NOTE XI.

MÉTHODE SIMPLE ET NOUVELLE POUR LA DÉTERMINATION COMPLÈTE DES SOMMES ALTERNÉES, FORMÉES AVEC LES RACINES PRIMITIVES DES ÉQUATIONS BINOMES.

Soit

$$\rho$$

une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1, \tag{1}$$

et supposons d'abord que n soit un nombre premier impair. Les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées par

$$\rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \ldots,\ \rho^{n-1},$$

ou par

$$\rho^m,\ \rho^{2m},\ \rho^{3m},\ \ldots,\ \rho^{(n-1)m},$$

m étant premier à n. Soit d'ailleurs $\mathfrak{S}$ une somme alternée de ces racines primitives. Cette somme sera de la forme

$$\mathfrak{S} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots, \tag{2}$$

les exposants

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$$

étant ainsi partagés en deux groupes

$$h,\ h',\ h'',\ \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'',\ \ldots,$$

dont le premier pourra être censé renfermer les résidus quadratiques

$$1,\ 4,\ \ldots,$$

et le second les non-résidus suivant le module n. Si l'on suppose en particulier $n = 3$, on aura simplement

$$\mathfrak{S} = \rho^1 - \rho^2 = \rho^1 - \rho^{-1},$$

en sorte qu'une somme alternée $\mathfrak{S}$ pourra être représentée, au signe

près, par le binome

$$\rho^1 - \rho^{-1},$$

ou plus généralement par le binome

$$\rho^m - \rho^{-m},$$

m étant non divisible par 3. Si n devient égal à 5, les binomes de la forme $\rho^m - \rho^{-m}$ se réduiront, au signe près, à l'un des suivants,

$$\rho^1 - \rho^4 = \rho^1 - \rho^{-1}, \qquad \rho^2 - \rho^3 = \rho^2 - \rho^{-2},$$

et le produit de ces deux derniers binomes, savoir

$$(\rho^1 - \rho^4)(\rho^2 - \rho^3) = \rho^3 + \rho^3 - \rho - \rho^4,$$

représentera encore, au signe près, la somme alternée

$$\mathfrak{S} = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,$$

qui pourra s'écrire comme il suit :

$$\mathfrak{S} = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-})$$

J'ajoute qu'il en sera généralement de même, et que, pour une valeur quelconque du nombre premier n, la somme alternée $\mathfrak{S}$ pourra être réduite au produit $\mathfrak{P}$ déterminé par la formule

$$\mathfrak{P} = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2})\ldots(\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)}). \tag{3}$$

Effectivement, ce produit, égal, au signe près, au suivant,

$$(\rho^1 - \rho^n)(\rho^2 - \rho^{n-2})\ldots\left(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{\frac{n+1}{2}}\right),$$

changera tout au plus de signe, quand on y remplacera ρ par ρ^m, attendu qu'alors les termes de la suite

$$\rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \ldots,\ \rho^{n-1}$$

se trouveront remplacés par les termes de la suite

$$\rho^m,\ \rho^{2m},\ \rho^{3m},\ \ldots,\ \rho^{(n-1)m},$$

qui sont les mêmes, à l'ordre près, et chaque binome de la forme

$$\rho^l - \rho^{-l}$$

par un binome de la même forme

$$\rho^{ml} - \rho^{-ml}.$$

Donc le produit $\mathfrak{P}$ ne pourra représenter qu'une fonction symétrique ou une fonction alternée des racines primitives de l'équation (1). Donc il sera de l'une des formes

$$a, \quad a\mathfrak{Q},$$

a désignant une quantité entière positive ou négative, et son carré $\mathfrak{P}^2$ sera de l'une des formes

$$a^2, \quad a^2\mathfrak{Q}^2.$$

Comme on tirera d'ailleurs de l'équation (3), non seulement

$$\mathfrak{P} = \rho^{1+2+3+\ldots+(n-2)}(1-\rho^{-2})(1-\rho^{-6})\ldots(1-\rho^{-2(n-2)}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{P} = \rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}(1-\rho^{n-2})(1-\rho^{n-6})\ldots(1-\rho^4),$$

mais encore

$$\mathfrak{P} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\rho^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}(1-\rho^2)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-4}),$$

et par suite

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^2 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-6})(1-\rho^{n-4})(1-\rho^{n-2})\\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{n-1})\\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}n,\end{aligned}$$

il est clair que $\mathfrak{P}^2$, n'étant pas de la forme a^2, devra être de la forme $a^2\mathfrak{Q}^2$. On aura donc

$$(4) \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}n = a^2\mathfrak{Q}^2, \qquad \mathfrak{P} = a\mathfrak{Q}.$$

Or, $\mathfrak{Q}^2$ ne pouvant être qu'une fonction symétrique de $\rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$,

et par conséquent un nombre entier, la seule manière de vérifier la première des équations (4) sera de poser

$$a^2 = 1, \qquad \mathfrak{Q}^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}n.$$

On aura donc

$$a = \pm 1,$$

par conséquent

$$(5) \qquad \mathfrak{P} = \pm\mathfrak{Q};$$

et toute la difficulté se réduit à déterminer le signe qui doit affecter le second membre de la formule (5). Or, si, dans la somme alternée

$$\mathfrak{Q} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots,$$

on remplace généralement

$$\rho^l \quad \text{par} \quad \rho^{\left[\frac{l}{n}\right]},$$

cette somme sera remplacée elle-même par la suivante,

$$\left[\frac{h}{n}\right] + \left[\frac{h'}{n}\right] + \ldots - \left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k'}{n}\right] - \ldots = n - 1 \equiv -1 \pmod{n},$$

tandis que la somme alternée $\mathfrak{Q}$ se changera en

$$-(n-1) \equiv 1 \pmod{n}.$$

Donc, pour décider si, dans la formule (5), on doit réduire le double signe au signe + ou au signe −, il suffira de chercher la quantité en laquelle se transforme le développement de $\mathfrak{P}$, quand on y remplace chaque terme de la forme ρ^l par $\rho^{\left[\frac{l}{n}\right]}$, et de voir si cette quantité, divisée par n, donne pour reste − 1 ou + 1. Or, comme le développement de $\mathfrak{P}$ se composera de termes de la forme

$$\pm\rho^{\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots},$$

le signe qui précède ρ étant le produit des signes qui, dans l'exposant de ρ, précèdent les nombres 1, 3, 5, ..., la quantité dont il s'agit sera

la somme des expressions de la forme

$$\pm\left[\frac{\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \dots}{n}\right],$$

le signe placé en dehors des parenthèses étant le produit des signes placés au dedans. Elle sera donc équivalente, suivant le module n, à la somme des expressions de la forme

$$\pm[\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \dots \pm (n-2)]^{\frac{n-1}{2}}. \tag{6}$$

Ainsi, en particulier, elle sera équivalente, pour $n = 3$, à

$$1^1 - (-1)^1 = 2 \equiv -1 \pmod 3;$$

pour $n = 5$, à

$$(1+3)^2 + (-1-3)^2 - (-1+3)^2 - (1-3)^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5.$$

D'ailleurs, si l'on suppose le nombre des lettres $a, b, c, \dots$ égal à m, la somme des expressions de la forme

$$\pm(\pm a \pm b \pm c \pm \dots)^m, \tag{7}$$

développées suivant les puissances ascendantes de $a, b, c, \dots$, ne pourra renfermer aucun terme dans lequel l'exposant de a, ou de b, ou de c, s'évanouisse. En effet, comme, dans cette somme, deux expressions qui ne différeront l'une de l'autre que par le signe placé devant la lettre a, présenteront, en dehors des parenthèses, des signes contraires, elles fourniront deux développements, dont les divers termes se détruiront mutuellement, à l'exception de ceux qui renfermeront des puissances impaires de a. Donc, chacun des termes qui resteront dans la somme dont il s'agit sera proportionnel à une puissance impaire de a; et, comme il devra être, par la même raison, proportionnel à une puissance impaire de $c, \dots$, il est clair que, dans un terme conservé, ces diverses puissances, dont les exposants auront pour somme le nombre m, devront toutes se réduire à la première puissance, et chaque exposant à l'unité. Donc, les seuls termes qui ne se détruiront pas les uns les autres, seront les termes proportionnels

au produit

$$abc\dots$$

de toutes les lettres $a, b, c, \dots$; et, puisque chacune des valeurs de l'expression (7) offre dans son développement un semblable terme, précisément égal au produit

$$(1.2.3\dots m)abc\dots,$$

il suffira, pour obtenir la somme de ces valeurs, de multiplier leur nombre 2^m par ce même produit. Donc la somme des valeurs de l'expression (7) sera

$$2^m(1.2.3\dots m)abc\dots.$$

Si maintenant on remplace

$$a, \quad b, \quad c, \quad \dots$$

par les nombres

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \dots, \quad 2m-1,$$

le produit

$$2^m(1.2.3\dots m)abc\dots$$

deviendra

$$2^m(1.2.3\dots m)1.3.5\dots(2m-1) = 1.2.3.4\dots 2m.$$

Donc, en écrivant $\frac{n-1}{2}$ au lieu de m, on reconnaîtra que la somme des expressions (6) a pour valeur le produit

$$1.2.3\dots(n-1) \equiv -1 \pmod n.$$

Donc $\mathfrak{P}$ se transformera en une somme équivalente à -1, si l'on y remplace généralement

$$\rho^l \text{ par } \left[\frac{l}{n}\right];$$

d'où il suit que l'équation (5) devra être réduite à

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{O}. \tag{8}$$

En d'autres termes, on aura

$$\left\{\begin{array}{l}(\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3})\dots(\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)}) \\ \quad = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \dots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} \dots,\end{array}\right. \tag{9}$$

h, h', h'', ... étant les résidus quadratiques, et k, k', k'', ... les non-résidus quadratiques inférieurs au module n. On se trouve ainsi ramené à la belle formule que M. Gauss a donnée le premier dans le Mémoire intitulé : *Summatio serierum quarumdam singularium*, et qui convertit la somme alternée

$$\mathfrak{D} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k + \rho^{k'} + \rho^{k''} \ldots,$$

dont le carré $\mathfrak{D}^2$ vérifie l'équation

$$\mathfrak{D}^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n, \tag{10}$$

en un produit de la forme

$$(\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2}) \ldots (\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)}).$$

Or, cette conversion une fois opérée, il devient facile, comme l'on sait, d'assigner, dans tous les cas, la valeur exacte de la somme alternée $\mathfrak{D}$. On y parvient, en effet, comme il suit.

Observons d'abord qu'en vertu des formules

$$\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)} = -(\rho^2 - \rho^{-2}), \qquad \rho^{n-1} - \rho^{-(n-1)} = -(\rho^1 - \rho^{-1}), \qquad \ldots,$$

le premier membre de l'équation (9), ou la valeur de la somme $\mathfrak{D}$, se réduira : 1° si n est de la forme $4x+1$, à

$$\mathfrak{D} = (-1)^{\frac{n-1}{4}} (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2}) \ldots \left(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}}\right); \tag{11}$$

2° si n est de la forme $4x+3$, à

$$\mathfrak{D} = (-1)^{\frac{n-3}{4}} (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2}) \ldots \left(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}}\right), \tag{12}$$

attendu que le nombre des entiers pairs, et inférieurs à $\frac{1}{2}n$, sera

$$\frac{1}{2}\frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{4}, \quad \text{si} \quad \frac{n-1}{2} \quad \text{est pair,}$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = \frac{n-3}{4}, \quad \text{si} \quad \frac{n-1}{2} \quad \text{est impair.}$$

D'autre part, si l'on pose

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}, \tag{13}$$

on en conclura généralement

$$\rho^l - \rho^{-l} = 2 \sin \frac{2l\pi}{n} \sqrt{-1}; \tag{14}$$

et il est clair que, pour toute valeur de l inférieure à $\frac{1}{2}n$, le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans le second membre de l'équation (14), sera une quantité positive. Enfin, l'on tirera de l'équation (14) : 1° en supposant n de la forme $4x+1$,

$$\left\{\begin{array}{l} (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2}) \ldots \left(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}}\right) \\ \quad = (-1)^{\frac{n-1}{4}} 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \ldots \sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}; \end{array}\right. \tag{15}$$

2° en supposant n de la forme $4x+3$,

$$\left\{\begin{array}{l} (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2}) \ldots \left(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}}\right) \\ \quad = (-1)^{\frac{n-3}{4}} 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \ldots \sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n} \sqrt{-1}. \end{array}\right. \tag{16}$$

Donc, si l'on attribue à ρ la valeur que détermine l'équation (13), on tirera des formules (11) et (12) : 1° en supposant n de la forme $4x+1$,

$$\mathfrak{D} = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \ldots \sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}; \tag{17}$$

2° en supposant n de la forme $4x+3$,

$$\mathfrak{D} = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \ldots \sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n} \sqrt{-1}. \tag{18}$$

Or, en substituant l'une de ces dernières valeurs de la somme alternée $\mathfrak{D}$ dans la formule (10), on en conclura que le produit

$$2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \ldots \sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}$$

a pour carré le nombre n. Donc ce produit, qui ne renferme que des

facteurs positifs, sera lui-même positif, et égal à $n^{\frac{1}{2}}$. On aura donc, quel que soit le nombre premier n, pourvu qu'il surpasse 2,

$$2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \cdots \sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n} = n^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

et, par conséquent, les équations (17), (18) se réduiront, la première à

$$\mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

la seconde à

$$\mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}; \tag{21}$$

en sorte que l'une et l'autre seront comprises dans la formule

$$\mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}. \tag{22}$$

Si maintenant on veut obtenir la valeur de $\mathfrak{S}$ correspondant à la valeur de ρ que détermine, non plus la formule (15), mais la suivante,

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}}, \tag{23}$$

m étant un entier quelconque non divisible par n, il suffira évidemment de remplacer, dans la valeur de $\mathfrak{S}$ que fournit l'équation (22), ρ par ρ^m, ou, ce qui revient au même, il suffira de multiplier cette valeur par

$$\left[\frac{m}{n}\right].$$

Donc, lorsque la valeur ρ sera donnée par l'équation (23), m étant premier à n, la valeur de la somme alternée $\mathfrak{S}$ deviendra

$$\mathfrak{S} = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}. \tag{24}$$

Les formules (21), (24) s'accordent avec les formules (52), (54) de la Note précédente; et cela devait être, puisqu'en vertu de la formule

(51) de la même Note les sommes désignées par Ω et par $\mathfrak{S}$ sont toujours égales, quand, n étant un nombre premier impair, ρ désigne une racine primitive de l'équation (1).

Il n'en serait plus de même si, dans les sommes Ω et $\mathfrak{S}$, on remplaçait ρ par la racine non primitive de l'équation (1), c'est-à-dire, par l'unité, puisqu'alors évidemment la somme Ω se réduirait au nombre n, et le second membre de l'équation (2) à zéro.

Les formules (22), (24) une fois établies pour le cas où n désigne un nombre premier supérieur à 2, il est facile de les étendre au cas où n désigne un nombre impair composé de facteurs premiers inégaux. Ainsi, en particulier, soit

$$n = \nu\nu';$$

et supposons que, ξ, η étant des racines primitives des deux équations

$$x^\nu = 1, \qquad x^{\nu'} = 1, \tag{25}$$

l'on pose

$$\rho = \xi\eta. \tag{26}$$

ρ sera une racine primitive de l'équation (1); et, si l'on nomme

$$\mathfrak{S}, \quad \Delta, \quad \Delta'$$

trois sommes alternées, formées avec les racines primitives des trois équations

$$x^n = 1, \qquad x^\nu = 1, \qquad x^{\nu'} = 1,$$

de telle manière que, parmi les termes affectés du signe $+$, on trouve dans la somme alternée $\mathfrak{S}$ le terme ρ, dans la somme Δ le terme ξ, dans la somme Δ' le terme η, on aura, en vertu des principes établis dans la Note VII,

$$\mathfrak{S} = \Delta\Delta'. \tag{27}$$

Soit d'ailleurs m un nombre entier, premier à ν et à ν', par conséquent premier à n; et supposons que, dans les sommes alternées

$$\mathfrak{S}, \quad \Delta, \quad \Delta',$$

on remplace

$$\rho, \quad \xi, \quad \eta,$$

par

$$\rho^m, \quad \xi^m, \quad \eta^m.$$

Les valeurs de

$$\mathfrak{D}, \quad \Delta, \quad \Delta'$$

ne cesseront pas de vérifier la condition (27) ; et, comme, en vertu des principes établis dans la Note VIII, les valeurs de

$$\Delta, \quad \Delta'$$

se trouveront multipliées par les quantités

$$\left[\frac{m}{\nu}\right], \quad \left[\frac{m}{\nu'}\right],$$

dont chacune se réduit, au signe près, à l'unité, la valeur de $\mathfrak{D}$ se trouvera multipliée par le produit

$$\left[\frac{m}{\nu}\right]\left[\frac{m}{\nu'}\right] = \left[\frac{m}{n}\right].$$

Donc, la substitution de ρ^m et ρ changera ou ne changera pas le signe de la somme alternée $\mathfrak{D}$, suivant que le nombre m vérifiera la première ou la seconde des conditions

$$\left[\frac{m}{n}\right] = -1, \qquad \left[\frac{m}{n}\right] = 1.$$

Concevons, à présent, que l'on pose

$$\xi = e^{\frac{2\pi}{\nu}\sqrt{-1}}, \qquad \eta = e^{\frac{2\pi}{\nu'}\sqrt{-1}},$$

l'équation (26) donnera

$$\rho = e^{\frac{2\pi(\nu-\nu')}{n}\sqrt{-1}};$$

et, comme on aura, en vertu de la formule (22),

$$\Delta = \nu^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2}, \qquad \Delta' = \nu'^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu'-1}{2}\right)^2},$$

on conclura de l'équation (27)

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\nu'-1}{2}\right)^2}, \tag{28}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{D} = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}\frac{\nu'-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu-\nu'}{2}\right)^2}, \tag{29}$$

attendu que l'on a identiquement

$$\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\nu'-1}{2}\right)^2 = \frac{\nu-1}{2}\frac{\nu'-1}{2} = \left(\frac{\nu-\nu'}{2}\right)^2.$$

Il y a plus : comme les nombres

$$\frac{\nu-\nu'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\nu\nu'-1}{2},$$

dont la somme

$$\frac{(\nu-1)(\nu'-1)}{2}$$

est divisible par 2, seront tous deux pairs ou tous deux impairs, on aura

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu-\nu'}{2}\right)^2} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu\nu'-1}{2}\right)^2} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Donc la formule (29) pourra être réduite à

$$\mathfrak{D} = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}\frac{\nu'-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}. \tag{30}$$

Cette dernière équation suppose que, dans la somme alternée $\mathfrak{D}$, l'un des termes précédés du signe + est

$$\rho = e^{\frac{2\pi(\nu+\nu')}{n}\sqrt{-1}}.$$

Si à la valeur de $\mathfrak{D}$, fournie par l'équation (30), on veut comparer celle qu'on obtiendrait en prenant pour l'un des termes précédés du signe + la valeur de ρ déterminée par la formule

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on conclura des observations précédemment faites que chacune de ces deux valeurs de $\mathfrak{D}$ est le produit de l'autre par l'expression

$$\left[\frac{\nu+\nu'}{n}\right] = \left[\frac{\nu+\nu'}{\nu\nu'}\right] = \left[\frac{\nu}{\nu'}\right]\left[\frac{\nu'}{\nu}\right] = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}\frac{\nu'-1}{2}}.$$

Donc, puisque la première valeur est donnée par la formule (30), la seconde sera fournie simplement par l'équation

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}; \tag{31}$$

et si, au lieu de poser

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on pose plus généralement

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on devra multiplier par $\left[\frac{m}{n}\right]$ le second membre de la formule (31), qui deviendra

$$\mathfrak{D} = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}. \tag{32}$$

Les formules (31) et (32) ne sont autre chose que les formules (22) et (24), étendues au cas où n est le produit de deux facteurs impairs et premiers ν, ν'. Il y a plus: les raisonnements dont nous avons fait usage suffisent pour étendre les formules (22), (24) au cas où n est le produit de deux facteurs impairs quelconques, pourvu que ces facteurs soient premiers entre eux, quand on suppose ces mêmes formules séparément vérifiées pour des valeurs de n représentées par chacun de ces facteurs. Donc, puisque,

$$\nu, \quad \nu', \quad \nu'', \quad \ldots$$

étant des nombres premiers impairs, les formules (22), (24) se vérifient quand on prend

$$n = \nu, \qquad n = \nu', \qquad n = \nu'', \qquad \ldots,$$

elles se vérifieront quand on prendra pour n le produit $\nu\nu'$ de ν par ν', ou le produit $\nu\nu'\nu''$ de $\nu\nu'$ par $\nu'', \ldots$, et par conséquent lorsqu'on prendra pour n le produit de tous les facteurs premiers $\nu, \nu', \nu'', \ldots$.

En résumé, si, n étant un nombre impair, et le produit de facteurs premiers inégaux, $\mathfrak{D}$ représente une somme alternée, formée avec les

racines primitives de l'équation (1), de telle manière que l'un des termes précédés du signe + soit la valeur de ρ déterminée par la formule

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et si d'ailleurs la somme $\mathfrak{D}$ est une fonction alternée des racines primitives, non seulement de l'équation (1), mais encore de chacune des équations que l'on pourrait obtenir en remplaçant successivement l'exposant n par chacun de ses facteurs premiers, on aura : 1° en supposant n de la forme $4x+1$,

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}; \tag{33}$$

2° en supposant n de la forme $4x+3$,

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{34}$$

Mais si, dans la somme alternée $\mathfrak{D}$, l'un des termes positifs est celui que détermine la formule

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on aura : 1° en supposant n de la forme $4x+1$,

$$\mathfrak{D} = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}}; \tag{35}$$

2° en supposant n de la forme $4x+3$,

$$\mathfrak{D} = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{36}$$

Il sera maintenant facile de déterminer complètement, dans tous les cas possibles, la valeur d'une somme alternée $\mathfrak{D}$, formée avec les racines primitives de l'équation (1). Considérons particulièrement le cas où la somme $\mathfrak{D}$ est une fonction alternée des racines primitives, non seulement de l'équation (1), mais encore de chacune des équations qu'on peut obtenir, lorsqu'après avoir décomposé l'exposant n en facteurs premiers entre eux, on remplace successivement n par chacun

de ces facteurs. Alors, d'après ce qui a été dit dans les Notes VII, VIII, IX, pour que la somme $\mathfrak{S}$ ne soit pas nulle, il faudra que, les facteurs impairs et premiers de n étant inégaux entre eux, le facteur pair, s'il existe, se réduise à l'un des nombres

$$4, \quad 8;$$

et l'on aura, ou

$$\mathfrak{S}^2 = n, \qquad \mathfrak{S} = \pm n, \tag{37}$$

ou bien

$$\mathfrak{S}^2 = -n, \qquad \mathfrak{S} = \pm n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \tag{38}$$

les formules (37) devant se vérifier, par exemple, quand n est de l'une des formes

$$4x+1, \qquad 4(4x+3),$$

et les formules (38), quand n est de l'une des formes

$$4x+3, \qquad 4(4x+1).$$

Nous avons d'ailleurs donné (p. 296, 297) les conditions auxquelles doivent satisfaire les exposants

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

dans la formule

$$\mathfrak{S} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots,$$

lorsqu'on en déduit les formules (37) ou les formules (38), et que le groupe des exposants

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

renferme l'unité. Or, de ces conditions on déduira sans peine, à l'aide de raisonnements semblables à ceux dont nous venons de faire usage, les conclusions suivantes :

D'abord, si l'on suppose n impair, et

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

la seconde des formules (37) se réduira simplement à la formule (33),

et la seconde des formules (38) à la formule (34). Alors aussi, en prenant, non plus

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

mais

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et supposant m premier à n, on obtiendra, comme on l'a dit, non plus l'équation (33) ou (34), mais l'équation (35) ou (36).

Supposons à présent que, le facteur pair de n étant le nombre 4, on désigne par υ le nombre premier ou non premier $\frac{n}{4}$, par

$$\alpha, \quad \varsigma, \quad \rho = \alpha\varsigma$$

des racines primitives des trois équations

$$x^4 = 1, \qquad x^\upsilon = 1, \qquad x^n = 1,$$

enfin par

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \mathfrak{S}$$

des sommes alternées, formées respectivement avec ces racines, de manière que, parmi les termes précédés du signe +, on trouve dans la somme Δ la racine α, dans la somme Δ' la racine ς, dans la somme $\mathfrak{S}$ la racine ρ. Si l'on pose

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{4}\sqrt{-1}}, \qquad \varsigma = e^{\frac{2\pi}{\upsilon}\sqrt{-1}},$$

on aura, non seulement

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}(\upsilon+1)\sqrt{-1}},$$

mais encore

$$\Delta = \alpha - \alpha^3 = 2\sqrt{-1}, \qquad \Delta' = \upsilon^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2},$$

et par conséquent

$$\mathfrak{S} = \Delta\Delta' = n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{1+\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2}. \tag{39}$$

Pour savoir si cette dernière formule fournit ou non la valeur de $\mathfrak{S}$, relative au cas où l'un des termes affectés du signe + se réduirait à

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

il suffira d'examiner si l'exposant $\nu + 4$ doit être censé ou non faire partie du même groupe que l'unité. Or, comme l'expression

$$\left[\frac{\nu+4}{\frac{1}{4}n}\right] = \left[\frac{\nu+4}{\nu}\right]$$

se réduit évidemment à

$$\left[\frac{4}{\nu}\right] = \left[\frac{2}{\nu}\right]^2 = 1,$$

il suffira d'examiner si $\nu + 4$, divisé par 4, donne pour reste 1 ou -1. Le premier cas a lieu lorsque $\nu = \frac{n}{4}$ est de la forme $4x+1$; le second cas, lorsque n est de la forme $4x+3$; et par suite, en supposant, dans la somme $\mathfrak{D}$, l'un des termes positifs réduit à

$$\rho + e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on obtiendra pour cette somme, dans le premier cas, la valeur qui détermine la formule (39), savoir

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{1+\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et dans le second cas, une valeur qui différera seulement par le signe de celle que donne la formule (39), savoir, la valeur

$$\mathfrak{D} = -n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{1+\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2} = n^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, si le facteur pair de n se réduit à 4, la supposition

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

reproduira encore, ou la formule (33) lorsque $\frac{n}{4}$ sera de la forme $4x+1$, ou la formule (34) lorsque $\frac{n}{4}$ sera de la forme $4x+3$. Quant à la supposition

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

elle reproduira, pour la somme $\mathfrak{D}$, soit la valeur que détermine la formule (33) ou (34), soit cette valeur prise en signe contraire, suivant que l'exposant m fera ou non partie du groupe $h, h', h'', \ldots$, qui est censé renfermer l'exposant 1.

