



## 20.

C. R., t. VIII, p. 189 (11 février 1839). — Suite.

Suivant le langage adopté par les auteurs qui, dans la théorie de la lumière, admettent le système des ondulations, la *phase* d'un rayon simple, polarisé en ligne droite et propagé dans un milieu transparent, n'est autre chose que l'angle variable dont le cosinus représente le rapport entre la déviation d'une molécule éthérée et l'amplitude des vibrations moléculaires (\*). Quelquefois la même expression est employée dans un sens plus général et, lorsque, dans un rayon simple doné de la polarisation rectiligne, ou circulaire, ou elliptique, les déplacements moléculaires sont mesurés parallèlement à un axe fixe donné, on appelle encore *phase* l'angle variable dont le cosinus entre comme facteur dans le déplacement d'une molécule et représente le rapport de ce déplacement à la demi-amplitude des vibrations mesurée parallèlement à l'axe fixe. Si le rayon simple cessait de se propager dans un milieu transparent, alors, pour obtenir la phase, c'est-à-dire l'angle variable dont le cosinus est renfermé dans l'expression d'un déplacement moléculaire, ou plutôt ce cosinus même, il faudrait diviser le déplacement, non plus seulement par la demi-amplitude des vibrations moléculaires, mais par cette demi-amplitude et par le module du rayon simple. Cela posé, il est clair que, pour un rayon simple donné, la partie variable de la phase, représentée par une fonction linéaire du temps et des coordonnées sans terme constant, sera ce que nous avons

(\*) D'après cette définition, pour obtenir à un instant donné la phase du rayon simple en un point donné, par conséquent la phase correspondante à une molécule donnée, il suffira de construire une circonférence de cercle qui ait pour diamètre l'amplitude des vibrations exécutées par cette molécule, et de chercher l'angle que forme la moitié de ce diamètre, située du côté où l'on mesure les déviations positives, avec le rayon dont l'extrémité se projette sur le même diamètre dans le point où se trouve la molécule à l'instant que l'on considère; en d'autres termes, il suffira de chercher la *distance angulaire* de la molécule donnée à un point matériel qui se mouvrait sur la circonférence dont il s'agit avec une vitesse constante, et dont la projection sur le diamètre coïnciderait avec la molécule elle-même.

appelé l'*argument* du rayon simple, par conséquent une quantité indépendante de la direction de l'axe fixe que l'on considère. Mais la phase elle-même, équivalente à la somme qu'on obtient quand à l'argument du rayon simple on ajoute le paramètre angulaire, dépendra généralement, ainsi que ce paramètre, de la direction de l'axe fixe, et n'en deviendra indépendante que dans le cas où ce rayon serait polarisé rectilignement. Comme le cosinus d'un angle ne se trouve point altéré quand on fait croître ou diminuer cet angle d'une quantité équivalente à un multiple du nombre  $2\pi$ , un paramètre angulaire, aussi bien qu'une phase, pourra toujours être sans inconvénient augmenté ou diminué d'un semblable multiple, et pourra se réduire en conséquence à un angle renfermé entre les limites  $-\pi$ ,  $+\pi$ . Si un rayon simple quelconque, propagé dans un milieu isophage et transparent, est considéré comme résultant de la superposition de deux autres rayons polarisés, l'un suivant un plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan, les deux rayons composants offriront en général deux phases distinctes. La différence de ces deux phases a été désignée elle-même par quelques auteurs sous le nom de *phase*; mais, pour éviter toute équivoque, nous l'appellerons l'*anomalie* du rayon résultant. Cette anomalie, comme chacune des phases, peut être sans inconvénient augmentée ou diminuée d'un multiple du nombre  $2\pi$ , et par suite elle peut être réduite à zéro ou au nombre  $\pi$ , lorsque le rayon résultant est polarisé rectilignement; à  $\frac{1}{2}\pi$ , ou à  $-\frac{1}{2}\pi$ , c'est-à-dire à un angle droit, abstraction faite du signe, lorsque ce rayon est doué de la polarisation circulaire; mais, lorsqu'il est polarisé elliptiquement, elle varie avec la direction du plan fixe que l'on considère. Concevons d'ailleurs que, dans chacun des deux rayons composants, on nomme nœuds de première espèce ceux qui précèdent des molécules dont les déplacements sont représentés par des quantités positives. Alors le rapport de l'anomalie à la caractéristique représentera, au signe près, la distance entre un nœud de l'un des rayons composants et un nœud de même espèce de l'autre; et, faire croître ou diminuer l'anomalie d'un multiple de  $2\pi$ , ce sera faire croître ou diminuer cette distance d'une ou de plusieurs épais-



seurs d'ondes; ce qui revient à remplacer, pour l'un des deux rayons composants, un nœud d'espèce donnée par un autre nœud de même espèce. Alors aussi, quand le rayon résultant sera polarisé en ligne droite, l'anomalie pourra être réduite à zéro ou au nombre  $\pi$ , suivant qu'un nœud donné de l'un des rayons composants viendra se placer sur un nœud de même espèce, ou sur un nœud d'espèce différente, appartenant à l'autre.

On appelle souvent *azimut* l'angle formé par un plan variable avec un plan fixe, par exemple, en Astronomie, l'angle formé avec le méridien d'un lieu par le plan d'un cercle vertical; et l'on se sert de la même expression dans la théorie de la lumière quand on se propose d'indiquer, pour un rayon incident, réfléchi ou réfracté, la position du plan de polarisation à l'égard du plan d'incidence. Nous conformant encore sur ce point à l'usage établi, lorsqu'un rayon simple, propagé dans un milieu isopane et transparent, sera polarisé en ligne droite, nous appellerons *azimut de ce rayon* l'angle aigu formé par le plan qui le renferme avec un plan fixe, par exemple avec le plan d'incidence, de réflexion ou de réfraction, s'il s'agit d'un rayon incident, réfléchi ou réfracté; et pareillement nous appellerons *azimut du plan de polarisation* l'angle aigu formé par ce dernier plan avec le plan fixe (\*). Si d'ailleurs le plan fixe passe, comme nous le supposerons généralement, par la direction du rayon simple, et si ce rayon est considéré comme résultant de la superposition de deux autres polarisés, l'un suivant le plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan, l'azimut du rayon résultant et l'azimut de son plan de polarisation seront simplement les deux angles complémentaires l'un de l'autre qui auront pour tangentes trigonométriques les rapports direct et inverse des amplitudes des vibrations moléculaires dans les deux rayons composants. Si le rayon simple donné cessait d'être polarisé rectilignement, rien n'empêcherait d'ap-

(\* L'*azimut*, en Astronomie, est un angle tantôt aigu, tantôt obtus. Mais, dans la théorie de la lumière, il paraît utile, pour éviter tout embarras, de réduire l'azimut d'un rayon simple et de son plan de polarisation à des angles aigus et positifs, tels que sont les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction.

per encore *azimut de ce rayon* l'azimut qu'on obtiendrait dans le cas où, après l'avoir décomposé en deux rayons partiels polarisés l'un suivant le plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan, on parviendrait, comme on peut le faire à l'aide de certains procédés que nous indiquerons plus tard; à replacer les nœuds de l'un des rayons composants sur les nœuds de l'autre, sans changer les amplitudes. Ainsi défini, l'azimut d'un rayon simple sera toujours l'angle qui a pour tangente trigonométrique le rapport entre les amplitudes des vibrations moléculaires du rayon composant, polarisé suivant le plan fixe, et du rayon polarisé perpendiculairement à ce plan. Cela posé, lorsque le rayon résultant sera doué de la polarisation circulaire, son azimut sera de  $45^\circ$ , quelle que soit d'ailleurs la direction du plan fixe auquel il se rapporte. Mais, si le rayon résultant est doué de la polarisation elliptique, l'azimut dépendra de la position du plan fixe et changera de valeur avec cette position en même temps que l'anomalie.

Les conventions que nous venons d'admettre fournissent le moyen de simplifier les énoncés de plusieurs propositions ci-dessus établies. Ainsi, en particulier, si un rayon simple, réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux isophanes, se propage sans s'affaiblir, les effets de la réflexion ou de la réfraction pourront s'énoncer comme il suit : 1° *la tangente et la cotangente de l'azimut relatif au plan d'incidence varieront proportionnellement aux rapports direct et inverse entre les modules de réflexion ou de réfraction des rayons composants qui seraient polarisés, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan*; 2° *l'anomalie sera augmentée d'un angle égal, au signe près, à la différence entre leurs arguments de réflexion ou de réfraction.*

Parmi les diverses valeurs que peuvent acquérir l'anomalie et l'azimut d'un rayon réfléchi ou réfracté sous une incidence donnée, on doit surtout distinguer ce que nous appellerons spécialement *l'anomalie et l'azimut de réflexion et de réfraction*, savoir l'anomalie et l'azimut qu'on obtient, pour le rayon réfléchi ou réfracté, quand le rayon incident est un rayon plan, polarisé à  $45^\circ$  du plan d'incidence, de telle sorte que



son azimut soit la moitié d'un angle droit. Comme dans ce cas particulier l'anomalie du rayon incident peut être censée se réduire à zéro, et la tangente de son azimut à l'unité, on conclura immédiatement de la proposition ci-dessus exprimée : 1° que l'azimut de réflexion ou de réfraction a pour tangente et cotangente le rapport direct et le rapport inverse des modules de réflexion ou de réfraction correspondants à deux rayons incidents qui seraient polarisés, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan ; 2° que l'anomalie de réflexion ou de réfraction est égale, au signe près, à la différence entre les arguments de réflexion ou de réfraction relatifs à ces mêmes rayons.

De cette dernière proposition, jointe à la précédente, on déduit immédiatement celle que nous allons énoncer.

Lorsqu'un rayon polarisé elliptiquement, ou circulairement, ou rectilignement, après avoir été réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux isophanes, se propage sans s'affaiblir, 1° l'azimut du rayon réfléchi ou réfracté est le produit qu'on obtient quand on multiplie la tangente de l'azimut du rayon incident par la tangente de l'azimut de réflexion ou de réfraction ; 2° l'anomalie du rayon réfléchi ou réfracté est la somme qu'on obtient quand on ajoute à l'anomalie du rayon incident l'anomalie de réflexion ou de réfraction.

Il est maintenant facile de prévoir ce qui arrivera si un rayon simple, après avoir été réfléchi ou réfracté plusieurs fois de suite par des surfaces dont chacune sépare l'un de l'autre deux milieux isophanes, se propage sans s'affaiblir. En effet, concevons d'abord que les divers plans de réflexion ou de réfraction coïncident avec le premier plan d'incidence. Dans ce cas, les deux rayons partiels, dont la superposition pourra être censée produire le rayon incident, et qui seront polarisés, l'un suivant le premier plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, se trouveront toujours réfléchis et réfractés indépendamment l'un de l'autre. Or, à chaque réflexion ou réfraction nouvelle, la tangente de l'azimut du rayon déjà obtenu variera proportionnellement à la tangente de réflexion ou de réfraction, tandis que l'anomalie de réflexion ou de réfraction viendra s'ajouter à l'anomalie de ce même

rayon. Donc, en définitive, l'azimut du dernier rayon réfléchi ou réfracté aura pour tangente trigonométrique le produit qu'on obtient en multipliant la tangente de l'azimut du rayon incident par les tangentes de tous les azimuts de réflexion ou de réfraction ; et d'autre part l'anomalie du dernier rayon réfléchi ou réfracté sera la somme qu'on obtient en ajoutant à l'anomalie du rayon incident toutes les anomalies de réflexion ou de réfraction. Si le rayon simple donné est plusieurs fois réfléchi ou réfracté sous la même incidence, il y aura égalité entre les divers azimuts de réflexion ou de réfraction, par conséquent entre leurs tangentes trigonométriques, aussi bien qu'entre les diverses anomalies de réflexion ou de réfraction. Donc alors les valeurs successivement acquises par la tangente de l'azimut du rayon simple formeront une progression géométrique, tandis que les valeurs successivement acquises par son anomalie formeront une progression arithmétique. Enfin, si le rayon incident est un rayon plan et polarisé à 45° du plan d'incidence, la progression arithmétique aura zéro pour premier terme, tandis que la progression géométrique aura pour premier terme l'unité ; de sorte que les anomalies des divers rayons seront proportionnelles aux logarithmes des tangentes des azimuts correspondants, et pourront même leur devenir égales, si l'on choisit convenablement la base du système de logarithmes.

Lorsque la somme des anomalies de réflexion ou de réfraction sera, au signe près, un multiple de la demi-circonférence, c'est-à-dire du nombre  $\pi$ , le rayon incident et le dernier rayon réfléchi ou réfracté pourront être censés offrir ou la même anomalie, ou deux anomalies dont la différence sera le nombre  $\pi$ , suivant que le multiple en question sera le produit de la demi-circonférence par un nombre pair ou par un nombre impair. Dans les deux cas, si le rayon incident est polarisé en ligne droite, on pourra en dire autant du dernier rayon réfléchi ou réfracté. Seulement les deux plans de polarisation seront situés, par rapport au plan d'incidence, de deux côtés opposés dans le premier cas, et du même côté dans le second. Tel sera en particulier l'effet de plusieurs réflexions ou de plusieurs réfractions effectuées sous la même incidence, si cette incidence est telle que le rapport



entre l'anomalie principale correspondante et la demi-circonférence se trouve représenté, au signe près, par une fraction rationnelle, et si d'ailleurs le nombre des réflexions ou réfractions successives se réduit au dénominateur  $n$  de cette fraction ou à un multiple de  $n$ . Alors le plan de polarisation du dernier rayon réfléchi ou réfracté se trouvera situé, par rapport au plan d'incidence, du même côté que le plan de polarisation du rayon incident, ou du côté opposé, suivant que le nombre des réflexions sera équivalent à l'un des nombres

$$2n, 4n, 6n, \dots,$$

ou à l'un des nombres

$$n, 3n, 5n, \dots$$

Lorsque, le rayon incident étant polarisé rectilignement et réfléchi ou réfracté plusieurs fois de suite, la somme des anomalies de réflexion ou de réfraction surpasse d'un angle droit un multiple du nombre  $\pi$ , l'anomalie du dernier rayon réfléchi ou réfracté peut être réduite à  $-\frac{1}{2}\pi$ , ou à  $+\frac{1}{2}\pi$ , par conséquent à celle d'un rayon polarisé circulairement. Mais alors, pour que le dernier rayon réfléchi ou réfracté offre effectivement la polarisation circulaire, il est nécessaire que son azimut soit équivalent à la moitié d'un angle droit, et la tangente de cet azimut à l'unité. C'est ce qui arrivera si, en faisant tourner le rayon incident sur lui-même, on amène son plan de polarisation dans une position telle que la cotangente de l'azimut d'incidence soit équivalente au produit des tangentes de tous les azimuts de réflexion ou de réfraction. D'après cette règle, le rayon incident devra être polarisé à  $45^\circ$  du plan d'incidence si chaque azimut de réflexion ou de réfraction se réduit à  $45^\circ$ , ce qui a lieu, par exemple, dans toute réflexion opérée par une surface intérieure d'un prisme ou d'une plaque de verre sous une incidence plus grande que l'angle de réflexion totale. Ajoutons que la somme des anomalies de réflexion ou de réfraction surpassera d'un angle droit, conformément à l'hypothèse admise, un multiple du nombre  $\pi$ , si plusieurs réflexions ou réfractions successives s'effectuent sous une même incidence tellement choisie que le rapport entre l'ano-

malie de réflexion ou de réfraction et la demi-circonférence se trouve représenté, au signe près, par une fraction rationnelle de dénominateur pair, et si d'ailleurs le nombre des réflexions ou réfractions se réduit à la moitié  $n$  du dénominateur  $2n$  de cette fraction, ou à un multiple impair de  $n$ . Si, les autres données restant les mêmes, le nombre des réflexions ou réfractions successives devenait un multiple impair de  $n$ , le dernier rayon réfléchi ou réfracté aurait pour anomalie non plus  $-\frac{1}{2}\pi$  ou  $+\frac{1}{2}\pi$ , mais zéro ou  $\pi$ , et serait en conséquence un rayon polarisé rectilignement.

Observons encore que toute série de réflexions ou de réfractions propre à transformer un rayon plan en un rayon polarisé circulairement, ou du moins en un rayon dont l'anomalie puisse être réduite à  $-\frac{1}{2}\pi$  ou à  $+\frac{1}{2}\pi$ , transformera au contraire un rayon incident, dont l'anomalie serait  $-\frac{1}{2}\pi$  ou  $+\frac{1}{2}\pi$ , en un rayon plan. Pareillement, toute série de réflexions ou de réfractions propre à transformer un rayon plan en un rayon dont l'anomalie serait un angle donné, transformera au contraire un rayon incident dont l'anomalie serait, ou cet angle pris en signe contraire, ou le supplément de cet angle, en un rayon doué de la polarisation rectiligne. D'ailleurs, l'azimut de ce dernier rayon sera le même que celui du rayon incident, si chaque azimut de réflexion ou de réfraction est de  $45^\circ$ , comme il arrive quand chaque réflexion est opérée par une surface intérieure d'un prisme ou d'une plaque de verre sous une incidence plus grande que l'angle de réflexion totale. Donc alors le dernier rayon réfléchi ou réfracté sera précisément ce que deviendrait le rayon incident si, après l'avoir décomposé en deux rayons partiels, polarisés, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, on parvenait à replacer tout à coup les nœuds de l'un des rayons composants sur les nœuds de l'autre, sans changer les amplitudes des vibrations moléculaires.

Lorsque chaque azimut de réflexion ou de réfraction est, non pas égal, mais supérieur à l'unité, alors, si le nombre des réflexions ou des réfractions devient de plus en plus considérable, les azimuts des rayons successivement obtenus croîtront sans cesse et indéfiniment, de sorte



que, après un grand nombre de réflexions ou de réfractions, le dernier rayon réfléchi ou réfracté sera sensiblement polarisé dans le plan d'incidence.

Afin d'établir, dans le langage, une distinction entre les points situés de part et d'autre d'un plan d'incidence, nous concevons qu'un spectateur, ayant les pieds posés sur la surface réfléchissante ou réfringente et s'appuyant dans le premier milieu contre la normale à cette surface, regarde le rayon réfléchi. Les points situés à la droite ou à la gauche de ce spectateur sont précisément ceux que nous dirons situés à droite ou à gauche du plan d'incidence. Nous dirons encore que l'azimut d'un rayon polarisé en ligne droite se compte, à droite ou à gauche de ce plan, suivant que le plan du rayon passera, dans le premier milieu, à la droite ou à la gauche du plan d'incidence. Enfin nous prendrons zéro pour l'anomalie d'un rayon doué de la polarisation rectiligne, et dont l'azimut se compterait à droite du plan d'incidence; d'où il résulte que l'anomalie d'un rayon doué de la polarisation rectiligne, mais dont l'azimut se compterait à gauche du plan d'incidence, sera réductible au nombre  $\pi$ . Quant à l'azimut d'un rayon dont la polarisation ne serait pas rectiligne, mais circulaire ou elliptique, rien ne détermine le sens dans lequel il devra se compter à partir du plan d'incidence. Car, après avoir décomposé ce rayon en deux autres polarisés, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, on peut concevoir qu'un nœud de l'un des rayons composants soit replacé sur un nœud de même espèce de l'autre, ou sur un nœud d'espèce différente, sans que les amplitudes soient altérées, et, dans les deux cas, le nouveau rayon résultant, qui sera doué de la polarisation rectiligne, offrira le même azimut, compté tantôt à droite, tantôt à gauche du plan d'incidence <sup>(1)</sup>.

(1) Un extrait qui, d'après l'ordre chronologique, devrait être inséré à cette place, sous le n° 30, est reporté au n° 31, afin de ne pas interrompre le cours du présent Mémoire. Des transpositions analogues seront faites chaque fois que l'ordre des matières l'exigera.

(Note des Éditeurs.)

## 50.

C. R., t. VIII, p. 272 (25 février 1839). — Suite.

Jusqu'à présent nous avons supposé que les divers plans de réflexion et de réfraction se confondaient avec le plan d'incidence. Pour être en état de calculer ce qui arrive dans la supposition contraire, il suffit de rechercher quelles variations subissent l'anomalie et l'azimut d'un rayon simple quand le plan à partir duquel se comptait l'azimut vient à tourner. On y parvient aisément à l'aide des considérations suivantes :

Observons d'abord que si, dans un rayon plan, les déplacements sont mesurés parallèlement à un axe fixe, l'amplitude des vibrations parallèles à cet axe sera évidemment la projection sur le même axe de l'amplitude du rayon, c'est-à-dire de l'amplitude *maximum*, mesurée sur la droite que décrit une molécule.

Si, au lieu d'un rayon plan, on considère, dans un milieu isopane et transparent, un rayon doué de la polarisation circulaire, l'amplitude mesurée parallèlement à un diamètre du cercle que décrit une molécule sera ce diamètre même; et, si l'on décompose le rayon donné en deux autres polarisés, l'un suivant un plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan, les phases des rayons composants seront deux angles dont la différence, équivalente à l'anomalie, pourra être réduite, abstraction faite du signe, à un angle droit. Si l'on choisit le sens suivant lequel se compteront dans le plan fixe les déplacements positifs, de manière que la différence dont il s'agit soit négative, les cosinus des deux phases se réduiront au sinus et au cosinus de la seconde. D'ailleurs les cosinus des deux phases, ayant pour expressions les rapports qu'on obtient quand on divise, par le déplacement absolu d'une molécule, ses déplacements mesurés perpendiculairement et parallèlement au plan fixe, se réduiront encore au sinus et au cosinus de l'angle que forme avec le plan fixe le rayon vecteur mené à la molécule ou, ce



qui revient au même, le rayon du cercle qu'elle décrit. Donc ce dernier angle pourra être censé se confondre avec la seconde phase. On pourrait le supposer équivalent à la même phase prise en signe contraire, si l'on n'avait pas choisi convenablement le sens suivant lequel se comptent, dans le plan fixe, les déplacements positifs. En résumé, *lorsqu'un rayon doué de la polarisation circulaire sera décomposé en deux autres, polarisés rectilignement suivant deux plans rectangulaires entre eux, chacun des rayons composants aura pour phase un angle que l'on pourra supposer équivalent, au signe près, à l'angle compris entre le plan qui renferme ce rayon et le rayon du cercle décrit par une molécule.* D'ailleurs, la phase d'un rayon plan, étant une fonction linéaire du temps, varie de quantités égales en temps égaux. On pourra donc en dire autant de l'angle formé avec un plan fixe par le rayon du cercle que décrit une molécule dans le phénomène de la polarisation circulaire. Donc, *dans un rayon polarisé circulairement, chaque molécule se meut, sur le cercle qu'elle parcourt, avec une vitesse constante, de sorte que l'angle et l'aire décrits par le rayon vecteur mené du centre du cercle à la molécule sont proportionnels au temps que le rayon vecteur emploie à les décrire.*

Observons encore qu'à un rayon plan donné on peut toujours en superposer un autre qui offre la même amplitude de vibrations, avec une phase équivalente à la phase du premier augmentée ou diminuée d'un angle droit, et obtenir ainsi un rayon résultant doué de la polarisation circulaire. Donc, en vertu de ce qui précède, *la phase d'un rayon plan peut être censée se confondre avec l'angle compris entre le plan du rayon et la direction du déplacement absolu d'une molécule dans un rayon doué de la polarisation circulaire résultant de la superposition de deux rayons polarisés en ligne droite dont les plans de polarisation seraient perpendiculaires entre eux et dont l'un serait précisément le rayon donné.*

Considérons maintenant, dans un milieu isophane et transparent, un rayon doué de la polarisation elliptique, et concevons qu'on le décompose encore en deux autres, polarisés en ligne droite, l'un suivant un plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan. Si le plan fixe renferme l'un des axes de l'ellipse décrite par une molécule, l'anomalie

ou la différence entre les phases des rayons composants pourra être censée se réduire, au signe près, à un angle droit. En effet, les déplacements d'une molécule étant mesurés parallèlement aux deux axes de l'ellipse décrite, l'un de ces déplacements s'évanouira, et l'autre atteindra sa plus grande valeur numérique au moment où la molécule passera par un sommet de l'un des axes. Donc, en ce moment, les cosinus des deux phases auront pour valeurs numériques zéro et 1, et les phases elles-mêmes pourront être réduites, l'une à zéro ou à  $\pi$ , l'autre à  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Donc alors la différence des phases, ou l'anomalie, sera égale, au signe près, à  $\frac{\pi}{2}$ .

Ainsi, *dans un rayon doué de la polarisation elliptique, il suffit de faire passer le plan fixe, à partir duquel se compte l'azimut, par un des axes de l'ellipse que décrit une molécule, pour que l'anomalie se réduise, au signe près, à  $\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire à un angle droit.*

Lorsqu'un rayon doué de la polarisation elliptique est décomposé en deux autres polarisés suivant deux plans rectangulaires entre eux, et que ces deux plans renferment les axes de l'ellipse décrite par une molécule, les deux derniers rayons deviennent ce que nous appellerons les *rayons composants principaux*, leurs plans, leurs phases et leurs amplitudes étant les *plans principaux*, les *phases principales* et les *amplitudes principales*. L'azimut relatif à l'un des deux plans dont il s'agit sera encore désigné sous le nom d'*azimut principal*. Cela posé, il est clair: 1° *que la différence des phases principales sera égale, au signe près, à un angle droit*; 2° *que les amplitudes principales se réduiront aux deux axes de l'ellipse décrite par une molécule*; 3° *que les azimuts principaux auront pour tangentes trigonométriques les rapports direct et inverse des amplitudes principales.*

Lorsque les plans des rayons composants ne renferment point les axes de l'ellipse décrite, ils offrent du moins pour traces, sur le plan de cette ellipse, deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre; dans tous les cas, les amplitudes des rayons composants se réduisent aux deux côtés du rectangle circonscrit à l'ellipse, et que chacun des deux



diamètres divise en parties symétriques. D'ailleurs il est facile de s'assurer : 1° que les côtés de tout rectangle circonscrit à une ellipse ont pour limite supérieure le grand axe et pour limite inférieure le petit axe de l'ellipse; 2° que la somme des carrés de ces côtés, ou le carré de la diagonale, est constante et égale à la somme des carrés des deux axes. Donc, dans un rayon doué de la polarisation elliptique, les amplitudes maximum et minimum sont celles qui se mesurent parallèlement au grand axe et au petit axe de l'ellipse que décrit une molécule, c'est-à-dire les amplitudes principales; de plus, lorsqu'un semblable rayon est décomposé en deux autres polarisés suivant deux plans rectangulaires entre eux, les amplitudes des rayons composants fournissent des carrés dont la somme est constamment la même que celle des carrés des amplitudes principales. La racine carrée de cette somme est ce que nous nommerons l'*amplitude quadratique* du rayon résultant : cette amplitude quadratique se confond évidemment avec l'amplitude maximum du rayon plan dans lequel se transformerait le rayon résultant si l'on parvenait, sans altérer les amplitudes des rayons composants, à replacer les nœuds de l'un sur les nœuds de l'autre.

Considérons de nouveau, dans un rayon doué de la polarisation elliptique, les rayons composants principaux, dont les plans renferment les axes de l'ellipse décrite par chaque molécule, et dont les phases peuvent être censées différer entre elles d'un angle droit. Si l'on fait varier les amplitudes de ces rayons principaux, ou seulement de l'un d'entre eux, en faisant croître, par exemple, l'amplitude principale minimum, c'est-à-dire le petit axe de l'ellipse, sans altérer les phases, la polarisation deviendra circulaire au moment où l'amplitude minimum atteindra l'amplitude maximum. Réciproquement, pour revenir de la polarisation circulaire à la polarisation elliptique, il suffira de considérer un rayon polarisé circulairement comme résultant de la superposition de deux rayons principaux dont les plans se couperaient à angle droit, et dont les amplitudes seraient égales entre elles, puis de faire décroître dans un rapport donné une seule des amplitudes principales, sans altérer les phases. Alors le cercle décrit par une molécule se transfor-

mera en une ellipse dont le grand axe sera un diamètre du cercle, et dont les ordonnées, mesurées sur des perpendiculaires à ce diamètre, seront aux ordonnées correspondantes du cercle dans le rapport donné. Il y a plus, les sommets des ordonnées correspondantes seront des points que la molécule atteindra au même instant, soit qu'elle décrive le cercle ou l'ellipse; et par suite les rayons vecteurs menés à la molécule, 1° dans l'ellipse, 2° dans le cercle, seront deux droites dont les ordonnées seront encore entre elles dans le rapport donné. On pourra même en dire autant de deux cordes correspondantes qui représenteraient dans l'ellipse, comme dans le cercle, la distance entre les positions occupées par la molécule à deux instants déterminés. D'ailleurs, lorsque les ordonnées de lignes droites ou courbes, qui servent de limites à une surface plane, décroissent dans un certain rapport, la surface elle-même décroît dans le rapport dont il s'agit. Donc le rapport du petit axe de l'ellipse au grand axe sera aussi le rapport des aires décrites par le rayon vecteur mené à une molécule dans l'ellipse et dans le cercle; et l'*aire décrite dans l'ellipse*, aussi bien que l'*aire décrite dans le cercle*, sera proportionnelle au temps que le rayon vecteur emploie à décrire cette aire. Ainsi, en particulier, la durée d'une vibration moléculaire, ou le temps que le rayon vecteur emploie pour décrire l'aire totale de l'ellipse, sera le quadruple du temps qu'il emploie à décrire le quart de cette aire, par conséquent le quadruple du temps que la molécule emploie à parcourir l'arc compris entre une extrémité du grand axe et une extrémité du petit axe. Ce n'est pas tout; lorsque la polarisation est circulaire, l'arc de cercle que parcourt une molécule dans un intervalle de temps donné et l'angle au centre correspondant sont évidemment représentés par les produits qu'on obtient quand on multiplie, d'une part la circonférence du cercle décrit, d'autre part le nombre  $2\pi$ , par le rapport de cet intervalle à la durée d'une vibration moléculaire; et le triangle isocèle qui, ayant la corde de cet arc pour base, a pour sommet le centre du cercle, offre une surface dont le double a pour mesure le produit du carré du rayon par le sinus de l'angle au centre. Enfin, quand on multiplie le carré du rayon du cercle par le



rapport du petit axe de l'ellipse au grand axe, qui est aussi le diamètre du cercle, on obtient pour résultat le produit des deux demi-axes. Donc, lorsque la polarisation sera elliptique, le triangle qui aura pour sommets le centre de l'ellipse décrite par une molécule et les positions occupées par cette molécule à deux instants déterminés, offrira une surface dont le double aura pour mesure le produit des deux demi-axes par le sinus d'un angle proportionnel à l'intervalle compris entre ces deux instants. Donc si, cet intervalle restant le même, les deux instants varient, la surface du triangle ne changera pas de valeur. Si, pour fixer les idées, on suppose l'intervalle entre les deux instants égal au quart de la durée d'une vibration moléculaire, l'arc de cercle ci-dessus mentionné se réduira au quart de la circonférence, et l'angle au centre correspondant offrira l'unité pour sinus; par conséquent, dans un rayon doué de la polarisation elliptique, le triangle qui aura pour sommets le centre de l'ellipse décrite par une molécule, et les positions occupées par cette molécule à deux instants que sépare un intervalle égal au quart de la durée d'une vibration, offrira une surface équivalente à la moitié du rectangle construit sur les deux demi-axes de l'ellipse.

Pour établir les propositions précédentes, nous avons remplacé un rayon doué de la polarisation elliptique par le système des rayons composants principaux. Voyons ce qui arriverait si à ce système on substituait celui de deux rayons polarisés suivant deux plans rectangulaires entre eux et dont l'un renfermerait un diamètre donné de l'ellipse décrite. Dans chacun de ces deux nouveaux rayons, comme dans tout rayon plan, le déplacement d'une molécule, mesuré sur la droite qu'elle décrit, sera le produit de deux facteurs, l'un constant, l'autre variable, dont le premier représentera la demi-amplitude des vibrations moléculaires, tandis que le second représentera le cosinus de la phase. Or le cosinus d'un angle se transforme en son sinus, au signe près, lorsque cet angle est augmenté ou diminué d'un quart de circonférence, et l'on sait que les carrés du sinus et du cosinus d'un même angle donnent pour somme l'unité. D'autre part, pour que la phase d'un rayon plan se trouve augmentée ou diminuée d'un quart de circonférence, il suffit

de considérer la même molécule à deux instants séparés l'un de l'autre par un intervalle équivalent au quart de la durée d'une vibration moléculaire. Donc, dans chaque rayon plan, les déplacements absolus d'une molécule mesurés, 1° à un instant donné, 2° à un second instant séparé du premier par le quart de la durée d'une vibration moléculaire, fourniront des carrés dont la somme sera le carré de la demi-amplitude.

Observons maintenant que, dans la polarisation elliptique, deux instants séparés par un intervalle égal au quart de la durée d'une vibration seront ceux où une même molécule parviendra successivement à une extrémité du grand axe, puis à une extrémité du petit axe de l'ellipse qu'elle décrit. Donc celui des rayons composants dont le plan renfermera un diamètre donné de l'ellipse offrira une demi-amplitude dont le carré sera équivalent à la somme des carrés des déplacements mesurés sur ce diamètre dans ces deux instants, par conséquent à la somme des carrés des projections des deux demi-axes sur ce même diamètre. Or ces deux projections auront pour valeurs numériques les produits qu'on obtient en multipliant chaque demi-axe par le cosinus de l'angle aigu qu'il forme avec le diamètre donné; et dans ce qu'on vient de dire on peut évidemment remplacer la demi-amplitude et les demi-axes par l'amplitude et les axes mêmes. On pourra donc énoncer la proposition suivante :

*Lorsqu'un rayon doué de la polarisation elliptique est décomposé en deux autres polarisés suivant deux plans rectangulaires entre eux, le carré de l'amplitude de chaque rayon composant équivaut à la somme des deux produits qu'on obtient en multipliant le carré de chaque axe de l'ellipse que décrit une molécule par le carré du cosinus de l'angle aigu que forme cet axe avec le plan de ce même rayon.*

Les angles aigus formés par le diamètre donné avec les deux axes de l'ellipse étant compléments l'un de l'autre, et le carré du sinus ou du cosinus d'un angle étant la moitié de la somme et de la différence qu'on obtient lorsque l'unité est augmentée ou diminuée du cosinus de l'angle double, la proposition qui précède entraîne encore la suivante :

*Lorsqu'un rayon doué de la polarisation elliptique est décomposé en*





deux autres polarisés suivant deux plans rectangulaires entre eux, alors, pour obtenir le carré de l'amplitude de chaque rayon composant, il suffit de former les carrés des deux axes de l'ellipse que décrit une molécule, puis d'ajouter à la demi-somme de ces carrés leur demi-différence multipliée par le cosinus du double de l'angle aigu compris entre le grand axe de l'ellipse et le plan du rayon que l'on considère.

Si l'on passe d'un rayon composant à l'autre, l'angle aigu formé par le plan du rayon avec le grand axe de l'ellipse se transformera en son complément, et le cosinus de l'angle double changera seulement de signe. Cela posé, on déduira immédiatement de la dernière proposition celle que nous allons énoncer.

*Lorsqu'un rayon doué de la polarisation elliptique est décomposé en deux autres polarisés perpendiculairement à un plan fixe et suivant ce même plan, les carrés des amplitudes des rayons composants offrent pour somme la somme des carrés des axes de l'ellipse que décrit une molécule, et pour différence la différence entre les carrés du grand axe et du petit axe multipliée par le cosinus du double de l'angle aigu compris entre le grand axe et le plan fixe.*

La première partie de cette proposition se confond évidemment avec un théorème déjà établi ci-dessus; et l'on peut ajouter que, le carré du déplacement absolu d'une molécule étant la somme des carrés des déplacements mesurés suivant les deux axes de l'ellipse décrite, les carrés des déplacements mesurés à deux instants divers que sépare un intervalle égal au quart de la durée d'une vibration fourniront, en vertu de ce qui a été dit plus haut, une somme constante, représentée par la somme des carrés des amplitudes principales, ou, ce qui revient au même, par le carré de l'amplitude quadratique. Cette somme ne différera donc pas de la somme des carrés des amplitudes de deux rayons composants dont les plans se coupent à angle droit.

Nous avons encore une remarque importante à faire relativement aux amplitudes mesurées parallèlement à divers axes dans un rayon doué de la polarisation elliptique. Un semblable rayon étant considéré comme résultant de la superposition de deux rayons partiels polarisés,

l'un suivant un plan fixe, l'autre perpendiculairement à ce plan, à l'instant même où la phase du rayon polarisé perpendiculairement au plan fixe s'évanouira, la phase du rayon polarisé suivant le plan fixe se trouvera représentée par l'anomalie. A un second instant séparé du premier par un intervalle égal au quart de la durée d'une vibration moléculaire, les deux phases dont il s'agit se trouveront augmentées ou diminuées d'un angle droit, en sorte que le cosinus de la première se trouvera réduit à zéro, et le cosinus de la seconde au sinus de l'anomalie ou à ce sinus pris en signe contraire. Donc, à ce second instant, le déplacement absolu de la molécule se mesurera sur une perpendiculaire au plan fixe, et sera égal, abstraction faite du signe, au produit de la demi-amplitude du rayon polarisé suivant le plan fixe par le sinus de l'anomalie. Or, si l'on prend ce déplacement pour base du triangle qui a pour sommets le centre de l'ellipse décrite par une molécule et les positions occupées par cette molécule aux deux instants, la hauteur de ce triangle sera, non pas le déplacement absolu de la molécule au premier instant, mais la projection de ce déplacement sur le plan fixe, ou, en d'autres termes, la demi-amplitude du rayon renfermé dans le plan fixe, puisqu'au premier instant la phase de ce rayon se réduit à zéro et offre l'unité pour cosinus. Donc la surface de ce triangle, équivalente à la moitié du rectangle construit sur les demi-axes de l'ellipse, aura pour mesure, au signe près, la moitié du produit des demi-amplitudes des rayons composants par le sinus de l'anomalie. Donc ce dernier produit conservera constamment la même valeur numérique si la direction du plan fixe vient à changer. On peut même affirmer que dans ce cas le produit en question conservera toujours le même signe, puisque ses trois facteurs varieront par degrés insensibles avec la direction du plan fixe. Cela posé, si l'on nomme *anomalie principale* celle qui est relative au système des rayons composants principaux, et qui peut toujours se réduire, au signe près, à un angle droit, on déduira immédiatement de la remarque qu'on vient de faire la proposition suivante :

*Lorsqu'un rayon doué de la polarisation elliptique est décomposé en deux*



autres, polarisés perpendiculairement à un plan fixe et suivant ce même plan, le produit des amplitudes des rayons composants par le sinus de l'anomalie est égal au produit des amplitudes principales par le sinus de l'anomalie principale.

Si l'on divise les amplitudes des rayons polarisés perpendiculairement au plan fixe et suivant ce plan par la racine carrée de la somme des carrés de ces deux amplitudes, ou, en d'autres termes, par l'amplitude quadratique du rayon résultant, on obtiendra évidemment pour quotients le cosinus et le sinus de l'azimut relatif au plan fixe. En conséquence, on pourra, dans les théorèmes qui précèdent, remplacer le produit des deux amplitudes par le produit de ce sinus et de ce cosinus, ou, ce qui revient au même, par la moitié du sinus du double de l'azimut, et la différence entre les carrés des deux amplitudes par la différence entre les carrés du cosinus et du sinus de l'azimut, ou, ce qui revient au même, par le cosinus de l'azimut doublé. Car opérer ainsi, revient à prendre simplement l'amplitude quadratique pour unité de longueur. Cela posé, on déduira immédiatement des théorèmes dont il s'agit la proposition suivante :

*Dans un rayon doué de la polarisation elliptique, le double de l'azimut relatif à un plan fixe quelconque offre un cosinus proportionnel au cosinus du double de l'angle que forme avec le plan fixe un des axes de l'ellipse décrite par une molécule, et un sinus réciproquement proportionnel au sinus de l'anomalie.*

Si l'on compare en particulier le double de l'azimut relatif à un plan fixe quelconque au double de l'azimut principal qui correspond au cas où le plan fixe passe par un des axes de l'ellipse, on obtiendra le théorème suivant :

*Dans un rayon doué de la polarisation elliptique, le double de l'azimut relatif à un plan fixe, et le double d'un azimut principal, c'est-à-dire de l'azimut relatif à l'un des plans principaux, offrent des cosinus dont le rapport est le cosinus du double de l'angle aigu formé par le plan fixe avec le plan principal que l'on considère, et des sinus dont le rapport inverse est le sinus de l'anomalie relative au plan fixe, ou ce sinus pris*

*en signe contraire, suivant que l'anomalie principale est réductible à  $+\frac{\pi}{2}$  ou à  $-\frac{\pi}{2}$ .*

On conclut encore aisément de ce théorème que la cotangente de l'anomalie relative à un plan fixe est proportionnelle au sinus du double de l'angle aigu formé par le plan fixe avec l'un des plans principaux, et se réduit, au signe près, au produit de ce sinus par la cotangente du double de l'azimut principal relatif au dernier de ces plans.

Lorsque la polarisation elliptique se transforme en polarisation circulaire, le double de chaque azimut principal est un angle droit dont le sinus se réduit à l'unité, le cosinus à zéro, et dont la cotangente devient infinie. Donc alors, en vertu des théorèmes précédents, le double de l'azimut relatif à un plan quelconque et la valeur numérique de l'anomalie doivent constamment se réduire à un angle droit; ce qui est effectivement exact. Alors aussi tout système de plans rectangulaires entre eux, et passant par la direction du rayon donné, est un système de plans principaux.

Lorsque la polarisation elliptique se transforme en polarisation rectiligne, l'amplitude minimum s'évanouit, et par suite les azimuts principaux se réduisent à zéro et à  $\pi$ , les plans principaux n'étant alors autre chose que le plan du rayon et son plan de polarisation. Or, dans ce cas, il résulte des théorèmes énoncés : 1° que l'azimut relatif à un plan quelconque se réduit, comme on devait s'y attendre, à l'angle compris entre ce plan et le plan du rayon; 2° que l'anomalie est constamment nulle; à moins qu'elle ne devienne indéterminée, en vertu de la disparition de l'un des rayons composants, ce qui arrive quand on fait coïncider le plan fixe à partir duquel se compte l'azimut avec l'un des plans principaux.

Au reste, les diverses propositions que nous venons d'établir ne sont pas seulement applicables à un rayon de lumière propagé dans un milieu isophane et transparent. Elles peuvent être étendues à un rayon propagé dans un milieu doublement réfringent ou dans un milieu qui absorberait la lumière. Pour s'en convaincre, il suffit de faire attention aux remarques suivantes.



