



qu'on ne pouvait résoudre complètement le problème de la propagation des ondes, sans tenir compte des actions des molécules des corps, annonce qu'il est parvenu à la solution dans le cas le plus simple, savoir, lorsque les molécules de l'éther et des corps sont uniformément distribuées dans l'espace. (Proceedings of the royal Irish Academy, for the year 1836-37.)

48.

C. R., t. VIII, p. 811 (27 mai 1839).

§ II. — Équations des mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement.

Considérons, dans les deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement, un mouvement vibratoire, en vertu duquel chaque molécule s'écarte très peu de sa position initiale. Si l'on cherche les lois du mouvement, celles du moins qui subsistent quelque petite que soit l'étendue des vibrations moléculaires, alors, en regardant les déplacements

$$\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$$

et leurs différences

$$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta, \Delta\xi', \Delta\eta', \Delta\zeta'$$

comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on pourra négliger les carrés et les puissances supérieures, non seulement de ces déplacements et de leurs différences, mais aussi des quantités

$$\rho \text{ et } \rho', \rho \text{ et } \rho',$$

dans les développements des expressions que renferment les formules (4), (5), (8), (9) du premier paragraphe; et l'on pourra encore supposer indifféremment que, des quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

les trois premières représentent, ou les coordonnées initiales de la molécule m ou m', ou ses coordonnées courantes qui, en vertu de l'hypothèse admise, différeront très peu des premières. Cela posé, si l'on a égard aux formules (3) du § I, les formules (4) et (5) du même paragraphe donneront

$$(1) \begin{cases} \rho = \frac{x \Delta\xi + y \Delta\eta + z \Delta\zeta}{r}, \\ \rho' = \frac{x(\xi' - \xi + \Delta\xi) + y(\eta' - \eta + \Delta\eta) + z(\zeta' - \zeta + \Delta\zeta)}{r}, \end{cases}$$

et

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S[m f(r) \Delta\xi] + S\left[m \frac{df(r)}{dr} x \rho\right] \\ \quad + S[m, f(r) (\xi' - \xi + \Delta\xi)] + S\left[m, \frac{df(r)}{dr} x \rho'\right], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S[m f(r) \Delta\eta] + S\left[m \frac{df(r)}{dr} y \rho\right] \\ \quad + S[m, f(r) (\eta' - \eta + \Delta\eta)] + S\left[m, \frac{df(r)}{dr} y \rho'\right], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S[m f(r) \Delta\zeta] + S\left[m \frac{df(r)}{dr} z \rho\right] \\ \quad + S[m, f(r) (\zeta' - \zeta + \Delta\zeta)] + S\left[m, \frac{df(r)}{dr} z \rho'\right]. \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = L\xi + R\eta + Q\zeta + L'\xi' + R'\eta' + Q'\zeta', \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = R\xi + M\eta + P\zeta + R'\xi' + M'\eta' + P'\zeta', \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Q\xi + P\eta + N\zeta + Q'\xi' + P'\eta' + N'\zeta', \end{cases}$$

pourvu que, s désignant une fonction quelconque des variables x, y, z et

$$\Delta s$$

l'accroissement de s dans le cas où l'on fait croître

$$x \text{ de } x, y \text{ de } y, z \text{ de } z,$$



ou représente, à l'aide des lettres

$$\begin{aligned} L, M, N; P, Q, R, \\ L_r, M_r, N_r; P_r, Q_r, R_r, \end{aligned}$$

non pas des quantités, mais des caractéristiques déterminées par les formules

$$\begin{aligned} (A) \quad \left\{ \begin{aligned} L_r &= S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \Delta r \left\{ -S \left\{ m_r \left[f_r(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \right] r \right\}, \quad M = \dots, N = \dots \right. \\ P_r &= S \left\{ m_r \frac{yz}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \Delta r \left\{ -S \left\{ m, \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\}, \quad Q = \dots, R = \dots; \right. \\ L_r &= S \left\{ m_r \left[f_r(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \right] (r + \Delta r) \right\}, \quad M_r = \dots, N_r = \dots \\ P_r &= S \left\{ m_r \frac{yz}{r} \frac{df_r(r)}{dr} (r + \Delta r) \right\}, \quad Q_r = \dots, R_r = \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Comme d'ailleurs ces diverses formules doivent servir à déterminer les caractéristiques

$$L, M, N, P, Q, R; L_r, M_r, N_r, P_r, Q_r, R_r,$$

quelle que soit la fonction de x, y, z désignée par r , elles peuvent être, pour plus de simplicité, présentées sous la forme

$$\begin{aligned} (4) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \Delta \left\{ -S \left\{ m_r \left[f_r(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \right] \right\}, \quad M = \dots, N = \dots \\ P &= S \left\{ m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} \Delta \left\{ -S \left\{ m_r \frac{yz}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \right\}, \quad Q = \dots, R = \dots \right. \right. \\ (5) \quad \left\{ \begin{aligned} L_r &= S \left\{ m_r \left[f_r(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \right] (r + \Delta) \right\}, \quad M_r = \dots, N_r = \dots \\ P_r &= S \left\{ m_r \frac{yz}{r} \frac{df_r(r)}{dr} (r + \Delta) \right\}, \quad Q_r = \dots, R_r = \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Enfin, si l'on désigne, à l'aide des caractéristiques

$$D_1, D_2, D_3, D_4$$

et de leurs puissances entières, les dérivées qu'on obtient quand on différentie une ou plusieurs fois de suite une fonction des variables

indépendantes

$$x, y, z, t,$$

par rapport à ces mêmes variables, les équations (3) pourront s'écrire comme il suit :

$$(6) \quad \begin{cases} (L - D_1^2)\xi + R\eta + Q\zeta + L_r\xi_r + R_r\eta_r + Q_r\zeta_r = 0, \\ R\xi + (M - D_2^2)\eta + P\zeta + R_r\xi_r + M_r\eta_r + P_r\zeta_r = 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_3^2)\zeta + Q_r\xi_r + P_r\eta_r + N_r\zeta_r = 0. \end{cases}$$

De même, en supposant les caractéristiques

$$\begin{aligned} L_r, M_r, N_r, P_r, Q_r, R_r, \\ L_r, M_r, N_r, P_r, Q_r, R_r \end{aligned}$$

déterminées par les formules

$$\begin{aligned} (7) \quad \left\{ \begin{aligned} L_r &= S \left\{ m_r \left[f_r(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \right] \Delta \left\{ -S \left\{ m \left[f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \right\}, \quad M_r = \dots, N_r = \dots \\ P_r &= S \left\{ m_r \frac{yz}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \Delta \left\{ -S \left\{ m \frac{yz}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\}, \quad Q_r = \dots, R_r = \dots \right. \right. \\ (8) \quad \left\{ \begin{aligned} L_r &= S \left\{ m_r \left[f_r(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df_r(r)}{dr} \right] (r + \Delta) \right\}, \quad M_r = \dots, N_r = \dots \\ P_r &= S \left\{ m_r \frac{yz}{r} \frac{df_r(r)}{dr} (r + \Delta) \right\}, \quad Q_r = \dots, R_r = \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

on tirera des formules (9) du § I, pour le cas où le mouvement est infiniment petit.

$$(9) \quad \begin{cases} L_r\xi + R_r\eta + Q_r\zeta + (L_r - D_1^2)\xi_r + R_r\eta_r + Q_r\zeta_r = 0, \\ R_r\xi + M_r\eta + P_r\zeta + R_r\xi_r + (M_r - D_2^2)\eta_r + P_r\zeta_r = 0, \\ Q_r\xi + P_r\eta + N_r\zeta + Q_r\xi_r + P_r\eta_r + (N_r - D_3^2)\zeta_r = 0. \end{cases}$$

On ne doit pas oublier que, dans les formules (4), (5), (7), (8), on a

$$(10) \quad f(r) = \frac{f(r)}{r}, \quad f_r(r) = \frac{f_r(r)}{r}, \quad f_{rr}(r) = \frac{f_{rr}(r)}{r},$$

les fonctions

$$f(r), f_r(r), f_{rr}(r),$$



étant celles qui représentent le rapport entre l'action mutuelle de deux molécules, séparées par la distance r , et le produit de leurs masses : 1^o dans le cas où les deux molécules font partie du premier des systèmes donnés; 2^o dans le cas où l'une appartient au premier système et l'autre au second; 3^o dans le cas où toutes deux font partie du second système.

Pour réduire les équations (6) et (9) à la forme d'équations linéaires aux différences partielles, il suffira de développer, dans les seconds membres de ces équations, les différences finies des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta; \quad \xi', \eta', \zeta'$$

en séries ordonnées suivant leurs dérivées des divers ordres. On y parviendra aisément à l'aide de la formule de Taylor, en vertu de laquelle on aura

$$x + \Delta x = e^{x D_x + y D_y + z D_z} x,$$

quelle que soit la fonction de

$$x, y, z$$

désignée par z , et par conséquent

$$(11) \quad 1 + \Delta = e^{x D_x + y D_y + z D_z}, \quad \Delta = e^{x D_x + y D_y + z D_z} - 1.$$

Cela posé, dans les équations (6) et (9), ramenées à la forme d'équations aux différences partielles, les coefficients des dérivées des variables principales se réduiront toujours à des sommes dans chacune desquelles la masse m ou m' se trouvera multipliée sous le signe S par des puissances de x, y, z , et par une fonction de r . Ainsi, en particulier, les coefficients dont il s'agit se réduiront, dans les équations (6), à des sommes de l'une des formes

$$(12) \quad S[m x^n y^{n'} z^{n''} f(r)], \quad S\left[m x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df(r)}{dr}\right],$$

$$(13) \quad S[m x^n y^{n'} z^{n''} f_1(r)], \quad S\left[m x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df_1(r)}{dr}\right],$$

et, dans les équations (9), à des sommes de l'une des formes

$$(14) \quad S[m x^n y^{n'} z^{n''} f_2(r)], \quad S\left[m x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df_2(r)}{dr}\right],$$

$$(15) \quad S[m x^n y^{n'} z^{n''} f_3(r)], \quad S\left[m x^n y^{n'} z^{n''} \frac{df_3(r)}{dr}\right],$$

n, n', n'' désignant des nombres entiers.

On pourra regarder la constitution du second système de molécules comme étant partout la même, si les sommes (13), (14) se réduisent à des quantités constantes, c'est-à-dire à des quantités indépendantes des coordonnées

$$x, y, z$$

de la molécule m ou m' . C'est ce qui aura lieu, par exemple, quand le second système sera un corps homogène, gazeux, ou liquide, ou cristallisé. Si d'ailleurs, les molécules étant, dans le premier système, beaucoup plus rapprochées les unes des autres que dans le second, les sommes (12) et (15) reprennent périodiquement les mêmes valeurs quand on fait croître ou décroître en progression arithmétique chacune des trois coordonnées x, y, z , et si les rapports des trois progressions arithmétiques, correspondantes aux trois coordonnées, sont très petits; alors, en vertu d'un théorème que nous avons établi, on pourra substituer à ces mêmes sommes leurs valeurs moyennes sans qu'il en résulte d'erreur sensible dans le calcul des vibrations du système et des déplacements moléculaires. Donc alors les équations des mouvements infiniment petits des deux systèmes, c'est-à-dire les équations (6) et (9) pourront être considérées comme des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les six variables principales

$$\xi, \eta, \zeta; \quad \xi', \eta', \zeta'$$

et les quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t.$$

De semblables équations sont propres à représenter, par exemple, les



mouvements infiniment petits du fluide lumineux renfermé dans un corps homogène, isopane ou non isopane, opaque ou transparent.

Comme nous venons de le dire, dans le cas où les sommes (12) et (15) reprennent périodiquement les mêmes valeurs, tandis que l'on fait croître ou décroître les coordonnées en progression arithmétique, une condition nécessaire pour que l'on puisse sans erreur sensible substituer à ces mêmes sommes leurs valeurs moyennes, c'est que les rapports des trois progressions arithmétiques correspondantes aux trois coordonnées soient très petits. Il y a plus, si l'on veut appliquer le théorème rappelé ci-dessus, et par lequel on établit cette proposition, à un mouvement simple caractérisé par une exponentielle népérienne dans l'exposant de laquelle les coefficients des coordonnées soient imaginaires, on reconnaitra que, pour rendre légitime la substitution dont il s'agit, on doit supposer très petits, non seulement les rapports des trois progressions arithmétiques, mais encore les produits des sommes (12) ou (15) par l'un quelconque de ces rapports.

§ III. — Mouvements simples.

Les équations (6) et (9) du paragraphe précédent peuvent être traitées comme des équations linéaires à coefficients constants, non seulement dans le cas où, la constitution des deux systèmes de molécules étant partout la même, les sommes (12), (13), (14), (15) demeurent constantes, mais aussi dans le cas où, les sommes (13), (14) étant constantes, les sommes (12), (15) varient périodiquement quand on fait croître ou décroître les coordonnées en progression arithmétique, pourvu que dans ce dernier cas les produits des sommes (12) ou (15) par le rapport de l'une quelconque des trois progressions arithmétiques correspondantes aux trois coordonnées soient très petits. Seulement, on devra, dans le dernier cas, après avoir intégré les formules (6), (9), comme si toutes les sommes (12), (13), (14), (15) étaient constantes, remplacer dans les intégrales trouvées chacune de ces sommes par sa valeur moyenne. C'est ainsi que l'on obtiendra, par exemple, les vibra-

tions de la lumière dans un corps diaphane, en supposant que le rayon de la sphère d'activité d'une molécule du corps, c'est-à-dire la distance au delà de laquelle cette action devient insensible et peut être négligée, soit peu considérable relativement à la longueur d'une ondulation lumineuse.

Comme la solution de plusieurs problèmes de Physique mathématique peut dépendre de l'intégration des équations (6) et (9) du paragraphe précédent, considérées comme équations linéaires à coefficients constants, nous allons rechercher ici les intégrales de ces équations, en nous bornant pour l'instant aux intégrales qui représentent des mouvements simples, c'est-à-dire en supposant les déplacements effectifs ou du moins les déplacements symboliques tous proportionnels à une même exponentielle népérienne, dont l'exposant soit une fonction linéaire des coordonnées et du temps.

Lorsque les sommes (12), (13), (14), (15) du § II demeurent constantes, alors, pour satisfaire aux équations (6) et (9) du même paragraphe, il suffit de supposer les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta',$$

toutes proportionnelles à une même exponentielle népérienne dont l'exposant soit une fonction linéaire des variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

et de prendre en conséquence

$$(1) \xi = A e^{ux+vy+wz-st}, \quad \eta = B e^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta = C e^{ux+vy+wz-st},$$

$$(2) \xi' = A' e^{ux+vy+wz-st}, \quad \eta' = B' e^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta' = C' e^{ux+vy+wz-st},$$

u, v, w, s, A, B, C, A', B', C, désignant des constantes réelles ou imaginaires convenablement choisies. En effet, si l'on substitue les valeurs précédentes de

$$\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta',$$

dans les équations (6) et (9) du second paragraphe, tous les termes se-



ront divisibles par l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-ut}$$

et après la division effectuée, ces équations seront réduites à d'autres de la forme

$$(3) \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)A + \mathcal{M}B + \mathcal{Q}C + \mathcal{L}_1A_1 + \mathcal{M}_1B_1 + \mathcal{Q}_1C_1 = 0, \\ \mathcal{R}A + (\mathcal{N} - s^2)B + \mathcal{P}C + \mathcal{R}_1A_1 + \mathcal{N}_1B_1 + \mathcal{P}_1C_1 = 0, \\ \mathcal{Q}A + \mathcal{P}B + (\mathcal{T} - s^2)C + \mathcal{Q}_1A_1 + \mathcal{P}_1B_1 + \mathcal{T}_1C_1 = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \mathcal{L}A + \mathcal{M}B + \mathcal{Q}C + (\mathcal{L}_0 - s^2)A_0 + \mathcal{M}_0B_0 + \mathcal{Q}_0C_0 = 0, \\ \mathcal{R}A + \mathcal{N}B + \mathcal{P}C + \mathcal{R}_0A_0 + (\mathcal{N}_0 - s^2)B_0 + \mathcal{P}_0C_0 = 0, \\ \mathcal{Q}A + \mathcal{P}B + \mathcal{T}C + \mathcal{Q}_0A_0 + \mathcal{P}_0B_0 + (\mathcal{T}_0 - s^2)C_0 = 0, \end{cases}$$

les valeurs des coefficients

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}; \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1; \\ \mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0, \mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0, \mathcal{R}_0$$

étant déterminées par les formules

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= S \left\{ m \left[f(r) + \frac{\chi^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] (e^{ux+vy+wz} - 1) \right\} - S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{\chi^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] \right\}; & \mathcal{M} &= \dots, \mathcal{N} = \dots \\ \mathcal{P} &= S \left\{ m \frac{\chi z}{r} \frac{df(r)}{dr} (e^{ux+vy+wz} - 1) \right\} - S \left\{ m_1 \frac{\chi z}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right\}; & \mathcal{Q} &= \dots, \mathcal{R} = \dots \\ \mathcal{L}_1 &= S \left\{ m_1 \left[f_1(r) + \frac{\chi^2}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right] e^{ux+vy+wz} \right\}; & \mathcal{M}_1 &= \dots, \mathcal{N}_1 = \dots \\ \mathcal{P}_1 &= S \left\{ m_1 \frac{\chi z}{r} \frac{df_1(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right\}; & \mathcal{Q}_1 &= \dots, \mathcal{R}_1 = \dots \\ \mathcal{L}_0 &= S \left\{ m \left[f(r) + \frac{\chi^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] e^{ux+vy+wz} \right\}; & \mathcal{M}_0 &= \dots, \mathcal{N}_0 = \dots \\ \mathcal{P}_0 &= S \left\{ m \frac{\chi z}{r} \frac{df(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right\}; & \mathcal{Q}_0 &= \dots, \mathcal{R}_0 = \dots \\ \mathcal{L}_0 &= S \left\{ m_0 \left[f_0(r) + \frac{\chi^2}{r} \frac{df_0(r)}{dr} \right] (e^{ux+vy+wz} - 1) \right\} - S \left\{ m \left[f(r) + \frac{\chi^2}{r} \frac{df(r)}{dr} \right] \right\}; & \mathcal{M}_0 &= \dots, \mathcal{N}_0 = \dots \\ \mathcal{P}_0 &= S \left\{ m_0 \frac{\chi z}{r} \frac{df_0(r)}{dr} (e^{ux+vy+wz} - 1) \right\} - S \left\{ m \frac{\chi z}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\}; & \mathcal{Q}_0 &= \dots, \mathcal{R}_0 = \dots \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, par les formules

$$(5) \begin{cases} \mathcal{L} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u^2}, & \mathcal{M} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial v^2}, & \mathcal{N} = \mathcal{G} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \mathcal{L}_1 = \mathcal{G}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial u^2}, & \mathcal{M}_1 = \mathcal{G}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial v^2}, & \mathcal{N}_1 = \mathcal{G}_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P}_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q}_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R}_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} \mathcal{L}_0 = \mathcal{G}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial u^2}, & \mathcal{M}_0 = \mathcal{G}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial v^2}, & \mathcal{N}_0 = \mathcal{G}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P}_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q}_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R}_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} \mathcal{L}_0 = \mathcal{G}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial u^2}, & \mathcal{M}_0 = \mathcal{G}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial v^2}, & \mathcal{N}_0 = \mathcal{G}_0 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial w^2}, \\ \mathcal{P}_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial v \partial w}, & \mathcal{Q}_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial w \partial u}, & \mathcal{R}_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial u \partial v}; \end{cases}$$

les valeurs de

$$\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$$

étant respectivement

$$(9) \begin{cases} \mathcal{G} = S \{ m f(r) (e^{ux+vy+wz} - 1) \} - S \{ m_1 f_1(r) \}, \\ \mathcal{G}_1 = S \left\{ \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} \left[e^{ux+vy+wz} - (ux + vy + wz) - \frac{(ux + vy + wz)^2}{2} \right] \right\} \\ \quad - S \left\{ \frac{m_1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} (ux + vy + wz)^2 \right\}, \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} \mathcal{G}_0 = S \{ m_0 f_0(r) e^{ux+vy+wz} \}, \\ \mathcal{G}_1 = S \left\{ \frac{m}{r} \frac{df(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right\}; \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} \mathcal{G}_0 = S \{ m f_0(r) e^{ux+vy+wz} \}, \\ \mathcal{G}_1 = S \left\{ \frac{m}{r} \frac{df_0(r)}{dr} e^{ux+vy+wz} \right\}; \end{cases}$$



$$(12) \begin{cases} \mathcal{G}_s = S \{ m, f_s(r) (e^{ux+vy+wz} - 1) \} - S \{ m f_s(r) \}, \\ \mathcal{S}_s = S \left\{ \frac{m}{r} \frac{d f_s(r)}{dr} \left[e^{ux+vy+wz} - (ux+vy+wz) - \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right] \right\} \\ - S \left\{ \frac{m}{r} \frac{d f_s(r)}{dr} \frac{(ux+vy+wz)^2}{2} \right\}. \end{cases}$$

Or, lorsque les sommes (12), (13), (14), (15) du § IV demeurent constantes, on peut en dire autant des valeurs de

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{L}', \mathcal{M}', \dots,$$

que fournissent les équations (5), (6), (7), (8), jointes aux formules (9), (10), (11), (12), et qui sont développables avec l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz}$$

en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de u, v, w . Donc alors on peut satisfaire aux équations (3) et (4) par des valeurs constantes des facteurs

$$A, B, C; A', B', C'.$$

Soit maintenant

$$(13) \quad \mathcal{S} = 0$$

l'équation du sixième degré en s^2 que produit l'élimination des facteurs

$$A, B, C; A', B', C'$$

entre les équations (3) et (4), la valeur de s étant

$$(14) \quad \mathcal{S} = (\mathcal{L} - s^2)(\mathcal{M} - s^2)(\mathcal{N} - s^2)(\mathcal{L}' - s^2)(\mathcal{M}' - s^2) - \dots$$

Si l'on prend pour s une quelconque des racines de l'équation (13), et si d'ailleurs on désigne par

$$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$$

des coefficients arbitraires, on pourra présenter les équations (3) et (4)

sous la forme

$$(15) \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)A + \mathcal{M}B + \mathcal{N}C + \mathcal{L}'A_1 + \mathcal{M}'B_1 + \mathcal{N}'C_1 = \alpha\delta, \\ \mathcal{R}A + (\mathcal{M} - s^2)B + \mathcal{P}C + \mathcal{R}'A_1 + \mathcal{M}'B_1 + \mathcal{P}'C_1 = \beta\delta, \\ \mathcal{Q}A + \mathcal{P}B + (\mathcal{N} - s^2)C + \mathcal{Q}'A_1 + \mathcal{P}'B_1 + \mathcal{N}'C_1 = \gamma\delta; \end{cases}$$

$$(16) \begin{cases} \mathcal{L}'A + \mathcal{M}'B + \mathcal{N}'C + (\mathcal{L} - s^2)A_1 + \mathcal{M}'B_1 + \mathcal{N}'C_1 = \alpha\delta, \\ \mathcal{R}'A + \mathcal{M}'B + \mathcal{P}'C + \mathcal{R}'A_1 + (\mathcal{M} - s^2)B_1 + \mathcal{P}'C_1 = \beta\delta, \\ \mathcal{Q}'A + \mathcal{P}'B + \mathcal{N}'C + \mathcal{Q}'A_1 + \mathcal{P}'B_1 + (\mathcal{N} - s^2)C_1 = \gamma\delta. \end{cases}$$

Or, en laissant à s une valeur indéterminée, on tirera de ces dernières équations, résolues par rapport aux facteurs A, B, C, A', B', C' ,

$$(17) \begin{cases} A = \mathcal{L}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{N}\gamma + \mathcal{L}'\alpha_1 + \mathcal{M}'\beta_1 + \mathcal{N}'\gamma_1, \\ B = \mathcal{R}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{P}\gamma + \mathcal{R}'\alpha_1 + \mathcal{M}'\beta_1 + \mathcal{P}'\gamma_1, \\ C = \mathcal{Q}\alpha + \mathcal{P}\beta + \mathcal{N}\gamma + \mathcal{Q}'\alpha_1 + \mathcal{P}'\beta_1 + \mathcal{N}'\gamma_1; \end{cases}$$

$$(18) \begin{cases} A_1 = \mathcal{L}'\alpha + \mathcal{M}'\beta + \mathcal{N}'\gamma + \mathcal{L}\alpha_1 + \mathcal{M}\beta_1 + \mathcal{N}\gamma_1, \\ B_1 = \mathcal{R}'\alpha + \mathcal{M}'\beta + \mathcal{P}'\gamma + \mathcal{R}\alpha_1 + \mathcal{M}\beta_1 + \mathcal{P}\gamma_1, \\ C_1 = \mathcal{Q}'\alpha + \mathcal{P}'\beta + \mathcal{N}'\gamma + \mathcal{Q}\alpha_1 + \mathcal{P}\beta_1 + \mathcal{N}\gamma_1; \end{cases}$$

et par suite

$$(19) \begin{cases} \frac{A}{\mathcal{L}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{N}\gamma + \mathcal{L}'\alpha_1 + \mathcal{M}'\beta_1 + \mathcal{N}'\gamma_1} \\ = \frac{B}{\mathcal{R}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{P}\gamma + \mathcal{R}'\alpha_1 + \mathcal{M}'\beta_1 + \mathcal{P}'\gamma_1} \\ = \frac{C}{\mathcal{Q}\alpha + \mathcal{P}\beta + \mathcal{N}\gamma + \mathcal{Q}'\alpha_1 + \mathcal{P}'\beta_1 + \mathcal{N}'\gamma_1} \\ = \frac{A_1}{\mathcal{L}'\alpha + \mathcal{M}'\beta + \mathcal{N}'\gamma + \mathcal{L}\alpha_1 + \mathcal{M}\beta_1 + \mathcal{N}\gamma_1} \\ = \frac{B_1}{\mathcal{R}'\alpha + \mathcal{M}'\beta + \mathcal{P}'\gamma + \mathcal{R}\alpha_1 + \mathcal{M}\beta_1 + \mathcal{P}\gamma_1} \\ = \frac{C_1}{\mathcal{Q}'\alpha + \mathcal{P}'\beta + \mathcal{N}'\gamma + \mathcal{Q}\alpha_1 + \mathcal{P}\beta_1 + \mathcal{N}\gamma_1}, \end{cases}$$

les nouveaux facteurs

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{L}', \mathcal{M}', \dots$$

étant des fonctions entières de s , toutes du huitième degré, à l'exception



des seuls facteurs

$$\epsilon, m, n, \quad \epsilon', m', n',$$

qui seront du cinquième degré par rapport à s^2 , et du dixième par rapport à s . Donc les valeurs des facteurs

$$A, B, C, \quad A', B', C',$$

déterminées par les formules (17), (18), vérifieront généralement les formules (15) et (16). Donc, lorsqu'on prendra pour s une racine de l'équation (13), elles vérifieront les formules (3) et (4), quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux constantes

$$\alpha, \epsilon, \gamma, \quad \alpha', \epsilon', \gamma',$$

et, celles-ci demeurant arbitraires, les valeurs des rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{A'}{A}, \frac{B'}{A}, \frac{C'}{A},$$

propres à vérifier les formules (3) et (4), seront précisément celles que fournit la formule (19). Si l'on suppose en particulier les constantes

$$\alpha, \epsilon, \gamma, \quad \alpha', \epsilon', \gamma',$$

toutes réduites à zéro, à l'exception d'une seule, la formule (19) donnera successivement

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A}{\epsilon} &= \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = \frac{A'}{\epsilon'} = \frac{B'}{m'} = \frac{C'}{n'}, \\ \frac{A}{m} &= \frac{B}{\epsilon} = \frac{C}{n} = \frac{A'}{m'} = \frac{B'}{\epsilon'} = \frac{C'}{n'}, \\ \frac{A}{n} &= \frac{B}{m} = \frac{C}{\epsilon} = \frac{A'}{n'} = \frac{B'}{m'} = \frac{C'}{\epsilon'} \end{aligned} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A}{\epsilon} &= \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = \frac{A'}{\epsilon'} = \frac{B'}{m'} = \frac{C'}{n'}, \\ \frac{A}{m} &= \frac{B}{\epsilon} = \frac{C}{n} = \frac{A'}{m'} = \frac{B'}{\epsilon'} = \frac{C'}{n'}, \\ \frac{A}{n} &= \frac{B}{m} = \frac{C}{\epsilon} = \frac{A'}{n'} = \frac{B'}{m'} = \frac{C'}{\epsilon'} \end{aligned} \right.$$

Les formules (1) et (2), lorsqu'on y suppose les constantes

$$s, \frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{A'}{A}, \frac{B'}{A}, \frac{C'}{A}$$

déterminées en fonctions de

$$u, v, w,$$

par l'équation (13) jointe à la formule (19), ou, ce qui revient au même, à l'une des six formules (20) et (21), représentent ce qu'on peut nommer un système d'intégrales simples des équations (6) et (9) du § II. Les coefficients

$$u, v, w,$$

dans ces intégrales simples, restent entièrement arbitraires, ainsi que la constante A. De plus, les valeurs des diverses constantes

$$u, v, w, s, \quad A, B, C, \quad A', B', C',$$

et, par suite, les valeurs des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \quad \xi', \eta', \zeta',$$

tirées des formules (1), (2), peuvent être réelles ou imaginaires. Dans le premier cas, ces variables représenteront les déplacements infiniment petits des molécules dans un mouvement infiniment petit compatible avec la constitution des deux systèmes donnés. Dans le second cas, les parties réelles des variables principales vérifieront encore les équations des mouvements infiniment petits, et ce seront évidemment ces parties réelles qui pourront être censées représenter les déplacements infiniment petits des molécules dans un mouvement de vibration compatible avec la constitution des deux systèmes. Dans l'un et l'autre cas, le mouvement infiniment petit qui correspondra aux valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \quad \xi', \eta', \zeta',$$

fournies par les équations (1) et (2) sera un mouvement simple dans lequel ces valeurs représenteront, ou les déplacements effectifs des molécules, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, ou leurs dépla-



cements symboliques, c'est-à-dire des variables imaginaires dont les déplacements effectifs sont les parties réelles. Les équations (1), (2) elles-mêmes seront les équations finies, et, dans le second cas, les équations finies symboliques du mouvement simple dont il s'agit.

Si l'on pose

(22) u = U + v√-1, v = V + v√-1, w = W + w√-1,

(23) s = S + s√-1,

(24) A = a e^λ√-1, B = b e^μ√-1, C = c e^ν√-1,

(25) A = a, e^λ√-1, B = b, e^μ√-1, C = c, e^ν√-1,

v, v, w, U, V, W, s, S, a, b, c, λ, μ, ν, a, b, c, λ, μ, ν, désignant des quantités réelles, et si d'ailleurs on fait pour abréger

(26) k = √v² + v² + w², K = √U² + V² + W²,

(27) kx = vx + vy + wz, Kx = Ux + Vy + Wz,

les formules (1), (2) donneront

(28) { ξ = a e^{KR-St} cos(kv - st + λ), η = b e^{KR-St} cos(kv - st + μ), ζ = c e^{KR-St} cos(kv - st + ν);

(29) { ξ_i = a, e^{KR-St} cos(kv - st + λ_i), η_i = b, e^{KR-St} cos(kv - st + μ_i), ζ_i = c, e^{KR-St} cos(kv - st + ν_i).

Comme la forme des équations (28) reste la même, quel que soit le second système de molécules, et dans le cas où ce second système disparaît, il en résulte qu'un mouvement simple, susceptible de se propager à travers deux systèmes moléculaires qui se pénètrent mutuellement, est, pour chacun de ces deux systèmes, de la même nature qu'un mouvement simple capable de se propager à travers un système unique, et se réduit toujours à un mouvement par ondes planes, dans lequel

chaque molécule décrit une droite, un cercle ou une ellipse. C'est d'ailleurs ce que démontrent évidemment les formules suivantes.

On tire des équations (28) :

1° Lorsque λ, μ, ν sont égaux,

(30) ξ/a = η/b = ζ/c,

2° Lorsque λ, μ, ν ne sont pas égaux,

(31) { ξ/a sin(μ - ν) + η/b sin(ν - λ) + ζ/c sin(λ - μ) = 0, (η/b)² - 2 η/c cos(μ - ν) + (ζ/c)² = e^{KR-2St} sin²(ν - μ).

Pareillement, on tire des équations (29) :

1° Lorsque λ, μ, ν, sont égaux,

(32) ξ_i/a = η_i/b = ζ_i/c,

2° Lorsque λ, μ, ν, ne sont pas égaux,

(33) { ξ_i/a sin(μ_i - ν_i) + η_i/b sin(ν_i - λ_i) + ζ_i/c sin(λ_i - μ_i) = 0, (η_i/b)² - 2 η_i/c cos(ν_i - μ_i) + (ζ_i/c)² = e^{KR-2St} sin²(ν_i - μ_i).

Donc la ligne décrite par chaque molécule du premier ou du second système est toujours une droite représentée par la formule (30) ou (32), ou bien une ellipse représentée par les formules (31) ou (33), cette ellipse pouvant se réduire à une circonférence de cercle. Le plan invariable, auquel le plan de l'ellipse reste constamment parallèle, est d'ailleurs représenté, pour le premier système de molécules, par l'équation

(34) ξ/a sin(μ - ν) + η/b sin(ν - λ) + ζ/c sin(λ - μ) = 0,



et, pour le second système de molécules, par l'équation

$$(35) \quad \frac{x}{a'} \sin(\mu, -\nu) + \frac{y}{b'} \sin(\nu, -\lambda) + \frac{z}{c'} \sin(\lambda, -\mu) = 0.$$

Ajoutons que l'aire décrite, au bout du temps t , par le rayon vecteur de l'ellipse est représentée, dans le premier système de molécules, par l'expression

$$(36) \quad \frac{S}{4S} e^{2KR} (1 - e^{-2St}) \sqrt{b^2 c^2 \sin^2(\mu - \nu) + c^2 a^2 \sin^2(\nu - \lambda) + a^2 b^2 \sin^2(\lambda - \mu)}$$

et, dans le second système, par l'expression

$$(37) \quad \frac{S}{4S} e^{2KR} (1 - e^{-2St}) \sqrt{b_1^2 c_1^2 \sin^2(\mu, -\nu) + c_1^2 a_1^2 \sin^2(\nu, -\lambda) + a_1^2 b_1^2 \sin^2(\lambda, -\mu)}.$$

Donc le rapport entre les aires décrites par les rayons vecteurs des ellipses, que parcourent deux molécules correspondantes des deux systèmes donnés, reste le même à tous les instants et dans tous les points de l'espace. Ajoutons que, dans le cas particulier où S s'évanouit, c'est-à-dire, où le mouvement simple est durable et persistant, chacune de ces aires croît proportionnellement au temps, puisqu'on a dans ce cas

$$\frac{1 - e^{-2St}}{2S} = t.$$

Si, en nommant

$$a, b, c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe avec les demi-axes des coordonnées positives, on nomme

$$x \text{ et } x'$$

les déplacements des molécules du premier et du second système, mesurés parallèlement à l'axe fixe, on aura

$$x = a\xi + b\eta + c\zeta, \quad x' = a_1\xi_1 + b_1\eta_1 + c_1\zeta_1;$$

et, en posant, pour abrégér,

$$\begin{aligned} aa \cos \lambda + bb \cos \mu + cc \cos \nu &= h \cos \omega, \\ aa \cos \lambda_1 + bb \cos \mu_1 + cc \cos \nu_1 &= h \cos \omega_1, \\ aa \sin \lambda + bb \sin \mu + cc \sin \nu &= h \sin \omega, \\ aa \sin \lambda_1 + bb \sin \mu_1 + cc \sin \nu_1 &= h \sin \omega_1, \end{aligned}$$

on tirera des formules (28) et (29),

$$(39) \quad x = h e^{KR - St} \cos(kx - st + \omega),$$

$$(40) \quad x' = h_1 e^{KR_1 - S_1 t} \cos(k_1 x_1 - s_1 t + \omega_1).$$

En vertu de ces dernières équations, le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à un axe fixe quelconque, s'évanouit pour chaque système : 1° à un instant donné dans une suite de plans équidistants, parallèles au plan invariable que représente la formule $x = 0$ ou

$$(41) \quad vx + v'y + w'z = 0,$$

la distance entre deux plans consécutifs étant la moitié de la longueur

$$(42) \quad l = \frac{2\pi}{k};$$

2° pour une molécule donnée, à des instants séparés les uns des autres par la moitié de l'intervalle

$$(43) \quad T = \frac{2\pi}{s}.$$

Ainsi cette distance et cet intervalle, qui représentent l'épaisseur d'une onde plane, ou la longueur d'une ondulation et la durée d'une vibration moléculaire, restent les mêmes pour les deux systèmes, comme le plan invariable auquel les plans de toutes les ondes sont parallèles. On peut en dire autant, non seulement de la quantité Ω déterminée par la formule

$$(44) \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T},$$

c'est-à-dire de la vitesse de propagation des ondes planes, mais aussi

de l'exponentielle

$$e^{KR-St},$$

qui représente le *module* du mouvement simple, et du binôme

$$k_1 - st$$

qui en représente l'*argument*.

Observons encore qu'en vertu des formules (39) et (40) l'*amplitude* des vibrations moléculaires, mesurée parallèlement à un axe fixe donné, sera représentée, pour le premier système, par le produit

$$2h e^{KR-St},$$

et, pour le second système, par le produit

$$2h_1 e^{KR-St}.$$

Cette amplitude variera donc en général dans le passage d'un système à l'autre, avec le *paramètre angulaire* qui correspondra au même axe fixe, et qui sera représenté par ω pour le premier système, par ω_1 pour le second. Toutefois, le rapport des amplitudes calculées pour deux molécules correspondantes des deux systèmes, étant constamment égal au rapport $\frac{h_1}{h}$, restera le même partout et à tous les instants. Si K et R se réduisent tous deux à zéro, les formules (39), (40) se réduiront à

$$(45) \quad u = h \cos(k_1 - st + \omega),$$

$$(46) \quad u_1 = h_1 \cos(k_1 - st + \omega_1),$$

et les amplitudes des vibrations moléculaires représentées par

$$2h \text{ et } 2h_1,$$

deviendront constantes. Enfin le mouvement s'éteindra dans les deux systèmes pour des valeurs infinies de t , si la constante S diffère de zéro, et pour des valeurs infinies de R, si la constante K diffère de zéro. Ajoutons que, dans cette dernière hypothèse, les amplitudes des vibrations moléculaires décroîtront en progression géométrique avec le module

$$e^{KR-St},$$

tandis que l'on fera croître en progression arithmétique les distances au plan invariable représenté par l'équation $R = 0$, ou

$$(47) \quad Ux + Vy + Wz = 0.$$

D'après ce qu'on vient de dire, dans un mouvement simple de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement, il existe, pour chacun de ces deux systèmes, trois plans invariables et parallèles, le premier, aux plans des courbes décrites par les diverses molécules, le second, aux plans des ondes, le troisième, à tout plan dans lequel se trouvent renfermées des molécules qui exécutent des vibrations de même amplitude.