Supposons enfin que, le facteur pair de n étant le nombre 8, on désigne par ν le nombre premier ou non premier $\frac{n}{8}$, par

$$\alpha, \quad \varsigma, \quad \rho = \alpha\varsigma$$

des racines primitives des trois équations

$$x^8 = 1, \qquad x^\nu = 1, \qquad x^n = 1,$$

et par

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \mathfrak{D}$$

des sommes alternées, formées respectivement avec ces racines, de manière que, parmi les termes affectés du signe $+$, on trouve dans la somme Δ la racine α, dans la somme Δ' la racine ς, dans la somme $\mathfrak{D}$ la racine ρ. Si l'on pose

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{8}\sqrt{-1}}, \qquad \varsigma = e^{\frac{2\pi}{\nu}\sqrt{-1}},$$

on aura non seulement

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}(\nu+8)\sqrt{-1}},$$

mais encore

$$\Delta' = \nu^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2}.$$

Alors aussi, quand la somme alternée Δ différera de zéro, elle sera, ou de la forme

$$(40) \qquad \Delta = \alpha + \alpha^7 - \alpha^3 - \alpha^5 = 2(\alpha + \alpha^7) = 4\cos\frac{\pi}{4} = 8^{\frac{1}{2}},$$

ou de la forme

$$(41) \qquad \Delta = \alpha + \alpha^3 - \alpha^5 - \alpha^7 = 2(\alpha + \alpha^3) = 4\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = 8^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et l'on aura, dans le premier cas,

$$(42) \qquad \mathfrak{D} = \Delta\Delta' = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2},$$

dans le second cas,

$$(43) \qquad \mathfrak{D} = \Delta\Delta' = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{1+\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2}.$$

Pour savoir si les formules (42) et (43) fournissent ou non les valeurs de $\mathfrak{D}$, qui sont relatives au cas où l'un des termes affectés du signe + se réduirait à

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et qui d'ailleurs diffèrent de zéro, il suffira de voir si, dans chacune des valeurs de $\mathfrak{D}$, les termes ρ, $\rho^{\upsilon+4}$ sont affectés du même signe, ou, ce qui revient au même, si l'exposant $\upsilon + 4$ fait partie du même groupe que l'unité. Or, d'une part, l'expression

$$\left[\frac{\upsilon+8}{\frac{1}{8}n}\right] = \left[\frac{\upsilon+8}{\upsilon}\right]$$

se réduit évidemment à

$$\left[\frac{8}{\upsilon}\right] = \left[\frac{2}{\upsilon}\right]^3 = \left[\frac{2}{\upsilon}\right] = (-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}};$$

et, d'autre part, $\upsilon + 8$, divisé par 8, donnera le même reste que υ, savoir : un reste représenté ou non par l'un des nombres 1, 7, suivant que l'expression

$$(-1)^{\frac{(\upsilon-1)(\upsilon-7)}{8}} = (-1)^{\frac{(\upsilon^2-1)}{8}}$$

aura pour valeur + 1 ou — 1 ; ou bien encore un reste représenté ou non par l'un des nombres 1, 3, suivant que l'expression

$$(-1)^{\frac{(-1)(\upsilon-3)}{8}}$$

aura pour valeur + 1 ou — 1. Donc, puisque l'on a

$$(-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}}(-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{4}} = 1$$

et

$$(-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}}(-1)^{\frac{(\upsilon-1)(\upsilon-3)}{8}} = (-1)^{\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{\upsilon-1}{2}},$$

les termes

$$\rho \quad \text{et} \quad \rho^{\upsilon+4}$$

seront toujours affectés du même signe dans la valeur de la somme $\mathfrak{D}$,

que détermine l'équation (42); mais, dans la valeur de la même somme, déterminée par l'équation (43), ils seront affectés du même signe ou de signes contraires, suivant que $\frac{\upsilon-1}{2}$ sera pair ou impair. Donc, si, en supposant

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on affecte du signe +, dans la somme alternée $\mathfrak{D}$, toute puissance de ρ dont l'exposant h vérifie la condition (9) ou (10) des pages 296, 297, on aura, en vertu de la formule (42) : 1° quand $\upsilon = \frac{n}{8}$ sera de la forme $4x + 1$,

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}};$$

2° quand $\frac{n}{8}$ sera de la forme $4x + 3$,

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

et si, en supposant toujours

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on affecte du signe +, dans la somme alternée $\mathfrak{D}$, toute puissance de ρ dont l'exposant h vérifie les conditions (11) ou (12) de la page 297, on aura encore : 1° en vertu de la formule (43), quand $\upsilon = \frac{n}{8}$ sera de la forme $4x + 1$,

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

2° quand $\upsilon = \frac{n}{8}$ sera de la forme $4x + 3$,

$$\mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}.$$

Si, dans la somme $\mathfrak{D}$, formée comme on vient de le dire, on remplaçait la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

par la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

m étant premier à n, cette somme conserverait le même signe avec la même valeur, ou bien elle changerait de signe, suivant que m serait ou ne serait pas un des exposants h compris dans le groupe qui renfermait l'unité.

Il importe d'observer que les conclusions diverses auxquelles nous venons de parvenir, en supposant successivement le nombre n impair, puis divisible par 4, puis divisible par 8, se trouvent toutes renfermées dans un théorème général, qu'on peut énoncer simplement comme il suit :

THÉORÈME. — *Soit* $\mathfrak{S}$ *une fonction alternée, formée avec les racines primitives de l'équation* (1), *et de manière à vérifier la formule*

$$\mathfrak{S} = \pm n.$$

Si l'on suppose que, dans la somme alternée $\mathfrak{S}$, *l'un des termes précédés du signe* + *soit la racine primitive*

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on aura simultanément : ou

$$\mathfrak{S}^2 = n \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\mathfrak{S}^2 = -n \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

en sorte que la valeur de $\mathfrak{S}$ *sera toujours fournie par l'une des équations* (20), (21) *ou* (33), (34).

Exemples. — En prenant

$$n = 3, \qquad \rho = e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\mathfrak{S} = \rho - \rho^2 = 2\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1} = 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

En prenant

$$n = 4, \qquad \rho = e^{\frac{2\pi}{4}\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\mathfrak{S} = \rho - \rho^3 = 2\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = 4^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

En prenant

$$n = 8, \qquad \rho = e^{\frac{2\pi}{8}\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

on trouvera :

$$\mathfrak{S} = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5 = 4\cos\frac{\pi}{4} = 8^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\mathfrak{S} = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7 = 4\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = 8^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

En prenant

$$n = 24, \qquad \rho = e^{\frac{2\pi}{24}\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{12}\sqrt{-1}},$$

on trouvera : ou

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= \rho + \rho^5 + \rho^7 + \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{17} - \rho^{19} - \rho^{23} \\ &= (\rho^8 - \rho^{16})(\rho^3 + \rho^{21} - \rho^9 - \rho^{15}) \\ &= \left(2\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right)\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right) = 3^{\frac{1}{2}}8^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = 24^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= \rho + \rho^5 + \rho^{19} + \rho^{23} - \rho^7 - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{17} \\ &= (\rho^8 - \rho^{16})(\rho^{15} + \rho^{21} - \rho^3 - \rho^9) \\ &= \left(2\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right)\left(-4\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = 3^{\frac{1}{2}}8^{\frac{1}{2}} = 24^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

....

Nota. — Si, dans la somme alternée $\mathfrak{S}$, formée comme on vient de le dire, on supposait précédé du signe + le terme représenté, non par la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

mais par la suivante

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

m étant premier à n ; alors la somme alternée $\mathfrak{S}$ offrirait ou la valeur que fournit le théorème énoncé, ou cette même valeur prise en signe contraire, suivant que le nombre m ferait ou non partie du groupe des nombres ci-dessus représentés par

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

(*voir*, pour la détermination de ces mêmes nombres, les pages 296 et 297).

Nous terminons cette Note par une observation qui n'est pas sans importance.

Supposons que, dans le cas où l'on prend

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

la somme alternée

$$(44) \qquad \mathfrak{D} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots$$

vérifie l'équation

$$\mathfrak{D}^2 = \pm n;$$

la même équation sera encore vérifiée quand on prendra

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

si m est premier à n. Mais, si m cesse d'être premier à n, alors en prenant

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on trouvera toujours

$$(45) \qquad \mathfrak{D} = 0,$$

comme on va le faire voir.

Pour que la somme $\mathfrak{D}$ vérifie l'équation

$$\mathfrak{D}^2 = \pm n,$$

il est nécessaire, comme on l'a dit, que les facteurs impairs et premiers de n étant inégaux, le facteur pair, s'il existe, se réduise à l'un des nombres

$$4, \quad 8.$$

D'autre part, lorsque dans la formule

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

m cessera d'être premier à n, ρ deviendra une des racines non primitives de l'équation

$$x^n = 1.$$

Donc alors, si n désigne un nombre premier impair, ou le nombre 4, ou le nombre 8, ρ se réduira, dans le premier cas, à l'unité; dans le second cas, à l'une des racines

$$+1, \quad -1$$

de l'équation

$$x^2 = 1;$$

dans le troisième cas, à l'une des racines

$$+1, \quad -1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}$$

de l'équation

$$x^4 = 1.$$

Or, dans ces trois cas, la formule (2), que l'on doit, en supposant le terme ρ précédé du signe $+$, réduire, pour $n = 4$, à

$$\mathfrak{D} = \rho - \rho^3,$$

et pour $n = 8$ à l'une des suivantes

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5, \qquad \mathfrak{D} = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7,$$

donnera évidemment

$$\mathfrak{D} = 0.$$

Si maintenant on suppose

$$n = \nu\nu'\nu'' \ldots,$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ étant des facteurs dont chacun se réduise à un nombre impair et premier, soit à l'un des nombres 4, 8; alors la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

pourra être présentée sous la forme

$$\rho = \xi\eta\zeta \ldots,$$

$\xi, \eta, \zeta, \ldots$ désignant des racines primitives propres à vérifier respectivement les équations

$$x^\nu = 1, \qquad x^{\nu'} = 1, \qquad x^{\nu''} = 1, \qquad \ldots,$$

et la somme $\mathfrak{D}$, formée avec les puissances de la racine primitive ρ, sera le produit des sommes alternées

$$\Delta,\quad \Delta',\quad \Delta'',\quad \ldots,$$

respectivement formées avec les puissances des racines primitives

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \ldots.$$

Or, remplacer, dans la somme alternée

$$\mathfrak{D} = \Delta\Delta'\Delta''\ldots,$$

la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

par la racine non primitive

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

revient à substituer, dans la somme $\mathfrak{D}$, le produit

$$\rho^m = \xi^m \eta^m \zeta^m \ldots$$

au produit

$$\rho = \xi\eta\zeta\ldots;$$

par conséquent à substituer, dans les sommes $\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$,

$$\xi^m \text{ à } \xi,\qquad \eta^m \text{ à } \eta,\qquad \zeta^m \text{ à } \zeta,\qquad \ldots.$$

Or, en vertu de ces dernières substitutions, une ou plusieurs des sommes

$$\Delta,\quad \Delta',\quad \Delta''.\quad \ldots$$

s'évanouiront, suivant que le nombre m cessera d'être premier à un ou à plusieurs des facteurs

$$\nu,\quad \nu',\quad \nu'',\quad \ldots;$$

donc aussi la somme

$$\mathfrak{D} = \Delta\Delta'\Delta''\ldots$$

s'évanouira elle-même, et l'on pourra énoncer généralement la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Soient ρ une des racines primitives de l'équation*

$$x^n = 1$$

et

$$\mathfrak{D} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''}\ldots \tag{46}$$

une somme alternée de ces racines qui vérifie la condition

$$\mathfrak{D}^2 = \pm n.$$

Si, dans cette somme alternée, on substitue à la racine primitive ρ une racine non primitive, en prenant par exemple

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et supposant que le nombre m cesse d'être premier à n, la valeur de la somme $\mathfrak{D}$, que déterminera la formule (11), *sera*

$$\mathfrak{D} = 0.$$

NOTE XII.

FORMULES DIVERSES QUI SE DÉDUISENT DES PRINCIPES ÉTABLIS DANS LA NOTE PRÉCÉDENTE.

Soient toujours :

n un nombre entier quelconque ;

$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n et premiers à n ;

ρ l'une des racines primitives de l'équation

$$x^n = 1 \tag{1}$$

et

$$\mathfrak{D} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots \tag{2}$$

une somme alternée formée avec ces racines primitives, les entiers

$$h,\quad k,\quad l,\quad \ldots$$

étant partagés en deux groupes

$$h,\quad h',\quad h'',\quad \ldots \qquad \text{et} \qquad k,\quad k',\quad k'',\quad \ldots,$$

de telle manière qu'un changement opéré dans la valeur de la racine primitive ρ puisse produire un changement de signe dans la somme $\mathfrak{D}$, sans avoir jamais d'autre effet sur cette somme, et que l'unité fasse partie du groupe

$$h,\quad h',\quad h'',\quad \ldots.$$

Enfin, considérons spécialement le cas où la somme $\mathfrak{D}$ vérifie la condition

$$\mathfrak{D}^2 = \pm n; \tag{3}$$

ce qui suppose les facteurs impairs de n inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant l'un des nombres 4, 8. Si l'on pose

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}, \tag{4}$$

on aura, en vertu du premier théorème de la Note précédente : ou

$$\mathfrak{D}^2 = n \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

ou

$$\mathfrak{D}^2 = -n \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{D} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \tag{6}$$

les équations (5) étant relatives au cas où n est de l'une des formes

$$4x+1, \quad 4(4x+3), \quad 8(4x+1),$$

et les équations (6), au cas où n est de l'une des formes

$$4x+3, \quad 4(4x+1), \quad 8(4x+3).$$

D'ailleurs, en vertu des formules (3), (4), la seconde des équations (5) donnera

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2h\pi}{n} + \cos\dfrac{2h'\pi}{n} + \ldots - \cos\dfrac{2k\pi}{n} - \cos\dfrac{2k'\pi}{n} - \ldots = n^{\frac{1}{2}}, \\ \sin\dfrac{2h\pi}{n} + \sin\dfrac{2h'\pi}{n} + \ldots - \sin\dfrac{2k\pi}{n} - \sin\dfrac{2k'\pi}{n} - \ldots = 0; \end{cases} \tag{7}$$

et la seconde des formules (6) donnera

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2h\pi}{n} + \cos\dfrac{2h'\pi}{n} + \ldots - \cos\dfrac{2k\pi}{n} - \cos\dfrac{2k'\pi}{n} - \ldots = 0, \\ \sin\dfrac{2h\pi}{n} + \sin\dfrac{2h'\pi}{n} + \ldots - \sin\dfrac{2k\pi}{n} - \sin\dfrac{2k'\pi}{n} - \ldots = n^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{8}$$

Il y a plus : si, m étant un nombre impair premier à n, on pose

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}}, \tag{9}$$

alors, en désignant par ι_m un coefficient qui se réduise à

$$+1 \qquad \text{ou à} \qquad -1,$$

suivant que le nombre m fait partie du groupe

$$h,\quad h',\quad h'',\quad \ldots$$

ou du groupe

$$k,\quad k',\quad k'',\quad \ldots,$$

on aura, en vertu des principes établis dans la Note précédente : ou

$$\mathfrak{D} = \iota_m n^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

et, par suite,

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2mh\pi}{n} + \cos\dfrac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \cos\dfrac{2mk\pi}{n} - \cos\dfrac{2mk'\pi}{n} - \ldots = \iota_m n^{\frac{1}{2}}, \\ \sin\dfrac{2mh\pi}{n} + \sin\dfrac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \sin\dfrac{2mk\pi}{n} - \sin\dfrac{2mk'\pi}{n} - \ldots = 0, \end{cases} \tag{11}$$

ou

$$\mathfrak{D} = \iota_m n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \tag{12}$$

et, par suite,

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2mh\pi}{n} + \cos\dfrac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \cos\dfrac{2mk\pi}{n} - \cos\dfrac{2mk'\pi}{n} - \ldots = 0, \\ \sin\dfrac{2mh\pi}{n} + \sin\dfrac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \sin\dfrac{2mk\pi}{n} - \cos\dfrac{2mk'\pi}{n} - \ldots = \iota_m n^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{13}$$

On aura d'ailleurs : 1° si n est impair,

$$\iota_m = \left[\frac{m}{n}\right]; \tag{14}$$

2° si n est divisible par 4, mais non par 8,

$$\iota_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{m}{\frac{1}{4}n}\right]; \tag{15}$$

3° si n est divisible par 8, et de la forme $8(4x+1)$, la valeur ⓓ étant fournie par l'équation (10), ou de la forme $8(4x+3)$, la valeur de ⓓ étant fournie par l'équation (12),

$$\iota_m = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \left[\frac{m}{\frac{1}{8}n}\right]; \tag{16}$$

4° enfin, si n est divisible par 8 et de la forme $8(4x+3)$, la valeur de ⓓ étant fournie par l'équation (10), ou de la forme $8(4x+1)$, la valeur de ⓓ étant fournie par l'équation (12),

$$\iota_m = (-1)^{\frac{(m-1)(m-3)}{8}} \left[\frac{m}{\frac{1}{8}n}\right]. \tag{17}$$

M. Gauss est parvenu le premier aux formules (11) et (13), qu'il a données en 1801, dans ses *Recherches arithmétiques* [§ 356], pour le cas où n est un nombre premier, mais sans déterminer le signe du coefficient ι_m, dont la valeur numérique se réduit à l'unité. C'est dans le Mémoire intitulé *Summatio serierum quarumdam singularium* que le même géomètre, en reproduisant les formules (11) et (13), les a déduites d'une méthode qui lui a permis de fixer le signe de ι_m.

Si, dans la valeur de ρ, que fournit l'équation (9), le nombre m cessait d'être premier à n, alors, en vertu du théorème II de la Note précédente, la somme alternée ⓓ, que détermine la formule (2), se réduirait à

$$\mathfrak{D} = 0; \tag{18}$$

et, par suite, on aurait simultanément

$$\begin{cases} \cos\frac{2mh\pi}{n} + \cos\frac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \cos\frac{2mk\pi}{n} - \cos\frac{2mk'\pi}{n} - \ldots = 0, \\ \sin\frac{2mh\pi}{n} + \sin\frac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \sin\frac{2mk\pi}{n} - \sin\frac{2mk'\pi}{n} - \ldots = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Donc, si l'on veut étendre les formules (11) et (13) au cas où les nombres m et n cessent d'être premiers entre eux, il suffira d'admettre que, dans ce cas, la valeur du coefficient représenté par ι_m est nulle et vérifie l'équation

$$\iota_m = 0. \tag{20}$$

Avant d'aller plus loin, nous rappellerons ici qu'en vertu des conditions énoncées à la page 296 et à la page 297, les deux nombres

$$1, \quad n-1 \equiv -1 \pmod{n}$$

et, par suite, les deux nombres

$$l, \quad n-l \equiv -l \pmod{n},$$

l étant inférieur à n, mais premier à n, appartiendront à un seul des deux groupes

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots \qquad \text{et} \qquad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots,$$

ou l'un au premier de ces groupes, l'autre au second, suivant que la somme alternée ⓓ sera déterminée par la formule (10) ou par la formule (12). Donc, si l'on représente par

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots \qquad \text{ou par} \qquad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots$$

les seules valeurs de h ou de k inférieures à $\frac{1}{2}n$, alors, dans la somme alternée ⓓ que détermine la formule (10), le système entier des valeurs de h pourra être représenté par

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots, \quad n-h, \quad n-h', \quad n-h'', \quad \ldots,$$

et le système entier des valeurs de k par

$$k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots, \quad n-k, \quad n-k', \quad n-k'', \quad \ldots;$$

mais, au contraire, dans la somme alternée ⊛ que détermine la formule (12), le système entier des valeurs de h pourra être représenté par

$$h,\quad h',\quad h'',\quad \ldots,\quad n-k,\quad n-k',\quad n-k'',\quad \ldots,$$

et le système entier des valeurs de k par

$$k,\quad k',\quad k'',\quad \ldots,\quad n-h,\quad n-h',\quad n-h'',\quad \ldots.$$

Comme on aura d'ailleurs généralement

$$\rho^{n-l}=\rho^{-l},$$

il est clair qu'à la place de la formule (2) on obtiendra, dans le premier cas, l'équation

$$(21)\qquad \circledast=\rho^{h}+\rho^{-h}+\rho^{h'}+\rho^{-h'}+\ldots-\rho^{k}-\rho^{-k}-\rho^{k'}-\rho^{-k'}-\ldots$$

et, dans le second cas, l'équation

$$(22)\qquad \circledast=\rho^{h}-\rho^{-h}+\rho^{h'}-\rho^{-h'}+\ldots-\rho^{k}+\rho^{-k}-\rho^{k'}+\rho^{-k'}-\ldots.$$

Par suite, on pourra facilement constater l'exactitude de la seconde des formules (11) qui se trouvera remplacée par une équation identique, comme la première des formules (13), tandis que la première des formules (11) se trouvera réduite à

$$(23)\quad \cos\frac{2mh\pi}{n}+\cos\frac{2mh'\pi}{n}+\ldots-\cos\frac{2mk\pi}{n}-\cos\frac{2mk'\pi}{n}-\ldots=\frac{1}{2}\iota_m n^{\frac{1}{2}},$$

et la seconde des formules (13) à

$$(24)\quad \sin\frac{2mh\pi}{n}+\sin\frac{2mh'\pi}{n}+\ldots-\sin\frac{2mk\pi}{n}-\sin\frac{2mk'\pi}{n}-\ldots=\frac{1}{2}\iota_m n^{\frac{1}{2}}.$$

Des observations que nous venons de faire on déduit encore une conclusion qui peut être aisément vérifiée à l'aide des formules (14), (15), (16), (17); savoir, que l'on a généralement

$$(25)\qquad \iota_{-1}=\iota_1,\qquad \iota_{-m}=\iota_m,$$

quand la somme alternée ⊛ satisfait à l'équation (10), et

$$(26)\qquad \iota_{-1}=-\iota_1,\qquad \iota_{-m}=-\iota_m,$$

quand la somme alternée ⊛ satisfait à l'équation (12). On peut aussi, à l'aide des formules (14), (15), (16), (17), s'assurer facilement que, si l'entier m est décomposable en deux facteurs premiers ou non premiers μ, μ', l'équation

$$(27)\qquad m=\mu\mu'$$

entraînera la suivante

$$(28)\qquad \iota_m=\iota_\mu\iota_{\mu'}.$$

Pareillement une équation de la forme

$$(29)\qquad m=\mu\mu'\mu''\ldots$$

entraînerait la suivante

$$(30)\qquad \iota_m=\iota_\mu\iota_{\mu'}\iota_{\mu''}\ldots.$$

Soit maintenant N le nombre des entiers

$$h,\quad k,\quad l,\quad \ldots$$

inférieurs à n, mais premiers à n. Ceux d'entre eux qui ne surpasseront pas $\frac{1}{2}n$ seront en nombre égal à $\frac{N}{2}$, et, parmi ces derniers, les uns, dont nous désignerons le nombre par i, seront ceux que représentent, dans les formules (23), (24), les lettres h, $h'\ldots$, tandis que les autres, dont nous désignerons le nombre par j, seront ceux que représentent, dans les mêmes formules, les lettres k, k', ... Cela posé, on aura nécessairement

$$(31)\qquad i+j=\frac{N}{2}.$$

D'autre part, dans la somme alternée ⊛, le nombre des termes affectés du signe + est égal au nombre des termes affectés du signe −, par conséquent à la moitié du nombre total des termes ou à $\frac{1}{2}$N. Or, comme la somme alternée ⊛, lorsqu'elle vérifiera la formule (10), offrira une valeur déterminée par l'équation (21), on aura nécessairement dans

cette hypothèse

$$2i = \frac{N}{2}, \qquad 2j = \frac{N}{2}$$

et, par suite,

$$i = j = \frac{N}{2}. \tag{32}$$

Des formules (11) et (13), ou (23) et (24), combinées avec les équations connues qui servent à développer les fonctions en séries ordonnées suivant les sinus ou les cosinus des multiples d'un arc, on déduit aisément divers résultats dignes de remarque, et en particulier ceux que M. Dirichlet a obtenus, à l'aide de semblables combinaisons, dans plusieurs Mémoires qui ont attiré l'attention des géomètres. Concevons, par exemple, que l'on combine les formules (11) et (13), ou, ce qui revient au même, les formules (10) et (12), avec l'équation

$$\left\{\begin{aligned} n\,f(x) = \int_0^a f(u)\,du + 2\int_0^a \cos\frac{2\pi(x-u)}{n} f(u)\,du \\ + 2\int_0^a \cos\frac{4\pi(x-u)}{n} f(u)\,du + \dots, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

que l'on déduit de la formule (77) de la page 357 (1) du deuxième Volume des *Exercices de Mathématiques*, en y remplaçant

$$a \text{ par } n, \qquad x_0 \text{ par } 0, \qquad X \text{ par } a,$$

et qui subsiste, pour des valeurs de a inférieures à n, entre les limites $x = 0$, $x = a$ de la variable x, dans le cas où la fonction $f(x)$ reste continue entre ces limites. Comme, en prenant

$$\omega = \frac{2\pi}{n}, \tag{34}$$

on aura généralement

$$\cos\frac{2m\pi(x-u)}{n} = \cos m\omega(x-u) = \cos m\omega x \cos m\omega u + \sin m\omega x \sin m\omega u,$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 410.

si l'on suppose la quantité a positive et supérieure à $n - 1$, mais inférieure à n, on tirera de la formule (33) jointe à la formule (10) ou (12): 1° en admettant que la somme alternée $\mathfrak{S}$ soit déterminée par la formule (10), et que l'on ait en conséquence $\iota_{-m} = \iota_m$,

$$\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} [f(h) + f(h') + \dots - f(k) - f(k') - \dots] \\ &= \iota_1 \int_0^a \cos\omega u\, f(u)\,du + \iota_2 \int_0^a \cos 2\omega u\, f(u)\,du \\ &\qquad + \iota_3 \int_0^a \cos 3\omega u\, f(u)\,du + \dots; \end{aligned}\right. \tag{35}$$

2° en admettant que la somme alternée $\mathfrak{S}$ soit déterminée par la formule (12), et que l'on ait par suite $\iota_{-m} = -\iota_m$,

$$\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} [f(h) + f(h') + \dots - f(k) - f(k') - \dots] \\ &= \iota_1 \int_0^a \sin\omega u\, f(u)\,du + \iota_2 \int_0^a \sin 2\omega u\, f(u)\,du \\ &\qquad + \iota_3 \int_0^a \sin 3\omega u\, f(u)\,du + \dots. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Les formules (35) et (36) supposent, comme les formules (11) et (13), que h, h', h'', ... représentent les diverses valeurs de h, et k, k', k'', ... les diverses valeurs de k, renfermées entre les limites 0, n. D'ailleurs, en vertu de l'équation (20), on doit, dans les seconds membres des formules (35) et (36), remplacer par zéro le terme général ι_m de la suite

$$\iota_1, \quad \iota_2, \quad \iota_3, \quad \dots,$$

toutes les fois que le nombre entier m cesse d'être premier à n.

