Ces dernières projections seront donc

$$2\pi k\frac{s}{r}\cos\delta, \quad 2\pi \mathrm{k}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{r}}\cos\delta; \tag{43}$$

et, eu égard à la formule (39), la seconde pourra être réduite à

$$2\pi \mathrm{k}\frac{s}{r}\cos\delta; \tag{44}$$

en sorte que, pour l'obtenir, il suffira de remplacer dans la première le facteur k par le facteur k. On peut remarquer d'ailleurs que chacun des facteurs

$$k, \quad \mathrm{k}$$

représente précisément ce que deviendrait le rayon de moyenne courbure de la surface des ondes ou de la surface caractéristique, correspondant au point D ou C, si, les dimensions de ces surfaces venant à décroître, le point D ou C se rapprochait de l'origine des coordonnées, en restant toujours situé sur la même droite OD ou OC, de manière que la distance OD ou OC se trouvât réduite à l'unité.

144.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène.*

C. R., t. XIII, p. 487 (6 septembre 1841).

DEUXIÈME PARTIE. — DÉTERMINATION DE LA FONCTION PRINCIPALE CORRESPONDANTE A UNE ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE HOMOGÈNE.

§ III. — *Propagation des ondes dont l'épaisseur est très petite.*

Concevons toujours que, x, y, z étant trois coordonnées rectangulaires, la fonction principale ϖ doive vérifier, quel que soit le temps t, l'équation caractéristique homogène

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \mathrm{D}_t)\varpi = 0, \tag{1}$$

et, pour $t = 0$, les formules

$$\varpi = 0, \quad \mathrm{D}_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{D}_t^{n-2}\varpi = 0, \quad \mathrm{D}_t^{n-1}\varpi = \mathrm{H}(r), \tag{2}$$

dans lesquelles n désigne le degré de la fonction entière $F(x, y, z, t)$, et

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3}$$

la distance du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées. Si d'ailleurs on suppose que, dans la fonction $F(x, y, z, t)$, le coefficient de t^n se réduise à l'unité, et si l'on considère, ce qui est permis, $\Pi(s)$ comme une fonction paire de s, propre à vérifier la condition

$$\Pi(s) = \Pi(-s),$$

on trouvera

$$\varpi = \frac{D_t^{3-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{E} \frac{\omega^{n-2} s \Pi(s)}{(F(u, v, w, \omega))_\omega} \sin p \, dq \, dp \tag{4}$$

et, par suite,

$$D_t^{n-2} \varpi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{E} \frac{\omega^{n-2} s \Pi(s)}{(F(u, v, w, \omega))_\omega} \sin p \, dq \, dp, \tag{5}$$

les valeurs de

$$u, \quad v, \quad w, \quad \omega, \quad s$$

étant déterminées par le système des formules

$$u = \cos p, \qquad v = \sin p \cos q, \qquad w = \sin p \sin q, \tag{6}$$

$$F(u, v, w, \omega) = 0, \tag{7}$$

$$s = ux + vy + wz + \omega t, \tag{8}$$

dont la dernière peut être remplacée par les deux suivantes :

$$s = \varsigma + \omega t, \tag{9}$$

$$\varsigma = ux + vy + wz. \tag{10}$$

Il est bon d'observer que l'intégrale double, comprise dans le second membre de la formule (5), se compose de divers termes relatifs aux diverses racines de l'équation (7), et par conséquent aux diverses nappes de la surface caractéristique représentée par l'équation

$$F(x, y, z, t) = 0. \tag{11}$$

A ces diverses nappes correspondent aussi diverses nappes de la surface des ondes dont l'équation

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0 \tag{12}$$

est produite par l'élimination de

$$u, \quad v, \quad w, \quad \omega$$

entre la formule (7) et les suivantes :

$$ux + vy + wz + \omega t = 0, \tag{13}$$

$$\frac{x}{D_u \omega} = \frac{y}{D_v \omega} = \frac{z}{D_w \omega} = -t. \tag{14}$$

D'ailleurs l'équation (13) est celle d'un plan qui touche la surface des ondes en un point où la direction de la normale est déterminée par les angles polaires p, q.

Lorsque l'équation (7), comme nous le supposerons ici, a toutes ses racines réelles, il est facile de voir ce que représente l'intégrale double comprise dans le second membre de la formule (5). En effet, concevons que l'origine O des coordonnées devienne le centre d'une sphère dont le rayon soit l'unité. Les angles p, q étant censés représenter des coordonnées polaires liées à x, y, z par les formules connues

$$x = r \cos p, \qquad y = r \sin p \cos q, \qquad z = r \sin p \sin q,$$

à chaque point I de la surface de la sphère correspondront des valeurs déterminées de p, q; et le produit

$$\sin p \, dp \, dq$$

pourra être censé représenter un élément infiniment petit de la surface sphérique, dans lequel le point I soit renfermé. Nommons θ cet élément, et Θ la partie du résidu intégral

$$\mathcal{E} \frac{\omega^{n-2} s \Pi(s)}{(F(u, v, w, \omega))_\omega}$$

qui correspond, non seulement aux coordonnées polaires p, q du point I,

mais encore à une racine déterminée de l'équation (7). On aura

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{L}\frac{\omega^{n-2}s\,\Pi(s)}{[F(u,v,w,\omega)]_\omega}\sin p\,dq\,dp = \Sigma\Theta\vartheta,$$

la valeur de Θ étant généralement

$$\Theta = \frac{\omega^{n-2}}{D_\omega F(u,v,w,\omega)}s\,\Pi(s),$$

et, par suite,

$$D_t^{n-2}\varpi = \frac{1}{4\pi}\Sigma\Theta\vartheta, \tag{15}$$

la sommation que le signe Σ indique s'étendant, non seulement aux diverses valeurs de ϑ, mais encore aux diverses valeurs positives ou négatives de ω considéré comme racine de l'équation (7), c'est-à-dire aux diverses nappes de la surface des ondes, et la valeur de s étant toujours donnée par la formule (8). D'ailleurs, la valeur de $D_t^{n-2}\varpi$, déterminée, soit par la formule (5), soit par la formule (15), variera ainsi que s, non seulement avec le temps t, mais aussi avec la position du point A dont les coordonnées rectangulaires sont représentées par x, y, z.