D'ailleurs, de ces trois plans, le second reste commun, ainsi que le troisième, aux deux systèmes de molécules, mais on ne saurait, du moins en général, en dire autant du premier.

Quant aux intégrales générales des équations (6), (9) du § II, on les déduirait aisément des formules trouvées ci-dessus, à l'aide des principes exposés dans le présent Mémoire. Mais on les obtient plus facilement encore à l'aide des méthodes qui feront l'objet du Mémoire suivant.

49.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires.*

C. R., t. VIII, p. 827 (27 mai 1839).

Considérations générales.

C'est de l'intégration des *équations linéaires*, et surtout des équations linéaires à *coefficients constants*, que dépend la solution d'un grand nombre de problèmes de Physique mathématique. Dans ces problèmes,

les variables indépendantes que renferment des équations linéaires différentielles ou aux différences partielles sont ordinairement au nombre de quatre, savoir, les coordonnées et le temps; mais les inconnues ou variables principales peuvent être en nombre quelconque, et la question consiste à trouver les valeurs générales des variables principales quand on connaît leurs valeurs initiales correspondantes à un premier instant, et les valeurs initiales de leurs dérivées. Supposons, pour fixer les idées, ces valeurs initiales connues, quelles que soient les coordonnées. Alors la question pourrait à la rigueur se résoudre, pour un système d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants, à l'aide des méthodes données par Lagrange, dans le cas même où ces équations offriraient pour seconds membres des fonctions de la variable indépendante. Car, après avoir réduit par l'élimination les variables principales à une seule, on pourrait, à l'aide de ces méthodes, exprimer la variable principale en fonction de la variable indépendante et de constantes arbitraires, puis assujettir la variable principale et ses dérivées à fournir les valeurs initiales données; ce qui permettrait de fixer les valeurs des constantes arbitraires, à l'aide d'équations simultanées du premier degré. On sait d'ailleurs qu'en suivant la méthode de Lagrange, on obtient pour valeur générale de la variable principale une fonction dans laquelle entrent, avec la variable principale, les racines d'une certaine équation que j'appellerai l'équation caractéristique, le degré de cette équation étant précisément l'ordre de l'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer. On peut donc dire, en un certain sens, que la méthode de Lagrange réduit l'intégration d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants à la résolution de l'équation caractéristique. Toutefois, on doit observer : 1^o que Lagrange est forcé lui-même de modifier sa méthode dans le cas où l'équation caractéristique offre des racines égales; 2^o qu'il est bien dur pour un géomètre, qui veut suivre cette méthode, de se croire obligé à introduire dans le calcul des constantes arbitraires qui doivent être éliminées plus tard et remplacées par les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées; 3^o qu'il y a même quelque inconvénient, sous le rapport de la

complication des calculs, à commencer par réduire un système d'équations différentielles données à une seule, qui renferme une seule variable principale, sauf à revenir par un calcul inverse de la valeur générale de cette variable principale aux valeurs de toutes les autres. Il m'a donc paru qu'un service important à rendre, non seulement aux géomètres, mais encore aux physiciens, serait de leur fournir les moyens d'exprimer immédiatement les valeurs générales des variables principales, qui doivent vérifier un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, en fonction de la variable indépendante et des valeurs initiales des variables principales et de leurs dérivées, sans avoir à établir aucune distinction et à s'occuper séparément du cas où l'équation caractéristique offre deux, trois, quatre, racines égales: j'ai déjà fait voir, dans les *Exercices de Mathématiques*, avec quelle facilité on atteint ce but à l'aide du calcul des résidus, quand on considère une seule variable principale déterminée par une seule équation différentielle. Je vais montrer dans ce Mémoire qu'à l'aide du même calcul on peut encore arriver au même but pour un système quelconque d'équations linéaires à coefficients constants. La simplicité de la solution est telle, qu'elle ne peut manquer, ce me semble, d'être favorablement accueillie par tous ceux qui redoutent la longueur et la complication des calculs, et qui attachent quelque prix à l'élégance ainsi qu'à la généralité des formules. Il y a plus: la méthode que je propose ici peut être étendue et appliquée à l'intégration d'un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. Pour opérer cette extension, il suffit de recourir aux principes que j'ai développés dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et dans mes *Leçons au Collège de France*. En conséquence, étant donné un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les coordonnées, le temps et plusieurs variables principales, avec les fonctions qui représentent les valeurs initiales de ces variables principales et de leurs dérivées, on pourra immédiatement exprimer, au bout d'un temps quelconque, les variables principales en fonction des variables indépendantes, et des racines d'une certaine



équation que je continuerai de nommer l'équation caractéristique. Ainsi, dans la Physique mathématique, on n'aura plus à s'occuper de rechercher séparément les intégrales qui représentent le mouvement du son, de la chaleur, les vibrations des corps élastiques, etc. La question devra être censée résolue dans tous les cas dès que l'on sera parvenu aux équations différentielles ou aux différences partielles. Seulement les intégrales obtenues seront, dans certains cas, réductibles à des formes plus simples que celles sous lesquelles elles se présentent d'abord. Mais, comme on le verra dans ce Mémoire, et comme je l'ai déjà expliqué en traitant de l'intégration d'une seule équation linéaire, on peut établir, pour cette réduction même, des règles générales. C'est ainsi, par exemple, que l'intégrale définie sextuple, à l'aide de laquelle s'exprime la valeur générale de la variable principale d'une seule équation aux différences partielles, se réduit à une intégrale définie quadruple, dans le cas où cette équation devient homogène, ou même à une intégrale double, quand le premier nombre de l'équation caractéristique est décomposable en facteurs du second degré. On peut déjà consulter à ce sujet, dans le *Bulletin des Sciences* d'avril 1830, l'Extrait d'un Mémoire que j'ai présenté sur ce sujet à l'Académie.

Parmi les conséquences dignes de remarque qui se déduisent de la méthode d'intégration exposée dans ce Mémoire, je citerai la suivante.

Étant donné un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les coordonnées, le temps et plusieurs variables principales, avec les valeurs initiales de ces variables principales et de leurs dérivées, on peut réduire la recherche des valeurs générales des variables principales à l'évaluation d'une intégrale définie sextuple relative à six variables auxiliaires, la fonction sous le signe *f* étant proportionnelle à une exponentielle dont l'exposant est une fonction linéaire des variables indépendantes et réciproquement proportionnelle au premier membre de l'équation caractéristique.

En appliquant la méthode développée dans le présent Mémoire aux

équations à différences partielles qui représentent le mouvement des ondes, du son, de la chaleur, des corps élastiques, ... et généralement les vibrations d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, on retrouve les intégrales connues, dont les unes ont été données par M. Poisson, et les autres par moi-même, soit dans mes anciens Mémoires, soit dans ceux que j'ai présentés récemment à l'Académie. J'ajouterai que la même méthode, appliquée aux équations différentielles contenues dans mes derniers Mémoires, fournira généralement les intégrales des mouvements infiniment petits de deux ou plusieurs systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement dans le cas où l'on regarde comme constants les coefficients renfermés dans ces équations différentielles.

50.

C. R., t. VIII, p. 845 (3 juin 1839). — Suite.

§ 1^{er}. — *Intégration d'un système d'équations différentielles du premier ordre, linéaires et à coefficients constants.*

Considérons *n* équations différentielles du premier ordre linéaires et à coefficients constants, entre *n* variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

considérées comme fonctions d'une seule variable indépendante *t* qui pourra désigner le temps. Supposons ces équations présentées sous une forme telle qu'elles fournissent respectivement les valeurs de

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots;$$

de sorte qu'en faisant passer tous les termes dans les premiers membres,



ou les réduise à

$$(1) \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} + \xi + \mathfrak{R}\eta + \dots = 0, \\ \frac{d\eta}{dt} + \mathfrak{P}\xi + \mathfrak{Q}\eta + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(2) \begin{cases} (D_t + \xi)\xi + \mathfrak{R}\eta + \dots = 0, \\ \mathfrak{P}\xi + (D_t + \mathfrak{Q})\eta + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

$\xi, \mathfrak{R}, \dots, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \dots$ étant des coefficients constants. On vérifiera évidemment les équations (1) ou (2) si l'on prend

$$(3) \quad \xi = A e^{st}, \quad \eta = B e^{st}, \quad \dots,$$

s, A, B, \dots désignant des constantes réelles ou imaginaires, choisies de manière à vérifier les formules

$$(4) \begin{cases} (s + \xi)A + \mathfrak{R}B + \dots = 0, \\ \mathfrak{P}A + (s + \mathfrak{Q})B + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

qu'on obtient en remplaçant, dans les équations (2), D_t par s , et

$$\xi, \eta, \dots \text{ par } A, B, \dots$$

D'ailleurs, comme l'élimination des facteurs A, B, C, \dots entre les formules (4) fournira une *équation caractéristique*,

$$(5) \quad s = 0$$

qui sera du degré n par rapport à s , la valeur de s étant

$$(6) \quad s = (s + \xi)(s + \mathfrak{Q}) \dots - \mathfrak{R}\mathfrak{P} \dots + \dots,$$

on pourra, dans les formules (3), prendre pour s une quelconque des n racines de l'équation (5). Il y a plus : comme, étant donnés, pour les variables principales, deux ou plusieurs systèmes de valeurs propres à

vérifier les équations (1), on obtiendra de nouvelles intégrales de ces mêmes équations en ajoutant l'une à l'autre les diverses valeurs de chaque variable principale, il est clair qu'on vérifiera encore les équations (1) en posant

$$(7) \quad \xi = \mathfrak{C} \frac{A e^{st}}{(s)}, \quad \eta = \mathfrak{C} \frac{B e^{st}}{(s)}, \quad \dots,$$

pourvu que, le signe \mathfrak{C} du calcul des résidus étant relatif aux diversés racines de l'équation caractéristique, on prenne pour

$$A, B, C, \dots$$

des fonctions entières de s , propres à vérifier les formules (4). Or on obtiendra de telles valeurs en substituant aux équations (4) les suivantes

$$(8) \begin{cases} (s + \xi)A + \mathfrak{R}B + \dots = \alpha s, \\ \mathfrak{P}A + (s + \mathfrak{Q})B + \dots = \mathfrak{C} s, \\ \dots \end{cases}$$

qui s'accordent avec elles, quand on prend pour s une racine de l'équation caractéristique, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux nouvelles constantes

$$\alpha, \mathfrak{C}, \gamma, \dots$$

Soient en conséquence

$$(9) \begin{cases} A = \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{M}\mathfrak{C} + \dots, \\ B = \mathfrak{P}\alpha + \mathfrak{O}\mathfrak{C} + \dots, \\ \dots \end{cases}$$

les valeurs de A, B, C, \dots tirées des formules (8), ou, ce qui revient au même, les numérateurs des fractions qui représentent les valeurs de A, B, C, \dots déterminées par les formules

$$(10) \begin{cases} (s + \xi)A + \mathfrak{R}B + \dots = \alpha, \\ \mathfrak{P}A + (s + \mathfrak{Q})B + \dots = \mathfrak{C}, \\ \dots \end{cases}$$

et qui offrent s pour commun dénominateur. On vérifiera les équations



tions en prenant

$$(11) \quad \xi = \int \frac{(\alpha x + \beta \epsilon + \dots) e^{xt}}{((s))} dt, \quad \eta = \int \frac{(\rho x + \sigma \epsilon + \dots) e^{xt}}{((s))} dt, \dots$$

On remarquera maintenant que, dans les formules (7), les facteurs

$$\epsilon, \beta, \dots, \rho, \sigma, \dots$$

considérés comme fonctions de s sont tous du degré $n - 2$, à l'exception de ceux qui servent de coefficients, dans la valeur de A à x , dans la valeur de B à ϵ , ... c'est-à-dire à l'exception des coefficients

$$\epsilon, \sigma, \dots$$

qui seront du degré $n - 1$, et qui, étant développés suivant les puissances descendantes de s , donneront chacun pour premier terme

$$s^{n-1}.$$

D'ailleurs le développement de s offrira pour premier terme s^n ; et l'on aura, en vertu des principes du calcul des résidus, 1° en prenant pour m un nombre entier inférieur à $n - 1$,

$$(12) \quad \int \frac{s^m}{((s))} = 0;$$

2° en prenant $m = n - 1$,

$$(13) \quad \int \frac{s^{n-1}}{((s))} = 1.$$

Cela posé, on aura évidemment

$$(14) \quad \begin{cases} \int \frac{\epsilon}{((s))} = 1, & \int \frac{\beta}{((s))} = 0, \dots \\ \int \frac{\rho}{((s))} = 0, & \int \frac{\sigma}{((s))} = 1, \dots \end{cases}$$

Donc les formules (7) donneront, pour $t = 0$,

$$(15) \quad \xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \dots;$$

et réciproquement, si l'on veut que les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

soient assujetties à la double condition de vérifier, quel que soit t , les équations (1), et de vérifier, pour $t = 0$, les formules (15), il suffira de prendre pour ces variables les valeurs que fournissent les formules (11).

Il est bon d'observer que si l'on désigne par

$$L, M, \dots, P, Q, \dots$$

les fonctions de la caractéristique D , dans lesquelles se transforment les facteurs

$$\epsilon, \beta, \dots, \rho, \sigma, \dots$$

quand on y remplace s par cette caractéristique, les formules (11) pourront s'écrire comme il suit

$$(16) \quad \xi = (\alpha L + \beta M + \dots) \int \frac{e^{xt}}{((s))} dt, \quad \eta = (\alpha P + \beta Q + \dots) \int \frac{e^{xt}}{((s))} dt, \dots$$

Donc si l'on pose, pour abrégér,

$$(17) \quad \theta = \int \frac{e^{xt}}{((s))} dt,$$

on aura simplement

$$(18) \quad \xi = (\alpha L + \beta M + \dots) \theta, \quad \eta = (\alpha P + \beta Q + \dots) \theta, \dots$$

Si l'on représente par

$$\nabla$$

ce que devient δ , quand on y remplace la lettre s par la caractéristique D , la fonction θ déterminée par la formule (17) ne sera évidemment autre chose qu'une nouvelle variable principale assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t , l'équation différentielle de l'ordre n ,

$$(19) \quad \nabla \theta = 0;$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$(20) \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-2}\theta}{dt^{n-2}} = 0, \quad \frac{d^{n-1}\theta}{dt^{n-1}} = 1.$$

Cette fonction est ce que nous appellerons la *fonction principale*. Quant aux valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$



déterminées par les formules (18), elles ne différeront pas de celles que l'on déduirait par élimination des équations différentielles

$$(21) \begin{cases} (D_t + L)\xi + M\eta + \dots = \alpha \nabla \theta, \\ P\xi + (D_t + Q)\eta + \dots = \delta \nabla \theta, \\ \dots \end{cases}$$

en opérant comme si D_t et ∇ étaient de véritables quantités. D'ailleurs, pour obtenir les formules (21), il suffira d'égaliser le premier membre de chacune des équations différentielles données, non plus à zéro, mais au produit de $\theta \nabla$ par ce que devient ce premier membre, quand on remplace les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

par zéro, et leurs dérivées par les valeurs initiales

$$\alpha, \delta, \gamma, \dots$$

de ces variables principales; en d'autres termes, il suffira de remplacer, dans les équations différentielles données, les dérivées

$$D_t \xi, D_t \eta, \dots$$

par les différences

$$D_t \xi - \alpha \nabla \theta, D_t \eta - \delta \nabla \theta, \dots$$

Enfin, il est aisé de s'assurer que, pour passer des équations différentielles données à des équations intégrales qui fournissent immédiatement les valeurs générales de ξ, η, ζ, \dots , on devra suivre encore la règle que nous venons d'indiquer, dans le cas même où les équations données, étant linéaires, du premier ordre et à coefficients constants, ne seraient pas ramenées primitivement à la forme sous laquelle se présentent les équations (1) ou (2). On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — Supposons que les n variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

soient assujetties : 1° à vérifier n équations différentielles linéaires du pre-

mier ordre à coefficients constants, c'est-à-dire n équations dont les premiers membres soient des fonctions linéaires de ces variables principales et de leurs dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots$$

prises par rapport à la variable indépendante t , les seconds membres étant nuls; 2° à vérifier, pour une valeur nulle de t , les équations de condition

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \delta, \quad \zeta = \gamma, \dots$$

Pour obtenir les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

on écrira les dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots$$

sous les formes

$$D_t \xi, D_t \eta, D_t \zeta, \dots;$$

puis, on recherchera l'équation

$$\nabla = 0,$$

qui résulterait de l'élimination des variables principales ξ, η, ζ, \dots entre les équations différentielles données si l'on considérait D_t comme désignant une quantité véritable, et à cette équation $\nabla = 0$, dont le premier membre ∇ sera une fonction de D_t , du degré n , qui pourra être choisie de manière à offrir pour premier terme D_t^n , on substituera la formule

$$\nabla \theta = 0,$$

que l'on regardera comme une équation différentielle de l'ordre n entre la variable indépendante t et la fonction principale θ . Enfin on déterminera cette fonction principale de telle sorte que, pour $t = 0$, elle s'évanouisse avec ses dérivées d'un ordre inférieur à $n - 1$, la dérivée de l'ordre $n - 1$ se réduisant à l'unité; et l'on égalera le premier membre de chacune des équations différentielles données, non plus à zéro, mais au produit de $\nabla \theta$ par ce que devient ce premier membre quand on y remplace les variables princi-



pales ξ, η, ζ, \dots par zéro, et leurs dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \dots$$

par les valeurs initiales $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

de ces mêmes variables. Les nouvelles équations différentielles ainsi formées, étant résolues par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

comme si D_t désignait une quantité véritable, fourniront immédiatement les valeurs générales de ξ, η, ζ, \dots exprimées au moyen de la fonction principale et de ses dérivées relatives à t .

Ce théorème, qui ramène simplement l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants et du premier ordre, à la recherche de la fonction principale, devient surtout utile dans l'intégration des équations aux différences partielles, comme nous le verrons plus tard. Il est d'ailleurs facile de l'établir directement et de s'assurer qu'il fournit, pour les variables principales ξ, η, ζ, \dots , des valeurs qui satisfont à toutes les conditions requises. En effet, dire que les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

données par les formules (18), sont celles que l'on tire des équations (21), quand on opère comme si D_t était une quantité véritable, c'est dire que l'on a

$$\begin{aligned} (D_t + \rho)(\alpha L + \beta M + \dots) + \gamma \mathcal{R}(\alpha P + \beta Q + \dots) + \dots &= \alpha \nabla, \\ \mathcal{P}(\alpha L + \beta M + \dots) + (D_t + \varrho)(\alpha P + \beta Q + \dots) + \dots &= \beta \nabla, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

quels que soient α, β, \dots ; en d'autres termes, c'est dire que l'on a identiquement

$$(22) \begin{cases} (D_t + \rho)L + \gamma \mathcal{R}P + \dots = \nabla, & (D_t + \rho)M + \gamma \mathcal{R}Q + \dots = 0, \dots \\ \mathcal{P}L + (D_t + \varrho)P + \dots = 0, & \mathcal{P}M + (D_t + \varrho)Q + \dots = \nabla, \dots \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Or il est clair qu'en vertu des formules (19) et (22) on vérifiera les équations (2), si l'on y substitue les valeurs de ξ, η, ζ, \dots fournies par les équations (18). De plus, ∇ étant une fonction entière de D_t , choisie de manière que dans cette fonction la plus haute puissance de D_t , savoir D_t^n , offre pour coefficient l'unité, si l'on regarde D_t comme une quantité véritable, on aura, pour des valeurs infiniment grandes de cette quantité,

$$\frac{\nabla}{D_t^n} = 1,$$

et par suite, en vertu des formules (22) divisées par D_t^n ,

$$\begin{aligned} \frac{L}{D_t^{n-1}} = 1, & \quad \frac{M}{D_t^{n-1}} = 0, \dots \\ \frac{P}{D_t^{n-1}} = 0, & \quad \frac{Q}{D_t^{n-1}} = 1, \dots \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Donc, parmi les fonctions entières de D_t désignées par

$$L, M, \dots, P, Q, \dots$$

les unes, savoir

$$L, Q, \dots,$$

seront du degré $n-1$, et offriront D_t^{n-1} pour premier terme, tandis que les autres seront d'un degré inférieur à $n-1$. Donc, en vertu des formules (20), on aura, pour $t=0$,

$$\begin{aligned} L\theta = 1, & \quad M\theta = 0, \dots \\ P\theta = 0, & \quad Q\theta = 1, \dots \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

D_t étant considéré, non plus comme une quantité, mais comme une caractéristique, et les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

fournies par les équations (18), vérifieront les conditions (15).



§ II. — Intégration d'un système d'équations différentielles du premier ordre, linéaires et à coefficients constants, dans le cas où les seconds membres, au lieu de se réduire à zéro, deviennent des fonctions de la variable indépendante.

Supposons que, dans les équations (1) du § I, les seconds membres, d'abord nuls, se transforment en diverses fonctions

$$X, Y, Z, \dots$$

de la variable indépendante t , en sorte que ces équations deviennent respectivement

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} + \mathcal{L}\xi + \mathcal{M}\eta + \dots = X, \\ \frac{d\eta}{dt} + \mathcal{P}\xi + \mathcal{Q}\eta + \dots = Y, \\ \dots \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \quad \begin{cases} (D_t + \mathcal{L})\xi + \mathcal{M}\eta + \dots = X, \\ \mathcal{P}\xi + (D_t + \mathcal{Q})\eta + \dots = Y, \\ \dots \end{cases}$$

Si l'on veut obtenir des valeurs des variables principales qui aient la double propriété de vérifier ces nouvelles équations, et de s'évanouir pour $t = 0$, il suffira évidemment de remplacer, dans les formules (11) du paragraphe précédent, les constantes

$$a, \beta, \dots$$

par les intégrales

$$\int_0^t X e^{-\mu t} dt, \int_0^t Y e^{-\mu t} dt, \dots$$

En effet, en opérant ainsi et désignant par

$$x, y, \dots$$

ce que deviennent

$$X, Y, \dots$$

quand on y remplace la variable indépendante t par une variable auxiliaire τ , on trouvera

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \mathcal{E} \int_0^t \frac{(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \dots) e^{t(\tau-\nu)} d\tau}{((8))}, \\ \eta = \mathcal{E} \int_0^t \frac{(\mathcal{P}\mathcal{X} + \mathcal{Q}\mathcal{Y} + \dots) e^{t(\tau-\nu)} d\tau}{((8))}, \\ \dots \end{cases}$$

Or il est clair : 1° que les valeurs précédentes des variables principales s'évanouissent pour $t = 0$; 2° qu'elles vérifieront les équations (1), en vertu des formules (14) du § I, si l'on a identiquement

$$(4) \quad \begin{cases} (s + \mathcal{L})(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \dots) + \mathcal{M}(\mathcal{P}\mathcal{X} + \mathcal{Q}\mathcal{Y} + \dots) + \dots = 0, \\ \mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{X} + \mathcal{M}\mathcal{Y} + \dots) + (s + \mathcal{Q})(\mathcal{P}\mathcal{X} + \mathcal{Q}\mathcal{Y} + \dots) + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

D'ailleurs ces dernières équations seront effectivement identiques, attendu que les valeurs de A, B, C, \dots , fournies par les équations (9) du § I^{er}, vérifient les formules (4) du même paragraphe, indépendamment des valeurs attribuées aux facteurs a, β, \dots et par conséquent dans le cas même où l'on remplacerait

$$a, \beta, \dots, \text{ par } \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$$

Si maintenant on veut obtenir pour les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

des valeurs qui aient la double propriété de vérifier, quel que soit t , les équations (1), et de se réduire aux constantes

$$a, \beta, \gamma, \dots$$

pour $t = 0$, il suffira évidemment d'ajouter les valeurs de ξ, η, \dots fournies par les équations (3) à celles que donnent les formules (11) du



§ 1. On trouvera ainsi

$$(5) \begin{cases} \xi = \mathcal{E} \frac{(\mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{M}\mathfrak{E} + \dots) e^{\mathfrak{L}t}}{((8))} + \mathcal{E} \int_0^t \frac{(\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \dots) e^{\mathfrak{L}(t-\tau)} d\tau}{((8))}, \\ \eta = \mathcal{E} \frac{(\mathfrak{P}\alpha + \mathfrak{Q}\mathfrak{E} + \dots) e^{\mathfrak{L}t}}{((8))} + \mathcal{E} \int_0^t \frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{X} + \mathfrak{Q}\mathfrak{Y} + \dots) e^{\mathfrak{L}(t-\tau)} d\tau}{((8))}, \end{cases}$$

Il y a plus : si l'on nomme θ la fonction principale déterminée par la formule

$$(6) \quad \theta = \mathcal{E} \frac{e^{\mathfrak{L}t}}{((8))},$$

et ε ce que devient cette fonction, quand on y remplace la variable indépendante t par la différence $t - \tau$, en sorte qu'on ait

$$(7) \quad \varepsilon = \mathcal{E} \frac{e^{\mathfrak{L}(t-\tau)}}{((8))};$$

si d'ailleurs, comme dans le § 1, on désigne par

$$L, M, \dots, P, Q, \dots$$

les fonctions de D , dans lesquelles se transforment les facteurs

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \dots, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \dots$$

quand on y remplace s par D , les formules (5) donneront simplement

$$(8) \begin{cases} \xi = (\alpha L + \mathfrak{E}M + \dots) \theta + \int_0^t (\mathfrak{X}L + \mathfrak{Y}M + \dots) \varepsilon d\tau, \\ \eta = (\alpha P + \mathfrak{E}Q + \dots) \theta + \int_0^t (\mathfrak{X}P + \mathfrak{Y}Q + \dots) \varepsilon d\tau, \end{cases}$$

D'autre part, si l'on fait pour abrégier

$$(9) \quad \Xi = (\mathfrak{X}L + \mathfrak{Y}M + \dots) \varepsilon, \quad \text{H} = (\mathfrak{X}P + \mathfrak{Y}Q + \dots) \varepsilon, \dots$$

Ξ, H, \dots représenteront de nouvelles variables assujetties : 1° à vérifier,

quel que soit t , les formules

$$(10) \quad \begin{cases} (D_t + \mathfrak{L}) \Xi + \mathfrak{M} \text{H} + \dots = 0, \\ \mathfrak{Q} \Xi + (D_t + \mathfrak{Q}) \text{H} + \dots = 0, \\ \dots \end{cases}$$

2° à vérifier, pour $t - \tau = 0$, ou, ce qui revient au même, pour $\tau = t$, les conditions

$$(11) \quad \Xi = \alpha = X, \quad \text{H} = \mathfrak{Y} = Y, \quad \dots;$$

et les intégrales

$$\int_0^t \Xi d\tau, \quad \int_0^t \text{H} d\tau, \quad \dots$$

désigneront évidemment les valeurs de ξ, η, \dots correspondantes au cas particulier où l'on aurait

$$\alpha = 0, \quad \mathfrak{E} = 0, \quad \dots$$

Cela posé, on déduira immédiatement des formules (8) la proposition suivante :

THÉORÈME. — Supposons que les n variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

soient assujetties : 1° à vérifier n équations différentielles dont les premiers membres se réduisent à des fonctions linéaires de ces variables et de l'une des dérivées

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \dots,$$

le coefficient de cette dérivée étant l'unité, et les seconds membres étant des fonctions

$$X, Y, \dots$$

de la variable indépendante t ; 2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \mathfrak{E}, \quad \dots$$

Pour obtenir les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \dots,$$



il suffira d'ajouter à celles que l'on obtiendrait si

$$X, Y, \dots$$

se réduisaient à zéro, les valeurs de ξ, η, \dots correspondantes au cas particulier où l'on aurait

$$z = 0, \quad \delta = 0.$$

Ces dernières seront d'ailleurs de la forme

$$(12) \quad \xi = \int_0^t \Xi d\tau, \quad \eta = \int_0^t \text{H} d\tau, \quad \dots,$$

Ξ, H, \dots étant ce que deviennent les valeurs de ξ, η, \dots relatives à des valeurs nulles de X, Y, \dots quand on y remplace

$$t \text{ par } t - \tau,$$

et

$$x, \delta, \dots$$

par les quantités

$$x, \delta, \dots$$

dans lesquelles se transforment

$$X, Y, \dots$$

en vertu de la substitution de τ à t .

Au reste, pour établir directement ce nouveau théorème, il suffit de montrer que les valeurs de

$$\xi, \eta, \dots$$

fournies par les équations (12), non seulement s'évanouissent, comme on le reconnaît à première vue, pour $t = 0$, mais encore vérifient les équations (1) ou (2). Or effectivement ces valeurs, substituées dans les équations (1) ou (2), les réduiront, en vertu des formules (11), aux suivantes :

$$X + \int_0^t [(D_t + \rho)\Xi + \text{H} + \dots] d\tau = X,$$

$$Y + \int_0^t [\text{Q}\Xi + (D_t + \rho)\text{H} + \dots] d\tau = Y,$$

$$\dots \dots \dots$$

et ces dernières seront identiques, eu égard aux équations (10).

§ III. — Intégration d'un système d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants d'un ordre quelconque, le second membre de chaque équation pouvant être, ou zéro, ou une fonction de la variable indépendante.

Supposons que les équations différentielles données, étant par rapport à une ou plusieurs des variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

d'un ordre supérieur au premier, contiennent avec ces variables principales les dérivées de ξ, η, \dots relatives à t , et dont l'ordre ne surpasse pas n' pour la variable ξ, n'' pour la variable η, \dots . Supposons d'ailleurs que ces équations soient linéaires et à coefficients constants, les seconds membres pouvant être des fonctions de la variable indépendante t . Les premiers membres, dans le cas le plus général, seront des fonctions linéaires, à coefficients constants, des quantités

$$\begin{aligned} \xi, \quad \xi' = \frac{d\xi}{dt}, \quad \xi'' = \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \dots, \quad \xi^{(n')} = \frac{d^{n'}\xi}{dt^{n'}}, \\ \eta, \quad \eta' = \frac{d\eta}{dt}, \quad \eta'' = \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \dots, \quad \eta^{(n'')} = \frac{d^{n''}\eta}{dt^{n''}}, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \end{aligned}$$

et les variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

pourront être complètement déterminées si on les assujettit : 1° à vérifier les équations différentielles données, quel que soit t ; 2° à vérifier, pour $t = 0$, des conditions de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \alpha, & \xi' = \alpha', & \dots, & \xi^{(n'-1)} = \alpha^{(n'-1)}, \\ \eta = \beta, & \eta' = \beta', & \dots, & \eta^{(n''-1)} = \beta^{(n''-1)}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{cases}$$

$\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n'-1)}; \beta, \beta', \dots, \beta^{(n''-1)}, \dots$ désignant des constantes arbitraires dont le nombre n sera

$$(2) \quad n' + n'' + \dots = n.$$

Cela posé, les équations différentielles données pourront être consi-



dérivées comme établissant entre les variables

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}, \xi^{(n)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}, \eta^{(n)}; \dots$$

des relations en vertu desquelles les dérivées des ordres les plus élevés, savoir

$$\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots,$$

s'exprimeront à l'aide des dérivées d'ordres inférieurs

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \dots;$$

et; pour ramener le système des équations différentielles données à un système d'équations différentielles du premier ordre, il suffira de les remplacer par les suivantes

$$(3) \begin{cases} D_t \xi - \xi' = 0, & D_t \xi' - \xi'' = 0, & \dots, & D_t \xi^{(n-1)} - \xi^{(n)} = 0, \\ D_t \eta - \eta' = 0, & D_t \eta' - \eta'' = 0, & \dots, & D_t \eta^{(n-1)} - \eta^{(n)} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

en prenant pour inconnues ou variables principales les n dérivées d'ordre inférieur, savoir

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \dots$$

et supposant, comme on vient de le dire, les dérivées d'ordres supérieurs, savoir

$$\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots,$$

exprimées en fonction des autres et de la variable t par le moyen des équations données. Or, si les seconds membres des équations données s'évanouissent, les valeurs qu'elles fourniront pour

$$\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots$$

se réduiront à des fonctions linéaires de

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}; \dots;$$

et si, après avoir substitué ces valeurs dans les équations (3), on veut intégrer ces dernières équations, on devra, suivant ce qu'on a vu dans le § I, opérer de la manière suivante.

1° On éliminera les variables

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}; \eta, \eta', \dots; \eta^{(n-1)}; \dots$$

entre les équations (3), ou, ce qui revient au même, on éliminera les seules variables

$$\xi, \eta, \dots$$

entre les équations différentielles données, en opérant comme si D_t désignait une quantité véritable; et, après avoir ainsi trouvé une équation résultante

$$\nabla = 0,$$

dont le premier membre ∇ sera une fonction entière de D_t du degré n , on assujettira la fonction principale θ à la double condition de vérifier, quel que soit t , l'équation différentielle de l'ordre n ,

$$(4) \quad \nabla \theta = 0,$$

et de vérifier, pour $t = 0$, les formules

$$(5) \quad \theta = 0, \quad D_t \theta = 0, \quad D_t^2 \theta = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-1} \theta = 0, \quad D_t^n \theta = 1.$$

Pour satisfaire à cette double condition, il suffira de prendre

$$(6) \quad \theta = \int \frac{e^{st}}{((\delta))},$$

s désignant la variable auxiliaire à laquelle le signe δ se rapporte et δ la fonction de s en laquelle ∇ se transforme, quand on y remplace D_t par s .

2° Après avoir substitué dans les équations (3) les valeurs de

$$\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots$$

exprimées en fonctions linéaires des inconnues ou variables principales

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}, \\ \eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}, \\ \dots \dots \dots$$

on y remplacera les dérivées de ces variables, savoir

$$D_t \xi, D_t \xi', \dots, D_t \xi^{(n-1)}, \\ D_t \eta, D_t \eta', \dots, D_t \eta^{(n-1)}, \\ \dots \dots \dots$$



par les différences

$$\begin{aligned} D_t \xi - \alpha \nabla \theta, & D_t \xi' - \alpha' \nabla \theta, \dots, D_t \xi^{(n'-1)} - \alpha^{(n'-1)} \nabla \theta, \\ D_t \eta - \varepsilon \nabla \theta, & D_t \eta' - \varepsilon' \nabla \theta, \dots, D_t \eta^{(n''-1)} - \varepsilon^{(n''-1)} \nabla \theta, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

puis on résoudra, par rapport à

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n'-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n''-1)}; \dots$$

les nouvelles équations ainsi obtenues, en opérant comme si D_t était une quantité véritable. D'ailleurs, les remplacements dont il est ici question transformeront les équations (3) en celles qui suivent :

$$(7) \begin{cases} D_t \xi - \xi' = \alpha \nabla \theta, & D_t \xi' - \xi'' = \alpha' \nabla \theta, \dots, & D_t \xi^{(n'-1)} - \xi^{(n')} = \alpha^{(n'-1)} \nabla \theta, \\ D_t \eta - \eta' = \varepsilon \nabla \theta, & D_t \eta' - \eta'' = \varepsilon' \nabla \theta, \dots, & D_t \eta^{(n''-1)} - \eta^{(n'')} = \varepsilon^{(n''-1)} \nabla \theta, \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

et l'on tire immédiatement des formules (7)

$$(8) \begin{cases} \xi' = D_t \xi - \alpha \nabla \theta, \\ \xi'' = D_t^2 \xi - (\alpha' + \alpha D_t) \nabla \theta, \\ \dots \\ \xi^{(n')} = D_t^{n'} \xi - (\alpha^{(n'-1)} + \dots + \alpha' D_t^{n'-2} + \alpha D_t^{n'-1}) \nabla \theta; \\ \eta' = D_t \eta - \varepsilon \nabla \theta, \\ \eta'' = D_t^2 \eta - (\varepsilon' + \varepsilon D_t) \nabla \theta, \\ \dots \\ \eta^{(n'')} = D_t^{n''} \eta - (\varepsilon^{(n''-1)} + \dots + \varepsilon' D_t^{n''-2} + \varepsilon D_t^{n''-1}) \nabla \theta. \end{cases}$$

Donc, pour intégrer, dans l'hypothèse admise, les équations différentielles données, il suffira de les considérer comme établissant des relations entre les quantités

$$\xi, \xi', \xi'', \dots, \xi^{(n')}; \eta, \eta', \eta'', \dots, \eta^{(n'')}; \dots;$$

puis d'y substituer les valeurs de

$$\xi, \xi'', \dots, \xi^{(n')}; \eta', \eta'', \dots, \eta^{(n'')}; \dots$$

fournies par les équations (8), et de les résoudre ensuite par rapport aux variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

en opérant comme si D_t était une quantité véritable. Cette règle très simple fournira immédiatement les intégrales générales d'un système d'équations différentielles linéaires et à coefficients constants d'un ordre quelconque, lorsque les seconds membres de ces équations se réduiront à zéro.