On peut remarquer encore que l'on a, pour des valeurs quelconques de ω,

$$\int_0^a \cos m\omega u\,du = \frac{\sin m\omega a}{m\omega}, \qquad \int_0^a \sin m\omega u\,du = \frac{1 - \cos m\omega a}{m\omega}. \tag{37}$$

Or, de ces dernières équations, différentiées l fois par rapport à ω, on

conclut : 1° pour des valeurs paires de l,

$$(38)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a u^l \cos m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}}}{m^l} D_\omega^l \frac{\sin m\omega a}{m\omega}, \\ \displaystyle\int_0^a u^l \sin m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}}}{m^l} D_\omega^l \frac{1-\cos m\omega a}{m\omega}; \end{cases}$$

2° pour des valeurs impaires de l,

$$(39)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a u^l \cos m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{m^l} D_\omega^l \frac{1-\cos m\omega a}{m\omega}, \\ \displaystyle\int_0^a u^l \sin m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{m^l} D_\omega^l \frac{\sin m\omega a}{m\omega}, \end{cases}$$

la notation D_ω^l indiquant l différentiations relatives à ω. Cela posé, on pourra aisément faire disparaître les signes d'intégration contenus dans les seconds membres des formules (35), (36), toutes les fois que $f(x)$ représentera une fonction entière de x, composée d'un nombre fini ou même infini de termes. Si cette fonction entière est de plus une fonction paire de x, on tirera de la formule (35), jointe à la première des formules (38),

$$(40)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} [f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ \quad = \iota_1 f(\sqrt{-1}\, D_\omega) \dfrac{\sin\omega a}{\omega} + \iota_2 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{3} D_\omega\right) \dfrac{\sin 2\omega a}{2\omega} \\ \qquad\qquad + \iota_3 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{3} D_\omega\right) \dfrac{\sin 3\omega a}{3\omega} + \ldots, \end{cases}$$

ou de la formule (36), jointe à la seconde des formules (38),

$$(41)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} [f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ \quad = \iota_1 f(\sqrt{-1}\, D_\omega) \dfrac{1-\cos\omega a}{\omega} + \iota_2 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2} D_\omega\right) \dfrac{1-\cos 2\omega a}{2\omega} \\ \qquad\qquad + \iota_3 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{3} D_\omega\right) \dfrac{1-\cos 3\omega a}{3\omega} + \ldots. \end{cases}$$

Si au contraire $f(x)$ est une fonction impaire de x, on tirera de la formule (35), jointe à la première des formules (39),

$$(42)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}\, [f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ \quad = \iota_1 f(\sqrt{-1}\, D_\omega) \dfrac{1-\cos\omega a}{\omega} + \iota_2 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2} D_\omega\right) \dfrac{1-\cos 2\omega a}{2\omega} \\ \qquad\qquad + \iota_3 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{3} D_\omega\right) \dfrac{1-\cos 3\omega a}{3\omega} + \ldots, \end{cases}$$

ou de la formule (36), jointe à la seconde des formules (39),

$$(43)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}\, [f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ \quad = \iota_1 f(\sqrt{-1}\, D_\omega) \dfrac{\sin\omega a}{\omega} + \iota_2 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2} D_\omega\right) \dfrac{\sin 2\omega a}{2\omega} \\ \qquad\qquad + \iota_3 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{3} D_\omega\right) \dfrac{\sin 3\omega a}{3\omega} + \ldots. \end{cases}$$

Au reste, les formules (40), (41), (42), (43) sont comprises comme cas particuliers dans celles que nous allons établir.

Si, dans le second membre de l'équation (35), on transforme les cosinus en exponentielles imaginaires, on tirera de cette équation, en prenant pour $f(x)$ une fonction entière de x

$$\begin{aligned} & n^{\frac{1}{2}} [f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ & = \iota_1 f(\sqrt{-1}\, D_\omega) \int_0^a e^{-\omega u\sqrt{-1}}\, du + \iota_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} D_\omega\right) \int_0^a e^{-2\omega u\sqrt{-1}}\, du + \ldots \\ & \quad + \iota_1 f(-\sqrt{-1}\, D_\omega) \int_0^a e^{\omega u\sqrt{-1}}\, du + \iota_2 f\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2} D_\omega\right) \int_0^a e^{2\omega u\sqrt{-1}}\, du + \ldots, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(44)\quad \begin{cases} n^{\frac{1}{2}} [f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ \quad = \iota_1 f(\sqrt{-1}\, D_\omega) \dfrac{1 - e^{-\omega a\sqrt{-1}}}{\omega\sqrt{-1}} + \iota_2 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2} D_\omega\right) \dfrac{1 - e^{-2\omega a\sqrt{-1}}}{2\omega\sqrt{-1}} + \ldots \\ \quad + \iota_1 f(-\sqrt{-1}\, D_\omega) \dfrac{e^{\omega a\sqrt{-1}} - 1}{\omega\sqrt{-1}} + \iota_2 f\left(-\dfrac{\sqrt{-1}}{2} D_\omega\right) \dfrac{e^{2\omega a\sqrt{-1}} - 1}{2\omega\sqrt{-1}} + \ldots \end{cases}$$

On tirera au contraire de l'équation (36)

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}n^{\frac{1}{2}}[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots]$$
$$= t_1 f(\sqrt{-1}\,D\omega)\int_0^a e^{-\omega a\sqrt{-1}}du + t_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\int_0^a e^{-2\omega a\sqrt{-1}}du+\ldots$$
$$-t_1 f(-\sqrt{-1}\,D\omega)\int_0^a e^{\omega a\sqrt{-1}}du - t_2 f\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\int_0^a e^{2\omega a\sqrt{-1}}du-\ldots$$

et, par suite,

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{l} n^{\frac{1}{2}}[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-(k')-\ldots] \\ = t_1 f(\sqrt{-1}\,D\omega)\dfrac{1-e^{-\omega a\sqrt{-1}}}{\omega} + t_2 f\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\dfrac{1-e^{-2\omega a\sqrt{-1}}}{2\omega}+\ldots \\ -t_1 f(-\sqrt{-1}\,D\omega)\dfrac{1-e^{\omega a\sqrt{-1}}}{\omega} + t_2 f\left(-\dfrac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\dfrac{1-e^{2\omega a\sqrt{-1}}}{2\omega}+\ldots. \end{array}\right.$$

On ne doit pas oublier que les formules (40), (42), (44) correspondent à l'équation (10), et les formules (41), (43), (45) à l'équation (12). Dans ces diverses formules, la quantité a doit être non seulement positive, mais supérieure à $n-1$ et inférieure à n. On peut même supposer qu'elle atteint la limite n, et, dans cette hypothèse, après avoir effectué les différentiations relatives à ω, on verra le produit ωa se réduire à 2π, et les exponentielles de la forme

$$e^{-m\omega a\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad e^{m\omega a\sqrt{-1}}$$

à l'unité.

Pour montrer une application des formules qui précèdent, concevons que, m étant un nombre entier quelconque, l'on pose

$$f(x)=x^m,$$

et faisons, pour abréger,

$$(46)\qquad \Delta_m = h^m + h'^m + \ldots - k^m - k'^m - \ldots.$$

On tirera des formules (40) ou (41), pour des valeurs paires de m :

1° en supposant $\mathfrak{D}^2 = n$,

$$(47)\quad (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\Delta_m = D_\omega^m\left(t_1\frac{\sin\omega a}{\omega}+\frac{t_2}{2^m}\frac{\sin 2\omega a}{2\omega}+\frac{t_3}{3^m}\frac{\sin 3\omega a}{3\omega}+\ldots\right);$$

2° en supposant $\mathfrak{D}^2 = -n$,

$$(48)\quad (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\Delta_m = D_\omega^m\left(t_1\frac{1-\cos\omega a}{\omega}+\frac{t_2}{2^m}\frac{1-\cos 2\omega a}{2\omega}+\frac{t_3}{3^m}\frac{1-\cos 3\omega a}{3\omega}+\ldots\right).$$

On tirera au contraire des formules (42) et (43), pour des valeurs impaires de m : 1° en supposant $\mathfrak{D} = n$,

$$(49)\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\Delta_m = D_\omega^m\left(t_1\frac{1-\cos\omega a}{\omega}+\frac{t_2}{2^m}\frac{1-\cos 2\omega a}{2\omega}+\frac{t_3}{3^m}\frac{1-\cos 3\omega a}{3\omega}+\ldots\right);$$

2° en supposant $\mathfrak{D}^2 = -n$,

$$(50)\quad (-1)^{\frac{m+2}{2}}\frac{1}{2}n\,\Delta_m = D_\omega^m\left(t_1\frac{\sin\omega a}{\omega}+\frac{t_2}{2^m}\frac{\sin 2\omega a}{2\omega}+\frac{t_3}{3^m}\frac{\sin 3\omega a}{3\omega}+\ldots\right).$$

D'ailleurs, Ω désignant une fonction quelconque de ω, on aura généralement

$$D_\omega^m(\omega^{-1}\Omega) = \Omega D_\omega^m\omega^{-1} + \frac{m}{1}D_\omega\Omega D_\omega^{m-1}\omega^{-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}D_\omega^2\Omega D_\omega^{m-2}\omega^{-1}+\ldots,$$

et, par suite,

$$D_\omega^m(\omega^{-1}\Omega) = (-1)^m\frac{1.2.3\ldots m}{\omega^{m+1}}\left(\Omega - \frac{\omega}{1}D_\omega\Omega + \frac{\omega^2}{1.2}D_\omega^2\Omega - \ldots \pm \frac{\omega^m}{1.2\ldots m}D_\omega^m\Omega\right).$$

Donc, en désignant par l un nombre entier quelconque, et posant, après les différentiations,

$$a = n, \qquad \omega = \frac{2\pi}{n}, \qquad a\omega = 2\pi,$$

on trouvera, pour des valeurs paires de m,

$$D_\omega^m\frac{\sin l\omega a}{\omega} = -n^{m+1}\left[\frac{2.3\ldots m}{(2\pi)^m}l - \frac{4.5\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}l^3+\ldots\pm\frac{m}{(2\pi)^2}l^{m-1}\right],$$
$$D_\omega^m\frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = n^{m+1}\left[\frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}l^2 - \frac{5.6\ldots m}{(2\pi)^{m-3}}l^4+\ldots\pm\frac{1}{2\pi}l^m\right],$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$D_\omega^m\frac{\sin l\omega a}{\omega} = n^{m+1}\left[\frac{2.3\ldots m}{(2\pi)^m}l - \frac{4.5\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}l^3+\ldots\pm\frac{1}{2\pi}l^m\right],$$
$$D_\omega^m\frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = -n^{m+1}\left[\frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}l^2 - \frac{5.6\ldots m}{(2\pi)^{m-3}}l^4+\ldots\pm\frac{m}{(2\pi)^2}l^{m-1}\right].$$

Donc, si l'on pose, pour abréger,

$$\vartheta_1 = \iota_1 + \frac{\iota_2}{2} + \frac{\iota_3}{3} + \ldots, \qquad \vartheta_2 = \iota_1 + \frac{\iota_2}{2^2} + \frac{\iota_3}{3^2} + \ldots \qquad \ldots,$$

et généralement

$$(51) \qquad \vartheta_m = \iota_1 + \frac{\iota_2}{2^m} + \frac{\iota_3}{3^m} + \frac{\iota_4}{4^m} + \frac{\iota_5}{5^m} + \ldots,$$

on tirera des formules (47) et (49), en supposant $\omega^2 = n$: 1° pour des valeurs paires de m,

$$(52) \quad \Delta_m = 2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{m}{(2\pi)^2}\vartheta_2 - \frac{(m-2)(m-1)m}{(2\pi)^4}\vartheta_m + \ldots \pm \frac{2.3.4\ldots m}{(2\pi)^m}\vartheta_m\right];$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$(53) \quad \Delta_m = 2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{m}{(2\pi)^2}\vartheta_2 - \frac{(m-2)(m-1)m}{(2\pi)^4}\vartheta_m + \ldots \pm \frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}\vartheta_{m-2}\right];$$

mais, en supposant $\omega^2 = -n$, on tirera des formules (48) et (50) : 1° pour des valeurs paires de m,

$$(54) \quad \Delta_m = -2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\pi}\vartheta_1 - \frac{(m-1)m}{(2\pi)^3}\vartheta_3 + \ldots \pm \frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}\vartheta_{m-1}\right];$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$(55) \quad \Delta_m = -2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\pi}\vartheta_1 - \frac{(m-1)m}{(2\pi)^3}\vartheta_3 + \ldots \pm \frac{2.3.4\ldots m}{(2\pi)^m}\vartheta_m\right].$$

Ainsi, en supposant $\omega^2 = n$, on trouvera successivement

$$(56) \qquad \Delta_0 = 0, \qquad \Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = \frac{\vartheta_2}{\pi^2}n^2, \qquad \Delta_3 = \frac{3}{2}\frac{\vartheta_2}{\pi^2}n^{\frac{7}{2}}, \qquad \ldots,$$

tandis qu'en supposant $\omega^2 = -n$, on trouvera

$$(57) \quad \Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = -\frac{\vartheta_1}{\pi}n^{\frac{3}{2}}, \quad \Delta_2 = -\frac{\vartheta_1}{\pi}n^{\frac{5}{2}}, \quad \Delta_3 = \left(\frac{3}{2}\frac{\vartheta_2}{\pi^3} - \frac{\vartheta_1}{\pi}\right)n^{\frac{7}{2}}, \quad \ldots.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= h^0 + h'^0 + \ldots - k^0 - k'^0 - \ldots,\\
\Delta_1 &= h + h' + \ldots - k - k' - \ldots,\\
\Delta_2 &= h^2 + h'^2 + \ldots - k^2 - k'^2 - \ldots,\\
\Delta_3 &= h^3 + h'^3 + \ldots - k^3 - k'^3 - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

il est clair que les équations (56) ou (57) feront connaître les différences qu'on obtient, quand du nombre des valeurs diverses de h, ou de la somme de ces valeurs, ou de la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc., on retranche le nombre des valeurs de k, ou la somme de ces valeurs, ou la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc. On conclura en particulier de la première des équations (56) ou (57), c'est-à-dire de la formule

$$\Delta_0 = 0,$$

que le nombre des valeurs de h est toujours, comme nous le savions d'avance, égal au nombre des valeurs de k. On conclura en outre de la seconde des équations (56) que, dans le cas où ω vérifiera la condition

$$\omega^2 = n,$$

la somme des diverses valeurs de h équivaut à la somme des diverses valeurs de k. C'est au reste ce qu'il était facile de prévoir, puisque alors les valeurs de h étant deux à deux de la forme

$$l, \quad n - l,$$

la somme de ces valeurs doit se réduire, en même temps que la somme des valeurs de k, au produit

$$\frac{1}{2}\frac{N}{2}n = \frac{nN}{4}.$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend $n = 5$, on aura $N = 4$,

$$\begin{aligned}
\omega &= \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,\\
h + h' &= 1 + 4, \qquad k + k' = 2 + 3,\\
h + h' &= k + k' = \frac{4.5}{4} = 5.
\end{aligned}$$

Pareillement, si l'on prend $n = 21 = 3.7$, on aura $N = 2.6 = 12$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^4 + \rho^5 + \rho^{16} + \rho^{17} + \rho^{20} - \rho^2 - \rho^8 - \rho^{10} - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{19},$$
$$h + h' + \ldots = 1 + 4 + 5 + 16 + 17 + 20,$$
$$k + k' + \ldots = 2 + 8 + 10 + 11 + 13 + 19,$$
$$h + h' + \ldots = k + k' + \ldots = 3.21 = \frac{12.21}{4}.$$

Il importe d'observer que, parmi les valeurs de ϑ_m, les seules quantités

$$\vartheta_2, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_6, \quad \ldots$$

entrent dans les seconds membres des formules (56), et les seules quantités

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_3, \quad \vartheta_5, \quad \ldots$$

dans les seconds membres des formules (57). Il en résulte que les diverses valeurs de Δ_m, c'est-à-dire les divers termes de la suite

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \Delta_4, \quad \ldots,$$

sont liés entre eux par des équations de condition que l'on obtiendra sans peine en éliminant

$$\vartheta_2, \quad \vartheta_4, \quad \ldots$$

entre les formules (56), ou

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_3, \quad \ldots$$

entre les formules (57). Ainsi, en particulier, si l'on suppose $\mathfrak{D}^2 = n$, on trouvera, en vertu des formules (56),

$$\Delta_3 = \frac{3}{2} n \Delta_2; \tag{58}$$

ou, ce qui revient au même,

$$h^3 + h'^3 + \ldots - k^3 - k'^3 - \ldots = \frac{3}{2} n (h^2 + h'^2 + \ldots - k^2 - k'^2 - \ldots).$$

On trouvera, par exemple, pour $n = 5$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,$$
$$\Delta_2 = 1 + 4^2 - 2^2 - 3^2 = 4, \qquad \Delta_3 = 1 + 4^3 - 2^3 - 3^3 = 30 = 3.5\frac{4}{2};$$

pour $n = 8$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5,$$
$$\Delta_2 = 1 + 7^2 - 3^2 - 5^2 = 16, \qquad \Delta_3 = 1 + 7^3 - 3^3 - 5^3 = 192 = 3.8\frac{16}{2};$$

pour $n = 12$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^{11} - \rho^5 - \rho^7,$$
$$\Delta_2 = 1 + 11^2 - 5^2 - 7^2 = 48, \qquad \Delta_3 = 1 + 11^3 - 5^3 - 7^3 = 864 = 3.12\frac{52}{2};$$

pour $n = 13$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^2 + \rho^4 + \rho^9 + \rho^{10} + \rho^{12} - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6 - \rho^7 - \rho^8 - \rho^{11},$$
$$\Delta_2 = 1 + 3^2 + 4^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 - 2^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 8^2 - 11^2 = 52,$$
$$\Delta_3 = 1 + 3^3 + 4^3 + 9^3 + 10^3 + 12^3 - 2^3 - 5^3 - 6^3 - 7^3 - 8^3 - 11^3 = 1014 = 3.13\frac{52}{2};$$

pour $n = 17$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^8 + \rho^4 + \rho^8 + \rho^9 + \rho^{13} + \rho^{15} + \rho^{16} - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6 - \rho^7 - \rho^{10} - \rho^{11} - \rho^{12} - \rho^{14},$$
$$\Delta_2 = 1 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + 9^2 + 13^2 + 15^2 + 16^2 - 3^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 10^2 - 11^2 - 12^2 - 14^2 = 136,$$
$$\Delta_3 = 1 + 2^3 + 4^3 + 8^3 + 9^3 + 13^3 + 15^3 + 16^3 - 3^3 - 5^3 - 6^3 - 7^3 - 10^3 - 11^3 - 12^3 - 14^3 = 3468 = 3.17\frac{136}{2};$$

pour $n = 21$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^4 + \rho^5 + \rho^{16} + \rho^{17} + \rho^{20} - \rho^2 - \rho^8 - \rho^{10} - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{19},$$
$$\Delta_2 = 1 + 4^2 + 5^2 + 16^2 + 17^2 + 20^2 - 2^2 - 8^2 - 10^2 - 11^2 - 13^2 - 19^2 = 168,$$
$$\Delta_3 = 1 + 4^3 + 5^3 + 16^3 + 17^3 + 20^3 - 2^3 - 8^3 - 10^3 - 11^3 - 13^3 - 19^3 = 5292 = 3.21\frac{168}{2};$$

etc.

Si l'on suppose, au contraire, $\mathfrak{D}^2 = -n$, on aura, en vertu des formules (57),

$$\Delta_3 = n \Delta_1, \tag{59}$$

ou, ce qui revient au même,

$$k^2 + k'^2 + \ldots - h^2 - h'^2 - \ldots = n(k + k' + \ldots - h - h' - \ldots).$$

On trouvera, par exemple, pour $n = 3$,

$$\mathfrak{D} = \rho - \rho^2,$$
$$-\Delta_1 = 2 - 1 = 1, \qquad -\Delta_2 = 2^2 - 1 = 3.1;$$

pour $n = 4$,

$$\mathfrak{D} = \rho - \rho^3,$$
$$-\Delta_1 = 3 - 1 = 2, \qquad -\Delta_2 = 3^2 - 1 = 8 = 4.2;$$

pour $n = 7$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^2 + \rho^4 - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6,$$
$$-\Delta_1 = 3 + 5 + 6 - 1 - 2 - 4 = 7,$$
$$-\Delta_2 = 3^2 + 5^2 + 6^2 - 1 - 2^2 - 4^2 = 49 = 7.7;$$

pour $n = 8$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7,$$
$$-\Delta_1 = 5 + 7 - 1 - 3 = 8, \qquad -\Delta_2 = 5^2 + 7^2 - 1 - 3^2 = 64 = 8.8;$$

pour $n = 11$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5 - \rho^6 - \rho^8 - \rho^9 - \rho^{10} - \rho^{12},$$
$$-\Delta = 2 + 6 + 7 + 8 + 10 - 1 - 3 - 4 - 5 - 9 = 11,$$
$$-\Delta = 2^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 - 1 - 3^2 - 4^2 - 5^2 - 9^2 = 121 = 11.11;$$

pour $n = 15 = 3.5$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^2 + \rho^4 + \rho^8 - \rho^7 - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{14},$$
$$-\Delta_1 = 7 + 11 + 13 + 14 - 1 - 2 - 4 - 8 = 30,$$
$$-\Delta_2 = 7^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2 - 1 - 2^2 - 4^2 - 8^2 = 450 = 15.30;$$

pour $n = 19$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^4 + \rho^5 + \rho^6 + \rho^7 + \rho^9 + \rho^{11} + \rho^{16} + \rho^{17} - \rho^2 - \rho^3 - \rho^8 - \rho^{10} - \rho^{12} - \rho^{13} - \rho^{14} - \rho^{15} - \rho^{18},$$
$$-\Delta_1 = 2 + 3 + 8 + 10 + 12 + 13 + 14 + 15 + 18 - 1 - 4 - 5 - 6 - 7 - 9 - 11 - 16 - 17 = 19,$$
$$-\Delta_1 = 2^2 + 3^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 - 1 - 4^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 9^2 - 11^2 - 16^2 - 17^2 = 361 = 19^2;$$

pour $n = 20$,

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^3 + \rho^7 + \rho^9 - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{17} - \rho^{19},$$
$$-\Delta_1 = 11 + 13 + 17 + 19 - 1 - 3 - 7 - 9 = 40,$$
$$-\Delta_2 = 11^2 + 13^2 + 17^2 + 19^2 - 1 - 3^2 - 7^2 - 9^2 = 800 = 20.40;$$

etc.

Il est bon d'observer encore que la valeur de ϑ_m est positive, et même ordinairement renfermée entre des limites qu'il est facile d'obtenir. En effet, cette valeur qui, en vertu de la formule

(60) $$\iota_1 = 1,$$

peut être réduite à

(61) $$\vartheta_m = 1 + \frac{\iota_2}{2^m} + \frac{\iota_3}{3^m} + \ldots,$$

sera évidemment comprise entre les limites

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} - \ldots,$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots, \quad 2 - \left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots\right).$$

Or, comme, en prenant $m = 2$, on a, en vertu des formules connues,

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449\ldots,$$

il en résulte que ϑ_2 et, à plus forte raison, ϑ_3, ϑ_4,... sont positifs et renfermés entre les limites

$$1,6449\ldots \qquad \text{et} \qquad 2 - 1,6449\ldots = 0,3551\ldots.$$

Comme, d'ailleurs, les nombres de Bernoulli

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \quad \ldots$$

vérifient les équations

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{1}{6}\frac{2\pi^2}{1.2},$$
$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{1}{30}\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4},$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{1}{42}\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il en résulte que les quantités

$$\vartheta_2, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_6, \quad \ldots$$

sont respectivement supérieures aux produits

$$\frac{1}{6}\frac{2\pi^2}{1.2}, \quad \frac{1}{30}\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4}, \quad \frac{1}{42}\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6}, \quad \ldots$$

et inférieures aux différences

$$2-\frac{1}{6}\frac{2\pi^2}{1.2},\quad 2-\frac{1}{30}\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4},\quad 2-\frac{1}{42}\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6},\quad \ldots.$$

Quant à la quantité

$$\vartheta_1=1+\frac{\iota_2}{2}+\frac{\iota_3}{3}+\frac{\iota_4}{4}+\ldots, \tag{62}$$

on peut seulement affirmer qu'elle sera nulle ou positive. C'est ce qu'on démontrera sans peine, comme l'a fait M. Dirichlet pour le cas où n est impair, à l'aide d'une méthode de transformation qu'Euler a exposée dans le Chapitre XV de l'*Introduction à l'analyse des infinis*, et que nous allons rappeler.

