



## NOTE II.

RÉDUCTION DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES A LA FORME  $x + iy$ .

D'après ce qui a été dit dans la Note précédente, l'unité a pour racines quatrièmes les deux quantités algébriques

$$-1, +1,$$

qui sont en même temps ses deux racines carrées, ou, ce qui revient au même, les racines de l'équation binôme  $x^2 = 1$ , et les deux quantités géométriques

$$-1^{\frac{1}{2}}, 1^{\frac{1}{2}}$$

qui sont en même temps les racines carrées de  $-1$ , ou, ce qui revient au même, les racines de l'équation binôme  $x^2 = -1$ .

La dernière de ces racines, ou  $1^{\frac{1}{2}}$ , est précisément la quantité géométrique que l'on désigne par la lettre  $i$ . Cela posé, comme on aura

$$ir = 1^{\frac{1}{2}} r_0 = r_0^{\frac{1}{2}}, \quad -ir = 1^{-\frac{1}{2}} r_0 = r_0^{-\frac{1}{2}}$$

il est clair que les deux quantités géométriques  $ir$ ,  $-ir$  se mesureront sur une même droite perpendiculaire à l'axe polaire, mais en sens inverse.

Lorsque la quantité géométrique  $r_p$  a le pôle pour origine, son extrémité peut être censée avoir pour coordonnées polaires les quantités algébriques  $r$ ,  $p$ , et pour coordonnées rectangulaires les quantités algébriques  $x$ ,  $y$ , liées à  $r$ ,  $p$  par les formules

$$(1) \quad x = r \cos p, \quad y = r \sin p.$$

Alors aussi, pour arriver à l'extrémité de la longueur  $r_p$ , il suffit de porter, à partir de l'extrémité de l'abscisse  $x$ , et sur une perpendiculaire à l'axe polaire pris pour axe des  $x$ , l'ordonnée  $y$ , représentée en grandeur et en direction par la quantité géométrique  $iy$ . En d'autres termes, la quantité géométrique  $r_p$  est la somme des quantités géomé-

triques  $x$ ,  $iy$ . On a donc

$$(2) \quad r_p = x + iy = r(\cos p + i \sin p);$$

puis, en posant  $r = 1$ ,

$$(3) \quad 1_p = \cos p + i \sin p.$$

On aura, de même,

$$(4) \quad 1_{-p} = \cos p - i \sin p$$

et, par suite,

$$(5) \quad \cos p = \frac{1_p + 1_{-p}}{2}, \quad \sin p = \frac{1_p - 1_{-p}}{2i}.$$

Si l'on désigne à l'aide de la seule lettre  $z$  la quantité géométrique  $r_p$ , l'équation (2) donnera

$$(6) \quad z = x + iy.$$

Ainsi toute quantité géométrique  $z$  pourra être réduite à la forme  $x + iy$ ,  $x$ ,  $y$  étant deux quantités algébriques dont la première sera ce que nous appellerons la *partie algébrique* de  $z$ .

## NOTE III.

SÉRIES DONT LES TERMES GÉNÉRAUX SONT DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES, FONCTIONS DIVERSES DE CES QUANTITÉS.

Les règles établies pour la convergence des séries, dans mon *Analyse algébrique*, peuvent être facilement étendues au cas où les termes généraux de ces séries sont des quantités géométriques.

Considérons, pour fixer les idées, une série de quantités géométriques

$$z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}, \dots,$$

prolongée indéfiniment dans un seul sens. Le terme  $z^{(n)}$  correspondant à l'indice  $n$  sera le *terme général* de cette série. Soit d'ailleurs

$$s^{(n)} = z^{(0)} + z^{(1)} + \dots + z^{(n)}$$



la somme de  $n$  premiers termes. La série sera dite *convergente*, lorsque, pour des valeurs croissantes de  $n$ , la somme  $s^{(n)}$  convergera vers une limite fixe  $s$ ; et alors cette limite  $s$  sera ce que nous appellerons la *somme* de la série. Dans le cas contraire, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme.

