

桑木文庫  
洋書



物理

08

C

2.4

九州帝國大學理學部

8185

物理學教室

桑木文庫

洋書

0162

理学部 洋 邇及

022232002002044



九州大学蔵書



物  
08  
C  
2

801857

ŒUVRES  
COMPLÈTES  
D'AUGUSTIN CAUCHY



N 00 110  
ARTMENT  
170

物  
0  
2

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.  
Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

1<sup>re</sup> SÉRIE. — TOME IV.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.  
SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.  
Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXXIV



物  
0  
1  
2



PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

*Ouvres de C. — S. I. t. IV.*



特  
0  
1  
2

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.



## NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

### COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

#### 1.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des équations différentielles.*

C. R., t. II, p. 85 (25 janvier 1836).

Dans ce Mémoire, l'auteur ramène d'abord l'intégration d'un système quelconque d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux différences partielles du premier ordre. Il exprime, par des intégrales définies, les intégrales des équations proposées.

Il s'occupe ensuite de la convergence des séries dans lesquelles ces intégrales se développent. Il donne les conditions de cette convergence et les limites des restes que l'on néglige.

Il annonce, en terminant, qu'il appliquera les méthodes contenues dans ce Mémoire à l'intégration des équations différentielles qui expriment les mouvements simultanés des astres dont se compose notre système planétaire.

#### 2.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Lettre à M. le Président de l'Académie des Sciences.*

C. R., t. II, p. 182 (22 février 1836).

L'Académie des Sciences a déjà reçu les premières livraisons des *Nouveaux Exercices* que j'ai eu l'honneur de lui offrir. En attendant



que les suivantes lui parviennent, je ne puis résister au désir d'indiquer ici quelques-uns des résultats qui s'y trouvent contenus. Ces résultats me paraissent de nature à intéresser l'Académie, à laquelle je vous prie de vouloir bien donner lecture de cette Note, en demandant qu'elle soit jointe au procès-verbal et déposée dans les archives.

Les livraisons, déjà imprimées jusqu'à la septième, renferment la suite du Mémoire sur la dispersion de la lumière. Quelques autres encore se rapporteront au même objet. Dans le § III, que vous avez reçu, j'ai donné (p. 34 et 35) les conditions nécessaires et suffisantes pour que la propagation de la lumière soit la même en tous sens. Ces conditions établissent des rapports numériques entre certaines sommes triples et aux différences finies, composées de termes dont chacun dépend : 1° de la distance  $r$  de deux molécules éthérées; 2° des angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  formés par cette distance avec les axes coordonnés; 3° de l'action réciproque  $f(r)$  de deux molécules l'une sur l'autre, et fournissent le moyen de débarrasser des angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les sommes que l'on conserve dans le calcul. En supposant ces conditions remplies, on obtient pour tous les milieux une première approximation des mouvements de l'éther; et l'on reconnaît que la durée  $T$  d'une oscillation moléculaire pour une couleur donnée, ou le rapport  $s = \frac{2\pi}{T}$ , est liée avec l'épaisseur  $l$  d'une onde plane, ou le rapport  $k = \frac{2\pi}{l}$ , par une équation du troisième degré en  $s^2$  qui offre deux racines égales et une racine simple, toutes développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $k^2$ . Pour une couleur donnée, c'est-à-dire, pour une valeur donnée de  $s$ , cette équation sert à déterminer la longueur d'ondulation, ou la valeur de  $k$ , et la vitesse de propagation de l'onde lumineuse, où  $\Omega = \frac{s}{k}$ .

D'autre part, les conditions dont il s'agit sont toujours remplies lorsque les sommations doubles relatives aux angles peuvent être transformées en intégrations doubles aux différences infiniment petites. Il est donc naturel de penser qu'on obtiendra une première approxima-

tion des mouvements de l'éther dans tous les milieux, et probablement avec une grande précision les lois de son mouvement dans le vide, si l'on transforme les sommes triples aux différences finies en intégrales triples aux différences infiniment petites. Alors, dans la série qui représente le développement de la racine double de l'équation du troisième degré, le coefficient de  $k^{2n}$  devient une intégrale simple relative à  $r$ , et se réduit même à une constante multipliée par la différence entre les deux valeurs qu'acquiert le produit

$$r^{2n+2} f(r)$$

quand on attribue successivement à la distance  $r$  des valeurs nulle et infinie. Cela posé, le phénomène de la dispersion disparaîtra si le produit en question s'évanouit toujours pour une valeur infinie de  $r$ , et se réduit à une constante différente de zéro, pour  $n=1$ , et pour une valeur nulle de  $r$ . C'est ce qui aura lieu, par exemple, si la fonction  $f(r)$  est de la forme

$$\frac{A}{r^h} e^{-hr},$$

$h$  étant positif. D'ailleurs, pour que le rapport  $\frac{k^2}{s^2}$  reste positif, il faudra que la constante  $A$  soit négative, c'est-à-dire que les molécules d'éther se repoussent. Donc nos formules donneront dans le vide, conformément à l'expérience, la même vitesse de propagation pour toutes les couleurs, si l'action réciproque de deux molécules est une force qui, pour un rapprochement considérable de ces molécules, soit *répulsive et réciproquement proportionnelle à la quatrième puissance de la distance*. Déjà dans les *Anciens Exercices* (III<sup>e</sup> Volume, p. 203), en considérant le mouvement d'un système de points matériels, j'avais remarqué qu'il fallait supposer le produit  $r^4 f(r)$  nul avec  $r$  pour faire disparaître des termes que M. Navier a conservés dans les équations des corps élastiques. Mes nouvelles recherches sur la lumière doivent faire croire que ce produit ne s'évanouit pas avec  $r$  dans le fluide éthéré. Probablement il ne s'évanouit pas non plus avec  $r$  dans les corps solides; d'où il résulte qu'on peut calculer le mouvement des corps élastiques





avec une approximation qui sera suffisante dans un grand nombre de cas, en transformant, avec M. Navier, les sommes aux différences finies en intégrales aux différences infiniment petites.

Lorsqu'on cesse de transformer les sommes relatives aux angles en intégrales aux différences infiniment petites, les deux racines égales de l'équation du deuxième degré sont généralement remplacées par deux racines peu différentes l'une de l'autre, et l'on obtient les phénomènes de la polarisation et de la double réfraction, comme on l'a vu dans les paragraphes déjà publiés de mon Mémoire. Mais on peut généraliser encore les résultats qui s'y trouvent contenus en développant les formules (24) du § II, et cessant de négliger les sommes composées de termes qui changent de signe en même temps que les cosinus des trois angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Alors les racines de l'équation du troisième degré, développées en séries, renferment des puissances impaires de  $k$  multipliées par  $\sqrt{-1}$ ; par suite la valeur de  $k$ , correspondante à une valeur donnée de  $s^2$ , devient en partie imaginaire, et des exponentielles négatives, introduites comme facteurs dans les valeurs des déplacements moléculaires, peuvent les faire décroître très rapidement et les rendre insensibles à une distance plus ou moins considérable de la surface d'un milieu réfringent. Lorsque cette distance est comparable aux longueurs d'ondulation, le milieu devient opaque. D'ailleurs les coefficients de  $r$ , dans les exponentielles négatives, étant fonctions de  $k$ , varient avec les couleurs, ainsi que dans le passage du rayon ordinaire au rayon extraordinaire. Nos formules ainsi généralisées représentent les phénomènes de l'absorption de la lumière ou de certains rayons, produite par les verres colorés, la tourmaline, etc., le phénomène de la polarisation circulaire produite par le cristal de roche, l'huile de térébenthine, etc. (Voir les expériences de MM. Arago, Biot, Fresnel, etc.) Elles servent même à déterminer les conditions et les lois de ces phénomènes; elles montrent que généralement, dans un rayon de lumière polarisée, une molécule d'éther décrit une ellipse. Mais, dans certains cas particuliers, cette ellipse se change en une droite; et alors on obtient la polarisation rectiligne. Ajoutons

que, si le coefficient de  $r$  dans les exponentielles négatives diffère de zéro, les ellipses décrites par les diverses molécules décroîtront de plus en plus pour des valeurs croissantes de  $r$ , et que, si ces valeurs croissent en progression arithmétique, l'intensité de la lumière décroîtra en progression géométrique. Enfin le calcul prouve que, dans le cristal de roche, l'huile de térébenthine, etc., la polarisation des rayons transmis parallèlement à l'axe (s'il s'agit du cristal de roche) n'est pas rigoureusement circulaire, mais qu'alors l'ellipse diffère peu du cercle.

## 5.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Lettre à M. Ampère sur la théorie de la lumière.*

C. R., t. II, p. 207. (9 février 1836.)

Dans ma Lettre de vendredi, je vous ai fait connaître les divers résultats auxquels j'ai été conduit par mes dernières recherches sur la théorie de la lumière. (Voir p. 5 du présent Volume.) J'aurai bientôt l'honneur de vous adresser un extrait de ces recherches. Mais, en attendant, je désire joindre encore à l'exposition que j'en ai faite quelques observations nouvelles que je vous prie de vouloir bien communiquer à l'Académie dans sa plus prochaine séance.

Lorsque la propagation de la lumière est la même en tous sens, l'équation du troisième degré, qui établit une relation entre le carré de la quantité  $s$ , réciproquement proportionnelle aux durées des oscillations moléculaires, et la quantité  $k$ , réciproquement proportionnelle aux longueurs d'ondulations, étant résolue par rapport à  $s^2$ , fournit deux racines égales et une racine simple. Or je trouve qu'au lieu de développer ces racines en séries, il est plus commode de les présenter sous forme finie. Dans ce cas, en nommant  $r$  la distance des deux molécules,  $f(r)$  l'action de l'une sur l'autre, et changeant les sommes triples en



intégrales, je trouve que la racine double peut être représentée par la somme de deux termes, l'un constant, l'autre proportionnel à  $k^2$ . Le terme constant a pour facteur la valeur extrême du produit  $r^2 f(r)$  correspondante à une valeur infinie de  $r$ . Le second terme a pour facteur la valeur du produit  $r^n f(r)$  correspondante à  $r = 0$ . Il en résulte que la racine double, ou la première valeur de  $s^2$ , cessera de s'évanouir dans deux hypothèses, savoir : 1<sup>o</sup> si  $r^n f(r)$  se réduit à une constante finie pour  $r = 0$ ; 2<sup>o</sup> si le produit  $r^2 f(r)$  se réduit à une constante finie pour  $r = \infty$ . La première condition sera remplie si l'on a

$$f(r) = \frac{A}{r^n} e^{-nr},$$

ou même, plus simplement,

$$f(r) = \frac{A}{r^n}.$$

La seconde condition sera remplie si l'on a

$$f(r) = \frac{A}{r^2}.$$

La première hypothèse me semble représenter les mouvements de l'éther dans le vide. La seconde représenterait-elle les mouvements moléculaires des corps pondérables? C'est ce que j'examinerai plus tard. Dans l'une et l'autre hypothèse, les termes conservés par M. Navier dans les équations du mouvement des corps subsistent, comme je le disais dans ma dernière Lettre. Mais il est juste d'observer que les rapports entre les coefficients semblent différents de ceux qui paraissent convenir aux corps élastiques. Il y a plus, dans la première hypothèse, il faut avoir soin de prendre pour origine d'une certaine intégrale relative à  $r$ , non pas précisément une valeur nulle de  $r$ , mais la distance des molécules les plus voisines. Autrement cette intégrale, qui d'ailleurs ne se trouve que dans la seconde valeur de  $s^2$ , semblerait infinie. Quant à cette seconde valeur de  $s^2$ , il serait intéressant d'examiner si elle ne pourrait pas représenter le mouvement de la chaleur. Je désirerais, pour cette raison, que vous eussiez la complaisance de

me transmettre quelques détails sur celle de vos séances où il a été question de la polarisation de la chaleur.

4.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Notes sur l'Optique, adressées à M. Libri.

C. R., t. II, p. 341. (4 avril 1836.)

## PREMIÈRE NOTE.

Suivant les principes que j'ai développés dans le *Mémoire sur la dispersion*, les mouvements de l'éther, pour un rayon simple d'une couleur donnée, se trouvent généralement représentés par les formules (24) du § II de ce Mémoire. Lorsque, dans ces mêmes formules, les dérivées du premier ordre des déplacements moléculaires  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\rho$  disparaissent, c'est-à-dire lorsque les coefficients de ces dérivées se réduisent à zéro, on obtient les formules (25), et par suite les formules (34), (35) du même paragraphe. La dernière de ces formules, ou l'équation (35), est une équation du troisième degré en  $s^2$  qui sert à déterminer le rapport  $s = \frac{2\pi}{K}$ , ou bien encore la vitesse de propagation  $A = \frac{s}{K} = \frac{l}{T}$  (T étant la durée d'une vibration, et  $l = \frac{2\pi}{K}$  l'épaisseur d'une onde plane) en fonction de K et des cosinus  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des angles formés par la perpendiculaire au plan de l'onde avec les axes coordonnés. Or, de cette équation du troisième degré en  $s^2$ , je déduis très simplement une seconde équation de même degré qui doit être vérifiée en même temps que la première, toutes les fois que deux racines de la première deviennent égales entre elles, ce qui permet de déterminer avec une grande facilité les deux axes optiques, c'est-à-dire les directions que doit prendre le rayon ordinaire pour se confondre avec le rayon extraordinaire dans un milieu doublement réfringent. Les



racines de la nouvelle équation du troisième degré sont, comme celles de la première, représentées par des fonctions des quantités  $K, a, b, c$ . Or il suffit d'admettre que ces fonctions deviennent indépendantes de  $a, b, c$  et de réduire, en outre, à leurs premiers termes les développements des inconnues en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $K$ , pour obtenir des formules entièrement semblables à celles que j'ai données dans la 51<sup>e</sup> livraison des *Anciens Exercices* (1) et par conséquent pour retrouver les théorèmes de Fresnel sur la double réfraction, sur la surface des ondes, etc. Toutefois il y a une remarque essentielle à faire, et que je vais indiquer.

Lorsque le plan de l'onde coïncide avec l'un des plans principaux dans un système de molécules qui offre trois axes d'élasticité rectangulaires, la vitesse de propagation d'un rayon polarisé parallèlement à l'un des axes peut être (voir la 51<sup>e</sup> livraison, p. 69 et 70) la racine carrée de l'une quelconque des six quantités représentées par

$$\begin{aligned} R + H, \quad P + I, \quad Q + G, \\ Q + I, \quad R + G, \quad P + H. \end{aligned}$$

D'après les formules de Fresnel, ces six quantités se réduiraient à trois, les vitesses de propagation de deux rayons polarisés perpendiculairement au même axe étant toujours égales. Or cela peut arriver de deux manières, sans que  $P, Q, R$  s'évanouissent, et cela arrivera effectivement : 1<sup>o</sup> si les conditions

$$G = 0, \quad H = 0, \quad I = 0,$$

étant remplies, les vibrations des molécules s'effectuent dans les plans généralement nommés plans de polarisation, puisque alors on aura  $P + I = P + H = P, \dots$ ; 2<sup>o</sup> si  $G, H, I$  n'étant pas nulles, et les vitesses des molécules étant perpendiculaires aux plans de polarisation,

(1) 5<sup>e</sup> année. — Ce renvoi se rapporte à l'ancienne édition. Il en sera de même pour tous ceux qui suivront et qui se rapporteront à un texte non encore publié dans la présente édition. Lorsque celle-ci sera terminée, on publiera une Table de concordance qui indiquera les renvois aux divers volumes de la collection. Quant aux renvois qui concerneront des textes déjà reproduits dans la nouvelle édition, ils se rapporteront à cette dernière et seront signalés par une annotation indiquant la série, le tome et la page. (Note des éditeurs.)

on a, entre les quantités  $P, Q, \dots, G, \dots$ , les équations de condition

$$R + H = Q + I, \quad P + I = R + G, \quad Q + G = P + H,$$

dont les deux premières entraînent la troisième. D'ailleurs il suit des principes exposés dans ma dernière Lettre que les quantités  $G, H, I$ , c'est-à-dire les pressions relatives à l'état naturel, ne s'évanouissent pas dans le vide. On doit donc préférer la seconde hypothèse à la première que j'avais développée dans la 51<sup>e</sup> livraison des *Anciens Exercices*; et l'on doit prendre, dans cette livraison, pour équation de la surface des ondes, la formule (240) qui, en vertu des conditions énoncées en dernier lieu, peut elle-même acquérir la forme de l'équation (218) ou (219). Ainsi Fresnel a eu raison de dire, non seulement que les vibrations des molécules étherées sont généralement comprises dans les plans des ondes, mais encore que les plans de polarisation sont perpendiculaires aux directions des vitesses ou des déplacements moléculaires.

J'arrive au reste à cette dernière conclusion, d'une autre manière, en établissant les lois de la réflexion et de la réfraction à l'aide d'une nouvelle méthode qui sera développée dans mon Mémoire. En nommant  $\tau$  l'angle d'incidence,  $\tau'$  l'angle de réfraction,  $I, I, I'$  les intensités de la lumière dans les rayons incident, réfléchi et réfracté, enfin  $i, i, i'$  les angles formés avec le plan d'incidence par les plans de polarisation des rayons incident, réfléchi et réfracté, je trouve

$$\begin{aligned} \frac{I \cos i}{\sin(\tau + \tau')} &= \frac{-I \cos i}{\sin(\tau - \tau')} = \frac{I' \cos i'}{2 \sin \tau' \cos \tau}, \\ \frac{I \sin i}{\sin(\tau + \tau') \cos(\tau - \tau')} &= \frac{I \sin i}{\sin(\tau - \tau') \cos(\tau + \tau')} = \frac{I' \sin i'}{2 \sin \tau' \cos \tau}. \end{aligned}$$

## SECONDE NOTE.

Le temps ne m'ayant pas permis de développer les deux formules placées à la fin de ma dernière Lettre, je m'empresse de vous adresser à ce sujet quelques éclaircissements, que je vous prie de vouloir bien encore transmettre de ma part à l'Académie.

Considérons la réflexion et la réfraction qui s'opèrent dans la lumière



polarisée rectilignement à la surface de séparation de deux milieux dont aucun n'est doublement réfringent. Soient I, I', I'' les déplacements absolus et maxima, ou bien encore les plus grandes vitesses des molécules de l'éther dans les rayons incident, réfléchi et réfracté. Soient pareillement  $i, i', i''$  les angles que forment avec le plan d'incidence les directions suivant lesquelles s'effectuent les déplacements dont il s'agit, ou, en d'autres termes, les directions des vitesses des molécules. Enfin, désignons par  $\tau, \tau', \tau''$  les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction. La nouvelle méthode par laquelle j'établis les lois de la réflexion et de la réfraction me fournit : 1° les équations connues  $\sin \tau = \sin \tau', \cos \tau = -\cos \tau', \frac{\sin \tau'}{\sin \tau} = \text{const.}$ ; 2° les deux formules

$$(1) \quad \frac{I \sin i}{\sin(\tau + \tau')} = \frac{-I' \sin i'}{\sin(\tau - \tau')} = \frac{\theta I' \sin i'}{\sin 2\tau},$$

$$(2) \quad \frac{I \cos i}{\sin(\tau + \tau') \cos(\tau - \tau')} = \frac{I' \cos i'}{\sin(\tau - \tau') \cos(\tau + \tau')} = \frac{\theta I' \cos i'}{\sin 2\tau},$$

$\theta$  désignant une quantité qui pourrait dépendre elle-même des angles  $\tau, \tau'$ , mais que je trouve égale à l'indice de réfraction, en sorte qu'on a

$$(3) \quad \theta = \frac{\sin \tau}{\sin \tau'}.$$

Il est bon d'observer que les plus grandes vitesses des molécules d'éther représentées dans les formules (1) et (2) par I, I', I'', ou plutôt leurs carrés I<sup>2</sup>, I'<sup>2</sup>, I''<sup>2</sup> peuvent servir de mesure à l'intensité de la lumière dans les rayons incident, réfléchi et réfracté. Ajoutons que si l'on désignait par  $i, i', i''$  les angles formés par le plan d'incidence, non plus avec les directions suivant lesquelles les molécules se déplacent, mais avec les plans que l'on nomme *plans de polarisation*, et qui sont perpendiculaires à ces mêmes directions, il faudrait, dans les équations (1) et (2), échanger l'un contre l'autre le sinus et le cosinus de chacun des angles  $i, i', i''$ , ce qui réduirait ces équations à la forme sous laquelle elles sont présentées dans ma dernière Lettre.

La méthode par laquelle je parviens aux équations (1) et (2) est applicable non seulement à la théorie de la lumière, mais encore à un

grand nombre de questions de Physique mathématique. Elle ne m'oblige plus à supposer, comme je l'avais fait dans un article du *Bulletin des Sciences*, que la densité de l'éther est la même dans tous les milieux. Mes nouvelles recherches donnent lieu de croire que cette densité varie en général, quand on passe d'un milieu à un autre. Au reste, les équations (1) et (2) ne diffèrent de celles que j'ai données dans l'article cité que par la valeur de  $\theta$  qui dans ces formules se réduisait, non au rapport constant  $\frac{\sin \tau}{\sin \tau'}$ , mais au rapport inverse  $\frac{\sin \tau'}{\sin \tau}$ .

On tire des équations (1) et (2)

$$(4) \quad I'^2 = \left[ \frac{\sin^2(\tau - \tau')}{\sin^2(\tau + \tau')} \sin^2 i + \frac{\tan^2(\tau - \tau')}{\tan^2(\tau + \tau')} \cos^2 i \right] I^2,$$

$$(5) \quad \cot i' = -\frac{\cos(\tau + \tau')}{\cos(\tau - \tau')} \cot i,$$

$$(6) \quad I''^2 = \frac{\sin^2 2\tau}{\theta^2 \sin^2(\tau + \tau')} \left[ \sin^2 i + \frac{\cos^2 i}{\cos^2(\tau - \tau')} \right] I^2,$$

$$(7) \quad \cot i'' = \frac{1}{\cos(\tau - \tau')} \cot i.$$

En se rappelant que les angles représentés dans les équations précédentes par  $i, i', i''$  sont les compléments de ceux que forment, avec le plan d'incidence, les plans de polarisation des rayons incident, réfléchi et réfracté, on reconnaîtra immédiatement que les formules (4), (5) coïncident avec celles qu'a données Fresnel pour déterminer l'intensité de la lumière réfléchie, ainsi que le mouvement de son plan de polarisation, et la formule (7) avec celle qu'a donnée M. Brewster pour déterminer le mouvement du plan de polarisation de la lumière réfractée. Il résulte en outre des formules (1), (2) et (5) que, dans le fluide éthéré, les vibrations perpendiculaires au plan d'incidence sont transformées par la réflexion en d'autres vibrations de même espèce, mais dirigées en sens contraire, tandis que les vibrations parallèles au plan d'incidence sont transformées en d'autres vibrations dirigées, au moment où la réflexion s'opère, tantôt dans le même sens, tantôt en sens contraire, suivant que la somme des angles d'incidence et de réfraction est inférieure ou supérieure à un angle droit. Quand cette



somme devient précisément égale à un droit, c'est-à-dire lorsque le rayon incident est perpendiculaire au rayon réfracté, les vibrations sont toujours perpendiculaires au plan d'incidence dans le rayon réfléchi, ou, en d'autres termes, la lumière réfléchie est tout entière polarisée dans ce plan, comme l'a trouvé M. Brewster.

L'intensité de la lumière réfléchie, ou la quantité  $I_r^2$  déterminée par la formule (4), dépend des angles  $\tau, \tau'$  liés entre eux par l'équation (3), et atteint son maximum lorsque le produit  $\cos \tau \cos \tau'$  s'évanouit, c'est-à-dire lorsque l'un des angles  $\tau, \tau'$  devient droit. Alors les formules (4), (5) donnent

$$(8) \quad I_r^2 = I^2,$$

$$(9) \quad \cot i = \cot i';$$

par conséquent la lumière réfléchie a la même intensité que la lumière incidente, et se trouve polarisée dans le même plan. On dit, pour cette raison, qu'il y a réflexion totale. Cela peut d'ailleurs arriver de deux manières, savoir : 1° quand le second milieu étant plus réfringent que le premier, le rayon incident forme un angle infiniment petit avec la surface de séparation des deux milieux; 2° quand le second milieu étant moins réfringent que le premier, la même surface forme un angle infiniment petit, non plus avec le rayon incident, mais avec le rayon réfracté.

La formule (6) détermine l'intensité  $I^2$  de la lumière réfractée. C'est la seule des quatre équations que les formules (1) et (2) peuvent fournir, dont la comparaison avec l'expérience reste encore à faire, puisque les équations (4), (5), (7) s'accordent avec les observations des physiciens. D'ailleurs on conclut aisément de cette formule que l'intensité de la lumière réfractée atteint son maximum lorsque le produit  $\sin \tau \cos \tau'$  s'évanouit. Cela peut arriver de deux manières, savoir : 1° lorsque, le second milieu étant plus réfringent que le premier, on a  $\tau = 0$ ; 2° lorsque, le second milieu étant moins réfringent que le premier, on a  $\tau' = \frac{\pi}{2}$ . Dans le premier cas, les équations (6) et (7) se

réduisent aux formules connues

$$(10) \quad I^2 = \frac{4}{(\theta + 1)^2} I^2,$$

$$(11) \quad \cot i' = \cot i,$$

dont la première a été donnée par M. Young et par M. Poisson. Dans ce cas, où le rayon incident est perpendiculaire à la surface de séparation des deux milieux, la lumière réfractée est polarisée dans le même plan que la lumière incidente; mais elle a une intensité moindre, puisque  $\theta$  surpasse l'unité. Dans le second cas, on trouve

$$(12) \quad I^2 = 4 \left( \sin^2 i + \frac{\cos^2 i}{\theta^2} \right) I^2,$$

$$(13) \quad \cot i' = \frac{\cot i}{\sin \tau}.$$

Dans ce cas, où le rayon incident rencontre la surface de séparation des deux milieux sous l'angle de réflexion totale, la lumière réfractée n'est plus polarisée dans le même plan que la lumière incidente; et son intensité, divisée par celle de la lumière incidente, donne pour quotient un nombre renfermé entre les deux limites  $\frac{4}{\theta^2}$  et  $\frac{4}{\theta}$  dont la seconde surpasse la première, puisque  $\theta < 1$ . Ce nombre atteint sa limite inférieure  $\frac{4}{\theta^2}$ , ou sa limite supérieure  $\frac{4}{\theta}$ , suivant que la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence, ou perpendiculairement à ce plan. La moyenne entre ces deux limites, ou le produit

$$(14) \quad \frac{2}{\theta^2} (1 + \theta^2) = 2 \left( 1 + \frac{1}{\theta^2} \right),$$

exprime le rapport des intensités de la lumière réfractée et de la lumière incidente lorsque cette dernière est de la lumière naturelle.

Pour les valeurs de  $\tau$  très voisines de l'angle de réflexion totale, c'est-à-dire lorsque le rayon incident ou réfracté devient sensiblement parallèle à la surface de séparation des deux milieux, la lumière réfléchie est entièrement semblable à la lumière incidente, et offre sen-



siblement la même intensité. C'est là ce qu'on exprime en disant que le rayon incident, au lieu d'éprouver, comme dans toute autre hypothèse, une réflexion partielle, est réfléchi en totalité. Il semblerait que, dans le même cas, l'intensité de la lumière réfractée devrait toujours être sensiblement nulle, et que cette intensité devrait s'affaiblir par degrés, tandis que  $\tau$  s'approcherait indéfiniment de l'angle de réflexion totale. C'est effectivement ce qui arrive lorsque le second milieu est plus réfringent que le premier. Mais si le second milieu est moins réfringent que le premier, par exemple, si la lumière passe du verre ou du diamant dans l'air ou dans le vide, alors, dans le voisinage de la réflexion totale, on obtiendra non seulement une lumière réfléchie dont l'intensité sera sensiblement égale à celle de la lumière incidente, mais encore une lumière réfractée dont l'intensité deviendra au moins quatre fois plus considérable. Le rapport des intensités de la lumière réfractée et de la lumière incidente pourra même, si les vibrations des molécules éthérées sont parallèles au plan d'incidence, atteindre la limite  $\frac{4}{9}$ , et par conséquent les nombres 9, 30, ou même 35, si la lumière sort du verre ordinaire, du diamant, ou d'une substance aussi réfringente que le chromate de plomb, pour passer dans l'air ou dans le vide.

La prodigieuse multiplication de la lumière dont il est ici question suppose que l'on compare, par exemple, le rayon émergent d'un cristal à celui qui traverse le même cristal. Si, le cristal étant terminé par deux faces planes, la lumière les traversait l'une après l'autre, on devrait distinguer trois rayons, savoir : le rayon incident, le rayon réfracté, et le rayon émergent. Alors, en supposant les deux faces parallèles, et nommant  $I''$ ,  $i''$  ce que deviennent  $I$ ,  $i$  pour le rayon émergent, on tirerait des formules (1) et (2)

$$(15) \quad I'' \sin i'' = \frac{\sin 2\tau \sin 2\tau'}{\sin^2(\tau + \tau')} I \sin i,$$

$$(16) \quad I'' \cos i'' = \frac{\sin 2\tau \sin 2\tau'}{\sin^2(\tau + \tau') \cos^2(\tau - \tau')} I \cos i,$$

et par suite

$$(17) \quad I''^2 = \frac{\sin^2 2\tau \sin^2 2\tau'}{\sin^4(\tau + \tau')} \left[ \sin^2 i + \frac{\cos^2 i}{\cos^2(\tau - \tau')} \right] I^2,$$

$$(18) \quad \cot i'' = \frac{1}{\cos^2(\tau - \tau')} \cot i.$$

M. Brewster, qui a donné la formule (18), l'a vérifiée par l'expérience, et l'on peut ajouter que des observations, qui seraient d'accord avec l'une des formules (15), (16), (17), entraîneraient la vérification de la formule (6).

La valeur de  $I''^2$  donnée par la formule (17) devient un maximum, lorsque l'on a  $i = 0$ ,  $\tau + \tau' = \frac{\pi}{2}$ . Alors le rayon incident est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, le rayon réfléchi disparaît, et les formules (17), (18) donnent

$$(19) \quad I''^2 = I^2,$$

$$(20) \quad i'' = i = 0;$$

par suite, le rayon émergent est lui-même polarisé perpendiculairement au plan d'émergence, et offre la même intensité de lumière que le rayon incident. Ainsi, lorsque les deux faces d'un cristal sont parallèles, l'intensité de la lumière émergente a pour limite supérieure l'intensité de la lumière incidente, et n'atteint cette limite que dans le cas où il n'y a plus de lumière réfléchie.

Il en sera autrement si les faces du cristal cessent d'être parallèles. Alors, il est vrai, l'intensité de la lumière réfractée sera inférieure à l'intensité de la lumière reçue par la première face du cristal, même sous l'incidence perpendiculaire; et si, dans ce dernier cas, on prend l'intensité de la lumière incidente pour unité, l'intensité de la lumière réfractée sera représentée par le rapport  $\frac{4}{(9 + k)^2}$ , qui se réduira en particulier pour le verre à 0,64, pour le diamant à 0,28, pour le chromate de plomb à 0,25. Mais si le rayon émergent est sensiblement parallèle à la seconde face, et polarisé, ainsi que les rayons incident et réfracté, perpendiculairement au plan d'émergence, l'intensité de la



lumière émergente sera l'un des produits que l'on obtiendra en multipliant les trois nombres qui précèdent par ceux que nous avons trouvés plus haut. Cette intensité sera donc de 5,8 pour le verre ordinaire, de 8,6 pour le diamant, et de 9 environ pour le chromate de plomb, si l'on fait abstraction de la propriété qu'a cette dernière substance d'être doublement réfringente. Les trois derniers nombres devraient être réduits à 4,2, à 4,6 et à 4,9 si le rayon incident était de la lumière naturelle.

Des principes ci-dessus développés il résulte que, si deux faces non parallèles d'un cristal sont traversées par un rayon de lumière, d'abord incident, puis réfracté, puis émergent, le rayon émergent s'éteindra toujours lorsque le rayon incident formera un angle infiniment petit avec la face d'entrée, de manière à éprouver sur cette surface une réflexion totale; mais, qu'au contraire, si le rayon réfracté rencontre la face de sortie à très peu près sous l'angle de réflexion totale, et de manière que le rayon émergent forme un angle infiniment petit avec le plan de cette face, le dernier rayon, loin de s'éteindre, pourra, dans certains cas, acquérir une très grande intensité. Ayant communiqué, le 20 mars dernier, cette conséquence de mes formules à M. Kessler, professeur de Physique, je lui proposai de la vérifier par l'observation. Il colla du papier noir sur les triangles rectangles qui servaient de bases à un prisme de verre, et sur les deux plus petites des trois faces latérales, après avoir percé d'un trou d'épingle le papier qui devait recouvrir une des surfaces latérales; et nous reconnûmes que l'image d'une bougie était transmise à travers le prisme avec une grande intensité dans le cas même où le rayon émergent devenait sensiblement parallèle à la face de sortie. J'ai observé depuis que le rayon émergent s'éteint graduellement quand le rayon incident forme un angle de plus en plus petit avec la face d'entrée. Je ne connais pas d'auteur qui ait parlé de cette expérience, que tout le monde peut répéter avec la plus grande facilité.

Dans les phénomènes d'interférence, de la lumière ajoutée à de la lumière produit l'obscurité. Ici, au contraire, un rayon réfléchi en to-

talité est de plus transmis avec accroissement de lumière; ce qui est un nouvel argument contre le système de l'émission.

Les faits que je viens d'exposer me paraissent une nouvelle confirmation de la théorie développée dans mon Mémoire *Sur la Dispersion*, et donnent l'explication d'un phénomène bien connu, savoir: du grand éclat que présentent sous certains aspects les corps doués d'une puissance réfractive considérable, et de ce qu'on nomme les *feux* du diamant.

On ne doit pas oublier que, dans les applications numériques, nous avons pris ici pour mesure de l'intensité de la lumière le carré de la plus grande vitesse des molécules éthérées. Si l'on prenait pour mesure de l'intensité de la lumière cette vitesse elle-même, les nombres obtenus devraient être remplacés par leurs racines carrées. Mais les intensités maxima et minima ne cesseraient pas de correspondre aux directions que donnent les formules trouvées ci-dessus, et, par suite, les phénomènes que nous avons signalés continueraient de subsister conformément à l'observation.

## 5.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Lettre à M. Ampère, sur l'explication de divers phénomènes de la lumière dans le système des ondes.*

C. R., t. II, p. 364. (11 avril 1836.)

Les formules générales auxquelles je suis parvenu dans mes nouvelles recherches sur la théorie de la lumière ne fournissent pas seulement les lois de la propagation de la lumière dans le vide et dans les divers milieux transparents, comme je vous le disais dans mes Lettres du 12 et du 19 février, ou les lois de la réflexion ou de la réfraction à la surface des corps transparents, telles qu'elles se trouvent énoncées dans les deux Lettres que j'ai adressées à M. Libri, le 19 et le 28 mars.



Elles s'appliquent aussi à la propagation de la lumière dans la partie d'un corps opaque, voisine de la surface, et à la réflexion de la lumière par un corps de cette espèce. On sait d'ailleurs que, si la lumière passe d'un milieu plus réfringent dans un autre qui le soit moins, ce dernier deviendra opaque à l'égard des rayons qui rencontreront sa surface sous un angle tel que le complément  $\tau$ , c'est-à-dire l'angle d'incidence, devienne supérieur à une extrême limite qu'on nomme l'angle de réflexion totale. Dans ma dernière Lettre à M. Libri, j'ai remarqué la prodigieuse <sup>(1)</sup> multiplication de la lumière qui a lieu au moment où l'angle  $\tau$  est sur le point d'atteindre cette limite, et j'ai donné les formules qui, lorsque le rayon incident est polarisé en ligne droite, déterminent l'intensité de la lumière réfractée aussi bien que l'intensité de la lumière réfléchie avec les mouvements des plans de polarisation. Mais ces formules, dont trois coïncident avec celles de MM. Fresnel et Brewster, ainsi que les lois qui en dérivent et qui subsistent avec de légères modifications dans leur énoncé, lorsque la polarisation devient elliptique ou circulaire, se rapportent uniquement au cas où le milieu réfringent ne fait pas, à l'égard du rayon incident, la fonction d'un corps opaque, c'est-à-dire (quand le second milieu est moins réfringent que le premier) au cas où l'angle d'incidence est inférieur à l'angle de réflexion totale. Les résultats que j'ai obtenus dans le cas contraire me paraissent assez intéressants pour que vous me pardonniez de vous écrire encore à ce sujet, en vous priant de communiquer ma Lettre à l'Académie.

Supposons qu'un rayon polarisé tombe sur la surface de séparation de deux milieux, dont le premier soit le plus réfringent, et que l'angle d'incidence devienne supérieur à l'angle de réflexion totale. Si l'on nomme  $\tau$  l'angle d'incidence,  $\frac{1}{\theta}$  le rapport qui existait entre le sinus

(1) Cette multiplication de lumière a également lieu, mais à un plus faible degré, quand on considère un rayon qui, après être entré dans un prisme de verre perpendiculairement à une première face, est réfléchi en totalité par une seconde face, et sort du prisme perpendiculairement à une troisième; ce qu'on pouvait déjà conclure des formules de MM. Young, Poisson et Fresnel.

d'incidence et le sinus de réfraction avant que le rayon réfracté disparût, enfin  $l = \frac{2\pi}{K}$  et  $l' = \frac{2\pi}{K'}$  les épaisseurs qu'une onde lumineuse acquiert dans le premier et dans le second milieu, on aura

$$(1) \quad \theta = \frac{K}{K'} = \frac{l'}{l},$$

et, si l'on pose d'ailleurs

$$(2) \quad b = \theta \sin \tau,$$

$$(3) \quad a = \sqrt{b^2 - 1},$$

l'intensité de la lumière dans le second milieu, à la distance  $x$  de la surface de séparation, sera proportionnelle à l'exponentielle négative  $e^{-akx}$ . Si  $\tau$  se réduit à l'angle de réflexion totale, on aura

$$\sin \tau = \frac{1}{\theta}, \quad b = 1, \quad a = 0, \quad e^{-akx} = 1,$$

et la lumière réfractée aura une grande intensité. Mais si  $\tau$  croit à partir de la limite qu'on vient de rappeler, la lumière réfractée s'éteindra à une distance comparable à l'épaisseur  $l'$  des ondes que peut transmettre le second milieu, et d'autant moindre que  $a$  sera plus grand. Si l'on suppose  $\tau = \frac{\pi}{2}$ ,  $a$  atteindra sa limite supérieure  $\sqrt{\theta^2 - 1}$ . Ajoutons que la quantité  $b$ , déterminée par la formule (2), remplace ici le sinus de réfraction avec lequel elle coïncide, lorsqu'on a  $\sin \tau = \frac{1}{\theta}$ . Considérons maintenant la lumière réfléchie.

