森本文庫
洋書
0162

桑木文庫
洋書
0162

物理
08
C
2.6

九州帝國大學理學部
8187
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002002068
九州大学蔵書

801859

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

08
C
2.1

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

Ire SÉRIE. — TOME VI.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

—

M DCCC LXXXVIII

08
C
2.1

19. 4. 25
130999

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

112.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur les intégrales multiples.*

C. R., t. XI, p. 1008 (21 décembre 1840).

Parmi les méthodes qui peuvent être employées à la détermination des intégrales simples ou multiples, l'une des plus fécondes est celle que j'ai appliquée à la détermination et à la transformation des intégrales simples dans la première Partie d'un Mémoire présenté à l'Institut le 2 janvier 1815. Cette méthode consiste à remplacer, dans une intégrale donnée, relative à certaines variables x, y, z, ..., un facteur de la fonction sous le signe $\int$ par une intégrale définie, choisie de manière qu'après ce remplacement les intégrations relatives aux variables x, y, z, ... puissent être facilement effectuées. On doit surtout remarquer le cas où l'un des facteurs de la fonction sous le signe $\int$ est une puissance négative d'une autre fonction. Souvent alors, pour rendre exécutables les intégrations relatives à x, y, z, ..., il suffit de remplacer les puissances négatives dont il s'agit par une intégrale eulérienne de première espèce. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons une intégrale multiple s de la forme

$$(1) \qquad s = \int\int\int\cdots \frac{P}{Q^s}\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

P, Q étant des fonctions réelles ou imaginaires des variables x, y, z, ... et s une constante positive, ou même une constante imaginaire dont la partie réelle soit positive. Désignons d'ailleurs par $\Gamma(s)$, avec M. Legendre, l'intégrale eulérienne de première espèce

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Si la fonction Q, ou du moins sa partie réelle, reste toujours positive entre les limites des intégrations relatives aux variables x, y, z, ..., on aura

$$\frac{1}{Q^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-Qt}\,dt,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad s = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\int\int\cdots\int_0^\infty t^{s-1}Pe^{-Qt}\ldots dx\,dy\,dz\ldots dt.$$

Concevons maintenant que, $P_\prime$ et $Q_\prime$ étant des fonctions de la seule variable x, $P_{\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime}$ des fonctions de la seule variable y, $P_{\prime\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime\prime}$ des fonctions de la seule variable z, ..., on ait

$$(3) \qquad P = P_\prime P_{\prime\prime} P_{\prime\prime\prime}\ldots \qquad \text{et} \qquad Q = Q_\prime + Q_{\prime\prime} + Q_{\prime\prime\prime} + \ldots.$$

Alors, en posant, pour abréger,

$$U = \int P_\prime e^{-Q_\prime t}\,dx, \qquad V = \int P_{\prime\prime} e^{-Q_{\prime\prime} t}\,dy, \qquad W = \int P_{\prime\prime\prime} e^{-Q_{\prime\prime\prime} t}\,dz, \qquad \ldots,$$

on tirera de la formule (2)

$$(4) \qquad s = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}UVW\ldots dt.$$

Donc alors, si l'on peut obtenir en termes finis les valeurs de U, V, W, ... considérés comme fonctions de t, la détermination de l'intégrale multiple s se trouvera réduite à la détermination de l'intégrale simple

$$\int_0^\infty t^{s-1}UVW\ldots dt.$$

Si l'on supposait la fonction Q liée aux fonctions

$$Q_\prime, \quad Q_{\prime\prime}, \quad Q_{\prime\prime\prime}, \quad \ldots,$$

non plus par la seconde des équations (3), mais par la suivante

$$(5) \qquad Q = 1 + Q_\prime + Q_{\prime\prime} + Q_{\prime\prime\prime} + \ldots,$$

alors, au lieu de la formule (4), on obtiendrait celle-ci

$$(6) \qquad s = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}UVW\ldots e^{-t}\,dt.$$

Première application. — Supposons

$$P = x^l y^m z^n \ldots e^{ax} e^{by} e^{cz}\ldots \qquad \text{et} \qquad Q = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots,$$

l, m, n, ... désignant des nombres entiers, et a, b, c, ..., α, β, γ, ... des constantes réelles ou imaginaires; en sorte qu'on ait

$$(7) \qquad s = \int\int\int\cdots \frac{x^l y^m z^n \ldots e^{ax} e^{by} e^{cz}\ldots}{(1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)^s}\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, les intégrations relatives aux variables x, y, z, ... effectuées par rapport à x, à partir d'une certaine origine $x = \xi$; par rapport à y, à partir de l'origine $y = \eta$; par rapport à z, à partir de l'origine $z = \zeta$, ... Enfin, concevons que, dans le second membre de la formule (7), la fonction

$$1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots$$

offre toujours une partie réelle positive; ce qui arrivera, par exemple, si, les deux limites de chaque intégration étant des quantités positives, chacune des constantes α, β, γ, ... acquiert, ou une valeur positive, ou

une valeur imaginaire dont la partie réelle soit positive. On trouvera

$$U = D_a^l \int_\xi^x e^{(a-\alpha t)x}\,dx = D_a^l \frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a-\alpha t}, \qquad \dots$$

et, par suite,

$$(8)\qquad s = \frac{1}{\Gamma(s)} D_a^l D_b^m D_c^n \dots \int_0^\infty \frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a-\alpha t} \frac{e^{(b-\hat{\varepsilon} t)y} - e^{(b-\hat{\varepsilon} t)\eta}}{b-\hat{\varepsilon} t} \dots t^{s-1} e^{-t}\,dt.$$

On se trouve ainsi amené à cette conclusion remarquable, que la fonction s de $x, y, z, \dots$, représentée, en vertu de la formule (7), par une intégrale multiple, peut être réduite à une intégrale définie simple relative à une nouvelle variable t, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux premières variables $x, y, z, \dots$ ou à leurs origines $\xi, \eta, \zeta, \dots$, pourvu que la somme

$$1 + \alpha x + \hat{\varepsilon} y + \gamma z + \dots,$$

ou du moins sa partie réelle, reste positive entre les limites des intégrations.

Si, en attribuant aux constantes $a, b, c, \dots$ des valeurs négatives ou du moins des valeurs dont la partie réelle fût négative, on supposait chaque intégration effectuée, dans la formule (7), entre les limites $0, \infty$, on trouverait

$$U = D_a^l \int_0^\infty e^{(a-\alpha t)x}\,dx = D_a^l \frac{1}{\alpha t - a} = \frac{\Gamma(l+1)}{(\alpha t - a)^{l+1}}, \qquad \dots,$$

et, par suite,

$$(9)\qquad s = \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\dots}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}\,dt}{(\alpha t - a)^{l+1}(\hat{\varepsilon} t - b)^{m+1}(\gamma t - c)^{n+1}\dots}.$$

Enfin, si dans les formules (7) et (9) on remplace $l, m, n, \dots$ par $l-1, m-1, n-1, \dots$, et $a, b, c, \dots$ par $-a, -b, -c, \dots$, elles donneront

$$(10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\dots e^{-ax}e^{-by}e^{-cz}\dots}{(1+\alpha x+\hat{\varepsilon} y+\gamma z+\dots)^s}\,dx\,dy\,dz\dots \\ \quad = \dfrac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\dots}{\Gamma(s)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}\,dt}{(a+\alpha t)^l (b+\hat{\varepsilon} t)^m (c+\gamma t)^n \dots}. \end{cases}$$

Cette dernière formule subsistera toujours, d'après ce qu'on vient de dire, quand, $l, m, n, \dots$ étant des nombres entiers, $a, b, c, \dots, \alpha, \hat{\varepsilon}, \gamma, \dots$ désigneront des constantes positives ou même des constantes imaginaires dont les parties réelles seront positives. Ce n'est pas tout : on verra dans un instant que la formule (10) peut être étendue à des cas où les exposants $l, m, n, \dots$ ne représentent plus des nombres entiers.

Deuxième application. — Supposons, dans l'équation (1),

$$P = x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\dots e^{-ax}e^{-by}e^{-cz}\dots \qquad \text{et} \qquad Q = 1 + \alpha x + \hat{\varepsilon} y + \gamma z + \dots,$$

$l, m, n, \dots$ désignant des constantes positives ou même des constantes imaginaires dont les parties réelles soient positives; et prenons d'ailleurs pour limites des intégrations relatives à chacune des variables $x, y, z, \dots$ les deux quantités

$$0, \quad \infty,$$

en sorte que l'on ait

$$(11)\qquad s = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\dots e^{-ax}e^{-by}e^{-cz}\dots}{(1+\alpha x+\hat{\varepsilon} y+\gamma z+\dots)^s}\,dx\,dy\,dz\dots.$$

On trouvera

$$U = \int_0^\infty x^{l-1}e^{-(a+\alpha t)x}\,dx = \frac{\Gamma(l)}{(a+\alpha t)^l}, \qquad \dots;$$

et, par suite, on tirera de la formule (6)

$$(12)\qquad s = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\dots}{\Gamma(s)} \int_0^t \frac{t^{s-1}e^{-t}\,dt}{(a+\alpha t)^l (b+\hat{\varepsilon} t)^m (c+\gamma t)^n \dots}.$$

Donc la formule (10) subsistera certainement, pour des valeurs réelles ou imaginaires des constantes

$$l, \quad m, \quad n, \quad \dots, \qquad a, \quad b, \quad c, \quad \dots, \qquad \alpha, \quad \hat{\varepsilon}, \quad \gamma, \quad \dots,$$

toutes les fois que ces constantes ou leurs parties réelles seront positives.

Corollaire I. — Si, dans la formule (10), on réduit les variables $x, y,$

$z, \ldots$ à une seule, et si l'on pose, de plus, $a = 1$, on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{x^{l-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^s}\,dx = \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}}{(1+\alpha t)^l}\,dt.$$

Donc, en écrivant r au lieu de l, et x au lieu de t, on aura

$$\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \frac{x^{r-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^s}\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^r}\,dx. \tag{13}$$

Cette dernière formule, qui devient identique, dans le cas où l'on prend $s = r$, est précisément l'une de celles auxquelles j'étais parvenu par la méthode ci-dessus exposée dans le Mémoire du 2 janvier 1815. On pourrait de cette formule en déduire plusieurs autres dignes de remarque, en différentiant les deux membres une ou plusieurs fois de suite par rapport à r. Les nouvelles intégrales, comprises dans les formules ainsi obtenues, seraient les dérivées relatives à r des intégrales comprises dans la formule (13); et, pour passer des unes aux autres, il suffirait de multiplier une ou plusieurs fois de suite la fonction sous le signe $\int$ par $l(x)$ ou par $-l(1+\alpha x)$, la lettre caractéristique l indiquant un logarithme népérien.

La formule (13), et celles que l'on en déduira par des différentiations relatives à r, subsisteront certainement toutes les fois que les constantes r, s offriront des valeurs positives, ou des valeurs imaginaires dont les parties réelles seront positives.

Corollaire II. — Si, dans la formule (10), on réduit à zéro les constantes $a, b, c, \ldots$, elle donnera

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^s}\,dx\,dy\,dz\ldots \\ \displaystyle\quad=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots\Gamma(s-l-m-n-\ldots)}{\Gamma(s)}\,\frac{1}{\alpha^l\beta^m\gamma^n\ldots}.\end{array}\right. \tag{14}$$

Cette dernière équation subsistera certainement lorsque

$$s,\quad l,\quad m,\quad n,\quad \ldots,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \ldots$$

seront, ou des constantes positives, ou des constantes imaginaires dont

la partie réelle sera positive, et que la partie positive de la constante s surpassera la partie positive de chacune des constantes $l, m, n, \ldots$ Si, pour fixer les idées, on prend

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1,$$

on trouvera

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots}{(1+x+y+z+\ldots)^s}\,dx\,dy\,dz\ldots \\ \displaystyle\quad=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots\Gamma(s-l-m-n-\ldots)}{\Gamma(s)}.\end{array}\right. \tag{15}$$

L'équation (15) est l'une de celles auxquelles est arrivé M. Binet dans son Mémoire sur les intégrales eulériennes. Cette même équation, de laquelle on déduit aisément la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{dx\,dy\,dz\ldots}{(1+x+y^\beta+z^\gamma+\ldots)},$$

ne diffère pas au fond d'une formule que j'avais obtenue dans le temps de mes premières recherches sur les intégrales définies. Je la retrouve sous diverses formes, non seulement dans un cahier de cette époque, mais aussi dans l'un de ceux sur lesquels j'écrivais les Leçons que j'ai données au Collège de France. J'étais parvenu à transformer l'intégrale multiple qu'elle renferme en un produit d'intégrales eulériennes de seconde espèce, c'est-à-dire de la forme

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^b},$$

en remarquant, par exemple, qu'il suffit de poser successivement

$$z = (1+x+y)w \qquad \text{et} \qquad y = (1+x)v,$$

pour établir l'équation

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\,dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^s} \\ \displaystyle\quad=\int_0^\infty\frac{w^{n-1}\,dw}{(1+w)^s}\int_0^\infty\frac{v^{m-1}\,dv}{(1+v)^{s-n}}\int_0^\infty\frac{x^{l-1}\,dx}{(1+x)^{s-m-n}};\end{array}\right. \tag{16}$$

et cette remarque m'avait fait d'abord espérer qu'on pourrait tirer de la formule (15) des relations nouvelles entre les deux espèces d'intégrales eulériennes. Mais cette espérance ne s'est pas réalisée. J'ai pu seulement, en partant de la formule (15), arriver à des relations que l'on sait exister entre les intégrales eulériennes de première et de seconde espèce. Ainsi, en particulier, si l'on réduit les variables $x, y, z, \ldots$ à une seule, et si l'on remplace la lettre l par la lettre r, on reviendra de la formule (15) à l'équation déjà connue

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^s} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s-r)}{\Gamma(r)} \tag{17}$$

(*voir* le résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal, p. 131). Dans le cas où l'on prend $s=1$, l'équation (16) se transforme, comme on le sait, en la formule

$$\Gamma(r)\Gamma(1-r) = \frac{\pi}{\sin\pi r},$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$\Gamma(1+r)\Gamma(1-r) = \frac{\pi r}{\sin\pi r}. \tag{18}$$

D'ailleurs ce que nous avons dit précédemment suffit pour prouver que l'on peut, dans les équations (17) et (18), attribuer à r, non seulement des valeurs positives, mais encore des valeurs imaginaires dont les parties réelles soient positives.

Si, dans l'équation (18), on pose en particulier

$$r = a\sqrt{-1},$$

a désignant une quantité réelle, cette équation donnera

$$\left[\int_0^\infty e^{-x}\cos(a\lg x)\,dx\right]^2 + \left[\int_0^\infty e^{-x}\sin(a\lg x)\,dx\right]^2 = \frac{2\pi a}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}. \tag{19}$$

Il est bon d'observer que, pour revenir de l'équation (15) à l'équation (14), il suffirait de remplacer x par αx, y par βy, z par γz, ...

J'ajouterai que des transformations semblables à celles qui nous ont conduit à l'équation (16) fournissent, comme l'on sait, une formule de M. Dirichlet, analogue à l'équation (15), et d'autres formules du même genre, que divers géomètres ont obtenues en prenant pour point de départ celle de M. Dirichlet.

Troisième application. — Supposons que, dans la formule (1), on prenne

$$P = \varphi(x)\chi(y)\psi(z)\ldots \qquad \text{et} \qquad Q = \left[1-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\sqrt{-1}\right],$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant des constantes positives, et $\varphi(x)$, $\chi(y)$, $\psi(z)$, ... des fonctions rationnelles, réelles ou imaginaires, mais tellement choisies que les produits

$$x\varphi(x), \quad y\chi(y), \quad z\psi(z), \quad \ldots$$

s'évanouissent pour des valeurs infinies de $x, y, z, \ldots$. Si, d'ailleurs, on suppose les intégrations effectuées par rapport à chacune des variables $x, y, z, \ldots$ entre les limites

$$-\infty, \quad +\infty,$$

la valeur de l'intégrale multiple s, déterminée par la formule (1), deviendra

$$s = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots \frac{\varphi(x)\chi(y)\psi(z)\ldots}{\left[1-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\sqrt{-1}\right]^k}\,dx\,dy\,dz\ldots. \tag{20}$$

Mais alors, en adoptant les notations du calcul des résidus, on trouvera

$$U = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{\alpha t x\sqrt{-1}}\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\varphi(x)e^{\alpha t x\sqrt{-1}}\right)\right), \quad \ldots.$$

Donc, si l'on nomme k le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, la formule (6) donnera

$$s = \frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\varphi(x)e^{\alpha t x\sqrt{-1}}\right)\right)\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\chi(y)e^{\alpha t y\sqrt{-1}}\right)\right)\ldots e^{-t}\,dt; \tag{21}$$

et, si dans l'équation (21) on effectue l'intégration relative à t, on tirera

de cette équation, jointe à la formule (20),

$$(22)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots \dfrac{\varphi(x)\,\chi(y)\,\psi(z)\dots}{[1-(\alpha x+\delta y+\gamma z\dots)\sqrt{-1}]^s}\,dx\,dy\,dz\dots \\ \quad =(2\pi\sqrt{-1})^k \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\int_{0}^{\infty}\dots \dfrac{((\varphi(x)\,\chi(y)\,\psi(z)\dots))}{[1-(\alpha x+\delta y+\gamma z+\dots)\sqrt{-1}]^s}. \end{cases}$$

L'équation (22), comme toutes les équations imaginaires, se décomposera généralement en deux autres, qui fourniront les valeurs réelles de deux intégrales multiples. Lorsque les fonctions

$$\varphi(x),\quad \chi(y),\quad \psi(z),\quad \dots$$

deviendront réelles, ainsi que l'exposant s, ces deux intégrales multiples seront les deux suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots \frac{\varphi(x)\,\chi(y)\,\psi(z)\dots\cos[s\operatorname{arc\,tang}(\alpha x+\delta y+\gamma z+\dots)]}{[1+(\alpha x+\delta y+\gamma z+\dots)^2]^{\frac{s}{2}}}\,dx\,dy\,dz\dots,$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots \frac{\varphi(x)\,\chi(y)\,\psi(z)\dots\sin[s\operatorname{arc\,tang}(\alpha x+\delta y+\gamma z+\dots)]}{[1+(\alpha x+\delta y+\gamma z+\dots)^2]^{\frac{s}{2}}}\,dx\,dy\,dz\dots$$

Si l'on réduit les variables $x, y, z, \dots$ à une seule, la formule (22) donnera simplement

$$(23)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{(1-\alpha x\sqrt{-1})^s}\,dx=2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E}\frac{((\varphi(x)))}{(1-\alpha x\sqrt{-1})^s}.$$

Lorsque la fonction $\varphi(x)$ et la quantité s seront réelles, l'équation (23) fournira en même temps les valeurs des deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)\cos(s\operatorname{arc\,tang}\alpha x)}{(1+\alpha^2x^2)^{\frac{s}{2}}}\,dx,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)\sin(s\operatorname{arc\,tang}\alpha x)}{(1+\alpha^2x^2)^{\frac{s}{2}}}\,dx.$$

Si, pour fixer les idées, on prend

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

la formule (23) donnera

$$(24)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1-\alpha x\sqrt{-1})^s}=\frac{\pi}{(1+\alpha)^s};$$

puis on en conclura, si l'exposant s est réel,

$$(25)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(s\operatorname{arc\,tang}\alpha x)}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)^{\frac{s}{2}}}\,dx=\frac{\pi}{(1+\alpha)^s}.$$

Au reste, on prouverait aisément que la formule (24) n'est pas altérée quand on y remplace le binôme $1-\alpha x\sqrt{-1}$ par le binôme $1+\alpha x\sqrt{-1}$; et cette remarque entraîne dans tous les cas l'équation (25). Cela posé, rien n'empêche d'attribuer à s dans la formule (25), aussi bien que dans la formule (24), une valeur imaginaire dont la partie réelle soit positive, ou même nulle.

Si, dans la formule (25), on pose

$$s=r\sqrt{-1},$$

r étant une quantité réelle, on obtiendra deux nouvelles formules, savoir,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{2}(e^{r\operatorname{arc\,tang}\alpha x}+e^{-r\operatorname{arc\,tang}\alpha x})\cos\left[\frac{r}{2}l(1+\alpha^2x^2)\right]\frac{dx}{1+x^2}=\pi\cos[r\,l(1+\alpha)]$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{2}(e^{r\operatorname{arc\,tang}\alpha x}+e^{-r\operatorname{arc\,tang}\alpha x})\sin\left[\frac{r}{2}l(1+\alpha^2x^2)\right]\frac{dx}{1+x^2}=\pi\sin[r\,l(1+\alpha)].$$

Si l'on différentiait une ou plusieurs fois de suite les équations (24), (25), par rapport aux quantités α, s, on obtiendrait de nouvelles formules, par exemple la suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(s\operatorname{arc\,tang}\alpha x)}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)^{\frac{s}{2}}}\,l(1+\alpha^2x^2)\,dx=\frac{2\pi\,l(1+\alpha)}{(1+\alpha)^s}.$$

On pourrait encore déduire du principe général rappelé au commencement de cet article, les valeurs d'un grand nombre d'autres inté-

grales définies simples ou multiples. Parmi ces intégrales, on doit distinguer celles qui se trouvent déterminées dans le Mémoire déjà mentionné.

En terminant cet article, nous ferons une observation qui n'est pas sans importance. Les formules auxquelles nous sommes parvenus subsisteront généralement, sous la condition que les valeurs des intégrales qu'elles renferment demeurent finies et déterminées. Elles pourront se modifier, si cette condition n'est pas remplie. Mais, pour savoir ce qu'elles deviendront dans ce dernier cas, il suffira ordinairement de recourir aux principes que j'ai établis dans mes divers Mémoires sur la théorie des intégrales définies, par exemple, de réduire les intégrales définies qui deviendront indéterminées à leurs *valeurs principales*, et de remplacer les intégrales qui deviendront infinies par d'autres intégrales du genre de celles que, dans le Mémoire du 2 janvier 1815, et dans les *Exercices de Mathématiques*, j'ai désignées sous le nom d'*intégrales définies extraordinaires*. (*Voir* le Volume I des *Exercices de Mathématiques*, p. 57.)

113

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Méthodes propres à simplifier le calcul des inégalités périodiques et séculaires des mouvements des planètes.*

C. R., t. XII, p. 84 (11 janvier 1841).

Le calcul des perturbations des mouvements planétaires dépend, comme l'on sait, du développement d'une certaine fonction R, appelée la fonction perturbatrice. Déjà, dans les Mémoires publiés à Turin, en 1831 et 1832, ainsi que dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (*voir* les nos 11 et 12 du second semestre de 1840) (1), j'ai donné des formules qui permettent d'obtenir directement le coefficient d'un terme quelconque correspondant à une inégalité donnée, dans le développement de la fonction R, en une série de sinus et de cosinus d'arcs qui varient proportionnellement au temps. Mais la convergence de cette série est assez lente; et comme, par suite, le nombre des termes que l'on devra conserver dans le développement de la fonction perturbatrice R est très considérable, il importait de réduire la détermination numérique des coefficients de ces mêmes termes à la recherche des développements de R ou d'autres fonctions en séries dont la convergence fût plus rapide. Or, pour atteindre ce but, il suffit de développer d'abord la partie de R qui correspond à deux planètes en une série simple, ordonnée suivant les puissances négatives de la distance qui séparerait ces deux planètes, si les plans de leurs orbites coïncidaient et si le mouvement elliptique de chacune d'elles se réduisait au mouvement circulaire; puis, de développer les coefficients des puissances négatives dont il s'agit en séries de sinus et de cosinus d'arcs proportionnels au temps. Après ces deux opérations, la fonction R se trouvera représentée par une série multiple dont les divers termes seront précisément de la forme qu'a indiquée M. Liouville dans son beau Mémoire du 11 juillet 1836, en sorte qu'on pourra immédiatement faire servir les fonctions elliptiques au calcul des perturbations planétaires. Ajoutons que de cette série multiple on passera facilement à celle qui représente le développement de R uniquement ordonné suivant des sinus et cosinus d'arcs proportionnels au temps, attendu que le coefficient de chaque terme dans la seconde série se trouvera exprimé par une fonction linéaire des coefficients de divers termes de la première. On voit donc combien il était à désirer que l'on pût disposer les calculs qui doivent conduire à la première série, de manière à les rendre facilement exécutables. Cette condition se trouvera effectivement remplie si l'on suit la marche que j'exposerai ci-après.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, t. V. — Extraits nos 95, 96, p. 288-311.

ANALYSE.

§ I. — *Considérations générales.*

Soient

m, m' les masses des deux planètes;
r, r' leurs distances au centre du Soleil;
$\varkappa$ leur distance mutuelle;
δ l'angle sous lequel cette distance est vue du centre du Soleil.

Dans la *fonction perturbatrice* R, relative à la planète m, la partie correspondante à la planète m' sera

$$\frac{m'r}{r'^2}\cos\delta - \frac{m'}{\varkappa},$$

en sorte que l'on aura

$$(1)\qquad R = \frac{m'r}{r'^2}\cos\delta + \ldots - \frac{m'}{\varkappa} - \ldots,$$

la valeur de $\varkappa$ étant

$$(2)\qquad \varkappa = (r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soient d'ailleurs, dans les ellipses osculatrices des courbes décrites par les planètes m, m',

p, p' les longitudes de ces planètes;
ψ, ψ' leurs anomalies excentriques;
T, T' leurs anomalies moyennes;
a, a' les demi grands axes;
ε, ε' les excentricités;
ϖ, ϖ' les longitudes des périhélies;
τ, τ' les instants des passages des planètes m, m' par ces périhélies.

Enfin, M étant la masse du Soleil, posons

$$c = \left(\frac{M+m}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad c' = \left(\frac{M+m'}{a'^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les anomalies moyennes T, T' seront liées au temps t par les équations linéaires

$$T = c(t-\tau), \qquad T' = c'(t-\tau');$$

et, si l'on pose encore

$$\varkappa = (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \varkappa' = (1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}},$$

les équations du mouvement elliptique de chaque planète seront de la forme

$$(3)\qquad r = a(1-\varepsilon\cos\psi),$$

$$(4)\qquad \cos(p-\varpi) = \frac{\cos\psi - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi}, \qquad \sin(p-\varpi) = \frac{\varkappa\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi},$$

ψ étant une fonction implicite de T, déterminée par la formule

$$(5)\qquad \psi - \varepsilon\sin\psi = T.$$

Ajoutons que, si, en nommant I l'inclinaison mutuelle des plans des deux orbites, on prend

$$\mu = \cos^2\frac{I}{2}, \qquad \nu = \sin^2\frac{I}{2},$$

on aura

$$(6)\qquad \cos\delta = \mu\cos(p'-p+\Pi) + \nu\cos(p'+p+\Phi),$$

Π, Φ désignant deux constantes qui dépendent des positions de ces mêmes plans.

Cela posé, pour déterminer les diverses inégalités périodiques ou séculaires, produites dans le mouvement de la planète m par l'action de la planète m', on devra développer, suivant les puissances entières des exponentielles trigonométriques

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

les deux termes qui sont proportionnels à m' dans le second membre de la formule (1), c'est-à-dire les deux expressions

$$\frac{m'r}{r'^2}\cos\delta, \quad -\frac{m'}{\varkappa},$$

ou, ce qui revient au même, les deux fonctions

$$(7)\qquad \frac{r\cos\delta}{r'^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\iota}.$$

D'ailleurs on tirera des équations (3) et (4)

$$\frac{r}{a}\cos(p-\varpi)=\cos\psi-\varepsilon, \qquad \frac{r}{a}\sin(p-\varpi)=\varkappa\sin\psi,$$

et, par suite,

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{r}{a}e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}} = \cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}, \\ \dfrac{r}{a}e^{-(p-\varpi)\sqrt{-1}} = \cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}; \end{cases}$$

puis on conclura des formules (6) et (8)

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{rr'}{aa'}\cos\delta = \dfrac{1}{2}\mu\left[\begin{matrix} e^{(\Pi-\varpi+\varpi')\sqrt{-1}}\,(\cos\psi'-\varepsilon'+\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \\ +e^{-(\Pi-\varpi+\varpi')\sqrt{-1}}(\cos\psi'-\varepsilon'-\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \end{matrix}\right] \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\nu\left[\begin{matrix} e^{(\Phi+\varpi+\varpi')\sqrt{-1}}\,(\cos\psi'-\varepsilon'+\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \\ +e^{-(\Phi+\varpi+\varpi')\sqrt{-1}}(\cos\psi'-\varepsilon'-\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \end{matrix}\right]. \end{cases}$$

Enfin, si, en apportant une légère modification aux notations ci-dessus admises, afin de simplifier l'équation (9), on représente par

$$\Pi+\varpi-\varpi', \quad \Phi-\varpi-\varpi'$$

les deux constantes jusqu'ici représentées par Π et Φ, les équations (6) et (9) deviendront

$$(10)\quad \cos\delta=\mu\cos(p'-\varpi'-p+\varpi+\Pi)+\nu\cos(p'-\varpi'+p-\varpi+\Phi)$$

et

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{rr'}{aa'}\cos\delta = \dfrac{1}{2}\mu\left[\begin{matrix} e^{\Pi\sqrt{-1}}\,(\cos\psi'-\varepsilon'+\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \\ +e^{-\Pi\sqrt{-1}}(\cos\psi'-\varepsilon'-\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \end{matrix}\right] \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\nu\left[\begin{matrix} e^{\Phi\sqrt{-1}}\,(\cos\psi'-\varepsilon'+\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \\ +e^{-\Phi\sqrt{-1}}(\cos\psi'-\varepsilon'-\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1})(\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}) \end{matrix}\right]. \end{cases}$$

Or, eu égard aux formules (2), (3) et (11), les quantités (7), dont la première est égale au rapport

$$\frac{rr'\cos\delta}{r'^2},$$

pourront être immédiatement exprimées en fonction des anomalies excentriques

$$\psi \quad \text{et} \quad \psi'$$

et développées en séries qui soient ordonnées suivant les puissances entières, positives ou négatives, des exponentielles trigonométriques

$$e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad e^{\psi'\sqrt{-1}},$$

ou bien encore en séries qui soient ordonnées suivant les puissances entières, positives ou négatives, des exponentielles trigonométriques

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}}.$$

D'ailleurs, la recherche des développements de la seconde espèce pourra être réduite au calcul de termes contenus dans d'autres développements de la première espèce, en vertu des théorèmes que nous allons énoncer :

THÉORÈME I. — *Soit z une fonction de la variable ψ liée à la variable T par l'équation* (5) *et n une quantité entière positive ou négative; le coefficient z_n de*

$$e^{nT\sqrt{-1}},$$

dans le développement de z en série ordonnée suivant les puissances entières de $e^{T\sqrt{-1}}$, sera en même temps le coefficient de

$$e^{n\psi\sqrt{-1}},$$

dans le développement de l'un quelconque des deux produits

$$(1-\varepsilon\cos\psi)s\,e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{n\sqrt{-1}}e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}}\mathrm{D}_\psi s,$$

en série ordonnée suivant les puissances entières de $e^{\psi\sqrt{-1}}$.

Démonstration. — En effet, si l'on pose

$$s = \Sigma s_n e^{nT\sqrt{-1}},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives de n, on en conclura

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s e^{-nT\sqrt{-1}}\,dT, \tag{12}$$

puis, en intégrant par parties,

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{n\sqrt{-1}} e^{-nT\sqrt{-1}} D_T s\,dT. \tag{13}$$

Si maintenant on a égard à la formule (5), les équations (12), (13) deviendront

$$\begin{cases} s_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (1-\varepsilon\cos\psi)\, s\, e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}} e^{-n\psi\sqrt{-1}}\,d\psi, \\ s_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{n\sqrt{-1}} e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}} D_\psi\, s\, e^{-n\psi\sqrt{-1}}\,d\psi, \end{cases} \tag{14}$$

et de ces dernières, comparées à la formule (12), on déduira immédiatement le théorème I.

Au reste, le théorème I qui se déduit aisément, comme on vient de le voir, des propriétés d'intégrales définies déjà employées par les géomètres dans les problèmes d'Astronomie, pourrait se déduire encore du théorème de Lagrange sur le développement en série des fonctions implicites.

Corollaire I. — Si l'on pose en particulier $n = 0$, les équations (12) et (14) donneront

$$s_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\,dT = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\varepsilon\cos\psi)\, s\,d\psi. \tag{15}$$

Cette dernière formule entraîne évidemment la proposition suivante :

Théorème II. — *Le terme constant, c'est-à-dire indépendant de l'exponentielle $e^{T\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction s en série ordonnée*

suivant les puissances entières de cette exponentielle, sera aussi le terme constant du développement de la fonction

$$s(1-\cos\psi)$$

en série ordonnée suivant les puissances entières de $e^{\psi\sqrt{-1}}$.

Des théorèmes I et II on déduit encore immédiatement ceux que nous allons énoncer :

Théorème III. — *Soient s une fonction des variables ψ, ψ' liées aux variables T, T' par les deux équations*

$$\psi - \varepsilon\sin\psi = T, \qquad \psi' - \varepsilon'\sin\psi' = T',$$

et n, n' deux quantités entières positives ou négatives. Le coefficient $s_{n,n'}$ de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{(nT+n'T')\sqrt{-1}},$$

dans le développement de la fonction s en série ordonnée suivant les puissances entières de

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

sera en même temps le coefficient de

$$e^{(n\psi+n'\psi')\sqrt{-1}}$$

dans le développement de l'une quelconque des quatre fonctions

$$(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi')\, s\, e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}} e^{n'\varepsilon'\sin\psi'\sqrt{-1}},$$

$$\frac{1}{n'\sqrt{-1}}(1-\varepsilon\cos\psi) e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}} e^{n'\varepsilon'\sin\psi'\sqrt{-1}} D_{\psi'} s,$$

$$\frac{1}{n\sqrt{-1}}(1-\varepsilon'\cos\psi') e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}} e^{n'\varepsilon'\sin\psi'\sqrt{-1}} D_\psi s,$$

$$-\frac{1}{nn'} e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}} e^{n'\varepsilon'\sin\psi'\sqrt{-1}} D_\psi D_{\psi'} s$$

en série ordonnée suivant les puissances entières de $e^{\psi\sqrt{-1}}$, $e^{\psi'\sqrt{-1}}$.

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème*

précédent, le terme constant $\varkappa_{0,0}$ du développement de la fonction $\varkappa$, en série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{r\sqrt{-1}}, \quad e^{r'\sqrt{-1}},$$

sera aussi le terme constant du développement de la fonction

$$\varkappa(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi')$$

en série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

§ II. — *Développement de la fonction* $\frac{r\cos\delta}{r'^2}$.