Si les seconds membres des équations différentielles données étaient supposés, non plus égaux à zéro, mais fonctions de la variable indépendante t , il faudrait, aux valeurs de

$$\xi, \eta, \dots$$

obtenues comme on vient de le dire, ajouter des accroissements représentés par des intégrales définies de la forme

$$\int_0^t \Xi dt, \int_0^t \Pi dt, \dots$$

Soient d'ailleurs, dans cette seconde hypothèse,

$$X, Y, \dots$$

les valeurs de

$$\xi^{(n')} = \frac{d^{n'} \xi}{dt^{n'}}, \quad \eta^{(n'')} = \frac{d^{n''} \eta}{dt^{n''}}, \quad \dots$$

que fournissent les équations données quand on y remplace

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n'-1)}; \eta, \eta', \dots, \eta^{(n''-1)}; \dots$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi, \frac{d\xi}{dt}, \dots, \frac{d^{n'-1} \xi}{dt^{n'-1}}; \eta, \frac{d\eta}{dt}, \dots, \frac{d^{n''-1} \eta}{dt^{n''-1}}; \dots,$$

par zéro; et nommons

$$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$$

les fonctions de τ , dans lesquelles se changent

$$X, Y, \dots$$

quand on y remplace la variable indépendante t par la variable auxiliaire τ . Pour obtenir les valeurs de

$$\Xi, \Pi, \dots$$



il suffira, d'après ce qui a été dit dans le § II, de chercher ce que deviennent les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \dots$$

relatives à la première hypothèse, quand on y remplace

$$t \text{ par } t - \tau,$$

et

$$x, x', \dots, x^{(n-2)}, x^{(n-1)}; \quad \xi, \xi', \dots, \xi^{(n-2)}, \xi^{(n-1)}; \dots$$

par

$$0, 0, \dots, 0, \alpha; \quad 0, 0, \dots, 0, \beta; \dots$$

Applications. — Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, proposons-nous d'abord d'intégrer une seule équation différentielle de l'ordre n et de la forme

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + b \frac{d^{n-2} \xi}{dt^{n-2}} + \dots + h \frac{d\xi}{dt} + k\xi = X,$$

a, b, \dots, h, k désignant des coefficients constants, et X une fonction quelconque de t . Si l'on suppose d'abord X réduit à zéro, l'équation donnée deviendra

$$\nabla \xi = 0,$$

la valeur de ∇ étant

$$\nabla = D_t^n + aD_t^{n-1} + bD_t^{n-2} + \dots + hD_t + k;$$

et par suite, si l'on pose

$$s = s^n + as^{n-1} + bs^{n-2} + \dots + hs + k = F(s),$$

la fonction principale θ sera déterminée par la formule

$$\theta = \int \frac{e^{st}}{(F(s))} = \int \frac{e^{st}}{(F(s))}.$$

D'ailleurs, lorsqu'on regardera la proposée comme établissant une relation entre les quantités

$$\xi, \xi', \dots, \xi^{(n-1)}, \xi^{(n)},$$

elle se présentera sous la forme

$$\xi^{(n)} + a\xi^{(n-1)} + b\xi^{(n-2)} + \dots + h\xi' + k\xi = 0;$$

et, si l'on substitue dans cette dernière formule les valeurs de

$$\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n)}$$

fournies par les équations (8), on en conclura

$$\nabla \xi = [(x^{(n-1)} + \dots + x' D_t^{n-2} + x D_t^{n-1}) + \dots + h(x' + x D_t) + kx] \nabla \theta;$$

puis, en opérant comme si D_t et ∇ étaient des quantités véritables,

$$\xi = [(x^{(n-1)} + \dots + x' D_t^{n-2} + x D_t^{n-1}) + \dots + h(x' + x D_t) + kx] \theta.$$

Telle sera effectivement la valeur générale de ξ , que l'on pourra représenter sous la forme

$$\xi = \frac{F(D_t) - F(x)}{D_t - x} \theta,$$

pourvu que, dans le développement du rapport

$$\frac{F(D_t) - F(x)}{D_t - x},$$

on remplace les puissances entières de x , savoir

$$x^0 = 1, \quad x^1, \quad x^2, \quad \dots, \quad x^{n-1},$$

par les constantes arbitraires

$$x, \quad x', \quad x'', \quad \dots, \quad x^{(n-1)}.$$

Si, dans la dernière valeur de ξ , on substitue la valeur trouvée de θ , on obtiendra la formule symbolique

$$\xi = \int \frac{F(s) - F(x)}{s - x} \frac{e^{st}}{(F(s))},$$

à laquelle nous sommes déjà parvenus dans les *Exercices de Mathématiques*.

Pour passer du cas où X s'évanouit au cas où X est fonction de t , il

suffira d'ajouter à la valeur précédente de ξ l'intégrale définie

$$\int_0^t \Xi dt,$$

Ξ désignant ce que devient la valeur précédente de ξ quand on y remplace

$$t \text{ par } t - \tau,$$

$z, z', \dots, z^{(n-2)}$ par zéro, et $z^{(n-1)}$ par la fonction \varkappa en laquelle se transforme X en vertu de la substitution de τ à t . Cela posé, soit

$$\bar{\varepsilon} = \mathcal{E} \frac{e^{s(t-\tau)}}{((F(s)))}.$$

L'équation en ξ trouvée plus haut, savoir

$$\xi = (z^{(n-1)} + \dots)\theta,$$

entraînera la suivante :

$$\Xi = \varkappa \bar{\varepsilon} = \varkappa \mathcal{E} \frac{e^{s(t-\tau)}}{((F(s)))},$$

et, par suite, en intégrant l'équation

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + b \frac{d^{n-2} \xi}{dt^{n-2}} + \dots + h \frac{d\xi}{dt} + h\xi = X,$$

de manière à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\xi = z, \quad \frac{d\xi}{dt} = z', \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} = z^{(n-1)},$$

on trouvera

$$\xi = \frac{F(D_t) - F(z)}{D_t - z} \theta + \int_0^t \varkappa \bar{\varepsilon} dt,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi = \mathcal{E} \frac{F(s) - F(z)}{s - z} \frac{e^{st}}{((F(s)))} + \mathcal{E} \int_0^t \varkappa \frac{e^{s(t-\tau)}}{((F(s)))} d\tau,$$

pourvu que, dans le développement du rapport qui renferme la lettre z , on remplace z^0, z^1, \dots, z^{n-1} par $z, z', \dots, z^{(n-1)}$. On se trouve ainsi

ramené aux résultats déjà obtenus dans les *Exercices de Mathématiques*.

Proposons-nous maintenant d'intégrer les équations simultanées

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \mathcal{L} \xi + \mathfrak{A} \eta + \mathcal{Q} \zeta + X,$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = \mathfrak{A} \xi + \mathfrak{B} \eta + \mathfrak{C} \zeta + Y,$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \mathcal{Q} \xi + \mathfrak{C} \eta + \mathfrak{D} \zeta + Z,$$

$\mathcal{L}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathcal{Q}, \mathfrak{A}$ désignant des coefficients constants, et

$$X, Y, Z$$

des fonctions de la variable indépendante t . Si l'on suppose d'abord ces fonctions nulles, les équations données se réduiront aux suivantes :

$$(\mathcal{L} - D_t^2) \xi + \mathfrak{A} \eta + \mathcal{Q} \zeta = 0,$$

$$\mathfrak{A} \xi + (\mathfrak{B} - D_t^2) \eta + \mathfrak{C} \zeta = 0,$$

$$\mathcal{Q} \xi + \mathfrak{C} \eta + (\mathfrak{D} - D_t^2) \zeta = 0.$$

En éliminant ξ, η, ζ entre ces dernières et opérant comme si D_t était une quantité véritable, on obtiendra une équation résultante

$$\nabla = 0,$$

dont le premier membre ∇ pourra être censé déterminé par la formule

$$\begin{aligned} \nabla = & (D_t^2 - \mathcal{L})(D_t^2 - \mathfrak{B})(D_t^2 - \mathfrak{D}) \\ & - \mathfrak{A}^2(D_t^2 - \mathcal{L}) - \mathcal{Q}^2(D_t^2 - \mathfrak{B}) - \mathfrak{A}^2(D_t^2 - \mathfrak{D}) - 2\mathfrak{A}\mathcal{Q}\mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Soit s ce que devient la valeur précédente de ∇ quand on y remplace D_t par s , en sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} s = & (s^2 - \mathcal{L})(s^2 - \mathfrak{B})(s^2 - \mathfrak{D}) \\ & - \mathfrak{A}^2(s^2 - \mathcal{L}) - \mathcal{Q}^2(s^2 - \mathfrak{B}) - \mathfrak{A}^2(s^2 - \mathfrak{D}) - 2\mathfrak{A}\mathcal{Q}\mathfrak{A}, \end{aligned}$$

et posons

$$\theta = \mathcal{E} \frac{e^{st}}{((s))};$$



si l'on veut déterminer les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

de manière qu'elles vérifient, quel que soit t , les équations données, et pour $t = 0$ les conditions

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \epsilon, \quad \zeta = \gamma, \quad \frac{d\xi}{dt} = \alpha', \quad \frac{d\eta}{dt} = \epsilon', \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma'.$$

il suffira de remplacer, dans les équations données, les dérivées du second ordre

$$\xi'' = D_t^2 \xi, \quad \eta'' = D_t^2 \eta, \quad \zeta'' = D_t^2 \zeta$$

par les différences

$$D_t^2 \xi - (\alpha' + \alpha D_t) \nabla \theta, \quad D_t^2 \eta - (\epsilon' + \epsilon D_t) \nabla \theta, \quad D_t^2 \zeta - (\gamma' + \gamma D_t) \nabla \theta,$$

puis de résoudre par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta,$$

et en opérant comme si D_t était une quantité véritable, les nouvelles équations formées comme on vient de le dire, savoir

$$\begin{aligned} (D_t^2 - \alpha) \xi - \alpha \eta - \alpha \zeta &= (\alpha' + \alpha D_t) \nabla \theta, \\ -\alpha \xi + (D_t^2 - \alpha \kappa) \eta - \alpha \zeta &= (\epsilon' + \epsilon D_t) \nabla \theta, \\ -\alpha \xi - \alpha \eta + (D_t^2 - \alpha \kappa) \zeta &= (\gamma' + \gamma D_t) \nabla \theta. \end{aligned}$$

On trouvera de cette manière

$$\begin{aligned} \xi &= [(D_t^2 - \alpha \kappa)(D_t^2 - \alpha \kappa) - \alpha^2](\alpha' + \alpha D_t) \theta \\ &+ [\alpha(D_t^2 - \alpha \kappa) + \alpha^2 \alpha] (\epsilon' + \epsilon D_t) \theta \\ &+ [\alpha(D_t^2 - \alpha \kappa) + \alpha \alpha \alpha] (\gamma' + \gamma D_t) \theta \\ &\dots \end{aligned}$$

et, en posant, pour abrégé,

$$\begin{aligned} \epsilon &= (D_t^2 - \alpha \kappa)(D_t^2 - \alpha \kappa) - \alpha^2, & \rho &= \alpha(D_t^2 - \alpha \kappa) + \alpha^2 \alpha, \\ \mu &= (D_t^2 - \alpha \kappa)(D_t^2 - \alpha \kappa) - \alpha^2, & \omega &= \alpha(D_t^2 - \alpha \kappa) + \alpha \alpha \alpha, \\ \nu &= (D_t^2 - \alpha \kappa)(D_t^2 - \alpha \kappa) - \alpha^2, & \tau &= \alpha(D_t^2 - \alpha \kappa) + \alpha \alpha \alpha. \end{aligned}$$

on aura simplement

$$\begin{aligned} \xi &= [(\alpha' + \alpha D_t) \epsilon + (\epsilon' + \epsilon D_t) \mu + (\gamma' + \gamma D_t) \omega] \theta, \\ \eta &= [(\alpha' + \alpha D_t) \rho + (\epsilon' + \epsilon D_t) \mu + (\gamma' + \gamma D_t) \rho] \theta, \\ \zeta &= [(\alpha' + \alpha D_t) \omega + (\epsilon' + \epsilon D_t) \rho + (\gamma' + \gamma D_t) \tau] \theta. \end{aligned}$$

Si maintenant les fonctions de t désignées par

$$X, Y, Z$$

cessent d'être nulles, et si l'on nomme

$$\alpha, \beta, \gamma$$

ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace la variable indépendante t par la variable auxiliaire τ , alors, pour obtenir les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

il suffira d'ajouter celles qu'on vient de trouver à celles que déterminent les formules

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^t (\alpha \epsilon + \beta \mu + \gamma \omega) \epsilon \, d\tau, \\ \eta &= \int_0^t (\alpha \rho + \beta \mu + \gamma \rho) \epsilon \, d\tau, \\ \zeta &= \int_0^t (\alpha \omega + \beta \rho + \gamma \tau) \epsilon \, d\tau, \end{aligned}$$

la valeur de ϵ étant

$$\epsilon = \int \frac{e^{(\alpha' - \alpha \tau)}}{(\beta \gamma)}.$$



Comptes rendus, t. VIII, p. 889 (10 juin 1839). — Suite.

§ IV. — Intégration d'un système d'équations linéaires, aux différences partielles, et à coefficients constants, d'un ordre quelconque, le second membre de chaque équation pouvant être, ou zéro, ou une fonction des variables indépendantes.

Soit donné un système d'équations aux différences partielles entre plusieurs variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et plusieurs variables indépendantes

$$x, y, z, \dots, t,$$

que, pour fixer les idées, nous réduirons à quatre, les trois premières x, y, z pouvant représenter trois coordonnées, et la quatrième t désignant le temps. Supposons d'ailleurs que les premiers membres de ces équations soient des fonctions linéaires, à coefficients constants, des variables principales et de leurs dérivées, l'ordre des dérivées relatives à t pouvant s'élever jusqu'au nombre n' pour la variable principale ξ , jusqu'au nombre n'' pour la variable principale η , jusqu'au nombre n''' pour la variable principale ζ , Faisons, pour abrégér,

$$(1) \quad n = n' + n'' + n''' + \dots$$

Enfin nommons

$$\begin{array}{lll} \varphi(x, y, z), & \chi(x, y, z), & \psi(x, y, z), \dots \\ \varphi_1(x, y, z), & \chi_1(x, y, z), & \psi_1(x, y, z), \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x, y, z), & \chi_{n-1}(x, y, z), & \psi_{n-1}(x, y, z), \dots \end{array}$$

les valeurs initiales des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et de leurs dérivées d'ordres inférieurs à l'un des nombres

$$n', n'', n''', \dots;$$

en sorte que ces variables soient assujetties à vérifier, quel que soit t , les équations données aux différences partielles, et pour $t = 0$, les conditions

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), & \eta = \chi(x, y, z), & \zeta = \psi(x, y, z), \dots \\ D_t \xi = \varphi_1(x, y, z), & D_t \eta = \chi_1(x, y, z), & D_t \zeta = \psi_1(x, y, z), \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ D_t^{n'-1} \xi = \varphi_{n'-1}(x, y, z), & D_t^{n''-1} \eta = \chi_{n''-1}(x, y, z), & D_t^{n'''-1} \zeta = \psi_{n'''-1}(x, y, z), \dots \end{cases}$$

Pour ramener l'intégration des équations proposées à l'intégration d'un système d'équations linéaires et à coefficients constants, il suffira de recourir à la formule connue

$$(3) \quad \varpi(x) = \int_{-a}^x \int_{-a}^x e^{v(x-\lambda)} \sqrt{-1} \varpi(\lambda) \frac{d\lambda dv}{2\pi},$$

de laquelle on tire, en remplaçant successivement $\varpi(x)$ par $\varpi(x, y)$ et par $\varpi(x, y, z)$

$$\varpi(x, y) = \int_{-a}^x \int_{-a}^y \int_{-a}^x \int_{-a}^y e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)]\sqrt{-1}} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda dv}{2\pi} \frac{d\mu dv}{2\pi},$$

$$(4) \quad \varpi(x, y, z) = \int_{-a}^x \int_{-a}^y \int_{-a}^z \int_{-a}^x \int_{-a}^y \int_{-a}^z e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} \varpi(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda dv}{2\pi} \frac{d\mu dv}{2\pi} \frac{d\nu dw}{2\pi},$$

puis, en écrivant $\varpi(x, y, z, t)$ au lieu de $\varpi(x, y, z)$,

$$(5) \quad \varpi(x, y, z, t) = \int_{-a}^x \int_{-a}^y \int_{-a}^z \int_{-a}^x \int_{-a}^y \int_{-a}^z \int_{-a}^x \int_{-a}^y \int_{-a}^z e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} \varpi(\lambda, \mu, \nu, t) \frac{d\lambda dv}{2\pi} \frac{d\mu dv}{2\pi} \frac{d\nu dw}{2\pi},$$

En effet, chacune des équations données sera de la forme

$$(6) \quad R = \varpi(x, y, z, t),$$

R désignant une fonction linéaire, et à coefficients constants, des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta,$$

et de leurs dérivées prises par rapport à une ou plusieurs des variables



indépendantes. D'autre part, en désignant par

$$f, g, h$$

des nombres entiers quelconques, et posant, pour abrégier,

$$(7) \quad u = v\sqrt{-1}, \quad v = w\sqrt{-1}, \quad w = x\sqrt{-1},$$

on tirera généralement de la formule (4)

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} & D_x^f D_y^g D_z^h \mathfrak{R}(x, y, z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)} u^f v^g w^h \mathfrak{R}(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \end{aligned} \right\}$$

Cela posé, si l'on nomme

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

ce que deviennent les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

considérées comme fonctions de x, y, z, t , quand on y remplace

$$x, y, z$$

par

$$\lambda, \mu, \nu;$$

si, de plus, après avoir exprimé R à l'aide des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t,$$

on appelle \mathfrak{R} ce que devient R , quand on remplace

$$\xi, \eta, \zeta, \dots \text{ par } \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

et les puissances entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z$$

par les puissances semblables des facteurs

$$u, v, w,$$

on aura évidemment

$$(9) \quad R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)} \mathfrak{R} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi};$$

et par suite l'équation (6) pourra être représentée sous la forme

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathfrak{R} - \mathfrak{R}(\lambda, \mu, \nu, t)] e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} = 0.$$

Or, pour que la formule (10) soit vérifiée, il suffira que l'on ait $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}(\lambda, \mu, \nu, t) = 0$ ou, ce qui revient au même,

$$(11) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\lambda, \mu, \nu, t),$$

et cette dernière formule n'est autre chose qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants entre les inconnues

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

considérées comme variables principales, et t considéré comme variable indépendante. Ce n'est pas tout. Pour que les conditions (2) soient vérifiées, il suffira, en vertu de la formule (4), que l'on ait pour $t = 0$,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\xi} &= \varphi(\lambda, \mu, \nu), & \bar{\eta} &= \chi(\lambda, \mu, \nu), & \bar{\zeta} &= \psi(\lambda, \mu, \nu), & \dots \\ D_t \bar{\xi} &= \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), & D_t \bar{\eta} &= \chi_1(\lambda, \mu, \nu), & D_t \bar{\zeta} &= \psi_1(\lambda, \mu, \nu), & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_t^{m-1} \bar{\xi} &= \varphi_{m-1}(\lambda, \mu, \nu), & D_t^{m-1} \bar{\eta} &= \chi_{m-1}(\lambda, \mu, \nu), & D_t^{m-1} \bar{\zeta} &= \psi_{m-1}(\lambda, \mu, \nu), & \dots \end{aligned} \right.$$

Donc, en définitive, pour que les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

possèdent la double propriété de vérifier, quel que soit t , les équations données, et, pour $t = 0$, les conditions (2), il suffira que les variables principales auxiliaires

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

possèdent la double propriété de vérifier, quel que soit t , un système d'équations différentielles semblables à la formule (11), et, pour $t = 0$, les conditions (12). On pourra donc énoncer la proposition suivante :

THEOREME I. — Les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$



assujetties : 1° à vérifier, quel que soit t, un système d'équations linéaires, aux différences partielles, et à coefficients constants, ces équations pouvant offrir pour seconds membres, ou zéro, ou des fonctions connues des variables indépendantes

$$x, y, z, t;$$

2° à vérifier, pour t = 0, les conditions (2), seront, dans tous les cas, immédiatement déterminées par les formules

$$(13) \begin{cases} \xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} \xi \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \\ \eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} \eta \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \\ \zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} \zeta \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \frac{d\gamma}{2\pi} \end{cases}$$

pourvu que l'on désigne par

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

de nouvelles variables principales assujetties : 1° à vérifier, quel que soit t, certaines équations différentielles, qui seront nommées les équations auxiliaires; 2° à vérifier, pour t = 0, les conditions (12). D'ailleurs, pour obtenir les équations différentielles auxiliaires, il suffira d'exprimer les dérivées de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$ que renferment les premiers membres des équations linéaires données, à l'aide des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t;$$

puis de remplacer dans ces premiers membres

$$\xi, \eta, \zeta, \dots \text{ par } \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

et

$$D_x, D_y, D_z$$

par

$$u, v, w;$$

ou, ce qui revient au même, par

$$v\sqrt{-1}, v\sqrt{-1}, w\sqrt{-1},$$

enfin de remplacer dans les seconds membres

$$x, y, z \text{ par } \lambda, \mu, \nu.$$

Considérons en particulier le cas où, dans les équations linéaires données, les dérivées de ξ, η, ζ, \dots relatives à t se réduiraient aux dérivées du premier ordre

$$D_t \xi, D_t \eta, D_t \zeta, \dots$$

et se trouveraient simplement multipliées par des coefficients constants, indépendants de

$$D_x, D_y, D_z.$$

Alors les conditions (2), qui devront être vérifiées pour t = 0, se réduiront à

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \chi(x, y, z), \quad \zeta = \psi(x, y, z), \quad \dots$$

et les équations auxiliaires seront des équations différentielles du premier ordre, linéaires et à coefficients constants, auxquelles devront satisfaire les nouvelles variables principales

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots$$

assujetties en outre à vérifier, pour t = 0, les conditions

$$\bar{\xi} = \varphi(\lambda, \mu, \nu), \quad \bar{\eta} = \chi(\lambda, \mu, \nu), \quad \bar{\zeta} = \psi(\lambda, \mu, \nu), \quad \dots$$

Or, si l'on suppose d'abord que les seconds membres des équations linéaires données s'évanouissent, on pourra en dire autant des seconds membres des équations auxiliaires; et, d'après ce qu'on a vu dans le § 1, les valeurs générales de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots$ seront de la forme

$$(14) \begin{cases} \bar{\xi} = [\varphi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{e} + \chi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{m} + \dots] \theta, \\ \bar{\eta} = [\varphi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{v} + \chi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{e} + \dots] \theta, \\ \dots \end{cases}$$

θ désignant la fonction principale, et

$$\mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \dots, \mathfrak{p}, \mathfrak{e}, \dots$$



des fonctions entières de la caractéristique D_t . D'ailleurs, pour obtenir la fonction principale θ relative aux équations auxiliaires, on devra : 1° exprimer, dans les équations linéaires données, les diverses dérivées de ξ, η, ζ, \dots à l'aide des caractéristiques D_x, D_y, D_z, D_t ; 2° éliminer ξ, η, ζ, \dots entre ces équations, comme si

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

désignaient des quantités véritables; 3° remplacer, dans le premier membre ∇ de l'équation résultante

$$(15) \quad \nabla = 0,$$

les caractéristiques D_x, D_y, D_z par u, v, w , ce qui réduira ∇ à une fonction de la seule caractéristique D_t , puis choisir θ de manière à vérifier, quel que soit t , l'équation différentielle

$$\nabla \theta = 0,$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$\theta = 0, \quad D_t \theta = 0, \quad \dots, \quad D_t^{q-2} \theta = 0, \quad D_t^{q-1} \theta = 1.$$

Si l'on nomme s ce que devient le premier membre ∇ de l'équation (15), quand on y remplace, non seulement

$$D_x, D_y, D_z \text{ par } u, v, w,$$

mais encore D_t par s ,

$$(16) \quad s = 0$$

sera ce que nous appelons l'équation caractéristique; et la valeur de la fonction principale θ sera

$$(17) \quad \theta = \int \frac{e^{st}}{(s)}$$

si l'on a choisi la fonction ∇ de manière que le coefficient de D_t^q s'y réduise à l'unité. Cela posé, pour obtenir les valeurs générales de

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \dots,$$

c'est-à-dire pour obtenir les formules (14), il suffira, en vertu des prin-

cipes établis dans le § I, de remplacer dans les équations différentielles auxiliaires les variables

$$D_t \bar{\xi}, D_t \bar{\eta}, \dots$$

par les différences

$$D_t \bar{\xi} = \varphi(\lambda, \mu, \nu) \nabla \theta, \quad D_t \bar{\eta} = \chi(\lambda, \mu, \nu) \nabla \theta, \quad \dots$$

∇ étant considéré comme une fonction de

$$u, v, w, D_t,$$

puis de résoudre par rapport à

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots$$

les nouvelles équations ainsi formées en opérant comme si D_t était une quantité véritable.

Concevons maintenant que, dans les équations (13), présentées sous les formes

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = \int \dots \int \dots \int \dots \int \dots \int \dots \int e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)} \bar{\xi} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \\ \bar{\eta} = \int \dots \int \dots \int \dots \int \dots \int \dots \int e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)} \bar{\eta} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \end{cases}$$

on substitue les valeurs de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots$ tirées des formules (14) et (17), savoir

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = \int [\varphi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{L} + \chi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{M} + \dots] \frac{e^{st}}{(s)}, \\ \bar{\eta} = \int [\varphi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{P} + \chi(\lambda, \mu, \nu) \mathfrak{Q} + \dots] \frac{e^{st}}{(s)}, \end{cases}$$

Supposons d'ailleurs qu'à chaque forme particulière d'une fonction

$$\varpi(x, y, z)$$

des trois coordonnées

$$x, y, z$$

on fasse correspondre une fonction de x, y, z, t , désignée par la seule



par les différences

$$D_t \xi - \nabla \varphi, D_t \eta - \nabla \chi, \dots$$

et considérant ∇ comme une fonction de

$$D_x, D_y, D_z, D_t.$$

Dans l'un et l'autre cas, on devra opérer comme si les notations D_t et D_x, D_y, D_z étaient employées pour désigner de simples quantités, sauf à regarder, dans les équations définitives (14) ou (22), chacune de ces notations comme indiquant une différentiation relative à l'une des variables indépendantes t, x, y, z .

Si, comme nous l'avons supposé, la fonction de D_x, D_y, D_z, D_t , désignée par ∇ , est tellement choisie que, dans cette fonction, le coefficient de D_t^n , c'est-à-dire de la plus haute puissance de D_t , se réduise à l'unité, alors la fonction de u, v, w, s , désignée par σ , étant développée suivant les puissances descendantes de s , offrira pour premier terme s^m . On aura donc : 1° pour $m < n - 1$,

$$\int \frac{s^m}{(s)} = 0;$$

2° pour $m = n - 1$,

$$\int \frac{s^{n-1}}{(s)} = 1.$$

En conséquence la fonction de x, y, z, t , désignée par σ et déterminée par la formule (20), vérifiera, quel que soit t , l'équation aux différences partielles

$$(23) \quad \nabla \sigma = 0,$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$(24) \quad \sigma = 0, D_t \sigma = 0, D_t^2 \sigma = 0, \dots, D_t^{n-2} \sigma = 0, D_t^{n-1} \sigma = \sigma(x, y, z).$$

Cela posé, il suffira de résumer ce qui a été dit ci-dessus pour établir la proposition suivante :

THEOREME II. — Soient données entre n variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

et les variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

n équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, c'est-à-dire n équations dont les premiers membres soient des fonctions linéaires des variables principales et de leurs dérivées, les seconds membres étant nuls. Supposons d'ailleurs que, parmi les dérivées relatives au temps, celles du premier ordre, savoir

$$D_t \xi, D_t \eta, \dots$$

soient les seules qui entrent dans les premiers membres des équations données, et s'y trouvent multipliées par des facteurs constants, sans y être soumises à aucune différentiation nouvelle relative aux variables x, y, z . Nommons

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \dots$$

les valeurs initiales des variables principales ξ, η, \dots , ces variables étant assujetties à vérifier, pour une valeur nulle de t , les conditions

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \chi(x, y, z), \quad \dots$$

Soient encore

$$\nabla = 0$$

l'équation en D_x, D_y, D_z, D_t , résultant de l'élimination de ξ, η, ζ, \dots entre les équations données, et

$$s = 0$$

l'équation caractéristique en laquelle se transforme la précédente quand on y remplace

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

par

$$u, v, w, s,$$

la fonction ∇ qui sera du degré n par rapport à D_t , étant d'ailleurs choisie de manière que, dans cette fonction, le coefficient de D_t^n se réduise à l'unité. Enfin,

$$\sigma(x, y, z)$$

étant l'une quelconque des fonctions initiales

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \dots$$



désignons par ω une fonction de x, y, z, t déterminée par la formule (20), par conséquent assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t , l'équation aux différences partielles

$$\nabla \omega = 0;$$

2° à vérifier, pour une valeur nulle de t , les conditions

$$\omega = 0, \quad D_t \omega = 0, \quad D_t^2 \omega = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-2} \omega = 0, \quad D_t^{n-1} \omega = \omega(x, y, z),$$

et nommons

$$\varphi, \quad \chi, \quad \dots$$

ce que devient ω , quand on réduit $\omega(x, y, z)$ à

$$\varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \dots$$

Pour intégrer les équations linéaires données, de manière à remplir les conditions requises, il suffira d'y remplacer les dérivées

$$D_t \xi, \quad D_t \eta, \quad \dots$$

par les différences

$$D_t \xi - \nabla \varphi, \quad D_t \eta - \nabla \chi, \quad \dots$$

puis de résoudre par rapport à ξ, η, \dots les nouvelles équations ainsi obtenues, en opérant comme si D_x, D_y, D_z, D_t étaient de véritables quantités.

En raisonnant toujours de la même manière et ayant égard aux principes établis dans le § III, on établira encore la proposition suivante :

THÉORÈME III. — Soient données, entre plusieurs variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \dots$$

et les variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

des équations linéaires aux différences partielles, et à coefficients constants, en nombre égal à celui des variables principales. Concevons d'ailleurs que l'ordre des dérivées de ξ, η, \dots relatives à t puisse s'élever jusqu'à n pour la variable principale ξ , jusqu'à n' pour la variable principale η, \dots les coefficients de

$$D_t^n \xi, \quad D_t^{n'} \eta, \quad \dots$$

étant indépendants de D_x, D_y, D_z , et se réduisant en conséquence à des quantités constantes. Faisons

$$n = n' + n'' + \dots$$

et supposons les variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \dots$$

assujetties, non seulement à vérifier, quel que soit t , les équations linéaires données, mais encore à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z), & D_t \xi &= \varphi_1(x, y, z), & \dots, & & D_t^{n-1} \xi &= \varphi_{n-1}(x, y, z); \\ \eta &= \chi(x, y, z), & D_t \eta &= \chi_1(x, y, z), & \dots, & & D_t^{n'-1} \eta &= \chi_{n'-1}(x, y, z); \\ & & & & & & & \dots \end{aligned}$$

Soient encore

$$\nabla = 0$$

l'équation en D_x, D_y, D_z, D_t résultant de l'élimination de ξ, η, \dots entre les équations données, et

$$s = 0$$

l'équation caractéristique en laquelle se transforme la précédente quand on y remplace

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

par

$$u, \quad v, \quad w, \quad s,$$

la fonction ∇ , qui est du degré n par rapport à D_t , étant choisie de manière que, dans cette fonction, le coefficient de D_t^n se réduise à l'unité. Enfin, supposons la fonction ω définie, comme dans le deuxième théorème, par conséquent déterminée par la formule (20), et nommons

$$\begin{aligned} \varphi, \quad \varphi_1, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}, \\ \chi, \quad \chi_1, \quad \dots, \quad \chi_{n'-1}, \\ \dots, \quad \dots, \quad \dots \end{aligned}$$

ce que devient ω quand on réduit $\omega(x, y, z)$ à l'une des fonctions initiales

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z), \quad \varphi_1(x, y, z), \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}(x, y, z), \\ \chi(x, y, z), \quad \chi_1(x, y, z), \quad \dots, \quad \chi_{n'-1}(x, y, z), \\ \dots, \quad \dots, \quad \dots \end{aligned}$$



Pour intégrer les équations linéaires données, de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira d'y remplacer les dérivées

$$\begin{aligned}
& D_x \xi, D_x^2 \xi, \dots, D_x^n \xi, \\
& D_x \eta, D_x^2 \eta, \dots, D_x^n \eta, \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

par les différences

$$\begin{aligned}
D_x \xi - \nabla \varphi, D_x^2 \xi - \nabla(\varphi + D_x \varphi), \dots, D_x^n \xi - \nabla(\varphi_{n-1} + \dots + D_x^{n-2} \varphi + D_x^{n-1} \varphi), \\
D_x \eta - \nabla \chi, D_x^2 \eta - \nabla(\chi + D_x \chi), \dots, D_x^n \eta - \nabla(\chi_{n-1} + \dots + D_x^{n-2} \chi + D_x^{n-1} \chi), \\
\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

puis de résoudre par rapport à ξ, η, \dots les nouvelles équations ainsi obtenues, en opérant comme si

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

étaient de véritables quantités.

Les deux théorèmes qui précèdent offrent cela de remarquable, qu'ils font dépendre l'intégration d'un système quelconque d'équations linéaires, aux différences partielles et à coefficients constants, de l'évaluation de la seule fonction σ . Lorsque les variables indépendantes

$$x, y, z, t$$

sont au nombre de quatre, savoir trois coordonnées et le temps, la fonction σ , déterminée par l'équation (20), se trouve représentée en conséquence par une intégrale définie sextuple, et la valeur initiale de

$$D_t^{n-1} \sigma,$$

désignée par $\sigma(x, y, z)$, peut être une fonction quelconque des coordonnées x, y, z . Si au contraire les variables indépendantes se réduisaient à une seule t , la valeur initiale de $D_t^{n-1} \sigma$ se réduirait à une constante, et l'on pourrait faire dépendre l'intégration des équations différentielles données de l'évaluation de σ , en supposant même que dans cette évaluation l'on attribuât à la constante une valeur particulière, par exemple, la valeur 1, ce qui reviendrait à prendre pour σ la fonction principale θ . Cela posé, en généralisant la définition que nous

avons donnée de la fonction principale, on pourra désigner sous ce nom, pour un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, la fonction σ déterminée par la formule (20). La fonction principale étant ainsi définie, on pourra dire que les théorèmes II et III ramènent l'intégration d'un système quelconque d'équations linéaires, et à coefficients constants, à l'évaluation de l'intégrale définie qui représente la fonction principale.

Au reste, il est bon d'observer, d'une part, que le théorème II peut être établi directement, comme la proposition analogue énoncée dans le § I et relative à un système d'équations différentielles; d'autre part, que le théorème III se déduit immédiatement du second, par des raisonnements semblables à ceux dont nous nous sommes servis dans le § III.

Les théorèmes II et III supposent que les seconds membres des équations linéaires données se réduisent à zéro. Si ces seconds membres devenaient fonctions des variables indépendantes x, y, z, t , on pourrait appliquer à la détermination des valeurs générales de ξ, η, \dots ou le théorème I, ou la proposition suivante que l'on déduit de ce théorème combiné avec les principes établis dans le § III.

THÉORÈME IV. — Soient données entre plusieurs variables principales

$$\xi, \eta, \dots$$

et les variables indépendantes

$$x, y, z, t$$

des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, en nombre égal à celui des variables principales. Supposons d'ailleurs que, dans les premiers membres de ces équations, les dérivées des ordres les plus élevés par rapport à t soient respectivement

$$\begin{aligned}
& D_t^n \xi \text{ pour la variable principale } \xi, \\
& D_t^n \eta \text{ pour la variable principale } \eta, \dots
\end{aligned}$$

les coefficients de ces dérivées se réduisant à des quantités constantes, et les seconds membres des équations données pouvant être des fonctions quel-



conques des variables indépendantes. Enfin supposons que les valeurs initiales de

$$\begin{aligned} \xi, D_t \xi, \dots, D_t^{p-1} \xi, \\ \eta, D_t \eta, \dots, D_t^{q-1} \eta, \\ \dots, \dots, \dots \end{aligned}$$

doivent se réduire, pour $t = 0$, à des fonctions connues de x, y, z . Pour intégrer sous cette condition les équations linéaires données, on déterminera d'abord, à l'aide du théorème II, les valeurs générales de ξ, η, \dots correspondantes au cas où les seconds membres des équations données s'évanouiraient; puis à ces valeurs on ajoutera celles qui auraient la propriété de vérifier, quel que soit t , les équations données, et de vérifier pour $t = 0$ les conditions

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad D_t \xi = 0, \quad D_t^{p-1} \xi = 0, \\ \eta = 0, \quad D_t \eta = 0, \quad D_t^{q-1} \eta = 0, \\ \dots, \dots, \dots \end{aligned}$$

Ces dernières valeurs de ξ, η, \dots seront d'ailleurs de la forme

$$\xi = \int_0^t \Xi d\tau, \quad \eta = \int_0^t \Pi d\tau, \quad \dots,$$

Ξ, Π, \dots étant des fonctions de

$$x, y, z, t$$

et de la variable auxiliaire τ , déterminées par la règle suivante.

Soient

$$X, Y, \dots$$

des fonctions de x, y, z, t propres à représenter les valeurs de

$$D_t^p \xi, D_t^q \eta, \dots$$

qui vérifient les équations données quand on y remplace

$$\begin{aligned} \xi, D_t \xi, \dots, D_t^{p-1} \xi, \\ \eta, D_t \eta, \dots, D_t^{q-1} \eta, \\ \dots, \dots, \dots \end{aligned}$$

par zéro. Soient encore

$$X, Y, \dots$$

ce que deviennent

$$X, Y, \dots$$

quand on y remplace la variable indépendante t par la variable auxiliaire τ . Pour obtenir les valeurs générales de

$$\Xi, \Pi, \dots,$$

il suffira de réduire à zéro les seconds membres des équations données, et de chercher ce que deviendront alors les valeurs de

$$\xi, \eta, \dots$$

fournies par le théorème III, quand on y remplacera

$$t \text{ par } t - \tau,$$

et les valeurs initiales de

$$\begin{aligned} \xi, D_t \xi, \dots, D_t^{p-2} \xi, D_t^{p-1} \xi, \quad \eta, D_t \eta, \dots, D_t^{q-2} \eta, D_t^{q-1} \eta, \dots \\ \text{par} \\ 0, 0, \dots, 0, X, \quad 0, 0, \dots, 0, Y, \dots \end{aligned}$$

Jusqu'à présent nous avons supposé que le premier membre ∇ de l'équation produite par l'élimination de ξ, η, \dots entre les équations données, dans le cas où l'on remplace leurs seconds membres par zéro, était une fonction entière de D_x, D_y, D_z, D_t , dans laquelle on pouvait réduire le coefficient de D_t^p à l'unité. Cette réduction est en effet possible dans l'hypothèse que nous avons admise, savoir, lorsque, dans les équations données, les dérivées des ordres les plus élevés par rapport à t se trouvent multipliées par des quantités constantes, sans être soumises à des différentiations relatives aux variables x, y, z . Considérons maintenant le cas général où cette réduction ne pourrait s'effectuer sans que ∇ cessât d'être une fonction entière de D_x, D_y, D_z , et désignons par K la fonction de cette espèce qui représente généralement le coefficient de D_t^p , dans le développement de ∇ . Si l'on nomme $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ce que devient K, ∇ , quand on y remplace D_x, D_y, D_z, D_t par u, v, w, s ; si d'ailleurs on continue de nommer fonction principale une fonc-



tion σ de x, y, z, t définie par l'équation (20), on trouvera dans le cas général : 1° pour $m < n - 1$,

$$\int \frac{s^m}{((8))} = 0;$$

2° pour $m = n - 1$,

$$\int \frac{s^{n-1}}{((8))} = \frac{1}{\partial \kappa};$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{\partial \kappa s^{n-1}}{((8))} = 1;$$

et par suite la fonction principale, qui vérifiera toujours, quel que soit t , l'équation (23), vérifiera, pour une valeur nulle de t , non plus les conditions (24), mais les suivantes :

$$(25) \quad \sigma = 0, \quad D_t \sigma = 0, \quad D_t^2 \sigma = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-2} \sigma = 0, \quad \kappa D_t^{n-1} \sigma = \sigma(x, y, z).$$

Or ces conditions, jointes à l'équation (23), ne suffiront pas pour déterminer complètement la fonction principale σ . Au reste, la seule considération de la formule (20) conduit à une conclusion du même genre. En effet, lorsque le coefficient de D_t^n dans ∇ , savoir κ , sera fonction de D_x, D_y, D_z , le coefficient de s^n dans s , savoir

$$\kappa,$$

sera fonction de u, v, w et l'intégrale sextuple, comprise dans le second membre de la formule (20), ne sera plus généralement une intégrale complètement déterminée, attendu, par exemple, que la fonction sous le signe \int deviendra infinie pour les valeurs de u, v, w qui vérifieraient l'équation $\kappa = 0$. Mais on tirera de la formule (20)

$$(26) \quad \kappa \sigma = \int \int \int \int \int \int e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st} \sigma(\lambda, \mu, \nu) \frac{\partial \kappa}{((8))} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{dv}{2\pi} \frac{dw}{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi};$$

et cette dernière sera propre à fournir une valeur complètement déterminée de la fonction $\kappa \sigma$. Si, après avoir calculé la fonction Π , à l'aide

de l'équation

$$(27) \quad \Pi = \int \int \int \int \int \int e^{u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st} \sigma(\lambda, \mu, \nu) \frac{\partial \kappa}{((8))} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{dv}{2\pi} \frac{dw}{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi},$$

on pose généralement

$$(28) \quad \kappa \sigma = \Pi,$$

on pourra prendre, pour valeur générale de la fonction principale σ , l'une quelconque de celles qui vérifieront la formule (28). A chacune d'elles correspondra un système de valeurs de

$$\xi, \quad \eta, \quad \dots$$

que l'on pourra obtenir à l'aide des théorèmes II, III ou IV, et qui vérifiera toutes les conditions énoncées dans ces mêmes théorèmes.