Parmi les divers éléments

$$\vartheta,\quad \vartheta',\quad \vartheta'',\quad \ldots$$

de la surface sphérique, il importe de rechercher ceux qui répondent à une même valeur de s. Or, lorsque, dans l'équation (8), on considère s comme constante, et x, y, z comme variables, cette équation représente un plan perpendiculaire au rayon vecteur OI dont la direction est déterminée par les angles polaires p, q. Si ces angles viennent à varier, la valeur de s demeurant constante, ce plan changera de position dans l'espace, de manière à toucher constamment une certaine surface LMN. Soit

$$\mathcal{F}(x,y,z,t,s) = 0 \tag{16}$$

l'équation de cette surface. Si l'on pose $s = 0$, la formule (16) se réduira simplement à l'équation (12) qui représente la surface des

ondes, et les deux surfaces représentées par les deux équations

$$\mathcal{F}(x,y,z,t,-s) = 0, \qquad \mathcal{F}(x,y,z,t,s) = 0 \tag{17}$$

seront précisément les enveloppes intérieure et extérieure de l'espace traversé par une sphère mobile dont le rayon serait représenté par la valeur numérique de s, et dont le centre se promènerait sur la surface des ondes. Ajoutons que l'équation (8), quand on y considérera x, y, z comme variables, sera précisément celle d'un plan perpendiculaire au rayon vecteur OI et tangent à la surface LMN représentée par l'équation (16). Soit T le point de contact de cette surface et du plan dont il s'agit. La parallèle menée par le point T au rayon OI sera normale, non seulement à la surface LMN, mais aussi à la surface des ondes qu'elle rencontrera en un certain point D; et la distance TD sera précisément la valeur numérique de s. Cela posé, pour obtenir, au bout du temps t, les diverses positions du point T correspondantes à des valeurs données de

$$x,\quad y,\quad z \quad \text{et} \quad s,$$

il faudra évidemment circonscrire à la surface LMN un cône qui ait pour sommet le point donné A dont les coordonnées sont x, y, z. Le point T pourra être l'un quelconque de ceux qui appartiendront à la courbe de contact

$$TT'T''\ldots$$

de la surface LMN avec la surface conique circonscrite. Si d'ailleurs on mène : 1° par les divers points

$$T,\quad T',\quad T'',\quad \ldots$$

des normales à la surface LMN; 2° par l'origine des coordonnées, des rayons vecteurs

$$OI,\quad OI',\quad OI'',\quad \ldots$$

parallèles à ces normales, les points

$$I,\quad I',\quad I'',\quad \ldots,$$

situés sur ces rayons vecteurs à l'unité de distance de l'origine, indi-

queront, sur la surface sphérique qui a pour rayon l'unité, les éléments

$$\theta,\quad \theta',\quad \theta'',\quad \ldots$$

correspondants à la valeur donnée de s.

Lorsque la fonction $F(x, y, z, t)$, comme il arrive d'ordinaire dans les problèmes de Mécanique, et comme nous le supposerons dans ce qui va suivre, est une fonction paire de t, c'est-à-dire une fonction entière de t^2, l'équation (7), résolue par rapport à ω, fournit des racines deux à deux égales, au signe près, mais affectées de signes contraires. Alors la surface des ondes et la surface caractéristique ont pour centre commun l'origine des coordonnées. Alors aussi Θ reprend la même valeur sans changer de signe, quand on remplace

$$u,\quad v,\quad w,\quad \omega$$

par

$$-u,\quad -v,\quad -w,\quad -\omega;$$

et en conséquence la somme $\Sigma\Theta\theta$, que renferme la valeur de $D_t^{n-2}\varpi$, se compose d'éléments qui, pris deux à deux, sont égaux et affectés du même signe. Donc alors on pourra se borner à calculer ceux de ces éléments qui correspondront à des valeurs positives du trinôme

$$ux + vy + wz,$$

c'est-à-dire à des valeurs de u, v, w propres à vérifier la condition

$$ux + vy + wz > 0, \tag{18}$$

sauf à doubler ensuite la somme obtenue; et, si l'on nomme $\mathfrak{P}$ la partie de ϖ relative à une racine déterminée de l'équation (7), on pourra supposer

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}\Sigma\Theta\theta, \tag{19}$$

pourvu que la sommation indiquée par le signe Σ cesse d'embrasser diverses valeurs de ω, et s'étende, non plus à tous les éléments θ, θ', θ'', ... de la surface sphérique, mais seulement à ceux qui correspondront à des valeurs de p et de q pour lesquelles la condition (18) se trouvera vérifiée.

Supposons maintenant que la valeur initiale de $D_t^{n-2}\varpi$ soit seulement sensible dans l'intérieur d'une sphère très petite dont le rayon soit ε, le centre de cette sphère étant l'origine des coordonnées. En d'autres termes, supposons que la fonction paire de s, représentée par $\Pi(s)$, s'évanouisse hors des limites

$$s = -\varepsilon,\qquad s = \varepsilon,$$

ε désignant un nombre très petit. Alors, dans la somme

$$\Sigma\Theta\theta,$$

que renferme l'équation (19), on pourra tenir seulement compte de ceux des éléments θ, θ', θ'', ... qui répondront à des valeurs de s renfermées entre les limites très resserrées

$$s = -\varepsilon,\qquad s = \varepsilon;$$

et cette circonstance permettra, en général, de calculer aisément cette somme, comme nous allons le faire voir.

Si dans l'équation (16) on pose successivement

$$s = -\varepsilon,\qquad s = \varepsilon,$$

on obtiendra les deux équations

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t, -\varepsilon) = 0,\qquad \mathfrak{F}(x, y, z, t, \varepsilon) = 0, \tag{20}$$

qui seront semblables aux formules (17), et qui représenteront les enveloppes intérieure et extérieure d'une certaine onde dont l'épaisseur sera 2ε. Cette onde sera précisément celle qu'engendre une surface sphérique dont le centre se promène sur la surface des ondes, et dont le rayon est l'unité. Cela posé, il est clair que, dans l'hypothèse admise, on pourra tenir seulement compte de ceux des éléments θ pour lesquels le point, ci-dessus désigné par la lettre T, se trouvera renfermé dans l'épaisseur de l'onde. Pour plus de simplicité, nous commencerons par supposer que le plan tangent, mené à une nappe quelconque

de la surface des ondes par un point quelconque de cette surface, ne la traverse pas. Alors, dans le calcul de la somme $\Sigma\Theta\emptyset$, que renferme l'équation (19), et qui se rapporte à une nappe déterminée de la surface des ondes, on pourra distinguer trois cas différents, suivant que le point A, dont les coordonnées sont représentées par x, y, z, se trouvera lui-même renfermé dans l'épaisseur de l'onde, ou compris dans son enveloppe intérieure, ou situé hors de son enveloppe extérieure.

Or, si l'on suppose d'abord le point A compris dans l'enveloppe intérieure de l'onde dont l'épaisseur est 2ε, ce point ne pourra devenir le sommet d'un cône circonscrit à la surface LMN, pour des valeurs de s comprises entre les limites $-\varepsilon, \varepsilon$. Donc alors tous les éléments de la somme $\Sigma\Theta\emptyset$ s'évanouiront, et l'on pourra en dire autant de la somme elle-même.