Dans tout mouvement simple dont le module ne renferme pas le temps, la courbe décrite par une molécule est non seulement une courbe plane, mais de plus, comme nous l'avons déjà dit, une courbe fermée et rentrante sur elle-même. Si, dans le plan de cette courbe, on trace un axe quelconque, le déplacement de la molécule, mesuré parallèlement à l'axe dont il s'agit, sera le produit de deux facteurs dont l'un (\*) se réduira sensiblement à la demi-amplitude des vibrations parallèles à cet axe, tandis que l'autre facteur sera le cosinus de l'angle dont la partie variable est l'argument du mouvement simple, la partie constante étant ce que nous appelons le *paramètre angulaire*. Cet angle étant désigné sous le nom de *phase*, si dans le plan de la courbe décrite on trace d'abord un axe fixe, puis un second axe perpendiculaire au premier, les déplacements relatifs à ces deux axes offriront généralement deux phases et deux amplitudes distinctes. La différence de la seconde phase à la première est ce que nous appellerons l'*anomalie* du mouvement simple, et l'angle aigu qui aura pour tangente le rapport de la seconde amplitude à la première sera l'*azimut* relatif à l'axe fixe. Ces définitions étant admises, les relations entre les phases, les amplitudes, l'anomalie et l'azimut, resteront évidemment les mêmes, soit que le module du mouvement simple se réduise à l'unité, soit qu'il varie avec les coordonnées. Dans l'un et l'autre cas, la courbe décrite par chaque molécule sera une ellipse qui pourra quelquefois se réduire à un cercle ou à une droite. En effet, dans l'un et l'autre cas, le sinus et le cosinus de l'argument du mouvement simple pourront être exprimés par deux fonctions linéaires des déplacements mesurés, dans le plan de la courbe, suivant deux axes rectangulaires entre eux, et en égalant à l'unité la somme des carrés de ces deux fonctions, on obtiendra pour l'équation de la courbe décrite une équation

(\*) Le premier facteur dont il est ici question sera le produit d'une constante réelle par le module du mouvement simple, et, comme ce module, il ne variera pas d'une manière sensible quand on passera d'un point de la courbe décrite par une molécule à un autre. Par suite, cette courbe, quoiqu'à la rigueur différente de l'ellipse, en différera très peu, et en parlant de mouvements infiniment petits, on pourra la supposer réduite à l'ellipse, comme nous le faisons ici.

tion du second degré, en vertu de laquelle les déplacements devront toujours conserver des valeurs finies. La seule différence entre le premier cas et le second, c'est que l'amplitude des vibrations parallèles à un axe quelconque restera invariable dans le premier cas, et variera dans le second, quand on passera d'une molécule à une autre. Il sera d'ailleurs naturel de désigner, sous le nom de *phases principales*, d'*amplitudes principales*, d'*anomalies principales* et d'*azimuts principaux*, les phases, les amplitudes, les anomalies et les azimuts qui correspondront aux axes mêmes de l'ellipse décrite par une molécule.

Comme, dans la théorie de la lumière, l'argument d'un mouvement simple est toujours indépendant du temps, il suit de ce que l'on vient de dire que la polarisation d'un rayon simple, propagé dans un milieu homogène, est toujours elliptique, circulaire ou rectiligne, lors même que ce milieu cesse d'être isophage ou transparent, et que les relations ci-dessus établies entre les phases, les amplitudes, les azimuts et les anomalies sont applicables à un rayon quelconque, pourvu que, dans les énoncés des théorèmes, on substitue généralement au système de deux plans rectangulaires, menés par la direction du rayon, le système de deux axes rectangulaires tracés dans le plan de l'ellipse décrite par une molécule, et au système des plans principaux le système des deux axes de cette ellipse.

Il est facile d'appliquer les divers théorèmes ci-dessus établis à la recherche des modifications qu'éprouve un rayon simple, quand on lui fait subir plusieurs réflexions ou réfractions successives, opérées chacune par la surface de séparation de deux milieux isophanes, dont le premier au moins est transparent. En effet, à l'aide de ces théorèmes, en supposant connus, pour chaque rayon incident, l'azimut relatif au plan d'incidence, et l'anomalie correspondante, on pourra déterminer les azimuts principaux, ainsi que les directions des plans principaux; et réciproquement, en supposant connus, pour chaque rayon réfléchi ou réfracté, les azimuts principaux, ainsi que les directions des plans principaux, on pourra déterminer, pour le même rayon, l'anomalie et l'azimut qui correspondront à un nouveau plan d'incidence. D'ailleurs,



pour chaque réflexion ou réfraction, l'on saura comment l'anomalie et l'azimut, relatifs au plan d'incidence, varient dans le passage du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté, quand on connaîtra l'anomalie et l'azimut de réflexion ou de réfraction. Ainsi, en particulier, d'après ce qui a été dit plus haut, la variation de l'anomalie, dans le passage du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté, ne sera autre chose que l'anomalie de réflexion ou de réfraction.

Lorsque le rayon incident est doué de la polarisation rectiligne, alors, pour que l'un des plans principaux du rayon réfléchi coïncide avec le plan d'incidence et de réflexion, il est nécessaire que l'anomalie de réflexion puisse être censée se réduire, au signe près, à un angle droit; en d'autres termes, il est nécessaire que les coefficients de réflexion des rayons composants, polarisés, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan, offrent un rapport dont la partie réelle s'évanouisse. Cette condition étant supposée remplie, l'azimut de réflexion est ce que devient l'azimut principal du rayon réfléchi quand on prend pour azimut du rayon incident  $45^\circ$ , et ce que nous nommerons en conséquence l'*azimut principal de réflexion*. L'incidence qui fournira l'azimut principal de réflexion sera nommée elle-même *incidence principale*. Si l'azimut principal de réflexion devient un angle droit, alors, quelle que soit la direction du plan de polarisation du rayon incident, l'incidence principale fournira un rayon réfléchi, *polarisé dans le plan d'incidence*. C'est ce qui arrive quand la réflexion a lieu à la surface du verre ou d'autres corps transparents, capables, comme on le dit, de polariser complètement la lumière. Alors, l'incidence principale ne diffère pas de ce qu'on a nommé l'*angle de polarisation*. Mais, si l'azimut principal, n'étant pas nul, diffère d'un angle droit, le rayon réfléchi cessera d'être un rayon plan, et, pour obtenir la polarisation circulaire après une seule réflexion, il suffira, en faisant tourner le rayon incident sur lui-même, d'amener son plan de polarisation dans une position telle que l'azimut du rayon incident soit le complément de l'azimut de réflexion principal. En suivant cette règle, on pourra transformer un rayon plan en un rayon doué de la polarisation

circulaire, à l'aide d'une seule réflexion effectuée, sous l'incidence principale, par la surface extérieure d'un métal ou d'un corps transparent qui, comme le diamant, polarise incomplètement la lumière. Si la réflexion était opérée par la surface intérieure d'un corps transparent, il pourrait y avoir, dans certains cas, deux incidences principales, l'une inférieure, l'autre supérieure à l'angle de réflexion totale, ainsi qu'on l'expliquera plus tard. Lorsque la réflexion est opérée par la surface extérieure d'un corps opaque, et en particulier d'un métal, l'incidence principale coïncide avec ce que M. Brewster a nommé *the maximum polarising angle*, et ne doit pas être confondue avec un autre angle qui, à la vérité, en diffère souvent très peu, savoir, l'angle d'incidence pour lequel la quantité de lumière polarisée dans le plan d'incidence est la plus grande possible, et pour lequel aussi l'azimut de réflexion devient un *maximum*.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — Note sur les propositions établies dans le  
Compte rendu de la séance du 11 février 1839.

C. R., t. VIII, p. 229 (18 février 1839).

La dernière de ces propositions, étant généralisée, peut s'énoncer comme il suit :

Lorsque chaque azimut de réflexion ou de réfraction est, non pas égal, mais supérieur ou inférieur à l'unité, alors, si le nombre des réflexions ou des réfractions devient de plus en plus considérable, les azimuts des rayons successivement obtenus croîtront ou décroîtront sans cesse et indéfiniment, de sorte que, après un grand nombre de réflexions ou de réfractions, le dernier rayon réfléchi ou réfracté sera sensiblement polarisé dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan.



Au reste, cette proposition, ainsi que les précédentes, s'accorde avec les expériences des physiciens, particulièrement avec les formules et les expériences de Fresnel, relatives à la réflexion et à la réfraction opérées par la surface de séparation de deux milieux isophanes et transparents. Pour montrer une application des mêmes propositions à la réflexion opérée par des corps opaques, nous rappellerons ici quelques résultats obtenus par M. Brewster. Cet illustre physicien ayant fait réfléchir deux fois de suite, par un métal, un rayon polarisé à 45° du plan d'incidence, a mesuré l'azimut après la première et la seconde réflexion, dans le cas où elles ont lieu sous des incidences égales et tellement choisies que la seconde réflexion produise un nouveau rayon doué, comme le rayon incident, de la polarisation rectiligne. Or il résulte des propositions énoncées que, dans ce cas, la tangente de l'azimut doit acquérir, après la première et après la seconde réflexion, deux valeurs dont l'une soit la racine carrée de l'autre. D'ailleurs, en faisant successivement usage des métaux dont les noms suivent, M. Brewster a trouvé que l'azimut était :

	Après la première réflexion.	Après la seconde réflexion.
Pour l'argent.....	42. 0'	39. 48'
Pour le cuivre.....	36. 30	29. 0
Pour le mercure.....	35. 0	26. 0
Pour le métal des miroirs.....	32. 0	21. 0

et les tangentes des quatre azimuts mesurés après la seconde réflexion ont pour racines carrées les tangentes des quatre angles

$$42^{\circ}23', 36^{\circ}40', 34^{\circ}56', 31^{\circ}47',$$

qui diffèrent très peu, comme on le voit, des quatre azimuts fournis, après la première réflexion, par des expériences directes, les différences étant respectivement

$$-23', -10', 4', 13'.$$

On doit même observer que, pour déterminer l'azimut relatif à l'argent, après la première réflexion, M. Brewster a eu recours à deux

expériences distinctes, dans l'une desquelles le rayon réfléchi traversait une plaque cristallisée, propre à faire évanouir l'anomalie, sans altérer l'azimut, tandis que, dans l'autre expérience, le rayon réfléchi par le métal subissait deux nouvelles réflexions sur le verre, sous l'incidence de 54 $\frac{1}{2}$ °, par conséquent, deux réflexions capables de faire acquérir la polarisation circulaire au rayon incident, c'est-à-dire à un rayon plan et polarisé à 45° du plan d'incidence. Or, il est remarquable que les azimuts fournis par ces deux expériences se réduisent aux angles 42° et 42 $\frac{1}{2}$ °, entre lesquels se trouve compris l'angle 42°23', déduit par le calcul de l'azimut du rayon ramené à la polarisation rectiligne par deux réflexions effectuées sous la même incidence, à la surface de l'argent.

Lorsque M. Brewster a fait usage de platine, d'acier et de plomb, il a obtenu, pour les azimuts relatifs à la première et à la seconde réflexion, des nombres qui ne s'accordent plus entre eux d'une manière aussi parfaite. En effet, il a trouvé que l'azimut d'un rayon primitivement polarisé à 45° du plan d'incidence, puis ramené, par deux réflexions effectuées sous le même angle, à la polarisation rectiligne, était :

	Après la première réflexion.	Après la seconde réflexion.
Pour le platine.....	34. 0	22
Pour l'acier.....	30. 30	21
Pour le plomb.....	26. 0	11

Or, les tangentes des trois azimuts relatifs à la seconde réflexion ont pour racines carrées les tangentes des angles

$$32^{\circ}26', 28^{\circ}56', 23^{\circ}48',$$

et les différences de ces angles aux azimuts mesurés après la première réflexion sont respectivement

$$1^{\circ}34', 1^{\circ}34', 2^{\circ}12'.$$

Quoique ces différences surpassent notablement celles qui étaient relatives aux quatre autres métaux, néanmoins elles ne sont pas assez



considérables pour ne pouvoir être attribuées aux erreurs d'observation et à cette circonstance particulière que la lumière employée par M. Brewster n'était pas une lumière homogène, comme nos formules le supposent, mais une lumière blanche, composée de rayons de diverses couleurs. Nous ne saurions dire si c'est à cette dernière circonstance qu'il convient d'attribuer la différence encore plus considérable qui se rapporte à la galène, et s'élève à  $6^{\circ}55'$ , ou si cette différence tient à ce qu'il ne serait pas permis de considérer la galène comme un corps isophane. C'est une question sur laquelle il nous paraît utile d'appeler l'attention des physiciens.

## 52.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Note sur l'égalité des réfractions de deux rayons lumineux qui émanent de deux étoiles situées dans deux portions opposées de l'écliptique.*

C. R., t. VIII, p. 327 (4 mars 1839).

Il résulte d'expériences faites par M. Arago que les rayons lumineux, émanant de deux étoiles situées dans l'écliptique, l'une en avant de l'observateur et vers laquelle la Terre marche, l'autre en arrière et dont la Terre s'éloigne, subissent dans un prisme de verre la même réfraction. M. Arago a observé que, pour expliquer ce résultat dans le système de l'émission, il suffisait de supposer la vision produite dans les deux cas par des portions différentes de la radiation, pour lesquelles la vitesse de propagation serait la même, et M. Biot a paru adopter cette idée dans l'intéressant Mémoire que renferme le dernier *Compte rendu*. En réfléchissant sur ce sujet, j'ai été amené à croire qu'on pouvait hasarder une autre explication du même fait, sur laquelle il me paraît utile d'appeler l'attention des physiciens.

Par *vitesse* de la lumière on peut entendre, dans le système des ondulations, ou la *vitesse absolue* avec laquelle une onde lumineuse se déplace dans l'espace, ou la *vitesse relative* avec laquelle cette onde change de position dans la masse de fluide éthéré qu'elle traverse. Or, la seconde de ces deux vitesses sera évidemment celle qui déterminera les réfractions d'un rayon passant de l'air dans le verre, si l'on admet, comme il est naturel de le supposer, que la Terre emporte avec elle dans l'espace, non seulement son atmosphère aérienne, mais encore une masse considérable de fluide éthéré. Dans cette hypothèse, tous les phénomènes de réflexion et de réfraction observés à la surface de la Terre seront les mêmes que si la Terre perdait son mouvement de rotation diurne et son mouvement annuel de translation autour du Soleil. Ces mouvements ne pourront faire varier que la direction des plans des ondes, par conséquent la direction du rayon lumineux, en produisant, comme l'on sait, le phénomène de l'aberration.

Au reste, l'atmosphère éthérée qui entourerait la Terre dans l'hypothèse proposée, et les atmosphères semblables qui entoureraient à une grande distance le Soleil, la Lune et les autres astres, venant à se mouvoir avec ces astres mêmes, il pourrait se produire des phénomènes lumineux vers les limites de ces atmosphères, et à ces limites l'éther pourrait être mis en vibration par des mouvements semblables à ceux qu'on observe quand une trombe traverse l'air, ou quand un vaisseau vogue sur une mer tranquille. Peut-être ne serait-il pas déraisonnable d'attribuer à une semblable cause certains phénomènes lumineux, par exemple, la lumière zodiacale, les aurores boréales ou australes, la lumière des nébuleuses planétaires, ou même celle des comètes, en supposant que la lumière zodiacale dépend de la rotation du Soleil sur lui-même, et que le phénomène des aurores boréales se lie au mouvement diurne de la Terre. On concevrait alors pourquoi la lumière zodiacale paraît, à une grande distance du Soleil, s'étendre dans le plan de l'équateur solaire; et le fluide éthéré, suivant la remarque de M. Ampère, pouvant n'être autre chose que le double fluide électrique, on concevrait encore que le phénomène des aurores boréales fût intimement lié



avec des phénomènes électriques et magnétiques. De plus, l'éclat des comètes devrait, conformément à l'observation, s'accroître dans le voisinage du Soleil, si le fluide éthéré devenait plus dense près de cet astre, et si l'intensité des vibrations lumineuses augmentait avec le mouvement relatif de deux masses d'éther contiguës.

Observons enfin que, si la densité de l'éther était plus considérable dans le voisinage des corps célestes, la vitesse de la lumière pourrait n'être pas la même à une grande distance de deux étoiles, et près de l'une d'entre elles.

*Post-scriptum.* — Une lettre adressée à M. Arago, et insérée dans les *Annales de Physique et de Chimie*, m'apprend que l'hypothèse ci-dessus proposée s'était présentée à l'esprit de Fresnel. De plus, après avoir entendu la lecture de la présente Note, M. Savary m'a dit avoir songé à déduire de la même hypothèse une grande partie des conséquences que j'ai indiquées. Mais les difficultés que l'on rencontre, quand on veut en tirer l'aberration par des calculs précis, avaient détourné l'un et l'autre de l'hypothèse dont il s'agit. Toutefois ces difficultés ne paraîtront peut-être pas suffisantes pour qu'on doive l'abandonner, surtout si l'on observe combien elle est conforme à toutes les analogies. En effet, nous voyons sans cesse les corps qui agissent les uns sur les autres se mouvoir de concert. Notre Soleil, s'il se meut dans l'espace, entraîne avec lui tout le système planétaire. Les mouvements de translation et de rotation de la Terre sont partagés par les corps qu'elle porte, par la mer qui la recouvre, comme par la masse d'air qui pèse sur elle; et il serait singulier que le fluide éthéré, sur lequel les corps solides et fluides ont une action évidente, comme le prouvent les phénomènes de la réflexion et de la réfraction, fit seul exception à cet égard.

## 55.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps dans les problèmes de Physique mathématique.*

C. R., t. VIII, p. 374 (18 mars 1839).

La question que je vais traiter ici est, comme l'on sait, de la plus haute importance, puisque la solution des problèmes de Physique mathématique dépend surtout des équations relatives aux limites des corps considérés comme des systèmes de molécules. Toutefois, malgré les nombreux travaux des géomètres sur la Physique et la Mécanique, il n'existe point de méthode générale propre à conduire au but dont il s'agit. Il y a plus, dans les divers cas particuliers qui ont été traités jusqu'à ce jour, on se bornait ordinairement à faire des hypothèses plus ou moins vraisemblables sur la forme des équations aux limites, sans chercher à déduire ces mêmes équations de méthodes rigoureuses. C'est ainsi que, dans la théorie des liquides, des corps élastiques, etc., on supposait, sans le démontrer, les pressions intérieure et extérieure égales entre elles à de petites distances des surfaces qui terminaient ces corps ou ces liquides; et il ne me conviendrait nullement d'en faire un reproche aux savants géomètres qui ont traité ces matières, puisque j'en ai agi de même dans plusieurs des articles que renferment mes Exercices de Mathématiques. Toutefois on doit avouer que de semblables hypothèses n'offrent rien de satisfaisant à l'esprit; et c'est ce qui m'avait engagé, dans un Mémoire, lithographié en 1836, sur la théorie de la lumière, à proposer quelques théorèmes qui pussent servir à trouver, dans certains cas, les équations aux limites. Mais, quoique ces théorèmes m'aient effectivement fourni les conditions relatives à la surface de séparation de deux milieux isophanes, il n'était pas toujours facile de les appliquer, et ils laissaient à désirer une méthode



générale et régulière qui pût embrasser les divers problèmes de la Physique moléculaire. Ayant réfléchi longtemps sur cet objet, j'ai été assez heureux pour obtenir enfin cette méthode générale, dont je vais poser les bases. Le principe fondamental, sur lequel je m'appuie, a l'avantage d'être à la fois très fécond et très facile à comprendre; il repose sur les considérations suivantes.

Considérons un système d'équations différentielles entre plusieurs variables principales et une seule variable indépendante qui sera, si l'on veut, une coordonnée mesurée perpendiculairement à un plan fixe; et supposons que ces équations, conservant toujours la même forme d'un côté donné du plan fixe et à une distance finie, changent très rapidement de forme dans le voisinage de ce même plan. Supposons d'ailleurs qu'on les intègre, d'abord, sans tenir compte du changement de forme. Si l'on nomme  $n$  le nombre des variables principales que ces équations renferment, quand elles sont toutes réduites au premier ordre, leurs intégrales générales pourront être représentées par un système de  $n$  équations finies, dont les premiers membres renfermeront seulement la variable indépendante et les variables principales, tandis que les constantes arbitraires qui pourront être censées représenter des valeurs particulières des variables principales, savoir, les valeurs correspondantes au plan fixe, seront reléguées dans les seconds membres. Nous appellerons les intégrales de cette forme *intégrales principales*, et leurs premiers membres *fonctions principales*. Cela posé, si, dans la dérivée totale de chaque fonction principale, on substitue à la dérivée de chaque variable principale sa valeur tirée des équations différentielles données, sans avoir égard au changement de forme de ces équations dans le voisinage du plan fixe, on obtiendra une fonction de toutes les variables, qui restera identiquement égale à zéro, quelles que soient les valeurs de ces variables. Donc, si l'on a égard au changement de forme des équations différentielles, le résultat de la substitution sera lui-même sensiblement égal à zéro, à une distance finie du plan fixe, pourvu toutefois que, dans la différentielle totale de la fonction principale, les différentielles des diverses variables principales ne se

trouvent pas multipliées par des coefficients qui croissent très rapidement avec la distance au plan fixe. Ce dernier cas excepté, la différence finie de la fonction principale, c'est-à-dire la différence entre sa valeur correspondante à un point quelconque et sa valeur correspondante au plan fixe, sera une intégrale définie du genre de celles que j'ai nommées *intégrales définies singulières*, par conséquent une intégrale définie prise entre deux limites très voisines, savoir, entre une valeur nulle et une valeur très petite de la coordonnée que l'on considère. Si le produit de cette valeur très petite par le module *maximum* de la fonction sous le signe  $f$  est très peu considérable, l'intégrale singulière pourra être négligée sans erreur sensible; et, par suite, les intégrales principales qu'on avait obtenues, en faisant abstraction du changement de forme des équations différentielles, ou du moins celles des intégrales principales pour lesquelles la condition énoncée sera remplie, continueront de subsister quand on aura égard au changement de forme des équations dont il s'agit.

Au reste, il n'est nullement nécessaire que la variable indépendante dont nous avons parlé soit une coordonnée rectiligne: elle pourrait être une coordonnée polaire, ou plus généralement une coordonnée de nature quelconque, par exemple, un paramètre variable d'une surface courbe dont l'une des formes serait celle de la surface extérieure qui termine un corps donné ou un système de molécules.

Nous exposerons, dans plusieurs articles successifs, les innombrables conséquences qui se déduisent du principe ci-dessus énoncé. Nous ferons voir comment ce principe, établi pour un système d'équations différentielles, peut être étendu à un système d'équations aux différences partielles ou aux différences mêlées. Nous considérerons en particulier le cas où les équations données sont linéaires. Dès lors il deviendra facile d'appliquer le principe dont il s'agit à la théorie des mouvements vibratoires, infiniment petits, d'un corps ou d'un système de molécules, par conséquent à la théorie de la lumière, des surfaces vibrantes, des corps élastiques, etc. Enfin nous verrons comment il arrive que certains mouvements simples sont ou ne sont pas propres





à passer d'un corps dans un autre corps, suivant que les équations aux limites peuvent être vérifiées simultanément ou ne peuvent l'être; et nous obtiendrons ainsi de nouvelles conditions relatives à la possibilité de la transmission d'un mouvement vibratoire passant d'un milieu donné dans un autre milieu.

§ I. — Démonstration du principe fondamental.

Considérons un système d'équations différentielles réduites au premier ordre et à la forme

(1) dξ/dx = X, dη/dx = Y, dζ/dx = Z, ...

x désignant une variable indépendante qui sera, si l'on veut, une coordonnée comptée à partir d'un plan fixe, ξ, η, ζ, ... étant les variables principales, et X, Y, Z, ... des fonctions données de toutes les variables

x, ξ, η, ζ, ...

Soient

ξ₀, η₀, ζ₀, ...

les valeurs de

ξ, η, ζ, ...

correspondantes au plan fixe, pour lequel on a x = 0; enfin soit

(2) S = S₀

une intégrale principale du système des équations (1), S désignant une certaine fonction des seules quantités x, ξ, η, ζ, ... et S₀ ce que devient S quand on y remplace respectivement x, ξ, η, ζ, ... par 0, ξ₀, η₀, ζ₀, ... De l'équation (2), différenciée et combinée avec les formules (1), on tirera la suivante

(3) ∂S/∂x + ∂S/∂ξ X + ∂S/∂η Y + ∂S/∂ζ Z + ... = 0,

dont le premier membre, considéré comme une fonction de x, ξ, η, ζ, ... devra être identiquement égal à zéro, ainsi qu'il est facile de le prouver

(voir le Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, lithographié en 1835).

Supposons maintenant que, dans le voisinage du plan fixe, les équations (1) changent de forme et deviennent

(4) dξ/dx = X + α, dη/dx = Y + γ, dζ/dx = Z + z, ...

α, γ, z, ... désignant des fonctions de x, ξ, η, ζ, ... qui s'évanouissent sensiblement à une distance finie du plan fixe. Les valeurs de ξ, η, ζ, ... déterminées par le système des formules (4), continueront de vérifier l'équation (3), puisque celle-ci est identique, et fourniront pour dS la valeur suivante

dS = [∂S/∂x + ∂S/∂ξ (X + α) + ∂S/∂η (Y + γ) + ∂S/∂ζ (Z + z) + ...] dx,

laquelle, en vertu de l'équation (3), se réduira simplement à

dS = (∂S/∂ξ α + ∂S/∂η γ + ∂S/∂ζ z + ...) dx;

de sorte que, en posant pour abrégé

(5) s = ∂S/∂ξ α + ∂S/∂η γ + ∂S/∂ζ z + ...,

on aura

(6) dS = s dx,

et, par suite,

(7) S - S₀ = ∫₀ˣ s dx.

Or s, aussi bien que α, γ, z, ... s'évanouira sensiblement à une distance finie du plan fixe, si les coefficients de dξ, dη, dζ, ... dans la différentielle totale de S, c'est-à-dire les coefficients différentiels

(8) ∂S/∂ξ, ∂S/∂η, ∂S/∂ζ, ...

ne croissent pas très rapidement avec la coordonnée x ou la distance



au plan fixe. Ce cas excepté, si l'on admet que  $x, y, z, \dots$  n'acquièrent de valeurs sensibles, du côté des  $x$  positives, qu'entre les limites

$$x = 0, \quad x = \varepsilon,$$

le premier membre de l'équation (7) n'aura de valeur sensible qu'entre ces limites, et le second membre de l'équation (7) pourra être réduit à l'intégrale définie singulière

$$(9) \quad \int_0^\varepsilon s \, dx.$$

Au reste, pour que cette réduction ait lieu, il n'est pas absolument nécessaire que les coefficients (8) acquièrent des valeurs finies à une distance finie du plan fixe; mais il suffira, par exemple, qu'à une semblable distance les produits respectifs de ces coefficients par  $x, y, z, \dots$  et par une puissance de  $x$  dont l'exposant est surpassé de très peu par l'unité conservent des valeurs finies. D'ailleurs, dans tous les cas où la réduction énoncée pourra s'effectuer, la formule (7) donnera sensiblement

$$(10) \quad S = S_0 + \int_0^\varepsilon s \, dx.$$

Enfin, si la multiplication de  $\varepsilon$  par la plus grande des valeurs que  $S$  peut acquérir entre les limites  $x = 0, x = \varepsilon$ , fournit un produit sensiblement nul, ou, en d'autres termes, si la valeur *maximum* du produit

$$(11) \quad \varepsilon s$$

est très petite relativement à la valeur de  $S_0$ , la formule (10) pourra, sans erreur sensible, être réduite à

$$(12) \quad S = S_0.$$

Donc, parmi les intégrales générales et principales des équations (1), toutes celles pour lesquelles les deux espèces de conditions ci-dessus énoncées seront remplies continueront de subsister, quand on passera des équations (1) aux équations (3), c'est-à-dire quand les équations différentielles qui déter-

mineront les variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  pourront être présentées sous la forme (1) à une distance finie du plan fixe, et changeront rapidement de forme dans le voisinage de ce plan.

## 34.

C. R., t. VIII, p. 432 (25 mars 1839). — Suite.

§ II. — Application du principe fondamental à un système d'équations différentielles linéaires.

La variable indépendante  $x$  étant toujours censée représenter une coordonnée perpendiculaire à un plan fixe, supposons que les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

soient déterminées en fonction de  $x$  par un système d'équations différentielles linéaires, et admettons d'abord que ces équations différentielles, étant toutes réduites au premier ordre, se présentent, quel que soit  $x$ , sous la forme

$$(1) \quad \frac{d\xi}{dx} = X, \quad \frac{d\eta}{dx} = Y, \quad \frac{d\zeta}{dx} = Z, \quad \dots,$$

$X, Y, Z, \dots$  désignant des fonctions linéaires de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  dont chacune se trouve exprimée par une somme de termes respectivement proportionnels à  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ . Si, dans les sommes ou polynômes  $X, Y, Z, \dots$ , les coefficients de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  sont constants, un moyen fort simple d'obtenir un système d'intégrales particulières des équations (1) sera de supposer

$$(2) \quad \xi = A e^{zx}, \quad \eta = B e^{zx}, \quad \zeta = C e^{zx}, \quad \dots,$$

$A, B, C, \dots, z$  étant des constantes propres à vérifier les formules

$$(3) \quad zA = X, \quad zB = Y, \quad zC = Z, \quad \dots,$$



dans lesquelles  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  désignent ce que deviennent les fonctions linéaires  $X, Y, Z, \dots$  quand on y remplace les variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  par ces mêmes constantes  $A, B, C, \dots$ . Si l'on nomme  $n$  le nombre des équations (1),  $n$  sera encore le nombre des formules (3), et il suffira d'éliminer entre ces dernières les constantes  $A, B, C, \dots$  pour obtenir une équation en  $z$ , qui sera généralement du degré  $n$ . Soit

$$(4) \quad \mathcal{R} = 0$$

cette dernière équation. A chacune de ses racines correspondra généralement un seul système de valeurs des rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \dots,$$

déterminés par les formules (3). Mais l'une des constantes

$$A, B, C, \dots,$$

la première, par exemple, restera indéterminée. Un système d'intégrales des équations (1) fourni, comme on vient de l'expliquer, par les équations (2) jointes aux formules (3) et (4), sera ce que nous nommerons un système d'intégrales simples. Un semblable système se trouvera particulièrement caractérisé par la valeur attribuée au coefficient  $z$  de  $x$  dans l'exponentielle népérienne  $e^{zx}$ , à laquelle les valeurs des variables principales seront toutes proportionnelles: et, pour cette raison, lorsqu'un système d'intégrales simples sera déduit d'une des valeurs de  $z$  déterminées par l'équation (4), cette valeur de  $z$  sera nommée la *caractéristique* du système.

Il est bon d'observer que, si l'on met de côté la première des formules (3), le système des suivantes pourra être remplacé par une équation multiple de la forme

$$(5) \quad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \dots,$$

$a, b, c, \dots$  désignant des fonctions entières de  $z$ , dont la première sera

du degré  $n - 1$ , et les autres du degré  $n - 2$ . D'ailleurs, on vérifiera la formule (5) en prenant

$$(6) \quad A = aK, \quad B = bK, \quad C = cK, \quad \dots,$$

quelle que soit la valeur attribuée à la constante  $K$ . Cela posé, les équations (2) donneront généralement

$$(7) \quad \xi = Ka e^{zx}, \quad \eta = K b e^{zx}, \quad \zeta = K c e^{zx}, \quad \dots,$$

$a, b, c, \dots, z, K$  désignant des constantes qui seront toutes déterminées à l'exception de la *constante arbitraire*  $K$ . Ajoutons que, pour obtenir l'équation (4), il suffira de remplacer dans la première des équations (3) les coefficients

$$A, B, C, \dots$$

par

$$a, b, c, \dots$$

Soient maintenant

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

les diverses valeurs de la caractéristique  $z$  fournies par l'équation (4), et

$$a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n, \dots$$

les valeurs correspondantes de  $a, b, c, \dots$ . Aux  $n$  valeurs de  $z$  répondront les systèmes d'intégrales simples

$$(8) \quad \xi = K_1 a_1 e^{z_1 x}, \quad \eta = K_1 b_1 e^{z_1 x}, \quad \zeta = K_1 c_1 e^{z_1 x}, \quad \dots,$$

$$(9) \quad \xi = K_2 a_2 e^{z_2 x}, \quad \eta = K_2 b_2 e^{z_2 x}, \quad \zeta = K_2 c_2 e^{z_2 x}, \quad \dots,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$(10) \quad \xi = K_n a_n e^{z_n x}, \quad \eta = K_n b_n e^{z_n x}, \quad \zeta = K_n c_n e^{z_n x}, \quad \dots$$

dont le nombre sera encore égal à  $n$ , et dans lesquels les  $n$  coefficients

$$K_1, K_2, \dots, K_n$$

resteront arbitraires. Cela posé, on vérifiera généralement les équations



tions (1) en prenant

$$(11) \begin{cases} \xi = K_1 a_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 a_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + K_n a_n e^{\lambda_n x}, \\ \eta = K_1 b_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 b_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + K_n b_n e^{\lambda_n x}, \\ \zeta = K_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + K_n c_n e^{\lambda_n x}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Ces dernières formules, qui renfermeront  $n$  constantes arbitraires

$$K_1, K_2, \dots, K_n,$$

seront propres à représenter les intégrales générales des équations (1); et, pour les transformer en intégrales principales, il suffira d'en tirer les valeurs de ces mêmes constantes exprimées en fonction de toutes les variables

$$x, \xi, \eta, \zeta, \dots$$

On y parviendra sans peine en combinant entre elles par voie d'addition les formules (11) respectivement multipliées par des facteurs auxiliaires

$$\lambda, \mu, \nu, \dots,$$

tellement choisis que toutes les constantes arbitraires se trouvent éliminées à l'exception d'une seule. En effet, si l'on prend pour  $z$  l'une des caractéristiques

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

et si l'on choisit  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  de manière à vérifier les équations de condition

$$(12) \begin{cases} \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \dots = 0, \\ \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \lambda a_n + \mu b_n + \nu c_n + \dots = 0, \end{cases}$$

à l'exception, toutefois, de celle qui correspond à la caractéristique donnée  $z$ , on tirera des formules (11)

$$(13) \quad \lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots = K(\lambda a + \mu b + \nu c + \dots) e^{\lambda x},$$

par conséquent,

$$(14) \quad (\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots) e^{-\lambda x} = K(\lambda a + \mu b + \nu c + \dots).$$

Si, d'ailleurs, on nomme

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dots$$

les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

correspondantes à  $x = 0$ , l'équation (14) entrainera la suivante

$$(15) \quad (\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots) e^{-\lambda x} = \lambda \xi_0 + \mu \eta_0 + \nu \zeta_0 + \dots,$$

qu'on peut encore écrire ainsi

$$(16) \quad \left( \xi + \frac{\mu}{\lambda} \eta + \frac{\nu}{\lambda} \zeta + \dots \right) e^{-\lambda x} = \xi_0 + \frac{\mu}{\lambda} \eta_0 + \frac{\nu}{\lambda} \zeta_0 + \dots,$$

et dans laquelle les rapports

$$\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}, \dots$$

se trouveront, en général, complètement déterminés pour chaque valeur déterminée de la caractéristique  $z$ . Enfin, en attribuant successivement à  $z$  les diverses valeurs

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

on déduira successivement de la formule (15) ou (16)  $n$  intégrales principales des équations (1).

Au reste, pour arriver directement à la formule (15), il suffit de combiner entre elles par voie d'addition les équations (1) respectivement multipliées par des facteurs constants

$$\lambda, \mu, \nu, \dots,$$

choisis de manière que la fonction linéaire de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  représentée par le polynôme

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + \dots$$

devienne proportionnelle à la somme

$$\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots,$$

et par conséquent de manière que l'on ait

$$(17) \quad \frac{\lambda X + \mu Y + \nu Z + \dots}{\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots} = z,$$



$\alpha$  désignant un rapport constant. Alors, en effet, on tirera des équations (1)

$$(18) \quad \frac{d(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \dots)}{dx} - \alpha(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \dots) = 0,$$

puis, en multipliant chaque terme par  $e^{-\alpha x}$ , et posant pour abrégé

$$(19) \quad S = (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \dots)e^{-\alpha x},$$

on réduira la formule (18) à

$$(20) \quad \frac{dS}{dx} = 0.$$

Or, en nommant  $S_0$  ce que devient  $S$  pour  $x=0$ , de sorte qu'on ait

$$(21) \quad S_0 = \lambda\xi_0 + \mu\eta_0 + \nu\zeta_0 + \dots,$$

et intégrant l'équation (20), on obtiendra la formule

$$(22) \quad S = S_0,$$

qui coïncide avec l'équation (15).

Les deux méthodes que nous venons d'appliquer à la recherche des intégrales principales d'un système d'équations linéaires sont connues depuis longtemps. Mais il était nécessaire de les rappeler en peu de mots pour faciliter l'intelligence de plusieurs propositions remarquables que nous allons établir.

Supposons maintenant que, du côté des  $x$  positives et dans le voisinage du plan fixe donné, les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

changent de forme et deviennent

$$(23) \quad \frac{d\xi}{dx} = X + \alpha\xi, \quad \frac{d\eta}{dx} = Y + \alpha\eta, \quad \frac{d\zeta}{dx} = Z + \alpha\zeta, \quad \dots$$

$X, Y, Z, \dots$  désignant des fonctions linéaires de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  dont chacune se compose de termes respectivement égaux aux produits de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  par des facteurs qui ne soient plus constants, mais qui va-

rient avec  $\alpha$ , et s'évanouissent sensiblement à une distance finie du plan fixe, par exemple, quand  $x$  surpasse la distance très petite  $\epsilon$ . En supposant les facteurs auxiliaires

$$\lambda, \mu, \nu, \dots$$

choisis comme il a été dit ci-dessus, et faisant pour abrégé

$$(24) \quad s = (\lambda X + \mu Y + \nu Z + \dots)e^{-\alpha x},$$

on déduira des équations (23), non plus la formule (20), mais la suivante

$$(25) \quad \frac{ds}{dx} = s.$$

Par suite, pour que l'intégrale principale (16) ou (22) continue de subsister quand on aura égard au changement de forme des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les valeurs réelles de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , il sera nécessaire, conformément au principe fondamental exposé dans le § I : 1° que l'intégrale

$$(26) \quad \int_0^x s \, dx = \int_0^x (\lambda X + \mu Y + \nu Z + \dots)e^{-\alpha x} \, dx$$

puisse être réduite sans erreur sensible à l'intégrale définie singulière

$$(27) \quad \int_0^\epsilon s \, dx;$$

2° que le produit

$$(28) \quad \epsilon s$$

soit très petit par rapport à  $S_0$ . D'autre part, si l'on substitue les valeurs générales de  $X, Y, Z, \dots$  dans la somme

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + \dots,$$

on verra cette somme se réduire, aussi bien que  $X, Y, Z, \dots$ , à des fonctions linéaires de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ . On aura donc

$$(29) \quad \lambda X + \mu Y + \nu Z + \dots = L\xi + M\eta + N\zeta + \dots,$$

L, M, N, ... étant des fonctions de la seule variable  $x$ , qui renfermeront d'ailleurs les facteurs auxiliaires  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  et qui s'évanouiront sensiblement à une distance finie du plan fixe. Donc les intégrales (26) et (27) seront de la forme

$$(30) \quad \int_0^x (L\xi + M\eta + N\zeta + \dots) e^{-x\xi} dx,$$

$$(31) \quad \int_0^x (L\xi + M\eta + N\zeta + \dots) e^{-x\xi} dx.$$

Les deux conditions ci-dessus énoncées pourront être ou n'être pas remplies, du côté des  $x$  positives, pour une ou plusieurs des  $n$  valeurs de la caractéristique  $z$ , suivant que les variables principales, mesurées de ce côté à une distance finie du plan fixe, renfermeront dans leur expression un plus ou moins grand nombre de valeurs de  $z$ , c'est-à-dire suivant que les valeurs attribuées aux variables principales, pour une valeur finie et positive de  $x$ , contiendront plus ou moins de termes du genre de ceux que présentent les seconds membres des formules (11), quand aucune des constantes arbitraires  $K_1, K_2, \dots, K_n$  ne s'évanouit. Supposons, pour fixer les idées, que les valeurs attribuées aux variables principales, à une distance finie du plan fixe et du côté des  $x$  positives, soient celles que fournit un système d'intégrales simples, par exemple, le système des équations (8). Quand on voudra savoir si, pour une valeur donnée de  $z$ , la première condition est ou n'est pas remplie, c'est-à-dire, si l'intégrale (30) est sensiblement réductible ou non à l'intégrale (31), on devra porter son attention sur la valeur qu'acquiert le produit

$$(32) \quad (L\xi + M\eta + N\zeta + \dots) e^{-x\xi},$$

dans le cas où  $x$  devient supérieur à  $z$ . Or, dans ce cas, les valeurs de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  étant très peu différentes, en vertu de l'hypothèse admise, de celles que fournit le système des formules (8), le produit (32) se réduira sensiblement à

$$(33) \quad (A_1 L + B_1 M + C_1 N + \dots) e^{(x_1 - x)\xi};$$

et, puisque les fonctions de  $x$  représentées par

$$L, M, N, \dots$$

s'évanouissent sensiblement pour des valeurs finies de  $x$ , il est aisé de voir que la première condition sera remplie, du côté des  $x$  positives, si le coefficient de  $x$  dans l'exponentielle

$$e^{(x_1 - x)\xi}$$

offre une partie réelle négative, ou, ce qui revient au même, si la partie réelle de la caractéristique  $z$  est supérieure à la partie réelle de la caractéristique  $z_1$ . Il y a plus : si ces deux parties réelles sont égales, la première condition sera généralement remplie, pourvu, du moins, que les intégrales

$$\int_0^x L dx, \quad \int_0^x M dx, \quad \int_0^x N dx, \quad \dots$$

conservent de très petites valeurs quand  $x$  vient à croître; ce qui aura lieu, par exemple, si des valeurs finies ou très considérables de  $x$  réduisent sensiblement à zéro, non seulement les fonctions

$$L, M, N, \dots,$$

mais encore les produits de ces fonctions par une puissance de  $x$  dont l'exposant surpasse de très peu l'unité. Ainsi, en résumé, la première condition se trouvera ordinairement remplie pour toutes les valeurs de la caractéristique  $z$  qui offriront une partie réelle supérieure à la partie réelle de  $z_1$ . Quant à la seconde condition, il est facile de s'assurer qu'elle sera remplie si les valeurs des intégrales

$$\int_0^x L dx, \quad \int_0^x M dx, \quad \int_0^x N dx, \quad \dots$$

sont très petites relativement aux valeurs des facteurs auxiliaires

$$\lambda, \mu, \nu, \dots$$

D'ailleurs chacune des expressions

$$L, M, N, \dots$$

représente la somme des produits des facteurs auxiliaires par les coefficients successifs de l'une des variables principales dans les fonctions linéaires désignées par

$$x, y, z, \dots$$

Donc, pour que la seconde condition soit remplie, il suffira généralement que les produits de ces derniers coefficients par  $\varepsilon$  fassent très petits.