La fonction

$$\frac{r\cos\delta}{r'^2}$$

pouvant être présentée sous la forme

$$\frac{rr'\cos\delta}{r'^3},$$

il résulte des formules (3) et (9) du § I, que l'on pourra immédiatement développer cette fonction suivant les puissances entières de $e^{r\sqrt{-1}}$, $e^{r'\sqrt{-1}}$, si l'on sait développer de la même manière un quelconque des quatre produits compris dans la formule

$$(\cos\psi-\varepsilon\pm\varkappa\sin\psi\sqrt{-1})\frac{\cos\psi'-\varepsilon'\pm\varkappa\sin\psi'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^3},$$

ou, ce qui revient au même, si l'on sait développer, suivant les puissances entières de $e^{r\sqrt{-1}}$, chacune des deux expressions

$$\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}, \quad \frac{\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}}{(1-\varepsilon\cos\psi)^3},$$

desquelles on déduit immédiatement les deux suivantes

$$\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}, \quad \frac{\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}}{(1-\varepsilon\cos\psi)^3},$$

en changeant seulement le signe de $\sqrt{-1}$. Or, si l'on pose d'abord

$$(1) \qquad s=\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}D_\psi s=\varkappa\cos\psi+\sin\psi\sqrt{-1};$$

et, en vertu du théorème I du § I, le coefficient $\varkappa_n$ de $e^{nr\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction $\varkappa$, se réduira au coefficient de $e^{n\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement du produit

$$\frac{1}{n}(\varkappa\cos\psi+\sin\psi\sqrt{-1})\,e^{n\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}},$$

ou, ce qui revient au même, au terme indépendant de $e^{\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{n}(\varkappa\cos\psi+\sin\psi\sqrt{-1})\,e^{-n\psi\sqrt{-1}}e^{n\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}}.$$

Or, comme on a généralement

$$e^{n\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}}=\sum\frac{(n\varkappa\sin\psi\sqrt{-1})^k}{1.2\ldots k},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières nulles ou positives de k, si l'on désigne par

$$\mathfrak{N}_{i,j,k}$$

le terme indépendant de $e^{\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement du produit

$$e^{l\psi\sqrt{-1}}(\varepsilon\cos\psi)^j(2\sin\psi\sqrt{-1})^k,$$

ou, ce qui revient au même, le terme indépendant de x dans le développement du produit

$$x^l(x+x^{-1})^j(x-x^{-1})^k,$$

on aura

$$(2) \qquad \varkappa_n=\sum\tfrac{1}{2}(\mathfrak{N}_{-n,1,k}\varkappa+\mathfrak{N}_{-n,0,k+1})\frac{n^{k-1}}{1.2\ldots k}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Il y a plus : les quantités entières de la forme $N_{i,j,k}$ sont évidemment

liées les unes aux autres par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{N}_{i,j,k} = \mathfrak{N}_{i+1,j-1,k} + \mathfrak{N}_{i-1,j-1,k}, \\ \mathfrak{N}_{i,j,k} = \mathfrak{N}_{i+1,j,k-1} - \mathfrak{N}_{i-1,j,k-1}; \end{cases}$$

et, si l'on désigne à l'aide de la notation

$$(1)_k$$

le coefficient de x dans le développement du binôme

$$(1+x)^1,$$

c'est-à-dire, si l'on pose

$$(4)\qquad (1)_k = \frac{1(1-1)\dots(1-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k},$$

on aura

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{N}_{-n,0,k+1} = (-1)^{\frac{k-n+1}{2}} (k+1)_{\frac{k-n+1}{2}}, \\ \mathfrak{N}_{-n,1,k} = \mathfrak{N}_{-n+1,0,k} + \mathfrak{N}_{-n-1,0,k} = (-1)^{\frac{k-n+1}{2}} \left[(k)_{\frac{k-n+1}{2}} - (k)_{\frac{k-n-1}{2}} \right]. \end{cases}$$

Ajoutons que, si l'on prend $n = 0$, la valeur de z_n réduite à z_0 sera, en vertu du théorème II du § I, égale au terme qui reste indépendant de $e^{\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement du produit

$$(1 - \varepsilon\cos\psi)\varkappa = (1 - \varepsilon\cos\psi)\left(\cos\psi - \varepsilon + \varkappa\sin\psi\sqrt{-1}\right)$$
$$= \left[1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(e^{\psi\sqrt{-1}} + e^{-\psi\sqrt{-1}}\right)\right]\left[(1+\varkappa)e^{\psi\sqrt{-1}} - \varepsilon + (1-\varkappa)e^{-\psi\sqrt{-1}}\right],$$

de sorte qu'on aura

$$(6)\qquad z_0 = -2\varepsilon.$$

Posons maintenant

$$(7)\qquad \varkappa = \frac{\cos\psi - \varepsilon + \varkappa\sin\psi\sqrt{-1}}{(1-\varepsilon\cos\psi)^2}.$$

Alors, en vertu du théorème I du paragraphe précédent, le coefficient z_n de $e^{n\psi\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction z, se réduira au coefficient de $e^{n\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement du rapport

$$(8)\qquad \frac{\cos\psi - \varepsilon + \varkappa\sin\psi\sqrt{-1}}{(1-\varepsilon\cos\psi)^2}\, e^{n\varkappa\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}}.$$

D'ailleurs, si l'on pose, pour abréger,

$$\eta_1 = \frac{1-\varkappa}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\varkappa},$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on désigne par η_1 la tangente de la moitié de l'angle qui a pour sinus ε, on trouvera

$$\cos\psi - \varepsilon + k\sin\psi\sqrt{-1} = \frac{\varepsilon}{2\eta_1} e^{\psi\sqrt{-1}}\left(1 - \eta_1 e^{-\psi\sqrt{-1}}\right)^2,$$

$$1 - \varepsilon\cos\psi = \frac{\varepsilon}{2\eta_1}\left(1 - \eta_1 e^{-\psi\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \eta_1 e^{\psi\sqrt{-1}}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{\cos\psi - \varepsilon + k\sin\psi\sqrt{-1}}{(1-\cos\psi)^2} = \frac{2\eta_1}{\varepsilon} e^{\psi\sqrt{-1}}\left(1 - \eta_1 e^{\psi\sqrt{-1}}\right)^{-2}.$$

Donc l'expression (8) deviendra

$$\frac{2\eta_1}{\varepsilon} e^{\psi\sqrt{-1}}\left(1 - \eta_1 e^{\psi\sqrt{-1}}\right)^{-2} e^{n\varkappa\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}},$$

et le coefficient z_n de $e^{n\Gamma\sqrt{-1}}$, dans la fonction z, se réduira au terme qui restera indépendant de $e^{\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement du produit

$$(9)\qquad \frac{2\eta_1}{\varepsilon} e^{-(n-1)\psi\sqrt{-1}}\left(1 - \eta_1 e^{\psi\sqrt{-1}}\right)^{-2} e^{n\varkappa\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}},$$

de sorte que, en ayant égard à la formule

$$\left(1 - \eta_1 e^{\psi\sqrt{-1}}\right)^{-2} = \Sigma\,(h+1)\eta_1^h e^{h\psi\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$(10)\qquad z_n = \sum (h+1)\,\mathfrak{N}_{h-n+1,0,k}\,\frac{n^k}{1\cdot 2\dots k}\,\eta_1^{h+1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières nulles ou positives de h et de k.

Si, dans la formule (10), on réduit le nombre n à zéro, elle donnera simplement

$$s_0 = 0, \tag{11}$$

attendu que, pour $n = 0$, le produit (9), réduit à la forme

$$\frac{2\eta}{\varepsilon} e^{\psi\sqrt{-1}} (1 - \eta e^{\psi\sqrt{-1}})^{-2} = \frac{2\eta}{\varepsilon} (e^{\psi\sqrt{-1}} + 2\eta e^{2\psi\sqrt{-1}} + 3\eta^2 e^{3\psi\sqrt{-1}} + \dots),$$

ne renferme pas de terme indépendant de l'exponentielle $e^{\psi\sqrt{-1}}$.

§ III. — *Sur le développement de la fonction* $\frac{1}{\iota}$.

En vertu de l'équation (2) du § I, on a

$$\iota^2 = r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2. \tag{1}$$

D'autre part, si l'on réduit à zéro les excentricités ε, ε', ainsi que l'inclinaison mutuelle I des orbites décrites par les planètes m, m', on tirera des formules (3), (4), (5) du § I,

$$r = a, \qquad p - \varpi = \psi = T,$$

et

$$r' = a', \qquad p' - \varpi' = \psi' = T';$$

et, comme on aura

$$\mu = 1, \qquad \nu = 0,$$

la formule (10) du même paragraphe donnera

$$\cos\delta = \cos(T' - T + \Pi),$$

en sorte que l'équation (1) se trouvera réduite à

$$\iota^2 = a^2 - 2aa'\cos(T' - T + \Pi) + a'^2. \tag{2}$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'}\right) = \lambda; \tag{3}$$

la formule (2) deviendra

$$\iota^2 = 2aa'[\lambda - \cos(T' - T + \Pi)];$$

et si, dans le cas où chacune des quantités

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \mathrm{I}$$

diffère de zéro, on pose

$$\iota^2 = 2aa'[\lambda - \cos(T' - T + \Pi) + s], \tag{4}$$

la quantité s restera généralement très petite en même temps que ε, ε', I. Alors aussi $2aa's$ représentera la différence entre les deux valeurs de ι^2 que fournissent les équations (1) et (2), en sorte que l'on aura

$$2aa's = r^2 - a^2 + r'^2 - a'^2 - 2rr'\cos\delta + 2aa'\cos(T' - T + \Pi),$$

et, par suite,

$$s = \frac{1}{2}\frac{a}{a'}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\left(\frac{r'^2}{a'^2} - 1\right) - \frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\cos\delta + \cos(T' - T + \Pi). \tag{5}$$

D'autre part, en posant, pour abréger,

$$\Lambda = [\lambda - \cos(T' - T + \Pi)]^{-\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

on tirera de la formule (4)

$$\frac{1}{\iota} = (2aa')^{-\frac{1}{2}} \sum \frac{s^i}{1.2\dots i} \mathrm{D}_\lambda^i \Lambda, \tag{7}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières nulles ou positives de i. Or il suit de l'équation (7) qu'il deviendra facile de développer $\frac{1}{\iota}$ en série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}}$$

dès que l'on aura développé séparément en séries de cette espèce les deux fonctions

$$s^i \quad \text{et} \quad \Lambda.$$

En effet, supposons d'un côté

$$\Lambda = \Sigma \Lambda_n e^{n(T' - T + \Pi)\sqrt{-1}}, \tag{8}$$

et d'un autre côté

$$\varkappa^1 = \Sigma\, \varkappa^{(1)}_{n,n'}\, e^{nT+n'T\sqrt{-1}}, \tag{9}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de n, ou de n et n'; on aura généralement

$$\Lambda_{-n} = \Lambda_n, \tag{10}$$

et il est clair que, dans le développement du produit

$$\varkappa^1 \mathrm{D}^1_\lambda \Lambda,$$

le coefficient de

$$e^{nT+n'T\sqrt{-1}}$$

sera

$$\left\{\begin{array}{l} \varkappa^{(1)}_{n,n'}\,\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda_0 + \varkappa^{(1)}_{n+1,n-1}\,\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda_1\, e^{\Pi\sqrt{-1}} + \varkappa^{(1)}_{n+2,n-2}\,\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda_2\, e^{2\Pi\sqrt{-1}} + \dots \\ \qquad + \varkappa^{(1)}_{n-1,n+1}\,\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda_1\, e^{-\Pi\sqrt{-1}} + \varkappa^{(1)}_{n-2,n+2}\,\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda_2\, e^{-2\Pi\sqrt{-1}} + \dots \end{array}\right. \tag{11}$$

Donc ce coefficient pourra être considéré comme une fonction linéaire des quantités de la forme

$$\varkappa^{(1)}_{n+k,n'-k},$$

multipliées chacune par un facteur de la forme

$$\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda_k\, e^{k\Pi\sqrt{-1}}.$$

Il est même important d'observer que les diverses valeurs de

$$\varkappa^{(1)}_{n+k,n'-k}$$

représenteront les coefficients des diverses puissances de $e^{(T-T)\sqrt{-1}}$ dans une seule partie du développement de $\varkappa^1$ en série ordonnée suivant les puissances entières des deux exponentielles

$$e^{T\sqrt{-1}},\quad e^{(T-T)\sqrt{-1}},$$

savoir, dans la partie de ce développement qui sera proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{(n+n')T\sqrt{-1}}.$$

Cette remarque très simple permet d'obtenir la somme (11) à l'aide du théorème que nous allons énoncer.

THÉORÈME. — *Posons*

$$\varkappa = \Sigma\, \varkappa_n\, e^{nT\sqrt{-1}}, \tag{12}$$

et plus généralement

$$\varkappa^1 = \Sigma\, \varkappa^{(1)}_n\, e^{nT\sqrt{-1}}, \tag{13}$$

$\varkappa_n$ *et* $\varkappa^{(1)}_n$ *désignant des fonctions de la seule exponentielle*

$$e^{(T-T)\sqrt{-1}}.$$

Quand on voudra obtenir le coefficient de

$$e^{(nT+n'T)\sqrt{-1}}$$

dans le développement du produit $\varkappa^1 \mathrm{D}^1_\lambda \Lambda$, *il suffira de chercher le coefficient de l'exponentielle*

$$e^{n'(T-T)\sqrt{-1}},$$

dans le développement du produit

$$\varkappa^{(1)}_{n+n'}\,\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda.$$

Observons encore que du développement de la fonction $\varkappa$ on déduira aisément, par des multiplications successives, les développements de $\varkappa^2$, $\varkappa^3$, ..., $\varkappa^1$. Donc, des diverses valeurs de $\varkappa_n$, supposées connues, on pourra aisément déduire les diverses valeurs de $\varkappa^{(1)}_n$.

En vertu de ce qu'on vient de dire, pour réduire la recherche du développement de $\frac{1}{\varkappa}$ à celle du développement de $\varkappa$, il suffit de connaître les valeurs numériques des facteurs de la forme

$$\mathrm{D}^1_\lambda\Lambda.$$

M. Le Verrier a donc exécuté un travail fort utile pour l'Astronomie en construisant des Tables qui fournissent avec exactitude ces valeurs numériques. Il est d'ailleurs généralement très avantageux de substi-

tuer au développement de la fonction $\frac{1}{\iota}$ celui de la fonction $\varkappa$, attendu que des deux séries multiples, produites par ces développements, la première converge très lentement, tandis que la convergence de la seconde est pour l'ordinaire très rapide. En raison de cette dernière circonstance, on pourrait employer avec succès, pour développer $\varkappa$ et $\varkappa'$ en séries, ou les formules d'interpolation connues, qui reposent sur les propriétés des racines de l'unité, et que j'ai précédemment appliquées à des problèmes de Mécanique céleste dans mon Mémoire de 1832, ou la nouvelle formule d'interpolation que j'ai donnée en 1835, ou bien encore celle que M. Le Verrier a présentée récemment à l'Académie. Au reste, on pourra aussi développer facilement en série la fonction $\varkappa$, en partant de la formule (5), et ayant recours aux théorèmes établis dans le premier paragraphe. Déjà nous avons ainsi obtenu le développement de la fonction

$$\cos\psi - \varepsilon + \varkappa\sin\psi\sqrt{-1},$$

duquel on déduira immédiatement ceux des fonctions

$$\cos\psi - \varepsilon \pm \varkappa\sin\psi\sqrt{-1}, \quad \cos\psi' - \varepsilon' \pm \varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1},$$

par conséquent celui de la fonction

$$\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\cos\delta,$$

déterminée par la formule (11) du § II. Or, en effaçant dans le dernier développement la portion équivalente à $\cos(T' - T + \Pi)$, et changeant le signe du reste, on obtiendra la partie du développement de $\varkappa$ qui représente le binôme

$$-\frac{rr'}{aa'}\cos\delta + \cos(T' - T + \Pi).$$

Pour être en état de calculer l'autre partie, ou le développement de la somme

$$\frac{1}{2}\frac{a}{a'}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\left(\frac{r'^2}{a'^2} - 1\right),$$

il suffira de savoir développer l'expression

$$\frac{r^2}{a^2} - 1$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $e^{T\sqrt{-1}}$. Or il résulte immédiatement du théorème I du § I que le coefficient de

$$e^{nT\sqrt{-1}},$$

dans cette série, sera le terme indépendant de $e^{\psi\sqrt{-1}}$, dans le développement du produit

$$\frac{1}{n\sqrt{-1}}\, e^{-n\psi\sqrt{-1}}\, e^{n\varepsilon\sin\psi\sqrt{-1}}\, D_\psi\left(\frac{r^2}{a^2}\right).$$

Donc, puisque l'on a

$$D_\psi\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = D_\psi(1 - \varepsilon\cos\psi)^2 = 2\varepsilon(1 - \varepsilon\cos\psi)\sin\psi,$$

le coefficient dont il s'agit sera, pour $n > 0$,

$$\Sigma(\mathfrak{B}_{-n,1,k+1}\varepsilon - 2\mathfrak{B}_{-n,0,k+1})\frac{n^{k-1}}{1.2.3\ldots k}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k+1}. \tag{14}$$

Ajoutons que le terme correspondant à $n = 0$, c'est-à-dire le terme indépendant de $e^{T\sqrt{-1}}$, dans le développement de la différence

$$\frac{r^2}{a^2} - 1,$$

sera, en vertu du théorème II (§ I), équivalent au terme indépendant de $e^{\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement du produit

$$(1 - \varepsilon\cos\psi)^2 - (1 - \varepsilon\cos\psi)$$
$$= \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{\psi\sqrt{-1}} + e^{-\psi\sqrt{-1}}\right)\right]^2 - \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{\psi\sqrt{-1}} + e^{-\psi\sqrt{-1}}\right)\right],$$

par conséquent à la quantité

$$\tfrac{3}{2}\varepsilon^2.$$

Lorsqu'on se propose en particulier de trouver le terme indépendant de $e^{T\sqrt{-1}}$ dans le développement de la fonction $\frac{1}{\iota}$, ou, ce qui revient au

même, le terme indépendant de $e^{\psi\sqrt{-1}}$ dans le développement du rapport

$$\frac{1-\varepsilon\cos\psi}{\iota},$$

il est avantageux de remplacer les équations (4) et (5) par les deux suivantes

$$\iota^2 = 2aa'[\lambda - \cos(\psi' - \psi + \Pi) + \varkappa],$$

$$\varkappa = \frac{1}{2}\frac{a}{a'}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\left(\frac{r'^2}{a'^2} - 1\right) - \frac{rr'}{aa'}\cos\delta + \cos(\psi' - \psi + \Pi),$$

dont la seconde fournit une valeur de $\varkappa$ qui renferme seulement les premières et les secondes puissances des exponentielles

$$e^{\pm\psi\sqrt{-1}}, \quad e^{\pm\psi'\sqrt{-1}}.$$

Alors aussi l'on peut appliquer à la recherche des coefficients renfermés dans le développement de $\frac{1}{\iota}$ une nouvelle méthode d'interpolation fondée sur les propriétés des racines de certaines équations réciproques. C'est au reste ce que je montrerai plus en détail dans un autre article.

114.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur les variations séculaires des éléments elliptiques, dans le mouvement des planètes.*

C. R., t. XII, p. 189 (25 janvier 1841).

Soient

m, m' les masses de deux planètes;
r, r' les distances de ces planètes au centre du Soleil;
ι leur distance mutuelle;
δ l'angle sous lequel la distance est vue du centre du Soleil.

Soient encore, dans les ellipses osculatrices des courbes décrites par les planètes m, m',

p, p' les longitudes de ces planètes;
ψ, ψ' leurs anomalies excentriques;
T, T' leurs anomalies moyennes;
a, a' les demi-grands axes;
ε, ε' les excentricités;
ϖ, ϖ' les longitudes des périhélies.

Si l'on nomme R la fonction perturbatrice relative à la planète m', on aura

$$(1) \qquad R = \frac{m'r\cos\delta}{r'^2} + \ldots - \frac{m'}{\iota} - \ldots,$$

la valeur de ι^2 étant

$$(2) \qquad \iota^2 = r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2.$$

Cela posé, concevons que l'on se propose de calculer les variations séculaires des éléments elliptiques de la planète m, dues à l'action de la planète m'. Pour y parvenir, il faudra, dans les équations différentielles qui déterminent ces variations, substituer à la fonction R le premier terme du développement de

$$-\frac{m'}{\iota}$$

en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{T\sqrt{-1}}, \quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire le terme de la série qui sera indépendant de ces exponentielles. On n'aura point à s'occuper du développement de

$$\frac{m'r\cos\delta}{r'^2},$$

puisque le premier terme de cet autre développement serait nul p. 27-28); et comme on a d'ailleurs

$$-\frac{m'}{\iota} = -m' \times \frac{1}{\iota},$$

la question se réduira simplement à la recherche du premier terme de la série qui représente le développement du rapport

$$\frac{1}{\iota}$$

suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{r\sqrt{-1}}, \quad e^{r'\sqrt{-1}}.$$

Donc, en vertu d'un théorème précédemment établi (p. 22-24), la question pourra encore se réduire à la recherche du premier terme de la série qui représentera le développement du produit

$$\frac{1}{\iota}(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi')$$

suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{\psi\sqrt{-1}}, \quad e^{\psi'\sqrt{-1}}.$$

En nommant I l'inclinaison mutuelle des orbites des planètes m, m', et prenant

$$\mu = \cos^2\frac{I}{2}, \qquad \nu = \sin^2\frac{I}{2},$$

on a, comme nous l'avons remarqué (p. 20),

$$(3) \quad \cos\delta = \mu\cos(p'-\varpi'-p+\varpi+\Pi)+\nu\cos(p'-\varpi'+p-\varpi+\Phi),$$

Π, Φ désignant deux constantes qui dépendent des positions de ces mêmes plans. D'autre part, si, en raison de la petitesse des excentricités et des inclinaisons, on pose, dans une première approximation,

$$\mu = 1, \qquad \nu = 0, \qquad r = a, \qquad r' = a', \qquad p-\varpi = \psi, \qquad p'-\varpi' = \psi';$$

on verra, par suite, la formule (3) se réduire à

$$\cos\delta = \cos(\psi'-\psi+\Pi),$$

et l'équation (2) à la suivante

$$\iota^2 = 2aa'[\lambda-\cos(\psi'-\psi+\Pi)],$$

la valeur de λ étant

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{a}{a'}\right).$$

Donc, en posant, pour abréger,

$$\Lambda = [\lambda-\cos(\psi'-\psi+\Pi)]^{-\frac{1}{2}},$$

on aura, dans une première approximation,

$$(4) \qquad \frac{1}{\iota} = (2aa')^{-\frac{1}{2}}\Lambda.$$

Si, au contraire, on veut calculer avec exactitude la valeur du rapport $\frac{1}{\iota}$, on pourra supposer

$$\iota^2 = 2aa'[\lambda-\cos(\psi'-\psi+\Pi)+\varkappa],$$

et l'on trouvera, par suite,

$$\frac{1}{\iota} = (2aa')^{-\frac{1}{2}}[\lambda-\cos(\psi'-\psi+\Pi)+\varkappa]^{-\frac{1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad \frac{1}{\iota} = (2aa')^{-\frac{1}{2}}\sum\frac{\varkappa^l}{1.2\ldots l}D_\lambda^l\Lambda,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières nulles ou positives de l. Alors $\varkappa$ sera généralement une quantité très petite, déterminée par la formule

$$(6) \quad \varkappa = \frac{1}{2}\frac{a}{a'}\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)+\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\left(\frac{r'^2}{a'^2}-1\right)-\frac{rr'}{aa'}\cos\delta+\cos(\psi'-\psi+\Pi);$$

et, comme on aura

$$(7) \quad \frac{1}{\iota}(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi') = \sum\frac{\varkappa^l}{1.2\ldots l}(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi')D_\lambda^l\Lambda,$$

la recherche du premier terme du développement du produit

$$\frac{1}{\iota}(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi'),$$

en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{\psi\sqrt{-1}},\quad e^{\psi'\sqrt{-1}},$$

se trouvera évidemment ramenée à la recherche du premier terme du développement du produit

$$\frac{\varkappa'}{1.2\ldots l}(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi')\,\mathrm{D}_\lambda^l\Lambda, \tag{8}$$

en une semblable série. Cette dernière question est celle dont nous allons maintenant nous occuper.

La quantité

$$\Lambda=[\lambda-\cos(\psi'-\psi+\Pi)]^{-\frac{1}{2}},$$

qui dépend de la différence $\psi'-\psi$, peut être présentée sous la forme

$$\Lambda=\Sigma\Lambda_n e^{n(\psi'-\psi+\Pi)\sqrt{-1}}, \tag{9}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles ou positives de n, et le coefficient Λ_n désignant une fonction déterminée de n, λ, qui satisfait à la condition

$$\Lambda_{-n}=\Lambda_n. \tag{10}$$

Supposons maintenant que, le produit

$$\frac{\varkappa'}{1.2\ldots l}(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi')$$

étant développé suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{\psi\sqrt{-1}},\quad e^{\psi'\sqrt{-1}},$$

on nomme

$$\upsilon=\mathrm{f}(\psi-\psi')$$

la partie du développement qui dépendra uniquement de l'angle $\psi'-\psi$ ou $\psi-\psi'$. Le terme constant de la série double, qui représentera le développement du produit (8) suivant les puissances entières des mêmes exponentielles, sera encore évidemment le terme constant

de la série simple qui représentera le développement du produit

$$\upsilon\,\mathrm{D}_\lambda^l\Lambda$$

suivant les puissances entières de la seule exponentielle

$$e^{i(\psi'-\psi)\sqrt{-1}}.$$

D'ailleurs, si, après avoir développé la fonction

$$\varkappa \text{ ou } \varkappa'$$

en série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles

$$e^{i\psi\sqrt{-1}},\quad e^{i\psi'\sqrt{-1}},$$

on désigne, dans le développement, par

$$\varkappa_n e^{ni\psi\sqrt{-1}} \quad \text{ou par} \quad \varkappa_n^{(l)} e^{ni\psi\sqrt{-1}}$$

la somme des termes où ces puissances offriront des degrés dont l'addition reproduira le nombre n, alors, des formules

$$\varkappa=\Sigma\varkappa_n e^{ni\psi\sqrt{-1}} \tag{11}$$

et

$$\varkappa'=\Sigma\varkappa_n^{(l)} e^{ni\psi\sqrt{-1}}, \tag{12}$$

jointes à l'équation identique

$$\left\{\begin{aligned}&(1-\varepsilon\cos\psi)(1-\varepsilon'\cos\psi')\\&=1+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos(\psi'-\psi)-\left(\frac{\varepsilon}{2}e^{-i\psi\sqrt{-1}}+\frac{\varepsilon'}{2}e^{-i\psi'\sqrt{-1}}\right)+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}e^{-i(\psi+\psi')\sqrt{-1}}\\&\qquad-\left(\frac{\varepsilon}{2}e^{i\psi\sqrt{-1}}+\frac{\varepsilon'}{2}e^{-i\psi'\sqrt{-1}}\right)+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}e^{i(\psi+\psi')\sqrt{-1}},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

on tirera

$$\begin{aligned}\upsilon=\varkappa_0&\left[1+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos(\psi'-\psi)\right]\\&-\varkappa_1 e^{i\psi\sqrt{-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}e^{-i\psi\sqrt{-1}}+\frac{\varepsilon'}{2}e^{-i\psi'\sqrt{-1}}\right)+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}\varkappa_1 e^{2i\psi\sqrt{-1}}e^{-i(\psi+\psi')\sqrt{-1}}\\&-\varkappa_{-1}e^{-i\psi\sqrt{-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}e^{i\psi\sqrt{-1}}+\frac{\varepsilon'}{2}e^{i\psi'\sqrt{-1}}\right)+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}\varkappa_{-2}e^{-2i\psi\sqrt{-1}}e^{i(\psi+\psi')\sqrt{-1}}\end{aligned}$$

et plus généralement

$$(14)\quad \nu = \frac{1}{1.2\ldots l}\begin{Bmatrix} \varkappa_0^{(l)}\left[1+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos(\psi'-\psi)\right] \\ -\varkappa_1^{(l)}e^{\psi\sqrt{-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}e^{-\psi\sqrt{-1}}+\frac{\varepsilon'}{2}e^{-\psi'\sqrt{-1}}\right)+\varkappa_2^{(l)}e^{2\psi\sqrt{-1}}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}e^{-(\psi+\psi')\sqrt{-1}} \\ -\varkappa_{-1}^{(l)}e^{-\psi\sqrt{-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}e^{\psi\sqrt{-1}}+\frac{\varepsilon'}{2}e^{\psi'\sqrt{-1}}\right)+\varkappa_{-2}^{(l)}e^{-2\psi\sqrt{-1}}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}e^{(\psi+\psi')\sqrt{-1}} \end{Bmatrix}.$$

D'autre part, comme, en posant

$$\varkappa=(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}},\qquad \varkappa'=(1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}},$$

on aura dans la formule (6) (*voir* les pages 19 et 20)

$$(15)\qquad \frac{r}{a}=1-\varepsilon\cos\psi,\qquad \frac{r'}{a'}=1-\varepsilon\cos\psi',$$

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{rr'}{aa'}\cos\omega=\dfrac{1}{2}\mu\left[\begin{matrix} e^{\Pi\sqrt{-1}}\left(\cos\psi'-\varepsilon'+\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1}\right)\left(\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}\right) \\ +e^{-\Pi\sqrt{-1}}\left(\cos\psi'-\varepsilon'-\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1}\right)\left(\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}\right)\end{matrix}\right] \\ \qquad +\dfrac{1}{2}\nu\left[\begin{matrix} e^{\Phi\sqrt{-1}}\left(\cos\psi'-\varepsilon'+\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1}\right)\left(\cos\psi-\varepsilon+\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}\right) \\ +e^{-\Phi\sqrt{-1}}\left(\cos\psi'-\varepsilon'-\varkappa'\sin\psi'\sqrt{-1}\right)\left(\cos\psi-\varepsilon-\varkappa\sin\psi\sqrt{-1}\right)\end{matrix}\right], \end{cases}$$

la formule (11) pourra être réduite à

$$(17)\qquad \varpi=\varpi_{-2}e^{-2\psi\sqrt{-1}}+\varpi_{-1}e^{-\psi\sqrt{-1}}+\varpi_0+\varpi_1e^{\psi\sqrt{-1}}+\varpi_2e^{2\psi\sqrt{-1}},$$

les valeurs de

$$\varpi_{-2},\quad \varpi_{-1},\quad \varpi_0,\quad \varpi_1,\quad \varpi_2$$

étant déterminées par des équations de la forme

$$(18)\qquad \begin{cases} \varpi_{-1}=\varpi_{-1,0}+\varpi_{0,-1}e^{(\psi-\psi')\sqrt{-1}}, \\ \varpi_1=\varpi_{1,0}+\varpi_{0,1}e^{(\psi'-\psi)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} \varpi_{-2}=\varpi_{-2,0}+\varpi_{-1,-1}e^{(\psi-\psi')\sqrt{-1}}+\varpi_{0,-2}e^{2(\psi-\psi')\sqrt{-1}}, \\ \varpi_0=\varpi_{0,0}+\varpi_{1,-1}e^{(\psi-\psi')\sqrt{-1}}+\varpi_{-1,1}e^{(\psi'-\psi)\sqrt{-1}}, \\ \varpi_2=\varpi_{2,0}+\varpi_{1,1}e^{(\psi'-\psi)\sqrt{-1}}+\varpi_{0,2}e^{2(\psi'-\psi)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

et $\varpi_{n,n'}$ représentant généralement, dans le développement fini de la

fonction ϖ, le coefficient de l'exponentielle

$$e^{(n\psi+n'\psi')\sqrt{-1}}.$$

Or de cette définition de $\varpi_{n,n'}$, jointe aux formules (6), (15) et (16), il résulte immédiatement que, si l'on pose, pour abréger,

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}=\ \mu\cos\Pi+\nu\cos\Phi, & \mathfrak{D}=\mu\cos\Pi-\nu\cos\Phi, \\ \mathfrak{B}=-\mu\sin\Pi-\nu\sin\Phi, & \mathfrak{C}=\mu\sin\Pi-\nu\sin\Phi, \end{cases}$$

on aura

$$(21)\quad \begin{cases} \varpi_{-1,0}=\dfrac{1}{2}\left(\mathfrak{A}\varepsilon'-\dfrac{a}{a'}\varepsilon+\mathfrak{C}\varkappa\varepsilon'\sqrt{-1}\right), & \varpi_{1,0}=\dfrac{1}{2}\left(\mathfrak{A}\varepsilon'-\dfrac{a}{a'}\varepsilon-\mathfrak{C}\varkappa\varepsilon'\sqrt{-1}\right), \\ \varpi_{0,-1}=\dfrac{1}{2}\left(\mathfrak{A}\varepsilon-\dfrac{a'}{a}\varepsilon'+\mathfrak{B}\varkappa'\varepsilon\sqrt{-1}\right), & \varpi_{0,1}=\dfrac{1}{2}\left(\mathfrak{A}\varepsilon-\dfrac{a'}{a}\varepsilon'+\mathfrak{B}\varkappa'\varepsilon\sqrt{-1}\right); \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \varpi_{0,0}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{a'}\varepsilon^2+\dfrac{a'}{a}\varepsilon'^2\right)-\mathfrak{A}\varepsilon\varepsilon', \\ \varpi_{-2,0}=\varpi_{2,0}=\dfrac{1}{8}\dfrac{a}{a'}\varepsilon^2, \qquad \varpi_{0,-2}=\varpi_{0,2}=\dfrac{1}{8}\dfrac{a'}{a}\varepsilon'^2; \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} \varpi_{-1,-1}=-\dfrac{1}{4}\left[\mathfrak{A}-\mathfrak{D}\varkappa\varkappa'+(\mathfrak{B}\varkappa'+\mathfrak{C}\varkappa)\sqrt{-1}\right], \\ \varpi_{1,1}\ \ =-\dfrac{1}{4}\left[\mathfrak{A}-\mathfrak{D}\varkappa\varkappa'-(\mathfrak{B}\varkappa'+\mathfrak{C}\varkappa)\sqrt{-1}\right]; \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} \varpi_{-1,1}=-\dfrac{1}{4}\left[\mathfrak{A}+\mathfrak{D}\varkappa\varkappa'-(\mathfrak{B}\varkappa'-\mathfrak{C}\varkappa)\sqrt{-1}-2e^{\Pi\sqrt{-1}}\right], \\ \varpi_{1,-1}=-\dfrac{1}{4}\left[\mathfrak{A}+\mathfrak{D}\varkappa\varkappa'+(\mathfrak{B}\varkappa'-\mathfrak{C}\varkappa)\sqrt{-1}-2e^{-\Pi\sqrt{-1}}\right]. \end{cases}$$

Les valeurs des coefficients

$$\varpi_{-2},\quad \varpi_{-1},\quad \varpi_0,\quad \varpi_1,\quad \varpi_2,$$

ou les diverses valeurs de ϖ_n, étant déterminées par les formules qui précèdent, on tirera aisément les diverses valeurs de

$$\varpi_n^{(2)},\quad \varpi_n^{(3)},\quad \varpi_n^{(5)},\quad \ldots$$

de l'équation (17), en élevant successivement les deux membres à la se-

conde, à la troisième, à la quatrième puissance.... On trouvera, par exemple,

$$\frac{1}{2}\varkappa_0^{(2)} = \frac{1}{2}\varkappa_0^2 + \varkappa_1\varkappa_{-1} + \varkappa_2\varkappa_{-2},$$

$$\frac{1}{2}\varkappa_{-1}^{(2)} = \varkappa_0\varkappa_{-1} + \varkappa_1\varkappa_{-2},$$

$$\frac{1}{2}\varkappa_{-2}^{(2)} = \frac{1}{2}\varkappa_1^2 + \varkappa_0\varkappa_{-2},$$

$$\frac{1}{2}\varkappa_1^{(2)} = \varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_{-1}\varkappa_2,$$

$$\frac{1}{2}\varkappa_2^{(2)} = \frac{1}{2}\varkappa_1^2 + \varkappa_0\varkappa_2,$$

$$\frac{1}{2.3}\varkappa_0^{(3)} = \frac{1}{6}\varkappa_0^3 + \frac{1}{2}\varkappa_{-1}^2\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varkappa_1^2\varkappa_{-2} + \varkappa_0\varkappa_1\varkappa_{-1} + \varkappa_0\varkappa_2\varkappa_{-2},$$

.....