Pour montrer une application des principes que nous venons d'exposer, concevons qu'il s'agisse d'intégrer les équations simultanées

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

ou, ce qui revient au même, les équations

$$D_x D_t \xi + D_y \eta = 0, \quad D_y D_t \eta - D_x \xi = 0,$$

de manière que l'on ait, pour $t = 0$,

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y).$$

On trouvera, dans ce cas,

$$\nabla = D_x D_y (D_t^2 + 1), \quad s = uv(s^2 + 1), \\ \Pi = D_x D_y, \quad \partial \kappa = uv;$$

par suite, la fonction principale σ , assujettie : 1° à vérifier, quel que soit t , l'équation

$$D_x D_y (D_t^2 + 1) \sigma = 0,$$

2° à vérifier, pour $t = 0$, les conditions

$$\sigma = 0, \quad D_x D_y D_t \sigma = \sigma(x, y),$$



sera définie par la formule

$$\begin{aligned} \varpi &= \mathcal{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda(x-\lambda)+\nu(y-\mu)+st)}}{uv((s^2+t))} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{ds}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sin t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda(x-\lambda)+\nu(y-\mu))\sqrt{-1}} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda}{2\pi u} \frac{d\nu}{2\pi v} \frac{ds}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \end{aligned}$$

qui n'en déterminera pas complètement la valeur et pourra être l'une quelconque de celles qui, s'évanouissant avec t , vérifient l'équation

$$\begin{aligned} D_x D_y \varpi &= \cos t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda(x-\lambda)+\nu(y-\mu))\sqrt{-1}} \varpi(\lambda, \mu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{ds}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sin t \varpi(x, y). \end{aligned}$$

Soient pareillement φ, χ deux fonctions de x, y, t qui, s'évanouissant avec t , vérifient les équations

$$D_x D_y \varphi = \sin t \varphi(x, y), \quad D_x D_y \chi = \sin t \chi(x, y).$$

Les valeurs générales de ξ, η , que l'on déduira des formules

$$D_x D_t \xi + D_y \eta = D_x \nabla \varphi, \quad D_y D_t \eta - D_x \xi = D_y \nabla \chi,$$

en opérant comme si D_x, D_y, D_t, ∇ désignaient de véritables quantités, seront

$$\xi = D_y (D_x D_t \varphi - D_y \chi), \quad \eta = D_x (D_y D_t \chi + D_x \varphi),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} \xi &= \cos t \varphi(x, y) - \sin t D_y \int \chi(x, y) dx - X(y, t), \\ \eta &= \cos t \chi(x, y) + \sin t D_x \int \varphi(x, y) dy + \Phi(x, t), \end{aligned}$$

les intégrations relatives aux variables x, y étant effectuées à partir de valeurs déterminées de ces variables, par exemple, à partir de

$$x = 0, \quad y = 0,$$

et $\Phi(x, t), X(y, t)$ désignant deux fonctions arbitraires de x, t ou de y, t , assujetties à la seule condition de s'évanouir pour une valeur nulle de t . Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les valeurs précé-

dentes de ξ, η vérifient les deux équations données aux différences partielles, et se réduisent respectivement à

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y),$$

quand on y pose $t = 0$.

52.

C. R., t. VIII, p. 931 (17 juin 1839). — Suite.

§ V. — Application des principes exposés dans le paragraphe précédent à l'intégration des équations qui représentent les mouvements infiniment petits de divers points matériels.

Lorsque l'on recherche les lois des mouvements infiniment petits de divers points matériels dont le nombre est limité ou illimité, les équations différentielles, ou aux différences partielles, que fournissent les principes de la Mécanique, ne contiennent généralement d'autres dérivées relatives au temps que des dérivées du second ordre, dont les coefficients se réduisent à l'unité. Il est donc utile d'appliquer en particulier les théorèmes III et IV du paragraphe précédent au cas où l'on aurait

$$n' = n'' = n''' = \dots = 2.$$

Si dans ce cas on désigne par n , non plus la somme

$$n' + n'' + n''' + \dots,$$

mais le nombre des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

on obtiendra, au lieu du théorème III du § IV, la proposition suivante.

THEOREME. — Soient données entre n variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$



et les variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

n équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. qui renferment, avec les variables principales et leurs dérivées de divers ordres obtenues par les différentiations relatives aux coordonnées *x, y, z*, les dérivées du second ordre relatives au temps *t*, savoir

$$D_t^2 \xi, D_t^2 \eta, D_t^2 \zeta, \dots,$$

les coefficients de ces dernières dérivées étant égaux à l'unité. Supposons d'ailleurs les variables principales ξ, η, ζ, \dots assujetties, non seulement à vérifier, quel que soit *t*, les équations données, mais aussi à vérifier, pour *t* = 0, les conditions

$$(1) \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), & \eta = \chi(x, y, z), & \zeta = \psi(x, y, z), & \dots \\ D_t \xi = \Phi(x, y, z), & D_t \eta = X(x, y, z), & D_t \zeta = \Psi(x, y, z), & \dots \end{cases}$$

Soient encore

$$(2) \quad \nabla = 0$$

l'équation en D_x, D_y, D_z, D_t résultant de l'élimination de ξ, η, ζ, \dots entre les équations données, et

$$(3) \quad s = 0$$

l'équation caractéristique en laquelle se transforme la précédente, quand on y remplace les notations

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

par

$$u = v\sqrt{-1}, \quad v = w\sqrt{-1}, \quad w = s\sqrt{-1}, \quad s,$$

la fonction ∇ étant du degré $2n$ par rapport à D_t , et choisie de manière que le coefficient de D_t^{2n} se réduise à l'unité. Enfin soit

$$\varpi(x, y, z)$$

l'une quelconque des fonctions

$$\begin{aligned} & \varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z), \quad \dots \\ & \Phi(x, y, z), \quad X(x, y, z), \quad \Psi(x, y, z), \quad \dots \end{aligned}$$

Nommons ϖ la fonction principale déterminée par la formule

$$(4) \quad \varpi = \mathcal{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{u\lambda + v\mu + w\zeta + st}}{((S))} \varpi(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \frac{d\tau}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi},$$

par conséquent une fonction assujettie : ϖ à vérifier, quel que soit *t*, l'équation aux différences partielles

$$(5) \quad \nabla \varpi = 0;$$

ϖ à vérifier, pour *t* = 0, les conditions

$$(6) \quad \varpi = 0, \quad D_t \varpi = 0, \quad D_t^2 \varpi = 0, \quad \dots, \quad D_t^{n-2} \varpi = 0, \quad D_t^{n-1} \varpi = \varpi(x, y, z);$$

et désignons par

$$\varphi, \chi, \psi, \dots, \quad \Phi, X, \Psi, \dots$$

ce que devient ϖ quand on réduit $\varpi(x, y, z)$ à l'une des fonctions

$$\begin{aligned} & \varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z), \quad \dots; \\ & \Phi(x, y, z), \quad X(x, y, z), \quad \Psi(x, y, z), \quad \dots \end{aligned}$$

Pour intégrer les équations linéaires données, de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira d'y remplacer les dérivées du second ordre

$$D_t^2 \xi, D_t^2 \eta, D_t^2 \zeta, \dots$$

par les différences

$$D_t^2 \xi - \nabla(\Phi + D_t \varphi), \quad D_t^2 \eta - \nabla(X + D_t \chi), \quad D_t^2 \zeta - \nabla(\Psi + D_t \psi), \quad \dots,$$

puis de résoudre par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

les nouvelles équations ainsi obtenues, en opérant comme si les notations

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

désignaient des quantités véritables.

Applications. — Les équations qui représentent les mouvements in-



finiment petits d'un système homogène de molécules sont de la forme

$$\begin{aligned} (L - D_t^2)\xi + R\eta + Q\zeta &= 0, \\ R\xi + (M - D_t^2)\eta + P\zeta &= 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_t^2)\zeta &= 0, \end{aligned}$$

ξ, η, ζ étant les déplacements d'une molécule mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et les lettres

$$L, M, N, P, Q, R$$

désignant des fonctions entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z.$$

Or concevons que l'on veuille intégrer ces équations de manière à vérifier, pour $t = 0$, les six conditions

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z), & \eta &= \chi(x, y, z), & \zeta &= \psi(x, y, z), \\ D_t \xi &= \Phi(x, y, z), & D_t \eta &= X(x, y, z), & D_t \zeta &= \Psi(x, y, z), \end{aligned}$$

par conséquent, en supposant connues les valeurs initiales des déplacements et des vitesses de chaque molécule suivant des directions parallèles aux axes des x, y, z . En appliquant le théorème ci-dessus énoncé à la recherche des valeurs générales de ξ, η, ζ , et nommant

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$$

ce que deviennent

$$L, M, N, P, Q, R$$

quand on y remplace

$$D_x, D_y, D_z \text{ par } u, v, w,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \nabla &= (D_x^2 - L)(D_y^2 - M)(D_z^2 - N) - P^2(D_x^2 - L) - Q^2(D_y^2 - M) - R^2(D_z^2 - N) - 2PQR, \\ s &= (s^2 - \mathcal{L})(s^2 - \mathcal{M})(s^2 - \mathcal{N}) - \mathcal{P}^2(s^2 - \mathcal{L}) - \mathcal{Q}^2(s^2 - \mathcal{M}) - \mathcal{R}^2(s^2 - \mathcal{N}) - 2\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}. \end{aligned}$$

Cela posé, soient

∞

la fonction principale, déterminée par l'équation (4), et

$$\varphi, \chi, \psi, \Phi, X, \Psi$$

ce que devient cette fonction principale, quand on remplace

$$\infty(x, y, z)$$

par l'une des fonctions initiales

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \psi(x, y, z), \Phi(x, y, z), X(x, y, z), \Psi(x, y, z).$$

Pour intégrer les équations données, de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira de résoudre par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta$$

les équations présentées sous les formes

$$\begin{aligned} (D_t^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta &= \nabla(\Phi + D_t \varphi), \\ -R\xi + (D_t^2 - M)\eta - P\zeta &= \nabla(X + D_t \chi), \\ -Q\xi - P\eta + (D_t^2 - N)\zeta &= \nabla(\Psi + D_t \psi), \end{aligned}$$

en opérant comme si D_x, D_y, D_z, D_t étaient de véritables quantités. Alors, en posant, pour abrégé,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= (D_t^2 - M)(D_t^2 - N) - P^2, & \mathfrak{P} &= P(D_t^2 - L) + QR, \\ \mathfrak{M} &= (D_t^2 - N)(D_t^2 - L) - Q^2, & \mathfrak{Q} &= Q(D_t^2 - M) + RP, \\ \mathfrak{N} &= (D_t^2 - L)(D_t^2 - M) - R^2, & \mathfrak{R} &= R(D_t^2 - N) + PQ, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \xi &= D_t(\mathfrak{C}\varphi + R\chi + \mathfrak{Q}\psi) + (\mathfrak{C}\Phi + \mathfrak{R}X + \mathfrak{Q}\Psi), \\ \eta &= D_t(\mathfrak{M}\varphi + \mathfrak{M}\chi + \mathfrak{P}\psi) + (\mathfrak{M}\Phi + \mathfrak{M}X + \mathfrak{P}\Psi), \\ \zeta &= D_t(\mathfrak{N}\varphi + \mathfrak{P}\chi + \mathfrak{R}\psi) + (\mathfrak{N}\Phi + \mathfrak{P}X + \mathfrak{R}\Psi). \end{aligned}$$

Telles sont effectivement, sous leur forme la plus simple, les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.

Considérons maintenant deux systèmes de molécules qui se pé-



nètrant mutuellement. Les équations de leurs mouvements infiniment petits seront de la forme

$$\begin{aligned} (L - D_x^2)\xi + R\eta + Q\zeta + L_x\xi_x + R_x\eta_x + Q_x\zeta_x &= 0, \\ R\xi + (M - D_y^2)\eta + P\zeta + R_x\xi_x + M_x\eta_x + P_x\zeta_x &= 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_z^2)\zeta + Q_x\xi_x + P_x\eta_x + N_x\zeta_x &= 0, \\ L\xi + R\eta + Q\zeta + (L_y - D_x^2)\xi_x + R_y\eta_x + Q_y\zeta_x &= 0, \\ R\xi + M\eta + P\zeta + R_x\xi_x + (M_y - D_y^2)\eta_x + P_y\zeta_x &= 0, \\ Q\xi + P\eta + N\zeta + Q_x\xi_x + P_x\eta_x + (N_z - D_z^2)\zeta_x &= 0, \end{aligned}$$

ξ, η, ζ ou ξ, η, ζ étant les déplacements d'une molécule du premier ou du second système mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et les lettres

$$L, M, N, P, Q, R, L_x, M_x, \dots$$

indiquant des fonctions entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z.$$

Or supposons que les coefficients des différents termes proportionnels à D_x, D_y, D_z ou à leurs puissances soient, dans ces mêmes fonctions, regardés comme constants, ce qu'on peut admettre, au moins dans une première approximation, lorsque chaque système de molécule est homogène, et que le rayon de la sphère d'activité d'une molécule est très petit. Concevons d'ailleurs que l'on veuille intégrer les six équations données, dont chacune est du second ordre, de manière à vérifier, pour $t=0$, les douze conditions

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z), & \eta &= \chi(x, y, z), & \zeta &= \psi(x, y, z), \\ \xi_x &= \varphi_x(x, y, z), & \eta_x &= \chi_x(x, y, z), & \zeta_x &= \psi_x(x, y, z), \\ D_x \xi &= \Phi(x, y, z), & D_x \eta &= X(x, y, z), & D_x \zeta &= \Psi(x, y, z), \\ D_x \xi_x &= \Phi_x(x, y, z), & D_x \eta_x &= X_x(x, y, z), & D_x \zeta_x &= \Psi_x(x, y, z); \end{aligned}$$

par conséquent, en supposant connues les valeurs initiales des déplacements et des vitesses de chaque molécule, suivant des directions

parallèles aux axes des x, y, z . En appliquant le théorème ci-dessus énoncé à la recherche des valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta, \xi_x, \eta_x, \zeta_x,$$

et nommant

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{L}_x, \mathcal{M}_x, \dots, \mathcal{Q}_x, \mathcal{R}_x$$

ce que deviennent

$$L, M, N, P, Q, R, L_x, M_x, \dots, Q_x, R_x$$

quand on y remplace

$$D_x, D_y, D_z, \text{ par } \alpha, \nu, \omega,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \nabla &= (D_x^2 - L)(D_y^2 - M)(D_z^2 - N)(D_x^2 - L_x)(D_y^2 - M_x)(D_z^2 - N_x) \dots, \\ \delta &= (s^2 - \mathcal{L})(s^2 - \mathcal{M})(s^2 - \mathcal{N})(s^2 - \mathcal{L}_x)(s^2 - \mathcal{M}_x)(s^2 - \mathcal{N}_x) \dots \end{aligned}$$

Cela posé, soient

□

la fonction principale déterminée par l'équation (4), et

$$\begin{aligned} \varphi, \chi, \psi, \varphi_x, \chi_x, \psi_x, \\ \Phi, X, \Psi, \Phi_x, X_x, \Psi_x \end{aligned}$$

ce que devient cette fonction principale quand on remplace

$$\square(x, y, z)$$

par l'une des fonctions initiales

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \psi(x, y, z), \varphi_x(x, y, z), \chi_x(x, y, z), \psi_x(x, y, z), \\ \Phi(x, y, z), X(x, y, z), \Psi(x, y, z), \Phi_x(x, y, z), X_x(x, y, z), \Psi_x(x, y, z). \end{aligned}$$

Pour intégrer les équations données de manière à remplir toutes les conditions requises, il suffira de résoudre, par rapport à

$$\xi, \eta, \zeta, \xi_x, \eta_x, \zeta_x,$$



ces équations présentées sous les formes

$$\begin{aligned}
(D_x^2 - L)\xi - R\eta - Q\zeta - L_x\xi - R_x\eta - Q_x\zeta &= \nabla(\Phi + D_t\varphi), \\
-R\xi + (D_x^2 - M)\eta - P\zeta - R_x\xi - M_x\eta - P_x\zeta &= \nabla(X + D_t\chi), \\
-Q\xi - P\eta + (D_x^2 - N)\zeta - Q_x\xi - P_x\eta - N_x\zeta &= \nabla(\Psi + D_t\psi), \\
-L\xi - R\eta - Q\zeta + (D_x^2 - L_x)\xi - R_x\eta - Q_x\zeta &= \nabla(\Phi + D_t\varphi), \\
-R\xi - M\eta - P\zeta - R_x\xi + (D_x^2 - M_x)\eta - P_x\zeta &= \nabla(X + D_t\chi), \\
-Q\xi - P\eta - N\zeta - Q_x\xi - P_x\eta + (D_x^2 - N_x)\zeta &= \nabla(\Psi + D_t\psi),
\end{aligned}$$

en opérant comme si

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

étaient de véritables quantités. On trouvera de cette manière

$$\begin{aligned}
\xi &= \epsilon(\Phi + D_t\varphi) + u(X + D_t\chi) + e(\Psi + D_t\psi) + \epsilon_x(\Phi + D_t\varphi) + u_x(X + D_t\chi) + e_x(\Psi + D_t\psi), \\
\eta &= u(\Phi + D_t\varphi) + m(X + D_t\chi) + p(\Psi + D_t\psi) + u_x(\Phi + D_t\varphi) + m_x(X + D_t\chi) + p_x(\Psi + D_t\psi), \\
\zeta &= e(\Phi + D_t\varphi) + p(X + D_t\chi) + u(\Psi + D_t\psi) + e_x(\Phi + D_t\varphi) + p_x(X + D_t\chi) + u_x(\Psi + D_t\psi), \\
\xi_x &= \epsilon(\Phi + D_t\varphi) + u(X + D_t\chi) + e(\Psi + D_t\psi) + \epsilon_x(\Phi + D_t\varphi) + u_x(X + D_t\chi) + e_x(\Psi + D_t\psi), \\
\eta_x &= u(\Phi + D_t\varphi) + m(X + D_t\chi) + p(\Psi + D_t\psi) + u_x(\Phi + D_t\varphi) + m_x(X + D_t\chi) + p_x(\Psi + D_t\psi), \\
\zeta_x &= e(\Phi + D_t\varphi) + p(X + D_t\chi) + u(\Psi + D_t\psi) + e_x(\Phi + D_t\varphi) + p_x(X + D_t\chi) + u_x(\Psi + D_t\psi).
\end{aligned}$$

les lettres

$$\epsilon, m, u, p, e, u, \epsilon_x, m_x, \dots, \dots, e_x, u_x$$

indiquant des fonctions entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

et la forme de ces nouvelles fonctions se déduisant immédiatement de celle des fonctions représentées par

$$L, M, N, P, Q, R, L_x, M_x, \dots, \dots, Q_x, R_x$$

53.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les mouvements infiniment petits dont les équations présentent une forme indépendante de la direction des trois axes coordonnés, supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes.*

C.-R., t. VIII, p. 937 (17 juin 1839).

Considérations générales.

Comme on l'a vu dans les précédents Mémoires, les mouvements infiniment petits, d'un ou de plusieurs systèmes de molécules, peuvent être représentés par des équations linéaires aux différences partielles entre trois variables principales, savoir, les déplacements d'une molécule mesurés parallèlement à trois axes coordonnés rectangulaires, et quatre variables indépendantes, savoir, les coordonnées et le temps. Il y a plus : dans ces équations, les coefficients des variables principales et de leurs dérivées deviennent constants, lorsque l'on considère un système unique et homogène de molécules, ou bien encore, lorsque l'on considère deux systèmes homogènes de molécules, et que l'on s'arrête à une première approximation. Dans l'un ou l'autre cas, les coefficients dont il s'agit, et par conséquent la forme des équations linéaires dépendront en général, non seulement de la nature du système ou des systèmes moléculaires, mais encore de la direction des axes coordonnés. Néanmoins, il n'en est pas toujours ainsi. La constitution du système ou des systèmes de molécules donnés peut être telle que les coefficients renfermés dans les équations des mouvements infiniment petits ne soient pas altérés quand on fait tourner d'une manière quelconque les trois axes coordonnés autour de l'origine; et alors il est clair que la propagation de ces mouvements devra s'effectuer en tout sens suivant les mêmes lois. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque le son se propage dans un gaz ou dans un liquide. C'est ce qui arrivera encore si, l'un des systèmes de molécules donnés étant le



fluide éthéré, l'autre système compose ce que dans la théorie de la lumière nous appelons un corps *isophane*. Ce n'est pas tout : la constitution du système, ou des systèmes de molécules donnés, peut être telle que les coefficients renfermés dans les équations des mouvements infiniment petits ne soient pas altérés, quand, l'un des axes coordonnés demeurant fixe, on fait tourner les deux autres autour du premier; et alors il est clair que la propagation du mouvement devra s'effectuer en tous sens suivant les mêmes lois, non plus autour d'un point quelconque, mais seulement autour de tout axe parallèle à l'axe fixe. C'est ce qui arrivera, par exemple, si, le premier système de molécules étant le fluide éthéré, l'autre système compose ce qu'on nomme dans la théorie de la lumière un cristal à un seul axe optique. Il est donc important d'examiner ce que deviendront les équations des mouvements infiniment petits d'un ou de deux systèmes homogènes de molécules, quand elles acquerront la propriété de ne pouvoir être altérées, tandis que l'on fera tourner les trois axes coordonnés autour de l'origine, ou bien encore, deux de ces axes autour du troisième supposé fixe. J'ai déjà traité cette question, en considérant un seul système de molécules : 1° pour le cas où les équations sont homogènes, dans les *Exercices de Mathématiques*; 2° pour le cas général, dans un Mémoire relatif à la *Théorie de la Lumière*, et lithographié sous la date d'août 1836. Mais d'une part ce dernier Mémoire, tiré à un petit nombre d'exemplaires, est assez rare aujourd'hui, et d'ailleurs, en réfléchissant de nouveau sur la même question, je suis parvenu à rendre la solution plus simple. J'ai donc tout lieu d'espérer que les géomètres accueilleront encore avec intérêt ce nouveau Mémoire, qui permettra d'établir et d'exposer facilement quelques-unes des théories les plus délicates de la *Physique mathématique*.

Parmi les quatre paragraphes dont le Mémoire se compose, le premier est consacré au développement de quelques théorèmes relatifs à la transformation des coordonnées rectangulaires, le second à la recherche des conditions nécessaires pour qu'une fonction de deux ou de trois coordonnées rectangulaires reste indépendante de la direction

des axes coordonnés; et c'est la connaissance de ces conditions qui me conduit, dans les paragraphes suivants, à la solution de la question ci-dessus indiquée.

54.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécules à un autre, chacun de ces deux systèmes étant supposé homogène et tellement constitué que la propagation des mouvements infiniment petits s'y effectue en tous sens suivant les mêmes lois.*

C. R., t. VIII, p. 985 (24 juin 1839).

Considérations générales.

Après avoir montré, dans la dernière séance, ce que deviennent les équations des mouvements infiniment petits d'un ou de deux systèmes de molécules, quand elles prennent une forme indépendante de la position des axes coordonnés, je me proposais de présenter à l'Académie les formules auxquelles se réduisent, dans ce cas particulier, les intégrales générales insérées dans le dernier *Compte rendu*. Mais, comme chacun peut aisément effectuer cette réduction sur laquelle, d'ailleurs, je pourrai revenir soit dans un autre Mémoire, soit dans le nouvel Ouvrage qui est maintenant sous presse, et qui a pour titre : *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, j'ai pensé que, pour répondre au désir des physiciens et des géomètres, il serait mieux de traiter dès à présent les questions sur lesquelles la lettre de M. Mac-Cullagh a rappelé leur attention lundi dernier, et d'appliquer les théories générales, exposées dans mes précédents Mémoires, à la recherche des lois suivant lesquelles un mouvement simple, propagé dans un système homogène de molécules, se trouve réfléchi ou réfracté par la surface qui sépare ce premier système du second. Pour fixer les idées, je consi-



dère spécialement aujourd'hui le cas où chacun des systèmes donnés est du nombre de ceux dans lesquels les équations des mouvements infiniment petits prennent une forme indépendante de la direction des axes coordonnés, et dans lesquels, en conséquence, la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Je suppose encore qu'on peut, sans erreur sensible, réduire les équations dont il s'agit à des équations homogènes, comme on le fait dans la théorie de la lumière, lorsqu'on néglige la dispersion. Enfin, je considère un mouvement simple dans lequel la densité reste invariable. Cela posé, en joignant aux équations des mouvements infiniment petits les équations de conditions relatives à la surface de séparation de deux systèmes, obtenues par les méthodes exposées dans un précédent Mémoire, j'établis les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements infiniment petits. Ces lois sont de deux espèces. Les unes, indépendantes de la forme des équations de condition, ont été déjà développées dans un Mémoire antérieur sur la réflexion et la réfraction de la lumière. Elles sont relatives aux changements qu'éprouvent les épaisseurs des ondes planes et les directions de leurs plans, quand on passe des ondes incidentes aux ondes réfléchies ou réfractées. Les autres lois dépendent de la forme des équations de condition, et se rapportent aux changements que les amplitudes des vibrations des molécules, et les paramètres angulaires, propres à déterminer les positions des plans qui terminent ces ondes, éprouvent en vertu de la réflexion et de la réfraction. Elles sont exprimées par des équations finies qui renferment, avec les angles d'incidence et de réfraction, non seulement les amplitudes et les paramètres angulaires relatifs à chaque espèce d'ondes, mais encore deux constantes correspondantes à chaque milieu. Lorsque l'on suppose ces équations finies applicables à la théorie de la lumière, il suffit de réduire à l'unité la seconde des deux constantes dont nous venons de parler, et d'attribuer à l'autre une valeur réelle, pour obtenir les formules de Fresnel relatives à la réflexion et à la réfraction opérées par la première ou la seconde surface des corps transparents; et alors il existe toujours un angle de polarisation complète.

c'est-à-dire un angle d'incidence pour lequel la lumière est complètement polarisée dans le plan de réflexion. Lorsqu'en réduisant la seconde constante à l'unité, on attribue à la première une valeur imaginaire, on obtient les formules dont il est question dans une lettre adressée de Prague à M. Libri, et insérée dans le *Compte rendu* de la séance du 2 mars 1836, formules dont plusieurs ne diffèrent pas au fond de celles que M. Mac-Cullagh a données dans un article publié sous la date du 24 octobre de la même année. Enfin, lorsqu'en supposant la première constante réelle ou imaginaire, on suppose la seconde différente de l'unité, alors, en considérant les formules auxquelles on arrive comme applicables à la théorie de la lumière, on trouve, dans la réflexion opérée sur la surface d'un corps transparent, une polarisation qui demeure incomplète sous tous les angles d'incidence, comme l'est effectivement la polarisation produite par le diamant, et l'on obtient, pour représenter les rayons réfléchis ou réfractés par un corps opaque, des formules distinctes de celles que j'avais trouvées en 1836. Des expériences faites avec beaucoup de soin pourront seules nous apprendre si les phénomènes, déjà représentés avec une assez grande précision par les anciennes formules, le seront mieux encore par les autres.

Un résultat de mon analyse qui paraît digne d'être remarqué, c'est que, dans le cas où la polarisation par réflexion devient complète, la dilatation du volume de l'éther en un point donné, différenciée deux fois de suite par rapport au temps, offre une dérivée du second ordre égale à zéro, dans chacun des milieux que l'on considère. Donc, si cette dilatation et sa dérivée de premier ordre s'évanouissent partout à l'origine du mouvement, excepté dans une très petite portion de l'espace, elles s'évanouiront encore au bout d'un temps quelconque. Il en résulte aussi que, dans l'éther considéré isolément ou renfermé dans des milieux qui polarisent complètement la lumière, les vibrations dirigées dans le sens des rayons lumineux ont une vitesse de propagation nulle. On peut donc admettre que les vibrations de cette espèce ne se propagent pas, et demeurent circonscrites dans l'espace où elles ont pris naissance.



Quoi qu'il en soit, la bienveillance avec laquelle les géomètres et les physiciens ont accueilli mes précédents Mémoires m'encourage à leur présenter avec confiance ce nouveau travail, dans lequel se trouve traité, pour la première fois, par des méthodes rigoureuses substituées à des formules empiriques ou à des hypothèses plus ou moins gratuites, le problème de la réflexion et de la réfraction des mouvements infiniment petits.

Pour ne pas trop allonger ce Mémoire, je me bornerai aujourd'hui à donner une idée succincte de la marche que j'ai suivie, et à établir les principales formules dont les conséquences seront développées dans un prochain article.

§ I^{er}. — *Équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules. Réduction de ces équations dans le cas où elles deviennent indépendantes de la direction des axes coordonnés.*

Pour obtenir, sous la forme la plus simple, les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules, il suffit de réduire à zéro les variables ξ , η , ζ , dans les équations (6) de la page 814 (séance du 27 mai) ⁽¹⁾, qui deviennent alors

$$(1) \quad \begin{cases} (L - D_x^2)\xi + R\eta + Q\zeta = 0, \\ R\xi + (M - D_y^2)\eta + P\zeta = 0, \\ Q\xi + P\eta + (N - D_z^2)\zeta = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations

$$\xi, \eta, \zeta$$

sont les trois déplacements d'une molécule, considérés comme fonctions du temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z ; tandis que

$$L, M, N, P, Q, R$$

peuvent être censés représenter des fonctions entières des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z.$$

Seulement, dans le cas général, ces fonctions entières, développées

⁽¹⁾ *Œuvres de C.* — S. I, t. IV, p. 333.

suivant les puissances ascendantes de D_x, D_y, D_z , sont composées d'un nombre infini de termes.

Dans le cas où les équations (1) prennent une forme indépendante de la direction des axes coordonnés (voir l'article inséré dans le *Compte rendu* de la séance du 17 juin, et aussi le *Mémoire sur la Théorie de la lumière*, lithographié, sous la date d'août 1836, p. 55 et 59), on a

$$\begin{aligned} L &= E + FD_x^2, & M &= E + FD_y^2, & N &= E + FD_z^2, \\ P &= FD_y D_z, & Q &= FD_z D_x, & R &= FD_x D_y, \end{aligned}$$

E, F désignant deux fonctions entières du trinôme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2;$$

et par suite

$$(2) \quad (D_x^2 - E)\xi = FD_x v, \quad (D_y^2 - E)\eta = FD_y v, \quad (D_z^2 - E)\zeta = FD_z v,$$

v désignant, pour le point (x, y, z) , la dilatation du volume déterminée par la formule

$$(3) \quad v = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta,$$

de laquelle on tire, en la combinant avec les équations (2),

$$(4) \quad [D_x^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) F] v = 0.$$

Soient d'ailleurs

$$a, b, c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe, prolongé dans un certain sens, avec les demi-axes des x, y, z positives, et v le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à cet axe. On aura

$$(5) \quad v = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

et l'on tirera des formules (2)

$$(6) \quad (D_x^2 - E)v = (aD_x + bD_y + cD_z) F v,$$

puis de celle-ci, combinée avec la formule (4),

$$(7) \quad (D_x^2 - E)[D_x^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) F] v = 0.$$



Lorsque la dilatation ν et sa dérivée du premier ordre relative à t , savoir $D_t \nu$, sont nulles à l'origine du mouvement, elles sont toujours nulles, en vertu de la formule (4). Alors la densité du système de molécules donné reste invariable pendant la durée du mouvement; et c'est ce qui paraît avoir lieu à l'égard des mouvements infiniment petits de l'éther qui, dans des corps isophanes, occasionnent la sensation de la lumière. Alors aussi la formule (3) donne

$$(8) \quad D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta = 0,$$

et les formules (2) se réduisent à

$$(9) \quad (D_t^2 - E) \xi = 0, \quad (D_t^2 - E) \eta = 0, \quad (D_t^2 - E) \zeta = 0.$$

Lorsque les équations des mouvements infiniment petits sont homogènes, E devient proportionnel à $D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$, et F se réduit à une constante. On peut donc alors supposer

$$(10) \quad E = \epsilon (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)$$

et

$$(11) \quad F = \epsilon f,$$

ϵ, f désignant deux constantes réelles. Cela posé, les formules (2), (4) et (7) donneront

$$(12) \quad \begin{cases} [D_t^2 - \epsilon (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \xi = \epsilon f D_x \nu, \\ [D_t^2 - \epsilon (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \eta = \epsilon f D_y \nu, \\ [D_t^2 - \epsilon (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \zeta = \epsilon f D_z \nu; \end{cases}$$

$$(13) \quad [D_t^2 - \epsilon (1 + f) (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \nu = 0,$$

$$(14) \quad [D_t^2 - \epsilon (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] [D_t^2 - \epsilon (1 + f) (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)] \nu = 0.$$

§ II. — *Équations symboliques des mouvements infiniment petits. Mouvements simples.*

Les équations (1), (2), (3), (4), (7), ... du paragraphe précédent se trouvent vérifiées, si l'on prend pour

$$\xi, \eta, \zeta, \nu, \bar{\nu}$$

les parties réelles de variables imaginaires

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\nu}, \bar{\nu}$$

propres à vérifier des équations de même forme. Ces nouvelles variables sont ce qu'on peut appeler les *déplacements symboliques*, mesurés parallèlement aux axes coordonnés ou à un axe fixe, et la *dilatation symbolique* du volume. Les nouvelles équations dont il s'agit peuvent être pareillement désignées sous le nom d'*équations symboliques*. Dans le cas où les équations des mouvements infiniment petits deviendront indépendantes de la direction des axes coordonnés, on aura, en vertu des formules (2) et (3) du § I^{er},

$$(1) \quad (D_t^2 - E) \bar{\xi} = F D_x \bar{\nu}, \quad (D_t^2 - E) \bar{\eta} = F D_y \bar{\nu}, \quad (D_t^2 - E) \bar{\zeta} = F D_z \bar{\nu};$$

la valeur de $\bar{\nu}$ étant

$$(2) \quad \bar{\nu} = D_x \bar{\xi} + D_y \bar{\eta} + D_z \bar{\zeta}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \quad \begin{cases} (D_t^2 - E) \bar{\xi} = F D_x (D_x \bar{\xi} + D_y \bar{\eta} + D_z \bar{\zeta}), \\ (D_t^2 - E) \bar{\eta} = F D_y (D_x \bar{\xi} + D_y \bar{\eta} + D_z \bar{\zeta}), \\ (D_t^2 - E) \bar{\zeta} = F D_z (D_x \bar{\xi} + D_y \bar{\eta} + D_z \bar{\zeta}). \end{cases}$$

Un moyen fort simple d'obtenir un système d'intégrales particulières des équations (3) ou, ce qui revient au même, des équations (1) et (2), est de supposer

$$(4) \quad \bar{\xi} = A e^{iux + iy + i\omega z - st}, \quad \bar{\eta} = B e^{iux + iy + i\omega z - st}, \quad \bar{\zeta} = C e^{iux + iy + i\omega z - st}$$

et, par suite,

$$(5) \quad \bar{\nu} = (uA + vB + wC) e^{iux + iy + i\omega z - st},$$

u, v, w, s, A, B, C étant des constantes réelles ou imaginaires, propres à vérifier les formules

$$(6) \quad \begin{cases} (s^2 - \mathcal{E}) A = \bar{F} u (uA + vB + wC), \\ (s^2 - \mathcal{E}) B = \bar{F} v (uA + vB + wC), \\ (s^2 - \mathcal{E}) C = \bar{F} w (uA + vB + wC), \end{cases}$$



dans lesquelles

$$\mathcal{E}, \mathcal{F}$$

représentent ce que deviennent

$$E, F$$

quand on y remplace les lettres caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t$$

par les coefficients

$$u, v, \omega, s.$$

D'ailleurs on pourra toujours supposer que, dans les formules (4), la partie imaginaire de la constante s est le produit de $\sqrt{-1}$ par une quantité positive.