De ce qu'on vient de dire il résulte que, pour toutes les valeurs de la caractéristique  $x$  qui satisfont à la première condition, la seconde condition se vérifiera généralement si elle se vérifie pour une seule de ces valeurs. Supposons qu'il en soit ainsi, et nommons  $m$  le nombre des valeurs de  $x$  qui offrent une partie réelle égale ou supérieure à la partie réelle de  $z_1$ ;  $m$  représentera le nombre des intégrales principales, c'est-à-dire des intégrales de la forme (14), qui continueront de subsister quand on aura égard au changement de forme des équations différentielles dans le voisinage du plan fixe. D'ailleurs, comme, pour une valeur finie et positive de  $x$ , les valeurs de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  que fournissent les équations (8) doivent vérifier chacune des intégrales comprises dans la formule (14), sans réduire à zéro la somme

$$\lambda a + \mu b + \nu c + \dots,$$

ce qui ne peut avoir lieu à moins que l'on n'ait

$$(34) \quad K = 0$$

ou

$$(35) \quad z = z_1,$$

il est clair que, si  $z_1$  est une racine simple de l'équation (4), les intégrales principales comprises dans la formule (14), étant jointes aux formules (8), entraîneront les conditions

$$(36) \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad \dots, \quad K_n = 0.$$

Réciproquement ces dernières conditions, jointes aux intégrales principales que comprend la formule (14), ou bien encore, au système des

formules (11) qui peut remplacer, si l'on veut, le système de ces intégrales principales, entraîneront immédiatement les équations (8). Soient maintenant

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

déterminées par les formules (8), quand on a égard au changement de forme des équations différentielles données dans le voisinage du plan fixe, et entre les limites  $x = 0, x = \varepsilon$ . L'intégrale principale que représente la formule (14), quand on y pose  $z = z_1, K = K_1$ , continuera de subsister lorsqu'on y remplacera

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

par

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

et l'on pourra en dire autant de chacune des intégrales principales que représentera la formule (14), jointe à la formule (34), quand on prendra pour  $z$ , non plus l'une quelconque des caractéristiques

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

mais seulement l'une de celles dont les parties réelles sont égales ou supérieures à la partie réelle de  $z_1$ . Nommons

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$$

ces dernières caractéristiques dont le nombre sera  $m$ . Les intégrales principales, qui continueront de subsister, formeront un système équivalent à celui des équations produites par l'élimination des constantes arbitraires

$$K_{m+1}, K_{m+2}, \dots, K_n$$

entre les formules (11) jointes, non plus aux formules (36), mais seulement aux suivantes

$$(37) \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad \dots, \quad K_m = 0.$$

Donc, pour obtenir les relations établies entre les variables

$$\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots$$

par celles des intégrales principales qui continueront de subsister, il suffira d'éliminer les constantes arbitraires

$$K_{m+1}, K_{m+2}, \dots, K_n$$

entre les formules

$$(38) \quad \begin{cases} \xi_2 = K_1 a_1 e^{\lambda_1 x} + K_{m+1} a_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + K_n a_n e^{\lambda_n x}, \\ \eta_2 = K_1 b_1 e^{\lambda_1 x} + K_{m+1} b_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + K_n b_n e^{\lambda_n x}, \\ \zeta_2 = K_1 c_1 e^{\lambda_1 x} + K_{m+1} c_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + K_n c_n e^{\lambda_n x}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

D'ailleurs de ces dernières, jointes aux équations (8), on tirera

$$(39) \quad \begin{cases} \xi_2 = \xi + K_{m+1} a_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + K_n a_n e^{\lambda_n x}, \\ \eta_2 = \eta + K_{m+1} b_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + K_n b_n e^{\lambda_n x}, \\ \zeta_2 = \zeta + K_{m+1} c_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + K_n c_n e^{\lambda_n x}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

L'élimination des constantes arbitraires  $K_{m+1}, \dots, K_n$  entre les formules (39) fournira un système de  $m$  équations qui pourra remplacer le système des  $m$  intégrales principales auxquelles devront satisfaire les valeurs des variables

$$\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots$$

déterminées par le système des équations différentielles

$$(40) \quad \frac{d\xi_2}{dx} = X + \lambda, \quad \frac{d\eta_2}{dx} = Y + \lambda, \quad \frac{d\zeta_2}{dx} = Z + \lambda, \quad \dots,$$

pour des valeurs finies et positives de  $x$  comprises entre les limites  $x=0, x=\varepsilon$ . On ne devra pas oublier que, dans les formules (39),

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

sont des fonctions déterminées de  $x$  dont les valeurs sont données par les équations (8). Au reste, l'élimination des constantes arbitraires

$$K_{m+1}, \dots, K_n$$

entre les formules (39) revient à l'élimination des exponentielles

$$e^{\lambda_{m+1} x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

entre ces formules, ou, ce qui revient au même, entre les suivantes

$$(41) \quad \begin{cases} \xi_2 = \xi + A_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + A_n e^{\lambda_n x}, \\ \eta_2 = \eta + B_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + B_n e^{\lambda_n x}, \\ \zeta_2 = \zeta + C_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$A_1, B_1, C_1, \quad A_2, B_2, C_2, \quad \dots, \quad A_n, B_n, C_n$$

étant les valeurs de  $A, B, C, \dots$  qui correspondent aux valeurs

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

de la caractéristique  $x$ .

Observons encore que si l'on nomme

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dots$$

les valeurs de

$$\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots$$

correspondantes à  $x=0$ , ces valeurs de  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots$  et les valeurs correspondantes de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  seront liées entre elles par  $m$  équations que l'on pourra déduire immédiatement des formules

$$(42) \quad \begin{cases} \xi_0 = \xi + a_{m+1} K_{m+1} + \dots + a_n K_n, \\ \eta_0 = \eta + b_{m+1} K_{m+1} + \dots + b_n K_n, \\ \zeta_0 = \zeta + c_{m+1} K_{m+1} + \dots + c_n K_n, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

par l'élimination des constantes arbitraires  $K_{m+1}, \dots, K_n$ .

Dans ce qui précède, nous avons implicitement supposé que les racines

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

de l'équation (4) étaient distinctes les unes des autres. Pour trouver les modifications que doivent subir les diverses formules, dans les cas où plusieurs de ces racines deviennent égales entre elles, un moyen fort simple est d'attribuer à quelques-uns des coefficients renfermés dans





les équations différentielles données des accroissements très petits que l'on réduit ensuite à zéro; ou, ce qui revient au même, à déduire des formules correspondantes au cas des racines égales, des formules correspondantes au cas où certaines racines diffèrent très peu les unes des autres. En opérant de cette manière, on reconnaîtra, par exemple, que si l'on suppose, dans la formule (19), les facteurs auxiliaires  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  exprimés en fonction de  $z$ , et si d'ailleurs on prend pour  $z$  une racine double, triple, quadruple de la formule (4), on devra, pour cette valeur de  $z$ , joindre à l'équation (22) la dérivée du premier ordre, ou les dérivées du premier et du second ordre, ou les dérivées du premier, du second et du troisième ordre, ... de cette même équation différentielle une ou plusieurs fois de suite par rapport à  $z$ .

Pour montrer une application des formules qui précèdent, supposons d'abord que le nombre  $m$  des valeurs de  $z$ , dont les parties réelles sont égales ou supérieures à la partie réelle de  $z_1$ , devienne précisément égal à  $n$ , en sorte que la première condition se trouve remplie pour toutes les racines de l'équation (4). Alors les seconds membres des formules (39) ou (41) se réduiront à zéro, et ces formules donneront simplement

$$(43) \quad \xi_1 - \xi = 0, \quad \eta_1 - \eta = 0, \quad \zeta_1 - \zeta = 0, \quad \dots$$

Supposons, en second lieu, qu'une seule des valeurs de  $z$ , savoir  $z_n$ , offre une partie réelle inférieure à la partie réelle de  $z_1$ . Alors les formules (41) donneront

$$(44) \quad \xi_1 - \xi = A_n e^{\alpha_n z}, \quad \eta_1 - \eta = B_n e^{\alpha_n z}, \quad \zeta_1 - \zeta = C_n e^{\alpha_n z}, \quad \dots$$

et, par suite,

$$(45) \quad \frac{\xi_1 - \xi}{A_n} = \frac{\eta_1 - \eta}{B_n} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{C_n} = \dots,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (5),

$$(46) \quad \frac{\xi_1 - \xi}{a_n} = \frac{\eta_1 - \eta}{b_n} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{c_n} = \dots$$

On pourrait aussi déduire immédiatement cette dernière équation des formules (39).

Si maintenant l'on attribue à la variable indépendante  $x$  une valeur nulle, les valeurs correspondantes de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , en vertu des formules (44), (45), etc., vérifieront: 1°, quand on aura  $m = n$ , les  $n$  équations de condition

$$(47) \quad \xi - \xi_0 = 0, \quad \eta - \eta_0 = 0, \quad \zeta - \zeta_0 = 0, \quad \dots$$

ou

$$(48) \quad \xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \zeta = \zeta_0, \quad \dots;$$

2°, quand on aura  $m = n - 1$ , les  $n - 1$  équations de condition comprises dans la formule

$$(49) \quad \frac{\xi - \xi_0}{A_n} = \frac{\eta - \eta_0}{B_n} = \frac{\zeta - \zeta_0}{C_n} = \dots,$$

que l'on pourra réduire à

$$(50) \quad \frac{\xi - \xi_0}{a_n} = \frac{\eta - \eta_0}{b_n} = \frac{\zeta - \zeta_0}{c_n} = \dots;$$

et ainsi de suite. On voit donc ici comment la méthode exposée fournit généralement les équations de condition relatives au plan fixe que l'on considère et qui répond par hypothèse à une valeur nulle de la coordonnée  $x$ . Dans d'autres articles nous indiquerons quelques procédés à l'aide desquels on peut souvent simplifier la recherche de ces équations de condition, surtout dans le cas où, les équations différentielles données étant d'un ordre supérieur au premier, on veut se dispenser de les réduire au premier ordre; et nous montrerons aussi avec quelle facilité on déduit des formules précédentes les lois de divers phénomènes, particulièrement les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface des corps transparents ou opaques, isophanes ou non isophanes.

35.

C. R., t. VIII, p. 459 (1<sup>er</sup> avril 1839). — Suite.

§ III. — *Application du principe fondamental à un système d'équations différentielles linéaires du second ordre ou d'un ordre plus élevé.*

La variable indépendante  $x$  étant toujours censée représenter une coordonnée perpendiculaire à un plan fixe, supposons que les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

soient déterminées en fonction de  $x$  par un système d'équations différentielles linéaires du second ordre ou d'un ordre plus élevé, chacun des termes que renferment ces équations étant le produit d'un coefficient constant par l'une des variables principales ou par l'une de leurs dérivées. Un moyen fort simple de satisfaire simultanément à toutes les équations données sera de supposer les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

toutes proportionnelles à une même exponentielle népérienne, dont l'exposant serait le produit de la coordonnée  $x$  par un facteur constant  $\lambda$ , et de prendre en conséquence

$$(1) \quad \xi = A e^{\lambda x}, \quad \eta = B e^{\lambda x}, \quad \zeta = C e^{\lambda x}, \quad \dots,$$

$\lambda, A, B, C, \dots$  étant des constantes propres à vérifier le système des formules

$$(2) \quad \lambda = 0, \quad \mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0, \quad \dots$$

qu'on obtiendra en substituant, dans les équations différentielles données, aux variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

les facteurs

$$A, B, C, \dots$$

et aux diverses dérivées de ces variables, c'est-à-dire aux expressions

$$\frac{d\xi}{dx}, \frac{d^2\xi}{dx^2}, \dots, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d^2\eta}{dx^2}, \dots, \frac{d\zeta}{dx}, \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \dots,$$

les divers produits

$$xA, x^2A, \dots, xB, x^2B, \dots, xC, x^2C, \dots$$

résultants de la multiplication des facteurs  $A, B, C, \dots$  par les puissances de  $x$  dont les degrés sont égaux au nombre des différentiations effectuées. Les équations (2) étant évidemment linéaires par rapport aux facteurs  $A, B, C, \dots$ , si l'on met de côté la première de ces équations, les suivantes pourront être, en général, remplacées par une seule de la forme

$$(3) \quad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \dots,$$

$a, b, c, \dots$  désignant des fonctions entières de  $x$ ; et, en éliminant  $A, B, C, \dots$  de la première des équations (2) à l'aide de la formule (3), on obtiendra une équation nouvelle

$$(4) \quad \mathfrak{X} = 0,$$

dont le degré relatif à  $x$  sera généralement égal au nombre entier  $\mu$  qui représentera la somme des ordres des dérivées les plus élevées de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  comprises dans les équations différentielles données. Si l'on nomme

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

les  $n$  racines de l'équation (4) résolue par rapport à  $x$ , et

$$A_1, B_1, C_1, \dots, A_2, B_2, C_2, \dots, A_n, B_n, C_n, \dots$$

les valeurs correspondantes de  $A, B, C, \dots$ , les équations différentielles données admettront les systèmes d'intégrales simples

$$(5) \quad \xi = A_1 e^{x_1 x}, \quad \eta = B_1 e^{x_1 x}, \quad \zeta = C_1 e^{x_1 x}, \quad \dots,$$

$$(6) \quad \xi = A_2 e^{x_2 x}, \quad \eta = B_2 e^{x_2 x}, \quad \zeta = C_2 e^{x_2 x}, \quad \dots,$$

$$\dots, \dots, \dots, \dots, \dots,$$

$$(7) \quad \xi = A_n e^{x_n x}, \quad \eta = B_n e^{x_n x}, \quad \zeta = C_n e^{x_n x}, \quad \dots$$



et les intégrales générales de ces équations différentielles pourront être présentées sous la forme

$$(8) \begin{cases} \xi = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + A_n e^{\alpha_n x}, \\ \eta = B_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + B_n e^{\alpha_n x}, \\ \zeta = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}, \\ \dots \end{cases}$$

Seulement, pour retrouver toutes les intégrales qu'on aurait obtenues, si l'on avait commencé par réduire au premier ordre les équations différentielles données en représentant par de nouvelles lettres une ou plusieurs dérivées de chaque variable principale, on devra joindre aux formules (5), (6), ..., (7) ou (8) leurs dérivées de divers ordres. Ainsi, par exemple, si les équations différentielles données sont du second ordre par rapport à chacune des variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , c'est-à-dire, si elles renferment avec ces variables, non plus seulement leurs dérivées du premier ordre,

$$\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\zeta}{dx}, \dots,$$

mais encore leurs dérivées du second ordre

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}, \frac{d^2\eta}{dx^2}, \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \dots,$$

alors, en posant

$$(9) \quad \frac{d\xi}{dx} = \varphi, \quad \frac{d\eta}{dx} = \chi, \quad \frac{d\zeta}{dx} = \psi, \quad \dots,$$

on devra, aux intégrales particulières représentées par les équations (5), joindre les formules

$$(10) \quad \varphi = A_1 z_1 e^{\alpha_1 x}, \quad \chi = B_1 z_1 e^{\alpha_1 x}, \quad \psi = C_1 z_1 e^{\alpha_1 x}, \quad \dots,$$

et, aux intégrales générales représentées par les équations (8), joindre les formules

$$(11) \begin{cases} \varphi = A_1 z_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 z_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + A_n z_n e^{\alpha_n x}, \\ \chi = B_1 z_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 z_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + B_n z_n e^{\alpha_n x}, \\ \psi = C_1 z_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 z_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + C_n z_n e^{\alpha_n x}, \\ \dots \end{cases}$$

Ainsi, encore, si les équations différentielles données renferment les dérivées du troisième, du quatrième, ... ordre de la variable principale

$$\xi, \text{ ou } \eta, \text{ ou } \zeta, \dots,$$

il faudra joindre à la première, ou à la seconde, ou à la troisième des formules (5) ou (8), celles qu'on en déduit par deux, trois, ... différentiations successives.

Supposons maintenant que, du côté des  $x$  positives, et dans le voisinage du plan fixe donné, les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  changent de forme, en sorte que les coefficients de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  et de leurs dérivées  $y$  varient très rapidement avec  $x$  entre les limites très rapprochées

$$x = 0, \quad x = \varepsilon.$$

Supposons d'ailleurs que les produits de ces coefficients par  $\varepsilon$  restent très petits, et nommons

$$\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon, \dots, \varphi_\varepsilon, \chi_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \dots$$

ce que deviennent, entre les limites dont il s'agit, non pas les valeurs générales des variables

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots,$$

mais des valeurs particulières de ces variables, je veux dire des valeurs fournies par un système d'intégrales particulières, par exemple, celles qui se déduisent des équations (5), et que fournissent les formules (5), (10), .... Enfin, admettons que les  $n$  racines de l'équation (4) soient inégales, et nommons

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

celles de ces racines qui offrent des parties réelles égales ou supérieures à la partie réelle de  $z_1$ . D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, les différences

$$\xi_1 - \xi, \eta_1 - \eta, \zeta_1 - \zeta, \dots, \varphi_1 - \varphi, \chi_1 - \chi, \psi_1 - \psi, \dots$$

devront vérifier toutes les équations produites par l'élimination des



exponentielles

$$e^{z_{m+1}x}, \dots, e^{z_n x}$$

entre les formules

$$(12) \begin{cases} \xi_1 - \xi = A_{m+1} e^{z_{m+1}x} + \dots + A_n e^{z_n x}, \\ \eta_1 - \eta = B_{m+1} e^{z_{m+1}x} + \dots + B_n e^{z_n x}, \\ \zeta_1 - \zeta = C_{m+1} e^{z_{m+1}x} + \dots + C_n e^{z_n x}, \\ \dots \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} \varphi_1 - \varphi = A_{m+1} z_{m+1} e^{z_{m+1}x} + \dots + A_n z_n e^{z_n x}, \\ \chi_1 - \chi = B_{m+1} z_{m+1} e^{z_{m+1}x} + \dots + B_n z_n e^{z_n x}, \\ \psi_1 - \psi = C_{m+1} z_{m+1} e^{z_{m+1}x} + \dots + C_n z_n e^{z_n x}, \\ \dots \end{cases}$$

Si aucune des racines de l'équation (4) n'offre une partie réelle inférieure à la partie réelle de  $z_1$ , les formules (12), (13), ... dont les seconds membres se réduiront à zéro, donneront

$$(14) \xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = \eta, \quad \zeta_1 = \zeta, \quad \dots, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad \chi_1 = \chi, \quad \psi_1 = \psi, \quad \dots$$

Si une seule des racines de l'équation (4), savoir  $z_n$ , offre une partie réelle inférieure à la partie réelle de  $z_1$ , on tirera des formules (12), (13), ...

$$(15) \frac{\xi_1 - \xi}{A_n} = \frac{\eta_1 - \eta}{B_n} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{C_n} = \dots = \frac{\varphi_1 - \varphi}{z_n A_n} = \frac{\chi_1 - \chi}{z_n B_n} = \frac{\psi_1 - \psi}{z_n C_n} = \dots$$

Soient d'ailleurs

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dots, \varphi_0, \chi_0, \psi_0, \dots$$

ce que deviennent

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \dots$$

sur le plan fixe donné, c'est-à-dire lorsqu'on pose  $x = 0$ . En vertu des formules (14), (15), ... les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots,$$

fournies par les équations (5), par conséquent les valeurs de  $\xi, \eta, \zeta, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots$  calculées comme si, dans le voisinage du plan fixe, les

équations différentielles ne changeaient pas de forme, devront, pour  $x = 0$ , satisfaire, si l'on a  $m = n$ , aux conditions

$$(16) \xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \zeta = \zeta_0, \quad \dots, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \chi = \chi_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \dots,$$

si l'on a  $m = n - 1$ , aux conditions

$$(17) \frac{\xi - \xi_0}{A_n} = \frac{\eta - \eta_0}{B_n} = \frac{\zeta - \zeta_0}{C_n} = \dots = \frac{\varphi - \varphi_0}{z_n A_n} = \frac{\chi - \chi_0}{z_n B_n} = \frac{\psi - \psi_0}{z_n C_n} = \dots$$

Si les valeurs des variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , mesurées du côté des  $x$  positives, et à une distance finie du plan fixe, n'étaient plus celles que déterminent les formules (5), mais les sommes de celles que déterminent plusieurs des formules (5), (6), (7), ... et renfermaient en conséquence dans leur expression plusieurs des exponentielles

$$e^{z_{m+1}x}, e^{z_n x}, \dots, e^{z_n x},$$

par exemple,  $e^{z_n x}, e^{z_n x}, \dots$ , alors, en nommant toujours

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \dots$$

ce que deviendraient les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots$$

entre les limites  $x = 0, x = \epsilon$ , eu égard au changement de forme des équations différentielles, et raisonnant d'ailleurs comme ci-dessus, on obtiendrait encore entre les différences

$$\xi_1 - \xi, \eta_1 - \eta, \zeta_1 - \zeta, \dots, \varphi_1 - \varphi, \chi_1 - \chi, \psi_1 - \psi, \dots$$

les équations de condition produites par l'élimination des exponentielles

$$e^{z_{m+1}x}, \dots, e^{z_n x},$$

entre les formules (12), (13), ... pourvu que l'on désignât par

$$z_{m+1}, \dots, z_n$$

celles des racines de l'équation (4) dont la partie réelle serait inférieure





et, qu'en ayant égard à ces dernières formules, on pourra immédiatement réduire le système des équations linéaires données à un système d'équations différentielles qui ne renferment plus que les dérivées de  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  relatives à la seule variable indépendante  $x$ . Cela posé, nommons

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

les  $n$  racines de l'équation (4), résolue par rapport à  $u$ , et

$$A_1, B_1, C_1, \dots, A_2, B_2, C_2, \dots, A_n, B_n, C_n, \dots$$

les valeurs correspondantes de  $A, B, C, \dots$ . Les équations linéaires données et les équations différentielles dont nous venons de parler admettront les systèmes d'intégrales simples

$$(5) \quad \xi = A_1 e^{u_1 x + v y + w z}, \quad \eta = B_1 e^{u_1 x + v y + w z}, \quad \zeta = C_1 e^{u_1 x + v y + w z}, \dots$$

$$(6) \quad \xi = A_2 e^{u_2 x + v y + w z}, \quad \eta = B_2 e^{u_2 x + v y + w z}, \quad \zeta = C_2 e^{u_2 x + v y + w z}, \dots$$

$$(7) \quad \xi = A_n e^{u_n x + v y + w z}, \quad \eta = B_n e^{u_n x + v y + w z}, \quad \zeta = C_n e^{u_n x + v y + w z}, \dots$$

et les intégrales générales des équations différentielles pourront être présentées sous la forme

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = A_1 e^{u_1 x + v y + w z} + A_2 e^{u_2 x + v y + w z} + \dots + A_n e^{u_n x + v y + w z}, \\ \eta = B_1 e^{u_1 x + v y + w z} + B_2 e^{u_2 x + v y + w z} + \dots + B_n e^{u_n x + v y + w z}, \\ \zeta = C_1 e^{u_1 x + v y + w z} + C_2 e^{u_2 x + v y + w z} + \dots + C_n e^{u_n x + v y + w z}, \\ \dots \end{cases}$$

D'ailleurs, pour retrouver toutes les intégrales qu'on aurait obtenues si l'on avait commencé par réduire au premier ordre les équations différentielles, en représentant par de nouvelles lettres une ou plusieurs dérivées de chaque variable principale différenciée une ou plusieurs fois par rapport à  $x$ , il suffira de joindre aux formules (5), (6), ..., (7) ou (8) leurs dérivées de divers ordres. Ainsi, par exemple, si les équations différentielles sont du second ordre relativement à chacune des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

différenciée par rapport à  $x$ , et renferment en conséquence avec ces variables, non seulement les dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \dots,$$

mais encore les dérivées du second ordre

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \dots,$$

alors, en posant

$$(9) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \chi, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \psi, \dots,$$

on devra, aux intégrales particulières représentées par les équations (5), joindre les formules

$$(10) \quad \varphi = A_1 u_1 e^{u_1 x + v y + w z}, \quad \chi = B_1 u_1 e^{u_1 x + v y + w z}, \quad \psi = C_1 u_1 e^{u_1 x + v y + w z}, \dots,$$

et, aux intégrales générales représentées par les équations (8), joindre les formules

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi = A_1 u_1 e^{u_1 x + v y + w z} + A_2 u_2 e^{u_2 x + v y + w z} + \dots + A_n u_n e^{u_n x + v y + w z}, \\ \chi = B_1 u_1 e^{u_1 x + v y + w z} + B_2 u_2 e^{u_2 x + v y + w z} + \dots + B_n u_n e^{u_n x + v y + w z}, \\ \psi = C_1 u_1 e^{u_1 x + v y + w z} + C_2 u_2 e^{u_2 x + v y + w z} + \dots + C_n u_n e^{u_n x + v y + w z}, \\ \dots \end{cases}$$

Ainsi encore, si les équations différentielles trouvées renferment les dérivées du troisième, du quatrième, ... ordre de la variable principale  $\xi$ , ou  $\eta$ , ou  $\zeta, \dots$  différenciée plusieurs fois par rapport à  $x$ , il faudra joindre à la première, à la seconde, à la troisième, ... des formules (5) ou (8) celles qu'on en déduit par deux, trois, ... différentiations successives et relatives à la variable indépendante  $x$ .

Supposons maintenant que la variable indépendante  $x$  représente une coordonnée perpendiculaire à un plan fixe et que, du côté des  $x$  positives, mais dans le voisinage du plan fixe, les équations linéaires, et aux différences partielles, auxquelles doivent satisfaire les variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , changent de forme, de telle sorte que les coefficients de ces variables et de leurs dérivées, devenus fonctions de la

coordonnée  $x$ , varie très rapidement avec elle, entre les limites très rapprochées

$$x = 0, \quad x = \varepsilon.$$

Supposons, d'ailleurs, que les produits de ces mêmes coefficients par  $\varepsilon$  restent très petits, et nommons

$$\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon, \dots, \varphi_\varepsilon, \chi_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \dots$$

ce que deviennent, entre les limites dont il s'agit, non pas les valeurs générales des variables

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots$$

mais des valeurs particulières de ces variables, je veux dire des valeurs fournies par un système d'intégrales particulières, par exemple, celles que fournissent les équations (5), et qui se déduisent des formules (5), (10), .... Puisque, par hypothèse, les coefficients des variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , et de leurs dérivées, dans les équations linéaires données, dépendent d'une seule des variables  $x, y, z, \dots$ , savoir, de la coordonnée  $x$ , on vérifiera ces équations en supposant que

$$\xi, \eta, \zeta, \dots$$

considérés comme fonction de  $y, z, \dots$ , sont tous proportionnels à une même exponentielle de la forme

$$e^{py+qz+\dots}$$

et comme, en admettant cette supposition, on pourra réduire les équations linéaires données aux équations différentielles dont nous avons parlé, nous devons conclure que ces équations différentielles pourront être étendues au cas où les coefficients varient avec  $x$ , et fourniront alors les valeurs de

$$\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon, \dots$$

Cela posé, concevons que les  $n$  racines de l'équation (4) soient inégales, et nommons

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

celles des racines de cette équation qui offrent une partie réelle égale

ou supérieure à la partie réelle de  $u_i$ . D'après ce qui a été dit dans le troisième paragraphe, les différences

$$\xi_\varepsilon - \xi, \eta_\varepsilon - \eta, \zeta_\varepsilon - \zeta, \dots, \varphi_\varepsilon - \varphi, \chi_\varepsilon - \chi, \psi_\varepsilon - \psi, \dots$$

devront vérifier toutes les équations produites par l'élimination des exponentielles

$$e^{u_{m+1}x+vy+wz-\dots}, \dots, e^{u_n x+vy+wz-\dots}$$

entre les formules

$$(12) \begin{cases} \xi_\varepsilon - \xi = A_{m+1} e^{u_{m+1}x+vy+wz-\dots} + \dots + A_n e^{u_n x+vy+wz-\dots}, \\ \eta_\varepsilon - \eta = B_{m+1} e^{u_{m+1}x+vy+wz-\dots} + \dots + B_n e^{u_n x+vy+wz-\dots}, \\ \zeta_\varepsilon - \zeta = C_{m+1} e^{u_{m+1}x+vy+wz-\dots} + \dots + C_n e^{u_n x+vy+wz-\dots}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} \varphi_\varepsilon - \varphi = A_{m+1} u_{m+1} e^{u_{m+1}x+vy+wz-\dots} + \dots + A_n u_n e^{u_n x+vy+wz-\dots}, \\ \chi_\varepsilon - \chi = B_{m+1} u_{m+1} e^{u_{m+1}x+vy+wz-\dots} + \dots + B_n u_n e^{u_n x+vy+wz-\dots}, \\ \psi_\varepsilon - \psi = C_{m+1} u_{m+1} e^{u_{m+1}x+vy+wz-\dots} + \dots + C_n u_n e^{u_n x+vy+wz-\dots}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Si aucune des racines de l'équation (4), résolue par rapport à  $u$ , n'offre une partie réelle inférieure à la partie réelle de  $u_i$ , on aura  $m=n$ , et alors les formules (12), (13), .... dont les seconds membres se réduiront à zéro, donneront

$$(14) \xi_\varepsilon = \xi, \eta_\varepsilon = \eta, \zeta_\varepsilon = \zeta, \dots, \varphi_\varepsilon = \varphi, \chi_\varepsilon = \chi, \psi_\varepsilon = \psi, \dots$$

Si une seule des racines de l'équation (4), savoir  $u_n$ , offre une partie réelle inférieure à celle de  $u_i$ , on tirera des formules (12), (13), ...

$$(15) \frac{\xi_\varepsilon - \xi}{A_n} = \frac{\eta_\varepsilon - \eta}{B_n} = \frac{\zeta_\varepsilon - \zeta}{C_n} = \dots = \frac{\varphi_\varepsilon - \varphi}{u_n A_n} = \frac{\chi_\varepsilon - \chi}{u_n B_n} = \frac{\psi_\varepsilon - \psi}{u_n C_n} = \dots$$

Soient d'ailleurs

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dots, \varphi_0, \chi_0, \psi_0, \dots$$

ce que deviennent

$$\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon, \dots, \varphi_\varepsilon, \chi_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \dots$$

sur le plan fixe donné, c'est-à-dire lorsqu'on pose  $x=0$ . En vertu des

formules (14), (15), ..., les valeurs des variables

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots$$

que déterminent les formules (5), (10), ..., c'est-à-dire leurs valeurs calculées comme si, dans le voisinage du plan fixe, les équations linéaires données ne changeaient pas de forme, devront, pour  $x=0$ , satisfaire, si l'on a  $m=n$ , aux conditions

$$(16) \quad \xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \zeta = \zeta_0, \quad \dots, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \chi = \chi_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \dots,$$

si l'on a  $m = n - 1$ , aux conditions

$$(17) \quad \frac{\xi - \xi_0}{A_n} = \frac{\eta - \eta_0}{B_n} = \frac{\zeta - \zeta_0}{C_n} = \dots = \frac{\varphi - \varphi_0}{u_n A_n} = \frac{\chi - \chi_0}{u_n B_n} = \frac{\psi - \psi_0}{u_n C_n} = \dots$$

Si les valeurs des variables principales  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , mesurées du côté des  $x$  positives et à une distance finie du plan fixe, n'étaient plus celles que déterminent les formules (5), mais les sommes de celles que déterminent plusieurs formules (5), (6), ..., (7), et renfermaient en conséquence dans leur expression plusieurs des exponentielles

$$e^{u_1 x + v_1 y + w_1 z}, \quad e^{u_2 x + v_2 y + w_2 z}, \quad \dots, \quad e^{u_n x + v_n y + w_n z},$$

par exemple

$$e^{u_1 x + v_1 y + w_1 z}, \quad e^{u_2 x + v_2 y + w_2 z}, \quad \dots,$$

alors, en nommant toujours

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \dots$$

ce que deviendraient les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots$$

entre les limites  $x=0, x=\varepsilon$ , eu égard au changement de forme des équations différentielles, et raisonnant d'ailleurs comme ci-dessus, on obtiendrait encore, entre les différences

$$\xi_1 - \xi, \quad \eta_1 - \eta, \quad \zeta_1 - \zeta, \quad \dots, \quad \varphi_1 - \varphi, \quad \chi_1 - \chi, \quad \psi_1 - \psi, \quad \dots,$$

les équations de condition produites par l'élimination des exponentielles

$$e^{u_{m+1} x + v_{m+1} y + w_{m+1} z}, \quad \dots, \quad e^{u_n x + v_n y + w_n z}$$

entre les formules (12), (13), ..., pourvu que l'on désignât par

$$u_{m+1}, \dots, u_n$$

celles des racines de l'équation (4) dont la partie réelle serait inférieure à la partie réelle de chacune des racines

$$u_1, u_2, \dots$$

Alors aussi, parmi les termes de la suite

$$u_{m+1}, \dots, u_n,$$

on devrait ordinairement comprendre la plupart des racines  $u_1, u_2, \dots$ , en excluant seulement celle dont la partie réelle serait la plus petite, ou du moins celles dont les parties réelles, égales entre elles, offriraient la moindre valeur.

Nous avons ici supposé que l'équation (4) offrait  $n$  racines distinctes. On passera aisément de cette hypothèse au cas où plusieurs racines deviendraient égales, en commençant par admettre que ces mêmes racines diffèrent très peu les unes des autres.

La méthode et les formules que nous venons d'exposer peuvent être appliquées, par exemple, aux équations linéaires que j'ai données dans le Mémoire sur la dispersion de la lumière et qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Cette application n'offre aucune difficulté dans le cas où les coefficients que renferment ces équations, ramenées par le développement des différences finies, en vertu du théorème de Taylor, à la forme d'équations linéaires aux différences partielles, demeurent constants à une distance finie du plan fixe qui limite le système donné. Alors on obtient, pour les molécules situées dans le voisinage du plan fixe, des équations de condition que nous développerons dans un autre Mémoire et qui comprennent, comme cas particulier, les formules de Fresnel relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière.



## 36.

*Note sur un théorème d'Analyse, et sur son application aux questions de Physique mathématique.*

C. R., t. VIII, p. 471 (1<sup>er</sup> avril 1839).

Il est assez facile d'intégrer les équations linéaires qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, et d'en déduire, par la méthode qui fait l'objet du précédent Mémoire, les équations relatives à un plan fixe qui limite le système donné, dans le cas où les coefficients que renferment les premières équations, ramenées à la forme d'équations aux différences partielles, demeurent constants à une distance finie du plan fixe. Mais cette dernière condition, qui peut être supposée remplie quand il s'agit des molécules d'un corps homogène, ou bien encore des molécules du fluide éthéré pris isolément et placé dans le vide, doit cesser assurément d'être vérifiée quand les molécules données sont celles d'une portion de fluide éthéré contenue dans un corps transparent ou opaque. En effet, admettons, comme tout semble l'indiquer, que les molécules d'un corps, ou plutôt les atomes dont elles se composent, exercent une attraction sur les molécules éthérées. Ces dernières se rassembleront en plus grand nombre dans le voisinage d'un atome du corps, et par suite la densité de l'éther pourra varier sensiblement d'un point de l'espace à un autre dans un très petit intervalle. On peut donc s'étonner au premier abord de l'accord remarquable qui existe, comme nous le montrerons dans un autre article, entre les résultats des expériences relatives à la réflexion ou à la réfraction de la lumière et les phénomènes que le calcul indique pour le cas où la densité de l'éther demeurerait invariable dans toute l'étendue d'un même corps. Il restait évidemment ici une difficulté qu'il m'a paru important de vaincre. J'y suis parvenu à l'aide d'un théorème d'Ana-

lyse que je vais exposer en peu de mots. Ce théorème, appliqué à l'intégration d'une équation différentielle, peut s'énoncer comme il suit :

**THÉORÈME.** — Soit donnée une équation différentielle linéaire d'un ordre quelconque entre une variable principale  $\xi$  et une variable indépendante  $x$  qui représentera, si l'on veut, une coordonnée mesurée perpendiculairement à un plan fixe. Si, dans tous les termes de cette équation, supposés proportionnels à la variable principale, ou à ses dérivées, les coefficients sont des fonctions de la coordonnée  $x$  qui reprennent périodiquement les mêmes valeurs quand on fait croître ou décroître cette coordonnée en progression arithmétique, il suffira en général que la valeur numérique attribuée à  $x$  devienne très considérable relativement à la raison de la progression dont il s'agit, pour que la valeur de la variable principale se confonde sensiblement avec celle qu'on obtiendrait si, dans l'équation donnée, on remplaçait chaque coefficient par sa valeur moyenne.

**Démonstration.** — Pour constater l'exactitude de ce théorème, commençons par considérer le cas où l'équation donnée peut s'intégrer en termes finis; et supposons, par exemple, que la variable principale  $\xi$  se trouve liée à la variable indépendante  $x$  par la formule

$$(1) \quad \frac{d\xi}{dx} = R\xi,$$

le coefficient  $R$  étant une fonction de  $x$  qui reprenne périodiquement la même valeur quand on fait croître ou décroître  $x$  d'un multiple de la quantité positive  $a$ . Si l'on nomme  $\xi_0$  la valeur de  $\xi$  correspondante à  $x = 0$ , l'intégrale de l'équation (1) sera de la forme

$$(2) \quad \xi = \xi_0 e^{\int_0^x R dx}.$$

Soit d'ailleurs

$$(3) \quad A = \int_0^a R dx.$$

Le rapport  $\frac{A}{a}$  sera ce qu'on appelle la *valeur moyenne* du coefficient  $R$ ,



et représentera en effet la moyenne arithmétique entre les valeurs de R qui correspondent à des valeurs de x équidistantes, infiniment rapprochées les unes des autres, et comprises entre les limites  $x=0$ ,  $x=a$ . Cela posé, si l'on attribue à la variable x une valeur numérique qui soit très considérable par rapport à a, si, par exemple, en supposant x positif, on prend

$$(4) \quad x = na + \alpha,$$

n étant un nombre entier fort grand et  $\alpha$  une quantité comprise entre les limites 0, a, on trouvera

$$(5) \quad \int_0^x R dx = \int_0^{na} R dx + \int_{na}^{na+\alpha} R dx;$$

et, comme on aura, en raison de la périodicité des valeurs du coefficient R,

$$(6) \quad \int_0^{na} R dx = n \int_0^a R dx = nA,$$

la formule (5) donnera

$$(7) \quad \int_0^x R dx = nA + \int_{na}^{na+\alpha} R dx.$$

D'ailleurs l'intégrale

$$\int_{na}^{na+\alpha} R dx,$$

équivalente au produit de  $\alpha$  par une certaine valeur de R, sera une quantité du même ordre que l'intégrale A et pourra, en général, être négligée vis-à-vis du produit nA lorsque le nombre n deviendra considérable. On doit cependant excepter le cas où, la fonction R venant à passer par zéro entre les limites  $x=0$ ,  $x=a$ , on aurait rigoureusement

$$\int_0^a R dx = 0 \quad \text{ou} \quad A = 0.$$

Dans tout autre cas, la formule (7) donnera sensiblement, pour de

grandes valeurs de n,

$$\int_0^x R dx = nA = \frac{A}{a}(x - \alpha),$$

et, par suite,

$$(8) \quad \int_0^x R dx = \frac{A}{a}x,$$

puisque  $\alpha$  sera très petit par rapport à x. On peut même observer que, dans tous les cas, la formule (8) sera rigoureusement exacte dès que l'on prendra pour x un multiple de a. Or, si l'on substitue dans la formule (2) la valeur de  $\int_0^x R dx$ , tirée de l'équation (8), on trouvera

$$(9) \quad \xi = \xi_0 e^{\frac{A}{a}x};$$

et, conformément au théorème énoncé, la valeur précédente de  $\xi$  est précisément celle que fournirait la formule

$$(10) \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{A}{a}\xi,$$

à laquelle on parvient en remplaçant, dans l'équation (1), le coefficient R par sa valeur moyenne  $\frac{A}{a}$ .

On arriverait aux mêmes conclusions si, au lieu d'intégrer l'équation (1) sous forme finie, on appliquait à cette équation la méthode d'intégration par séries. En effet, en intégrant, à partir de  $x=0$ , les deux membres de l'équation (1) multipliés par dx, on trouvera

$$(11) \quad \xi - \xi_0 = \int_0^x R \xi dx;$$

puis, en substituant plusieurs fois de suite la valeur de  $\xi$  tirée de l'équation (11) dans cette équation même, on en tirera

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \int_0^x R \xi dx \\ &= \xi_0 + \xi_0 \int_0^x R dx + \int_0^x R \int_0^x R \xi dx dx \\ &= \dots \dots \dots \end{aligned}$$



par conséquent

$$(12) \quad \xi = \xi_0 \left( 1 + \int_0^x R dx + \int_0^x \int_0^x R dx dx + \dots \right).$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (8), on aura sensiblement, pour de grandes valeurs de  $x$  ou pour de petites valeurs de  $a$ ,

$$(13) \quad \begin{cases} \int_0^x R dx = \frac{\Lambda}{a} x, \\ \int_0^x R \int_0^x R dx dx = \frac{\Lambda}{a} \int_0^x R x dx, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

et comme, en intégrant par parties, on trouvera

$$\int_0^x R x dx = x \int_0^x R dx - \int_0^x \int_0^x R dx dx,$$

puis, en ayant égard à la formule (8),

$$\int_0^x R x dx = \frac{\Lambda}{a} x^2 - \frac{\Lambda}{a} \int_0^x x dx = \frac{\Lambda}{a} \frac{x^2}{2}.$$

la seconde des formules (13) pourra, sans erreur sensible, être remplacée par la suivante :

$$(14) \quad \int_0^x R \int_0^x R dx dx = \left( \frac{\Lambda}{a} \right)^2 \frac{x^2}{2}.$$

En continuant ainsi, on reconnaîtra que, dans l'hypothèse admise, l'équation (12) peut être réduite à

$$(15) \quad \xi = \xi_0 \left[ 1 + \frac{\Lambda}{a} x + \left( \frac{\Lambda}{a} \right)^2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right],$$

par conséquent à la formule (9).