Enfin, les diverses valeurs de $\varkappa_n^{(k)}$ étant ainsi obtenues, puis substituées dans le second membre de l'équation (14), il deviendra facile de trouver la partie du produit

$$\upsilon D_\lambda^1 A$$

qui représentera le premier terme du développement de ce produit suivant les puissances entières de l'exponentielle

$$e^{(\psi'-\psi)\sqrt{-1}};$$

et l'on pourra employer utilement dans cette recherche les formules connues d'interpolation, ou, ce qui revient au même, celles que nous indiquerons tout à l'heure.

Concevons, pour fixer les idées, que, les excentricités ε, ε' et l'inclinaison I étant considérées comme des quantités très petites du premier ordre, on veuille négliger dans le développement de R les termes d'un ordre supérieur au quatrième. Comme on trouverait, en négligeant les termes de second ordre,

$$\upsilon = 0, \quad \mu = 1, \quad \varkappa = 1, \quad \varkappa' = 1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \cos\Pi, \quad \mathfrak{C} = -\mathfrak{B} = \sin\Pi$$

et, par suite,

$$\varkappa_{-1,-1} = \varkappa_{1,1} = \varkappa_{-1,1} = \varkappa_{1,-1} = 0,$$

il est clair que les quatre coefficients

$$\varkappa_{-1,-1}, \quad \varkappa_{1,1}, \quad \varkappa_{-1,1}, \quad \varkappa_{1,-1}$$

seront du second ordre, aussi bien que les coefficients

$$\varkappa_{-2,0} = \varkappa_{2,0}, \quad \varkappa_{0,0}, \quad \varkappa_{0,-2} = \varkappa_{0,2}.$$

Donc, par suite, en vertu des formules (19),

$$\varkappa_{-2}, \quad \varkappa_0, \quad \varkappa_2$$

seront du second ordre, tandis que

$$\varkappa_{-1}, \quad \varkappa_1$$

seront du premier ordre avec les coefficients $\varkappa_{-1,0}$, $\varkappa_{1,0}$, $\varkappa_{0,-1}$, $\varkappa_{0,1}$. Cela posé, faisons, pour plus de commodité,

$$\varkappa = \rho + \varsigma, \tag{25}$$

les valeurs de ρ et de ς étant

$$\begin{cases} \rho = \varkappa_{-1} e^{-\psi\sqrt{-1}} + \varkappa_1 e^{\psi\sqrt{-1}}, \\ \varsigma = \varkappa_{-2} e^{-2\psi\sqrt{-1}} + \varkappa_0 + \varkappa_2 e^{2\psi\sqrt{-1}}. \end{cases} \tag{26}$$

Les deux fonctions ρ, ς seront, la première une quantité du premier ordre, la seconde une quantité du second ordre; et les valeurs de ces deux fonctions se réduiront à

$$\begin{cases} \rho = \left(\mathfrak{A}\varepsilon' - \dfrac{a}{a'}\varepsilon\right)\cos\psi + \mathfrak{C}\varkappa\varepsilon'\sin\psi \\ \qquad + \left(\mathfrak{A}\varepsilon - \dfrac{a'}{a}\varepsilon'\right)\cos\psi' + \mathfrak{B}\varkappa'\varepsilon\sin\psi', \\ \varsigma = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a'}\varepsilon^2\cos^2\psi + \dfrac{a'}{a}\varepsilon'^2\cos^2\psi'\right) - \mathfrak{A}\varepsilon\varepsilon' + \cos(\psi' - \psi + \Pi) \\ \qquad - (\mathfrak{A}\cos\psi\cos\psi' + \mathfrak{B}\varkappa'\sin\psi'\cos\psi + \mathfrak{C}\varkappa\sin\psi\cos\psi' + \mathfrak{D}\varkappa\varkappa'\sin\psi\sin\psi'). \end{cases} \tag{27}$$

D'ailleurs, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au quatrième, on tirera successivement de l'équation (25)

$$\varkappa^2 = \rho^2 + 2\rho\varsigma + \varsigma^2,$$
$$\varkappa^3 = \rho^3 + 3\rho^2\varsigma,$$
$$\varkappa^4 = \rho^4;$$

et, par suite, eu égard aux formules (13) et (26), on trouvera, pour $l = 1$,

$$(28)\quad \begin{cases} \upsilon = \varkappa_0\left[1 + \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos(\psi' - \psi)\right] \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\left[\varkappa_1\left(\varepsilon + \varepsilon' e^{(\psi - \psi')\sqrt{-1}}\right) + \varkappa_{-1}\left(\varepsilon + \varepsilon' e^{(\psi' - \psi)\sqrt{-1}}\right)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{4}\left(\varkappa_2 e^{(\psi - \psi')\sqrt{-1}} + \varkappa_{-2} e^{(\psi' - \psi)\sqrt{-1}}\right); \end{cases}$$

pour $l = 2$,

$$(29)\quad \begin{cases} \upsilon = \dfrac{1}{2}\varkappa_0^2 + \varkappa_1\varkappa_{-1}\left[1 + \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos(\psi' - \psi)\right] + \varkappa_2\varkappa_{-2} \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\left[(\varkappa_0\varkappa_1 + \varkappa_{-1}\varkappa_2)\left(\varepsilon + \varepsilon' e^{(\psi - \psi')\sqrt{-1}}\right) + (\varkappa_0\varkappa_{-1} + \varkappa_1\varkappa_{-2})\left(\varepsilon + \varepsilon' e^{(\psi' - \psi)\sqrt{-1}}\right)\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{4}\left[\varkappa_1^2 e^{(\psi - \psi')\sqrt{-1}} + \varkappa_{-1}^2 e^{(\psi' - \psi)\sqrt{-1}}\right]; \end{cases}$$

pour $l = 3$,

$$(30)\quad \begin{cases} \upsilon = \dfrac{1}{2}\varkappa_{-1}^2\varkappa_2 + \varkappa_0\varkappa_1\varkappa_{-1} + \dfrac{1}{2}\varkappa_1^2\varkappa_{-2} \\ \qquad - \dfrac{1}{4}\varkappa_1\varkappa_{-1}\left[\varkappa_1\left(\varepsilon + \varepsilon' e^{(\psi - \psi')\sqrt{-1}}\right) + \varkappa_{-1}\left(\varepsilon + \varepsilon' e^{(\psi' - \psi)\sqrt{-1}}\right)\right]; \end{cases}$$

pour $l = 4$,

$$(31)\qquad \upsilon = \frac{1}{4}\varkappa_1^2\varkappa_{-1}^2.$$

Des équations (28), (29), (30), (31), jointes aux formules (18) et (19), il résulte que, dans le cas où l'on néglige les quantités d'un ordre supérieur au quatrième, υ se réduit à une fonction entière de l'exponentielle

$$e^{(\psi - \psi')\sqrt{-1}},$$

et même à une fonction entière qui renferme seulement les puissances de cette exponentielle, dont les degrés sont représentés par les cinq quantités

$$-2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2.$$

On aura donc alors

$$(32)\quad \upsilon = \upsilon_{-2}e^{2(\psi - \psi')\sqrt{-1}} + \upsilon_{-1}e^{(\psi - \psi')\sqrt{-1}} + \upsilon_0 + \upsilon_1 e^{(\psi' - \psi)\sqrt{-1}} + \upsilon_2 e^{2(\psi' - \psi)\sqrt{-1}},$$

υ_{-2}, υ_{-1}, υ_0, υ_1, υ_2 désignant des coefficients constants; et, en vertu de l'équation (32) jointe à la formule (9), le terme constant de la série qui représente le développement du produit

$$\upsilon\, D_\lambda^1 \Lambda,$$

suivant les puissances entières de $e^{(\psi' - \psi)\sqrt{-1}}$, sera

$$(33)\quad \begin{cases} \upsilon_0 D_\lambda^1 \Lambda_0 + \left(\upsilon_1 e^{-\Pi\sqrt{-1}} + \upsilon_{-1} e^{\Pi\sqrt{-1}}\right) D_\lambda^1 \Lambda_1 \\ \qquad + \left(\upsilon_2 e^{-2\Pi\sqrt{-1}} + \upsilon_{-2} e^{2\Pi\sqrt{-1}}\right) D_\lambda^1 \Lambda_2. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on pose, pour plus de commodité,

$$\upsilon = f(\psi - \psi'),$$

on tirera successivement de la formule (32)

$$f(\psi) = \upsilon_{-2}e^{2\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_{-1}e^{\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_0 + \upsilon_1 e^{-\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_2 e^{-2\psi\sqrt{-1}},$$

$$f(\psi + \pi) = \upsilon_{-2}e^{2\psi\sqrt{-1}} - \upsilon_{-1}e^{\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_0 - \upsilon_1 e^{-\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_2 e^{-2\psi\sqrt{-1}},$$

par conséquent

$$(34)\quad \begin{cases} \upsilon_{-1}e^{\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_1 e^{-\psi\sqrt{-1}} = \dfrac{f(\psi) - f(\psi + \pi)}{2}, \\ \upsilon_{-2}e^{2\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_0 + \upsilon_2 e^{-2\psi\sqrt{-1}} = \dfrac{f(\psi) + f(\psi + \pi)}{2}; \end{cases}$$

puis, en remplaçant, dans la dernière des formules (34), ψ par $\psi + \frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$-\upsilon_{-2}e^{2\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_0 - \upsilon_2 e^{-2\psi\sqrt{-1}} = \frac{f\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\psi + \frac{3\pi}{2}\right)}{2}$$

et, par suite,

$$(35)\quad \begin{cases} \upsilon_0 = \dfrac{f(\psi) + f(\psi + \pi) + f\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\psi + \frac{3\pi}{2}\right)}{4}, \\ \upsilon_{-2}e^{2\psi\sqrt{-1}} + \upsilon_2 e^{-2\psi\sqrt{-1}} = \dfrac{f(\psi) + f(\psi + \pi) - f\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) - f\left(\psi + \frac{3\pi}{2}\right)}{4}. \end{cases}$$

Donc, en remplaçant ψ par Π et tenant compte de l'équation identique

$$f\left(\psi+\frac{3\pi}{2}\right)=f\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right),$$

on trouvera définitivement

$$\upsilon_0=\frac{f(\Pi)+f(\Pi+\pi)+f\left(\Pi+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\Pi-\frac{\pi}{2}\right)}{4},$$

$$\upsilon_{-1}e^{\Pi\sqrt{-1}}+\upsilon_1 e^{-\Pi\sqrt{-1}}=\frac{f(\Pi)-f(\Pi+\pi)}{2},$$

$$\upsilon_{-2}e^{2\Pi\sqrt{-1}}+\upsilon_2 e^{-2\Pi\sqrt{-1}}=\frac{f(\Pi)+f(\Pi+\pi)-f\left(\Pi+\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\Pi-\frac{\pi}{2}\right)}{4};$$

et l'expression (33), ou le terme constant de la série qui représente le développement du produit

$$\upsilon\,D_\lambda^1\Lambda$$

suivant les puissances entières de $e^{(\Psi-\psi)\sqrt{-1}}$, sera égal à

$$(36)\quad\begin{cases}\frac{1}{4}f(\Pi)\,D_\lambda^1(\Lambda_0+2\Lambda_1+\Lambda_2)+\frac{1}{4}f(\Pi+\pi)\,D_\lambda^1(\Lambda_0-2\Lambda_1+\Lambda_2)\\ \quad+\frac{1}{4}\left[f\left(\Pi+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\Pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]D_\lambda^1(\Lambda_0-\Lambda_2).\end{cases}$$

En terminant cet article nous ferons observer que, dans les formules (28), (29), (30), (31), on pourrait exprimer les coefficients

$$\varkappa_{-2},\quad \varkappa_{-1},\quad \varkappa_0,\quad \varkappa_1,\quad \varkappa_2$$

à l'aide des valeurs diverses des fonctions ρ et ς. En effet, si l'on désigne par

$$\rho_\alpha,\quad \varsigma_\alpha$$

ce que deviennent les fonctions

$$\rho,\quad \varsigma,$$

quand on y remplace simultanément

$$\psi \quad\text{et}\quad \psi'$$

par

$$\psi+\alpha \quad\text{et}\quad \psi'+\alpha,$$

on aura identiquement

$$\rho=\rho_0,\qquad \varsigma=\varsigma_0;$$

et, par des raisonnements semblables à ceux qui ont fourni les équations (34), (35), on tirera de la première des formules (26)

$$\varkappa_1 e^{\psi\sqrt{-1}}=\frac{\rho_0-\rho_{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-1}}{2},\qquad \varkappa_{-1}e^{-\psi\sqrt{-1}}=\frac{\rho_0+\rho_{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-1}}{2};$$

et de la seconde

$$\varkappa_0=\frac{\varsigma_0+\varsigma_{\frac{\pi}{2}}}{2},$$

$$\varkappa_2 e^{2\psi\sqrt{-1}}=\frac{\varsigma_0-\varsigma_{\frac{\pi}{2}}-\left(\varsigma_{\frac{\pi}{4}}-\varsigma_{\frac{3\pi}{4}}\right)\sqrt{-1}}{4},$$

$$\varkappa_{-2}e^{-2\psi\sqrt{-1}}=\frac{\varsigma_0-\varsigma_{\frac{\pi}{2}}+\left(\varsigma_{\frac{\pi}{4}}-\varsigma_{\frac{3\pi}{4}}\right)\sqrt{-1}}{4}.$$

De ces dernières formules, jointes aux équations (28), (29), (30), (31), on conclura, pour $l=1$,

$$\begin{aligned}f(\psi-\psi')=&\frac{1}{2}\left(\varsigma_0+\varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right)\left[1+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos(\psi'-\psi)\right]\\&-\frac{1}{2}\left[\rho_0(\varepsilon\cos\psi+\varepsilon'\cos\psi')-\rho_{\frac{\pi}{2}}(\varepsilon\sin\psi+\varepsilon'\sin\psi')\right]\\&+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}\left[\left(\varsigma_0-\varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right)\cos(\psi+\psi')-\left(\varsigma_{\frac{\pi}{4}}-\varsigma_{\frac{3\pi}{4}}\right)\sin(\psi+\psi')\right]\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

puis, en posant

$$\psi'=-\psi,$$

ce qui réduira

$$\rho_0,\quad \rho_{\frac{\pi}{2}},\quad \varsigma_0,\quad \varsigma_{\frac{\pi}{2}},\quad \varsigma_{\frac{\pi}{4}},\quad \varsigma_{\frac{3\pi}{4}}$$

à des fonctions de ψ, on trouvera simplement, pour $l = 1$,

$$(37)\quad \begin{cases} f(2\psi) = \frac{1}{2}\left(\varsigma_0 + \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos 2\psi\right) \\ \qquad - \frac{1}{2}\left[(\varepsilon + \varepsilon')\,\rho_0 \cos\psi - (\varepsilon - \varepsilon')\,\rho_{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\right] \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\varsigma_0 - \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon'}{4}; \end{cases}$$

pour $l = 2$,

$$(38)\quad \begin{cases} f(2\psi) = \frac{1}{4}\left[\left(\rho_0^2 + \rho_{\frac{\pi}{2}}^2\right)\left(1 + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos 2\psi\right) + \left(\rho_0^2 - \rho_{\frac{\pi}{2}}^2\right)\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\right] \\ \qquad + \frac{1}{8}\left(\varsigma_0 + \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \frac{1}{16}\left[\left(\varsigma_0 - \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \left(\varsigma_{\frac{\pi}{2}} - \varsigma_{\frac{3\pi}{4}}\right)^2\right] \\ \qquad - \frac{1}{4}\left[\rho_0(\varepsilon + \varepsilon')\cos\psi - \rho_{\frac{\pi}{2}}(\varepsilon - \varepsilon')\sin\psi\right]\left(\varsigma_0 + \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right) \\ \qquad - \frac{1}{8}\left[\rho_0(\varepsilon + \varepsilon')\cos\psi + \rho_{\frac{\pi}{2}}(\varepsilon + \varepsilon')\sin\psi\right]\left(\varsigma_0 - \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right) \\ \qquad + \frac{1}{8}\left[\rho_0(\varepsilon - \varepsilon')\sin\psi - \rho_{\frac{\pi}{2}}(\varepsilon + \varepsilon')\cos\psi\right]\left(\varsigma_{\frac{\pi}{4}} - \varsigma_{\frac{3\pi}{4}}\right); \end{cases}$$

pour $l = 3$,

$$(39)\quad \begin{cases} f(2\psi) = \frac{1}{8}\left(\rho_0^2 + \rho_{\frac{\pi}{2}}^2\right)\left(\varsigma_0 + \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right) \\ \qquad + \frac{1}{16}\left[\left(\rho_0^2 - \rho_{\frac{\pi}{2}}^2\right)\left(\varsigma_0 - \varsigma_{\frac{\pi}{2}}\right) + 2\rho_0\rho_{\frac{\pi}{2}}\left(\varsigma_{\frac{\pi}{4}} - \varsigma_{\frac{3\pi}{4}}\right)\right] \\ \qquad - \frac{1}{16}\left(\rho_0^2 + \rho_{\frac{\pi}{2}}^2\right)\left[\rho_0(\varepsilon + \varepsilon')\cos\psi - \rho_{\frac{\pi}{2}}(\varepsilon - \varepsilon')\sin\psi\right]; \end{cases}$$

pour $l = 4$,

$$(40)\qquad f(2\psi) = \frac{1}{64}\left(\rho_0^2 + \rho_{\frac{\pi}{2}}^2\right)^2.$$

115.

Rapport sur une Note de M. Paulet (de Genève), *relative à un théorème dont le théorème de Fermat ne serait qu'un cas particulier.*

C. R., t. XII, p. 211 (25 janvier 1841).

L'Académie nous a chargés, MM. Sturm, Liouville et moi, de lui rendre compte d'une Note présentée par M. Paulet (de Genève), et relative à un théorème qu'il n'a pas démontré. Nous nous serions bornés probablement à inviter l'auteur à retirer sa Note, si le théorème dont il s'agit ne se trouvait inséré textuellement dans le *Compte rendu* de la séance du 11 janvier, où il est énoncé dans les termes suivants :

Hors du second degré, il n'existe aucune puissance qui puisse se partager dans la somme d'un nombre quelconque de puissances du même degré, mais différentes entre elles.

Pour montrer aux personnes qui auraient lu cet énoncé qu'elles ne doivent pas s'arrêter à chercher la démonstration du nouveau théorème, il nous suffira de leur dire qu'il est inexact, et de le prouver par un exemple. Effectivement, la somme des cubes de 3, 4 et 5 est égale au cube de 6, puisqu'on a

$$216 = 27 + 64 + 125.$$

116.

Arithmétique. — *Rapport sur une méthode abrégée de multiplication, présentée à l'Académie par* M. Thoyer.

C. R., t. XII, p. 242 (1er février 1841).

L'Académie nous a chargés, MM. Coriolis, Sturm et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire, dans lequel M. Thoyer, employé à la Banque de France, expose une méthode abrégée de multiplication,

propre à fournir la somme des produits que l'on peut former avec les termes correspondants de deux suites composées, l'une de nombres quelconques, l'autre de nombres entiers inférieurs à 100.

Avant d'examiner cette méthode, il ne sera pas inutile de dire en peu de mots comment M. Thoyer a été conduit à l'imaginer. On sait que la Banque de France escompte les effets jusqu'à trois mois de date, au taux de 4 pour 100 par an, ou plus exactement de $\frac{1}{9000}$ par jour. De plus, chaque effet présenté à la Banque se trouve accompagné d'un bordereau qui contient, entre autres indications, celle de l'escompte que la Banque doit retenir. Ainsi, pour me servir de l'expression reçue, c'est le *présentateur* qui calcule lui-même la perte qu'il aura à subir. Mais on sent combien il est nécessaire que la Banque puisse vérifier à la fin de chaque journée si la somme des escomptes calculés par les présentateurs est bien celle qui lui est due pour l'*escomptage* des effets admis. C'est pour obtenir une telle vérification que le contrôleur de la Banque a prescrit la formation journalière d'un Tableau composé de trois colonnes, dont la première renferme, dans chaque ligne horizontale, la somme des effets escomptés à une même échéance, tandis que la seconde colonne offre le nombre des jours produisant intérêt, et la troisième les produits des nombres correspondants que contiennent les deux premières colonnes. La somme de ces produits, divisée par 9000, donne évidemment pour quotient la somme des escomptes acquis à la Banque dans le jour que l'on considère. Or, comme l'échéance ne peut être reculée au delà de trois mois, le nombre des jours produisant intérêt ne s'élève jamais, même eu égard aux jours fériés, au delà de 93 ou 94. La question se réduit donc à trouver une somme des produits formés avec des multiplicandes quelconques, mais avec des multiplicateurs entiers, dont le plus grand est inférieur ou tout au plus égal à 94.

Pour résoudre facilement cette question, M. Thoyer écrit les multiplicandes dans une Table à double entrée, analogue à la Table de Pythagore. Seulement les chiffres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

placés au-dessus ou en avant de la première colonne verticale ou horizontale, au lieu de représenter les deux facteurs d'un produit, représentent d'une part les unités et d'autre part les dizaines des multiplicateurs. Or, comme le produit d'un nombre quelconque par un multiplicateur donné est la somme des produits du même nombre par les diverses parties de ce multiplicateur, on peut affirmer que la somme totale cherchée devra résulter de l'addition des nombres que l'on obtiendra quand on multipliera, par l'un des multiplicateurs

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

la somme des multiplicandes renfermés dans la première, la seconde, la troisième, la quatrième... colonne verticale, ou, par l'un des multiplicateurs

0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,

la somme des multiplicandes renfermés dans la première, la seconde, la troisième, la quatrième... colonne horizontale. Donc aux multiplicandes donnés, dont le nombre peut s'élever à 93 ou 94, la Table imaginée par M. Thoyer substitue 20 autres multiplicandes dont les 10 derniers, décuplés, pourront être immédiatement ajoutés aux 10 premiers. Alors on n'aura plus à considérer, avec M. Thoyer, que 10 multiplicandes artificiels, qui devront seulement être multipliés par l'un des multiplicateurs

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On pourrait à la rigueur se dispenser de calculer les multiplicandes correspondants au multiplicateur zéro. Mais le calcul de ceux-ci, bien loin d'être inutile, fournit au contraire une preuve très sûre de l'exactitude des différentes sommes écrites au bas ou à la suite de chaque colonne verticale ou horizontale, puisque, évidemment, les sommes de l'une ou de l'autre espèce, ajoutées séparément les unes aux autres, doivent reproduire un seul et même nombre. C'est ce qu'a fort bien remarqué M. Thoyer, et les seuls perfectionnements dont son Tableau nous paraisse encore susceptible consisteraient : 1° à écrire les divers

chiffres de chacun des multiplicandes donnés sur des lignes horizontales distinctes, afin que l'addition des multiplicandes compris dans une même colonne horizontale puisse s'effectuer aussi aisément que l'addition des multiplicandes compris dans une même colonne verticale; 2° à écrire pareillement sur diverses lignes horizontales les divers chiffres de chaque somme et de chacun des dix multiplicandes artificiels, afin de pouvoir reconnaître plus facilement si la somme de ces derniers est égale, comme elle doit l'être, à la somme faite du nombre dont nous parlions tout à l'heure et de ce même nombre décuplé.

Quant à la somme des produits formés avec neuf des multiplicandes artificiels et les multiplicateurs

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

M. Thoyer l'a calculée en se servant de la méthode ordinaire de multiplication; mais on peut substituer avec avantage à l'emploi de cette méthode la construction d'un second Tableau, dans lequel la même somme se déduirait simplement de l'addition. En effet, pour obtenir la somme dont il s'agit, il suffira d'ajouter le dernier des multiplicandes artificiels à l'avant-dernier, la somme partielle des deux derniers au précédent, etc., de continuer ainsi jusqu'au moment où l'on aura trouvé la somme partielle des neuf multiplicandes correspondants aux multiplicateurs

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

puis de réunir toutes les sommes partielles obtenues. En effectuant la même opération sur les multiplicandes artificiels, pris dans un ordre inverse, on obtiendra facilement la preuve de l'opération que nous venons d'indiquer, et l'on pourra encore, par une seule addition, s'assurer qu'il n'y a pas d'erreurs dans le calcul de la $\frac{1}{9000}$ partie de la somme totale à laquelle on sera parvenu.

Dans un supplément à son Mémoire, M. Thoyer observe avec raison que sa méthode abrégée peut être étendue, avec de légères modifications, au cas où l'on emploie des multiplicateurs entiers supérieurs à 99, mais inférieurs à 1000, de manière à devenir applicable aux calculs

qu'exigent les opérations des diverses banques, des maisons de banque, des caisses d'épargne et des autres établissements financiers. En des cas semblables, il pourrait être avantageux de former, dans trois Tableaux séparés, les sommes des multiplicandes correspondants à des chiffres donnés qui représenteraient des unités, ou des dizaines, ou des centaines des nombres entiers pris pour multiplicateurs.

Quant à ce qui concerne la Banque de France en particulier, on ne peut douter que la méthode imaginée et mise en pratique par M. Thoyer n'offre de grands avantages, et ne rende plus sûre et plus prompte la vérification des escomptes des effets admis chaque jour, en réduisant à une demi-heure environ le travail d'une demi-journée. La sûreté et la promptitude dont il s'agit pourront encore être augmentées à l'aide des perfectionnements que nous avons indiqués, surtout si la Banque fait lithographier des modèles de Tableaux semblables à ceux que nous avons construits et qui seront joints à ce Rapport.

En résumé, nous pensons que la méthode imaginée par M. Thoyer, pour simplifier le calcul des escomptes acquis journellement à la Banque de France, et rendre plus certain le résultat de ce calcul, atteindra parfaitement le but que l'auteur s'est proposé, et que cette méthode mérite l'approbation de l'Académie.

117.

ARITHMÉTIQUE. — *Addition au Rapport sur une méthode de calcul présentée à l'Académie par* M. Thoyer, employé à la Banque de France.

C. R., t. XII, p. 911 (24 mai 1841).

En rendant compte d'un Mémoire présenté à l'Académie par M. Thoyer, nous avons dit que, pour réduire à l'addition le calcul des intérêts produits par divers capitaux, en des temps divers, par exemple le calcul des escomptes journellement acquis à la Banque de France

sur des sommes prêtées par elle et dont le remboursement doit avoir lieu à diverses échéances, il suffisait de construire deux Tableaux dont les modèles seraient joints à notre Rapport. (Ces Tableaux n'ont pu paraître dans le *Compte rendu* de la séance où avait été lu le Rapport [1] : nous allons les donner ici, p. 60.) Pour les bien comprendre, on devra se rappeler que chaque jour la Banque de France prête à diverses personnes et au taux de 4 pour 100 par an, ou plus exactement de $\frac{1}{9000}$ par jour, différentes sommes dont chacune doit être remboursée au plus tard au bout de trois mois. Donc, pour calculer les escomptes journellement acquis à la Banque de France, il suffirait de multiplier le montant des capitaux qui doivent être remboursés à une même échéance par le nombre de jours qui doivent s'écouler jusqu'à l'époque du remboursement; puis, d'ajouter les produits ainsi obtenus, et correspondants aux diverses échéances; et enfin de diviser par 9000 la somme totale de ces produits. Mais, quelque simples que soient les opérations que nous venons d'énoncer, elles peuvent être remplacées par d'autres plus simples encore, que les deux Tableaux permettent d'effectuer très facilement. En effet, chaque capital étant prêté par la Banque pour trois mois au plus, le nombre des jours qui produiront intérêt se trouvera constamment exprimé par un ou deux chiffres. La question sera donc de calculer la somme des produits formés avec des multiplicandes quelconques qui représenteront les divers capitaux remboursables à des échéances diverses, et avec des multiplicateurs dont chacun sera un nombre composé généralement de deux chiffres, savoir, de dizaines et d'unités, le chiffre des dizaines pouvant quelquefois se réduire à zéro. Or, dans le premier Tableau, qui ressemble à une Table de multiplication, et qui a été imaginé par M. Thoyer, chacun des multiplicandes donnés occupe une case comprise à la fois dans deux colonnes, l'une horizontale, l'autre verticale, en avant ou au-dessus de laquelle on lit le chiffre des dizaines ou le chiffre des unités du multiplicateur. Ainsi, en particulier, le multiplicande 79351, compris dans

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, t. VI. — Extrait n° 116, p. 49 et suiv.

la colonne horizontale qui précède le chiffre 5, et dans la colonne verticale que surmonte le chiffre 2, représente un capital de 79351^{fr} prêté par la Banque pour 52 jours, c'est-à-dire : 1° pour 2 jours; 2° pour 5 dizaines de jours. Pareillement, chacun des multiplicandes renfermés dans la colonne verticale que surmonte le chiffre 2 représentera un capital prêté : 1° pour 2 jours; 2° pour une ou plusieurs dizaines de jours. Au contraire, chacun des multiplicandes renfermés dans la colonne horizontale que précède le chiffre 5 représentera un capital prêté : 1° pour un certain nombre de jours inférieur à 10, et par conséquent exprimé par un seul chiffre; 2° pour 5 dizaines de jours. Cela posé, concevons que l'on ajoute entre eux les multiplicandes renfermés dans une même colonne verticale ou horizontale. La somme partielle ainsi obtenue, par exemple, la somme 2794834 placée au bas de la colonne verticale que surmonte le chiffre 2, ou la somme 913559 placée à la suite de la colonne horizontale que précède le chiffre 5, représentera, dans le premier cas, un capital prêté pour 2 jours, dans le second cas un capital prêté pour 5 dizaines de jours. Donc les vingt sommes partielles, placées au bas ou à la suite des dix colonnes verticales ou horizontales, représenteront, les dix premières, des capitaux prêtés pour un nombre de jours inférieur à 10, par conséquent pour un nombre de jours exprimé par l'un des chiffres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

et les dix dernières des capitaux prêtés pour un nombre de dizaines de jours qui sera encore exprimé par l'un de ces mêmes chiffres. Mais l'intérêt que produit un capital prêté pour une seule dizaine de jours est aussi l'intérêt que produirait un capital dix fois plus grand, prêté pour un seul jour. Donc, dans les opérations qu'exige le calcul des intérêts, on pourra remplacer le capital prêté pour 5 dizaines de jours par un capital dix fois plus considérable prêté pour 5 jours seulement. On pourra donc faire abstraction de la somme partielle 913559, et généralement de toutes les sommes partielles placées à la suite des colonnes horizontales, pourvu que l'on ajoute chacune de ces sommes,

après l'avoir décuplée, à la somme partielle placée au bas de la colonne verticale de même rang. Cette nouvelle addition produira dix multiplicandes artificiels qui, dans le premier Tableau, se trouvent écrits au bas des colonnes verticales correspondantes aux chiffres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

et qui peuvent être censés représenter des capitaux dont chacun serait prêté pour un nombre de jours exprimé par l'un de ces mêmes chiffres. Il y a plus : la construction du premier Tableau a précisément pour objet de remplacer un grand nombre de multiplicandes, dont chacun correspond à un multiplicateur de deux chiffres, par dix multiplicandes artificiels, dont chacun correspond à un multiplicateur d'un seul chiffre.

Avant de passer à l'explication du second Tableau, nous avons à faire une remarque qui n'est pas sans importance. On pourrait se dispenser, à la rigueur, de calculer le multiplicande artificiel correspondant au multiplicateur zéro; puisqu'il est bien évident qu'aucun intérêt n'est exigible, quand le nombre de jours, pour lesquels le capital est prêté, se réduit à zéro. Toutefois il est utile de conserver, dans le premier Tableau, le multiplicande dont il s'agit, ainsi que les sommes partielles des capitaux renfermés dans les colonnes verticale et horizontale que le chiffre zéro surmonte ou précède. En effet, il est clair que la somme totale des multiplicandes donnés peut également résulter, soit de l'addition des sommes partielles placées au bas des colonnes verticales, soit de l'addition des sommes partielles placées à la suite des colonnes horizontales. Or cette seule observation fournit un moyen très simple de vérifier, d'un seul coup, l'exactitude des sommes partielles de l'une et de l'autre espèce, dans le cas où on les a toutes calculées. Ce n'est pas tout : après avoir trouvé la somme totale des multiplicandes donnés, il suffira évidemment d'ajouter à elle-même cette somme décuplée, pour obtenir la somme totale des multiplicandes artificiels. Cette dernière somme, qui termine le premier Tableau, sert donc à constater l'exactitude des multiplicandes artificiels, dans

le cas où on les a tous calculés, y compris celui qui répond au multiplicateur zéro.