En posant, pour abrégér,

$$(7) \quad u^2 + v^2 + \omega^2 = k^2,$$

on tire des équations (6), respectivement multipliées par u, v, ω , puis combinées entre elles par voie d'addition,

$$(8) \quad (s^2 - \mathcal{E} - \mathcal{F}k^2)(uA + vB + \omega C) = 0;$$

et, à l'aide de cette dernière formule, on reconnaît facilement que, pour satisfaire aux équations (6), on devra supposer, ou

$$(9) \quad s^2 = \mathcal{E}, \quad uA + vB + \omega C = 0,$$

ou

$$(10) \quad s^2 = \mathcal{E} + \mathcal{F}k^2, \quad \frac{A}{u} = \frac{B}{v} = \frac{C}{\omega}.$$

On arriverait aux mêmes conclusions en observant que, si l'on nomme

$$a, b, c$$

les cosinus des angles formés par un axe fixe avec les demi-axes des x, y, z positives, ε le déplacement mesuré parallèlement à cet axe, et $\bar{\varepsilon}$ le déplacement symbolique correspondant, on aura, en vertu des

formules (5), (7) du § I,

$$(11) \quad \bar{\varepsilon} = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z},$$

$$(12) \quad (D_t^2 - E)[D_t^2 - E - (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)E]\bar{\varepsilon} = 0,$$

et que de ces dernières, combinées avec les formules (4), on tirera

$$(13) \quad (s^2 - \mathcal{E})(s^2 - \mathcal{E} - \mathcal{F}k^2) = 0.$$

Le système d'intégrales particulières des équations (3), représenté par les équations (4) jointes aux formules (9) ou (10), est ce que nous appelons un *système d'intégrales simples*; et le mouvement représenté par ces intégrales simples est un *mouvement simple*. Dans un semblable mouvement, si l'on pose, pour abrégér,

$$(14) \quad aA + bB + cC = 0,$$

la valeur de $\bar{\varepsilon}$ déterminée par la formule (11) sera

$$(15) \quad \bar{\varepsilon} = Oe^{ux+vy+\omega z-st}.$$

Cela posé, soient

$$(16) \quad u = U + v\sqrt{-1}, \quad v = V + v\sqrt{-1}, \quad \omega = W + w\sqrt{-1},$$

$$(17) \quad s = S + s\sqrt{-1},$$

$$(18) \quad O = he^{\alpha\sqrt{-1}},$$

$v, w, s, U, V, W, S, h, \alpha$ désignant des constantes réelles, parmi lesquelles

$$s, h$$

peuvent être censées positives, et prenons encore

$$(19) \quad k = \sqrt{v^2 + w^2 + \omega^2}, \quad K = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2},$$

$$(20) \quad kv = vx + vy + wz, \quad Kk = Ux + Vy + Wz.$$

Les valeurs numériques de

$$v, w$$

exprimeront les distances d'une molécule aux deux *plans invariables*,



représentés par les équations

$$(21) \quad vx + vy + wz = 0,$$

$$(22) \quad Ux + Vy + Wz = 0,$$

et la formule (14) donnera

$$(23) \quad \bar{s} = h e^{kx - St} e^{(ky - St + \omega)\sqrt{-1}},$$

puis on en conclura

$$(24) \quad z = h e^{kx - St} \cos(ky - St + \omega).$$

En vertu de cette dernière formule, le déplacement z s'évanouit : 1° pour une molécule donnée, à des instants séparés les uns des autres par des intervalles dont le double

$$(25) \quad T = \frac{2\pi}{s}$$

est la *durée d'une vibration* moléculaire; 2° à un instant donné, pour toutes les molécules comprises dans des plans équidistants, parallèles au plan invariable que représente l'équation (21) et séparés les uns des autres par des intervalles dont le double

$$(26) \quad l = \frac{2\pi}{k}$$

est la *longueur d'une ondulation* ou l'épaisseur d'une *onde plane*. L'exponentielle

$$e^{kx - St}$$

représente le *module* du mouvement simple,

$$k, \quad S$$

étant les *coefficients d'extinction* relatifs à l'espace et au temps; σ désigne le *paramètre angulaire* relatif à l'axe fixe que l'on considère,

$$h e^{kx - St}$$

la *demi-amplitude* des vibrations relatives au même axe, et

h

la valeur initiale de cette demi-amplitude en chaque point du plan invariable représenté par l'équation (22). Enfin la vitesse de propagation Ω des ondes planes est déterminée par la formule

$$(27) \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{1}{T}.$$

Dans un mouvement simple, déterminé par le système des formules (4) et (9), l'équation (5) donne

$$(28) \quad \bar{v} = 0,$$

par conséquent

$$(29) \quad v = 0.$$

Done, dans un semblable mouvement, la dilatation du volume est nulle, ou, en d'autres termes, la densité demeure constante. Tels paraissent être, dans les corps isophanes, les mouvements de l'éther qui donnent naissance aux phénomènes lumineux.

De la seconde des formules (9) ou (10) jointe aux formules (4) on tire

$$(30) \quad a\bar{\xi} + v\bar{\eta} + w\bar{\zeta} = 0,$$

ou

$$(31) \quad \frac{\bar{\xi}}{a} = \frac{\bar{\eta}}{v} = \frac{\bar{\zeta}}{w}.$$

D'ailleurs la formule (30) ou (31) entraîne la suivante

$$(32) \quad a\zeta + v\eta + w\xi = 0,$$

ou

$$(33) \quad \frac{\zeta}{a} = \frac{\eta}{v} = \frac{\xi}{w},$$

1° lorsque les coefficients a, v, w sont réels; 2° lorsque ces coefficients



n'offrent pas de parties réelles. Dans le premier cas, les formules (32) et (33) donneront

$$(34) \quad U\xi + V\eta + W\zeta = 0,$$

ou

$$(35) \quad \frac{\xi}{U} = \frac{\eta}{V} = \frac{\zeta}{W};$$

dans le second cas elles donneront

$$(36) \quad v\xi + v\eta + w\zeta = 0,$$

ou

$$(37) \quad \frac{\xi}{v} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}.$$

En conséquence les vibrations moléculaires, représentées par les équations (4) jointes aux formules (9) ou (10), seront, dans le premier cas, parallèles ou perpendiculaires au plan invariable représenté par l'équation (22), et dans le second cas parallèles ou perpendiculaires au plan invariable représenté par l'équation (21).

Si les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, on aura, en vertu des formules (10), (11) du § I,

$$(38) \quad c = \iota k^2, \quad \bar{c} = \iota f,$$

ι, f désignant des constantes réelles, et par conséquent les valeurs de s^2 que fournissent les équations (9), (10) deviendront

$$(39) \quad s^2 = \iota k^2, \quad s^2 = \iota(1 + f)k^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(40) \quad s^2 = \iota(u^2 + v^2 + w^2), \quad s^2 = \iota(1 + f)(u^2 + v^2 + w^2).$$

§ III. — *Sur les perturbations qu'éprouvent les mouvements simples, lorsque les équations des mouvements infiniment petits sont altérées dans le voisinage d'une surface plane.*

Concevons que, les molécules qui composent le système donné étant toutes situées d'un même côté d'un plan fixe, la constitution du sys-

tème, et par suite les équations des mouvements infiniment petits se trouvent altérées dans le voisinage de ce plan. Supposons, par exemple, que, toutes les molécules étant situées du côté des x positives, les équations des mouvements infiniment petits conservent constamment la même forme pour des valeurs de x positives et sensiblement différentes de zéro, mais que, dans le voisinage du plan des y, z , ces équations changent de forme sans cesser d'être linéaires, et de telle sorte que les coefficients des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

et de leurs dérivées, devenus fonctions de la coordonnée x , varient très rapidement avec elle entre les limites très rapprochées

$$x = 0, \quad x = \epsilon.$$

Supposons d'ailleurs que, dans ces mêmes équations transformées d'abord en équations différentielles par la méthode développée dans un précédent Mémoire, puis ramenées au premier ordre et résolues par rapport à

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \dots,$$

les produits des coefficients, ou plutôt des variations, par la distance ϵ , restent très petits. Alors un ou plusieurs mouvements simples, propagés séparément ou simultanément dans le système donné, éprouveront, dans le voisinage du plan fixe des y, z , des perturbations en vertu desquelles les valeurs des déplacements effectifs

$$\xi, \eta, \zeta$$

et par suite des déplacements symboliques

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$$

se trouveront altérées pour de très petites valeurs positives de x ; mais, à l'aide des principes établis dans le Mémoire dont il s'agit, on prouvera que les valeurs altérées et les valeurs non altérées sont liées entre elles par certaines équations de condition qui subsistent dans le



voisinage du plan fixe, et spécialement pour une valeur nulle de la coordonnée x . Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons, pour fixer les idées, le cas où, avant d'être altérées, les équations des mouvements infiniment petits sont homogènes et indépendantes de la direction des axes coordonnés. Alors les équations symboliques de ces mouvements, c'est-à-dire les équations (3) du § II, seront, pour des valeurs de x positives et sensiblement différentes de zéro, déterminées par des équations de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} [D_x^2 - \epsilon(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\xi = \epsilon f D_x(D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta), \\ [D_x^2 - \epsilon(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\eta = \epsilon f D_y(D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta), \\ [D_x^2 - \epsilon(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\zeta = \epsilon f D_z(D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta). \end{cases}$$

Alors aussi les déplacements symboliques, correspondants à un mouvement simple, seront, pour des valeurs de x positives et sensiblement différentes de zéro, déterminés par des équations de la forme

$$(2) \quad \xi = A e^{ux+vy+wz-st}, \quad \eta = B e^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta = C e^{ux+vy+wz-st};$$

les constantes

$$u, v, w, s, A, B, C$$

étant assujetties à vérifier l'un des deux systèmes d'équations

$$(3) \quad s^2 = \epsilon(u^2 + v^2 + w^2), \quad uA + vB + wC = 0,$$

$$(4) \quad s^2 = \epsilon(1 + f)(u^2 + v^2 + w^2), \quad \frac{A}{u} = \frac{B}{v} = \frac{C}{w},$$

dans lesquels ϵ, f représentent deux quantités réelles. Le mouvement simple dont il s'agit sera du nombre de ceux qui ne s'éteignent point en se propageant, si les coefficients d'extinction relatifs à l'espace et au temps s'évanouissent, c'est-à-dire, en d'autres termes, si les coefficients

$$u, v, w, s$$

des variables indépendantes dans l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-st}$$

n'offrent pas de parties réelles, par conséquent, si l'on a

$$(5) \quad u = v\sqrt{-1}, \quad v = v\sqrt{-1}, \quad w = w\sqrt{-1}, \quad s = s\sqrt{-1},$$

v, w, s étant des quantités réelles. Le même mouvement simple sera du nombre de ceux dans lesquels la densité de l'éther reste invariable, si les valeurs précédentes de

$$u, v, w, s$$

vérifient la première des équations (3), réduite à

$$(6) \quad s^2 = \epsilon(v^2 + w^2),$$

ce qui suppose la constante ϵ positive. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si, en posant pour abréger

$$(7) \quad k = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad \Omega = \sqrt{\epsilon},$$

on prend

$$(8) \quad s = \Omega k.$$

Alors le mouvement simple sera représenté par le système des équations

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = A e^{(vx+vy+wz-st)\sqrt{-1}}, \\ \eta = B e^{(vx+vy+wz-st)\sqrt{-1}}, \\ \zeta = C e^{(vx+vy+wz-st)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

jointes à la formule (8) et à la seconde des formules (3), ou, ce qui revient au même, à la suivante :

$$(10) \quad vA + wB + sC = 0.$$

Si d'ailleurs on pose

$$(11) \quad vx + wy + wz = kx$$

et

$$(12) \quad A = a e^{\lambda\sqrt{-1}}, \quad B = b e^{\mu\sqrt{-1}}, \quad C = c e^{\nu\sqrt{-1}},$$



a, b, c désignant des quantités positives, et λ, μ, ν des arcs réels, les formules (9) deviendront

$$(13) \quad \bar{\xi} = a e^{(k_1 - st + \lambda)\sqrt{-1}}, \quad \bar{\eta} = b e^{(k_1 - st + \mu)\sqrt{-1}}, \quad \bar{\zeta} = c e^{(k_1 - st + \nu)\sqrt{-1}},$$

et l'on en conclura

$$(14) \quad \xi = a \cos(k_1 - st + \lambda), \quad \eta = b \cos(k_1 - st + \mu), \quad \zeta = c \cos(k_1 - st + \nu).$$

Soient maintenant

$$(15) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \chi, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \psi,$$

et

$$(16) \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = \bar{\varphi}, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = \bar{\chi}, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \bar{\psi},$$

et nommons

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \varphi_0, \chi_0, \psi_0,$$

ou

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\psi}_0,$$

ce que deviennent, pour zéro, les valeurs des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \varphi, \chi, \psi,$$

ou

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi},$$

déterminées par le système des formules (14) et (15), ou (13) et (16), quand on commence par modifier ces valeurs de manière qu'elles vérifient, non plus les équations (1), mais ces équations altérées par la variation que subissent les coefficients des variables principales et de leurs dérivées dans le voisinage du plan des y, z . En vertu des principes établis dans le Mémoire ci-dessus mentionné, les différences

$$\xi - \xi_0, \quad \eta - \eta_0, \quad \zeta - \zeta_0, \quad \varphi - \varphi_0, \quad \chi - \chi_0, \quad \psi - \psi_0$$

vérifieront certaines équations de condition, et, pour obtenir celles-ci, on devra d'abord chercher les divers systèmes d'intégrales simples que

peuvent représenter les équations (2), jointes aux formules (3) ou (4), quand on y regarde les coefficients

$$v, w, s$$

comme invariables, et devant acquérir, dans chaque système d'intégrales simples, les valeurs fournies par les trois dernières des équations (5). Or, dans cette hypothèse, on tirera des équations (3) ou (4), jointes à la formule (6) et à la première des formules (7),

$$(17) \quad u^2 = -v^2, \quad uA + (vB + wC)\sqrt{-1} = 0$$

ou

$$(18) \quad u^2 = v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+f}, \quad \frac{A}{u} = \frac{B}{v\sqrt{-1}} = \frac{C}{w\sqrt{-1}}.$$

Il en résulte que, dans un mouvement simple correspondant aux valeurs imaginaires données de v, w, s , le coefficient u peut acquérir quatre valeurs distinctes, puisqu'on peut satisfaire à la première des équations (17), en prenant non seulement

$$(19) \quad u = v\sqrt{-1},$$

mais encore

$$(20) \quad u = -v\sqrt{-1},$$

puis à la première des équations (18), en prenant

$$(21) \quad u = \left(\frac{k^2}{1+f} - v^2 - w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad u = - \left(\frac{k^2}{1+f} - v^2 - w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1},$$

si l'on a

$$(22) \quad \frac{k^2}{1+f} > v^2 + w^2,$$

et en prenant au contraire

$$(23) \quad u = \left(v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+f} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad u = - \left(v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+f} \right)^{\frac{1}{2}},$$



si l'on a

$$(24) \quad v^2 + w^2 > \frac{k^2}{1+t}.$$

Observons à présent que, si la formule (22) se vérifie, aucune des quatre valeurs de u n'offrira de partie réelle, et qu'en conséquence aucune d'elles n'offrira de partie réelle négative ou, en d'autres termes, inférieure à celle de

$$u = v\sqrt{-1}.$$

Donc alors, en vertu des principes établis dans le Mémoire ci-dessus rappelé, les valeurs de

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi},$$

relatives au mouvement simple qui correspond à la valeur précédente de u , vérifieront, pour $x = 0$, les équations de condition

$$(25) \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}_0, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}_0, \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_0.$$

Si au contraire la formule (24) se vérifie, alors des quatre valeurs de u , celle que détermine la seconde des équations (23) offrira seule une partie réelle négative. Donc alors les valeurs de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots$ relatives au mouvement simple dont il s'agit vérifieront, pour $x = 0$, les équations de condition que l'on obtiendra en supposant, dans la formule

$$\frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{A} = \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}{B} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{C} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0}{uA} = \frac{\bar{\chi} - \bar{\chi}_0}{vB} = \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_0}{wC},$$

les constantes

$$u, v, w, A, B, C$$

choisies de manière que l'on ait

$$u = -v, \quad v = v\sqrt{-1}, \quad w = w\sqrt{-1}, \quad \frac{A}{u} = \frac{B}{v\sqrt{-1}} = \frac{C}{w\sqrt{-1}};$$

la valeur de v étant

$$(26) \quad v = \left(v^2 + w^2 - \frac{k^2}{1+t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

on aura, dans ce cas, pour $x = 0$,

$$(27) \quad \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{-v} = \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}{v\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{w\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0}{v^2} = \frac{\bar{\chi} - \bar{\chi}_0}{-v\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_0}{-vw\sqrt{-1}}.$$

55.

C. R., t. IX, p. 1 (1^{re} juillet 1839). — (Suite.)

Fin du § III. (Voir la séance du 24 juin.)

Avant d'aller plus loin, cherchons à reconnaître d'une manière précise dans quels cas subsistent les diverses formules ci-dessus établies.

Pour y parvenir, nous remarquerons d'abord que les diverses puissances des caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z$$

renfermées dans les équations symboliques des mouvements infiniment petits se transforment en puissances, de mêmes degrés, des coefficients

$$u, v, w,$$

quand on suppose ces mouvements infiniment petits réduits à des mouvements simples, c'est-à-dire quand on suppose les déplacements symboliques proportionnels à une seule exponentielle de la forme

$$e^{ux+vy+wz-it}.$$

Alors les fonctions de D_x, D_y, D_z , représentées par

$$L, M, N, P, Q, R$$

dans les équations (1) du § I^{er}, se transforment en des fonctions de u .



v, w , désignées par

$$\xi, \eta, \zeta, \varphi, \varrho, \Re$$

dans les précédents Mémoires. Dans cette hypothèse, réduire, comme nous l'avons fait, les équations des mouvements infiniment petits à des équations du second ordre ou, en d'autres termes, réduire

$$L, M, N, P, Q, R$$

à des fonctions qui soient du second degré par rapport au système des caractéristiques D_x, D_y, D_z , c'est évidemment réduire

$$\xi, \eta, \zeta, \varphi, \varrho, \Re$$

à des fonctions qui soient du second degré par rapport au système des coefficients u, v, w . D'ailleurs, comme on l'a vu dans le Mémoire sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules, si l'on nomme

$$x, y, z$$

les coordonnées d'une molécule m du système donné, et

$$x+x, y+y, z+z$$

les coordonnées d'une autre molécule m , les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \varphi, \varrho, \Re$$

seront représentées par des sommes de termes correspondants aux diverses molécules m voisines de m , et dont chacun, considéré comme fonction de u, v, w , sera proportionnel à la différence

$$e^{ux+vy+wz} - 1,$$

mais s'évanouira sensiblement hors de la sphère d'activité de la molécule m . Donc, réduire les équations des mouvements infiniment petits au second ordre, c'est négliger dans le développement de cette différence, c'est-à-dire dans la somme

$$ux + vy + wz + \frac{(ux + vy + wz)^2}{1.2} + \frac{(ux + vy + wz)^3}{1.2.3} + \dots,$$

les puissances du trinôme

$$ux + vy + wz$$

d'un degré supérieur au second. Or il sera généralement permis de négliger ces puissances, au moins dans une première approximation, si le module du trinôme

$$ux + vy + wz$$

reste très petit pour tous les points situés dans l'intérieur de la sphère d'activité sensible d'une molécule; et cette dernière condition sera remplie elle-même, si le rayon de la sphère dont il s'agit est très petit, par rapport aux longueurs d'ondulations mesurées dans un mouvement simple qui ne s'éteigne pas en se propageant. En effet, dans un semblable mouvement, u, v, w seront de la forme

$$u = v\sqrt{-1}, \quad v = w\sqrt{-1}, \quad w = v\sqrt{-1},$$

v, w désignant des constantes réelles; et le plan d'une onde, parallèle au plan invariable représenté par l'équation

$$vx + wy + wz = 0,$$

formera, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles dont les cosinus seront respectivement proportionnels à

$$v, w,$$

tandis que l'épaisseur d'une onde sera représentée par

$$l = \frac{2\pi}{k},$$

la valeur de k étant

$$k = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

D'autre part, si l'on nomme r le rayon vecteur mené de la molécule m à la molécule m , et δ l'angle formé par le rayon vecteur r avec la perpendiculaire au plan d'une onde, on aura

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$ux + vy + wz = kr \cos \delta = 2\pi \frac{r}{l} \cos \delta;$$



et il est clair que le produit

$$2\pi \frac{r}{\Gamma} \cos \delta$$

deviendra très petit en même temps que le rapport

$$\frac{r}{\Gamma}$$

Donc le module du trinôme

$$ux + vy + wz,$$

représenté dans le mouvement simple que l'on considère par la valeur numérique de la somme

$$ux + vy + wz = 2\pi \frac{r}{\Gamma} \cos \delta,$$

restera très petit, si le rayon vecteur r , supposé inférieur ou égal au rayon de la sphère d'activité sensible d'une molécule, est très petit par rapport à la longueur d'une ondulation.

Lorsque la condition ici énoncée sera remplie, et qu'en conséquence les équations des mouvements infiniment petits pourront être, sans erreur sensible, réduites à des équations du second ordre, ces dernières renfermeront généralement des termes du premier ordre et des termes du second ordre. Il semblerait au premier abord que ceux-ci devraient encore être considérés comme très petits par rapport aux autres. Mais on doit observer que les coefficients des dérivées du premier ordre seront des sommes composées de parties, les unes positives, les autres négatives, et qui, dans beaucoup de cas, se détruiront réciproquement. C'est ce qui arrive, en particulier, quand le système de molécules est constitué de telle manière que la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Il en résulte que, loin de négliger les termes du second ordre vis-à-vis des termes du premier ordre, on devra plus généralement négliger ceux-ci vis-à-vis des termes du second ordre, ce qui suffira pour rendre homogènes les équations du second ordre auxquelles on sera parvenu.

Considérons maintenant en particulier les conditions relatives aux points situés dans le plan fixe des y, z . D'après ce qu'on a dit, ces conditions supposent qu'on obtient des produits très petits en multipliant la constante ε , c'est-à-dire la distance au plan fixe, en deçà de laquelle les perturbations des mouvements infiniment petits deviennent sensibles, par certains coefficients renfermés dans ces mêmes équations. D'ailleurs, en vertu des principes développés dans le Mémoire qui a pour titre : *Méthode générale propre à fournir les équations de conditions relatives aux limites des corps*, les coefficients dont il s'agit seront généralement ceux par lesquels se trouveront multipliées les variables principales

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi}$$

dans les équations symboliques des mouvements infiniment petits, transformées d'abord en équations différentielles par la substitution des constantes

$$v, \alpha, s$$

aux caractéristiques

$$D_y, D_z, D_t,$$

puis ramenées au premier ordre par l'adjonction des variables principales $\bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi}$ aux variables principales $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, et résolues par rapport à

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}.$$

Mais il est important d'observer que, si, dans un mouvement simple, l'épaisseur l des ondes planes devient très petite, les constantes

$$a, v, w$$

offriront de très grands modules comparables à la quantité

$$k = \frac{2\pi}{l}.$$

Alors les dérivées

$$\bar{\varphi} = D_x \bar{\xi} = u \bar{\xi}, \quad \bar{\gamma} = D_x \bar{\eta} = u \bar{\eta}, \quad \bar{\psi} = D_x \bar{\zeta} = u \bar{\zeta},$$



seront elles-mêmes comparables aux produits

$$k\bar{\xi}, k\bar{\eta}, k\bar{z};$$

et comme, dans les équations des mouvements infiniment petits, réduites à des équations homogènes du second ordre, puis transformées en équations différentielles, les divers termes resteront tous comparables les uns aux autres, les coefficients qui, multipliés par ε , devront fournir des produits très petits, seront, dans les valeurs de

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x}, \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}$$

exprimées en fonctions linéaires de

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{z}, \bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi},$$

les coefficients de

$$\bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi}$$

ou ceux de

$$k\bar{\xi}, k\bar{\eta}, k\bar{z}.$$

On peut ajouter que les coefficients de $\bar{\varphi}$ dans la valeur de $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}$, de $\bar{\gamma}$ dans la valeur de $\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial x}$, ..., auront, dans le mouvement troublé, des valeurs comparables à celles qu'ils acquièrent dans le mouvement simple et non troublé, c'est-à-dire au coefficient u , par conséquent à la constante k . Donc, en définitive, pour que la valeur de la distance ε permette aux conditions relatives à la surface de subsister, il suffira que le produit

$$k\varepsilon = 2\pi \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

reste très petit, ou, en d'autres termes, que la distance ε soit très petite relativement à la longueur d'une ondulation.

Cette condition étant supposée remplie, les formules (25) ou (27) subsisteront, pour $x=0$, dans les circonstances que nous avons indiquées, si les variables

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{z}$$

représentent les déplacements symboliques relatifs à un mouvement simple pour lequel on aurait

$$u = u\sqrt{-1}.$$

Il y a plus : en vertu des principes établis dans le Mémoire déjà cité, on arrivera encore aux formules (25) ou (27), si les variables

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{z}$$

représentent les déplacements symboliques relatifs à un mouvement simple pour lequel on aurait

$$u = -u\sqrt{-1},$$

ou même les déplacements symboliques relatifs à un mouvement résultant de la superposition de deux mouvements simples, pour l'un desquels on aurait

$$u = u\sqrt{-1},$$

tandis qu'on aurait pour l'autre

$$u = -u\sqrt{-1}.$$

Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante :

THEOREME. — *Considérons un système homogène de molécules situé, par rapport au plan des y, z , du côté des x positives, et pour lequel les équations des mouvements infiniment petits, indépendantes de la direction des axes coordonnés, puissent se réduire, sans erreur sensible, à des équations homogènes du second ordre, par conséquent aux formules (1). Supposons et outre que, dans le voisinage du plan des y, z , et entre les limites très rapprochées*

$$x=0, \quad x=\varepsilon,$$

ces équations changent de forme, les coefficients des déplacements effectifs ou des déplacements symboliques et de leurs dérivées devenant alors fonctions de la coordonnée x . Nommons

les dérivées premières de

$$\bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi}$$

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{z}$$



relatives à x , et

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\gamma}_0, \bar{\psi}_0$$

ce que deviennent, pour $x=0$, les valeurs de

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi},$$

correspondantes à un mouvement infiniment petit, propagé dans le système de molécules donné, quand on a égard aux perturbations de ce mouvement indiquées par l'altération des équations (1) dans le voisinage du plan des y, z . Enfin, supposons que le mouvement dont il s'agit soit un mouvement simple qui ne s'éteigne point en se propageant, ou bien encore qu'il résulte de la superposition de deux mouvements simples de cette espèce, correspondants aux mêmes valeurs imaginaires des coefficients

$$v, w, s,$$

mais à des valeurs imaginaires de u , qui, étant égales au signe près, se trouvent affectées de signes contraires. Si d'ailleurs la distance z est très petite relativement à la longueur d'une ondulation, les valeurs de

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi},$$

calculées comme si le mouvement simple n'éprouvait aucune perturbation dans le voisinage du plan des y, z , vérifieront, pour $x=0$, les conditions (25) ou (27), savoir, les conditions

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \quad \bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0, \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_0,$$

si l'on a

$$\frac{k^2}{1+i} > v^2 + w^2,$$

et les conditions

$$\frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{-v} = \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}{v\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{w\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0}{v^2} = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_0}{-v\sqrt{-1}} = \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_0}{-vw\sqrt{-1}},$$

si l'on a

$$\frac{k^2}{1+i} < v^2 + w^2.$$

Les mêmes principes peuvent servir encore à établir les équations de condition auxquelles devraient satisfaire, pour $x=0$, les valeurs de

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi}$$

relatives, soit à des mouvements qui s'éteindraient en se propageant, soit à des mouvements accompagnés d'un changement de densité. Mais, nous bornant pour l'instant à indiquer ces diverses applications de nos formules générales, nous allons nous occuper plus spécialement des formules particulières que nous venons de trouver et développer les conséquences qui s'en déduisent.

Les valeurs de v, w étant

$$(28) \quad v = v\sqrt{-1}, \quad w = w\sqrt{-1},$$

la formule (27) peut s'écrire comme il suit :

$$(29) \quad \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{-v} = \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}{v} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{w} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0}{v^2} = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_0}{-v} = \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_0}{-vw}.$$

D'ailleurs on tire de cette dernière, non seulement

$$\frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}{v} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{w}$$

et

$$\bar{\xi} - \bar{\xi}_0 = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_0}{v} = \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_0}{w},$$

par conséquent

$$(30) \quad v\bar{\eta} - w\bar{\zeta} = v\bar{\eta}_0 - w\bar{\zeta}_0, \quad \bar{\psi} - w\bar{\xi} = \bar{\psi}_0 - w\bar{\xi}_0, \quad v\bar{\xi} - \bar{\gamma} = v\bar{\xi}_0 - \bar{\gamma}_0,$$

mais encore

$$\frac{1}{v}\bar{\eta} - \frac{1}{w}\bar{\zeta} = \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{-v} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0}{v^2} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0 + \alpha(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) + \beta\left(\frac{1}{v}\bar{\eta} - \frac{1}{w}\bar{\zeta}\right)}{v^2 - \alpha v + \beta},$$

quels que soient les facteurs α, β , et par suite

$$(31) \quad \bar{\varphi} + \alpha\bar{\xi} + \frac{\beta}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}_0 + \alpha\bar{\xi}_0 + \frac{\beta}{v}\bar{\eta}_0,$$



si l'on choisit z, ϵ de manière à vérifier la formule

$$(32) \quad v^2 - z v + \epsilon = 0 \quad (1).$$

(1) Pressé par le temps, et obligé de renvoyer au prochain numéro le développement des principes que je viens d'exposer, je me bornerai, pour le moment, à indiquer ici les formules qui seront établies dans la suite de ce Mémoire, relativement à la réflexion et à la réfraction de la lumière par la surface des corps qui ne la polarisent pas complètement.

Si le rayon incident, que nous supposons simple, est considéré comme résultant de la superposition de deux autres rayons polarisés suivant le plan d'incidence, et perpendiculairement à ce plan, les lois de la réflexion ou de la réfraction relatives au premier rayon composant, c'est-à-dire au rayon polarisé suivant le plan d'incidence, resteront les mêmes pour les corps transparents et isophanes qui polarisent complètement la lumière, et pour ceux qui, comme le diamant, ne jouissent pas de cette propriété.

Si maintenant on compare l'un à l'autre les deux rayons composants, la réflexion et la réfraction feront varier le rapport de leurs amplitudes, ou la tangente de l'azimat, et la différence de leurs phases, ou l'anomalie, suivant les lois exprimées par les formules que je vais transcrire.

Soient

τ, τ' les angles d'incidence et de réfraction;
 π, π' les tangentes des azimuts des rayons réfléchi et réfracté, quand le rayon incident est polarisé à 45° du plan d'incidence;
 δ, δ' les anomalies de réflexion et de réfraction.

On aura, pour le rayon réfracté,

$$\begin{aligned} \tan^2 \pi' &= \cos^2(\tau - \tau') + \epsilon^2 \sin^2 \tau \sin^2(\tau - \tau'), \\ \delta' &= \arctan [z \sin \tau \tan(\tau - \tau')], \end{aligned}$$

ϵ désignant un coefficient très petit dont l'observation fournira la valeur. On aura, au contraire, pour le rayon réfléchi,

$$\cot^2 \pi = [\cos^2(\tau + \tau') + \epsilon^2 \sin^2 \tau \sin^2(\tau + \tau')] \cot^2 \pi',$$

et, en outre,

$$\delta = \delta' + \arctan [z \sin \tau \tan(\tau + \tau')] + \pi, \quad \text{si } \tau + \tau' < \frac{\pi}{2},$$

et

$$\delta = \delta' + \arctan [z \sin \tau \tan(\tau + \tau')], \quad \text{si } \tau + \tau' > \frac{\pi}{2}.$$

Au reste, je reviendrai dans les prochains numéros sur ces diverses formules qui montrent l'exactitude des explications et des hypothèses proposées par M. Airy, dans un Mémoire digne de remarque. (Voir le IV^e Volume des *Transactions de la Société philosophique de Cambridge*.)

56.

C. R., t. IX, p. 59 (8 juillet 1839). — Suite.

§ IV. — *Sur les conditions générales de la coexistence de mouvements simples, que l'on suppose propagés dans deux portions différentes d'un système moléculaire, diversement constituées et séparées l'une de l'autre par une surface plane.*

Considérons deux systèmes homogènes de molécules, séparés par une surface plane que nous prendrons pour plan des y, z , ces deux systèmes n'étant autre chose que deux portions différentes d'un même système dont la constitution change quand la coordonnée x passe du négatif au positif, et reste sensiblement invariable de chaque côté de la surface de séparation, excepté dans le voisinage de cette surface. Soient

$$\xi, \eta, \zeta \text{ et } \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$$

les déplacements effectifs et symboliques d'une molécule, correspondants à un ou à plusieurs mouvements simples propagés dans le premier des systèmes donnés, que nous supposons situé du côté des x négatives; et nommons

$$\varphi, \chi, \psi \text{ ou } \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}$$

les dérivées de ces déplacements effectifs ou symboliques prises par rapport à x . Soient pareillement

$$\xi', \eta', \zeta' \text{ et } \bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}'$$

les déplacements effectifs ou symboliques correspondants à un ou à plusieurs mouvements simples propagés dans le second système situé du côté des x positives; et nommons encore

$$\varphi', \chi', \psi' \text{ ou } \bar{\varphi}', \bar{\chi}', \bar{\psi}'$$

les dérivées de ces déplacements effectifs ou symboliques prises par



rapport à x . Soient enfin

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \varphi_0, \chi_0, \psi_0$$

ou

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\psi}_0$$

ce que deviennent les déplacements effectifs ou symboliques et leurs dérivées pour les points situés dans le plan des y, z . Si les deux espèces de mouvements simples que l'on suppose propagés dans les deux systèmes donnés de molécules peuvent coexister, alors, en raisonnant comme dans le § III, on obtiendra : 1° entre les différences

$$\bar{\xi} - \xi_0, \bar{\eta} - \eta_0, \bar{\zeta} - \zeta_0, \bar{\varphi} - \varphi_0, \bar{\chi} - \chi_0, \bar{\psi} - \psi_0,$$

2° entre les différences

$$\bar{\xi}' - \xi_0', \bar{\eta}' - \eta_0', \bar{\zeta}' - \zeta_0', \bar{\varphi}' - \varphi_0', \bar{\chi}' - \chi_0', \bar{\psi}' - \psi_0',$$

des équations de condition qui devront se vérifier pour une valeur nulle de x ; puis, en éliminant

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\psi}_0$$

entre ces deux espèces d'équations de condition, on en obtiendra d'autres entre les seules variables

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}; \bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}', \bar{\varphi}', \bar{\chi}', \bar{\psi}'.$$

Les nouvelles équations de condition, ainsi obtenues, devront, comme les précédentes, subsister seulement pour une valeur nulle de x ; et les unes comme les autres seront linéaires par rapport aux déplacements symboliques et à leurs dérivées. En conséquence, après l'élimination de

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\psi}_0,$$

la forme la plus générale d'une équation de condition sera

$$(1) \quad \Gamma + \Gamma' = 0,$$

Γ désignant une fonction linéaire des variables

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi},$$

composée de six termes respectivement proportionnels à ces mêmes variables, et Γ' une fonction de la même espèce, mais composée avec les variables

$$\bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}', \bar{\varphi}', \bar{\chi}', \bar{\psi}'.$$

Si l'on suppose qu'un seul mouvement simple se propage dans le système de molécules situé du côté des x négatives, les valeurs de

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi},$$

correspondantes à une valeur nulle de x , seront de la forme

$$\bar{\xi} = A e^{vy+ws-st}, \quad \bar{\eta} = B e^{vy+ws-st}, \quad \bar{\zeta} = C e^{vy+ws-st},$$

$$\bar{\varphi} = A' e^{vy+ws-st}, \quad \bar{\chi} = B' e^{vy+ws-st}, \quad \bar{\psi} = C' e^{vy+ws-st},$$

a, v, w, s, A, B, C désignant des constantes réelles ou imaginaires; et par suite, la valeur de Γ , correspondante à $x = 0$, sera de la forme

$$\Gamma = \gamma e^{vy+ws-st},$$

γ désignant une nouvelle constante. Si au contraire plusieurs mouvements simples, superposés les uns aux autres, se propagent simultanément dans le premier des systèmes donnés, et si l'on admet que les déplacements symboliques deviennent proportionnels, dans l'un de ces mouvements simples, à l'exponentielle

$$e^{u(x+vy+ws-st)},$$

dans un autre, à l'exponentielle

$$e^{u(x+v'y+w'z-s't)}, \dots,$$

la valeur de Γ , correspondante à $x = 0$, sera de la forme

$$(2) \quad \Gamma = \gamma e^{vy+ws-st} + \gamma' e^{v'y+w'z-s't} + \dots,$$

γ, γ', \dots désignant diverses constantes. Pareillement, si divers mouvements simples se propagent dans le second système de molécules, et si l'on admet que les déplacements symboliques deviennent propor-



tionnels, dans l'un de ces mouvements simples, à l'exponentielle

$$e^{v'x + v'y + w'z - s't},$$

dans un autre, à l'exponentielle

$$e^{v''x + v''y + w''z - s''t},$$

la valeur de Γ' , correspondante à $x = 0$, sera de la forme

$$(3) \quad \Gamma' = \gamma' e^{v'y + w'z - s't} + \dots$$

Cela posé, l'équation (1), réduite à

$$(4) \quad \gamma e^{v'y + w'z - s't} + \gamma' e^{v''y + w''z - s''t} + \dots + \gamma'' e^{v''y + w''z - s''t} + \dots = 0,$$

entraînera la formule

$$(5) \quad \gamma + \gamma' + \dots + \gamma'' + \dots = 0,$$

à laquelle elle se réduira identiquement si l'on a

$$(6) \quad \begin{cases} v = v', & \dots = v'' = \dots, \\ w = w', & \dots = w'' = \dots, \\ s = s', & \dots = s'' = \dots \end{cases}$$

Il y a plus : si les constantes

$$\gamma, \gamma', \dots, \gamma'', \dots$$

diffèrent de zéro, l'équation (4), qui doit subsister quelles que soient les valeurs attribuées aux variables indépendantes y, z, t , entraînera toujours, non seulement l'équation (5), en laquelle elle se transforme, quand on réduit y, z et t à zéro, mais encore les formules (6). C'est ce que l'on démontrera sans peine à l'aide des considérations suivantes.

L'équation (4), devant subsister, quels que soient y, z et t , donnera, pour $z = 0$ et $t = 0$,

$$\gamma e^{v'y} + \gamma' e^{v''y} + \dots + \gamma'' e^{v''y} + \dots = 0.$$

Si, dans cette dernière équation et dans ses dérivées des divers ordres,

relatives à y , on pose $y = 0$, on trouvera

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma + \gamma' + \dots + \gamma'' + \dots = 0, \\ \gamma v + \gamma' v' + \dots + \gamma'' v'' + \dots = 0, \\ \gamma v^2 + \gamma' v'^2 + \dots + \gamma'' v''^2 + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Or il est facile de s'assurer que les équations (7), dont on peut supposer le nombre égal à celui des coefficients

$$\gamma, \gamma', \dots, \gamma'', \dots,$$

entraînent la première des formules (6). En effet, admettons, par exemple, que ces coefficients se réduisent à trois,

$$\gamma, \gamma', \gamma''.$$

Alors, en éliminant deux d'entre eux des équations (7), c'est-à-dire, des formules

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma' + \gamma'' &= 0, \\ \gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' &= 0, \\ \gamma v^2 + \gamma' v'^2 + \gamma'' v''^2 &= 0, \end{aligned}$$

on trouvera successivement

$$\gamma(v - v')(v - v'') = 0, \quad \gamma'(v' - v'')(v' - v) = 0, \quad \gamma''(v'' - v)(v'' - v') = 0;$$

et, par suite, si

$$\gamma, \gamma', \gamma''$$

diffèrent de zéro, les trois différences

$$v - v', \quad v - v'', \quad v' - v''$$

devront s'évanouir, en sorte que la première des formules (6) devra être vérifiée. Eu égard à la forme des équations (7), la même démonstration reste applicable, quel que soit le nombre des coefficients $\gamma, \gamma', \dots, \gamma'', \dots$; et d'ailleurs on pourra évidemment établir de la même manière la seconde et la troisième des formules (6).