Concevons à présent qu'au lieu de l'équation (1) l'on considère la suivante

$$(16) \quad \frac{d^2 \xi}{dx^2} = R \xi,$$

le coefficient de  $R$  étant toujours une fonction de  $x$  qui reprenne périodiquement les mêmes valeurs quand on fait croître ou décroître  $x$  d'un multiple de la quantité positive  $a$ . La première des démonstrations que nous avons données de notre théorème, en prenant pour exemple l'équation (1), cessera d'être applicable, puisque l'équation (16) n'est pas du nombre de celles que l'on intègre facilement sous forme finie. Mais la seconde de ces démonstrations continuera de subsister. En effet, posons

$$\frac{d\xi}{dx} = \varphi$$

et nommons  $\xi_0, \varphi_0$  les valeurs des variables  $\xi, \varphi$  correspondantes à une valeur nulle de  $x$ . L'équation (16) pourra être remplacée par le système des équations simultanées

$$(17) \quad \frac{d\xi}{dx} = \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = R\xi,$$

et, en intégrant, à partir de  $x = 0$ , les deux membres de chacune de ces dernières, multipliés par  $dx$ , on en tirera

$$(18) \quad \xi = \xi_0 + \int_0^x \varphi dx, \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^x R \xi dx,$$

par conséquent

$$(19) \quad \xi = \xi_0 + \varphi_0 x + \int_0^x \int_0^x R \xi dx dx;$$

puis, en substituant plusieurs fois la valeur de  $\xi$ , donnée par l'équation (19), dans cette équation même, on trouvera

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 \left( 1 + \int_0^x \int_0^x R dx dx + \dots \right) \\ + \varphi_0 \left( x + \int_0^x \int_0^x R x dx dx + \dots \right). \end{cases}$$

Enfin, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans le premier exemple, on prouvera que la formule (20) peut



être sensiblement réduite à

$$(21) \quad \xi = \xi_0 \left( 1 + \frac{\Lambda}{a} \frac{x^2}{2} + \dots \right) + \varphi_0 \left( x + \frac{\Lambda}{a} \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots \right)$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(22) \quad \xi = \frac{1}{2} \xi_0 (e^{ux} + e^{-ux}) + \frac{1}{2u} \varphi_0 (e^{ux} - e^{-ux}),$$

la valeur de  $u$  étant déterminée par l'équation

$$(23) \quad u^2 = \frac{\Lambda}{a}.$$

Or la valeur de  $\xi$ , donnée par la formule (22), est précisément celle que l'on déduirait de l'équation différentielle

$$(24) \quad \frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{\Lambda}{a} \xi,$$

à laquelle on parvient en remplaçant, dans l'équation (16), le coefficient  $R$  par sa valeur moyenne  $\frac{\Lambda}{a}$ .

Le théorème énoncé pourra ainsi être démontré généralement, à l'aide de l'intégration par séries, quels que soient l'ordre de l'équation linéaire donnée et le nombre de ses termes. Il y a plus : le même théorème se démontrera encore de la même manière, si on l'étend à un système d'équations différentielles ou aux différences partielles, en l'énonçant comme il suit :

THEOREME. — *Considérons un système d'équations linéaires, différentielles ou aux différences partielles, entre plusieurs variables principales qui seront, si l'on veut, des déplacements moléculaires, et plusieurs variables indépendantes qui pourront être trois coordonnées  $x, y, z$  et le temps  $t$ . Si, dans les différents termes supposés proportionnels aux variables principales et à leurs dérivées, les coefficients sont des fonctions de  $x, y, z$  qui reprennent périodiquement les mêmes valeurs quand on fait croître ou décroître chacune des coordonnées en progression arithmétique, par exemple,*

quand on fait varier  $x$  d'un multiple de  $a$ ,  $y$  d'un multiple de  $b$ ,  $z$  d'un multiple de  $c$  : il suffira en général que les rapports  $a, b, c$  des progressions arithmétiques soient très petits relativement aux valeurs numériques attribuées à  $x, y, z$ , pour que les valeurs correspondantes des variables principales se confondent sensiblement avec celles qu'on obtiendrait en remplaçant dans les équations linéaires données chaque coefficient par sa valeur moyenne.

Nota. — Il est bon d'observer que, dans le théorème énoncé, la valeur moyenne de chaque coefficient doit être calculée de la même manière que les ordonnées moyennes des courbes et des surfaces, les coordonnées du centre des moyennes distances, et la densité moyenne d'un corps. En conséquence, si l'on nomme  $R$  l'un quelconque des coefficients, sa valeur moyenne ne sera autre chose que le rapport de l'intégrale triple

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c R \, dx \, dy \, dz$$

au produit  $abc$ .

Remarquons encore que, remplacer, dans les équations linéaires données, chaque coefficient par sa valeur numérique, revient à intégrer, par rapport à  $x, y, z$  et entre les limites

$$(x = 0, x = a), \quad (y = 0, y = b), \quad (z = 0, z = c),$$

chaque membre de ces équations multiplié par les différentielles  $dx, dy, dz$ , en opérant comme si les variables principales et leurs dérivées représentaient des quantités constantes. En effet, en agissant de la sorte, on tirera, par exemple, de l'équation (1)

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} \int_0^a dx = \xi \int_0^a R \, dx \quad \text{ou} \quad a \frac{d^2 \xi}{dx^2} = \Lambda \xi,$$

de l'équation (16)

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} \int_0^a dx = \xi \int_0^a R \, dx \quad \text{ou} \quad a \frac{d^2 \xi}{dx^2} = \Lambda \xi,$$

.....



de sorte que l'équation (1) ou (16) se trouvera remplacée par une autre qui coïncidera évidemment avec la formule (10) ou (24).

En vertu de la proposition énoncée, pour rendre applicables à la théorie de la lumière les équations aux différences mêlées que j'ai données dans le Mémoire sur la dispersion, et qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, il suffira de développer par la formule de Taylor les différences finies que ces équations renferment, puis de remplacer, dans les équations linéaires et aux différences partielles qu'on obtiendra de cette manière, chaque coefficient par sa valeur moyenne. Comme un tel remplacement n'altérera point la forme des équations linéaires dont il s'agit, on doit comprendre maintenant comment il arrive que les lois déduites de ces équations sont précisément celles qui régissent les divers phénomènes lumineux. Ainsi, en particulier, les lois de la polarisation de la lumière, établies par un calcul dans lequel on supposait que l'éther offrait partout la même densité, ne devront pas être restreintes au cas où les molécules éthérées sont placées dans le vide, et subsisteront lorsque ces molécules seront renfermées dans un milieu homogène, par exemple, dans un corps diaphane cristallisé, quoique dans ce dernier cas la densité de l'éther puisse subir des variations périodiques sensibles. Dans l'un et l'autre cas, la polarisation pourra être elliptique, ou circulaire, ou rectiligne, et les mouvements vibratoires des molécules seront précisément ceux qui caractérisent ces trois modes de polarisation.

## 37.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les mouvements infiniment petits des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

C. R., t. VIII, p. 565 (8 avril 1839).

Afin de rendre plus évidente l'utilité des méthodes exposées dans les précédents Mémoires, nous allons appliquer ces méthodes aux équations qui expriment les mouvements infiniment petits des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle; et, pour que l'on puisse plus facilement saisir la suite des raisonnements, nous commencerons par reproduire en peu de mots les équations dont il s'agit et celles de leurs intégrales particulières qui se présentent sous les formes les plus simples.

§ I. — *Équations d'équilibre et de mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

Considérons un système de molécules distribuées dans une portion de l'espace et sollicitées au mouvement par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Soient  $m$  la masse d'une de ces molécules,  $m, m', m'', \dots$  celles des autres, et supposons que, dans un état d'équilibre du système,

$x, y, z$  représentent les coordonnées de la molécule  $m$  rapportées à trois axes rectangulaires,

$x + X, y + Y, z + Z$  les coordonnées d'une autre molécule  $m,$

$r$  la distance des molécules  $m$  et  $m,$

$\alpha, \beta, \gamma$  les angles formés par le rayon vecteur  $r$  avec les demi-axes des coordonnées positives.



On aura

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{X}{r}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{r},$$

$$(2) \quad r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Supposons d'ailleurs que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses  $m, m$ , étant proportionnelle à ces masses et à une fonction de la distance  $r$ , soit représentée, au signe près, par

$$m m f(r),$$

$f(r)$  désignant une quantité positive lorsque les masses  $m, m$  s'attirent, et négative lorsqu'elles se repoussent. Les équations d'équilibre de la molécule  $m$  seront

$$(3) \quad S[m \cos \alpha f(r)] = 0, \quad S[m \cos \beta f(r)] = 0, \quad S[m \cos \gamma f(r)] = 0,$$

la lettre  $S$  indiquant une somme de termes semblables entre eux, et relatifs aux diverses molécules  $m, m', \dots$

Concevons maintenant que les molécules  $m, m, m', \dots$  viennent à se mouvoir. Soient alors, au bout du temps  $t$ ,

$$\xi, \eta, \zeta$$

les déplacements de la molécule  $m$ , mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et

$$r(1 + \varepsilon)$$

la distance des deux molécules

$$m, m.$$

$$\text{On aura} \quad r^2(1 + \varepsilon)^2 = (X + \Delta\xi)^2 + (Y + \Delta\eta)^2 + (Z + \Delta\zeta)^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \quad r^2(1 + \varepsilon)^2 = (r \cos \alpha + \Delta\xi)^2 + (r \cos \beta + \Delta\eta)^2 + (r \cos \gamma + \Delta\zeta)^2,$$

les accroissements des quantités

$$X, Y, Z$$

étant respectivement

$$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta.$$

Par suite, si l'on suppose les déplacements

$$\xi, \eta, \zeta$$

exprimés en fonction des coordonnées initiales et du temps  $t$ , les équations du mouvement de la molécule  $m$  seront

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S \left\{ m \left( \cos \alpha + \frac{\Delta\xi}{r} \right) \frac{f[r(1 + \varepsilon)]}{1 + \varepsilon} \right\}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S \left\{ m \left( \cos \beta + \frac{\Delta\eta}{r} \right) \frac{f[r(1 + \varepsilon)]}{1 + \varepsilon} \right\}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S \left\{ m \left( \cos \gamma + \frac{\Delta\zeta}{r} \right) \frac{f[r(1 + \varepsilon)]}{1 + \varepsilon} \right\}. \end{cases}$$

§ II. — Équations des mouvements infiniment petits d'un système de molécules.

Considérons, dans un système de molécules donné, un mouvement vibratoire, en vertu duquel chaque molécule s'écarte très peu de sa position initiale. Si l'on cherche les lois du mouvement, celles du moins qui subsistent, quelque petite que soit l'étendue des vibrations moléculaires, alors, en regardant les déplacements

$$\xi, \eta, \zeta$$

et leurs différences

$$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$$

comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on pourra négliger les carrés et les puissances supérieures de ces différences et de  $\varepsilon$  dans les développements des expressions que renferment les formules (4), (5) du premier paragraphe; et l'on pourra encore supposer indifféremment que, des quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

les trois premières représentent, ou les coordonnées initiales de la molécule, ou ses coordonnées courantes, qui, en vertu de l'hypothèse admise, différeront très peu des premières. Cela posé, si l'on fait, pour



abréger.

$$(1) \quad f(r) = r f'(r) - f(r),$$

on verra les formules (4) et (5) du premier paragraphe se réduire à celles que renferme la page 5 du Mémoire sur la dispersion de la lumière, c'est-à-dire à

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{1}{r} (\Delta \xi \cos \alpha + \Delta \eta \cos \varepsilon + \Delta \zeta \cos \gamma),$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = S \left[ m \frac{f(r)}{r} \Delta \xi \right] + S [m \varepsilon f(r) \cos \alpha], \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = S \left[ m \frac{f(r)}{r} \Delta \eta \right] + S [m \varepsilon f(r) \cos \varepsilon], \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = S \left[ m \frac{f(r)}{r} \Delta \zeta \right] + S [m \varepsilon f(r) \cos \gamma]. \end{cases}$$

Les trois dernières formules seront donc les équations des mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Pour que ces mêmes équations soient transformées en équations aux différences partielles entre les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

et les variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$

il suffira d'y substituer pour  $\varepsilon$  sa valeur donnée par la formule (2), et de développer ensuite, à l'aide du théorème de Taylor, les différences finies

$$\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$$

suivant les puissances ascendantes des quantités

$$X = r \cos \alpha, \quad Y = r \cos \varepsilon, \quad Z = r \cos \gamma.$$

Les coefficients des dérivées des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta,$$

dans les équations aux différences partielles qu'on aura ainsi obtenues, seront des sommes de l'une des formes

$$(4) \quad S [m r^{n+n'+n''-1} \cos^n \alpha \cos^{n'} \varepsilon \cos^{n''} \gamma f(r)],$$

$$(5) \quad S [m r^{n+n'+n''-3} \cos^n \alpha \cos^{n'} \varepsilon \cos^{n''} \gamma f(r)],$$

$n, n', n''$  désignant des nombres entiers; et l'on pourra regarder la constitution du système comme étant partout la même, si les sommes dont il s'agit se réduisent à des quantités constantes. C'est ce qui aura lieu, par exemple, quand les molécules données seront celles du fluide éthéré, pris isolément et placé dans le vide. Si les sommes (4) et (5) reprennent périodiquement les mêmes valeurs, quand on y fait croître ou décroître chacune des coordonnées en progression arithmétique, et si, d'ailleurs, les rapports des trois progressions géométriques, correspondantes aux trois coordonnées, sont très petits, alors, en vertu d'un théorème que nous avons établi, on pourra substituer à ces mêmes sommes leurs valeurs moyennes, sans qu'il en résulte d'erreur sensible dans le calcul des vibrations du système et des déplacements moléculaires. Les nouvelles équations que l'on obtiendra de cette manière paraissent spécialement applicables au mouvement du fluide lumineux renfermé dans un corps homogène, isophane ou non isophane, opaque ou transparent.

### § III. — Mouvements simples

Lorsque la constitution du système de molécules est partout la même, ou, en d'autres termes, lorsque les sommes (4), (5) du paragraphe précédent demeurent constantes, un moyen fort simple de satisfaire aux équations des mouvements infiniment petits est de supposer les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

toutes proportionnelles à une même exponentielle népérienne, dont l'exposant soit une fonction linéaire des variables indépendantes

$$x, y, z, t,$$



et de prendre en conséquence

$$(1) \quad \xi = A e^{u(x+y)+wz-ut}, \quad \eta = B e^{u(x+y)+wz-ut}, \quad \zeta = C e^{u(x+y)+wz-ut}$$

u, v, w, s, A, B, C désignant des constantes réelles ou imaginaires convenablement choisies. En effet, si l'on substitue les valeurs précédentes de  $\xi, \eta, \zeta$  dans les équations (3) du second paragraphe, tous les termes seront divisibles par l'exponentielle

$$e^{u(x+y)+wz-ut}$$

et, après la division effectuée, ces équations seront réduites à trois autres de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} (\xi - s^2)A + \mathfrak{A}B + \mathfrak{Q}C = 0, \\ \mathfrak{A}A + (\mathfrak{N} - s^2)B + \mathfrak{P}C = 0, \\ \mathfrak{Q}A + \mathfrak{P}B + (\mathfrak{T} - s^2)C = 0, \end{cases}$$

les valeurs de

$$\xi, \mathfrak{N}, \mathfrak{T}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{A}$$

étant déterminées par les formules

$$(3) \quad \xi = S \left[ m \frac{f(r) + f(r) \cos^2 \alpha}{r} (e^{r(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma)} - 1) \right], \quad \mathfrak{N} = \dots, \quad \mathfrak{T} = \dots$$

$$(4) \quad \mathfrak{P} = S \left[ m \frac{f(r) \cos \beta \cos \gamma}{r} (e^{r(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma)} - 1) \right], \quad \mathfrak{Q} = \dots, \quad \mathfrak{A} = \dots$$

Or, lorsque les sommes (4), (5) du second paragraphe demeurent constantes, on peut en dire autant des valeurs de

$$\xi, \mathfrak{N}, \mathfrak{T}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{A}$$

que fournissent les équations (3), (4), et qui sont développables, avec l'exponentielle

$$e^{r(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma)}$$

en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de u, v, w. Donc alors on peut satisfaire aux équations (2) par des valeurs constantes des facteurs

$$A, B, C.$$

Il est bon d'observer que si l'on pose, pour abrégér,

$$(5) \quad k^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$(6) \quad k \cos \delta = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma,$$

$$(7) \quad G = S \left[ m \frac{f(r)}{r} (e^{kr \cos \delta} - 1) \right],$$

$$(8) \quad \mathfrak{S} = S \left[ m \frac{f(r)}{r^2} \left( e^{kr \cos \delta} - 1 - kr \cos \delta - \frac{k^2 r^2 \cos^2 \delta}{2} \right) \right],$$

les valeurs de  $\xi, \mathfrak{N}, \mathfrak{T}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{A}$  pourront s'écrire comme il suit :

$$(9) \quad \xi = G + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u^2}, \quad \mathfrak{N} = G + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2}, \quad \mathfrak{T} = G + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial w^2},$$

$$(10) \quad \mathfrak{P} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v \partial w}, \quad \mathfrak{Q} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial w \partial u}, \quad \mathfrak{A} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u \partial v}.$$

Parmi les formules (2), les deux dernières donnent

$$(11) \quad \frac{A}{(\mathfrak{N} - s^2)(\mathfrak{T} - s^2) - \mathfrak{P}^2} = \frac{B}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - \mathfrak{A}(\mathfrak{T} - s^2)} = \frac{C}{\mathfrak{A}\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}(\mathfrak{N} - s^2)},$$

et par suite on tire de la première

$$(12) \quad F(u, v, w, s) = 0,$$

en posant, pour abrégér,

$$(13) \quad \begin{cases} F(u, v, w, s) = (\xi - s^2)(\mathfrak{N} - s^2)(\mathfrak{T} - s^2) - \mathfrak{P}^2(\xi - s^2) \\ \quad - \mathfrak{Q}^2(\mathfrak{N} - s^2) - \mathfrak{A}^2(\mathfrak{T} - s^2) + 2\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{A}. \end{cases}$$

On arriverait encore à des résultats équivalents en écrivant les équations (2) comme il suit :

$$(14) \quad \begin{cases} \left( s^2 - \xi + \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} \right) A = \mathfrak{Q}\mathfrak{A} \left( \frac{A}{\mathfrak{P}} + \frac{B}{\mathfrak{Q}} + \frac{C}{\mathfrak{A}} \right), \\ \left( s^2 - \mathfrak{N} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}} \right) B = \mathfrak{A}\mathfrak{P} \left( \frac{A}{\mathfrak{P}} + \frac{B}{\mathfrak{Q}} + \frac{C}{\mathfrak{A}} \right), \\ \left( s^2 - \mathfrak{T} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{A}} \right) C = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \left( \frac{A}{\mathfrak{P}} + \frac{B}{\mathfrak{Q}} + \frac{C}{\mathfrak{A}} \right), \end{cases}$$





et l'on tirerait des formules (14)

$$(15) \frac{\frac{A}{\partial x}}{s^2 - \ell + \frac{\partial \partial}{x}} = \frac{\frac{B}{\partial x}}{s^2 - \partial R + \frac{\partial \partial}{x}} = \frac{\frac{C}{\partial x}}{s^2 - \partial \sigma + \frac{\partial \partial}{x}} = \frac{A}{\partial} + \frac{B}{\partial} + \frac{C}{\partial}$$

$$(16) \frac{\left(\frac{1}{\partial}\right)^2}{s^2 - \ell + \frac{\partial \partial}{x}} + \frac{\left(\frac{1}{\partial}\right)^2}{s^2 - \partial R + \frac{\partial \partial}{x}} + \frac{\left(\frac{1}{\partial}\right)^2}{s^2 - \partial \sigma + \frac{\partial \partial}{x}} = \frac{1}{\partial \partial \partial}$$

Or il est facile de s'assurer qu'effectivement la formule (15) s'accorde avec la formule (11), et l'équation (16) avec l'équation (12).

En résumé, pour que les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta$$

données par les formules (1) satisfassent aux équations des mouvements infiniment petits du système que l'on considère, il suffira généralement : 1° que les coefficients

$$u, v, w, s$$

des variables indépendantes, dans l'exponentielle à laquelle  $\xi, \eta, \zeta$  sont proportionnels, vérifient la formule (12) ou (16); 2° que les facteurs

$$A, B, C$$

soient entre eux dans les rapports que détermine la formule (11) ou (15).

D'ailleurs, les coefficients

$$u, v, w, s$$

et les facteurs

$$A, B, C$$

pourront être réels ou imaginaires. Dans le premier cas, les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

données par les formules (1), seront réelles, et pourront être censées représenter le déplacement d'une molécule m dans un mouvement in-

finiment petit compatible avec la constitution du système donné. Dans le second cas, les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta$$

deviendront imaginaires. Mais comme leurs parties réelles vérifieront encore les équations des mouvements infiniment petits, réduites à la forme d'équations aux différences partielles, ce seront évidemment ces parties réelles qui pourront être censées représenter les déplacements des molécules dans un mouvement compatible avec les conditions du système. Dans l'un et l'autre cas, le mouvement infiniment petit, qui correspondra aux valeurs de  $\xi, \eta, \zeta$  fournies par les équations (1), sera un *mouvement simple*, dans lequel ces valeurs représenteront, ou les déplacements effectifs d'une molécule, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, ou ses *déplacements symboliques*, c'est-à-dire des variables imaginaires dont les déplacements effectifs seront les parties réelles. Les équations (1) elles-mêmes seront les *équations finies*, et dans le second cas les équations finies *symboliques* du mouvement simple dont il s'agit.

Comme, dans toute équation imaginaire dont le second membre est nul, la partie réelle du premier membre doit se réduire séparément à zéro, il est clair que toute équation linéaire à coefficients réels qui offrira seulement des termes proportionnels aux déplacements symboliques  $\xi, \eta, \zeta$ , ou à leurs dérivées de divers ordres, continuera de subsister, quand on y remplacera les déplacements symboliques par leurs parties réelles, c'est-à-dire par les déplacements effectifs. D'ailleurs on tirera généralement des équations (1)

$$(17) \quad \frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = \frac{\zeta}{C}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18) \quad \eta = \frac{B}{A} \xi, \quad \zeta = \frac{C}{A} \xi.$$

Done, si les rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$$



sont réels, on pourra supposer à volonté que, dans les formules (17) et (18),  $\xi, \eta, \zeta$  représentent, ou les déplacements-symboliques, ou les déplacements effectifs; et en conséquence la ligne décrite par chaque molécule sera une ligne droite parallèle à celle qui, passant par l'origine des coordonnées, est représentée par l'équation

$$(19) \quad \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

Si au contraire les rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$$

sont imaginaires, il sera facile de trouver trois constantes réelles,

$$f, g, h$$

propres à vérifier la formule

$$(20) \quad fA + gB + hC = 0.$$

Car, si, pour fixer les idées, on pose

$$(21) \quad A = ae^{\lambda\sqrt{-1}}, \quad B = be^{\mu\sqrt{-1}}, \quad C = ce^{\nu\sqrt{-1}},$$

$a, b, c$  désignant les *modules* des facteurs  $A, B, C$  et  $\lambda, \mu, \nu$  leurs *arguments*, il suffira d'assujettir les constantes réelles  $f, g, h$  à vérifier les deux formules

$$(22) \quad \begin{cases} fae^{\lambda\sqrt{-1}} + gbe^{\mu\sqrt{-1}} + hce^{\nu\sqrt{-1}} = 0, \\ fae^{-\lambda\sqrt{-1}} + gbe^{-\mu\sqrt{-1}} + hce^{-\nu\sqrt{-1}} = 0, \end{cases}$$

desquelles on tirera

$$(23) \quad \frac{fa}{\sin(\mu - \nu)} = \frac{gb}{\sin(\nu - \lambda)} = \frac{hc}{\sin(\lambda - \mu)},$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$(24) \quad f = \frac{\sin(\mu - \nu)}{a}, \quad g = \frac{\sin(\nu - \lambda)}{b}, \quad h = \frac{\sin(\lambda - \mu)}{c}.$$

En adoptant les valeurs précédentes de  $f, g, h$ , on tirera des équations

(1) et (20) la suivante

$$(25) \quad f\xi + g\eta + h\zeta = 0,$$

à laquelle devront satisfaire les déplacements effectifs aussi bien que les déplacements symboliques. Donc lorsque, dans un mouvement simple, la ligne décrite par une molécule ne sera pas une droite parallèle à celle que représente la formule (19), elle sera du moins une courbe plane, dont le plan sera parallèle au *plan invariable* que représente l'équation

$$(26) \quad fx + gy + hz = 0.$$

En vertu des formules (1), chacun des déplacements symboliques, et par suite chacun des déplacements effectifs, conserve la même valeur quand on fait varier les coordonnées  $x, y, z$  de manière que le trinôme

$$ux + vy + wz$$

demeure constant, par exemple, de manière à vérifier la formule

$$(27) \quad ux + vy + wz = 0.$$

Dans le cas général où les coefficients  $u, v, w$  sont imaginaires, l'équation (27) se décompose en deux équations réelles. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$(28) \quad u = U + v\sqrt{-1}, \quad v = V + v\sqrt{-1}, \quad w = W + w\sqrt{-1},$$

$u, v, w, U, V, W$  désignant des quantités réelles, l'équation (27) donnera

$$(29) \quad Ux + Vy + wz = 0,$$

$$(30) \quad Ux + Vy + Wz = 0.$$

Les équations (29) et (30) sont celles d'un *second* et d'un *troisième plan invariable* passant par l'origine des coordonnées. Ces deux plans se couperont suivant une droite; et, dans le mouvement simple représenté par les équations (1), toutes les molécules situées sur une parallèle à



cette droite se trouveront, au même instant, déplacées de la même manière.

Soient maintenant

$$(31) \quad u^2 + v^2 + w^2 = k^2, \quad U^2 + V^2 + W^2 = K^2,$$

et

$$(32) \quad ux + vy + wz = kv, \quad Ux + Vy + Wz = Kv,$$

$v, \alpha$  désignant les distances du point  $(x, y, z)$  au second et au troisième plan invariable. Si d'ailleurs on pose

$$(33) \quad s = S + s\sqrt{-1},$$

les valeurs des déplacements symboliques  $\xi, \eta, \zeta$ , données par les formules (1) deviendront

$$(34) \quad \begin{cases} \xi = a e^{K\alpha - St} e^{i(kv - st + \lambda)\sqrt{-1}}, \\ \eta = b e^{K\alpha - St} e^{i(kv - st + \mu)\sqrt{-1}}, \\ \zeta = c e^{K\alpha - St} e^{i(kv - st + \nu)\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Donc, si l'on représente par

$$\xi, \eta, \zeta,$$

non plus les déplacements symboliques, mais leurs parties réelles ou les déplacements effectifs, on aura

$$(35) \quad \begin{cases} \xi = a e^{K\alpha - St} \cos(kv - st + \lambda), \\ \eta = b e^{K\alpha - St} \cos(kv - st + \mu), \\ \zeta = c e^{K\alpha - St} \cos(kv - st + \nu). \end{cases}$$

Dans ces dernières équations, l'exponentielle népérienne

$$e^{K\alpha - St}$$

est ce que nous appelons le *module* du mouvement simple; l'arc

$$kv - st$$

en est l'*argument*. Les trois facteurs positifs

$$a e^{K\alpha - St}, \quad b e^{K\alpha - St}, \quad c e^{K\alpha - St}$$

sont les *demi-amplitudes* des déplacements mesurés parallèlement aux axes coordonnés; les trois arcs

$$kv - st + \lambda, \quad kv - st + \mu, \quad kv - st + \nu$$

sont les *phases* du mouvement projeté sur ces mêmes axes, et

$$\lambda, \mu, \nu$$

les *paramètres angulaires* qu'il faut ajouter au module pour obtenir les phases. Si d'ailleurs on nomme  $\varpi$  le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à un axe fixe quelconque, et pris avec le signe + ou le signe -, suivant que la molécule se déplace dans un sens ou dans un autre, on tirera des formules (35)

$$(36) \quad \xi = z e^{K\alpha - St} \cos(kv - st + \varpi),$$

pourvu que l'on désigne par

$$z \cos \varpi, \quad z \sin \varpi$$

les projections algébriques sur cet axe de deux longueurs qui offriraient elles-mêmes pour projections algébriques sur les axes coordonnés, la première, les trois produits

$$a \cos \lambda, \quad b \cos \mu, \quad c \cos \nu,$$

et la seconde, les trois produits

$$a \sin \lambda, \quad b \sin \mu, \quad c \sin \nu.$$

Cela posé, le produit

$$z e^{K\alpha - St}$$

représentera la *demi-amplitude* des vibrations mesurées parallèlement à l'axe fixe que l'on considère, tandis que l'arc

$$kv - st + \varpi$$

représentera la *phase* du mouvement simple projeté sur cet axe, et

$$\varpi,$$

le *paramètre angulaire* relatif à ce même axe.

La valeur du déplacement  $\varphi$ , déterminée par la formule (36), s'évanouit lorsqu'on a

$$(37) \quad \cos(kx - st + \varpi) = 0;$$

par conséquent elle s'évanouit, lorsque  $t$  demeure constant, pour des valeurs équidistantes de  $x$  qui forment une progression arithmétique dont la raison est

$$\frac{\pi}{k},$$

et, lorsque  $x$  demeure constant, pour des valeurs équidistantes de  $t$  qui forment une progression arithmétique dont la raison est

$$\frac{\pi}{s}.$$

D'ailleurs, le cosinus de la phase

$$kx - st + \varpi$$

reprendra la même valeur numérique avec le même signe, ou avec un signe contraire, suivant que l'on fera varier la distance  $x$  d'un multiple pair ou impair de  $\frac{\pi}{k}$ , ou bien encore le temps  $t$  d'un multiple pair ou impair de  $\frac{\pi}{s}$ . Cela posé, si l'on prend

$$(38) \quad l = \frac{2\pi}{k},$$

$$(39) \quad T = \frac{2\pi}{s},$$

on conclura de la formule (36) ou (37) que, dans un mouvement simple, le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à un axe fixe, s'évanouit : 1° à un instant donné, pour toutes les molécules situées dans des plans parallèles les uns aux autres, et au second plan inva-

riable, qui divisent le système en tranches dont l'épaisseur est  $\frac{1}{2}l$ ; 2° pour une molécule donnée, à des instants séparés les uns des autres par des intervalles égaux à  $\frac{1}{2}T$ . Ces tranches et ces intervalles seront de *première espèce*, ou de *seconde espèce*, suivant qu'ils répondront à des valeurs positives ou négatives de  $\cos(kx - st + \varpi)$ , et du déplacement  $\varphi$ . Enfin deux tranches consécutives composeront une *onde plane* dont l'épaisseur  $l$  sera ce qu'on nomme la *longueur d'une ondulation*; et deux intervalles de temps consécutifs, pendant lesquels l'extrémité de l'arc  $kx - st + \varpi$  parcourra la circonférence entière, composeront la *durée T d'une vibration moléculaire*. Quant aux plans qui termineront les différentes tranches et ondes, ils répondront évidemment, pour une valeur donnée du temps  $t$ , aux diverses valeurs de  $x$  qui vérifieront la formule (37).

Si l'on fait croître, dans la formule (37),  $t$  de  $\Delta t$  et  $x$  de  $\Delta x$ , cette formule continuera d'être vérifiée, pourvu que l'on suppose

$$(40) \quad k \Delta x - s \Delta t = 0,$$

par conséquent

$$(41) \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \Omega,$$

la valeur de  $\Omega$  étant

$$(42) \quad \Omega = \frac{s}{k}.$$

Il suit de cette observation que, le temps venant à croître, les ondes planes, comme les plans qui les terminent, se déplaceront, dans le système de molécules donné, avec une vitesse de propagation dont la valeur  $\Omega$  sera celle que fournit la formule (42).

Considérons maintenant en particulier le module du mouvement simple, ou l'exponentielle

$$e^{kx - st},$$

qui entre comme facteur dans l'amplitude relative à chaque axe. On



ne pourra supposer que le logarithme népérien de ce module, c'est-à-dire l'exposant

$$K\alpha - St,$$

croît indéfiniment avec le temps, puisqu'il s'agit de mouvements infiniment petits; et par conséquent le coefficient S dans cet exposant devra être ou nul, ou positif. Dans le premier cas, l'amplitude des vibrations de chaque molécule demeurera constante, et le mouvement simple sera *durable* ou *persistant*. Dans le second cas, au contraire, cette amplitude décroîtra indéfiniment, et, pour des valeurs croissantes de  $t$ , le mouvement *s'éteindra* de plus en plus.

Quant au coefficient K, par lequel se trouve multipliée, dans le logarithme népérien du module, la distance  $a$  d'une molécule au troisième plan invariable, il pourra lui-même se réduire à zéro, et, s'il n'est pas nul, on pourra le supposer négatif, pourvu que l'on choisisse convenablement le sens suivant lequel se compteront les valeurs positives de  $a$ . Alors, pour des valeurs positives et croissantes de  $a$ , on verra encore le module du mouvement simple décroître indéfiniment; ce qui montre que, pour un instant donné, le mouvement deviendra de plus en plus insensible, à mesure que l'on s'éloignera davantage, dans un certain sens, du troisième plan invariable.

Dans le cas particulier où l'on aurait à la fois

$$(43) \quad K = 0, \quad S = 0,$$

les formules (35), (36) se réduiraient à

$$(44) \quad \begin{cases} \xi = a \cos(kv - st + \lambda), \\ \eta = b \cos(kv - st + \mu), \\ \zeta = c \cos(kv - st + \nu), \end{cases}$$

$$(45) \quad \varsigma = x \cos(kv - st + \varpi).$$

Alors toutes les molécules décriraient évidemment des courbes pareilles les unes aux autres.

Des deux dernières formules (35), on tire

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{\eta}{b} \cos \nu - \frac{\zeta}{c} \cos \mu = e^{K\alpha - St} \sin(\nu - \mu) \sin(kv - st), \\ \frac{\eta}{b} \sin \nu - \frac{\zeta}{c} \sin \mu = e^{K\alpha - St} \sin(\nu - \mu) \cos(kv - st), \end{cases}$$

et

$$(47) \quad \eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} = bc e^{2K\alpha - 2St} \sin(\nu - \mu).$$

Si l'on combine par voie d'addition les formules (46); après avoir élevé au carré chacun de leurs membres, on trouvera

$$(48) \quad \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 - 2\frac{\eta}{b}\frac{\zeta}{c} \cos(\nu - \mu) + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = e^{2K\alpha - 2St} \sin^2(\nu - \mu),$$

et l'on conclura de cette dernière équation, jointe à la formule (25), que, dans un mouvement simple, la courbe décrite par chaque molécule est généralement une ellipse, les trois projections de cette ellipse sur les trois plans coordonnés étant représentées par trois formules semblables à l'équation (48). Quant à l'équation (47), elle a pour premier membre le double de la dérivée qu'on obtient en différentiant par rapport au temps l'aire décrite, sur le plan des  $y, z$ , par la projection du rayon vecteur mené du point  $(x, y, z)$  à la molécule  $m$ . Donc cette aire et celle que décrit le rayon vecteur même, supposées nulles à l'instant où l'on compte  $t = 0$ , croîtront avec le temps  $t$  proportionnellement à l'intégrale

$$(49) \quad \int_0^t e^{-2St} dt = \frac{1 - e^{-2St}}{2S},$$

qui se réduit simplement à  $t$ , dans le cas particulier où l'on a

$$S = 0.$$

La valeur générale de l'aire décrite par le rayon vecteur, ayant pour carré la somme des carrés des projections orthogonales de cette aire, sera évidemment

$$(50) \quad \frac{1}{4S} e^{2K\alpha} (1 - e^{-2St}) \sqrt{b^2 c^2 \sin^2(\nu - \mu) + c^2 a^2 \sin^2(\lambda - \nu) + a^2 b^2 \sin^2(\mu - \lambda)}.$$



Ajoutons que, dans le cas où les conditions (43) sont remplies, l'équation (48) se réduit à la formule connue

$$(51) \quad \left(\frac{x}{b}\right)^2 - 2 \frac{x}{b} \frac{z}{c} \cos(\nu - \mu) + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \sin^2(\nu - \mu).$$

(Voir le *Traité de la lumière* de Herschel, t. I, p. 392.)

§ IV. — Sur le passage des formules particulières qui concernent un mouvement simple aux équations générales des mouvements infiniment petits d'un système de molécules.

Lorsqu'en développant par le théorème de Taylor les différences

$$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$$

on aura transformé en équations aux différences partielles les équations (3) du § II, qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules, on en déduira sans peine les formules (2) du § III, c'est-à-dire les relations qui existent, dans un mouvement simple représenté par les formules (1) du même paragraphe, entre les constantes

$$u, v, w, s, A, B, C.$$

Pour y parvenir, il suffira de remplacer, dans les équations aux différences partielles dont il s'agit, les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

et leurs dérivées partielles des divers ordres par les facteurs

$$A, B, C$$

et par les produits qu'on obtient, quand on multiplie ces facteurs par des puissances de  $u$ , de  $v$ , de  $w$ , de  $-s$ , dont les degrés soient respectivement égaux au nombre des différentiations effectuées par rapport à  $x$ , par rapport à  $y$ , par rapport à  $z$ , par rapport à  $t$ ; donc si, en adoptant une notation dont nous nous sommes servi plus d'une fois, on emploie, dans les équations aux différences partielles, les caracté-

ristiques

$$D_x, D_x^2, D_x^3, \dots, D_y, D_y^2, D_y^3, \dots, D_z, D_z^2, D_z^3, \dots, D_t, D_t^2, \dots$$

pour indiquer les dérivées des divers ordres d'une fonction de  $x, y, z, t$  différenciée une ou plusieurs fois de suite par rapport à  $x, y, z$  ou à  $t$ , il suffira de remplacer ces caractéristiques par les puissances

$$u, u^2, u^3, \dots, v, v^2, v^3, \dots, w, w^2, w^3, \dots, -s, s^2, \dots$$

et de remplacer en même temps les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

par les facteurs

$$A, B, C.$$

Réciproquement, pour revenir des formules (2) du § III aux équations générales des mouvements infiniment petits du système de molécules que l'on considère, il suffira de remplacer, dans ces formules, les facteurs

$$A, B, C$$

par les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta,$$

et les puissances

$$u, u^2, u^3, \dots, v, v^2, v^3, \dots, w, w^2, w^3, \dots, -s, s^2, \dots$$

par les caractéristiques

$$D_x, D_x^2, D_x^3, \dots, D_y, D_y^2, D_y^3, \dots, D_z, D_z^2, D_z^3, \dots, D_t, D_t^2, \dots$$

que l'on devra supposer appliquées aux variables principales

$$\xi, \eta, \zeta.$$

Il y a plus : comme, en supposant la forme de la fonction  $F(u, v, w, s)$  déterminée par l'équation (13) du § II, il suffira d'éliminer deux des trois facteurs  $A, B, C$  entre les formules (2) du même paragraphe, pour obtenir les suivantes

$$(1) \quad F(u, v, w, s)A = 0, \quad F(u, v, w, s)B = 0, \quad F(u, v, w, s)C = 0;$$

les équations que l'on tirera de ces dernières, en opérant comme on



vient de le dire, subsisteront encore dans le cas où les sommes (4), (5) du § II offriraient des valeurs constantes; et ces équations, qui pourront s'écrire comme il suit :

$$(2) \quad F(D_x, D_y, D_z, D_t)\xi = 0, \quad F(D_x, D_y, D_z, D_t)\eta = 0, \quad F(D_x, D_y, D_z, D_t)\zeta = 0,$$

attendu que l'on a  $F(u, v, w, s) = F(u, v, w, -s)$ , seront celles que l'on obtiendrait alors en éliminant deux des trois variables principales entre les formules (3) du § II.

*Nota.* — Lorsque, après avoir développé, dans les formules du troisième paragraphe, les quantités

$$\xi, \eta, \zeta, \eta, \zeta, \eta$$

suivant les puissances ascendantes de  $u, v, w$ , on néglige dans les développements obtenus les termes d'un degré supérieur au second, on peut, de ces mêmes formules, à l'aide de la méthode exposée dans un précédent Mémoire, déduire aisément les équations de condition relatives à la surface de séparation de deux systèmes de molécules. Si l'on suppose que ces deux systèmes soient deux portions du fluide étheré que renferment deux corps différents, les équations de condition dont nous venons de parler fourniront les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, exprimées par quatre formules qui montreront comment l'anomalie et l'azimut varient, quand on passe du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté. Enfin, si le corps que termine la surface réfléchissante est transparent, trois des quatre formules coïncideront avec trois formules de Fresnel, et la quatrième se réduira elle-même à la quatrième formule de Fresnel, si le corps transparent est du nombre de ceux qui polarisent complètement la lumière. Alors une certaine constante comprise dans les formules aura pour valeur l'unité.

Les mêmes principes, appliqués aux corps opaques, fournissent des résultats très différents de ceux qui sont relatifs aux corps transparents. Ainsi, en particulier, tandis que la lumière réfléchie sous l'incidence perpendiculaire est généralement très faible, pour un corps transparent, elle devient souvent considérable pour un corps opaque. Si l'on néglige les termes relatifs à la dispersion, si d'ailleurs l'on réduit à l'unité la constante qui a effectivement cette valeur, dans un corps transparent et qui polarise complètement la lumière, les formules que l'on obtiendra pour les corps opaques seront précisément celles que j'ai présentées à l'Académie dans la séance du 4 février dernier. Suivant ces formules, la lumière réfléchie sous l'incidence perpendiculaire par certains

métaux pourrait égaler ou même surpasser la moitié de la lumière incidente. Elle en serait plus de la moitié pour l'acier parfaitement poli et plus des huit dixièmes pour l'argent. Elle varierait ensuite assez lentement à partir de l'incidence perpendiculaire; et sur l'argent, la variation de la lumière réfléchie ne serait pas de  $\frac{1}{100}$ , quand on passerait de l'incidence perpendiculaire à l'incidence principale, mesurée par un angle de  $73^\circ$ . Au reste, je reviendrai dans un autre article sur les formules dont il s'agit. Les physiciens seront curieux sans doute d'en comparer les résultats avec les expériences annoncées par M. Arago.

38.

C. R., t. VIII, p. 589 (22 avril 1839). — Suite.

Si maintenant l'on pose, pour abrégér,

$$(3) \quad * = A\xi + B\eta + C\zeta,$$

A, B, C désignant trois constantes réelles ou imaginaires, on tirera des formules (2)

$$(4) \quad F(D_x, D_y, D_z, D_t)* = 0.$$

Si les constantes A, B, C sont réelles et représentent les cosinus des angles formés par un axe fixe avec les demi-axes des coordonnées positives,  $x$  représentera le déplacement d'une molécule mesuré parallèlement à l'axe fixe. Donc un semblable déplacement sera la variable principale d'une équation aux différences partielles qui conservera la même forme quel que soit l'axe fixe que l'on considère.