Puisque la formule (29) entraine généralement la formule (30), il est clair que, si l'on nomme

$$\alpha,\quad \mathfrak{E},\quad \gamma,\quad \ldots$$

ceux des nombres premiers qui ne divisent pas le module n, on aura

$$\left\{\begin{aligned}1+\frac{\iota_2}{2^m}+\frac{\iota_3}{3^m}+\ldots&=\left(1+\frac{\iota_\alpha}{\alpha^m}+\frac{\iota_{\alpha^2}}{\alpha^{2m}}+\ldots\right)\left(1+\frac{\iota_\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}^m}+\frac{\iota_{\mathfrak{E}^2}}{\mathfrak{E}^{2m}}+\ldots\right)\ldots\\&=\left(1-\frac{\iota_\alpha}{\alpha^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_\gamma}{\gamma^m}\right)^{-1}\ldots.\end{aligned}\right. \tag{63}$$

Or, cette dernière formule, subsistant toujours, tant que la série comprise dans le premier membre est convergente, ou, ce qui revient au même, tant que m surpasse l'unité, quelque petite que soit la différence $m-1$, pourra être étendue au cas même où l'on a $m=1$. On aura donc, pour toutes les valeurs entières de m, et même pour $m=1$,

$$\vartheta_m=\left(1-\frac{\iota_\alpha}{\alpha^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_\gamma}{\gamma^m}\right)^{-1}\ldots, \tag{64}$$

$\alpha, \mathfrak{E}, \gamma, \ldots$ désignant les facteurs premiers qui ne divisent pas m. Or, comme les facteurs, que renferme en nombre infini le second membre de la formule (64), sont tous positifs, il en résulte que la valeur de ϑ_m donnée par cette formule ne sera jamais négative. Elle ne pourra donc

être que positive ou nulle. On a vu d'ailleurs que les valeurs de ϑ_m étaient toujours positives pour des valeurs de m supérieures à l'unité.

Lorsqu'on a obtenu des limites entre lesquelles se trouvent comprises les quantités

$$\vartheta_2,\quad \vartheta_3,\quad \vartheta_4,\quad \ldots,$$

on peut en déduire d'autres limites entre lesquelles se trouvent renfermées ou les différences

$$\Delta_2,\quad \Delta_3,\quad \Delta_4,\quad \ldots,$$

ou des fonctions linéaires de ces différences. Ainsi, en particulier, dans le cas où l'on a $\mathfrak{D}=n$, on peut affirmer non seulement que la valeur de ϑ_2 est renfermée entre les limites

$$\frac{\pi^2}{6}\quad\text{et}\quad 2-\frac{\pi^2}{6},$$

mais encore, en vertu de la formule

$$\Delta_2=\frac{\vartheta_2}{\pi^2}n^{\frac{5}{2}},$$

que la valeur de la différence

$$\Delta_2=h^2+h'^2+\ldots-k^2-k'^2-\ldots$$

est renfermée entre les limites

$$\frac{1}{6}n^2\sqrt{n}\quad\text{et}\quad 0{,}035\ldots n^2\sqrt{n}.$$

Donc alors la valeur de Δ est toujours inférieure à $\frac{1}{6}n^2\sqrt{n}$.
Ainsi, par exemple, on a, pour $n=5$,

$$\Delta_2=4<\frac{1}{6}5^2\sqrt{5}.$$

Les formules qui précèdent sont, pour la plupart, déduites de l'équation (33) qu'on peut encore écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}n\,f(x)=&\int_0^a f(u)\,du+2\cos\frac{2\pi x}{n}\int_0^a\cos\frac{2\pi u}{n}f(u)\,du+2\cos\frac{4\pi x}{n}\int_0^a\cos\frac{3\pi u}{n}f(u)\,du+\ldots\\&+2\sin\frac{2\pi x}{n}\int_0^a\sin\frac{2\pi u}{n}f(u)\,du+2\sin\frac{4\pi x}{n}\int_0^a\sin\frac{4\pi u}{n}f(u)\,du+\ldots,\end{aligned}$$

et en vertu de laquelle la fonction $f(x)$ ou $nf(x)$ se trouve développée suivant les cosinus et les sinus des multiples de l'arc

$$\frac{2\pi x}{n}.$$

Or, on peut démontrer que, dans le cas où la quantité a ne surpasse pas la limite $\frac{n}{2}$, les deux parties du développement, savoir : la somme des termes qui renferment les cosinus des arcs

$$0, \quad \frac{2\pi x}{n}, \quad \frac{4\pi x}{n}, \quad \ldots,$$

et la somme des termes que renferment les sinus, sont égales entre elles, par conséquent égales à la moitié du produit $nf(x)$. On a donc, pour des valeurs de a inférieures ou tout au plus égales à $\frac{1}{2}n$, et pour des valeurs de x renfermées entre les limites 0, a,

$$(65)\quad \frac{1}{2}nf(x) = \int_0^a f(u)\,du + 2\cos\frac{2\pi x}{n}\int_0^a \cos\frac{2\pi u}{n} f(u)\,du + 2\cos\frac{4\pi x}{n}\int_0^a \cos\frac{4\pi u}{n} f(u)\,du + \ldots,$$

$$(66)\quad \frac{1}{2}nf(x) = 2\sin\frac{2\pi x}{n}\int_0^a \sin\frac{2\pi u}{n} f(u)\,du + 2\sin\frac{4\pi x}{n}\int_0^a \sin\frac{4\pi u}{n} f(u)\,du + \ldots;$$

et, en effet, pour obtenir les formules (65), (66), il suffira de remplacer dans les formules (109), (110), de la page 364 du deuxième volume des *Exercices de Mathématiques* (1),

$$a \text{ par } \frac{n}{2}, \qquad x \text{ par } 0, \qquad X \text{ par } a.$$

Or, de la formule (65) jointe à l'équation (23), ou de la formule (66) jointe à l'équation (24), on tirera : 1° en supposant $\omega^2 = n$,

$$(67)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}[f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ \quad = \iota_1\int_0^a \cos\omega u\, f(u)\,du + \iota_2\int_0^a \cos 2\omega u\, f(u)\,du \\ \qquad\qquad + \iota_3\int_0^a \cos 3\omega u\, f(u)\,du + \ldots; \end{cases}$$

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII, p. 418.

2° en supposant $\omega^2 = -n$,

$$(68)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}[f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] \\ \quad = \iota_1\int_0^a \sin\omega u\, f(u)\,du + \iota_2\int_0^a \sin 2\omega u\, f(u)\,du \\ \qquad\qquad + \iota_3\int_0^a \sin 2\omega u\, f(u)\,du + \ldots, \end{cases}$$

pourvu que la valeur de ω soit toujours

$$\omega = \frac{2\pi}{n},$$

et qu'en tenant seulement compte des valeurs de h ou de k inférieures à $\frac{1}{2}n$, on place a entre la limite $\frac{n}{2}$ et le nombre entier immédiatement inférieur à cette limite. Les équations (67), (68) ne sont évidemment autre chose que les formules (35), (36) étendues au cas où l'on suppose les quantités

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots, \qquad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots$$

inférieures, non plus au nombre n, mais à la limite $\frac{n}{2}$, la dernière a pouvant atteindre cette limite. Or, de ces formules, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage, on déduira encore, dans le cas dont il s'agit, les équations (40), (41), (42), (43), (44), (45) ; et par suite, si l'on pose dans le même cas

$$(69)\qquad \delta_m = h^m + h'^m + \ldots - k^m - k'^m \ldots,$$

c'est-à-dire si l'on représente par δ_m la partie de Δ_m qui renferme des valeurs de h et de k inférieures à $\frac{1}{2}n$, on trouvera, pour des valeurs paires de m : 1° en supposant $\omega^2 = n$,

$$(70)\quad (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\delta_m = D_\omega^m\left(\iota_1\frac{\sin\omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m}\frac{\sin 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m}\frac{\sin 3\omega a}{3\omega} + \ldots\right);$$

2° en supposant $\omega^2 = -n$,

$$(71)\quad (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\delta_m = D_\omega^m\left(\iota_1\frac{1-\cos\omega a}{\omega}+\frac{\iota_2}{2^m}\frac{1-\cos 2\omega a}{2\omega}+\frac{\iota_3}{3^m}\frac{1-\cos 3\omega a}{3\omega}+\ldots\right).$$

On trouvera au contraire, pour des valeurs impaires de m : 1° en supposant $\omega^2 = n$,

$$(72)\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\delta_m = D_\omega^m\left(\iota_1\frac{1-\cos\omega a}{\omega}+\frac{\iota_2}{2^m}\frac{1-\cos 2\omega a}{2\omega}+\frac{\iota_3}{3^m}\frac{1-\cos 3\omega a}{3\omega}+\ldots\right);$$

2° en supposant $\omega^2 = -n$,

$$(73)\quad (-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\delta_m = D_\omega^m\left(\iota_1\frac{\sin\omega a}{\omega}+\frac{\iota_2}{2^m}\frac{\sin 2\omega a}{2\omega}+\frac{\iota_3}{3^m}\frac{\sin 3\omega a}{3\omega}+\ldots\right).$$

On ne doit pas oublier que, dans ces dernières formules, tout comme dans les équations (67), (68), la quantité a doit être renfermée entre la limite supérieure $\frac{n}{2}$, qu'elle peut atteindre, et le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2}-1$ immédiatement inférieur à cette limite.

Concevons en particulier que l'on prenne

$$a = \frac{n}{2};$$

en substituant cette valeur de a dans les expressions de la forme

$$D_\omega^m\frac{\sin l\omega a}{\omega},\quad D_\omega^m\frac{1-\cos l\omega a}{\omega},$$

après avoir préalablement effectué les différentiations relatives à ω, l'on trouvera, pour des valeurs paires de m,

$$D_\omega^m\frac{\sin l\omega a}{\omega} = (-1)^{l+1}\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left(\frac{2.3\ldots m}{\pi^m}l-\frac{4.5\ldots m}{\pi^{m-2}}l^3+\ldots\pm\frac{m}{\pi^2}l^{m-1}\right),$$
$$D_\omega^m\frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = \left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left[\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}}-(-1)^l\left(\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}}-\frac{3.4\ldots m}{\pi^{m-1}}l^2+\ldots\pm\frac{1}{\pi}l^m\right)\right];$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$D_\omega^m\frac{\sin l\omega a}{\omega} = (-1)^l\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left(\frac{2.3\ldots m}{\pi^m}l-\frac{4.5\ldots m}{\pi^{m-2}}l^3+\ldots\pm\frac{1}{\pi}l^m\right),$$
$$D_\omega^m\frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = -\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left[\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}}-(-1)^l\left(\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}}-\frac{3.4\ldots m}{\pi^{m-1}}l^2+\ldots\pm\frac{m}{\pi^2}l^{m-1}\right)\right].$$

Donc, si l'on pose, pour abréger,

$$I_1 = \iota_1-\frac{\iota_2}{2}+\frac{\iota_3}{3}-\ldots,\qquad I_2 = \iota_1-\frac{\iota_2}{2^2}+\frac{\iota_3}{3^2}-\ldots,\qquad \ldots,$$

et généralement

$$(74)\qquad I_m = \iota_1-\frac{\iota_2}{2^m}+\frac{\iota_3}{3^m}-\frac{\iota_4}{4^m}+\ldots,$$

on tirera des formules (70) et (72), en supposant $\omega^2 = n$: 1° pour des valeurs paires de m,

$$(75)\quad \delta_m = -\left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}}\left[m\frac{I_1}{\pi^2}-(m-2)(m-1)m\frac{I_3}{\pi^4}+\ldots\pm 2.3\ldots m\frac{I_m}{\pi^m}\right];$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$(76)\quad \delta_m = -\left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}}\left[m\frac{I_2}{\pi^2}-(m-2)(m-1)m\frac{I_4}{\pi^4}+\ldots\pm 1.2.3\ldots m\frac{I_{m+1}+\delta_{m+1}}{\pi^{m+1}}\right]$$

mais en supposant $\omega^2 = n$, on tirera des formules (71) et (73) : 1° pour des valeurs paires de m,

$$(77)\quad \delta_m = \left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}}\left[\frac{I_1}{\pi}-(m-1)m\frac{I_3}{\pi^3}+\ldots\pm 1.2.3\ldots m\frac{I_{m+1}+\delta_{m+1}}{\pi^{m+1}}\right];$$

2° pour les valeurs impaires de m,

$$(78)\qquad \delta_m = \left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}}\left[\frac{I_1}{\pi}-(m-1)m\frac{I_3}{\pi^3}+\ldots\pm 2.3\ldots m\frac{I_m}{\pi^m}\right].$$

Ainsi, en supposant $\omega^2 = n$, on trouvera successivement

$$(79)\qquad \delta_0 = 0,\quad \delta_1 = -\frac{1}{2}\frac{I_2+\delta_2}{\pi^2}n^{\frac{3}{2}},\quad \delta_2 = -\frac{1}{2}\frac{I_2}{\pi^2}n^{\frac{3}{2}},\quad \ldots.$$

tandis qu'en supposant $\omega^2 = n$, on trouvera

$$(80)\quad \vartheta_0 = \frac{I_1 + \vartheta_1}{\pi} n^{\frac{1}{2}}, \qquad \vartheta_1 = \frac{1}{2}\frac{I_1}{\pi} n^{\frac{3}{2}}, \qquad \vartheta_2 = \left(\frac{1}{4}\frac{I_1}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{I_3 + \vartheta_3}{\pi^3}\right) n^{\frac{5}{2}}, \qquad \ldots.$$

Comme on aura d'ailleurs, en tenant compte seulement des valeurs de h et de k inférieures à $\frac{1}{2}n$,

$$\begin{aligned}
\vartheta_0 &= h^0 + h'^0 + \ldots - k^0 - k'^0 - \ldots = i - j,\\
\vartheta_1 &= h + h' + \ldots - k - k' - \ldots,\\
\vartheta_2 &= h^2 + h'^2 + \ldots - k^2 - k'^2 - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

il est clair que les équations (79), (80) feront connaître la différence $i - j$, et celles qu'on obtient quand de la somme des valeurs de h inférieures à $\frac{n}{2}$, ou de la somme de leurs carrés, etc., on retranche la somme des valeurs de k inférieures à $\frac{n}{2}$, ou la somme de leurs carrés, etc. La première des équations (79), c'est-à-dire la formule

$$\vartheta_0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad i - j = 0,$$

s'accorde, comme on devait s'y attendre, avec l'équation (31).

Avant d'aller plus loin, observons que les quantités

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \ldots,$$

ou les diverses valeurs de I_m, sont liées aux quantités

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_3, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire aux diverses valeurs de ϑ_m, par des équations qu'il est facile d'obtenir. En effet, comme on aura généralement

$$\iota_{2m} = \iota_2 \iota_m,$$

et par suite

$$\frac{\iota_2}{2^m}\vartheta_m = \frac{\iota_2}{2^m} + \frac{\iota_4}{4^m} + \frac{\iota_6}{6^m} + \ldots = \frac{1}{2}(\vartheta_m - I_m),$$

on en conclura

$$(81)\qquad I_m = \left(1 - \frac{\iota_2}{2^{m-1}}\right)\vartheta_m.$$

On aura donc

$$(82)\quad I_1 = (1 - \iota_2)\vartheta_1, \qquad I_2 = \left(1 - \frac{\iota_2}{2}\right)\vartheta_2, \qquad I_3 = \left(1 - \frac{\iota_2}{4}\right)\vartheta_3, \qquad \ldots.$$

Ajoutons que, ι_m se réduisant toujours à l'une des trois quantités

$$-1, \quad 0, \quad +1,$$

les valeurs de

$$I_2, \quad I_3, \quad I_4$$

seront, en vertu des formules (82), des quantités positives, tout comme les valeurs de

$$\vartheta_2, \quad \vartheta_3, \quad \vartheta_4, \quad \ldots.$$

Quant à la quantité I_1, liée à ϑ_1 par la formule

$$I_1 = (1 - \iota_2)\vartheta_1,$$

elle sera ou positive ou nulle, ainsi que ϑ_1, et pourra même s'évanouir, sans que ϑ_1 s'évanouisse, avec le facteur $1 - \iota_2$, lorsqu'on aura

$$\left[\frac{2}{n}\right] = 1,$$

ce qui suppose n impair et de la forme $8x + 1$ ou $8x + 7$. Supposons en particulier n de la forme $8x + 7$, et composé de facteurs impairs inégaux. On aura

$$\omega^2 = -n,$$

et comme alors I_1 s'évanouira, ainsi que $1 - \iota_2$, la seconde des formules (80) donnera

$$\vartheta_1 = 0.$$

On trouvera, par exemple, pour $n = 7$,

$$\vartheta_1 = 1 + 2 - 3 = 0,$$

pour $n = 15$,

$$\vartheta_1 = 1 + 2 + 4 - 7 = 0, \qquad \ldots.$$

Revenons maintenant aux formules (79) et (80). Si, dans ces formules, on substitue les valeurs de $I_1, I_2, I_3, \ldots$ fournies par les équa-

tions (82), on trouvera, en supposant $\omega^2 = n$,

$$(83)\quad \vartheta_0 = 0, \qquad \vartheta_1 = -\left(1 - \frac{\iota_2}{4}\right)\frac{\partial_2}{\pi_2}n^{\frac{3}{2}}, \qquad \vartheta_2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\iota_2}{2}\right)\frac{\partial_2}{\pi_2}n^{\frac{5}{2}}, \qquad \ldots,$$

$$(84)\quad \vartheta_0 = (2 - \iota_2)\frac{\partial_1}{\pi}n^{\frac{1}{2}}, \quad \vartheta_1 = \frac{1 - \iota_2}{2}\frac{\partial_2}{\pi}n^{\frac{3}{2}}, \quad \vartheta_2 = \left(\frac{2 - \iota_2}{8}\frac{\partial_1}{\pi} - \frac{8 - \iota_2}{8}\frac{\partial_3}{\pi_3}\right)n^{\frac{5}{2}},$$

etc.

Lorsqu'à la première des équations (79) ou (83) on joint la première des équations (79) ou (84), on arrive à cette conclusion remarquable que la différence

$$\vartheta_0 \quad \text{ou} \quad i - j$$

est toujours nulle ou positive. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Supposons que, ρ étant une des racines primitives de l'équation*

$$x^n = 1,$$

la somme alternée

$$\mathfrak{G} = \rho^h + \rho^{h'} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'}, \qquad \ldots$$

vérifie la condition

$$\mathfrak{G}^2 = \pm n$$

et que le groupe d'exposants

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

renferme l'unité. Si les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, sont en nombre égal à i dans le groupe h, h', h'', ..., et en nombre égal à j dans le groupe k, k', k'', ..., la différence

$$i - j$$

sera toujours nulle ou positive, et ne cessera d'être nulle que lorsqu'on aura

$$\mathfrak{G}^2 = -n.$$

Les quantités

$$\vartheta_0, \quad \vartheta_1, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_3, \quad \vartheta_4, \quad \ldots$$

sont évidemment liées non seulement entre elles, mais encore avec les

quantités

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3 \quad \Delta_4, \quad \ldots,$$

par des équations de condition qu'on obtiendra sans peine en éliminant

$$\vartheta_2, \quad \vartheta_4, \quad \ldots$$

entre les formules (56), (83), ou en éliminant

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_3, \quad \ldots$$

entre les formules (57) et (84). Ainsi, en particulier, on tirera des formules (56), (83), en supposant $\omega^2 = n$,

$$(85)\qquad \Delta_2 = \frac{\Delta_3}{\frac{3}{2}n} = \frac{-4n\vartheta_1}{4 - \iota_2} = \frac{-4\vartheta_2}{2 - \iota_2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(86)\qquad \vartheta_2\frac{2 - \iota_2}{4 - \iota_2}n\vartheta_1, \qquad \Delta_2 = -\frac{4}{2 - \iota_2}\vartheta_2, \qquad \Delta_2 = \frac{3}{2}n\Delta_3;$$

et des formules (57), (84), en supposant $\omega^2 = -n$,

$$(87)\qquad \frac{2\vartheta_1}{1 - \iota_2} = \frac{n\vartheta_0}{2 - \iota_2} = -\Delta_1 = -\frac{\Delta_2}{n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(88)\quad \vartheta_1 = \frac{1 - \iota_2}{2 - \iota_2}\frac{n}{2}(i - j), \qquad \Delta_1 = -n\frac{i - j}{2 - \iota_2}, \qquad \Delta_2 = -n^2\frac{i - j}{2 - \iota_2}.$$

Dans l'application de chacune des formules (87) et (88), on doit distinguer trois cas correspondant aux trois valeurs

$$-1, \quad 0, \quad 1$$

que peut acquérir la quantité ι_2. Ainsi, en prenant pour n un nombre impair, on tirera de ces formules : 1° lorsque n sera de la forme $8x + 1$,

$$(89)\qquad \vartheta_2 = \frac{1}{3}n\vartheta_1, \qquad \Delta_2 = -\frac{4}{3}n\vartheta_1, \qquad \Delta_3 = -2n^2\vartheta_1;$$

2° lorsque n sera de la forme $8x+3$,

$$(90)\qquad \delta_1 = n\frac{i-j}{3}, \qquad \Delta_1 = -n\frac{i-j}{3}, \qquad \Delta_2 = -n^2\frac{i-j}{3};$$

3° lorsque n sera de la forme $8x+5$,

$$(91)\qquad \delta_2 = \frac{3}{5}n\delta_1, \qquad \Delta_2 = -\frac{4}{5}n\delta_1, \qquad \Delta_3 = -\frac{6}{5}n\delta_1;$$

4° lorsque n sera de la forme $8x+7$,

$$(92)\qquad \delta_1 = 0, \qquad \Delta_1 = -n(i-j), \qquad \Delta_2 = -n^2(i-j).$$

Au contraire, en prenant pour n un nombre pair, divisible par 4 ou par 8, on tirera des formules (87) et (88) : 1° lorsqu'on aura $\mathfrak{D}^2 = n$,

$$(93)\qquad \delta_2 = \frac{n}{2}\delta_1, \qquad \Delta_2 = -n\delta_1, \qquad \Delta_3 = -\frac{3}{2}n^2\delta_1;$$

2° lorsqu'on aura $\mathfrak{D}^2 = -n$,

$$(94)\qquad \delta_1 = n\frac{i-j}{4}, \qquad \Delta_1 = -n\frac{i-j}{2}, \qquad \Delta_2 = -n^2\frac{i-j}{2}.$$

On vérifiera aisément ces diverses formules dans les cas particuliers, et l'on trouvera, par exemple : pour $n = 17$,

$$\delta_1 = -6, \qquad \delta_2 = -34 = \frac{n}{3}\delta_1, \qquad \Delta_2 = 136 = -\frac{4n}{3}\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 3468 = -2n^2\delta_1;$$

pour $n = 11$,

$$i = 4, \qquad j = 1, \qquad i-j = 3, \qquad \frac{i-j}{3} = 1,$$
$$\delta_1 = 11 = n\frac{i-j}{3}, \qquad \Delta_1 = -11 = n\frac{i-j}{3}, \qquad \Delta_2 = -121 = -n^2\frac{i-j}{3};$$

pour $n = 5$,

$$\delta_1 = -1, \qquad \delta_2 = -3 = \frac{3}{5}n\delta_1, \qquad \Delta_2 = 4 = -\frac{4}{5}n\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 30 = -\frac{6}{5}n^2\delta_1;$$

pour $n = 7$,

$$i = 1, \qquad j = 0, \qquad i-j = 1,$$
$$\delta_1 = 0, \qquad \Delta_1 = -7 = -n(i-j), \qquad \Delta_2 = -49 = -n^2(i-j).$$

On trouvera pareillement : pour $n = 13$,

$$\delta_1 = -5, \qquad \delta_2 = -39 = \frac{3}{5}n\delta_1, \qquad \Delta_2 = 52 = -\frac{4}{5}n\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 1014 = -\frac{6}{5}n^2\delta_1;$$

pour $n = 15 = 3.5$,

$$i = 3, \qquad j = 1, \qquad i-j = 2,$$
$$\delta_1 = 0, \qquad \Delta = -30 = -n(i-j), \qquad \Delta_2 = -450 = -n^2(i-j);$$

pour $n = 21 = 3.7$,

$$\delta_1 = -10, \qquad \delta_2 = -126 = \frac{3}{5}n\delta_1, \qquad \Delta_2 = 168 = -\frac{4}{5}n\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 5292 = -\frac{6}{5}n^2\delta_1.$$

Si l'on attribue à n, non plus des valeurs impaires, mais des valeurs paires, on trouvera : pour $n = 4$, $\mathfrak{D}^2 = -4$, $\mathfrak{D} = \rho - \rho^3$,

$$i = 1, \qquad j = 0, \qquad i-j = 1,$$
$$\delta_1 = 1 = n\frac{i-j}{4}, \qquad \Delta_1 = -2 = -n\frac{i-j}{2}, \qquad \Delta_2 = -8 = -n^2\frac{i-j}{2};$$

pour $n = 8$, $\mathfrak{D}^2 = 8$, $\mathfrak{D} = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5$,

$$\delta_1 = -2, \qquad \delta_2 = -8 = \frac{n}{2}\delta_1, \qquad \Delta_2 = 16 = -n\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 192 = -\frac{3}{2}n^2\delta_1;$$

pour $n = 8$, $\mathfrak{D}^2 = -8$, $\mathfrak{D} = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7$,

$$i = 2, \qquad j = 0, \qquad i-j = 2, \qquad \frac{i-j}{2} = 1,$$
$$\delta_1 = 4 = n\frac{i-j}{4}, \qquad \Delta_1 = -8 = -n\frac{i-j}{2}, \qquad \Delta_2 = -64 = -n^2\frac{i-j}{2};$$

pour $n = 12$,

$$\delta_1 = -4, \quad \delta_2 = -24 = \frac{n}{2}\delta_1, \quad \Delta_2 = 48 = -n\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 864 = -\frac{3}{2}n^2\delta_1;$$

pour $n = 20$,

$$i = 4, \quad j = 0, \quad i - j = 4, \quad \frac{i-j}{2} = 2, \quad \frac{i-j}{4} = 1,$$
$$\delta_1 = 20 = n\frac{i-j}{4}, \quad \Delta_1 = -40 = -n\frac{i-j}{2}, \quad \Delta_2 = -800 = -n^2\frac{i-j}{2}.$$

Les diverses formules établies dans cette Note comprennent les formules du même genre trouvées par M. Dirichlet. J'ajouterai que les équations de condition par lesquelles se trouvent liés les uns aux autres les termes des deux suites

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots,$$
$$\delta_0, \quad \delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \quad \ldots,$$

peuvent être démontrées directement, et d'une manière très simple, comme je l'ai remarqué dans un Mémoire que renferment les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, pour l'année* 1840 (1er semestre, page 444) (1).

NOTE XIII.