Le rayon incident que nous supposons polarisé en ligne droite, suivant une direction quelconque, peut être remplacé par le système de deux rayons polarisés à angles droits, l'un dans le plan d'incidence, l'autre perpendiculairement à ce plan. Nous nommerons ces derniers *rayons composants*. Or, après la réflexion, chacun de ces deux rayons conservera l'intensité qui lui est propre, et si de plus l'angle  $\tau$  se réduit à l'angle de réflexion totale, la marche des ondulations dans chacun d'eux sera la même avant et après la réflexion. Mais, si  $\tau$  de-





vient supérieur à l'angle de réflexion totale, alors, dans chacun des rayons composants, la réflexion déplacera toutes les ondulations et transportera chacune d'elles en avant à une certaine distance qui atteindra sa limite supérieure, et deviendra équivalente à une demi-épaisseur d'onde ou à  $\frac{\pi}{K}$ , quand on aura  $\sin \tau = 1$ , c'est-à-dire quand le rayon incident formera un angle infiniment petit avec la surface de séparation des deux milieux. Si  $\sin \tau$  demeure compris entre les limites  $\frac{1}{\theta}$  et 1, la distance dont il s'agit ne sera plus généralement la même dans les deux rayons composants. Alors, en désignant cette distance par  $\frac{\mu}{K}$  pour le rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence et par  $\frac{\nu}{K}$  pour le rayon polarisé parallèlement à ce plan, on trouvera

$$(4) \quad \operatorname{tang} \frac{\mu}{2} = \theta \frac{a}{\cos \tau},$$

$$(5) \quad \operatorname{tang} \frac{\nu}{2} = \frac{1}{\theta} \frac{a}{\cos \tau},$$

et par suite

$$(6) \quad \operatorname{tang} \frac{\mu}{2} = \theta^2 \operatorname{tang} \frac{\nu}{2},$$

puis, en désignant par  $\varpi$  l'angle de polarisation totale d'un rayon qui subirait une réflexion partielle, et posant en conséquence

$$(7) \quad \operatorname{tang} \varpi = \frac{1}{\theta},$$

on tirera de l'équation (6)

$$(8) \quad \sin \frac{\mu - \nu}{2} = \cos 2\varpi \sin \frac{\mu + \nu}{2},$$

et des formules (4), (5) jointes aux équations (2) et (3),

$$(9) \quad \cos^2 \tau = \frac{\sin \frac{\mu - \nu}{2} \cos \frac{\nu}{2}}{\sin \frac{\mu}{2}}, \quad \sin^2 \tau = \frac{\cos \frac{\mu - \nu}{2} \sin \frac{\nu}{2}}{\sin \frac{\mu}{2}}, \quad \operatorname{tang}^2 \tau = \frac{\operatorname{tang} \frac{\nu}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\mu - \nu}{2}}.$$

Il résulte de la formule (8) que la différence de marche des deux rayons composants, ou la quantité

$$(10) \quad \frac{\mu - \nu}{K},$$

atteint son maximum, quand la somme  $\mu + \nu$ , qui varie entre les limites 0,  $2\pi$ , atteint sa valeur moyenne  $\pi$ , c'est-à-dire quand on a

$$(11) \quad \mu + \nu = \tau.$$

Alors, les formules (4) donnent

$$(12) \quad \operatorname{tang} \frac{\mu}{2} = \theta, \quad \operatorname{tang} \frac{\nu}{2} = \frac{1}{\theta}, \quad a = \cos \tau;$$

par conséquent

$$(13) \quad \mu > \frac{\pi}{2}, \quad \nu < \frac{\pi}{2};$$

et comme, en vertu de la formule (11), on doit avoir encore

$$(14) \quad \mu - \nu < \pi,$$

la formule (8), réduite à

$$(15) \quad \sin \frac{\mu - \nu}{2} = \cos 2\varpi,$$

entraîne la suivante

$$(16) \quad \mu - \nu = \pi - 4\varpi,$$

de laquelle on tire, en la combinant avec l'équation (7),

$$(17) \quad \theta = \cot \frac{\pi - (\mu - \nu)}{4}.$$

Enfin, de la première des équations (9), combinée avec les formules (11) et (15), on tirera

$$(18) \quad \cos^2 \tau = \cos 2\varpi.$$

Il suit de la condition (14) qu'après une seule réflexion la différence



de marche des deux rayons, ou l'expression (10), ne peut jamais atteindre la demi-épaisseur d'une onde ou la longueur d'une demi-ondulation; pour qu'elle pût atteindre un quart d'ondulation, il faudrait que la valeur maximum de  $\mu - \nu$  fût égale ou supérieure à  $\frac{\pi}{2}$ ; et par suite, en vertu de l'équation (17), la valeur de  $\theta$  devrait alors être égale ou supérieure à celle que détermine la formule

$$(19) \quad \theta = \cot \frac{\pi}{8} = 2,4142 \dots$$

En admettant cette dernière valeur de  $\theta$ , on tirerait des formules (16) et (18)

$$(20) \quad m = \frac{\pi}{8}, \quad \cos \tau = \cos \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} \right) = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau = 32^{\circ} 46'.$$

Alors, en supposant les intensités des rayons composants égales entre elles, ou, ce qui revient au même, en supposant le rayon primitif polarisé à  $45^{\circ}$  du plan d'incidence, on obtiendrait, après une seule réflexion sous l'angle de  $32^{\circ} 46'$ , la polarisation circulaire. Or la valeur de  $\theta$  donnée par la formule (19) est à peu près celle qui convient aux diamants les moins réfringents. Donc, pour obtenir après une seule réflexion totale la polarisation circulaire, il faut employer un corps dont l'indice de réfraction soit égal ou supérieur à celui du diamant. Si l'on emploie des corps doués d'une puissance réfractive moins considérable, deux réflexions totales sous un certain angle pourront produire la polarisation circulaire, pourvu que l'indice de réfraction soit égal ou supérieur à la valeur de  $\theta$  que fournit l'équation (17) quand on y pose  $\mu - \nu = \frac{\pi}{2}$ . Or, on tire alors des formules (17) et (18)

$$(21) \quad \theta = \cot \frac{3\pi}{16} = 1,4966 \dots,$$

$$(22) \quad \tau = 51^{\circ} 47'.$$

La valeur précédente de  $\theta$  est un peu plus faible que celle qui convient au verre ordinaire. Par conséquent, deux réflexions sur la surface du

verre, ou d'un milieu plus réfringent, pourront produire la polarisation circulaire, si dans ces deux réflexions les surfaces réfléchissantes sont parallèles, et si de plus l'angle  $\tau$  a une valeur déterminée qui, pour le verre, doit être peu différente de  $52^{\circ}$ .

En général, si l'on fait subir à un rayon polarisé une suite de réflexions totales sur diverses surfaces toutes perpendiculaires au plan d'incidence, qui sera aussi le plan des réflexions successives, et si, après avoir déterminé pour la première surface les valeurs des angles  $\mu, \nu$ , à l'aide des formules (4), (5), on nomme  $\mu', \nu', \mu'', \nu'', \dots$  ce que deviennent les angles  $\mu, \nu$ , dans la seconde, la troisième, ... réflexion, la différence de marche entre les deux rayons composants sera, en définitive, représentée par le rapport

$$(23) \quad \frac{\mu + \mu' + \mu'' \dots - (\nu + \nu' + \nu'' \dots)}{K} = \frac{\mu + \mu' + \mu'' \dots - (\nu + \nu' + \nu'' \dots)}{\pi} \frac{1}{2}.$$

Si ce rapport est nul ou multiple de  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire, en d'autres termes, si la somme

$$(24) \quad \mu + \mu' + \mu'' \dots - (\nu + \nu' + \nu'' \dots)$$

se réduit à zéro ou à un multiple de  $\pi$ , le système des deux rayons composants produira définitivement un rayon réfléchi semblable au rayon incident. Si la somme (24) est le produit de  $\frac{\pi}{2}$  par un nombre impair, et si de plus le rayon incident est polarisé à  $45^{\circ}$  du plan d'incidence, le rayon réfléchi sera polarisé circulairement. Dans tout autre cas, ce rayon offrira la polarisation elliptique, c'est-à-dire que la courbe décrite dans ce rayon, par chaque molécule d'éther, sera une ellipse. Si toutes les surfaces réfléchissantes sont parallèles et de même nature, si de plus toutes les réflexions s'effectuent sous le même angle, alors, en nommant  $n$  le nombre des réflexions, on réduira la quantité (24) au produit

$$(25) \quad n(\mu - \nu).$$

Ce dernier produit dépend de l'angle  $\tau$ , et atteint son maximum pour



la valeur de  $\tau$  déterminée par la formule (18). Ce maximum pour le verre est environ

$$(26) \quad \frac{\mu\tau}{4}$$

Donc, si l'on emploie le verre ordinaire, il faudra faire subir au rayon incident au moins deux réflexions totales pour produire la polarisation circulaire, et au moins deux nouvelles réflexions pour la détruire. De plus, pour que la polarisation circulaire soit produite par les deux premières réflexions, il faudra non seulement que l'angle d'incidence soit de  $52^\circ$  environ, mais encore que le rayon incident soit polarisé à  $45^\circ$  du plan d'incidence; et alors, après quatre réflexions, le rayon réfléchi sera polarisé lui-même à  $45^\circ$  du plan d'incidence, mais de l'autre côté de ce plan. Huit réflexions totales, sous l'incidence de  $52^\circ$ , ramèneraient le plan de polarisation du même côté. Si le rayon incident était polarisé, non plus à  $45^\circ$  du plan d'incidence, mais dans un plan quelconque, quatre réflexions totales sous un angle de  $52^\circ$  offriraient encore un rayon réfléchi semblable au rayon incident, et les plans de polarisation des rayons extrêmes, incident et réfléchi, formeraient encore des angles égaux avec le plan d'incidence, mais seraient situés de deux côtés différents par rapport à ce dernier. Au reste, on pourrait produire le même effet avec cinq, six, ... réflexions totales, en changeant la valeur de l'angle d'incidence; et l'on pourrait pareillement obtenir la polarisation circulaire à l'aide de trois, quatre, ... réflexions totales. Si, pour fixer les idées, on veut la produire à l'aide de trois réflexions totales, sous la même incidence, on déterminera les angles  $\mu, \nu$  à l'aide de la formule (8), jointe à la suivante :

$$(27) \quad \mu - \nu = \frac{\pi}{6} = 30^\circ,$$

puis l'angle  $\tau$  à l'aide de l'une des formules (9). Si l'on emploie un verre dont l'indice de réfraction soit  $\theta = 1,52$ , on trouvera successivement

$$\omega = 33^\circ 20' 30'', \quad \sin \frac{\mu + \nu}{2} = 0,65368 \dots, \quad \frac{\mu + \nu}{2} = 90^\circ \pm 49^\circ 10' 56'',$$

et par suite

$$\mu = 55^\circ 49' 10'', \quad \nu = 25^\circ 49' 10'',$$

ou bien

$$\mu = 154^\circ 10' 50'', \quad \nu = 124^\circ 10' 50''.$$

Cela posé, la dernière des formules (9) donnera

$$\tau = 42^\circ 24' \quad \text{ou} \quad \tau = 69^\circ 21' 40''.$$

Ainsi, la polarisation circulaire pourra être obtenue à l'aide de trois réflexions totales, opérées dans l'un de ces deux derniers angles, dont la demi-somme est à peu près l'angle sous lequel le même genre de polarisation résulte de deux réflexions seulement. Au reste, tous les résultats qu'on vient d'énoncer sont conformes aux calculs et aux expériences de Fresnel. Il y a plus : si l'on élimine les quantités  $a, b, \frac{\mu + \nu}{2}$  entre les formules (2), (3), (4) et (5), on en tirera, en posant  $\mu - \nu = \delta$ ,

$$(28) \quad \cos \delta = \frac{2\theta^2 \sin^4 \tau - (\theta^2 + 1) \sin^2 \tau + 1}{(\theta^2 + 1) \sin^2 \tau - 1}.$$

Or cette dernière équation est précisément celle que Fresnel a obtenue, en cherchant, dit-il, ce que l'analyse voulait indiquer par les formes, en partie imaginaires, que prennent dans le cas de la réflexion totale les coefficients de vitesses absolues déterminées dans l'hypothèse de la réflexion partielle. Cette même équation, que Fresnel a confirmée par diverses expériences, et *en faveur de laquelle*, suivant l'expression de cet illustre physicien, *s'élevaient déjà des probabilités théoriques*, est, comme on le voit, une conséquence nécessaire des formules que nous avons établies.

Lorsque deux réflexions successives s'opèrent sous le même angle, et que les deux plans d'incidence sont perpendiculaires entre eux, on a évidemment  $\mu' = \nu, \nu' = \mu, \mu + \mu' - (\nu + \nu') = 0$ . Donc alors le rayon réfléchi devient, après la seconde réflexion, semblable au rayon incident.

L'analyse dont j'ai fait usage démontre encore que les valeurs de  $\mu$



et de  $v$  resteraient les mêmes, si le rayon primitif, au lieu d'être polarisé rectilignement, offrait la polarisation circulaire ou elliptique.

En terminant cet exposé, je ferai une observation relative à une assertion émise dans ma dernière Lettre à M. Libri, savoir que les vibrations perpendiculaires au plan d'incidence sont transformées, par la réflexion, en d'autres vibrations de même espèce, mais dirigées en sens contraire, etc. Cela doit s'entendre du cas où, le second milieu étant plus réfringent que le premier, on a  $\tau > \tau'$ , ainsi qu'on le reconnaîtra sans peine en jetant les yeux sur les formules (1) et (2) de la Lettre dont il s'agit. Au reste, toutes les conséquences que l'on peut déduire de ces deux formules, relativement aux signes, s'accordent avec les conclusions tirées des formules de MM. Young, Poisson, Fresnel, etc., et avec l'explication qu'ils ont donnée du phénomène des anneaux colorés. J'ai avancé dans la même Lettre que l'intensité de la lumière, transmise à travers un prisme, atteignait son maximum lorsque le rayon émergent était polarisé perpendiculairement au plan d'émergence. Une expérience que j'ai faite avec M. Hessler, professeur de Physique, a confirmé l'exactitude de cette proposition.

## 6.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Deuxième Lettre à M. Libri, sur la théorie de la lumière.*

C. R., t. II, p. 427. (2 mai 1836.)

Dans ma dernière Lettre, j'ai indiqué les résultats que fournissent les formules générales auxquelles je suis parvenu, quand on les applique au phénomène connu sous le nom de *réflexion totale*, c'est-à-dire au cas où le second milieu, quoique transparent, remplit la fonction d'un corps opaque. Je vais aujourd'hui vous entretenir un instant de ce qui arrive lorsque le second milieu est constamment opaque sous

toutes les incidences, et en particulier lorsque la lumière se trouve réfléchie par un métal. Si l'on fait tomber sur la surface d'un métal un rayon simple doué de la polarisation rectiligne, ou circulaire, ou même elliptique, ce rayon pourra toujours être décomposé en deux autres polarisés en ligne droite, l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre parallèlement à ce plan. Or, je trouve que, dans chaque rayon composant, la réflexion fait varier l'intensité de la lumière suivant un rapport qui dépend de l'angle d'incidence, et qui généralement n'est pas le même pour les deux rayons. De plus, la réflexion transporte les ondulations lumineuses en avant ou en arrière, à une certaine distance qui dépend encore de l'angle d'incidence. Si l'on représente cette distance, pour le premier rayon composant, par  $\frac{\mu}{k}$ ; pour le second, par  $\frac{\nu}{k}$ ,  $l = \frac{2\pi}{k}$  étant l'épaisseur d'une onde, la différence de marche entre les deux rayons composants, après une première réflexion, sera représentée par

$$\frac{\mu - \nu}{k}.$$

Après  $n$  réflexions, opérées sous le même angle, elle deviendra

$$n \frac{\mu - \nu}{k}.$$

Je trouve d'ailleurs qu'après une seule réflexion, sous l'angle d'incidence  $\tau$ , la différence de marche est d'une demi-ondulation, si  $\tau = 0$ , et d'une ondulation entière, si  $\tau = \frac{\pi}{2}$ . Donc, en ne tenant pas compte des multiples de la circonférence dans la valeur de l'angle  $\mu - \nu$ , on peut considérer la valeur numérique de cet angle comme variant entre les limites  $\pi$  et zéro. Lorsque  $\mu - \nu$  atteint la moyenne entre ces deux limites ou  $\frac{\pi}{2}$ , on obtient ce que M. Brewster appelle la polarisation elliptique, et

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n$$

réflexions semblables ramènent le rayon polarisé à son état primitif.



Alors, si le rayon incident était polarisé en ligne droite, le dernier rayon réfléchi sera lui-même polarisé rectilignement. Mais son plan de polarisation formera avec le plan de réflexion un angle  $\delta$  dont la tangente sera égale, au signe près, à la puissance  $2n$  du quotient qu'on obtient en divisant l'un par l'autre les rapports suivant lesquels la première réflexion fait varier, dans chaque rayon composant, les plus grandes vitesses des molécules. Donc, tandis que le nombre des réflexions croîtra en progression arithmétique, les valeurs de  $\tan \delta$  varieront en progression géométrique; et comme, pour les différents mé-taux, on trouve généralement  $\delta < \frac{\pi}{4}$  ou  $45^\circ$ , la lumière, pour de grandes valeurs de  $n$ , finira par être complètement polarisée dans le plan d'incidence. On déduit encore de mes formules générales un grand nombre de conséquences que je développerai plus en détail dans une seconde Lettre, et qui s'accordent aussi bien que les précédentes avec les résultats obtenus par M. Brewster.

## 7.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Troisième et quatrième Lettre à M. Libri, sur la théorie de la lumière.*

C. R., t. II, p. 455. (9 mai 1836.)

Comme une des plus graves objections que l'on ait faites contre la théorie des ondulations de l'éther se tirait de l'existence des ombres et de la propriété qu'ont les écrans d'arrêter la marche des vibrations lumineuses, je désirais beaucoup arriver à déduire de mes formules générales les lois relatives aux deux phénomènes des ondes et de la diffraction; mais, pour y parvenir, il fallait surmonter quelques difficultés d'analyse. J'y ai enfin réussi, et pour représenter les mouvements de l'éther, lorsque la lumière est en partie interceptée par un

écran, j'ai trouvé des formules dont je veux un instant vous entretenir.

Considérons, pour fixer les idées, le cas où le corps éclairant est assez éloigné pour que les ondes sphériques qui se propagent autour de ce corps soient devenues sensiblement planes. Prenons pour axe des  $x$  la direction du rayon lumineux, et pour axe des  $y$  une droite parallèle aux vibrations moléculaires de l'éther. Nommons  $x$  le déplacement d'une molécule mesuré parallèlement à l'axe des  $y$ ,  $I$  la valeur maximum de  $x$ ,  $l = \frac{2\pi}{K}$  l'épaisseur d'une onde lumineuse et  $I = \frac{2\pi}{s}$  la durée d'une vibration; enfin concevons que, dans le plan des  $xy$ , perpendiculaire à l'axe des  $x$ , la lumière soit interceptée par un écran, du côté des  $y$  négatives. Si le rayon lumineux, que nous supposons dirigé dans le sens des  $x$  positives, est un rayon simple, son équation, pour des valeurs négatives de  $x$ , sera de la forme

$$(1) \quad y = I \cos(Kx - st + \lambda),$$

$\lambda$  désignant une quantité constante. Or je trouve que, du côté des  $x$  positives, la valeur de  $y$  pourra être développée en une série, et qu'en réduisant cette série à son premier terme, on aura

$$(2) \quad y = \left(\frac{I}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} I \int_{-\infty}^{\frac{Kx}{I}} \cos\left(Kx + \lambda - st - \frac{\pi}{4} + x^2\right) dx.$$

D'ailleurs, le nombre  $K$  étant très considérable, la valeur de  $y$  donnée par la formule (2) se réduira sensiblement à zéro, pour des valeurs finies et négatives de l'ordonnée  $y$ , tandis que, pour des valeurs finies et positives de la même ordonnée, la formule (2) coïncidera sensiblement avec la formule (1). Donc la partie de l'espace située au delà du plan de l'écran sera dans l'ombre du côté où l'écran se trouve, c'est-à-dire derrière l'écran, et continuera d'être éclairée du côté opposé, comme si l'écran n'existait pas. On devra seulement excepter les points de l'espace correspondants à de très petites valeurs de  $y$ , et pour lesquels le déplacement  $y$  dépendra des deux coordonnées  $x$ ,  $y$  aussi bien



que du temps  $t$ . Pour ces derniers points, la formule (2) reproduit les lois de la diffraction, telles que Fresnel les a données, et l'on peut simplifier l'étude de ces lois en transformant le second membre de l'équation (2) à l'aide des formules que j'ai données dans plusieurs Mémoires.

J'ai dit plus haut que les ondes qui se propagent autour d'un corps éclairant sont généralement sphériques. Effectivement il résulte du calcul qu'un rayon simple peut se propager dans l'éther sous la forme d'ondes sphériques, ou cylindriques, ou planes. On peut obtenir ces diverses formes en supposant qu'à l'origine du mouvement l'éther est mis en vibration, ou en un seul point, ou dans tous les points d'un même axe, ou dans tous les points d'un même plan; et les deux premières hypothèses fournissent les mêmes résultats que la troisième à une grande distance du point éclairant ou de l'axe qui le remplace. J'ajouterai que, dans les deux premières hypothèses, les vibrations moléculaires sont, pour un rayon simple, dirigées suivant les éléments de circonférences de cercles parallèles tracés sur la surface de l'onde, et que ces vibrations sont semblables entre elles, et isochrones pour tous les points d'une même circonférence.

Dans celle de mes Lettres qui avait pour objet les lois de la réfraction et de la réflexion à la surface des corps transparents, je remarquai que, des quatre équations comprises dans les formules auxquelles j'étais parvenu, trois étaient déjà vérifiées et conformes à toutes les observations connues. Or il se trouve heureusement que la quatrième équation, la seule dont la comparaison avec l'expérience restât encore à faire, est vérifiée à son tour par le phénomène des anneaux colorés. En effet, concevons que la surface extérieure ou intérieure d'une lame d'air, ou d'un corps transparent quelconque, en réfléchissant un rayon polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence, fasse varier les plus grandes valeurs des déplacements moléculaires dans le rapport de 1 à  $\theta$ , et nommons  $\theta'$ ,  $\theta''$  ce que devient le rapport  $\theta$  quand on suppose le rayon, non plus réfléchi, mais réfracté, et

passant de l'extérieur à l'intérieur de la lame, ou de l'intérieur à l'extérieur. Soit d'ailleurs  $I$  le déplacement absolu et maximum d'une molécule d'éther dans le rayon incident. Si l'épaisseur de la plaque est un multiple de l'épaisseur des ondes lumineuses, les diverses réflexions, en nombre infini, qui seront produites, l'une par la surface extérieure, les autres par la surface intérieure de la lame mince, ramèneront vers l'œil de l'observateur une infinité de rayons, et de la composition de ces rayons naîtra un rayon résultant dans lequel le déplacement maximum aura pour mesure, comme on sait, le produit

$$\theta I (1 - \theta' \theta'' - \theta^2 \theta' \theta'' - \dots) = \theta I \left( 1 - \frac{\theta' \theta''}{1 - \theta^2} \right).$$

Pour que ce produit s'évanouisse et que, dans le phénomène des anneaux colorés, la tache obscure du centre présente le noir foncé, il faudra que l'on ait

$$(1) \quad \theta' \theta'' = 1 - \theta^2.$$

Or cette condition sera effectivement remplie si l'on adopte, pour l'intensité de la lumière réfractée, la valeur que donnent les formules ci-dessus mentionnées. Il y a plus, la condition (1) fournit immédiatement les deux équations inscrites sous les nos 15 et 16 dans ma Lettre sur la réfraction et la réflexion que produisent les corps transparents; car, si l'on nomme  $\tau$  l'angle d'incidence, et  $\tau'$  l'angle de réfraction, on aura

$$\theta^2 = \left[ \frac{\sin(\tau - \tau')}{\sin(\tau + \tau')} \right]^2, \quad \text{ou} \quad \theta^2 = \left[ \frac{\sin(\tau - \tau') \cos(\tau + \tau')}{\sin(\tau + \tau') \cos(\tau - \tau')} \right]^2,$$

suivant que le rayon incident sera polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence, et l'on tirera de la formule (1), dans le premier cas,

$$\theta' \theta'' = \frac{\sin 2\tau \sin 2\tau'}{\sin^2(\tau + \tau')},$$

dans le second cas,

$$\theta' \theta'' = \frac{\sin 2\tau \sin 2\tau'}{\sin^2(\tau + \tau') \cos^2(\tau - \tau')}.$$





Au reste, j'ai aussi obtenu des formules générales pour la réflexion qui s'opère à la surface des corps opaques, particulièrement des métaux, et ces formules s'accordent parfaitement avec l'expérience, comme je vous l'expliquerai plus en détail, lorsque le temps dont je pourrai disposer me permettra d'entrer à ce sujet dans quelques développements.

Si l'écran par lequel on suppose la lumière interceptée dans le plan des  $yz$  ne laissait passer les rayons lumineux que dans l'intervalle compris entre les limites  $y = y_0$ ,  $y = y_1$ , en sorte que l'observateur, placé du côté des  $x$  positives, reçût la lumière par une ouverture dont la largeur fût  $y_1 - y_0$ , la formule (2) (de la Lettre précédente) devrait être remplacée par la suivante

$$(d) \quad y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{k(y-y_0)}{\sqrt{2x}}}^{\frac{k(y-y_1)}{\sqrt{2x}}} \cos\left(kx + \lambda - st - \frac{\pi}{4} + z^2\right) dx.$$

L'équation (d) elle-même fournit seulement une valeur approchée de  $y$ , et se déduit de formules générales et rigoureuses qui représentent le rayon diffracté, quelle que soit la direction du rayon incident, et quelles que soient les directions des vibrations moléculaires dans ce même rayon. Ces formules, en donnant les lois de la diffraction, montrent, par exemple, que si le rayon incident est polarisé dans un certain plan, le rayon diffracté restera toujours polarisé dans ce même plan.

## 8.

## THÉORIE DE LA LUMIÈRE. — Lettre à M. Libri.

C. R., t. III, p. 422. (3 octobre 1836.)

Dans le *Compte rendu* de la séance du 9 août se trouve une assertion relative au nouveau Mémoire *Sur la théorie de la lumière*, que vous avez eu la bonté de présenter en mon nom à l'Académie des Sciences.

Il y est dit : *A l'occasion du nouveau Mémoire de M. Cauchy sur la lumière, présenté aujourd'hui à l'Académie, M. Arago croit devoir signaler une erreur de fait dans laquelle l'auteur est tombé au sujet de la dispersion des substances gazeuses. M. Cauchy suppose cette dispersion nulle. M. Arago dit, au contraire, qu'elle est sensible, et qu'il l'a mesurée pour un grand nombre de gaz simples et composés. Dans une prochaine séance, M. Arago fera connaître tous ses résultats.* Il serait assez singulier que l'erreur de fait se trouvât, non dans le Mémoire lithographié, mais dans l'assertion qu'on vient de lire, appliquée, comme elle semble l'être, à ce nouveau Mémoire; et sans doute il y a ici une faute d'impression ou de rédaction qui aura dénaturé la pensée de notre confrère. La première Partie du nouveau Mémoire se compose de quatre paragraphes, dont les trois premiers se rapportent à des questions de pure Analyse, tandis que le quatrième offre une méthode propre à fournir, dans un grand nombre de problèmes de Physique mathématique, les conditions relatives aux limites des corps ou des systèmes de molécules. Les sept paragraphes que renferme la seconde Partie ont pour objet les équations générales du mouvement de l'éther, les couleurs, le mouvement de la lumière pénétrant à une petite profondeur à l'intérieur des corps opaques, le passage des formules obtenues dans le § III à celles qui représentent un mouvement vibratoire quelconque du fluide éthéré, les milieux où la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens, soit autour d'un point quelconque, soit autour de tout axe parallèle à une droite donnée, enfin la propagation des ondes planes dans les corps transparents. Mais dans tout cela il n'est nullement question de gaz qui dispersent ou ne dispersent pas la lumière, et le mot même de gaz ou de substances gazeuses ne s'y trouve nulle part.

Ce que M. Arago aura dit, c'est que jusqu'à ce jour les physiciens n'avaient point observé la dispersion dans les gaz. C'est là ce que j'ai dit moi-même dans la 9<sup>e</sup> livraison d'un Mémoire plus ancien où, après avoir établi et vérifié les lois de la dispersion dans les corps solides, après avoir expliqué comment on s'assure que ce phénomène disparaît



dans le vide, j'ajoute que *jusqu'à ce jour on n'a pu découvrir dans les gaz aucune trace de la dispersion des couleurs* (voir le Mémoire *Sur la Dispersion*, page 185, lignes 13 et 14, ancienne édition). La Note insérée dans le *Compte rendu* prouve elle-même l'exactitude de cette proposition à l'époque où j'écrivais ces lignes, et c'est parce que les physiciens n'avaient jusqu'ici rien découvert à cet égard que les observations promises par M. Arago contribueront notablement au progrès de la Science. Mais personne ne s'étonnera que je n'aie point parlé de ces observations plusieurs mois avant qu'elles fussent publiées et peut-être même entreprises. Je vous prie d'avoir la bonté de me transmettre ces observations aussitôt que vous les connaîtrez. L'accord de mes calculs avec toutes les observations déjà connues me donne lieu d'espérer que celles-ci offriront une confirmation nouvelle des formules établies dans mon Mémoire. Je serai, en particulier, curieux de savoir si, pour les substances gazeuses, comme pour les solides et les liquides, la différence entre les carrés des indices de réfraction relatifs à deux rayons colorés est sensiblement proportionnelle à la différence entre les carrés, non pas des longueurs d'ondulation, mais des quotients qu'on obtient en divisant l'unité par ces mêmes longueurs.

Je vous serai très obligé si vous avez la bonté de communiquer ma Lettre à l'Académie, dans la plus prochaine séance, et de la faire insérer dans le *Compte rendu*.

## 9.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Extrait d'une Lettre à M. Coriolis.*

C. R., t. IV, p. 216. (13 février 1837.)

29 janvier 1837.

Je prendrai la liberté de vous dire ici quelques mots d'un nouveau Mémoire d'Analyse que je vous adresserai bientôt, et dans lequel je

donne une plus grande extension aux méthodes exposées dans les précédents. Ainsi étendues, ces méthodes s'appliquent avec un succès remarquable à presque tous les grands problèmes d'Analyse, à la résolution générale des équations, à l'intégration des équations différentielles, à la Mécanique céleste, etc... Je vais indiquer ici sommairement les principes sur lesquels je m'appuie, et quelques-uns des résultats auxquels ils me conduisent. Dans mes trois Mémoires lithographiés, à Turin et à Prague, *Sur le Calcul des indices des fonctions*, *Sur le Calcul des limites*, et *Sur l'intégration des équations différentielles*, j'ai montré comment on pouvait déterminer le nombre des racines qui, dans une équation algébrique, offrent des modules compris entre des limites données; j'ai établi des règles sur la convergence des séries qui représentent les racines des équations algébriques ou transcendantes, ou les intégrales des équations différentielles, et j'ai fait voir comment on peut assigner des limites supérieures aux restes de ces séries. Or, pour établir ces règles et déterminer ces limites, de la manière la plus générale, il suffit de recourir à une proposition démontrée dans l'un de ces Mémoires, et dont voici l'énoncé :

*x désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction  $y$  réelle ou imaginaire de  $x$  sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $x$ , tant que le module de  $x$  conservera une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction cesse d'être finie et continue.*

D'après la définition donnée dans mon *Cours d'Analyse*, une fonction d'une variable est continue entre des limites données lorsque, entre ces limites, chaque valeur de la variable produit une valeur unique et finie de la fonction, et que celle-ci varie par degrés insensibles avec la variable elle-même. Cela posé, une fonction qui ne devient pas infinie ne cesse en général d'être continue qu'en devenant multiple. Ainsi une racine d'une équation ne cessera généralement d'être fonction continue d'un paramètre renfermé dans l'équation, qu'autant que cette équation acquerra des racines égales. J'appelle *valeurs principales*





du paramètre celles qui donnent des racines communes à l'équation et à sa dérivée. Cela posé, toute racine est développable suivant les puissances ascendantes du paramètre, tant que le module de celui-ci reste inférieur aux modules de toutes ses valeurs principales. Au reste, j'avais déjà donné ce dernier théorème dans un Mémoire présenté à l'Académie de Turin, le 10 septembre 1832. (Voir l'extrait de ce Mémoire, dans la *Gazette de Piémont*, du 22 septembre 1832.)

De ces principes se déduisent immédiatement un grand nombre de méthodes diverses pour la résolution générale des équations de tous les degrés. En voici deux exemples :

1° Les racines d'une équation de degré quelconque seront toutes développables, ou suivant les puissances ascendantes, ou suivant les puissances descendantes et fractionnaires du dernier terme, si le module de ce terme est inférieur ou supérieur aux modules de toutes ses valeurs principales. Dans le cas contraire, l'équation pourra être décomposée en plusieurs autres dont les coefficients seront développables suivant les puissances ascendantes ou descendantes du terme dont il s'agit. D'ailleurs le calcul des indices fournit le moyen de distinguer ces trois cas, sans résoudre aucune équation.

2° Pour résoudre une équation, partagez son premier membre en deux polynômes d'une manière quelconque, et supposez l'un de ces polynômes multiplié par un paramètre que vous réduirez plus tard à l'unité. Si toutes les valeurs principales du paramètre offrent des modules inférieurs ou des modules supérieurs à l'unité, toutes les racines seront développables en séries ordonnées suivant les puissances descendantes ou ascendantes de ce paramètre. Dans le cas contraire, l'équation proposée pourra être décomposée en plusieurs autres, dont les coefficients seront développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes ou descendantes du même paramètre; et, pour effectuer cette décomposition, il suffira de résoudre les équations auxiliaires qu'on obtient en égalant à zéro chacun des deux polynômes; or,  $n$  étant le degré de l'équation donnée, il est clair qu'on pourra toujours réduire le degré de chacune des deux équations auxiliaires à un

nombre égal ou inférieur à la moitié de  $n$ . Par exemple, on ramènera la résolution d'une équation du cinquième degré à celle de deux équations du second, en supposant les deux polynômes égaux, l'un à la somme des trois premiers termes, l'autre à la somme des trois derniers, ou l'un à la somme de termes de degré pair, l'autre à la somme de termes de degré impair.

On pourra de même réduire, non seulement la résolution des équations trinômes à celle des équations binômes, comme Lagrange l'avait déjà remarqué, mais encore celle des équations quadrimômes à celle des équations trinômes, et ainsi de suite.

Dans les intégrales d'équations différentielles entre plusieurs variables  $x, y, z, \dots$  considérées comme fonction de  $t$ , les valeurs principales des paramètres sont celles qui rendent infinies les dérivées des seconds membres des équations différentiées par rapport à  $x, y, z, \dots$ . Ainsi, par exemple, dans la *Mécanique céleste*, les valeurs principales des masses, des excentricités, etc. ... sont celles qui réduisent les rayons vecteurs à zéro. C'est pour cette raison que, dans le mouvement elliptique, les développements cessent d'être convergents dès que l'excentricité  $\varepsilon$  acquiert un module égal ou supérieur à celui de la valeur imaginaire de  $\varepsilon$  qui vérifie l'équation

$$1 - \varepsilon \cos \psi = \frac{r}{a} = 0.$$

D'ailleurs la détermination des valeurs principales des paramètres fournit immédiatement des limites supérieures aux restes des développements. Ainsi, pour obtenir, dans la *Mécanique céleste*, des limites supérieures aux restes des développements effectués suivant les puissances ascendantes des masses perturbatrices, il suffira de chercher les valeurs principales réelles ou imaginaires de ces masses, c'est-à-dire les valeurs qui seront propres à réduire les rayons vecteurs à zéro.

3 février.

Depuis ma Lettre écrite, j'ai reconnu que l'on pouvait simplifier encore la résolution générale des équations de tous les degrés en prenant



pour auxiliaires, non plus des équations de degré moitié moindre, mais seulement des équations binômes. C'est ce que je vous expliquerai plus en détail, lorsque j'aurai un moment de loisir.

## 10.

ANALYSE ALGÈBRE. — *Sur la résolution des équations.*  
(Extrait d'une Lettre adressée à M. Libri.)

C. R., t. IV, p. 362. (6 mars 1837.)

Dans la dernière Lettre que j'ai eu l'honneur de vous écrire, j'ai indiqué en peu de mots quelques-uns des résultats auxquels j'avais été conduit par mes dernières recherches sur la résolution des équations de tous les degrés et l'intégration des équations différentielles de tous les ordres. Ces résultats suffisaient déjà pour montrer tout le parti qu'on peut tirer des méthodes exposées dans mes précédents Mémoires, et les avantages que présente l'application de ces méthodes à la solution des grands problèmes d'Analyse. Mais, avant que je puisse vous adresser le nouveau Mémoire qui renfermera une exposition plus détaillée des propositions que je suis parvenu à établir, je n'ai pas su résister au désir de vous en faire connaître encore ici quelques-unes, en vous priant de vouloir bien donner lecture de ma Lettre à l'Académie.