Lorsqu'un mouvement simple, propagé dans un système de molé-



cules, atteint une surface plane qui sépare ce premier système du second, il donne très souvent naissance à d'autres mouvements simples, les uns réfléchis, les autres réfractés, qui coexistent tous ensemble, mais qui ne pourraient plus coexister, dans le double système de molécules que l'on considère, si l'on venait à supprimer quelques-uns d'entre eux. Ainsi, par exemple, lorsque ces deux systèmes sont tels qu'un mouvement simple, propagé jusqu'à leur surface de séparation, donne naissance à deux mouvements de cette espèce, l'un réfléchi, l'autre réfracté, on ne saurait concevoir deux de ces trois mouvements propagés seuls dans le double système de molécules. Donc alors l'équation (1) ou (4) ne peut subsister, lorsqu'on supprime l'un des trois mouvements simples; ce qui aurait lieu toutefois, si l'une des constantes

$$\gamma, \gamma', \gamma''$$

venait à s'évanouir. Donc, si l'on applique l'équation (1) ou (4) à la réflexion et à la réfraction des mouvements simples, elle entraînera généralement les formules (6).

Supposons l'équation (4) effectivement appliquée à la réflexion et à la réfraction d'un mouvement simple; et soient dans cette même équation

$$\gamma e^{i\gamma x + w z - u t}$$

le terme qui correspond aux ondes incidentes,

$$\gamma' e^{i\gamma' x + w' z - u' t}, \dots$$

ceux qui correspondent aux ondes réfléchies; enfin

$$\gamma'' e^{i\gamma'' x + w'' z - u'' t}, \dots$$

ceux qui correspondent aux ondes réfractées. Si l'on pose, comme dans le § II,

$$(8) \quad \alpha = U + v\sqrt{-1}, \quad v = V + v'\sqrt{-1}, \quad \alpha' = W + w\sqrt{-1}$$

$$(9) \quad s = S + s'\sqrt{-1},$$

$$(10) \quad k = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad K = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2},$$

$$(11) \quad l = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{2\pi}{s},$$

$$(12) \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T},$$

u, v, w, s, U, V, W, S désignant des quantités réelles, parmi lesquelles s pourra être censée positive, les constantes réelles

$$K, S$$

représenteront, dans le mouvement incident, les coefficients d'extinction relatifs à l'espace et au temps, et

$$T$$

la durée des vibrations moléculaires, tandis que

$$l$$

représentera l'épaisseur des ondes planes, et

$$\Omega$$

leur vitesse de propagation. De plus, les plans des ondes étant tous parallèles au plan invariable représenté par l'équation

$$(13) \quad ux + vy + wz = 0,$$

et la constante u devant être positive dans le cas où, comme on doit le supposer, les ondes incidentes, en se propageant, se rapprochent du plan des y, z ; si l'on nomme τ l'angle d'incidence, c'est-à-dire l'angle aigu formé par une droite perpendiculaire aux plans des ondes avec l'axe des x , on aura, dans le cas dont il s'agit,

$$\cos \tau = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{u}{k},$$

et par suite

$$\sin \tau = \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{k},$$

puis on en conclura

$$(14) \quad u = k \cos \tau, \quad \sqrt{v^2 + w^2} = k \sin \tau.$$



Quant au plan invariable représenté par l'équation

$$(15) \quad Ux + Vy + Wz = 1,$$

il sera celui duquel s'éloignent de plus en plus les molécules dont les vibrations deviennent de plus en plus petites, et disparaîtra si le mouvement incident est du nombre de ceux qui ne s'éteignent point en se propageant.

Soient maintenant

$$u, v, w, s, U, V, W, S, k, K, l, T, \Omega, \tau, \dots$$

ou

$$u', v', w', s', U', V', W', S', k', K', l', T', \Omega', \tau', \dots$$

ce que deviennent les constantes réelles

$$u, v, w, s, U, V, W, S, k, K, l, T, \Omega, \tau, \dots$$

quand on passe des ondes incidentes aux ondes réfléchies ou réfractées. Les formules (6), jointes aux équations (8), (9), (10), (11), (12), (14), entraîneront évidemment les suivantes :

$$(16) \quad \begin{cases} v = v, \dots = v' = \dots, \\ w = w, \dots = w' = \dots, \end{cases}$$

$$(17) \quad s = s, \dots = s' = \dots,$$

$$(18) \quad \begin{cases} V = V, \dots = V' = \dots, \\ W = W, \dots = W' = \dots, \end{cases}$$

$$(19) \quad S = S, \dots = S' = \dots,$$

On tirera d'ailleurs de la formule (17)

$$(20) \quad T = T, \dots = T' = \dots$$

et, des formules (16),

$$\sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{v'^2 + w'^2} = \dots = \sqrt{v'^2 + w'^2} = \dots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(21) \quad k \sin \tau = k' \sin \tau', \dots = k' \sin \tau' = \dots,$$

et par suite

$$(22) \quad \frac{\sin \tau}{l} = \frac{\sin \tau}{l}, \dots = \frac{\sin \tau'}{l'} = \dots$$

Il résulte de la formule (20) que la durée des vibrations moléculaires reste la même dans les mouvements incidents, réfléchis et réfractés. Il résulte de la formule (22) que l'angle d'incidence τ , l'angle de réflexion τ' , ..., l'angle de réfraction τ' , ... offrent des sinus respectivement proportionnels aux épaisseurs l, l, \dots, l', \dots des ondes incidentes, réfléchies et réfractées. De plus, comme les plans invariables, représentés par les formules (13) et (15), ont pour traces, sur le plan des y, z , les droites représentées par les équations

$$(23) \quad vy + wz = 0,$$

$$(24) \quad Vy + Wz = 0,$$

il résulte des formules (16) et (18) que ces traces restent les mêmes, quand on passe du mouvement incident aux mouvements réfléchis ou réfractés. Donc les plans des ondes incidentes, réfléchies et réfractées coupent le plan des y, z , ou, en d'autres termes, la surface réfléchissante, suivant des droites qui sont toutes parallèles les unes aux autres; et si, par un point donné de la même surface, on mène des perpendiculaires aux plans de ces différentes espèces d'ondes, ces perpendiculaires seront toutes renfermées dans un plan unique que l'on peut appeler indifféremment le plan d'incidence, ou le plan de réflexion, ou le plan de réfraction.

On tire des formules (22)

$$(25) \quad \frac{\sin \tau}{\sin \tau'} = \frac{l}{l'}, \dots \quad \text{et} \quad \frac{\sin \tau}{\sin \tau'} = \frac{l}{l'}, \dots$$

Donc le rapport du sinus d'incidence au sinus de réflexion est en même temps le rapport entre les épaisseurs des ondes incidentes et réfléchies, tandis que le rapport entre les sinus d'incidence et de réfraction se confond avec le rapport entre les épaisseurs des ondes incidentes et réfractées. Le premier



de ces rapports est ce que nous nommerons l'*indice d'incidence*, le second est celui qu'on nomme l'*indice de réfraction*.

Lorsque le premier système de molécules sera du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, et que, pour cette raison, nous appellerons *isotropes*, s deviendra fonction de la somme $u^2 + v^2 + w^2$, à laquelle s^2 sera même proportionnel, si les équations des mouvements infiniment petits sont homogènes. Alors le mouvement incident, que nous supposons simple, pourra donner naissance à un seul mouvement simple réfléchi; et l'équation

$$s = s,$$

entraînera la suivante

$$u^2 + v^2 + w^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2.$$

Celle-ci, jointe aux équations

$$v = v', \quad w = w',$$

donnera

$$(26) \quad u^2 = u'^2;$$

et, comme on ne pourrait supposer à la fois

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w',$$

sans rendre parallèles les plans des ondes incidentes et réfléchies, ce qui ne permettrait plus de vérifier les équations de condition, et ce qui est effectivement contraire à toutes les expériences, la formule (26) entraînera l'équation

$$(27) \quad u = -u',$$

par conséquent aussi l'équation

$$(28) \quad v = -v',$$

Or de cette dernière, jointe aux formules

$$v = v', \quad w = w',$$

on tirera

$$\sqrt{v'^2 + w'^2 + w'^2} = \sqrt{v^2 + v^2 + w^2},$$

ou

$$(29) \quad k = k',$$

et par suite

$$(30) \quad l = l'.$$

Cela posé, la première des formules (25) donnera $\sin \tau = \sin \tau'$,

$$(31) \quad \tau = \tau'.$$

Done, dans un milieu isotrope, l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle d'incidence.

Supposons maintenant le second système de molécules isotrope comme le premier. Alors le mouvement incident, étant simple, pourra donner naissance d'une part à un seul mouvement simple réfléchi, d'autre part à un seul mouvement simple réfracté. Si d'ailleurs ces trois mouvements simples sont du nombre de ceux qui ne s'éteignent pas en se propageant, on aura

$$(32) \quad \begin{cases} u = v\sqrt{-1}, & v = v\sqrt{-1}, & w = w\sqrt{-1}, & s = s\sqrt{-1}, \\ u' = v'\sqrt{-1}, & v' = v'\sqrt{-1}, & w' = w'\sqrt{-1}, & s' = s'\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, s étant fonction de

$$u^2 + v^2 + w^2 = -(v^2 + v^2 + w^2) = -k^2,$$

et s' fonction de

$$u'^2 + v'^2 + w'^2 = -(v'^2 + v'^2 + w'^2) = -k'^2,$$

à une valeur déterminée de s , et par suite de $s' = s$, correspondront des valeurs déterminées, non seulement de k , mais aussi de k' , quel que soit d'ailleurs l'angle d'incidence τ . Donc alors, l'*indice de réfraction*, savoir

$$\frac{\sin \tau}{\sin \tau'} = \frac{l}{l'} = \frac{k}{k'},$$

sera indépendant de l'angle d'incidence.

57.

C. R., t. IX, p. 91 (15 juillet 1839). — Suite.

§ V. — *Sur les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples dans les milieux isotropes.*

Pour obtenir complètement les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples dans les milieux isotropes, il faut joindre aux lois générales établies dans le paragraphe précédent celles qui résultent de la forme particulière sous laquelle se présentent les équations de condition relatives à la surface de séparation de deux semblables milieux. Pour fixer les idées, nous nous bornerons ici à considérer le cas où, dans chaque système de molécules, les équations des mouvements infiniment petits peuvent être réduites sans erreur sensible à des équations homogènes du second ordre; et nous supposerons que le mouvement incident, étant simple, donne naissance, d'une part, à un seul mouvement simple réfléchi, d'autre part, à un seul mouvement simple réfracté, ces trois mouvements étant du nombre de ceux dans lesquels la densité reste invariable. Enfin nous prendrons la surface réfléchissante pour plan des y, z . Cela posé, soient, pour le premier milieu, situé du côté des x négatives,

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}$$

les déplacements symboliques d'une molécule et leurs dérivées relatives à x , dans le mouvement incident, ou dans le mouvement réfléchi, ou bien encore dans le mouvement résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Soient au contraire, pour le second milieu, situé du côté des x positives,

$$\xi', \eta', \zeta', \varphi', \chi', \psi'$$

les déplacements symboliques d'une molécule et leurs dérivées rela-

tives à x dans le rayon réfracté. Les valeurs de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, relatives au mouvement incident, seront de la forme

$$(1) \quad \bar{\xi} = A e^{u(x+vy+wz-st)}, \quad \bar{\eta} = B e^{u(x+vy+wz-st)}, \quad \bar{\zeta} = C e^{u(x+vy+wz-st)},$$

les constantes réelles ou imaginaires u, v, w, s, A, B, C étant liées entre elles par les équations

$$(2) \quad s^2 = \epsilon(u^2 + v^2 + w^2), \quad Au + Bv + Cw = 0,$$

et la lettre ϵ désignant une constante réelle. Si maintenant on passe du mouvement incident au mouvement réfléchi ou réfracté, les valeurs de

$$v, w, s$$

resteront les mêmes, d'après ce qu'on a vu dans le § IV; mais on ne pourra en dire autant des coefficients

$$u, A, B, C$$

qui feront place à d'autres représentés par

$$u, A, B, C,$$

ou par

$$u', A', B', C',$$

la valeur de u , étant

$$(3) \quad u' = -u.$$

En conséquence, les valeurs de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, relatives au mouvement réfléchi, seront de la forme

$$(4) \quad \bar{\xi} = A' e^{-u(x+vy+wz-st)}, \quad \bar{\eta} = B' e^{-u(x+vy+wz-st)}, \quad \bar{\zeta} = C' e^{-u(x+vy+wz-st)},$$

les coefficients A, B, C , étant liés à u, v, w par la formule

$$(5) \quad -Au + Bv + Cw = 0,$$

et pareillement les valeurs de ξ', η', ζ' , relatives au mouvement réfracté, seront de la forme

$$(6) \quad \xi' = A'' e^{u'(x+vy+wz-st)}, \quad \eta' = B'' e^{u'(x+vy+wz-st)}, \quad \zeta' = C'' e^{u'(x+vy+wz-st)},$$



les constantes u', v, w, s, A', B', C' étant liées entre elles par les équations

$$(7) \quad s^2 = i'(u'^2 + v^2 + w^2), \quad A'u' + B'v + C'w = 0,$$

et i' étant ce que devient la constante réelle i quand on passe du premier milieu au second. Ajoutons que, si dans le premier milieu on considère à la fois les ondes incidentes et réfléchies, la superposition de ces ondes produira un mouvement dans lequel les valeurs de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ deviendront

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = A e^{i u x + v y + w z - i t} + A' e^{-i u x + v y + w z - i t}, \\ \bar{\eta} = B e^{i u x + v y + w z - i t} + B' e^{-i u x + v y + w z - i t}, \\ \bar{\zeta} = C e^{i u x + v y + w z - i t} + C' e^{-i u x + v y + w z - i t}. \end{cases}$$

C'est entre les valeurs de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}$ et de $\bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}', \bar{\varphi}', \bar{\chi}', \bar{\psi}'$, tirées des formules (6) et (8), que devront subsister, pour $x = 0$, les équations de condition relatives à la surface réfléchissante.

Considérons spécialement le cas où les mouvements incident, réfléchi et réfracté sont du nombre de ceux qui ne s'éteignent pas en se propageant, et où l'on a par suite

$$(9) \quad \begin{cases} u = v \sqrt{-1}, & v = v \sqrt{-1}, & w = w \sqrt{-1}, & s = s \sqrt{-1}, \\ u' = v' \sqrt{-1}, & & & \end{cases}$$

v, w, s, v' désignant des quantités réelles. Posons d'ailleurs

$$(10) \quad k = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad k' = \sqrt{v'^2 + w'^2}.$$

Comme les formules (2) et (7), jointes aux formules (9) et (10), donneront

$$i = \frac{s^2}{k^2}, \quad i' = \frac{s'^2}{k'^2},$$

il est clair que les constantes réelles i, i' seront positives. Soient maintenant

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\psi}_0$$

ce que deviennent les déplacements symboliques d'une molécule et

leurs dérivées relatives à x , en un point de la surface réfléchissante, quand on tient compte des perturbations qu'éprouvent dans le voisinage de cette surface les mouvements infiniment petits. On obtiendra, pour $x = 0$, entre les expressions

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}$$

et

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\psi}_0,$$

des équations de condition représentées par les formules (25) ou (27) du § III. Donc alors, si la constante réelle que nous avons désignée par f est telle que l'on ait

$$(11) \quad \frac{k^2}{i+1} > v^2 + w^2,$$

on trouvera

$$(12) \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}_0, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}_0, \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_0.$$

Si au contraire on a

$$(13) \quad \frac{k^2}{i+1} < v^2 + w^2,$$

alors les équations de condition se trouveront comprises dans la formule

$$(14) \quad \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{-v} = \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}{v} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{w} = \frac{\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0}{v^2} = \frac{\bar{\chi} - \bar{\chi}_0}{-v} = \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_0}{-vw},$$

la valeur de v étant

$$(15) \quad v = \left(v^2 + w^2 - \frac{k^2}{i+1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pareillement, si, en nommant f' ce que devient f quand on passe du premier milieu au second, on a

$$(16) \quad \frac{k'^2}{i'+1} > v'^2 + w'^2,$$

on trouvera

$$(17) \quad \bar{\xi}' = \bar{\xi}_0, \quad \bar{\eta}' = \bar{\eta}_0, \quad \bar{\zeta}' = \bar{\zeta}_0, \quad \bar{\varphi}' = \bar{\varphi}_0, \quad \bar{\chi}' = \bar{\chi}_0, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}_0.$$



Si l'on a au contraire

$$(18) \quad \frac{k'^2}{1+\Gamma'} < v^2 + w^2,$$

on trouvera

$$(19) \quad \frac{\bar{x}' - \bar{x}'_0}{-v'} = \frac{\bar{y}' - \bar{y}'_0}{v} = \frac{\bar{z}' - \bar{z}'_0}{w} = \frac{\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}'_0}{v'^2} = \frac{\bar{\chi}' - \bar{\chi}'_0}{-v'v} = \frac{\bar{\psi}' - \bar{\psi}'_0}{-v'w},$$

la valeur de v' étant

$$(20) \quad v' = \left(v^2 + w^2 - \frac{k'^2}{1+\Gamma'} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme on ne connaît pas *a priori* la loi des actions moléculaires, ni par suite les valeurs des constantes Γ, Γ' , le seul moyen de savoir si ces constantes vérifient les formules (11) et (16), ou (13) et (18), est de chercher les conséquences qui se déduisent de l'une et l'autre supposition et de les comparer aux résultats de l'expérience. Or, si l'on admet les formules (11) et (16), alors les conditions (12), jointes aux conditions (17), donneront, pour $x = 0$,

$$(21) \quad \bar{x} = \bar{x}', \quad \bar{y} = \bar{y}', \quad \bar{z} = \bar{z}', \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}', \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}', \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}'.$$

De ces dernières équations, combinées avec les formules (6), (8), on tirera

$$(22) \quad \begin{cases} A + A_1 = A', & B + B_1 = B', & C + C_1 = C', \\ a(A - A_1) = a'A', & a(B - B_1) = a'B', & a(C - C_1) = a'C', \end{cases}$$

et par suite

$$(23) \quad \frac{A}{A} = \frac{B}{B} = \frac{C}{C} = \frac{a - a'}{a + a'},$$

$$(24) \quad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{2a}{a + a'};$$

puis, de ces dernières, jointes aux formules (2), (5) et (7), on conclura

$$(25) \quad \begin{cases} Au + Bv + Cw = 0, \\ -Au + Bv + Cw = 0, \\ Au' + Bv' + Cw' = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs on tire des formules (25)

$$(26) \quad Au = Au' = 0, \quad Bv + Cw = 0,$$

puis, de celles-ci, combinées avec les formules (9) et (1),

$$(27) \quad Av = Av' = 0, \quad Bv + Cw = 0$$

et

$$(28) \quad v\bar{x} = v'\bar{x}' = 0, \quad v\bar{y} + w\bar{z} = 0;$$

par conséquent

$$(29) \quad v\bar{x} = v'\bar{x}' = 0, \quad v\bar{y} + w\bar{z} = 0.$$

Enfin, pour satisfaire à la première des équations (29), il faut supposer que l'on a

$$(30) \quad v = v' = 0,$$

c'est-à-dire que les plans des ondes incidentes et réfractées sont parallèles au plan des y, z , ou que l'on a

$$(31) \quad \bar{x} = 0,$$

c'est-à-dire que les vibrations des molécules sont perpendiculaires à l'axe des x . Donc, lorsque les formules (11) ou (16) se vérifient, un mouvement incident, que nous supposons simple, ne peut donner naissance à un seul mouvement simple réfléchi, et à un seul mouvement simple réfracté, que dans des cas très particuliers, savoir, lorsque les plans des ondes ou des directions des vibrations moléculaires sont parallèles à la surface réfléchissante.

Au contraire, un mouvement simple pourra se réfléchir et se réfracter, quelle que soit la direction des plans des ondes ou des vibrations moléculaires, si l'on suppose vérifiées, non plus les formules (11) et (16), mais les formules (13) et (18). Alors les variables

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}$$

d'une part, et les variables

$$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{\varphi}', \bar{\chi}', \bar{\psi}'$$



d'autre part, se trouveront liées à

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\Psi}_0$$

par les formules (14), (19), dont chacune comprendra cinq équations distinctes; et l'élimination de

$$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\chi}_0, \bar{\Psi}_0,$$

entre les dix équations dont le système est représenté par ces deux formules, fournira, entre les seules variables

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\Psi}, \\ \bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}', \bar{\varphi}', \bar{\chi}', \bar{\Psi}'$$

quatre équations de condition qui devront subsister pour $x = 0$. Pour obtenir ces équations de condition, on observera qu'en raisonnant comme dans le § III on tire des formules (14) et (19), non seulement

$$w\bar{\eta} - v\bar{\zeta} = w\bar{\eta}_0 - v\bar{\zeta}_0, \quad \bar{\Psi} - w\bar{\xi} = \bar{\Psi}_0 - w\bar{\xi}_0, \quad v\bar{\xi} - \bar{\chi} = v\bar{\xi}_0 - \bar{\chi}_0$$

et

$$w\bar{\eta}' - v\bar{\zeta}' = w\bar{\eta}_0 - v\bar{\zeta}_0, \quad \bar{\Psi}' - w\bar{\xi}' = \bar{\Psi}_0 - w\bar{\xi}_0, \quad v\bar{\xi}' - \bar{\chi}' = v\bar{\xi}_0 - \bar{\chi}_0.$$

mais encore

$$\bar{\varphi} + z\bar{\xi} + \frac{\epsilon}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}_0 + z\bar{\xi}_0 + \frac{\epsilon}{v}\bar{\eta}_0$$

et

$$\bar{\varphi}' + z\bar{\xi}' + \frac{\epsilon}{v}\bar{\eta}' = \bar{\varphi}_0 + z\bar{\xi}_0 + \frac{\epsilon}{v}\bar{\eta}_0,$$

pourvu que l'on choisisse z, ϵ de manière à vérifier simultanément les deux formules

$$(32) \quad v^2 - zv + \epsilon = 0, \quad v'^2 - zv' + \epsilon = 0.$$

On devra donc avoir alors, pour $x = 0$,

$$(33) \quad w\bar{\eta} - v\bar{\zeta} = w\bar{\eta}' - v\bar{\zeta}', \quad \bar{\Psi} - w\bar{\xi} = \bar{\Psi}' - w\bar{\xi}', \quad v\bar{\xi} - \bar{\chi} = v\bar{\xi}' - \bar{\chi}'$$

et

$$(34) \quad \bar{\varphi} + z\bar{\xi} + \frac{\epsilon}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}' + z\bar{\xi}' + \frac{\epsilon}{v}\bar{\eta}'.$$

De plus, comme, en vertu des équations (32), v, v' sont les deux racines de l'équation du second degré

$$x^2 - vx + \epsilon = 0,$$

on aura nécessairement

$$(35) \quad z = v + v', \quad \epsilon = vv',$$

et par suite la formule (34) pourra être réduite à

$$(36) \quad \bar{\varphi} + (v + v')\bar{\xi} + \frac{vv'}{v}\bar{\eta} = \bar{\varphi}' + (v + v')\bar{\xi}' + \frac{vv'}{v'}\bar{\eta}'.$$

Les formules (33) et (36) seront précisément les quatre équations de condition demandées.

Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer qu'en vertu des formules (6), (8), les équations (33) peuvent être réduites aux trois suivantes

$$(37) \quad \begin{cases} D_x \bar{\eta} - D_y \bar{\zeta} = D_x \bar{\eta}' - D_y \bar{\zeta}', \\ D_x \bar{\xi} - D_z \bar{\xi} = D_x \bar{\xi}' - D_z \bar{\xi}', \\ D_y \bar{\xi} - D_x \bar{\eta} = D_y \bar{\xi}' - D_x \bar{\eta}', \end{cases}$$

desquelles on tire évidemment

$$(38) \quad \begin{cases} D_x \eta - D_y \zeta = D_x \eta' - D_y \zeta', \\ D_x \xi - D_z \xi = D_x \xi' - D_z \xi', \\ D_y \xi - D_x \eta = D_y \xi' - D_x \eta', \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(39) \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta'}{\partial y} = \frac{\partial \eta'}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \frac{\partial \xi'}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial y} \frac{\partial \eta'}{\partial x}.$$

Les formules (39) sont précisément les trois premières des quatre formules que j'ai données en 1836 comme propres à représenter les équations

tions de condition relatives à la surface réfléchissante. (Voir les *Nouveaux Exercices*, p. 203.)

Ajoutons que l'équation (36) peut s'écrire comme il suit :

$$(40) \quad \bar{\eta} + D_y \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} - \frac{D_x}{v v'} \right) \bar{\xi} = \bar{\eta}' + D_y \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} + \frac{D_x}{v v'} \right) \bar{\xi}.$$

Observons encore qu'en vertu des formules (1) et (2), ou (4) et (5), on vérifiera l'équation

$$(41) \quad D_x \bar{\xi} + D_y \bar{\eta} + D_z \bar{\zeta} = 0,$$

en supposant les déplacements symboliques

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$$

relatifs au mouvement incident, ou au mouvement réfléchi, par conséquent aussi, en supposant ces déplacements symboliques relatifs au mouvement résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Pareillement, il suit des formules (6) et (7) que les déplacements symboliques

$$\bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}'$$

relatifs au mouvement réfracté, vérifient la formule

$$(42) \quad D_x \bar{\xi}' + D_y \bar{\eta}' + D_z \bar{\zeta}' = 0.$$

Au reste, les formules (41) et (42) entraînent les deux suivantes :

$$(43) \quad \begin{cases} D_x \bar{\xi} + D_y \bar{\eta} + D_z \bar{\zeta} = 0, \\ D_x \bar{\xi}' + D_y \bar{\eta}' + D_z \bar{\zeta}' = 0, \end{cases}$$

qui se déduisent immédiatement de l'hypothèse admise, puisqu'elles expriment que les mouvements propagés dans chaque système de molécules ont lieu sans changement de densité. On tirera d'ailleurs des formules (41), (42)

$$D_x (\bar{\xi} - \bar{\xi}') + D_y (\bar{\eta} - \bar{\eta}') + D_z (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}') = 0,$$

ou, ce qui revient au même, en égard aux équations (6) et (8),

$$D_x (\bar{\xi} - \bar{\xi}') + v (\bar{\eta} - \bar{\eta}') + w (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}') = 0,$$

et par conséquent

$$(44) \quad \begin{cases} v (\bar{\eta} - \bar{\eta}') + w (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}') = -D_x (\bar{\xi} - \bar{\xi}'), \\ v (\bar{\eta}' - \bar{\eta}') + w (\bar{\zeta}' - \bar{\zeta}') = -D_x' (\bar{\xi} - \bar{\xi}'), \end{cases}$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux variables x, y, z .

Les quatre équations de condition (37) et (40) peuvent être remplacées par d'autres que l'on déduit aisément des formules (14) et (19) combinées avec les équations (44). En effet, les formules (14) et (19) donnent, non seulement

$$\bar{\xi} - \bar{\xi}_0 = \frac{\bar{\chi} - \bar{\chi}_0}{v} = \frac{\bar{\Psi} - \bar{\Psi}_0}{w}, \quad \bar{\eta} - \bar{\eta}_0 = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{w},$$

$$\bar{\xi}' - \bar{\xi}'_0 = \frac{\bar{\chi}' - \bar{\chi}'_0}{v} = \frac{\bar{\Psi}' - \bar{\Psi}'_0}{w}, \quad \bar{\eta}' - \bar{\eta}'_0 = \frac{\bar{\zeta}' - \bar{\zeta}'_0}{w},$$

et par suite

$$(45) \quad \bar{\xi} - \bar{\xi}' = \frac{\bar{\chi} - \bar{\chi}'}{v} = \frac{\bar{\Psi} - \bar{\Psi}'}{w}, \quad \bar{\eta} - \bar{\eta}' = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}'}{w},$$

mais encore

$$\bar{\varphi} + \alpha \bar{\xi} + \frac{6}{v} \bar{\eta} = \bar{\varphi}_0 + \alpha \bar{\xi}_0 + \frac{6}{v} \bar{\eta}_0, \quad \bar{\varphi}' + \alpha \bar{\xi}' + \frac{6}{v} \bar{\eta}' = \bar{\varphi}_0 + \alpha \bar{\xi}_0 + \frac{6}{v} \bar{\eta}_0,$$

et par suite

$$(46) \quad \bar{\varphi} - \bar{\varphi}' + \alpha (\bar{\xi} - \bar{\xi}') + \frac{6}{v} (\bar{\eta} - \bar{\eta}') = 0,$$

pourvu que l'on suppose

$$\alpha = v + v', \quad \epsilon = v v'.$$

Or les formules (45) et (46), qui ne diffèrent pas au fond des formules (33), (34), donneront d'abord

$$(47) \quad \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}'}{v} = \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}'}{w}, \quad \frac{\bar{\chi} - \bar{\chi}'}{v} = \frac{\bar{\Psi} - \bar{\Psi}'}{w},$$



ou, ce qui revient au même,

$$(48) \quad D_x \bar{\eta} - D_y \bar{\xi} = D_x \bar{\eta}' - D_y \bar{\xi}', \quad D_x (D_x \bar{\eta} - D_y \bar{\xi}) = D_x (D_x \bar{\eta}' - D_y \bar{\xi}');$$

puis, eu égard aux formules (44),

$$\bar{\xi} - \bar{\xi}' = \frac{v(\bar{\eta} - \bar{\eta}') + w(\bar{\psi} - \bar{\psi}')}{v^2 + w^2} = -\frac{D_x^2 (\bar{\xi} - \bar{\xi}')}{v^2 + w^2},$$

$$(\alpha + D_x) (\bar{\xi} - \bar{\xi}') = -\epsilon \frac{\bar{\eta} - \bar{\eta}'}{v} = -\epsilon \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}'}{w} = -\epsilon \frac{v(\bar{\eta} - \bar{\eta}') + w(\bar{\xi} - \bar{\xi}')}{v^2 + w^2} = \epsilon \frac{D_x (\bar{\xi} - \bar{\xi}')}{v^2 + w^2},$$

et par conséquent

$$(49) \quad \begin{cases} (D_x^2 + v^2 + w^2) (\bar{\xi} - \bar{\xi}') = 0, \\ [\epsilon D_x - (v^2 + w^2) (\alpha + D_x)] (\bar{\xi} - \bar{\xi}') = 0, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (35),

$$(50) \quad \begin{cases} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \bar{\xi} = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \bar{\xi}', \\ \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} + \frac{D_x}{v v'} \right) \right] \bar{\xi} = \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} + \frac{D_x}{v v'} \right) \right] \bar{\xi}'. \end{cases}$$

D'ailleurs on tirera immédiatement des formules (49) et (50),

$$(51) \quad D_x \bar{\eta} - D_y \bar{\xi} = D_x \bar{\eta}' - D_y \bar{\xi}', \quad D_x (D_x \bar{\eta} - D_y \bar{\xi}) = D_x (D_x \bar{\eta}' - D_y \bar{\xi}'),$$

$$(52) \quad \begin{cases} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \bar{\xi} = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \bar{\xi}', \\ \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} + \frac{D_x}{v v'} \right) \right] \bar{\xi} = \left[D_x - (D_y^2 + D_z^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} + \frac{D_x}{v v'} \right) \right] \bar{\xi}'. \end{cases}$$

Les équations de condition (51) et (52) offrent cela de remarquable, que les deux dernières renferment seulement les déplacements $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ mesurés, dans l'un et l'autre milieu, suivant des droites perpendiculaires à la surface réfléchissante, tandis que les deux premières renferment seulement les déplacements η , ξ ou η' , ξ' , mesurés suivant des droites parallèles à cette surface.

Posons maintenant, pour abrégér,

$$(53) \quad k^2 = u^2 + v^2 + w^2 = -k^2 \quad \text{et} \quad k'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 = -k'^2.$$

Les conditions (48), (50), qui doivent subsister pour $x=0$, étant

jointes aux formules (6), (8), donneront

$$Bw - Cv + B'w - C'v = B'w - C'v,$$

$$u[(Bw - Cv) - (B'w - C'v)] = u'(B'w - C'v)$$

et

$$k^2(A + A') = k'^2 A',$$

$$u \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v v'} \right) (A - A') - \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} \right) (v^2 + w^2) (A + A')$$

$$= \left[u' - (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} + \frac{u'}{v v'} \right) \right] A',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{B'w - C'v}{u} = \frac{(Bw - Cv) + (B'w - C'v)}{u} = \frac{(Bw - Cv) - (B'w - C'v)}{u'}$$

$$\frac{A'}{k^2 u \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v v'} \right)} = \frac{A + A'}{k'^2 u' \left(1 - \frac{v'^2 + w'^2}{v' v'} \right)}$$

$$= \frac{A - A'}{k^2 u' \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v v'} \right) + (k'^2 - k^2) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} \right)};$$

par conséquent

$$(54) \quad \begin{cases} B'w - C'v = \frac{u - u'}{u + u'} (Bw - Cv), \\ B'w - C'v = \frac{2u}{u + u'} (Bw - Cv), \end{cases}$$

$$(55) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{(k'^2 u - k^2 u') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v v'} \right) - (k'^2 - k^2) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} \right)}{(k'^2 u + k^2 u') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v v'} \right) + (k'^2 - k^2) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} \right)} A, \\ A' = \frac{2k^2 u \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v v'} \right)}{(k'^2 u + k^2 u') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v v'} \right) + (k'^2 - k^2) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} \right)} A. \end{cases}$$

Comme, en vertu des formules (53), on a

$$k'^2 - k^2 = (u' - u)(u' + u),$$

$$k'^2 u - k^2 u' = (v^2 + w^2 - u u')(u - u'), \quad k'^2 u + k^2 u' = (v^2 + w^2 + u u')(u + u'),$$

il est clair que les équations (55) peuvent s'écrire comme il suit

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{A}{A} = \frac{(v^2 + w^2 - uv') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right) + (u' + u) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'}\right)}{(v^2 + w^2 + uv') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right) + (u' - u) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'}\right)} \frac{u - u'}{u + u'}, \\ \frac{A'}{A} = \frac{k^2 \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right)}{(v^2 + w^2 + uv') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right) + (u' - u) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'}\right)} \frac{2u}{u + u'}. \end{cases}$$

Les équations (54) et (55) ou (56), jointes aux formules (5) et (7), suffisent pour déterminer complètement les valeurs des constantes

$$A, B, C, \text{ et } u', A', B', C'$$

relatives aux mouvements réfléchis et réfractés, quand on connaît les valeurs des constantes

$$u, v, w, s, A, B, C$$

relatives au mouvement incident.