SUR LES FORMES QUADRATIQUES DE CERTAINES PUISSANCES DES NOMBRES PREMIERS, OU DU QUADRUPLE DE CES PUISSANCES.

Soient :

p un nombre premier impair;

n un diviseur de $p - 1$;

$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n, mais premiers à n;

N le nombre des entiers $h, k, l, \ldots$;

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. V, p. 142.

ρ une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1 \tag{1}$$

et supposons les entiers

$$h, \quad k, \quad l, \quad \ldots$$

partagés en deux groupes

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots \quad \text{et} \quad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots,$$

de telle manière que la somme alternée

$$\mathfrak{D} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots \tag{2}$$

vérifie la condition

$$\mathfrak{D}^2 = \pm n. \tag{3}$$

Soient encore :

θ une racine primitive de l'équation

$$x^p = 1; \tag{4}$$

t une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{5}$$

et de plus

$$\Theta_h, \quad \Theta_k, \quad \Theta_l, \quad \ldots$$

des expressions imaginaires déterminées par des équations de la forme

$$\Theta_l = \theta + \rho^l\theta^t + \rho^{2l}\theta^{t^2} + \ldots + \rho^{(p-2)l}\theta^{t^{p-2}}. \tag{6}$$

Aux deux groupes

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots \quad \text{et} \quad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots,$$

entre lesquels se partagent les exposants ou indices

$$h, \quad k, \quad l, \quad \ldots,$$

correspondront deux groupes

$$\Theta_h, \quad \Theta_{h'}, \quad \Theta_{h''}, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \Theta_k, \quad \Theta_{k'}, \quad \Theta_{k''}, \quad \ldots,$$

entre lesquels se partageront les expressions imaginaires

$$\Theta_h, \quad \Theta_k, \quad \Theta_l, \quad \ldots;$$

et, si l'on pose

$$(7) \qquad I = \Theta_h \Theta_{h'} \Theta_{h''} \ldots, \qquad J = \Theta_k \Theta_{k'} \Theta_{k''} \ldots,$$

alors, en vertu des principes établis dans la Note précédente, les deux binomes

$$I + J, \qquad I - J,$$

considérés comme fonctions des racines primitives de l'équation (1), seront, le premier, une fonction symétrique, le second, une fonction alternée de ces racines. Il y a plus, comme la condition (3) suppose que les facteurs premiers et impairs de n sont inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant 4 ou 8, la fonction

$$I - J$$

sera, dans l'hypothèse admise, de la forme indiquée par la formule (63) de la Note VII; et l'on aura en conséquence

$$(8) \qquad I + J = A, \qquad I - J = B\Delta,$$

A, B désignant ou des quantités entières, ou des fonctions qui renfermeront seulement les racines

$$\vartheta, \quad \vartheta^t, \quad \vartheta^{t^2}, \quad \ldots$$

de l'équation (4) respectivement multipliées par des coefficients entiers.

Observons maintenant qu'en vertu de la formule (7) de la Note III, on aura

$$(9) \qquad \begin{cases} \Theta_h \Theta_{h'} \Theta_{h''} \ldots = R_{h,h',h'' \ldots} \Theta_{h+h'+h''+\ldots} \\ \text{et} \\ \Theta_k \Theta_{k'} \Theta_{k''} \ldots = R_{k,k',k'' \ldots} \Theta_{k+k'+k''+\ldots}, \end{cases}$$

$R_{h,h',h'',\ldots}$ et $R_{k,k',k'',\ldots}$ désignant deux fonctions entières de la seule variable ϑ. D'autre part, si la condition (3) se vérifie sans que n se

réduise à l'un des trois nombres

$$3, \quad 4, \quad 8,$$

on aura (*voir* la Note précédente)

$$(10) \qquad h + h' + h'' + \ldots \equiv k + k' + k'' + \ldots \equiv 0 \pmod{n},$$

et, par suite, eu égard à la formule (2) de la Note III,

$$(11) \qquad \Theta_{h+h'+h''+\ldots} = \Theta_{k+k'+k''+\ldots} = \Theta_0 = -1.$$

Donc alors les équations (7), (9) donneront simplement

$$(12) \qquad I = -R_{h,h',h'',\ldots}, \qquad J = -R_{k,k',k'',\ldots};$$

et comme, en vertu des formules (12), les fonctions I, J deviendront indépendantes des racines de l'équation (4), ces racines n'entreront pas non plus dans les coefficients

$$A, \quad B,$$

qui se réduiront nécessairement à des quantités entières.

Si l'on pose pour abréger

$$(13) \qquad \varpi = \frac{p-1}{n},$$

alors, en désignant par l un quelconque des entiers inférieurs à n, mais premiers à n, on aura, en vertu de la formule (3) de la Note III,

$$(14) \qquad \Theta_l \Theta_{-l} = (-1)^{\varpi l} p = \Theta_l \Theta_{n-l}.$$

Si le nombre ϖ est pair, la formule (14) donnera simplement

$$(15) \qquad \Theta_l \Theta_{n-l} = p.$$

Si, au contraire, ϖ est impair, n devra être pair, ainsi que $p - 1 = n\varpi$ et, par suite, le nombre l, premier à n, étant impair, la formule (14) donnera

$$(16) \qquad \Theta_l \Theta_{n-l} = -p.$$

Cela posé, on tirera évidemment des formules (7), dans le premier

cas,

$$IJ = p^{\frac{N}{2}}, \tag{17}$$

et dans le second cas,

$$IJ = (-1)^{\frac{N}{2}} p^{\frac{N}{2}}. \tag{18}$$

Mais, comme dans le second cas, n étant pair et de l'une des formes

$$4\nu'\nu'' \ldots, \quad 8\nu'\nu'' \ldots,$$

$\frac{N}{2}$ ne pourrait devenir impair que pour la seule valeur

$$n = 4,$$

dont nous faisons ici abstraction, il est clair que la formule (18) se réduira elle-même à l'équation (17).

D'autre part, comme on tire des équations (8)

$$2I = A + B\Delta, \quad 2J = A - B\Delta, \tag{19}$$

par conséquent

$$4IJ = A^2 - B^2\Delta^2,$$

il est clair qu'en ayant égard à l'équation (7) et à la formule (3), on trouvera

$$4p^{\frac{N}{2}} = A^2 - B^2\Delta^2 = A^2 \pm nB^2. \tag{20}$$

Pour que la condition (3) se réduise à

$$\mathfrak{D}^2 = n, \tag{21}$$

il est nécessaire que les facteurs premiers et impairs du nombre n étant inégaux entre eux, ce nombre soit de l'une des formes

$$4x + 1, \quad 4(4x + 3), \quad 8(2x + 1).$$

Mais alors, en vertu du théorème I de la Note IX, l désignant un quelconque des entiers renfermés dans les deux groupes

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots \quad \text{et} \quad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots,$$

les deux termes

$$l \quad \text{et} \quad n - l$$

appartiendront au même groupe. Donc alors, en vertu des équations (7), jointes à la formule (15) ou (16), on aura

$$I = J = \pm p^{\frac{N}{2}}, \tag{22}$$

savoir

$$I = J = p^{\frac{N}{2}}, \tag{23}$$

si l'un des deux nombres ϖ, $\frac{N}{4}$ est pair, et

$$I = J = -p^{\frac{N}{2}}, \tag{24}$$

si les nombres ϖ et $\frac{N}{4}$ sont tous deux impairs, ce qui suppose $n = 4\nu$, ν étant un nombre premier de la forme $4x + 3$. Alors aussi l'on tirera des formules (8) et (22)

$$A = \pm 2p^{\frac{N}{2}}, \quad B = 0. \tag{25}$$

Ces dernières valeurs de A, B satisfont effectivement à la formule (20).

Pour que la condition (3) se réduise à

$$\mathfrak{D}^2 = -n, \tag{26}$$

il est nécessaire que, les facteurs premiers et impairs du nombre n étant inégaux, ce nombre soit de l'une des formes

$$4x + 3, \quad 4(4x + 1), \quad 8(2x + 1).$$

Nommons alors p^λ la plus haute puissance de p qui divise simultanément A et B. On aura

$$A = p^\lambda x, \quad B = p^\lambda y, \tag{27}$$

x, y désignant deux quantités entières non divisibles par p ; et, en posant

$$\mu = \frac{N}{2} - 2\lambda, \tag{28}$$

on verra la formule (20) se réduire à la suivante

$$4p^{\lambda} = x^2 + ny^2. \tag{29}$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les valeurs des exposants λ, μ. On peut y parvenir à l'aide des considérations suivantes :

Comme nous l'avons observé page 112, on a généralement

$$R_{h,k,l,\ldots} = R_{h,k} R_{h+k,l,\ldots},$$

en sorte que les formules (12) donneront

$$\begin{cases} I = -R_{h,h'} R_{h+h',h''} R_{h+h'+h'',h'''} \ldots, \\ J = -R_{k,k'} R_{k+k',k''} R_{k+k'+k'',k'''} \ldots. \end{cases} \tag{30}$$

Or, dans chacun des facteurs qui composent les seconds membres de ces dernières, on peut immédiatement réduire les deux indices placés au bas de la lettre R à des nombres

$$l, \quad l'$$

représentés par des termes de la suite

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1.$$

On pourra même, en vertu des formules (10) et (12) de la Note I, remplacer le facteur

$$R_{l,l'} = \frac{\Theta_l \Theta_{l'}}{\Theta_{l+l'}}$$

par $\pm p$, lorsque la somme des indices l, l' sera le nombre n, et par -1, lorsque l'un des indices s'évanouira. Ce n'est pas tout, lorsque h, h', étant positifs l'un et l'autre, offriront pour somme un nombre différent de n, on aura généralement, en vertu de la formule (13) de la Note I,

$$R_{l,l'} R_{-l-l'} = p,$$

ou, ce qui revient au même,

$$R_{l,l'} R_{n-l,n-l'} = p; \tag{31}$$

et, comme des deux sommes

$$l + l', \quad (n-l) + (n-l') = 2n - (l+l'),$$

renfermées entre les limites 0, $2n$, il y en aura toujours une comprise entre les limites 0, n, l'autre étant comprise entre les limites n, $2n$, il résulte des équations (14) et (15), jointes à l'équation (17), qu'on aura toujours

$$I = p^f \frac{F}{G}, \qquad J = p^g \frac{G}{F}, \tag{32}$$

ou, ce qui revient au même,

$$IG = p^f F, \qquad JF = p^g G, \tag{33}$$

f, g désignant deux nombres entiers propres à vérifier la condition

$$f + g = \frac{N}{2},$$

et F, G des produits composés avec des facteurs de la forme

$$R_{l,l'}$$

dans chacun desquels on pourra supposer les indices l, l' tous deux inférieurs à n, et leur somme $l + l'$ renfermée entre les limites n, $2n$. Si d'ailleurs on substitue dans les formules (33) les valeurs de I, J fournies par les équations (19), on aura identiquement

$$(A + B\mathfrak{D})G = 2p^f F, \qquad (A - B\mathfrak{D})F = 2p^g G, \tag{34}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (27),

$$p^{\lambda}(x + y\mathfrak{D})G = 2p^f F, \qquad p^{\lambda}(x - y\mathfrak{D})F = 2p^g G. \tag{35}$$

On aura donc par suite

$$p^{\lambda-m}(x + y\mathfrak{D})G = 2p^{f-m} F, \qquad p^{\lambda-m'}(x - y\mathfrak{D})F = 2p^{g-m'} G, \tag{36}$$

m, m' étant deux entiers que l'on pourra réduire, le premier au plus petit des nombres

$$\lambda, \quad f,$$

le second au plus petit des nombres

$$\lambda, \quad g,$$

afin que chacun des exposants

$$\lambda - m, \quad f - m, \quad \lambda - m', \quad g - m'$$

soit nul ou positif.

Avant d'aller plus loin, nous ferons une observation importante. Les formules (33), comme toutes celles d'où elles sont déduites, et par suite les formules (36), offrent chacune deux membres représentés par des fonctions entières de ρ qui sont identiquement les mêmes, quand on réduit l'exposant de chaque puissance de ρ à l'un des entiers

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1,$$

ou qui du moins peuvent alors être transformés l'un dans l'autre à l'aide de la seule équation

$$1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{n-1} = 0.$$

Donc, après les réductions dont il s'agit, la différence entre les deux membres de chacune des formules (36) sera le produit d'un nombre entier par le polynome

$$1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{n-1}. \tag{37}$$

D'ailleurs, réduire, dans une fonction entière de ρ, l'exposant de chaque puissance de ρ à l'un des nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1,$$

ou, ce qui revient au même, remplacer

$$\begin{array}{llll}
\rho^n, & \rho^{2n}, & \rho^{3n}, & \ldots \quad \text{par} \quad \rho^0 = 1, \\
\rho^{n+1}, & \rho^{2n+1}, & \rho^{3n+1}, & \ldots \quad \text{par} \quad \rho, \\
\rho^{n+2}, & \rho^{2n+2}, & \rho^{3n+2}, & \ldots \quad \text{par} \quad \rho^2, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\
\rho^{2n-1}, & \rho^{3n-1}, & \rho^{4n-1}, & \ldots \quad \text{par} \quad \rho^{n-1},
\end{array}$$

c'est ajouter aux divers termes de la progression arithmétique

$$\rho^n, \ \rho^{n+1}, \ \rho^{n+2}, \ \ldots \ \rho^{2n}, \ \rho^{2n+1}, \ \rho^{2n+2}, \ \ldots \ \rho^{3n}, \ \rho^{3n+1}, \ \rho^{3n+2}, \ \ldots$$

les différences

$$\begin{array}{llll}
1 - \rho^n, & \rho - \rho^{n+1}, & \rho^2 - \rho^{n+2}, & \ldots, \\
1 - \rho^{2n}, & \rho - \rho^{2n+1}, & \rho^2 - \rho^{2n+2}, & \ldots, \\
1 - \rho^{3n}, & \rho - \rho^{3n+1}, & \rho^2 - \rho^{3n+2}, & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}$$

respectivement égales aux produits

$$\begin{array}{llll}
1 - \rho^n, & \rho(1 - \rho^n), & \rho^2(1 - \rho^n), & \ldots, \\
1 - \rho^{2n}, & \rho(1 - \rho^{2n}), & \rho^2(1 - \rho^{2n}), & \ldots, \\
1 - \rho^{3n}, & \rho(1 - \rho^{3n}), & \rho^2(1 - \rho^{3n}), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}$$

qui tous ont pour facteur le binome

$$1 - \rho^n = (1 - \rho)(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1}),$$

et par conséquent le polynome (37). Donc, en définitive, dans chacune des formules (36), la différence entre les deux membres sera toujours une fonction entière de ρ, qui, avant réduction, aura pour facteur le polynome

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} = \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}.$$

Donc, si dans ces formules on remplace la racine primitive ρ de l'équation

$$x^n = 1$$

par une racine primitive r de l'équivalence

$$x^n \equiv 1 \pmod{p},$$

les deux membres de chacune d'elles offriront pour différence une fonction entière de r qui aura pour facteur le polynome

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \equiv 0 \pmod{p};$$

et comme dans cette différence les coefficients des diverses puissances de r seront des entiers, elle devra, ainsi que le polynome

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1},$$

être équivalente à zéro, suivant le module p. Donc, si l'on nomme

$$\delta,\quad \mathfrak{F},\quad \mathfrak{G}$$

ce que deviennent

$$\Phi,\quad F,\quad G$$

quand on y remplace ρ par r, les formules (36) entraîneront les suivantes

$$(38)\qquad p^{\lambda-m}(x+y\delta)\mathfrak{G}\equiv 2p^{f-m}\mathfrak{F},\quad p^{\lambda-m'}(x-y\delta)\mathfrak{F}\equiv 2p^{g-m'}\mathfrak{G}\pmod p,$$

dans lesquelles on devra, eu égard à l'équation (2), supposer

$$(39)\qquad \delta\equiv r^h+r^{h'}+\ldots-r^k-r^{k'}-\ldots\pmod p.$$

D'autre part, l'équation (26) pouvant s'écrire comme il suit

$$(\rho^h+\rho^{h'}+\ldots-\rho^k-\rho^{k'}-\ldots)^2=-n,$$

on tirera de cette équation, en y remplaçant ρ par r,

$$(r^h+r^{h'}+\ldots-r^k-r^{k'}-\ldots)^2\equiv -n\pmod p,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(40)\qquad \delta^2\equiv -n\pmod p.$$

Donc le nombre entier δ sera premier à p; comme, dans l'équation (29), les quantités x, y ne sont, ni l'une ni l'autre, divisibles par p, on pourra en dire autant de la somme $2n$ et de la différence $2y\delta$ des deux binomes

$$x+y\delta,\qquad x-y\delta.$$

Donc de ces deux binomes l'un au moins sera premier à p. Concevons, pour fixer les idées, que ce soit le second $x-y\delta$ qui remplisse cette condition. Comme, en vertu des principes exposés dans la Note V (p. 196 et suiv.), les deux quantités $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ seront elles-mêmes premières à p, il est clair que, dans les deux membres de la seconde des formules (38), les exposants de p, savoir

$$\lambda-m',\quad g-m'$$

ne pourront s'évanouir l'un sans l'autre. Or, c'est précisément ce qui

arriverait si, les nombres λ, g étant inégaux, on prenait le plus petit pour valeur de m'. Donc, lorsque $x-y\delta$ est premier à p, la première des formules (38) entraîne la condition

$$\lambda=g.$$

Mais alors, en posant, dans la première des formules (38),

$$m=m'=\lambda=g,$$

on en conclut

$$f-g=0\qquad\text{ou}\qquad f-g>0,$$

suivant que le binome

$$x+y\delta$$

est ou n'est pas supposé premier à p. Donc, si le binome

$$x-y\delta$$

est premier à p, les formules (38) entraîneront la condition

$$\lambda=g\leq f.$$

Pareillement si le binome

$$x+y\delta$$

était premier à p, les formules (38) entraîneraient la condition

$$\lambda=f\leq g.$$

Ainsi, dans tous les cas, λ devra se réduire au plus petit des deux nombres

$$f,\quad g;$$

et comme, en vertu des formules (28), (34), on aura

$$(41)\qquad \mu=f+g-2\lambda,$$

il est clair que μ devra se réduire à celle des deux différences

$$f-g,\qquad g-f$$

qui sera positive, par conséquent à la valeur numérique de la différence

$f - g$. Au reste, cette différence elle-même peut être, dans tous les cas, facilement déterminée comme il suit :

Posons pour abréger

$$P = R_{h,h} R_{h',h'} \ldots, \qquad Q = R_{k,k} R_{k',k'} \ldots, \tag{42}$$

ou, ce qui revient au même,

$$P = \frac{\Theta_h^2 \Theta_{h'}^2 \ldots}{\Theta_{2h} \Theta_{2h'} \ldots}, \qquad Q = \frac{\Theta_k^2 \Theta_{k'}^2 \ldots}{\Theta_{2k} \Theta_{2k'} \ldots}. \tag{43}$$

On en conclura, eu égard aux formules (7) et (30),

$$\frac{P}{Q} = \frac{I^2}{J^2} \frac{\Theta_{2k} \Theta_{2k'} \ldots}{\Theta_{2h} \Theta_{2h'} \ldots}, \tag{44}$$

$$PQ = p^{\frac{N}{2}}. \tag{45}$$

D'ailleurs, en vertu des théorèmes 3 et 4 de la Note IX, on trouvera :

1° en supposant n de la forme $8x + 7$,

$$\Theta_{2h} \Theta_{2h'} \ldots = \Theta_h \Theta_{h'} \ldots = I, \qquad \Theta_{2k} \Theta_{2k'} \ldots = \Theta_k \Theta_{k'} \ldots = J;$$

2° en supposant n de la forme $8x + 3$,

$$\Theta_{2h} \Theta_{2h'} \ldots = \Theta_k \Theta_{k'} \ldots = J, \qquad \Theta_{2k} \Theta_{2k'} \ldots = \Theta_h \Theta_{h'} \ldots = I;$$

3° en supposant n divisible par 4 ou par 8,

$$\Theta_{2h} \Theta_{2h'} \ldots = \Theta_{2k} \Theta_{2k'} \ldots.$$

Donc les formules (43) et (44) donneront : 1° si n est de la forme $8x + 7$,

$$P = I, \qquad Q = J, \qquad \frac{P}{Q} = \frac{I}{J}; \tag{46}$$

2° si n est de la forme $8x + 3$,

$$P = \frac{I^2}{J}, \qquad Q = \frac{J^2}{I}, \qquad \frac{P}{Q} = \frac{I^3}{J^3}, \tag{47}$$

3° si n est divisible par 4 ou par 8,

$$\frac{P}{Q} = \frac{I^2}{J^2}. \tag{48}$$

Concevons maintenant que, parmi les entiers premiers à n, mais inférieurs à $\frac{1}{2}n$, on distingue ceux qui appartiennent au groupe

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots,$$

et dont le nombre sera désigné par i, les autres, dont le nombre sera désigné par j, formant une partie du groupe

$$k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots.$$

On aura évidemment

$$i + j = \frac{N}{2}, \tag{49}$$

et, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir les formules (32), on trouvera, eu égard à l'équation (45),

$$P = p^i \frac{U}{V}, \qquad Q = p^j \frac{U}{V}, \tag{50}$$

U, V, désignant des produits composés de facteurs de la forme

$$R_{l,l'},$$

dans chacun desquels on pourra supposer les indices l, l' tous deux inférieurs à n, et leur somme $l + l'$ renfermée entre les limites n, $2n$. Or, les formules (32) et (50) donneront

$$\frac{I}{J} = p^{i-s} \frac{F^2}{G^2}, \qquad \frac{P}{Q} = p^{i-j} \frac{U^2}{V^2}. \tag{51}$$

D'autre part, si l'on désigne par

$$\chi,$$

comme dans la Note précédente, une quantité qui acquière la valeur

$$-1 \quad \text{ou} \quad 1 \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant qu'on aura

$$\left[\frac{2}{n}\right] = -1 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{2}{n}\right] = 1 \quad \text{ou} \quad n \equiv 0 \pmod 2,$$

les formules (46), (47), (48) donneront

$$\frac{P}{Q} = \frac{I^2}{J^2}, \tag{52}$$

la valeur de ε étant

$$\varepsilon = 2 - t_2. \tag{53}$$

Cela posé, les formules (51) et (52) donneront

$$p^{\varepsilon(f-g)} \frac{F^{2z}}{G^{2z}} = p^{i-j} \frac{U^2}{V^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$p^{\varepsilon(f-g)} F^{2z} V^2 = p^{i-j} G^{2z} U^2; \tag{54}$$

et par suite

$$p^{\varepsilon(f-g)-m} F^{2z} V^2 = p^{i-j-m} G^{2z} U^2, \tag{55}$$

m étant un nombre entier quelconque.

Imaginons maintenant qu'on remplace ρ par r dans les deux membres de la formule (55), et soient

$$\mathfrak{V}, \quad \mathfrak{V}$$

ce que deviennent alors U, V. Les quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}$ seront non seulement entières, mais premières à p aussi bien que $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$; et de même que les équations (33) entraînent les formules (38), de même la formule (55) entraînera la suivante :

$$p^{\varepsilon(f-g)-m} \mathfrak{F}^{2z} \mathfrak{V}^2 \equiv p^{i-j-m} \mathfrak{G}^{2z} \mathfrak{V}^2 \pmod{p}. \tag{56}$$

Or, dans la formule (56), comme dans chacune des formules (38), les deux exposants de p ne peuvent s'évanouir l'un sans l'autre ; et, puisqu'on peut réduire l'un d'eux à zéro, en prenant pour m le plus petit des nombres

$$\varepsilon(f-g), \quad i-j,$$

il faudra que ces deux nombres soient égaux et qu'on ait

$$i - j = \varepsilon(f-g); \tag{57}$$

par conséquent

$$f - g = \frac{i-j}{\varepsilon} \tag{58}$$

D'ailleurs ε, toujours positif, se réduit à

$$1, \quad 3 \quad \text{ou} \quad 2,$$

suivant que n est de la forme

$$4x+3, \quad 4x+1 \quad \text{ou} \quad 4x,$$

et, en vertu de ce qui a été dit dans la Note précédente, la différence $i-j$, quand elle ne s'évanouit pas, est toujours positive. Donc, la différence $f-g$ ne pourra jamais devenir négative, et l'équation (41) donnera toujours

$$p = f - g = \frac{i-j}{\varepsilon}. \tag{59}$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — Le degré n de l'équation binome

$$x^n = 1,$$

dont ρ désigne une racine primitive, et la somme alternée

$$\mathfrak{D} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} \ldots$$

étant supposés tels qu'on ait

$$\mathfrak{D}^2 = -n;$$

si les exposants de ρ premiers à n, mais inférieurs à $\frac{1}{2}n$, se trouvent en nombre égal à i dans le groupe

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots,$$

et en nombre égal à j dans le groupe

$$k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots,$$

on pourra satisfaire, par des valeurs entières de x, y, à l'équation

$$4p^k = x^2 + ny^2,$$

pourvu qu'on prenne

$$\mu = i - j,$$

quand n sera de la forme $8x + 7$;

$$\mu = \frac{i-j}{3},$$

quand n, sans être égal à 3, sera de la forme $8x + 3$; et

$$\mu = \frac{i-j}{2},$$

quand n, sans être égal à 4, sera divisible par 4 ou par 8. Si n se réduisait à l'un des nombres 3, 4, alors (en vertu de ce qui a été dit dans la Note IV) on aurait simplement

$$\mu = 1.$$

Pour vérifier l'exactitude du théorème qui précède, dans le cas particulier où l'on prend pour n un des nombres 3, 4, il suffit d'observer que l'équation

$$4p = x^2 + ny^2,$$

réduite alors à la forme

$$4p = x^2 + 3y^2,$$

ou à la forme

$$4p = x^2 + 4y^2 \quad \text{ou} \quad p = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + y^2,$$

coïncidera, pour $n = 3$, avec la formule (110) de la page 163, quand on posera $x = A$, $y = B$, et pour $n = 4$, avec la formule (93) de la page 153, quand on posera $x = 2A$, $y = B$.