Comme je l'ai remarqué dans ma précédente Lettre, et plus anciennement dans un Mémoire de 1832, si l'on nomme *valeurs principales* d'un paramètre compris dans le premier membre d'une équation algébrique celles qui donnent des racines égales à cette équation, par conséquent des racines communes à cette équation et à sa dérivée, toutes les racines seront généralement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes du paramètre dont il

s'agit, lorsque la valeur donnée de ce paramètre offrira un module inférieur aux modules de toutes les valeurs principales. Si, au contraire, le module donné du paramètre surpasse les modules de toutes les valeurs principales, toutes les racines seront développables suivant la puissance descendante du paramètre. Cela posé, soit

$$(1) \quad F(x) = 0$$

une équation de degré  $n$ , dans laquelle le coefficient de  $x^n$  se réduit à l'unité, la fonction  $F(x)$  étant de forme réelle. Si les racines sont inconnues, on pourra du moins, d'après ce qui précède, déterminer toutes celles de l'équation auxiliaire

$$(2) \quad F(x) = k,$$

pourvu que la constante  $k$  offre un module supérieur aux modules de toutes ses valeurs principales. C'est ce qui arrivera, par exemple, si le module de  $k$  surpasse le module de  $r^n$ ,  $r$  étant la valeur de  $x$  qui rend, dans la proposée, le module du premier terme également supérieur à la somme des modules de tous les autres.

Pour revenir de l'équation (2) à l'équation (1), il suffira de faire varier un nouveau paramètre  $i$  entre les limites

$$i = 0, \quad i = k,$$

dans une nouvelle équation de la forme

$$(3) \quad F(x) = k - i.$$

Nous pourrions même admettre que, dans ce trajet, le rapport  $\frac{i}{k}$  reste toujours réel et positif, quoique chacune des constantes  $k, i$ , puisse être imaginaire. Or cette idée très simple a des conséquences fort utiles, et dignes, ce me semble, de l'attention des géomètres, car elle fournit seule la résolution complète des équations de tous les degrés, ainsi qu'il résulte des théorèmes suivants, dont les deux premiers sont du nombre de ceux que j'avais trouvés en 1832. Dans ces divers théorèmes, je supposerai que le rapport  $\frac{i}{k}$  reste réel et positif et j'ap-



pelleraï, pour abrèger, valeurs principales de  $x$  et de  $F(x)$  celles qui répondent à l'équation dérivée

$$(4) \quad F'(x) = 0.$$

THÉOREME I. — Si, toutes les valeurs principales de  $F(x)$  étant réelles, on réduit à zéro la partie réelle du paramètre  $k$ , toutes les racines de l'équation (3) seront développables pour  $\frac{i}{k} = 1$ , et  $\frac{i}{k} < 1$ , en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $i$ .

Corollaire. — On peut immédiatement développer en séries convergentes toutes les racines d'une équation dont la dérivée n'offre point de racines imaginaires; ce qui a lieu, par exemple, lorsque la proposée elle-même a toutes ses racines réelles.

THÉOREME II. — Si l'on réduit à zéro la partie réelle du paramètre  $x$ , alors pour  $\frac{i}{k} = 1$ , et  $\frac{i}{k} < 1$ , l'équation (3) offrira plus de racines développables en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $i$ , que la dérivée (4) n'offre de racines réelles.

Corollaire. — Il en résulte que, dans tous les cas, une racine au moins de l'équation (1) ou (3), si  $n$  est impair, deux racines, si  $n$  est pair, peuvent être immédiatement développées en séries convergentes.

THÉOREME III. — Si l'on réduit à zéro la partie réelle du paramètre  $k$ , alors, pour  $\frac{i}{k} = 1$ , ou  $\frac{i}{k} < 1$ , l'équation (1) pourra être décomposée en quatre autres, qui offrent seulement,

La première, les racines réelles pour lesquelles  $F'(x)$  est positif;

La seconde, les racines réelles pour lesquelles  $F'(x)$  est négatif;

La troisième, les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est positif;

La quatrième, les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est négatif.

Corollaire. — Ce théorème, joint au premier, fournit la détermination de toutes les racines réelles d'une équation de degré quelconque.

THÉOREME IV. — Si la constante  $k$  est réelle, l'équation (1) ou (2) pourra être décomposée en plusieurs autres, dont chacune offre au plus une seule racine réelle.

Tous ces théorèmes se démontrent à l'aide de ceux que j'ai déjà donnés. On peut aussi les démontrer par la Géométrie avec une grande facilité.

D'autres théorèmes sont relatifs aux cas où l'on suppose la constante  $k$ , en partie réelle, en partie imaginaire, ou bien la fonction  $F(x)$  fractionnaire, et fournissent encore d'autres méthodes pour la résolution des équations de tous les degrés. On peut d'ailleurs donner de ces divers théorèmes, et des méthodes ci-dessus mentionnées, des démonstrations élémentaires qui permettront de les faire passer dans les éléments d'Algèbre.

## 11.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Extrait d'une Lettre sur un Mémoire publié à Turin, le 16 juin 1833, et relatif aux racines des équations simultanées.*

C. R., t. IV, p. 672. (8 mai 1837.)

Pour bien comprendre le théorème qui fait l'objet principal de cette Note, il faut se rappeler les définitions suivantes :

Soient  $x$  une variable réelle et  $f(x)$  une fonction de cette variable qui devienne infinie pour  $x = a$ . Si l'on fait croître  $x$ , la fonction  $f(x)$  passera, en devenant infinie, du négatif au positif, ou du positif au négatif, ou bien elle ne changera pas de signe. La quantité  $-1$  dans le premier cas,  $+1$  dans le deuxième,  $0$  dans le troisième, est ce qu'on nomme l'indice de la fonction pour la valeur donnée  $a$  de la variable  $x$ .

J'appelle *Indice intégral*, pris entre deux limites données  $x = x_0$ ,  $x = X$ , la somme des indices correspondants à toutes les valeurs de  $x$



qui rendent la fonction infinie entre ces limites, et je le désigne par la notation  $\int_{x_0}^X \{f(x)\}$ . L'indice intégral est aussi l'excès  $\Delta$  du nombre de fois où la fonction  $f(x)$ , en s'évanouissant pour différentes valeurs de  $x$  entre les limites  $x_0, X$  passe du positif au négatif, sur le nombre de fois où elle passe, en s'évanouissant, du négatif au positif. Il est facile de voir que ces deux définitions conduisent au même résultat.

S'il s'agit d'une fonction de deux variables  $f(x, y)$ , j'appellerai de même *Indice intégral*, entre les limites  $x_0, X, y_0, Y$ , la somme des indices correspondants à toutes les valeurs simultanées de  $x$  et  $y$  qui, prises entre les mêmes limites, rendent la fonction infinie. Cet indice intégral est la moitié de la quantité

$$\int_{x_0}^X \{[f(x, Y)]\} - \int_{x_0}^X \{[f(x, y_0)]\} - \int_{y_0}^Y \{[f(X, y)]\} + \int_{y_0}^Y \{[f(x_0, y)]\}.$$

Je transcris maintenant les premières et dernières lignes du Mémoire publié en juin 1833.

« Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Turin, le 17 novembre 1831, j'ai fait connaître un nouveau calcul qui peut être fort utilement employé dans la résolution des équations de tous les degrés. Mais, dans le Mémoire dont il s'agit, les principes de ce calcul, que je nomme *Calcul des indices*, se trouvent déduits de la considération des intégrales définies. Je me propose ici de démontrer comment on peut établir directement ces mêmes principes sans recourir à des formules de Calcul intégral. »

Suivent les démonstrations de sept théorèmes que j'établissais successivement.

« En s'appuyant sur les principes ci-dessus exposés, on pourrait encore étendre le Calcul des indices à la détermination des racines imaginaires des équations, ainsi qu'à la résolution des équations simultanées et démontrer en particulier la proposition suivante :

» THÉORÈME VIII. — Soient

$$f(x, y), F(x, y)$$

deux fonctions de  $x, y$  qui restent continues entre les limites  $x = x_0, x = X, y = y_0, y = Y$ .

» Nommons  $\varphi(x, y), \Phi(x, y)$  les dérivées de ces fonctions relatives à  $x$  et  $\chi(x, y), X(x, y)$  leurs dérivées relatives à  $y$ .

» Enfin soit  $N$  le nombre des différents systèmes de valeurs de  $x, y$  propres à vérifier les équations simultanées

$$f(x, y) = 0, F(x, y) = 0$$

et comprises entre les limites ci-dessus énoncées, on aura

$$(d) N = \frac{1}{2} \left( \int_{x_0}^X \{[\psi(x, Y)]\} - \int_{x_0}^X \{[\psi(x, y_0)]\} - \int_{y_0}^Y \{[\psi(X, y)]\} + \int_{y_0}^Y \{[\psi(x_0, y)]\} \right),$$

en supposant

$$\psi(x, y) = \frac{\Phi(x, y) \chi(x, y) - \varphi(x, y) X(x, y)}{F(x, y)} f(x, y).$$

» Turin, le 15 juin 1833. »

Parmi les démonstrations élémentaires que l'on peut donner de ce théorème, il en est une fort simple que je vais indiquer en peu de mots.

Considérons  $x, y$  comme des coordonnées rectangulaires. Chacune des équations

$$(1) f(x, y) = 0,$$

$$(2) F(x, y) = 0$$

représentera une ligne droite ou courbe tracée dans le plan des  $x, y$ , et  $N$  sera le nombre de points suivant lesquels se coupent ces deux lignes dans l'intérieur du rectangle ABCD compris entre les quatre droites qui ont pour équations

$$(3) x = x_0, x = X, y = y_0, y = Y.$$

Cela posé, il sera facile de vérifier le huitième théorème si chacune des fonctions  $f(x, y), F(x, y)$  est linéaire par rapport à  $x, y$ , c'est-à-dire si les équations (1) et (2) représentent elles-mêmes deux droites; et l'on s'assurera aisément qu'alors le premier et le second membre de



l'équation (a) se réduisent l'un et l'autre, soit à zéro, soit à l'unité, suivant que le point d'intersection des droites (1) et (2) est situé à l'extérieur ou à l'intérieur du rectangle ABCD. Mais si  $f(x, y)$ ,  $F(x, y)$  cessent, l'une ou l'autre, ou toutes deux à la fois, d'être des fonctions linéaires de  $x, y$ , on pourra diviser le rectangle ABCD par des droites parallèles à ses côtés en éléments assez petits pour qu'un seul point d'intersection au plus des courbes (1) et (2) soit renfermé dans chaque élément, et pour que les portions de ces courbes comprises dans chaque élément se confondent sensiblement avec leurs tangentes. Alors, pour obtenir la formule (a), appliquée au rectangle ABCD, il suffira de combiner par voie d'addition les diverses équations qu'on obtient en établissant successivement cette formule pour chacun des éléments de ce même rectangle.

Le huitième théorème, ainsi qu'il vous sera facile de le reconnaître, comprend, comme cas particuliers, ceux que j'ai donnés sur le nombre des racines imaginaires d'une équation algébrique, et, dans ce cas, la fonction  $\psi(x, y)$  peut se réduire à  $\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$ .

Je verrais avec plaisir que la partie de ma Lettre qui est relative au Mémoire de Juin 1833 fût insérée dans le *Compte rendu* de la prochaine séance de l'Académie.

Goritz, le 22 avril 1837.

## 12.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Première Lettre sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque.*

C. R., t. IV, p. 773. (22 mai 1837.)

... Voici de quelle manière se démontrent les théorèmes fondamentaux indiqués dans la Lettre que j'ai adressée à M. Coriolis, le 29 janvier 1837.

THÉORÈME I. — *t désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de t, représentée par x, sera développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de t, tant que le module de t conservera une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction x cesse d'être finie et continue.*

Démonstration. — On peut voir une démonstration de ce théorème dans l'extrait lithographié du Mémoire présenté à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831 (1<sup>re</sup> Partie, § II, p. 6 et 7). Seulement les lettres  $t$  et  $x$  se trouvent remplacées, dans le Mémoire dont il s'agit, par les lettres  $x$  et  $y$ .

Corollaire. — Supposons que  $x$  soit une fonction implicite de  $t$ , déterminée par la résolution d'une certaine équation

$$(1) \quad F(x) = 0,$$

dans laquelle  $t$  entre comme paramètre. Si la fonction  $x$  reste finie pour des valeurs finies de  $t$ , elle ne cessera généralement d'être continue qu'en devenant multiple. Cela posé, soient

$$(2) \quad x, \quad x + \Delta x$$

deux racines de l'équation (1) : on aura

$$F(x) = 0, \quad F(x + \Delta x) = 0,$$

et, par suite,

$$(3) \quad \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = 0.$$

Or si, pour une certaine valeur réelle ou imaginaire de  $t$ , les racines  $x, x + \Delta x$  se confondent, en faisant converger  $t$  vers cette valeur, pour laquelle l'équation (1) acquerra une racine double ou multiple, on verra l'équation (3) se transformer en cette autre

$$(4) \quad F'(x) = 0.$$

Ainsi, lorsque le paramètre  $t$  obtient une valeur pour laquelle l'équation (1) acquiert une racine double ou multiple, cette racine est commune à l'équation (1) et à sa dérivée. Cela posé, si l'on nomme *valeurs*



principales du paramètre  $t$  celles qui donnent des racines communes à l'équation (1) et à sa dérivée, on déduira immédiatement des remarques précédentes, jointes au théorème I, la proposition que nous allons énoncer.

THÉORÈME II. — *Toute racine d'une équation est généralement développable suivant les puissances ascendantes d'un paramètre renfermé dans l'équation dont il s'agit, tant que le module de ce paramètre reste inférieur aux modules de toutes ses valeurs principales.*

Corollaire. — Soient

$$z, \ell, \gamma, \dots$$

plusieurs racines réelles ou imaginaires de l'équation (1). Pour de très petites valeurs du module d'un paramètre  $t$  compris dans cette équation, chacune des racines  $z, \ell, \gamma, \dots$  sera généralement développable suivant les puissances ascendantes de  $t$ , et l'on pourra en dire autant de la somme de ces racines et de la somme de leurs puissances entières d'un degré quelconque. Si, le module  $t$  venant à croître, deux ou plusieurs racines, par exemple,  $z$  et  $\ell$ , ou  $z, \ell$  et  $\gamma, \dots$  deviennent égales entre elles, pour une certaine valeur du module dont il s'agit, à partir de cet instant, les racines  $z, \ell$  ou  $z, \ell, \gamma, \dots$  cesseront d'être fonctions continues de  $t$ , et séparément développables suivant les puissances ascendantes de  $t$ . Mais la somme de ces racines, ou la somme de leurs puissances semblables, ne cessera pas d'être fonction continue du paramètre  $t$ , et développable suivant les puissances ascendantes de ce paramètre; et il en sera ainsi jusqu'au moment où l'accroissement progressif du module de  $t$  rendra l'une des racines que renferme le groupe  $(z, \ell)$  ou  $(z, \ell, \gamma), \dots$  équivalente à une ou plusieurs autres racines non comprises dans ce même groupe. Alors ces dernières, et celles qui pouvaient déjà s'être groupées avec elles, formeront avec les premières un nouveau groupe composé d'un plus grand nombre de racines, dont la somme sera encore développable, ainsi que la somme de leurs puissances semblables, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $t$ . D'ailleurs, lorsqu'on connaît la somme de



plusieurs racines  $z, \ell, \gamma, \dots$  de l'équation (1), et la somme de leurs puissances semblables d'un degré représenté par un nombre entier quelconque, on peut aisément développer suivant les puissances descendantes de  $x$  le logarithme du produit

$$\left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{\ell}{x}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{x}\right) \dots,$$

par conséquent ce produit lui-même, et former une nouvelle équation dont  $z, \ell, \gamma, \dots$  soient les seules racines. Il importe d'observer à ce sujet que, pour obtenir tous les termes du produit en question, il suffit de prolonger le développement de ce produit, et par conséquent le développement de son logarithme, jusqu'au terme dans lequel l'exposant de  $\frac{1}{x}$  est égal au nombre des racines  $z, \ell, \gamma, \dots$ . Cela posé, les principes que nous venons d'établir conduisent immédiatement au théorème suivant.

THÉORÈME III. — *Soit  $t$  un paramètre renfermé dans le premier membre de l'équation (1). Tant que le module de ce paramètre restera inférieur aux modules de toutes ses valeurs principales, les racines distinctes de l'équation (1) seront séparément développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $t$ . Supposons d'ailleurs que, le module de  $t$  venant à croître, on distribue en divers groupes les racines de l'équation (1), de telle sorte que, dans l'origine, le nombre des groupes soit égal au nombre des racines distinctes, et que plus tard deux groupes se réunissent en un seul, au moment où deux racines qui appartiennent respectivement à ces deux groupes deviennent égales entre elles pour un module donné de  $t$  correspondant à une certaine valeur principale de ce paramètre. Le nombre des groupes de racines se trouvera complètement déterminé pour chaque valeur particulière attribuée au module de  $t$ , et l'équation (1) pourra être décomposée en plusieurs autres dont chacune fournisse séparément les diverses racines comprises dans un seul groupe.*

Corollaire I. — Dans les démonstrations des théorèmes II et III, nous avons implicitement supposé que les racines et les sommes de diverses



racines de l'équation (1) ne cessaient d'être fonctions continues de  $t$  qu'au moment où deux ou plusieurs de ces racines devenaient égales entre elles. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque l'équation (1) est de la forme

$$(5) \quad \Pi(x) + t\varpi(x) = 0,$$

$\varpi(x)$  et  $\Pi(x)$  désignant deux fonctions entières de  $x$ , et le degré de la fonction  $\Pi(x)$  étant supérieur à celui de la fonction  $\varpi(x)$ . Si le degré de  $\Pi(x)$  devenait inférieur à celui de  $\varpi(x)$ , une ou plusieurs racines de l'équation (5) deviendraient infinies, par conséquent discontinues pour  $t = 0$ , et, si l'équation (1) n'était pas de la forme (5), ou si elle devenait transcendante, on conçoit que des valeurs particulières de  $t$  pourraient encore rendre une racine infinie ou discontinue, sans donner des racines communes à l'équation (5) et à sa dérivée. Il sera généralement facile de voir quelles sont les restrictions ou modifications qui doivent être apportées aux théorèmes II et III dans des cas semblables. Ainsi, par exemple, dans le cas où la fonction  $\Pi(x)$ , que renferme l'équation (5), offrira un degré inférieur à celui de  $\varpi(x)$ , on pourra encore développer les racines qui deviendront infinies pour  $t = 0$ , en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $t$ ; seulement, les premiers termes de ces séries renfermeront des puissances négatives de  $t$ , comme on peut s'en assurer en développant suivant les puissances ascendantes, entières ou fractionnaires, du paramètre  $t$ , les racines des équations

$$x - 1 + tx^2 = 0, \quad x - 1 + tx^3 = 0.$$

*Corollaire II.* — Il est important d'observer que le théorème III, appliqué à l'équation (5), peut aisément se déduire de la formule (29) (p. 13) du Mémoire de 14 pages, lithographié à Turin, sous la date du 17 décembre 1831. Pour y parvenir, il suffit de remplacer, dans cette formule,  $F(z)$  par une puissance entière de  $z$ , et  $\varpi(z)$  par  $t\varpi(z)$ , d'écrire d'ailleurs, au lieu de  $x$ , dans l'équation (5),

$$x + y\sqrt{-1} = z,$$

en considérant les variables  $x, y$  comme propres à exprimer deux coordonnées rectangulaires, et substituant à l'équation (5) la suivante

$$(6) \quad \Pi(x + y\sqrt{-1}) + t\varpi(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

ou

$$(7) \quad t = -\frac{\Pi(x + y\sqrt{-1})}{\varpi(x + y\sqrt{-1})};$$

puis de construire les différentes courbes représentées par l'équation

$$(8) \quad T = \text{mod.} \frac{\Pi(x + y\sqrt{-1})}{\varpi(x + y\sqrt{-1})} \quad (1),$$

$T$  désignant le module du paramètre  $t$ . Pour  $T = 0$ , cette équation représentera autant de points que la suivante

$$(9) \quad \Pi(z) = 0, \quad \text{ou} \quad \Pi(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

offrira de racines distinctes.  $T$  venant à croître, chacun de ces points sera remplacé par une courbe fermée qui s'étendra de plus en plus, et les différentes courbes resteront isolées et indépendantes les unes des autres jusqu'au moment où, le module  $T$  acquérant une de ses *valeurs principales*, on verra deux ou plusieurs courbes se réunir en un point multiple, pour se réduire plus tard à une seule et même courbe. Il peut aussi arriver que le périmètre d'une courbe vienne à se rencontrer lui-même en un certain point, ou que deux courbes distinctes se rencontrent en deux points, de manière à se transformer ensuite en deux courbes d'espèces différentes, dont l'une s'élargisse et l'autre se rétrécisse de plus en plus. Ainsi, parmi les courbes représentées par l'équation (8), pour une valeur quelconque du module  $T$ , on pourra distinguer des courbes de première espèce qui s'élargiront, et des courbes de seconde espèce qui se rétréciront, pour des valeurs croissantes de ce module. Lorsque  $T$  deviendra infiniment petit, les seules courbes qui subsisteront seront des courbes de première espèce, dont

(1) Les initiales *mod.* placées devant une expression imaginaire indiquent son module.



les périmètres s'étendent à de très petites distances des points représentés par l'équation

$$(9 \text{ bis}) \quad \Pi(x + y\sqrt{-1}) = 0 \quad \text{ou} \quad \Pi(z) = 0,$$

pourvu que l'on suppose, comme on l'a dit, le degré de la fonction  $\Pi(x)$  supérieur au degré de  $\varpi(x)$ . Au contraire, lorsque T deviendra infiniment grand, les seules courbes qui subsisteront seront des courbes de seconde espèce, dont les périmètres s'étendront à de très petites distances des points représentés par l'équation

$$(10) \quad \varpi(x + y\sqrt{-1}) = 0 \quad \text{ou} \quad \varpi(z) = 0,$$

et une seule courbe de première espèce, dont le périmètre sera très considérable et s'étendra à de très grandes distances tout autour de l'origine des coordonnées. Pour une valeur quelconque du module T de  $t$ , le nombre des courbes de première espèce, ou du moins le nombre de celles qui ne se trouveront point enveloppées de tous côtés par d'autres courbes de même espèce, sera précisément le nombre des groupes de racines mentionnés dans le théorème III, et la formule (29) du Mémoire lithographié déjà cité fournira le moyen de développer, suivant les puissances ascendantes de  $t$ , la somme des puissances semblables des racines de l'équation (5) correspondante à un même groupe. On pourra d'ailleurs supposer que le contour OO'O'...., dont il est question dans ce Mémoire, se réduit successivement à chacune des courbes de première espèce, non enveloppées par d'autres, et représentées par l'équation (8) au moment où le module T est sur le point d'acquiescer une des valeurs principales<sup>(1)</sup>, pour lesquelles deux ou plusieurs courbes de première espèce se réunissent, savoir, celle de ces valeurs principales qui est immédiatement supérieure au module de la valeur réelle ou imaginaire effectivement attribuée à  $t$  dans l'équation (5). Cela posé, on reconnaîtra sans peine que les derniers termes de chaque série convergente finiront par être, ou sensiblement

(1) Nous appelons, pour abrégé, *valeurs principales du module T* les modules des valeurs principales de  $t$ .

proportionnels, ou inférieurs à ceux d'une progression géométrique décroissante dont la raison serait le rapport entre le module effectivement attribué à  $t$  et la valeur principale de T.

En opérant comme on vient de le dire, on se procurera le moyen de décomposer l'équation (5) en plusieurs équations particulières dont le nombre soit égal au nombre des groupes de racines mentionnés dans le théorème (3), ou même au nombre des courbes de première espèce, enveloppées ou non enveloppées par d'autres. Il y a plus, si l'on fait usage, non seulement des développements ordonnés suivant les puissances ascendantes de  $t$ , mais encore des développements ordonnés suivant les puissances descendantes de  $t$ , ou ascendantes de  $\frac{1}{t}$ , on pourra évidemment décomposer l'équation (5), pour une valeur donnée du module T de  $t$ , en autant d'équations particulières qu'il y aura de courbes distinctes, soit de première, soit de seconde espèce, correspondantes à cette valeur. Car, lorsqu'une courbe en enveloppera d'autres, on pourra déterminer la somme des racines de l'équation (5), correspondantes à des points situés sur ces diverses courbes, avec la somme des puissances semblables de ces racines, soit en tenant compte, soit en faisant abstraction des points situés sur la courbe-enveloppe, et obtenir en conséquence la somme des racines correspondantes aux seuls points situés sur la courbe enveloppe, avec la somme de leurs puissances semblables. Ce n'est pas tout, si l'une des équations (9) ou (10) admet des racines égales, on pourra développer séparément chacune des racines correspondantes de l'équation (5) suivant les puissances ascendantes et fractionnaires de  $t$  ou de  $\frac{1}{t}$ , lorsque le module T du paramètre  $t$  sera inférieur ou supérieur aux modules de toutes ses valeurs principales. Ainsi, par exemple, si, l'équation (9) offrant  $m$  racines égales à  $z$ , le module T de  $t$  est inférieur à tous les modules principaux de ce paramètre, alors, en posant

$$(11) \quad t = z^m,$$

on pourra développer chacune séparément, suivant les puissances as-





pendantes de  $\tau$ , celles des racines de l'équation (5) qui deviendraient égales à  $z$  pour  $t = 0$ . Cette proposition se déduit immédiatement du théorème II, lorsqu'on applique ce théorème à l'équation (5) résolue par rapport à  $\tau$ .

Les variables  $x$  et  $t$  étant supposées liées entre elles par l'équation (5), les valeurs principales de  $t$  vérifieront à la fois cette équation et sa dérivée

$$(12) \quad \Pi'(x) + t \varpi'(x) = 0;$$

et les valeurs correspondantes de la variable  $x$ , c'est-à-dire les valeurs principales de  $x$ , seront déterminées par la formule

$$(13) \quad \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}, \quad \text{ou} \quad \frac{\Pi(x)}{\varpi(x)} = \frac{\Pi'(x)}{\varpi'(x)}.$$

Si dans cette dernière on écrit  $x + y\sqrt{-1}$  au lieu de  $x$ , on obtiendra l'équation

$$(14) \quad \frac{\Pi(x + y\sqrt{-1})}{\varpi(x + y\sqrt{-1})} = \frac{\Pi'(x + y\sqrt{-1})}{\varpi'(x + y\sqrt{-1})},$$

à laquelle satisferont les coordonnées  $x, y$  des points de réunion ou de séparation des courbes de première ou de seconde espèce représentées par la formule (8).

Observons encore que, dans le cas où les fonctions  $\Pi(x), \varpi(x)$  sont de forme réelle, l'équation (8) peut s'écrire comme il suit :

$$(15) \quad T^2 = \frac{\Pi(x + y\sqrt{-1}) \Pi(x - y\sqrt{-1})}{\varpi(x + y\sqrt{-1}) \varpi(x - y\sqrt{-1})}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(16) \quad -\frac{\Pi(x)}{\varpi(x)} = f(x),$$

les équations (12), (13), dont le système détermine les valeurs principales de  $t$  et de  $x$ , se réduiront à

$$(17) \quad t = f(x), \quad f'(x) = 0.$$

Par suite, les courbes de première et de seconde espèce, correspondantes à un module donné  $T$  du paramètre  $t$ , seront représentées par l'équation

$$(18) \quad T = \text{mod. } f(x + y\sqrt{-1}),$$

ou, si  $f(x)$  est de forme réelle, par l'équation

$$(19) \quad T^2 = f(x + y\sqrt{-1}) f(x - y\sqrt{-1}),$$

et les coordonnées des points de réunion ou de séparation de ces mêmes courbes satisferont à la condition

$$(20) \quad f'(x + y\sqrt{-1}) = 0.$$

C'est au reste ce que l'on peut démontrer comme il suit :

Si, pour une valeur donnée de  $T$ , deux branches de courbes se réunissent en un point, on pourra couper ces deux branches dans le voisinage du point de réunion par une droite parallèle à celle qui a pour équation  $y = \theta x$ ,  $\theta$  étant une constante choisie arbitrairement, et satisfaire à l'équation (19), non seulement par les valeurs de  $x, y$  relatives au point de la droite situé sur la première branche de courbe, mais encore en substituant à ces valeurs les coordonnées du point situé sur la seconde branche, que je supposerai désignées par  $x + \Delta x, y + \Delta y$ , la différence finie  $\Delta y$  étant de la forme

$$(21) \quad \Delta y = \theta \Delta x.$$

Cela posé, si l'on nomme  $u$  le logarithme du produit

$$f(x + y\sqrt{-1}) f(x - y\sqrt{-1}),$$

l'équation (19) donnera non seulement

$$(22) \quad u = 2 \log T,$$

mais encore

$$(23) \quad \Delta u = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0;$$



puis on conclura des formules (21) et (22), en faisant converger  $\Delta x$  vers la limite zéro,

$$(24) \quad \frac{dy}{dx} = \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \theta = 0,$$

quel que soit  $\theta$ ; par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Or, il est aisé de voir que ces dernières équations entraînent les deux formules

$$(25) \quad f(x + y\sqrt{-1}) = 0, \quad f(x - y\sqrt{-1}) = 0.$$

C'est à peu près ainsi que j'avais établi à Turin la formule (14), de laquelle j'avais déduit le théorème II, et les autres théorèmes énoncés dans la *Gazette de Piémont* du 22 septembre 1832.

Si, dans l'équation (19), on attribue à  $x, y$  les valeurs qui correspondent au point de réunion ou de séparation de deux courbes, puis d'autres valeurs très voisines correspondantes à un second point situé sur l'une des courbes et très rapproché du premier; en nommant  $s$  l'arc compté à partir du point de réunion ou de séparation, et prenant cet arc  $s$  pour variable indépendante, on trouvera que, dans le passage du premier point au second, le logarithme du second membre de l'équation (19) reçoit un accroissement qui, eu égard aux formules (25), est sensiblement proportionnel à

$$\left[ \frac{f'(x + y\sqrt{-1})}{f(x + y\sqrt{-1})} + \frac{f'(x - y\sqrt{-1})}{f(x - y\sqrt{-1})} \right] \left( \frac{dx^2}{ds^2} - \frac{dy^2}{ds^2} \right) + 2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \sqrt{-1} \left[ \frac{f'(x + y\sqrt{-1})}{f(x + y\sqrt{-1})} - \frac{f'(x - y\sqrt{-1})}{f(x - y\sqrt{-1})} \right].$$

En égalant cet accroissement à zéro, on obtiendra une équation qui fournira pour  $\frac{dy}{dx}$  deux valeurs dont le produit sera  $-1$ ; d'où il suit que deux branches de courbe, en se rencontrant, se couperont à angles droits. On prouvera pareillement que, si  $n$  branches de courbe se réu-

nissent au même point, leurs tangentes en ce point comprendront entre elles des angles dont chacun sera le quotient de deux angles droits par le nombre  $n$ . En effet, si l'on pose  $\frac{dy}{dx} = \theta$ , la valeur de  $\theta$ , relative au point dont il s'agit, sera donnée par une équation de la forme  $\cos(c + n\theta) = 0$ ,  $c$  désignant une quantité qui ne variera pas dans le passage d'une courbe à l'autre, et rendra le binôme

$$\cos c + \sqrt{-1} \sin c$$

égal au quotient qu'on obtient quand on divise l'expression imaginaire  $\frac{f'(x + y\sqrt{-1})}{f(x + y\sqrt{-1})}$  par le module de cette même expression.

Si l'on pose

$$(26) \quad f(x + y\sqrt{-1}) = e^{S + P\sqrt{-1}},$$

$S$  et  $P$  désignant deux fonctions réelles de  $x, y$ , l'équation (18) donnera simplement

$$T = e^S.$$

D'ailleurs on déduira de l'équation (26) les formules

$$(27) \quad \frac{\partial S}{\partial y} + \sqrt{-1} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{f'(x + y\sqrt{-1})}{f(x + y\sqrt{-1})} \sqrt{-1} = \left( \frac{\partial S}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \sqrt{-1},$$

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \sqrt{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \sqrt{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \end{cases}$$

et en vertu de celles-ci, jointes à l'équation (20), on aura, pour chaque valeur principale de  $T$  ou de  $S$ ,

$$(29) \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}.$$

Done, généralement, chaque valeur principale de  $T$  ou de  $S$  sera tout à la fois un maximum relatif à  $x$ , et un minimum relatif à  $y$ , ou un maximum relatif à  $y$ , et un minimum relatif à  $x$ .



On prouvera encore aisément que, si la fonction  $f(x)$  étant de forme réelle, on prend  $T^2$  pour l'ordonnée d'une surface courbe, les coordonnées  $x, y$  d'une ligne de plus grande pente tracée sur cette surface vérifieront l'équation

$$(30) \quad \frac{f(x+y\sqrt{-1})}{f(x-y\sqrt{-1})} = \text{const.}$$

Les principes que nous venons d'établir fournissent, pour la résolution des équations, les méthodes indiquées dans ma Lettre du 29 janvier 1837. Si l'on veut maintenant obtenir les propositions énoncées dans ma Lettre du 24 février, il suffira de remplacer les équations (17), (18), (19) par les suivantes :

$$t = K - e^{\sigma\sqrt{-1}} f(x), \quad f'(x) = 0, \quad T = \text{mod.} [K - e^{\sigma\sqrt{-1}} f(x+y\sqrt{-1})],$$

$$T^2 = [K - e^{\sigma\sqrt{-1}} f(x+y\sqrt{-1})][K - e^{-\sigma\sqrt{-1}} f(x-y\sqrt{-1})],$$

$K, \sigma$  désignant deux quantités réelles, et le paramètre  $t$  ne différant pas de celui que nous avons désigné par  $i$  dans la Lettre en question. La discussion des courbes représentées par la formule

$$T^2 = [K - e^{\sigma\sqrt{-1}} f(x+y\sqrt{-1})][K - e^{-\sigma\sqrt{-1}} f(x-y\sqrt{-1})]$$

n'offrira pas plus de difficulté que celle des courbes représentées par la formule (15) ou (19) et cette discussion, jointe aux formules établies dans le Mémoire lithographié sous la date du 17 décembre 1831, fournira les méthodes présentées dans ma Lettre du 24 février pour la résolution de l'équation  $f(x) = 0$ . Au reste, je me propose de vous transmettre prochainement de nouveaux détails sur cet objet, ainsi que la démonstration du théorème général sur la convergence des séries qui représentent les intégrales d'un système d'équations différentielles.

Goritz, 5 mai 1837.

## 15.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Deuxième Lettre sur la résolution des équations de degré quelconque.

C. R., t. IV, p. 805 (29 mai 1837).

Soit

$$(1) \quad f(x) = 0$$

une équation du degré  $n$ , dans laquelle le coefficient de  $x^n$  se réduit à l'unité, en sorte qu'on ait identiquement

$$(2) \quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  étant des coefficients réels ou imaginaires. Soit d'ailleurs  $k$  une constante, réelle ou imaginaire, dont le module surpasse le plus grand des modules principaux de  $f(x)$ . D'après ce qui a été démontré dans ma Lettre du 6 mai, on pourra développer, suivant les puissances descendantes et fractionnaires de  $k$ , les racines de l'équation

$$(3) \quad f(x) = k.$$

Pour y parvenir, il suffira d'employer les formules tirées du calcul des résidus, ou bien encore la formule de Lagrange, en opérant comme il suit.

L'équation (3) étant écrite ainsi,

$$(4) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = k,$$

si l'on fait, pour plus de commodité,

$$(5) \quad x = \frac{1}{z}, \quad 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = [\varpi(z)]^n,$$

en choisissant  $\varpi(z)$  de manière que l'on ait

$$(6) \quad \varpi(0) = 1,$$

cette équation deviendra

$$(7) \quad z^n = \frac{1}{k} [\varpi(z)]^n,$$

et on la vérifiera en posant

$$(8) \quad z = \lambda \varpi(z),$$

pourvu que l'on désigne par  $\lambda$  une des racines de l'équation binôme

$$(9) \quad \lambda^n = \frac{1}{k}.$$

Or, les valeurs de  $z$  et de  $F(z)$  tirées de l'équation (8), en vertu de la formule de Lagrange, pour un module de  $\lambda$  suffisamment petit, ou, ce qui revient au même, pour un module de  $k$  suffisamment grand, seront

$$(10) \quad z = \lambda \varpi(0) + \frac{\lambda^2}{1.2} \frac{d[\varpi(\varepsilon)]^2}{d\varepsilon} + \frac{\lambda^3}{1.2.3} \frac{d^2[\varpi(\varepsilon)]^2}{d\varepsilon^2} + \dots$$

et

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} F(z) &= F(0) + \lambda F'(0) \varpi(0) \\ &+ \frac{\lambda^2}{1.2} \frac{d\{F(\varepsilon)[\varpi(\varepsilon)]^2\}}{d\varepsilon} + \frac{\lambda^3}{1.2.3} \frac{d^2\{F(\varepsilon)[\varpi(\varepsilon)]^2\}}{d\varepsilon^2} + \dots, \end{aligned} \right.$$

z devant être réduit à zéro après les différentiations, et  $\varpi(0)$  ne différant pas de l'unité. On obtiendra donc sans peine les valeurs de  $z$  et de  $F(z)$ , par conséquent celles de  $[\varpi(z)]^{-1}$  et de

$$(12) \quad x = \frac{1}{z} = \lambda^{-1} [\varpi(z)]^{-1},$$

développées en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de  $\lambda$ , ou descendantes et fractionnaires de  $k$ , lorsque le module de  $k$  surpassera tous les modules principaux de  $f(x)$ , c'est-à-dire, ceux qui correspondent aux racines de l'équation

$$(13) \quad f(x) = 0.$$

Pour remplir cette condition, il suffirait de supposer  $k$  équivalent à

$2r^n$ ,  $r$  étant la valeur de  $x$  qui, dans l'équation (1), rendrait le premier terme égal à la somme de tous les autres. En effet, soient

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}, \Lambda_n$$

les modules des coefficients

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n;$$

la valeur de  $r$  dont il s'agit sera donnée par la formule

$$(14) \quad r^n - \Lambda_1 r^{n-1} - \Lambda_2 r^{n-2} - \dots - \Lambda_{n-1} r - \Lambda_n = 0,$$

et surpassera celle que fournirait l'équation

$$(15) \quad nr^{n-1} - (n-1)\Lambda_1 r^{n-2} - (n-2)\Lambda_2 r^{n-3} - \dots - \Lambda_{n-1} = 0,$$

de laquelle on tirerait

$$r^n - \frac{n-1}{n} \Lambda_1 r^{n-1} - \frac{n-2}{n} \Lambda_2 r^{n-2} - \dots - \frac{1}{n} \Lambda_{n-1} r = 0,$$

et, par suite,

$$r^n - \Lambda_1 r^{n-1} - \Lambda_2 r^{n-2} - \dots - \Lambda_{n-1} r - \Lambda_n < 0.$$

Donc la valeur de  $r$  donnée par la formule (14) surpassera les modules de toutes les racines de l'équation

$$nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} = 0, \quad \text{ou} \quad f'(x) = 0;$$

comme on le démontrera facilement à l'aide des raisonnements dont nous avons fait usage dans l'*Analyse algébrique* (p. 480). D'ailleurs, il résulte évidemment de l'équation (14) que, pour un module de  $x$  égal ou inférieur à cette valeur de  $r$ , le module de  $f(x)$  ne surpassera pas  $2r^n$ , ou le double de  $r^n$ .