Supposons en second lieu que le point A se trouve renfermé dans l'épaisseur de l'onde comprise entre les surfaces que représentent les formules (20), c'est-à-dire entre les deux enveloppes de l'onde, ou même situé hors de l'enveloppe extérieure, mais très rapproché de cette enveloppe. Soit d'ailleurs ρ la distance du point A à la surface des ondes représentée par la formule (12). La courbe de contact

$$TT'T''\ldots$$

de la surface LMN, représentée par l'équation (16), avec le cône qui, ayant pour sommet le point A, sera circonscrit à cette surface, conservera de très petites dimensions, pour toutes les valeurs de s comprises entre les limites $-\varepsilon, \varepsilon, \ldots$; et cette courbe, qui se réduira simplement au point A si l'on prend

$$s = \rho,$$

acquerra généralement la plus grande étendue possible quand on posera

$$s = -\varepsilon.$$

Désignons maintenant par $\mathfrak{K}$ l'aire comprise sur la surface LMN dans l'intérieur de la courbe

$$TT'T''\ldots,$$

et par K l'aire mesurée dans l'intérieur de la courbe correspondante

$$II'I''\ldots$$

sur la surface de la sphère qui a pour rayon l'unité, en sorte que I, I', I'', ... représentent, sur la surface sphérique, les extrémités de rayons vecteurs OI, OI', OI'', ..., respectivement parallèles aux normales menées par les points T, T', T'', ... à la surface LMN. En vertu des principes établis dans les précédentes séances, on aura sensiblement

$$K = 2\pi k \frac{\rho - s}{r} \cos\delta, \tag{21}$$

pourvu que, en attribuant aux angles polaires p, q les valeurs qui déterminent la direction de la normale menée à la surface des ondes par le point D où cette surface coupe le rayon vecteur OA, on nomme k le rayon de moyenne courbure de la surface caractéristique à l'extrémité d'un rayon vecteur parallèle à cette normale et réduit à l'unité. Quant à la lettre δ, elle représentera simplement, dans la formule (21), l'angle aigu formé au point D par la normale à la surface des ondes avec le rayon vecteur OA, de sorte que, en supposant remplie la condition (18), on aura

$$\cos\delta = \frac{ux + vy + wz}{r}. \tag{22}$$

D'autre part, si, en supposant la valeur de $\mathfrak{P}$ déterminée par la formule (19), on nomme P la somme de ceux des éléments de $\mathfrak{P}$ qui répondent à des valeurs des angles p, q propres à représenter les coordonnées polaires de points situés dans l'intérieur de la courbe $II'I''\ldots$ sur la sphère dont le rayon est l'unité, la valeur de P sera évidemment déterminée, non plus par la formule (19), mais par la suivante

$$D_s P = \frac{1}{4\pi}\Theta D_s K,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (21),

$$D_s P = -\frac{k}{2r}\Theta\cos\delta; \tag{23}$$

et comme P devra s'évanouir avec K, pour $s = \rho$, on tirera de la formule (23)

$$P = -\int_{\rho}^{r} \frac{k}{2r}\Theta \cos\delta\, ds.$$

Pour déduire de cette dernière équation la valeur de P, il suffira d'y poser $s = -\varepsilon$. On aura donc

$$\mathfrak{P} = \int_{-\varepsilon}^{\rho} \frac{k}{2r}\Theta \cos\delta\, ds; \tag{24}$$

puis, en remettant pour Θ sa valeur, et faisant passer hors du signe $\int$ tous les facteurs distincts de s et de $\Pi(s)$, c'est-à-dire tous les facteurs qui resteront sensiblement constants entre les limites $s = -\varepsilon$, $s = \rho$, on trouvera définitivement

$$\mathfrak{P} = \frac{\omega^{n-2}}{D_\omega F(u, v, w, \omega)} \frac{k}{2r} \cos\delta \int_{-\varepsilon}^{\rho} s\,\Pi(s)\, ds. \tag{25}$$

Il est important d'observer que, dans la formule (25), la quantité ρ, ou la distance du point A à la surface des ondes, est précisément ce que devient la valeur de s donnée par l'équation (8) ou (9), quand on prend pour x, y, z les coordonnées du point A. Ajoutons que si l'on considère les quantités ρ et s comme infiniment petites du premier ordre, la valeur de $\mathfrak{P}$, donnée par la formule (25), sera généralement du même ordre que le produit de $\Pi(s)$ par l'intégrale

$$\int_{-\varepsilon}^{\rho} s\, ds = \frac{1}{2}(\rho^2 - \varepsilon^2),$$

qui est elle-même une quantité infiniment petite du second ordre.

Lorsque le point A est situé au bout de temps t sur l'enveloppe extérieure de l'onde dont l'épaisseur est 2ε, ou en dehors de cette enveloppe, on a

$$\rho = \varepsilon \quad \text{ou} \quad \rho > \varepsilon;$$

et, dans l'un ou l'autre cas, l'intégrale que renferme la formule (25) se réduit à

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s\,\Pi(s)\, ds,$$

c'est-à-dire à zéro, attendu que $\Pi(s)$ est une fonction paire de s. Donc, lorsque le point A, étant très voisin de la surface des ondes, reste extérieur à l'onde dont l'épaisseur est 2ε, la quantité $\mathfrak{P}$, ou plutôt sa valeur approchée, s'évanouit; c'est-à-dire que $\mathfrak{P}$ acquiert alors, ou une valeur réelle ou une valeur nulle, ou du moins une valeur infiniment petite d'un ordre supérieur à celle qu'il acquerrait dans le cas contraire. Au reste, on peut arriver directement à la même conclusion, non seulement pour un point très voisin de l'enveloppe extérieure de l'onde, mais encore pour tout point qui ne se trouve pas compris dans l'épaisseur de cette onde, en substituant, dans le second membre de la formule (5), s considéré comme variable à la variable p, et déterminant alors la valeur approchée de $\mathfrak{P}$ à l'aide des principes exposés dans les divers paragraphes de ce Mémoire. Il y a plus, la conclusion dont il s'agit se trouve alors établie, quelle que soit la forme de la surface des ondes, et dans le cas même où les plans tangents, menés en certains points à cette surface, la traverseraient. Donc il ne sera jamais nécessaire de calculer la valeur de $\mathfrak{P}$ que dans le cas où le point A sera l'un des points appartenant à l'onde dont nous avons parlé. Si d'ailleurs le plan tangent à la surface des ondes ne la traverse pas dans le voisinage du point A, la valeur de $\mathfrak{P}$ sera déterminée par la formule (25), dans laquelle on pourra successivement attribuer à ω les diverses valeurs positives et négatives qui représentent les diverses racines de l'équation (7), attendu que le second membre de l'équation (25) se réduit de lui-même à zéro toutes les fois que la valeur de $\mathfrak{P}$ doit s'évanouir. Donc, en réunissant les diverses valeurs de $\mathfrak{P}$ correspondantes aux diverses valeurs de ω et doublant la somme obtenue, on aura, sous la condition que nous venons d'indiquer,

$$D_t^{n-2}\varpi = \mathfrak{S}\frac{\omega^{n-2}}{[F(u, v, w, \omega)]_\omega} \frac{k\cos\delta}{r} \int_{-\varepsilon}^{\rho} s\,\Pi(s)\, ds. \tag{26}$$

Pour ne pas trop allonger cet article, nous renverrons à d'autres *Comptes rendus* les conséquences nombreuses et importantes qui se déduisent de la formule (26), et l'examen des modifications que cette

formule doit subir quand le plan tangent à la surface des ondes traverse cette surface dans le voisinage du point A dont les coordonnées sont représentées par x, y, z.