Au reste, si, pour revenir des formules (2) du § III aux équations générales des mouvements infiniment petits d'un système de molécules, on remplace dans les formules dont il s'agit

$$u \text{ par } D_x, \quad v \text{ par } D_y, \quad w \text{ par } D_z;$$

alors, en désignant par

$$\nabla_{x,x}, \quad \nabla_{y,y}, \quad \nabla_{z,z}, \quad \nabla_{y,z} = \nabla_{z,y}, \quad \nabla_{z,x} = \nabla_{x,z}, \quad \nabla_{x,y} = \nabla_{y,x}$$

des fonctions de

$$D_x, D_y, D_z$$

déterminées par les formules

$$(5) \quad \nabla_{x,x} = S \left[ m \frac{f(r) + f(r) \cos^2 \alpha}{r} (e^{r(\cos \alpha D_x + \cos \beta D_y + \cos \gamma D_z)} - 1) \right], \quad \nabla_{y,y} = \dots, \quad \nabla_{z,z} = \dots;$$

$$(6) \quad \nabla_{y,z} = S \left[ m \frac{f(r) \cos \beta \cos \gamma}{r} (e^{r(\cos \alpha D_x + \cos \beta D_y + \cos \gamma D_z)} - 1) \right], \quad \nabla_{z,x} = \dots, \quad \nabla_{x,y} = \dots;$$

on verra ces équations générales se réduire à

$$(7) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = \nabla_{x,x} \xi + \nabla_{x,y} \eta + \nabla_{x,z} \zeta, \\ D_y^2 \eta = \nabla_{y,x} \xi + \nabla_{y,y} \eta + \nabla_{y,z} \zeta, \\ D_z^2 \zeta = \nabla_{z,x} \xi + \nabla_{z,y} \eta + \nabla_{z,z} \zeta. \end{cases}$$

Chacune des équations (7) étant du second ordre par rapport à  $t$ , pour déduire de ces mêmes équations les valeurs générales des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta,$$

il sera nécessaire que l'on connaisse les valeurs initiales de ces variables et de leurs dérivées du premier ordre prises par rapport à  $t$ . Si l'on désigne par

$$\varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z), \quad \Phi(x, y, z), \quad X(x, y, z), \quad \Psi(x, y, z)$$

ces valeurs initiales, le problème consistera généralement à intégrer les formules (7) de manière que l'on ait, pour  $t = 0$ ,

$$(8) \quad \xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \chi(x, y, z), \quad \zeta = \psi(x, y, z),$$

$$(9) \quad \frac{d\xi}{dt} = \Phi(x, y, z), \quad \frac{d\eta}{dt} = X(x, y, z), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \Psi(x, y, z).$$

§ V. — *Mouvements dont les équations renferment seulement deux variables indépendantes.*

Soient

$$a, b, c$$

les cosinus des angles que forme avec les demi-axes des  $x, y$  et  $z$

positives un plan *invariable* passant par l'origine des coordonnées, et

$$(1) \quad x = ax + by + cz$$

la distance d'un point quelconque  $x, y, z$  à ce même plan. Supposons d'ailleurs que, dans un système homogène de molécules mises en vibration, les déplacements et les vitesses ne dépendent, au premier instant, que de la distance  $x$  au plan invariable. Les conditions (8), (9) du paragraphe précédent se réduiront à des équations de la forme

$$(2) \quad \xi = \varphi(x), \quad \eta = \chi(x), \quad \zeta = \psi(x),$$

$$(3) \quad \frac{d\xi}{dt} = \Phi(x), \quad \frac{d\eta}{dt} = X(x), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \Psi(x),$$

qui devront être vérifiées pour  $t = 0$ , et les valeurs générales des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

dépendront uniquement de  $x$  et de  $t$ . Car, en supposant  $\xi, \eta, \zeta$  fonctions des seules variables indépendantes  $x$  et  $t$ , on aura, en vertu de l'équation (1),

$$(4) \quad D_x = aD_x, \quad D_y = bD_x, \quad D_z = cD_x;$$

par conséquent les formules (5), (6) du paragraphe précédent se réduiront à

$$(5) \quad \nabla_{x,x} = S \left[ m \frac{f(r) + f(r) \cos^2 \alpha}{r} (e^{r \cos \delta D_x} - 1) \right], \quad \nabla_{y,y} = \dots, \quad \nabla_{z,z} = \dots,$$

$$(6) \quad \nabla_{y,z} = S \left[ m \frac{f(r) \cos \beta \cos \gamma}{r} (e^{r \cos \delta D_x} - 1) \right], \quad \nabla_{z,x} = \dots, \quad \nabla_{x,y} = \dots,$$

la valeur de  $\cos \delta$  étant

$$(7) \quad \cos \delta = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma.$$

Or, comme en vertu des formules (5), (6), les équations (7) du § IV, c'est-à-dire les équations qui représentent les mouvements infiniment petits du système, renfermeront seulement, avec les variables principales  $\xi, \eta, \zeta$ , les deux variables indépendantes  $x$  et  $t$ , on pourra les





intégrer de manière que les conditions (2), (3) se trouvent vérifiées pour  $t = 0$ , et ainsi l'on obtiendra les valeurs générales de  $\xi, \eta, \zeta$  qui dépendront seulement de  $\tau$  et de  $t$ .

Ce n'est pas tout. Si les valeurs initiales de  $\xi, \eta, \zeta$  et de leurs dérivées sont proportionnelles à une seule exponentielle népérienne de la forme

$$e^{k\tau},$$

de sorte qu'on doive avoir, pour  $t = 0$ ,

$$(8) \quad \xi = \lambda e^{k\tau}, \quad \eta = \mu e^{k\tau}, \quad \zeta = \nu e^{k\tau},$$

$$(9) \quad \frac{d\xi}{dt} = \omega e^{k\tau}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \zeta e^{k\tau}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \bar{\zeta} e^{k\tau},$$

le coefficient  $k$  pouvant être réel ou imaginaire, les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

considérées comme fonctions de  $\tau$ , devront elles-mêmes être supposées proportionnelles à l'exponentielle dont il s'agit. Car on aura, dans cette supposition,

$$(10) \quad D_\tau \xi = h \xi, \quad D_\tau \eta = k \eta, \quad D_\tau \zeta = l \zeta,$$

ce qui réduira les expressions symboliques

$$\nabla_{x,0} \quad \nabla_{y,0} \quad \nabla_{z,0} \quad \nabla_{y,0} \quad \nabla_{z,0} \quad \nabla_{x,0}$$

déterminées par les formules (5), (6), aux coefficients

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R},$$

déterminés par les équations

$$(11) \quad \mathcal{L} = S \left[ m \frac{f(r) + f(r) \cos^2 \alpha}{r} (e^{kr \cos \beta} - 1) \right], \quad \mathcal{M} = \dots, \quad \mathcal{N} = \dots,$$

$$(12) \quad \mathcal{P} = S \left[ m \frac{f(r) \cos \beta \cos \gamma}{r} (e^{kr \cos \beta} - 1) \right], \quad \mathcal{Q} = \dots, \quad \mathcal{R} = \dots,$$

et, par suite, les équations (7) du § IV deviendront

$$(13) \quad \begin{cases} D_\tau^2 \xi = \mathcal{L} \xi + \mathcal{M} \eta + \mathcal{N} \zeta, \\ D_\tau^2 \eta = \mathcal{M} \xi + \mathcal{N} \eta + \mathcal{P} \zeta, \\ D_\tau^2 \zeta = \mathcal{N} \xi + \mathcal{P} \eta + \mathcal{R} \zeta. \end{cases}$$

Or, si, en supposant constants les coefficients  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ , on intègre les équations (13) de manière à remplir les conditions (8), (9), on obtiendra évidemment des valeurs générales de  $\xi, \eta, \zeta$  qui, considérées comme fonctions de  $\tau$ , seront proportionnelles à l'exponentielle

$$e^{s\tau}.$$

Si l'on pose, pour abrégér,

$$(14) \quad * = A\xi + B\eta + C\zeta,$$

A, B, C désignant trois coefficients réels ou imaginaires, et si d'ailleurs on choisit ces coefficients et la constante  $s$  de manière à vérifier les équations (2) du § III, savoir :

$$(15) \quad \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)A + \mathcal{M}B + \mathcal{N}C = 0, \\ \mathcal{M}A + (\mathcal{N} - s^2)B + \mathcal{P}C = 0, \\ \mathcal{N}A + \mathcal{P}B + (\mathcal{R} - s^2)C = 0, \end{cases}$$

on tirera des formules (13)

$$(16) \quad D_\tau^2 * = s^2 *.$$

Soient maintenant

$$\varpi(\tau), \quad \Pi(\tau)$$

les valeurs initiales de

$$*, \quad \frac{d*}{dt},$$

dans le cas où les valeurs initiales de  $\xi, \eta, \zeta$  et de leurs dérivées sont déterminées par les formules (8), (9). On aura

$$(17) \quad \varpi(\tau) = (A\lambda + B\mu + C\nu)e^{k\tau}, \quad \Pi(\tau) = (A\omega + B\zeta + C\bar{\zeta})e^{k\tau},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18) \quad \varpi(\tau) = \mathcal{O}e^{k\tau}, \quad \Pi(\tau) = \mathcal{O}'e^{k\tau},$$



les valeurs de  $v$ ,  $\varphi$  étant

$$(19) \quad v = A\alpha + B\beta + C\varnothing, \quad \varphi = A\omega + B\upsilon + C\bar{\sigma},$$

et l'on tirera de l'équation (16)

$$(20) \quad s = v \frac{e^{kx+st} + e^{kx-st}}{2} + \int_0^t \varphi \frac{e^{kx+st} + e^{kx-st}}{2} dt,$$

par conséquent

$$(21) \quad s = v \frac{e^{kx+st} + e^{kx-st}}{2} + \int_0^t \varphi \frac{e^{kx+st} - e^{kx-st}}{2s} dt.$$

D'ailleurs la formule (21) pourra encore s'écrire comme il suit

$$(22) \quad \begin{cases} A\xi + B\eta + C\zeta = (A\alpha + B\beta + C\varnothing) \frac{e^{kx+st} + e^{kx-st}}{2} \\ \quad + (A\omega + B\upsilon + C\bar{\sigma}) \frac{e^{kx+st} - e^{kx-st}}{2s}. \end{cases}$$

Il est bon d'observer que les formules (15) détermineront généralement  $s^2$  et les rapports

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{C}{A}$$

en fonction de  $k$ , la valeur de  $s^2$  étant fournie par une équation du troisième degré

$$(23) \quad F(k, s) = 0,$$

dans laquelle on aura

$$(24) \quad \begin{cases} F(k, s) = (\mathcal{L} - s^2)(\mathcal{R} - s^2)(\mathcal{T} - s^2) - \mathcal{Q}^2(\mathcal{L} - s^2) \\ \quad - \mathcal{Q}^2(\mathcal{R} - s^2) - \mathcal{R}^2(\mathcal{T} - s^2) + 2\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{L}. \end{cases}$$

Or de l'équation (23), jointe à deux des équations (15), ou, ce qui revient au même, aux formules (11) ou (15) du § II, on déduira en général trois systèmes de valeurs de

$$s^2, \quad \frac{B}{A}, \quad \frac{C}{A};$$

et comme, pour chacun de ces trois systèmes, la formule (22) établira

une relation linéaire entre les variables principales

$$\xi, \eta, \zeta.$$

on obtiendra en tout, entre ces mêmes variables, trois équations du premier degré qui suffiront pour les déterminer complètement. Les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta$$

ainsi déterminées renfermeront six espèces de termes qui seront respectivement proportionnels à six exponentielles de la forme

$$e^{kx+st}, \quad e^{kx-st}, \quad e^{kx+s^2t}, \quad e^{kx-s^2t}, \quad e^{kx+s^2t}, \quad e^{kx-s^2t},$$

si l'on désigne par

$$s^2, \quad s'^2, \quad s''^2$$

les trois valeurs de  $s^2$  propres à vérifier l'équation (23); et elles représenteront en conséquence les sommes des six valeurs que peuvent acquérir les déplacements symboliques des molécules, correspondants aux trois axes coordonnés, dans six mouvements simples superposés l'un à l'autre (voir le § III). Les plans des ondes propagées dans ces mouvements simples seront tous parallèles au plan invariable représenté par l'équation

$$(25) \quad x = 0$$

ou

$$(26) \quad ax + by + cz = 0;$$

et, parmi les six mouvements simples dont il s'agit, ceux qui correspondront à une même valeur de  $s^2$ , par conséquent à deux valeurs de  $s$  égales entre elles au signe près, offriront des ondes planes qui se propageront en sens contraires, mais avec la même vitesse, cette vitesse étant le rapport numérique entre les coefficients de  $\sqrt{-1}$  dans la valeur de  $s$  et dans la valeur de  $k$ .

Si, à l'aide de la formule (21) ou (22), on voulait calculer, non plus



les valeurs totales des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta,$$

mais seulement les parties de ces valeurs qui répondent à l'une des trois valeurs de  $s^2$ , il faudrait évidemment supposer l'expression

$$u = A\xi + B\eta + C\zeta$$

déterminée par l'équation (21) ou (22) pour cette même valeur de  $s^2$ , et réduite à zéro pour les deux autres.

Remarquons encore que si l'on pose

$$(27) \quad \frac{s}{k} = \omega,$$

l'équation (21) pourra, en vertu des formules (18), être réduite à

$$(28) \quad u = \frac{\varpi(v + \omega t) + \varpi(v - \omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\Pi(v + \omega t) + \Pi(v - \omega t)}{2} dt.$$

On arrive à la même conclusion en observant que, dans le cas où les variables

$$\xi, \eta, \zeta, u,$$

considérées comme fonctions de  $v$ , sont proportionnelles à l'exponentielle

$$e^{kv},$$

on a identiquement

$$(29) \quad D_v^2 u = k^2 u,$$

de sorte qu'alors on peut écrire l'équation (16) sous la forme

$$(30) \quad D_t^2 u = \omega^2 D_v^2 u$$

ou

$$(31) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}.$$

Or l'intégrale générale de l'équation (31) est précisément la formule (28).

Quand les mouvements simples, propagés dans le système de molécules

que l'on considère, sont du nombre de ceux qui se propagent sans s'affaiblir, les valeurs de  $k$  et de  $s$  n'offrent pas de parties réelles. Alors la valeur de  $\omega$  que fournira l'équation (27), et qui sera positive si l'on choisit convenablement le signe de  $s$ , viendra se confondre avec la vitesse de propagation  $\Omega$  des ondes planes, en sorte que la formule (28) donnera

$$(32) \quad u = \frac{\varpi(v + \Omega t) + \varpi(v - \Omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\Pi(v + \Omega t) + \Pi(v - \Omega t)}{2} dt.$$

Si d'ailleurs, pour chaque valeur de  $s^2$ , les valeurs des rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A},$$

tirées des formules (15), sont réelles, on pourra prendre, pour

$$A, B, C,$$

des quantités réelles assujetties à vérifier la condition

$$(33) \quad A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

et les trois valeurs de  $u$ , relatives aux trois valeurs de  $s^2$ , représenteront trois déplacements symboliques d'une même molécule, les trois déplacements effectifs correspondants étant mesurés parallèlement à trois axes fixes qui se couperont à angles droits. (Voir le Mémoire *Sur la dispersion de la lumière.*)

Lorsque les valeurs initiales des variables principales

$$\xi, \eta, \zeta$$

et de leurs dérivées sont fonctions de  $v$  sans être proportionnelles à une seule exponentielle de la forme

$$e^{kv},$$

on peut du moins considérer chacune de ces valeurs initiales comme formée par l'addition d'une infinité de termes proportionnels à de semblables exponentielles. Ainsi, par exemple, si la valeur initiale de  $\xi$  est donnée par la première des équations (2), elle pourra, en vertu



d'un théorème connu (voir les *Exercices de Mathématiques*), être présentée sous la forme

$$(34) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(x-\rho)\sqrt{-1}} \varphi(\rho) d\rho d\nu.$$

Si, au premier instant, il n'y avait de déplacements et de mouvements produits qu'entre les limites

$$(35) \quad \nu = \nu_0, \quad \nu = \nu_1,$$

les fonctions  $\varphi(\nu)$ ,  $\chi(\nu)$ , ... devraient être supposées nulles hors de ces limites, ce qui permettrait de réduire l'intégrale (34) à la suivante

$$(36) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\nu_0} \int_{-\infty}^{\nu_1} e^{\nu(x-\rho)\sqrt{-1}} \varphi(\rho) d\nu d\rho.$$

Des remarques précédentes, jointes à ce qui a été dit plus haut, il résulte que, dans le cas où les valeurs initiales des variables principales et de leurs dérivées sont fonctions d'une seule coordonnée, propre à représenter la distance  $\nu$  d'un point quelconque  $(x, y, z)$  à un plan invariable, les vibrations des molécules, au bout d'un temps quelconque  $t$ , peuvent être censées résulter de la superposition d'une infinité d'ondes planes renfermées dans des plans parallèles au plan invariable dont il s'agit.

Il nous reste à déduire des formules qui précèdent le mode de propagation de ces ondes, pour le cas où on les suppose primitivement renfermées dans une tranche très mince ou dans une très petite portion de l'espace. Tel sera l'objet des paragraphes suivants.

## 39.

C. R., t. VIII, p. 659 (29 avril 1839). — Suite.

Soient maintenant

$$A', B', C'; \quad A'', B'', C''; \quad A''', B''', C'''$$

trois systèmes de valeurs de

$$A, B, C,$$

qui correspondent aux trois valeurs de  $s^2$  représentées par

$$s'^2, s''^2, s'''^2;$$

et nommons

$$s', s'', s'''$$

les valeurs correspondantes de  $z$ . On aura

$$(34) \quad \begin{cases} s' = A' \zeta + B' \eta + C' \xi, \\ s'' = A'' \zeta + B'' \eta + C'' \xi, \\ s''' = A''' \zeta + B''' \eta + C''' \xi. \end{cases}$$

Supposons d'ailleurs que, ces dernières équations étant résolues par rapport à  $\zeta, \eta, \xi$ , on en tire

$$(35) \quad \begin{cases} \zeta = a' s' + a'' s'' + a''' s''', \\ \eta = b' s' + b'' s'' + b''' s''', \\ \xi = c' s' + c'' s'' + c''' s'''. \end{cases}$$

Comme on devra obtenir des équations identiques, en substituant dans les formules (34) les valeurs de  $\zeta, \eta, \xi$  fournies par les équations (35), ou, dans les formules (35), les valeurs de  $s', s'', s'''$  fournies par les équations (34), on aura non seulement

$$(36) \quad \begin{cases} a' A' + b' B' + c' C' = 1, & a'' A' + b'' B' + c'' C' = 0, & a''' A' + b''' B' + c''' C' = 0, \\ a' A'' + b' B'' + c' C'' = 0, & a'' A'' + b'' B'' + c'' C'' = 1, & a''' A'' + b''' B'' + c''' C'' = 0, \\ a' A''' + b' B''' + c' C''' = 0, & a'' A''' + b'' B''' + c'' C''' = 0, & a''' A''' + b''' B''' + c''' C''' = 1. \end{cases}$$



mais encore

$$(37) \begin{cases} a'A' + a''A'' + a'''A''' = 1, & b'A' + b''A'' + b'''A''' = 0, & c'A' + c''A'' + c'''A''' = 0, \\ a'B' + a''B'' + a'''B''' = 0, & b'B' + b''B'' + b'''B''' = 1, & c'B' + c''B'' + c'''B''' = 0, \\ a'C' + a''C'' + a'''C''' = 0, & b'C' + b''C'' + b'''C''' = 0, & c'C' + c''C'' + c'''C''' = 1, \end{cases}$$

et, en vertu des formules (36), on pourra regarder

$$a', b', c'; \quad a'', b'', c''; \quad a''', b''', c'''$$

comme trois systèmes de valeurs des constantes

$$a, b, c$$

assujetties à vérifier l'équation

$$(38) \quad aA + bB + cC = 1$$

avec deux des formules

$$(39) \quad \begin{cases} aA' + bB' + cC' = 0, \\ aA'' + bB'' + cC'' = 0, \\ aA''' + bB''' + cC''' = 0, \end{cases}$$

savoir, avec celles de ces formules qui ne contredisent pas l'équation (38).

Ainsi, en particulier,

$$a', b', c'$$

seront les valeurs de

$$a, b, c$$

propres à vérifier l'équation (38) avec les deux dernières des formules (39), desquelles on tirera

$$(40) \quad \frac{a}{B''C'' - B'''C'''} = \frac{b}{C''A'' - C'''A'''} = \frac{c}{A''B'' - A'''B'''};$$

de plus, comme en vertu des équations (15) ou, ce qui revient au même, en vertu de la formule (15) du § III, les différences

$$B''C'' - B'''C''', \quad C''A'' - C'''A''', \quad A''B'' - A'''B'''$$

seront en général, et lorsque  $s''^2$  différera de  $s^2$ , respectivement pro-

portionnelles aux produits des différences

$$\begin{aligned} & \left( \partial\pi - \frac{\partial\varphi}{\partial} \right) - \left( \partial\tau - \frac{\partial\varrho}{\partial} \right), \\ & \left( \partial\tau - \frac{\partial\varrho}{\partial} \right) - \left( \varrho - \frac{\partial\pi}{\partial} \right), \\ & \left( \varrho - \frac{\partial\pi}{\partial} \right) - \left( \partial\pi - \frac{\partial\varphi}{\partial} \right) \end{aligned}$$

par les coefficients

$$\varrho, \varrho', \pi$$

et par les expressions

$$\begin{aligned} & \left( s''^2 - \varrho + \frac{\partial\pi}{\partial} \right) \left( s''^2 - \varrho + \frac{\partial\pi}{\partial} \right), \\ & \left( s''^2 - \partial\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial} \right) \left( s''^2 - \partial\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial} \right), \\ & \left( s''^2 - \partial\tau + \frac{\partial\varrho}{\partial} \right) \left( s''^2 - \partial\tau + \frac{\partial\varrho}{\partial} \right), \end{aligned}$$

il est clair que, si l'on pose, pour abrégér,

$$(41) \quad \begin{cases} p = \pi \left( s''^2 - \varrho + \frac{\partial\pi}{\partial} \right) \left( s''^2 - \varrho + \frac{\partial\pi}{\partial} \right) \left( s''^2 - \varrho + \frac{\partial\pi}{\partial} \right), \\ q = \varrho \left( s''^2 - \partial\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial} \right) \left( s''^2 - \partial\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial} \right) \left( s''^2 - \partial\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial} \right), \\ r = \pi \left( s''^2 - \partial\tau + \frac{\partial\varrho}{\partial} \right) \left( s''^2 - \partial\tau + \frac{\partial\varrho}{\partial} \right) \left( s''^2 - \partial\tau + \frac{\partial\varrho}{\partial} \right), \end{cases}$$

on tirera généralement de la formule (40), jointe à l'équation (38),

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\pi \left( \partial\pi - \frac{\partial\varphi}{\partial} \right) - \left( \partial\tau - \frac{\partial\varrho}{\partial} \right)} = \frac{b}{\left( \partial\tau - \frac{\partial\varrho}{\partial} \right) - \left( \varrho - \frac{\partial\pi}{\partial} \right)} = \frac{c}{\left( \varrho - \frac{\partial\pi}{\partial} \right) - \left( \partial\pi - \frac{\partial\varphi}{\partial} \right)} \\ & \frac{a}{s^2 - \varrho + \frac{\partial\pi}{\partial}} = \frac{b}{s^2 - \partial\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial}} = \frac{c}{s^2 - \partial\tau + \frac{\partial\varrho}{\partial}} \\ & \frac{a p}{s^2 - \varrho + \frac{\partial\pi}{\partial}} + \frac{b q}{s^2 - \partial\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial}} + \frac{c r}{s^2 - \partial\tau + \frac{\partial\varrho}{\partial}} \end{aligned}$$



Enfin, comme en vertu des formules (41),  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{R}$  seront des fonctions entières et symétriques des racines

$$s'^2, s''^2, s'''^2$$

de l'équation (23), par conséquent, des fonctions rationnelles des coefficients

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R},$$

les valeurs des produits

$$aA, aB, aC; bA, bB, bC; cA, cB, cC,$$

et par suite les valeurs de

$$a\mathfrak{V}, a\mathfrak{V}'; b\mathfrak{V}, b\mathfrak{V}'; c\mathfrak{V}, c\mathfrak{V}.$$

déduites de la formule (42), seront évidemment des fonctions rationnelles de  $s^2$  et des coefficients

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$$

qui dépendent uniquement de la constante  $k$ .

Concevons à présent que, dans les formules (35), on substitue les valeurs de

$$s', s'', s''',$$

que fournit l'équation (20), quand on pose successivement

$$s^2 = s'^2, \quad s^2 = s''^2, \quad s^2 = s'''^2;$$

alors, en désignant par

$$\xi_s, \eta_s, \zeta_s$$

les parties de

$$\xi, \eta, \zeta$$

qui renferment l'exponentielle

$$e^{ks-st},$$

dans laquelle  $s$  représente l'une quelconque des six constantes

$$s', -s', s'', -s'', s''', -s''',$$

on trouvera généralement

$$(43) \quad \begin{cases} \xi = \xi_s + \xi_{-s} + \xi_{s'} + \xi_{-s'} + \xi_{s''} + \xi_{-s''}, \\ \eta = \eta_s + \eta_{-s} + \eta_{s'} + \eta_{-s'} + \eta_{s''} + \eta_{-s''}, \\ \zeta = \zeta_s + \zeta_{-s} + \zeta_{s'} + \zeta_{-s'} + \zeta_{s''} + \zeta_{-s''}, \end{cases}$$

les valeurs de

$$\xi_s, \eta_s, \zeta_s$$

étant, pour chaque valeur de  $s$ , déterminées par la formule

$$(44) \quad \frac{\xi_s}{a} = \frac{\eta_s}{b} = \frac{\zeta_s}{c} = \frac{1}{2} \mathfrak{V} e^{ks-st} + \frac{1}{2} \int_0^t \mathfrak{V}' e^{ks-st} dt,$$

de laquelle on tire

$$(45) \quad \begin{cases} \xi_s = \frac{1}{2} a \left( \mathfrak{V} e^{ks-st} + \int_0^t \mathfrak{V}' e^{ks-st} dt \right), \\ \eta_s = \frac{1}{2} b \left( \mathfrak{V} e^{ks-st} + \int_0^t \mathfrak{V}' e^{ks-st} dt \right), \\ \zeta_s = \frac{1}{2} c \left( \mathfrak{V} e^{ks-st} + \int_0^t \mathfrak{V}' e^{ks-st} dt \right), \end{cases}$$

et par suite

$$(46) \quad \begin{cases} \xi_s + \xi_{-s} = a \left( \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} + \int_0^t \mathfrak{V}' \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} dt \right), \\ \eta_s + \eta_{-s} = b \left( \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} + \int_0^t \mathfrak{V}' \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} dt \right), \\ \zeta_s + \zeta_{-s} = c \left( \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} + \int_0^t \mathfrak{V}' \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} dt \right), \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(47) \quad \begin{cases} \xi_s + \xi_{-s} = a \left( \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} + \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} - e^{ks-st}}{2s} \right), \\ \eta_s + \eta_{-s} = b \left( \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} + \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} - e^{ks-st}}{2s} \right), \\ \zeta_s + \zeta_{-s} = c \left( \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} + e^{ks-st}}{2} + \mathfrak{V} \frac{e^{ks+st} - e^{ks-st}}{2s} \right). \end{cases}$$



§ VI. — Sur le mode de propagation des ondes planes.

Parmi les mouvements infiniment petits que peut offrir un système homogène de molécules, on doit surtout distinguer ceux dans lesquels les valeurs initiales des déplacements symboliques

$$\xi, \eta, \zeta$$

dépendent uniquement de la distance  $x$  à un plan invariable et doivent satisfaire aux conditions (8) et (9) du paragraphe précédent. Lorsque ces mêmes conditions doivent être remplies pour  $t=0$ , quel que soit  $x$ , alors les valeurs générales de  $\xi, \eta, \zeta$  se trouvent déterminées par les formules (43), (45) et (46) du § V; et par suite, comme on l'a déjà remarqué, le mouvement du système, au bout du temps  $t$ , résulte de la superposition de six mouvements simples dont chacun peut s'étendre pour des valeurs croissantes de  $t$  ou de  $x$ , ou bien encore se propager sans s'affaiblir. Ce dernier cas se présente lorsque les valeurs des constantes

$$z \text{ et } s$$

n'offrent pas de parties réelles; en sorte qu'on ait, par exemple,

$$(1) \quad k = k \sqrt{-1}, \quad s = \omega k \sqrt{-1},$$

$k$  et  $\omega$  désignant des constantes réelles. Alors, les conditions (8), (9) du § V, qui doivent être remplacées, quel que soit  $x$ , pour  $t=0$ , se réduisent à

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = A e^{kx \sqrt{-1}}, & \eta = B e^{kx \sqrt{-1}}, & \zeta = C e^{kx \sqrt{-1}}, \\ \frac{d\xi}{dt} = (D) e^{kx \sqrt{-1}}, & \frac{d\eta}{dt} = E e^{kx \sqrt{-1}}, & \frac{d\zeta}{dt} = F e^{kx \sqrt{-1}}, \end{cases}$$

et les formules (4) du même paragraphe qui fournissent, non pas les valeurs totales de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

mais seulement les parties de ces valeurs qui correspondent à l'une

des six valeurs de  $s$ , par conséquent à l'une des six valeurs de la quantité

$$(3) \quad \omega = \frac{s}{k}$$

deviennent

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_t = \frac{1}{2} a \left[ \mathcal{V} e^{k(x-\omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \mathcal{V} e^{k(x-\omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau \right], \\ \eta_t = \frac{1}{2} b \left[ \mathcal{V} e^{k(x-\omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \mathcal{V} e^{k(x-\omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau \right], \\ \zeta_t = \frac{1}{2} c \left[ \mathcal{V} e^{k(x-\omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \mathcal{V} e^{k(x-\omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau \right], \end{cases}$$

$\tau$  désignant une variable auxiliaire à l'égard de laquelle les intégrations s'effectuent entre les limites

$$\tau = 0, \quad \tau = t.$$

Ajoutons qu'en vertu de l'équation (3) la formule

$$(5) \quad F(k, s) = 0,$$

qui fournit la relation entre  $k$  et  $s$  pourra s'écrire comme il suit

$$(6) \quad F(k, \omega k) = 0,$$

et se réduira, si la fonction  $F(k, s)$  est homogène, à

$$(7) \quad F(1, \omega) = 0.$$

Donc alors la valeur de  $\omega$  deviendra indépendante de la valeur attribuée à  $k$ . Enfin, si les trois équations des mouvements infiniment petits du système que l'on considère se réduisent à des équations homogènes, les produits

$$aA, aB, aC, bA, bB, bC, cA, cB, cC,$$

et par suite les produits

$$a\mathcal{V}, a\mathcal{V}, b\mathcal{V}, b\mathcal{V}, c\mathcal{V}, c\mathcal{V},$$

seront eux-mêmes indépendants de la valeur attribuée à  $k$ , en vertu de la formule (42) du § V.



Si l'on désigne par

$$\varphi(v), \chi(v), \psi(v), \Phi(v), X(v), \Psi(v)$$

les seconds membres des équations (2), c'est-à-dire les valeurs initiales de

$$\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

que fournissent ces mêmes équations, on tirera des formules (4), jointes aux équations (19) du § V,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_t &= \frac{1}{2}a[A\varphi(v-\omega t) + B\chi(v-\omega t) + C\psi(v-\omega t)] \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2}a[A\Phi(v-\omega\tau) + B X(v-\omega\tau) + C\Psi(v-\omega\tau)]d\tau, \\ \eta_t &= \frac{1}{2}b[A\varphi(v-\omega t) + B\chi(v-\omega t) + C\psi(v-\omega t)] \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2}b[A\Phi(v-\omega\tau) + B X(v-\omega\tau) + C\Psi(v-\omega\tau)]d\tau, \\ \zeta_t &= \frac{1}{2}c[A\varphi(v-\omega t) + B\chi(v-\omega t) + C\psi(v-\omega t)] \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2}c[A\Phi(v-\omega\tau) + B X(v-\omega\tau) + C\Psi(v-\omega\tau)]d\tau. \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que les conditions (2) doivent se vérifier pour  $t=0$ , non plus quel que soit  $v$ , mais seulement entre les limites

$$(9) \quad v=v_0, \quad v=v_1.$$

Pour tenir compte de cette dernière circonstance, il suffira de remplacer, dans les formules (2), l'exponentielle

$$e^{kv\sqrt{-1}}$$

par l'intégrale définie

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_0}^{v_1} e^{v(v-\rho)\sqrt{-1}} e^{k\rho\sqrt{-1}} d\rho dv,$$

qui possède la double propriété de se réduire à cette exponentielle, quand  $v$  reste comprise entre les limites dont il s'agit, et de s'évanouir

quand  $v$  est située hors de ces limites. Or cela reviendra évidemment à remplacer l'exponentielle

$$e^{kv\sqrt{-1}}$$

par une somme composée d'un nombre infini de termes proportionnels à d'autres exponentielles de la forme

$$e^{v\Delta\sqrt{-1}},$$

le coefficient de chacune de ces dernières étant lui-même une expression de la forme

$$\frac{1}{2\pi} \Delta v \int_{v_0}^{v_1} e^{(k-v)\rho\sqrt{-1}} d\rho,$$

et  $\Delta v$  désignant un accroissement infiniment petit attribué à la variable auxiliaire  $v$ . Donc alors, si l'on représente toujours par

$$\xi_t, \eta_t, \zeta_t$$

les parties de

$$\xi, \eta, \zeta$$

qui correspondent à une racine  $s$  de l'équation (5), on devra, aux formules (4), substituer les équations

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2}a \nabla e^{v(v-\omega t-\rho)\sqrt{-1}} e^{k\rho\sqrt{-1}} d\rho dv \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2}a \nabla e^{v(v-\omega\tau-\rho)\sqrt{-1}} e^{k\rho\sqrt{-1}} d\tau d\rho dv, \\ \eta_t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2}b \nabla e^{v(v-\omega t-\rho)\sqrt{-1}} e^{k\rho\sqrt{-1}} d\rho dv \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2}b \nabla e^{v(v-\omega\tau-\rho)\sqrt{-1}} e^{k\rho\sqrt{-1}} d\tau d\rho dv, \\ \zeta_t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2}c \nabla e^{v(v-\omega t-\rho)\sqrt{-1}} e^{k\rho\sqrt{-1}} d\rho dv \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2}c \nabla e^{v(v-\omega\tau-\rho)\sqrt{-1}} e^{k\rho\sqrt{-1}} d\tau d\rho dv, \end{aligned} \right.$$





en considérant toujours a, b, c, A, B, C, par conséquent v et v, comme fonctions des coefficients k et s, et supposant ces coefficients déterminés, non plus par les formules (1), mais par les suivantes

(12) k = v√-1, s = ωv√-1.

Lorsque les trois équations des mouvements infiniment petits se réduiront à des équations homogènes, alors la valeur de ω et celles des produits

a v, a v; b v, b v; c v, c v

seront, dans les formules (11), indépendantes de v; et par suite les intégrales doubles relatives aux variables auxiliaires ρ et v, dans ces formules, seront proportionnelles à l'une des expressions

1/2π ∫-∞∞ ∫v0v1 e^{v(v-ωt-ρ)√-1} e^{kρ√-1} dω dρ,
1/2π ∫-∞∞ ∫v0v1 e^{v(v-ωτ-ρ)√-1} e^{kρ√-1} dω dρ

qui, pour des valeurs réelles de ω, se réduisent à zéro ou aux deux exponentielles

e^{k(v-ωt)√-1}, e^{k(v-ωτ)√-1}

suivant que les différences

v - ωt, v - ωτ

se trouvent situées ou non hors des limites v0, v1. Donc alors les valeurs de

ξi, ηi, ζi

se réduiront à celles que fournissent les équations (4) quand on vient de remplacer par zéro chacune des exponentielles

e^{k(v-ωt)√-1}, e^{k(v-ωτ)√-1}

toutes les fois que le coefficient de √-1 dans l'exposant est situé hors des limites v0, v1. En conséquence, si, les équations des mouvements

infiniment petits étant homogènes, les valeurs de ω fournies par l'équation (7) sont réelles, les formules (11) donneront: 1° pour v > v1 + ωt,

(13) ξi = 0, ηi = 0, ζi = 0;

2° pour v < v0 + ωt,

(14) ξi = a v / 2ω ∫v0v1 e^{kρ√-1} dρ, ηi = b v / 2ω ∫v0v1 e^{kρ√-1} dρ, ζi = c v / 2ω ∫v0v1 e^{kρ√-1} dρ;

tandis que, pour des valeurs de v comprises entre les limites

(15) v = v0 + ωt, v = v1 + ωt,

les mêmes formules, jointes à la seconde des équations (1), donneront

(16) ξi = 1/2 a v e^{k(v-ωt)√-1} + 1/2 a v (e^{kv√-1} - e^{k(v-ωt)√-1}) / s,
ηi = 1/2 b v e^{k(v-ωt)√-1} + 1/2 b v (e^{kv√-1} - e^{k(v-ωt)√-1}) / s,
ζi = 1/2 c v e^{k(v-ωt)√-1} + 1/2 c v (e^{kv√-1} - e^{k(v-ωt)√-1}) / s.

et, par suite,

(17) ξi + ξ-i = 1/2 a (v + v/s) e^{k(v+ωt)√-1} + 1/2 a (v - v/s) e^{k(v-ωt)√-1},
ηi + η-i = 1/2 b (v + v/s) e^{k(v+ωt)√-1} + 1/2 b (v - v/s) e^{k(v-ωt)√-1},
ζi + ζ-i = 1/2 c (v + v/s) e^{k(v+ωt)√-1} + 1/2 c (v - v/s) e^{k(v-ωt)√-1}.

Or, en vertu des formules (13), (14), (16) et (17), jointes aux formules (9) du § V, il est clair que, dans l'hypothèse admise, le mouvement imprimé au premier instant au système de molécules donné pourra être considéré comme résultant de la superposition de six mouvements simples, dont chacun, répondant à l'une des six valeurs de s ou de ω, se propagera dans l'espace avec une vitesse équiva-



lente à la valeur numérique de  $\omega$ , et se trouvera renfermé, au bout du temps  $t$ , dans l'épaisseur de la tranche mobile comprise entre les plans parallèles représentés par les équations (15), de manière à offrir un système d'ondes planes qui ne s'étendront point au delà de la tranche dont il s'agit. Si au premier instant les molécules comprises entre les plans que représentent les équations (9) se trouvent déplacées, en sorte que leurs vitesses initiales se réduisent à zéro, alors  $\varphi$  étant nul, ainsi que  $\omega$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta$ , les formules (14) coïncideront avec les formules (13), et par suite les déplacements des molécules relatifs à l'un des six mouvements simples s'évanouiront, au bout d'un temps quelconque  $t$ , en deçà comme au delà de la tranche mobile correspondante. Si au contraire les vitesses initiales des molécules différent de zéro, les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta,$$

déterminées par les formules (14), cesseront généralement de s'évanouir; mais du moins elles resteront indépendantes du temps, et par suite, au bout d'un temps quelconque  $t$ , les mouvements vibratoires qui, étant relatifs à l'un des mouvements simples, n'existeront point encore dans la portion du système située au delà de la tranche mobile correspondante, n'existeront plus dans la portion située en deçà de cette même tranche; de sorte que, dans cette dernière portion, le déplacement d'une molécule située à la distance  $\tau$  du plan invariable, ou plutôt la partie de ce déplacement qui se rapporte à l'un des mouvements simples, conservera constamment la valeur qu'elle acquiert à l'instant où l'on a  $\tau = \tau_0 + \omega t$ , et par conséquent

$$(18) \quad t = \frac{\tau - \tau_0}{\omega}.$$

Concevons à présent que les valeurs initiales de

$$\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

étant nulles hors des limites

$$\tau = \tau_0, \quad \tau = \tau_1,$$

différent de zéro entre ces mêmes limites et se trouvent représentées, pour une valeur quelconque de  $\tau$ , par les fonctions discontinues

$$\varphi(\tau), \chi(\tau), \psi(\tau), \Phi(\tau), X(\tau), \Psi(\tau).$$

Chacune de ces fonctions, la première par exemple, pourra être considérée comme une somme de termes proportionnels à des exponentielles imaginaires de la forme

$$e^{k\tau\sqrt{-1}},$$

puisque l'intégrale définie

$$(19) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{\nu(\tau-\rho)\sqrt{-1}} \varphi(\rho) d\nu d\rho,$$

qui en réalité représente une somme de termes proportionnels à des exponentielles de la forme

$$e^{\nu\tau\sqrt{-1}},$$

possédera la double propriété de se réduire à  $\varphi(\tau)$  entre les limites

$$\tau = \tau_0, \quad \tau = \tau_1,$$

et de s'évanouir pour des valeurs de  $\tau$  situées hors de ces limites. Cela posé, les raisonnements à l'aide desquels nous avons établi les formules (4) conduiront, dans le cas présent, aux équations

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{2} a [A\varphi(\rho) + B\chi(\rho) + C\psi(\rho)] e^{\nu(\tau-\omega t-\rho)\sqrt{-1}} d\nu d\rho \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{2} a [A\Phi(\rho) + B\chi(\rho) + C\Psi(\rho)] e^{\nu(\tau-\omega\tau-\rho)\sqrt{-1}} d\tau d\nu d\rho, \\ \eta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{2} b [A\varphi(\rho) + B\chi(\rho) + C\psi(\rho)] e^{\nu(\tau-\omega t-\rho)\sqrt{-1}} d\nu d\rho \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{2} b [A\Phi(\rho) + B\chi(\rho) + C\Psi(\rho)] e^{\nu(\tau-\omega\tau-\rho)\sqrt{-1}} d\tau d\nu d\rho, \\ \zeta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{2} c [A\varphi(\rho) + B\chi(\rho) + C\psi(\rho)] e^{\nu(\tau-\omega t-\rho)\sqrt{-1}} d\nu d\rho \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{2} c [A\Phi(\rho) + B\chi(\rho) + C\Psi(\rho)] e^{\nu(\tau-\omega\tau-\rho)\sqrt{-1}} d\tau d\nu d\rho; \end{aligned} \right.$$





pendantes du temps pour des valeurs de  $\tau$  situées hors des limites

$$v_0 + \omega t, \quad v_1 + \omega t;$$

et par suite les mouvements vibratoires des molécules, ceux même qui correspondent à une valeur donnée de  $k$ , ne seront plus renfermés, au bout du temps  $t$ , dans les six tranches terminées par les systèmes de plans parallèles que peuvent représenter les formules (15). Toutefois les mouvements vibratoires des molécules placées en dehors de ces tranches pourront être, dans une première approximation, négligés pour des ondes planes correspondantes à des valeurs données de  $k$  et de  $\omega$ , si la valeur de  $\omega$  est réelle, et si d'ailleurs les équations des mouvements infiniment petits se déduisent d'équations homogènes par l'addition de termes dont les coefficients soient très petits, comme il arrive quand la lumière se propage à travers un corps diaphane. Mais alors même l'épaisseur de la tranche, hors de laquelle les vibrations seront peu sensibles, ne pourra être censée constante et indépendante du temps que pour une seule espèce d'ondes planes correspondantes à une valeur déterminée de  $\omega$ , par exemple, dans la théorie de la lumière, pour un rayon de couleur donnée; et lorsque des ondes planes correspondantes à une infinité de valeurs diverses de  $\omega$  se propageront simultanément, l'épaisseur de la tranche hors de laquelle les vibrations seront peu sensibles, loin d'être constante, croitra sans cesse avec le temps. Ajoutons que, dans le cas où les équations des mouvements infiniment petits cessent d'être homogènes, les mouvements vibratoires se propagent, en général, instantanément jusqu'à une distance infinie, ou plutôt jusqu'aux extrémités du système de molécules donné; de sorte que, le temps venant à croître à partir de  $t=0$ , les molécules placées à de grandes distances de la tranche primitivement ébranlée se déplacent immédiatement et acquièrent des vitesses qui, quoique fort petites, ne sont pourtant pas rigoureusement nulles.