Après avoir ramené, par le calcul des résidus, ou par le théorème de Lagrange, la résolution de l'équation (3) à la résolution d'une équation binôme, savoir, de l'équation (9), du moins pour une valeur du paramètre  $k$  suffisamment grande, il reste à montrer comment on peut revenir de l'équation (3) à l'équation (1). Or, pour y réussir, il suffira



de faire varier un nouveau paramètre  $i$  entre les limites  $i = 0$ ,  $i = k$ , dans une nouvelle équation de la forme

$$(16) \quad f(x) = k - i;$$

et l'on pourra même supposer que, dans ce trajet, le rapport  $\frac{i}{k}$  reste toujours réel et positif. Chacune des constantes  $k$ ,  $i$  pouvant d'ailleurs être imaginaire, nous écrirons dans les équations (3), (9) et (16),

$$ke^{-\sigma\sqrt{-1}} \text{ et } ie^{-\sigma\sqrt{-1}},$$

au lieu de

$$k \text{ et } i;$$

et par suite ces équations deviendront

$$(17) \quad e^{\sigma\sqrt{-1}} f(x) = k,$$

$$(18) \quad \lambda^n = \frac{1}{k} e^{\sigma\sqrt{-1}},$$

$$(19) \quad e^{\sigma\sqrt{-1}} f(x) = k - i,$$

les valeurs de  $k$ ,  $i$  pouvant être supposées ici réelles et positives, et  $\sigma$  désignant un arc réel, que nous resterons libres de choisir arbitrairement.

Remarquons à présent que toutes les racines de l'équation (19) seront développables par le calcul des résidus, ou par la formule de Lagrange, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières du paramètre  $i$ , si la valeur réelle et positive attribuée à ce paramètre, dans l'équation (19), est inférieure aux modules de toutes les valeurs principales de  $i$ . Or, ces valeurs principales, qui pourront être imaginaires, se confondront avec les valeurs de la fonction

$$(20) \quad k - e^{\sigma\sqrt{-1}} f(x),$$

correspondantes aux racines de l'équation dérivée

$$(13) \quad f'(x) = 0.$$

Si, la fonction  $f(x)$  étant de forme réelle, l'équation (1) a toutes ses

racines réelles et inégales, on pourra en dire autant de l'équation dérivée (13), et par suite les valeurs principales de la fonction  $f(x)$  seront toutes réelles, mais différentes de zéro. Alors, si l'on pose

$$(21) \quad \sigma = \pm \frac{\pi}{2}, \quad e^{\sigma\sqrt{-1}} = \pm \sqrt{-1},$$

l'expression (20), réduite à

$$(22) \quad k \mp f(x)\sqrt{-1},$$

offrira, pour chaque valeur principale de  $x$ , un module

$$(23) \quad \{k^2 + [f(x)]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

supérieur à  $k$ ; et par suite toutes les racines de l'équation (19) seront développables, même pour  $i = k$ , en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $i$ , ces séries ayant pour premiers termes les racines déjà calculées de l'équation (17). Mais, quand on pose  $i = k$ , l'équation (19) se réduit à l'équation (1). Donc, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles et inégales, la résolution de cette équation pourra être réduite à celle de l'équation (17), par conséquent à celle de l'équation binôme (18). Observons d'ailleurs qu'en supposant

$$(24) \quad \sigma = \frac{\pi}{2}, \quad e^{\sigma\sqrt{-1}} = \sqrt{-1},$$

on réduira les équations (17), (18), (19) à

$$(25) \quad k = f(x)\sqrt{-1},$$

$$(26) \quad \lambda^n = \frac{1}{k}\sqrt{-1},$$

$$(27) \quad k = i + f(x)\sqrt{-1}, \text{ ou } i = k - f(x)\sqrt{-1};$$

tandis qu'en supposant

$$(28) \quad \sigma = -\frac{\pi}{2}, \quad e^{\sigma\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1},$$



on réduira les équations (17), (18), (19) à

$$(29) \quad k = -f(x)\sqrt{-1},$$

$$(30) \quad \lambda^n = -\frac{1}{k}\sqrt{-1},$$

$$(31) \quad k = i - f(x)\sqrt{-1}, \text{ ou } i = k + f(x)\sqrt{-1}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

THEORÈME I. — *Lorsque l'équation (1) a toutes ses racines réelles et inégales, on peut obtenir chacune de ces racines développée en série convergente; et, pour y parvenir, il suffit de poser  $i = k$ , dans les développements des racines de l'équation (27) ou (31), en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de  $i$ , ces séries ayant pour premiers termes les racines de l'équation (25) ou (29), développées suivant les puissances descendantes et fractionnaires de  $k$ , ou, ce qui revient au même, suivant les puissances ascendantes et entières des valeurs de  $\lambda$ , propres à vérifier l'équation binôme (26) ou (30).*

Concevons maintenant que, la fonction  $f(x)$  étant toujours de forme réelle, l'équation (1) ait encore ses racines toutes distinctes les unes des autres, par conséquent inégales, mais non toutes réelles. Soient, dans ce cas,  $m$  le nombre des racines réelles de l'équation (1), et

$$(32) \quad a, b, c, d, \dots, g, h$$

ces mêmes racines, rangées d'après leur ordre de grandeur; deux de ces racines réelles prises consécutivement, par exemple  $a$  et  $b$ , comprendront toujours entre elles au moins une racine réelle de la dérivée (13). Car si, en supposant  $x$  réelle, on fait croître cette variable  $x$  entre les limites  $x = a$ ,  $x = b$ , la fonction  $f(x)$ , nulle à ces deux limites, acquerra dans l'intervalle au moins une valeur numérique maximum, pour une valeur réelle de  $x$ , qui fera évanouir la dérivée  $f'(x)$ . Donc, le nombre des racines réelles de l'équation (1) étant  $m$ , le nombre des racines réelles de la dérivée (13) ne pourra être inférieur

à  $m - 1$ , et le nombre des racines imaginaires de la dérivée ne pourra surpasser le nombre des racines imaginaires de l'équation (1), c'est-à-dire  $n - m$ .

D'autre part, si l'on nomme

$$\alpha + \varepsilon\sqrt{-1}, \quad \alpha - \varepsilon\sqrt{-1}$$

deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (13), les valeurs principales de  $f(x)$  correspondantes à ces racines seront elles-mêmes conjuguées et de la forme

$$A + B\sqrt{-1}, \quad A - B\sqrt{-1},$$

$A, B$  désignant deux quantités réelles dont la seconde deviendra positive quand on choisira convenablement le signe de  $\varepsilon$ ; et les valeurs principales du paramètre  $i$  correspondantes aux mêmes racines seront, pour l'équation (27),

$$i = k - (A + B\sqrt{-1})\sqrt{-1}, \quad i = k - (A - B\sqrt{-1})\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(33) \quad i = k + B - A\sqrt{-1}, \quad i = k - B - A\sqrt{-1},$$

et, pour l'équation (31),

$$(34) \quad i = k - B + A\sqrt{-1}, \quad i = k + B + A\sqrt{-1}.$$

Or, la première des expressions (33) et la seconde des expressions (34) offriront évidemment des modules supérieurs à  $k$ . Donc, si, pour l'équation (27) ou (31), on détermine les modules principaux du paramètre  $i$ , ceux de ces modules qui surpasseront la quantité positive  $k$  seront en nombre égal ou supérieur à la somme qu'on obtient en ajoutant au nombre des racines réelles de l'équation dérivée (13) la moitié du nombre de ses racines imaginaires. Donc, le nombre des modules principaux de  $i$  qui ne surpasseront pas la quantité  $k$  sera égal ou inférieur au nombre des couples de racines imaginaires de l'équation (13),



par conséquent égal ou inférieur au nombre des couples de racines imaginaires de l'équation (1), c'est-à-dire à

$$\frac{n-m}{2}.$$

Cela posé, si, en attribuant au paramètre  $i$  une valeur réelle et positive, on fait croître cette valeur par degrés insensibles, depuis  $i=0$  jusqu'à  $i=k$ , les racines de l'équation (27) ou (31) commenceront par être développables, chacune séparément, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $i$ , et ne cesseront pas de l'être si l'on remplace la valeur réelle et positive attribuée à  $i$  par une valeur imaginaire dont cette valeur réelle soit le module.

Les mêmes séries continueront d'être convergentes tant que la valeur positive du paramètre  $i$ , ou son module, restera inférieure à tous les modules principaux de ce paramètre. Mais, le module de  $i$  venant à croître, les racines devront être distribuées en divers groupes dont le nombre, d'abord égal à  $n$ , c'est-à-dire au degré de l'équation (1), diminuera d'une unité chaque fois que deux racines comprises dans deux groupes différents deviendront égales entre elles pour une valeur donnée du paramètre  $i$ . Alors ces deux groupes se réuniront en un seul, composé de racines dont la somme, ainsi que celle de leurs puissances entières de degré quelconque, continuera d'être développable suivant les puissances ascendantes de  $i$ . Si trois, quatre, ... racines comprises dans trois, quatre, ... groupes différents devenaient égales entre elles, la valeur principale correspondante du paramètre  $i$  se trouverait fournie par une valeur principale de  $x$ , qui serait elle-même une racine double, triple, ... de l'équation (13). Alors aussi, le module de  $i$  venant à croître au delà de sa valeur principale, les trois, quatre, ... groupes différents se réuniront en un seul. Il suit de ces diverses remarques que, si l'on nomme

$$n-l$$

le nombre des groupes correspondants à un module donné de  $i$ , le nombre entier  $l$  ne pourra surpasser le nombre des modules princi-

aux de  $i$  inférieurs au module donné. Donc, si ce dernier module est égal à  $k$ , le nombre  $l$ , d'après ce qui a été dit plus haut, ne pourra surpasser la quantité

$$\frac{n-m}{2},$$

et pour chacune des équations (27), (31), réduites à l'équation (1), en vertu de la supposition  $i=k$ , le nombre des groupes de racines surpassera la différence

$$(35) \quad n - \frac{n-m}{2} = \frac{n+m}{2}.$$

Il y a plus, si l'on nomme  $m'$  le nombre des racines réelles de l'équation (13), le nombre de ses racines imaginaires, savoir

$$\frac{n-m'-1}{2},$$

sera égal ou supérieur au nombre des modules principaux de  $i$  qui ne surpassent point la quantité  $k$ ; et par suite, le nombre des groupes de racines, pour l'équation (27) ou (31), réduite à l'équation (1), en vertu de la supposition  $i=k$ , sera égal ou supérieur à la différence

$$(36) \quad n - \frac{n-m'-1}{2} = \frac{1+m'+n}{2}.$$

Supposons maintenant que, parmi ces groupes, ceux qui renferment une seule racine soient en nombre égal à  $n_1$ , ceux qui renferment deux racines en nombre égal à  $n_2$ , ceux qui renferment trois racines en nombre égal à  $n_3$ , etc. On aura tout à la fois

$$(37) \quad n_1 + n_2 + n_3 + \dots = \text{ou} > \frac{1+m'+n}{2},$$

$$(38) \quad n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = n,$$

puis on en conclura

$$n + n_1 = \text{ou} > 2(n_1 + n_2 + n_3 + \dots) = \text{ou} > 1 + m' + n,$$

par conséquent,

$$(39) \quad n_1 = \text{ou } > i + m', \quad n_1 > m'.$$

Donc, le nombre  $n_1$ , des racines qui resteront isolées, et séparément développables suivant les puissances ascendantes de  $i = k$ , surpassera le nombre  $m'$  des racines réelles de la dérivée. On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME II. — *La fonction  $f(x)$  étant supposée de forme réelle, l'équation*

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

*considérée comme déduite de la formule (27) ou (31) par la supposition  $i = k$ , offre plus de racines développables en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $i$ , que l'équation dérivée*

$$(13) \quad f'(x) = 0$$

*n'offre de racines réelles.*

Corollaire. — Il en résulte que, dans tous les cas, une racine au moins de l'équation (1), si le degré  $n$  est un nombre impair, deux racines, si le degré  $n$  est un nombre pair, pourront être immédiatement développées en séries convergentes.

Les théorèmes I et II, ainsi que j'en ai fait l'observation dans ma Lettre du 24 février, sont du nombre de ceux auxquels j'étais parvenu à Turin. En s'appuyant sur ces théorèmes, on pourrait développer successivement en séries convergentes toutes les racines d'une équation donnée  $f(x) = 0$ . Car, après avoir développé une première racine  $x_0$ , on pourrait en développer une seconde  $x_1$ , considérée comme racine de l'équation

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{ou} \quad x^{n-1} + (x_0 + a_1)x^{n-2} + (x_0^2 + a_1x_0 + a_2)x^{n-3} + \dots = 0,$$

puis une troisième  $x_2$ , ... et ainsi de suite. Si la racine  $x_0$  devenait imaginaire ou de la forme  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ , alors  $f(x)$  étant de forme

réelle, on connaîtrait immédiatement la racine imaginaire conjuguée  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ , et, en nommant  $x_1$  cette dernière, on pourrait développer une troisième racine  $x_2$  considérée comme propre à vérifier l'équation

$$x^{n-2} + (x_0 + x_1 + a_1)x^{n-3} + \dots = 0, \quad \text{etc.}$$

On pourra, d'ailleurs, déterminer les limites de l'erreur que l'on commettra sur une racine en réduisant son développement à un nombre fini de termes, et réciproquement déterminer une limite du nombre des termes qu'il faudra conserver pour obtenir la valeur de chaque racine avec une certaine approximation, par exemple à  $\frac{1}{N}$  près,  $N$  étant un nombre entier quelconque. Les problèmes de ce genre sont précisément l'objet du nouveau calcul que j'ai appelé *Calcul des limites*, et qui s'applique même aux équations transcendentes. (Voyez le Mémoire présenté à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831.)

Je passe à la démonstration du théorème III, énoncé dans ma Lettre du 24 février.

Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  deux quantités réelles,  $f(x)$  étant toujours une fonction entière de forme réelle, et

$$(40) \quad x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

une valeur de  $x$  propre à vérifier l'équation (27) ou (31) pour une valeur donnée réelle ou imaginaire de  $i$ . Si l'on fait varier cette dernière par degrés insensibles, en faisant croître son module, la valeur de  $x$ , et par suite celles de  $\alpha$ ,  $\beta$ , varieront elles-mêmes par degrés insensibles; mais  $\beta$  ne pourra changer de signe avant que le module de  $i$  devienne supérieur à  $k$ . En effet,  $\beta$  ne pourra changer de signe sans passer par zéro, c'est-à-dire sans que  $x$  devienne réel, et pour une valeur réelle de  $x$  l'équation (27) ou (31) fournira un module de  $i$  équivalent à l'expression (23), par conséquent égal ou supérieur à  $k$ , suivant que  $x$  sera ou ne sera pas racine de l'équation (1). Il résulte de cette observation que, le module de  $i$  venant à croître depuis la limite zéro jusqu'à la limite  $k$ , le coefficient  $\beta$  de  $\sqrt{-1}$ , dans une racine imaginaire de l'équation (27) ou (31), ne pourra jamais changer de signe,





mais seulement s'évanouir pour  $i = k$ , si l'équation (1) a des racines réelles. D'ailleurs, avant de se réunir dans un même groupe, deux racines imaginaires de l'équation (1), dans lesquelles les valeurs de  $\xi$  ou les coefficients de  $\sqrt{-1}$  se trouvent affectés de signes contraires, doivent devenir égales entre elles, ainsi qu'à une valeur principale de  $x$ , et par suite l'un de ces coefficients doit changer de signe. Donc, puisque ce changement ne saurait avoir lieu avant que le module de  $i$  devienne supérieur à  $k$ , nous devons conclure que les racines imaginaires de l'équation (27) ou (31), dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  sera positif, resteront séparées des racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  sera négatif, tant que l'on aura

$$(41) \quad \text{mod } i < k.$$

Alors chaque groupe sera exclusivement formé des unes ou des autres; par conséquent la somme des unes, aussi bien que la somme des autres, sera développable, avec la somme de leurs puissances entières de degré quelconque, suivant les puissances ascendantes du paramètre  $i$ . D'ailleurs, tant que la condition (41) sera remplie, il est évident que l'équation (27) ou (31) n'admettra point de racines réelles.

Lorsque  $i$  devient précisément égal à  $k$ , l'équation (27) ou (31) se réduit à l'équation (1), et peut offrir des racines réelles. Mais alors la somme des racines, dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  avait un signe déterminé, ne pourrait cesser d'être développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $i$ , qu'autant qu'une valeur principale de  $i$ , correspondante à une valeur principale de  $x$ , dans laquelle  $\xi$  s'évanouirait, c'est-à-dire à une valeur principale et réelle de  $x$ , offrirait pour module le nombre  $k$ . Alors aussi, l'expression (23) devant se réduire à  $k$ , on aurait à la fois

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0,$$

et par conséquent l'équation (1) admettrait des racines égales, contre l'hypothèse généralement admise dans ce qui précède. Donc, en reve-

nant à cette hypothèse, nous pourrions énoncer la proposition suivante :

THEOREME III. — *La fonction  $f(x)$  étant supposée réelle et entière, si l'on distribue les racines toutes imaginaires de l'équation (25) ou (29) en deux suites distinctes, la première suite comprenant les racines dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est positif, et la seconde suite, les racines dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est négatif; les mêmes conditions sont remplies, pour un module de  $i$  inférieur à  $k$ , par les racines de l'équation (27) ou (31), qui pourront être distribuées en deux nouvelles suites correspondantes aux deux premières, et composées chacune de racines dans lesquelles les coefficients de  $\sqrt{-1}$  seront tous et toujours affectés du même signe. Alors la somme des termes de la troisième ou quatrième suite, ainsi que la somme de leurs puissances entières de degré quelconque, sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $i$ , le premier terme de la série étant la somme des termes de la première ou de la seconde suite, ou de leurs puissances entières du degré donné. Si l'équation (1) n'a point de racines égales, les séries obtenues ne cesseront pas d'être convergentes quand on posera  $i = k$ , ce qui réduira les formules (27) et (31) à l'équation (1) elle-même, et par conséquent l'équation (1) pourra être décomposée en deux autres dont les racines coïncideront respectivement avec les termes de la troisième suite, puis avec les termes de la quatrième.*

Corollaire. — Parmi les racines réelles que peut admettre l'équation (1), il importe de savoir quelles sont celles qui devront être censées appartenir à la troisième suite ou à la quatrième. Or, pour décider cette question relativement à une racine donnée de l'équation (1), à la racine  $a$  par exemple, il suffira de rechercher si, en considérant la racine  $a$  comme la limite vers laquelle converge une racine imaginaire de l'équation (27) ou (31), tandis que le module de  $i$  croît et converge vers la limite  $k$ , on doit supposer dans cette racine imaginaire le coefficient de  $\sqrt{-1}$  ou positif ou négatif. Soit

$$(42) \quad x = a + \delta + \varepsilon\sqrt{-1}$$

la racine imaginaire dont il s'agit,  $\delta, \varepsilon$  désignant deux quantités réelles,



qui deviennent infiniment petites pour une valeur de  $i$  infiniment rapprochée de  $k$ , et s'évanouissent pour  $i = k$ . Posons en outre

$$(43) \quad f(a + \delta \pm \varepsilon \sqrt{-1}) = D \pm \varepsilon E \sqrt{-1},$$

$D, E$  désignant encore deux quantités réelles. En vertu des formules (42), (43), les équations (27) et (31) donneront

$$(44) \quad i = k + \varepsilon E - D \sqrt{-1},$$

$$(45) \quad i = k - \varepsilon E + D \sqrt{-1},$$

la valeur de  $E$  étant

$$(46) \quad E = \frac{f(a + \delta + \varepsilon \sqrt{-1}) - f(a + \delta - \varepsilon \sqrt{-1})}{2\varepsilon \sqrt{-1}}.$$

Donc, pour que la valeur de  $i$  fournie par l'équation (27) ou par l'équation (31) offre une partie réelle inférieure à  $k$ , et à plus forte raison un module inférieur à  $k$ , il sera nécessaire que le signe de  $\varepsilon$ , ou du coefficient de  $\sqrt{-1}$  dans  $f(x)$ , soit opposé dans le premier cas, pareil dans le second, au signe de la quantité réelle  $E$  déterminée par l'équation (46). Mais, pour des valeurs infiniment petites de  $\varepsilon$  et  $\delta$ , cette quantité se réduit sensiblement à

$$f(a + \delta) \quad \text{ou} \quad f(a).$$

Donc, les racines réelles de l'équation (1) étant considérées comme des limites vers lesquelles convergent des racines imaginaires de l'équation (27) ou (31), tandis que le module de  $i$  croît et converge vers la limite  $k$ , le coefficient de  $\sqrt{-1}$ , dans chacune de ces racines imaginaires, offrira un signe dépendant de celui que prendra la fonction dérivée  $f'(x)$  pour une valeur de  $x$  égale à la racine réelle correspondante de l'équation (1), savoir, un signe opposé à celui de  $f'(x)$  s'il s'agit de l'équation (27), et un signe pareil à celui de  $f'(x)$  s'il s'agit de l'équation (31). En conséquence, parmi les suites de racines mentionnées dans le théorème précédent, la troisième comprendra les racines réelles de l'équation (1) propres à fournir des valeurs ou négatives

ou positives de la fonction dérivée  $f'(x)$ , et la quatrième les racines réelles propres à fournir les valeurs ou positives ou négatives de  $f'(x)$ , suivant que l'équation (1) sera déduite, par la supposition  $i = k$ , ou de la formule (27), ou de la formule (31). D'ailleurs les racines réelles

$$a, b, c, d, \dots, g, h$$

de l'équation (1) étant rangées d'après l'ordre de leurs grandeurs, lorsqu'on reviendra, en suivant l'ordre inverse, de la dernière  $h$  à la première  $a$ , ces racines fourniront des valeurs de  $f'(x)$  alternativement positives et négatives, la valeur  $f'(h)$  qui correspond à la dernière racine étant positive. En effet, la fonction  $f(x)$ , qui s'évanouit quand  $x$  se réduit à l'une de ces racines, doit nécessairement, dans le passage de l'une à l'autre, commencer par croître et finir par décroître, ou commencer par décroître et finir par croître. Mais, à partir du moment où la valeur croissante de  $x$  atteint la dernière racine réelle  $h$ , il faut que la fonction  $f(x)$  croisse pour devenir positive, puisque avec son premier terme  $x^m$  elle doit être positive pour de très grandes valeurs de  $x$ . D'autre part, on sait que la dérivée  $f'(x)$  est positive ou négative suivant que la fonction  $f(x)$  croît ou décroît pour des valeurs croissantes de  $x$ . Cela posé, si le nombre  $m$  des racines réelles  $a, b, c, d, \dots, g, h$  est impair, la fonction dérivée  $f'(x)$  sera négative pour  $\frac{m-1}{2}$  racines réelles, savoir

$$b, d, \dots, g,$$

et positive pour  $\frac{m+1}{2}$  racines réelles, savoir

$$a, c, \dots, h.$$

Si, au contraire, le nombre  $m$  est pair, la fonction  $f'(x)$  sera négative pour  $\frac{m}{2}$  racines réelles, savoir

$$a, c, \dots, g,$$

et positive pour  $\frac{m}{2}$  racines réelles, savoir

$$b, d, \dots, h.$$



Done, si l'on pose, pour une valeur impaire de  $m$ ,

$$(47) \quad u = (x-b)(x-d)\dots(x-g),$$

$$(48) \quad v = (x-a)(x-c)\dots(x-h),$$

et pour une valeur paire de  $m$ ,

$$(49) \quad u = (x-a)(x-c)\dots(x-g),$$

$$(50) \quad v = (x-b)(x-d)\dots(x-h);$$

si d'ailleurs on nomme  $U$  le produit des facteurs simples qu'on obtient en retranchant successivement de  $x$  les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est négatif, et  $V$  le produit des facteurs simples conjugués aux premiers; la troisième et la quatrième des suites mentionnées dans le théorème précédent auraient pour termes les racines de l'équation (1) propres à vérifier la première et la seconde des deux formules

$$(51) \quad uU = 0,$$

$$(52) \quad vV = 0,$$

ou bien encore la première et la seconde des deux formules

$$(53) \quad vU = 0,$$

$$(54) \quad uV = 0,$$

suivant que l'on supposera l'équation (1) tirée de la formule (27) ou de la formule (31) par la supposition  $i = k$ . D'ailleurs, les coefficients des équations (51) ou (52) et (53) ou (54) se déduiraient sans peine de la somme des termes de la troisième ou de la quatrième suite, et de la somme de leurs puissances semblables et entières des divers degrés. Donc l'équation (1), ou

$$(55) \quad uvUV = 0,$$

pourra être, en vertu du théorème III, décomposée à volonté soit dans les équations (51) et (52), soit dans les équations (53) et (54). Mais, en divisant par leur plus grand commun diviseur les premiers

membres des équations (51) et (53), ou (52) et (54), on réduira ces équations à

$$(56) \quad u = 0, \quad v = 0.$$

De même, en divisant par leur plus grand commun diviseur les premiers membres des équations (51) et (54), ou (52) et (53), on réduira ces équations à

$$(57) \quad U = 0, \quad V = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *La fonction entière  $f(x)$  étant réelle, et les racines de l'équation (1) inégales entre elles, cette équation pourra toujours être décomposée en quatre autres, qui offrent seulement :*

*La première, les racines réelles pour lesquelles  $f'(x)$  est négatif;*

*La seconde, les racines réelles pour lesquelles  $f'(x)$  est positif;*

*La troisième, les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est négatif;*

*La quatrième, les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de  $\sqrt{-1}$  est positif.*

Corollaire. — Cette proposition coïncide avec le théorème III de ma Lettre du 24 février, et lorsqu'on la joint au théorème I, elle fournit la détermination complète des racines réelles d'une équation de degré quelconque. J'ajouterai que cette détermination peut encore être simplifiée à l'aide des considérations suivantes :

Soient  $s$  la somme des racines de l'équation (1), ou de leurs puissances semblables d'un degré donné  $l$ , et

$$S + T\sqrt{-1}$$

la somme des puissances semblables, et de même degré, des racines de l'équation (51),

$$s, S, T,$$

désignant trois quantités réelles. Il est clair que les sommes des puis-



sances semblables, et du degré  $l$ , des racines des quatre équations (51), (52), (53), (54) seront respectivement, pour les équations (51) et (52),

$$(58) \quad s + T\sqrt{-1},$$

$$(59) \quad s - S - T\sqrt{-1},$$

et pour les équations (53), (54)

$$(60) \quad s - S + T\sqrt{-1},$$

$$(61) \quad s - T\sqrt{-1}.$$

Cela posé, si l'on retranche l'expression (58) de l'expression (60), la différence

$$(62) \quad s - 2S$$

représentera évidemment la somme des puissances semblables, et du degré  $l$ , des racines réelles de l'équation (1), ces puissances étant prises avec le signe + ou avec le signe - suivant que les racines réelles dont il s'agit vérifieront l'une ou l'autre des formules

$$u = 0, \quad v = 0,$$

c'est-à-dire suivant que les valeurs de  $f'(x)$  correspondantes à ces racines seront positives ou négatives. On aura donc, pour des valeurs impaires de  $m$ ,

$$(63) \quad s - 2S = a^l - b^l + c^l - d^l + \dots - g^l + h^l,$$

et, pour des valeurs paires de  $m$ ,

$$(64) \quad s - 2S = -a^l + b^l - c^l + d^l - \dots - g^l + h^l.$$

Si le nombre  $l$  est impair, la formule (63) ou (64), dans laquelle  $S$  représente la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $i = k$ , fournira, pour une valeur impaire de  $m$ , la somme des puissances semblables, et du degré  $l$ , des  $m$  racines de l'équation

$$(65) \quad (x-a)(x+b)(x-c)(x+d)\dots(x+g)(x-h) = 0,$$

ou, pour des valeurs paires de  $m$ , la somme des puissances semblables, et du degré  $l$ , des  $m$  racines de l'équation

$$(66) \quad (x+a)(x-b)(x+c)(x-d)\dots(x+g)(x-h) = 0.$$

D'ailleurs, étant donnée, pour une équation du degré  $m$ , la somme des puissances semblables des racines des degrés représentés par les nombres

$$1, 3, 5, 7, \dots, (2m-1),$$

on en tire aisément, à l'aide de formules toutes linéaires, les coefficients des diverses puissances de  $x$  dans le premier membre de cette équation. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

**THÉORÈME V.** — *La fonction  $f(x)$  étant supposée entière et de forme réelle, et les racines de l'équation (1) inégales entre elles, on pourra déterminer immédiatement, à l'aide de séries convergentes, les coefficients d'une autre équation qui offrirait seulement pour racines les racines réelles de l'équation (1) prises avec le signe + ou avec le signe - suivant qu'elles correspondent à des valeurs positives ou négatives de  $f'(x)$ .*

*Corollaire.* — Le théorème V, joint au 1<sup>er</sup>, suffit à la détermination de toutes les racines réelles d'une équation de degré quelconque. Je me propose de revenir, dans une Note nouvelle, sur cette détermination, d'éclaircir encore ce qui a été dit ci-dessus en montrant la méthode appliquée à des exemples numériques, et d'établir d'autres théorèmes relatifs à la résolution des équations. Parmi ces théorèmes, on doit distinguer ceux auxquels on est conduit lorsque, dans les formules (17), (18), (19), la valeur de  $\pi$  cesse d'être égale à  $\pm \frac{\pi}{2}$ . On doit surtout remarquer le cas où l'on a  $e^{\pi\sqrt{-1}} = \pm 1$ . On peut aussi établir facilement la proposition suivante :

**THÉORÈME VI.** —  *$\Pi(x)$  et  $\pi(x)$  désignant deux fonctions entières, la première du degré  $n$ , la seconde du degré  $m < n$ , et dans lesquelles les coefficients des plus hautes puissances de  $x$  sont réduits à l'unité, suppo-*

sons que les racines réelles et finies des deux équations

$$(67) \quad \Pi(x) = 0,$$

$$(68) \quad \varpi(x) = 0,$$

étant rangées par ordre de grandeur, forment la suite

$$\alpha, \xi, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu.$$

En donnant à cette suite, pour termes extrêmes,  $-\infty$ ,  $+\infty$ , on obtiendra celle-ci

$$(69) \quad -\infty, \alpha, \xi, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \infty;$$

et, si l'on nomme  $i$  une quantité réelle positive, deux termes de la dernière suite, pris consécutivement, pourront comprendre entre eux des racines réelles d'une seule des deux équations

$$(70) \quad \Pi(x) - i \varpi(x) = 0,$$

$$(71) \quad \Pi(x) + i \varpi(x) = 0.$$

Si l'on nomme  $1^{\text{er}}$ ,  $2^{\text{e}}$ ,  $3^{\text{e}}$ , ... intervalle les intervalles compris entre le  $1^{\text{er}}$  et le  $2^{\text{e}}$  terme, entre le  $2^{\text{e}}$  et le  $3^{\text{e}}$ , entre le  $3^{\text{e}}$  et le  $4^{\text{e}}$ , ... les racines réelles de l'équation (70) ne pourront être renfermées que dans le  $1^{\text{er}}$ , le  $3^{\text{e}}$ , le  $5^{\text{e}}$ , ... intervalle, lorsque  $n - m$  sera pair, et dans le  $2^{\text{e}}$ , le  $4^{\text{e}}$ , le  $6^{\text{e}}$ , ... intervalle, lorsque  $n - m$  sera impair. Ce sera l'inverse pour l'équation (71). De plus, le nombre des racines réelles de l'équation (70) ou (71) qui pourront se trouver comprises dans l'intervalle compris entre deux termes consécutifs de la suite (70), par exemple entre  $\xi$  et  $\gamma$ , sera impair si ces deux termes sont racines réelles, l'un de l'équation (67), l'autre de l'équation (68). Le même nombre sera pair et pourra se réduire à zéro dans le cas contraire.

*Nota.* — Lorsque deux, trois, ... racines de l'équation (70) ou (71) deviennent égales, on ne doit pas cesser de considérer leur valeur commune comme représentant deux, trois, ... termes de la suite (69). Seulement ces termes sont égaux entre eux.

## 14.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Note sur un théorème relatif aux racines des équations simultanées.

C. R., t. V, p. 6. (3 juillet 1837.)

13 juin 1837.

Le *Compte rendu* de la séance du 15 mai 1837<sup>(1)</sup> contient une Note de MM. Sturm et Liouville, sur le théorème qui termine un Mémoire lithographié à Turin, sous la date du 15 juin 1833. Je regrette que ce Mémoire ne soit point parvenu à MM. Sturm et Liouville; ils y auraient vu que j'étais complètement d'accord avec eux sur l'utilité de résoudre par des principes élémentaires les questions relatives à la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires des équations. Il y a plus : le but de ce Mémoire était précisément de montrer comment on peut résoudre directement de semblables questions sans recourir à des formules de Calcul intégral. Au reste, il était tout simple qu'en 1833 je fusse pénétré de cette pensée, puisque déjà en 1813 c'était sur des principes élémentaires que j'avais fondé une méthode pour déterminer *a priori* le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives d'une équation de degré quelconque. Le Mémoire qui renfermait cette méthode, présenté à l'Institut dans la séance du 17 mai 1813, et approuvé sur le rapport de M. Poisson, est précisément celui duquel il résulte que, pour une équation de degré quelconque, on peut toujours obtenir des fonctions rationnelles et entières des coefficients, tellement choisies que, si l'on remplace chacune d'elles par  $+1$  quand elle est positive, par  $-1$  quand elle est négative, la somme des quantités  $+1$  ou  $-1$  ainsi trouvées est précisément égale au nombre des racines réelles comprises entre des limites données. (Voir le rapport de M. Poisson, l'exposé

<sup>(1)</sup> Voir *Comptes rendus* du 8 mai 1837, p. 672 (*Oeuvres de C.*, S. I, t. IV, p. 45) et du 15 mai 1837, p. 720.



sommaire de la méthode imprimée chez M<sup>me</sup> Courcier, avec la date du 17 mai 1813, et le *Journal de l'École Polytechnique*.)

Pressé par le temps, je n'ai pu développer la pensée qu'expriment les dernières lignes de ce Mémoire, et je me suis vu obligé d'omettre la démonstration du théorème VIII. Ce théorème, qu'on peut généraliser encore, entraîne comme conséquence les propositions sur le nombre des racines imaginaires énoncées dans le Mémoire de 1831, et, pour les en déduire, il suffit de prendre pour  $f(x, y)$  et  $F(x, y)$  la partie réelle et le coefficient de  $\sqrt{-1}$  dans une fonction entière de la variable imaginaire  $x + y\sqrt{-1}$ .

Dans ce cas, et dans beaucoup d'autres, par exemple, lorsque la fonction  $\Phi(x, y)\chi(x, y) - \varphi(x, y)X(x, y)$  reste continue et ne s'évanouit pas entre les limites données, le théorème est exact et la démonstration que j'ai indiquée subsiste. Mais on peut se demander si l'on doit conserver l'énoncé du théorème dans toute sa généralité. MM. Sturm et Liouville se sont prononcés pour la négative, et ils ont eu raison. Ils ont fait l'observation très juste qu'un examen attentif de cette démonstration même devait conduire à l'opinion qu'ils manifestent; et j'avouerai à ce sujet que, trouvant cette démonstration trop peu développée dans ma Lettre du 22 avril, j'avais entrepris, dès le 24, la rédaction d'une Note plus étendue que je me proposais d'adresser à l'Académie; mais, arrivé à la treizième page de cette Note, je me trouvai arrêté par quelques difficultés qui me firent prendre le parti d'en ajourner l'envoi jusqu'au moment où l'on aurait publié dans les *Comptes rendus* les démonstrations des autres théorèmes relatifs à la résolution des équations, et que j'avais précédemment énoncés. En conséquence, à peine rétabli d'une indisposition assez grave, je profitai des premiers moments de loisir pour exposer la nouvelle méthode de résolution des équations qui se trouve développée dans mes deux Lettres adressées à l'Académie, sous les dates du 2 et du 13 mai. L'observation de MM. Sturm et Liouville m'ayant engagé à revoir la Note commencée

le 24 avril, j'ai reconnu qu'en vertu des principes mêmes établis dans cette Note, le théorème VIII peut devenir inexact dans le cas où la fonction  $\Phi(x, y)\chi(x, y) - \varphi(x, y)X(x, y)$  s'évanouirait entre les limites données, mais que, même dans ce cas, le théorème subsiste encore, s'il n'existe point, entre les limites dont il s'agit, des valeurs réelles de  $x, y$  propres à vérifier simultanément les deux équations

$$(A) \quad \Phi(x, y)\chi(x, y) - \varphi(x, y)X(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0.$$

Ainsi, pour rectifier l'énoncé du théorème, il suffit d'y joindre la condition que le système des équations (A) ne puisse être vérifié pour des valeurs réelles de  $x, y$  comprises entre ces limites. Alors en effet, la démonstration indiquée est applicable, et l'on ne rencontre plus les mêmes difficultés. Au reste, je me propose de reproduire dans une autre Lettre les diverses méthodes à l'aide desquelles j'étais parvenu au théorème VIII, et qui toutes supposent implicitement la condition ci-dessus énoncée.

Quant à la démonstration élémentaire que MM. Sturm et Liouville ont donnée de mon théorème sur les racines imaginaires, et que je ne connais pas encore, n'ayant pas reçu leur Mémoire, quoique peut-être elle soit du nombre de celles qui se déduisent des principes que j'avais indiqués ou établis, toutefois, comme ils n'ont eu nulle connaissance du Mémoire de 1833, qui d'ailleurs ne renferme explicitement ni cette démonstration ni même celle du théorème VIII, il est clair qu'ils ont tout le mérite de la découverte, et qu'on doit leur savoir gré de l'avoir publiée.

## 15.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur la résolution des équations de degré quelconque.*

C. R., t. V, p. 301. (27 août 1837.)

19 août 1837.