Soit maintenant  $r^{(n)}$  le module du terme général  $z^{(n)}$ , et nommons  $\varkappa$  la limite unique ou la plus grande des limites vers lesquelles converge, pour des valeurs croissantes de  $n$ , l'expression

$$(r^{(n)})^{\frac{1}{n}},$$

c'est-à-dire la racine  $n^{\text{ième}}$  du module de  $z^{(n)}$ . Le nombre  $\varkappa$  sera ce que nous appellerons le *module* de la série proposée, et, par des raisonnements semblables à ceux dont j'ai fait usage dans mon *Analyse algébrique*, on établira sans peine la proposition suivante :

THÉOREME I. — Une série de quantités géométriques

$$z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}, \dots,$$

prolongée indéfiniment dans un seul sens, est toujours convergente lorsque son module  $\varkappa$  est inférieur à l'unité, toujours divergente lorsque le module  $\varkappa$  surpasse l'unité.

Si le terme général  $z^{(n)}$  est proportionnel à la  $n^{\text{ième}}$  puissance d'une certaine variable  $z = r^n$ , en sorte qu'on ait

$$z^{(n)} = a^{(n)} z^n,$$

le coefficient  $a^{(n)}$  pouvant être une quantité géométrique, alors en nommant  $\rho$  le module de la série qui a pour terme général  $a^{(n)}$ , on trouvera

$$\varkappa = \rho r,$$

et l'on déduira immédiatement du théorème I la proposition suivante :

THÉOREME II. — La série

$$a^{(0)}, a^{(1)}z, a^{(2)}z^2, \dots, a^{(n)}z^n, \dots,$$

ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable  $z$ , est convergente ou divergente suivant que le module  $r$  de  $z$  est inférieur ou supérieur à  $\frac{1}{\varkappa}$ ,  $\varkappa$  désignant le module de la série

$$a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}, \dots$$

formée avec les coefficients des puissances successives de  $z$ .

Une quantité géométrique est dite *fonction* de plusieurs autres lorsqu'elle varie avec elles.

Dans la première Note, nous avons déjà considéré diverses fonctions de quantités géométriques, spécialement celles que fournissent l'addition ou la soustraction de ces quantités, leur multiplication ou leur division, et leur élévation à des puissances entières. La formation des séries convergentes dont les termes généraux renfermeraient une ou plusieurs quantités géométriques variables, fournira de nouvelles fonctions de ces quantités, et parmi ces fonctions on devra distinguer les sommes de séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une seule variable  $z$ .

Considérons, en particulier, la série

$$1, \frac{z}{1}, \frac{z^2}{1.2}, \dots$$

qui a pour terme général  $\frac{z^n}{1.2. \dots .n}$ , et qui ne cesse jamais d'être convergente. La somme de cette série sera représentée, si  $z$  est algébrique, par l'exponentielle de  $e^z$ , en sorte qu'on aura dans ce cas

$$(1) \quad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \dots,$$

$e$  étant la base des logarithmes hyperboliques ou népériens. D'ailleurs, pour que la formule (1) s'étende à tous les cas possibles, il suffira de



concevoir que l'on se serve de cette formule, lors même que la variable  $z$  est une quantité géométrique, pour définir l'exponentielle  $e^z$ .

Ajoutons que, si l'on pose

$$(2) \quad a = e^z,$$

$z$  désignant une quantité algébrique quelconque, on pourra supposer l'exponentielle  $a^z$  généralement définie par la formule

$$(3) \quad a^z = e^{z \log a}.$$

Ces conventions étant admises, on prouvera aisément que les propriétés connues des exponentielles subsistent pour des exposants quelconques, même quand ces exposants sont des quantités géométriques. D'ailleurs, les exponentielles  $e^z$ ,  $a^z$  étant définies par les formules (1) et (2), leur définition entraînera celle des *logarithmes* pris dans le système qui a pour base le nombre  $e$  ou  $a$ , c'est-à-dire des exposants qu'il faut attribuer à cette base, pour obtenir des quantités géométriques données.