40.

C. R., t. VIII, p. 719 (13 mai 1839). — Suite.

*Addition aux §§ V et VI. — Réduction des formules établies dans ces paragraphes.*

Les formules établies dans les paragraphes précédents peuvent encore être simplifiées comme on va le voir.

Puisque l'équation (23) du § V, résolue par rapport à  $s^2$ , donne pour racines

$$s'^2, \quad s''^2, \quad s'''^2,$$

il est clair que le produit

$$(s'^2 - s^2)(s''^2 - s^2)(s'''^2 - s^2),$$

dont le développement renferme le terme  $-s^6$ , sera équivalent au second membre de l'équation (24) du même paragraphe, ou, ce qui revient au même, à la différence entre le premier et le second membre de l'équation (16) du § III, multipliée par le produit des quatre dénominateurs

$$s^2 - \ell + \frac{\mathcal{Q}\mathcal{R}}{\mathcal{P}}, \quad s^2 - \mathcal{N} + \frac{\mathcal{R}\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}, \quad s^2 - \mathcal{K} + \frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{\mathcal{R}}, \quad \mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}.$$

On aura donc identiquement

$$(1) \quad \begin{cases} (s'^2 - s^2)(s''^2 - s^2)(s'''^2 - s^2) \\ = \left(s^2 - \ell + \frac{\mathcal{Q}\mathcal{R}}{\mathcal{P}}\right) \left(s^2 - \mathcal{N} + \frac{\mathcal{R}\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}\right) \left(s^2 - \mathcal{K} + \frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{\mathcal{R}}\right) s, \end{cases}$$

la valeur de  $s$  étant

$$(2) \quad s = \frac{\frac{\mathcal{Q}\mathcal{R}}{\mathcal{P}}}{s^2 - \ell + \frac{\mathcal{Q}\mathcal{R}}{\mathcal{P}}} + \frac{\frac{\mathcal{R}\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}}{s^2 - \mathcal{N} + \frac{\mathcal{R}\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}} + \frac{\frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{\mathcal{R}}}{s^2 - \mathcal{K} + \frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{\mathcal{R}}} - 1.$$



Si l'on fait, pour abrégé,

$$(3) \quad \xi - \frac{\partial R}{\partial \xi} = \kappa, \quad \eta - \frac{\partial R}{\partial \eta} = \mathfrak{M}, \quad \gamma - \frac{\partial R}{\partial \gamma} = \mathfrak{N},$$

les formules (1) et (2) deviendront

$$(4) \quad (s^2 - \xi)(s'^2 - \xi)(s''^2 - \xi) = (s^2 - \kappa)(s^2 - \mathfrak{M})(s^2 - \mathfrak{N})s,$$

$$(5) \quad s = \frac{\frac{\partial R}{\partial \xi}}{s^2 - \kappa} + \frac{\frac{\partial R}{\partial \eta}}{s^2 - \mathfrak{M}} + \frac{\frac{\partial R}{\partial \gamma}}{s^2 - \mathfrak{N}} - 1;$$

puis, en remplaçant successivement  $s^2$  par chacune des lettres

$$\kappa, \mathfrak{M}, \mathfrak{N},$$

on tirera des formules (4) et (5), après avoir fait disparaître dans la formule (5) les dénominateurs,

$$(6) \quad \begin{cases} (s^2 - \kappa)(s'^2 - \kappa)(s''^2 - \kappa) = \frac{\partial R}{\partial \xi}(\kappa - \mathfrak{M})(\kappa - \mathfrak{N}), \\ (s^2 - \mathfrak{M})(s'^2 - \mathfrak{M})(s''^2 - \mathfrak{M}) = \frac{\partial R}{\partial \eta}(\mathfrak{M} - \mathfrak{N})(\mathfrak{M} - \kappa), \\ (s^2 - \mathfrak{N})(s'^2 - \mathfrak{N})(s''^2 - \mathfrak{N}) = \frac{\partial R}{\partial \gamma}(\mathfrak{N} - \kappa)(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}). \end{cases}$$

Cela posé, les formules (4) du § V deviendront

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{p} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}(\kappa - \mathfrak{M})(\mathfrak{N} - \kappa), \\ \mathfrak{e} = -\frac{\partial R}{\partial \eta}(\mathfrak{M} - \mathfrak{N})(\kappa - \mathfrak{M}), \\ \mathfrak{n} = -\frac{\partial R}{\partial \gamma}(\mathfrak{N} - \kappa)(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}), \end{cases}$$

et, par suite, la formule (42) du même paragraphe, jointe aux équations (15), ou, ce qui revient au même, à la formule (15) du § III, donnera

$$(8) \quad \frac{\mathfrak{a}}{\Lambda} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\Lambda^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}.$$

Donc si l'on choisit

$$\Lambda, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$$

de manière à vérifier, non seulement la formule

$$(9) \quad \frac{\Lambda}{\left(\frac{\partial R}{\partial \xi} \right)} = \frac{\mathfrak{B}}{\left(\frac{\partial R}{\partial \eta} \right)} = \frac{\mathfrak{C}}{\left(\frac{\partial R}{\partial \gamma} \right)},$$

mais encore la suivante

$$(10) \quad \Lambda^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = 1,$$

on aura simplement

$$(11) \quad \mathfrak{a} = \Lambda, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{C}.$$

En conséquence, les équations (45) du § V pourront s'écrire comme il suit

$$(12) \quad \begin{cases} \xi_i = \frac{1}{2} \Lambda \left( \mathfrak{V} e^{k_i - i\tau} + \int_0^i \mathfrak{V} e^{k_i - i\tau} d\tau \right), \\ \eta_i = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \left( \mathfrak{V} e^{k_i - i\tau} + \int_0^i \mathfrak{V} e^{k_i - i\tau} d\tau \right), \\ \zeta_i = \frac{1}{2} \mathfrak{C} \left( \mathfrak{V} e^{k_i - i\tau} + \int_0^i \mathfrak{V} e^{k_i - i\tau} d\tau \right). \end{cases}$$

$\tau$  désignant une variable auxiliaire à l'égard de laquelle les intégrations s'effectuent entre les limites

$$\tau = 0, \quad \tau = l.$$

Au reste, on peut arriver directement aux équations (12) de la manière suivante.

Soient

$$\Lambda', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'; \quad \Lambda'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}''; \quad \Lambda''', \mathfrak{B}''', \mathfrak{C}'''$$

trois systèmes de valeurs de

$$\Lambda, \mathfrak{B}, \mathfrak{C},$$

correspondants aux trois valeurs de  $s^2$  représentées par

$$s'^2, s''^2, s'''^2,$$



et choisis de manière à vérifier, non seulement la formule (9), mais encore l'équation (10). Si l'on nomme

$$s', s'', s'''$$

les valeurs correspondantes de  $s$ , on aura

$$(13) \quad \begin{cases} s' = A'\xi + B'\eta + C'\zeta, \\ s'' = A''\xi + B''\eta + C''\zeta, \\ s''' = A'''\xi + B'''\eta + C'''\zeta. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on combine entre elles par voie d'addition les formules (15) du § V, respectivement multipliées par

$$A', B', C',$$

on en tirera

$$(14) \quad \begin{cases} \rho AA' + \sigma BB' + \tau CC' + \varrho (BC' + B'C) + \vartheta (CA' + C'A) + \delta (AB' + A'B) \\ = s^2 (AA' + BB' + CC'). \end{cases}$$

Or,  $s^2$  étant censé représenter, dans la formule (14), l'une quelconque des trois racines

$$s^2, s'^2, s''^2,$$

le premier membre de cette formule ne sera point altéré quand on changera  $s^2$  en  $s'^2$  et réciproquement. Donc le second membre devra remplir la même condition, et l'on aura

$$s^2 (AA' + BB' + CC') = s'^2 (AA' + BB' + CC')$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15) \quad (s^2 - s'^2) (AA' + BB' + CC') = 0.$$

Si, dans la formule (15), on pose  $s = s'$ , on obtiendra une équation identique; mais, si l'on prend

$$s = s'' \quad \text{ou} \quad s = s''',$$

et si d'ailleurs  $s'^2, s''^2$  différent de  $s^2$ , la formule (15) donnera successivement

$$\begin{aligned} A'A'' + B'B'' + C'C'' &= 0, \\ A'A''' + B'B''' + C'C''' &= 0. \end{aligned}$$

On trouvera de même

$$A''A''' + B''B''' + C''C''' = 0;$$

et, en joignant les trois formules qui précèdent à celles que comprend l'équation (10), on aura définitivement

$$(16) \quad \begin{cases} A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1, & A''A''' + B''B''' + C''C''' = 0, \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1, & A'A'' + B''B' + C''C' = 0, \\ A'''^2 + B'''^2 + C'''^2 = 1, & A'A' + B'B' + C'C' = 0. \end{cases}$$

Or, il résulte de ces dernières qu'on vérifiera les formules (13) en posant

$$(17) \quad \begin{cases} \xi = A's' + A''s'' + A'''s''', \\ \eta = B's' + B''s'' + B'''s''', \\ \zeta = C's' + C''s'' + C'''s'''. \end{cases}$$

car, si l'on substitue les valeurs précédentes de  $\xi, \eta, \zeta$  dans les seconds membres des formules (13), ils se réduiront identiquement à

$$s', s'', s''',$$

en vertu des équations (16). Donc les formules (13) entraînent les formules (17) et réciproquement. Donc, les formules (17) devant être vérifiées par les valeurs de  $s', s'', s'''$  tirées des formules (13), on aura encore

$$(18) \quad \begin{cases} A'^2 + A''^2 + A'''^2 = 1, & B'C' + B''C'' + B'''C''' = 0, \\ B'^2 + B''^2 + B'''^2 = 1, & C'A' + C''A'' + C'''A''' = 0, \\ C'^2 + C''^2 + C'''^2 = 1, & A'B' + A''B'' + A'''B''' = 0; \end{cases}$$

et les formules (16) entraîneront toujours les formules (18). Pour arriver directement à cette conclusion, dans le cas où les systèmes de valeurs de A, B, C propres à vérifier les formules (9) et (10) restent réels, il suffit d'observer qu'alors, en vertu des formules (16),

$$A', B', C'; \quad A'', B'', C''; \quad A''', B''', C'''$$

représentent les cosinus des angles formés par un premier, un second



et un troisième axe, perpendiculaires l'un à l'autre, avec les axes rectangulaires des  $x, y, z$ , et qu'en conséquence

$$A', A'', A'''; B', B'', B'''; C', C'', C'''$$

représentent les cosinus des angles formés : 1° par l'axe des  $x$ ; 2° par l'axe des  $y$ ; 3° par l'axe des  $z$ , avec trois axes rectangulaires entre eux.

Pour retrouver maintenant les équations (12), il ne restera plus qu'à substituer dans les formules (17) les valeurs de  $s$

$$s', s'', s''',$$

que fournit l'équation (20) du § V, quand on pose successivement

$$s^2 = s'^2, \quad s^2 = s''^2, \quad s^2 = s'''^2.$$

Alors, en désignant toujours par

$$\xi, \eta, \zeta,$$

les parties de

$$\xi, \eta, \zeta$$

qui renferment l'exponentielle

$$e^{kx-st},$$

dans laquelle  $s$  représente l'une quelconque des six constantes

$$s', -s', s'', -s'', s''', -s''',$$

on tirera évidemment des formules (17)

$$(19) \quad \begin{cases} \xi = \xi_{s'} + \xi_{-s'} + \xi_{s''} + \xi_{-s''} + \xi_{s'''} + \xi_{-s'''} \\ \eta = \eta_{s'} + \eta_{-s'} + \eta_{s''} + \eta_{-s''} + \eta_{s'''} + \eta_{-s'''} \\ \zeta = \zeta_{s'} + \zeta_{-s'} + \zeta_{s''} + \zeta_{-s''} + \zeta_{s'''} + \zeta_{-s'''} \end{cases}$$

les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta$$

étant, pour chaque valeur de  $s$ , déterminées par la formule

$$(20) \quad \frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = \frac{\zeta}{C} = \frac{1}{2} \cup e^{kx-st} + \frac{1}{2} \int_0^t \cup e^{kx-st} dt,$$

ou, ce qui revient au même, par les équations (12). Si d'ailleurs on a égard aux formules (19) du § V, on reconnaîtra que les équations (12) peuvent s'écrire comme il suit :

$$(21) \quad \begin{cases} \xi_t = \frac{1}{2} A (A \lambda + B \mu + C \nu) e^{kx-st} + \int_0^t \frac{1}{2} A (A \cup + B C + C \bar{\nu}) e^{kx-st} dt, \\ \eta_t = \frac{1}{2} B (A \lambda + B \mu + C \nu) e^{kx-st} + \int_0^t \frac{1}{2} B (A \cup + B C + C \bar{\nu}) e^{kx-st} dt, \\ \zeta_t = \frac{1}{2} C (A \lambda + B \mu + C \nu) e^{kx-st} + \int_0^t \frac{1}{2} C (A \cup + B C + C \bar{\nu}) e^{kx-st} dt. \end{cases}$$

Les équations (12) ou (21) supposent que les valeurs de  $A, B, C$  sont assujetties à vérifier simultanément les formules (9) et (10). Si elles étaient seulement assujetties à vérifier la formule (9), alors, dans les équations (45) du § V, on devrait attribuer aux constantes

$$a, b, c$$

les valeurs que déterminent, non plus les formules (11), mais la formule (8), c'est-à-dire que l'on devrait dans les équations (12) et (21) substituer aux constantes

$$A, B, C$$

les rapports

$$\frac{A}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \frac{B}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \frac{C}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On aurait donc alors

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_t = \frac{1}{2} A \frac{A \lambda + B \mu + C \nu}{A^2 + B^2 + C^2} e^{kx-st} + \int_0^t \frac{1}{2} A \frac{A \cup + B C + C \bar{\nu}}{A^2 + B^2 + C^2} e^{kx-st} dt, \\ \eta_t = \frac{1}{2} B \frac{A \lambda + B \mu + C \nu}{A^2 + B^2 + C^2} e^{kx-st} + \int_0^t \frac{1}{2} B \frac{A \cup + B C + C \bar{\nu}}{A^2 + B^2 + C^2} e^{kx-st} dt, \\ \zeta_t = \frac{1}{2} C \frac{A \lambda + B \mu + C \nu}{A^2 + B^2 + C^2} e^{kx-st} + \int_0^t \frac{1}{2} C \frac{A \cup + B C + C \bar{\nu}}{A^2 + B^2 + C^2} e^{kx-st} dt. \end{cases}$$

Enfin, si l'on suppose, comme ci-dessus,

$$A, B, C$$



déterminés par le système des formules (9) et (10), on pourra, dans les diverses équations que renferme le § VI, remplacer les coefficients

$$a, b, c$$

par les coefficients

$$A, B, C,$$

qui sont égaux aux trois premiers, en vertu des formules (11). Ainsi, par exemple, les équations (4) du § VI donneront

$$(23) \quad \begin{cases} \xi_i = \frac{1}{2} A \left[ \mathcal{V} e^{k(\lambda - \omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \mathcal{V} e^{k(\lambda - \omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau \right], \\ \eta_i = \frac{1}{2} B \left[ \mathcal{V} e^{k(\lambda - \omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \mathcal{V} e^{k(\lambda - \omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau \right], \\ \zeta_i = \frac{1}{2} C \left[ \mathcal{V} e^{k(\lambda - \omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \mathcal{V} e^{k(\lambda - \omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau \right], \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24) \quad \begin{cases} \xi_i = \frac{1}{2} A (A \mathcal{A} + B \mathcal{B} + C \mathcal{C}) e^{k(\lambda - \omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \frac{1}{2} A (A \mathcal{O} + B \mathcal{C} + C \mathcal{F}) e^{k(\lambda - \omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau, \\ \eta_i = \frac{1}{2} B (A \mathcal{A} + B \mathcal{B} + C \mathcal{C}) e^{k(\lambda - \omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \frac{1}{2} B (A \mathcal{O} + B \mathcal{C} + C \mathcal{F}) e^{k(\lambda - \omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau, \\ \zeta_i = \frac{1}{2} C (A \mathcal{A} + B \mathcal{B} + C \mathcal{C}) e^{k(\lambda - \omega t)\sqrt{-1}} + \int_0^t \frac{1}{2} C (A \mathcal{O} + B \mathcal{C} + C \mathcal{F}) e^{k(\lambda - \omega \tau)\sqrt{-1}} d\tau. \end{cases}$$

§ VII. — *Intégrales générales des équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

Les formules (21), (22), (23) ou (24) des pages 289 et 290 représentent seulement des intégrales particulières des équations (7) du § IV, dans le cas où les sommes (4), (5) du § II offrent des valeurs constantes. Mais la méthode par laquelle nous sommes parvenus à ces intégrales particulières fournira encore les intégrales générales des mêmes équations dans le cas dont il s'agit, par conséquent, les intégrales générales d'un système homogène de molécules sollicitées par des forces d'attraction

ou de répulsion mutuelle, si l'on commence par transformer les valeurs initiales de

$$\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt},$$

c'est-à-dire les fonctions

$$(1) \quad \varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z), \quad \Phi(x, y, z), \quad X(x, y, z), \quad Y(x, y, z),$$

en sommes de termes proportionnels à des exponentielles imaginaires. Or, cette transformation peut toujours s'opérer. Car, en vertu des formules connues, on aura par exemple

$$(2) \quad \varphi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\mu(x-\lambda) + \nu(y-\mu) + w(z-\nu)]\sqrt{-1}} \varphi(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda d\nu}{2\pi} \frac{d\mu d\nu}{2\pi} \frac{d\nu d\nu}{2\pi},$$

et comme, en posant, pour abrégér,

$$(3) \quad u\sqrt{-1} = \mu, \quad v\sqrt{-1} = \nu, \quad w\sqrt{-1} = \omega,$$

on réduit la formule (2) à

$$(4) \quad \varphi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\mu x + \nu y + \omega z]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[\lambda - \mu - \omega \nu]} \varphi(\lambda, \mu, \nu) d\lambda d\mu d\nu \frac{d\lambda d\mu d\nu}{(2\pi)^3},$$

il est clair que la fonction arbitraire

$$\varphi(x, y, z)$$

pourra être considérée comme résultant de l'addition d'une infinité de termes proportionnels à des exponentielles de la forme

$$e^{i[\mu x + \nu y + \omega z]}.$$

Il y a plus : comme, en vertu des formules (3), on aura

$$u x + v y + \omega z = (u x + v y + \omega z)\sqrt{-1},$$

si l'on pose, pour abrégér,

$$(5) \quad k = \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}$$

et

$$(6) \quad u x + v y + \omega z = k i,$$





la valeur numérique de  $v$  exprimera la distance du point  $(x, y, z)$  au plan que représente l'équation

$$(7) \quad vx + vy + wz = 0$$

quand on regarde

$$v, \quad v, \quad w$$

comme constantes, et l'on trouvera

$$(8) \quad e^{vx+vy+wz} = e^{kv\sqrt{-1}},$$

$$(9) \quad \varphi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{kv\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \varphi(\lambda, \mu, \nu) \, d\lambda \, d\mu \, d\nu \frac{d\lambda \, d\mu \, d\nu}{(2\pi)^3}.$$

Concevons d'ailleurs qu'en prenant pour

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$$

des fonctions de  $u, v, w$  déterminées par les formules (3), (4) du § III, on prenne pour  $s$  une racine de l'équation (12) du même paragraphe, c'est-à-dire de

$$(10) \quad F(u, v, w, s) = 0,$$

et que l'on détermine

$$A, \quad B, \quad C$$

en fonction de

$$u, \quad v, \quad w, \quad s,$$

par les formules (9), (10) de la page 285. Enfin supposons, comme dans le § VI,

$$(11) \quad h = k\sqrt{-1},$$

$$(12) \quad \omega = \frac{s}{h}.$$

Dans le cas où l'on supposera constantes les sommes (4) et (5) du § II, la valeur générale de chacun des déplacements moléculaires

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

se composera évidemment de six parties correspondantes aux six valeurs

de  $s$  qui, vérifiant l'équation (10), peuvent être représentées par

$$s', \quad -s', \quad s'', \quad -s'', \quad s''', \quad -s''';$$

et comme, en vertu de la formule (9), les fonctions (1), c'est-à-dire les seconds membres des formules (8), (9) du § IV, sont des sommes de termes semblables aux seconds membres des formules (2) du § VI, il suffira, pour obtenir les intégrales générales cherchées : 1° de remplacer dans les seconds membres des équations (24) de la page 290, les constantes arbitraires

$$(13) \quad A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F$$

par six intégrales définies relatives aux variables auxiliaires  $\lambda, \mu, \nu$  et semblables à celles que contient la formule (9), c'est-à-dire par l'intégrale

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u\lambda - v\mu - w\nu} \varphi(\lambda, \mu, \nu) \frac{d\lambda \, d\mu \, d\nu}{(2\pi)^3},$$

et par celles qu'on en déduit en substituant l'une des lettres caractéristiques  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$  à la lettre  $\varphi$ ; 2° d'intégrer par rapport aux variables auxiliaires

$$u, \quad v, \quad w$$

et entre les limites

$$-\infty, \quad \infty$$

de ces variables, les seconds membres des équations obtenues, après les avoir multipliés par le produit

$$d\lambda \, d\mu \, d\nu;$$

3° de calculer, à l'aide des équations nouvelles ainsi formées, les valeurs de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta,$$

qui correspondront aux six valeurs de  $s$ , et de les substituer dans les formules (19) de la page 288. En opérant comme on vient de le dire, et posant, pour abrégé,

$$(15) \quad \begin{cases} U = A \varphi(\lambda, \mu, \nu) + B \mathcal{L}(\lambda, \mu, \nu) + C \psi(\lambda, \mu, \nu), \\ V = A \Phi(\lambda, \mu, \nu) + B \mathcal{N}(\lambda, \mu, \nu) + C \Psi(\lambda, \mu, \nu), \end{cases}$$



on trouvera

$$(16) \begin{cases} \xi_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} AU e^{k(\lambda - \mu t)\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{2} AV e^{k(\lambda - \mu t)\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} dt, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(17) \begin{cases} \xi_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} AU e^{[c(x-z) + v(y-\mu) + w(z-\nu) - k\mu t]\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{2} AV e^{[c(x-z) + v(y-\mu) + w(z-\nu) - k\mu t]\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} dt, \end{cases}$$

les intégrations relatives aux variables auxiliaires

$$\lambda, \mu, \nu, v, w,$$

étant toutes effectuées entre les limites  $-\infty, +\infty$ ; et, pour déduire de la formule (16) ou (17) la valeur de  $\eta_s$  ou de  $\zeta_s$ , il suffira de remplacer dans le second membre le facteur A par le facteur B ou C. Si, dans les formules (16), (17), etc., on attribue successivement à s les six valeurs

$$s', -s', s'', -s'', s''', -s''',$$

les formules (19) de la page 288, savoir

$$(18) \begin{cases} \xi = \xi_{s'} + \xi_{-s'} + \xi_{s''} + \xi_{-s''} + \xi_{s'''} + \xi_{-s'''} \\ \eta = \eta_{s'} + \eta_{-s'} + \eta_{s''} + \eta_{-s''} + \eta_{s'''} + \eta_{-s'''} \\ \zeta = \zeta_{s'} + \zeta_{-s'} + \zeta_{s''} + \zeta_{-s''} + \zeta_{s'''} + \zeta_{-s'''} \end{cases}$$

représenteront précisément les intégrales générales des équations (7) du § IV, pourvu que le système de molécules données soit homogène, et qu'en conséquence les sommes (4), (5) du § II demeurent constantes, c'est-à-dire indépendantes des coordonnées x, y, z. Dans le cas où les facteurs

$$A, B, C,$$

déterminés par les formules (9) et (10) de la page 285, restent réels.

ces intégrales générales ne diffèrent pas de celles que nous avons données dans le Mémoire sur la dispersion de la lumière, publié en 1830.

Les formules (16), (17), etc., supposent que les facteurs

$$A, B, C$$

sont déterminés par le système des formules (9), (10) de la page 285. Si l'on assujettissait les mêmes facteurs à vérifier seulement la formule (9) (p. 285), on déduirait de raisonnements semblables à ceux que nous avons employés dans le paragraphe précédent, non plus la formule (16) ou (17), mais les suivantes :

$$(19) \begin{cases} \xi_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} AU}{A^2 + B^2 + C^2} e^{k(\lambda - \mu t)\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{\frac{1}{2} AV}{A^2 + B^2 + C^2} e^{k(\lambda - \mu t)\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} dt, \end{cases}$$

$$(20) \begin{cases} \xi_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} AU}{A^2 + B^2 + C^2} e^{[c(x-z) + v(y-\mu) + w(z-\nu) - k\mu t]\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{\frac{1}{2} AV}{A^2 + B^2 + C^2} e^{[c(x-z) + v(y-\mu) + w(z-\nu) - k\mu t]\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu dy dz dv dw}{(2\pi)^2} dt. \end{cases}$$

Dans les formules (19), (20), comme dans les formules (16), (17) et (2), les intégrations relatives aux variables auxiliaires

$$\lambda, \mu, \nu, v, w$$

doivent généralement être effectuées entre les limites  $-\infty, +\infty$ . Toutefois, si les valeurs initiales de

$$\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

savoir

$$\varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \psi(x, y, z), \Phi(x, y, z), X(x, y, z), \Psi(x, y, z),$$

ne différaient de zéro que pour des valeurs de

$$x, y, z$$



correspondantes aux points situés dans un certain espace, par exemple, aux points renfermés entre deux surfaces courbes, deux surfaces cylindriques et deux surfaces planes, représentées par des équations de la forme

$$(21) \quad z = F_0(x, y), \quad z = F_1(x, y),$$

$$(22) \quad y = f_0(x), \quad y = f_1(x),$$

$$(23) \quad x = x_0, \quad x = x_1,$$

on pourrait, dans les formules dont il s'agit, en continuant de prendre  $-\infty$ ,  $+\infty$  pour limites des variables auxiliaires  $v$ ,  $w$ , supposer les intégrations effectuées par rapport aux variables auxiliaires  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , entre les limites

$$(24) \quad \nu = F_0(\lambda, \mu), \quad \nu = F_1(\lambda, \mu),$$

$$(25) \quad \mu = f_0(\lambda), \quad \mu = f_1(\lambda),$$

$$(26) \quad \lambda = x_0, \quad \lambda = x_1.$$

On pourrait s'assurer directement que les valeurs de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta,$$

fournies par le système des équations (18) et les formules (16)... ou (17)... remplissent toutes les conditions requises. En effet, pour y parvenir, il suffira d'observer: 1° qu'en vertu des formules (15) du § V, on satisfera, dans l'hypothèse admise, aux équations (17) du § IV, en y substituant à

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

les produits des facteurs

$$A, \quad B, \quad C$$

par l'exponentielle imaginaire

$$e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-k\omega\tau]\sqrt{-1}},$$

ou par l'intégrale

$$\int_0^1 e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-k\omega\tau]\sqrt{-1}} d\tau;$$

2° qu'en vertu des formules (18) de la page 287, les équations (16) et (18) donneront, pour  $t = 0$ ,

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu, \nu) e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-k\omega\tau]\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu d\nu d\tau d\omega d\sigma}{(2\pi)^3},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda, \mu, \nu) e^{[v(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-k\omega\tau]\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu d\nu d\tau d\omega d\sigma}{(2\pi)^3},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \frac{d\xi}{dt} = \Phi(x, y, z).$$

D'ailleurs les équations (16)... (17)... relatives au cas où les facteurs

$$A, \quad B, \quad C$$

vérifient la formule

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

entraîneront évidemment les équations (19)... (20)... relatives au cas où la même formule cesse d'être vérifiée, attendu que la formule (9) de la page 285 détermine seulement les rapports géométriques des trois facteurs

$$A, \quad B, \quad C,$$

et que l'on aura toujours identiquement

$$\frac{A^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2} = 1;$$

d'où il résulte qu'on ramènera le second cas au premier en divisant dans le second cas les facteurs

$$A, \quad B, \quad C$$

par la racine carrée de la somme

$$A^2 + B^2 + C^2,$$

et les carrés ou produits

$$A^2, \quad B^2, \quad C^2, \quad BC, \quad CA, \quad AB,$$



par conséquent aussi les produits

$$AU, AV, BU, BV, CU, CV,$$

par cette même somme.

Observons encore que les intégrales générales fournies par le système des équations (18), et des formules (16)... ou (17)..., coïncident avec les valeurs de

$$\xi, \eta, \zeta$$

que l'on obtiendrait en appliquant aux équations (2) du § IV la méthode exposée dans le XIX<sup>e</sup> Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

41.

C. R., t. VIII, p. 767 (20 mai 1839). — Suite.

§ VIII. Transformation et réduction des intégrales générales.

Si, en désignant par

$$x, y, z$$

les coordonnées initiales d'une molécule  $m$  choisie arbitrairement dans le système donné, on nomme

$$x + X, y + Y, z + Z$$

les coordonnées initiales d'une autre molécule  $m$ ,

$$r$$

la distance primitive des deux molécules  $m, m$ , et

$$mm \Gamma(r)$$

leur action mutuelle, les équations (1), (2) du § I<sup>er</sup>, et (3) du § III, donneront

$$(1) \quad r \cos \alpha = X, \quad r \cos \beta = Y, \quad r \cos \gamma = Z, \\ r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

et.

$$\xi = S \left\{ \frac{m}{r} \left[ \Gamma(r) + X^2 \frac{d \Gamma(r)}{dr} \right] (e^{uX + vY + wZ} - 1) \right\}, \quad \eta = \dots, \quad \zeta = \dots,$$

$$\varpi = S \left[ \frac{m}{r} YZ \frac{d \Gamma(r)}{dr} (e^{uX + vY + wZ} - 1) \right], \quad \varrho = \dots, \quad \Re = \dots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = G + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial u^2}, & \eta = G + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial v^2}, & \zeta = G + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial w^2}, \\ \varpi = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial v \partial w}, & \varrho = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial w \partial u}, & \Re = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial u \partial v}, \end{cases}$$

les valeurs de  $\mathcal{G}, \mathcal{G}$  étant

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{G} = S \left[ m \frac{\Gamma(r)}{r} (e^{uX + vY + wZ} - 1) \right], \\ \mathcal{G} = S \left[ \frac{m}{r} \frac{d \Gamma(r)}{dr} (e^{uX + vY + wZ} - 1) - (uX + vY + wZ) - \frac{(uX + vY + wZ)^2}{2} \right]. \end{cases}$$

Soit d'ailleurs  $s$  une racine de l'équation (12) du § III, c'est-à-dire une racine de

$$(4) \quad F(u, v, w, s) = 0,$$

la forme de la fonction  $F(u, v, w, s)$  étant déterminée par l'équation

$$(5) \quad \begin{cases} F(u, v, w, s) = (\xi - s^2)(\eta - s^2)(\zeta - s^2) \\ - \varpi^2(\xi - s^2) - \varrho^2(\eta - s^2) - \Re^2(\zeta - s^2) + 2\varpi\varrho\Re, \end{cases}$$

si l'on suppose

$$s, \xi, \eta, \zeta, \varpi, \varrho, \Re$$

et les rapports

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{C}{A}$$

déterminés en fonction de

$$u, v, w$$





considérés comme fonctions de A, B, C, dépendent uniquement des rapports

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}.$$

En conséquence, on pourra prendre pour A, B, C, dans les équations (12) et (13), un quelconque des systèmes de valeurs propres à vérifier la formule (6) ou (7), et supposer, par exemple,

$$(15) \quad A = \frac{2R}{s^2 - \rho + \frac{2R}{\sigma}}, \quad B = \frac{R\sigma}{s^2 - \rho\kappa + \frac{R\sigma}{\rho}}, \quad C = \frac{\sigma\rho}{s^2 - \rho\kappa + \frac{\sigma\rho}{R}}.$$

Dans ce cas particulier l'équation (4) se réduirait à

$$(16) \quad \frac{A}{\sigma} + \frac{B}{\rho} + \frac{C}{R} = 1.$$

On pourrait supposer aussi

$$(17) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{\sigma[s^2 - \rho] + 2R}, \\ B = \frac{1}{\rho[s^2 - \rho\kappa] + R\sigma}, \\ C = \frac{1}{R[s^2 - \rho\kappa] + \sigma\rho}, \end{cases}$$

ou bien encore, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$(18) \quad \begin{cases} A = [2(s^2 - \rho\kappa) + R\sigma][R(s^2 - \rho\kappa) + \sigma\rho], \\ B = [R(s^2 - \rho\kappa) + \sigma\rho][\sigma(s^2 - \rho) + 2R], \\ C = [\sigma(s^2 - \rho) + 2R][2(s^2 - \rho\kappa) + R\sigma]. \end{cases}$$

Enfin, comme la formule (7) doit s'accorder avec la formule (11) du § III, on pourrait prendre

$$(19) \quad \begin{cases} A = (s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2, \\ B = R(s^2 - \rho\kappa) + \sigma\rho, \\ C = \rho[s^2 - \rho\kappa] + R\sigma. \end{cases}$$

Il y a plus. Comme, en multipliant par A les trois membres de la for-

mule (11) du § III, et par B ou C les trois membres de deux formules semblables tirées par la même méthode des équations (6), on trouverait

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{(s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2} &= \frac{AB}{R(s^2 - \rho\kappa) + \sigma\rho} = \frac{AC}{\rho(s^2 - \rho\kappa) + R\sigma}, \\ \frac{AB}{R(s^2 - \rho\kappa) + \sigma\rho} &= \frac{B^2}{(s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2} = \frac{AB}{\sigma(s^2 - \rho) + 2R}, \\ \frac{AC}{\rho(s^2 - \rho\kappa) + R\sigma} &= \frac{BC}{\sigma(s^2 - \rho) + 2R} = \frac{C^2}{(s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2}, \end{aligned}$$

il est clair que l'une quelconque des six équations

$$(20) \quad \begin{cases} A^2 = (s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2, & BC = \sigma(s^2 - \rho) + 2R, \\ B^2 = (s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2, & CA = \rho(s^2 - \rho\kappa) + R\sigma, \\ C^2 = (s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2, & AB = R(s^2 - \rho\kappa) + \sigma\rho \end{cases}$$

entraînera les cinq autres, et qu'en conséquence on pourra, dans les développements des expressions (14), remplacer les carrés ou produits

$$A^2, B^2, C^2, BC, CA, AB$$

par les seconds membres des équations (20). Alors, en posant pour abrégir

$$(21) \quad \begin{cases} \mathcal{F} = (s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) + (s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho) \\ \quad + (s^2 - \rho\kappa)(s^2 - \rho\kappa) - \sigma^2 - \rho^2 - R^2, \end{cases}$$

on trouvera simplement

$$(22) \quad A^2 + B^2 + C^2 = \mathcal{F},$$

et  $\mathcal{F}$  ne sera évidemment autre chose que la dérivée qu'on obtiendrait en différentiant par rapport à  $s^2$  la fonction  $F(u, v, w, s)$  prise en signe contraire.

Comme les valeurs de

$$\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R},$$

données par les formules (2), (3), sont développables avec l'exponentielle

$$e^{uX+vY+wZ}$$



en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de

$$u, v, w,$$

il est clair que, si l'on égale les facteurs

$$A, B, C$$

à des fonctions entières de

$$s, \xi, \eta, \zeta, \theta, \varrho,$$

en supposant, par exemple, ces facteurs déterminés par les équations (18) ou (19), on pourra considérer

$$A, B, C$$

comme des fonctions entières de  $s$  et de  $u, v, w$ , composées d'un nombre fini ou infini de termes. Nommons, dans cette supposition,

$$\square_x, \square_y, \square_z$$

ce que deviennent

$$A, B, C$$

quand on y remplace

$$u, v, w, s$$

par les caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_s$$

Alors, en appelant

$$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_s, X_s, \Phi_s$$

des fonctions de  $x, y, z, t$  déterminées par la formule

$$(23) \quad \varphi_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda, \mu, \nu)}{A^2 + B^2 + C^2} e^{u(x-\lambda) + v(y-\mu) + w(z-\nu) - st} \frac{d\lambda d\mu d\nu d\sigma d\tau}{(2\pi)^3}$$

et par celles qu'on en déduit quand on substitue, dans les deux membres, à la lettre  $\varphi$  l'une des lettres  $\chi, \psi, \Phi, X, \Psi$ , on tirera évidemment des équations (12) et (13)

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_x &= (a\square_x + b\square_y + c\square_z)(\square_x\varphi_x + \square_y\varphi_y + \square_z\varphi_z) \\ &+ (a\square_x + b\square_y + c\square_z) \int_0^t (\square_x\Phi_x + \square_y\Phi_y + \square_z\Phi_z) dt. \end{aligned} \right.$$

Si, dans la formule (22), on réduit l'un des cosinus  $a, b, c$  à l'unité, et les deux autres à zéro, on en conclura immédiatement

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_x &= \square_x(\square_x\varphi_x + \square_y\varphi_y + \square_z\varphi_z) + \square_x \int_0^t (\square_x\Phi_x + \square_y\Phi_y + \square_z\Phi_z) dt. \\ \eta_x &= \square_y(\square_x\varphi_x + \square_y\varphi_y + \square_z\varphi_z) + \square_y \int_0^t (\square_x\Phi_x + \square_y\Phi_y + \square_z\Phi_z) dt. \\ \zeta_x &= \square_z(\square_x\varphi_x + \square_y\varphi_y + \square_z\varphi_z) + \square_z \int_0^t (\square_x\Phi_x + \square_y\Phi_y + \square_z\Phi_z) dt. \end{aligned} \right.$$

On simplifiera encore les formules que nous venons d'obtenir, si l'on suppose réduites à des fonctions entières de

$$s, \xi, \eta, \zeta,$$

non plus les valeurs de

$$A, B, C,$$

mais seulement les valeurs de

$$A^2, B^2, C^2, BC, CA, AB,$$

en déterminant ces dernières valeurs par le moyen des équations (20). Alors les formules (23) ... donneront

$$(26) \quad \varphi_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda, \mu, \nu)}{\mathcal{F}} e^{u(x-\lambda) + v(y-\mu) + w(z-\nu) - st} \frac{d\lambda d\mu d\nu d\sigma d\tau}{(2\pi)^3};$$

et en désignant par

$$\square_{x,x}, \square_{y,y}, \square_{z,z}, \square_{y,z} = \square_{z,y}, \square_{z,x} = \square_{x,z}, \square_{x,y} = \square_{y,x}$$

ce que deviennent les seconds membres des formules (20) quand on y remplace

$$u, v, w, s$$

par les caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_s,$$



on obtiendra, au lieu des équations (24) et (25), celles qui suivent

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_t &= (\alpha \square_{x,x} + b \square_{x,y} + c \square_{x,z}) \left( \varphi_t + \int_0^t \Phi_s dt \right) \\ &+ (\alpha \square_{y,x} + b \square_{y,y} + c \square_{y,z}) \left( \chi_t + \int_0^t X_s dt \right) \\ &+ (\alpha \square_{z,x} + b \square_{z,y} + c \square_{z,z}) \left( \psi_t + \int_0^t \Psi_s dt \right), \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \square_{x,x} \varphi_t + \square_{x,y} \chi_t + \square_{x,z} \psi_t + \int_0^t (\square_{x,x} \Phi_s + \square_{x,y} X_s + \square_{x,z} \Psi_s) dt, \\ \eta &= \square_{y,x} \varphi_t + \square_{y,y} \chi_t + \square_{y,z} \psi_t + \int_0^t (\square_{y,x} \Phi_s + \square_{y,y} X_s + \square_{y,z} \Psi_s) dt, \\ \zeta &= \square_{z,x} \varphi_t + \square_{z,y} \chi_t + \square_{z,z} \psi_t + \int_0^t (\square_{z,x} \Phi_s + \square_{z,y} X_s + \square_{z,z} \Psi_s) dt. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, en définitive, les valeurs de

$$\xi_t, \eta_t, \zeta_t,$$

que renferment les intégrales générales des équations des mouvements infiniment petits, pour un système homogène de molécules, étant considérées comme fonctions de

$$x, y, z, t,$$

dépendent uniquement de l'intégrale sextuple qui constitue le second membre de l'équation (26) et de celles qu'on en déduit en remplaçant la première des six fonctions

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu), \chi(\lambda, \mu, \nu), \psi(\lambda, \mu, \nu), \Phi(\lambda, \mu, \nu), X(\lambda, \mu, \nu), \Psi(\lambda, \mu, \nu)$$

par l'une des cinq autres.