Les principes établis dans les différentes Lettres que j'ai eu l'honneur de transmettre à l'Académie fournissent, comme on l'a vu, des méthodes générales pour la résolution des équations de tous les degrés. En suivant l'une de ces méthodes, fondée sur le troisième théorème énoncé dans ma Lettre du 24 février, on développe immédiatement chaque racine d'une équation en série convergente, lorsque toutes les racines sont réelles, et l'on peut toujours ramener la question à ce dernier cas en se débarrassant, comme on l'a expliqué, des racines imaginaires. Mais quoique, sous le point de vue théorique, cette méthode ne laisse rien à désirer, il peut être avantageux de lui substituer, dans la pratique, l'une des autres méthodes qui se déduisent des principes exposés dans mes diverses Lettres, et en particulier celles qui se fondent sur plusieurs théorèmes que je vais énoncer en peu de mots.

Considérons une équation du degré  $n$ . On pourra la réduire, même d'une infinité de manières, à la forme

$$\varphi(x) = i,$$

$\varphi(x)$  désignant une fonction entière ou fractionnaire, et  $i$  un paramètre réel ou imaginaire. Or, comme je l'ai fait voir, la résolution de cette équation pourra toujours être ramenée, pour de très petites valeurs de  $i$ , à la résolution de l'équation auxiliaire

$$\varphi(x) = 0,$$

et, pour de très grandes valeurs de  $i$ , à la résolution de l'équation

auxiliaire

$$\varphi(x) = \frac{1}{i}.$$

Il y a plus; si l'on nomme valeurs principales de  $x$  celles qui vérifient l'équation dérivée

$$\varphi'(x) = 0,$$

sans vérifier l'une des deux équations auxiliaires, et modules principaux de  $i = \varphi(x)$  ceux qui répondent aux valeurs principales de  $x$ , toutes les racines de la proposée seront développables suivant les puissances ascendantes ou descendantes du paramètre  $i$  lorsque le module donné de ce paramètre sera inférieur ou supérieur à tous ses modules principaux. Enfin, si l'on fait correspondre à chaque expression imaginaire un point situé dans un plan donné, en prenant la partie réelle et le coefficient de  $\sqrt{-1}$  pour l'abscisse et l'ordonnée de ce point, les expressions réelles correspondront toujours à des points situés sur l'axe des abscisses, et les diverses valeurs de  $x$  propres à résoudre l'équation

$$\varphi(x) = i,$$

pour un module donné de  $i$ , correspondront à des points situés sur un système de courbes qui pourront être de deux espèces différentes. Nous avons nommé courbes de première espèce celles qui s'élargissent, et courbes de seconde espèce celles qui se rétrécissent, pour une valeur croissante du module de  $i$ ; et nous avons fait voir que l'équation proposée peut toujours être décomposée en autant d'équations partielles qu'il y a de courbes distinctes. Or si, la fonction  $\varphi(x)$  étant de forme réelle, on attribue au paramètre  $i$  une valeur réelle, chacune des courbes traversées par l'axe des abscisses, étant symétrique par rapport à cet axe, ne pourra le couper en plus de deux points, hors le cas des racines égales. Donc alors chacune des équations partielles offrira au plus deux racines réelles. Ainsi se trouve établie la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *En supposant résolues les équations auxiliaires*

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x) = \frac{1}{i},$$

on peut généralement décomposer une équation de la forme

$$\varphi(x) = i$$

en équations partielles dont chacune offre au plus deux racines réelles.

Corollaire. — Si la proposée a toutes ses racines réelles, elle sera immédiatement décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.

A ce théorème on peut en joindre plusieurs autres dont je vais transcrire les énoncés, me réservant d'en offrir la démonstration dans une autre Lettre.

THÉORÈME II. — Si l'on donne successivement à la fonction  $\varphi(x)$  les deux formes

$$k - f(x), \quad k + f(x),$$

$f(x)$  désignant une fonction entière de forme réelle, et  $k$  une constante réelle ou imaginaire dont le module surpasse tous les modules principaux de  $f(x)$ ; si d'ailleurs on suppose inégales entre elles les racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

cette équation, que l'on pourra présenter sous l'une quelconque des formes

$$k - f(x) = i, \quad k + f(x) = i,$$

en donnant au paramètre  $i$  la valeur  $k$ , offrira, sous l'une de ces formes, au moins une racine développable suivant les puissances ascendantes de  $i$ . On pourra d'ailleurs, dans l'hypothèse admise, développer suivant les puissances descendantes de  $k$  les racines de chacune des équations auxiliaires

$$k - f(x) = 0, \quad k + f(x) = 0.$$

THÉORÈME III. — Les mêmes choses étant admises que dans le théorème précédent, si l'on forme divers groupes avec les racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

présentée d'abord sous la forme

$$k - f(x) = i,$$

puis sous la forme

$$k + f(x) = i,$$

en composant chaque groupe des racines qu'il est indispensable d'ajouter entre elles pour obtenir une somme développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $i$ , deux racines distinctes ne pourront en général se trouver réunies dans le premier cas, sans être séparées dans le second, ni réunies dans le second cas, sans être séparées dans le premier.

Corollaire. — Après avoir développé toutes les racines de chacune des équations

$$k - f(x) = i, \quad k + f(x) = i,$$

suivant les puissances ascendantes de  $i$ , et calculé les sommes formées par l'addition des développements qu'il est nécessaire d'ajouter entre eux pour obtenir des séries convergentes, il suffira, pour obtenir chaque racine, de réunir entre elles plusieurs de ces sommes, prises les unes avec le signe  $+$ , les autres avec le signe  $-$ .

Exemple. — Si, l'équation proposée ayant toutes ses racines réelles, on suppose la constante  $k$  réelle et positive, les développements correspondants aux racines réelles des équations auxiliaires seront convergents, ainsi que la somme des développements correspondants à deux racines imaginaires conjuguées. Cela posé, si l'on nomme

$$a, b, c, d, \dots, f, g, h$$

les racines réelles rangées par ordre de grandeur, et si,  $n$  étant le degré de l'équation donnée, on suppose le premier terme de  $f(x)$  réduit à  $x^n$ , alors, pour des valeurs paires de  $n$ , l'équation auxiliaire

$$f(x) - k = 0$$

fournira le moyen de calculer les racines  $a, h$ , avec les sommes

$$b + c, d + e, \dots, f + g.$$

tandis que l'équation auxiliaire

$$f(x) + k = 0$$





fournira le moyen de calculer les sommes

$$a + b, c + d, \dots, g + h.$$

Au contraire, si  $n$  est impair, la première équation auxiliaire fournira la racine  $h$ , avec les sommes  $a + b, c + d, \dots, f + g$ ; et la seconde, la racine  $a$ , avec les sommes  $b + c, d + e, \dots, g + h$ . Dans l'une et l'autre hypothèse, on obtiendra immédiatement la plus petite et la plus grande racine, les autres étant données par les formules

$$b = (a + b) - a, \quad c = (b + c) - (a + b) + a, \quad \dots$$

## 16.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendentes.*

C. R., t. V, p. 357. (4 septembre 1837.)

La méthode que je vais exposer est tellement simple qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle ne se soit pas présentée plus tôt à l'esprit des géomètres. D'un autre côté, elle est tellement générale qu'elle fournit immédiatement des valeurs aussi approchées qu'on le désire de toutes les racines réelles des équations algébriques, souvent même des équations transcendentes. Enfin les approximations successives sont, non seulement très faciles, mais encore très rapides, pour le moins aussi rapides que dans la méthode newtonienne, et il arrive bientôt un moment où le nombre des chiffres décimaux est plus que doublé à chaque opération nouvelle. Tous ces avantages réunis ne me permettent pas de révoquer en doute la nouveauté de la méthode, quoique je n'aie en ce moment à ma disposition aucun Ouvrage écrit sur le même sujet. Mais ils sont tellement sensibles que la méthode, une fois livrée au public, ne pourrait manquer, ce me semble, d'être adoptée et mise en pratique par tous les amis des sciences. Je commencerai par énoncer

deux des principaux théorèmes sur lesquels elle s'appuie; puis je déduirai de ces théorèmes la méthode elle-même.

THÉORÈME I. — *Supposons que les deux fonctions*

$$f(x), \quad F(x),$$

*étant l'une et l'autre positives pour  $x = a$ , restent finies et continues entre les limites*

$$x = a, \quad x = b,$$

*et vérifient constamment, dans cet intervalle, la condition*

$$f(x) < F(x).$$

*Si la seconde des équations*

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

$$(2) \quad F(x) = 0$$

*offre une ou plusieurs racines réelles comprises entre les limites données, et si l'on nomme  $c$  celle de ces racines qui est la plus voisine de la limite  $a$ , l'équation (1) offrira elle-même une ou plusieurs racines réelles comprises, non seulement entre les limites*

$$a \quad \text{et} \quad b,$$

*mais encore entre les limites plus resserrées*

$$a \quad \text{et} \quad c.$$

*Démonstration.* — En effet, dans l'hypothèse admise, la condition

$$f(x) < F(x),$$

étant vérifiée pour  $x = c$ , en même temps que l'équation (2), donnera

$$f(c) < 0;$$

et, comme on aura d'ailleurs

$$f(a) > 0,$$

la fonction  $f(x)$  passera du positif au négatif, tandis que la variable  $x$  passera de la valeur  $x = a$  à la valeur  $x = c$ . Donc cette fonction, va-



riant dans l'intervalle par degrés insensibles, puisqu'elle reste continue, s'évanouira pour une valeur de  $x$  comprise entre  $a$  et  $c$ .

Le théorème I, dans lequel on peut supposer à volonté  $b < a$ , ou  $b > a$ , entraîne évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME II. — Soit

$$(1) \quad f(x) = 0$$

une équation dont le premier membre reste fonction continue de  $x$ , entre des limites données

$$(2) \quad x = x_0, \quad x = X > x_0.$$

Soient encore

$$\varpi(x), \psi(x); \quad \Pi(x), \Psi(x)$$

quatre fonctions qui restent continues entre ces limites, et se réduisent à des quantités affectées du même signe que  $f(x)$ , les deux premières pour  $x = x_0$ , les deux dernières pour  $x = X$ . Supposons d'ailleurs qu'entre les limites données ces diverses fonctions vérifient constamment les conditions

$$(3) \quad \frac{\varpi(x)}{f(x_0)} < \frac{f(x)}{f(x_0)} < \frac{\psi(x)}{f(x_0)},$$

$$(4) \quad \frac{\Pi(x)}{f(X)} < \frac{f(x)}{f(X)} < \frac{\Psi(x)}{f(X)},$$

le signe  $<$  pouvant être remplacé par le signe  $=$  quand la variable  $x$  se réduit, dans la formule (3), à la limite  $x_0$ , ou, dans la formule (4), à la limite  $X$ . Enfin concevons que, dans le cas où des valeurs de  $x$  renfermées entre  $x_0$ ,  $X$  vérifieraient, comme racines, soit l'équation (1), soit une ou plusieurs des équations auxiliaires

$$(5) \quad \varpi(x) = 0,$$

$$(6) \quad \psi(x) = 0,$$

$$(7) \quad \Pi(x) = 0,$$

$$(8) \quad \Psi(x) = 0,$$

on nomme

$\xi$  et  $\Xi$  la plus petite et la plus grande de ces racines, pour l'équation (1).

$x_0 + \mu$  la plus petite, pour l'équation (5),

$x_0 + \nu$  la plus petite, pour l'équation (6),

$X - M$  la plus grande, pour l'équation (7),

$X - N$  la plus grande, pour l'équation (8).

Si l'équation (1) admet effectivement des racines réelles comprises entre les limites  $x_0$ ,  $X$ , l'existence de ces racines entraînera l'existence des racines

$$x_0 + \mu, \quad X - M,$$

qui pourront être substituées avec avantage aux limites  $x_0$ ,  $X$ , attendu que l'on aura

$$(9) \quad x_0 + \mu < \xi,$$

$$(10) \quad \Xi < X - M,$$

les deux racines  $\xi$ ,  $\Xi$  pouvant être distinctes ou se réduire à une seule. De plus, l'existence de la racine  $x_0 + \nu$  entraînera toujours l'existence des racines  $\xi$ ,  $\Xi$  distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite des racines

$$x_0 + \mu, \quad X - M$$

qui vérifieront la condition (10) ainsi que la suivante :

$$(11) \quad x_0 + \mu < \xi < x_0 + \nu.$$

Pareillement l'existence de la racine  $X - N$  entraînera toujours l'existence des racines  $\xi$ ,  $\Xi$ , distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite des racines

$$x_0 + \nu, \quad X - M$$

qui vérifieront la condition (9) avec la suivante :

$$(12) \quad X - N < \Xi < X - M.$$

Corollaire I. — Si la limite  $x_0$  était racine de l'équation (1), elle devrait être pareillement racine de l'équation (5); et, en excluant cette racine, on pourrait énoncer encore le théorème II, pourvu que l'on remplaçât, dans la formule (3), la quantité  $f(x_0)$  par  $f(x_0 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  désignant un nombre infiniment petit.



*Corollaire II.* — Si la limite  $X$  était racine de l'équation (1), elle devrait être pareillement racine de l'équation (7); et en excluant cette racine, on pourrait encore énoncer le théorème II, pourvu que l'on remplaçât, dans la formule (4), la quantité  $f(X)$  par  $f(X - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  désignant un nombre infiniment petit.

*Corollaire III.* — Supposons la fonction  $f(x)$  décomposée en deux autres

$$\varphi(x), \quad -\chi(x),$$

dont les dérivées

$$\varphi'(x), \quad -\chi'(x)$$

soient, la première toujours croissante, et la seconde toujours décroissante, pour des valeurs croissantes de  $x$ , comprises entre les limites données; ce qui arrivera, par exemple, si, ces limites étant positives, et  $f(x)$  une fonction entière, on prend pour  $\varphi(x)$  la somme des termes positifs, et pour  $-\chi(x)$  la somme des termes négatifs. En désignant par  $a$  une quantité comprise entre les limites  $x_0, X$ , ou même équivalente à l'une de ces limites, on aura, en vertu d'une formule connue.

$$(13) \quad \varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(u), \quad \chi(x) = \chi(a) + (x-a)\chi'(v),$$

les quantités  $u, v$  étant renfermées elles-mêmes entre  $a$  et  $x$ , à plus forte raison entre les limites  $x_0, X$ ; puis, en ayant égard à l'équation identique

$$(14) \quad f(x) = \varphi(x) - \chi(x),$$

on tirera des formules (13)

$$(15) \quad f(x) = f(a) + (x-a)[\varphi'(u) - \chi'(v)].$$

Comme on aura d'ailleurs, dans l'hypothèse admise,

$$(16) \quad \varphi'(x_0) < \varphi'(u) < \varphi'(X), \quad \chi'(x_0) < \chi'(v) < \chi'(X),$$

la formule (15) donnera

$$(17) \quad f(x) < f(a) + (x-a)[\varphi'(X) - \chi'(x_0)],$$

$$(18) \quad f(x) > f(a) + (x-a)[\varphi'(x_0) - \chi'(X)];$$

puis, en divisant par  $f(a)$  les deux membres de celles-ci, on trouvera :  
1° si  $f(a)$  est positif,

$$(19) \quad 1 + \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(X)}{f(a)}(x-a) < \frac{f(x)}{f(a)} < 1 + \frac{\varphi'(X) - \chi'(x_0)}{f(a)}(x-a);$$

2° si  $f(a)$  est négatif,

$$(20) \quad 1 + \frac{\varphi'(X) - \chi'(x_0)}{f(a)}(x-a) < \frac{f(x)}{f(a)} < 1 + \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(X)}{f(a)}(x-a).$$

Si maintenant on désigne, pour abrégé, par

$$-\frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\beta}$$

le plus petit et le plus grand des rapports

$$(21) \quad \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(X)}{f(x_0)}, \quad \frac{\varphi'(X) - \chi'(x_0)}{f(x_0)},$$

et par

$$\frac{1}{A}, \quad \frac{1}{B}$$

le plus grand et le plus petit des rapports

$$(22) \quad \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(X)}{f(X)}, \quad \frac{\varphi'(X) - \chi'(x_0)}{f(X)},$$

on tirera de la formule (19) ou (20) : 1° en y remplaçant  $a$  par  $x_0$ ,

$$(23) \quad 1 - \frac{x-x_0}{\alpha} < \frac{f(x)}{f(x_0)} < 1 - \frac{x-x_0}{\beta},$$

2° en y remplaçant  $a$  par  $X$ ,

$$(24) \quad 1 + \frac{x-X}{A} < \frac{f(x)}{f(X)} < 1 + \frac{x-X}{B}.$$

Comme les trois membres dont se compose chacune des formules (23), (24), sont trois fonctions de  $x$  qui offrent des valeurs égales à l'unité, par conséquent affectées du même signe, quand on pose  $x = x_0$  ou  $x = X$ , ces formules pourront être substituées, dans le théorème II,



aux formules (3) et (4); et alors les équations (5), (6), (7), (8), réduites aux suivantes :

$$(25) \quad 1 - \frac{x - x_0}{\alpha} = 0,$$

$$(26) \quad 1 - \frac{x - x_0}{\beta} = 0,$$

$$(27) \quad 1 + \frac{x - X}{A} = 0,$$

$$(28) \quad 1 + \frac{x - X}{B} = 0,$$

offriront pour les racines les quatre quantités

$$(29) \quad x_0 + \alpha, \quad x_0 + \beta, \quad X - A, \quad X - B.$$

Mais chacune de ces quantités ne pourra se confondre avec l'une de celles que nous avons représentées, dans le théorème II, par

$$(30) \quad x_0 + \mu, \quad x_0 + \nu, \quad X - M, \quad X - N,$$

qu'autant qu'elle restera comprise entre les limites  $x_0, X$ . Cela posé, le théorème II entraînera évidemment la proposition suivante :

THÉORÈME III. — Soit

$$(1) \quad f(x) = 0$$

une équation dont le premier membre  $f(x)$  reste fonction continue de  $x$ , entre les limites

$$x = x_0, \quad x = X.$$

Supposons d'ailleurs la fonction  $f(x)$  décomposée en deux autres

$$\varphi(x), \quad -\gamma(x),$$

qui restent elles-mêmes continues entre les limites données, et soient toujours la première croissante, la seconde décroissante, tandis que l'on fait croître  $x$  entre ces limites. Enfin, nommons  $-\frac{1}{\alpha}$  le plus petit et  $-\frac{1}{\beta}$  le plus grand des rapports

$$\frac{\varphi'(x_0) - \gamma'(X)}{f(x_0)}, \quad \frac{\varphi'(X) - \gamma'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Nommons, au contraire,  $\frac{1}{A}$  le plus grand et  $\frac{1}{B}$  le plus petit des rapports

$$\frac{\varphi'(x_0) - \gamma'(X)}{f(X)}, \quad \frac{\varphi'(X) - \gamma'(x_0)}{f(X)}.$$

Si l'équation (1) offre des racines comprises entre les limites  $x_0, X$ , les quantités

$$x_0 + \alpha, \quad X - A$$

seront elles-mêmes renfermées entre ces limites, et comprendront entre elles toutes les racines dont il s'agit. De plus, il suffira que l'une des quantités

$$x_0 + \beta, \quad X - B$$

soit comprise entre les limites  $x_0, X$ , pour que l'équation (1) offre certainement des racines renfermées entre ces limites. Nommons  $\xi$  la plus petite, et  $\Xi$  la plus grande de ces racines, les deux racines  $\xi, \Xi$  pouvant quelquefois se réduire à une seule. Si la quantité  $x_0 + \alpha$  est comprise entre les limites  $x_0, X$ , on pourra en dire autant des quantités  $x_0 + \alpha, X - A$ , qui vérifieront les conditions

$$(31) \quad x_0 + \alpha < \xi < x_0 + \beta,$$

$$(32) \quad \Xi < X - A;$$

et si la quantité  $X - B$  est comprise entre  $x_0, X$ , on pourra encore en dire autant des quantités  $x_0 + \alpha, X - A$ , qui vérifieront les conditions

$$(33) \quad x_0 + \alpha < \xi,$$

$$(34) \quad X - B < \Xi < X - A.$$

Nota. — Lorsqu'à la formule (15) on substitue la suivante :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{1}{2}(x - a)^2[\varphi''(a) - \gamma''(a)],$$

on obtient le théorème suivant, analogue à celui qu'on vient d'énoncer :

THÉORÈME IV. — Le premier membre de l'équation donnée

$$f(x) = 0$$



étant un polynôme en  $x$  du degré  $n$ , supposons qu'on cherche la racine positive immédiatement inférieure à une limite donnée  $X$ . On posera

$$\alpha = f(X), \quad \beta = f'(X),$$

et l'on prendra pour  $\gamma$  la moitié du résultat qu'on obtient en écrivant  $X$  au lieu de  $x$  dans la dérivée du second ordre de la partie de  $f(x)$  qui se compose de termes affectés d'un signe opposé à celui de la quantité  $f(X)$ ; puis on résoudra l'équation du second degré

$$(34) \quad \alpha + \beta(x - X) + \gamma(x - X)^2 = 0.$$

Si l'on nomme  $X_1$  la plus petite racine de cette dernière équation et

$$X, X_1, X_2, X_3, \dots$$

une série de quantités dont la troisième se déduit de la seconde, la quatrième de la troisième, etc..., comme la seconde se déduit de la première, la racine cherchée sera la limite vers laquelle convergera très rapidement le terme général de cette série.

Si l'on prenait pour  $X$  une limite supérieure à toutes les racines positives, la méthode indiquée ferait connaître la plus grande de ces racines.

La méthode est applicable au cas même où  $X$  serait une racine positive déjà trouvée, et fournirait alors la racine positive immédiatement inférieure.

*Démonstration.* — En conservant les notations du théorème III, et supposant de plus  $x_0 = 0$ ,  $X > 0$ , on aura non seulement

$$\varphi(x) = \varphi(X) + (x - X) \varphi'(X) + \frac{(x - X)^2}{1.2} \varphi''(u),$$

$u$  étant compris entre  $x_0$  et  $X$ , mais aussi

$$\varphi''(u) > 0, \quad \varphi''(u) < \varphi''(X),$$

et par suite

$$\varphi(x) > \varphi(X) + (x - X) \varphi'(X),$$

$$\varphi(x) < \varphi(X) + (x - X) \varphi'(X) + \frac{(x - X)^2}{1.2} \varphi''(X),$$

on trouvera de même pour des valeurs de  $x$  inférieures à  $X$

$$\begin{aligned} \chi(x) &> \chi(X) + (x - X) \chi'(X), \\ \chi(x) &< \chi(X) + (x - X) \chi'(X) + \frac{(x - X)^2}{1.2} \chi''(x); \end{aligned}$$

et comme on a  $f(x) = \varphi(x) - \chi(x)$ , on trouvera

$$\begin{aligned} f(x) &> f(X) + (x - X) f'(X) - \frac{(x - X)^2}{1.2} \chi''(X), \\ f(x) &< f(X) + (x - X) f'(X) + \frac{(x - X)^2}{1.2} \varphi''(X); \end{aligned}$$

donc, d'après le théorème II, la plus grande des racines de la proposée inférieures à  $X$  sera surpassée, si  $f(X)$  est positif, par la plus petite des racines de l'équation auxiliaire

$$f(X) + (x - X) f'(X) - \frac{(x - X)^2}{1.2} \chi''(X) = 0;$$

et, si  $f(X)$  est négatif, par la plus petite racine de l'équation

$$f(X) + (x - X) f'(X) + \frac{(x - X)^2}{1.2} \varphi''(X) = 0.$$

Donc, etc.

*Exemple.* — Soit donnée à résoudre l'équation de Lagrange

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

et supposons que l'on cherche ses racines positives. Comme on aura (voir l'*Analyse algébrique*)  $x^3 + 7 > 2\sqrt{7x^2}$ , les racines positives de la proposée seront inférieures à la racine positive de l'équation auxiliaire  $2\sqrt{7x^2} = 7x$ , c'est-à-dire à  $\frac{7}{4} = 1,75$ . De plus la formule (1) donnera, pour  $X = 1,75$ ,

$$(X^3 - 7X + 7) + (3X^2 - 7)(x - X) = 0, \quad x = 1,7 \dots \text{environ},$$

et pour  $X = 1,7 \dots$ ,

$$(X^3 - 7X + 7) + (3X^2 - 7)(x - X) + 3X(x - X)^2 = 0, \quad x = 1,38 \dots$$

En posant de nouveau  $x = 1,38$ , on trouvera  $x = 1,3569 \dots$  En po-



sant  $x = 1,70$ , on trouvera 1,692. Les deux racines de la proposée sont en effet 1,3569 et 1,692.

Ajoutons : 1° que les conclusions précédentes subsisteront lors même que  $f(x)$  sera une fonction transcendante, si cette fonction est décomposable en deux parties  $\varphi(x)$  et  $\chi(x)$  telles que chacune des dérivées  $\varphi'(x), \chi'(x)$  acquerra des valeurs positives toujours croissantes pour des valeurs positives de  $x$ ; 2° dans cette seconde méthode les équations auxiliaires ne sont plus linéaires, mais du second degré; et aussi les approximations sont plus rapides.

On démontre facilement que les méthodes de résolution des équations que nous venons d'indiquer, méthodes applicables dans tous les cas, comprennent, comme cas particulier, la méthode newtonienne; de plus, pour que cette dernière fournisse des valeurs de plus en plus approchées des racines de l'équation  $f(x) = 0$ , comprises entre des limites données  $x = x_0, x = X$ , il faut et il suffit, en conservant les notations précédentes, que les quantités

$$\varphi''(x_0) - \chi''(X), \quad \varphi''(X) - \chi''(x_0)$$

offrent les mêmes signes. Ce résultat si simple excitera sans doute l'attention des géomètres.

## 17.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Détermination des racines réelles des équations : méthode linéaire.*

C. R., t. V, p. 417 (18 septembre 1837).

(Simple énoncé.)

## 18.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Détermination des racines réelles des équations.*

C. R., t. V, p. 587 (23 octobre 1837).

« M. Cauchy adresse un Mémoire sur l'application des fonctions nommées par M. Ampère *interpolaires*, à la détermination des racines réelles des équations. »

Les propriétés très remarquables de ces fonctions conduisent à une méthode nouvelle à l'aide de laquelle on peut resserrer indéfiniment les limites des racines réelles des équations, et obtenir de ces racines des valeurs aussi approchées que l'on voudra.

## 19.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les vibrations de l'éther dans un milieu ou dans le système de deux milieux, lorsque la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens autour de tout axe parallèle à une droite donnée.*

C. R., t. VII, p. 751 (29 octobre 1838).

Montrer comment les lois des phénomènes lumineux peuvent se déduire des équations qui représentent les mouvements vibratoires d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles, tel est l'objet de divers Mémoires que j'ai publiés à diverses époques, et en particulier du *Mémoire sur la Dispersion*, imprimé à Paris en 1830; de huit livraisons des *Nouveaux Exercices*, imprimées à Prague, et d'un Mémoire lithographié sous la date d'août 1836. Ce dernier Mémoire se composait de deux Parties. La première offrait des



formules générales d'analyse applicables à un grand nombre de questions diverses. La seconde avait spécialement pour objet l'étude des lois suivant lesquelles se développent les divers phénomènes lumineux. Les sept premiers paragraphes de la seconde Partie, déjà publiés, offrent les formules fondamentales de la théorie de la lumière. Il y est successivement question des équations générales du mouvement de l'éther, des couleurs, des mouvements qui deviennent insensibles à de très petites distances, ou des corps opaques, des formules générales qui représentent un mouvement vibratoire quelconque du fluide éthéré, des milieux où la propagation de la lumière s'effectue suivant les mêmes lois en tous sens, ou autour de tout axe parallèle à une droite donnée; enfin, de la propagation des ondes planes dans les corps transparents. L'impression du Mémoire dont il s'agit a été interrompue par des circonstances indépendantes de ma volonté. Mais les résultats que devaient contenir les derniers paragraphes se trouvent déjà énoncés, pour la plupart, soit dans les *Nouveaux Exercices*, soit dans diverses lettres adressées à MM. Ampère et Libri, et publiées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie*. Je me propose maintenant de reproduire successivement ces mêmes résultats, avec quelques développements, dans une suite de Mémoires dont j'ai l'honneur d'offrir aujourd'hui le premier à l'Académie. Je vais indiquer son objet en peu de mots.

Comme je l'ai dit, dans la première Partie du Mémoire lithographié, d'août 1836, on est souvent fort embarrassé pour établir, dans les questions de Physique mathématique, les conditions relatives aux limites des corps et aux surfaces qui terminent des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles. Ainsi, en particulier, si l'on considère des ondes sonores, lumineuses, etc., propagées dans un corps élastique, dans un milieu transparent, etc., on pourra aisément suivre la propagation du mouvement jusqu'à une très petite distance de la surface qui termine ce corps ou ce milieu. Mais il n'en sera plus de même à l'instant où cette distance deviendra comparable au rayon de la sphère d'attraction ou de répulsion de deux molé-

cules, et, à partir de cet instant, les équations qui représentaient les mouvements vibratoires dans l'intérieur du corps ou du milieu proposé se trouveront altérées; par conséquent, les lois déduites de ces équations cesseront de subsister. Cette difficulté se reproduit jusque dans la théorie de l'équilibre d'un système de molécules. Pour s'en débarrasser, on a généralement fait abstraction de la couche très mince des molécules situées près de la surface extérieure du corps à une distance plus petite que le rayon de la sphère d'activité sensible, et appliqué à cette surface extérieure les formules relatives à la surface intérieure de la couche dont il s'agit. Ainsi, dans l'Hydrostatique, quand on considère un liquide et un fluide élastique superposé, on admet que la pression mesurée, soit dans le liquide, soit dans le gaz, à une très petite distance de la surface du contact des deux milieux, ne diffère pas sensiblement de la pression exercée en un point de la surface elle-même. C'est encore ainsi que, dans la théorie des vibrations des corps élastiques, après avoir calculé la pression intérieure, pour des points situés tout près de la surface du corps, on égale cette même pression à celle que supporte la surface, c'est-à-dire à zéro, si les expériences s'exécutent dans le vide, ou à la pression atmosphérique, si elles s'exécutent dans l'air. Toutefois, il faut l'avouer, cette égalité entre les pressions extérieure et intérieure n'est point évidente par elle-même, et, si elle a effectivement lieu, elle constitue un théorème de Mécanique qu'il semble nécessaire de démontrer.

Lorsque l'on parvient aux limites d'un système de molécules, et que l'on s'approche de la surface qui le sépare d'un autre système, il suffit de parcourir un petit intervalle pour que les intégrales des équations d'équilibre ou de mouvement soient notablement modifiées, et pour que des changements sensibles s'opèrent, non seulement dans la valeur de la densité, qui peut être différente dans les deux milieux, mais encore dans les valeurs des autres quantités, telles que les déplacements maxima de molécules, les vitesses moléculaires, les vitesses des ondes sonores ou lumineuses, etc. Nous n'avons *a priori* nulle certitude qu'il ne puisse en être de même des pressions, et nous pouvons ajouter que



la théorie de la lumière indique des variations très rapides de la pression qu'exercent les molécules éthérées dans le voisinage de la surface extérieure d'un milieu transparent. On voit donc combien il était à désirer que l'on pût établir une méthode générale propre à fournir, dans les questions de Physique mathématique, les conditions relatives aux limites des corps. On y parvient, dans un grand nombre de cas, en suivant celle que j'ai indiquée dans le § IV de la première Partie de mon Mémoire lithographié. Le Mémoire que je présente aujourd'hui à l'Académie renferme l'application de cette méthode à la théorie de la lumière, et montre comment on en déduit les formules publiées dans les *Nouveaux Exercices* et relatives à la surface de séparation de deux systèmes de molécules éthérées comprises dans deux milieux séparés par une surface plane. Pour simplifier les calculs, je considère spécialement le cas où dans chacun des deux milieux la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens autour de tout axe perpendiculaire à la surface de séparation. D'ailleurs, le système de deux milieux homogènes pouvant être considéré comme un seul milieu hétérogène, je commence par reproduire, dans le § I<sup>er</sup> du nouveau Mémoire, les équations du mouvement de l'éther dans un seul milieu, telles que je les ai données à la page 69 du Mémoire lithographié, savoir, celles qu'on obtient en supposant que la propagation du mouvement s'effectue de la même manière en tous sens autour de tout axe parallèle à une droite donnée. Je développe ensuite ces équations en m'arrêtant à la première approximation qui représente les mouvements auxquels on parvient quand on néglige la dispersion; puis, dans le § II, j'applique les formules trouvées dans le premier paragraphe au système de deux milieux homogènes séparés par une surface plane, et je déduis de ces formules les conditions relatives à la surface de séparation. Ces conditions sont celles que j'ai indiquées à la page 203 des *Nouveaux Exercices*.

## 20.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la propagation du mouvement par ondes planes dans un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances. Analogie de ces ondes avec celles dont la propagation donne naissance aux phénomènes de la polarisation de la lumière et de la double réfraction.*

C. R., t. VII, p. 865 (19 novembre 1838).

Parmi les mouvements que peut offrir un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles, on doit surtout remarquer les mouvements vibratoires périodiques. Le calcul montre que de semblables mouvements peuvent avoir lieu de telle sorte qu'à chaque instant toutes les molécules situées dans l'un quelconque des plans perpendiculaires à une droite donnée offrent des vitesses égales et dirigées suivant des droites parallèles. Il peut d'ailleurs arriver que l'amplitude de chaque vibration, c'est-à-dire la plus grande distance à laquelle une molécule vibrante s'écarte de la position qu'elle occupait dans l'état d'équilibre, soit une distance invariable et indépendante de la position du plan perpendiculaire à la droite donnée, ou bien que cette distance varie avec la situation de ce même plan. Dans le premier cas, le système de molécules que l'on considère peut être divisé en tranches, que nous appelons des *ondes planes*, par une infinité de plans équidistants, perpendiculaires à la droite donnée, et tellement choisis que les molécules situées dans ces divers plans soient toutes au même instant animées de vitesses égales et dirigées suivant des droites parallèles. Alors l'épaisseur d'une tranche sera ce que nous nommons l'épaisseur d'une onde plane ou la longueur d'une ondulation. Lorsque cette épaisseur sera très petite, les deux plans qui termineront une onde se confondront sensiblement l'un avec l'autre comme avec chacun des plans intermédiaires, et l'on pourra en conséquence nommer plan d'une onde tout plan perpendiculaire à la droite donnée. Le





calcul prouve encore que chaque onde se déplace avec le temps, et se propage avec une vitesse constante équivalente au quotient qu'on obtient quand on divise l'épaisseur d'une onde par la *durée d'une vibration moléculaire*. Cette durée est le temps même qu'emploie une molécule partant d'une position donnée pour y revenir, en vertu de son mouvement rectiligne ou curviligne. D'ailleurs, lorsque la molécule ne se meut pas suivant une droite tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé, la courbe qu'elle parcourt est généralement une ellipse, dans laquelle le rayon vecteur, mené du centre à la circonférence, décrit des aires proportionnelles au temps. Mais, si l'on considère deux molécules diverses, les deux rayons vecteurs menés à ces deux molécules, à partir des centres des ellipses qu'elles décrivent, ne pourront être parallèles entre eux qu'autant que la distance entre les plans menés parallèlement aux plans des ondes par les deux molécules, prises dans l'état de repos, serait un multiple de la longueur d'ondulation. Du reste, l'ellipse décrite par une molécule peut se réduire à un cercle, ou même à une ligne droite, et alors on retrouve le mouvement rectiligne ci-dessus mentionné. Enfin, pour passer du cas où l'amplitude des vibrations est invariable, au cas où cette amplitude varie avec la situation du plan de l'onde, il suffit de faire décroître les dimensions de l'ellipse décrite par une molécule, ainsi que les déplacements de cette molécule, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, dans le même rapport qu'une exponentielle dont l'exposant négatif soit proportionnel à la distance qui sépare la molécule d'un plan fixe mené par l'origine parallèlement aux plans des ondes. Dans tous les cas, le carré de la durée des vibrations moléculaires se trouve lié à l'épaisseur des ondes et aux cosinus des angles que forme la perpendiculaire au plan d'une onde avec les demi-axes des coordonnées positives par une équation du troisième degré, dont les trois racines correspondent à trois systèmes d'ondes parallèles à un même plan. Lorsque certaines conditions sont remplies, la propagation du mouvement s'effectue en tous sens, suivant les mêmes lois. Alors deux racines de l'équation du troisième degré deviennent égales entre elles; et par suite, deux des trois

systèmes d'ondes se réduisent à un seul. Alors aussi, les vibrations rectilignes des molécules seront comprises dans les plans des ondes, ou perpendiculaires à ces plans, suivant qu'il s'agira des ondes correspondantes à la racine double ou à la racine simple de l'équation du troisième degré.

Il est facile de reconnaître l'analogie des mouvements que nous venons de décrire avec ceux qu'on est obligé d'attribuer aux molécules du fluide lumineux, ou de l'éther, pour rendre compte de divers phénomènes que présente la théorie de la lumière, et, en particulier, de la polarisation et de la double réfraction. Si l'on considère les formules obtenues pour un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances comme pouvant effectivement représenter les vibrations des molécules éthérées dans les phénomènes lumineux, les mouvements elliptiques ou circulaires ci-dessus mentionnés seront ceux que présente le phénomène de la polarisation elliptique ou circulaire, tandis que la polarisation deviendra rectiligne si les ellipses décrites par les molécules se réduisent à des lignes droites. De plus, les deux systèmes d'ondes planes, qui se réduisent à un seul quand certaines conditions sont remplies, seront les ondes planes admises par Fresnel dans les deux systèmes de rayons lumineux que présentent les cristaux doués de la double réfraction, et qui se réduisent à un système unique dans les milieux doués de la réfraction simple. Ces considérations se trouvent développées dans les deux Mémoires que j'ai l'honneur d'offrir aujourd'hui à l'Académie. Le premier, déjà déposé sur le bureau, dans la séance du 29 octobre dernier, a pour titre :

*Mémoire sur les lois de la polarisation, lorsque la propagation de la lumière s'effectue par ondes planes, dans les milieux transparents, et dans ceux qui absorbent plus ou moins complètement la lumière.*

Le second a pour titre :

*Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction.*

Ce dernier Mémoire est divisé en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, après avoir rappelé les formules qui représentent le mou-



vement de l'éther dans le cas où la polarisation est rectiligne, je cherche ce que deviennent ces formules quand on s'arrête à l'approximation du premier ordre, c'est-à-dire, quand on néglige la dispersion. Dans le second paragraphe, je montre comment on peut déduire des formules dont je viens de parler, les axes optiques des milieux doués de la double réfraction. Enfin, dans le troisième paragraphe, j'indique une méthode très simple qui fournit immédiatement l'équation de la surface des ondes. J'ignore si cette méthode diffère ou non de celle que M. d'Ettingshausen m'a dit avoir substituée avec avantage à l'analyse dont je m'étais servi pour le même objet dans mes leçons au Collège de France et dans mes *Exercices de Mathématiques*. J'ajouterai que cet habile physicien m'a dit aussi avoir déduit des formules indiquées sous le n° 1, dans le premier Mémoire, les lois de la polarisation dans les corps transparents.