Après avoir construit le Tableau que nous venons d'expliquer et calculé de cette manière, à l'aide de quelques additions, les dix multiplicandes artificiels, M. Thoyer, laissant de côté le premier d'entre eux, multipliait chacun des neuf autres par le multiplicateur correspondant, puis cherchait la somme des neuf produits ainsi obtenus. Nous lui avons indiqué un moyen de réduire encore ces dernières opérations à de simples additions. Ce moyen, dont il fait maintenant usage, consiste à construire le second Tableau, qui offre dans son milieu une ligne horizontale où se trouvent écrits les neuf multiplicandes artificiels correspondants aux multiplicateurs

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Une ligne horizontale, immédiatement inférieure et terminée par une case vide, renferme aussi, dans son avant-dernière case, le dernier multiplicande artificiel. On ajoute celui-ci à l'avant-dernier multiplicande, placé immédiatement au-dessus; on reporte dans la case précédente la somme obtenue que l'on ajoute elle-même au multiplicande situé alors au-dessus d'elle, et l'on continue de la même manière, jusqu'à ce que l'on obtienne une dernière somme dans laquelle entrent évidemment les neuf multiplicandes artificiels. Les huit sommes, formées comme on vient de le dire, et successivement déduites des autres, occupent, vers le bas du second Tableau, les huit premières cases d'une colonne horizontale. Nous les avons nommées *sommes successives* des multiplicandes artificiels, attendu qu'elles peuvent être considérées comme résultant de l'addition des deux derniers multiplicandes artificiels, puis des trois derniers, puis des quatre derniers, ..., puis enfin, comme on l'a déjà dit, des neuf multiplicandes correspondants aux multiplicateurs

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

La neuvième case de la colonne horizontale dont nous venons de parler

doit être naturellement occupée par le dernier multiplicande artificiel, qui se trouve seul écrit au-dessus de cette case dans les deux lignes horizontales immédiatement supérieures à cette colonne; et, en ajoutant ce multiplicande aux huit sommes qui le précèdent dans la même colonne, on obtient une somme totale qui renferme une seule fois le premier des neuf multiplicandes artificiels, deux fois le second, trois fois le troisième, ..., enfin neuf fois le neuvième. Cette somme totale, que l'on trouve écrite à la suite de la colonne, est donc précisément celle qu'il s'agissait de calculer, savoir la somme des neuf produits formés avec les neuf multiplicandes artificiels et les multiplicateurs correspondants.

Après avoir exécuté, dans la partie inférieure du second Tableau, les opérations que nous venons d'indiquer, on a, dans la partie supérieure, exécuté en sens inverse des opérations du même genre, de manière à obtenir la somme totale qui renferme une seule fois le dernier des neuf multiplicandes artificiels, deux fois l'avant-dernier, ..., enfin neuf fois le premier. Celle-ci, ajoutée à la somme totale que l'on avait d'abord obtenue, reproduit, dans la partie supérieure du second Tableau, la somme des neuf multiplicandes artificiels décuplée; enfin, en ajoutant à cette dernière somme le produit par 10 du multiplicande artificiel que l'on avait omis à dessein, et qui correspond au multiplicateur zéro, on doit retrouver la somme totale des multiplicandes artificiels décuplée. Ainsi le nombre qui termine supérieurement le second Tableau doit être dix fois plus considérable que le nombre qui termine inférieurement le premier Tableau, et un zéro placé à la suite de ce dernier nombre doit le transformer en l'autre. Cette dernière condition, supposée remplie, est une preuve de l'exactitude de toutes les opérations exécutées et du nombre qu'elles ont fourni comme propre à représenter la somme des produits formés avec les neuf multiplicandes artificiels.

Les trois derniers nombres, par lesquels se termine inférieurement le second Tableau, sont : 1° la somme des produits formés avec les multiplicandes artificiels, calculée et vérifiée comme on vient de le

dire; 2° la neuvième partie de cette somme calculée d'abord séparément, puis ajoutée à la somme elle-même. Or, comme l'addition d'un nombre à sa neuvième partie offre pour résultat les dix neuvièmes du nombre donné, les deux derniers des trois nombres qui terminent le second Tableau doivent se déduire l'un de l'autre par la seule transposition de la virgule décimale. Cette condition, supposée remplie, est une preuve que l'on a obtenu la valeur exacte de la neuvième partie de la somme des produits formés avec les multiplicandes artificiels. D'ailleurs cette neuvième partie devient la neuf-millième partie de la même somme, quand la virgule décimale est transposée de manière à laisser après elle la place de trois chiffres, ainsi qu'on le voit dans le nombre

$$99422,67\frac{1}{9},$$

donné par le second Tableau comme propre à représenter le montant des escomptes acquis à la Banque de France le 29 octobre 1839.

Parmi les additions qu'exige la formation des deux Tableaux, celles qui demandent le plus d'attention sont les additions des nombres renfermés dans les colonnes horizontales. Elles deviennent plus faciles quand on écrit chacun de ces nombres sur la diagonale de la case qui le renferme.

Calcul des escomptes, à 4 pour 100 l'an, acquis à la Banque de France le 29 octobre 1839.

PREMIER TABLEAU. — *Recherche des multiplicandes artificiels.*



Calcul des escomptes acquis à la Banque de France le 29 octobre 1830.

DEUXIÈME TABLEAU, *où l'on forme par addition la somme totale des produits.*

| | | |

Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n),$$

la formule (2) se trouvera réduite à

$$(3) \qquad f(x) = \frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}\frac{\varphi(x)}{x - x_1} + \frac{f(x_2)}{\varphi'(x_2)}\frac{\varphi(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}\frac{\varphi(x)}{x - x_n}.$$

La formule (2) ou (3) subsiste, quelles que soient les valeurs particulières de x représentées par

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n.$$

Concevons maintenant que les valeurs particulières de x se réduisent aux divers termes de la progression géométrique

$$r, \quad \theta r, \quad \theta^2 r, \quad \dots, \quad \theta^{n-1} r.$$

On aura

$$\varphi(x) = (x - r)(x - \theta r)\dots(x - \theta^{n-1} r);$$

et, si l'on prend pour θ une racine primitive de l'équation binôme

$$x^n = 1,$$

on trouvera simplement

$$\varphi(x) = x^n - r^n, \qquad \varphi'(x) = n x^{n-1}.$$

Donc alors la formule (3) donnera

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^n - 1}{\frac{x}{r} - 1} f(r) + \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^n - 1}{\frac{x}{r} - \theta} \theta f(\theta r) + \dots + \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^n - 1}{\frac{x}{r} - \theta^{n-1}} \theta^{n-1} f(\theta^{n-1} r)\right].$$

Comme on aura d'ailleurs généralement

$$\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^n - 1}{\frac{x}{r} - \theta^l} = \left(\frac{x}{r}\right)^{n-1} + \theta^l \left(\frac{x}{r}\right)^{n-2} + \theta^{2l} \left(\frac{x}{r}\right)^{n-3} + \dots + \theta^{(n-1)l},$$

le coefficient a_m de x^m, dans le second membre de l'équation (1) ou (4),

sera évidemment déterminé par la formule

$$(5) \qquad a_m = \frac{f(r) + \theta^{-m} f(\theta r) + \theta^{-2m} f(\theta^2 r) + \dots + \theta^{-(n-1)m} f(\theta^{n-1} r)}{n} \frac{1}{r^m}.$$

On arrivera directement aux mêmes conclusions en partant de l'équation (1) de laquelle on tire

$$(6) \quad \begin{cases} f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1}, \\ f(\theta r) = a_0 + a_1 r\theta + a_2 r^2 \theta^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1} \theta^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f(\theta^{n-1} r) = a_0 + a_1 r\theta^{n-1} + a_2 r^2 \theta^{2(n-1)} + \dots + a_{n-1} r^{n-1} \theta^{(n-1)^2}. \end{cases}$$

En effet, puisque la somme

$$1 + \theta^m + \theta^{2m} + \dots + \theta^{(n-1)m} = \frac{\theta^{mn} - 1}{\theta^m - 1}$$

s'évanouit pour toute valeur de m non divisible par n, les formules (6), respectivement multipliées par les facteurs

$$1, \quad \theta^{-m}, \quad \theta^{-2m}, \quad \dots, \quad \theta^{-(n-1)m},$$

puis combinées entre elles par voie d'addition, reproduiront évidemment l'équation (5).

L'équation (5) peut encore s'écrire comme il suit

$$(7) \qquad a_m = \frac{r^{-m}}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} [\theta^{-ml} f(\theta^l r)],$$

la somme indiquée par le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad n-1$$

de l'exposant l, qui fournissent des valeurs distinctes de θ^l. En substituant la valeur précédente de a_m dans l'équation (1), on trouvera

$$(8) \qquad f(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} \left[\left(\frac{x}{r}\right)^m \theta^{-ml} f(\theta^l r)\right]$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} \left[\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^n - 1}{\frac{x}{r} - \theta^l} \theta^l f(\theta^l r) \right]. \tag{9}$$

Cette dernière équation coïncide avec la formule (4).

Soit maintenant

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} \tag{10}$$

une nouvelle fonction entière de la variable x. Le terme indépendant de x, dans le développement du produit

$$f(x) F\left(\frac{1}{x}\right),$$

sera la somme s, déterminée par la formule

$$s = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}. \tag{11}$$

Or, en vertu de l'équation (7), la formule (11) donnera

$$s = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} [A_m r^{-m} \theta^{-ml} f(\theta^l r)] \tag{12}$$

ou, ce qui revient au même,

$$s = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} [F(\theta^{-l} r^{-1}) f(\theta^l r)]. \tag{13}$$

A la formule (13) on pourrait substituer encore celle que nous allons indiquer.

Soient

$$\alpha, \quad \epsilon, \quad \gamma, \quad \ldots$$

$n-1$ expressions réelles ou imaginaires, choisies de manière à vérifier la condition

$$\frac{A_0}{n-1} = \frac{A_1}{\alpha+\epsilon+\gamma+\ldots} = \frac{A_2}{\alpha^2+\epsilon^2+\gamma^2+\ldots} = \ldots = \frac{A_{n-1}}{\alpha^{n-1}+\epsilon^{n-1}+\gamma^{n-1}+\ldots}$$

ou, ce qui revient au même, de manière à vérifier les formules

$$\begin{cases} \alpha + \epsilon + \gamma + \ldots = (n-1)\frac{A_1}{A_0}, \\ \alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \ldots = (n-1)\frac{A_2}{A_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha^{n-1} + \epsilon^{n-1} + \gamma^{n-1} + \ldots = (n-1)\frac{A_{n-1}}{A_0}. \end{cases} \tag{14}$$

Il sera facile d'obtenir l'équation qui aura pour racines

$$\alpha, \quad \epsilon, \quad \gamma, \quad \ldots.$$

Or, après avoir tiré de cette équation les valeurs de α, ϵ, γ, ..., on aura évidemment, en vertu des formules (11), (14) et (1),

$$s = A_0 \frac{f(\alpha) + f(\epsilon) + f(\gamma) + \ldots}{n-1}. \tag{15}$$

Nous joindrons ici une observation importante. Supposons que, les fonctions $f(x)$, $F(x)$ étant, non plus du degré $n-1$, mais du degré n, les équations (1) et (10) se trouvent remplacées par les suivantes

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \tag{16}$$

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n; \tag{17}$$

le terme indépendant de x, dans le développement du produit

$$f(x) F\left(\frac{1}{x}\right),$$

sera la valeur de s déterminée par la formule

$$s = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1} + A_n a_n. \tag{18}$$

Or, pour que cette dernière valeur de s puisse encore se calculer à l'aide de la formule (12), θ désignant toujours une racine primitive de l'équation binôme

$$x^n = 1,$$

il suffira que l'on choisisse convenablement la valeur de r. En effet, si

l'on substitue la formule (16) à la formule (1), l'équation (7) continuera évidemment de subsister pour les valeurs

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1$$

du nombre m; mais, pour une valeur nulle de m, cette même équation se trouvera remplacée par la suivante :

$$a_0 + a_n r^n = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} [f(r)]. \tag{19}$$

On aura donc alors

$$A_0 a_0 + A_n a_n = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} [A_0 f(r)], \tag{20}$$

pourvu que l'on choisisse r de manière à vérifier la formule

$$r^n = \frac{A_n}{A_0}, \tag{21}$$

et sous cette condition on obtiendra de nouveau la formule (12).

Dans les diverses formules ci-dessus établies, la racine primitive θ de l'équation binôme

$$x^n = 1$$

peut être réduite à

$$e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}.$$

Si d'ailleurs on fait croître indéfiniment le nombre n, on verra ces formules se convertir en d'autres équations déjà connues. Par exemple, en prenant pour r une quantité positive supérieure au module de x et posant

$$\theta' = e^{p\sqrt{-1}}, \qquad re^{p\sqrt{-1}} = \zeta, \qquad x = a,$$

on tirera de la formule (9)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - x} dp.$$

Observons encore que les diverses formules établies dans ce paragraphe peuvent être facilement étendues au cas où les fonctions

$$f(x), \quad F(x)$$

se trouveraient remplacées par des fonctions entières de deux ou de plusieurs variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots.$$

Ainsi, en particulier, si l'on désigne par

$$f(x, y)$$

une fonction entière des variables x, y, qui soit du degré $n-1$ par rapport à x, et du degré $n'-1$ par rapport à y; alors, en nommant r une valeur particulière de x, s une valeur particulière de y, et

$$\theta, \quad \theta'$$

des racines primitives des équations

$$x^n = 1, \qquad x^{n'} = 1,$$

on tirera de la formule (8)

$$f(x, y) = \frac{1}{nn'} \sum_{m'=0}^{m'=n'-1} \sum_{l'=0}^{l'=n'-1} \sum_{m=0}^{m=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} \left[\left(\frac{x}{r}\right)^m \left(\frac{y}{s}\right)^{m'} \theta^{-ml} \theta'^{-m'l'} f(\theta^l r, \theta'^{l'} s) \right], \tag{22}$$

et de la formule (9)

$$f(x, y) = \frac{1}{nn'} \sum_{l'=0}^{l'=n'-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^n - 1}}{\frac{x}{r} - \theta^l} \frac{\left(\frac{y}{s}\right)^{n'} - 1}{\frac{y}{s} - \theta'^{l'}} \theta^l \theta'^{l'} f(\theta^l r, \theta'^{l'} s) \right]. \tag{23}$$

§ II. — *Formules d'interpolation qui déterminent la valeur générale d'une fonction entière des sinus et cosinus d'un même arc.*

Diverses formules d'interpolation, par exemple celles que Lagrange a obtenues dans le Tome III des anciens *Mémoires de l'Académie de Turin*, et celles que j'ai données à mon tour dans un Mémoire sur la Mécanique céleste, présenté à la même Académie le 11 octobre 1831,

fournissent le moyen de développer une fonction entière des sinus et cosinus d'un arc suivant les sinus et les cosinus des multiples de cet arc. Or ces diverses formules d'interpolation se déduisent immédiatement de celles qui, dans le premier paragraphe, servent à déterminer la valeur générale d'une fonction entière de la variable x. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

Soient

$$f(t)$$

une fonction entière de $\sin t$ et de $\cos t$, et k le degré de cette fonction. Le produit

$$e^{kt\sqrt{-1}} f(t),$$

considéré comme fonction de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{t\sqrt{-1}},$$

sera évidemment une fonction entière du degré $2k+1$. Donc, si l'on désigne par n un nombre entier égal ou supérieur à $2k+1$, et par

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad \ldots, \quad t_n$$

n valeurs particulières de la variable t, on aura, en vertu de la formule d'interpolation de Lagrange,

$$(1)\quad \begin{cases} e^{kt\sqrt{-1}} f(t) = \dfrac{(e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_2\sqrt{-1}})\ldots(e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_n\sqrt{-1}})}{(e^{t_1\sqrt{-1}} - e^{t_2\sqrt{-1}})\ldots(e^{t_1\sqrt{-1}} - e^{t_n\sqrt{-1}})} e^{kt_1\sqrt{-1}} f(t_1) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \dfrac{(e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_1\sqrt{-1}})\ldots(e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_{n-1}\sqrt{-1}})}{(e^{t_n\sqrt{-1}} - e^{t_1\sqrt{-1}})\ldots(e^{t_n\sqrt{-1}} - e^{t_{n-1}\sqrt{-1}})} e^{kt_n\sqrt{-1}} f(t_n). \end{cases}$$

Cette dernière formule subsistera, par exemple, si l'on prend

$$n = 2k+1 \qquad \text{ou} \qquad n = 2k+2.$$

D'ailleurs, comme on aura généralement

$$\frac{e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_m\sqrt{-1}}}{e^{t_l\sqrt{-1}} - e^{t_m\sqrt{-1}}} = e^{\frac{1}{2}(t-t_l)\sqrt{-1}} \frac{\sin\dfrac{t-t_m}{2}}{\sin\dfrac{t_l-t_m}{2}},$$

on pourra facilement transformer en produits de sinus les deux termes de chacune des fractions comprises dans le second membre de l'équation (1); et, si l'on suppose en particulier

$$n = 2k+1,$$

l'équation (1) donnera

$$(2)\quad \begin{cases} f(t) = \dfrac{\sin\dfrac{t-t_2}{2}\sin\dfrac{t-t_3}{2}\ldots\sin\dfrac{t-t_n}{2}}{\sin\dfrac{t_1-t_2}{2}\sin\dfrac{t_1-t_3}{2}\ldots\sin\dfrac{t_1-t_n}{2}} f(t_1) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \dfrac{\sin\dfrac{t-t_1}{2}\sin\dfrac{t-t_2}{2}\ldots\sin\dfrac{t-t_{n-1}}{2}}{\sin\dfrac{t_n-t_1}{2}\sin\dfrac{t_n-t_2}{2}\ldots\sin\dfrac{t_n-t_{n-1}}{2}} f(t_n). \end{cases}$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(3)\quad \varphi(x) = (x - e^{t_1\sqrt{-1}})(x - e^{t_2\sqrt{-1}})\ldots(x - e^{t_n\sqrt{-1}}),$$

on verra l'équation (1), divisée par l'exponentielle

$$e^{kt\sqrt{-1}},$$

se réduire simplement à la formule

$$(4)\quad \begin{cases} f(t) = \dfrac{\varphi(e^{t\sqrt{-1}})}{e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_1\sqrt{-1}}} e^{k(t_1-t)\sqrt{-1}} \dfrac{f(t_1)}{\varphi'(e^{t_1\sqrt{-1}})} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{\varphi(e^{t\sqrt{-1}})}{e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_n\sqrt{-1}}} e^{k(t_n-t)\sqrt{-1}} \dfrac{f(t_n)}{\varphi'(e^{t_n\sqrt{-1}})}, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(5)\quad f(t) = \sum_{l=1}^{l=n} \left[\frac{\varphi(e^{t\sqrt{-1}})}{e^{t\sqrt{-1}} - e^{t_l\sqrt{-1}}} e^{k(t_l-t)\sqrt{-1}} \frac{f(t_l)}{\varphi'(e^{t_l\sqrt{-1}})} \right].$$

A l'aide de la formule (5), le coefficient d'une puissance donnée de l'exponentielle

$$e^{t\sqrt{-1}},$$

dans le développement de la fonction $f(t)$, se déduira sans peine du

coefficient qui affecte la même puissance dans le développement du produit

$$\frac{\varphi(e^{t\sqrt{-1}})}{e^{t\sqrt{-1}}-e^{t_1\sqrt{-1}}}\,e^{k(t_1-t)\sqrt{-1}},$$

et, par suite, des coefficients qui affectent les diverses puissances de x dans le développement de la fonction

$$\varphi(x).$$

En effet, supposons

$$\varphi(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n. \tag{6}$$

On en conclura

$$\varphi(e^{t\sqrt{-1}})=e^{nt\sqrt{-1}}+\alpha_1e^{(n-1)t\sqrt{-1}}+\alpha_2e^{(n-2)t\sqrt{-1}}+\ldots+\alpha_{n-1}e^{t\sqrt{-1}}+\alpha_n; \tag{7}$$

et, comme on a d'ailleurs

$$\frac{1}{e^{t\sqrt{-1}}-e^{t_1\sqrt{-1}}}=e^{-t\sqrt{-1}}\left[1+e^{(t_1-t)\sqrt{-1}}+e^{2(t_1-t)\sqrt{-1}}+\ldots\right],$$

on trouvera définitivement

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\varphi(e^{t\sqrt{-1}})}{e^{t\sqrt{-1}}-e^{t_1\sqrt{-1}}}\,e^{k(t_1-t)\sqrt{-1}}\\&=e^{kt_1\sqrt{-1}}e^{(n-k-1)t\sqrt{-1}}+\left(\alpha_1+e^{t_1\sqrt{-1}}\right)e^{kt_1\sqrt{-1}}e^{(n-k-2)t\sqrt{-1}}\\&\qquad+\left(\alpha_2+\alpha_1e^{t_1\sqrt{-1}}+e^{2t_1\sqrt{-1}}\right)e^{kt_1\sqrt{-1}}e^{(n-k-3)t\sqrt{-1}}\\&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right. \tag{8}$$

D'ailleurs, si l'on considère

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_n$$

comme des inconnues déterminées par le système des équations que l'on déduit de la formule (7), quand on attribue successivement à la variable t les diverses valeurs

$$t_1,\quad t_2,\quad \ldots,\quad t_n,$$

on pourra, en vertu des principes établis dans l'*Analyse algébrique*,

obtenir facilement les valeurs de ces inconnues, lorsque les coefficients de chacune d'elles, dans les équations dont il s'agit, formeront une progression géométrique, ou, ce qui revient au même, lorsque les quantités

$$t_1,\quad t_2,\quad \ldots,\quad t_n$$

formeront une progression arithmétique. Donc alors aussi l'on pourra aisément tirer de la formule (5) le coefficient qui affecte une puissance donnée de l'exponentielle

$$e^{t\sqrt{-1}}$$

dans le développement de $f(t)$.

Concevons, pour fixer les idées, que les quantités

$$t_1,\quad t_2,\quad \ldots,\quad t_n$$

se confondent avec les divers termes

$$\tau,\quad \tau+\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad \tau+(n-1)\frac{2\pi}{n}$$

d'une progression arithmétique dont la raison serait $\frac{2\pi}{n}$. On trouvera, dans ce cas,

$$\varphi(x)=x^n-e^{n\tau\sqrt{-1}},\qquad \varphi'(x)=nx^{n-1},$$

et, en posant

$$\theta=e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on tirera de la formule (5)

$$f(t)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{l=n-1}\left[\frac{1-e^{n(t-\tau)\sqrt{-1}}}{1-\theta^{-l}e^{(t-\tau)\sqrt{-1}}}\,\theta^{lk}e^{k(\tau-t)\sqrt{-1}}f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)\right]; \tag{9}$$

puis, en développant le rapport

$$\frac{1-e^{n(t-\tau)\sqrt{-1}}}{1-\theta^{-l}e^{(t-\tau)\sqrt{-1}}},$$

on conclura de l'équation (9)

$$f(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{m=n-1}\sum_{l=0}^{l=n-1}\left[e^{(m-k)\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}}f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)\right]. \tag{10}$$

Si, dans cette dernière équation, on pose

$$n = 2k+1,$$

on pourra, sans inconvénient, y supposer la sommation relative à la lettre l effectuée, non plus entre les limites

$$l = 0, \qquad l = n-1 = 2k,$$

mais entre les limites

$$l = -k, \qquad l = k,$$

et, par suite, on trouvera

$$(11)\qquad f(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{m=-k}^{m=k} \sum_{l=-k}^{l=k} \left[e^{m\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{2k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{2k+1}\right)\right].$$

Si l'on prenait, au contraire,

$$n = 2k+2,$$

on trouverait

$$(12)\qquad f(t) = \frac{1}{2(k+1)} \sum_{m=-k}^{m=k+1} \sum_{l=-k}^{l=k+1} \left[e^{m\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{\pi l}{k+1}\right)\right].$$

Il est bon d'observer que, dans la formule (9), on a

$$\frac{1-e^{n(t-\tau)\sqrt{-1}}}{1-\beta^{-1}e^{(t-\tau)\sqrt{-1}}} = \frac{\sin\frac{n}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)} e^{\frac{n-1}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}}.$$

Donc la formule (9) peut être réduite à

$$(13)\quad f(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} \frac{\sin\frac{n}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)} e^{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right).$$

Lorsque $f(t)$ représente une fonction réelle de t, la formule (9) ou

(13) se réduit à

$$(14)\quad f(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} \frac{\sin\frac{n}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)} \cos\left[\frac{n-2k-1}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)\right] f\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right),$$

et la formule (10) à

$$(15)\quad f(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} \cos\left[(m-k)\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)\right] f\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right).$$

Si l'on suppose en particulier $n = 2k+1$, la formule (14) donnera

$$(16)\quad f(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{l=0}^{l=2k} \frac{\sin\frac{2k+1}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{2k+1}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{2k+1}\right)} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

Si l'on suppose au contraire $n = 2k+2$, on trouvera

$$(17)\quad f(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=2k+1} \frac{\sin\left[(k+1)\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right)\right]}{\sin\frac{1}{2}\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right)} \cos\frac{1}{2}\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right) f\left(\tau + \frac{\pi l}{k+1}\right).$$

Dans cette dernière supposition, la formule (15) donnera

$$f(t) = \frac{1}{2(k+1)} \sum_{m=0}^{m=2k+1} \sum_{l=0}^{l=2k+1} \cos\left[(m-k)\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right)\right] f\left(\tau + \frac{\pi l}{k+1}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18)\quad f(t) = \frac{1}{2(k+1)} \sum_{m=0}^{m=2k} \sum_{l=0}^{l=2k+1} \cos\left[(m-k)\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right)\right] f\left(\tau + \frac{\pi l}{k+1}\right),$$

attendu que la somme des termes correspondants à

$$m = 2k+1 \qquad \text{ou} \qquad m-k = k+1,$$

c'est-à-dire, la somme des termes qui renferment des arcs de la forme

$$(k+1)\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right),$$

disparaîtra de la fonction $f(t)$.

Enfin, dans la formule (18), que l'on peut encore écrire comme il suit

$$(19)\quad f(t)=\frac{1}{2(k+1)}\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{l=-k}^{l=k+1}\cos m\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right)f\left(\tau+\frac{\pi l}{k+1}\right),$$

le facteur

$$\cos m\left(t-\tau-\frac{\pi l}{k+1}\right)$$

pourra être réduit au produit

$$\cos mt\cos m\left(\tau+\frac{\pi l}{k+1}\right)$$

si $f(t)$ est une fonction paire de t, c'est-à-dire, si l'on a

$$(20)\qquad f(t)=a_0+a_1\cos t+a_2\cos 2t+\ldots+a_k\cos kt,$$

et au produit

$$\sin mt\sin m\left(\tau+\frac{\pi l}{k+1}\right)$$

si $f(t)$ est une fonction impaire de t, c'est-à-dire, si l'on a

$$(21)\qquad f(t)=b_0+b_1\sin t+b_2\sin 2t+\ldots+b_k\sin kt.$$

Dans le second cas, en posant $\tau=0$, on pourra réduire la formule (19) à la suivante

$$(22)\qquad f(t)=\frac{2}{k+1}\sum_{m=1}^{m=k}\sum_{l=1}^{l=k}\sin mt\sin\frac{\pi ml}{k+1}f\left(\frac{\pi l}{k+1}\right),$$

en sorte qu'on aura

$$b_m=\frac{2}{k+1}\sum_{l=1}^{l=k}\sin\frac{\pi ml}{k+1}f\left(\frac{\pi l}{k+1}\right),$$

comme Lagrange l'a trouvé dans le Tome III des anciens Mémoires de l'Académie de Turin.

Concevons maintenant que les valeurs particulières de t, représentées par

$$t_1,\quad t_2,\quad \ldots,\quad t_n,$$

forment une progression arithmétique dont la raison ρ diffère de $\frac{2\pi}{n}$, et coïncident, par exemple, avec les divers termes de la suite

$$\tau-k\rho,\quad \tau-(k-1)\rho,\quad \ldots,\quad \tau-\rho,\quad \tau,\quad \tau+\rho,\quad \ldots,\quad \tau+(k-1)\rho,\quad \tau+k\rho.$$

On pourra déterminer encore la valeur générale de $f(t)$, non seulement à l'aide de l'équation (2), mais aussi à l'aide de la formule (5), pourvu que, dans cette dernière formule, on suppose $n=2k+1$, et

$$\varphi(x)=e^{n\tau\sqrt{-1}}\psi\left(xe^{-\tau\sqrt{-1}}\right),$$

la valeur de $\psi(x)$ étant

$$(23)\quad \begin{cases}\psi(x)=x^{2k+1}-\dfrac{\sin(k+\frac{1}{2})\rho}{\sin\frac{1}{2}\rho}x^{2k}+\dfrac{\sin(k+\frac{1}{2})\rho\sin k\rho}{\sin\frac{1}{2}\rho\sin\rho}x^{2k-1}-\ldots\\ \qquad -\dfrac{\sin(k+\frac{1}{2})\rho\sin k\rho}{\sin\frac{1}{2}\rho\sin\rho}x^2+\dfrac{\sin(k+\frac{1}{2})\rho}{\sin\rho}x-1.\end{cases}$$

Les diverses formules qui précèdent peuvent être facilement étendues au cas où il s'agit de déterminer la valeur générale d'une fonction entière des sinus et cosinus de plusieurs arcs

$$t,\quad t',\quad \ldots,$$

d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues. Cette extension est semblable à celle des formules que nous avions d'abord obtenues dans le § I.

La formule (2), ainsi que plusieurs de celles qui en ont été déduites, et la formule (23) elle-même, sont extraites du Mémoire que j'ai présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831, et qui a été paraphé à cette époque par le secrétaire de cette Académie, puis lithographié en grande partie, et avec quelques additions, en 1832. La formule (10)

en particulier se trouve établie pour les valeurs

$$2k+1 \quad \text{et} \quad 2k+2$$

du nombre n, puis étendue au cas où l'on considère une fonction entière des sinus et cosinus de deux arcs t, t', et enfin appliquée à des problèmes de Mécanique céleste, dans le § III du Mémoire lithographié.

119.

ANALYSE ALGÉBRIQUE. — *Sur le développement d'une fonction entière du sinus et du cosinus d'un arc en série ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples de cet arc.*

C. R., t. XII, p. 323 (15 février 1841).

Soient

$$f(t)$$

une fonction entière de $\sin t$ et de $\cos t$, et k le degré de cette fonction. Soient d'ailleurs τ une valeur particulière de t, et n un nombre entier égal ou supérieur à $2k+1$. On aura, comme on l'a vu dans un précédent Mémoire,

$$(1) \qquad f(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} e^{(m-k)\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad f(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=-k}^{m=n-k-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} e^{m\left(t-\tau-\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right).$$

Concevons maintenant que, la fonction $f(t)$ étant développée en une série ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples de t, ou, ce qui revient au même, suivant les puissances entières, positives, nulles

ou négatives, de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{t\sqrt{-1}},$$

on désigne par a_m le coefficient de

$$e^{mt\sqrt{-1}}$$

dans ce développement, en sorte que l'on ait

$$(3) \qquad \begin{cases} f(t) = a_0 + a_1 e^{t\sqrt{-1}} + a_2 e^{2t\sqrt{-1}} + \ldots + a_k e^{kt\sqrt{-1}} \\ \qquad + a_{-1} e^{-t\sqrt{-1}} + a_{-2} e^{-2t\sqrt{-1}} + \ldots + a_{-k} e^{-kt\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) entraîneront la suivante

$$(4) \qquad a_m = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} e^{-m\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right),$$

à laquelle on peut aussi arriver directement en partant de l'équation (3) et des propriétés connues des racines de l'unité.

En vertu de la formule (4), *le coefficient a_m d'une puissance quelconque de l'exponentielle trigonométrique $e^{t\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction $f(t)$ en une série ordonnée suivant les puissances entières de la même exponentielle, sera une moyenne arithmétique entre diverses valeurs de cette fonction respectivement multipliées par diverses exponentielles trigonométriques.* Donc, par suite, si la fonction $f(t)$ est réelle, *le module de chaque coefficient a_m ne pourra surpasser la plus grande valeur numérique que cette fonction puisse acquérir.* Cette dernière proposition subsistant, quel que soit le nombre k, par conséquent quel que soit le nombre des termes compris dans la fonction $f(t)$, peut être étendue au cas même où le nombre de ces termes devient infini.