145.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur l'intégration des équations homogènes en termes finis.*

C. R., t. XIII, p. 564 (13 septembre 1841).

Étant donnée une équation caractéristique homogène et du degré n, dans laquelle les variables principales sont trois coordonnées rectangulaires x, y, z et le temps t, on peut exprimer en termes finis, sinon la fonction principale, au moins sa dérivée de l'ordre $n-1$, prise par rapport au temps, dans le cas particulier où la valeur initiale de cette dérivée dépend d'une fonction linéaire des coordonnées, c'est-à-dire de la distance à un point fixe. C'est même cette circonstance qui, en réduisant le calcul des phénomènes à la discussion d'une intégrale en termes finis, permet d'établir très facilement les lois de la propagation des mouvements simples d'un système de molécules, ou, en d'autres termes, les lois des mouvements à ondes planes. Les calculs semblent au premier abord devoir être beaucoup plus difficiles dans le cas général où la dérivée, de l'ordre $n-1$, de la fonction principale a pour valeur initiale une fonction quelconque des coordonnées. Toutefois on peut, comme nous l'avons expliqué, ramener le cas général au cas particulier où la valeur initiale dont il s'agit dépend de la distance à un point fixe, et s'évanouit dès que cette distance cesse d'être très petite. De plus, on pourra, dans ce dernier cas, à l'aide des principes établis dans le précédent Mémoire, réduire la dérivée de l'ordre $n-2$ de la fonction principale à une intégrale simple. Il est aisé d'en conclure que la dérivée de l'ordre $n-1$ pourra être alors exprimée en termes finis.

C'est ce que je me propose maintenant de faire voir. Je montrerai dans un autre Article que cette circonstance permet d'établir très facilement les lois de propagation des ondes d'épaisseur constante.

ANALYSE.

§ I^er^. — *Considérations générales.*

Prenons pour variables indépendantes le temps t et les trois coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point mobile dont la distance à l'origine sera

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nommons

$$F(x, y, z, t)$$

une fonction de ces variables, entière, homogène, du degré n, et dans laquelle le coefficient de t^n se réduise à l'unité. Enfin supposons la fonction principale ϖ assujettie à la double condition de vérifier, quel que soit t, l'équation aux différences partielles

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varpi = 0, \tag{1}$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \varpi(x, y, z). \tag{2}$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\varkappa = D_t^{n-1}\varpi, \tag{3}$$

l'inconnue $\varkappa$ vérifiera elle-même l'équation caractéristique

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varkappa = 0. \tag{4}$$

Elle sera donc une intégrale de cette équation; et elle en sera même une intégrale en termes finis dans deux cas dignes de remarque, et que nous allons successivement considérer.

Soient p, q les angles polaires formés : 1° par le rayon vecteur r avec l'axe des x; 2° par le plan qui renferme ce rayon et cet axe avec

le plan des x, y; en sorte que p, q, r représentent les coordonnées polaires liées aux coordonnées rectangulaires x, y, z par les équations connues

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p\cos q, \qquad z = r\sin p\sin q.$$

Si l'on nomme u, v, w les cosinus des angles formés par le rayon vecteur r avec les demi-axes des coordonnées positives, on aura

$$u = \cos p, \qquad v = \sin p\cos q, \qquad w = \sin p\sin q, \tag{5}$$

et l'équation du plan mené perpendiculairement à ce rayon vecteur par l'origine des coordonnées sera

$$ux + vy + wz = 0.$$

Ajoutons que, si un point (x, y, z) est situé hors de ce plan, sa distance au plan sera la valeur numérique de la quantité ς déterminée par la formule

$$\varsigma = ux + vy + wz. \tag{6}$$

Cela posé, concevons d'abord que la valeur initiale de s, représentée généralement par $\varpi(x, y, z)$, se réduise à une fonction de ς, en sorte qu'on ait, pour $t = 0$,

$$s = \Pi(\varsigma).$$

En vertu de la formule (20) de la page 250 (¹), la valeur générale de s sera

$$s = \sum \frac{\omega^{n-1}}{[\mathrm{F}(u, v, w, \omega)]_\omega}\,\Pi(\varsigma + \omega t), \tag{7}$$

ou, ce qui revient au même,

$$s = \sum \frac{\omega^{n-1}}{[\mathrm{F}(u, v, w, \omega)]_\omega}\,\Pi(s), \tag{8}$$

la valeur de s étant

$$s = \varsigma + \omega t, \tag{9}$$

et le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines de l'équation

$$\mathrm{F}(u, v, w, \omega) = 0. \tag{10}$$

Concevons à présent que la valeur initiale de s se réduise à une fonction de la distance r qui représente le rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z); en sorte qu'on ait, pour $t = 0$,

$$s = \Pi(r).$$

Alors, en supposant toujours les valeurs de ω et de s déterminées par le moyen des équations (9) et (10), jointes aux formules (5) et (6), on aura, en vertu de la formule (4) de la page 299,

$$s = \frac{\mathrm{D}_t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sum \frac{\omega^{n-2}s\,\Pi(s)}{[\mathrm{F}(u, v, w, \omega)]_\omega}\sin p\,dq\,dp, \tag{11}$$

$\Pi(s)$ devant être considéré comme une fonction paire de s. Donc, en posant, pour abréger,

$$s\,\Pi(s) = \mathrm{f}(s),$$

et ayant égard à la formule (9), de laquelle on tire

$$ds = \omega\,dt,$$

par conséquent

$$\mathrm{D}_t\mathrm{f}(s) = \omega\,\mathrm{f}'(s),$$

on trouvera

$$s = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sum \frac{\omega^{n-1}\,\mathrm{f}'(s)}{[\mathrm{F}(u, v, w, \omega)]_\omega}\sin p\,dq\,dp. \tag{12}$$