## 21.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Formules extraites des deux Mémoires présentés dans la séance du 19 novembre.*

C. R., t. VII, p. 907 (26 novembre 1838).

Considérons un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles, et soient, au bout du temps  $t$ ,

$$\xi, \eta, \zeta$$

les déplacements de la molécule  $m$  qui coïncide avec le point  $(x, y, z)$ , ces déplacements étant mesurés parallèlement aux axes des coordonnées supposés rectangulaires entre eux. Les équations du mouvement par ondes planes seront de la forme

$$(1) \quad \xi = A \cos(kr - st + \lambda), \quad \eta = B \cos(kr - st + \mu), \quad \zeta = C \cos(kr - st + \nu),$$

la valeur de  $r$  étant

$$r = ax + by + cz.$$

Dans ces équations

$$k, s, \lambda, \mu, \nu, A, B, C, a, b, c$$

représentent des constantes dont les deux premières sont liées avec l'épaisseur  $l$  d'une onde plane, la durée  $T$  des vibrations moléculaires, et la vitesse de propagation  $\Omega$ , par les formules

$$k = \frac{2\pi}{l}, \quad s = \frac{2\pi}{T}, \quad \Omega = \frac{s}{k} = \frac{l}{T},$$

tandis que les trois dernières,  $a, b, c$ , assujetties à la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

représentent les cosinus des angles formés par la perpendiculaire au plan d'une onde avec les demi-axes des coordonnées positives. Par suite,  $r$  désigne la distance de la molécule  $m$  à un plan passant par l'origine, et parallèle aux plans des ondes.

On tire des équations (1)

$$(2) \quad \frac{\xi}{A} \sin(\mu - \nu) + \frac{\eta}{B} \sin(\nu - \lambda) + \frac{\zeta}{C} \sin(\lambda - \mu) = 0,$$

et

$$(3) \quad \left(\frac{\eta}{B}\right)^2 - 2 \frac{\eta}{B} \frac{\zeta}{C} \cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\zeta}{C}\right)^2 = \sin^2(\mu - \nu), \dots$$

La courbe qui a pour coordonnées les valeurs de  $\xi, \eta, \zeta$ , déterminées par les formules (2), (3), est, en vertu de ces formules, une courbe plane du second degré, et même une ellipse. Elle se réduit à une droite lorsqu'on a

$$\lambda = \mu = \nu.$$

Alors, en effet, si l'on nomme  $\omega$  la valeur commune de  $\lambda, \mu, \nu$ , les équations (1) deviendront

$$(4) \quad \xi = A \cos(kr - st + \omega), \quad \eta = B \cos(kr - st + \omega), \quad \zeta = C \cos(kr - st + \omega),$$

et l'on tire de ces dernières

$$\frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = \frac{\zeta}{C}$$

Il existe, entre les constantes contenues dans les équations (4), plusieurs relations en vertu desquelles on peut considérer  $k$  et  $\Omega$  comme des fonctions de  $a, b, c, s$ , ou bien encore  $s$  et même les deux rapports  $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$  comme des fonctions de  $a, b, c, k$ . Ces relations peuvent être réduites à trois formules qui déterminent  $s$  et les rapports  $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ , en fonctions des trois quantités

$$(5) \quad ka = u, \quad lb = v, \quad lc = \dot{w};$$

et, pour obtenir ces trois formules, il suffit de considérer la quantité  $\frac{1}{s}$  et les coefficients  $A, B, C$  comme exprimant l'un des trois demi-axes d'un ellipsoïde et les cosinus des angles formés par ce demi-axe avec ceux des coordonnées positives, l'ellipsoïde étant représenté par l'équation

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & I(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \\ & + 2xy \frac{\partial^2 K}{\partial y \partial x} + 2xz \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial x} + 2xy \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} = 1, \end{aligned} \right.$$

et  $I, K$  désignant deux fonctions déterminées de  $u, v, w$  développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et ascendantes de  $u, v, w$ . Si certaines conditions sont remplies, les séries obtenues renfermeront seulement les puissances paires de  $u, v, w$ , et alors, en réduisant les séries, ou du moins leurs parties variables, à leurs premiers termes, savoir : le développement de  $I$  aux termes du second degré, et la partie variable du développement de  $K$  aux termes du second degré, on verra l'équation (6) se réduire à

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & (Ga^2 + Hb^2 + Iw^2)(x^2 + y^2 + z^2) + Lu^2x^2 + Mv^2y^2 + Nw^2z^2 \\ & + P(vz + wy)^2 + Q(wx + uz)^2 + R(uy + vx)^2 = 1, \end{aligned} \right.$$

$G, H, I, L, M, N, P, Q, R$  désignant des quantités constantes. Si maintenant on cherche l'équation qui détermine  $s$  en fonction de  $u, v, w$ , ou, ce qui revient au même,  $\Omega$  en fonction de  $a, b, c$ , on reconnaîtra que cette équation est du troisième degré par rapport à  $s^2$  ou à  $\Omega^2$ , et

peut être présentée sous l'une des formes

$$(8) \quad \frac{\left(\frac{u}{P}\right)^2}{s^2 - Ak^2} + \frac{\left(\frac{v}{Q}\right)^2}{s^2 - Bk^2} + \frac{\left(\frac{w}{R}\right)^2}{s^2 - Ck^2} = \frac{1}{2PQR},$$

$$(9) \quad \frac{\left(\frac{a}{P}\right)^2}{\Omega^2 - A} + \frac{\left(\frac{b}{Q}\right)^2}{\Omega^2 - B} + \frac{\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\Omega^2 - C} = \frac{1}{2PQR},$$

les valeurs de  $A, B, C$  étant

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \left(L - 2\frac{QR}{P} + G\right)a^2 + (R + H)b^2 + (Q + I)c^2, \\ B &= (R + G)a^2 + \left(M - 2\frac{RP}{Q} + H\right)b^2 + (P + I)c^2, \\ C &= (Q + G)a^2 + (P + H)b^2 + \left(N - 2\frac{PQ}{R} + I\right)c^2. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas particulier où le mouvement se propage en tous sens suivant les mêmes lois autour d'un point quelconque, on a

$$(11) \quad P = Q = R, \quad L = M = N = 3P = 3Q = 3R,$$

et, par suite,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} L - 2\frac{QR}{P} + G &= R + H = Q + I, \\ R + G = M - 2\frac{RP}{Q} + H &= P + I, \\ Q + G = P + H = N - 2\frac{PQ}{R} + I. \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad A = B = C.$$

Alors l'équation du troisième degré en  $\Omega^2$ , à laquelle on parvient en faisant disparaître les dénominateurs dans la formule (9), fournit deux racines égales, c'est-à-dire deux valeurs de  $\Omega^2$  égales entre elles et à la valeur commune des coefficients  $A, B, C$ . Alors aussi on a

$$\frac{aA}{\sin(\mu - \nu)} = \frac{bB}{\sin(\nu - \lambda)} = \frac{cC}{\sin(\lambda - \mu)},$$

et l'équation (2), réduite à

$$a\zeta + b\eta + c\zeta = 0,$$

montre que les vibrations des molécules sont comprises dans les plans des ondes. Lorsque les conditions (11) sont remplies, non d'une manière rigoureuse, mais par approximation, les différences

$$Q - P, R - P, \dots$$

ne sont plus rigoureusement nulles, mais très petites, et les deux racines précédemment égales diffèrent très peu de

$$A, B, C.$$

Alors, pour chacune d'elles, chacun des termes que renferme le premier membre de l'équation (9) acquiert des valeurs très considérables, quand on les compare au terme que renferme le second membre; et, dans un calcul approximatif, on peut réduire cette équation à

$$\frac{\left(\frac{a}{P}\right)^2}{\Omega^2 - A} + \frac{\left(\frac{b}{Q}\right)^2}{\Omega^2 - B} + \frac{\left(\frac{c}{R}\right)^2}{\Omega^2 - C} = 0,$$

ou même, puisqu'on suppose P, Q, R sensiblement égaux, à

$$(14) \quad \frac{a^2}{\Omega^2 - A} + \frac{b^2}{\Omega^2 - B} + \frac{c^2}{\Omega^2 - C} = 0.$$

Il suffit que les conditions (12) soient remplies pour que les valeurs de A, B, C, fournies par les formules (10), deviennent indépendantes de a, b, c, c'est-à-dire de la direction du plan de l'onde. Alors, si l'on représente par  $\Omega$ ,  $\Omega'$ ,  $\Omega''$ , les vitesses de propagation des ondes parallèles à des axes coordonnés dont l'un soit l'axe des x, ou des y, ou des z, on aura

$$(15) \quad \Omega^2 = A, \quad \Omega'^2 = B, \quad \Omega''^2 = C;$$

et, par suite, l'équation (14) sera réduite à

$$(16) \quad \frac{a^2}{\Omega^2 - \Omega'^2} + \frac{b^2}{\Omega^2 - \Omega''^2} + \frac{c^2}{\Omega^2 - \Omega'^2} = 0.$$

Si le plan d'une onde devient parallèle à l'axe des z, on aura

$$c = 0;$$

et si l'on pose alors

$$a = \cos \tau,$$

les deux valeurs de  $\Omega^2$  propres à vérifier l'équation (16) seront

$$\Omega^2 = \Omega'^2, \quad \Omega^2 = \Omega'^2 \cos^2 \tau + \Omega''^2 \sin^2 \tau.$$

Ces deux valeurs deviendront égales si,  $\Omega''$  étant comprise entre  $\Omega'$  et  $\Omega''$ , une droite perpendiculaire au plan de l'onde devient parallèle à l'un des deux axes menés par l'origine dans le plan des xy, de manière à former avec l'axe des x un des angles  $\tau$  déterminés par la formule

$$(17) \quad \text{tang} \tau = \pm \sqrt{\frac{\Omega''^2 - \Omega'^2}{\Omega'^2 - \Omega''^2}}.$$

Si la perpendiculaire au plan d'une onde, cessant d'être parallèle à l'un de ces axes, forme avec eux des angles représentés par  $i$  et  $j$ , les deux valeurs de  $\Omega^2$  tirées de la formule (16) deviendront

$$(18) \quad \begin{cases} \Omega^2 = \Omega'^2 \cos^2 \frac{j+i}{2} + \Omega''^2 \sin^2 \frac{j+i}{2}, \\ \Omega^2 = \Omega'^2 \cos^2 \frac{j-i}{2} + \Omega''^2 \sin^2 \frac{j-i}{2}. \end{cases}$$

Les formules (18) sont précisément celles qui déterminent la vitesse de propagation de la lumière, suivant une direction quelconque, dans un milieu doublement réfringent, lorsque ce milieu présente deux axes optiques, c'est-à-dire deux directions à chacune desquelles le plan d'une onde ne peut devenir perpendiculaire sans que les deux rayons transmis se réduisent à un seul. Donc l'équation (16), de laquelle sont tirées les formules (18), est applicable au mouvement du fluide lumineux dans un cristal à deux axes optiques. Cette équation suppose que l'on prend pour plan des x, y le plan des deux axes optiques, et pour axes des x et y deux droites tracées dans ce plan, de manière à diviser en parties égales les angles que les deux axes optiques forment entre eux.

Considérons maintenant une onde plane qui passe par l'origine quand on suppose  $t = 0$ . Cette onde, au bout d'un temps quelconque  $t$ , aura



changé de place, et son plan sera représenté par l'équation

$$(19) \quad ax + by + cz = \Omega t.$$

Si, dans cette dernière équation, l'on fait varier les cosinus  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , assujettis à vérifier la condition

$$(20) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

sans faire varier  $t$ , le plan de l'onde prendra des positions diverses, en demeurant toujours tangent à une certaine surface qu'on nomme la *surface des ondes*. L'équation de cette même surface se déduit aisément des formules (18), (19), (20), et peut s'écrire comme il suit :

$$(21) \quad \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \Omega^2 t^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \Omega^2 t^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \Omega^2 t^2} = 1.$$

En faisant disparaître les dénominateurs, et en effaçant le terme  $(x^2 + y^2 + z^2)^2$  qui se trouve alors dans les deux membres, on réduit la formule (21) à l'équation du quatrième degré, donnée par Fresnel.

## 22.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière produites par la surface de séparation de deux milieux doués de la réfraction simple.*

C. R., t. VII, p. 953 (3 décembre 1838).

Dans le premier des Mémoires que j'ai présentés depuis peu de temps à l'Académie, j'ai donné les formules générales qui expriment les conditions relatives à la surface de séparation de deux milieux dans lesquels vibrent les molécules de l'éther. En appliquant ces formules générales à la réflexion et à la réfraction de la lumière, produites par deux milieux que sépare une surface plane, et dont chacun est doué

de la réfraction simple, on obtient les formules particulières contenues dans le nouveau Mémoire joint à la présente Note. Je me propose, dans la prochaine séance, de donner un aperçu général des résultats qu'elles indiquent, et je me bornerai pour l'instant à une observation qui me paraît digne de l'attention des physiciens.

Lorsque les deux milieux donnés sont transparents, les formules relatives à la réflexion et à la réfraction renferment une constante réelle que l'on nomme l'*indice de réfraction*, et qui n'est autre chose que le rapport constant du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction. Mais, lorsque le second milieu devient opaque, cet indice n'existe plus, ou, du moins, il se trouve remplacé par une constante imaginaire qui dépend de deux quantités réelles. Donc, alors, il n'y a plus lieu de rechercher ce qu'on nomme l'*indice de réfraction du corps opaque*, et l'on doit à la recherche de cet indice substituer la recherche des deux quantités réelles dont je viens de parler. Mon Mémoire offrira plusieurs exemples de la détermination de ces deux quantités. Au reste, les formules que j'ai obtenues s'accordent d'une manière remarquable, ainsi que je l'expliquerai dans la prochaine séance, avec les expériences des physiciens.

## 23.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière.*

C. R., t. VII, p. 985 (10 décembre 1838).

PREMIÈRE PARTIE. — *Considérations générales.*

Pour faire bien comprendre l'explication des phénomènes que produisent la réflexion et la réfraction de la lumière, il ne sera pas inutile de présenter d'abord quelques considérations générales sur les mouvements vibratoires et périodiques d'un système de points matériels.



Considérons un système de molécules ou points matériels très peu écartés de leurs positions d'équilibre stable, et sollicités par des forces qui tendent sans cesse à les y ramener, telles que les poids de ces molécules, ou bien encore les actions attractives ou répulsives des unes sur les autres. Chaque molécule oscillera autour de la position qu'elle occupait dans l'état d'équilibre du système, et les lois du mouvement seront d'autant plus faciles à reconnaître que les déplacements des molécules seront plus petits. Concevons, en effet, que les différents points du système soient rapportés à trois axes coordonnés rectangulaires entre eux. Les équations du mouvement d'une molécule seront trois équations différentielles, ou, plus généralement, trois équations aux différences mêlées, qui devront servir à déterminer, au bout d'un temps quelconque, les trois déplacements de la molécule mesurés parallèlement aux axes, en fonction des quatre variables indépendantes, c'est-à-dire en fonction des coordonnées et du temps. Or, en considérant les trois déplacements dont il s'agit, ainsi que leurs différences finies et leurs différentielles ou dérivées, comme des quantités infiniment petites du premier ordre, et négligeant les infiniment petits du second ordre, on devra, dans les trois équations du mouvement, conserver seulement les premières puissances de ces déplacements et de ces différences finies ou dérivées. On verra ainsi les trois équations du mouvement se réduire à trois équations plus simples qui seront du genre de celles qu'on nomme *linéaires*, et qui seront vérifiées d'autant plus exactement que les déplacements des molécules seront plus petits. C'est ce que nous exprimerons en disant que les trois nouvelles équations représentent les *mouvements infiniment petits* du système de points matériels donné.

Puisque les équations des mouvements infiniment petits d'un système de points matériels sont linéaires, lorsqu'on connaît plusieurs intégrales particulières de ces mêmes équations, il suffira de combiner par voie d'addition les intégrales connues pour en obtenir d'autres. Donc, étant donnés plusieurs mouvements infiniment petits que pourrait prendre un système de points matériels soumis à l'action de cer-

taines forces, si dans chacun de ces mouvements on mesure le déplacement des molécules parallèlement aux axes coordonnés, un nouveau mouvement, dans lequel chaque déplacement aurait pour valeur la somme de ses valeurs relatives aux mouvements donnés, sera encore un des mouvements infiniment petits que le système de points matériels est susceptible d'acquérir. On dit alors que le nouveau mouvement résulte de la *superposition* de tous les autres. On a des exemples de cette superposition dans la théorie des ondes liquides et dans la théorie du son. Ainsi, en particulier, lorsque la surface d'une eau tranquille a été déprimée en plusieurs lieux par l'immersion simultanée de corps très petits, le liquide s'élève en chaque point au-dessus de son niveau naturel à une hauteur représentée par la somme des hauteurs des ondes que produiraient les immersions des divers corps considérés isolément; et, lorsque plusieurs sons se font entendre à la fois, le déplacement de chaque molécule d'air, mesuré parallèlement à un axe fixe, est la somme des déplacements que pourraient produire les divers sons, pris chacun à part.

Ce n'est pas tout. Puisque les trois équations des mouvements infiniment petits d'un système de points matériels sont linéaires, les valeurs qu'elles fournissent, pour les déplacements d'une molécule mesurés parallèlement aux trois axes coordonnés, sont les parties réelles de trois variables imaginaires qui vérifient trois autres équations de même forme. Si d'ailleurs les trois premières équations sont indépendantes de la position de l'origine des coordonnées, en sorte qu'elles ne se trouvent pas altérées quand on transporte cette origine d'un point à un autre, la manière la plus simple de vérifier les trois nouvelles équations sera de supposer les trois variables imaginaires respectivement égales aux produits de trois constantes imaginaires par une même exponentielle dont l'exposant imaginaire et variable se réduit à une fonction linéaire des coordonnées et du temps. Nous appellerons *mouvement simple* ou *élémentaire* le mouvement infiniment petit qu'on obtient dans une semblable hypothèse. Cela posé, comme une fonction quelconque de plusieurs variables peut être représentée par la somme



d'un nombre fini ou infini de termes respectivement proportionnels à des exponentielles dont les exposants soient des fonctions linéaires, réelles ou imaginaires, de ces mêmes variables, il est clair qu'un mouvement infiniment petit d'un système de points matériels donné sera toujours un mouvement simplé, ou du moins un mouvement résultant de la superposition d'un nombre fini ou infini de mouvements simples.

Dans toute expression imaginaire, la partie réelle et le coefficient de  $\sqrt{-1}$  sont, comme on le sait, les produits respectifs d'une quantité réelle et positive qu'on nomme le *module* par le sinus et le cosinus d'un certain arc ou angle que nous appellerons l'*argument*. D'autre part, l'exponentielle à laquelle restent proportionnelles les trois variables imaginaires, dont les déplacements d'une molécule dans un mouvement simple sont les parties réelles, peut être regardée comme ayant pour base la base même des logarithmes népériens, et pour exposant une fonction linéaire du temps et des trois coordonnées sans terme constant, par conséquent, un polynôme composé de quatre termes respectivement proportionnels à ces quatre variables indépendantes. Ce polynôme, dont les coefficients resteront en général imaginaires, sera pour cette raison décomposable en deux parties, l'une réelle, l'autre équivalente au produit de  $\sqrt{-1}$  par un facteur réel. Or ce facteur, qui sera lui-même une fonction linéaire des variables indépendantes, sans terme constant, est précisément l'arc ou l'angle qui servent d'argument à l'exponentielle imaginaire dont nous avons parlé. Cet argument et le module de cette exponentielle, c'est-à-dire la quantité positive en laquelle elle se transforme quand on réduit l'exposant imaginaire à sa partie réelle, sont ce que nous appellerons l'*argument* et le *module* du mouvement simple. Si l'on multiplie le module par le cosinus de l'argument, l'expression ainsi obtenue sera la partie réelle de l'exponentielle imaginaire; et, pour déduire de cette expression le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à un axe fixe, par exemple à l'un des axes coordonnés, il suffira d'y substituer au module du mouvement simple le produit de ce module par un *coefficient* constant

relatif à cet axe, puis à l'argument du mouvement simple la somme faite de cet argument et d'un angle constant que nous nommerons *paramètre angulaire*. D'ailleurs le coefficient du module et le paramètre angulaire ajouté à l'argument ne seront pas nécessairement les mêmes dans les trois déplacements d'une molécule mesurés parallèlement aux trois axes coordonnés, et pourront en général changer de valeur quand on passera d'un axe à l'autre.

Les principaux caractères d'un mouvement simple se déduisent aisément de la considération de l'exponentielle imaginaire ci-dessus mentionnée, par conséquent de la considération de son argument et de son module, c'est-à-dire de l'argument et du module du mouvement simple; et d'abord si l'on élimine l'argument et le module dont il s'agit entre les trois équations finies qui déterminent les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, on obtiendra entre ces déplacements une équation du premier degré dont les coefficients seront indépendants de la position de la molécule. Donc la courbe décrite par chaque molécule sera une courbe plane, dont le plan restera constamment parallèle à un *plan invariable* que l'on pourra faire passer par l'origine des coordonnées. D'autre part, l'argument du mouvement simple étant une fonction linéaire des quatre variables indépendantes, acquerra constamment la même valeur en tous les points d'un plan quelconque parallèle à un *second plan invariable* dont on formera l'équation en égalant cet argument à zéro, pour une valeur nulle du temps, c'est-à-dire à l'origine du mouvement. Enfin, l'exposant réel de l'exponentielle qui représente le module du mouvement simple, étant lui-même une fonction linéaire des variables indépendantes, acquerra la même valeur en tous les points d'un plan quelconque parallèle à un *troisième plan invariable* dont on formera l'équation en égalant cet exposant à zéro pour une valeur nulle du temps. Donc, dans un mouvement simple, l'argument et le module, par conséquent les déplacements moléculaires qui en dépendent et les vitesses de vibration seront les mêmes, à chaque instant, pour toutes les molécules situées sur la droite d'intersection de deux plans parallèles, l'un au second plan



invariable, l'autre au troisième, ou, ce qui revient au même, pour toutes les molécules situées sur une droite parallèle à la ligne d'intersection du second plan invariable et du troisième.

Il est important d'observer que, dans l'argument d'un mouvement simple, ou dans l'exposant de l'exponentielle qui représente son module, la somme des trois termes respectivement proportionnels aux trois coordonnées sera toujours le produit de la distance d'une molécule au second plan invariable ou au troisième par un coefficient égal, au signe près, à la racine carrée de la somme des carrés des coefficients des coordonnées dans ces mêmes termes. Donc cet argument et cet exposant pourront être en définitive considérés comme deux binômes composés chacun de deux parties proportionnelles, l'une au temps, l'autre à la distance qui sépare une molécule du second plan invariable ou du troisième. D'ailleurs, l'angle dont le cosinus entre comme facteur dans l'expression de l'un quelconque des trois déplacements moléculaires n'étant autre chose que l'argument même augmenté d'un paramètre constant, les valeurs de l'argument pour lesquelles ce cosinus, et par suite le déplacement, s'évanouiront, seront des valeurs équidistantes qui formeront une progression géométrique dont la raison sera la demi-circonférence ou le nombre  $\pi$ . Enfin, pour obtenir ces valeurs équidistantes, il suffira évidemment de faire varier successivement de quantités égales entre elles, soit le temps, soit la distance qui sépare une molécule du plan invariable. Donc les déplacements moléculaires, mesurés parallèlement à l'un des axes coordonnés, s'évanouiront pour une même molécule, après des intervalles de temps égaux, chaque intervalle étant le rapport du nombre  $\pi$  à la constante qui représente le coefficient du temps dans l'argument, et s'évanouiront, à un même instant, pour toutes les molécules situées dans des plans parallèles équidistants, l'intervalle compris entre deux plans consécutifs étant le rapport du nombre  $\pi$  à la constante qui, dans l'argument, représente le coefficient de la distance d'une molécule au second plan invariable. Observons d'ailleurs que ces intervalles de temps, ou ces intervalles compris entre les plans parallèles, seront de deux espèces.

chaque intervalle pouvant répondre à une valeur positive ou négative du cosinus que l'on considère, par conséquent à un déplacement moléculaire effectué dans le sens des coordonnées positives ou négatives. La somme faite de deux intervalles contigus, de première et de seconde espèce, composera un intervalle double après lequel le cosinus reprendra successivement toutes les valeurs qu'il avait d'abord acquises. Cet intervalle double aura pour mesure le rapport d'une circonférence entière ou du nombre  $2\pi$  à la constante qui, dans l'argument, représente le coefficient du temps ou de la distance d'une molécule au second plan invariable; et il exprimera, dans le premier cas, la *durée* invariable des vibrations ou oscillations moléculaires mesurées parallèlement à un axe fixe, dans le second cas, la double épaisseur des tranches qu'on formera dans le système de molécules donné en coupant ce système à un instant donné par des plans parallèles qui renferment les molécules dont le déplacement, mesuré parallèlement à un axe fixe, s'évanouit. La réunion de deux tranches contiguës, par conséquent de deux tranches qui renfermeront des molécules déplacées en sens inverses, formera ce que nous appellerons une *onde plane*, et la double épaisseur d'une tranche sera précisément ce que nous nommerons l'*épaisseur d'une onde*, ou la *longueur d'une ondulation*. Cette épaisseur restera la même, ainsi que la durée des vibrations, quel que soit l'axe fixe parallèlement auquel se mesurent les vibrations des molécules. D'ailleurs, le temps venant à croître, chaque onde se déplacera dans l'espace avec les plans parallèles qui la terminent, et sa vitesse de propagation ou de déplacement sera évidemment le rapport entre les deux constantes qui représentent, dans l'argument, les coefficients du temps et de la distance d'une molécule au second plan invariable; ou, ce qui revient au même, cette vitesse de propagation sera le rapport entre l'épaisseur d'une onde plane et la durée d'une vibration mesurée parallèlement à un axe fixe.

Considérons maintenant l'exponentielle qui représente le module d'un mouvement simple. Il peut arriver que, dans cette exponentielle, ou plutôt dans son exposant, le coefficient du temps, ou bien encore





le coefficient de la distance d'une molécule au troisième plan invariable, s'évanouisse. Dans le premier cas, le module ne dépendant plus du temps, les trois déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, reprendront périodiquement les mêmes valeurs après des intervalles de temps égaux entre eux et à la durée d'une vibration moléculaire. Pour cette raison, le mouvement simple pourra être alors désigné sous le nom de *mouvement périodique durable* ou *persistant*. Alors aussi la courbe décrite par chaque molécule sera une courbe fermée et rentrante sur elle-même. Dans le second cas, le module deviendra indépendant de la position d'une molécule dans le système de points matériels donné; par conséquent, la courbe décrite par chaque molécule dépendra uniquement de sa distance au second plan invariable, et n'éprouvera aucune altération quand on fera croître ou diminuer cette distance de l'épaisseur d'une onde plane ou d'un multiple de cette épaisseur. Si, dans l'exposant du module, le coefficient du temps ne se réduit pas à zéro, alors, le temps venant à croître, les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement à des axes fixes, ne pourront demeurer très petits qu'autant que ce même coefficient sera négatif, et, dans cette hypothèse, le mouvement simple, loin d'être un mouvement durable et persistant, sera au contraire un mouvement qui tendra sans cesse à s'éteindre, et dans lequel chaque molécule s'approchera indéfiniment de la position qu'elle occupait dans l'état d'équilibre du système, en décrivant une spirale autour d'elle. Enfin, si, dans l'exposant du module, le coefficient de la distance d'une molécule au troisième plan invariable ne se réduit pas à zéro, alors, tandis qu'on s'éloignera de ce troisième plan dans un certain sens, on verra décroître indéfiniment, et au delà de toute limite, les déplacements des molécules, d'où il résulte qu'à une distance considérable du troisième plan, le système sera sensiblement au repos.

Lorsque, dans l'exposant du module, le coefficient du temps et le coefficient de la distance d'une molécule au troisième plan invariable s'évanouissent à la fois, le module se réduit à l'unité. Alors la courbe décrite par chaque molécule est généralement une ellipse, et, dans

cette ellipse, le rayon vecteur mené du centre à la molécule trace des aires proportionnelles au temps. De plus, les ellipses correspondantes aux diverses molécules sont toutes parallèles les unes aux autres, et décrites par ces molécules en des temps égaux dont chacun est la durée d'une vibration moléculaire. Enfin le rayon vecteur, mené du centre d'une ellipse à la molécule qui la décrit, reste parallèle à lui-même et dirigé dans le même sens, quand on fait varier la distance de la molécule au second plan invariable, ou de l'épaisseur d'une onde plane, ou d'un multiple de cette épaisseur.

Chaque molécule décrivant une ellipse dans le cas où le module se réduit à l'unité, nous désignerons alors le mouvement simple sous le nom de *mouvement elliptique*. Au reste, il peut arriver que l'ellipse décrite se réduise à un cercle ou à une ligne droite. Alors le mouvement deviendra *circulaire* ou *rectiligne*. Ajoutons que chaque molécule décrira toujours une droite, et qu'en conséquence le mouvement deviendra rectiligne, quelle que soit d'ailleurs la valeur constante ou variable du module, si, dans les expressions des déplacements mesurés parallèlement aux axes, les trois paramètres angulaires deviennent égaux entre eux.

Il peut arriver que, dans une question de Physique mathématique, les trois variables principales qui expriment les trois déplacements d'une molécule mesurés parallèlement aux axes se trouvent séparées, c'est-à-dire que chacune de ces variables se trouve déterminée par une seule des équations aux différences mêlées qui représentent un mouvement infiniment petit. Alors les coefficients du module et les paramètres angulaires que renferment les expressions des trois déplacements relatifs à un mouvement simple deviennent indépendants les uns des autres, et chaque mouvement simple peut être considéré comme résultant de la superposition de trois mouvements rectilignes simples dans chacun desquels les vibrations des molécules s'effectueraient parallèlement à l'un des axes coordonnés. Il est d'ailleurs évident que, pour réduire ces mouvements rectilignes à deux et faire disparaître le troisième, il suffira de prendre pour l'un des axes coordonnés une droite



perpendiculaire au premier plan invariable, par conséquent aux plans des diverses courbes décrites par les molécules.

## 24.

C. R., t. VII, p. 1044 (17 décembre 1838). — Suite.

Considérons maintenant deux systèmes de molécules contigus, séparés l'un de l'autre par une surface plane, et supposons que, pour chacun d'eux, les équations du mouvement soient indépendantes de la position de l'origine des coordonnées. Chacun de ces systèmes sera capable de propager des mouvements simples. De plus, un mouvement simple propagé dans le premier système, avec une vitesse de propagation en vertu de laquelle les ondes planes se rapprocheront de la surface de séparation, entraînera toujours la coexistence : 1° d'un autre mouvement simple propagé dans le premier système avec une vitesse de propagation en vertu de laquelle les ondes planes s'éloigneront de la surface de séparation; 2° d'un mouvement simple propagé dans le second système avec une vitesse de propagation en vertu de laquelle les ondes planes s'éloigneront encore de la surface dont il s'agit. En effet, il serait impossible de satisfaire aux conditions particulières qui se rapportent à la surface de séparation, si, à la considération du mouvement simple donné dans le premier système, on ne joignait celle des deux autres mouvements dont nous venons de parler. Cela posé, les ondes planes qui caractériseront le mouvement donné, ces ondes qui, par hypothèse, s'approcheront de la surface de séparation, et viendront en quelque sorte tomber sur cette surface, seront appelées *ondes incidentes*. Au contraire, les ondes planes qui distingueront les deux autres mouvements propagés, l'un dans le premier système de molécules, l'autre dans le second système, seront les *ondes réfléchies* et les *ondes réfractées*. Ces deux derniers mouvements pourront être désignés eux-mêmes sous les noms de *mouvements réfléchis* et *réfractés*, et la surface de

séparation sous le nom de *surface réfléchissante* ou *réfringente*. D'ailleurs les conditions relatives à cette surface se réduiront généralement à des relations qui devront subsister, pour tous ses points, entre les variables qui exprimeront les déplacements moléculaires dans les ondes incidentes réfléchies et réfractées, ou entre les dérivées de ces mêmes variables. Donc ces conditions se trouveront exprimées par des équations dans lesquelles les seules quantités variables seront les arguments et les modules des trois mouvements simples ci-dessus mentionnés. Il y a plus : puisqu'il est ici question de mouvements infiniment petits, les équations de condition pourront être supposées linéaires, aussi bien que les équations du mouvement de chaque système, et remplacées par d'autres équations linéaires de même forme entre les variables imaginaires dont les déplacements des molécules seront les parties réelles. Alors, dans chaque équation de condition, les trois espèces de termes, relatifs aux trois mouvements simples, se trouveront combinés par voie d'addition, et seront réductibles aux produits de trois constantes imaginaires par trois exponentielles qui offriront pour base la base même des logarithmes népériens, et pour exposants imaginaires trois fonctions linéaires du temps et des coordonnées sans terme constant.

Concevons maintenant que l'on fasse coïncider l'un des plans coordonnés avec la surface réfléchissante. Pour tous les points de cette surface, les trois exposants imaginaires, dont on vient de parler, se réduiront à trois fonctions linéaires des deux coordonnées mesurées sur cette surface, et du temps, par conséquent à trois fonctions linéaires de trois variables indépendantes. D'ailleurs, chaque équation de condition devra subsister, quelles que soient les valeurs attribuées à ces trois variables indépendantes; et, en supposant nulles deux d'entre elles, on rendra les trois exposants imaginaires proportionnels à la troisième. Enfin, la somme de trois ou de plusieurs exponentielles dont les exposants sont proportionnels à une seule et même variable, ou bien encore, la somme des produits de ces exponentielles par des facteurs constants, ne peut devenir indépendante de la variable dont il



s'agit, à moins que les coefficients de cette variable dans les diverses exponentielles ne soient tous égaux entre eux. Donc, chacune des trois variables indépendantes, relatives aux mouvements des molécules que renferme la surface réfléchissante, devra, dans les trois fonctions linéaires ci-dessus mentionnées, se trouver multipliée par le même coefficient, et, pour tous les points de cette surface, les trois fonctions linéaires deviendront égales entre elles, ou, en d'autres termes, les trois exposants imaginaires des exponentielles relatives aux trois mouvements simples deviendront égaux. Or, les coefficients de  $\sqrt{-1}$  dans ces exposants, et leurs parties réelles, seront précisément les arguments des trois mouvements simples et les exposants de leurs modules. Donc, en vertu des équations de condition relatives à la surface réfléchissante, les trois mouvements simples devront, pour tous les points de cette surface, et quelles que soient les valeurs attribuées aux trois variables qui resteront indépendantes, offrir des arguments égaux et des modules égaux. Il nous reste à examiner quelles seront les conséquences de cette double égalité.

D'abord, le temps étant l'une des trois variables indépendantes, son coefficient devra rester le même dans les arguments des trois mouvements simples. Donc, le rapport du nombre  $2\pi$  à ce coefficient, ou la durée des vibrations moléculaires, mesurée parallèlement à un axe fixe, restera la même dans les ondes incidentes, réfléchies et réfractées. De plus, puisqu'on obtient, pour chaque mouvement simple, l'équation du second plan invariable, en égalant à zéro la somme des termes proportionnels aux coordonnées dans l'argument, et que cette somme devra, en chaque point de la surface réfléchissante, conserver encore la même valeur pour les trois mouvements dont il s'agit, il est clair que, pour tous les trois, les points communs à la surface réfléchissante et au second plan invariable seront les mêmes. En d'autres termes, la trace du second plan invariable sur la surface réfléchissante demeurera fixe, lorsqu'on passera du mouvement donné au mouvement réfléchi ou réfracté, et coïncidera toujours avec une droite unique parallèle aux plans de toutes les ondes, c'est-à-dire aux plans qui

termineront toutes les ondes incidentes, réfléchies et réfractées. Si par un point de cette droite on élève des perpendiculaires aux plans des trois espèces d'ondes, ces perpendiculaires formeront avec la normale à la surface réfléchissante des angles égaux à ceux que forment les plans des ondes avec la surface elle-même, et se trouveront d'ailleurs comprises dans un seul plan normal à la surface. Les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction seront les angles aigus formés par les perpendiculaires dont il s'agit avec la normale à la surface réfléchissante, ou, en d'autres termes, par les plans des trois espèces d'ondes avec la surface elle-même. Le plan unique qui renfermera les trois perpendiculaires et les angles formés par elles avec la normale à la surface réfléchissante pourra être nommé à volonté le *plan d'incidence*, ou de *réflexion* ou de *réfraction*.

Si, dans les remarques précédentes, on substitue aux arguments des trois mouvements simples les exposants de leurs modules, on reconnaîtra immédiatement : 1° que le coefficient du temps, dans l'exposant du module, reste le même quand on passe du mouvement donné au mouvement réfléchi ou réfracté; 2° que, dans ce passage, les points communs à la surface réfléchissante et au troisième plan invariable restent les mêmes. Au surplus, il arrive souvent, dans les questions de Physique mathématique, que le troisième plan invariable se confond avec la surface réfléchissante.

Le coefficient du temps dans l'exposant de l'exponentielle imaginaire qui caractérise un mouvement simple se trouve généralement lié par une certaine équation aux coefficients des trois coordonnées dans ce même exposant. Lorsque le système donné est du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, l'équation dont il s'agit ne renferme que le coefficient du temps et la somme des carrés des coefficients des trois coordonnées. C'est du moins ce qu'il est facile de démontrer dans le cas où le système donné admet des mouvements simples pour lesquels les parties réelles des quatre coefficients s'évanouissent. Alors, en effet, la somme des carrés des coefficients des trois coordonnées, prise en signe con-



taire, a précisément pour racine carrée le rapport du nombre  $2\pi$  à l'épaisseur d'une onde plane, et pour que le mouvement se propage de la même manière en tous sens, il est nécessaire que cette épaisseur dépende uniquement de la durée des vibrations, ou, ce qui revient au même, du coefficient du temps.