Si, dans le théorème qui précède, nous n'avons pas fait une mention spéciale du cas où l'on aurait

$$n = 8, \quad \Omega^2 = -8, \quad \Theta = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7,$$

et où la condition (10) cesserait d'être vérifiée, c'est qu'en vertu des principes établis dans la Note III on peut encore, dans ce cas, résoudre en nombres entiers l'équation (29), en prenant $\mu = 1$, et que cette

dernière valeur de μ est comprise dans la formule

$$\mu = \frac{i-j}{2}.$$

En effet, dans le cas dont il s'agit, l'équation (29) réduite à

$$4p^\mu = x^2 + 8y^2,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$p^\mu = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2y^2,$$

coïncide avec la formule (103) de la page 159, quand on pose

$$\mu = 1, \quad x = 2A, \quad y = B;$$

et, comme alors aussi l'on trouve

$$i = 2, \quad j = 0,$$

on en conclut

$$\frac{i-j}{2} = 1.$$

Il nous reste à indiquer une méthode à l'aide de laquelle on peut faciliter le calcul des valeurs de x, y qui sont propres à résoudre l'équation (1).

L'exposant μ étant supposé plus grand que zéro, ainsi que $i - j$, la différence $f - g$ sera elle-même supérieure à zéro, et, en vertu des équations

$$\lambda = g, \quad \varepsilon(f-g) = i - j,$$

les formules (38), (56) pourront être réduites aux suivantes :

$$(60) \qquad x + y\delta \equiv 0, \quad x - y\delta \equiv 2\frac{\Omega}{\mathfrak{F}} \pmod{p},$$

$$(61) \qquad \left(\frac{\Omega}{\mathfrak{F}}\right)^{2\varepsilon} \equiv \left(\frac{\upsilon}{\upsilon}\right)^2 \pmod{p}.$$

Or, les formules (60) donneront

$$(62) \qquad x \equiv -y\delta \equiv \frac{\Omega}{\mathfrak{F}} \pmod{p},$$

et il est clair que cette dernière équation fournira immédiatement le reste de la division de x et de y par p, ce qui facilitera le calcul des valeurs de x, y et suffira même à la détermination de ces valeurs, dans tous les cas où elles devront être, abstraction faite des signes, inférieures à $\frac{1}{2}p$. Quant à la détermination des quantités $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, ou $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, elle s'effectuera sans difficulté. En effet, en vertu des principes établis dans la Note V (p. 196 et suivantes), pour déduire $\mathfrak{f}$ de F, et $\mathfrak{g}$ de G, il suffira de remplacer ρ par r, dans les divers facteurs de F et de G, ou, ce qui revient au même, de remplacer chaque facteur de la forme

$$R_{l,r},$$

par une quantité entière équivalente, au signe près, à

$$-\Pi_{n-l,n-l'},$$

la valeur de $\Pi_{l,l'}$ étant donnée par la formule

$$\Pi_{l,l'}=\frac{1.2.3\ldots(l+l')\varpi}{1.2.3\ldots l\varpi.1.2.3\ldots l'\varpi}. \tag{63}$$

La formule (62) n'est pas applicable aux cas où n se réduit à l'un des nombres 3, 4, 8 et doit alors être remplacée par celles que nous allons indiquer.

Les valeurs de P, Q, fournies par les équations (42), sont évidemment, ainsi que I, J, des fonctions symétriques, d'une part, des racines primitives

$$\rho^h,\quad \rho^{h'},\quad \rho^{h''},\quad \ldots$$

et, d'autre part, des racines primitives

$$\rho^k,\quad \rho^{k'},\quad \rho^{k''},\quad \ldots.$$

Donc la somme P + Q sera, comme I + J, une fonction symétrique des diverses racines primitives de l'équation (1), et la différence P − Q sera, comme I − J, une fonction alternée de ces mêmes racines; d'où il résulte qu'on pourra aux équations (8) joindre encore celles-ci

$$\mathrm{P}+\mathrm{Q}=\mathfrak{A},\qquad \mathrm{P}-\mathrm{Q}=\mathfrak{B}\mathbb{O}, \tag{64}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ désignant des quantités entières. Cela posé on tirera, des formules (45) et (64),

$$2\mathrm{P}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathbb{O},\qquad 2\mathrm{Q}=\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\mathbb{O},$$
$$4\mathrm{PQ}=\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2\mathbb{O}^2,$$
$$4p^{\frac{\mathrm{N}}{2}}=\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2\mathbb{O}^2;$$

et par suite, si la condition

$$\mathbb{O}^2=-n$$

est vérifiée, on trouvera

$$4p^{\frac{\mathrm{N}}{2}}=\mathfrak{A}^2+n\mathfrak{B}^2. \tag{65}$$

Or si l'on substitue l'équation (65) et les formules (50) à l'équation (20) et aux formules (32), alors, par des raisonnements semblables à ceux dont nous nous sommes servis pour établir le théorème énoncé plus haut et la formule (62), on prouvera qu'on peut satisfaire à l'équation

$$4p^{\mu}=x^2+ny^2,$$

en posant généralement

$$\mu=i-j$$

et prenant, pour x, y, certains nombres entiers qui vérifieront la condition

$$x\equiv -y\delta\equiv\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}}\pmod{p}. \tag{66}$$

Considérons en particulier le cas où l'on a $n=3$. On trouvera, dans ce cas,

$$\mathbb{O}=\rho-\rho^2,$$
$$h=1,\quad k=2,\quad i=1,\quad j=0,\quad i-j=1,$$
$$\mathrm{P}=\mathrm{R}_{1,1},\qquad \mathrm{Q}=\mathrm{R}_{2,2},$$
$$\mathrm{U}=0,\qquad \mathrm{V}=\mathrm{R}_{2,2},$$

et par suite on pourra prendre

$$\mathfrak{v}=0,\qquad \mathfrak{w}=-\Pi_{1,1}.$$

Donc, p étant un nombre premier de la forme $3x+1$, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$4p = x^2 + 3y^2, \tag{67}$$

en prenant pour x, y des nombres entiers qui vérifient la condition

$$x \equiv -y\delta \equiv -\Pi_{1,1}.$$

Il importe d'observer que, dans cette dernière formule, la valeur de $\Pi_{1,1}$ sera

$$\Pi_{1,1} = \frac{1.2.3\ldots 2\varpi}{(1.2\ldots\varpi)^2} = \frac{(\varpi+1)\ldots 2\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

la valeur de ϖ étant

$$\varpi = \frac{p-1}{3},$$

et que d'ailleurs on aura

$$\delta \equiv r - r^2,$$

r étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^3 \equiv 1 \pmod{p};$$

par conséquent

$$r \equiv t^{\varpi} \pmod{p},$$

t étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Cela posé, en ayant égard à la formule

$$\delta^2 = -3,$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{\delta} = -\frac{\delta}{3},$$

on trouvera

$$x \equiv -\Pi_{1,1}, \quad y \equiv -\frac{1}{3}\Pi_{1,1}\delta \pmod{p}. \tag{68}$$

D'autre part, comme on aura, en vertu de l'équation (67),

$$x^2 < 4p, \quad y^2 < \frac{4p}{3},$$

les valeurs numériques de x, y seront respectivement inférieures aux

nombres

$$2p^{\frac{1}{2}}, \quad 2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dont le second au moins restera inférieur à $\frac{1}{2}p$, pour une valeur de p égale ou supérieure à 7; le premier remplissant lui-même cette condition dès qu'on supposera p supérieur à 16, par conséquent à 7 et à 13. Donc les formules (68), ou au moins la seconde d'entre elles, fourniront immédiatement la résolution en nombres entiers de l'équation (67). On trouvera, par exemple, pour $p=7$,

$$\varpi = \frac{p-1}{3} = 2, \quad \Pi_{1,1} = \frac{3.4}{1.2} = 6;$$

et comme 3 étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^6 \equiv 1 \pmod{7},$$

on pourra prendre

$$r \equiv 3^2 = 2 \pmod{7};$$

par conséquent

$$\delta \equiv r - r^2 \equiv 2 - 4 \equiv -2 \pmod{7},$$

les formules (68) donneront

$$x \equiv -6 \equiv 1, \quad y \equiv 4 \equiv -3 \pmod{7}.$$

On a effectivement

$$4.7 = 1^2 + 3.3^2.$$

Prenons encore $p=13$. On trouvera

$$\varpi = 4, \quad \Pi_{1,2} = \frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} = 70;$$

et comme 3 étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{12} \equiv 1 \pmod{13},$$

on pourra prendre

$$r \equiv 3^1 \equiv 3, \quad \delta \equiv r - r^2 \equiv 3 - 9 \equiv -6 \pmod{13},$$

les formules (68) donneront

$$x \equiv -70 \equiv -5, \quad y \equiv 10 \equiv -3 \pmod{13}.$$

On a effectivement

$$4.7 = 5^2 + 3.3^2.$$

La valeur numérique de x remplit déjà, comme on le voit, pour les valeurs 7 et 13 du nombre p, la condition d'être inférieure à $\frac{1}{2}p$. Donc, d'après ce qui a été dit ci-dessus, cette condition sera toujours remplie et, pour résoudre en nombres entiers l'équation (67), il suffira, dans tous les cas, de recourir à la première des équations (68). On trouvera, par exemple, pour $p = 19$,

$$\varpi = 6, \qquad \Pi_{1,1} = \frac{7.8\ 9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6} \equiv 7.11.12 \equiv 12 \pmod{19},$$

$$x \equiv 12 \equiv -7 \pmod{19},$$

$$x = -7.$$

On a effectivement

$$4.19 = 7^2 + 3.3^2.$$

Dans les exemples précédents, la valeur de y est constamment divisible par 3. On peut démontrer qu'il en sera toujours ainsi (*voir* les numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, pour l'année* 1840).

Les formules (68), jointes à la remarque que nous venons de faire, comprennent l'un des théorèmes énoncés par M. Jacobi en 1827, dans un Mémoire qui a pour titre *De residuis cubicis commentatio numerosa* (voir le *Journal de M. Crelle*, de 1827).

Au reste, après avoir résolu l'équation (67) à l'aide des formules (68), on pourra toujours obtenir immédiatement deux autres solutions de la même équation, en ayant recours à la formule

$$4p = x^2 + 3y^2 = \left(\frac{x+3y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-3y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

On trouvera par exemple

$$4.7 = 1 + 3.3^2 = 5^2 + 3.1^2 = 4^2 + 3.2^2,$$
$$4.13 = 5^2 + 3.3^2 = 7^2 + 3.1^2 = 2^2 + 3.4^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Considérons maintenant le cas où l'on a $n = 4$. On trouvera dans ce cas

$$\omega = \rho - \rho^3,$$
$$h = 1, \quad k = 3, \quad i = 1, \quad j = 0, \quad i - j = 1,$$
$$P = R_{1,1}, \quad Q = R_{3,3},$$
$$U = R_{1,1}, \quad V = R_{3,3},$$

et, par suite, on pourra prendre

$$v = 1, \qquad v = -\Pi_{1,1}.$$

Donc, p étant un nombre premier de la forme $4x + 1$, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$4p = x^2 + 4y^2. \tag{69}$$

en prenant pour x, y des nombres entiers qui vérifient la condition

$$x \equiv -y\delta \equiv -\Pi_{1,1}.$$

Dans cette dernière formule, la valeur de $\Pi_{1,1}$ sera

$$\Pi_{1,1} = \frac{1.2.3\ldots 2\varpi}{(1.2\ldots\varpi)^2} = \frac{(\varpi+1)\ldots 2\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

la valeur de ϖ étant

$$\varpi = \frac{p-1}{4},$$

et l'on aura d'ailleurs

$$\delta = r - r^3,$$

r étant une racine primitive de l'équation

$$x^4 \equiv 1 \pmod{p},$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$r = t^{\varpi},$$

t étant ce qu'on nomme une *racine primitive* du nombre p, c'est-à-dire une racine primitive de l'équation

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Cela posé, en ayant égard à la formule

$$\delta^2 \equiv -4 \pmod{p},$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{\delta} \equiv -\frac{\delta}{4},$$

on trouvera

$$x \equiv -\Pi_{1,1}, \qquad y \equiv -\frac{1}{4}\Pi_{1,1}\delta \pmod{p}. \tag{70}$$

D'ailleurs, pour que l'équation (69) soit vérifiée, il est nécessaire que x soit un nombre pair; et alors, en écrivant $2x$ au lieu de x, dans cette même équation, on obtient la suivante

$$p = x^2 + y^2, \tag{71}$$

à laquelle on devra satisfaire par des valeurs de x, y propres à vérifier les formules

$$x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,1}, \qquad y \equiv -\frac{1}{4}\Pi_{1,1}\delta. \tag{72}$$

D'autre part, comme, en vertu de l'équation (71), les quantités x, y devront offrir des carrés inférieurs à p, et des valeurs numériques inférieures à $p^{\frac{1}{2}}$, par conséquent à

$$\frac{p}{2} = p^{\frac{1}{2}}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2},$$

attendu que p, au moins égal à 5, vérifiera la condition $p^{\frac{1}{2}} > 2$; il est clair qu'à l'aide des formules (72), ou seulement de la première de ces formules, on pourra déterminer complètement les valeurs entières de x, y qui vérifieront la formule (11). On trouvera par exemple, pour $p = 5$,

$$\varpi = \frac{p-1}{4} = 1, \qquad \Pi_{1,1} = 2,$$

$$x \equiv -1 \pmod{5},$$

$$x = -1.$$

On a en effet

$$5 = 1^2 + 2^2.$$

Prenons encore $p = 13$, on trouvera

$$\varpi = 3, \qquad \Pi_{1,1} = \frac{4.5.6}{1.2.3} = 20 \pmod{13},$$

$$x \equiv -10 \equiv 3 \pmod{13},$$

$$x = 3.$$

On a en effet

$$13 = 3^2 + 2^2.$$

Prenons encore $p = 17$; on trouvera

$$\varpi = 4, \qquad \Pi_{1,1} = \frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} = 5.2.7 = 70, \equiv 2 \pmod{17}.$$

$$x \equiv -1 \pmod{17},$$

$$x = -1.$$

On a en effet

$$17 = 1^2 + 4^2.$$

Prenons enfin $p = 29$. On trouvera

$$\varpi = 7, \qquad \Pi_{1,1} = \frac{8.9.10.11.12.13.14}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

D'ailleurs, il ne sera pas nécessaire de calculer la valeur exacte de $\Pi_{1,1}$, et l'on pourra se borner à déterminer, par l'une des méthodes exposées dans la Note V, une quantité équivalente à $\Pi_{1,1}$, suivant le module 29. Cette quantité sera immédiatement fournie par le tableau de la page 209, et se réduira au nombre 10, renfermé dans les deux colonnes horizontale et verticale dont les premières cases offrent le nombre 7. On aura donc

$$\Pi_{1,1} \equiv 10 \pmod{29},$$

$$x \equiv -5 \pmod{29},$$

$$x = -5.$$

On trouve en effet

$$29 = 5^2 + 2^2.$$

La première des formules (73) fournit précisément le beau théorème énoncé par M. Gauss, et relatif à la résolution de l'équation (71) en nombres entiers.

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose, comme on vient de le faire,

$$p = 4\varpi + 1,$$

l'équation connue

$$1.2.3\ldots(p-1)\equiv -1 \pmod{p}$$

donne

$$(1.2.3\ldots 2\varpi)^2\equiv -1.$$

Donc alors on vérifie la formule

$$\delta^2\equiv -4,$$

en prenant

$$\delta = 2(1.2.3\ldots 2\varpi),$$

et la seconde des formules (72) peut être réduite à

$$y\equiv -\frac{1.2.3\ldots 2\varpi}{2}\Pi_{1,3}.$$

Ainsi, par exemple, on trouvera, pour $p=5$,

$$y\equiv -\Pi_{1,3}\equiv -2 \pmod{5},$$

par conséquent

$$y=-2;$$

pour $p=13$,

$$y\equiv -3.4.5\ldots 6\Pi_{1,3}\equiv 4\Pi_{1,3}\equiv 80\equiv 2 \pmod{13},$$

$$y=2, \quad \ldots.$$

Considérons maintenant le cas où l'on a $n=8$,

$$\omega=\rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7.$$

Dans ce cas, on ne peut plus se servir ni de la formule (61), ni de la formule (66). Mais les équations (7) donnent

$$I=\Theta_1\Theta_3=R_{1,3}\Theta_4, \qquad J=\Theta_2\Theta_7=R_{5,7}\Theta_4,$$

et les coefficients de Θ_4 dans ces formules, savoir :

$$R_{1,3}, \quad R_{5,7},$$

représentent des fonctions symétriques des racines primitives

$$\rho, \quad \rho^3 \quad \text{ou} \quad \rho^5, \quad \rho^7.$$

Par suite, la somme

$$R_{1,3}+R_{5,7}$$

et la différence

$$R_{1,3}-R_{5,7}$$

seront de la forme

$$R_{1,3}+R_{5,7}=A, \qquad R_{1,3}-R_{5,7}=B\omega,$$

A, B désignant des quantités entières ; et, comme on aura d'autre part

$$R_{1,3}R_{5,7}=p,$$

on trouvera définitivement

$$4p=A^2-B^2\omega^2;$$

puis, en ayant égard à la formule

$$\omega^2=-8,$$

on en conclura

$$4p=A^2+8B^2.$$

Dans cette dernière équation, A sera nécessairement pair, et en posant

$$A=2x, \qquad B=y,$$

on la verra se réduire à

$$p=x^2+2y^2. \tag{73}$$

Ajoutons que, si l'on remplace ρ par r dans les deux formules

$$R_{1,3}+R_{5,7}=2x, \qquad R_{1,3}-R_{5,7}=y\omega,$$

on devra y remplacer ω par δ ; et comme alors $R_{1,2}$ se trouvera remplacé par zéro, et $R_{5,7}$ par

$$-\Pi_{1,3},$$

on aura définitivement

$$2x\equiv -y\delta\equiv -\Pi_{1,3}.$$

Donc, en ayant égard à la formule

$$\delta^2\equiv -8 \pmod{p},$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{\delta}\equiv -\frac{\delta}{8} \pmod{p},$$

on trouvera

$$(74) \qquad x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,3}, \qquad y \equiv -\frac{1}{8}\Pi_{1,3}\delta \pmod{p},$$

la valeur de $\Pi_{1,3}$ étant donnée par l'équation

$$\Pi_{1,3} = \frac{1.2.3\ldots 4\varpi}{(1.2\ldots\varpi)(1.2\ldots 3\varpi)} = \frac{(3\varpi+1)\ldots 4\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

et la valeur de ϖ étant

$$\varpi = \frac{p-1}{8}.$$

Quant à la valeur de δ, elle sera

$$\delta \equiv r + r^3 - r^5 - r^7 \pmod{p}$$

r étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^8 \equiv 1 \pmod{p}$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$r \equiv t^{\varpi} \pmod{p},$$

t étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Les formules (74) suffiront à la détermination complète des valeurs de x, y qui vérifieront l'équation (73), attendu que ces valeurs devront être, l'une et l'autre, inférieures, abstraction faite des signes, à $\frac{1}{2}p$, et à plus forte raison à $\frac{1}{2}p$. On pourra même se borner à déterminer la valeur de x, à l'aide de la première des formules (74). On trouvera, par exemple, pour $p = 17$,

$$\varpi = 2, \qquad \Pi_{1,3} = \frac{7.8}{1.2} = 28.$$

$$x \equiv -14 \equiv 3 \pmod{17},$$

$$x = 3.$$

On aura effectivement

$$17 = 3^2 + 2.2^2.$$

On trouvera pareillement, pour $p = 41$,

$$\varpi = 5, \qquad \Pi_{1,3} = \frac{16.17.18.19.20}{1.2.3.4.5} = 15.17.3.19 \equiv -6 \pmod{41},$$

$$x \equiv -3 \pmod{41},$$

$$x = -3.$$

On a effectivement

$$41 = 3^2 + 2.4^2.$$

.....

La première des formules (74) fournit un théorème donné par M. Jacobi, en 1838, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie de Berlin*.

Revenons maintenant au cas général où n désigne un entier qui vérifie la condition

$$\mathfrak{D}^2 = -n,$$

sans toutefois se réduire à l'un des trois nombres

$$2, \quad 4, \quad 8.$$

Alors les valeurs entières de x, y, propres à résoudre l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

vérifieront la formule (62) ; et, comme on aura d'ailleurs

$$\delta^2 \equiv -n \pmod{p},$$

par conséquent

$$\frac{1}{\delta} \equiv -\frac{\delta}{n} \pmod{p},$$

on trouvera

$$(75) \qquad x = \frac{\Omega}{\mathfrak{d}^{\mu}}, \qquad y \equiv \frac{\delta}{n}\frac{\Omega}{\mathfrak{d}^{\mu}} \pmod{p}.$$

Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que, dans la formule

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

le second membre devra être pair tout comme le premier, et qu'en conséquence les deux termes

$$x^2, \quad ny^2$$

seront tous deux pairs ou tous deux impairs. Donc, si n est impair, les deux carrés

$$x^2, \quad y^2$$

seront en même temps pairs ou impairs. D'ailleurs, si les carrés x^2, y^2 sont tous deux impairs, chacun, divisé par 8, donnera 1 pour reste, et par suite la formule

$$x^2 + ny^2 = 4p^{\mu}$$

donnera

$$1 + n \equiv 4p^{\mu} \equiv 4 \pmod 8,$$

ou, ce qui revient au même,

$$n \equiv 3 \pmod 8. \tag{76}$$

Donc, si n, supposé impair, et de la forme $4x + 3$ afin qu'on ait $\omega^2 = -n$, ne vérifie pas la condition (76), c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on a

$$n \equiv 7 \pmod 8, \tag{77}$$

x^2, y^2 seront pairs l'un et l'autre. Alors, en écrivant $2x$ au lieu de x, et $2y$ au lieu de y, on obtiendra, au lieu de l'équation (29), la suivante

$$p^{\mu} = x^2 + ny^2, \tag{78}$$

à laquelle on satisfera par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

$$x \equiv \frac{1}{2}\frac{G}{\mathfrak{F}}, \qquad y \equiv \frac{\partial}{2n}\frac{G}{\mathfrak{F}} \pmod p. \tag{79}$$

Enfin, si n est un nombre pair, divisible par 4 ou par 8, il est clair que, dans l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

x lui-même devra être pair. Alors, en écrivant $2x$ au lieu de x, on verra cette équation se réduire à la suivante

$$p^{\mu} = x^2 + \frac{n}{4}y^2, \tag{80}$$

et l'on pourra satisfaire à cette dernière par des valeurs entières

de x, y, qui vérifieront les conditions

$$x \equiv \frac{1}{2}\frac{G}{\mathfrak{F}}, \qquad y \equiv \frac{\partial}{n}\frac{G}{\mathfrak{F}} \pmod p. \tag{81}$$

Pour montrer quelques applications des formules qui précèdent, prenons d'abord pour n les nombres premiers qui, étant de la forme $4x+3$, et supérieurs à 3, restent inférieurs à 100. Parmi ces nombres premiers, les uns, savoir

$$11, \quad 19, \quad 43, \quad 59, \quad 67, \quad 83,$$

seront de la forme $8x + 3$, les autres, savoir

$$7, \quad 23, \quad 31, \quad 47, \quad 71, \quad 79,$$

seront de la forme $8x + 7$; et pour chacun d'eux, on obtiendra facilement les valeurs des résidus quadratiques

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

en cherchant, dans les Tables construites par M. Jacobi, ceux des nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1,$$

qui offrent des indices pairs suivant le module n. Ainsi, par exemple, comme, pour $n = 7$, les indices des nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$$

sont dans ces mêmes Tables

$$0, \quad 2, \quad 1, \quad 4, \quad 5, \quad 3$$

on trouvera, pour $n = 7$,

$$h = 1, \qquad h' = 2, \qquad h'' = 4,$$
$$\omega = \rho + \rho^2 + \rho^4 - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6.$$

En opérant de la même manière pour les diverses valeurs de n, on reconnaîtra que les quantités $h, h', h'', \ldots$ inférieures ou supérieures à $\frac{n}{2}$, le nombre i ou j des unes ou des autres, et la différence $i - j$ sont

respectivement, pour

$n=7$	1, 2 4	$i=2$ $j=1$	$i-j=1$,
$n=11$	1, 3, 4, 5 9	$i=4$ $j=1$	$i-j=3$,
$n=19$	1, 4, 5, 6, 7, 9 11, 16, 17	$i=6$ $j=3$	$i-j=3$,
$n=23$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 12, 13, 16, 18	$i=7$ $j=4$	$i-j=3$,
$n=31$	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 16, 18, 19, 20, 25, 28	$i=9$ $j=6$	$i-j=3$,
$n=43$	1, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 23, 24, 25, 31, 35, 36, 38, 40, 41	$i=12$ $j=9$	$i-j=3$,
$n=47$	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 34, 36, 37, 42	$i=14$ $j=9$	$i-j=5$,
$n=59$	1, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36, 41, 45, 46, 48, 49, 51, 53, 57	$i=19$ $j=10$	$i-j=9$,
$n=67$	1, 4, 6, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 47, 49, 54, 55, 56, 59, 60, 62, 64, 65	$i=18$ $j=15$	$i-j=3$,
$n=71$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 36, 37, 38, 40, 43, 45, 48, 49, 50, 54, 57, 58, 60, 64	$i=21$ $j=14$	$i-j=7$,
$n=79$	1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 55, 62, 64, 65, 67, 72, 74, 76	$i=22$ $j=17$	$i-j=5$,
$n=83$	1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 38, 40, 41, 44, 48, 49, 51, 59, 61, 63, 64, 65, 68, 69, 70, 75, 77, 78, 81	$i=25$ $j=16$	$i-j=9$.

Donc les valeurs de

$$\mu = i - j,$$

qui permettront toujours de résoudre en nombres entiers l'équation

$$p^\mu = x^2 + ny^2,$$

seront respectivement :

Pour	$n=7$,	23,	31,	47,	71,	79,
	$\mu=1$,	3.	3,	5,	7,	5;

et les valeurs de

$$\mu = \frac{i-j}{3},$$

qui permettront toujours de résoudre en nombres entiers l'équation

$$4p^\mu = x^2 + ny^2,$$

seront respectivement :

Pour	$n=11$,	19,	43,	59,	67,	83,
	$\mu=1$,	1,	1,	3,	1,	3.