On ne doit pas oublier que, dans les formules (23) et (26),  $u, v, w$  ont des valeurs imaginaires égales aux produits des variables auxiliaires

$$v, \gamma, w$$

par  $\sqrt{-1}$ . Si d'ailleurs on pose, pour plus de commodité,

$$(29) \quad s = s\sqrt{-1},$$

la valeur de  $s$  pouvant être réelle ou imaginaire, l'équation (26) donnera

$$(30) \quad \varphi_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda, \mu, \nu)}{s^3} e^{i\{v(x-\lambda)+\gamma(y-\mu)+w(z-\nu)-st\}\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu d\nu ds dw}{(2\pi)^3}.$$

Si l'on désigne par  $\pi$  l'une quelconque des lettres

$$\varphi, \chi, \psi, \Phi, X, \Psi,$$

on pourra généralement à la formule (30) substituer la suivante

$$(31) \quad \pi_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi(\lambda, \mu, \nu)}{s^3} e^{i\{v(x-\lambda)+\gamma(y-\mu)+w(z-\nu)-st\}\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu d\nu ds dw}{(2\pi)^3}.$$

Si d'ailleurs on nomme

$$s$$

le second membre de l'une quelconque des formules (20), et si l'on représente par

$$\square$$

ce que devient ce second membre, quand on y remplace les lettres

$$u, v, w, s$$

par les caractéristiques

$$D_x, D_y, D_z, D_t;$$

alors, en posant, pour abrégé,

$$(32) \quad \frac{s}{s^3} = \Theta,$$

on trouvera

$$(33) \quad \square \pi_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \pi(\lambda, \mu, \nu) e^{i\{v(x-\lambda)+\gamma(y-\mu)+w(z-\nu)-st\}\sqrt{-1}} \frac{d\lambda d\mu d\nu ds dw}{(2\pi)^3}.$$

Cette dernière équation, dans laquelle  $\pi$  représente l'une quelconque des lettres

$$\varphi, \chi, \psi, \Phi, X, \Psi,$$

et  $\square$  l'une quelconque des caractéristiques

$$\square_{x,x}, \square_{y,y}, \square_{z,z}, \square_{y,x}, \square_{z,x}, \square_{x,y},$$





fournira les valeurs des expressions

$$\square_{x,x}\varphi, \square_{x,y}\varphi, \dots, \square_{x,y}\chi, \dots, \square_{x,y}\Phi, \dots, \square_{x,y}X, \dots$$

comprises dans les valeurs générales de

$$\xi, \eta, \zeta.$$

Posons maintenant

$$(34) \quad k = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad \rho = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2}$$

et

$$(35) \quad s = k\omega.$$

Si l'on considère les trois variables auxiliaires

$$v, w,$$

comme représentant des coordonnées rectangulaires, on pourra les transformer en trois coordonnées polaires dont la première serait le rayon vecteur  $k$ , à l'aide d'équations de la forme

$$(36) \quad v = k \cos p, \quad w = k \sin p \cos q, \quad \dots = k \sin p \sin q.$$

Pareillement, si l'on considère les trois variables auxiliaires

$$\lambda, \mu, \nu,$$

ou plutôt les trois différences

$$x-\lambda, \quad y-\mu, \quad z-\nu,$$

comme représentant des coordonnées rectangulaires, on pourra les transformer en trois coordonnées polaires dont la première soit le rayon vecteur  $\rho$ , à l'aide d'équations de la forme

$$(37) \quad x-\lambda = \rho \cos \theta, \quad y-\mu = \rho \sin \theta \cos \tau, \quad z-\nu = \rho \sin \theta \sin \tau.$$

Faisons d'ailleurs

$$\cos \delta = \frac{v(x-\lambda) + w(y-\mu) + \dots(z-\nu)}{k\rho}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(38) \quad \cos \delta = \cos p \cos \theta + \sin p \cos q \sin \theta \cos \tau + \sin p \sin q \sin \theta \sin \tau.$$

Comme, en désignant par

$$f(x, y, z)$$

une fonction des trois variables  $x, y, z$ , on aura généralement, eu égard aux formules (34),

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v, w) \, dv \, dw \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(v, w) k^2 \sin p \, dk \, dq \, dp \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(v, w) k^2 \sin p \, dk \, dq \, dp \end{aligned} \right.$$

et, eu égard aux formules (35),

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\lambda, y-\mu, z-\nu) \, d\lambda \, d\mu \, d\nu \\ &= - \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(x-\lambda, y-\mu, z-\nu) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\tau \, d\theta \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(x-\lambda, y-\mu, z-\nu) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\tau \, d\theta, \end{aligned} \right.$$

la formule (31) donnera

$$(41) \quad \omega = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\omega(\lambda, \mu, \nu)}{F} e^{k(\rho \cos \delta - \omega t \sqrt{-1})} k^2 \rho^2 \sin p \sin \theta \frac{dk \, dq \, dp \, d\rho \, d\tau \, d\theta}{(4\pi)^3},$$

les intégrations étant effectuées par rapport aux variables  $k$  et  $\rho$  entre les limites  $-\infty, \infty$ ; par rapport aux variables  $p$  et  $\theta$  entre les limites  $0, \pi$  et par rapport aux variables  $q$  et  $\tau$  entre les limites  $0, 2\pi$ . Enfin, comme on aura identiquement

$$k^2 e^{-k\omega t \sqrt{-1}} = - \frac{1}{\omega^2} D_t^2 e^{-k\omega t \sqrt{-1}},$$



on tirera de la formule (41)

$$(42) \quad \overline{\omega}_s = D_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\overline{\omega}(\lambda, \mu, \nu)}{\omega^2 F} e^{k(\rho \cos \delta - \omega t) \sqrt{-1}} \rho^2 \sin p \sin \theta \frac{dk \, dq \, dp \, d\tau \, d\zeta \, d\eta}{(4\pi)^3}$$

et comme, pour passer de la formule (31) à la formule (33), il suffit de remplacer dans le second membre  $\frac{1}{\rho}$  par  $\theta$ , on aura encore

$$(43) \quad \square \overline{\omega}_s = D_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Theta}{\omega^2} \overline{\omega}(\lambda, \mu, \nu) e^{k(\rho \cos \delta - \omega t) \sqrt{-1}} \rho^2 \sin p \sin \theta \frac{dk \, dq \, dp \, d\tau \, d\zeta \, d\eta}{(4\pi)^3}$$

Ce n'est pas tout. Si, dans les formules (40) et (41), on remplace

$$k \text{ par } \frac{k}{\cos \delta},$$

on devra en même temps, pour que les limites de l'intégration relative à  $k$  ne soient pas interverties, remplacer

$$dk \text{ par } \frac{dk}{\sqrt{\cos^2 \delta}},$$

et par suite les formules (41), (43) donneront

$$(44) \quad \overline{\omega}_s = \frac{D_s^2}{(4\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\overline{\omega}(\lambda, \mu, \nu)}{\omega^2 F} e^{k\left(\rho - \frac{\omega t}{\cos \delta}\right) \sqrt{-1}} \rho^2 \sin p \sin \theta \frac{dk \, dq \, dp \, d\tau \, d\zeta \, d\eta}{\sqrt{\cos^2 \delta}}$$

$$(45) \quad \square \overline{\omega}_s = \frac{D_s^2}{(4\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Theta}{\omega^2} \overline{\omega}(\lambda, \mu, \nu) e^{k\left(\rho - \frac{\omega t}{\cos \delta}\right) \sqrt{-1}} \rho^2 \sin p \sin \theta \frac{dk \, dq \, dp \, d\tau \, d\zeta \, d\eta}{\sqrt{\cos^2 \delta}}$$

Les formules (41) ou (42) et (43) peuvent être simplifiées dans quelques cas dignes de remarque.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$\rho, \omega, \tau, \lambda, \mu, \nu,$$

soient des fonctions homogènes et du second degré de  $u, v, s$ . La fonction

$$F(u, v, \omega, s)$$

sera elle-même une fonction homogène de  $u, v, \omega, s$ . Donc alors, eu

égard aux formules (8), (29), (35) et (36), l'équation (4) pourra être réduite à

$$(46) \quad F(u, v, \omega, s) = 0,$$

ou même à

$$(47) \quad F(\cos p, \sin p \cos q, \sin p \sin q, \omega) = 0.$$

Alors aussi,  $\theta$  étant une fonction de  $u, v, \omega, s$ , homogène et d'un degré nul, dépendra uniquement de

$$p, q, \omega,$$

par conséquent de  $p, q$ ; et comme, en supposant  $\omega$  réel, on aura généralement

$$(48) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho) e^{\pm k\left(\rho - \frac{\omega t}{\cos \delta}\right) \sqrt{-1}} dk \, d\rho = 2\pi f\left(\frac{\omega t}{\cos \delta}\right),$$

la formule (45) pourra, dans cette supposition, être réduite à

$$(49) \quad \square \overline{\omega}_s = \frac{D_s^2}{2^3 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Theta \overline{\omega}(\lambda, \mu, \nu) \sin p \sin \theta \frac{dq \, dp \, d\tau \, d\zeta}{\cos^2 \delta \sqrt{\cos^2 \delta}},$$

les valeurs de  $\lambda, \mu, \nu$  étant déterminées par les équations

$$(50) \quad x - \lambda = \frac{\omega t}{\cos \delta} \cos \theta, \quad y - \mu = \frac{\omega t}{\cos \delta} \sin \theta \cos \tau, \quad z - \nu = \frac{\omega t}{\cos \delta} \sin \theta \sin \tau.$$

En vertu de l'équation (49), chacune des intégrales générales des mouvements infiniment petits prendra la forme que j'ai indiquée dans le *Bulletin des Sciences* d'avril 1830, et la discussion de ces intégrales conduira immédiatement aux résultats énoncés dans ce Bulletin, et dans le n° 17 des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1<sup>er</sup> semestre 1830.

Au reste, je reviendrai dans un autre Mémoire sur les conséquences importantes qui se déduisent de la formule (49), et de plusieurs autres formules comprises dans l'équation (42). On doit surtout remarquer le cas où la fonction

$$F(u, v, \omega, s) = F(u\sqrt{-1}, v\sqrt{-1}, \omega\sqrt{-1}, s\sqrt{-1})$$



se réduit à une fonction de  $s$  et de  $v^2 + v^2 + w^2 = k^2$ , ou plus généralement à une fonction de  $s$  et de  $W$ , la lettre  $W$  représentant une fonction homogène et du second degré de  $u, v, w$ .

Alors, en vertu d'un théorème que j'ai donné dans la 49<sup>e</sup> livraison des *Exercices de Mathématiques*, l'intégrale quadruple renfermée dans le second membre de l'équation (49) peut se réduire à une intégrale double, comme je l'ai montré dans un Mémoire présenté à l'Académie le 17 mai 1830. (Voir aussi le Mémoire qui termine le XX<sup>e</sup> Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.)

## 42.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Note sur la quantité de lumière réfléchie sous les diverses incidences par les surfaces des corps opaques et spécialement des métaux.*

C. R., t. VIII, p. 533 (15 avril 1839).

Les méthodes que j'ai présentées dans les derniers *Comptes rendus*, et dont j'offrirai les développements à l'Académie dans les prochaines séances, fournissent, comme j'en ai déjà fait la remarque, les moyens de déterminer par le calcul, non seulement la direction et les plans de polarisation des rayons réfléchis ou réfractés par la surface d'un corps transparent ou opaque, mais encore le rapport entre la quantité de lumière réfléchie ou réfractée et la lumière incidente. On sait combien la détermination de ce rapport est délicate, combien les expériences de photométrie exigent de précautions pour que l'on puisse ajouter quelque confiance aux résultats qu'elles donnent; et, pour ce motif, les vrais amis de la Science désirent vivement voir bientôt publiées les importantes observations faites par M. Arago sur la quantité de lumière que réfléchissent les surfaces métalliques. Peut-être, avant cette publication, et dans un sujet si difficile, paraîtrai-je bien téméraire d'oser

offrir à l'Académie les résultats numériques de mes formules. Mais j'espère que l'on me saura gré de cette témérité même. Cela prouvera du moins, de manière à dissiper tous les doutes qui pourraient subsister encore dans quelques esprits, que mes formules ne ressemblent en rien à des formules d'interpolation; et, dans le fait, pour calculer l'intensité de la lumière réfléchie par divers métaux sous diverses incidences, et telle que je la donnerai tout à l'heure, je ne me suis servi ni n'ai voulu me servir d'aucune expérience d'intensité. On me demandera peut-être quelles sont donc les données dont j'ai fait usage: je vais entrer à ce sujet dans quelques détails.

Lorsque la lumière passe de l'air dans un corps homogène, il existe un certain rapport entre l'épaisseur des ondes incidentes et l'épaisseur des ondes réfractées, ou, ce qui revient au même, entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction. Ce rapport a été nommé l'*indice* de réfraction. Lorsque le corps est transparent et isopane, l'indice de réfraction demeure constant pour toutes les incidences. Alors, si l'on néglige dans mes formules les termes relatifs à la dispersion, si d'ailleurs on réduit à l'unité une certaine constante que plusieurs phénomènes, et particulièrement celui de la polarisation complète ou presque complète, sous une certaine incidence, indiquent comme devant avoir à très peu près cette valeur, on pourra déduire du seul indice de réfraction les lois de la polarisation produite par la réflexion ou la réfraction de la lumière, et les formules obtenues seront précisément celles que Fresnel a données. J'ajouterai qu'en vertu d'un théorème découvert par M. Brewster, et qui s'accorde avec ces formules, l'indice de réfraction, étant la tangente trigonométrique de l'angle de polarisation, sera immédiatement fourni par l'observation de cet angle.

Concevons maintenant que le corps donné, restant isopane, cesse d'être transparent et devienne ce qu'on nomme un *corps opaque*; alors les ondes incidentes donneront encore naissance à des ondes réfléchies et à des ondes réfractées. Seulement ces dernières, en se propageant dans le corps opaque, s'affaibliront rapidement, de manière à devenir insensibles à une distance comparable à la longueur d'une ondulation



lumineuse, par exemple, à la distance d'un demi-millième de millimètre. Mais il existera toujours un indice de réfraction qui sera encore le rapport entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction, formés par la normale à la surface réfléchissante avec les perpendiculaires aux plans des ondes incidentes et réfractées. Toutefois, en supposant même qu'on néglige la dispersion et que l'on réduise à l'unité la constante ci-dessus mentionnée, on ne pourra plus déduire les lois des phénomènes du seul indice de réfraction. On aura besoin d'une seconde donnée, qui pourra être le coefficient d'extinction, c'est-à-dire la constante qui indique la rapidité plus ou moins grande avec laquelle le mouvement s'éteint en pénétrant dans le corps opaque. Ainsi, en résumé, des formules qui représentent, avec une approximation suffisante dans la plupart des cas, les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, peuvent se déduire, pour les corps transparents, d'une seule donnée, savoir, l'indice de réfraction, et pour les corps opaques, de deux données, savoir, l'indice de réfraction et le coefficient d'extinction. On sent parfaitement que nos méthodes nous conduisent ici à une conclusion entièrement conforme à la nature des faits. Il est effectivement très naturel, dans la théorie de la lumière, d'établir une distinction fondamentale entre les corps transparents et les corps opaques. Si, pour ces derniers, la théorie exige deux données au lieu d'une, cela tient à ce qu'effectivement ils ont la double propriété de réfracter plus ou moins la lumière et de l'éteindre plus ou moins rapidement. Il n'est pas plus permis de faire abstraction de la seconde propriété que de faire abstraction de la première; et, après cette explication, personne ne s'étonnera de ce que, dans les séances précédentes, j'ai dit que, pour établir les lois de la réflexion à la surface des corps opaques, j'avais besoin d'emprunter deux données à l'expérience.

Mais on sera surpris davantage de ce qui va suivre. En voyant que, pour établir les lois des phénomènes et calculer l'intensité de la lumière réfléchie par un corps opaque, je réclamaï deux observations, quelques personnes ont pu s'imaginer que ces deux observations devaient nécessairement fournir l'intensité de la lumière sous deux incidences dis-

tinctes. Cependant il n'en est rien, et les nombres que j'ai présentés dans la dernière séance, ceux même que renfermait le Mémoire du 4 février dernier, ont été obtenus par une tout autre voie. Pour déterminer l'intensité de la lumière réfléchie par la surface d'un corps opaque, mes formules supposent uniquement que l'on emprunte à l'observation l'incidence principale et l'azimut principal de réflexion, ou, en d'autres termes, l'angle d'incidence appelé par quelques auteurs *angle de polarisation maximum*, et l'azimut de polarisation du rayon réfléchi sous cette incidence, dans le cas où l'azimut du rayon incident est de  $45^\circ$ . On pourrait aussi remplacer l'azimut de réflexion principal par l'azimut du rayon restauré, après deux réflexions sous l'incidence principale, les tangentes de ces deux azimuts étant, comme je l'ai dit, tellement liées l'une à l'autre, que la seconde soit le carré de la première. Voilà les seules données que j'emprunte à l'expérience; mais elles sont l'une et l'autre indispensables. L'une sans l'autre ne suffirait pas; et j'ajouterai que, pour éviter toute équivoque, lorsqu'on voudra comparer mes formules à l'expérience, on devra toujours avoir déduit préalablement ces données d'observations faites sur le corps même auquel les expériences seront relatives.

Après avoir établi les formules générales que j'ai l'honneur d'offrir à l'Académie, je les ai appliquées à quatre métaux, savoir: à l'argent, au mercure, au métal des miroirs et à l'acier. J'ai supposé, d'après les observations de M. Brewster, que les incidences principales relatives à ces quatre métaux étaient respectivement

$73^\circ$ ,  $78^\circ 27'$ ,  $76^\circ$ ,  $75^\circ$ .

Des expériences du même physicien, les unes directes, les autres indirectes, et relatives au rayon restauré par deux réflexions sous l'incidence principale, m'ont fourni les azimuts de réflexion principaux. Ces azimuts sont, d'après les expériences directes,

$42^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $32^\circ$ ,  $30^\circ 30'$ ,

et, d'après les expériences indirectes,

$42^\circ 23'$ ,  $34^\circ 56'$ ,  $31^\circ 47'$ ,  $28^\circ 56'$ .



Cela posé, l'intensité de la lumière incidente étant prise pour unité, mes formules donnent, pour l'intensité de lumière réfléchie par les quatre métaux : 1° sous l'incidence perpendiculaire, si l'on fait usage des expériences directes,

0,87, 0,75, 0,63, 0,58,

et si l'on fait usage des expériences indirectes,

0,89, 0,75, 0,63, 0,55;

2° sous l'incidence principale, si l'on fait usage des expériences directes,

0,87, 0,70, 0,62, 0,59,

et si l'on fait usage des expériences indirectes,

0,89, 0,70, 0,62, 0,56.

On voit ici que, à deux ou trois centièmes près, les expériences directes et indirectes fournissent toujours les mêmes nombres pour l'intensité de la lumière réfléchie. D'ailleurs, il suit de ce qui précède : 1° que la quantité de lumière réfléchie par les métaux sous l'incidence perpendiculaire est considérable; 2° que dans le passage de l'incidence perpendiculaire à l'incidence de 73° et au delà, la variation de cette intensité est presque insensible. Ces conclusions, et même les chiffres ci-dessus présentés, s'accordent, aussi bien qu'on pouvait le désirer, avec le petit nombre des expériences de photométrie déjà connues. Ainsi, en particulier, une expérience de Bouguer donne précisément 0,75 pour l'intensité de la lumière réfléchie par le mercure sous l'angle de 11°,5; et M. Potter, ayant mesuré la lumière réfléchie sous diverses incidences par l'acier et par le métal des miroirs, a obtenu des nombres fort peu différents les uns des autres, dont la moyenne est 0,66 pour le métal des miroirs, et 0,56 ou 0,57 pour l'acier. Enfin M. Biot, en rapportant les expériences de Bouguer, dit expressément :

« Pour les corps dont la force réfléchissante est énergique, la quantité de lumière réfléchie sous diverses incidences n'éprouve que des variations très faibles. » C'est aussi ce qu'indiquent mes formules.

Ainsi, la lumière réfléchie sur la surface de l'acier, sous les incidences de

0°, 10°, 30°, 50°, 73°, 75°,

est, d'après ces formules et les expériences indirectes,

0,55, 0,55, 0,55, 0,54, 0,55, 0,56.

A la rigueur, en partant de l'incidence perpendiculaire, cette intensité commence par recevoir un léger accroissement à peine sensible, puis elle diminue d'environ  $\frac{1}{100}$  jusqu'à 73° d'incidence.

Au reste, les résultats seront très différents si, au lieu de lumière ordinaire, on emploie de la lumière polarisée. Je trouve en effet qu'alors l'intensité de la lumière réfléchie croît toujours, à partir de l'incidence perpendiculaire, ou commence par décroître sensiblement pour croître ensuite, après avoir atteint une valeur *minimum*, selon que le rayon incident est polarisé suivant le plan d'incidence, ou perpendiculairement à ce plan. Pour l'acier, en particulier, l'intensité de la lumière réfléchie sous l'incidence principale est, d'après les expériences directes,

0,87 dans le premier cas, 0,30 dans le second,

et d'après les expériences indirectes,

0,86 dans le premier cas, 0,26 dans le second,

Enfin, mes formules me permettent de calculer pour les corps opaques les coefficients d'extinction. Ces coefficients, qui se trouvent ici donnés pour la première fois, sont, pour les quatre métaux ci-dessus mentionnés,

2,95, 4,41, 3,39, 3,04.

J'obtiens aussi les indices de réfraction de ces métaux. Ce qui étonnera peut-être les physiciens, et ce qui, je l'avoue, m'a d'abord causé à moi-même quelque surprise, c'est que les indices dont il s'agit sont beaucoup plus faibles qu'on ne le suppose communément. Ce que l'on donnait ordinairement pour l'indice de réfraction d'un métal se rapproche bien davantage de la racine carrée de la somme des carrés de deux



nombres, dont l'un représente cet indice, et l'autre le coefficient d'extinction. Ainsi, par exemple, on se disputait pour savoir si l'indice de réfraction du mercure était

$$4,9 \text{ ou } 5,8.$$

Cet indice est en réalité

$$1,7$$

environ, par conséquent trois fois plus petit qu'on ne l'avait supposé.

*Nota.* — Relativement aux expériences de Bouguer, voici ce que dit M. Biot (dans son *Traité de Physique*, t. IV, p. 776) : « Je me bornerai à rapporter ici quelques déterminations d'intensités obtenues par Bouguer. Quoique les procédés dont il a fait usage paraissent comporter quelques incertitudes, étant uniquement fondés sur la réduction des diverses lumières à l'égalité par la diminution des ouvertures qui les admettent, ou par l'augmentation de leur distance, il paraît qu'en général ses résultats sont conformes à la vérité; ce qui n'est pas surprenant, quand l'adresse de l'observateur supplée à l'imperfection des instruments. »

De plus, dans son *Précis* (p. 621), M. Biot ajoute : « M. Arago a bien voulu m'assurer que les résultats de Bouguer rapportés plus haut lui avaient paru exacts. » Au reste, en attendant les expériences que M. Arago a promises, et que j'appelle de tous mes vœux, je n'avais d'autre ressource que de comparer mes formules aux résultats obtenus par Bouguer et Potter, et il me suffisait que mes nombres ne fussent pas en contradiction avec ceux que l'expérience leur a donnés.

*Formules pour la détermination de l'intensité de la lumière réfléchie par la surface d'un corps opaque, et spécialement d'un métal.*

Concevons que l'on fasse tomber un rayon lumineux sur la surface d'un corps opaque, mais isophane, par exemple d'un métal. Soient  $\tau$  l'angle d'incidence formé par le rayon lumineux avec la normale à la surface réfléchissante;

$l$  la longueur des ondulations du rayon incident que nous supposons propagé dans l'air ou dans un milieu isophane;

$k = \frac{2\pi}{l}$  la caractéristique de ce même rayon;

$k'$  la caractéristique imaginaire du rayon réfracté, dans le cas où l'on a  $\tau = 0$ ;

$\frac{k'}{k}$  le coefficient caractéristique du corps opaque, pour  $\tau = 0$ .

Enfin  $\theta$  le module et  $\varepsilon$  l'argument du coefficient caractéristique  $\frac{k'}{k}$ , en sorte qu'on ait

$$\frac{k'}{k} = \theta e^{\varepsilon \sqrt{-1}} = \theta \cos \varepsilon + \sqrt{-1} \theta \sin \varepsilon.$$

Le produit  $\theta \cos \varepsilon$  représentera, pour l'incidence perpendiculaire, le rapport entre les épaisseurs des ondes incidentes et réfractées, ou, ce qui revient au même, le rapport entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction; il sera donc ce qu'on nomme l'indice de réfraction. Quant à la constante  $\theta \sin \varepsilon$ , dont le produit par  $k$  sera le coefficient de la distance à la surface réfléchissante, dans le logarithme népérien de l'amplitude du rayon réfracté, elle pourra être censée représenter le coefficient d'extinction. Cela posé, imaginons que la lumière incidente, mesurée par le carré de l'amplitude du rayon incident, étant prise pour unité, on nomme

$$I^2 \text{ ou } J^2$$

l'intensité de la lumière réfléchie, selon que le rayon incident est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence ou suivant ce même plan. On aura, sous l'incidence perpendiculaire,

$$(1) \quad I^2 = J^2 = \tan^2 \left( \psi - \frac{\pi}{4} \right),$$

la valeur de l'angle  $\psi$  étant donnée par la formule

$$(2) \quad \cot \psi = \cos \varepsilon \sin (2 \text{ arc tang } \theta).$$

Si, l'angle  $\tau$  cessant d'être nul, l'incidence devient oblique, la constante imaginaire

$$\theta e^{\varepsilon \sqrt{-1}}$$



se trouvera remplacée par une autre

$$Ue^{\nu\sqrt{-1}},$$

dont le module  $U$  et l'argument  $\nu$  seront déterminés par les deux formules

$$(3) \quad \cot(2\nu - \varepsilon) = \cot \varepsilon \cos \left( 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sin \tau}{\theta} \right), \quad U = \left( \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \theta.$$

Les valeurs des constantes réelles  $U$  et  $\nu$  étant ainsi déterminées, on calculera les intensités  $I^2$  et  $J^2$  à l'aide des équations

$$(4) \quad I^2 = \operatorname{tang} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), \quad J^2 = \operatorname{tang} \left( \chi - \frac{\pi}{4} \right),$$

dans lesquelles on aura

$$(5) \quad \begin{cases} \cot \varphi = \cos(\gamma \varepsilon - \nu) \sin \left( 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{U}{\theta^2 \cos \tau} \right), \\ \cot \chi = \cos \nu \sin \left( 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\cos \tau}{U} \right). \end{cases}$$

Les formules qui précèdent supposent connues les valeurs de  $\theta$  et de  $\varepsilon$  relatives à chaque métal. Pour déduire ces valeurs de l'incidence principale et de l'azimut principal de réflexion, il suffit d'observer que, dans le cas particulier où l'angle  $\tau$  représente l'incidence principale, on a

$$(6) \quad \nu = 2\Pi, \quad U = \sin \tau \operatorname{tang} \tau,$$

$\Pi$  désignant l'azimut principal de réflexion, et de plus

$$(7) \quad \operatorname{tang}(2\varepsilon - \nu) = \operatorname{tang} \nu \cos(\pi - 2\tau), \quad \theta = \left( \frac{\sin 2\nu}{\sin 2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} U.$$

Enfin, pour obtenir l'intensité d'un rayon de lumière ordinaire, modifié par la réflexion, j'ai admis avec tous les physiciens qu'il suffisait de calculer la demi-somme  $\frac{I^2 + J^2}{2}$  des intensités de deux rayons primitivement égaux mais polarisés, l'un suivant le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan.

C'est à l'aide des formules précédentes que j'ai obtenu les nombres donnés ci-dessus. Comme, pour les divers métaux, le rapport

$$\frac{1}{\theta}$$

est peu considérable, il en résulte que, dans la réflexion sur un métal, les formules (3) donnent sensiblement

$$(8) \quad \nu = \varepsilon, \quad U = \theta.$$

Alors aussi le coefficient d'extinction et l'indice de réfraction n'éprouvent que des variations peu sensibles quand le rayon incident s'écarte de la normale à la surface réfléchissante, et les formules (5) peuvent être, dans une première approximation, remplacées par les suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} \cot \varphi = \cos \varepsilon \sin \left( 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{\theta \cos \tau} \right), \\ \cot \chi = \cos \varepsilon \sin \left( 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\cos \tau}{\theta} \right). \end{cases}$$

Les formules (9), appliquées à l'acier depuis  $\tau = 0$  jusqu'à  $\tau = 75^\circ$ , m'ont donné, à moins de  $\frac{1}{100}$  près, les mêmes résultats que les formules (5). D'ailleurs, en vertu des formules (9), si l'angle  $\tau$  vient à croître en partant de zéro, l'angle  $\chi$  et par suite la valeur de  $J^2$  croîtront constamment, tandis que l'angle  $\varphi$  et par suite la valeur de  $I^2$  commenceront par décroître, pour croître ensuite, après avoir atteint une valeur *minimum* correspondante à la valeur de  $\tau$  que détermine la formule

$$(10) \quad \cos \tau = \frac{1}{\theta}.$$

La valeur *minimum* de  $I^2$ , calculée approximativement à l'aide des formules (4) et (9), sera

$$(11) \quad I^2 = \operatorname{tang}^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$



A la suite de cette lecture, il s'élève une discussion entre M. Poisson et M. Cauchy (\*).

## 43.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Note sur la nature des ondes lumineuses et généralement de celles qui se propagent dans les systèmes de molécules.*

C. R., t. VIII, p. 582 (22 avril 1839).

Après avoir entendu la lecture de la Note insérée dans le dernier *Compte rendu*, M. Poisson a témoigné le désir que je donnasse quelques éclaircissements sur la nature de ce que j'appelle les vibrations et les ondes lumineuses. J'ai répondu que l'on pouvait considérer ces vibrations sous deux points de vue différents et à deux époques distinctes, sa-

(\*) *Note relative au Compte rendu de la dernière séance; par M. Poisson.*

C. R., t. VIII, p. 581 (22 avril 1839).

Dans cette séance, j'ai prié M. Cauchy de dire si le mouvement, dont il s'occupe maintenant à déterminer les lois, comprend à la fois la masse entière du fluide, ou bien s'il est renfermé à chaque instant dans une étendue d'une petite largeur, de telle sorte qu'au delà et en deçà le fluide soit rigoureusement en repos, ce qui constitue la condition essentielle qui doit être remplie, avant tout, dans la théorie des ondes lumineuses. Peut-être parce que je ne me serai pas assez clairement expliqué, notre confrère n'a pas répondu, d'une manière précise, à cette question, d'ailleurs très simple et très naturelle dans nos discussions.

En parlant incidemment des expériences de Bouguer sur la proportion de la lumière réfléchie au passage d'un milieu à un autre, j'ai dit qu'elles ne s'accordaient pas toujours assez bien avec le résultat du calcul, pour servir de confirmation à la théorie, si toutefois on les regarde comme exactes. Ainsi la formule à laquelle je suis parvenu, il y a déjà longtemps, pour exprimer cette proportion sous l'incidence perpendiculaire, et dont celle de M. Cauchy ne doit pas différer dans ce cas particulier, donne, par exemple (\*), 0,020 pour la lumière réfléchie au passage de l'air dans l'eau, et Bouguer a trouvé 0,018, ce qui s'en écarte, il est vrai, assez peu; mais, pour la lumière réfléchie en passant de l'air dans le verre, cette formule donne 0,046, tandis que Bouguer ne trouve qu'à peu près moitié de cette fraction, c'est-à-dire 0,025 de la lumière incidente.

Je n'ai point encore étudié l'analyse de M. Cauchy, qui se rapporte à la réflexion sur les surfaces des corps opaques, et, dans ce que j'ai dit, je n'ai voulu y faire aucune allusion.

(\*) *Mémoires de l'Académie*, t. II, p. 380 et 381.

voir : 1° en recherchant de quelle manière un mouvement, d'abord imprimé à l'éther, en un point de l'espace, donne naissance à des ondes terminées par des surfaces courbes, mais qui s'étendent bientôt de manière à pouvoir être, sans erreur sensible, confondues avec leurs plans tangents; 2° en considérant les ondes déjà propagées et parvenues à une grande distance du centre d'ébranlement, par conséquent, des ondes planes, simples ou composées; et cherchant immédiatement la nature de celles qui se propagent dans un milieu isopane ou non isopane. J'ai ajouté que j'avais successivement considéré la question sous ces deux points de vue. Je l'ai traitée en effet sous ce double rapport, non seulement dans les Leçons que j'ai données en 1830 au Collège de France, mais aussi dans les divers Mémoires que j'ai publiés et présentés à l'Académie. Je vais entrer à ce sujet dans quelques détails.

Dans un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à un axe fixe quelconque, est déterminé par une équation linéaire aux différences partielles qui renferme, avec le déplacement pris pour variable principale, les trois coordonnées  $x, y, z$  et le temps  $t$ . Ainsi le calcul de ce déplacement dépend de l'intégration d'une équation linéaire à quatre variables indépendantes. D'ailleurs, en appliquant à une semblable équation la méthode d'intégration que j'ai donnée dans le XIX<sup>e</sup> Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, on obtient, pour représenter le déplacement d'une molécule, une intégrale définie sextuple, renfermant sous le signe  $\int$  une exponentielle népérienne dont l'exposant est une fonction linéaire des variables indépendantes; le coefficient du temps dans cet exposant étant lié aux coefficients des coordonnées par une certaine équation dont il doit être une racine. Cette dernière équation, ou plutôt celle qu'on en déduit en remplaçant les coefficients des variables indépendantes par ces variables mêmes, est ce que je nommerai l'*équation caractéristique*. J'appellerai son premier membre *fonction caractéristique*, et la surface que la même équation représente au bout du temps  $t$ , *surface caractéristique*.





Lorsque la fonction caractéristique est homogène, l'intégrale sextuple se réduit à une intégrale quadruple, comme je l'ai montré dans un Mémoire présenté à l'Académie le 17 mai 1830 et inséré par extrait dans le *Bulletin des Sciences* du mois d'avril de cette même année. Si l'on considère en particulier le cas où, dans le premier instant, la variable principale, ayant toutes ses dérivées nulles, n'offre elle-même de valeur sensible que dans le voisinage de l'origine des coordonnées, cette variable principale n'aura plus de valeur sensible, au bout du temps  $t$ , dans tout l'espace que terminera une certaine surface courbe dont j'ai appris à former l'équation dans le *Bulletin* déjà cité. Donc alors la propagation du mouvement dans l'espace donnera naissance à une onde sonore, lumineuse, ... terminée par la surface dont il s'agit. Cette surface est ce qu'on appelle la *surface des ondes*. Si au premier instant les dérivées de la variable principale cessaient d'être nulles, comme cette variable même, dans les points voisins de l'origine des coordonnées, alors, dans l'intérieur de la surface des ondes, la variable principale ne serait pas nulle, mais acquerrait une valeur constante qui pourrait différer de zéro.

Si l'équation caractéristique, considérée comme propre à déterminer le temps  $t$  en fonction des coordonnées  $x, y, z$ , se décompose en équations du second degré, elle représentera le système de plusieurs ellipsoïdes, et la variable principale sera la somme de plusieurs parties dont chacune, vérifiant une équation aux différences partielles du second ordre, pourra être représentée par une intégrale double. Alors aussi la surface de l'un des ellipsoïdes étant prise pour surface caractéristique, la surface des ondes curvilignes correspondante sera celle d'un second ellipsoïde tellement constitué que les rayons vecteurs des deux ellipsoïdes, multipliés par le cosinus de l'angle compris, fourniront un produit égal au carré du temps. Alors enfin, le mouvement, supposé d'abord circonscrit dans un très petit espace autour de l'origine des coordonnées, ne sera sensible au bout du temps  $t$  que dans le voisinage de la surface des ondes et dans une zone terminée par deux autres surfaces que l'on pourra considérer, pour ainsi dire, comme

parallèles à la première. Ces deux nouvelles surfaces sont les deux enveloppes, intérieure et extérieure, qu'engendrerait la surface des ondes si, en rendant cette dernière mobile avec son centre, on faisait successivement coïncider ce même centre avec chacune des molécules primitivement déplacées ou mises en mouvement. Au bout du temps  $t$ , le système donné sera en repos, tant en avant qu'en arrière de la zone dont il s'agit. Les molécules situées en avant de la zone ne seront pas encore déplacées, et les molécules situées en arrière, c'est-à-dire entre la zone et l'origine des coordonnées, conserveront les déplacements qu'elles acquièrent au moment où la surface intérieure de la zone les atteint en vertu de son mouvement progressif.

Nous avons ici supposé que la fonction caractéristique était homogène. C'est dans cette hypothèse seulement que la zone ci-dessus mentionnée conserve une épaisseur constante. Dans la supposition contraire, l'épaisseur de cette zone croît avec le temps, et quelquefois même se propage instantanément jusqu'aux dernières limites du système de molécules donné. C'est ce que l'on peut reconnaître à l'aide des considérations suivantes.

Un déplacement moléculaire, étant la variable principale d'une équation linéaire aux différences partielles, sera généralement représenté par une intégrale définie sextuple, renfermant sous le signe  $f$  une exponentielle népérienne dont l'exposant sera une fonction linéaire des variables indépendantes. Il sera donc la somme des valeurs que cette variable principale, considérée comme propre à représenter un déplacement symbolique, pourrait acquérir dans une infinité de mouvements simples superposés les uns aux autres. Donc les lois de mouvements infiniment petits quelconques des systèmes de molécules peuvent se déduire de la considération des seuls mouvements simples, et les ondes curvilignes peuvent être censées formées par la superposition d'une infinité d'ondes planes du genre de celles dont nous nous sommes occupés dans les précédents Mémoires.

Ce n'est pas tout. Si, au premier instant, le mouvement et les déplacements moléculaires se trouvent circonscrits dans un espace dont une



ou plusieurs dimensions soient très petites, l'état initial du système de molécules pourra être également représenté par un système d'ondes planes initiales, superposées en nombre infini les unes aux autres, soit que l'on considère les ondes de chaque espèce comme s'étendant jusqu'aux dernières limites du système de molécules, soit que l'on réduise chaque onde à la portion de cette onde que renferme l'espace dont il s'agit. En attribuant aux ondes initiales une étendue indéfinie, on ne changerait rien aux données du problème, attendu qu'elles se neutraliseront partout les unes les autres, excepté dans l'espace dont nous avons parlé. Mais on arrivera plus facilement à reconnaître les lois de la propagation des mouvements infiniment petits si chaque onde initiale est censée ne pas s'étendre au delà de ce même espace. On parviendra ainsi aux résultats que nous allons indiquer.

Supposons, pour fixer les idées, que le mouvement se trouve d'abord circonscrit dans un espace dont une seule dimension soit très petite, savoir, dans une tranche très mince, comprise entre deux plans parallèles situés à égales distances d'un plan invariable passant par l'origine des coordonnées. Supposons d'ailleurs que, dans cette tranche, les déplacements et les vitesses initiales des molécules restent les mêmes pour tous les points situés à la même distance  $x$  du plan invariable. L'état initial du système des molécules, dans la tranche dont il s'agit, pourra être considéré comme résultant de la superposition d'une infinité d'ondes planes, correspondantes à des longueurs d'ondulation diverses, mais dont les plans seront tous parallèles au même plan invariable; et, comme l'exposant de chaque exponentielle imaginaire pourra être réduit à une fonction linéaire de deux variables indépendantes, savoir de la distance  $x$  et du temps  $t$ , l'équation à laquelle devait satisfaire les coefficients des variables indépendantes pourra être regardée comme établissant une relation entre le coefficient  $k$  de  $x$  et le coefficient  $s$  de  $t$ . Ces coefficients n'offriront pas de parties réelles si le mouvement se propage sans s'affaiblir, et alors ils seront réciproquement proportionnels, le premier à la longueur d'ondulation, le second à la durée des vibrations moléculaires, tandis que leur rapport  $\Omega$  expri-

mera la vitesse de propagation d'une onde plane. De plus, suivant que l'équation dont il s'agit, résolue par rapport à  $s$ , fournira une ou plusieurs valeurs de  $s^2$ , considéré comme fonction de  $k$ , on verra correspondre à chaque longueur d'ondulation une ou plusieurs vitesses de propagation différentes. Enfin, tandis que les longueurs d'ondulation des diverses ondes superposées pourront varier de zéro à l'infini, leurs vitesses de propagation pourront, ou demeurer toutes égales entre elles, ou varier entre des limites finies, ou avoir pour limite inférieure une vitesse finie ou nulle, et pour limite une limite supérieure infinie. Dans le premier cas, la portion du système, primitivement ébranlée et représentée par une tranche très mince, se trouvera remplacée, au bout du temps  $t$ , par deux tranches semblables et de même épaisseur, situées de deux côtés opposés du plan invariable et à distances égales de l'origine des coordonnées. Ces deux tranches se mouvront en sens contraire avec la vitesse de propagation  $\Omega$  commune à toutes les ondes planes, et renfermeront, au bout du temps  $t$ , les seules molécules qui ne soient pas en repos. Alors, en effet, il n'y aura pas encore de déplacements ni de mouvements produits dans tout l'espace situé en avant de chaque tranche, et il n'y en aura plus dans l'espace qui le suit. C'est ce qui arrive en particulier lorsque le son se propage dans l'air, et lorsque la lumière se propage dans le vide.

Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque les vitesses de propagation des ondes primitivement superposées, sans être toutes égales entre elles, sont renfermées entre des limites finies, la portion du système ébranlée au premier instant et représentée par une tranche très mince se trouve remplacée au bout du temps  $t$  par deux tranches au moins, situées des deux côtés opposés du plan invariable, et qui n'offrent plus l'épaisseur de la première tranche, mais une épaisseur variable dont l'accroissement, proportionnel au temps, est plus ou moins considérable suivant que les limites extrêmes des vitesses de propagation comprennent entre elles un intervalle plus ou moins grand. C'est ce qui paraît arriver dans la théorie de la lumière lorsqu'on ne suppose pas les rayons lumineux propagés dans le vide, et alors c'est la diffé-



rence-entre les vitesses de propagation des divers rayons simples qui donne naissance au phénomène de la dispersion.

Enfin, dans le troisième cas, c'est-à-dire lorsque les vitesses de propagation des ondes primitivement superposées, ayant pour limite inférieure une vitesse finie ou nulle, ont pour limite supérieure une vitesse infinie, le mouvement initial imprimé aux molécules, à l'instant où l'on compte  $t = 0$ , se propage, aussitôt que le temps vient à croître, jusqu'à une distance infinie, ou plutôt jusqu'aux extrémités du système de molécules donné. Or c'est là précisément ce qui arrive dans la propagation des ondes liquides. En effet, si l'on soulève ou si l'on déprime une tranche très mince de la surface d'un liquide, le mouvement se transmettra instantanément jusqu'aux limites de cette surface; et, comme alors les vitesses de propagation varieront depuis l'infini jusqu'à zéro, on pourra voir succéder les unes aux autres une infinité d'ondes liquides, mais dont les dernières, propagées avec des vitesses de plus en plus petites, deviendront de plus en plus sensibles<sup>(1)</sup>.

Si les molécules étaient primitivement déplacées ou mises en mouvement, non plus dans toute l'étendue de la tranche très mince dont nous avons parlé, mais seulement dans une portion de cette tranche; et si d'ailleurs, dans cette portion, le déplacement et la vitesse initiale d'une molécule dépendaient uniquement de la distance au plan invariable qui divise la tranche en parties égales, le mouvement initial de la portion dont il s'agit pourrait toujours être censé résulter de la superposition d'une infinité d'ondes planes; mais chacune de ces ondes planes, prise dans l'état initial, ou considérée comme déjà propagée au bout d'un temps quelconque  $t$ , ne subsisterait plus qu'en partie. Enfin, si au premier instant les molécules étaient déplacées ou mises en mouvement d'une manière quelconque dans une portion du système dont les trois dimensions seraient très petites, et qui s'étendrait en tous sens à de très petites distances autour de l'origine des coordonnées, l'état initial de cette portion du système pourrait être censé résulter

(1) On peut consulter à ce sujet le Mémoire de M. Poisson sur la théorie des ondes à la surface d'un liquide, et celui que j'ai publié sur le même sujet (*Oeuvres de C.* — S. I, t. I).

de la superposition d'une infinité d'ondes planes, renfermées dans des plans divers, et offrant des longueurs d'ondulation diverses; et la propagation simultanée de ces ondes planes, avec des vitesses égales ou inégales, donnerait naissance à une zone mobile d'épaisseur constante ou variable, terminée par des surfaces sphériques, elliptiques, etc., comme je l'expliquerai dans un autre Mémoire.

D'après ce qu'on vient de dire, on voit comment s'opère généralement la séparation des ondes planes qui, renfermées dans des plans divers et offrant des longueurs d'ondulation diverses, doivent être censées superposées les unes aux autres, si l'on veut que leur système représente l'état initial d'une très faible portion d'un système de molécules, circonscrit dans un espace dont les trois dimensions soient très petites.