Si l'on veut, dans les valeurs de

$$A, B, C, A', B', C',$$

introduire les coefficients réels

$$v, \bar{v}, w, u',$$

à la place des coefficients imaginaires

$$u, v, w, u',$$

il suffira d'avoir égard aux formules (9). Alors les formules (54) et (56), jointes aux formules (2) et (7), donneront

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{B, w - C, v}{B w - C v} = \frac{v - u'}{v + u'}, \\ \frac{B' w - C' v}{B w - C v} = \frac{2u}{v + u'}. \end{cases}$$

$$(58) \quad \begin{cases} \frac{A}{A} = \frac{(v^2 + w^2 - uv') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right) + (v' + u) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'}\right) \sqrt{-1}}{(v^2 + w^2 + uv') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right) + (v' - u) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'}\right) \sqrt{-1}} \frac{v - u'}{v + u'}, \\ \frac{A'}{A} = \frac{k^2 \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right)}{(v^2 + w^2 + uv') \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{v\bar{v}'}\right) + (v' - u) (v^2 + w^2) \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'}\right) \sqrt{-1}} \frac{v - u'}{v + u'}. \end{cases}$$

et

$$(59) \quad \begin{cases} -A, v + B, v + C, w = 0, \\ A' u' + B' v + C' w = 0. \end{cases}$$

Les calculs se simplifient lorsqu'on suppose l'axe des z parallèle aux traces des plans des ondes sur la surface réfléchissante. Alors, la formule (23) du § IV devant se réduire à

$$y' = 0,$$

• on aura nécessairement

$$w = 0, \quad w = w \sqrt{-1} = 0,$$

et par suite les formules (1), (4), (6) deviendront

$$(60) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = A e^{u'x + vy - t}, & \bar{\eta} = B e^{u'x + vy - t}, & \bar{\zeta} = C e^{u'x + vy - t}, \end{cases}$$

$$(61) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = A, e^{-u'x + vy - t}, & \bar{\eta} = B, e^{-u'x + vy - t}, & \bar{\zeta} = C' e^{-u'x + vy - t}, \end{cases}$$

$$(62) \quad \begin{cases} \bar{\xi}' = A' e^{u'x + vy - t}, & \bar{\eta}' = B' e^{u'x + vy - t}, & \bar{\zeta}' = C' e^{u'x + vy - t}. \end{cases}$$

Alors aussi, les valeurs des déplacements symboliques étant indépendantes de z , dans chacun des mouvements incident, réfléchis et réfractés, les dérivées de ces déplacements, relatives à z , s'évanouiront dans les formules (48) et (50), qui se réduiront aux suivantes

$$(63) \quad D_y \zeta = D_y \bar{\zeta}', \quad D_x D_y \bar{\zeta} = D_x D_y \bar{\zeta}',$$

$$(64) \quad \begin{cases} (D_x^2 + D_y^2) \bar{\xi} = (D_x^2 + D_y^2) \bar{\xi}', \\ \left[D_x - D_y^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'} + \frac{D_x}{v\bar{v}'} \right) \right] \bar{\xi} = \left[D_x - D_y^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}'} + \frac{D_x}{v\bar{v}'} \right) \right] \bar{\xi}'. \end{cases}$$

Comme on pourra d'ailleurs, dans celles-ci, remplacer D_x par v , les



formules (63) donneront

$$\zeta = \zeta', \quad D_x \zeta = D_x \zeta',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\zeta = \zeta', \quad \psi = \psi'.$$

Ces dernières, qui se trouvent déjà comprises parmi les conditions (21), donneront encore

$$C + C_1 = C', \quad u(C - C_1) = u' C_1,$$

par conséquent

$$(65) \quad \frac{C_1}{C} = \frac{u - u'}{u + u'}, \quad \frac{C'}{C} = \frac{2u}{u + u'}$$

et l'on tirera des formules (64)

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Lambda_1}{\Lambda} &= \frac{(v^2 - uu') \left(1 - \frac{v^2}{\partial v^2}\right) + (u' + u)v^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)}{(v^2 + uu') \left(1 - \frac{v^2}{\partial v^2}\right) + (u' - u)v^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)} \frac{u - u'}{u + u'}, \\ \frac{\Lambda'}{\Lambda} &= \frac{h^2 \left(1 - \frac{v^2}{\partial v^2}\right)}{(v^2 + uu') \left(1 - \frac{v^2}{\partial v^2}\right) + (u' - u)v^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)} \frac{2u}{u + u'}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, en vertu des formules (2), (5), (7) et (53), on aura, non seulement

$$(67) \quad Au + Bv = 0$$

et

$$(68) \quad -Au + Bv = 0, \quad A'u' + B'v = 0,$$

mais encore

$$(69) \quad h^2 = u^2 + v^2 = \frac{s^2}{v}, \quad h'^2 = u'^2 + v'^2 = \frac{s'^2}{v'}.$$

Enfin on ne devra pas oublier que ces diverses formules se rapportent au cas où le mouvement incident, réfléchi et réfracté sont du nombre

de ceux qui ne s'éteignent pas en se propageant, et où par suite les valeurs de u, v, s, u' sont de la forme

$$(70) \quad u = u\sqrt{-1}, \quad v = v\sqrt{-1}, \quad s = s\sqrt{-1}, \quad u' = u'\sqrt{-1}.$$

58.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires.*

C. R., t. IX, p. 184 (5 août 1839).

On sait que je me suis déjà occupé, à diverses reprises, de l'intégration des équations du mouvement de notre système planétaire, et que tel a été l'objet direct ou indirect de plusieurs des Mémoires que j'ai publiés à Turin et à Prague, dans les années 1831, 1832, 1833 et 1835. Parmi ces Mémoires, il en est un qui a surtout attiré l'attention des géomètres, les résultats qu'il renferme ayant paru assez nouveaux et assez importants pour que des savants distingués aient voulu en reproduire une traduction italienne, en joignant au texte des Notes fort étendues, propres à familiariser le lecteur avec les méthodes dont j'ai fait usage. Je veux parler du Mémoire qui, comme l'indique son titre, a spécialement pour objet la Mécanique céleste et un nouveau calcul applicable à un grand nombre de questions diverses. C'est dans ce Mémoire que j'ai donné des formules pour la détermination directe de chacun des coefficients numériques relatifs aux perturbations des mouvements planétaires, et pour la simplification de calculs qui exigent quelquefois, des astronomes, plusieurs années de travail. Un des membres correspondants de cette Académie, M. Plana, m'ayant parlé du temps que consommaient de pareils calculs, je lui dis que j'étais persuadé qu'il serait possible de les abrégier, et même de déterminer immédiatement le coefficient numérique correspondant à une inégalité



donnée. Effectivement, au bout de quelques jours, je lui rapportai des formules à l'aide desquelles on pouvait résoudre de semblables questions, et dont j'avais déjà fait l'application à la détermination de certains nombres qu'il est utile de considérer dans la théorie de Saturne et de Jupiter. Au reste, pour établir les formules dont il s'agit, et d'autres formules analogues renfermées dans le Mémoire ci-dessus mentionné, il suffisait d'appliquer au développement de la fonction, désignée par R dans la *Mécanique céleste*, des théorèmes bien connus, tels que le théorème de Taylor et le théorème de Lagrange sur le développement des fonctions des racines d'équations algébriques ou transcendentes. Mais il était nécessaire de recourir à d'autres principes et à de nouvelles méthodes pour obtenir des résultats plus importants, que je vais rappeler en peu de mots.

En joignant à la série de Maclaurin le reste qui la complète, et présentant ce reste sous la forme que Lagrange lui a donnée, ou sous d'autres formes du même genre, on peut s'assurer, dans un grand nombre de cas, qu'une fonction explicite d'une seule variable x est développable, pour certaines valeurs de x , en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable, et déterminer la limite supérieure des modules des valeurs réelles ou imaginaires de x , pour lesquels le développement subsiste. De plus, la théorie du développement des fonctions explicites de plusieurs variables peut être aisément ramenée à la théorie du développement des fonctions explicites d'une seule variable. Mais il importe d'observer que l'application des règles, à l'aide desquelles on peut décider si la série de Maclaurin est convergente ou divergente, devient souvent très difficile, attendu que dans cette série le terme général, ou proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la variable, renferme la dérivée de l'ordre n de la fonction explicite donnée, ou du moins la valeur de cette dérivée qui correspond à une valeur nulle de x , et que, hormis certains cas particuliers, la dérivée de l'ordre n prend une forme de plus en plus compliquée à mesure que n augmente.

Quant aux fonctions implicites, on avait présenté pour leurs déve-

loppements en séries, diverses formules déduites le plus souvent de la méthode des coefficients indéterminés. Mais les démonstrations qu'on avait données de ces formules étaient généralement insuffisantes : 1^o parce qu'on n'examinait pas d'ordinaire si les séries étaient convergentes ou divergentes, et qu'en conséquence on ne pouvait dire le plus souvent dans quel cas les formules devaient être admises ou rejetées ; 2^o parce qu'on ne s'était point attaché à démontrer que les développements obtenus avaient pour sommes les fonctions développées, et qu'il peut arriver qu'une série convergente provienne du développement d'une fonction sans que la somme de la série soit équivalente à la fonction elle-même. Il est vrai que l'établissement de règles générales propres à déterminer dans quels cas les développements des fonctions implicites sont convergents, et représentent ces mêmes fonctions, paraissait offrir de grandes difficultés. On peut en juger en lisant attentivement le Mémoire de M. Laplace sur la convergence ou la divergence de la série que fournit, dans le mouvement elliptique d'une planète, le développement du rayon vecteur suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Je pensai donc que les astronomes et les géomètres attacheraient quelque prix à un travail qui avait pour but d'établir, sur le développement des fonctions, soit explicites, soit implicites, des principes généraux et d'une application facile, à l'aide desquels on pût, non seulement démontrer avec rigueur les formules et indiquer les conditions de leur existence, mais encore fixer les limites des erreurs que l'on commet en négligeant les restes qui doivent compléter les séries. Parmi ces règles, celles qui se rapportent à la fixation des limites des erreurs commises présentaient dans leur ensemble un nouveau calcul que je désignai sous le nom de *Calcul des limites*. Les principes de ce nouveau calcul se trouvent exposés, avec des applications à la Mécanique céleste, dans les Mémoires lithographiés à Turin, sous les dates du 15 octobre 1831, de 1832 et du 6 mars 1833. L'accueil bienveillant que reçurent ces Mémoires, dès qu'ils eurent été publiés, dut m'encourager à suivre la route qui s'était ouverte devant moi, et à exécuter le dessein que j'avais annoncé (Mémoire du 15 octobre 1831), de faire



voir comment le nouveau calcul peut être appliqué aux séries qui représentent les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires ou non linéaires. Tel est effectivement l'objet d'un Mémoire lithographié à Prague en 1835, et dans lequel je montre, d'une part, comment on peut s'assurer de la convergence des séries en question; d'autre part, comment on peut fixer des limites supérieures aux modules des restes qui complètent ces mêmes séries. Toutefois, quoique les résultats auxquels je suis parvenu dans le Mémoire de 1835 paraissent déjà dignes de remarque, cependant ils ne forment qu'une partie de ceux auxquels on se trouve conduit par la méthode dont j'ai fait usage. C'est ce que j'ai déjà observé dans une lettre adressée à M. Coriolis, le 28 janvier 1837. Cette lettre, insérée dans les *Comptes rendus* de nos séances, renferme l'énoncé de quelques théorèmes importants que je me propose maintenant de développer, surtout sous le rapport de leurs applications à la Mécanique céleste, à laquelle ils semblent promettre d'heureux et utiles perfectionnements. Pour ne point abuser de l'attention de l'Académie, je me bornerai aujourd'hui à donner l'énoncé précis et la démonstration d'un théorème fondamental inséré dans la lettre dont il s'agit.

THÉORÈME. — *x* désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de *x* sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de *x*, tant que le module de *x* conservera une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être finie et continue.

Démonstration. — Soit

$$f(x)$$

une fonction donnée de la variable *x*. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire *z* dont le module soit *Z* et l'argument *p*, en sorte qu'on ait

$$z = Ze^{p\sqrt{-1}},$$

on aura identiquement

$$(1) \quad \frac{\partial f(z)}{\partial Z} = \frac{1}{Z\sqrt{-1}} \frac{\partial f(z)}{\partial p}.$$

Supposons maintenant que l'on intègre les deux membres de l'équation (1): 1° par rapport à *Z* et à partir de *Z* = 0; 2° par rapport à *p* entre les limites *p* = - π , *p* = π . Si la fonction de *Z* et de *p*, représentée par *f(z)*, reste, avec sa dérivée *f'(z)*, finie et continue, quel que soit *p*, pour la valeur attribuée à *Z*, et pour une valeur plus petite, on trouvera

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dp = 2\pi f(0).$$

Si, de plus, la fonction *f(x)* s'évanouit avec *x*, l'équation (2) donnera simplement

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dp = 0.$$

Enfin, si, dans la formule (3), on remplace *f(z)* par le produit

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

x étant différent de *z*, et le module de *x* inférieur à *Z*, on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z f(z)}{z - x} dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z f(x)}{z - x} dp = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \dots\right) dp = 2\pi f(x),$$

et par suite

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z f(z)}{z - x} dp.$$

L'équation (4) suppose, comme les équations (2) et (3), que la fonction de *Z* et de *p*, représentée par *f(z)*, reste, avec sa dérivée *f'(z)*, finie et continue pour la valeur attribuée à *Z* et pour des valeurs plus petites. D'ailleurs, comme le rapport

$$\frac{z}{z - x}$$

est la somme de la progression géométrique

$$1, \frac{x}{z}, \frac{x^2}{z^2}, \dots$$



qui demeure convergente tant que le module de x reste inférieur au module Z de z ; il suit de la formule (4) que

$$f(x)$$

sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de x , si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ cessent d'être finies et continues.

Ainsi, en particulier, puisque les fonctions

$$\cos x, \sin x, e^x, e^{x^2}, \cos(1-x^2), \dots$$

et leurs dérivées du premier ordre ne cessent jamais d'être finies et continues, elles seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x . Au contraire, les fonctions

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \log(1+x), \text{arc tang } x, \dots$$

qui, lorsqu'on attribue à x une valeur imaginaire de la forme

$$Ze^{p\sqrt{-1}},$$

cessent d'être, avec leurs dérivées du premier ordre, fonctions continues de x , au moment où le module Z devient égal à 1, seront certainement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable x si la valeur réelle ou imaginaire de x offre un module inférieur à l'unité; mais elles pourront devenir et deviendront en effet divergentes si le module de x surpasse l'unité. Enfin, comme les fonctions

$$\frac{1}{e^x}, e^{\frac{1}{x^2}}, \cos \frac{1}{x}, \dots$$

deviennent discontinues avec leurs dérivées du premier ordre pour une valeur nulle de x , par conséquent lorsque le module de x est le

plus petit possible, elles ne seront jamais développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x .

Nota. — La démonstration précédente du théorème énoncé suppose que, si les conditions indiquées dans ce théorème sont remplies, l'équation (1) entraînera toujours l'équation (2). Or c'est ce dont on ne saurait douter. En effet, admettons que le module Z de z conserve une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction $f(z)$ et sa dérivée $f'(z)$ cessent d'être finies et continues. Pour une telle valeur de Z , la valeur commune des deux membres de la formule (1), savoir

$$e^{p\sqrt{-1}}f'(z) = e^{p\sqrt{-1}}f'(Ze^{p\sqrt{-1}}),$$

restera finie et déterminée; et l'on pourra en dire autant des fonctions réelles

$$\varphi(Z, p) = \frac{1}{2} [e^{p\sqrt{-1}}f'(Ze^{p\sqrt{-1}}) + e^{-p\sqrt{-1}}f'(Ze^{-p\sqrt{-1}})],$$

$$\chi(Z, p) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} [e^{p\sqrt{-1}}f'(Ze^{p\sqrt{-1}}) - e^{-p\sqrt{-1}}f'(Ze^{-p\sqrt{-1}})]$$

et, par conséquent, des intégrales doubles

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^Z \varphi(Z, p) dp dZ = \int_0^Z \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(Z, p) dZ dp,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^Z \chi(Z, p) dp dZ = \int_0^Z \int_{-\infty}^{\infty} \chi(Z, p) dZ dp.$$

Donc, puisqu'on aura identiquement

$$e^{p\sqrt{-1}}f'(z) = \varphi(Z, p) + \sqrt{-1}\chi(Z, p),$$

l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^Z e^{p\sqrt{-1}}f'(z) dp dZ = \int_0^Z \int_{-\infty}^{\infty} e^{p\sqrt{-1}}f'(z) dZ dp$$

conservera elle-même une valeur finie et déterminée. D'ailleurs, la fonction $f(z)$ restant par hypothèse finie et continue pour les valeurs attri-



buées à Z et pour une valeur plus petite, on aura encore

$$\int_0^z e^{p\sqrt{-1}} f'(z) dz = \int_0^z \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz = f(z) - f(0),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{p\sqrt{-1}} f'(z) dp = \frac{1}{Z\sqrt{-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial p} dp = 0,$$

comme on le conclura sans peine des principes établis dans le résumé des leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. Donc, dans l'hypothèse admise, l'équation (1) entrainera la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(z) - f(0)] dp = 0,$$

ou

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z) dp = \int_{-\pi}^{\pi} f(0) dp = 2\pi f(0),$$

qui est précisément l'équation (1).

Nous remarquerons en finissant que les fonctions ci-dessus prises pour exemples, et leurs dérivées du premier ordre, deviennent toujours infinies ou discontinues pour les mêmes valeurs du module de la variable indépendante. Si l'on était assuré qu'il en fût toujours ainsi, on pourrait, dans le théorème énoncé, se dispenser, comme nous l'avions fait dans le Mémoire de 1831, et dans la lettre à M. Coriolis, de parler de la fonction dérivée. Mais, comme on n'a point à cet égard une certitude suffisante, il est plus rigoureux d'énoncer le théorème dans les termes dont nous nous sommes servis plus haut.

Ce serait ne pas répondre suffisamment à l'attente de l'Académie, que de terminer cette Note sans payer un juste tribut de regrets à la mémoire de celui dont la perte récente laisse un grand vide au milieu de nous ⁽¹⁾. Si, au jour du deuil et de la tristesse, j'ai cru devoir me borner à joindre mes humbles prières à celles que la religion offrait pour lui, je n'en serai que plus empressé à m'acquitter des devoirs si doux que la reconnaissance m'impose envers un illustre confrère qui jadis parut prendre quelque plaisir à me compter au nombre de ses élèves, et voulut bien applaudir à mes premiers travaux.

(1) M. de Prony.

D'autres vous ont dit et vous diront encore tout ce qu'il a fait comme savant, comme ingénieur, et les nombreux monuments de ses doctes veilles suffiraient pour l'attester. Pour moi, ce que je me plairai surtout à rappeler aujourd'hui, c'est cette bienveillance naturelle avec laquelle il abordait, il recherchait ceux qui cultivaient les sciences, ceux-là même dont il n'aurait pas partagé toutes les convictions. Il me souvient encore de l'aimable accueil que je reçus de lui après une absence de huit années. Pour la consolation de ma patrie, il y a deux sentiments qu'en France on aime à voir profondément gravés dans les cœurs, et auxquels, je le sais par expérience, on se plaît à rendre justice, je veux dire, le dévouement à l'infortune et l'amour sincère de la vérité.

59.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire où l'on montre comment une seule et même théorie peut fournir les lois de propagation de la lumière et de la chaleur.*

C. R., t. IX, p. 283 (26 août 1839).

Les principes exposés dans mes précédents Mémoires, comme j'en ai fait l'observation, et comme on le verra de plus en plus par les développements que je donnerai, sont applicables à la solution d'un grand nombre de problèmes de Physique mathématique. Mais, parmi les conséquences qui se déduisent de ces principes, il en est plusieurs qu'il me paraît utile de signaler dès à présent. Ainsi, en particulier, je suis parvenu à reconnaître qu'il existe, entre les lois de propagation de la chaleur et les lois de la polarisation de la lumière réfléchie, une connexion intime qu'on n'aurait pas soupçonnée au premier abord, et que je vais établir en peu de mots.

Dans mes Leçons données au Collège de France en 1830 et dans les Mémoires que j'avais déjà publiés à cette époque sur la Théorie de la lumière, j'ai prouvé que les mouvements par ondes planes, qui peuvent se propager dans un système de molécules *isotrope* où l'élasticité reste la même en tous sens, sont de deux espèces, savoir : des mouvements dans lesquels les vibrations moléculaires restent parallèles aux plans



des ondes, et des mouvements dans lesquels les vibrations sont perpendiculaires à ces plans; c'est-à-dire, en d'autres termes, des mouvements qui ont lieu sans que la densité varie, et des mouvements qu'accompagne un changement de densité du système. Ainsi s'est trouvée détruite l'objection qu'on avait élevée contre la supposition admise par Fresnel, savoir que, dans les rayons lumineux, il existe des vibrations transversales. J'ai remarqué d'ailleurs que, dans le cas où la propagation du mouvement ne s'effectuait pas en tous sens suivant les mêmes lois, les vibrations cessaient d'être rigoureusement parallèles aux plans des ondes, et j'ai montré, d'une part, dans les *Exercices de Mathématiques*, d'autre part, dans les Mémoires présentés à l'Académie les 17 et 31 mai 1830, comment on pouvait, dans ce cas, obtenir ce que Fresnel appelle la surface des ondes, soit en la considérant comme une surface enveloppée de tous côtés par les ondes planes, qui représentent alors les plans tangents, soit en intégrant généralement les équations des mouvements infiniment petits d'un système de molécules dont quelques-unes, renfermées dans un très petit espace, se trouvent seules, au premier instant, écartées de leurs positions d'équilibre. Lorsque le système de molécules donné devient isotrope, les deux espèces d'ondes, relatives aux vibrations transversales et longitudinales, se propagent avec des vitesses indépendantes de la direction des plans de ces ondes; mais les deux vitesses de propagation, relatives aux deux espèces d'ondes, diffèrent généralement l'une de l'autre. Si, en supposant les équations des mouvements infiniment petits réduites à des équations homogènes du second ordre, on les faisait coïncider avec les formules qu'avait proposées d'abord M. Navier, le rapport des deux vitesses de propagation serait celui de $\sqrt{3}$ à l'unité. Mais cette valeur particulière du rapport des deux vitesses de propagation ne paraît pas devoir être admise dans la théorie de la lumière, et, au contraire, en comparant à l'expérience les formules établies dans mon Mémoire sur la réflexion des mouvements simples, on en conclut que, dans le vide et les milieux dont la surface polarise complètement la lumière réfléchie, la vitesse de propagation des ondes relatives aux

vibrations longitudinales doit s'évanouir. Ainsi, lorsque, dans la théorie de la lumière, on se borne à la première approximation, en négligeant les termes qui peuvent être omis quand on ne tient pas compte de la dispersion des couleurs, on arrive à cette conséquence digne de remarque, non seulement que les vibrations transversales peuvent subsister, mais encore qu'elles sont les seules qui se propagent. Voyons maintenant suivant quelles lois pourront se propager les vibrations longitudinales, et de quelle nature elles pourront être si l'on pousse plus loin l'approximation.

Dans une lettre écrite à M. Ampère le 19 février 1836, et insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie*, j'ai dit qu'il serait intéressant d'examiner si les vibrations longitudinales ne pourraient pas représenter le mouvement de la chaleur. Or la question que je proposais alors aux physiciens me paraît aujourd'hui devoir être résolue par l'affirmative. Je vais en donner les motifs.

Si la chaleur est un mouvement vibratoire, comme tout porte à le croire, et si elle peut se propager dans le vide, c'est-à-dire dans l'éther considéré isolément, il faut qu'elle y soit l'un des mouvements de vibration dont l'éther est susceptible. Or, lorsque des vibrations propagées dans l'éther parviennent à de grandes distances du centre d'ébranlement, en sorte que les surfaces des ondes, prises dans une étendue limitée, puissent être sans erreur sensible considérées comme des surfaces planes, ces vibrations se réduisent nécessairement à celles que comportent des mouvements par ondes planes, c'est-à-dire à des vibrations ou transversales ou longitudinales (*). Donc, puisque les vibrations transversales, qui s'exécutent sans que la densité varie,

(*). S'il restait quelques doutes à cet égard, il suffirait, pour les faire disparaître, de discuter les valeurs que les intégrales générales des mouvements infiniment petits, réduites à leur forme la plus simple, fournissent pour les déplacements et les vitesses des molécules, à de grandes distances du centre d'ébranlement, comme nous l'avons fait, M. Poisson et moi, dans la théorie des ondes propagées à la surface d'un liquide, et comme l'a fait M. Poisson à l'égard des équations proposées d'abord par M. Navier. J'ajouterai que la discussion des intégrales générales des équations homogènes est précisément l'une des deux méthodes par lesquelles j'étais parvenu, en 1830, à former les équations générales des ondes sonores, lumineuses, et à retrouver ce que Fresnel appelle la *surface des ondes*.



représentent la lumière, il ne reste pour représenter la chaleur que les vibrations longitudinales, ou, ce qui revient au même, les vibrations accompagnées d'un changement de densité.

D'autre part, on sait que l'équation aux différences partielles, par laquelle on a réussi à représenter, d'une manière satisfaisante, les lois de la propagation de la chaleur, est, si l'on peut s'exprimer ainsi, une équation boiteuse, cette équation étant du second ordre par rapport aux coordonnées, et du premier ordre seulement par rapport au temps. Comme d'ailleurs, dans les problèmes de Mécanique, les dérivées relatives au temps sont généralement du second ordre, il est naturel de supposer, et c'était, je crois, la pensée de M. Ampère, que l'équation du mouvement de la chaleur tire son origine d'une autre équation dont elle représente une intégrale particulière, et qui serait du second ordre par rapport au temps, mais du quatrième ordre par rapport aux coordonnées. Or, il est remarquable que cette supposition s'accorde parfaitement avec l'hypothèse que la chaleur est représentée dans l'éther par des vibrations qu'accompagne un changement de densité. En effet, dans les mouvements infiniment petits d'un système isotrope, la dilatation du volume se trouve séparément déterminée par une équation aux différences partielles qui ne renferme que des dérivées d'ordre pair, le premier membre étant la dérivée du second ordre relative au temps, et le second membre étant composé de termes qui renferment des dérivées relatives aux coordonnées, savoir, trois dérivées du second ordre, six du quatrième ordre, et ainsi de suite. Or, d'après ce qui a été dit plus haut, la vitesse de propagation des ondes longitudinales sera nulle si l'on réduit les équations des mouvements infiniment petits de l'éther à des équations homogènes. Donc les dérivées du second ordre disparaîtront d'elles-mêmes, et les premières, dont on devra tenir compte, seront les dérivées du quatrième ordre. Si d'ailleurs on néglige alors les dérivées d'un ordre supérieur au quatrième, la formule que l'on obtiendra sera précisément l'équation aux différences partielles, dont l'équation connue du mouvement de la chaleur est une intégrale particulière.

Ainsi, en résumé, si l'on admet que les vibrations de la chaleur dans l'éther sont des vibrations accompagnées d'un changement de densité, alors, en partant de ce fait unique, qu'il existe des corps qui polarisent complètement la lumière par réflexion, on se trouvera conduit à l'équation du mouvement de la chaleur telle que Fourier l'a donnée; et réciproquement la forme généralement attribuée à l'équation de la chaleur entrainera la possibilité de la polarisation complète dont il s'agit.

Si l'on adopte les principes que nous venons d'exposer, la lumière pourra se propager, sans être accompagnée de chaleur, soit dans le vide et les espaces célestes, comme M. Herschel l'avait pensé, soit dans les corps parfaitement transparents et isophanes. Mais il n'en sera plus de même lorsque la lumière traversera un corps transparent non isophane, ni surtout lorsqu'elle pénétrera, en s'éteignant, dans une couche très mince d'un corps opaque, située près de la surface de ce corps. Alors, en effet, il n'existera plus de vibrations qui, étant sensiblement parallèles aux plans des ondes, s'effectuent sans changement de densité.

Au reste, pour déterminer d'une manière précise et la nature et les lois de propagation de la chaleur dans les corps, il pourra être utile de recourir aux équations que j'ai données précédemment et qui représentent les mouvements infiniment petits d'un double système de molécules sollicitées par des forces d'attraction mutuelle. C'est là une question sur laquelle je reviendrai dans de nouveaux Mémoires, où je montrerai de plus comment les équations dont il s'agit peuvent représenter les mouvements des fluides, et en particulier le mouvement du son propagé dans l'air ou dans un autre fluide élastique.

Je joins ici le calcul très simple sur lequel se fonde la théorie ci-dessus exposée.

Considérons un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle; et soit v la dilatation du volume, au bout du temps t , pour le point (x, y, z) . Si le système est isotrope, alors, en vertu des principes développés dans un précédent Mémoire,

la dilatation v pourra être séparément déterminée par une équation aux différences partielles de la forme

$$(1) \quad D_t^2 v = \nabla v,$$

∇ désignant une fonction entière de D_x, D_y, D_z , et même du trinôme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,$$

mais généralement composée d'un nombre infini de termes. On aura donc

$$\nabla = a(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) + b(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)^2 + \dots$$

a, b désignant des coefficients constants; en sorte que l'équation (1) deviendra

$$(2) \quad D_t^2 v = a(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)v + b(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)^2 v + \dots$$

Si l'on se borne à la première approximation, l'équation (2), réduite à une équation homogène du second ordre, prendra la forme

$$(3) \quad D_t^2 v = a(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)v.$$

D'ailleurs, de ce qui a été dit dans le Mémoire sur la *Réflexion des mouvements simples*, il résulte que le coefficient a sera nul pour tout système de molécules dans lequel la lumière réfléchie pourra subir une polarisation complète, par exemple, dans le vide ou l'éther considéré isolément; et qu'alors la formule (3), ou celle que donne une première approximation, deviendra

$$(4) \quad D_t^2 v = 0.$$

Donc alors, dans le second membre de l'équation (2), le premier terme dont on devra tenir compte sera celui qui renfermera les dérivées du quatrième ordre, savoir

$$b(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)^2 v.$$

Si l'on néglige les termes suivants, l'équation (2) pourra être réduite à

$$(5) \quad [D_t^2 - b(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)^2]v = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$[D_t + b^{\frac{1}{2}}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)][D_t - b^{\frac{1}{2}}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]v = 0.$$

Or on vérifie cette dernière formule en posant

$$[D_t - b^{\frac{1}{2}}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]v = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \quad D_t v = b^{\frac{1}{2}}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)v$$

ou, enfin,

$$(7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = b^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

et l'on reconnaît immédiatement ici l'équation du mouvement de la chaleur telle qu'elle est généralement admise par les physiciens.

60.

Mémoire sur la réduction des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux différences partielles.

C. R., t. IX, p. 288 (26 août 1839).

M. Cauchy prouve que la méthode exposée dans le Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations aux différences partielles continue d'être applicable dans le cas même où l'on peut abaisser l'ordre de l'équation auxiliaire qu'il a nommée l'*équation caractéristique*. Alors les intégrales générales se présentent sous une forme plus simple que celle qu'on aurait obtenue si l'on n'avait pas tenu compte de l'abaissement dont il s'agit.

61.

Note.

C. R., t. IX, p. 337 (9 septembre 1839).

M. Cauchy fait hommage à l'Académie des 1^{re}, 2^e, 3^e et 4^e livraisons du nouvel Ouvrage qu'il publie sous le titre d'*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

Parmi les diverses théories qui se trouvent ou reproduites ou développées dans les diverses livraisons que je présente aujourd'hui à l'Académie, je citerai, dit l'auteur, comme paraissant mériter une attention spéciale, celle que renferme le Mémoire sur les mouvements infiniment petits dont les équations offrent une forme indépendante de la direction de trois axes coordonnés supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes. Déjà en 1828, en supposant les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules réduites à des équations homogènes, j'avais donné les conditions qui doivent être remplies pour que la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, soit autour d'un point quelconque, soit autour de tout axe parallèle à un axe donné. Les conditions que renferme la 4^e livraison de mes *Nouveaux Exercices* sont beaucoup plus générales que celles que j'avais données dans les *Exercices de Mathématiques*. Elles ne supposent plus les équations données réduites à des équations homogènes, et ce qu'il y a de remarquable, c'est que la théorie, en devenant plus générale, est aussi devenue beaucoup plus simple. La démonstration des formules comprises dans la 4^e livraison est fondée sur divers théorèmes relatifs à la transformation des coordonnées, et fournit le moyen d'obtenir très facilement les équations des mouvements infiniment petits d'un système simple, ou de plusieurs systèmes de molécules, isophanes ou isotropes.

62.

Rapport sur un Mémoire de M. Lamé, relatif au dernier théorème de Fermat.

C. R., t. IX, p. 359 (16 septembre 1839).

L'Académie nous a chargés, M. Liouville et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire de M. Lamé sur le dernier théorème de Fermat.

On sait que Fermat, l'un des plus beaux génies qui aient illustré la France, a donné des énoncés de plusieurs théorèmes, parmi lesquels il en est deux dont la démonstration a été pendant longtemps recherchée avec ardeur par divers géomètres. De ces théorèmes il n'en reste plus qu'un seul qui ne soit pas aujourd'hui complètement démontré : c'est le théorème relatif aux puissances des nombres entiers, et suivant lequel une puissance d'un degré n supérieur au second ne peut résulter de l'addition de deux puissances du même degré. On sait toutefois que le théorème, une fois démontré pour une valeur particulière de n , l'est en même temps pour tous les multiples de cette valeur, et que, d'après les principes établis par Fermat lui-même, le théorème se démontre assez facilement pour $n = 4$. De plus, Euler et M. Legendre sont parvenus à le démontrer encore pour les valeurs 3 et 5 de l'exposant n . Mais leurs démonstrations sont fondées sur la théorie des formes quadratiques des nombres premiers; et les difficultés que M. Legendre a eu à surmonter, pour le cas de $n = 5$, laissaient peu d'espoir d'appliquer avec succès les mêmes principes au cas où n acquiert des valeurs plus considérables. Toutefois, cette considération n'a pas empêché M. Lejeune-Dirichlet, dont les recherches sur la théorie des nombres avaient été utiles à M. Legendre, de s'occuper de nouveau du dernier théorème de Fermat; et, à l'aide d'un artifice particulier de calcul, il est parvenu à le démontrer pour le cas où l'on suppose $n = 14$. M. Lamé a considéré à son tour un cas qui renferme le précédent, savoir, le cas où l'on suppose $n = 7$; et les savants apprendront

avec plaisir qu'il est parvenu effectivement au but qu'il s'était proposé d'atteindre.

Pour démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers une équation de la forme

$$x^7 + y^7 + z^7 = 0,$$

où z est supposé négatif, M. Lamé n'a point recours à la théorie des formes quadratiques des nombres premiers. Après avoir prouvé à l'ordinaire que

$$x, y, z$$

peuvent être supposés premiers entre eux, il démontre un lemme, digne de remarque, savoir, que le rapport entre la somme

$$x + y + z$$

des trois inconnues et la racine 7^e du produit des trois sommes

$$x + y, \quad x + z, \quad y + z,$$

ou de ce produit multiplié par 7, est un carré parfait; puis, à l'aide de ce lemme, il prouve facilement qu'il est impossible de supposer les trois inconnues non divisibles par 7, ce que l'on savait déjà. Enfin, en supposant l'une des inconnues divisible par 7, et s'appuyant sur le lemme dont il s'agit, il remplace l'équation proposée, du septième degré, par une autre équation dont le premier membre est du quatrième degré, le second membre étant du huitième, et qui peut être présentée sous la forme

$$z^4 = x^4 - 3x^2y^2 + \frac{16}{7}y^4;$$

puis il démontre l'impossibilité de résoudre cette dernière équation, à l'aide d'une suite d'opérations semblables à celle que fournit la résolution d'une équation de la forme

$$x^2 - y^2 = A.$$

En lisant avec soin le Mémoire de M. Lamé, nous nous sommes demandé : 1^o si le lemme dont il a fait usage se trouve compris dans

quelque autre proposition plus générale relative à une valeur quelconque de n ; 2^o s'il ne serait pas possible d'abrégier encore la démonstration donnée par M. Lamé pour le cas de $n = 7$. Nous avons reconnu qu'effectivement le lemme de M. Lamé est une conséquence nécessaire d'un théorème d'Analyse qui nous semble assez curieux pour mériter d'être indiqué dans ce Rapport. Voici l'énoncé de ce nouveau théorème :

Si l'on retranche la somme des puissances n^{èmes} de deux inconnues x, y de la puissance n^{ème} de leur somme

$$x + y,$$

le reste sera divisible algébriquement, non seulement par le produit

$$nxy(x + y),$$

comme on le reconnaît aisément; mais encore, pour des valeurs de n supérieures à 3, par le trinôme

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y},$$

et même par le carré de ce trinôme, lorsque n , divisé par 6, donnera pour reste l'unité.

En appliquant ce théorème aux cas où l'on a

$$n = 3, \quad n = 5, \quad n = 7,$$

on obtient successivement les formules

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y),$$

$$(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2),$$

$$(x + y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2,$$

dont la dernière conduit sans peine au lemme de M. Lamé.

Quant à la seconde question, nous avons reconnu qu'on abrège la démonstration de M. Lamé quand on commence par établir l'impossibilité de résoudre l'équation

$$z^2 = x^4 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4,$$



en prenant pour x, y, z des nombres premiers entre eux, et pour y un carré pair. Au reste, la méthode par laquelle on y parvient ne diffère pas au fond de celle qui sert à démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$z^2 = x^4 + y^4,$$

et servirait pareillement à établir l'impossibilité de résoudre en nombres entiers une multitude d'équations de la forme

$$z^2 = x^4 - Ax^2y^2 + By^4.$$

Nous ne terminerons pas ce rapport sans rappeler qu'à une époque antérieure M. Lamé s'était déjà occupé de la théorie des nombres. Au moment où l'Académie proposa, pour sujet de prix, le dernier théorème de Fermat, elle reçut un Mémoire qui ne résolvait pas, il est vrai, la question proposée, mais qui renfermait du moins des théorèmes curieux sur l'impossibilité de la résoudre sans que certains nombres, égaux, par exemple, à l'unité augmentée du double ou du quadruple de l'exposant, fussent diviseurs de l'une des inconnues. L'un de nous, nommé Commissaire à cette époque avec M. Legendre, se rappelle encore avoir lu ces théorèmes dans le Mémoire envoyé au concours. Si l'auteur, que nous avons su depuis être M. Lamé, ne parvint pas alors à remplir entièrement le vœu de l'Académie, son travail n'était pourtant pas sans mérite, et son nouveau Mémoire prouve qu'il est capable de lutter avec avantage contre des difficultés qui dans cette matière n'ont pu être jusqu'à présent complètement surmontées par les géomètres.

En résumé, vos Commissaires pensent que le Mémoire de M. Lamé est digne de l'approbation de l'Académie, et mérite d'être inséré dans le Recueil des *Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Post-scriptum. — On démontre aisément le nouveau théorème énoncé dans ce Rapport de la manière suivante :

Soient

$$1, \alpha, \epsilon$$

les trois racines de l'équation

$$x^3 = 1.$$

On aura, non seulement

$$1 + \alpha + \epsilon = 0,$$

mais encore, en supposant n non divisible par 3,

$$(1) \quad 1 + \alpha^n + \epsilon^n = 0,$$

et de plus

$$x^2 + xy + y^2 = (x - \alpha y)(x - \epsilon y).$$

Cela posé, je dis que, si l'on prend pour n un nombre premier impair supérieur à 3, l'expression

$$(2) \quad (x + y)^n - x^n - y^n$$

sera divisible par le trinôme

$$x^2 + xy + y^2,$$

et même par le carré de ce trinôme, lorsque n divisé par 3 donnera pour reste l'unité. Effectivement, pour établir cette proposition, il suffira de faire voir qu'en supposant

$$x = \alpha y \quad \text{ou} \quad x = \epsilon y$$

on réduit à zéro l'expression (2), et de plus sa dérivée relative à x , savoir

$$(3) \quad n[(x + y)^{n-1} - x^{n-1}],$$

lorsque n divisé par 6 donnera 1 pour reste. Or, lorsqu'on suppose, par exemple, $x = \alpha y$, les expressions (2) et (3) deviennent

$$(1 + \alpha)^n - 1 - \alpha^n = -1 - \alpha^n + (-\epsilon)^n,$$

$$n[(1 + \alpha)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = n[(-\epsilon)^{n-1} - \alpha^{n-1}],$$

et il est clair qu'elles s'évanouissent, la première en vertu de la for-

mule (1), pour les valeurs impaires de n non divisibles par 3; la seconde, en vertu des formules

$$a^2 = 1, \quad c^2 = 1,$$

pour les valeurs impaires de n , qui, divisées par 3, donnent 1 pour reste.