De plus, on aura, pour $n=7$,

$$\mathrm{I} = \Theta_1\Theta_2\Theta_4 = p\frac{\Theta_1\Theta_2}{\Theta_3}, \qquad \mathrm{J} = \Theta_3\Theta_5\Theta_6 = p\frac{\Theta_3\Theta_6}{\Theta_{11}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{I} = p\mathrm{R}_{1,2} = p^2\frac{1}{\mathrm{R}_{6,5}}, \qquad \mathrm{J} = p\mathrm{R}_{6,5},$$

$$f=2, \quad g=1, \quad f-g=1=\frac{i-j}{3}=\mu,$$

$$\mathrm{F}=1, \quad \mathrm{G}=\mathrm{R}_{6,5};$$

et par suite, on pourra prendre

$$\mathcal{F}=1, \qquad \mathcal{G}=-\Pi_{1,2}.$$

Donc, en vertu des formules (79), on pourra satisfaire à l'équation

$$p = x^2 + 7y^2, \tag{82}$$

par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

$$x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,2}, \qquad y \equiv -\frac{\delta}{14}\Pi_{1,2} \pmod{p}, \tag{83}$$

la valeur de $\Pi_{1,2}$ étant donnée par la formule

$$\Pi_{1,2} = \frac{1.2.3\ldots 3\varpi}{(1.2\ldots\varpi)(1.2\ldots 2\varpi)} = \frac{(2\varpi+1)\ldots 3\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

dans laquelle on aura

$$\varpi = \frac{p-1}{7},$$

et la valeur de δ par la formule

$$\delta = r + r^2 + r^4 - r^3 - r^5 - r^6,$$

dans laquelle r sera une racine primitive de l'équation

$$x^7 \equiv 1 \pmod{p},$$

en sorte qu'on pourra supposer

$$r = t^{\varpi},$$

t étant une racine de p, c'est-à-dire une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

On trouvera, par exemple, pour $p = 29$,

$$\varpi = 4, \quad \Pi_{1,2} = \frac{1.2.3\ldots12}{(1.2.3.4)(1.2.3\ldots8)} = \frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} = 9.5.11 \equiv 2 \pmod{29},$$

$$x \equiv -1 \pmod{29},$$

$$x = -1.$$

On a en effet

$$29 = 1 + 7.2^2.$$

Au reste, la quantité 2, qui, dans cet exemple, est équivalente à $\Pi_{1,2}$, suivant le module 29, se trouve immédiatement fournie par le tableau de la page 209, et se réduit, comme on devait s'y attendre, à celle que renferment à la fois les deux colonnes horizontale et verticale dont les premières cases contiennent les deux nombres

$$\varpi = 4, \qquad 2\varpi = 8.$$

M. Jacobi, dans son Mémoire de 1827, avait déjà indiqué les formules (83) comme pouvant servir à la résolution de l'équation (82). Pour arriver à ces formules et à d'autres semblables, il avait suivi une marche analogue à celle par laquelle M. Gauss lui-même a établi la première des formules (72), et il avait eu recours, nous a-t-il dit, à des considérations qui ne diffèrent pas de celles que j'ai exposées dans le *Bulletin des Sciences de* 1829, c'est-à-dire à la considération des fonctions ci-dessus désignées par Θ_6, Θ_8, Θ_{10}, ...

Si, au lieu de supposer $n = 7$, on prend successivement pour n les nombres premiers

$$11, \quad 19, \quad 43, \quad 67,$$

pour lesquels on a aussi $\mu = 1$, il suffira de recourir aux formules (75),

ou du moins à la seconde d'entre elles, pour déterminer complètement les valeurs de x, y propres à vérifier l'équation

$$4p = x^2 + ny^2.$$

D'ailleurs, on trouvera, pour $n = 11$,

$$\mathrm{J} = -\mathrm{R}_{1,3,4,5,9} = -\mathrm{R}_{1,3}\,\mathrm{R}_{1+3,4}\,\mathrm{R}_{1+3+4,5}\,\mathrm{R}_{1+3+4+5,9},$$
$$\mathrm{I} = -\mathrm{R}_{10,8,7,6,2} = -\mathrm{R}_{10,8}\mathrm{R}_{10+8,7}\mathrm{R}_{10+8+7,6}\mathrm{R}_{10+8+7+6,2};$$

par conséquent

$$\mathrm{I} = p\mathrm{R}_{1,3}\,\mathrm{R}_{4,5}\mathrm{R}_{8,5} = p^3\frac{\mathrm{R}_{8,5}}{\mathrm{R}_{10,8}\mathrm{R}_{7,7}},$$

$$\mathrm{J} = p\mathrm{R}_{10,8}\mathrm{R}_{7,7}\mathrm{R}_{3,6} = p^3\frac{\mathrm{R}_{10,8}\mathrm{R}_{7,7}}{\mathrm{R}_{8,5}},$$

$$f = 3, \quad g = 2, \quad f - g = 1 = \frac{i-j}{3} = \mu,$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{R}_{8,5}, \quad \mathrm{G} = \mathrm{R}_{10,8}\mathrm{R}_{7,7},$$

et l'on pourra prendre

$$\mathcal{F} = -\Pi_{3,6}, \quad \mathcal{G} = \Pi_{1,3}\Pi_{4,1}.$$

Donc, en vertu des formules (75), lorsque p divisé par 11 donnera pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$4p = x^2 + 11y^2 \tag{84}$$

par des valeurs de x, y propres à vérifier les conditions

$$x \equiv -\frac{\Pi_{1,3}\Pi_{4,1}}{\Pi_{2,6}}, \qquad y \equiv -\frac{\delta}{11}\frac{\Pi_{1,3}\Pi_{4,1}}{\Pi_{2,6}}, \tag{85}$$

les valeurs de $\Pi_{1,3}$, $\Pi_{4,1}$, $\Pi_{2,6}$ étant données par les formules

$$\Pi_{1,3} = \frac{(3\varpi+1)\ldots4\varpi}{1.2\ldots\varpi}, \qquad \Pi_{4,1} = \frac{(4\varpi+1)\ldots8\varpi}{1.2\ldots4\varpi}, \qquad \Pi_{2,6} = \frac{(6\varpi+1)\ldots8\varpi}{1.2\ldots2\varpi},$$

dans lesquelles on aura

$$\varpi = \frac{p-1}{11}.$$

Si, par exemple, on suppose $p = 23$, on trouvera

$$\varpi = 2, \quad \Pi_{1,2} = \frac{7.8}{1.2}, \quad \Pi_{1,4} = \frac{9.10.11.12.13.14.15.16}{1.2.3.4.5.6.7.8}, \quad \Pi_{2,6} = \frac{13.14.15.16}{1.2.3.4},$$

$$\Pi_{1,2} \equiv 28 \equiv 5, \quad \Pi_{1,4} \equiv 9.10.11.13 \equiv -10, \quad \Pi_{2,6} \equiv 13.14.10 \equiv 3, \pmod{23}.$$

$$x \equiv -\frac{50}{3} \equiv -\frac{27}{3} \equiv -9 \pmod{23}.$$

Le carré de x^2 devant d'ailleurs être inférieur à $4.23 = 92$, on ne peut supposer que

$$x = -9.$$

On pourrait opérer de la même manière pour les trois valeurs de n représentées par

$$19, \quad 43, \quad 67.$$

Mais il est bon d'observer que chacune d'elles, divisée par 3, donne 1 pour reste. Or, quand cette condition est remplie, ou, ce qui revient au même, quand, n étant premier, $n - 1$ est divisible par 3, on peut ajouter, trois à trois, les nombres renfermés dans chacun des groupes

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots \qquad \text{et} \qquad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots,$$

de manière à obtenir des sommes divisibles par n. En effet, soit s une racine primitive de l'équivalence

$$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Les nombres renfermés dans le groupe

$$k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots$$

seront équivalents, suivant le module n, aux divers termes de la progression géométrique

$$1, \quad s^3, \quad s^6, \quad \ldots, \quad s^{n-3},$$

et les nombres renfermés dans le groupe

$$k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots$$

aux divers termes de la progression géométrique

$$s, \quad s^3, \quad \ldots, \quad s^{n-3}.$$

Comme on trouvera d'ailleurs, en supposant $n - 1$ divisible par 3,

$$1 + s^{\frac{n-1}{3}} + s^{2\frac{n-1}{3}} = \frac{s^{n-1} - 1}{s^{\frac{n-1}{3}} - 1} \equiv 0 \pmod{n},$$

il est clair que, dans cette hypothèse, on aura

$$h + h' + h'' \equiv 0 \pmod{n},$$

si l'on prend

$$h \equiv s^m, \qquad h' \equiv s^{\frac{n-1}{3}+m}, \qquad h'' \equiv s^{2\frac{n-1}{3}+m},$$

m étant un nombre pair, et

$$k + k' + k'' \equiv 0 \pmod{n},$$

si l'on prend

$$k \equiv s^m, \qquad k' \equiv s^{\frac{n-1}{3}+m}, \qquad k'' \equiv s^{2\frac{n-1}{3}+m},$$

m étant un nombre impair. Par suite, chacune des fonctions représentées précédemment par I, J pourra être censée résulter de la multiplication de divers produits de la forme

$$\Theta_l \Theta_{l'} \Theta_{l''},$$

dans chacun desquels on aura

$$l + l' + l'' \equiv 0 \pmod{n}.$$

Or, on trouvera sous cette condition

$$\Theta_l \Theta_{l'} \Theta_{l''} = \Theta_l \Theta_{l'} \Theta_{-l-l'} = p \frac{\Theta_l \Theta_{l'}}{\Theta_{l+l'}} = p \mathrm{R}_{l,l'},$$

l, l' pouvant être deux quelconques des trois nombres

$$l, \quad l', \quad l'',$$

par exemple les deux plus petits, lorsqu'on aura

$$l + l' + l'' = n,$$

et les deux plus grands lorsqu'on aura

$$l + l' + l'' = 2n.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, chacune des fonctions

$$\mathrm{I}, \quad \mathrm{J}$$

pourra être censée résulter de la multiplication de $\frac{n-1}{6}$ facteurs de la forme

$$p\mathrm{R}_{t,t'},$$

ce qui permettra de calculer facilement les valeurs de $\mathcal{F}, \mathcal{G}$.

Concevons, pour fixer les idées, qu'on ait $n = 19$. Alors, si l'on prend $s = 10$, les nombres qui, étant inférieurs à 19, seront équivalents, suivant le module 19, aux quantités

$$\begin{array}{cccccc} 1, & s, & s^2, & s^3, & s^4, & s^5, \\ s^6, & s^7, & s^8, & s^9, & s^{10}, & s^{11}, \\ s^{12}, & s^{13}, & s^{14}, & s^{15}, & s^{16}, & s^{17}, \end{array}$$

c'est-à-dire les nombres correspondant aux indices

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ 6, & 7, & 8 & 9, & 10, & 11, \\ 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17. \end{array}$$

seront respectivement ceux qui se trouveront contenus dans les trois premières lignes horizontales du tableau

$$(86) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 10, & 5, & 12, & 6, & 3, \\ 11, & 15, & 17, & 18, & 9, & 14, \\ \frac{7}{19}, & \frac{13}{38}, & \frac{16}{38}, & \frac{8}{38}, & \frac{4}{19}, & \frac{2}{19}; \end{array} \right.$$

les trois nombres renfermés dans une même colonne verticale pouvant être censés représenter trois valeurs correspondantes de l, l', l'', dont la somme

$$l + l' + l'',$$

toujours égale soit à $n = 19$, soit à $2n = 38$, se trouve placée au-dessous

de ces trois nombres, dans la quatrième ligne horizontale. Donc, n étant égal à 19, I pourra être censé résulter de la multiplication des trois produits

$$\Theta_1\Theta_{11}\Theta_7 = p\mathrm{R}_{1,7}, \qquad \Theta_5\Theta_{17}\Theta_{16} = p\mathrm{R}_{16,17}, \qquad \Theta_6\Theta_9\Theta_4 = p\mathrm{R}_{4,6},$$

et J de la multiplication des trois produits

$$\Theta_{10}\Theta_{15}\Theta_{13} = p\mathrm{R}_{13,15}, \qquad \Theta_{12}\Theta_{18}\Theta_8 = p\mathrm{R}_{12,18}, \qquad \Theta_3\Theta_{14}\Theta_2 = p\mathrm{R}_{2,3},$$

et l'on aura

$$\mathrm{I} = p^3\mathrm{R}_{1,7}\ \mathrm{R}_{16,17}\mathrm{R}_{4,6} = p^5\frac{\mathrm{R}_{16,17}}{\mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{13,15}},$$

$$\mathrm{J} = p^3\mathrm{R}_{13,15}\mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{2,3} = p^5\frac{\mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{13,15}}{\mathrm{R}_{16,17}},$$

$$f = 5, \qquad g = 4, \qquad f - g = 1 = \frac{i - j}{3} = \mu,$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{R}_{16,17}, \qquad \mathrm{G} = \mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{13,15},$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$\mathcal{F} = -\Pi_{2,3}, \qquad \mathcal{G} = \Pi_{1,7}\Pi_{4,6}.$$

Donc, en vertu des formules (75), lorsque p, divisé par 19, donnera pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$(87) \qquad 4p = x^2 + 19y^2,$$

par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

$$(88) \qquad x \equiv -\frac{\Pi_{1,7}\Pi_{4,6}}{\Pi_{2,3}}, \qquad y \equiv -\frac{\delta}{19}\frac{\Pi_{1,7}\Pi_{4,6}}{\Pi_{2,3}} \pmod{p}.$$

On peut remarquer qu'en vertu des formules (88) la quantité x est équivalente, au signe près, suivant le module p, au rapport

$$\frac{\Pi_{1,7}\Pi_{4,6}}{\Pi_{2,3}},$$

dont le numérateur et le dénominateur ont pour facteurs les trois valeurs de

$$\Pi_{t,t'},$$

correspondant aux trois colonnes verticales du tableau (86) qui

offrent des valeurs de l, l', l'' dont la somme est $n = 19$; chaque valeur de

$$\Pi_{l,l'},$$

devant être considérée comme facteur du numérateur ou du dénominateur, suivant qu'elle correspond à une colonne verticale de rang impair, ou de rang pair. Or, il est facile de prouver que cela devait arriver ainsi. En effet, soient l, l', l'' trois nombres renfermés dans l'une des colonnes verticales, au bas desquelles se trouve placée la somme $n = 19$. Si la colonne dont il s'agit est de rang impair, ces trois nombres correspondront à des indices pairs, et par suite

$$p\mathrm{R}_{l,l'} = \frac{p^{\mathfrak{s}}}{\mathrm{R}_{n-l,n-l'}}$$

sera l'un des facteurs de I. Si, au contraire, la colonne dont il s'agit est de rang pair, une autre colonne de rang impair, mais au bas de laquelle on lira la somme $2n = 38$, renfermera les trois nombres

$$n - l, \quad n - l', \quad n - l'',$$

et par suite

$$p\mathrm{R}_{n-l,n-l'}$$

sera l'un des facteurs de I. Donc, dans le premier cas, $\mathrm{R}_{n-l,n-l'}$ sera un facteur de G, et $-\Pi_{l,l'}$ un facteur de $\mathcal{G}$, tandis que, dans le second cas, $\mathrm{R}_{n-l,n-l'}$ sera un facteur de F, et $-\Pi_{l,l'}$ un facteur de $\mathcal{F}$. On peut ajouter qu'à toute colonne de rang impair, terminée par la somme $2n = 38$, correspondra une colonne de rang pair, terminée par la somme $n = 19$. Donc, pour obtenir tous les facteurs de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$, il suffira de considérer les colonnes terminées par la somme $n = 19$; et chacune de ces colonnes fournira un facteur de la forme

$$-\Pi_{l,l'}$$

soit au numérateur, soit au dénominateur du rapport $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}$, suivant qu'elle sera de rang impair ou de rang pair.

La remarque que nous venons de faire donne le moyen d'appliquer facilement les formules (75) aux cas où n se réduit à l'un des

nombres 43, 67; et d'abord, si l'on suppose $n = 43$, $s = 28$, alors, en vertu des tables construites par M. Jacobi, les nombres inférieurs à $n - 1$ et équivalents aux quantités

$$1, \quad s, \quad s^2, \quad \ldots, \quad s^{n-1},$$

c'est-à-dire les nombres correspondant aux indices

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,
14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27,
28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41,

seront ceux que renferment les trois premières lignes horizontales du tableau

(89)
$$\left\{\begin{array}{cccccccccccccc} 1, & 28, & 10, & 22, & 14, & 5, & 11, & 7, & 24, & 27, & 25, & 12, & 35, & 34, \\ 6, & 39, & 17, & 3, & 41, & 30, & 23, & 42, & 15, & 33, & 21, & 29, & 38, & 32, \\ 36, & 19, & 16, & 18, & 31, & 8, & 9, & 37, & 4, & 26, & 40, & 2, & 13, & 20, \\ \overline{43}, & \overline{86}, & \overline{43}, & \overline{43}, & \overline{86}, & \overline{43}, & \overline{43}, & \overline{86}, & \overline{43}, & \overline{86}, & \overline{86}, & \overline{43}, & \overline{86}, & \overline{86}, \end{array}\right.$$

les trois nombres renfermés dans une même colonne verticale pouvant être censés représenter trois valeurs correspondantes de

$$l, \quad l', \quad l'',$$

dont la somme $n = 43$, ou $2n = 86$ se trouve placée, dans la quatrième ligne horizontale, au-dessous de ces trois nombres. Cela posé, les valeurs de

$$\Pi_{l,l'},$$

correspondant à des colonnes terminées inférieurement par la somme 43, seront

$$\Pi_{1,6}, \quad \Pi_{10,16}, \quad \Pi_{3,18}, \quad \Pi_{5,8}, \quad \Pi_{9,11}, \quad \Pi_{4,15}, \quad \Pi_{2,12};$$

et parmi ces valeurs, quatre, savoir

$$\Pi_{1,6}, \quad \Pi_{10,16}, \quad \Pi_{9,11}, \quad \Pi_{4,15},$$

correspondront à la première, à la troisième, à la septième, à la neuvième colonne verticale, c'est-à-dire à des colonnes verticales de rang

impair, tandis que les trois autres, savoir

$$\Pi_{3,18},\quad \Pi_{5,8},\quad \Pi_{2,12},$$

correspondront à la quatrième, à la sixième, à la douzième colonne verticale, c'est-à-dire à des colonnes verticales de rang pair. Donc, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, si le nombre premier p, divisé par 43, donne pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$4p = x^2 + 43y^2 \tag{90}$$

par des valeurs entières de x, y qui vérifieront les conditions

$$\begin{cases} x \equiv -\dfrac{\Pi_{1,6}\Pi_{10,16}\Pi_{9,11}\Pi_{4,15}}{\Pi_{3,18}\Pi_{5,8}\Pi_{2,12}} \\ y \equiv -\dfrac{\delta}{43}\dfrac{\Pi_{1,6}\Pi_{10,16}\Pi_{9,11}\Pi_{4,15}}{\Pi_{3,18}\Pi_{5,8}\Pi_{7,12}} \end{cases} \pmod{p}. \tag{91}$$

Supposons, en second lieu, $n = 67$, $s = n$. Alors, au lieu du tableau (89), on obtiendra le suivant

$$(92)\quad \left\{\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1, & 12, & 10, & 53, & 33, & 61, & 62, & 7, & 17, & 3, & 36, & 30, & 25, & 32, & 49, & 52, & 21, & 51, & 9, & 41, & 23, & 8, \\ 29, & 13, & 22, & 63, & 19, & 27, & 56, & 2, & 24, & 20, & 39, & 66, & 55, & 57, & 14, & 34, & 6, & 5, & 60, & 50, & 64, & 31, \\ \overline{37}, & \overline{42}, & \overline{35}, & \overline{18}, & \overline{15}, & \overline{46}, & \overline{16}, & \overline{58}, & \overline{26}, & \overline{44}, & \overline{59}, & \overline{38}, & \overline{54}, & \overline{45}, & \overline{4}, & \overline{48}, & \overline{40}, & \overline{11}, & \overline{65}, & \overline{43}, & \overline{47}, & \overline{28}, \\ \overline{67}, & \overline{67}, & \overline{67}, & \overline{134}, & \overline{67}, & \overline{134}, & \overline{134}, & \overline{67}, & \overline{67}, & \overline{67}, & \overline{134}, & \overline{134}, & \overline{134}, & \overline{134}, & \overline{67}, & \overline{134}, & \overline{67}, & \overline{67}, & \overline{134}, & \overline{134}, & \overline{134}, & \overline{67}. \end{array}\right.$$

Or, les valeurs de $\Pi_{L,\ell}$ correspondant aux colonnes verticales qui, dans ce tableau, se trouvent terminées inférieurement par la somme $n = 67$, sont respectivement, pour les colonnes de rang impair,

$$\Pi_{1,29},\quad \Pi_{10,22},\quad \Pi_{15,19},\quad \Pi_{17,25},\quad \Pi_{1,15},\quad \Pi_{6,21},$$

et pour les colonnes de rang pair

$$\Pi_{12,13},\quad \Pi_{2,7},\quad \Pi_{3,20},\quad \Pi_{5,11},\quad \Pi_{8,18}.$$

Donc, si le nombre premier p, divisé par 67, donne pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$4p = x^2 + 67y^2 \tag{93}$$

par des valeurs entières de x, y qui vérifieront les conditions

$$\begin{cases} x \equiv -\dfrac{\Pi_{1,29}\Pi_{10,22}\Pi_{15,19}\Pi_{17,25}\Pi_{1,15}\Pi_{6,21}}{\Pi_{12,13}\Pi_{2,7}\Pi_{3,20}\Pi_{5,11}\Pi_{8,18}} \\ y \equiv -\dfrac{\delta}{67}\dfrac{\Pi_{1,29}\Pi_{10,22}\Pi_{15,19}\Pi_{17,25}\Pi_{1,15}\Pi_{6,21}}{\Pi_{12,13}\Pi_{2,7}\Pi_{3,20}\Pi_{5,11}\Pi_{8,18}} \end{cases} \pmod{p}. \tag{94}$$

Si maintenant on prend pour n, non plus un nombre premier, mais un nombre composé, pour lequel on ait

$$\mathfrak{D}^2 = -n,$$

on trouvera, au-dessous de la limite 100, trois nombres de la forme $8x+3$, auxquels les formules (75) seront applicables, savoir les trois nombres

$$35 = 5.7, \qquad 51 = 3.17, \qquad 91 = 7.13,$$

et cinq nombres de la forme $8x+7$, auxquels les formules (79) seront applicables, savoir

$$15 = 3.5, \qquad 39 = 3.13, \qquad 55 = 5.11, \qquad 87 = 3.19, \qquad 95 = 5.19.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $n = 15 = 3.5$, on trouvera

$$\mathfrak{D} = \rho + \rho^2 + \rho^4 + \rho^8 - \rho^7 - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{14},$$

$$\mathrm{I} = \Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_4\,\Theta_8 = -\mathrm{R}_{1,2}\ \mathrm{R}_{1+2,4}\ \mathrm{R}_{1+2+4,8} = p\mathrm{R}_{1,2}\ \mathrm{R}_{3,4},$$

$$\mathrm{J} = \Theta_{14}\Theta_{13}\Theta_{11}\Theta_7 = -\mathrm{R}_{14,13}\mathrm{R}_{14+13,11}\mathrm{R}_{14+13+11,7} = p\mathrm{R}_{14,13}\mathrm{R}_{12,11},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{I} = p^3\frac{1}{\mathrm{R}_{14,13}\mathrm{R}_{12,11}}, \qquad \mathrm{J} = p\mathrm{R}_{14,13}\mathrm{R}_{12,11};$$

par conséquent

$$i = 3, \quad j = 1, \quad f = 3, \quad g = 1, \quad f - g = i - j = 2,$$
$$\mathrm{F} = 1, \qquad \mathrm{G} = \mathrm{R}_{14,13}\mathrm{R}_{12,11};$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$\mathfrak{F} = 1, \qquad \mathfrak{G} = \Pi_{1,3}\Pi_{3,1}.$$

Donc, si le nombre premier p, divisé par 15, donne 1 pour reste, on

pourra satisfaire à l'équation

$$p^3 = x^2 + 15y^2 \tag{95}$$

par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

$$x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,2}\Pi_{3,4}, \qquad y \equiv -\frac{\partial}{30}\Pi_{1,2}\Pi_{3,4} \pmod{p}. \tag{96}$$

Or, comme en vertu de l'équation (95) les valeurs numériques de x, y seront inférieures à p, il est clair que les formules (96), ou au moins la seconde de ces formules, fourniront le moyen de déterminer complètement les valeurs de x, y.

Supposons; par exemple, $p = 31$: on aura

$$\varpi = 2, \qquad \Pi_{1,2} = \frac{5.6}{1.2} = 3.5, \qquad \Pi_{3,4} = \frac{9.10.11.12.13.14}{1.2.3.4.5.6} = 3.7.11.13$$

et

$$\partial \equiv r + r^2 + r^4 + r^8 - r^7 - r^{11} - r^{13} - r^{14},$$

r étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{15} \equiv 1 \pmod{31},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\partial \equiv t^2 + t^4 + t^8 + t^{16} - t^{15} - t^{23} - t^{26} - t^{28},$$

t étant racine primitive de 31. Cela posé, les tables de M. Jacobi donneront

$$\partial \equiv 10 + 7 + 18 + 14 - 20 - 19 - 9 - 28 \equiv -4 \pmod{31},$$

et l'on tirera des formules (96)

$$x \equiv -\frac{33.35.39}{2} \equiv -\frac{2.4.8}{2} \equiv -1, \qquad y \equiv -2\partial x \equiv -8 \pmod{31}.$$

Donc, puisque la valeur numérique de y devra être inférieure à p et même à $\frac{p}{\sqrt{15}}$, on aura

$$y = -8.$$

On trouvera effectivement

$$31^2 = 1^2 + 15.8^2.$$

Si n cesse d'être impair, alors pour vérifier la condition

$$\mathfrak{D}^2 = -n,$$

il devra être de l'une des formes

$$4(4x+1), \quad 8(2x+1),$$

les facteurs impairs étant inégaux. On pourra, par exemple, prendre pour $\frac{n}{4}$ un des nombres

$$5, \ 13, \ 17, \ 21, \ 29, \ 33, \ 37, \ 41, \ \ldots,$$

ou pour $\frac{n}{8}$ un des nombres

$$3, \ 5, \ 7, \ 11, \ 13, \ 15, \ 17, \ 19, \ 21, \ \ldots,$$

c'est-à-dire qu'on pourra prendre pour n un terme quelconque de l'une des deux suites

$$20, \ 52, \ 68, \ 84, \ 116, \ 132, \ 148, \ 164, \ \ldots,$$
$$24, \ 40, \ 56, \ 88, \ 104, \ 120, \ 136, \ 152, \ \ldots$$

Si, pour fixer les idées, on attribue successivement à $\frac{n}{4}$ les valeurs représentées par les nombres premiers

$$5, \ 13, \ 17, \ 29, \ 37, \ 41, \ \ldots,$$

on pourra déterminer facilement les valeurs des nombres

$$h, \ h', \ h'', \ \ldots,$$

par conséquent celles des trois quantités

$$i, \quad j, \quad \mu = \frac{i-j}{2},$$

à l'aide des principes établis à la page 300; et l'on trouvera successivement, pour valeurs de i, les nombres

$$4, \ 8, \ 12, \ 20, \ 20, \ 28, \ \ldots;$$

pour valeurs de j, les nombres

$$0, \ 4, \ 4, \ 8, \ 16, \ 12, \ \ldots,$$

et pour valeurs de μ, les nombres

$$2, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 2, \quad 8, \quad \ldots.$$

D'ailleurs, en vertu des formules (81), on aura :

Pour $\frac{n}{4} = 5$, $n = 20$,

$$x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,9}\Pi_{3,7} \equiv \pm\frac{1}{2}\Pi_{1,9}^2, \qquad y \equiv \frac{\delta}{10}x \pmod{p};$$

Pour $\frac{n}{4} = 13$, $n = 52$,

$$x \equiv -\frac{1}{2}\frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}}\frac{\Pi_{11,15}\Pi_{5,19}}{\Pi_{5,21}} \equiv \pm\frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}}\right)^2, \qquad y \equiv \frac{\delta}{26}x \pmod{p}, \qquad \ldots.$$

etc....