Si maintenant on suppose, d'une part, que $\mathrm{F}(x, y, z, t)$ soit une fonction paire de t, d'autre part, que $\Pi(s)$, et par suite $\mathrm{f}(s)$, s'évanouissent hors des limites

$$s = -\varepsilon, \qquad s = \varepsilon, \tag{13}$$

ε désignant un nombre très petit; alors, en appliquant à l'équation (12) les principes de réduction développés dans le précédent Mémoire, on verra la valeur de s se réduire à celle que donne la formule

$$s = \sum \frac{\omega^{n-1}}{[\mathrm{F}(u, v, w, \omega)]_\omega}\,\frac{\mathrm{k}\cos\delta}{r}\int_{-\varepsilon}^{\varsigma+\omega t} \mathrm{f}'(s)\,ds. \tag{14}$$

Dans cette dernière formule, après l'extraction des résidus, on doit

prendre pour valeurs de u, v, w des fonctions déterminées de x, y, z, savoir, celles qui représentent les cosinus des angles formés par les demi-axes des coordonnées positives avec la normale menée à la surface des ondes par le point D où cette normale coupe le rayon vecteur r. Si l'on représente par

$$s = 0 \tag{15}$$

la surface des ondes, s étant fonction de x, y, z, t, les valeurs de u, v, w seront précisément celles que l'on déduira des formules

$$\frac{u}{D_x s} = \frac{v}{D_y s} = \frac{w}{D_z s}, \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1, \tag{16}$$

jointes à l'équation (15), à l'aide de laquelle on peut toujours éliminer t. Ajoutons que les signes de u, v, w devront être choisis de manière à vérifier la condition

$$ux + vy + wz > 0. \tag{17}$$

Quant aux quantités δ et k, elles représenteront, d'une part l'angle formé par le rayon vecteur r avec la normale menée par le point D à la surface des ondes, et d'autre part ce que devient le rayon de moyenne courbure de la surface caractéristique, pour le point C de cette dernière surface qui correspond au point D de la surface des ondes, dans le cas particulier où le rayon vecteur OC se réduit à l'unité. Il est aisé d'en conclure : 1° que l'on aura

$$\cos\delta = \frac{ux + vy + wz}{r} = \frac{\varsigma}{r}; \tag{18}$$

2° que, si l'on pose, pour abréger,

$$F(u, v, w, \omega) = \Lambda,$$

k sera le produit des deux axes de l'ellipse représentée par le système des deux équations

$$\begin{cases} x^2 D_u^2 \Lambda + y^2 D_v^2 \Lambda + z^2 D_w^2 \Lambda + 2yz D_v D_w \Lambda + 2zx D_w D_u \Lambda + 2xy D_u D_v \Lambda \\ \quad = \pm [(D_u \Lambda)^2 + (D_v \Lambda)^2 + (D_w \Lambda)^2]^{\frac{1}{2}}, \\ x D_u \Lambda + y D_v \Lambda + z D_w \Lambda = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Il est généralement facile d'obtenir en termes finis la valeur de la seule intégrale que renferme la formule (14). En effet, on a généralement

$$\int_{-\varepsilon}^{\varsigma+\omega t} f'(s)\, ds = f(\varsigma + \omega t) - f(-\varepsilon).$$

D'ailleurs, lorsque la fonction $f(s)$, qui s'évanouit hors des limites

$$s = -\varepsilon, \qquad s = \varepsilon,$$

reste continue dans le voisinage de la valeur particulière $s = -\varepsilon$, on a certainement

$$f(-\varepsilon) = 0,$$

et, par suite,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varsigma+\omega t} f'(s)\, ds = f(\varsigma + \omega t) = (\varsigma + \omega t)\, \Pi(\varsigma + \omega t),$$

ce qui réduit la formule (14) à

$$\varkappa = \int \frac{\omega^{n-1}}{[F(u, v, w, \omega)]_\omega} \frac{k \cos\delta}{r} s\, \Pi(s), \tag{20}$$

la valeur de s étant donnée par l'équation (9), ou, ce qui revient au même, par la suivante :

$$s = ux + vy + wz + \omega t. \tag{21}$$

Il semble, au premier abord, que l'on pourrait conserver des doutes sur l'exactitude de la formule (20), dans le cas où la fonction $\Pi(s)$, passant brusquement d'une valeur différente de zéro à une valeur nulle, offrirait une solution de continuité pour $s = -\varepsilon$, ce qui nous obligerait à regarder les valeurs $\Pi(-\varepsilon)$ et $f(-\varepsilon)$ de $\Pi(s)$ et de $f(s)$ comme indéterminées. Mais on peut lever ces doutes en considérant une fonction qui passe brusquement d'une valeur différente de zéro à une valeur nulle comme la limite d'une fonction dont la valeur numérique décroît très rapidement; ou, mieux encore, en appliquant directement à la détermination de $\varkappa$, dans le cas dont il s'agit, les principes exposés dans le précédent Mémoire. En effet, posons alors, pour

abréger,

$$\Theta = \frac{\omega^{n-1}}{D_\omega F(u, v, w, \omega)} s\Pi(s),$$

et nommons δ un élément de la surface sphérique qui a l'origine pour centre et pour rayon l'unité. Dans l'intégrale double

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{L}\frac{\omega^{n-2} s\Pi(s)}{[F(u, v, w, \omega)]_\omega} \sin p\, dq\, dp, \tag{22}$$

que renferme la formule (11), la partie $\mathfrak{P}$, correspondante à une racine déterminée de l'équation (10) et à des valeurs de u, v, w assujetties à vérifier la condition (17), sera, comme nous l'avons remarqué dans le précédent Mémoire,

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}\Sigma\Theta\delta. \tag{23}$$

D'ailleurs la valeur de $\mathfrak{P}$, déterminée par l'équation (23), s'évanouira généralement quand le point (x, y, z) ne sera pas très voisin de la nappe qui, dans la surface des ondes, correspond à la racine que l'on considère. Au contraire, $\mathfrak{P}$ cessera de s'évanouir si le point (x, y, z) est compris dans l'épaisseur de l'onde engendrée par une sphère dont le rayon serait ε, et dont le centre se promènerait sur la nappe dont il s'agit. Alors aussi, dans le second membre de la formule (23), la sommation indiquée par le signe Σ pourra être restreinte aux seuls éléments δ, δ', δ'', ... de l'aire

$$K = 2\pi k\frac{\varsigma + \omega t - s}{r}\cos\delta,$$

mesurée sur la surface sphérique qui a pour rayon l'unité, dans l'intérieur d'une certaine courbe II'I''... dont les dimensions seront très petites; et Θ pourra être censé dépendre de la seule variable s. Soit d'ailleurs E la valeur, différente de zéro, acquise par la fonction