63.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des nombres, et en particulier sur les formes quadratiques des nombres premiers.*

C. R., t. IX, p. 473 (14 octobre 1839).

Dans une des précédentes séances, en annonçant la découverte d'un Manuscrit de Fermat, M. Libri a remarqué que ce Manuscrit renfermait l'énoncé, non seulement des théorèmes déjà connus de cet illustre géomètre, mais encore d'autres propositions dignes de remarque. Ainsi, en particulier, Fermat annonce qu'il a trouvé une méthode pour décomposer directement en deux carrés un nombre premier de la forme $4x + 1$. Toutefois nous avons eu le regret d'apprendre que cette méthode ne se trouve, ni exposée, ni même indiquée dans le Manuscrit de Fermat. Heureusement, comme je l'ai observé, la décomposition dont il s'agit, et d'autres du même genre, peuvent aujourd'hui être effectuées par des méthodes directes, comme Fermat l'annonçait, et même à l'aide de calculs qui n'exigent que de simples additions, comme on le verra tout à l'heure. Dans son beau Mémoire sur les résidus biquadratiques, publié en 1825, M. Gauss donne une règle à l'aide de laquelle on peut obtenir directement la racine de l'un des carrés dans lesquels se décompose un nombre premier de la forme $4n + 1$. Il suffit de chercher le plus petit reste qu'on obtient en divisant par n la moitié du coefficient du terme moyen dans la puissance $2n$ d'un binôme. De

plus, dans le *Journal de M. Crelle* de 1827, M. Jacobi annonce qu'en cherchant la démonstration de la règle de M. Gauss, il a été conduit par une théorie féconde à des règles du même genre qui fournissent, par exemple, la réduction d'un nombre premier p , ou du quadruple de ce nombre, à la forme quadratique $x^2 + 7y^2$, lorsque $p - 1$ est divisible par 7, ou $x^2 + 27y^2$, lorsque $p - 1$ est divisible par 3. Enfin, dans des Notes et Mémoires publiés, ou présentés à l'Académie en 1829 et 1830, je me suis à mon tour occupé de la recherche directe des formes quadratiques des nombres premiers, et j'ai été assez heureux pour parvenir à des résultats dont la grande généralité a paru digne de l'attention des géomètres. Tel est, entre autres, un théorème établi dans un Mémoire du 17 mai 1830, et suivant lequel, n étant un nombre premier de la forme $4x + 3$, et p un nombre premier de la forme $nx + 1$, on peut résoudre directement en nombres entiers l'équation

$$x^2 + ny^2 = p^m$$

ou

$$x^2 + ny^2 = 4p^m,$$

dans laquelle la valeur de m se déduit par une règle facile de ce qu'on appelle les nombres de Bernoulli. Ce théorème, qui a été publié, avec un extrait du Mémoire en question, dans le *Bulletin de M. Férussac* de mars 1831, et d'autres théorèmes analogues se trouvent démontrés dans ce Mémoire, dont l'impression s'achève en ce moment, et à la suite duquel j'ai placé des Notes nouvelles qui me paraissent de nature à intéresser les savants occupés de la théorie des nombres. Parmi les résultats nouveaux auxquels je suis parvenu, je citerai dès à présent une méthode directe qui sert à déterminer l'exposant d'une puissance d'un nombre premier p représentée par un binôme de la forme

$$\omega x^2 + \nu y^2$$

ou

$$x^2 + \nu \omega y^2,$$

ou par le quart de ce binôme, ω et ν étant deux diviseurs premiers impairs de $p - 1$, dont l'un est de la forme $4x + 1$, et l'autre de la forme



$4x + 3$. Au reste, je ne fais aujourd'hui qu'indiquer le sujet de mes nouvelles recherches, et je demanderai à l'Académie la permission de lui donner plus de détails à cet égard dans l'une des prochaines séances.

J'ajouterai seulement ici une observation qui n'est pas sans importance. Dans les formules auxquelles je parviens, comme dans les formules que j'ai citées de MM. Gauss et Jacobi, les valeurs des inconnues se déduisent toujours des restes que donnent les coefficients du binôme divisés par un nombre premier donné. Il semblerait en résulter au premier abord que la détermination de ces valeurs exige la formation de produits composés souvent d'un très grand nombre de facteurs; mais, pour éviter cette formation et réduire le calcul à de simples additions, il suffit, comme je l'ai déjà remarqué dans un Mémoire du 5 juillet 1830, de recourir au triangle arithmétique de Pascal et de réduire en même temps chaque terme au reste le plus petit (abstraction faite du signe) que donne la division de ce terme par le nombre premier donné. On peut même alors réduire le triangle arithmétique à quelques termes de chaque ligne horizontale, les termes suivants reproduisant périodiquement les termes déjà calculés.

64.

Sur la théorie des nombres, et en particulier sur les formes quadratiques des puissances d'un nombre premier ou du quadruple de ces puissances.

C. R., t. IX, p. 519 (28 octobre 1839).

Suivant une observation importante faite par Lagrange, la résolution algébrique des équations du second, du troisième et du quatrième degré, aussi bien que la résolution algébrique des équations binômes, peut se déduire de la considération d'une seule fonction linéaire des racines; savoir, de celle qu'on obtient en prenant pour coefficients des

diverses racines d'une équation proposée, de degré n , les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, ou plus généralement les diverses puissances de l'une de ces dernières racines. Cette fonction sera, pour plus de commodité, désignée ici sous le nom de *fonction principale*. Lorsqu'on veut appliquer l'observation que je viens de rappeler à la résolution d'une équation binôme du degré p , ou de la forme

$$(1) \quad x^p - 1 = 0,$$

on doit d'abord débarrasser celle-ci de la racine 1, en la réduisant à l'équation suivante :

$$(2) \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

ou

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0,$$

et par conséquent on doit, dans la fonction principale, prendre pour coefficients les racines de l'unité du degré $p - 1$, ou les puissances de l'une de ces racines. Si d'ailleurs on nomme, avec M. Poinsot, *racines primitives* de l'équation binôme, celles qui ne peuvent satisfaire à aucune équation binôme de même forme, mais de degré moindre, les diverses racines de l'équation du degré p seront, comme l'on sait, les diverses puissances d'une racine primitive quelconque, les exposants de ces puissances pouvant être réduits aux divers nombres inférieurs à p , ou, ce qui revient au même, aux divers termes de la progression arithmétique

$$0, 1, 2, 3, \dots, p-1,$$

et deux puissances représentant la même racine, lorsque leurs exposants divisés par p donnent le même reste, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque leurs exposants sont *équivalents* entre eux, suivant le module p . Ainsi,

0

étant une racine primitive de l'équation (1), on trouvera généralement

$$p^k - 6^k,$$

lorsqu'on aura, suivant la notation de M. Gauss,

$$h \equiv k \pmod{p};$$

et de plus les diverses racines de l'équation (1) pourront être représentées par

$$1, \theta, \theta^2, \theta^{p-1},$$

par conséquent celles de l'équation (2) pourront être représentées par

$$\theta, \theta^2, \dots, \theta^{p-1}.$$

La fonction principale θ sera la somme de ces dernières, rangées dans un ordre quelconque et respectivement multipliées par les diverses racines de l'unité du degré $p-1$, c'est-à-dire par les diverses racines de l'équation

$$(3) \quad x^{p-1} = 1,$$

ou plus généralement par les diverses puissances de l'une de ces racines. Donc, si l'on nomme τ une racine primitive de l'équation (3), les coefficients des diverses puissances de θ dans la fonction principale seront les divers termes de la suite

$$1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{p-2},$$

ou plus généralement les divers termes de la suite

$$1, \tau^h, \tau^{2h}, \dots, \tau^{(p-2)h},$$

c'est-à-dire les diverses puissances d'une racine quelconque τ^h de l'équation (3). Si le nombre entier h est premier à $p-1$, les termes de la seconde suite seront les mêmes, à l'ordre près, que ceux de la première. Mais si le nombre h a pour facteur un diviseur σ de $p-1$, en sorte qu'on ait

$$p-1 = n\sigma,$$

n termes de la seconde suite seront égaux à chacune des racines de l'équation

$$(4) \quad x^n = 1,$$

et, si l'on nomme ρ une racine primitive de cette dernière équation, les termes réellement distincts de la seconde suite se réduiront à

$$1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}.$$

Lorsque p est un nombre premier impair, alors, d'après un théorème connu de Fermat, la puissance du degré $p-1$ de tout nombre non divisible par p , et par conséquent de chaque terme de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \dots, p-1,$$

est équivalente à l'unité, suivant le module p . Donc alors, si l'on adopte la notation de M. Gauss, ces divers termes seront les diverses racines de l'équivalence

$$(5) \quad x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Soit t une racine primitive de cette dernière, c'est-à-dire un nombre entier tellement choisi que, dans l'équivalence

$$(6) \quad t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

on ne puisse remplacer l'exposant p par un exposant positif moindre. Les divers termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \dots, p-1$$

seront, à l'ordre près, équivalents, suivant le module p , aux divers termes de la progression géométrique

$$1, t^2, \dots, t^{p-2},$$

et par conséquent les diverses racines de l'équation (1) pourront être représentées par

$$\theta, \theta^t, \theta^{t^2}, \dots, \theta^{t^{n-1}}.$$

Si l'on multiplie respectivement ces dernières, dans lesquelles les exposants forment une progression géométrique, par les divers termes de cette autre progression géométrique

$$1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{p-2},$$

ou plus généralement de celle-ci

$$1, \tau^h, \tau^{2h}, \dots, \tau^{(p-2)h},$$

la somme des produits obtenus sera évidemment une des valeurs de la fonction principale. En désignant cette valeur par θ_h , on aura

$$(7) \quad \theta_h = \theta + \tau^h \theta \tau + \tau^{2h} \theta \tau^2 + \dots + \tau^{(p-2)h} \theta \tau^{p-2}.$$

Or, comme je l'ai déjà remarqué dans le *Bulletin de M. Férussac* de septembre 1829, la valeur précédente de la fonction principale a cela de très remarquable que, si l'on y remplace h par $-h$ en changeant seulement le signe de l'indice h , le produit des deux valeurs obtenues

$$\theta_h, \theta_{-h}$$

sera égal au nombre p pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que l'indice h sera pair ou impair, pourvu toutefois que h ne soit pas divisible par p . Si h était divisible par p , alors, en vertu de la formule

$$(8) \quad 1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{p-1} = 0,$$

on aurait évidemment

$$(9) \quad \theta_h = \theta_{-h} = -1.$$

Mais, dans le cas contraire, on aura généralement

$$(10) \quad \theta_h \theta_{-h} = (-1)^h p,$$

savoir,

$$\theta_h \theta_{-h} = p$$

si h est pair, et

$$\theta_h \theta_{-h} = -p$$

dans le cas contraire. Pour cette raison, nous désignerons les deux expressions imaginaires

$$\theta_h, \theta_{-h}$$

sous le nom de *facteurs primitifs* de $\pm p$, et nous dirons que ces deux facteurs sont *conjugués* l'un à l'autre.

Comme l'on a

$$x^{p-1} - 1 = \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right),$$

il en résulte que l'équation (3) se décompose en deux autres, savoir

$$(11) \quad x^{\frac{p-1}{2}} = 1,$$

$$(12) \quad x^{\frac{p-1}{2}} = -1,$$

et l'équivalence (5) en deux autres, savoir

$$(13) \quad x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

$$(14) \quad x^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Or, τ et t , étant racines primitives des formules (3) et (5), ne peuvent vérifier les formules (11) et (13); ils vérifieront donc les formules (12) et (14), en sorte qu'on aura

$$(14 \text{ bis}) \quad \tau^{\frac{p-1}{2}} = -1,$$

$$(15) \quad t^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Donc, si l'on pose

$$(16) \quad \theta - \theta \tau + \theta \tau^2 - \dots + \theta \tau^{p-2} - \theta \tau^{p-1} = \Delta,$$

on aura

$$\theta_{\frac{p-1}{2}} = \theta_{-\frac{p-1}{2}} = \Delta,$$

et, en posant $h = \frac{p-1}{2}$, on tirera de la formule (10)

$$(17) \quad \Delta^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

Cette belle formule est l'une de celles que M. Gauss a données dans ses *Recherches arithmétiques*. D'autre part, comme, en posant

$$x \equiv t^{2m} \pmod{p},$$

on en conclura

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv t^{m(p-1)} \equiv 1,$$



il est clair que les diverses racines de l'équivalence (13) seront les puissances paires de l , savoir

$$1, l^2, l^4, \dots, l^{p-2},$$

ou, ce qui revient au même, les divers termes de la suite

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, (n-1)^2.$$

Donc chaque racine de l'équation (13) est le reste ou résidu de la division d'un carré par p ; ce qui n'a pas lieu pour les racines de l'équivalence (14). On dit pour cette raison qu'une quantité entière h est *résidu quadratique* ou *non-résidu quadratique*, relativement au module p , suivant que h est racine de la formule (13) ou de la formule (14), c'est-à-dire suivant que le reste de la division de

$$\frac{p-1}{h}$$

par p se réduit à $+1$ ou à -1 . Nous désignerons ce même reste, avec M. Legendre, par la notation

$$\left(\frac{h}{p}\right),$$

en sorte qu'on aura, si h est résidu quadratique,

$$\left(\frac{h}{p}\right) = 1,$$

et si h est non-résidu

$$\left(\frac{h}{p}\right) = -1.$$

Une propriété remarquable des facteurs primitifs de p , c'est que le produit de deux ou plusieurs facteurs de cette espèce est proportionnel à un semblable facteur. En d'autres termes, on a

$$\theta_k \theta_l = R_{k,l} \theta_{k+l},$$

et généralement

$$(18) \quad \theta_k \theta_l \theta_m \dots = R_{k,l,m,\dots} \theta_{k+l+m+\dots},$$

les expressions

$$R_{k,l}, R_{k,l,m}, \dots$$

étant indépendantes de θ , et se réduisant en conséquence à des fonctions symétriques de τ^k, τ^l , ou généralement de

$$\tau^k, \tau^l, \tau^m, \dots$$

A l'aide de cette proposition, jointe à celles que nous avons déjà rappelées, on transforme aisément certaines puissances du nombre p , ou le quadruple de ces puissances, en expressions de la forme

$$x^2 + ny^2,$$

n étant un diviseur de $p-1$. Il suffit, en effet, pour y parvenir, de multiplier l'un par l'autre, dans un certain ordre, les facteurs primitifs du nombre p ; et l'on peut ajouter que, parmi les puissances dont il s'agit, il en existe toujours une dont l'exposant, facile à déterminer, est égal ou inférieur à la moitié du nombre N des termes qui, dans la suite

$$1, 2, 3, \dots, n-1,$$

sont premiers au nombre n . C'est ce que nous démontrerons plus en détail dans un prochain article.

65.

Note.

C. R., t. IX, p. 525 (28 octobre 1839).

Outre la Note qu'on vient de lire, M. Cauchy a, dans cette séance, présenté à l'Académie plusieurs Mémoires et Notes manuscrits, dont il suffira pour le moment d'indiquer l'objet en peu de mots, les résultats qu'ils contiennent devant être développés par l'auteur dans une des séances prochaines.

Dans un de ces nouveaux Mémoires, M. Cauchy parvient à des formules très simples qui déterminent les pressions ou tensions supportées



par trois plans rectangulaires, en un point quelconque d'un double système de molécules soumises à des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Ces pressions sont de trois espèces suivant qu'elles résultent, ou des actions mutuelles des molécules du premier système, ou des actions mutuelles des molécules du second système, ou enfin des actions réciproques des molécules du premier système sur celles du second, et des molécules du second système sur celles du premier. L'auteur, après avoir établi les formules générales relatives, soit à l'état d'équilibre, soit à l'état de mouvement, examine en particulier le cas où les deux systèmes donnés sont isotropes, et montre les réductions que subissent alors les formules générales. Puis il indique une hypothèse qu'il suffirait d'adopter pour déduire de ces formules la loi de Mariotte relative à la pression dans les gaz. Enfin, il recherche la vitesse de propagation d'un mouvement simple dans un double système isotrope, et il obtient alors entre cette vitesse, la densité du gaz et la pression, une relation différente de celle que fournit la formule newtonienne relative à la propagation du son.

Un autre Mémoire a pour objet la recherche des conditions à remplir pour que, dans l'état d'équilibre ou de mouvement d'un système simple ou d'un double système de molécules, il y ait égalité de pression en tous sens autour d'un même point. L'auteur arrive ici à des conclusions qui paraissent fort singulières au premier abord, et contraires même jusqu'à un certain point aux idées généralement admises. Toutefois l'exactitude des principes sur lesquels elles reposent lui persuade qu'après un mûr examen elles seront adoptées par les physiciens et les géomètres.

Dans un autre Mémoire, M. Cauchy discute les hypothèses proposées par M. Ampère dans un article que renferme la *Bibliothèque universelle* et qui a pour titre : *Idées de M. Ampère sur la chaleur et la lumière*. M. Cauchy trouve la plupart de ces hypothèses très naturelles et très propres à donner l'explication des phénomènes. Il en est une toutefois sur laquelle des doutes se sont élevés dans son esprit. C'est la supposition que l'action mutuelle de deux atomes est tantôt attractive, tantôt

répulsive, de manière à s'évanouir une ou plusieurs fois pour une ou plusieurs valeurs finies de la distance. En réfléchissant sur cet objet, il a semblé à M. Cauchy qu'une autre supposition pourrait remplacer avec avantage celle que l'on vient de mentionner, et rendre plus facilement raison des formes polyédriques des molécules intégrantes. Ce serait d'admettre que chaque molécule intégrante se compose de trois ou plusieurs espèces d'atomes conjugués deux à deux, les atomes de même espèce s'attirant toujours entre eux⁽¹⁾, et occupant deux sommets opposés du polyèdre qui constitue la molécule, tandis que deux atomes d'espèces différentes se repousseraient. M. Cauchy, en développant cette hypothèse, montre comment elle pourrait servir à expliquer les changements de forme des molécules intégrantes, et les variations que M. Mitscherlich a observées dans les angles des cristaux dilatés par la chaleur.

Enfin, dans une Note présentée à l'Académie, M. Cauchy rappelle une idée qui s'était présentée depuis longtemps à son esprit, et qu'il avait même communiquée à quelques personnes. En réfléchissant sur la grande quantité de chaleur absorbée dans le passage d'un corps à l'état liquide, et surtout à l'état gazeux, il avait pensé que cette absorption de chaleur et la fluidité des gaz s'expliqueraient facilement si l'on admettait, d'une part, que la chaleur dépend de la force vive des molécules d'un corps mises en vibration, d'autre part, que dans l'état gazeux chaque molécule intégrante exécute des révolutions complètes sur elle-même. On pourrait supposer d'ailleurs que, dans l'état liquide ou solide, ces révolutions complètes se trouvent remplacées par de simples oscillations de la molécule, sensibles ou insensibles, autour de son centre de gravité.

(1) On pourrait aussi admettre que les atomes de même espèce se repoussent, et que les atomes d'espèces différentes s'attirent.

66.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la constitution des molécules intégrantes et sur les mouvements atomiques des corps cristallisés.*

C. R., t. IX, p. 558 (4 novembre 1839).

M. Mitscherlich a reconnu que les angles des cristaux varient avec la température. Il en résulte que la forme des molécules intégrantes ne peut être considérée comme constante et inaltérable. Pour rendre raison en même temps de la forme polyédrique de ces molécules et de la variation des angles, il suffit d'admettre que chaque molécule est composée d'atomes, ou points matériels, les divers atomes pouvant d'ailleurs être de plusieurs espèces différentes et agir les uns sur les autres par attraction ou par répulsion. Cela posé, il est clair que, pour résoudre complètement le problème des mouvements vibratoires des corps cristallisés, il ne suffira point de considérer un cristal comme un système de points matériels, ou bien encore comme un système de très petits corps dont chacun tourne sur lui-même en exécutant de légères oscillations. Mais on devra considérer ce cristal comme formé par la réunion de plusieurs systèmes d'atomes placés dans le même espace en présence les uns des autres. Les équations d'équilibre ou de mouvement de ces divers systèmes d'atomes seront semblables à celles que j'ai données pour le mouvement de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement. Seulement on devra considérer autant de systèmes d'atomes qu'il y aura d'atomes distincts dans chaque molécule. Par suite, si n représente le nombre des atomes compris dans une molécule intégrante, $3n$ sera le nombre des équations aux différences partielles du corps cristallisé.

Le Mémoire que j'ai l'honneur d'offrir en ce moment à l'Académie renferme l'application du principe que je viens d'énoncer à un cristal quelconque. Après les Mémoires que j'ai déjà publiés sur le mouve-

ment de deux systèmes de molécules qui se pénètrent, ce qu'il y avait peut-être ici de plus difficile était de trouver une notation commode qui permit de présenter les équations d'équilibre et de mouvement sous une forme simple et symétrique. Les notations que j'ai adoptées me paraissent remplir ces deux conditions. Après avoir établi, dans un premier paragraphe, les équations d'équilibre et de mouvement d'un cristal, j'examine, dans un second paragraphe, ce qu'elles deviennent lorsqu'on suppose les mouvements infiniment petits. Alors les équations du mouvement peuvent être aisément intégrées à l'aide de la méthode que j'ai suivie dans les précédents Mémoires. On doit surtout remarquer le cas où le mouvement propagé dans le cristal est du nombre de ceux que j'ai nommés *mouvements simples*, les déplacements symboliques étant tous proportionnels à une seule exponentielle népérienne dont l'exposant est une fonction linéaire des variables indépendantes. On reconnaît sans peine qu'un semblable mouvement est, pour chaque système d'atomes, un mouvement par ondes planes dans lequel chaque atome décrit une droite, un cercle ou une ellipse. D'ailleurs, la durée des vibrations atomiques et la longueur des ondu-lations restent les mêmes pour les différents systèmes d'atomes, aussi bien que le plan invariable auquel les plans des ondes sont parallèles. On pourra encore en dire autant du plan invariable parallèle à tout plan dans lequel se trouvent renfermés des atomes qui exécutent des vibrations de même amplitude, si le mouvement simple s'éteint en se propageant dans une certaine direction. Quant aux amplitudes mêmes des vibrations atomiques, elles varient, en général, dans le passage d'un système d'atomes à un autre, aussi bien que la direction des plans qui renferment les ellipses décrites, et du plan invariable parallèle aux plans de ces ellipses. Par suite, dans les mouvements vibratoires et infiniment petits d'un corps cristallisé, on devra distinguer les vibrations exécutées par le centre de gravité de chaque molécule, et les mouvements relatifs des divers atomes. Ces derniers mouvements constituent ce que M. Ampère appelait les *vibrations atomiques*.

D'après ce que je viens de dire, on voit combien la question traitée



dans le présent Mémoire diffère de celle que s'est proposée un illustre Confrère dans un travail qu'il a présenté récemment à l'Académie. Dans le cas du mouvement, les formules obtenues par M. Poisson déterminent seulement les petites vibrations des molécules et leurs petites oscillations sur elles-mêmes, sans que l'on fasse aucune supposition sur la forme des molécules et sur la constitution particulière du cristal que l'on considère. Au contraire, les formules que je donne pour la détermination des mouvements atomiques varient avec la forme et la constitution dont il s'agit, c'est-à-dire avec deux éléments dont on sera obligé de tenir compte si quelque jour on parvient à faire entrer la Chimie dans le domaine des Mathématiques. Parmi les applications que l'on peut faire de mes nouvelles formules, l'une des plus simples se rapporte au cas où la molécule intégrante d'un cristal, étant un octaèdre régulier, est considérée comme composée de six atomes placés aux six sommets de cet octaèdre.

67.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Mémoire sur la convergence des séries. Application du théorème fondamental aux développements des fonctions implicites.*

C. R., t. IX, p. 587 (11 novembre 1839).

Lorsque, dans une question de Physique ou de Mécanique, l'analyse ne fournit pas les valeurs des inconnues en termes finis, on cherche à développer ces inconnues en séries. C'est en particulier ce qui arrive dans la Mécanique céleste, où l'on développe les coordonnées qui déterminent la position de chaque astre, par exemple le rayon vecteur et la longitude, ou l'anomalie, ou bien encore les éléments variables des orbites planétaires en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de diverses quantités, telles que les excentricités des orbites

et les masses des planètes. Toutefois, pour que l'on puisse, à l'aide des développements en séries, obtenir des valeurs de plus en plus approchées des inconnues que l'on se propose de calculer, il est absolument nécessaire que les séries soient convergentes, et lorsque cette condition n'est pas remplie, la prétendue solution analytique que les développements fournissent dans chaque problème devient complètement illusoire. On comprend donc l'importance que les géomètres ont dû attacher à la question de la convergence des séries. Mais l'établissement de règles générales propres à montrer dans quels cas les séries obtenues sont convergentes ou divergentes a paru pendant longtemps offrir de grandes difficultés. C'est ce que l'on reconnaît sans peine en lisant les divers Mémoires qui avaient été publiés avant l'année 1831 sur cette matière, et particulièrement le *Supplément* au 5^e Volume de la *Mécanique céleste* de M. de Laplace, supplément où l'auteur a prouvé que le rayon vecteur d'une planète, développé suivant les puissances ascendantes de l'excentricité, pouvait cesser d'offrir une série convergente lorsque l'excentricité surpassait un certain nombre sensiblement égal à $\frac{2}{3}$. C'est dans un Mémoire sur l'Astronomie, lithographié à Turin en 1831, que se trouvent énoncées, pour la première fois, diverses propositions qui permettent d'établir les règles de la convergence des séries pour des cas très généraux, et même d'assigner des limites aux erreurs que l'on commet en arrêtant les développements après certains termes. Dans ce Mémoire, qui, dès le moment de son apparition, fut accueilli avec tant de bienveillance par les géomètres, et dont les savants éditeurs du Recueil imprimé à Milan, MM. Gabrio Piola et Friziani, ont publié une traduction en langue italienne, on trouve en particulier, page 7, le théorème général que j'ai rappelé dans une précédente séance, et qui fournit immédiatement la règle sur la convergence des séries produites par le développement des fonctions explicites.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie, je montre avec quelle facilité le même théorème s'applique au développement des fonctions implicites. Les règles que j'établis de



cette manière se trouvent d'accord, ainsi que je le démontre, avec celles que j'avais données dans le Mémoire de 1831. Elles comprennent d'ailleurs, comme cas particulier, la règle à laquelle j'étais parvenu dans un Mémoire de 1829, sur la convergence de la série de Lagrange, et à plus forte raison le résultat auquel M. Laplace est parvenu dans le Supplément au V^e Livre de la *Mécanique céleste*.

68.

Mémoire sur les pressions et tensions dans un double système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.

C. R., t. IX, p. 588 (11 novembre 1839).

Dans le *Bulletin de la Société philomathique*, et dans le tome II des *Exercices*, j'ai considéré d'une manière générale la pression ou tension supportée en un point donné d'un corps par un plan quelconque. J'ai fait voir que, dans le cas où la pression offre une intensité variable avec la direction du plan qui la supporte, elle n'est pas toujours normale à ce plan. J'ai nommé *pressions ou tensions principales* celles qui sont normales aux plans contre lesquels elles s'exercent; et j'ai prouvé qu'en chaque point d'un corps il existe généralement trois pressions ou tensions principales dirigées suivant trois axes rectangulaires entre eux. Enfin j'ai donné plusieurs théorèmes relatifs aux pressions et analogues à ceux qui, dans la Géométrie, se rapportent aux rayons de courbures des surfaces courbes. J'ai recherché en particulier les relations qui existent, en chaque point d'un corps, entre les composantes rectangulaires de la pression ou tension supportée par un plan quelconque et les pressions ou tensions principales; et, pour établir ces relations dignes de remarque, j'ai suivi une méthode fort simple qui depuis a été adoptée par d'autres géomètres, en comparant

entre elles les pressions supportées par les faces d'un tétraèdre ou d'un parallélépipède infiniment petit qui renferme le point donné.

Dans un Mémoire présenté à l'Académie, le 1^{er} octobre 1827, et inséré par extrait dans les *Annales de Physique et de Chimie*, M. Poisson avait donné des formules pour calculer les pressions qui résultent des actions mutuelles d'un système de molécules; et, pour obtenir les pressions dans le cas du mouvement, il avait supposé ce système décomposé en éléments dont chacun offrait la forme d'un parallélépipède rectangle avant le déplacement des molécules. Ayant repris la même question dans le Tome III des *Exercices mathématiques*, j'ai déterminé directement les pressions supportées par les faces d'un petit solide qui offre la forme d'un parallélépipède rectangle, non avant, mais après le déplacement des molécules; et dès lors il a été facile de s'assurer que les pressions provenant des actions moléculaires vérifient effectivement les relations et les théorèmes que j'avais exposés dans le Tome II des *Exercices*. En développant les formules très simples auxquelles j'étais parvenu, j'ai cherché en particulier les conditions qui devaient être remplies pour que la propagation du mouvement pût s'effectuer de la même manière en tous sens, c'est-à-dire, en d'autres termes, pour que le système de molécules devint isotrope; j'ai depuis généralisé ces mêmes conditions, dans le Mémoire sur la lumière, lithographié en 1836, et dans un article que renferment mes *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

Dans mon nouveau Mémoire, les formules que je viens de rappeler sont étendues au cas où l'on considère deux systèmes de molécules qui se pénètrent l'un l'autre, c'est-à-dire deux systèmes de molécules, renfermées dans le même espace, et d'ailleurs sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Alors les pressions supportées par un plan quelconque, ou plutôt leurs composantes parallèles aux axes coordonnés, se composent chacune de trois termes qui sont sensiblement proportionnels, l'un au carré de la densité du premier système de molécules, l'autre au carré de la densité du second système, l'autre au produit de ces deux densités.



Si l'on prend pour premier système le fluide éthéré, pour second système un fluide élastique, et si d'ailleurs on suppose que la densité de l'éther reste sensiblement la même dans le vide et dans les corps, le premier des termes dont nous venons de parler ne paraîtra point dans les expériences que l'on pourra faire. Si, d'autre part, on suppose les molécules d'un fluide élastique séparées par des distances assez considérables pour qu'on puisse ne pas tenir compte de leurs actions mutuelles, le second terme s'évanouira, et il ne restera de chaque pression que le troisième terme sensiblement proportionnel à la densité du fluide élastique.

Les recherches que je viens de rappeler m'ont naturellement ramené à l'examen du principe de l'égalité de pression en tous sens qui, pendant longtemps, a été considéré comme le principe fondamental propre à établir la distinction entre les fluides et les solides. Or une discussion approfondie des équations d'équilibre ou de mouvement d'un système de molécules m'a conduit à cette conclusion que, dans un semblable système, lorsqu'il est isotrope, l'état d'équilibre offre effectivement, en chaque point, une pression égale dans tous les sens, mais qu'un mouvement infiniment petit du système ne peut plus offrir cette égalité d'une manière rigoureuse. On se trouve ainsi conduit à révoquer en doute, avec M. Poisson, l'exactitude du principe d'égalité de pression appliqué au mouvement des liquides. Ne serait-ce pas à ce défaut d'exactitude que tiendraient les modifications que l'on a été obligé d'apporter aux formules de l'Hydrodynamique pour les rendre propres à représenter les résultats des observations?

PIN DU TOME IV DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME QUATRIÈME.

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE L'INSTITUT DE FRANCE.

NOTES ET ARTICLES EXTRAITS DES COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES
DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

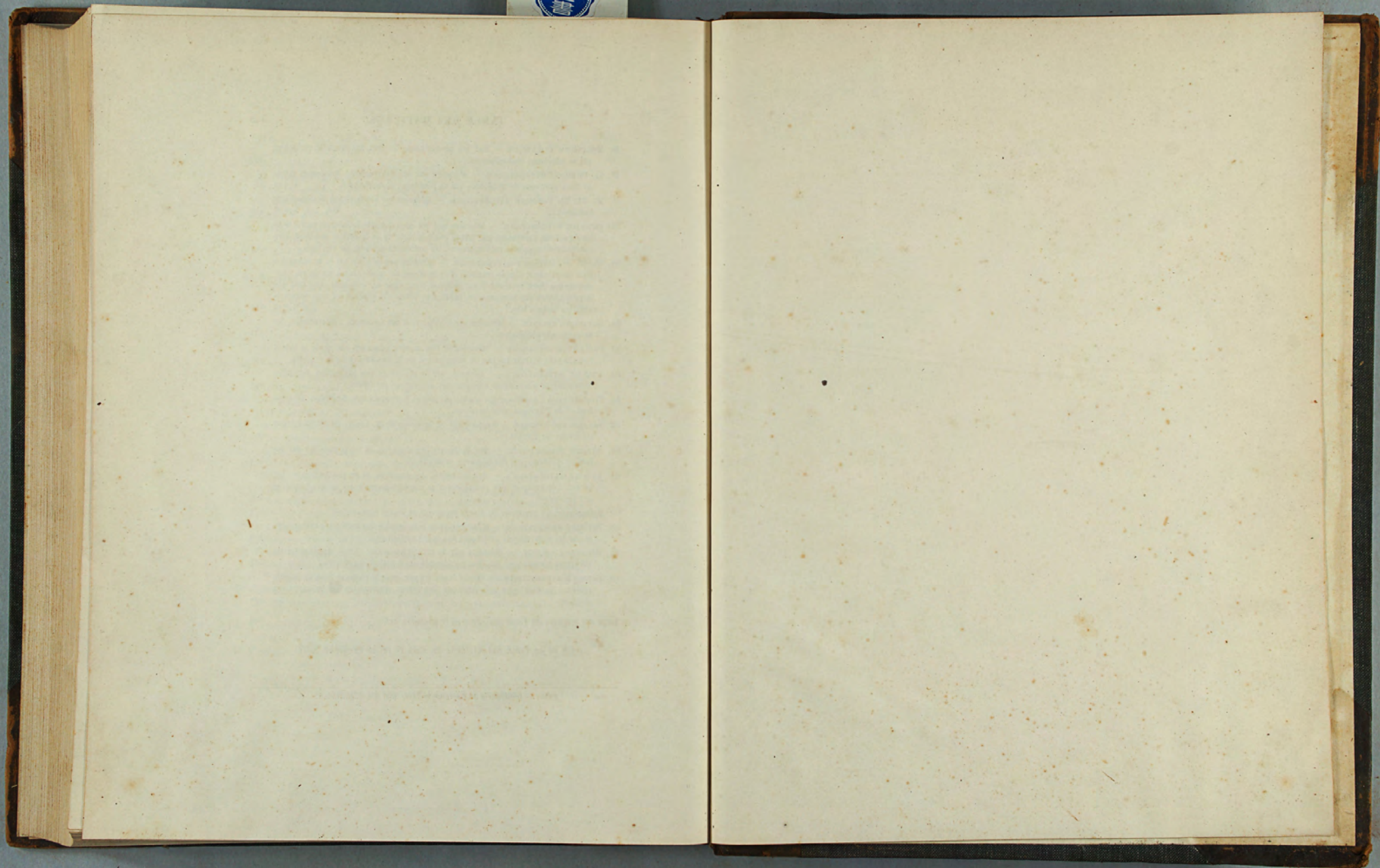
	Page
1. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur l'intégration des équations différentielles.....	5
2. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Lettre à M. le Président de l'Académie des Sciences.....	5
3. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Lettre à M. Ampère sur la théorie de la lumière.....	9
4. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Notes sur l'Optique, adressées à M. Libri.....	11
5. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Lettre à M. Ampère, sur l'explication de divers phénomènes de la lumière dans le système des ondes.....	21
6. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Deuxième Lettre à M. Libri, sur la théorie de la lumière.....	30
7. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Troisième et quatrième Lettre à M. Libri, sur la théorie de la lumière.....	32
8. THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — Lettre à M. Libri.....	36
9. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Extrait d'une Lettre à M. Coriolis.....	38
10. ANALYSE ALGÈBRE. — Sur la résolution des équations. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Libri.).....	42
11. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Extrait d'une Lettre sur un Mémoire publié à Turin, le 16 juin 1833, et relatif aux racines des équations simultanées.....	45
12. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Première Lettre sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque.....	48
13. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Deuxième Lettre sur la résolution des équations de degré quelconque.....	61
14. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Note sur un théorème relatif aux équations simultanées.....	81



	Pages
15. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Note sur la résolution des équations de degré quelconque.....	84
16. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes.....	88
17. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Détermination des racines réelles des équations : méthode linéaire.....	98
18. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Détermination des racines réelles des équations.....	99
19. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur les vibrations de l'éther dans un milieu ou dans le système de deux milieux, lorsque la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens autour de tout axe parallèle à une droite donnée.....	99
20. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur la propagation du mouvement par ondes planes dans un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances. Analogie de ces ondes avec celles dont la propagation donne naissance aux phénomènes de la polarisation de la lumière et de la double réfraction.....	103
21. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Formules extraites des deux Mémoires présentés dans la séance du 19 novembre.....	106
22. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière produites par la surface de séparation de deux milieux doués de la réfraction simple.....	112
23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière..... 113, 122, 130, 137, 145, 152, 164 et	173
31. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Note sur les propositions établies dans le <i>Compte rendu</i> de la séance du 11 février 1839.....	187
32. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Note sur l'égalité des réfractions de deux rayons lumineux qui émanent de deux étoiles situées dans deux portions opposées de l'écliptique.....	190
33, 34, 35. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps dans les problèmes de Physique mathématique.....	193, 199 et 214
36. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Note sur un théorème d'Analyse, et sur son application aux questions de Physique mathématique.....	228
37, 38, 39, 40, 41. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur les mouvements infiniment petits des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle..... 237, 257, 267, 283 et	298
42. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Note sur la quantité de lumière réfléchie sous les diverses incidences par les surfaces des corps opaques et spécialement des métaux.....	312
43. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Note sur la nature des ondes lumineuses et généralement de celles qui se propagent dans les systèmes de molécules.....	322
44. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Sur l'intensité de la lumière polarisée et réfléchie par des surfaces métalliques.....	331
45. OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Observations de M. A. Cauchy, sur la Lettre de M. Mac-Collagh.....	333

	Pages
46. MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — Sur les mouvements de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement.....	343
47, 48. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement..... 344 et	350
49, 50, 51, 52. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur l'intégration des équations linéaires..... 369, 373, 398 et	419
53. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur les mouvements infiniment petits dont les équations présentent une forme indépendante de la direction des trois axes coordonnés, supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes.....	427
54, 55, 56, 57. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécules à un autre, chacun de ces deux systèmes étant supposé homogène et tellement constitué que la propagation des mouvements infiniment petits s'y effectue en tous sens suivant les mêmes lois..... 429, 447, 457 et	468
58. MÉCANIQUE CÉLESTE. — Mémoire sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires.....	483
59. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire où l'on montre comment une seule et même théorie peut fournir les lois de propagation de la lumière et de la chaleur....	491
60. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur la réduction des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux différences partielles.....	497
61. Présentation à l'Académie des quatre premières livraisons des <i>Exercices d'Analyse et de Physique mathématique</i>	498
62. THÉORIE DES NOMBRES. — Rapport sur un Mémoire de M. Lamé, relatif au dernier théorème de Fermat.....	499
63. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur la théorie des nombres, et en particulier sur les formes quadratiques des nombres premiers.....	504
64. ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sur la théorie des nombres, et en particulier sur les formes quadratiques des puissances d'un nombre premier ou du quadruple de ces puissances.....	506
65. Présentation à l'Académie de divers Mémoires et Notes manuscrits.....	513
66. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur la constitution des molécules intégrantes et sur les mouvements atomiques des corps cristallisés.....	516
67. MÉCANIQUE CÉLESTE. — Mémoire sur la convergence des séries. Application du théorème fondamental aux développements des fonctions implicites.....	518
68. PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Mémoire sur les pressions et tensions dans un double système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.....	520
Table des matières du Tome quatrième de la première Série.....	523

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME IV DE LA PREMIÈRE SÉRIE.



貴重書





貴重書