Celles de ces ondes planes qui se trouvent contenues dans des plans divers, ou plutôt les parties de ces mêmes ondes que renferme primitivement l'espace dont il s'agit, se transportent dans diverses directions indiquées par divers rayons vecteurs de la surface des ondes, et se séparent ainsi, de telle sorte qu'au bout du temps  $t$  les seules dont la superposition subsiste soient des ondes planes contenues dans des plans très peu inclinés les uns sur les autres, et passant par un même point de la surface des ondes. Ces plans venant à se déplacer ultérieurement, leur point de rencontre se déplacera lui-même suivant une certaine droite, avec une vitesse de propagation distincte de celle des ondes planes. La série des positions que prend ce point de rencontre, tandis que les ondes se déplacent, constitue, dans la théorie de la lumière, ce qu'on nomme un *rayon lumineux*, et l'on se trouve ainsi ramené, pour la définition d'un rayon, aux considérations mêmes dont je m'étais déjà servi dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* et dans la 51<sup>e</sup> livraison des *Exercices de Mathématiques* (p. 71). A ce que j'avais dit alors on doit ajouter seulement que, pour obtenir des ondes renfermées dans des plans très peu inclinés les uns sur les autres, il suffit, dans le cas général, de considérer le mouvement infiniment petit d'un système de molécules, non à partir du premier instant où ce



mouvement est imprimé à une portion du système, mais à partir de l'un des instants qui suivent le premier.

Quant à la séparation des ondes qui offrent des longueurs d'ondulation diverses, elle ne peut s'effectuer que dans le cas où une différence entre les longueurs d'ondulation entraîne une différence correspondante entre les vitesses de propagation; comme il arrive effectivement quand la lumière se propage, non dans le vide, mais dans les corps diaphanes.

Observons encore que, l'état initial d'un système de molécules, ou plutôt d'une portion de ce système, étant arbitraire, le système d'ondes planes qui représente cet état initial, et qui s'en déduit par une formule connue, peut varier à l'infini, comme cet état même. Il en résulte que, parmi les ondes planes correspondantes aux diverses longueurs d'ondulation, les unes doivent être très sensibles, tandis que d'autres peuvent l'être beaucoup moins et disparaître presque entièrement. On ne devra donc pas être surpris de voir, dans la théorie de la lumière, les rayons doués de réfrangibilités diverses, lorsqu'on les disperse par le moyen du prisme, offrir des intensités variables, non seulement avec les longueurs d'ondulation correspondantes, mais encore avec la nature des corps dont ils émanent; et l'on devrait s'étonner au contraire s'il en était autrement. Ainsi doivent être évidemment expliquées les raies brillantes ou obscures découvertes dans le spectre solaire, et dans ceux que fournissent les autres corps lumineux. C'est pour le même motif que la forme et la vitesse des ondes propagées à la surface d'un liquide varient avec la forme de la portion de cette surface, primitivement soulevée ou déprimée. J'ajouterai que M. d'Ettingshausen m'a dit, il y a plusieurs années, être parvenu lui-même à l'explication des raies du spectre dans la théorie des ondulations. Mais j'ignore si cette explication coïncide précisément avec celle que je viens d'exposer.

Je m'estimerais heureux si les éclaircissements que je viens de donner paraissaient, aux yeux de notre illustre confrère, lever complètement les difficultés que pouvait lui offrir la lecture de mes précédents

dents Mémoires, et je le prie d'agréer ici mes remerciements de ce que, par la question qu'il a bien voulu m'adresser, il m'a donné l'occasion d'approfondir ce sujet important, et d'arriver ainsi à des résultats dont la généralité et la simplicité m'ont surpris moi-même et surprendront peut-être, au premier abord, les personnes adonnées à la culture de la Physique mathématique.

Je joins ici les formules qui comprennent les propositions ci-dessus énoncées. Elles composent les cinquième et sixième paragraphes du Mémoire inséré dans le *Compte rendu* de la séance du 8 avril <sup>(1)</sup>.

## 44.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intensité de la lumière polarisée et réfléchie par des surfaces métalliques.*

C. R., t. VIII, p. 658 (29 avril 1839).

Dans la Note que renferme le *Compte rendu* de la séance du 8 avril, j'ai donné la quantité de lumière réfléchie sous l'incidence perpendiculaire et sous l'incidence principale par quatre métaux divers, et j'ai ajouté que les nombres obtenus ne seraient plus les mêmes si l'on substituait à la lumière ordinaire de la lumière polarisée. Effectivement, si, en prenant pour unité l'intensité de la lumière incidente, on représente l'intensité de la lumière réfléchie par  $I'$  ou par  $I''$ , selon que les rayons sont polarisés perpendiculairement au plan d'incidence ou suivant ce même plan, et si l'on fait réfléchir les rayons sous l'incidence principale, on tirera des formules que j'ai données dans la séance du 8 avril :

<sup>(1)</sup> *Œuvres de C.* — S. I, t. IV, p. 237 et suiv.



1° En adoptant pour l'azimut principal de réflexion la valeur déduite des observations directes,

	Pour			
	l'argent.	le mercure.	le métal des miroirs.	l'acier.
$J^2$ .....	0,962	0,945	0,897	0,870
$I^2$ .....	0,780	0,463	0,350	0,302
$\frac{I^2 + J^2}{2}$ .....	0,871	0,704	0,623	0,586

2° En adoptant pour l'azimut principal de réflexion la valeur tirée des observations indirectes,

	Pour			
	l'argent.	le mercure.	le métal des miroirs.	l'acier.
$J^2$ .....	0,967	0,944	0,895	0,859
$I^2$ .....	0,805	0,461	0,344	0,263
$\frac{I^2 + J^2}{2}$ .....	0,886	0,702	0,620	0,561

Donc, en s'arrêtant aux valeurs moyennes entre celles que l'on déduit de l'observation directe et de l'observation indirecte de l'azimut principal, on aura :

	Pour			
	l'argent.	le mercure.	le métal des miroirs.	l'acier.
$J^2$ .....	0,96	0,94	0,90	0,86
$I^2$ .....	0,79	0,46	0,35	0,28
$\frac{I^2 + J^2}{2}$ .....	0,88	0,70	0,62	0,57

En calculant pour l'acier les valeurs de  $I^2$  et de  $J^2$  relatives à diverses incidences, et adoptant, pour l'azimut principal de réflexion, la valeur déduite de l'observation indirecte, on trouve, pour les incidences de

	0°.	10°.	30°.	50°.	73°.	75°.
$J^2$ .....	0,548	0,553	0,596	0,683	0,814	0,859
$I^2$ .....	0,548	0,543	0,499	0,402	0,261	0,263
$\frac{I^2 + J^2}{2}$ .....	0,548	0,548	0,547	0,542	0,548	0,561

45.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Observations de M. A. CAUCHY, sur la Lettre de M. Mac-Cullagh* (1).

C. R., t. VIII, p. 965 (17 juin 1839).

D'après la Lettre précédente, on pourrait croire que mes travaux sur la lumière réfléchiée par un corps opaque datent seulement de l'année 1839. Si telle est encore aujourd'hui la croyance de M. Mac-Cullagh, cela tient évidemment à ce qu'il n'a pas connu, ou, du moins, à ce qu'il n'a pas suffisamment approfondi les divers articles ou Mémoires que j'ai publiés sur la théorie de la lumière. Pour que les personnes

(1) Réclamation de priorité relativement à certaines formules pour calculer l'intensité de la lumière. — Traduction d'une Lettre de M. MAC-CULLAGH à M. ARAGO.

C. R., T. VIII, p. 961 (17 juin 1839).

Je prends la liberté de vous adresser quelques remarques relatives au sujet dont s'occupe en ce moment M. Cauchy; j'espère qu'elles pourront vous paraître dignes d'être lues à l'Académie des Sciences.

Dans le dernier numéro des *Comptes rendus* (séance du 15 avril 1839), M. Cauchy a donné certaines formules pour calculer l'intensité de la lumière réfléchiée par les métaux à différents degrés d'incidence. Ces formules sont exactement les mêmes que celles que j'ai communiquées en 1836, à l'Académie royale d'Irlande, et qui ont été successivement publiées dans les *Proceedings* de cette Académie (24 octobre 1836), dans le *London and Edinburgh Philosophical Magazine* pour mai 1837 (X<sup>e</sup> vol., p. 382) et dans le journal appelé *l'Institut* (t. V, p. 223, juillet 1837). Rien n'est plus aisé que de convertir l'un des deux systèmes de formules dans l'autre. En effet, puisque les constantes  $\theta$  et  $\varepsilon$  dans la notation de M. Cauchy sont représentées par  $M \left( \text{ou } \frac{1}{m} \right)$  et  $\chi$  dans la mienne, on trouvera, en comparant nos

équations de condition, que  $\nu = \chi + \chi'$ , et  $\frac{\nu}{\theta} = m' \cos i'$ ; d'où il résulte qu'on aura identiquement  $I = a'$  et  $J = a$ . Outre les valeurs de l'intensité, j'ai publié, dans le même article, les expressions des changements de phase ( $\varphi$  et  $\varphi'$ ) produits par la réflexion métallique. Ces expressions n'ont pas encore été données par M. Cauchy. Elles servent à établir la polarisation elliptique de la lumière réfléchiée quand la lumière incidente est polarisée dans un plan.

On doit observer que la méthode dont j'ai fait usage pour déterminer la valeur des constantes  $M$  et  $\chi$  relatives à un métal quelconque, à l'aide des expériences de M. Brewster, est la même que celle de M. Cauchy. L'approximation que j'ai indiquée, et qui consiste à négliger la petite quantité  $\chi'$ , est aussi la même que la sienne, puisqu'elle suppose  $\nu = i$ ,



qu'intéresse cette théorie et M. Mac-Cullagh lui-même puissent se former à cet égard une opinion définitive, je citerai d'abord ici quelques faits qu'il leur sera facile de vérifier.

Parmi les divers articles que j'ai publiés en 1836 sur la réflexion et la réfraction de la lumière, et qui se trouvent insérés dans les *Comptes rendus* de cette année, quelques-uns se rapportent en totalité ou en partie à l'objet dont il est ici question. Ainsi, par exemple, une Lettre adressée de Prague à M. Ampère, et insérée dans le *Compte rendu* de la séance du 11 avril 1836, commence par ces mots :

« Les formules générales auxquelles je suis parvenu dans mes nouvelles recherches sur la théorie de la lumière ne fournissent pas seu-

U =  $\theta$ . Enfin, la marche générale des phénomènes, telle qu'elle est décrite par M. Cauchy, peut être vérifiée par l'inspection de la petite Table que j'ai donnée pour l'acier.

Dans l'article ci-dessus mentionné, j'ai expliqué très simplement de quelle manière j'ai obtenu mes formules, en assignant à la vitesse de propagation une valeur imaginaire, dont l'argument est l'angle  $\chi$  que j'ai appelé la *caractéristique*, et dont l'inverse est précisément la quantité imaginaire que M. Cauchy a nommée le *coefficient caractéristique*.

Or, quand cette valeur imaginaire est introduite dans l'expression de l'arc, dont le sinus ou le cosinus est ordinairement employé pour représenter un déplacement, elle donne naissance à une exponentielle réelle multipliée par le sinus ou le cosinus d'un arc réel; l'exposant de cette exponentielle étant réciproquement proportionnel à la longueur d'une ondulation, nous sommes ainsi naturellement conduits à conjecturer que la caractéristique  $\chi$  dépend de l'absorption produite par une épaisseur égale à cette longueur. Si l'on suppose cette conjecture bien fondée, il s'ensuivra que l'amplitude d'une vibration, quand on traverse une épaisseur égale à la longueur d'une ondulation dans le métal, est diminuée dans la proportion inverse de l'unité au nombre dont le logarithme hyperbolique est  $2\pi \tan \chi$ , ou  $2\pi \tan \chi$ ,  $\pi$  désignant le rapport de la circonférence au diamètre. Cette interprétation de l'expression imaginaire se présenta à moi en 1836, presque aussitôt que je songeai à employer l'expression elle-même, et elle fut depuis fortifiée par la considération que cela servirait à expliquer (mathématiquement du moins, sinon physiquement) le changement de phase produit par la réflexion et la réfraction à la surface d'un métal. Car si l'on suppose que l'une quelconque des équations de condition qui doivent subsister à la surface soit une équation différentielle, contenant les dérivées des déplacements prises par rapport aux coordonnées, et si en outre l'amplitude des vibrations dans un métal est supposée diminuer en raison de l'exponentielle qui représente l'absorption, alors on trouvera qu'il est impossible de satisfaire à ces équations, sans admettre ce qu'on appelle précisément un changement de phase, c'est-à-dire sans admettre que, si la vibration incidente est représentée par un sinus, les vibrations réfléchies et réfractées contiendront chacune un terme dépendant du cosinus. Telles étaient les premières vues qui me furent suggérées par la considération des équations imaginaires, et pendant quelque temps elles me parurent entièrement satisfaisantes; mais des doutes s'élevèrent dans mon esprit, quand j'arrivai à un calcul effectif, et ma principale difficulté était occasionnée par les propriétés du diamant. M. Airy a trouvé que, lorsque la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence est réfléchie par le diamant, elle ne s'éva-

lement les lois de la propagation de la lumière dans le vide et dans les divers milieux transparents, comme je vous le disais dans mes Lettres du 12 et du 19 février, ou les lois de la réflexion et de la réfraction à la surface des corps transparents, telles qu'elles se trouvent énoncées dans les deux Lettres que j'ai adressées à M. Libri le 19 et le 28 mars 1836, elles s'appliquent aussi à la propagation de la lumière dans la partie d'un corps opaque voisine de la surface, et à la réflexion de la lumière par un corps de cette espèce. »

Une autre Lettre adressée à M. Libri vers le milieu du mois d'avril,

neuit pas complètement sous l'angle de polarisation, mais que néanmoins la vibration change de signe, attendu qu'il se produit subitement un changement de phase presque égal à  $180^\circ$ .

Je pouvais expliquer ce fait remarquable, en supposant le diamant soumis aux lois de la réflexion métallique, et sa caractéristique  $\chi$  très petite, d'où je tirais cette conclusion que le diamant forme une sorte de liaison entre les métaux et les milieux qui, comme le verre et l'eau, polarisent complètement la lumière. Cette conclusion semblait très naturelle et probable en elle-même; mais elle était accompagnée d'une difficulté que je ne pus surmonter. Quelque petite que je supposasse la caractéristique, quand même elle était tellement petite que la lumière réfléchie sous l'angle de polarisation se réduisait à la millionième partie de la lumière incidente, toujours l'absorption calculée était assez grande pour rendre le diamant parfaitement opaque à une épaisseur égale à la centième partie d'un pouce. Ce résultat, il est vrai, peut être regardé comme montrant seulement que la réflexion particulière opérée par le diamant doit être expliquée de quelque autre manière; mais elle était entièrement suffisante pour m'empêcher en 1836 de publier aucune conjecture sur la signification de la caractéristique, ou sur l'interprétation physique des formes imaginaires sous lesquelles j'ai présenté la vitesse de propagation. La conjecture que j'ai alors supprimée a été mise en avant dernièrement par M. Cauchy, et j'ai été conduit par ce motif à exposer les observations précédentes sur ce sujet.

Comme mes formules étaient déduites d'une analogie mathématique et non pas d'une théorie physique, j'ai eu soin de les publier simplement comme empiriques. Si la théorie de M. Cauchy est vraie, ces formules sont exactes. Je dois avouer, cependant, qu'elles m'ont toujours paru trop compliquées; et c'est pour cette raison que, dans les *Transactions de l'Académie d'Irlande* (XVIII<sup>e</sup> vol., 1<sup>re</sup> Partie, p. 71), j'ai donné d'autres formules peu différentes, lesquelles semblent plus probablement être les véritables, et qui représentent aussi tous les phénomènes connus. Cependant, sans de nouvelles expériences, il serait prématuré de se prononcer sur ce point d'une manière positive.

Il me reste à mentionner une des conclusions de M. Cauchy, qui est certainement très extraordinaire. C'est une conséquence de sa théorie que l'indice de réfraction d'un métal est égal à  $M \cos \chi$  ou  $\theta \cos \chi$ . Or, pour l'argent pur, nous avons  $\theta = 3$ ,  $\chi = 85^\circ$ , d'après les expériences de M. Brewster; en conséquence, l'indice de réfraction pour celui de tous les métaux qui réfléchit le mieux la lumière est seulement d'un quart: suivant mon opinion, il est égal à  $\frac{M}{\cos \chi}$ , et, dans ce cas, il croîtra toujours avec le pouvoir réfléchissant. Dans l'argent pur qui réfléchit la presque totalité de la lumière incidente, l'indice de réfraction sera environ 35; et pour le mercure qui réfléchit environ les trois quarts de la lumière incidente, cet indice sera environ 15 au lieu de 1,7, comme le trouve M. Cauchy.



et insérée dans le *Compte rendu* de la séance du 2 mai 1836, contient ce qui suit :

« Dans ma dernière Lettre, j'ai indiqué les résultats que fournissent les formules générales auxquelles je suis parvenu, quand on les applique au phénomène connu sous le nom de *réflexion totale*, c'est-à-dire au cas où le second milieu, quoique transparent, remplit la fonction d'un corps opaque. Je vais aujourd'hui vous entretenir un instant de ce qui arrive lorsque le second milieu est constamment opaque sous toutes les incidences, et en particulier lorsque la lumière se trouve réfléchie par un métal. Si l'on fait tomber sur la surface d'un métal un rayon simple doué de la polarisation rectiligne, ou circulaire, ou même elliptique, ce rayon pourra toujours être décomposé en deux autres polarisés en ligne droite, l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre parallèlement à ce plan. Or je trouve que, dans chaque rayon composant, la réflexion fait varier l'intensité de la lumière suivant un rapport qui dépend de l'angle d'incidence, et qui généralement n'est pas le même pour les deux rayons. De plus, la réflexion transporte les ondulations lumineuses en avant ou en arrière à une certaine distance qui dépend encore de l'angle d'incidence. » Si l'on représente cette distance, pour le premier rayon composant, par  $\frac{\mu}{k}$ , pour le second par  $\frac{\nu}{k}$ ,  $l = \frac{\mu - \nu}{k}$  étant l'épaisseur d'une onde, la différence de marche entre les deux rayons composants après une première réflexion sera représentée par

$$\frac{\mu - \nu}{k}.$$

Après  $n$  réflexions opérées sous le même angle, elle deviendra

$$n \frac{\mu - \nu}{k}.$$

Je trouve d'ailleurs qu'après une seule réflexion sous l'angle d'incidence  $\tau$ , la différence de marche est d'une demi-ondulation si  $\tau = 0$ , et d'une ondulation entière si  $\tau = \frac{\pi}{2}$ . Donc, en ne tenant pas compte

des multiples de la circonférence dans la valeur de l'angle  $\mu - \nu$ , on peut considérer la valeur numérique de cet angle comme variant entre les limites  $\pi$  et zéro. Lorsque  $\mu - \nu$  atteint la moyenne entre ces deux limites ou  $\frac{\pi}{2}$ , on obtient ce que M. Brewster appelle la *polarisation elliptique*, et

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n$$

réflexions semblables ramènent le rayon polarisé à son état primitif. Alors, si le rayon incident était polarisé en ligne droite, le dernier rayon réfléchi sera lui-même polarisé rectilignement. Mais son plan de polarisation formera avec le plan de réflexion un angle  $\delta$  dont la tangente sera égale, au signe près, à la puissance  $2n$  du quotient qu'on obtient en divisant l'un par l'autre les rapports suivant lesquels la première réflexion fait varier, dans chaque rayon composant, les plus grandes vitesses des molécules. Donc, tandis que le nombre des réflexions croîtra en progression arithmétique, les valeurs de  $\tan \delta$  varieront en progression géométrique; et comme, pour les divers métaux, on trouve généralement  $\delta < \frac{\pi}{4}$  ou  $45^\circ$ , la lumière, pour de grandes valeurs de  $n$ , finira par être complètement polarisée dans le plan d'incidence. On déduit encore de mes formules générales un grand nombre de conséquences qui s'accordent aussi bien que les précédentes avec les résultats obtenus par M. Brewster.

A la vérité, dans la Lettre que je viens de rappeler, je n'ai point donné l'interprétation physique de la forme imaginaire sous laquelle peuvent se présenter les coefficients des coordonnées dans les expressions des déplacements moléculaires. Mais M. Mac-Cullagh aurait tort de croire que cette interprétation, développée avec détail dans mes nouveaux Mémoires, est de ma part une interprétation nouvelle. Pour se convaincre qu'elle est déjà fort ancienne, et antérieure aux publications par lui mentionnées, il suffira de jeter les yeux sur les paragraphes III et VII de mon Mémoire relatif à la théorie de la lumière, lithographié sous la date d'août 1836. Il y trouvera des déplacements



moléculaires représentés par des produits de la forme

$$\Lambda e^{kx} \cos(\omega - st), \quad \Lambda e^{-kx} \cos(gv - st + \lambda),$$

$x$  désignant la distance à un plan fixe,  $t$  le temps, et  $\Lambda, k, h, \omega, s$  des quantités constantes. Il y verra énoncées (p. 44 et 84) les conséquences auxquelles on est conduit, dans la théorie des corps opaques et dans celle des verres colorés, à la seule inspection de ces produits, dans lesquels une exponentielle réelle se trouve multipliée par le sinus ou le cosinus d'un arc réel, et en particulier les conclusions que je vais transcrire.

« Les déplacements  $\xi, \eta, \zeta$ , déterminés par les formules

$$\xi = \Lambda e^{kx} \cos(\omega - st), \quad \dots,$$

s'évanouissent pour  $x = -\infty$ , et si l'on attribue à  $x$  des valeurs négatives qui forment une progression arithmétique... les valeurs correspondantes de l'exponentielle  $e^{kx}$ , ... formeront une progression géométrique... On pourra en dire autant des déplacements  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  et de la force vive... dont la valeur maximum sert à mesurer l'intensité de la lumière. C'est ainsi qu'en pénétrant dans l'intérieur d'un corps opaque, la lumière devient insensible à une petite distance de la surface, et que son intensité décroît en progression géométrique, tandis que la distance croît en progression arithmétique. » (Voir le *Mémoire lithographié*, p. 44 et 45.)

Plus loin, page 84, les mêmes idées étaient reproduites et appliquées à des déplacements de la forme

$$\xi = \Lambda e^{-hx} \cos(gv - st + \lambda).$$

J'observais « qu'en vertu de ces dernières formules les déplacements deviendraient insensibles pour de très grandes valeurs positives du produit  $hx$ , par conséquent, pour des valeurs de  $x$  affectées du même signe que  $h$ , et qui pourront être d'autant plus grandes (abstraction faite des signes) que  $h$  lui-même sera plus petit. Ainsi, disais-je, dans un verre coloré, l'épaisseur nécessaire pour produire l'extinction d'un

rayon lumineux varie avec la nature de la couleur. D'ailleurs, en raisonnant comme à la page 84, on conclura des formules précédentes que, pour chaque couleur, l'intensité de la lumière décroît en progression géométrique, tandis que l'épaisseur du verre croît en progression arithmétique. Ces divers résultats sont conformes à l'expérience. »

Reste à examiner la question de savoir si les formules de M. Mac-Cullagh et les miennes sont exactement les mêmes. A la seule lecture de la remarque qui termine la Lettre de M. Mac-Cullagh, on peut déjà présumer qu'il n'y a point ici un accord parfait, sinon quant à la forme des équations obtenues, du moins relativement à la détermination de quelques-unes des quantités dont elles peuvent servir à calculer les valeurs. Si M. Mac-Cullagh a trouvé, pour les indices de réfraction déduits de ses formules et de mon analyse, des nombres aussi différents entre eux que le sont 35 et  $\frac{1}{4}$ , ou 15 et 1,7, cela tient, comme il le dit lui-même, à ce que ces indices sont représentés, suivant ses conjectures, par le rapport des quantités  $\theta, \cos t$ , et, suivant mes calculs, par leur produit, sous l'incidence perpendiculaire. Or, ce que j'appelle l'*indice de réfraction*, c'est, suivant l'usage reçu, le rapport entre les épaisseurs des ondes incidentes et réfléchies, ou, ce qui revient au même, le rapport entre les sinus d'incidence et de réfraction; et si M. Mac-Cullagh admet pareillement cette définition, il me sera facile de lui démontrer: 1° que l'indice de réfraction d'un métal est effectivement représenté par  $\theta \cos t$  sous l'incidence perpendiculaire; 2° que cet indice est, non pas constant, mais variable avec l'incidence. Toutefois, pour y parvenir, il serait nécessaire de compléter le tableau des formulés que j'ai déjà données, et, pressé par le temps, je me vois forcé de renvoyer cette démonstration à un autre article, ainsi que l'explication des propriétés du diamant. Ce qui a pu induire M. Mac-Cullagh en erreur à l'égard des indices de réfraction, et ce qui distingue principalement de mes recherches la méthode dont il a fait usage dans l'article imprimé sous la date du 24 octobre 1836, c'est qu'il s'est proposé simplement d'étendre les formules données par Fresnel, et relatives à un corps transparent, au cas où la lettre qui, dans ces formules, repré-





sente l'indice de réfraction, se transforme en une constante imaginaire, en suivant d'ailleurs, pour déterminer la nature du rayon réfléchi, le mode d'interprétation adopté par Fresnel dans le cas de la réflexion totale, mais sans chercher en même temps à calculer la marche de la lumière dans le corps opaque, et à représenter par des formules précises les vibrations des molécules d'éther dans le rayon réfracté. Au contraire, la méthode que j'avais suivie pour obtenir les lois de la réflexion à la surface des corps opaques consistait à chercher d'abord les équations de condition auxquelles doivent satisfaire, dans le voisinage de la surface de séparation de deux milieux, les déplacements moléculaires  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  relatifs soit au premier milieu, soit au second. Ces équations une fois trouvées, le calcul n'offrait plus de difficultés sérieuses, et donnait séparément les valeurs de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  relatives à chacun des rayons réfléchi et réfracté, quelle que fût d'ailleurs la nature de la surface réfléchissante. Dès lors tous les phénomènes produits par la réflexion ou la réfraction étaient connus, et il ne pouvait rester aucun doute sur la nature des diverses constantes renfermées dans les équations finales. Dans la méthode employée par M. Mac-Cullagh, et fondée, comme il le dit lui-même, non sur une théorie physique, mais sur une induction mathématique, l'interprétation des symboles imaginaires pouvait embarrasser quelque temps le physicien ou le géomètre, et réclamer de profondes méditations; mais, dans l'autre méthode, la seule difficulté véritable est la formation des équations de condition desquelles on tire les valeurs de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , en opérant à peu près comme on l'avait déjà fait dans plusieurs questions de Physique, par exemple, comme je l'ai fait moi-même dans le *Bulletin des Sciences* de M. de Férussac pour l'année 1830, et dans mes *Nouveaux Exercices de Mathématiques* (1835-1836). Aussi, quoique les formules dont il est question dans les *Comptes rendus* de 1836 ne se trouvent pas explicitement insérées dans ma Lettre du 2 mai, où j'ai seulement rapporté plusieurs des conséquences que j'en avais déduites, M. Mac-Cullagh, qui doit être curieux de connaître ces formules, afin de pouvoir les comparer aux siennes, n'aura point de peine à les retrouver dès qu'il saura qu'elles étaient pour moi à cette époque

les équations de condition relatives à la surface réfléchissante. Or, suivant mon opinion, pour obtenir les équations dont il s'agit, il suffisait d'exprimer que, dans le voisinage de la surface de séparation de deux milieux, les déplacements  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  des molécules d'éther, relatifs soit au premier milieu, soit au second, fournissaient les mêmes valeurs de  $z$ , quand l'on prenait pour  $z$  soit une fonction des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  représentée par l'une des trois différences

$$(1) \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

soit la dilatation linéaire de l'éther mesurée suivant la normale à la surface réfléchissante et déterminée par la formule

$$(2) \quad z = a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + bc \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + ca \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + ab \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right),$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  désignant les cosinus des angles formés par cette normale avec les demi-axes des coordonnées positives.

Pour s'assurer par lui-même que ma mémoire ne me trompe pas à cet égard, M. Mac-Cullagh n'aura besoin que de jeter les yeux sur les dernières livraisons des *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, imprimées antérieurement au Mémoire d'août 1836, et mentionnées dans l'observation qui termine ce Mémoire. Il y trouvera (p. 203 et 204) les formules (1), (2) et ce que je vais transcrire.

\* Lorsque, les deux milieux étant séparés l'un de l'autre par le plan des  $y$ ,  $z$ , on suppose l'axe des  $z$  parallèle au plan des ondes lumineuses et par conséquent perpendiculaire au plan d'incidence, on a dans la formule (2)

$$a = \pm 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

et de plus  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  deviennent indépendants de  $z$ . Donc alors, en changeant, ce qui est permis, le signe de la première des différences (1), on trouve que les fonctions (1) et (2) peuvent être réduites à

$$(3) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}$$



Donc, si l'on nomme  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  ce que deviennent les déplacements  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , tandis que l'on passe du premier milieu au second, on aura, pour les points situés sur la surface de séparation, c'est-à-dire pour  $x = 0$ ,

$$(4) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial x},$$

et

$$(5) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi'}{\partial y}.$$

Lorsque dans les équations (4) et (5) on substitue à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  les seconds membres des formules (1) du § V, et à  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  les seconds membres des formules (2) du même paragraphe, on obtient les lois de la réflexion et de la réfraction, à la surface des corps transparents, avec les diverses formules que contiennent les deux Lettres adressées à M. Libri les 19 et 27 mars et imprimées dans le n° 14 des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* pour l'année 1836. On déduit aussi, des conditions (4) et (5), les lois de la réflexion opérée par la surface extérieure d'un corps opaque, et par la surface intérieure d'un corps transparent, dans le cas où la réflexion devient totale (voir à ce sujet les deux Lettres adressées à M. Ampère, les 1<sup>er</sup> et 26 avril 1836). Comme je l'ai montré dans ces différentes Lettres, les formules auxquelles conduisent les conditions (4) et (5), non seulement déterminent l'intensité de la lumière polarisée rectilignement par réflexion ou par réfraction, et les plans de polarisation des rayons réfléchis ou réfractés, mais encore elles font connaître les diverses circonstances de la polarisation circulaire ou elliptique, produite par la réflexion opérée à la surface d'un corps opaque, et en particulier d'un métal. »

En opérant comme je viens de le dire, M. Mac-Cullagh aura bientôt reconnu : 1° que les formules insérées par lui dans les *Proceedings de la Société royale d'Irlande* sont comprises parmi celles qui se déduisent des équations (4), (5), et qu'en conséquence elles ne diffèrent pas au fond de plusieurs des formules dont il est question dans ma Lettre du 2 mai 1836; 2° que, pour arriver à ces formules, la méthode la plus claire et la plus sûre consiste à établir d'abord les équations (4), (5),

puis à tirer de ces équations les valeurs des déplacements moléculaires dans chacun des rayons réfléchi et réfracté; 3° que cette méthode a l'avantage d'indiquer la marche de la lumière, non seulement dans le premier milieu, mais encore dans le second, en fournissant, avec l'explication des phénomènes sensibles observés dans le milieu transparent, les lois de ceux qui échappent à nos yeux et qui se rapportent au rayon réfracté; 4° que l'angle de réfraction et la vitesse de propagation de la lumière dans le second milieu ont des valeurs réelles, par conséquent des valeurs distinctes des expressions imaginaires désignées sous ces deux noms dans le Mémoire de M. Mac-Cullagh, et que l'indice de réfraction a effectivement la valeur que je lui ai assignée.

Du reste, M. Mac-Cullagh ayant composé son Mémoire avant que mes travaux sur le même objet fussent suffisamment connus, et n'ayant pas eu sous les yeux des formules comprises seulement d'une manière implicite dans celles que j'avais publiées, il est clair que ce Mémoire offrait tout le mérite d'une difficulté vaincue, et devait être sous ce rapport favorablement accueilli des savants.

## 46.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Sur les mouvements de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement.*

C. R., t. VIII, p. 597 (28 avril 1839).

Lorsque l'on considère les mouvements de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement, on obtient six équations du genre de celles que j'ai données dans mon Mémoire sur la dispersion, et qui renferment six variables principales avec les actions exercées : 1° par les molécules du premier système sur d'autres molécules du premier système; 2° par les molécules du second système sur d'autres molécules du second système; 3° par les molécules d'un système sur celles de l'autre. Les six variables principales sont les déplacements



d'une molécule du premier système et les déplacements d'une molécule du second système, mesurés parallèlement aux axes coordonnés. Lorsque les deux systèmes sont homogènes et que les mouvements sont infiniment petits, alors, par la raison que j'ai donnée dans un autre Mémoire, on peut réduire les six équations obtenues à six équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants; et si l'on élimine entre elles cinq des variables principales, l'équation résultante sera encore une équation linéaire aux différences partielles et à coefficients constants. Donc, ce que j'ai dit d'un système de molécules s'applique encore à deux systèmes qui se pénètrent, dans le cas même où l'on tient compte des actions exercées par les molécules d'un système sur celles de l'autre.

Lorsque les molécules de l'un des systèmes sont trop écartées les unes des autres pour exercer des actions mutuelles, les formules se simplifient et paraissent spécialement applicables à la propagation du son dans les gaz. Alors les phénomènes dépendent surtout de l'attraction exercée par les molécules d'air sur celles du fluide éthéré, par conséquent d'une force qui croît avec la pression et pourrait la représenter.

Dans le cas général, les formules paraissent s'appliquer plus spécialement à la propagation de la lumière dans les corps solides.

Au reste, je reviendrai sur ces divers résultats dans les prochaines séances.

## 47.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement.*

C. R., t. VIII, p. 779 (20 mai 1839).

§ I. — *Équations d'équilibre et de mouvement de ces deux systèmes.*

Considérons deux systèmes de molécules qui coexistent dans une portion donnée de l'espace.

Soient, au premier instant, et dans l'état d'équilibre,

$x, y, z$  les coordonnées d'une molécule  $m$  du premier système ou d'une molécule  $m$ , du second système;

$x + x', y + y', z + z'$  les coordonnées d'une autre molécule  $m$  du premier système, ou d'une autre molécule  $m$ , du deuxième système;

$r$  le rayon vecteur mené de la molécule  $m$  ou  $m'$ , à la molécule  $m$  ou  $m'$ ;

on aura

$$(1) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et les cosinus des angles formés par le rayon vecteur  $r$  avec les demi-axes des coordonnées positives seront respectivement

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r}.$$

Supposons d'ailleurs que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses  $m$  et  $m$  ou  $m$ , et  $m'$ , étant proportionnelle à ces masses et à une fonction de la distance  $r$ , soit représentée, au signe près, par

$$mm f(r)$$

pour les molécules  $m$  et  $m$ , et par

$$mm', f_1(r)$$

pour les molécules  $m$  et  $m'$ , chacune des fonctions

$$f(r), \quad f_1(r)$$

désignant une quantité positive, lorsque les molécules s'attirent, et négative lorsqu'elles se repoussent. Les projections algébriques de la force

$$mm f(r) \quad \text{ou} \quad mm', f_1(r)$$

sur les axes coordonnés seront les produits de cette force par les cosinus des angles que forme le rayon vecteur  $r$  avec ces axes, et, en conséquence, si l'on fait pour abrégier

$$(2) \quad \frac{f(r)}{r} = f(r), \quad \frac{f_1(r)}{r} = f_1(r),$$



elles se réduiront, pour la force  $mmf(r)$ , à

$${}_{mm}xf(r), \quad {}_{mm}yf(r), \quad {}_{mm}zf(r)$$

et, pour la force  $mm_i f(r)$ , à

$${}_{mm_i}xf(r), \quad {}_{mm_i}yf(r), \quad {}_{mm_i}zf(r).$$

Cela posé, les équations d'équilibre de la molécule  $m$  seront évidemment

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = S[{}_{mx}f(r)] + S[{}_{m,x}f_i(r)], \\ 0 = S[{}_{my}f(r)] + S[{}_{m,y}f_i(r)], \\ 0 = S[{}_{mz}f(r)] + S[{}_{m,z}f_i(r)], \end{cases}$$

la lettre caractéristique  $S$  indiquant une somme de termes semblables entre eux et relatifs aux diverses molécules  $m$  du premier système, ou aux diverses molécules  $m_i$  du second système.

Concevons maintenant que les diverses molécules

$$m, m, \dots, m, m, \dots$$

viennent à se mouvoir. Soient alors, au bout du temps  $t$ ,

$$\xi, \eta, \zeta$$

les déplacements de la molécule  $m$ , et

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i$$

les déplacements de la molécule  $m_i$ , mesurés parallèlement aux axes coordonnés. Soient d'ailleurs

$$\xi + \Delta\xi, \quad \eta + \Delta\eta, \quad \zeta + \Delta\zeta$$

et

$$\xi_i + \Delta\xi_i, \quad \eta_i + \Delta\eta_i, \quad \zeta_i + \Delta\zeta_i$$

ce que deviennent ces déplacements, lorsqu'on passe de la molécule  $m$  à la molécule  $m_i$ , ou de la molécule  $m_i$  à la molécule  $m$ . Les coordonnées de la molécule  $m$ , au bout du temps  $t$ , seront

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta,$$

tandis que celles de la molécule  $m_i$  ou  $m$ , seront

$$x + x + \xi + \Delta\xi, \quad y + y + \eta + \Delta\eta, \quad z + z + \zeta + \Delta\zeta$$

ou

$$x + x + \xi + \Delta\xi, \quad y + y + \eta + \Delta\eta, \quad z + z + \zeta + \Delta\zeta.$$

Soient à cette même époque

$$r + \rho$$

la distance des molécules  $m, m$ , et

$$r + \rho_i$$

la distance des molécules  $m, m_i$ . La distance

$$r + \rho$$

offrira pour projections algébriques sur les axes des  $x, y, z$  les différences entre les coordonnées des molécules  $m, m$ , savoir

$$x + \Delta\xi, \quad y + \Delta\eta, \quad z + \Delta\zeta,$$

tandis que la distance

$$r + \rho_i$$

offrira pour projections algébriques les différences entre les coordonnées des molécules  $m, m_i$ , savoir

$$x + \xi, -\xi + \Delta\xi, \quad y + \eta, -\eta + \Delta\eta, \quad z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta.$$

On aura en conséquence

$$(4) \quad \begin{cases} (r + \rho)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2, \\ (r + \rho_i)^2 = (x + \xi, -\xi + \Delta\xi)^2 + (y + \eta, -\eta + \Delta\eta)^2 + (z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta)^2. \end{cases}$$

Cela posé, pour déduire les équations du mouvement de la molécule  $m$  de ses équations d'équilibre, c'est-à-dire des formules (3), il suffira évidemment de remplacer, dans ces formules, les premiers membres par

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

puis de substituer à la distance

$$r$$

et à ses projections algébriques

$$x, \quad y, \quad z.$$



1<sup>re</sup> dans les premiers termes des seconds membres, la distance

$$r + \rho$$

et ses projections algébriques

$$x + \Delta\xi, \quad y + \Delta\eta, \quad z + \Delta\zeta;$$

2<sup>o</sup> dans les derniers termes des seconds membres, la distance

$$r + \rho,$$

et ses projections algébriques

$$x + \xi, -\xi + \Delta\xi, \quad y + \eta, -\eta + \Delta\eta, \quad z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta.$$

En opérant ainsi, on trouve

$$(5) \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S[m(x + \Delta\xi)f(r + \rho)] + S[m(x + \xi, -\xi + \Delta\xi)f(r + \rho)], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S[m(y + \Delta\eta)f(r + \rho)] + S[m(y + \eta, -\eta + \Delta\eta)f(r + \rho)], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S[m(z + \Delta\zeta)f(r + \rho)] + S[m(z + \zeta, -\zeta + \Delta\zeta)f(r + \rho)]. \end{cases}$$

On établirait avec la même facilité les équations d'équilibre ou les équations de mouvement de la molécule  $m$ . En effet, supposons que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses  $m$ , et  $m$ , ou  $m$ , et  $m$ , étant proportionnelle à ces masses et à une fonction de la distance  $r$ , soit représentée, au signe près, par

$$m, m, f_r(r)$$

pour les molécules  $m$ , et  $m$ ; elle devra être représentée par

$$m, m, f_r(r)$$

pour les molécules  $m$ , et  $m$ , l'action mutuelle de  $m$ , et  $m$  étant de même nature que l'action mutuelle de  $m$ , et  $m$ . Donc, si l'on pose pour abrégir

$$(6) \quad f_r(r) = \frac{f_r(r)}{r},$$

les équations d'équilibre de la molécule  $m$  se réduiront, non plus aux

formules (3), mais aux suivantes :

$$(7) \begin{cases} 0 = S[m, x f_r(r)] + S[m x f_r(r)], \\ 0 = S[m, y f_r(r)] + S[m y f_r(r)], \\ 0 = S[m, z f_r(r)] + S[m z f_r(r)]. \end{cases}$$

Concevons d'ailleurs qu'au bout du temps  $t$  la distance des molécules  $m, m$ , soit représentée par

$$r + \rho,$$

et celles des molécules  $m, m$  par

$$r + \rho.$$

On aura

$$(8) \begin{cases} (r + \rho)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2, \\ (r + \rho)^2 = (x + \xi - \xi + \Delta\xi)^2 + (y + \eta - \eta + \Delta\eta)^2 + (z + \zeta - \zeta + \Delta\zeta)^2, \end{cases}$$

et les équations du mouvement de la molécule  $m$ , seront

$$(9) \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = S[m, (x + \Delta\xi) f_r(r + \rho)] + S[m(x + \xi - \xi + \Delta\xi) f_r(r + \rho)], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = S[m, (y + \Delta\eta) f_r(r + \rho)] + S[m(y + \eta - \eta + \Delta\eta) f_r(r + \rho)], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = S[m, (z + \Delta\zeta) f_r(r + \rho)] + S[m(z + \zeta - \zeta + \Delta\zeta) f_r(r + \rho)]. \end{cases}$$

Si dans chacune des formules (5) on réduit le dernier terme du second membre à zéro, on retrouvera précisément les équations du mouvement d'un seul système de molécules sollicitées par des forces d'attraction et de répulsion mutuelle, et pour ramener ces équations à la forme sous laquelle je les ai présentées dans le Mémoire sur la *Dispersion de la lumière*, il suffirait d'écrire  $\varepsilon r$  au lieu de  $\rho$ ,  $\frac{f(r)}{r}$  au lieu de  $f(r)$  et  $r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma$  au lieu de  $x, y, z$ .

Les équations qui précèdent et celles que nous en déduirons dans les paragraphes suivants doivent comprendre, comme cas particuliers, les formules dont M. Lloyd a fait mention dans un article fort intéressant, publié sous la date du 9 janvier 1837, où l'auteur, convaincu