$$f(s) = s\Pi(s)$$

au moment où la variable s s'approche de la limite $-\varepsilon$ qui rend cette fonction discontinue. Si le temps t vient à varier, et à recevoir un accroissement infiniment petit Δt, la valeur de $\mathfrak{P}$, déterminée par l'équation (23), variera pour deux raisons, savoir : 1° parce que le coefficient Θ, variable avec s, recevra, pour une valeur de s donnée par la formule (21), l'accroissement infiniment petit

$$D_s\Theta.\Delta s = D_s\Theta.\omega\Delta t;$$

2° parce que la plus grande des valeurs de K, c'est-à-dire la valeur de K correspondante à $s = -\varepsilon$, et représentée par le produit

$$2\pi k\frac{\varsigma + \omega t + \varepsilon}{r}\cos\delta,$$

perdra quelques éléments

$$\delta,\quad \delta',\quad \delta'',\quad \ldots$$

dont la somme sera la valeur numérique du produit

$$2\pi k\frac{\omega}{r}\cos\delta.\Delta t.$$

On trouvera en conséquence

$$D_t\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}\sum\omega\delta D_s\Theta + \frac{1}{2}\omega\Theta\frac{K}{r}\cos\delta, \tag{24}$$

s devant être réduit à $-\varepsilon$, et $f(s)$ à E, dans la valeur de Θ qui deviendra ainsi

$$\frac{\omega^{n-1}}{D_\omega F(u, v, w, \omega)} E.$$

Comme d'autre part les principes exposés dans le précédent Mémoire réduisent la quantité

$$\frac{1}{4\pi}\sum\omega\delta D_s\Theta$$

au produit

$$\frac{1}{2}\frac{\omega^{n-1}}{D_\omega F(u, v, w, \omega)}\frac{K\cos\delta}{r}\int_{-\varepsilon}^{\varsigma+\omega t} f'(s)\, ds,$$

dans lequel on devra supposer

$$\int_{-\varepsilon}^{\varsigma+\omega t} f'(s)\, ds = f(\varsigma + \omega t) - E.$$

la formule (24) donnera définitivement

$$D_t \mathfrak{P} = \frac{1}{2} \frac{\omega^{n-1}}{D_\omega F(u, v, w, \omega)} \frac{K \cos\delta}{r} f(\varsigma + \omega t). \tag{25}$$

Pour déduire de cette formule la valeur de z, il suffira de réunir les diverses valeurs de $D_t \mathfrak{P}$ correspondantes aux diverses valeurs de ω et de doubler ensuite la somme obtenue. Or, en opérant ainsi et ayant égard à la formule

$$f(s) = s\,\Pi(s),$$

on retrouvera précisément l'équation (20).

En résumant ce qui a été dit dans ce paragraphe, on obtient les conclusions suivantes.

Soient ϖ la fonction principale qui vérifie l'équation (1), et z la dérivée de l'ordre $n-1$ de cette fonction principale. Si la valeur initiale de z dépend seulement d'une fonction linéaire ς des coordonnées x, y, z, c'est-à-dire de la distance du point (x, y, z) à un plan fixe, la valeur générale de z s'exprimera en termes finis à l'aide de l'équation (8). De plus, si la valeur de z dépend seulement du rayon vecteur r, c'est-à-dire de la distance du point (x, y, z) à un centre fixe, la valeur générale de z s'exprimera en termes finis à l'aide de la formule (20), avec une approximation d'autant plus grande que la sphère, en dehors de laquelle la valeur initiale de z s'évanouit, sera plus petite. Dans tous les cas, la valeur générale de z vérifiera l'équation caractéristique, et par conséquent la formule (8) ou (20) offrira une intégrale de cette équation en termes finis.

Si l'on voulait obtenir la valeur générale, non plus de la fonction

$$z = D_t^{n-1} \varpi,$$

mais de

$$\square \varpi,$$

$\square$ désignant une fonction entière quelconque des lettres caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t;$$

alors, à la place des équations (8) et (11), on obtiendrait les suivantes

$$\square \varpi = \square D_t^{1-n} \int \frac{\omega^{n-1}}{(F(u, v, w, \omega))_\omega} \Pi(s), \tag{26}$$

$$\square \varpi = \frac{1}{4\pi} \square D_t^{2-n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int \frac{\omega^{n-2} s\,\Pi(s)}{(F(u, v, w, \omega))_\omega} \sin p\, dq\, dp, \tag{27}$$

dont la première pourra être généralement réduite à la formule

$$\square \varpi = \int \frac{\omega^{n-1}}{(F(u, v, w, \omega))_\omega} \square D_t^{1-n} \Pi(s). \tag{28}$$

Il y a plus : la formule (27) pourra elle-même, dans beaucoup de cas, être réduite, sans erreur sensible, à la suivante :

$$\square \varpi = \frac{D_t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int \frac{\omega^{n-2} \sin p}{(F(u, v, w, \omega))_\omega} \square D_t^{1-n} s\,\Pi(s)\, dq\, dp. \tag{29}$$

Si l'on applique au second membre de celle-ci la méthode de réduction ci-dessus appliquée au second membre de la formule (11), on parviendra, non plus à l'équation (20), mais à la suivante :

$$\square \varpi = \int \frac{\omega^{n-1}}{(F(u, v, w, \omega))_\omega} \frac{k \cos\delta}{r} \square D_t^{1-n} s\,\Pi(s). \tag{30}$$

Dans ces diverses formules, la valeur de s est toujours celle que fournit l'équation (21).

La formule (30), comparée à la formule (28), fournit le moyen de reconnaître les rapports qui existent entre les lois de propagation et de polarisation relatives, d'une part aux ondes planes, d'autre part aux ondes courbes dont l'épaisseur est infiniment petite. C'est, au reste, ce que nous expliquerons plus en détail dans un autre Article.

§ II. — *Extension des formules établies dans le premier paragraphe.*

La formule (11) du paragraphe précédent se rapporte au cas où la valeur initiale de z est représentée par une fonction paire du rayon

vecteur r, ou, ce qui revient au même, par une fonction de

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Pour plus de généralité, on pourrait supposer que la valeur initiale de s est de la forme

$$s = \Pi(\iota),$$

la lettre Π indiquant toujours une fonction paire, et la lettre ι désignant la racine carrée positive d'une fonction de x, y, z, entière et homogène, mais du second degré. Soit, en conséquence,

$$\iota = (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy)^{\frac{1}{2}},$$

a, b, c, d, e, f désignant des coefficients constants, tellement choisis que la valeur de ι soit constamment réelle, et différente de zéro. Concevons d'ailleurs que les équations

$$\begin{aligned} ax + fy + ez &= \mathrm{x}, \\ fx + by + dz &= \mathrm{y}, \\ ex + dy + cz &= \mathrm{z}, \end{aligned}$$

résolues par rapport à x, y, z, donnent

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{ax} + \mathrm{fy} + \mathrm{ez}, \\ y &= \mathrm{fx} + \mathrm{by} + \mathrm{dz}, \\ z &= \mathrm{ex} + \mathrm{dy} + \mathrm{cz}; \end{aligned}$$

enfin nommons ∇ et V les volumes des deux ellipsoïdes représentés par les deux équations