Revenons aux deux systèmes de molécules que nous considérons tout à l'heure. Si, en prenant pour un des plans coordonnés la surface réfléchissante, on prend pour un des axes coordonnés la droite d'intersection de cette surface et du second plan invariable, la coordonnée mesurée sur cette droite disparaîtra de chaque argument, et les deux autres coordonnées, mesurées sur deux perpendiculaires à cette droite, dont l'une sera la normale à la surface réfléchissante, l'autre étant la trace du plan d'incidence sur cette surface, auront pour coefficients deux quantités proportionnelles aux cosinus et sinus de l'angle d'incidence, ou de réflexion, ou de réfraction, le rapport du cosinus au coefficient de l'une ou du sinus au coefficient de l'autre étant égal, au signe près, à la racine carrée de la somme des carrés des deux coefficients. Donc le premier et le second coefficient seront les produits du cosinus et du sinus par cette racine carrée, qui représente, dans l'argument, le coefficient de la distance d'une molécule au second plan invariable, et a pour mesure le rapport du nombre  $2\pi$  à l'épaisseur d'une onde plane. Le premier et le second coefficient seront donc les produits du nombre  $2\pi$  par les rapports du cosinus et du sinus à l'épaisseur d'une onde plane. D'ailleurs, le second coefficient qui appartient, dans l'argument, à une coordonnée mesurée dans le plan de la surface réfléchissante, devra conserver la même valeur, quand on passera du mouvement simple donné au mouvement réfléchi, ou au mouvement réfracté. Donc le rapport entre le sinus d'incidence, c'est-à-dire le sinus de l'angle d'incidence, et l'épaisseur d'une onde incidente, sera le même que le rapport entre le sinus de réflexion et l'épaisseur d'une onde réfléchie, le même aussi que le rapport entre le sinus de réfraction et l'épaisseur d'une onde réfractée.

Supposons maintenant que le premier système de molécules soit du

nombre de ceux où la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, et pour lesquels les coefficients des coordonnées, dans l'exposant de l'exponentielle imaginaire qui caractérise un mouvement simple, fournissent des carrés dont la somme dépend uniquement du coefficient du temps. Si la partie réelle de ce coefficient s'évanouit, la somme dont il s'agit dépendra uniquement de la durée des vibrations moléculaires. Si, cette durée restant la même, on passe d'un mouvement simple à un autre dans lequel deux coordonnées conservent les mêmes coefficients, alors, pour que les carrés des coefficients des trois coordonnées offrent une somme invariable, il faudra que le coefficient de la troisième coordonnée reste le même, au signe près. Or, c'est précisément ce qui arrive lorsque le mouvement simple donné se trouve réfléchi par la surface plane qui sépare le premier système du second, et que l'on suppose la troisième coordonnée mesurée sur la normale à la surface réfléchissante. Donc, si le premier système est du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, non seulement l'épaisseur des ondes réfléchies sera la même que celle des ondes incidentes, mais de plus, l'angle de réflexion sera égal à l'angle d'incidence. Quant aux ondes réfractées, qui se propagent à partir de la surface réfléchissante dans le second système de molécules, elles n'offriront pas, en général, la même épaisseur que les ondes incidentes. Mais, d'après ce qu'on a dit, le rapport entre l'épaisseur des ondes incidentes et l'épaisseur des ondes réfractées sera toujours égal au rapport entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction. D'ailleurs, ce rapport deviendra constant, c'est-à-dire indépendant de l'angle d'incidence, si le second système de molécules est, comme le premier, du nombre de ceux dans lesquels la propagation du mouvement s'effectue de la même manière en tous sens, et si, d'ailleurs, chacun des mouvements simples qui répondent aux ondes incidentes, réfléchies, réfractées, offre l'unité pour module. Ces lois générales de la réflexion et de la réfraction des ondes planes, dans les mouvements simples, sont, comme on le voit, indépendantes des formes particulières que peuvent prendre les équations de condition



qui se rapportent à la surface réfléchissante. La démonstration précédente de ces lois générales repose sur une analyse entièrement conforme à la nature des faits, et montre pourquoi elles subsistent dans un grand nombre de questions diverses où les démonstrations qu'on en donnait doivent maintenant paraître peu rigoureuses. Ainsi, par exemple, si les premières de ces lois fournissent immédiatement l'explication des phénomènes que présente la réflexion des ondes sonores ou liquides, élémentaires ou composées, par les murs ou les parois d'une salle ou d'un bassin rectangulaire, ce n'est point une raison d'admettre, comme on le faisait en théorie, que ces murs ou ces parois sont des corps dénués de toute élasticité, en sorte que les molécules situées à leurs surfaces ne cèdent nullement à l'action des molécules contiguës de l'air ou de l'eau. On doit supposer, au contraire, que chaque mouvement simple, propagé dans l'air ou dans l'eau, donne naissance, d'une part, à un mouvement réfléchi qui reste sensible pour l'observateur; d'autre part, à un mouvement réfracté qui se propage dans les murs de la salle ou les parois du bassin rectangulaire, mais qui est assez faible pour échapper à nos sens, et décroît très rapidement en pénétrant dans la profondeur de ces murs ou de ces parois, de manière à s'éteindre presque entièrement à une profondeur finie.

Nous terminerons cette première Partie de notre Mémoire par une remarque importante. Lorsqu'un mouvement vibratoire est produit en un point donné d'un système de molécules, ce mouvement se propage autour de ce point avec une vitesse de propagation qui peut être ou n'être pas la même dans les diverses directions; et de cette propagation résultent des ondes terminées, ou par des surfaces sphériques, ou plus généralement par des surfaces courbes dont la forme dépend de celle des équations du mouvement. Mais, à une grande distance du point donné, ou du centre des vibrations, une semblable surface, considérée dans une petite étendue, se confond sensiblement avec le plan tangent. Il y a plus : pour obtenir une des surfaces dont il s'agit, il suffit de concevoir qu'une onde plane ou élémentaire, qui renferme au premier instant le point d'abord choisi pour centre de vibration, se

propage dans le système que l'on considère; puis de chercher quelles sont les diverses positions que pourra prendre, au bout d'un temps donné, le plan qui terminera cette onde élémentaire, eu égard aux diverses positions qu'il pouvait avoir à l'origine du mouvement et lorsqu'il passait par le centre de vibrations. La surface demandée sera la surface enveloppée par le plan dont il s'agit, c'est-à-dire la surface qu'il touche dans ses diverses positions. C'est ainsi que l'on peut, en général, déduire, des lois relatives aux ondes planes, la forme et l'équation de la *surface des ondes*. Lorsque, dans un système de molécules, la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, la surface des ondes est sphérique, et le rayon mené du centre à un point de la surface se confond avec la perpendiculaire au plan de l'onde élémentaire qui passe par ce point. Il n'en serait plus de même si la propagation du mouvement cessait d'être la même en tous sens. Alors il ne faudrait pas confondre la droite menée par un point donné, perpendiculairement au plan qui termine une onde élémentaire, avec le rayon mené du centre des vibrations à ce point considéré comme faisant partie de la surface des ondes.

A la suite de cette première Partie de son Mémoire, M. Augustin Cauchy a indiqué rapidement quelques-uns des résultats qui feront l'objet de la seconde Partie, spécialement relative à la Théorie de la lumière. Parmi ces résultats on peut citer :

1° Des formules générales qui expliquent et représentent les phénomènes de la polarisation elliptique, produite par la réflexion de la lumière à la surface des métaux, et qui s'accordent avec les expériences des physiciens;

2° Une nouvelle loi de réfraction qui doit être substituée à la loi connue de Descartes, lorsque le corps réfringent absorbe plus ou moins complètement la lumière;

3° La diminution d'intensité dans la lumière des anneaux colorés, et le déplacement de ces anneaux produit par la substitution d'un miroir métallique à un miroir de verre.



## 25.

DEUXIÈME PARTIE. — *Application des principes exposés dans la première Partie à la théorie de la lumière.*

C. R., t. VIII, p. 7 (7 janvier 1839). — Suite.

Les principes que nous avons exposés dans la première Partie de notre Mémoire peuvent être facilement appliqués à la théorie de la lumière. En effet, dans le système des ondulations, les phénomènes lumineux résultent de la propagation des mouvements vibratoires produits à un instant donné en un ou plusieurs points d'un fluide lumineux ou éther, dont les molécules, répandues dans le vide et dans les corps eux-mêmes, agissent les unes sur les autres à de très petites distances. La distribution de ces molécules dans un milieu donné peut varier d'ailleurs avec la nature de ce milieu. Cette distribution, autour d'un point donné, est, dans un milieu homogène, supposée indépendante de la position du point que l'on considère; mais elle peut n'être pas la même dans les différentes directions: ainsi, en particulier, la condensation ou dilatation linéaire du fluide éthéré peut varier, même dans un milieu homogène, lorsqu'on passe d'une direction à une autre. Cela posé, considérons un système de molécules d'éther renfermées dans un milieu homogène. Les vibrations excitées à un instant donné en un point de ce système se propageront autour de ce point, et donneront naissance à des ondes terminées par des surfaces qui seront sphériques si la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. A des distances considérables du centre de vibration, chacune des surfaces dont il s'agit, prise dans une étendue finie, se confondra sensiblement avec son plan tangent, et les vibrations des diverses molécules qu'elle renfermera seront sensiblement les mêmes au même instant. D'ailleurs il est naturel de penser que, dans le mouvement vibratoire, l'œil appréciera surtout la direction de la surface des ondes, c'est-à-dire de son plan tangent, ou, ce

qui revient au même, la direction de la normale à cette surface, et que nous serons portés à regarder le centre des vibrations comme situé sur cette normale. Toutefois on ne doit pas confondre cette normale avec ce qu'on est convenu d'appeler le rayon lumineux, dans le système des ondulations. En effet, suivant la définition adoptée par Huygens et Fresnel, la *direction du rayon lumineux*, en chaque point de la surface des ondes, n'est autre chose que la direction du rayon vecteur mené du centre des vibrations au point dont il s'agit. Or ce rayon vecteur ne sera généralement normal à la surface des ondes que dans le cas où cette surface deviendra sphérique; ce qui arrivera nécessairement si, dans le milieu donné, la lumière se propage en tous sens suivant les mêmes lois.

Il est bon d'observer que, parmi les lois des phénomènes lumineux, les plus importantes sont les lois générales qui subsistent, quelque faible que soit l'intensité de la lumière. Pour obtenir ces lois, il suffit de considérer dans l'éther des vibrations dont les amplitudes soient infiniment petites, et par conséquent des mouvements infiniment petits. Les ondes que ces mouvements produiront seront d'ailleurs terminées par des surfaces qui, à de grandes distances des centres de vibration, pourront, ainsi qu'on l'a dit, être, sans erreur sensible, considérées comme des surfaces planes.

Parmi les mouvements infiniment petits qui produisent des ondes terminées par des surfaces planes, on doit surtout distinguer ceux qui ont été désignés, dans la première Partie de ce Mémoire, sous le nom de *mouvements simples ou élémentaires*, et qui, superposés les uns aux autres en nombre fini ou infini, peuvent donner naissance à toutes sortes de mouvements infiniment petits. Dans chaque mouvement simple, les déplacements d'une molécule d'éther, mesurés parallèlement à trois axes coordonnés rectangulaires, ou même parallèlement à un axe fixe quelconque, seront les parties réelles d'expressions imaginaires toutes proportionnelles à une exponentielle qui aura pour base la base des logarithmes népériens, et pour exposant une fonction linéaire du temps et des coordonnées sans terme constant. Le coeffi-



cient de  $\sqrt{-1}$  dans cet exposant sera l'*argument* du mouvement simple; et, en remplaçant ce même exposant par sa partie réelle, on réduira l'exponentielle dont il s'agit à ce que nous appelons le *module* du mouvement simple. Cela posé, le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à un axe fixe, sera le produit du module multiplié par un coefficient constant et du cosinus de l'angle qu'on obtient en ajoutant à l'argument un paramètre constant, désigné sous le nom de *paramètre angulaire*. Dans la théorie de la lumière, le module d'un mouvement simple est indépendant du temps; d'où il résulte que les courbes décrites par les diverses molécules sont des courbes fermées, rentrantes sur elles-mêmes, et comprises dans des plans parallèles à un *plan invariable* mené par l'origine des coordonnées. Le temps qu'emploie une molécule à parcourir la courbe qu'elle décrit est la *durée* d'une vibration moléculaire, et cette durée, de laquelle dépend la nature de la couleur, a pour mesure le rapport du nombre  $2\pi$  au coefficient du temps dans l'argument. De plus, le déplacement moléculaire, mesuré parallèlement à un axe fixe, s'évanouit à un instant donné pour toutes les molécules renfermées dans des plans équidistants, tous parallèles à un *second plan invariable*; et ces plans équidistants divisent le système des molécules éthérées en tranches qui, prises consécutivement et deux à deux, composent ce qu'on appelle des *ondes lumineuses planes*, la double épaisseur d'une tranche étant l'*épaisseur d'une onde*, ou la *longueur d'une ondulation lumineuse*. Ces ondes se propagent dans le système des molécules éthérées avec une *vitesse de propagation* équivalente au rapport entre la longueur d'une ondulation et la durée d'une vibration lumineuse. Enfin, le module du mouvement simple peut être dépendant ou indépendant des coordonnées. Dans le premier cas, il se réduit à l'unité, et le milieu dans lequel vibre l'éther est un milieu *transparent* qui n'absorbe pas la lumière. Alors aussi le mouvement simple devient un mouvement *elliptique*, dans lequel toutes les molécules d'éther décrivent des ellipses pareilles les unes aux autres, et l'*amplitude* d'une vibration moléculaire est le grand axe de l'ellipse décrite par chaque molécule. Dans certains cas cette ellipse se réduit à un

cercle ou à une droite, et par suite, le mouvement elliptique se transforme en un mouvement *circulaire* ou *rectiligne*, l'amplitude des vibrations étant le diamètre du cercle qu'une molécule décrit, ou la portion de droite qu'elle parcourt. Lorsque le module du mouvement simple, au lieu de se réduire à l'unité, restera variable avec les coordonnées, les courbes décrites par les diverses molécules cesseront, en général, d'être des ellipses, et sans aucun doute, les dimensions de ces courbes décroîtront indéfiniment, tandis que l'on s'éloignera dans un certain sens d'un *troisième plan invariable*. Alors le milieu qui renfermera les molécules d'éther sera *opaque*, ou du moins il *absorbera* plus ou moins complètement la lumière. Le troisième plan invariable pourra n'être autre chose que la surface même de ce milieu, ou de ce corps opaque, supposée plane; et, comme l'exposant du module sera proportionnel à la distance d'une molécule à cette surface, il est clair que les déplacements *maxima* des molécules décroîtront en progression géométrique, tandis que les distances à la surface croîtront en progression arithmétique.

Concevons maintenant que le milieu qui renferme les molécules éthérées soit du nombre de ceux dans lesquels la lumière se propage en tous sens suivant les mêmes lois. Si d'ailleurs ce milieu est transparent et n'absorbe pas la lumière, alors, non seulement la vitesse de propagation des ondes planes sera indépendante de la direction des plans qui les termineront, ou, ce qui revient au même, de la direction du second plan invariable, et par suite, la surface des ondes étant une surface sphérique, la direction du rayon lumineux sera normale à cette surface; mais, de plus, le premier plan invariable se confondra toujours avec le second, et, par conséquent, les vibrations des molécules éthérées resteront comprises dans des plans parallèles à ceux qui terminent les ondes planes, ou, ce qui revient au même, dans des plans perpendiculaires aux directions des rayons lumineux.

Nous dirons qu'un rayon lumineux est un *rayon simple* lorsque les vibrations des molécules éthérées seront celles que présente un mouvement simple. Ce qui constitue le mode de *polarisation* d'un rayon simple



c'est la nature de la courbe décrite par chaque molécule. Dans un milieu parfaitement transparent et qui, par conséquent, n'absorbe pas la lumière, cette courbe sera toujours une ellipse, un cercle ou une droite, et la polarisation du rayon simple sera *elliptique* dans le premier cas, *circulaire* dans le second, *rectiligne* dans le troisième. Au reste, ces trois modes de polarisation peuvent aussi se présenter dans un milieu qui absorbe la lumière, lorsque la ligne décrite par chaque molécule est renfermée dans un plan parallèle au troisième plan invariable, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque le troisième plan invariable se confond avec le premier. Dans le cas particulier où la polarisation d'un rayon lumineux est rectiligne, le *plan de ce rayon* et son *plan de polarisation* sont deux plans rectangulaires entre eux qui passent par la direction du rayon, et dont le premier contient en outre les directions des vibrations moléculaires. Alors aussi, on dit que le rayon est *renfermé* dans le premier plan et *polarisé* dans le second. Cela posé, on reconnaîtra sans peine que, dans un milieu parfaitement transparent, et où la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, tout rayon simple polarisé, soit elliptiquement, soit circulairement, peut être considéré comme résultant de la superposition de deux rayons simples polarisés en ligne droite et renfermés dans deux plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Pour plus de précision, nous distinguerons dans un rayon lumineux : 1° sa direction, c'est-à-dire la droite sur laquelle se trouvaient primitivement situées les molécules dont il se compose; 2° sa forme qui, d'abord rectiligne, varie avec le temps, et n'est autre que la forme de la courbe tracée à chaque instant dans l'espace par le système de ces molécules. Dans un rayon simple, polarisé circulairement ou elliptiquement, la courbe dont il s'agit sera une espèce d'*hélice* ou de spirale à double courbure. Mais cette hélice ou spirale se changera en une *courbe plane* si le rayon est polarisé en ligne droite, et pour cette raison nous dirons alors que le rayon donné est un *rayon plan*. Dans un semblable rayon, considéré à une époque quelconque du mouvement, quelques molécules conserveront leurs positions primitives,

c'est-à-dire les positions qu'elles occupaient dans l'état d'équilibre; les autres s'en écarteront à droite et à gauche; et le rayon, semblable à une corde vibrante, prendra la forme d'une ligne sinieuse, composée d'ares alternativement situés de part et d'autre de sa direction primitive. Les *nœuds du rayon*, comme ceux d'une corde vibrante, seront, à chaque instant, les points où les molécules conserveront ou reprendront leurs positions initiales. Seulement ces nœuds, qui sont fixes dans une corde vibrante, se déplaceront d'un instant à l'autre dans le rayon lumineux. Ces nœuds seront d'ailleurs de deux espèces, chaque nœud étant de première ou de seconde espèce suivant que les molécules desquelles il s'approchera, en se déplaçant dans l'espace, se trouveront situés d'un côté ou de l'autre par rapport à la direction primitive du rayon. Si le milieu donné est du nombre de ceux dans lesquels la propagation de la lumière se fait en tous sens suivant les mêmes lois, et si d'ailleurs ce milieu est parfaitement transparent, l'épaisseur d'une onde plane, ou la longueur d'une ondulation lumineuse, ne sera autre chose que la distance entre deux nœuds de même espèce, et la vitesse de propagation avec laquelle chaque nœud se déplacera, en passant d'une molécule à une autre, sera ce qu'on nomme la *vitesse de propagation de la lumière*. Si le milieu donné ne remplit pas les conditions énoncées, l'épaisseur d'une onde plane ne sera plus la distance entre deux nœuds de même espèce du rayon lumineux, mais la projection de cette distance sur une droite perpendiculaire aux plans des ondes; alors aussi la vitesse de propagation des ondes planes restera distincte de la vitesse avec laquelle se déplacera chaque nœud du rayon, et sera la projection de cette dernière vitesse sur la droite dont il s'agit.

Puisque, dans les corps parfaitement transparents, le module d'un mouvement simple se réduit à l'unité, il est clair que, dans ces corps, le déplacement d'une molécule éthérée, produit par un mouvement simple, et mesuré parallèlement à un axe fixe, a pour expression l'amplitude des vibrations parallèles à cet axe multipliée par le cosinus de l'angle variable que l'on obtient en ajoutant à l'argument du mouvement simple un paramètre constant. Ce paramètre, que nous avons





nommé *paramètre angulaire*, peut changer ou non de valeur avec la direction de l'axe fixe, suivant que le rayon donné est ou n'est pas polarisé en ligne droite. Si l'on considère un rayon simple quelconque, dont la polarisation soit elliptique, ou circulaire, ou rectiligne, comme résultant de la superposition de deux autres rayons simples polarisés en ligne droite dans deux plans rectangulaires entre eux, l'amplitude des vibrations, ainsi que le paramètre angulaire, changera généralement de valeur quand on passera d'un rayon simple à l'autre; et ce paramètre, pour chacun des deux rayons composants, sera le complément d'un angle mesuré par le produit de deux facteurs, dont l'un représentera la distance de l'un des nœuds du rayon au second plan invariable, tandis que l'autre facteur représentera, dans l'argument du mouvement simple, le coefficient de la distance d'une molécule au même plan. Les deux paramètres angulaires, relatifs aux deux rayons composants, devront être égaux ou offrir pour différence un multiple du nombre  $\pi$ , si le rayon résultant est polarisé en ligne droite. Alors les deux rayons composants offriront les mêmes nœuds, les nœuds de première espèce de l'un pouvant coïncider avec les nœuds de première ou de seconde espèce de l'autre. Si d'ailleurs on suppose que, dans le milieu donné, la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, le plan de polarisation du rayon résultant formera, avec les plans de polarisation des rayons composants, des angles dont les tangentes trigonométriques seront les rapports direct et inverse de l'amplitude des vibrations de l'un à l'amplitude des vibrations de l'autre. Le rayon résultant sera polarisé circulairement si les amplitudes des vibrations moléculaires sont les mêmes dans les deux rayons composants, et si de plus les paramètres angulaires diffèrent, dans ces deux rayons, ou d'un angle droit représenté par  $\frac{1}{2}\pi$ , ou d'un multiple de cet angle, en sorte que la distance entre deux nœuds consécutifs, appartenant à l'un et à l'autre rayon, soit précisément le quart de la longueur d'une ondulation lumineuse.

Concevons à présent que des rayons simples, en nombre quelconque fini ou infini, soient superposés les uns aux autres. Cette superposition

donnera naissance à un rayon résultant qui cessera généralement d'offrir, même dans un milieu parfaitement transparent, la polarisation elliptique, ou circulaire, ou rectiligne. On doit toutefois excepter certains cas particuliers où le mode de polarisation du rayon résultant sera facile à prévoir. Ainsi, par exemple, si les rayons composants sont tous polarisés en ligne droite et renfermés dans un même plan, les vibrations des molécules éthérées, dans le rayon résultant, seront constamment dirigées suivant des droites que renfermera encore le plan dont il s'agit, et par suite le rayon résultant, sans être un rayon simple, pourra encore être désigné sous le nom de *rayon plan*, ou polarisé en ligne droite.

## 26.

C. R., t. VIII, p. 39 (14 janvier 1839). — Suite.

Considérons maintenant deux milieux séparés l'un de l'autre par une surface plane. Si l'on fait tomber sur cette surface un système d'ondes planes, correspondantes à un mouvement simple de l'éther, ou, en d'autres termes, un rayon simple, alors, pour que les conditions relatives à la surface puissent être remplies, on sera obligé d'admettre la coexistence de trois systèmes d'ondes en supposant propagées dans le premier milieu, outre les *ondes incidentes*, d'autres ondes que l'on nomme *réfléchies*, et dans le second milieu des ondes que l'on nomme *réfractées*. Ainsi un rayon simple venant à tomber sur la surface *réfléchissante* ou *réfringente*, c'est-à-dire sur la surface de séparation des deux milieux, la *réflexion* et la *réfraction* produiront deux nouveaux rayons, l'un réfléchi, l'autre réfracté, dont chacun sera simple ainsi que le rayon incident. Ces deux nouveaux rayons pourront d'ailleurs être censés partir du point où le rayon incident rencontre la surface réfléchissante. Les *angles d'incidence*, de *réflexion* et de *réfraction* ne seront autre chose que les angles aigus formés par les plans des ondes



incidentes, réfléchies et réfractées avec la surface réfléchissante, ou bien encore les angles aigus formés par les perpendiculaires à ces plans avec la normale à la surface. D'après ce qui a été dit dans la première Partie du Mémoire, la durée des vibrations moléculaires, par conséquent la couleur, sera la même dans les trois rayons, et les plans qui termineront les trois espèces d'ondes seront parallèles à une droite unique tracée sur la surface réfléchissante. Le plan mené perpendiculairement à cette droite, par le point où les trois rayons rencontrent la surface, sera celui qu'on nomme à volonté le *plan d'incidence*, ou de *réflexion*, ou de *réfraction*. Enfin, les sinus des trois angles d'incidence, de réflexion et de réfraction, ou ce qu'on appelle, pour abrégé, le *sinus d'incidence*, le *sinus de réflexion* et le *sinus de réfraction*, seront proportionnels aux épaisseurs des ondes incidentes, réfléchies et réfractées. Par suite, si l'on nomme *indice de réflexion* et *indice de réfraction* les rapports qu'on obtient en divisant l'épaisseur des ondes incidentes par les épaisseurs des ondes réfléchies et réfractées, le rapport du sinus d'incidence au sinus de réflexion sera toujours équivalent à l'indice de réflexion, et pareillement le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction sera toujours équivalent à l'indice de réfraction.

Pour simplifier l'énoncé des propositions diverses, nous désignerons désormais sous le nom de *milieu isophane* un milieu dans lequel la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, quel que soit d'ailleurs le degré de transparence de ce milieu qui pourrait absorber plus ou moins complètement la lumière et se transformer, sans cesser d'être isophane, en ce qu'on appelle un *corps opaque*. Lorsqu'un milieu sera isophane et parfaitement transparent, la surface des ondes y deviendra sphérique, conformément à la remarque faite dans la première Partie de ce Mémoire, et l'épaisseur des ondes planes propagées dans ce milieu dépendra uniquement de la durée des vibrations moléculaires, ou, ce qui revient au même, de la nature de la couleur. Cela posé, étant donnés deux milieux que sépare une surface réfléchissante, et un rayon simple qui, dans le premier milieu, tombe sur cette surface, si ce premier milieu est isophane et

parfaitement transparent, l'épaisseur des ondes réfléchies sera la même que celle des ondes incidentes. Donc alors, l'indice de réflexion se réduisant à l'unité, et le sinus de réflexion au sinus d'incidence, l'angle de réflexion sera égal à l'angle d'incidence. Si le second milieu est lui-même, comme le premier, isophane et parfaitement transparent, l'épaisseur des ondes réfractées sera constante, comme celle des ondes incidentes, c'est-à-dire indépendante de l'angle d'incidence, du moins pour toutes les incidences propres à fournir un rayon réfracté qui se propage dans le second milieu sans s'affaiblir. Donc alors l'indice de réfraction sera constant, ainsi que le rapport entre le sinus de réfraction et le sinus d'incidence; en sorte que la loi de réfraction, donnée par Descartes, se trouvera vérifiée. Mais l'angle de réflexion cessera d'être égal à l'angle d'incidence si le premier milieu est du nombre de ceux dans lesquels la lumière ne se propage pas en tous sens suivant les mêmes lois; et, si l'un des milieux donnés est de ce nombre, ou si l'un d'eux absorbe plus ou moins complètement la lumière, la loi de Descartes cessera de subsister.

Lorsqu'un milieu transparent n'est point isophane, non seulement l'épaisseur des ondes propagées dans ce milieu dépend de la direction des plans qui les terminent, ou, ce qui revient au même, de la direction du second plan invariable; mais, en outre, à une direction donnée de ce dernier plan correspondent toujours deux systèmes d'ondes planes qui offrent des épaisseurs différentes, et par suite des vitesses de propagation différentes. Si l'on donne, non plus la direction du second plan invariable, mais sa trace sur un plan fixe, avec le rapport entre le sinus de son inclinaison sur le plan fixe et l'épaisseur d'une onde plane, à cette trace et à ce rapport correspondront quatre systèmes d'ondes planes et quatre positions du second plan invariable qui sera, pour deux de ces systèmes, incliné diversement sur le plan fixe, mais dans un même sens, et pour les deux autres en sens contraire. Nous dirons que les quatre systèmes d'ondes dont il s'agit sont *conjugués* entre eux, ainsi que les quatre rayons lumineux correspondant à ces quatre systèmes. Si, le plan fixe étant une surface réfléchissante, on considère



l'un des quatre rayons comme rayon incident, alors, des trois autres rayons conjugués, deux correspondront à des ondes inclinées sur la surface dans un autre sens que les ondes incidentes et rempliront la condition à laquelle doit satisfaire le rayon réfléchi, savoir, que l'on obtienne le même rapport en divisant le sinus d'incidence par l'épaisseur des ondes incidentes, ou le sinus de réflexion par l'épaisseur des ondes réfléchies. Concevons pareillement que, le plan fixe étant considéré comme une surface réfringente qui sépare le milieu donné d'un autre, on fasse dans cet autre milieu tomber un rayon sur cette surface. Si l'on cherche à déterminer le rayon réfracté par la condition que le rapport entre le sinus de réfraction et l'épaisseur des ondes réfractées devienne équivalent au rapport entre le sinus d'incidence et l'épaisseur des ondes incidentes, on trouvera que cette condition peut être remplie, dans le milieu donné, par deux rayons conjugués l'un à l'autre et inclinés dans le même sens sur la surface réfringente. De ces considérations il résulte que, si une surface réfléchissante et réfringente sépare l'un de l'autre deux milieux transparents qui ne soient point isophanes, on obtiendra en général pour chaque rayon incident deux rayons réfléchis et deux rayons réfractés. C'est ce que confirme l'expérience et l'on donne, pour cette raison, aux milieux qui ne sont point isophanes, le nom de *milieux doublement réfringents*. Lorsque deux milieux doublement réfringents sont séparés l'un de l'autre par une surface plane, on peut imaginer quatre systèmes d'ondes planes propagées dans le premier milieu et quatre systèmes d'ondes planes propagées dans le second milieu, de telle sorte que le sinus de l'inclinaison d'une onde plane sur la surface de séparation soit toujours à l'épaisseur de cette onde dans un rapport donné. A ces huit systèmes d'ondes planes correspondent huit rayons conjugués quatre à quatre. Or, d'après ce qu'on vient de dire, il est clair que, si l'on prend un de ces huit rayons pour rayon incident, deux autres de ces rayons représenteront les deux rayons réfléchis, et deux autres les deux rayons réfractés; les deux premiers étant propagés dans le même milieu que le rayon incident, et les deux derniers étant les seuls qui, dans l'autre milieu, répondent à des

ondes dont les plans soient inclinés sur la surface de séparation dans le même sens que les ondes incidentes. Si l'un des milieux donnés devient isophane, les quatre rayons conjugués, relatifs à ce milieu, se réduiront à deux rayons qui formeront, avec la normale à la surface de séparation, des angles égaux; et l'on déduira immédiatement de la proposition que nous venons d'énoncer les règles établies par Malus et par M. Biot pour la détermination des rayons réfléchis par la seconde surface des cristaux à un et à deux axes optiques. La même proposition montre comment ces règles doivent être modifiées dans le cas où les milieux donnés sont doués l'un et l'autre de la double réfraction.

Nous avons ici recherché le nombre et les directions des rayons réfléchis et réfractés par la surface de séparation de deux milieux, isophanes ou non isophanes, mais que l'on suppose parfaitement transparents. A la rigueur, il n'existe point de milieu dont la transparence soit parfaite, et dont une couche suffisamment épaisse n'absorbe la lumière avec une énergie plus ou moins grande. Il importe d'apprécier l'influence que cette absorption peut avoir sur les phénomènes de la réflexion ou de la réfraction, et en particulier sur la direction des rayons réfléchis ou réfractés. C'est ce dont nous allons maintenant nous occuper, en supposant d'abord que les milieux donnés sont isophanes, mais que l'un au moins cesse d'être parfaitement transparent.

Ce qui caractérise surtout un mouvement simple, propagé dans un milieu homogène, c'est l'exponentielle imaginaire à laquelle sont proportionnelles les trois variables imaginaires dont les déplacements moléculaires, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, offrent les parties réelles. Cette exponentielle a pour exposant une fonction linéaire des coordonnées et du temps, et, conformément à une remarque faite dans la première Partie de ce Mémoire, les carrés des coefficients des coordonnées, dans l'exposant dont il s'agit, fournissent une somme qui dépend uniquement du coefficient du temps, par conséquent de la durée des vibrations moléculaires, dans le cas où la propagation du mouvement s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois. C'est du moins



ce qu'il est facile de démontrer lorsque les parties réelles des quatre coefficients s'évanouissent. Alors, les coefficients des trois coordonnées offrent des carrés dont la somme, prise en signe contraire, a pour racine carrée le nombre  $2\pi$  à l'épaisseur d'une onde plane. Pour plus de commodité nous donnerons généralement un nom à cette racine carrée, et ce que nous appellerons la *caractéristique d'un mouvement simple* sera une quantité positive, ou une expression imaginaire dont la partie réelle sera positive, et dont le carré, pris en signe contraire, sera équivalent à la somme des carrés des coefficients des trois coordonnées dans l'exposant de l'exponentielle imaginaire qui caractérise le mouvement simple. Nous appellerons encore *caractéristique d'un rayon simple* celle d'un mouvement simple propagé dans l'éther que renferme un milieu homogène. Dans un milieu isophane, et que l'on suppose parfaitement transparent, la caractéristique d'un rayon simple, liée par une certaine équation à la durée des vibrations moléculaires, restera indépendante de la direction du plan de l'onde, et nous admettrons qu'il en est toujours ainsi dans un milieu isophane, quand même ce milieu absorberait la lumière plus ou moins rapidement. Cela posé, concevons qu'une surface réfléchissante et réfringente sépare l'un de l'autre deux milieux isophanes dont le premier soit parfaitement transparent, et qu'un rayon simple tombe sur cette surface dans le premier milieu. Prenons ailleurs pour origine des coordonnées le point de la surface par lequel passent les trois rayons incident, réfléchi, réfracté, et pour axes coordonnés trois droites rectangulaires dont la première coïncide avec la normale à la surface, et la seconde avec la trace du plan d'incidence sur cette surface même. Enfin, supposons que le module du mouvement simple qui produit le rayon incident se réduise à l'unité. L'argument de ce mouvement simple renfermera seulement les deux coordonnées qui se mesurent dans le plan d'incidence ou parallèlement à ce plan, et les coefficients de ces deux coordonnées dans le même argument seront respectivement égaux aux produits de la caractéristique du rayon incident par le cosinus et le sinus de l'angle d'incidence. Si du rayon incident on passe au rayon réfracté, le se-

cond des coefficients dont il s'agit ne variera pas, mais le premier devra être remplacé par la partie réelle d'une constante imaginaire, dont le carré, ajouté au carré du second coefficient, donnera pour somme le carré de la caractéristique du rayon réfracté. Le coefficient de  $\sqrt{-1}$  dans la même constante sera, au signe près, le coefficient de la coordonnée mesurée sur la normale à la surface réfléchissante dans l'exposant du module du mouvement réfracté. Quant à l'indice de réfraction, il ne sera autre chose que la racine carrée positive de la somme des carrés des coefficients des deux coordonnées comprises dans l'argument du mouvement réfracté. Ces principes une fois établis, on reconnaîtra sans peine que l'indice de réfraction sera sensiblement constant, c'est-à-dire sensiblement indépendant de l'angle d'incidence, si le module du mouvement réfracté conserve un exposant très petit, et reste en conséquence peu différent de l'unité lorsqu'on s'éloigne de la surface réfringente à une distance comparable à l'épaisseur d'une onde plane, c'est-à-dire, en d'autres termes, si la lumière n'est pas sensiblement absorbée par une tranche du second milieu qui offre une épaisseur de même ordre que la longueur d'une ondulation lumineuse. Donc alors la loi de réfraction, donnée par Descartes, ne sera pas assez altérée pour que l'altération puisse être indiquée par une expérience directe ayant pour objet de constater la direction du rayon réfracté. Toutefois l'indice de réfraction, devenu variable, pourra se déduire par le calcul des expériences qui seraient relatives à l'absorption de la lumière. Le même indice se déduirait au contraire, comme nous le verrons plus tard, des expériences faites sur le rayon réfléchi, si la lumière, en pénétrant dans le second milieu, était sensiblement absorbée par une tranche d'une épaisseur comparable à l'épaisseur d'une onde plane. Alors aussi la loi de réfraction de Descartes se trouverait sensiblement modifiée, comme le prouve le calcul, et comme on peut aisément le prévoir à l'aide des remarques suivantes.

Il arrive souvent que le second milieu joue le rôle tantôt d'un corps transparent et tantôt d'un corps opaque, suivant la valeur plus ou moins considérable de l'angle d'incidence. Supposons en effet qu'un



rayon incident, qui forme avec la normale à la surface réfléchissante un angle très petit, s'éloigne de cette normale en se réfractant, et se propage dans le second milieu sans s'affaiblir sensiblement à une distance finie de la surface. L'angle d'incidence sera inférieur à l'angle de réfraction, et l'indice de réfraction, inférieur lui-même à l'unité, aura pour mesure le rapport entre la caractéristique du rayon réfracté et la caractéristique du rayon incident. Or, ces deux caractéristiques, ne dépendant que des durées des vibrations moléculaires dans les deux milieux supposés isophanes, seront entre elles dans un rapport constant, quelle que soit l'incidence; et si l'angle d'incidence vient à varier, l'indice de réfraction restera invariable tant qu'il aura ce rapport pour mesure, ou, ce qui revient au même, tant que le second milieu jouera le rôle d'un corps transparent. Mais, l'angle d'incidence croissant de plus en plus, l'angle de réfraction, qui le surpassera toujours, atteindra sa limite, ou l'angle droit, avant que l'angle d'incidence ait atteint la sienne, et lorsque ce dernier angle se transformera en ce qu'on appelle l'angle de réflexion totale. Si l'angle d'incidence devient supérieur à l'angle de réflexion totale, le second milieu jouera le rôle d'un corps opaque, ce qui n'empêchera pas les ondes planes de se propager dans ce second milieu; seulement elles se réfracteront de manière que le mouvement soit insensible à une distance finie de la surface réfléchissante, et il est clair que la direction du rayon réfracté ne pourra plus être déterminée par la règle de Descartes, qui donnerait alors un sinus de réfraction supérieur à l'unité. Il suit d'ailleurs des principes ci-dessus établis que, dans ce cas particulier, le sinus de réfraction restera équivalent à l'unité, et l'angle de réfraction à un angle droit, pour toutes les incidences. Donc, lorsque l'angle d'incidence surpassera l'angle de réflexion totale, les plans des ondes réfractées resteront toujours perpendiculaires à la surface réfléchissante, et l'indice de réfraction, égal au sinus de l'angle d'incidence, sera variable avec cet angle.