Si l'on cherche en particulier le premier terme a_0 du développement de la fonction $f(t)$, suivant les puissances entières positives ou négatives de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{t\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right). \tag{5}$$

Soient maintenant

$$F(t)$$

une nouvelle fonction entière de $\sin t$ et de $\cos t$, ou, ce qui revient au même, de l'exponentielle trigonométrique

$$e^{t\sqrt{-1}},$$

et h le degré de cette fonction, en sorte que l'on ait

$$\begin{cases} F(t) = A_0 + A_1 e^{t\sqrt{-1}} + A_2 e^{2t\sqrt{-1}} + \ldots + A_h e^{ht\sqrt{-1}} \\ \qquad + A_{-1} e^{-t\sqrt{-1}} + A_{-2} e^{-2t\sqrt{-1}} + \ldots + A_{-h} e^{-ht\sqrt{-1}}. \end{cases} \tag{6}$$

Si l'on nomme s le premier terme du développement du produit

$$f(t)\,F(t)$$

en série ordonnée suivant les puissances entières, positives ou négatives de cette exponentielle, on trouvera :

1° En supposant $h =$ ou $< k$,

$$\begin{cases} s = A_0 a_0 + A_{-1} a_1 + A_{-2} a_2 + \ldots + A_{-h} a_h \\ \qquad + A_1 a_{-1} + A_2 a_{-2} + \ldots + A_h a_{-h}; \end{cases} \tag{7}$$

et, par suite, en vertu de la formule (4),

$$s = \frac{1}{n} \sum_{m=-h}^{m=h} \sum_{l=0}^{l=n-1} A_m e^{m\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right); \tag{8}$$

2° En supposant $h =$ ou $> k$,

$$\begin{cases} s = A_0 a_0 + A_{-1} a_1 + A_{-2} a_2 + \ldots + A_{-k} a_k \\ \qquad + A_1 a_{-1} + A_2 a_{-2} + \ldots + A_k a_{-k}; \end{cases} \tag{9}$$

et, par suite, en vertu de la formule (4),

$$s = \frac{1}{n} \sum_{m=-k}^{m=k} \sum_{l=0}^{l=n-1} A_m e^{m\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right). \tag{10}$$

Dans la première hypothèse, c'est-à-dire en supposant $h \leqq k$, on pourra réduire l'équation (8) à la forme

$$s = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{l=n-1} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right) F\left(\tau + \frac{2\pi l}{n}\right). \tag{11}$$

Si, pour fixer les idées, on prend $n = 2k+1$, la formule (11) donnera

$$s = \frac{1}{2k+1} \sum_{l=0}^{l=2k} f\left(\tau + \frac{2\pi l}{2k+1}\right) F\left(\tau + \frac{2\pi l}{2k+1}\right). \tag{12}$$

Si, au contraire, on prend $n = 2k+2$, on trouvera

$$s = \frac{1}{2(k+1)} \sum_{l=0}^{l=2k+1} f\left(\tau + \frac{\pi l}{k+1}\right) F\left(\tau + \frac{\pi l}{k+1}\right). \tag{13}$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons une remarque importante. Si, dans l'équation (3), on substitue successivement à la variable t les divers termes de la progression arithmétique

$$\tau,\quad \tau + \frac{2\pi}{n},\quad \tau + \frac{4\pi}{n},\quad \ldots,\quad \tau + \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

et si l'on ajoute entre elles les formules ainsi obtenues, après les avoir respectivement multipliées par les facteurs

$$1,\quad e^{-\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},\quad e^{-\frac{4m\pi}{n}\sqrt{-1}},\quad \ldots,\quad e^{-\frac{2m(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

alors, en supposant

$$n \geqq 2k+1,$$

on retrouvera précisément l'équation (4); mais, si dans le même cas on suppose seulement

$$n \geqq k+1,$$

l'équation (4) subsistera pour des valeurs de m comprises entre les limites

$$m = -(n-k), \qquad m = n-k,$$

et sera remplacée par la formule

$$(14)\qquad a_m + a_{n+m}\, e^{n\tau\sqrt{-1}} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{l=n-1} e^{-m\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}}\, f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right),$$

pour des valeurs de m représentées par ces limites mêmes ou situées hors de ces limites. Cela posé, l'équation (4) continuera évidemment de subsister, pour toutes les valeurs de m comprises dans la suite

$$-h,\quad \ldots,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad h,$$

si l'on a

$$n \geqq k + h + 1,$$

et sous cette condition la formule (8) ou (10) fournira encore une valeur exacte de s. Il y a plus; l'équation (10), légèrement modifiée par la suppression des termes correspondants à $m = -k$, et réduite à

$$(15)\qquad s = \frac{1}{n}\sum_{m=1-k}^{m=k}\sum_{l=0}^{l=n-1} A_m\, e^{m\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}}\, f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right),$$

pourra être appliquée au cas où l'on aurait

$$h = k,\qquad n = h + k = 2k,$$

si l'on choisit convenablement l'arc τ. En effet, dans ce cas, la formule (4) subsistera pour toutes les valeurs de m comprises entre les limites $-k$, $+k$; mais, pour $m = -k$, la formule (14) donnera

$$a_{-k} + a_k\, e^{2k\tau\sqrt{-1}} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{l=n-1} e^{k\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}}\, f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right),$$

et, par suite,

$$(16)\qquad A_{-k}a_{-k} + A_k a_k = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{l=n-1} A_k\, e^{-k\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right)\sqrt{-1}}\, f\left(\tau+\frac{2\pi l}{n}\right),$$

pourvu que l'on assujettisse τ à vérifier la condition

$$(17)\qquad \frac{A_k}{A_{-k}} = e^{2k\tau\sqrt{-1}}.$$

Sous cette dernière condition, l'équation (7), jointe à la formule (4) ou (16), entraînera évidemment l'équation (15), que l'on pourra écrire comme il suit :

$$(18)\qquad s = \frac{1}{2k}\sum_{m=1-k}^{m=k}\sum_{l=1-k}^{l=k} A_m\, e^{m\left(\tau+\frac{\pi l}{k}\right)\sqrt{-1}}\, f\left(\tau+\frac{\pi l}{k}\right).$$

D'après ce qu'on vient de dire, l'équation (18) coïncide, pour $h = k$, avec la formule (7), par conséquent avec la formule (9). Comme d'ailleurs les seconds membres des équations (9) et (18) ne renferment pas la lettre h, il est clair que ces deux équations s'accorderont l'une avec l'autre, non seulement pour $h = k$, mais aussi quel que soit h. Donc la formule (18), jointe à la condition (17), fournira la valeur exacte de s, dans le cas même où l'on aurait

$$h > k,$$

et dans celui où le développement de $F(t)$ offrirait un nombre infini de termes.

Pour montrer une application des formules qui précèdent, concevons que l'on ait $k = 2$, par conséquent

$$f(t) = a_0 + a_1 e^{t\sqrt{-1}} + a_2 e^{2t\sqrt{-1}} + a_{-1} e^{-t\sqrt{-1}} + a_{-2} e^{-2t\sqrt{-1}},$$

et, de plus,

$$F(t) = [\lambda - \cos(t - \Pi)]^{\frac{1}{2}},$$

Π désignant un arc réel, et λ un nombre supérieur à l'unité. Le développement de $F(t)$ sera de la forme

$$F(t) = A_0 + A_1\, e^{(t-\Pi)\sqrt{-1}} + A_2\, e^{2(t-\Pi)\sqrt{-1}} + \ldots + A_{-1} e^{(\Pi-t)\sqrt{-1}} + A_{-2} e^{2(\Pi-t)\sqrt{-1}} + \ldots,$$

et de cette dernière formule, comparée à l'équation (6), on tirera, pour $h = \infty$,

$$A_0 = A_0,\qquad A_1 = A_1 e^{-\Pi\sqrt{-1}},\qquad A_2 = A_2 e^{-2\Pi\sqrt{-1}},\qquad \ldots,$$
$$A_{-1} = A_1 e^{\Pi\sqrt{-1}},\qquad A_{-2} = A_2 e^{2\Pi\sqrt{-1}},\qquad \ldots.$$

Donc, pour vérifier la condition (17), réduite à

$$e^{i\Pi\sqrt{-1}} = e^{k\tau\sqrt{-1}},$$

il suffira de prendre

$$\tau = \Pi,$$

et la formule (18) donnera

$$s = \frac{1}{4}\sum_{m=-1}^{m=2}\sum_{l=-1}^{l=2} A_m e^{\frac{\pi m l}{2}\sqrt{-1}} f\left(\Pi + \frac{\pi l}{2}\right).$$

Donc, si $f(t)$ est une fonction réelle de t, la valeur de s, qui dans ce cas sera réelle, pourra être réduite à

$$s = \sum_{m=-1}^{m=2}\sum_{l=-1}^{l=2} A_m \cos\frac{\pi m l}{2} f\left(\Pi + \frac{\pi l}{2}\right)$$

ou, ce qui revient au même, à

$$s = \sum_{l=-1}^{l=2} \frac{A_0 + 2A_1\cos\frac{\pi l}{2} + A_2\cos\pi l}{4} f\left(\Pi + \frac{\pi l}{2}\right).$$

Cette dernière équation, que l'on peut encore écrire comme il suit,

$$s = \frac{A_0 + 2A_1 + A_2}{4} f(\Pi) + \frac{A_0 - 2A_1 + A_2}{4} f(\Pi + \pi) + \frac{A_0 - A_2}{4}\left[f\left(\Pi + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\Pi - \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

s'accorde avec la formule (36) de la page 46 (*voir* l'Extrait n° 114).

Concevons maintenant que l'on ait, non plus $h = \infty$, mais simplement $h = 2$, le nombre k étant d'ailleurs un des termes de la suite

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \ldots.$$

L'équation (6) sera réduite à

$$(19) \qquad F(t) = A_{-2}e^{-2t\sqrt{-1}} + A_{-1}e^{-t\sqrt{-1}} + A_0 + A_1 e^{t\sqrt{-1}} + A_2 e^{2t\sqrt{-1}};$$

et, si l'on suppose d'abord $k = 2$, la formule (18) donnera

$$(20) \qquad s = \frac{1}{4}\sum_{m=-1}^{m=2}\sum_{l=-1}^{l=2} A_m e^{m\left(\tau + \frac{\pi l}{2}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{\pi l}{2}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(21) \qquad s = \sum_{l=-1}^{l=2} \frac{A_{-1}e^{-\left(\tau+\frac{\pi l}{2}\right)\sqrt{-1}} + A_0 + A_1 e^{\left(\tau+\frac{\pi l}{2}\right)\sqrt{-1}} + A_2 e^{2\left(\tau+\frac{\pi l}{2}\right)\sqrt{-1}}}{4} f\left(\tau + \frac{\pi l}{2}\right),$$

l'arc τ étant choisi de manière à vérifier la condition

$$(22) \qquad \frac{A_2}{A_{-2}} = e^{4\tau\sqrt{-1}}.$$

Si, au contraire, on suppose $k > 2$, on pourra tirer la valeur de s de la formule (8), en y laissant l'arc τ arbitraire, pourvu que l'on prenne

$$n \geq k + h + 1,$$

par conséquent

$$n \geq k + 3.$$

Ainsi, en particulier, si l'on prend $k = 4$, on devra, dans la formule (8), supposer $n \geq 7$, par exemple

$$n = 8.$$

Or, pour $h = 2$, $k = 4$, $n = 8$, l'équation (8) donnera

$$(23) \qquad s = \frac{1}{8}\sum_{m=-2}^{m=2}\sum_{l=0}^{l=7} A_m e^{m\left(\tau+\frac{\pi l}{4}\right)\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{\pi l}{4}\right).$$

Si, dans cette dernière formule, on réduit l'arc τ à zéro, on en tirera simplement

$$(24) \qquad s = \frac{1}{8}\sum_{m=-2}^{m=2}\sum_{l=0}^{l=7} A_m e^{\frac{\pi m l}{4}\sqrt{-1}} f\left(\tau + \frac{\pi l}{4}\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(25)\quad \delta = \sum_{l=0}^{l=7} \frac{A_{-2}e^{-\frac{\pi l}{2}\sqrt{-1}} + A_{-1}e^{-\frac{\pi l}{4}\sqrt{-1}} + A_0 + A_1 e^{\frac{\pi l}{4}\sqrt{-1}} + A_2 e^{\frac{\pi l}{2}\sqrt{-1}}}{8} f\left(\tau + \frac{\pi l}{4}\right).$$

On peut se servir utilement des équations (20) et (23) pour déterminer la valeur générale de la fonction désignée par υ dans le Mémoire sur les variations séculaires des éléments elliptiques des planètes. Les formules ainsi obtenues pourront remplacer, même avec avantage, les formules (37), (38), (39), (40) de la page 48. L'équation (20) en particulier fournira immédiatement la valeur de υ qui correspond à la valeur 2 de l'exposant que nous avons représenté par la lettre l (pages 37 et suivantes). Quant à l'équation (23), elle fournira rigoureusement la valeur de υ correspondante à $l = 4$, et il suffira que l'on puisse négliger les quantités du quatrième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, pour qu'elle fournisse encore, sans erreur sensible, les valeurs de υ correspondantes à $l = 6$ et à $l = 8$.

120.

Sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques (1).

C. R., t. XII, p. 391 (1er mars 1841).

(1) Mémoire publié dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (*Nouveaux Exercices*), *voir* t. I, p. 385.

121.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur la formation des fonctions alternées qui servent à résoudre le problème de l'élimination.*

C. R., t. XII, p. 414 (8 mars 1841).

L'équation finale, produite par l'élimination de plusieurs variables entre des équations linéaires et présentée sous la forme la plus simple, a pour premier membre une fonction alternée. On peut même en dire autant de l'équation finale qui résulte de l'élimination d'une seule variable entre deux équations algébriques de degrés quelconques, puisque les méthodes de Bézout et d'Euler réduisent ce dernier problème au premier. Il importe donc de parvenir à former aisément les fonctions alternées. Telle est la question dont nous allons nous occuper.

Considérons, pour fixer les idées, la fonction alternée qui, égalée à zéro, produit l'équation finale, résultante de l'élimination de x entre n équations linéaires de la forme

$$\begin{aligned}
&A_{0,0}\,x + A_{0,1}\,y + \ldots + A_{0,n-2}\,u + A_{0,n-1}\,v = 0,\\
&A_{1,0}\,x + A_{1,1}\,y + \ldots + A_{1,n-2}\,u + A_{1,n-1}\,v = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_{n-2,0}\,x + A_{n-2,1}\,y + \ldots + A_{n-2,n-2}\,u + A_{n-2,n-1}\,v = 0,\\
&A_{n-1,0}\,x + A_{n-1,1}\,y + \ldots + A_{n-1,n-2}\,u + A_{n-1,n-1}\,v = 0.
\end{aligned}$$

Pour obtenir cette fonction alternée que nous appellerons δ, on disposera d'abord en carré sur n lignes horizontales, et sur autant de lignes verticales, les coefficients que contiennent les équations linéaires données, comme on le voit ici

$$(1)\quad \begin{cases}
A_{0,0}, & A_{0,1}, & \ldots, & A_{0,n-2}, & A_{0,n-1},\\
A_{1,0}, & A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,n-2}, & A_{1,n-1},\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots,\\
A_{n-2,0}, & A_{n-2,1}, & \ldots, & A_{n-2,n-2}, & A_{n-2,n-1},\\
A_{n-1,0}, & A_{n-1,1}, & \ldots, & A_{n-1,n-2}, & A_{n-1,n-1};
\end{cases}$$

puis on cherchera tous les produits que l'on peut former, en combinant ces coefficients n à n, de manière que les n facteurs de chaque produit appartiennent tous à des lignes horizontales différentes et à des lignes verticales différentes. Les produits formés, comme on vient de le dire, se réduiront à celui dont les facteurs sont les coefficients situés sur l'une des diagonales du carré, savoir au produit

$$(2) \qquad A_{0,0}A_{1,1}\ldots A_{n-2,n-2}A_{n-1,n-1},$$

et à ceux que l'on peut en déduire à l'aide d'une ou de plusieurs opérations dont chacune consiste à échanger entre eux deux indices qui, dans deux facteurs différents, occupent la même place. La fonction alternée s sera la somme de tous ces produits, pris les uns avec le signe $+$, les autres avec le signe $-$; deux produits différents devant être affectés du même signe ou de signes contraires, suivant qu'on pourra les déduire l'un de l'autre à l'aide d'un nombre pair ou d'un nombre impair d'échanges opérés chacun entre deux indices de même espèce. Le nombre n des facteurs de chaque produit servira de mesure à ce que nous nommerons l'*ordre* de la fonction alternée.

Concevons maintenant que l'on représente par P l'un quelconque des produits qui entrent dans la fonction alternée s. Supposons d'ailleurs que, dans cette fonction, le produit (2) en particulier soit affecté du signe $+$, et que, relativement au produit P, les divers indices

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1$$

soient partagés en divers groupes, deux indices i et j étant placés à la suite l'un de l'autre dans le même groupe, lorsque le produit P renferme le facteur

$$A_{i,j}.$$

Il suffira de connaître le système des groupes correspondants à un produit P, pour que ce produit se trouve complètement déterminé. Ainsi, par exemple, si l'indice i forme à lui seul un groupe, on en conclura qu'il est contenu dans un seul facteur du produit P, savoir, dans le

facteur $A_{i,i}$; si l'indice i forme un groupe binaire

$$(i, i')$$

avec un autre indice i', on en conclura que les indices i, i' sont contenus seulement dans deux facteurs du produit P, savoir dans les facteurs

$$A_{i,i'}, \quad A_{i',i};$$

si les trois indices i, i', i'' forment un groupe ternaire

$$(i, i', i''),$$

on en conclura que le produit P renferme les trois facteurs

$$A_{i,i'}, \quad A_{i',i''}, \quad A_{i'',i};$$

et ainsi de suite. D'ailleurs, pour déduire le produit partiel

$$A_{i,i'}A_{i',i} \quad \text{ou} \quad A_{i,i'}A_{i',i''}A_{i'',i}, \quad \ldots$$

du produit partiel

$$A_{i,i}A_{i',i'} \quad \text{ou} \quad A_{i,i}A_{i',i''}A_{i'',i'}, \quad \ldots$$

qui renferme les mêmes indices dans le produit (2), il suffit évidemment d'opérer un seul échange entre les seconds indices i, i' des deux facteurs du produit partiel

$$A_{i,i}A_{i',i'},$$

ou deux échanges successifs entre les seconds indices des trois facteurs du produit partiel

$$A_{i,i}A_{i',i'}A_{i'',i''},$$

qui, en vertu de ces deux échanges, deviendra successivement

$$A_{i,i'}A_{i',i}A_{i'',i''},$$
$$A_{i,i'}A_{i',i''}A_{i'',i},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, si le système des groupes correspondants au produit P présente f groupes formés chacun d'un seul indice, ou, ce qui revient au même, f indices isolés, g groupes binaires, h groupes ternaires, k groupes

quaternaires, etc.; enfin l groupes composés chacun de n indices (l devant se réduire à zéro ou à l'unité), il suffira, pour passer du produit (2) au produit P, d'opérer entre les seconds indices des facteurs

$$A_{0,0},\quad A_{1,1},\quad \ldots,\quad A_{n-1,n-1}$$

autant d'échanges qu'il y aura d'unités dans la somme

$$g+2h+3k+\ldots+(n-1)l.$$

D'ailleurs, si l'on nomme m le nombre total des groupes, on aura, non seulement

$$f+2g+3h+4k+\ldots+nl=n, \tag{3}$$

mais encore

$$f+g+h+k+\ldots+l=m, \tag{4}$$

et, par suite,

$$g+2h+3k+\ldots+(n-1)l=n-m. \tag{5}$$

Donc, pour passer du produit (2) au produit P, il suffira d'opérer entre les seconds indices des divers facteurs autant d'échanges qu'il y aura d'unités dans la différence $n-m$; et le produit P, dans la somme alternée s, devra être affecté du signe + ou du signe −, suivant que la différence $n-m$ sera positive ou négative. On peut donc énoncer la proposition suivante, qui s'accorde avec le théorème énoncé dans l'*Analyse algébrique* (Note IV, p. 523).

THÉORÈME. — *Soit s une fonction alternée formée avec les quantités que renferme le tableau* (1), *et dans laquelle le produit*

$$A_{0,0}A_{1,1}\ldots A_{n-2,n-2}A_{n-1,n-1}$$

soit affecté du signe +. Les divers termes de cette somme seront les divers produits que l'on peut former avec n facteurs de la forme

$$A_{i,j},$$

dans lesquels les n valeurs de i soient respectivement égales, à l'ordre près,

aussi bien que les diverses valeurs de j, aux divers termes de la progression arithmétique

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1.$$

Soit d'ailleurs P *l'un quelconque de ces produits, et supposons que, relativement au produit* P, *les divers indices*

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1$$

soient partagés en divers groupes, deux indices

$$i \text{ et } j$$

étant placés à la suite l'un de l'autre dans le même groupe, lorsque le produit P *renferme le facteur*

$$A_{i,j}.$$

Si l'on nomme m le nombre total des groupes ainsi formés, le produit P *sera, dans la somme alternée s, affecté du signe + ou du signe −, suivant que la différence*

$$n-m$$

sera un nombre pair ou un nombre impair.

Si, dans la fonction alternée s, on nomme termes semblables ou de même espèce deux termes qui se déduisent l'un de l'autre, quand aux indices

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-1,$$

rangés dans un certain ordre, on substitue respectivement ces mêmes indices rangés dans un ordre différent, les divers termes, semblables entre eux, seront évidemment ceux pour lesquels le nombre total des groupes d'indices, et même le nombre spécial des groupes de chaque nature restera le même, c'est-à-dire ceux pour lesquels on retrouvera les mêmes valeurs de f, g, h, k, ..., l. Cela posé, il suit évidemment du théorème énoncé que les termes semblables seront toujours affectés du même signe. Donc, dans le développement de la fonction alternée s, on pourra se borner à écrire un terme de chaque espèce, en ayant soin de placer devant ce terme la lettre caractéristique Σ pour

indiquer la somme des termes semblables, qui pourront se déduire immédiatement du même terme avec la plus grande facilité. Pour obtenir, d'ailleurs, un terme correspondant à des valeurs données de

$$f,\ g,\ h,\ k,\ \ldots,\ l,$$

il suffira d'écrire à la suite les uns des autres, dans leur ordre de grandeur, les indices

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,$$

et de partager ces indices en groupes, en considérant les premiers indices

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ f-1$$

comme isolés, puis les indices suivants, en nombre égal à $2g$, comme formant les groupes binaires

$$(f, f+1),\ (f+2, f+3),\ \ldots,\ (f+2g-2, f+2g-1),$$

puis les indices suivants, en nombre égal à $3h$, comme formant les groupes ternaires

$$(f+2g, f+2g+1, f+2g+2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(f+2g+3h-3, f+2g+3h-2, f+2g+3h-1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend $n=7$, l'un des produits correspondants à

$$f=2,\quad g=1,\quad h=1$$

sera celui qui répond aux groupes

$$(0),\ (1),\ (2,3),\ (4,5,6),$$

c'est-à-dire le produit

$$A_{0,0}A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2}A_{4,5}A_{5,6}A_{6,4}.$$

Quant au nombre des diverses espèces de termes compris dans la somme alternée s, il sera évidemment égal au nombre des solutions différentes de l'équation

$$f+2g+3h+4k+\ldots+nl=n,$$

qui correspondront à des valeurs entières, positives ou nulles des quantités

$$f,\ g,\ h,\ k,\ \ldots,\ l.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $n=5$, alors, la valeur de n pouvant être présentée sous l'une quelconque des formes

$$1+1+1+1+1,$$
$$1+1+1+2,$$
$$1+2+2,$$
$$1+1+3,$$
$$2+3,$$
$$1+4,$$
$$5,$$

les systèmes de valeurs de

$$f,\ g,\ h,\ k,\ l$$

se réduiront à l'un des sept systèmes

$$f=5,\quad g=0,\quad h=0,\quad k=0,\quad l=0,$$
$$f=3,\quad g=1,\quad h=0,\quad k=0,\quad l=0,$$
$$f=1,\quad g=2,\quad h=0,\quad k=0,\quad l=0,$$
$$f=2,\quad g=0,\quad h=1,\quad k=0,\quad l=0,$$
$$f=0,\quad g=1,\quad h=1,\quad k=0,\quad l=0,$$
$$f=1,\quad g=0,\quad h=0,\quad k=1,\quad l=0,$$
$$f=0,\quad g=0,\quad h=0,\quad k=0,\quad l=1;$$

et, par suite, une fonction alternée du cinquième ordre renfermera sept espèces de termes.

Il est facile de calculer, pour une fonction alternée de l'ordre n, non seulement le nombre total des termes, ou des diverses valeurs

de P, mais encore le nombre des termes de chaque espèce; et d'abord, comme dans chaque valeur de P on peut supposer les divers facteurs rangés d'après l'ordre de grandeur des premiers indices, le nombre des valeurs diverses de P sera évidemment égal au nombre qui indique de combien de manières différentes on peut ranger à la suite les uns des autres les seconds indices, représentés par n quantités distinctes. Donc le nombre des divers termes de la fonction alternée s sera égal au produit

$$1.2.3\ldots n.$$

Cherchons maintenant le nombre des termes d'une espèce donnée, c'est-à-dire le nombre des valeurs de P qui correspondent à des valeurs données de

$$f,\ g,\ h,\ k,\ \ldots,\ l,$$

et représentons ce nombre par

$$N_{f,g,h,k,\ldots,l}.$$

Relativement à chacun des termes dont il s'agit, les indices

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$$

pourront être partagés en m groupes, la valeur de m étant celle que détermine l'équation (4), puis écrits à la suite les uns des autres dans un ordre tel que des indices placés dans un même groupe se suivent toujours immédiatement, et qu'aux indices isolés succèdent les indices compris dans les groupes binaires, puis dans les groupes ternaires, puis dans les groupes quaternaires, etc. D'ailleurs dans la série, ou succession d'indices, obtenue comme on vient de le dire, on pourra opérer divers changements sans qu'elle cesse de correspondre au même terme, et sans que les conditions énoncées cessent d'être remplies. On pourra, par exemple, échanger entre eux, d'une manière quelconque, ou les f indices isolés, ou les g groupes binaires, ou les h groupes ternaires, etc.; on pourra encore, dans chaque groupe, écrire le premier un quelconque des indices dont il se compose; et, eu égard à la possibilité de ces divers changements, il est clair que les séries ou successions d'indices correspondantes à un même terme seront en nombre égal au produit

$$(1.2\ldots f)(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)\ldots(1.2\ldots l).1^f 2^g 3^h\ldots n^l,$$

chacun des produits partiels

$$1.2\ldots f,\quad 1.2\ldots g,\quad 1.2\ldots h,\quad \ldots,\quad 1.2\ldots l$$

devant être réduit à l'unité, quand la quantité

$$f,\ \text{ou}\ g,\ \text{ou}\ h,\ \ldots,\ \text{ou}\ l$$

se réduira simplement à zéro. D'ailleurs le nombre total des séries que l'on pourra ainsi former avec les indices

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$$

sera précisément le produit

$$1.2.3\ldots n,$$

et à chacune d'elles correspondra un terme de l'espèce donnée. Donc le nombre

$$N_{f,g,h,\ldots,l}$$

des termes de cette espèce sera le quotient qu'on obtient quand on divise le produit

$$1.2.3\ldots n$$

par le produit

$$(1.2.3\ldots f)(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)\ldots(1.2\ldots l)1^f 2^g 3^h\ldots n^l.$$

Donc, en posant, pour abréger,

$$(6)\qquad \frac{1.2\ldots m}{(1.2\ldots f)(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)\ldots(1.2\ldots l)} = (m)_{f,g,h,\ldots,l},$$

on aura

$$(7)\qquad N_{f,g,h,\ldots,l} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m}(m)_{f,g,h,\ldots,l}\left(\frac{1}{1}\right)^f\left(\frac{1}{2}\right)^g\left(\frac{1}{3}\right)^h\cdots\left(\frac{1}{n}\right)^l,$$

la valeur de m étant toujours

$$m = f+g+h+\ldots+l.$$

D'autre part, comme le nombre total des termes de différentes espèces, c'est-à-dire, le nombre total des termes de la fonction alternée s, doit être égal au produit

$$1.2.3\ldots n,$$

on aura encore

$$1.2.3\ldots n = \Sigma N_{f,g,h,\ldots,l}, \tag{8}$$

le signe Σ se rapportant aux divers systèmes de valeurs de

$$f,\ g,\ h,\ \ldots,\ l$$

qui vérifient l'équation (3), et par conséquent

$$1.2.3\ldots n = \sum \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m}(m)_{f,g,h,\ldots,l}\left(\frac{1}{1}\right)^f\left(\frac{1}{2}\right)^g\left(\frac{1}{3}\right)^h\cdots\left(\frac{1}{n}\right)^l. \tag{9}$$

Cette dernière formule paraît digne d'être remarquée.

Si, pour fixer les idées, on prend $n = 5$, l'équation (8) ou (9) donnera

$$1.2.3.4.5 = N_{5,0,0,0,0} + N_{3,1,0,0,0} + N_{1,2,0,0,0} + N_{2,0,1,0,0} + N_{0,1,1,0,0} + N_{1,0,0,1,0} + N_{0,0,0,0,1},$$

et, par suite,

$$1.2.3.4.5 = 1 + 10 + 15 + 20 + 20 + 30 + 24 = 120,$$

ce qui est exact.

On peut observer que, dans le cas où n est un nombre premier, la valeur entière de

$$N_{f,g,h,\ldots,l},$$

fournie par l'équation (7), reste toujours divisible par n, excepté lorsqu'on prend

$m = n$, par conséquent $f = n$, $g = 0$, $h = 0$, $\ldots$, $l = 0$,

ou

$m = 1$, par conséquent $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, $\ldots$, $l = 1$.

Donc, dans le second membre de la formule (9), et pour le cas dont il

s'agit, les seuls termes non divisibles par n sont

$$N_{n,0,0,\ldots,0} = 1 \quad \text{et} \quad N_{0,0,0,\ldots,1} = 1.2.3\ldots(n-1).$$

Donc *la somme de ces deux termes doit être*, aussi bien que le produit $1.2.3\ldots n$, *divisible par le nombre* n, *toutes les fois que celui-ci est premier*. On se trouve ainsi ramené au théorème de Wilson.

Observons encore que, dans la fonction s, le nombre des termes affectés du signe $+$, et correspondants à des valeurs paires de $n - m$, est précisément égal au nombre des termes affectés du signe $-$, et correspondants à des valeurs impaires de $n - m$. Donc la différence entre ces deux nombres, évidemment représentée par

$$\Sigma(-1)^{n-m} N_{f,g,h,\ldots,l} = (-1)^n \Sigma(-1)^m N_{f,g,h,\ldots,l},$$

sera nulle, et l'on peut, à l'équation (8) ou (9), joindre la suivante

$$\Sigma(-1)^m N_{f,g,h,\ldots,l} = 0, \tag{10}$$

que l'on peut encore présenter sous la forme

$$\sum \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m}(-1)^m (m)_{f,g,h,\ldots,l}\left(\frac{1}{1}\right)^f\left(\frac{1}{2}\right)^g\left(\frac{1}{3}\right)^h\cdots\left(\frac{1}{n}\right)^l = 0. \tag{11}$$

On trouvera, par exemple, en prenant $n = 5$,

$$N_{5,0,0,0,0} - N_{3,1,0,0,0} + N_{1,2,0,0,0} + N_{2,0,1,0,0} - N_{0,1,1,0,0} - N_{1,0,0,1,0} + N_{0,0,0,0,1} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$1 - 10 + 15 + 20 - 20 - 30 + 24 = 0,$$

ce qui est exact.

Lorsque, dans le tableau n° 1, on a généralement

$$A_{i,j} = A_{j,i},$$

les coefficients

$$A_{0,0},\ A_{1,1},\ \ldots,\ A_{n-2,n-2},\ A_{n-1,n-1},$$

situés sur l'une des diagonales du carré figuré par ce tableau, sont les seuls qui ne se trouvent pas répétés. Les autres coefficients sont égaux

deux à deux, les coefficients égaux étant toujours placés symétriquement des deux côtés de la diagonale dont il s'agit. Donc alors les seuls termes, qui ne se trouveront pas répétés plusieurs fois dans la fonction alternée s, seront ceux qui correspondront seulement à des indices isolés et à des groupes binaires. Quant aux termes qui correspondront à des groupes ternaires, quaternaires, etc., c'est-à-dire, à des valeurs de

$$h,\quad k,\quad \ldots,\quad l$$

différentes de zéro, il est facile de voir que chacun d'eux se trouvera répété autant de fois qu'il y aura d'unités dans la puissance

$$2^{h+k+\ldots+l}$$

du nombre 2. En effet, dans l'hypothèse admise, étant donné un terme P correspondant à des valeurs de $h, k, \ldots, l$ différentes de zéro, on obtiendra toujours un second terme égal au premier, si l'on renverse l'ordre dans lequel se trouvent écrits à la suite les uns des autres les indices renfermés dans un seul groupe ternaire, quaternaire, etc. Ainsi, par exemple, deux termes seront égaux entre eux si, pour passer de l'un à l'autre, il suffit de remplacer le groupe quaternaire

$$(0, 1, 2, 3)$$

par le groupe quaternaire

$$(3, 2, 1, 0),$$

attendu qu'en vertu de la formule (12) le produit partiel

$$A_{0,1}A_{1,2}A_{2,3}A_{3,0}$$

sera équivalent au produit partiel

$$A_{3,2}A_{2,1}A_{1,0}A_{0,3}.$$

La remarque précédente, jointe à ce qui a été dit plus haut, permet de former aisément les fonctions alternées, composées avec des coefficients pour lesquels la condition (12) est remplie. Si, pour fixer les idées, on suppose $n = 6$, alors, en admettant que la condition (12) se vérifie,

on trouvera

$$\begin{aligned} s = {} & A_{0,0}A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,4}A_{5,5} - \Sigma A_{0,0}A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,5}^2 \\ & + \Sigma A_{0,0}A_{1,1}A_{2,5}^2A_{4,5}^2 - \Sigma A_{0,1}^2A_{2,3}^2A_{4,5}^2 \\ & + 2\Sigma A_{0,0}A_{1,1}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,5}A_{5,3} - 2\Sigma A_{0,0}A_{1,2}^2A_{3,4}A_{4,5}A_{5,3} \\ & + 4\Sigma A_{0,1}A_{1,2}A_{2,0}A_{3,4}A_{4,5}A_{5,3} \\ & - 2\Sigma A_{0,0}A_{1,1}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,5}A_{5,2} + 2\Sigma A_{0,1}^2A_{2,3}A_{3,4}A_{4,5}A_{5,2} \\ & + 2\Sigma A_{0,0}A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,5}A_{5,1} - 2\Sigma A_{0,1}A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4}A_{4,0}A_{5,0}, \end{aligned}$$

pourvu que l'on indique toujours à l'aide du signe Σ placé devant un terme la somme faite de ce terme et de tous les termes semblables.

Les principes établis dans cette Note conduisent de la manière la plus simple et la plus directe à la détermination d'une fonction alternée dont on se propose d'obtenir la valeur en calculant séparément chaque terme. Mais il importe d'observer que, pour de grandes valeurs de n, la réduction en nombres des divers termes calculés chacun à part devient impraticable, en raison de la grandeur excessive du produit

$$1.2.3\ldots n.$$

Comment doit-on s'y prendre alors pour obtenir, sans trop de difficulté, la valeur numérique de la fonction alternée? C'est une question qui mérite d'être examinée, et qui sera l'objet d'un nouvel article.

122.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur diverses formules relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres.*

C. R., t. XII, p. 698 (26 avril 1841).

Ce Mémoire sera divisé en deux paragraphes.

Dans le premier paragraphe, je déduirai, des relations qui existent entre les coefficients d'une équation algébrique et les sommes des

puissances semblables de ses racines, une formule qui jouit d'une propriété singulière. Pour toutes les valeurs entières et positives, attribuées à deux variables que cette formule renferme, le premier membre se réduit à la plus petite variable ou à zéro, suivant que la plus petite variable divise ou ne divise pas la plus grande.

Dans le second paragraphe, je m'occuperai de nouveau d'une question souvent traitée par les géomètres, savoir, de la résolution des équations indéterminées du premier degré en nombres entiers. On connaît la solution algébrique que M. Binet et M. Libri ont donnée de ce problème, pour le cas de deux inconnues. Mais, quelque simple que soit, sous le rapport analytique, la solution dont il s'agit, nous verrons qu'elle peut être encore simplifiée, de manière à ne plus exiger la formation de Tables qui offrent la décomposition d'un nombre entier quelconque en facteurs premiers.