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy &= 1, \\ \mathrm{ax}^2 + \mathrm{by}^2 + \mathrm{cz}^2 + 2\,\mathrm{dyz} + 2\,\mathrm{ezx} + 2\,\mathrm{fxy} &= 1; \end{aligned}$$

on aura, non seulement

$$abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def = \frac{1}{\nabla^2},$$

$$\mathrm{abc} - \mathrm{ad}^2 - \mathrm{be}^2 - \mathrm{cf}^2 + 2\,\mathrm{def} = \frac{1}{\mathrm{V}^2},$$

mais encore

$$\mathrm{V}^2\nabla^2 = 1, \qquad \mathrm{V}\nabla = 1;$$

soient de plus, comme dans le § I,

$$u = \cos p, \qquad v = \sin p \cos q, \qquad w = \sin p \sin q,$$
$$\varsigma = ux + vy + wz,$$

et posons

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{a}u^2 + \mathrm{b}v^2 + \mathrm{c}w^2 + 2\,\mathrm{d}vw + 2\,\mathrm{e}wu + 2\,\mathrm{f}uv)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on représente par $\mathrm{f}(\iota)$ une fonction impaire de ι, on aura, en vertu de la formule (27) de la page 237,

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{f}(\iota)}{\iota} = \frac{\nabla}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f}'\left(\frac{\varsigma}{\mathrm{Q}}\right)\frac{\sin p\, dq\, dp}{\mathrm{Q}^3}.$$

Si l'on pose en particulier

$$a = b = c = 1, \qquad d = e = f = 0,$$

on aura, par suite,

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c} = 1, \qquad \mathrm{d} = \mathrm{e} = \mathrm{f} = 0,$$
$$\mathrm{V} = \nabla = 1, \qquad \mathrm{Q} = 1,$$
$$\iota = r,$$

et la formule (1) donnera simplement

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{f}(r)}{r} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f}'(\varsigma)\sin p\, dq\, dp.$$

L'équation (2) est précisément celle que nous a fournie la valeur de s que présente la formule (11) du § I. Mais, si, dans la recherche de la valeur de s, on substitue l'équation (1) à l'équation (2), alors, au lieu de la formule (11) du § I, on obtiendra la suivante

$$(3) \qquad s = \nabla\frac{\mathrm{D}_t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathfrak{L}\frac{\omega^{n-2}}{[\mathrm{F}(u, v, w, \omega)]_\omega}\, s\,\Pi\left(\frac{s}{\mathrm{Q}}\right)\frac{\sin p\, dq\, dp}{\mathrm{Q}^3},$$

la valeur de s étant toujours

$$s = \varsigma + \omega t.$$

Si maintenant on applique à la formule (3) la méthode de réduction précédemment appliquée à la formule (11) du § I, on obtiendra l'équation suivante

$$(4) \qquad \varkappa = \nabla \int \frac{\omega^{n-1}}{(\mathrm{F}(u, v, w, \omega))_\omega} \frac{k \cos\delta}{Q^2 r} \varsigma \, \Pi\left(\frac{s}{Q}\right),$$

les valeurs de

$$u, \quad v, \quad w, \quad k, \quad \delta$$

étant précisément les mêmes que dans les formules (20) et (30) du premier paragraphe.

§ III. — *Application des formules établies dans les deux premiers paragraphes au cas où l'équation caractéristique est du second degré seulement.*

Considérons en particulier le cas où l'équation caractéristique est du second degré; et supposons d'abord que l'on ait

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x, y, z, t) = t^2 - \Omega^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

Ω désignant une constante positive. Alors, l'équation de la surface caractéristique étant

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{\Omega^2},$$

celle de la surface des ondes sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = \Omega^2 t^2,$$

et les formules (16), (17), (18) du § I donneront

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \frac{1}{r} = \frac{\cos\delta}{r} = \frac{\varsigma}{r^2},$$

$$\cos\delta = 1, \qquad \varsigma = r.$$

De plus, les formules (19) du § I, étant réduites aux suivantes

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad ux + vy + wz = 0,$$

représenteront un grand cercle de la sphère dont le rayon est l'unité. On aura donc encore

$$k = 1,$$

et la formule (20) du § I donnera

$$\varkappa = \int \frac{\omega}{(\omega^2 - \Omega^2)_\omega} \frac{(\varsigma + \omega t)\,\Pi(\varsigma + \omega t)}{r},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad \varkappa = \frac{(r + \Omega t)\,\Pi(r + \Omega t) + (r - \Omega t)\,\Pi(r - \Omega t)}{2r}.$$

Il est aisé de s'assurer directement que cette valeur de $\varkappa$ vérifie en effet l'équation caractéristique

$$[D_t^2 - \Omega^2 (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\,\varkappa = 0.$$

Il est clair d'ailleurs qu'elle se réduit à $\Pi(r)$, pour $t = 0$.

Supposons en second lieu

$$(3) \qquad \mathrm{F}(x, y, z, t) = t^2 - (a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d yz + 2 e zx + 2 f xy).$$

Alors, l'équation de la surface caractéristique étant

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d yz + 2 e zx + 2 f xy = t^2,$$

l'équation de la surface des ondes sera de la forme

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d yz + 2 e zx + 2 f xy = t^2,$$

les relations entre les deux systèmes de coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f; \qquad a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f$$

étant les mêmes que dans le second paragraphe; et, si l'on pose, pour abréger,

$$\Omega = (a u^2 + b v^2 + c w^2 + 2 d vw + 2 e wu + 2 f uv)^{\frac{1}{2}},$$

$$\iota = (a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d yz + 2 e zx + 2 f xy)^{\frac{1}{2}},$$

les formules (16) et (17) du § I, jointes à l'équation (6) du même paragraphe, donneront

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{u}{ax + fy + ez} = \dfrac{v}{fx + by + dz} = \dfrac{w}{ex + dy + cz} = \dfrac{\varsigma}{\iota^2} \\ = \dfrac{au + fv + ew}{x} = \dfrac{fu + bv + dw}{y} = \dfrac{eu + dv + cw}{z} = \dfrac{\Omega^2}{\varsigma}. \end{cases}$$

On aura par suite

$$\varsigma^2 = \Omega^2 \iota^2, \qquad \varsigma = \Omega\iota. \tag{5}$$

Faisons d'ailleurs, pour abréger,

$$R = [(au + fv + ew)^2 + (fu + bv + dw)^2 + (eu + dv + cw)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