Nous venons d'examiner quelle influence l'absorption de la lumière peut avoir, dans les corps isophanes, sur la direction du rayon réfracté. Quant à la direction du rayon réfléchi, ou plutôt des ondes

réfléchies, elle reste, dans les corps isophanes, indépendante de leur pouvoir absorbant. Car, le rayon réfléchi offrant alors la même caractéristique que le rayon incident, il est aisé d'en conclure que l'angle de réflexion équivaut toujours à l'angle d'incidence.

Quant aux milieux qui absorbent la lumière sans être isophanes, ils possèdent généralement, aussi bien que les corps transparents mais non isophanes, la propriété de doubler les rayons lumineux par la réflexion intérieure ou par la réfraction, et peuvent en conséquence être encore désignés sous le nom de milieux *doublement réfringents*. Quelquefois, des deux rayons réfléchis ou réfractés, l'un est absorbé beaucoup plus promptement que l'autre et s'éteint à une petite distance de la surface réfléchissante ou réfringente.

## 27.

C. R., t. VIII, p. 114 (28 janvier 1839). — Suite.

D'après ce qui a été dit précédemment, la caractéristique d'un rayon simple dans un milieu diaphane ne dépendra point de la direction de ce rayon, mais seulement de la nature de la couleur, et, si le rayon se propage sans s'affaiblir d'une manière sensible, sa caractéristique ne sera autre chose que le rapport du nombre  $2z$  à l'épaisseur d'une onde plane. Supposons que, pour une épaisseur donnée, on ait mesuré cette caractéristique dans le vide. Si l'on substitue au vide un milieu isophane quelconque, elle variera dans un certain rapport qui sera réel ou imaginaire, suivant que le milieu isophane sera ou ne sera pas transparent. Cela posé, le coefficient réel ou imaginaire par lequel on devra multiplier la caractéristique mesurée dans le vide, pour obtenir la caractéristique mesurée dans le milieu isophane donné, sera ce que nous appellerons le *coefficient caractéristique* relatif à ce milieu. Si le milieu isophane est transparent, le coefficient caractéristique ne diffé-



ra pas de l'indice de réfraction du rayon que l'on ferait passer du vide dans ce milieu sous une incidence quelconque. Mais, si le milieu isophane donné absorbe de la lumière, le coefficient caractéristique deviendra imaginaire et sa partie réelle représentera l'indice de réfraction d'un rayon passant du vide dans ce milieu sous l'incidence perpendiculaire, tandis que sa partie imaginaire sera le produit de  $\sqrt{-1}$  par le demi-diamètre d'une circonférence représentée, au signe près, par le logarithme népérien du rapport suivant lequel diminue l'amplitude des vibrations moléculaires quand on s'enfonce dans le milieu isophane en parcourant, dans la direction de ce rayon, une distance équivalente à la longueur d'une ondulation mesurée dans le vide.

Au reste, en généralisant la définition du *coefficient caractéristique*, on peut désigner sous ce nom le coefficient par lequel il faudra multiplier la caractéristique d'un rayon, mesurée dans un milieu isophane donné, pour obtenir la caractéristique d'un rayon de la même couleur dans un autre milieu. Il est d'ailleurs naturel d'appliquer à l'argument et au module du coefficient caractéristique ainsi défini les noms d'*argument caractéristique* et de *module caractéristique*.

Revenons à la considération des rayons réfléchis et réfractés par la surface de séparation de deux milieux. Nous avons déjà recherché le nombre, la direction de ces rayons et l'influence que peut exercer sur cette direction le pouvoir absorbant des milieux dont il s'agit. Recherchons maintenant comment la réflexion et la réfraction modifient, d'une part l'amplitude des vibrations lumineuses, d'autre part le mode de polarisation d'un rayon simple, particulièrement dans le cas où les milieux donnés sont isophanes, et où le premier de ces milieux est transparent.

Le rayon incident étant, par hypothèse, un rayon simple qui se propage dans un milieu isophane et transparent, pourra être censé résulter de la superposition de deux autres rayons qui seraient polarisés en ligne droite, le premier perpendiculairement au plan d'incidence, le second suivant ce même plan. Si l'on prend la normale à la surface

réfléchissante pour l'un des axes coordonnés, et le plan d'incidence pour l'un des plans coordonnés, le premier des rayons composants se trouvera complètement caractérisé par les déplacements des molécules mesurés dans le plan d'incidence et parallèlement aux axes coordonnés que renfermera ce plan, tandis que le second des rayons composants se trouvera caractérisé par les déplacements des molécules mesurés perpendiculairement au plan d'incidence, ou, ce qui revient au même, parallèlement au troisième axe. Or, si le second milieu est isophane, comme le premier, les deux espèces de déplacements dont il s'agit, c'est-à-dire les déplacements mesurés, les uns dans le plan d'incidence, les autres perpendiculairement à ce plan, se trouveront séparés dans les équations générales des mouvements infiniment petits auxquels se réduiront les vibrations lumineuses de chacun des milieux donnés, et il est naturel de penser, comme le calcul d'ailleurs nous l'indique, qu'alors aussi les déplacements des deux espèces se trouveront encore séparés dans les équations de condition relatives à la surface réfléchissante ou réfringente. Donc alors les deux rayons simples qui pourront être censés produire par leur superposition le rayon incident, et qui seront polarisés, le premier perpendiculairement au plan d'incidence, le second suivant ce même plan, se trouveront réfléchis et réfractés indépendamment l'un de l'autre. Il est d'ailleurs important d'observer que le rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, et par suite renfermé dans ce plan, peut être indifféremment caractérisé, avant ou après la réflexion, ou même après la réfraction, si le second milieu est transparent, soit par les déplacements des molécules mesurés parallèlement aux deux axes coordonnés que renferme le plan d'incidence, soit par les déplacements absolus des molécules mesurés dans ce même plan sur des droites perpendiculaires à la direction du rayon lumineux.

De ce qu'on vient de dire il résulte que, pour découvrir les lois générales suivant lesquelles un rayon simple peut être réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux isophanes, dont le premier est transparent, il suffira de rechercher les lois particulières de la



réflexion et de la réfraction d'un rayon simple polarisé, ou perpendiculairement au plan d'incidence, ou suivant ce même plan. Alors aussi, dans le rayon réfléchi, et même dans le rayon réfracté, lorsque le second milieu sera transparent, nous pourrons nous borner à considérer les déplacements absolus des molécules qui seront mesurés, pour chaque rayon, dans le plan d'incidence ou perpendiculairement à ce plan, mais toujours sur des droites perpendiculaires à la direction du rayon. Enfin, pour rendre le langage plus précis, lorsque les rayons incident, réfléchi et réfracté seront polarisés perpendiculairement au plan d'incidence, ou, ce qui revient au même, renfermés dans ce plan, nous appellerons, pour chaque rayon, nœuds de première espèce, ceux qui précéderont des molécules déplacées dans un sens tel qu'en vertu de leur déplacement elles se trouvent plus rapprochées du second milieu, ou transportées plus avant dans son intérieur. Lorsqu'au contraire les rayons incident, réfléchi et réfracté seront polarisés suivant le plan d'incidence, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque les vibrations des molécules seront perpendiculaires à ce plan, nous appellerons, pour chaque rayon, nœuds de première espèce ceux qui précéderont des molécules déplacées par rapport au plan d'incidence d'un côté déterminé, par exemple, du côté où se compte positivement les coordonnées perpendiculaires au plan dont il s'agit. Quand nous disons ici qu'un nœud précède certaines molécules, cela veut dire qu'il est situé sur la direction primitive du rayon lumineux, de manière à s'éloigner de ces molécules en vertu de son mouvement de translation dû à la vitesse de propagation de la lumière.

Observons encore que, dans l'hypothèse admise, le déplacement absolu d'une molécule située sur le rayon incident, ou réfléchi, ou réfracté par un milieu transparent, aura pour expression le produit d'un facteur variable par une constante réelle, le facteur variable étant le cosinus de l'angle qu'on obtient en ajoutant un certain paramètre angulaire à ce qu'on peut nommer l'*argument* du rayon que l'on considère, c'est-à-dire, à l'argument du mouvement simple qui répond à ce rayon. Or la constante et le paramètre angulaire, dont il est ici

question, changent de valeurs dans le passage du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté; et, pour établir les lois suivant lesquelles ce changement de valeurs s'effectue, ce qu'il y a de plus commode, c'est de recourir de nouveau à la considération des variables imaginaires dont les déplacements des molécules représentent les parties réelles.

En Analyse, on appelle *expression symbolique*, ou symbole, toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant ou altérant, selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes, ou les quantités qu'elles renferment. L'emploi des équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence. D'ailleurs c'est évidemment parmi les expressions ou équations symboliques que doivent être rangées les expressions ou équations imaginaires et, comme nous en avons fait ailleurs la remarque (voyez l'*Analyse algébrique*, Chap. VII), toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Cela posé, lorsque, dans les équations linéaires qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de points matériels, on remplacera les déplacements des molécules, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, par des variables imaginaires dont ces déplacements seront les parties réelles, les nouvelles équations que l'on obtiendra devront être naturellement appelées les *équations symboliques* des mouvements infiniment petits du système, et les variables imaginaires dont il s'agit pourront elles-mêmes être appelées les expressions symboliques des déplacements moléculaires ou, pour plus de brièveté, les *déplacements symboliques* des molécules. Pareillement, les *équations symboliques de condition*, relatives à la surface de séparation de deux systèmes de molécules, seront ce que deviennent les équations de condition relatives à cette surface, quand



on y remplace les déplacements effectifs des molécules par leurs déplacements symboliques. Enfin on devra interpréter dans le même sens le mot *symbolique* appliqué comme épithète, soit aux déplacements des molécules d'éther dans un rayon simple de lumière, soit aux équations différentielles ou finies d'un semblable rayon.

Ces définitions étant admises, considérons en particulier un rayon simple, polarisé rectilignement et propagé dans un milieu isophane. Nommons d'ailleurs *déviaton* le déplacement absolu de la molécule éthérée qui correspond à un point donné du rayon, ce déplacement étant mesuré à partir de la position initiale de la molécule, et pris avec le signe + ou avec le signe - suivant que la molécule déplacée se trouve située d'un côté ou de l'autre par rapport à la direction primitive de ce rayon. Les déviations de toutes les molécules seront mesurées sur des droites parallèles entre elles et toujours perpendiculaires, si le milieu isophane est transparent, à la direction du rayon lumineux. De plus, la *déviaton symbolique* d'une molécule d'éther dans le rayon donné, c'est-à-dire la variable imaginaire dont la déviaton de cette molécule représentera la partie réelle, se trouvera exprimée par une exponentielle imaginaire qui aura pour base la base même des logarithmes népériens, et pour exposant une fonction linéaire des coordonnées et du temps. Enfin, la partie de cet exposant qui renfermera les coordonnées sera proportionnelle, si le milieu isophane est transparent, à la distance qui sépare la molécule du second plan invariable, c'est-à-dire du plan fixe mené par l'origine des coordonnées parallèlement aux plans des ondes, et se réduira, au signe près, au produit de cette distance par  $\sqrt{-1}$  et par la caractéristique du rayon lumineux. Cela posé, dans tout milieu isophane et transparent, la déviaton symbolique d'une molécule d'éther, comprise dans un rayon plan, sera tellement liée avec la position initiale de la molécule que, si l'on mesure sur la direction de ce rayon, et dans le sens de la vitesse de propagation des ondes planes, une longueur déterminée, le rapport entre les déviations symboliques des molécules primitivement situées à l'extrémité de cette longueur, et à son origine, aura pour logarithme népé-

rien, ou le produit de la longueur elle-même par  $\sqrt{-1}$  et par la caractéristique du rayon lumineux, ou ce produit pris en signe contraire. Donc, pour obtenir la seconde de ces déviations symboliques, il suffira de multiplier la première par un coefficient imaginaire qui ait pour base la base même des logarithmes népériens et pour exposant le produit dont il s'agit pris avec son signe ou avec le signe opposé. D'ailleurs, on n'aura point à changer le signe de ce produit si l'on suppose, comme on peut toujours le faire, que, dans l'exposant de l'exponentielle imaginaire qui représente la déviaton symbolique d'une molécule, le terme proportionnel au temps offre pour coefficient le produit de  $\sqrt{-1}$  par une quantité négative. Nous adopterons cette supposition et, en conséquence, le coefficient symbolique par lequel on devra multiplier la déviaton symbolique d'une molécule, en un point donné d'un rayon plan, pour obtenir la déviaton symbolique en un autre point, sera une exponentielle qui aura pour base la base même des logarithmes népériens, l'exposant étant le produit de  $\sqrt{-1}$  par la caractéristique du rayon plan et par la distance du premier point au second, prise avec le signe + ou le signe -, suivant que l'on devra, pour passer de l'un à l'autre, marcher dans le sens suivant lequel est dirigée la vitesse de propagation des ondes planes, ou dans le sens opposé.

Au reste, toutes les fois qu'un rayon simple se propagera dans un milieu isophane et transparent, si l'on mesure les déplacements des molécules parallèlement aux axes coordonnés, ou même parallèlement à un axe fixe quelconque, les déplacements symboliques correspondants seront, d'après ce qu'on a dit au commencement de cette seconde Partie, respectivement égaux aux produits de constantes imaginaires par l'exponentielle qui aura pour base la base même des logarithmes népériens, et pour exposant le produit de  $\sqrt{-1}$  par l'argument du rayon simple. Ajoutons que la constante imaginaire correspondante à un axe fixe donné sera elle-même le produit de la demi-amplitude d'une vibration mesurée parallèlement à cet axe par une autre exponentielle qu'on obtient en substituant dans la première à l'argument du rayon simple un paramètre angulaire constant. Lorsque le rayon simple est





polarisé rectilignement, et que l'axe fixe donné est parallèle aux droites suivant lesquelles s'effectuent les vibrations absolues des molécules, le déplacement symbolique d'une molécule se réduit à ce que nous avons appelé la *déviatiou symbolique*.

Il nous reste maintenant à montrer comment les déplacements symboliques et les déviations symboliques se modifient lorsqu'un rayon plan tombe sur la surface réfléchissante ou réfringente qui sépare un premier milieu isopane et transparent d'un autre milieu supposé isopane, et quelle simplicité la considération des déplacements et déviations symboliques apporte généralement dans les calculs qui servent à établir les lois des phénomènes de polarisation produits par la réflexion ou la réfraction de la lumière.

## 28.

C. R., t. VIII, p. 146 (4 février 1839). — Suite.

Comme nous l'avons déjà remarqué, les équations de condition relatives à la surface réfléchissante ou réfringente doivent se réduire, pour des mouvements infiniment petits du fluide étheré, à des équations linéaires, en sorte que chaque membre de ces équations soit une fonction linéaire des déplacements moléculaires calculés pour le premier ou pour le second milieu, et de leurs dérivées prises par rapport à une ou plusieurs des variables indépendantes. D'ailleurs, dans ces mêmes équations, le déplacement d'une molécule, calculé comme si cette molécule était intérieure au premier milieu, et mesuré parallèlement à l'un des axes coordonnés, sera la somme des déplacements mesurés parallèlement au même axe dans les rayons incident et réfléchi; mais le déplacement d'une molécule, calculé comme si cette molécule était intérieure au second milieu, sera simplement celui que le calcul donne pour le rayon réfracté. Cela posé, il est clair : 1° que, dans la théorie de

la lumière, les équations symboliques de condition, relatives à la surface réfléchissante ou réfringente, seront linéaires par rapport aux déplacements symboliques des molécules et à leurs dérivées; 2° que ces déplacements symboliques se réduiront d'une part à la somme des déplacements symboliques des molécules, déterminés successivement pour le rayon incident et le rayon réfléchi, d'autre part au déplacement symbolique des molécules dans le rayon réfracté.

Observons maintenant que, si le rayon incident est un rayon simple, les déplacements symboliques des molécules, mesurés parallèlement aux trois axes coordonnés, dans le rayon incident ou réfléchi ou réfracté, seront les produits de trois constantes imaginaires par une seule exponentielle imaginaire dont l'exposant sera une fonction linéaire des variables indépendantes sans terme constant. Donc alors, pour obtenir la dérivée de l'un de ces déplacements symboliques, différencié une ou plusieurs fois par rapport à une ou plusieurs des variables indépendantes, il suffira de le multiplier une ou plusieurs fois par le coefficient ou les coefficients de ces variables dans l'exposant dont il s'agit. Par suite, si le rayon incident est un rayon simple, chaque membre des équations symboliques de condition, relatives à la surface réfléchissante ou réfringente, pourra être réduit à une fonction linéaire des déplacements symboliques des molécules dans les rayons incident, réfléchi et réfracté, chaque terme de la fonction linéaire étant proportionnel à l'un des déplacements symboliques qui pourra s'y trouver multiplié une ou plusieurs fois par un ou plusieurs des coefficients des variables indépendantes dans l'exposant de l'exponentielle imaginaire que renferme ce même déplacement. D'ailleurs, comme on l'a vu, cette exponentielle conserve la même valeur en un point quelconque de la surface réfléchissante, quand on passe du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté; elle représente donc un facteur commun à tous les termes compris dans les équations de condition symboliques, et celles-ci pourront être réduites, par la suppression de ce facteur commun, à des équations linéaires entre les constantes imaginaires par lesquelles la même exponentielle se trouvait multipliée



dans les déplacements symboliques des molécules. Ces nouvelles équations linéaires sont précisément celles qui devront servir à déterminer les valeurs des constantes imaginaires dont nous venons de parler pour le rayon réfléchi et pour le rayon réfracté, quand elles seront connues pour le rayon incident. Ces constantes imaginaires étant ainsi déterminées pour le rayon réfléchi ou réfracté, si on les multiplie par la valeur générale de l'exponentielle imaginaire qui répond à ce rayon, on obtiendra immédiatement pour le même rayon les déplacements symboliques et, par suite, les déplacements effectifs des molécules mesurés parallèlement aux trois axes coordonnés.

De ce qu'on vient de dire il semble résulter, au premier abord, qu'on aurait besoin de six équations symboliques de condition pour déterminer les six constantes imaginaires correspondantes d'une part aux deux rayons réfléchi et réfracté, d'autre part aux trois déplacements moléculaires mesurés dans chacun de ces rayons parallèlement aux trois axes coordonnés. Mais on doit observer que, pour chaque rayon simple propagé dans un milieu isophane et transparent, il existe toujours entre ces trois déplacements une équation linéaire. Cette équation est celle qui exprime que les vibrations des molécules s'effectuent dans des plans perpendiculaires à la direction du rayon, et par conséquent celle que l'on forme en égalant à zéro la somme des trois déplacements respectivement multipliés par les coefficients des coordonnées dans l'argument du rayon simple. On pourra d'ailleurs, dans cette équation, remplacer les trois déplacements effectifs d'une molécule, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, par ses déplacements symboliques, ou même par les trois constantes imaginaires qui entrent comme facteurs dans les déplacements symboliques avec l'exponentielle imaginaire qui caractérise le rayon simple. Ajoutons que l'équation symbolique ainsi obtenue pourra être étendue au cas même où le milieu isophane cesserait d'être transparent, si dans cette équation on substitue généralement aux coefficients réels des coordonnées, pris dans l'argument du rayon simple, les coefficients imaginaires des coordonnées pris dans l'exposant de l'exponentielle imaginaire qui caracté-

térise ce rayon. Cela posé, comme des trois constantes imaginaires relatives au rayon réfléchi ou au rayon réfracté, l'une pourra toujours être exprimée en fonction linéaire des deux autres, on n'aura plus à déterminer pour ces deux rayons que quatre constantes imaginaires, et pour y parvenir, il suffira des quatre équations symboliques de condition relatives à la surface réfléchissante.

Si les milieux donnés cessaient d'être isophanes, on obtiendrait, au lieu d'un rayon réfléchi et d'un rayon réfracté, deux rayons réfléchis et deux rayons réfractés, correspondants à douze constantes imaginaires. Mais alors aussi les trois constantes imaginaires relatives à chaque rayon seraient proportionnelles l'une à l'autre, et leurs rapports se déduiraient immédiatement de la direction même du rayon, supposée connue, ou plutôt de la direction des plans des ondes, comme il arrive pour les milieux transparents, mais non isophanes, et par conséquent doués de la double réfraction, puisqu'en effet, dans ces milieux, le mode de polarisation d'un rayon dépend uniquement de la direction des plans des ondes. Donc encore, dans le cas dont il s'agit, sur les douze constantes imaginaires correspondantes aux quatre rayons réfléchis et réfractés, il en restera seulement quatre à déterminer à l'aide des équations de condition symboliques relatives à la surface réfléchissante. Donc, dans tous les cas, le nombre de ces dernières équations, de celles du moins qui seront nécessaires à la détermination des constantes imaginaires, sera de quatre seulement.

Revenons au cas spécial où les milieux donnés sont isophanes, le rayon incident étant d'ailleurs un rayon simple. Si l'on considère ce rayon simple comme résultant de la superposition de deux autres rayons polarisés en ligne droite, l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre suivant ce même plan, les deux rayons composants se trouveront, ainsi qu'on l'a dit plus haut, réfléchis et réfractés indépendamment l'un de l'autre. Concevons d'ailleurs que l'on prenne pour un des axes coordonnés la normale à la surface réfléchissante, et pour un des plans coordonnés le plan d'incidence; des quatre équations de condition deux se rapporteront à la réflexion et à la réfraction du rayon



polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, les deux autres à la réflexion et à la réfraction du rayon polarisé suivant ce même plan. Ces deux dernières renfermeront trois constantes imaginaires relatives à trois rayons incident, réfléchi, réfracté, tous trois polarisés suivant le plan d'incidence, et détermineront les rapports de ces trois constantes. Au contraire, les deux premières équations symboliques de condition contiendront six constantes imaginaires correspondantes aux rayons incident, réfléchi, réfracté qui seront polarisés perpendiculairement au plan d'incidence, ou, en d'autres termes, renfermés dans ce plan. Mais alors les deux constantes imaginaires, correspondantes à chaque rayon, seront liées entre elles par une équation linéaire qu'on obtiendra en égalant à zéro la somme de ces deux constantes respectivement multipliées par les coefficients des coordonnées, mesurées suivant le plan d'incidence, dans l'exposant de l'exponentielle imaginaire à laquelle les déplacements symboliques des molécules sont proportionnels. Donc, entre les six constantes imaginaires dont il s'agit, on aura en tout cinq équations qui suffiront encore pour déterminer les rapports de ces constantes. Dans l'un et l'autre calcul, le rapport suivant lequel varie la constante imaginaire correspondante à l'un des axes coordonnés, quand on passe du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté, est aussi le rapport suivant lequel varie, dans ce passage, le déplacement symbolique relatif à cet axe, en un point quelconque de la surface réfléchissante.

Il est bon d'observer que, dans chacun des rayons polarisés suivant le plan d'incidence, les déplacements des molécules, mesurés perpendiculairement au même plan, représentent, au signe près, les déplacements absolus de ces molécules, et peuvent être censés se confondre avec leurs déviations. Donc, par suite, dans ces rayons, les déviations symboliques ne différeront pas des déplacements symboliques. Quant aux rayons polarisés perpendiculairement au plan d'incidence, et par conséquent renfermés dans ce plan, chacun d'eux se composera de molécules dont les déplacements absolus ne seront généralement dirigés suivant aucun des axes coordonnés compris dans le plan d'inci-

dence. Mais, si le milieu dans lequel un semblable rayon se propage est transparent, le déplacement absolu d'une molécule et par suite sa déviation se réduiront, au signe près, au quotient qu'on obtient quand on divise le déplacement mesuré suivant une normale à la surface réfléchissante par le sinus de l'angle aigu compris entre la normale et le rayon. Il y a plus; la déviation sera précisément égale au quotient dont il s'agit, si le déplacement mesuré sur une normale à la surface réfléchissante et la déviation elle-même se comptent positivement pour toute molécule qui, en s'éloignant de sa position initiale, se rapproche du second milieu, ou pénètre plus avant dans son intérieur. Cette convention étant admise, la déviation symbolique, pour un rayon incident, ou réfléchi, ou réfracté, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, mais propagé dans un milieu transparent, sera le quotient qu'on obtient quand on divise par le sinus d'incidence, ou par le sinus de réflexion, ou par le sinus de réfraction le déplacement symbolique dont la partie réelle est le déplacement mesuré suivant une normale à la surface réfléchissante. Donc, lorsqu'en un point quelconque de cette surface on passera, d'un rayon incident et renfermé dans le plan d'incidence, au rayon réfléchi ou réfracté, en supposant que ce dernier est propagé dans un milieu transparent, alors, non seulement le déplacement symbolique dont il s'agit variera en chaque point de la surface réfléchissante, dans un rapport déterminé par les équations de condition ci-dessus mentionnées, mais de plus la déviation symbolique variera dans un second rapport qui sera le produit du premier par l'indice de réflexion ou de réfraction.

En résumé, les équations symboliques de condition, relatives à la surface réfléchissante, fourniront le moyen de déterminer le rapport suivant lequel la réflexion ou la réfraction fera varier la déviation symbolique des molécules dans un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence ou suivant ce même plan, c'est-à-dire, en d'autres termes, le coefficient imaginaire par lequel on devra, en chaque point de la surface réfléchissante, multiplier la déviation symbolique d'une molécule considérée comme comprise dans le rayon incident, pour



obtenir la déviation symbolique de la même molécule considérée comme comprise dans le rayon réfléchi ou réfracté, en supposant d'ailleurs que ce dernier rayon se propage dans un milieu transparent. Le coefficient imaginaire dont il s'agit ici est ce que nous appellerons désormais le *coefficient de réflexion* ou le *coefficient de réfraction*, et, d'après ce qui a été dit ci-dessus, il dépendra uniquement des coefficients des variables indépendantes dans les exposants des exponentielles imaginaires auxquelles les déplacements symboliques des molécules sont proportionnels. Il n'y a point d'exception à faire à cet égard pour les rayons renfermés dans le plan d'incidence, attendu que l'indice de réflexion ou de réfraction est précisément le rapport suivant lequel varie le coefficient de l'une des coordonnées quand on passe du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté, en supposant que celui-ci se propage comme le premier dans un milieu transparent. Ajoutons qu'en vertu de l'hypothèse admise sur la disposition des axes et des plans coordonnés, les coefficients des coordonnées dans les exponentielles imaginaires pourront être facilement exprimés en fonctions de l'angle d'incidence et des caractéristiques des rayons incident et réfracté. En effet, l'un des axes étant perpendiculaire au plan d'incidence, la coordonnée mesurée suivant cet axe disparaîtra des exponentielles imaginaires où son exposant sera réduit à zéro, et par suite les coefficients des deux autres coordonnées, dans l'exponentielle imaginaire correspondante au rayon incident, ou réfléchi, ou réfracté, fourniront des carrés dont la somme, prise en signe contraire, offrira pour racine carrée la caractéristique de ce même rayon. Il sera donc facile de calculer un de ces deux coefficients quand on connaîtra l'autre et la caractéristique. D'ailleurs le coefficient de la coordonnée mesurée sur la droite d'intersection du plan d'incidence et de la surface réfléchissante restera le même pour les trois rayons, et sera équivalent au produit qu'on obtient quand on multiplie le sinus d'incidence par la caractéristique du rayon incident et par  $\sqrt{-1}$ . Enfin, le premier milieu étant par hypothèse isopane et transparent, les rayons incident et réfléchi offriront la même caractéristique. Quant au coefficient du temps, il conservera la

même valeur dans les exposants des trois exponentielles imaginaires, relatives aux trois rayons incident, réfléchi, réfracté, et il sera équivalent, au signe près, au produit de  $\sqrt{-1}$  par le rapport du nombre  $2\pi$  à la durée d'une vibration moléculaire.

Observons encore qu'en vertu de l'égalité supposée des caractéristiques des rayons incident et réfléchi, les coefficients de la coordonnée perpendiculaire à la surface réfléchissante, dans les exponentielles imaginaires relatives à ces deux rayons, seront, au signe près, égaux entre eux, le premier étant le produit de la caractéristique du rayon incident par le cosinus de l'angle d'incidence et par  $\sqrt{-1}$ . Donc, en définitive, les coefficients des coordonnées, dans les exposants des exponentielles imaginaires correspondantes aux rayons incident, réfléchi et réfracté pourront être réduits à trois, savoir : au coefficient unique de la coordonnée mesurée sur la droite d'intersection du plan d'incidence et de la surface réfléchissante, au coefficient de la coordonnée perpendiculaire à cette surface dans le rayon incident, et au coefficient de la même coordonnée dans le rayon réfracté. Ce dernier coefficient, qui dépendra des caractéristiques des rayons incident et réfracté, offrira généralement une partie réelle si la caractéristique du rayon réfracté devient imaginaire, ou si, cette caractéristique étant réelle, mais inférieure à celle du rayon incident, le sinus d'incidence surpasse le rapport de l'une à l'autre. Alors le second milieu sera opaque, ou du moins il jouera le rôle d'un corps opaque, et le mouvement réfracté, en pénétrant dans l'intérieur du second milieu, s'affaiblira par degrés, de manière à devenir insensible à une distance plus ou moins considérable de la surface réfringente.

Les caractéristiques des rayons incident et réfléchi dépendent de la nature des milieux isophanes dans lesquels on suppose que ces deux rayons se propagent. Cette nature étant donnée, avec la durée des vibrations moléculaires, ou, ce qui revient au même, avec la couleur des rayons, les coefficients de réflexion et de réfraction, pour un rayon polarisé ou perpendiculairement au plan d'incidence, ou suivant ce même plan, varieront avec l'angle d'incidence. Mais ils resteront indépendants



de l'amplitude des vibrations moléculaires dans le rayon incident et de la position de ses nœuds. Voyons, d'après ce principe, comment cette amplitude et cette position varient quand on passe du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté.

De même qu'on appelle *logarithmes népériens* les logarithmes pris dans le système dont la base est le nombre  $e=2,7182818, \dots$ , de même il est naturel d'appeler *exponentielles népériennes* celles qui ont pour base ce même nombre. Or, parmi ces exponentielles, on doit surtout distinguer celles dans lesquelles la partie réelle de l'exposant s'évanouit. En effet, dans une semblable exponentielle, considérée comme expression imaginaire, le module se réduit à l'unité, tandis que la partie réelle et le coefficient de  $\sqrt{-1}$  se réduisent à deux lignes trigonométriques, savoir : au cosinus et au sinus de l'argument. Pour cette raison, nous désignerons les exponentielles népériennes dans lesquelles la partie réelle de l'exposant s'évanouira, sous le nom d'*exponentielles trigonométriques*. Cela posé, étant donnés le *module* et l'*argument* d'un mouvement simple ou d'un rayon simple, l'exponentielle imaginaire qui caractérisera ce mouvement ou ce rayon, et qui offrira pour exposant une fonction linéaire mais imaginaire des variables indépendantes sans terme constant, se réduira toujours au produit du module par l'exponentielle trigonométrique dont l'argument sera celui du mouvement simple ou du rayon simple. La dernière exponentielle exprimera donc la valeur de la première si le module se réduit à l'unité, ce qui arrivera, par exemple, lorsqu'un rayon simple se propagera dans un milieu transparent. Alors aussi la constante imaginaire par laquelle on devra multiplier l'exponentielle dont il s'agit, pour obtenir le déplacement d'une molécule, mesuré parallèlement à un axe fixe, ne sera autre chose que le produit de la demi-amplitude des vibrations parallèles à cet axe par l'exponentielle trigonométrique qui offrira pour argument le paramètre angulaire. Enfin, si, en considérant un rayon simple, réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux isophanes, et en supposant ce rayon polarisé, ou perpendiculairement au plan d'incidence, ou suivant ce plan, on nomme *modules* et *arguments de réflexion*

et de *réfraction* les modules et les arguments du coefficient de réflexion et du coefficient de réfraction, chacun de ces derniers coefficients ne sera autre chose que le produit du module de réflexion ou de réfraction par l'exponentielle trigonométrique correspondante à l'argument de réflexion ou de réfraction. Or, pour multiplier une expression imaginaire par une autre, il suffit de multiplier le module de la première par le module de la seconde et d'ajouter à l'argument de la première l'argument de la seconde. Donc, puisque, dans le passage du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté, la déviation symbolique d'une molécule, et par suite la constante imaginaire qui entrera comme facteur dans cette déviation, varieront dans un rapport égal au coefficient de réflexion ou de réfraction, il est clair que, dans ce passage, la demi-amplitude des vibrations moléculaires variera dans un rapport représenté par le module de réflexion ou de réfraction, tandis que le paramètre angulaire se trouvera augmenté de l'argument de réflexion ou de réfraction. D'ailleurs, dans un rayon simple polarisé en ligne droite et propagé dans un milieu transparent, l'angle, dont le paramètre angulaire représente le complément, a pour mesure le produit de la caractéristique par la distance qui au premier instant sépare du second plan invariable un des nœuds de ce rayon; et si, à un instant donné, le paramètre angulaire se trouve tout à coup augmenté ou diminué d'une quantité donnée, chaque nœud se trouvera immédiatement déplacé et transporté, en arrière ou en avant de la position qu'il occupait, à une distance représentée par le rapport entre l'augmentation ou la diminution du paramètre angulaire et la caractéristique. Donc, lorsqu'on fait tomber sur la surface de séparation de deux milieux isophanes un rayon polarisé, ou perpendiculairement au plan d'incidence, ou suivant ce plan, et que le rayon réfléchi ou réfracté se propage sans s'affaiblir, la réflexion ou la réfraction du rayon incident produit en général les deux effets que nous allons énoncer : 1° *tandis que le rayon incident se transforme en rayon réfléchi ou en rayon réfracté, les demi-amplitudes, et par suite les amplitudes des vibrations moléculaires, varient dans un rapport égal au module de réflexion ou de réfraction*; 2° *chaque nœud, à l'instant*



même où, en vertu de son mouvement de propagation, il atteint la surface réfléchissante, se trouve déplacé et transporté, sur le rayon réfléchi ou réfracté, en arrière ou en avant de la position qu'il occupait, à une distance représentée, au signe près, par le rapport entre l'argument de réflexion et la caractéristique du rayon réfléchi, ou entre l'argument de réflexion et la caractéristique du rayon réfracté; savoir : en arrière, si l'argument dont il s'agit est positif, et en avant, si cet argument devient négatif. D'ailleurs, ces deux effets, pour une couleur donnée, et pour des milieux isophanes donnés, dépendront uniquement de l'angle d'incidence, et resteront, ainsi que les coefficients, les arguments et les modules de réflexion ou de réfraction, indépendants de l'amplitude des vibrations moléculaires dans le rayon incident et de la position des nœuds dans ce même rayon.

Il importe d'observer que l'argument de toute expression imaginaire peut être réduit à une quantité négative dont la valeur numérique ne surpasse pas la circonférence, par conséquent à un angle renfermé entre les limites  $-2\pi$  et zéro. Or, si l'on suppose, comme on peut toujours le faire, l'argument de réflexion ou de réfraction compris entre ces limites, le rapport de cet argument à la caractéristique du rayon réfléchi ou réfracté ne sera autre chose que la distance comprise entre un nœud qui, dans le rayon incident, atteint à un instant donné la surface réfléchissante, et le nœud de même espèce qui, au même instant, se trouve situé en avant du premier, le plus près possible de la surface, sur la direction du rayon réfléchi ou réfracté.

Si le rayon incident était polarisé elliptiquement, ou circulairement, ou rectilignement, mais suivant un plan quelconque, on pourrait le regarder comme résultant de la superposition de deux rayons polarisés l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre suivant ce même plan; et alors la réflexion ou la réfraction aurait pour effet : 1° de faire varier le rapport entre les amplitudes des vibrations moléculaires, dans les deux rayons composants, proportionnellement au rapport entre les modules de réflexion ou de réfraction correspondants à ces deux rayons; 2° d'éloigner ou de rapprocher les nœuds de première espèce de l'un, de

nœuds de première espèce de l'autre, le déplacement relatif des nœuds de même espèce dans les deux rayons étant, au signe près, le rapport entre la différence de leurs arguments et la caractéristique des rayons réfléchis ou réfractés. Si, avant ou après la réflexion ou la réfraction, les nœuds de première espèce de l'un des rayons composants coïncident avec les nœuds de première ou de seconde espèce de l'autre, le rayon résultant sera polarisé en ligne droite, et l'inclinaison du plan de polarisation sur le plan d'incidence, c'est-à-dire, l'angle aigu compris entre les deux plans, aura pour tangente trigonométrique le rapport entre les amplitudes des vibrations moléculaires dans les deux rayons polarisés, l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre suivant ce plan. D'ailleurs le plan de polarisation du rayon résultant sera situé d'un côté ou de l'autre du plan d'incidence, suivant que la superposition des rayons composants fera coïncider, avec les nœuds de première espèce de l'un, les nœuds de première ou de seconde espèce de l'autre. Si l'un des rayons composants offre des nœuds séparés de ceux de l'autre, le rayon résultant sera polarisé circulairement ou elliptiquement; il sera polarisé circulairement, si les vibrations moléculaires présentent les mêmes amplitudes dans les deux rayons composants, et si d'ailleurs les nœuds de l'un se trouvent séparés de ceux de l'autre par des distances égales au quart de la longueur d'une ondulation. Mais, si la séparation des nœuds existe, sans que les deux conditions ici énoncées se trouvent remplies, le rayon résultant sera doué de la polarisation elliptique. Au reste, dans ce dernier cas, il pourra toujours être considéré comme résultant de la superposition de deux rayons simples, polarisés en ligne droite suivant deux plans rectangulaires entre eux, et tellement choisis que les nœuds des deux nouveaux rayons se trouvent encore séparés par des distances égales au quart de la longueur d'une ondulation. Seulement ces nouveaux rayons, dont aucun pour l'ordinaire ne sera polarisé suivant le plan d'incidence, offriront des vibrations moléculaires dont les amplitudes seront inégales.