Quand on sait résoudre les équations indéterminées à deux inconnues, on sait aussi résoudre les équations qui renferment trois ou un plus grand nombre d'inconnues, puisqu'on peut commencer par choisir arbitrairement quelques-unes de ces dernières. Mais il peut arriver que, dans un problème indéterminé, on ait seulement besoin de connaître les valeurs entières, nulles ou positives, des inconnues, et ces valeurs seront certainement en nombre fini, si, dans le premier membre d'une équation linéaire donnée, les coefficients de toutes les inconnues sont des quantités de même signe. Alors la question se réduit à décomposer un nombre entier donné en parties égales ou inégales, dont chacune soit un terme d'une suite finie donnée. Cette question se reproduit dans diverses circonstances, par exemple quand on se propose de développer les puissances d'un polynôme qui renferme un nombre fini ou infini de termes, de déterminer les sommes des puissances semblables des racines d'une équation algébrique ou transcendante, ou de calculer les nombres de Bernoulli. Dans ces cas, et dans plusieurs autres, le coefficient de l'une des inconnues se réduit à l'unité, ce qui permet de résoudre assez facilement la question, en commençant par fixer la valeur de l'inconnue dont le coefficient est le plus

grand. Au reste, j'indiquerai un moyen facile de résoudre, dans tous les cas, les questions de ce genre, et même de les réduire à de simples soustractions.

§ I. — *Relations qui existent entre les coefficients d'une équation algébrique et les sommes des puissances semblables de ses racines. Formules singulières déduites de ces mêmes relations.*

Soit m un nombre entier quelconque. On aura, comme l'on sait,

$$(1) \qquad (x+y+z\ldots)^m = \Sigma(a, b, c, \ldots)x^a y^b z^c, \qquad \ldots,$$

la sommation que le signe Σ indique s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles ou positives de a, b, c, ... qui vérifient la condition

$$a+b+c+\ldots = m,$$

et le nombre entier que représente l'expression $(a, b, c, \ldots)$ étant déterminé par la formule

$$(a, b, c, \ldots) = \frac{1.2\ldots m}{(1.2\ldots a)(1.2\ldots b)(1.2\ldots c)\ldots},$$

où l'on doit omettre, dans le second membre, celles des quantités a, b, c, ... qui se réduiraient à zéro; en sorte qu'on trouvera, par exemple, en supposant

$$a = m, \qquad b = c = \ldots = 0,$$

$$(a, b, c, \ldots) = (m, 0, 0, \ldots) = \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots m} = 1.$$

Si, dans la formule (1), on remplace la somme

$$x+y+z+\ldots$$

par un polynôme de la forme

$$X = lx+\ldots+px^{n-1}+qx^n,$$

on en conclura

$$(2) \qquad X^m = A_m x^m + A_{m+1}x^{m+1}+\ldots+A_{mn}x^{mn},$$

la valeur de A_i étant donnée par la formule

$$A_i = \Sigma(a, b, \ldots, h, k) l^a \ldots p^h q^k, \tag{3}$$

dans laquelle la sommation indiquée par le signe Σ devra s'étendre à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k$$

qui vérifieront les deux conditions

$$a + b + \ldots + h + k = m,$$
$$a + 2b + \ldots + (n-1)h + nk = i.$$

Des équations (1), (2), (3), jointes aux deux suivantes

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots, \tag{4}$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \tag{5}$$

on déduit aisément les formules qui expriment les relations existantes entre les coefficients d'une équation algébrique et les sommes des puissances semblables de ses racines. Rappelons d'abord ces dernières formules en peu de mots.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines de l'équation algébrique

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{6}$$

et

$$s_i = \alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \ldots$$

la somme des $i^{\text{èmes}}$ puissances de ces racines. En posant

$$x = \frac{1}{z}$$

dans l'équation identique

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$

on en conclura

$$1 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = (1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)\ldots; \tag{7}$$

puis, en prenant les logarithmes népériens des deux membres de l'équation (7), et ayant égard à la formule (5), on trouvera

$$s_1 z + \tfrac{1}{2} s_2 z^2 + \tfrac{1}{3} s_3 z^3 + \ldots = -l(1 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n), \tag{8}$$

et, par suite,

$$1 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = e^{-\left(s_1 z + \frac{1}{2} s_2 z^2 + \frac{1}{3} s_3 z^3 + \ldots\right)}. \tag{9}$$

Si maintenant on développe les seconds membres des équations (8), (9) à l'aide des formules (4), (5), jointes à la formule (3), et si dans les équations nouvelles ainsi obtenues on égale entre eux les coefficients des puissances semblables de z, on en conclura

$$s_i = i\Sigma(-1)^{a+b+\ldots+h+k} \frac{(a, b, \ldots, h, k)}{a + b + \ldots + h + k} a_1^a a_2^b \ldots a_{n-1}^h a_n^k, \tag{10}$$

$$a_i = \Sigma(-1)^{a+b+\ldots+h+k} \frac{(a, b, \ldots, h, k)}{1.2\ldots(a+b+\ldots+h+k)} s_1^a \left(\frac{1}{2} s_2^b\right) \ldots \left(\frac{1}{n-1} s_{n-1}^h\right) \left(\frac{1}{n} s_n\right)^k, \tag{11}$$

i devant être, dans la formule (11), inférieur ou tout au plus égal à n, et la sommation que le signe Σ indique devant s'étendre, dans chacune des formules (10), (11), à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k$$

pour lesquelles se vérifiera la condition

$$a + 2b + \ldots + (n-1)h + nk = i. \tag{12}$$

Il sera d'ailleurs facile de calculer ces valeurs, en commençant par déterminer celle de k, puis celle de h, ... Ainsi, par exemple, si l'on a

$$n = 3, \qquad i = 7,$$

alors l'équation (12), étant réduite à

$$a + 2b + 3c = 7,$$

sera évidemment vérifiée par les valeurs entières, nulles ou positives, de

$$a, \quad b, \quad c$$

qui satisferont à l'un des trois systèmes de formules

$$c = 0, \quad a + 2b = 7,$$
$$c = 1, \quad a + 2b = 4,$$
$$c = 2, \quad a + 2b = 1.$$

On reconnaîtra pareillement que l'on vérifie l'équation

$$a + 2b = 7$$

en prenant

$$b = 0, \quad a = 7,$$

ou

$$b = 1, \quad a = 5,$$

ou

$$b = 2, \quad a = 3,$$

ou

$$b = 3, \quad a = 1;$$

l'équation

$$a + 2b = 4$$

en prenant

$$b = 0, \quad a = 4,$$

ou

$$b = 1, \quad a = 2,$$

ou

$$b = 2, \quad a = 0;$$

et l'équation

$$a + 2b = 1$$

en prenant

$$b = 0, \quad a = 1.$$

Donc enfin les valeurs nulles ou positives de

$$a, \quad b, \quad c,$$

propres à vérifier la formule

$$a + 2b + 3c = 7,$$

se réduiront à l'un des systèmes de nombres

$$7, \ 0, \ 0,$$
$$5, \ 1, \ 0,$$
$$3, \ 2, \ 0,$$
$$1, \ 3, \ 0,$$
$$4, \ 0, \ 1,$$
$$2, \ 1, \ 1,$$
$$0, \ 2, \ 1,$$
$$1, \ 0, \ 2.$$

Cela posé, la formule (10) donnera, pour $n = 3$, $i = 7$,

$$s_7 = -7\left(\begin{array}{l} \frac{1}{7}a_1^7 + \frac{1}{6}(5,1)a_1^5 a_2 + \frac{1}{5}(3,2)a_1^3 a_2^2 + \frac{1}{4}(1,3)a_1 a_2^3 - \frac{1}{6}(4,1)a_1^4 a_3 \\ \qquad - \frac{1}{4}(2,1,1)a_1^3 a_2 a_3 - \frac{1}{3}(2,1)a_2^2 a_3 + \frac{1}{3}(1,2)a_1 a_3^2 \end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$s_7 = -a_1^7 - 7(a_1^5 a_2 + 2a_1^3 a_2^2 + a_1 a_2^3 - a_1^4 a_3 - 3a_1^2 a_2 a_3 - a_2^2 a_3 + a_1 a_3^2).$$

Telle est effectivement la somme des $7^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

Si, dans les formules (10), (11), on prend successivement pour i les divers nombres entiers

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ \ldots,$$

en laissant la valeur de n arbitraire, on retrouvera des formules données très anciennement par Euler, savoir,

$$s_1 = -a_1,$$
$$s_2 = a_1^2 - 2a_2,$$
$$s_3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3,$$
$$s_4 = a_1^4 + 2a_2^2 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 - 4a_4,$$
$$s_5 = -a_1^5 + 5a_1^3 a_2 - 5a_1^2 a_3 + 5a_1 a_2^2 + 5a_1 a_4 + 5a_2 a_3 - 5a_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$a_1 = -s_1,$$

$$a_2 = \frac{1}{1.2}(s_1^2 - s_2),$$

$$a_3 = -\frac{1}{1.2.3}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3),$$

$$a_4 = \frac{1}{1.2.3.4}(s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 8s_1s_3 - 6s_4),$$

$$a_5 = -\frac{1}{1.2.3.4.5}(s_1^5 - 10s_1^3s_2 + 15s_1s_2^2 + 20s_1^2s_3 - 20s_2s_3 - 30s_1s_4 + 24s_5),$$

.....

Il existe des relations dignes de remarque entre les valeurs de

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots,$$

fournies par l'équation (10), et les coefficients des diverses puissances de z dans le développement de l'expression

$$(1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)^{-1}.$$

En effet, désignons par

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad \ldots$$

ces coefficients, en sorte qu'on ait

$$1 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots = (1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)^{-1}$$
$$= 1 - (a_1 z + \ldots + a_n z^n) + (a_1 z + \ldots + a_n z^n)^2 - \ldots,$$

et, par suite, en vertu de la formule (3),

$$(13) \qquad t = \Sigma(-1)^{a+b+\ldots+h+k}(a, b, \ldots, h, k)\, a_1^a a_2^b \ldots a_{n-1}^h a_n^k,$$

la sommation que le signe Σ indique s'étendant à toutes les valeurs de

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h, \quad k$$

qui vérifient la condition (12). Comme l'équation (8), différentiée par rapport à z, donnera

$$(14) \quad s_1 + 2s_2 z + 3s_3 z^2 + \ldots = -(a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1})(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^{-1}$$

et, par suite,

$$s_1 z + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \ldots = -(a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1})(1 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots),$$

on en conclura

$$(15) \qquad s_i = -(a_1 t_i + 2a_2 t_{i-1} + 3a_3 t_{i-2} + \ldots + n a_n t_{i-n+1}).$$

Il suit évidemment des formules (13) et (15) que, dans la valeur générale de s_i donnée par l'équation (10), tout comme dans les valeurs précédemment trouvées de

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4, \quad s_5, \quad \ldots,$$

le coefficient numérique d'un terme quelconque sera toujours un nombre entier. Donc, par suite, le produit

$$i\frac{(a, b, \ldots, h, k)}{a + b + \ldots + h + k},$$

dans lequel

$$i = a + 2b + \ldots + (n-1)h + nk,$$

sera toujours un tel nombre. Cette proposition s'accorde avec un théorème que nous démontrerons tout à l'heure.

Il nous reste à exposer plusieurs conséquences remarquables des formules générales que nous venons d'établir.

Observons d'abord que si l'on différentie l'équation (1) par rapport à l'une des variables x, y, z, ..., par rapport à x par exemple, on trouvera

$$m(x + y + z + \ldots)^{m-1} = \Sigma a(a, b, c, \ldots) x^{a-1} y^b z^c \ldots.$$

Donc, par suite, l'expression

$$a(a, b, c, \ldots)$$

représentera le coefficient du produit $x^{a-1}y^b z^c \ldots$ dans le développement de

$$m(x + y + z + \ldots)^{m-1},$$

en sorte qu'on aura

$$a(a, b, c, \ldots) = m(a - 1, b, c, \ldots)$$

et

$$\frac{a(a, b, c, \ldots)}{m} = (a-1, b, c, \ldots), \tag{16}$$

la valeur de m étant

$$m = a + b + c + \ldots.$$

L'équation (16), qu'on peut établir directement, puisqu'elle devient identique quand on y substitue les valeurs des expressions

$$(a, b, c, \ldots), \quad (a-1, b, c, \ldots),$$

subsiste d'ailleurs lorsqu'on échange entre elles les lettres a, b, c, ... Il en résulte que chacun des produits

$$a(a, b, c, \ldots), \quad b(a, b, c, \ldots), \quad c(a, b, \ldots), \quad \ldots$$

est divisible par le nombre

$$m = a + b + c + \ldots.$$

Donc ce nombre divisera le produit

$$\omega(a, b, c, \ldots),$$

si le facteur ω est de la forme

$$au + bv + cw + \ldots,$$

u, v, w, ... désignant des quantités entières positives ou négatives. Cela posé, pour vérifier l'exactitude de la proposition ci-dessus énoncée, il suffira d'observer que le facteur

$$i = a + 2b + \ldots + (n-1)h + nk$$

est précisément de la forme indiquée. Ajoutons que le plus grand commun diviseur des nombres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

est de la même forme. On peut donc énoncer encore la proposition suivante.

THÉORÈME I. — *Soient m la somme des nombres*

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

et ω leur plus grand commun diviseur. Le produit

$$\omega(a, b, c, \ldots)$$

sera toujours divisible par m.

Corollaire I. — Dans le développement de

$$(x + y + z + \ldots)^m,$$

le coefficient numérique M d'un terme quelconque sera divisible par m, si aucun entier ne divise les exposants de toutes les variables dans ce terme. Dans le cas contraire, le plus grand commun diviseur ω de ces exposants rendra le produit ωM divisible par m. Ainsi, par exemple, dans le développement de

$$(x + y + z)^3,$$

le plus grand commun diviseur 3 des exposants 3 et 6, dans le terme

$$(3, 6)x^3y^6,$$

rendra le produit

$$3 \times (3, 6) = 3.84$$

divisible par 9.

Corollaire II. — Le plus grand commun diviseur ω des nombres

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

devant diviser leur somme m, il en résulte que, dans le développement de

$$(x + y + z + \ldots)^m,$$

m divisera l'exposant numérique de tout terme où l'exposant d'une seule des lettres x, y, z, ... sera premier à m. Par exemple, dans le développement de

$$(x + y + z)^9,$$

tous les coefficients numériques seront divisibles par 9, à l'exception des suivants :

$$1, \quad 84 = (6, 3) = (3, 6). \qquad 1680 = (3, 3, 3).$$

Corollaire III. — Si m est un nombre premier, le coefficient 1 de x^m, de y^m, de z^m, ... sera le seul qui ne soit pas multiple de m, ce que l'on savait déjà.

Considérons maintenant la formule (10), et appliquons-la au cas où l'équation (6) se réduirait à

$$x^n - 1 = 0.$$

Alors, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ étant nuls, on verra, dans le second membre de la formule (10), disparaitre tous les termes qui ne correspondront pas à des valeurs nulles de

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h;$$

et, par suite, on trouvera

$$s_i = n \quad \text{ou} \quad s_i = 0,$$

suivant que i vérifiera ou ne vérifiera pas la condition

$$nk = i,$$

c'est-à-dire, suivant que i sera ou non divisible par n. Or, en comparant la valeur de i ou de s_i avec celle que l'on obtiendrait si l'on appliquait directement la formule (10) aux deux équations

$$x - 1 = 0, \qquad x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0,$$

dans lesquelles peut se décomposer l'équation donnée

$$x^n - 1 = 0,$$

on se verra immédiatement conduit à la proposition suivante :

Théorème II. — *Si l'on pose généralement*

$$(17) \qquad s_i = 1 + \sum \frac{(-1)^{a+b+\ldots+h+k}}{a+b+\ldots+h+k} (a, b, \ldots, h),$$

le nombre des quantités

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad h$$

étant $n-1$, et la sommation que le signe Σ indique s'étendant à toutes les

valeurs entières, nulles ou positives de a, b, ..., h *qui vérifient la condition*

$$(18) \qquad a + 2b + \ldots + (n-1)h = i,$$

on trouvera

$$s_i = n \quad \text{ou} \quad s_i = 0,$$

suivant que n sera ou ne sera pas diviseur de i.

Corollaire. — Si l'on pose $n = 2$, le théorème précédent donnera

$$(19) \qquad 1 + (-1)^i i \left[\frac{1}{i} - 1 + \frac{i-3}{2} - \frac{(i-4)(i-5)}{2.3} + \ldots \right] = 3 \quad \text{ou} \quad 0;$$

par conséquent

$$(20) \qquad 1 + (-1)^i \left[1 - i + \frac{i(i-3)}{2} - \frac{i(i-4)(i-5)}{2.3} + \ldots \right] = 3 \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que i sera ou ne sera pas divisible par n. L'équation (19) s'accorde avec le théorème donné par M. Stern pour la sommation de la série finie

$$1 - \frac{i-3}{2} + \frac{(i-4)(i-5)}{2.3} - \ldots.$$

Le théorème de M. Stern peut donc être considéré comme renfermé dans le théorème II.

Nous avons déjà remarqué que, dans la formule (11), i était supposé inférieur ou tout au plus égal à n. Si le nombre entier i devenait supérieur au nombre entier n, alors, a_i devant être considéré comme égal à zéro, on déduirait évidemment de l'équation (9), non plus la formule (11), mais la proposition suivante :

Théorème III. — *Lorsque le nombre i surpasse le degré n d'une équation algébrique, les sommes*

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots$$

des puissances semblables des racines de cette équation vérifient la formule

$$(21) \qquad \sum (-1)^{a+b+c+\ldots} \frac{(a, b, c\ldots)}{1.2\ldots(a+b+c\ldots)} s_1^a \left(\tfrac{1}{2} s_2\right)^b \left(\tfrac{1}{3} s_3\right)^c \ldots = 0,$$

le signe Σ *s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de*

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots$$

pour lesquelles on a

$$a + 2b + 3c + \ldots = i. \tag{22}$$

Corollaire I. — Si, pour fixer les idées, on prend $n = 2$, $i = 3$, l'équation (20) donnera

$$s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3 = 0.$$

Corollaire II. — Si l'équation donnée se réduit à

$$x^n - 1 = 0,$$

alors dans la suite

$$s_1,\quad s_2,\quad s_3,\quad \ldots$$

tous les termes s'évanouiraient, à l'exception des suivants

$$s_{1n},\quad s_{2n},\quad s_{3n},\quad \ldots$$

qui seront égaux à n. Par suite, dans le premier membre de l'équation (21), tous les termes s'évanouiront d'eux-mêmes, si i n'est pas divisible par n. Si au contraire i est divisible par n, l'équation (21) pourra s'écrire comme il suit

$$\sum (-1)^{a+b+c+\ldots} \frac{(a, b, c, \ldots)}{1.2\ldots(a+b+c+\ldots)} (1)^a \left(\tfrac{1}{2}\right)^b \left(\tfrac{1}{3}\right)^c \ldots = 0, \tag{23}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de a, b, c, ... pour lesquelles on aura

$$a + 2b + 3c + \ldots = \frac{i}{n}.$$

Mais $\frac{i}{n}$ peut être l'un quelconque des nombres entiers supérieurs à l'unité. Donc la formule (22) se vérifiera toujours, si dans cette formule la sommation indiquée par le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de a, b, c, ... qui offrent pour somme un

nombre donné, supérieur à l'unité. Au reste, cette conclusion pourrait être immédiatement déduite de l'équation identique

$$1 - x = e^{-\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots\right)}.$$

123.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur diverses formules relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres.*

C. R., t. XII, p. 813 (10 mai 1841). [Suite.]

§ II. — *Sur la résolution des équations indéterminées du premier degré en nombres entiers.*

Supposons qu'il s'agisse de résoudre, en nombres entiers, une équation indéterminée du premier degré à plusieurs inconnues. Si ces inconnues se réduisent à deux

$$x,\quad y,$$

l'équation indéterminée sera de la forme

$$ax + by = k, \tag{1}$$

a, b, k désignant trois quantités entières, et ne pourra être résolue que dans le cas où le plus grand commun diviseur de a et de b divisera k. Mais alors on pourra diviser les deux membres de l'équation (1) par ce plus grand commun diviseur, et, comme on pourra, en outre, si a est négatif, changer les signes de tous les termes, il est clair que l'équation (1) pourra être réduite à la forme

$$mx \pm ny = \pm l, \tag{2}$$

l, m, n désignant trois nombres entiers, et m, n étant premiers entre eux.

Observons maintenant que l'équation (2) coïncide avec l'équivalence

$$mx \equiv \pm l \pmod{n}$$

ou

$$x \equiv \pm \frac{l}{m} \pmod{n}, \tag{3}$$

et qu'en vertu de la formule

$$\frac{l}{m} \equiv l \times \frac{1}{m} \pmod{n},$$

la résolution de l'équivalence (3) peut être réduite à celle de la suivante :

$$x \equiv \frac{1}{m} \pmod{n}. \tag{4}$$

D'autre part, si n est un nombre premier, on aura, d'après un théorème connu de Fermat,

$$m^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}, \tag{5}$$

par conséquent

$$\frac{1}{m} \equiv m^{n-2} \pmod{n}.$$

Donc alors m^{n-2} sera une des valeurs de x propres à vérifier l'équivalence (4), de sorte qu'on résoudra cette équivalence en posant

$$n \equiv m^{n-2} \pmod{n}. \tag{6}$$

Telle est la conclusion très simple à laquelle M. Libri et M. Binet sont parvenus pour le cas où le module n est un nombre premier. Pour étendre cette même solution à tous les cas possibles, il suffirait de substituer au théorème de Fermat le théorème d'Euler suivant lequel, n étant un module quelconque et m un entier premier à n, on aura généralement

$$m^{N} \equiv 1 \pmod{n} \tag{7}$$

si l'exposant N renferme autant d'unités qu'il y a de nombres entiers

inférieurs à n et premiers à n (1). En effet, l'équation (7) étant admise, on en conclura

$$\frac{1}{m} \equiv m^{N-1} \pmod{n}$$

et, par conséquent,

$$m^{N-1}$$

sera l'une des valeurs de x propres à vérifier l'équivalence (4), de sorte qu'on résoudra cette équivalence en prenant

$$x \equiv m^{N-1} \pmod{n}. \tag{8}$$

L'équivalence (4), étant résolue comme on vient de le dire, entraînera la résolution de l'équivalence (3) qui coïncide avec l'équation (2), et, par suite, la résolution de l'équation (1), dans le cas où le plus grand commun diviseur de a et de b divisera k. On résoudra, en particulier, l'équivalence (3) en prenant

$$x \equiv \pm m^{N-1} l \pmod{n}. \tag{9}$$

(1) M. Poinsot nous a dit avoir remis autrefois à M. Legendre une Note manuscrite dans laquelle il avait ainsi étendu à des modules quelconques la solution présentée par M. Binet, et relative au cas où N est un nombre premier. Dans cette même Note, M. Poinsot donnait du théorème d'Euler la démonstration suivante, analogue à celle qui, dans le Mémoire de M. Binet, se trouve appliquée au théorème de Fermat.

Soient

$$1, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \ldots$$

la suite des entiers inférieurs à n, mais premiers à n; N le nombre de ces entiers, et m l'un quelconque d'entre eux. La suite

$$m, \quad am, \quad bm, \quad cm, \quad \ldots$$

se composera encore de termes, premiers à n, mais qui, divisés par n, donneront des restes différents. Donc chaque terme de la seconde suite sera équivalent, suivant le module n, à un seul terme de la première, et l'on aura

$$1.a.b.c\ldots \equiv m.am.bm.cm\ldots \equiv 1.a.b.c\ldots m^{N} \pmod{n}$$

ou, ce qui revient au même,

$$1.a.b.c\ldots(m^{N}-1) \equiv 0 \pmod{n},$$

puis on en conclura

$$m^{N}-1 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad m^{N} \equiv 1 \pmod{n}.$$

En résumé, l'on pourra énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *a, b, k désignant trois quantités entières, on pourra résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée*

$$ax + by = k, \tag{1}$$

si le plus grand commun diviseur de a et de b divise k. Supposons d'ailleurs qu'en divisant a, b, c par ce plus grand commun diviseur, et changeant s'il est nécessaire les signes de tous les termes de l'équation ainsi obtenue, on la réduise à la suivante

$$mx \pm ny = \pm l, \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même, à l'équivalence

$$x \equiv \pm \frac{l}{m} \pmod{n}, \tag{3}$$

l, m, n désignant trois nombres entiers, et m, n étant premiers entre eux. Pour vérifier l'équivalence (3), *il suffira de poser*

$$x \equiv \pm m^{N-1} l \pmod{n},$$

N *désignant le nombre des entiers inférieurs à n, mais premiers à n.*

Corollaire I. — L'équation indéterminée

$$ax + by = k$$

est toujours résoluble en nombres entiers, non seulement lorsque les coefficients a, b des deux inconnues sont premiers entre eux, mais aussi lorsque la valeur numérique du terme tout connu k est égale au plus grand commun diviseur de a, b, ou divisible par ce plus grand commun diviseur. Par suite, le plus grand commun diviseur de deux quantités entières a, b peut toujours être présenté sous la forme

$$ax + by,$$

x, y désignant encore des quantités entières.

Corollaire II. — *l, m, n* désignant trois nombres entiers, et m, n étant premiers entre eux, on peut toujours satisfaire par des valeurs entières de x, y à l'équation

$$mx - ny = \pm l.$$

D'ailleurs les diverses valeurs de x propres à vérifier cette équation ou, ce qui revient au même, l'équivalence

$$x \equiv \pm \frac{l}{m} \pmod{n}$$

sont toujours équivalentes entre elles suivant ce module n; en sorte que, l'une d'elles étant désignée par ξ, on aura généralement

$$x = \xi + nz,$$

z désignant une quantité entière positive ou négative.

On déduit aisément du théorème I celui que nous allons énoncer :

THÉORÈME II. — *Soient*

$$n = n_1 n_2$$

un module décomposable en deux facteurs n_1, n_2 premiers entre eux; r l'un quelconque des entiers inférieurs à n, mais premiers à n, et

$$r_1, \quad r_2$$

les restes qu'on obtient quand on divise r par le premier ou le second des deux facteurs

$$n_1, \quad n_2.$$

Non seulement à chaque valeur de r correspondra un seul système de valeurs de r_1, r_2, mais réciproquement, à chaque système de valeurs de r_1, r_2, correspondra une seule valeur de r.

Démonstration. — D'abord r_1, étant le reste de la division de r par n, sera complètement déterminé quand on connaîtra r, et l'on pourra en dire autant de r_2. De plus, à deux valeurs données de

$$r_1, \quad r_2,$$

correspondra une valeur de r qui devra être de chacune des formes

$$r_i + n_i x, \quad r_{ii} + n_{ii} y,$$

x, y désignant deux quantités entières. Or les deux équations

$$r = r_i + n_i x, \qquad r = r_{ii} + n_{ii} y$$

entraîneront la formule

$$r_i + n_i x = r_{ii} + n_{ii} y$$

ou

$$n_i x - n_{ii} y = r_{ii} - r_i,$$

et les valeurs de x, propres à vérifier cette formule, seront de la forme

$$\xi + n_{ii} z,$$

ξ désignant l'une quelconque de ces mêmes valeurs, et z une quantité entière, positive ou négative. Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$r_i + n_i \xi = \mathfrak{R},$$

l'équation

$$r = r_i + n_i x$$

donnera

$$r = \mathfrak{R} + n_i n_{ii} z$$

ou, ce qui revient au même,

$$r = \mathfrak{R} + n z.$$

Or, puisque les diverses valeurs de r que déterminerait cette dernière équation, si la quantité entière z restait arbitraire, sont équivalentes entre elles suivant le module n, il est clair qu'une seule sera positive et inférieure à n. Donc, à des valeurs données de r_i, r_{ii} correspondra une seule valeur de r, positive et inférieure à n. Si l'on étend le théorème II au cas où le module n est décomposable en plus de deux facteurs, on obtiendra la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Soient*

$$n = n_i n_{ii} n_{iii} \dots$$

un module décomposable en plusieurs facteurs

$$n_i, \quad n_{ii}, \quad n_{iii}, \quad \dots$$

qui soient tous premiers entre eux ; r l'un quelconque des entiers inférieurs à n, et

$$r_i, \quad r_{ii}, \quad r_{iii}, \quad \dots$$

les restes qu'on obtient quand on divise r par l'un des facteurs

$$n_i, \quad n_{ii}, \quad n_{iii}, \quad \dots$$

Non seulement à chaque valeur de r correspondra un seul système de valeurs de r_i, r_{ii}, r_{iii}, ..., mais réciproquement, à chaque système de valeurs de r_i, r_{ii}, r_{iii}, ... correspondra une seule valeur de r.

Démonstration. — En raisonnant comme dans le cas où les facteurs n_i, n_{ii}, ... se réduisent à deux, on prouvera d'abord qu'à chaque valeur de r répond un seul système de valeurs de r_i, r_{ii}, r_{iii}, ... Soit d'ailleurs

$$n'$$

le produit des facteurs de n différents de n_i, en sorte qu'on ait

$$n' = \frac{n}{n_i} = n_{ii} n_{iii} \dots,$$

et nommons r' le reste de la division de r par n'. En vertu du théorème I, si les facteurs n_i, n_{ii}, n_{iii} se réduisent à trois, on verra correspondre une seule valeur de r' à chaque système de valeurs de r_{ii}, r_{iii}, et une seule valeur de r à chaque système de valeurs de r_i, r', par conséquent à chaque système de valeurs de r_i, r_{ii}, r_{iii}. Ainsi l'on passe facilement du cas où le nombre des facteurs de n est 2 au cas où ce nombre devient égal à 3. On passera de la même manière du cas où il existe trois facteurs de n premiers entre eux au cas où il en existe quatre, et ainsi de suite. Donc le théorème III est généralement exact, quel que soit le nombre des facteurs premiers de n.

Corollaire. — Le module

$$n = n_i n_{ii} n_{iii} \dots$$

étant décomposable en facteurs

$$n_i, \quad n_{ii}, \quad n_{iii}, \quad \dots$$

qui soient premiers entre eux, nommons toujours

r l'un quelconque des entiers inférieurs à n, mais premiers à n;
r_1 l'un quelconque des entiers inférieurs à n_1, mais premiers à n_1;
r_2 l'un quelconque des entiers inférieurs à n_2, mais premiers à n_2;
.....,

et soient, en outre,

N le nombre des valeurs de r;
N_1 le nombre des valeurs de r_1;
N_2 le nombre des valeurs de r_2;
.....

Les systèmes de valeurs que l'on pourra former, en combinant une valeur de r_1 avec une valeur de r_2, avec une valeur de r_3, ..., seront évidemment en nombre égal au produit

$$N_1 N_2 N_3 \dots$$

Donc, puisqu'à chacun de ces systèmes correspond une seule valeur de r, et réciproquement, on aura

$$N = N_1 N_2 N_3 \dots$$

Il sera facile maintenant de résoudre la question que nous allons énoncer.

PROBLÈME I. — *Déterminer le nombre* N *des entiers inférieurs à un module donné n et premiers à ce module.*

Solution. — Pour résoudre aisément ce problème, il sera bon de considérer successivement les divers cas qui peuvent se présenter, suivant que le module n est un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier, ou un nombre composé quelconque.

Or : 1° si le module n est un nombre premier, alors les entiers

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad n-1, \quad n,$$

non supérieurs au module n, étant tous, à l'exception de n, premiers à ce module, on aura évidemment

$$N = n - 1. \tag{10}$$

Alors aussi, la solution que fournira le théorème I, pour une équation indéterminée, ne différera pas de la solution donnée par M. Libri et par M. Binet.

2° Si le module

$$n = \nu^a$$

se réduit à une certaine puissance d'un nombre premier ν, alors, parmi les entiers

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad n-1, \quad n,$$

dont le nombre est n, les uns, divisibles par ν, seront le produit de ν par les entiers

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad \frac{n}{\nu},$$

dont le nombre est $\frac{n}{\nu}$; les autres, premiers à ν, ou, ce qui revient au même, à n, seront évidemment en nombre égal à la différence

$$n - \frac{n}{\nu} = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

On aura donc

$$N = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \nu^{a-1}(\nu - 1). \tag{11}$$

3° Si le module n est un nombre entier quelconque, on pourra toujours le décomposer en facteurs dont chacun se réduise à un nombre premier ou à une puissance d'un nombre premier. Nommons

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad \dots$$

ces mêmes facteurs, en sorte qu'on ait

$$n = n_1 n_2 n_3 \dots$$

et

$$n_1 = \nu_1^a, \qquad n_2 = \nu_2^b, \qquad n_3 = \nu_3^c, \qquad \dots,$$

$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ désignant des nombres premiers distincts les uns des autres. Représentons d'ailleurs par

N_1 le nombre des entiers inférieurs et premiers à n_1,
N_2 le nombre des entiers inférieurs et premiers à n_2,
N_3 le nombre des entiers inférieurs et premiers à n_3,
.....