On tirera encore de la formule (4)

$$\frac{R}{r} = \frac{\Omega^2}{\varsigma}, \qquad R = \Omega^2 \frac{r}{\varsigma},$$

par conséquent, eu égard à la formule (18) du § I,

$$R = \frac{\Omega^2}{\cos\delta}; \tag{6}$$

et les équations (19) du § I, jointes à la formule (4), donneront

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = R, \qquad \alpha x + \gamma y + \beta z = 0. \tag{7}$$

Dans l'ellipse que représentent les deux dernières équations, quand on y considère x, y, z comme seules variables, le produit k des deux demi-axes est déterminé par la formule

$$k = \frac{1}{\Psi}\frac{r}{\iota} R,$$

et de celle-ci, jointe à l'équation (6), on tire

$$\frac{k\cos\delta}{r} = \frac{1}{\Psi}\frac{\Omega^2}{\iota},$$

la valeur de Ψ étant la même que dans le § II. Cela posé, comme la quantité ici désignée par Ω ne diffère pas de celle qui, dans la formule (4) du second paragraphe, se trouve représentée par la lettre Q, cette même formule, jointe à l'équation

$$s = \varsigma + \omega t = \Omega\iota + \omega t,$$

donnera

$$z = \mathcal{L}\frac{\omega}{(\omega^2 - \Omega^2)_\omega}\frac{1}{\iota}\left(\iota + \frac{\omega}{\Omega}t\right)\Pi\left(\iota + \frac{\omega}{\Omega}t\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$z = \frac{(\iota + t)\Pi(\iota + t) + (\iota - t)\Pi(\iota - t)}{2\iota}. \tag{8}$$

Il est aisé de s'assurer directement que la valeur de z, donnée par l'équation (8), vérifie en effet l'équation caractéristique

$$[D_t^2 - (aD_x^2 + bD_y^2 + cD_z^2 + 2dD_yD_z + 2eD_zD_x + 2fD_xD_y)]z = 0.$$

Il est clair d'ailleurs qu'elle se réduit à $\Pi(\iota)$ pour $t = 0$.

146.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Note sur une transcendante que renferme le développement de la fonction perturbatrice relative au système planétaire.*

C. R., T. XIII, p. 682 (4 octobre 1841).

§ I. — *Considérations générales.*

Soient, pour la planète m et au bout du temps t,

r la distance au Soleil;
p la longitude;
ψ l'anomalie excentrique;
T l'anomalie moyenne.

Soient encore

a le demi grand axe de l'orbite décrite par la planète m;
ι l'inclinaison de cette orbite;
ε l'excentricité;
ϖ la longitude du périhélie;
φ la longitude du nœud ascendant.

Enfin nommons

$$r', \quad p', \quad \psi', \quad T', \quad a', \quad \iota', \quad \varepsilon', \quad \varpi', \quad \varphi'$$

ce que deviennent

$$r,\quad p,\quad \psi,\quad T,\quad a,\quad \iota,\quad \varepsilon,\quad \varpi,\quad \varphi$$

quand on passe de la planète m à la planète m'; ι la distance réelle des planètes m, m' au bout du temps t, et δ leur distance apparente. La fonction perturbatrice R sera, comme l'on sait,

$$\text{(1)}\qquad R = \frac{m' r}{r'^2}\cos\delta + \ldots - \frac{m'}{\iota} - \ldots,$$

la valeur de ι étant

$$\text{(2)}\qquad \iota = (r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

D'ailleurs, en nommant η la tangente de la moitié de l'angle dont le sinus est ε, on a, pour chaque planète m, non seulement

$$\text{(3)}\qquad r = a(1 - \varepsilon\cos\psi), \qquad T = \psi - \varepsilon\sin\psi,$$

mais encore

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} 1 - e\cos\psi = \left(\dfrac{\varepsilon}{2\eta}\right)\left(1 - \eta e^{\psi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \eta e^{-\psi\sqrt{-1}}\right), \\ e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}} = e^{\psi\sqrt{-1}}\,\dfrac{1 - \eta e^{-\psi\sqrt{-1}}}{1 - \eta e^{\psi\sqrt{-1}}}, \\ e^{-(p-\varpi)\sqrt{-1}} = e^{-\psi\sqrt{-1}}\,\dfrac{1 - \eta e^{\psi\sqrt{-1}}}{1 - \eta e^{-\psi\sqrt{-1}}}, \end{cases}$$

et, pour les deux planètes m, m',

$$\text{(5)}\qquad \cos\delta = \mu\cos(p' - p + \Pi) + \nu\cos(p' - p + \Phi),$$

μ, ν, Π, Φ désignant quatre constantes dont les deux premières sont liées à l'inclinaison mutuelle I des orbites par les deux équations

$$\text{(6)}\qquad \nu = \sin^2\frac{I}{2}, \qquad \mu = \cos^2\frac{I}{2} = 1 - \nu,$$

tandis que les deux dernières vérifient les formules

$$\text{(7)}\qquad \sin\Pi = \frac{\cos\iota' + \cos\iota}{2\mu}\sin(\varphi' - \varphi), \qquad \sin\Phi = \frac{\cos\iota' - \cos\iota}{2\nu}\sin(\varphi' - \varphi).$$

Si l'on développe R suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

on obtiendra une équation de la forme

$$\text{(8)}\qquad R = \Sigma(m, m')_{n,n'} e^{nT\sqrt{-1}} e^{n'T'\sqrt{-1}},$$

le signe Σ s'étendant d'une part à toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives de n, n'; d'autre part, à toutes les combinaisons que l'on peut former avec les planètes m, m', ... prises deux à deux, et la valeur du coefficient $(m, m')_{n,n'}$ étant fournie par les équations

$$\text{(9)}\qquad (m, m')_{n,n'} = A_{n,n'} - B_{n,n'},$$

$$\text{(10)}\qquad \begin{cases} A_{n,n'} = \dfrac{m'}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{r'^2} e^{-(nT + n'T')\sqrt{-1}}\cos\delta\, dT\, dT', \\ B_{n,n'} = \dfrac{m'}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\iota} e^{-(nT + n'T')\sqrt{-1}}\, dT\, dT'. \end{cases}$$

Or on peut ramener le calcul du développement de R au calcul de deux espèces d'intégrales définies, savoir, de celle que renferme le développement de la fonction

$$\text{(11)}\qquad \Lambda = [\lambda - \mu\cos(p' - p + \varpi)]^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances entières de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{(p' - p + \varpi)\sqrt{-1}},$$

la valeur de λ étant

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'} + \frac{a'}{a}\right),$$

et de celles qui naissent du développement de la fonction

$$e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}}$$

suivant les puissances entières de l'exponentielle

$$e^{\psi\sqrt{-1}};$$

c'est ce que l'on verra dans les paragraphes suivants.