En terminant cette Note, nous ferons observer que si l'on veut obtenir directement, dans tous les cas, non plus seulement des quantités équivalentes aux quantités entières x, y, qui vérifient l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

mais les valeurs mêmes de x et de y, il suffira de recourir aux équations (35), desquelles on tirera, eu égard aux formules $\lambda = g$, $\omega^2 = -n$,

$$x + y\omega = 2p^{f-\varepsilon}\frac{F}{G}, \qquad x - y\omega = 2\frac{G}{F},$$

et par conséquent

$$(97) \qquad x = \frac{G}{F} + p^{f-\varepsilon}\frac{F}{G}, \qquad y = \frac{\omega}{n}\left(\frac{G}{F} - p^{f-\varepsilon}\frac{F}{G}\right).$$

Ces dernières valeurs de y pourront toujours être calculées ainsi que les facteurs de la forme

$$R_{f,r},$$

compris dans F et dans G, à l'aide des principes établis dans la Note V. On pourra d'ailleurs, si l'on veut, déduire des formules (97) les valeurs exactes de x, y, en remplaçant dans les seconds membres le signe $=$ par le signe $\equiv$, et la racine primitive de l'équation

$$x^n = 1$$

par une racine primitive r de l'équivalence

$$x^n \equiv 1 \pmod{p^m}$$

m étant un nombre entier assez considérable pour qu'il ne reste aucune incertitude sur la valeur de x ou de y. Dans le cas particulier où l'on a $\mu = 1$ ou $\mu = 2$, on peut déterminer complètement y, en supposant $m = 1$. D'ailleurs, cette dernière supposition réduit les équivalences, qui doivent remplacer les équations (97), aux formules (75).

NOTE XIV.

OBSERVATIONS RELATIVES AUX FORMES QUADRATIQUES SOUS LESQUELLES SE PRÉSENTENT CERTAINES PUISSANCES DES NOMBRES PREMIERS, ET RÉDUCTION DES EXPOSANTS DE CES PUISSANCES.

Soient, comme dans la Note précédente :

p un nombre premier impair ;

n un diviseur de $p - 1$;

$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n mais premiers à n ;

N le nombre des entiers $h, k, l, \ldots$;

ρ l'une des racines primitives de l'équation

$$(1) \qquad x^n = 1,$$

et

$$(2) \qquad \omega = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots$$

une somme alternée de ces racines, les entiers $h, k, l, \ldots$ étant ainsi partagés en deux groupes

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots \qquad \text{et} \qquad k, \quad k', \quad k'', \quad \ldots,$$

dont le premier sera censé comprendre l'unité. Enfin supposons que, parmi les entiers

$$h, \quad k, \quad l, \quad \ldots,$$

ceux qui sont inférieurs à $\frac{1}{2}n$ se trouvent, en nombre égal à i, dans le groupe $h, h', h'', \ldots$ et en nombre égal à j, dans le groupe $k, k', k'', \ldots$ Pour que le module n vérifie la condition

$$\mathfrak{D}^2 = -n \tag{3}$$

il faudra que ce module soit de l'une des formes

$$4x+3, \quad 4(4x+1), \quad 8(2x+1)$$

et qu'en outre les facteurs impairs de n soient inégaux. Alors, en vertu du théorème établi dans la Note précédente, on pourra toujours satisfaire, par des valeurs entières de x, y, à l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2, \tag{4}$$

dans laquelle on devra poser généralement

$$\mu = i-j \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{i-j}{3} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{i-j}{2},$$

suivant qu'on aura

$$n \equiv 7 \pmod 8 \quad \text{ou} \quad n \equiv 3 \pmod 8 \quad \text{ou} \quad n \equiv 0 \pmod 4.$$

On doit toutefois observer qu'il y a deux exceptions à faire à cette règle, et qu'on aura : 1° pour $n = 3$

$$\mu = i-j = 1 \quad \text{au lieu de} \quad \mu = \frac{i-j}{3};$$

2° pour $n = 4$

$$\mu = i-j = 1 \quad \text{au lieu de} \quad \mu = \frac{i-j}{2}.$$

Ajoutons qu'on pourra réduire l'équation (4), si n divisé par 8 donne 7 pour reste, à la formule

$$p^{\mu} = x^2 + ny^2, \tag{5}$$

et, si n est divisible par 4 ou par 8, à la formule

$$p^{\mu} = x^2 + \frac{n}{4}y^2. \tag{6}$$

En calculant, dans la Note précédente, les valeurs de l'exposant μ correspondant à des valeurs données du module n, nous avons toujours obtenu des valeurs impaires de μ, quand n était un nombre premier, et des valeurs paires de μ, quand n était un nombre composé, supérieur à 4. On peut affirmer qu'il en sera toujours ainsi. En effet, si nous prenons d'abord pour n un nombre impair, ce nombre sera de la forme $4x+3$, et l'exposant μ représenté par la valeur numérique de la différence

$$i-j,$$

ou par le tiers de cette valeur numérique, sera pair ou impair avec elle, suivant que la somme

$$i+j = \frac{N}{2}$$

sera elle-même paire ou impaire. Comme on aura d'ailleurs, si n est un nombre premier,

$$N = n-1$$

et, si n est le produit de plusieurs nombres premiers impairs $\nu, \nu', \ldots$,

$$N = (\nu-1)(\nu'-1)\ldots;$$

il est clair que μ sera impair avec $\frac{n-1}{2}$, si n est un nombre premier de la forme $4x+3$, et pair avec le rapport

$$\frac{(\nu-1)(\nu'-1)\ldots}{2},$$

si n est un nombre composé de la même forme $4x+3$. Dans l'un et l'autre cas, d'après ce qui a été dit dans la Note IX,

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

seront ceux des entiers inférieurs à n et premiers à n, qui vérifieront la condition

$$\left[\frac{h}{n}\right] = 1.$$

Supposons maintenant qu'on prenne pour n, non plus un nombre

impair de la forme $4x+3$, mais un nombre pair divisible par 4. Ce nombre devra être de la forme

$$4\nu\nu'\nu''\ldots,$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ étant des facteurs premier impairs, inégaux entre eux, et dont le produit soit de la forme $4x+1$. Alors aussi les nombres

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

seront ceux des entiers inférieurs à n, et premiers à n, qui vérifieront ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{4}n}\right]=1, \qquad h\equiv 1 \pmod 4,$$

ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{4}n}\right]=-1, \qquad h\equiv -1 \pmod 4.$$

On peut en conclure que, dans le groupe

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots,$$

les nombres entiers inférieurs à $\frac{n}{2}$ seront deux à deux de la forme

$$h, \quad \frac{n}{2}-h.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, i sera pair, et, comme l'équation

$$N=2(\nu-1)(\nu'-1)\ldots$$

entraînera la suivante

$$i+j=\frac{N}{2}=(\nu-1)(\nu'-1)\ldots,$$

on peut affirmer encore : 1° que $i+j$ sera pair et même divisible par 4; 2° que j sera pair avec i et $i+j$; 3° que la somme

$$\frac{i}{2}+\frac{j}{2}$$

sera paire elle-même, et qu'on pourra en dire autant de la différence

$$\frac{i}{2}-\frac{j}{2}=\frac{i-j}{2}=\mu.$$

Supposons enfin qu'on prenne pour n un nombre divisible par 8. Ce nombre devra être de la forme

$$8\nu\nu'\nu''\ldots,$$

$\nu, \nu', \nu''\ldots$ étant des facteurs impairs inégaux; et les entiers

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

seront : 1° si $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x+1$, ceux qui vérifieront les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right]=1, \qquad h\equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod 1,$$

ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right]=-1, \qquad h\equiv 5 \text{ ou } 7 \pmod 8;$$

2° si $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x+3$, ceux qui vérifieront les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right]=1, \qquad h\equiv 1 \text{ ou } 7 \pmod 8.$$

ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right]=-1, \qquad h\equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod 8.$$

On en conclut encore que, dans le groupe

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots,$$

les nombres inférieurs à $\frac{n}{2}$ seront, deux à deux, de la forme

$$h, \quad \frac{n}{2}-h.$$

Donc i sera pair, et, comme on aura

$$N = 4(\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots,$$
$$i + j = \frac{2}{N} = 2(\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots,$$

la somme $i + j$ sera non seulement paire, mais divisible par 4. Donc, par suite,

$$j \quad \text{et} \quad \frac{i}{2} + \frac{j}{2}$$

seront pairs, et l'on pourra en dire autant de la différence

$$\frac{i}{2} - \frac{j}{2} = \frac{i - j}{2} = \mu.$$

Ainsi, en résumé, l'exposant μ sera, dans l'équation (4), (5) ou (6), un nombre impair ou un nombre pair, suivant que le module $n > 4$ sera un nombre premier ou un nombre composé. D'ailleurs, dans le dernier cas, on peut, à l'aide d'une méthode souvent employée par les géomètres, réduire, comme on va le voir, la valeur numérique de l'exposant μ.

Prenons d'abord pour n un nombre composé de la forme $8x + 7$. Alors l'équation (4) pourra être remplacée par la formule (5), dans laquelle μ sera un nombre pair ; et, comme par suite p^{μ} sera un carré impair, c'est-à-dire de la forme $8x + 1$, x^2 devra être un carré de la même forme, et y^2 un carré pair. Cela posé, les deux facteurs

$$p^{\frac{\mu}{2}} - x, \qquad p^{\frac{\mu}{2}} + x,$$

dont la somme sera $2p^{\frac{\mu}{2}}$, et le produit $p^{\mu} - x^2 = ny^2$, auront évidemment pour plus grand commun diviseur le nombre 2 ; et, pour satisfaire à l'équation (5), on devra supposer

$$p^{\frac{\mu}{2}} - x = 2\alpha u^2, \qquad p^{\frac{\mu}{2}} + x = 2\beta v^2,$$

par conséquent

$$p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + \beta v^2, \tag{7}$$

α, β, u, v désignant des nombres entiers qui vérifieront les conditions

$$\alpha\beta = n, \tag{8}$$
$$2uv = y. \tag{9}$$

Il y a plus : comme le produit $\alpha\beta = n$ sera diviseur de $p - 1$, on aura

$$\left[\frac{p}{\alpha}\right] = 1, \qquad \left[\frac{p}{\beta}\right] = 1,$$

et par suite la formule (7) entraînera les conditions

$$\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = 1, \qquad \left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = 1, \tag{10}$$

auxquelles les facteurs α, β devront encore satisfaire. Enfin, comme on l'a dit dans la Note IX, la loi de réciprocité comprise dans la formule

$$\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\beta-1}{2}}\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] \tag{11}$$

est applicable au cas où l'on représente par α, β, non pas seulement deux nombres premiers supérieurs à 2, mais encore deux nombres impairs quelconques ; et, comme, n étant de la forme $4x + 3$, l'un des facteurs α, β devra être de la forme $4x + 1$, il est clair que, dans l'hypothèse admise, la première des conditions (10) entraînera la seconde, et réciproquement. Donc : *lorsque n sera un nombre composé de la forme $8x + 7$, l'équation (5) entraînera la formule (7), dans laquelle α, β devront vérifier les conditions*

$$\alpha\beta = n, \qquad \left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = 1. \tag{12}$$

Supposons, pour fixer les idées, $n = 15 = 3.5$. On trouvera pour h h', ... les nombres

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8,$$

dont trois sont inférieurs et un seul supérieur à $7\frac{1}{2}$. On aura donc

$$i = 3, \quad j = 1, \quad \mu = \frac{i - j}{2} = 2,$$

et l'équation (5), réduite à

$$p^2 = x^2 + 15y^2,$$

entraînera la formule

$$p = \alpha u^2 + 6v^2;$$

α, 6 étant des entiers assujettis à vérifier les deux conditions

$$\alpha 6 = 15, \qquad \left[\frac{6}{\alpha}\right] = 1.$$

Or, de ces deux conditions, la première sera vérifiée si l'on prend pour α, 6 les nombres 1 et 15 ou 3 et 5. Mais comme on a

$$\left[\frac{5}{3}\right] = -1,$$

la seconde condition nous oblige à rejeter les nombres 3 et 5, en prenant pour α, 6 les nombres 1 et 15. Donc, p étant un nombre premier de la forme $15x + 1$, ou, ce qui revient au même, de la forme $30x + 1$, la considération des facteurs primitifs de p fournira la solution, en nombres entiers, de l'équation

$$p = u^2 + 15v^2.$$

Supposons, par exemple, $p = 31$. On trouvera d'abord (*voir* la Note précédente) $x = -1$,

$$31^2 = 1^2 + 15.8^2;$$

puis on en conclura

$$(31 + 1)(31 - 1) = 4.15u^2v^2,$$

le produit uv devant vérifier la condition

$$u^2v^2 = 4^2;$$

et, comme des deux nombres

$$31 - x = 31 + 1 = 32, \qquad 31 + x = 31 - 1 = 30,$$

c'est le second qui se trouve divisible par 15, on aura, dans le cas présent,

$$\alpha = 1, \qquad 6 = 15,$$
$$31 + 1 = 2u^2, \qquad 31 - 1 = 2.15v^2.$$

On vérifiera effectivement les deux dernières équations, en prenant

$$u^2 = 4^2, \qquad v^2 = 1;$$

et, par conséquent, il suffira d'attribuer à u, v les valeurs numériques 4 et 1 pour résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$31 = u^2 + 15v^2.$$

Prenons maintenant pour n un nombre composé de la forme $9x + 3$. Alors on pourra vérifier en nombres entiers l'équation (4). De plus, les deux facteurs

$$2p^{\frac{\mu}{2}} - x, \qquad 2p^{\frac{\mu}{2}} + x,$$

dont la somme sera $4p^{\frac{\mu}{2}}$ et le produit $4p^{\mu} - x^2 = ny^2$, resteront premiers entre eux, si x^2, y^2 sont des carrés impairs. Donc alors pour satisfaire à l'équation (4), on devra supposer

$$2p^{\frac{\mu}{2}} - x = \alpha u^2, \qquad 2p^{\frac{\mu}{2}} + x = 6v^2,$$

et par suite

$$4p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + 6v^2, \tag{13}$$

α, 6, u, v étant des nombres entiers qui vérifient les formules

$$\alpha 6 = n, \qquad uv = y,$$

avec les conditions (10). Si, dans le cas que nous considérons, x^2, y^2 étaient des carrés pairs, on pourrait, comme dans le cas précédent, réduire l'équation (4) à l'équation (5), et l'on arriverait à la formule (7), qui peut être censée comprise dans la formule (13), de laquelle on la déduit, en remplaçant u par $2u$ et v par $2v$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsque n est un nombre composé de la forme $8x + 3$, *l'équation* (4) *entraîne la formule* (13), *dans laquelle* α, 6 *doivent vérifier les conditions* (12).

Prenons maintenant pour n un nombre composé, divisible par 4, mais non par 8. Alors, on pourra satisfaire en nombres entiers à l'équa-

tion (6), si $\frac{n}{4}$ est de la forme $4x+1$; et, par des raisonnements semblables à ceux dont nous venons de faire usage, on prouvera que l'équation (6) entraîne l'une des deux formules

$$p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + 6v^2, \tag{14}$$

$$2p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + 6v^2, \tag{15}$$

α, 6 désignant des nombres impairs assujettis à vérifier la condition

$$\alpha 6 = \frac{n}{4}, \tag{16}$$

et u, v des quantités entières qui vérifieront l'une des conditions

$$2uv = y, \qquad uv = y.$$

D'ailleurs, le produit

$$\alpha 6 = \frac{n}{4}$$

étant de la forme $4x+1$,

$$\alpha, \quad 6$$

seront tous deux de cette forme, ou tous deux de la forme $4x+3$; et, comme l'équation (14) entraînera les formules (10), en vertu desquelles la formule (11) donnera

$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{6-1}{2}} = 1, \tag{17}$$

il est clair que, dans l'équation (14), α, 6 ne pourront être tous deux de la forme $4x+3$. Ils y seront donc l'un et l'autre de la forme $4x+1$. Quant aux valeurs de α, 6, renfermées dans l'équation (15), elles devront vérifier les formules

$$\left[\frac{6}{\alpha}\right] = \left[\frac{2}{\alpha}\right], \qquad \left[\frac{\alpha}{\frac{2}{6}}\right] = \left[\frac{2}{\frac{6}{\alpha}}\right], \tag{18}$$

desquelles on tirera, en les combinant avec les formules (10) et (16),

$$\left[\frac{\frac{2}{1}}{\frac{7}{4}n}\right] = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{6-1}{2}}; \tag{19}$$

et, comme u^2, v^2 devront être impairs dans l'équation (15), cette équation donnera encore

$$2 \equiv \alpha + 6 \pmod 8. \tag{20}$$

Or, en vertu des formules (19), (20), les entiers

$$\alpha, \quad 6$$

devront être tous deux de la forme $8x+1$, ou tous deux de la forme $8x+5$, si $\frac{n}{4}$ est de la forme $8x+1$; et l'un de la forme $8x+3$, l'autre de la forme $8x+7$, si $\frac{n}{4}$ est de la forme $8x+5$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsque n est un nombre composé divisible par 4 *et non par* 8, *l'équation* (6) *entraîne ou les équations* (14) *et* (16), *ou les équations* (15) *et* (16); α, 6 *étant deux nombres impairs qui devront être tous deux de la forme* $8x+1$, *ou tous deux de la forme* $8x+5$, *si* $\frac{n}{4}$ *est de la forme* $8x+1$, *et l'un de la forme* $8x+3$, *l'autre de la forme* $8x+7$, *si* $\frac{n}{4}$ *est de la forme* $8x+5$. *Ajoutons que* α, 6 *devront encore satisfaire, si l'équation* (14) *se vérifie, à l'une des équations* (10), *et, si l'équation* (15) *se vérifie, à l'une des équations* (18).

En appliquant, au cas où n est divisible par 8, des raisonnements semblables à ceux dont nous venons de faire usage, on obtiendra la proposition suivante :

Lorsque n est un nombre composé, divisible par 8, *l'équation* (6) *entraîne la formule*

$$p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + 2 6 v^2, \tag{21}$$

α, 6 *étant deux nombres impairs assujettis à vérifier la condition*

$$\alpha 6 = \frac{n}{8}, \tag{22}$$

avec les deux suivantes

$$\left[\frac{\alpha}{6}\right]=1, \qquad \left[\frac{6}{\alpha}\right]=\left[\frac{2}{\alpha}\right], \tag{23}$$

desquelles on tire, eu égard à la formule (11),

$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{6-1}{2}}=\left[\frac{2}{\alpha}\right]=(-1)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha+1}{2}}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{6-1}{2}\equiv\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha+1}{2} \pmod 2;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\alpha-1)(\alpha-2\mathfrak{G}+3)\equiv 0 \pmod{16}. \tag{24}$$

En vertu des diverses propositions que nous venons d'établir, l'exposant μ de la puissance de p renfermée dans l'équation (4), (5) ou (6), peut être réduit, lorsque n est un nombre composé, à l'exposant $\frac{\mu}{2}$. Ce dernier exposant, s'il est pair, pourra souvent lui-même être réduit à $\frac{\mu}{4}$; et cette nouvelle réduction sera particulièrement applicable aux formules (7), (13), (14), (21), si dans ces formules, α se réduit à l'unité.

Pour vérifier cette dernière observation sur un exemple, supposons

$$n=68=4.17.$$

Alors, parmi les entiers inférieurs à 17, et premiers à 68, ceux qui feront partie du premier groupe, savoir

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 9,\quad 11,\quad 13,$$

seront au nombre de 6, et ceux qui feront partie du second groupe, savoir

$$5,\quad 15,$$

seront au nombre de deux. On aura donc par suite

$$\frac{i}{2}=6, \qquad \frac{j}{2}=2, \qquad \mu=\frac{i-j}{2}=6-2=4.$$

et l'on pourra, en supposant que p, divisé par 68, donne l'unité pour reste, résoudre en nombres entiers l'équation

$$p^4=x^2+17y^2.$$

Or, celle-ci entraînera l'une des formules

$$p^2=u^2+17v^2, \qquad 2p^2=u^2+17v^2,$$

dont la première à son tour entraînera l'une des suivantes

$$p=s^2+17t^2, \qquad 2p=s^2+17t^2,$$

s, t désignant encore des nombres entiers. Effectivement on sait que tout nombre premier de la forme $68x+1$ peut être représenté par l'une des formules

$$y^2+2yz+18z^2=(y+z)^2+17z^2,$$
$$2y^2+2yz+9z^2=\frac{(2y+z)^2+17z^2}{2}.$$

POST-SCRIPTUM.

La note placée au bas de la page 179, et relative à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers, se réduit à cette observation très simple, que la démonstration empruntée par M. Legendre à M. Jacobi ne paraît pas avoir été publiée par l'un ou l'autre de ces deux géomètres avant 1830. Je suis loin de vouloir en conclure que cette démonstration n'ait pu être découverte par M. Jacobi à une époque antérieure. Dans le Mémoire de 1827, intitulé : *De residuis cubicis commentatio numerosa*, M. Jacobi, avant d'énoncer les théorèmes relatifs à la résolution des équations indéterminées $4p=x^2+27y^2$, $p=x^3+7y^3$, dit expressément : *In fontem uberrimum indici, e quo inter alia et demanare sequentia theoremata vidi.* La source féconde dont M. Jacobi parle dans ce passage est, comme lui-même me l'a déclaré depuis (*voir*, dans le *Bulletin des Sciences de M. de Ferussac*, le Mémoire de septembre 1829), la considération des propriétés dont jouissent les racines de l'équation auxiliaire, qui sert à la résolution d'une équation binome, c'est-à-dire, en d'autres termes, les fonctions ci-dessus désignées Θ_h, Θ_k, ... Quelques-unes de ces

propriétés avaient déjà conduit M. Gauss aux importants résultats que contiennent les dernières pages de ses *Disquisitiones arithmeticæ*, et à son théorème sur la résolution de l'équation $p = x^3 + y^2$. Ainsi, les recherches de M. Jacobi sur les formes quadratiques des nombres premiers, et l'on doit en dire autant des miennes, peuvent être considérées comme offrant de nouveaux développements de la belle théorie exposée par M. Gauss. J'ajouterai que, les propriétés des fonctions de la forme Θ_h étant supposées connues, il devient très facile d'obtenir la démonstration ci-dessus rappelée. Il est donc tout naturel qu'à une époque renfermée entre 1827 et 1830, M. Jacobi ait trouvé cette démonstration et l'ait communiquée verbalement ou par écrit à M. Legendre. Mais quelle est la date précise de cette communication? C'est un point sur lequel je n'ai aucun renseignement, et je m'en rapporterai au témoignage de l'illustre géomètre de Kœnigsberg.

FIN DU TOME III DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES « MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ».

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DES NOMBRES.

		Pages.
AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR		5
§ I		6
§ II.	— Applications nouvelles des formules établies dans le premier paragraphe	21
§ III.	— Suite du même sujet	43
§ IV.	— Suite du même sujet	68
NOTE I.	— Propriétés fondamentales des fonctions Θ_h, Θ_k	84
NOTE II.	— Sur diverses formules obtenues dans le deuxième paragraphe	94
NOTE III.	— Sur la multiplication des fonctions, Θ_h, Θ_k	110
NOTE IV.	— Sur les résidus quadratiques	163
NOTE V.	— Détermination des fonctions $R_{h,k}$, ... et des coefficients qu'elles renferment	180
NOTE VI.	— Sur la somme des racines primitives d'une équation binome, et sur les fonctions symétriques de ces racines	222
NOTE VII.	— Sur les sommes alternées des racines primitives des équations binomes, et sur les fonctions alternées de ces racines	239
NOTE VIII.	— Propriétés des nombres qui, dans une somme alternée des racines primitives d'une équation binome, servent d'exposants aux diverses puissances de l'une de ces racines	265
NOTE IX.	— Théorèmes divers relatifs aux sommes alternées des racines primitives des équations binomes	293

Pages.

NOTE X. — Sur les fonctions réciproques et sur les moyens qu'elles fournissent d'évaluer les sommes alternées des racines primitives d'une équation binome 308

NOTE XI. — Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées formées avec les racines primitives des équations binomes 334

NOTE XII. — Formules diverses qui se déduisent des principes établis dans la Note précédente 359

NOTE XIII. — Sur les formes quadratiques de certaines puissances des nombres premiers, ou du quadruple de ces puissances 390

NOTE XIV. — Observations relatives aux formes quadratiques sous lesquelles se présentent certaines puissances des nombres premiers, et réduction des exposants de ces puissances 437

POST-SCRIPTUM 449

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

40804 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.