Le corollaire du théorème III donnera

$$N = N_1 N_2 N_3 \dots, \tag{12}$$

puis on en conclura, eu égard à la formule (11),

$$N = n\left(1-\frac{1}{\nu_1}\right)\left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)\left(1-\frac{1}{\nu_3}\right)\cdots \tag{13}$$

ou, ce qui revient au même,

$$N = \nu_1^{a-1}\nu_2^{b-1}\nu_3^{c-1}\dots(\nu_1-1)(\nu_2-1)(\nu_3-1)\dots. \tag{14}$$

Corollaire. — Lorsque le module n se réduit au nombre 2, ou plus généralement à une puissance 2^a de ce même nombre, la valeur de N, en vertu de la formule (10) ou (11), se réduit à l'unité ou plus généralement à 2^{a-1}, en sorte qu'on a

$$N = 2^{a-1} = \tfrac{1}{2}n.$$

Revenons maintenant au théorème I. On peut évidemment, dans ce théorème et dans les formules (8), (9), remplacer le nombre N des entiers inférieurs au module n, mais premiers à n, par l'une quelconque des valeurs de i pour lesquelles se vérifie l'équivalence

$$m^i \equiv 1 \pmod n. \tag{15}$$

Or parmi ces valeurs il en existe une, inférieure à toutes les autres, et qui, pour ce motif, doit être employée de préférence. D'ailleurs cette valeur particulière de i jouit de propriétés remarquables qui peuvent servir à la faire reconnaître et calculer. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Les nombres entiers m, n étant supposés premiers entre eux, l'unité sera certainement, dans la progression géométrique

$$1,\quad m,\quad m^2,\quad m^3,\quad \dots,$$

le premier terme qui se trouve équivalent, selon le module n, à l'un des termes suivants. En effet, une équivalence de la forme

$$m^i \equiv m^{i+i} \pmod n,$$

dans laquelle 1 et i seraient entiers et positifs, entraînera nécessairement une autre équivalence de la forme

$$1 \equiv m^i \pmod n,$$

dans laquelle le terme m^i de la progression se trouverait remplacé par l'unité. Ajoutons que, si m^i représente la moins élevée des puissances entières et positives de m, équivalentes à l'unité suivant le module n, le reste que l'on obtiendra en divisant par n les termes de la progression

$$1,\quad m,\quad m^2,\quad m^3,\quad \dots$$

formera une suite périodique, dans laquelle les i premiers termes seront différents les uns des autres. Représentons par

$$1,\quad m',\quad m'',\quad \dots,\quad m^{(i-1)}$$

ces premiers termes. Comme, dans la progression dont il s'agit, deux termes seront équivalents entre eux suivant le module n quand ils répondront à des exposants de la *base* m équivalents entre eux suivant le module i, on aura évidemment

$$\left.\begin{array}{l} m^0 \equiv m^i \equiv m^{2i} \equiv \dots \equiv 1, \\ m^1 \equiv m^{i+1} \equiv m^{2i+1} \equiv \dots \equiv m', \\ m^2 \equiv m^{i+2} \equiv m^{2i+2} \equiv \dots \equiv m'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ m^{i-1} \equiv m^{2i-1} \equiv m^{3i-1} \equiv \dots \equiv m^{(i-1)} \end{array}\right\} \pmod n. \tag{16}$$

L'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base m, pour obtenir un nombre équivalent suivant le module n à un reste donné, est ce qu'on nomme l'*indice* de ce nombre ou de ce reste. Cela posé, il est clair que, dans les formules (16), les indices correspondants au reste 1 seront représentés par les exposants

$$0,\quad i,\quad 2i,\quad \dots,$$

les indices correspondants au reste m' par les exposants

$$1,\quad i+1,\quad 2i+1,\quad \dots,$$

les indices correspondants au reste m^r par les exposants

$$2,\quad i+2,\quad 2i+2,\quad \ldots,$$

enfin les indices correspondants au reste $m^{(i-1)}$ par les exposants

$$i-1,\quad 2i-1,\quad 3i-1,\quad \ldots.$$

Donc, puisque les restes

$$1,\quad m^1,\quad m^r,\quad \ldots,\quad m^{(i-1)}$$

seront tous inégaux entre eux, les seuls indices positifs de l'unité seront les divers multiples de i, et le plus petit de ces indices ou le nombre i montrera combien la suite périodique des restes, indéfiniment prolongée, renferme de restes différents. L'étendue de la période formée avec ces restes

$$1,\quad m^1,\quad m^r,\quad \ldots,\quad m^{(i-1)}$$

se trouvera donc indiquée par le plus petit des indices de l'unité, auquel nous donnerons, pour cette raison, le nom d'*indicateur*. Cela posé, on pourra évidemment énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *m, n désignant deux nombres entiers, et m étant premier à n, les seules puissances entières et positives de m qui seront équivalentes à l'unité, suivant le module n, seront celles qui offriront pour exposants l'indicateur i correspondant à la base m et ses divers multiples.*

On déduit immédiatement du théorème IV celui que nous allons énoncer :

THÉORÈME V. — *Si le module n est décomposable en divers facteurs n_1, n_2, ..., en sorte qu'on ait*

$$n = n_1 n_2 \ldots$$

et si, la base m étant un nombre premier à n, on nomme

$$i_1,\quad i_2,\quad \ldots$$

les indicateurs correspondants aux modules

$$n_1,\quad n_2,\quad \ldots,$$

l'indicateur i, correspondant au module n, sera le plus petit nombre entier qui soit divisible par chacun des indicateurs i_1, i_2, ...

Démonstration. — En effet, l'indicateur i correspondant au module n sera la plus petite des valeurs de i pour lesquelles se vérifiera la formule

$$m^i \equiv 1 \pmod{n}.$$

D'ailleurs, n étant égal au produit des facteurs n_1, n_2, ..., cette formule entraînera les suivantes :

$$m^i \equiv 1 \pmod{n_1}, \qquad m^i \equiv 1 \pmod{n_2}, \qquad \ldots.$$

Donc, en vertu du théorème précédent, i devra être à la fois un des multiples de n_1, un des multiples de n_2, ... Donc la valeur cherchée de i sera la plus petite de celles qui seront à la fois divisibles par n_1, par n_2, ...

L'indicateur i, correspondant à un module donné n, varie généralement avec la base m; mais cette variation s'effectue suivant certaines lois, et l'on peut énoncer à ce sujet les propositions suivantes :

THÉORÈME VI. — *Si la base m est décomposable en deux facteurs*

$$m_1,\quad m_2,$$

auxquels correspondent des indicateurs

$$i_1,\quad i_2,$$

premiers entre eux, dans le cas où le nombre n est pris pour module, on aura, non seulement

$$m = m_1 m_2,$$

mais encore, en désignant par i l'indicateur correspondant à la base m et au module n,

$$i = i_1 i_2.$$

Démonstration. — L'indicateur i relatif à la base m vérifiera la formule

$$m^i \equiv 1 \pmod{n},$$

de laquelle on tirera

$$m^{2i} \equiv 1, \qquad m^{3i} \equiv 1, \qquad \ldots$$

et, généralement, si l'on désigne par j un multiple quelconque de i,

$$m^j \equiv 1 \pmod n \tag{17}$$

ou, ce qui revient au même,

$$m_\iota^j m_\varkappa^j \equiv 1 \pmod n. \tag{18}$$

D'autre part, les indicateurs i_ι, $i_\varkappa$, relatifs aux bases m_ι, $m_\varkappa$, vérifieront les équivalences

$$m_\iota^{i_\iota} \equiv 1, \qquad m_\varkappa^{i_\varkappa} \equiv 1 \pmod n; \tag{19}$$

et il suffira que i_ι divise j pour que la première des formules (19) entraîne l'équivalence

$$m_\iota^j \equiv 1 \pmod n,$$

par conséquent, eu égard à la formule (18), l'équivalence

$$m_\varkappa^j \equiv 1 \pmod n,$$

qui suppose (*voir* le théorème IV) j divisible par $i_\varkappa$. Ainsi, de ce que le nombre i vérifie l'équivalence

$$m^i \equiv 1 \pmod n,$$

il résulte que tout multiple de i, divisible par i_ι, sera en même temps divisible par $i_\varkappa$; en sorte que $i_\varkappa$ divisera nécessairement le produit $\ddot{u}_\iota$, et par suite le nombre i, si i_ι, $i_\varkappa$ sont premiers entre eux. Mais alors i, divisible par i_ι, devra l'être pareillement et, pour la même raison, par $i_\varkappa$. Donc, si i_ι, $i_\varkappa$ sont premiers entre eux, tout nombre i, propre à vérifier l'équivalence

$$m^i \equiv 1 \pmod n,$$

sera divisible par le produit $i_\iota i_\varkappa$, et l'indicateur correspondant à la base m, ou la plus petite des valeurs de i pour lesquelles on aura

$$m^i \equiv 1 \pmod n,$$

devra se réduire à ce produit.

THÉORÈME VII. — *Soient*

$$i_\iota, \quad i_\varkappa$$

les indicateurs correspondants à deux bases diverses

$$m_\iota, \quad m_\varkappa,$$

mais à un même module n. Le plus grand commun diviseur ω des indicateurs i_ι, $i_\varkappa$ pourra être décomposé, souvent même de plusieurs manières, en deux facteurs u, v tellement choisis, que les rapports

$$\frac{i_\iota}{u}, \quad \frac{i_\varkappa}{v}$$

soient des nombres premiers entre eux, et, si l'on pose alors

$$m = m_\iota^u m_\varkappa^v,$$

l'indicateur i, relatif à la base m, sera le plus petit nombre entier que puissent diviser simultanément les indicateurs i_ι, $i_\varkappa$.

Démonstration. — Concevons que le plus grand commun diviseur ω de i_ι, $i_\varkappa$ soit décomposé en facteurs

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

dont chacun représente un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier. Deux produits

$$u, \quad v,$$

formés avec ces mêmes facteurs, de manière que l'on ait

$$uv = \omega,$$

fourniront, pour les rapports

$$\frac{i_\iota}{u}, \quad \frac{i_\varkappa}{v},$$

des nombres premiers entre eux, si l'on fait concourir chaque facteur, par exemple le facteur α, à la formation du produit u, quand α est premier à $\frac{i_\iota}{\alpha}$; du produit v, quand α est premier à $\frac{i_\varkappa}{\alpha}$; enfin du produit u ou du produit v indifféremment, quand α est premier à chacun des deux

nombres

$$\frac{i_\prime}{\alpha}, \quad \frac{i_{\prime\prime}}{\alpha}.$$

Les deux produits u, v étant formés, comme on vient de le dire, pour déduire le théorème VII du théorème VI, il suffit d'observer que,

$$i_\prime, \quad i_{\prime\prime}$$

étant les indicateurs relatifs aux bases

$$m_\prime, \quad m_{\prime\prime},$$

les nombres entiers

$$\frac{i_\prime}{u}, \quad \frac{i_{\prime\prime}}{v}$$

seront les indicateurs relatifs aux bases

$$m_\prime^u, \quad m_{\prime\prime}^v,$$

et que, ces indicateurs étant premiers entre eux, la base m déterminée par la formule

$$m = m_\prime^u m_{\prime\prime}^v$$

devra correspondre à l'indicateur

$$i = \frac{i_\prime}{u}\frac{i_{\prime\prime}}{v} = \frac{i_\prime i_{\prime\prime}}{\omega}.$$

Or cette dernière valeur i sera précisément le plus petit nombre entier que puissent diviser simultanément les indicateurs $i_\prime$, $i_{\prime\prime}$.

Corollaire I. — Pour montrer une application du théorème VII, considérons en particulier le cas où l'on aurait

$$n = 78,$$
$$m_\prime = 5, \quad m_{\prime\prime} = 29.$$

Comme

$$5^1 \quad \text{et} \quad 29^6$$

seront les puissances les moins élevées des nombres 5 et 29, qui, divisées par le module 78, donneront pour reste l'unité, on aura nécessairement

$$i_\prime = 4, \quad i_{\prime\prime} = 6, \quad \omega = 2,$$

et, par suite,

$$u = 1, \quad v = 2,$$

attendu que, des deux rapports

$$\frac{i_\prime}{2} = 2, \quad \frac{i_{\prime\prime}}{3} = 3,$$

le second seul sera premier au facteur 2 de ω. Cela posé, pour obtenir une base m, correspondante à l'indicateur

$$i = \frac{i_\prime i_{\prime\prime}}{\omega} = 12,$$

il suffira de prendre

$$m = m_\prime^u m_{\prime\prime}^v = 5.29^2;$$

et, puisque

$$5.29^2 \equiv 71 \equiv -7 \pmod{78},$$

il suffira de prendre

$$m = 71.$$

Effectivement, 71^{12} est la première puissance de 71 qui, divisée par 78, donne pour reste l'unité.

Corollaire II. — Étant données deux bases

$$m_\prime, \quad m_{\prime\prime},$$

qui correspondent à deux indicateurs différents

$$i_\prime, \quad i_{\prime\prime},$$

on peut toujours trouver une troisième base

$$m$$

qui corresponde à l'indicateur i représenté par le plus petit des nombres qui divisent à la fois les deux indicateurs donnés.

Corollaire III. — Soient

$$m_\prime, \quad m_{\prime\prime}, \quad m_{\prime\prime\prime}$$

trois bases différentes, et

$$i_\prime, \quad i_{\prime\prime}, \quad i_{\prime\prime\prime}$$

les indicateurs qui correspondent à ces trois bases, mais à un seul et même module n. Si l'on nomme i'' le plus petit nombre que diviseront simultanément i_a et i_a, le plus petit nombre i que pourront diviser simultanément i_1 et i'' sera en même temps le plus petit des nombres divisibles par chacun des trois facteurs

$$i_1, \quad i_a, \quad i_a.$$

D'ailleurs, à l'aide du théorème VII, on pourra trouver, non seulement une base m' correspondante à l'indicateur i'', mais encore une base m correspondante à l'indicateur i. Donc, étant données trois bases différentes avec un seul module, on peut toujours trouver une nouvelle base qui corresponde à l'indicateur représenté par le plus petit des nombres que divisent les trois indicateurs correspondants aux trois bases données. En appliquant un raisonnement semblable au cas où l'on donnerait quatre ou cinq bases au lieu de trois, on obtiendra généralement la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Étant données plusieurs bases différentes*

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots,$$

avec un seul module n, on peut toujours trouver une nouvelle base qui corresponde à l'indicateur représenté par le plus petit des nombres que divisent à la fois les indicateurs correspondants aux bases données.

Corollaire. — Si le système des bases données

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots$$

comprend tous les entiers inférieurs au module donné n et premiers à ce module, les indicateurs

$$i_1, \quad i_2, \quad i_3, \quad \ldots,$$

relatifs à ces mêmes bases, seront tous ceux qui peuvent correspondre au module n. Cela posé, on doit conclure du théorème VIII que tous les indicateurs correspondants à un module donné divisent un même nombre qui coïncide avec l'un de ces indicateurs. Il est d'ailleurs évident que ce dernier doit être le plus grand de tous les indicateurs, ou celui qu'on peut appeler l'*indicateur maximum*. Nommons I cet indicateur maximum. En vertu de la remarque précédente et du théorème IV, l'équivalence

$$m^{\mathrm{I}} \equiv 1 \pmod{n} \tag{20}$$

se trouvera vérifiée toutes les fois que le nombre m sera premier au module n; et, dans cette supposition, on résoudra en nombres entiers l'équation

$$mx \pm ny = \pm l,$$

en prenant

$$x = \pm m^{\mathrm{I}-1} l. \tag{21}$$

Il nous reste à déterminer, pour chaque module n, l'indicateur maximum I. Cette détermination de l'indicateur maximum se trouve intimement liée à la recherche des valeurs correspondantes de la base m, valeurs que nous appellerons *racines primitives* du module n, en généralisant une définition admise par les géomètres pour le cas où ce module est la première puissance ou même une puissance quelconque d'un nombre premier impair. D'ailleurs la détermination dont il s'agit se déduit aisément des propositions déjà établies, jointes à quelques autres théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème IX. — *Soient n un nombre premier, et* X *une fonction entière de x, dans laquelle les coefficients numériques des diverses puissances de x se réduisent à des nombres entiers. Si l'on nomme r une racine de l'équivalence*

$$\mathrm{X} \equiv 0 \pmod{n}, \tag{22}$$

et X, *un second polynôme semblable au polynôme* X, *mais du degré immédiatement inférieur, on pourra choisir ce second polynôme de manière que l'on ait, pour toute valeur entière de x,*

$$\mathrm{X} \equiv (x - r)\mathrm{X}, \pmod{n}. \tag{23}$$

Démonstration. — En effet, soit R ce que devient X pour $x = r$. La

différence $X - R$ sera divisible algébriquement par $x - r$, et le quotient sera un polynôme X_1 semblable au polynôme X, mais du degré immédiatement inférieur. Comme on aura d'ailleurs identiquement

$$X - R = (x - r)X_1,$$

et de plus

$$R \equiv 0 \pmod{n},$$

on en conclura, en attribuant à x une valeur entière quelconque,

$$X \equiv (x - r)X_1 \pmod{n}.$$

Corollaire I. — En vertu de la formule (23), l'équivalence (22), réduite à

$$(x - r)X_1 \equiv 0 \pmod{n},$$

se décomposera en deux autres, savoir :

$$x - r \equiv 0, \qquad X_1 \equiv 0 \pmod{n}. \tag{24}$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que le coefficient de la plus haute puissance de x restera le même dans les deux polynômes X, X_1. Cela posé, concevons que, ce coefficient étant premier au module n, la racine r se réduise à l'un des entiers inférieurs à ce module, et nommons

$$r, \quad r', \quad r'', \quad \ldots$$

les diverses racines de l'équivalence (22), représentées par divers entiers inférieurs à n. Une racine r', distincte de r, ne pouvant vérifier la première des formules (24), vérifiera nécessairement la seconde. Si d'ailleurs le polynôme X est du premier degré ou de la forme $ax + b$, a étant premier à n, on aura

$$X_1 = a;$$

et, la seconde des formules (24) ne pouvant être vérifiée, l'équation (21) n'admettra point de racine distincte de r et inférieure à n. Si le polynôme X est du second degré, alors, le polynôme X_1 étant du premier degré, la seconde des formules (24) admettra une seule racine inférieure à n, et par suite l'équation (22) admettra au plus deux racines distinctes inférieures à n. En continuant ainsi à faire croître le degré

du polynôme X, on déduira évidemment des formules (24) la proposition suivante :

THÉORÈME X. — *Soient n un nombre premier, et X une fonction entière de x, dans laquelle les coefficients numériques des diverses puissances de x se réduisent à des nombres entiers, le coefficient de la puissance la plus élevée étant premier au module n. Le degré du polynôme X ne pourra être surpassé par le nombre des racines distinctes et inférieures à n qui vérifieront l'équivalence*

$$X \equiv 0 \pmod{n}.$$

Corollaire I. — Le module n étant un nombre premier, et I étant l'indicateur maximum relatif à ce module, chacun des nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n - 1,$$

inférieurs et premiers au module n, représentera une valeur de m propre à vérifier la formule (20) et sera par conséquent une racine de l'équivalence

$$x^I - 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Donc, en vertu du théorème X, l'indicateur maximum I ne pourra être inférieur au nombre des entiers

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n - 1,$$

c'est-à-dire au nombre

$$N = n - 1;$$

et puisque, en vertu du théorème IV, joint au théorème de Fermat, I devra diviser ce même nombre, on aura nécessairement

$$I = N = n - 1. \tag{25}$$

Corollaire II. — La formule (25) s'étend au cas même où l'on aurait

$$n = 2,$$

et par suite

$$I = N = 1.$$

Supposons maintenant que le module n cesse d'être un nombre premier; alors on établira facilement les propositions suivantes.

THÉORÈME XI. — *ν étant un module quelconque, i un nombre entier, x une quantité entière qui vérifie l'équivalence*

$$x \equiv 1 \pmod{\nu}, \tag{26}$$

et z le quotient de x − 1 par ν, l'équation

$$x = 1 + \nu z$$

entraînera l'équivalence

$$x^i \equiv 1 + \nu i z \pmod{\nu^2}. \tag{27}$$

Démonstration. — En effet, dans le développement de

$$x^i = (1 + \nu z)^i,$$

tous les termes, à l'exception des deux premiers, seront divisibles par ν^2.

Corollaire I. — Si z ou i sont divisibles par ν, la formule (27) se réduira simplement à la suivante :

$$x^i \equiv 1 \pmod{\nu^2}. \tag{28}$$

Mais cette réduction ne pourra plus s'effectuer si z et i sont premiers à ν.

Corollaire II. — Si i est premier à ν, la valeur de x fournie par l'équation

$$x = 1 + \nu z$$

ne pourra vérifier la formule (28), à moins que z ne devienne divisible par ν, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

$$x \equiv 1 \pmod{\nu^2}. \tag{29}$$

Corollaire III. — Supposons que ν devienne un nombre premier, et que la quantité entière x soit équivalente à l'unité suivant le module ν, mais non suivant le module ν^2, en sorte que x vérifie la condition (26), sans vérifier la condition (29) : on ne pourra satisfaire à l'équivalence (28) qu'en attribuant à l'exposant i une valeur divisible par ν. Donc, parmi les puissances de x qui deviendront équivalentes à l'unité

suivant le module ν^2, la moins élevée sera x^ν. En d'autres termes, ν sera l'indicateur correspondant au module

$$n = \nu^2$$

et à la base

$$x = 1 + \nu z,$$

tant que z restera premier à ν.

Corollaire IV. — Si, le module ν étant un nombre premier, la quantité

$$x = 1 + \nu z$$

devient positive et inférieure à ν^2, elle ne pourra être qu'un terme de la progression arithmétique

$$1, \quad 1 + \nu, \quad 1 + 2\nu, \quad \ldots, \quad 1 + (\nu - 1)\nu. \tag{30}$$

Or, comme le premier terme de cette progression vérifie seul la formule (29), il résulte du corollaire précédent que l'indicateur correspondant à l'un quelconque des autres termes et au module ν^2 sera le nombre premier ν.

Corollaire V. — Si, dans les formules (26), (28), (29), on remplace x par $\frac{x}{y}$, x et y désignant deux nombres entiers premiers à ν, ces formules deviendront

$$\begin{cases} x \equiv y \pmod{\nu}, \\ x^i \equiv y^i \pmod{\nu^2}, \\ x \equiv y \pmod{\nu^2}. \end{cases} \tag{31}$$

Donc, lorsque i sera premier à ν, non seulement les formules (26) et (28) entraîneront la formule (29), mais de plus les deux premières des formules (31) entraîneront la troisième, d'où il résulte qu'elles ne pourront subsister en même temps, si x, y sont tous deux positifs et inférieurs à ν^2.

Corollaire VI. — ν étant un nombre premier, r une racine primitive de ν, et x l'une des quantités entières qui vérifient la formule

$$x \equiv r \pmod{\nu}, \tag{32}$$

nommons i l'indicateur correspondant à la base r et au module

$$n = \nu^2.$$

On aura

$$x^i \equiv 1 \pmod{\nu^2},$$

par conséquent

$$x^i \equiv 1 \pmod{\nu};$$

et, comme la formule (32) donnera

$$x^i \equiv r^i \pmod{\nu},$$

on aura encore

$$r^i \equiv 1 \pmod{\nu}.$$

Donc, en vertu du théorème IV, i sera, ou le nombre $\nu - 1$ qui représente l'indicateur correspondant au module ν et à la racine primitive r, ou un multiple de ce nombre. Mais, d'autre part, l'indicateur i devra diviser le nombre N des entiers inférieurs et premiers à ν^2, savoir le produit

$$N = \nu(\nu - 1).$$

Or, ν étant premier, les seuls multiples de $\nu - 1$ qui diviseront ce produit seront

$$\nu - 1 \quad \text{et} \quad N.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, on aura

$$i = \nu - 1 \qquad \text{ou} \qquad i = N = \nu(\nu - 1).$$

Observons maintenant que, parmi les valeurs de x propres à vérifier la formule (32), celles qui seront positives et inférieures à ν^2 se réduiront aux termes de la progression arithmétique

$$r, \quad r + \nu, \quad r + 2\nu, \quad \ldots, \quad r + (\nu - 1)\nu, \tag{33}$$

et qu'en vertu du corollaire précédent, si l'on désigne par x, y deux de ces termes, l'équation

$$x^i \equiv y^i \pmod{\nu^2}$$

ne pourra subsister, quand i sera premier à ν. Donc la valeur $\nu - 1$ de l'indicateur i ne pourra correspondre qu'à un seul des termes de la

progression (33), et, pour chacun des autres termes, on aura nécessairement $i = N$.

Corollaire VII. — Le module

$$x = \nu^2$$

étant le carré d'un nombre premier ν, un seul terme de la progression (33) peut représenter une racine de l'équation

$$x^{\nu - 1} \equiv 1 \pmod{\nu^2}. \tag{34}$$

Pour chacun des autres, l'indicateur i acquiert la plus grande valeur N qu'il puisse atteindre, puisqu'il doit diviser N. Donc tous les termes de la progression (33), qui ne vérifient pas la condition (34), sont des racines primitives de ν^2, et l'indicateur maximum I relatif au module ν^2 est

$$I = N = \nu(\nu - 1). \tag{35}$$

Corollaire VIII. — La formule (35) s'étend au cas même où l'on aurait

$$\nu = 2, \qquad n = \nu^2 = 4$$

et, par suite,

$$N = 2.$$

On a donc, en prenant 4 pour module,

$$I = N = 2.$$

Alors aussi l'on obtient une seule racine primitive r inférieure à 4, savoir

$$r = 3.$$

THÉORÈME XII. — *$\nu > 1$ étant un nombre premier et x une quantité entière qui vérifie l'équivalence*

$$x \equiv 1 \pmod{\nu},$$

si l'on représente par n la puissance la plus élevée de ν qui divise la différence

$$x - 1,$$

le produit $n\nu$ représentera la puissance la plus élevée de ν qui divisera la différence

$$x^{\nu}-1,$$

à moins que l'on n'ait

$$x=\nu=2.$$

Démonstration. — Nommons z le quotient de $x-1$ par n. On aura

$$x=1+nz,$$

z étant, par hypothèse, premier à ν. Or, dans le développement de

$$x^{\nu}=(1+nz)^{\nu},$$

les termes extrêmes seront

$$1, \quad n^{\nu}z^{\nu},$$

et tous les autres seront évidemment divisibles par le produit $n\nu$. D'ailleurs, ν étant facteur de n, le terme

$$n^{\nu}z^{\nu}=n.n^{\nu-1}z^{\nu}$$

sera lui-même divisible par le produit $n\nu$. Donc ce produit divisera la différence

$$x^{\nu}-1.$$

Il y a plus, ν étant un facteur de n, ν^2 sera un facteur de $n^{\nu-1}$, à moins que l'on n'ait

$$n=\nu=2; \tag{36}$$

et par suite, si la condition (36) n'est pas remplie, tous les termes qui suivront les deux premiers dans le développement de

$$(1+nz)^{\nu}$$

seront divisibles ou par $n^2\nu$ ou au moins par $n\nu^2$. On aura donc alors

$$x^{\nu}\equiv 1+n\nu z \pmod{n\nu^2}.$$

Donc, z étant premier à ν, le produit $n\nu$ sera la puissance la plus élevée de ν qui divise la différence

$$x^{\nu}-1.$$

Corollaire I. — Si, dans le théorème XII, on remplace successivement x par x^{ν}, puis par x^{ν^2}, ..., on en conclura que, dans l'hypothèse admise, les puissances les plus élevées de ν, propres à diviser les différences

$$x^{\nu}-1, \quad x^{\nu^2}-1, \quad x^{\nu^3}-1, \quad \ldots,$$

seront respectivement

$$n\nu, \quad n\nu^2, \quad n\nu^3, \quad \ldots.$$

On doit toujours excepter le cas où l'on aurait $n=\nu=2$.

Corollaire II. — En remplaçant dans le corollaire précédent x par x^{ℓ}, on obtiendra une proposition dont voici l'énoncé : Si, $\nu>1$ étant un nombre premier, on représente par n la plus élevée des puissances de ν qui divisent

$$x^{\ell}-1,$$

alors les puissances les plus élevées de ν, qui diviseront les différences

$$x^{\ell\nu}-1, \quad x^{\ell\nu^2}-1, \quad x^{\ell\nu^3}-1, \quad \ldots,$$

seront respectivement

$$n\nu, \quad n\nu^2, \quad n\nu^3, \quad \ldots,$$

à moins que l'on n'ait $n=\nu=2$.

Corollaire III. — ν étant un nombre premier impair, et r une racine primitive de ν^2, la différence

$$r^{\nu-1}-1$$

sera divisible une seule fois par ν. Donc, en vertu du corollaire II, les puissances les plus élevées de ν qui diviseront les différences

$$r^{\nu(\nu-1)}-1, \quad r^{\nu^2(\nu-1)}-1, \quad r^{\nu^3(\nu-1)}-1, \quad \ldots$$

seront respectivement

$$\nu^2, \quad \nu^3, \quad \nu^4, \quad \ldots$$

Donc

$$r^{\nu^2(\nu-1)}$$

sera le premier des termes de la suite

$$r^{\nu-1}, \quad r^{\nu(\nu-1)}, \quad r^{\nu^2(\nu-1)}, \quad r^{\nu^3(\nu-1)}, \quad \ldots \tag{37}$$

qui seront équivalents à l'unité, suivant le module ν^a. D'autre part, si l'on nomme i l'indicateur correspondant à la base r et au module ν^a, on aura

$$r^i \equiv 1 \pmod{\nu^a}$$

et, à plus forte raison,

$$r^i \equiv 1 \pmod{\nu};$$

d'où il résulte que i devra être un multiple de l'indicateur $\nu - 1$ correspondant à la base r et au module ν. Donc i, qui devra en outre diviser le produit

$$N = \nu^{a-1}(\nu - 1),$$

représentera l'exposant de r dans le premier des termes de la suite (37) qui seront équivalents à l'unité suivant le module ν^a. On aura donc nécessairement

$$i = N = \nu^{a-1}(\nu - 1).$$

Cette dernière valeur de i étant la plus grande que puisse acquérir un indicateur relatif au module ν^a, nous devons conclure, des observations précédentes, qu'une racine primitive r de ν^2 sera en même temps une racine primitive de ν^a, et que, dans le cas où le module

$$n = \nu^a$$

se réduit à une puissance d'un nombre premier impair, l'indicateur maximum I est déterminé par la formule

(38) $$I = N = \nu^{a-1}(\nu - 1).$$

Corollaire IV. — Considérons en particulier le cas où l'on aurait

$$n = \nu = 2,$$

et supposons en conséquence la différence

$$x - 1$$

divisible une seule fois par le module 2. La différence

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

sera composée de deux facteurs $x - 1$, $x + 1$, divisibles l'un par 2,

l'autre par 4. Elle sera donc divisible au moins par le nombre 8, c'est-à-dire par le cube de 2. Cela posé, nommons n la plus haute puissance de 2 qui divisera $x^2 - 1$. En vertu du corollaire II, les puissances les plus élevées de 2 qui diviseront les différences

$$x^{2^1} - 1, \quad x^{2^2} - 1, \quad \ldots$$

seront respectivement

$$2n, \quad 2^2 n, \quad \ldots.$$

Donc, si a surpasse 2, le premier terme de la suite

$$x^2, \quad x^{2^1}, \quad x^{2^2}, \quad \ldots$$

qui deviendra équivalent à l'unité suivant le module 2^a sera

$$x^i,$$

la valeur de i étant

(39) $$i = \frac{2^{a+1}}{n}.$$

D'autre part, l'indicateur correspondant à la base x, et au module 2^a, devra être un diviseur de

$$N = 2^{a-1}.$$

Il se trouvera donc compris dans la suite

$$2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad \ldots,$$

et ne pourra être que la valeur précédente de i. Cette même valeur deviendra le plus grande possible lorsque le nombre n se réduira simplement à 8, ce qui arrivera si l'on prend

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 5,$$

puisque l'on a

$$3^2 - 1 = 8 \quad \text{et} \quad 5^2 - 1 = 3.8.$$

Par conséquent,

(40) $$I = \tfrac{1}{4} N = 2^{a-2}$$

sera l'indicateur maximum relatif au module

$$n = 2^a > 4.$$

La formule (40) s'étend au cas même où l'on aurait $a = 3$, et donne alors, comme on devait s'y attendre,

$$I = \tfrac{1}{2}N = 2.$$

A l'aide des diverses propositions que nous venons de rappeler et qui pour la plupart étaient déjà connues (*voir* les *Recherches arithmétiques* de M. Gauss et le *Canon arithmeticus* de M. Jacobi), il nous sera maintenant facile de résoudre la question suivante :

PROBLÈME II. — *Trouver l'indicateur maximum* I *correspondant à un module donné n.*

Solution. — Pour résoudre ce problème, il faut considérer successivement les divers cas qui peuvent se présenter, suivant que le module n est un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre, ou un nombre composé.

Si le module n est un nombre premier ν, ou une puissance d'un nombre premier impair, ou l'une des deux premières puissances de 2, alors, en nommant N le nombre des entiers inférieurs à n, et premiers à n, on aura généralement, d'après ce qui a été dit ci-dessus,

$$I = N = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right);$$

et en particulier, si n se réduit à 2 ou à 4,

$$I = N = \tfrac{1}{2}n.$$

Si le module n est une puissance de 2, supérieure à la seconde, on aura simplement

$$I = \tfrac{1}{2}N = \tfrac{1}{4}n.$$

Enfin, si le module n est un nombre quelconque, on pourra le décomposer en facteurs

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots,$$

dont chacun soit un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier. Soient alors

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots$$

les indicateurs maxima correspondants aux modules

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots.$$

En vertu des théorèmes III et V, une base donnée r sera une racine primitive de n, si cette base, divisée successivement par chacun des nombres $n_1, n_2, \ldots$, fournit pour restes des racines primitives de ces mêmes nombres, et I sera le plus petit nombre entier divisible à la fois par chacun des indicateurs

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots.$$

La solution du problème précédent fournit, pour la résolution des équivalences du premier degré, une règle très simple, qui se réduit à la règle donnée par M. Libri et par M. Binet, dans le cas particulier où le module est un nombre premier. La nouvelle règle, d'après ce que nous a dit M. Poinsot, coïncide, au moins lorsque le module est pair, avec celle que lui-même avait indiquée dans la Note manuscrite remise à M. Legendre. Appliquée au cas où l'on prend pour module un nombre composé, elle n'exige pas, comme les méthodes présentées par M. Libri et M. Binet, la décomposition de ce module en facteurs premiers, et ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'alors l'application devient d'autant plus facile que le module est un nombre plus composé. Montrons la vérité de cette assertion par quelques exemples.

Pour que toute équation indéterminée à deux inconnues puisse être résolue immédiatement à la seule inspection des coefficients de ces inconnues, dans le cas où l'un des coefficients ne surpasse pas 1000, il suffit que l'on construise un Tableau qui, pour tout module renfermé entre les limites 1 et 1000, fournisse l'indicateur correspondant à ce module. Or, à l'aide de ce Tableau, dont la construction est facile (*voir* la solution du problème II), et dont une partie se trouve à la suite de ce Mémoire (page 145), on reconnaît que l'indicateur 2 correspond aux modules

$$3, \quad 4, \quad 6, \quad 12, \quad 24.$$

Donc, pour chacun de ces modules, l'inverse d'un nombre donné est équivalent à ce nombre même.

Ainsi, en particulier, l'inverse du nombre 19 suivant le module 24 est équivalent à 19. En d'autres termes, 19 est une des valeurs entières de x qui vérifient l'équation indéterminée

$$19x - 24y = 1.$$

Effectivement, le carré de 19 ou 361, divisé par 24, donne 1 pour reste.

De ce que l'indicateur 4 correspond aux modules

5, 10, 15, 16, 20, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240,

il résulte immédiatement que, pour chacun de ces modules, l'inverse d'un nombre donné est équivalent au cube de ce même nombre. Ainsi, en particulier, l'inverse du nombre 67 suivant le module 120 est équivalent au cube de 67, par conséquent au produit de 67 par 49, ou à 43. En d'autres termes, 43 est une des valeurs de x qui vérifient l'équation

$$67x - 120y = 1.$$

Effectivement,

$$67 \times 43 = 2881 = 24 \times 120 + 1.$$

De ce que l'indicateur 6 correspond aux modules

7, 9, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 168, 504,

il résulte immédiatement que, pour chacun de ces modules, l'inverse d'un nombre donné est équivalent à la cinquième puissance de ce nombre. Ainsi, en particulier, l'inverse du nombre 17 sera équivalent, suivant le module 504, à

$$17^5 = 1419857,$$

par conséquent à 89. En d'autres termes, 89 est une valeur de x propre à vérifier l'équation indéterminée

$$17x - 504y = 1.$$

Effectivement,

$$17 \times 89 = 1513 = 3 \times 504 + 1.$$

Comme, dans la méthode ci-dessus exposée, la valeur de x est toujours exprimée par une puissance connue du nombre donné, le calcul pourra s'exécuter commodément, à l'aide des Tables de logarithmes, même quand l'indicateur sera composé de plusieurs chiffres.

TABLEAU *pour la détermination de l'indicateur maximum* I *correspondant à un module donné n.*

n.	I.	*n.*	I.	*n.*	I.	*n.*	I.	*n.*	I.
		21	6	41	40	61	60	81	54
2	1	22	10	42	6	62	30	82	40
3	2	23	22	43	42	63	6	83	82
4	2	24	2	44	10	64	16	84	6
5	4	25	20	45	12	65	12	85	16
6	2	26	12	46	22	66	10	86	42
7	6	27	18	47	46	67	66	87	28
8	2	28	6	48	4	68	16	88	10
9	6	29	28	49	42	69	22	89	88
10	4	30	4	50	20	70	12	90	12
11	10	31	30	51	16	71	70	91	12
12	2	32	8	52	12	72	6	92	22
13	12	33	10	53	52	73	72	93	30
14	6	34	16	54	18	74	36	94	46
15	4	35	12	55	20	75	20	95	36
16	4	36	6	56	6	76	18	96	8
17	16	37	36	57	18	77	30	97	96
18	6	38	18	58	28	78	12	98	42
19	18	39	12	59	58	79	78	99	30
20	4	40	4	60	4	80	4	100	20

Supposons, pour fixer les idées, que, le nombre donné étant 29, on demande un autre nombre équivalent à l'inverse du premier, suivant le module 192. L'indicateur étant alors égal à 16, le nombre cherché sera

$$29^{13} = (29^3)^3.$$

D'ailleurs les sept premiers chiffres de la valeur approchée de 29^3, déterminés à l'aide des Tables de logarithmes, sont ceux que présente le nombre

2051115,

attendu que l'on a

$$5\log 29 = 7{,}3119900.$$

De plus, le dernier chiffre de 29^5, comme celui de 9^5, sera nécessairement 9. On aura donc par suite

$$29^5 = 20511149 \equiv 173 \equiv -19 \pmod{192},$$
$$29^{15} \equiv -19^3 \pmod{192};$$

puis, en se servant de nouveau des Tables de logarithmes,

$$29^{15} \equiv -6859 \equiv -139 \equiv 53 \pmod{192}.$$

Donc, 29^{15} et 53 seront deux valeurs de x propres à vérifier la formule

$$29x - 192y = 1.$$

Effectivement,

$$29.53 = 1537 = 8.192 + 1.$$

Nous exposerons dans un autre Article la méthode par laquelle on peut trouver facilement les valeurs entières, nulles ou positives, de plusieurs inconnues liées entre elles par des équations indéterminées du premier degré.

124.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Rapport sur un Mémoire de* M. Broch, *relatif à une certaine classe d'intégrales.*

C. R., t. XII, p. 847 (10 mai 1841).

Les géomètres connaissent les beaux travaux d'Abel et de M. Jacobi sur la théorie des transcendantes elliptiques. On sait que d'importants Mémoires, relatifs à cette théorie, ont été composés par Abel, dans l'année 1826 et les deux suivantes, que plusieurs de ces Mémoires ont été publiés dès cette époque, même dès l'année 1826, dans le *Journal scientifique* de M. Crelle; que l'un d'eux en particulier a été approuvé par l'Académie en 1829, sur le Rapport d'une Commission

dont M. Legendre faisait partie, puis couronné par l'Institut en 1830, et que la valeur du prix fut remise à la mère d'Abel. En effet, cet illustre Norwégien, qu'un projet de mariage avait déterminé à entreprendre un voyage au plus fort de l'hiver, était malheureusement tombé malade vers le milieu de janvier 1829, et, malgré les soins qui lui furent prodigués par la famille de sa fiancée, il était mort d'une phthisie, le 6 avril, alité depuis trois mois.

C'est encore aujourd'hui pour les travaux d'un jeune Norwégien, d'un compatriote d'Abel, que nous avons à réclamer un moment d'attention de la part de l'Académie. Le Mémoire de M. Broch a pour objet une certaine classe d'intégrales qui comprennent, comme cas particulier, les transcendantes elliptiques. Ces intégrales sont celles dont la dérivée peut être considérée comme le produit d'une certaine puissance entière de la variable x par deux facteurs, dont le premier est une fonction rationnelle d'une autre puissance entière x^p de x, et le second une racine quelconque d'une semblable fonction. Ces mêmes intégrales forment une classe particulière de transcendantes, qui se réduisent aux fonctions elliptiques, lorsque, le radical étant du second degré, le polynôme renfermé sous le radical est du quatrième degré.

Dans le premier Chapitre de son Mémoire, M. Broch s'occupe de la sommation des transcendantes en question, considérées comme fonctions de la variable x, ou plutôt de la sommation des valeurs que peut acquérir une semblable fonction pour des valeurs diverses de la variable. Il établit plusieurs théorèmes dignes de remarque; et prouve, par exemple, que la somme des diverses valeurs de la fonction, correspondantes aux diverses racines d'une certaine équation algébrique, peut être exprimée à l'aide d'une fonction algébrique et logarithmique des quantités que renferme l'équation dont il s'agit. Il montre ensuite le parti qu'on peut tirer de ce théorème et de quelques autres pour la réduction de la nouvelle espèce de transcendantes.

Dans les derniers Chapitres de son Mémoire, M. Broch fait voir qu'une transcendante quelconque de la forme indiquée peut toujours être exprimée à l'aide d'un certain nombre de fonctions plus simples

de la même forme, et d'une fonction algébrique et logarithmique de la variable x. Les fonctions irréductibles entre elles constituent alors, comme dans la théorie des fonctions elliptiques, diverses classes de transcendantes. Quand le nombre de ces fonctions irréductibles se réduit à zéro, l'intégration s'effectue complètement, à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques. Dans tout autre cas elle est impossible. D'ailleurs, comme on devait s'y attendre, les cas où l'intégration s'effectue restent les mêmes, soit qu'on les déduise des théorèmes énoncés dans la première Partie du Mémoire, ou de la méthode de réduction indiquée dans la seconde.

Nous devons observer ici : 1° que les théorèmes énoncés par M. Broch s'accordent, dans des cas particuliers, avec ceux que renferment divers Mémoires d'Abel; 2° que M. Broch avait déjà traité, dans le *Journal de M. Crelle*, le cas où l'exposant p se réduit à l'unité; 3° qu'un Mémoire de deux pages, publié dans le premier Volume des *Œuvres d'Abel*, contient les bases d'une théorie qui pourrait s'appliquer aux transcendantes considérées par M. Broch; 4° que ces mêmes transcendantes se trouvent aussi considérées dans le Mémoire d'Abel qui a remporté le prix, mais que M. Broch n'a pu connaître, puisqu'il n'est pas encore publié.

Avant de terminer ce Rapport où nous avons eu souvent à rappeler les travaux d'Abel, il nous paraît convenable de détruire une erreur assez généralement répandue. On a supposé qu'Abel était mort dans la misère, et cette supposition est devenue l'occasion de violentes attaques dirigées contre les savants de la Suède et des autres parties de l'Europe. Nous aimons à croire que les auteurs de ces attaques regretteront de s'être exprimés avec tant de vivacité, quand ils liront la Préface des *Œuvres d'Abel*, publiées récemment en Norvège, par M. Holmboe, le professeur et l'ami de l'illustre géomètre. Ils y verront avec intérêt les encouragements flatteurs, les témoignages d'estime et d'admiration qu'Abel, durant sa vie, a reçus des savants, particulièrement de ceux qui s'occupaient, en même temps que lui, de la théorie des transcendantes elliptiques; et ils remarqueront avec consolation,

au bas de la page VII, ces paroles qui suffiront pour éclaircir tous leurs doutes :

Un journal français, dont je ne me rappelle pas le nom, m'est venu sous les yeux, où l'on a rapporté qu'Abel est mort dans la misère. On voit par les détails ci-dessus que ce rapport n'est pas conforme à la vérité.

Revenons à M. Broch. Ce que nous avons dit de ses recherches suffit pour en montrer toute l'importance. Les résultats auxquels il est arrivé, analogues à ceux qu'Abel a obtenus dans ses plus beaux Mémoires, montrent un esprit familiarisé avec les méthodes analytiques, et habitué à lutter avec succès contre les difficultés que présentent les parties les plus élevées du Calcul intégral. En résumé, le Mémoire de M. Broch prouve que l'auteur n'a pas trop présumé de ses forces en se proposant de marcher sur les traces d'Abel. Nous pensons que ce Mémoire est digne de l'approbation de l'Académie et d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

125.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur des formules générales qui se déduisent du calcul des résidus et qui paraissent devoir concourir notablement aux progrès de l'Analyse infinitésimale.*

C. R., t. XII, p. 871 (17 mai 1841).

Les géomètres n'ont pas seulement accueilli avec bienveillance le nouveau calcul auquel j'ai donné le nom de *calcul des résidus;* ils ont fait plus encore : ils ont ajouté de nouvelles applications de ce calcul à celles que j'avais présentées moi-même, soit dans les *Exercices de Mathématiques*, soit dans un Mémoire publié en février 1827; et ces diverses applications ont constaté de plus en plus l'utilité du calcul dont il s'agit. Parmi les travaux relatifs à cet objet, on peut citer ceux de MM. Ostrogradski et Bouniakowski, de l'Académie de Saint-Péters-

bourg, et ceux de M. Tortolini, professeur au Collège Romain, qui, dans un Traité sur le calcul des résidus, a exposé, entre autres résultats dignes de remarque, l'application du nouveau calcul à l'intégration des équations aux différences finies. On peut citer encore un Mémoire où M. Richelot a démontré diverses propriétés des transcendantes elliptiques, ou même des transcendantes représentées par certaines intégrales dont les dérivées renferment des radicaux de degré quelconque, et où l'auteur, employant avec succès les notations du calcul des résidus, a établi des formules propres à fournir la solution de quelques problèmes analogues aux questions précédemment traitées par Abel et par M. Jacobi. Toutefois ce que les géomètres apprendront sans doute avec quelque intérêt, c'est que les formules si simples, si élégantes, données par M. Richelot, sont elles-mêmes comprises, comme cas particulier, dans des formules générales qui paraissent devoir puissamment contribuer aux progrès de l'Analyse. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

J'ai donné, dans les *Exercices de Mathématiques*, une formule qui convertit une fonction rationnelle quelconque d'une variable x, et même, sous certaine condition, une fonction transcendante en une somme formée par l'addition d'un résidu intégral et d'un résidu partiel relatif à une valeur nulle de la variable auxiliaire. Or le second membre de cette formule peut s'intégrer par logarithmes, et cette intégration fournit immédiatement la valeur générale de toute intégrale dont la dérivée est une fonction rationnelle ou une fonction transcendante pour laquelle se vérifie la condition indiquée. Elle fournit, par suite, l'intégrale de toute fonction différentielle qui peut être rendue rationnelle à l'aide d'une substitution quelconque, par exemple, les intégrales dont les dérivées renferment un trinôme du second degré sous un radical du second degré, ou deux binômes linéaires sous deux radicaux du second degré.

Au reste, la formule générale d'intégration, qui s'obtient comme on vient de le dire, n'est elle-même qu'un cas particulier d'autres formules beaucoup plus générales encore, qui servent à déterminer une

multitude d'intégrales définies ou indéfinies, ou à les transformer les unes dans les autres, ou à établir entre elles certaines relations. Les beaux théorèmes d'Abel, relatifs à la théorie des transcendantes elliptiques et des transcendantes dont les dérivées renferment des racines d'équations algébriques, ne sont eux-mêmes que des cas particuliers des théorèmes généraux auxquels je suis parvenu. Pour donner une idée de ces derniers, considérons une intégrale relative à la variable x. Si l'on établit entre cette variable x et une autre variable t une relation exprimée par une équation algébrique ou transcendante, on pourra transformer l'intégrale relative à x en une intégrale relative à t et considérer, en conséquence, l'intégrale donnée, non plus comme une fonction de x, mais comme une fonction de t. Or la fonction de t dont il s'agit pourra prendre diverses formes si l'équation algébrique ou transcendante, étant résolue par rapport à x, fournit diverses valeurs de x. Alors, en adoptant successivement ces diverses valeurs de x, et supposant l'intégrale relative à t prise, dans tous les cas, entre les mêmes limites, on verra cette intégrale acquérir successivement diverses valeurs dont la somme s aura pour dérivée un résidu intégral relatif à la variable x, considérée comme racine de l'équation algébrique ou transcendante. D'ailleurs, il suffira d'appliquer à ce résidu intégral l'opération qui, dans le calcul des résidus, est analogue à l'intégration par parties, pour que la somme s se décompose immédiatement en deux termes dont les valeurs pourront se calculer facilement, dans un grand nombre de cas, et s'exprimer, soit à l'aide de fonctions algébriques ou logarithmiques, soit même à l'aide de fonctions transcendantes. De ces deux termes, l'un aura pour dérivée un résidu intégral relatif à toutes les valeurs de x qui pourront rendre infinie la fonction placée après le signe $\int$. Par conséquent, ce résidu intégral se réduira souvent à zéro ou à une constante, ou du moins à un résidu partiel relatif à une valeur nulle de la variable auxiliaire. Quant à la dérivée de l'autre terme, elle sera représentée par un résidu intégral relatif, non plus aux racines de l'équation algébrique ou transcendante, mais aux valeurs de x qui rendront infinie la dérivée du premier membre de cette équation, ou

la fonction placée sous le signe f, dans l'intégrale donnée relative à la variable x.

Lorsque l'équation donnée entre x et t a pour premier membre une fonction rationnelle et entière de ces variables, lorsque, d'ailleurs, la fonction placée sous le signe f dans l'intégrale relative à x est algébrique, la décomposition de la somme s en deux parties et la détermination de chacune d'elles peuvent se déduire des propriétés des fractions rationnelles, jointes aux formules qui servent à calculer les fonctions symétriques des racines d'une équation. Alors la méthode ci-dessus indiquée se réduit, comme on devait s'y attendre, à celle qu'Abel a employée, par conséquent à celle qu'ont suivie, à l'exemple d'Abel, M. Broch, M. Richelot et d'autres auteurs, soit dans le *Journal de M. Crelle*, soit dans un Mémoire récemment approuvé par l'Académie. Mais les formules générales auxquelles je parviens ne supposent point que les fonctions dont il s'agit ici restent rationnelles ou algébriques. Elles sont applicables, sous les conditions indiquées par le calcul des résidus, au cas où ces fonctions deviennent transcendantes; et elles fournissent alors la valeur de la somme s, ou développée en série, ou même très souvent exprimée sous forme finie.

Au reste, il était naturel de rechercher si des formules analogues à celles que présente la théorie des fonctions elliptiques ne s'appliqueraient pas à d'autres espèces de fonctions. C'est après la lecture du Mémoire de M. Broch que la pensée d'appliquer à cette recherche le calcul des résidus m'est venue à l'esprit, comme je l'ai dit à cet auteur au moment où il me disait lui-même qu'il se proposait de montrer comment on pouvait appliquer les méthodes employées par lui, et surtout, je crois, la méthode exposée dans la seconde Partie de son Mémoire, à la réduction des intégrales qui renferment des exponentielles et spécialement à la réduction des intégrales eulériennes. Dans de semblables recherches, le calcul des résidus est très utile. En effet, les principes de ce calcul, tels que je les ai posés dans les *Exercices de Mathématiques*, montrent clairement l'origine et la nature des diverses modifications que les formules doivent subir suivant la nature des

fonctions sur lesquelles on opère, et ils font connaître aussi les conditions sous lesquelles subsiste chaque formule. J'ajouterai encore que, dans le cas où la somme ci-dessus désignée par s, et composée d'intégrales relatives à t, se réduit à la somme de quelques-unes de ces intégrales, le calcul des résidus fournit le moyen, sinon de la déterminer, au moins de la transformer. J'ajouterai enfin que des formules, déduites du même calcul, s'appliquent à la détermination d'intégrales dont les dérivées renfermeraient une ou plusieurs fonctions implicites de la variable principale.

Je me bornerai aujourd'hui à joindre à cette exposition quelques-unes des formules générales que j'ai annoncées. Dans d'autres articles, je développerai ces mêmes formules et je présenterai une partie de leurs nombreuses applications.

Analyse.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x. Si le résidu partiel de

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right),$$

relatif à une valeur nulle de z, se réduit à une constante déterminée, on aura

$$f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z} + \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))(1-zx)},$$

et, par suite, en nommant ξ une valeur particulière de x,

$$\int_\xi^x f(x)\,dx = \mathcal{E}((f(z)))\,l\frac{x-z}{\xi-z} + \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\,l\frac{1-xz}{1-\xi z}. \qquad (1)$$

L'équation (1) fournit immédiatement les intégrales des fonctions rationnelles, et même des fonctions transcendantes pour lesquelles se vérifie la condition indiquée. Elle fournit, par suite, les intégrales des fonctions différentielles qui peuvent être rendues rationnelles à l'aide d'une substitution quelconque.

Concevons maintenant que l'on transforme l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx$$

en substituant à la variable x une autre variable t, liée à x par une équation algébrique ou transcendante

$$F(x,t)=0; \tag{2}$$

et nommons τ, ξ deux valeurs particulières correspondantes de t et de x. Si l'on pose, pour abréger,

$$D_x F(x,t)=\Phi(x,t), \qquad D_t F(x,t)=\Psi(x,t),$$

on trouvera

$$dx=-\frac{\Psi(x,t)}{\Phi(x,t)}dt$$

et, par suite,

$$\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx=-\int_{\tau}^{t} f(x)\,\frac{\Psi(x,t)}{\Phi(x,t)}dt, \tag{3}$$

pourvu que, dans le second membre de la formule (3), on considère x comme une fonction de t déterminée par l'équation (2), et que chacune des deux variables x, t demeure fonction continue de l'autre, entre les limites de l'intégration. D'ailleurs cette dernière condition sera remplie, si la variable x est toujours croissante ou toujours décroissante, tandis que la variable t croît sans cesse à partir de $t=\tau$.

De même, en désignant par $f(x,t)$ une fonction des deux variables x, t, on établira la formule

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dx=-\int_{\tau}^{t} f(x,t)\,\frac{\Psi(x,t)}{\Phi(x,t)}dt, \tag{4}$$

t devant être considéré comme fonction de x dans le premier membre, et x comme fonction de t dans le second.

Concevons maintenant que l'équation (1), résolue par rapport à x, fournisse diverses racines

$$x=x_1, \qquad x=x_2, \qquad \ldots,$$

représentées par diverses fonctions de t, qui se réduisent aux quantités

$$\xi=\xi_1, \qquad \xi=\xi_2, \qquad \ldots$$

dans le cas particulier où l'on suppose $t=\tau$. Aux diverses valeurs de x considéré comme fonction de t, et de ξ considéré comme fonction de τ, correspondront diverses valeurs de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} f(x,t)\,dt,$$

et, en nommant s la somme de ces valeurs, c'est-à-dire en posant, pour abréger,

$$s=\int_{\xi_1}^{x_1} f(x,t)\,dt+\int_{\xi_2}^{x_2} f(x,t)\,dt+\ldots, \tag{5}$$

on tirera de l'équation (4)

$$s=-\int_{\tau}^{t}\frac{\Psi(x_1,t)\,f(x_1,t)}{\Phi(x_1,t)}dt-\int_{\tau}^{t}\frac{\Psi(x_2,t)\,f(x_2,t)}{\Phi(x_2,t)}dt-\ldots.$$

ou, ce qui revient au même,

$$s=-\int_{\tau}^{t}\mathcal{L}\,\frac{\Psi(x,t)\,f(x,t)}{(\!(F(x,t))\!)}dt,$$

le signe $\mathcal{L}$ du calcul des résidus étant relatif à la variable x.

D'autre part, on aura généralement

$$\mathcal{L}\,\frac{\Psi(x,t)\,f(x,t)}{(\!(F(x,t))\!)}=\mathcal{L}\left(\left(\frac{\Psi(x,t)\,f(x,t)}{F(x,t)}\right)\right)-\mathcal{L}\,\frac{(\!(\Psi(x,t)\,f(x,t))\!)}{F(x,t)}.$$

On trouvera donc encore

$$s=\int_{\tau}^{t}\mathcal{L}\,\frac{(\!(\Psi(x,t)\,f(x,t))\!)}{F(x,t)}dt-\int_{\tau}^{t}\mathcal{L}\left(\left(\frac{\Psi(x,t)\,f(x,t)}{F(x,t)}\right)\right)dt. \tag{6}$$

Si, dans la somme s, on fait entrer seulement les intégrales correspondantes à celles des racines

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

qui vérifient certaines conditions, par exemple à celles dans lesquelles les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ offrent des valeurs comprises entre certaines limites, on devra, dans le second membre de la formule (6), étendre la sommation, que suppose en général l'opération indiquée par le signe $\mathcal{E}$, aux seules valeurs de x qui vérifieront ces mêmes conditions. D'ailleurs, les limites

$$\tau, \quad t$$

de l'intégration relative à la variable t devront toujours être telles que, entre ces limites, chacune des valeurs de x reste fonction continue de t, t lui-même étant fonction continue de x; et il en sera toujours ainsi dès que les deux limites τ, t de l'intégration relative à t se trouveront suffisamment rapprochées l'une de l'autre, la première étant choisie arbitrairement.

On peut, à l'aide de divers théorèmes établis dans les *Exercices de Mathématiques*, faire subir diverses transformations au second membre de la formule (6). Ainsi, en particulier, le résidu intégral que renferme le dernier terme de ce second membre peut toujours être transformé en intégrales définies.

Ainsi encore, lorsque le résidu partiel de la fonction

$$\frac{\Psi\left(\frac{1}{z}, t\right) f\left(\frac{1}{z}, t\right)}{z^2 F\left(\frac{1}{z}, t\right)},$$

relatif à une valeur nulle de z, se réduit à une constante déterminée, on a

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\Psi(x,t)\, f(x,t)}{F(x,t)}\right)\right) = \mathcal{E}\frac{\Psi\left(\frac{1}{z}, t\right) f\left(\frac{1}{z}, t\right)}{((z^2))\, F\left(\frac{1}{z}, t\right)};$$

et, par suite, la formule (6) donne

$$(7) \qquad s = \int_\tau^t \mathcal{E}\frac{((\Psi(z,t)\, f(z,t)))}{F(z,t)}\, dt - \int_\tau^t \mathcal{E}\frac{\Psi\left(\frac{1}{z}, t\right) f\left(\frac{1}{z}, t\right)}{((z^2))\, F\left(\frac{1}{z}, t\right)}\, dt,$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif, dans chaque terme, à la variable auxiliaire z.

Si la fonction

$$\frac{\Psi(z,t)}{F(z,t)}$$

ne devient jamais infinie qu'avec $\frac{1}{F(z,t)}$, la formule (7) donnera simplement

$$(8) \qquad s = \int_\tau^t \mathcal{E}\frac{\Psi(z,t)\,((f(z,t)))}{F(z,t)}\, dt - \int_\tau^t \mathcal{E}\frac{\Psi\left(\frac{1}{z}, t\right) f\left(\frac{1}{z}, t\right)}{((z^2))\, F\left(\frac{1}{z}, t\right)}\, dt.$$

Si $f(x,t)$ se réduit à une fonction $f(x)$ de la seule variable x, les formules (5) et (8) entraîneront la suivante :

$$(9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\xi_1}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{\xi_2}^{x_2} f(x)\, dx + \dots \\ \quad = \mathcal{E}\,((f(z)))\, 1\frac{F(z,t)}{F(z,\tau)} - \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\, 1\frac{F\left(\frac{1}{z}, t\right)}{F\left(\frac{1}{z}, \tau\right)}. \end{cases}$$

Il suffirait, d'ailleurs, de prendre

$$F(x,t) = x - t$$

pour réduire la formule (9) à l'équation (1).

Si l'on pose

$$f(x,t) = f(x)\, f(t),$$

les lettres caractéristiques f et f indiquant des fonctions de formes diverses, l'équation (8) donnera

$$(10) \qquad s = \mathcal{E}\,((f(z)))\int_\tau^t \frac{\Psi(z,t)}{F(z,t)} f(t)\, dt - \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z^2))}\int_\tau^t \frac{\Psi\left(\frac{1}{z}, t\right)}{F\left(\frac{1}{z}, t\right)} f(t)\, dt.$$

On peut faire des formules (6), (7), (8), (9), (10), comme nous le montrerons dans de prochains articles, de nombreuses et importantes applications. Un cas digne de remarque est celui où l'on a

$$x_1 = \xi_2, \qquad x_2 = \xi_3, \qquad \dots$$

Observons aussi que, dans le cas où l'équation

$$f(x, t) = 0$$

admet une infinité de racines, la formule (8) ou (10) sert à développer la somme s en série. Pareillement, lorsque l'équation

$$f(x) = 0$$

admet une infinité de racines, la formule (1) ou (9) sert à développer en série l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx$$

ou la somme s. Ainsi, par exemple, si l'on pose

$$f(x) = \cot x,$$

alors, en vertu d'un théorème établi dans les *Exercices de Mathématiques* (vol. I, p. 112) (¹), on verra, dans la formule (1), disparaître le dernier terme du second membre; on trouvera donc

$$\int_{\xi}^{x} \cot x\,dx = \Sigma 1 \frac{n\pi - x}{n\pi - \xi},$$

la sommation que le signe Σ indique s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives de n; et, comme on aura d'ailleurs

$$\int_{\xi}^{x} \cot x\,dx = 1 \frac{\sin x}{\sin \xi},$$

on se verra immédiatement ramené à la formule connue

$$1 \frac{\sin x}{\sin \xi} = \Sigma 1 \frac{n\pi - x}{n\pi - \xi} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin x}{\sin \xi} = \frac{x}{\xi} \frac{x^2 - \pi^2}{\xi^2 - \pi^2} \frac{x^2 - 4\pi^2}{\xi^2 - 4\pi^2} \frac{x^2 - 9\pi^2}{\xi^2 - 9\pi^2} \cdots$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, t. VI, p. 143.

126.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la détermination et la réduction des intégrales dont les dérivées renferment une ou plusieurs fonctions implicites d'une même variable.*

C. R., t. XII, p. 1029 (7 juin 1841).

Les formules générales que j'ai données, dans le *Compte rendu* de la séance du 17 mai, pour la détermination et la transformation des intégrales définies ou indéfinies, peuvent être facilement étendues, comme je l'ai dit, au cas où les dérivées des intégrales renferment une ou plusieurs fonctions implicites de la variable x à laquelle l'intégration se rapporte. L'extension dont il s'agit est l'objet du nouveau Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

Je considère d'abord le cas général où la variable x est liée à d'autres variables

$$y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

par des équations algébriques ou transcendantes, en vertu desquelles les variables y, z, ..., t deviennent des fonctions implicites de x. Si ces mêmes équations permettent d'exprimer en fonctions continues des seules variables x, t chacune des variables y, z, ..., les principes établis dans le précédent Mémoire fourniront le moyen de déterminer ou de transformer une intégrale dont la dérivée serait fonction continue de toutes les variables, ou du moins la somme s des valeurs de cette intégrale qui correspondront aux diverses valeurs de la variable x considérée comme fonction de t. On doit surtout remarquer le cas où une seule des équations données renferme la variable t, et où les autres équations renferment seulement les variables y, z, ... considérées comme fonctions implicites de x. Dans ce cas, et sous les conditions indiquées par le calcul des résidus, la somme s s'obtient en termes finis, et se trouve exprimée par des fonctions algébriques et

logarithmiques de t. La formule qui la détermine comprend elle-même, comme cas particuliers, les belles formules d'Euler, de Lagrange et d'Abel, relatives aux transcendantes elliptiques et aux intégrales dont les dérivées renferment les racines d'une équation algébrique, par exemple, la formule à laquelle Abel est parvenu dans le Mémoire couronné par l'Académie. Pour tirer ces diverses formules de celle que j'ai obtenue, il suffit de réduire les équations données à des équations algébriques, et les diverses fonctions implicites à une seule, par exemple, à un seul radical du second degré ou d'un degré plus élevé. Mais il importe d'observer que je détermine la somme s, lors même que les équations données deviennent transcendantes, et lorsque la dérivée de l'intégrale que l'on considère renferme plusieurs fonctions implicites de la variable x, par exemple, plusieurs radicaux de même degré ou de degrés inégaux.

§ I. — *Considérations générales.*

Supposons la variable x liée à d'autres variables

$$y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

par les équations algébriques ou transcendantes

$$(1) \qquad Y = 0, \quad Z = 0, \quad \ldots, \quad T = 0,$$

dont le nombre est égal au nombre de ces autres variables. On pourra considérer les variables y, z, ..., t comme des fonctions implicites de x; et, après avoir substitué leurs valeurs tirées des équations (1) dans une fonction

$$f(x, y, z, \ldots, t)$$

de toutes les variables, on pourra chercher la valeur de l'intégrale

$$(2) \qquad \mathfrak{X} = \int_{\xi}^{x} f(x, y, z, \ldots, t)\, dx,$$

ξ désignant une valeur particulière de la variable x.

Supposons maintenant qu'en vertu des équations (1) on puisse

exprimer, en fonctions continues des deux variables x, t, les autres variables

$$y, \quad z, \quad \ldots,$$

et que l'élimination de ces dernières variables entre les équations (1) produise l'équation résultante

$$(3) \qquad F(x, t) = 0.$$

Si, dans l'intégrale (2), on substitue à la variable principale x la variable t, liée à x par l'équation (3), et si l'on fait, pour abréger,

$$\Phi(x, t) = D_z F(x, t), \qquad \Psi(x, t) = D_t F(x, t),$$

on trouvera

$$(4) \qquad \mathfrak{X} = -\int_{\tau}^{t} \frac{\Psi(x, t)}{\Phi(x, t)} f(x, y, z, \ldots, t)\, dt,$$

τ désignant une valeur particulière de t, à laquelle est censée correspondre la valeur particulière ξ de la variable x. D'ailleurs, les limites τ, t devront être suffisamment rapprochées pour que t reste fonction continue de x, et x de t, entre les limites de l'intégration.

Concevons maintenant que l'équation (3), résolue par rapport à x, fournisse plusieurs racines, c'est-à-dire plusieurs valeurs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots$$

de la variable x considérée comme fonction de t. Nommons

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots; \quad z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \ldots; \quad \ldots$$

les valeurs correspondantes de la variable y, de la variable z, ...; et

$$s = -\int_{\tau}^{t} \frac{\Psi(x_1, t)}{\Phi(x_1, t)} f(x_1, y_1, z_1, \ldots, t)\, dt - \ldots$$

la somme des valeurs correspondantes de l'intégrale $\mathfrak{X}$. On pourra présenter la valeur de s sous la forme

$$(5) \qquad s = -\int_{\tau}^{t} \mathcal{E} \frac{\Psi(x, t)\, f(x, y, z, \ldots, t)}{(\!(F(x, t))\!)}\, dt$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} s=\int_\tau^t \mathcal{E}\dfrac{((\Phi(x,t)\,f(x,y,z,\ldots,t)))}{F(x,t)}\,dt \\ \quad -\int_\tau^t \mathcal{E}\dfrac{((\Psi(x,t)\,f(x,y,z,\ldots,t)))}{F(x,t)}\,dt. \end{cases}$$

La formule (6) comprend, comme cas particulier, une formule analogue, que j'ai donnée dans le *Compte rendu* de la séance du 17 mai, et s'applique pareillement à la détermination ou à la transformation d'une multitude d'intégrales définies ou indéfinies. Entre les applications que l'on en peut faire, on doit remarquer celles qui se rapportent au cas où, parmi les équations (1), une seule, savoir,

$$T=0,$$

renferme la variable t, les autres

$$Y=0,\qquad Z=0,\qquad \ldots$$

servant à déterminer y, z, ... en fonction de x. Si, dans ce même cas, on suppose la fonction

$$f(x,y,z,\ldots,t)$$

indépendante de t, les équations (2) et (6) se réduiront à

$$(7)\qquad \varkappa=\int_\xi^x f(x,y,z,\ldots)\,dx,$$

$$(8)\qquad \begin{cases} s=\int_\tau^t \mathcal{E}\dfrac{((\Psi(x,t)\,f(x,y,z,\ldots)))}{F(x,t)}\,dt \\ \quad -\int_\tau^t \mathcal{E}\left(\left(\dfrac{\Psi(x,t)\,f(x,y,z,\ldots)}{F(x,t)}\right)\right)dt; \end{cases}$$

et, si d'ailleurs le rapport

$$\frac{\Psi(x,t)}{F(x,t)}$$

ne devient infini que pour des valeurs nulles de $F(x,t)$, on aura

$$\mathcal{E}\frac{((\Psi(x,t)\,f(x,y,z,\ldots,t)))}{F(x,t)}=\mathcal{E}\frac{\Psi(x,t)}{F(x,t)}((f(x,y,z,\ldots))),$$

en sorte que la formule (8) donnera

$$(9)\qquad s=\mathcal{E}((f(x,y,z,\ldots)))\,l\left[\frac{F(x,t)}{F(x,\tau)}\right]-\int_\tau^t \mathcal{E}\left(\left(\frac{\Psi(x,t)\,f(x,y,z,\ldots)}{F(x,t)}\right)\right)dt.$$

Ajoutons que le facteur

$$f(x,y,z,\ldots)$$

pourra être considéré comme une fonction de la seule variable x, dont les variables

$$y,\quad z,\quad \ldots$$

seront elles-mêmes, par hypothèse, des fonctions continues, du moins entre les limites des intégrations; et que, si l'on pose en conséquence

$$f(x,y,z,\ldots)=\varpi(x),$$

on aura, sous les conditions indiquées par le calcul des résidus,

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\Psi(x,t)\,\varpi(x)}{F(x,t)}\right)\right)=\mathcal{E}\frac{\Psi\left(\frac{1}{x},t\right)\varpi\left(\frac{1}{x}\right)}{((x^1))\,F\left(\frac{1}{x},t\right)}.$$

Cela posé, la formule (9) donnera simplement

$$(10)\qquad s=\mathcal{E}((\varpi(x)))\,l\left[\frac{F(x,t)}{F(x,\tau)}\right]-\mathcal{E}\frac{\varpi\left(\frac{1}{x}\right)}{((x^1))}\,l\left[\frac{F\left(\frac{1}{x},t\right)}{F\left(\frac{1}{x},\tau\right)}\right].$$

La formule (10) comprend, comme cas particuliers, les beaux théorèmes d'Euler et d'Abel sur les intégrales dont les dérivées renferment des radicaux du second degré ou, plus généralement, des racines d'équations algébriques. Nous pourrions appliquer immédiatement la formule (10) à divers exemples. Mais les applications deviendront plus faciles quand le second membre sera présenté sous une autre forme que nous donnerons dans le paragraphe suivant.