Si, dans la formule (1), on réduit à zéro la partie algébrique de  $z$ ; si l'on pose, par exemple,  $z = ip$ ,  $p$  étant un angle quelconque, alors, en ayant égard aux formules

$$\cos p = 1 - \frac{p^2}{1 \cdot 2} + \frac{p^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots, \quad \sin p = p - \frac{p^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

on trouvera

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p = i_p,$$

On aura donc, par suite,

$$(4) \quad e^{ip} = i_p, \quad e^{-ip} = i_{-p},$$

et les formules (5) de la Note II donneront

$$(5) \quad \cos p = \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2}, \quad \sin p = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i}.$$

Si dans ces dernières formules on écrit  $z$  au lieu de  $p$ , on obtiendra

les suivantes

$$(6) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

et pour que  $\cos z$ ,  $\sin z$ , se trouvent définis dans tous les cas possibles, il suffira d'étendre les équations (6) au cas même où la lettre  $z$  désigne une quantité géométrique.

## NOTE IV.

FONCTIONS CONTINUES DE QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES.  
DIFFÉRENTIELLES DE CES QUANTITÉS ET DE CES FONCTIONS.

Soient

$$z = r_p \quad \text{et} \quad Z = R_r$$

deux quantités algébriques, mesurées dans un plan donné, à partir du pôle O, ou plus généralement à partir de deux points fixes pris pour origines, jusqu'à deux points mobiles A, B. Z sera une *fonction* de  $z$ , si le mouvement du point A détermine le mouvement du point B; et cette fonction sera *continue*, si à un mouvement infiniment petit du point A correspond toujours un mouvement infiniment petit du point B. Alors à un accroissement infiniment petit  $\Delta z$  de la variable  $z$  correspondra toujours un accroissement infiniment petit  $\Delta Z$  de la fonction elle-même. Si cette condition était remplie seulement entre certaines limites de la variable  $z$ , et pour certaines positions du point mobile A, par exemple, quand ce point serait compris entre deux lignes données, la fonction Z ne serait continue qu'entre ces limites.

Désignons maintenant par  $f(z)$  la valeur de Z exprimée en fonction de  $z$ . Si l'on attribue à  $z$  un accroissement infiniment petit  $\Delta z$ , l'accroissement correspondant

$$\Delta Z = f(z + \Delta z) - f(z)$$

de la fonction  $f(z)$  supposée continue sera lui-même infiniment petit. Mais le rapport

$$(1) \quad \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$



conservera généralement une valeur finie. Si, d'ailleurs, on fait converger  $\Delta z$  vers la limite zéro, il arrivera souvent que le rapport (1) convergera vers une limite unique et finie. Cette limite, que l'on nomme la *dérivée* de la fonction  $Z$ , s'indique à l'aide de la notation  $Z'$  ou  $f'(z)$ , ou bien encore à l'aide de la notation  $D_z Z$  ou  $D_z f(z)$ . Si, tandis que  $\Delta z$  s'approche de zéro, le rapport  $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$  ne s'approchait pas indéfiniment d'une limite unique et finie, la dérivée  $Z'$  ou  $f'(z)$  devrait être censée acquérir une valeur infinie ou multiple ou indéterminée, savoir : une valeur infinie, si le module du rapport  $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$  croissait indéfiniment; une valeur multiple ou indéterminée, dans le cas contraire.

Les *différentielles*  $dz$ ,  $dZ$  de la variable  $z$  et de la fonction  $Z$  ne sont autre chose que des quantités géométriques dont le rapport est précisément la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits  $\Delta z$ ,  $\Delta Z$ . En conséquence,  $dZ$  est liée à  $dz$  par la formule

$$(2) \quad \frac{dZ}{dz} = D_z Z \quad \text{ou} \quad dZ = D_z Z dz,$$

dans laquelle la différentielle  $dz$  de la *variable indépendante*  $z$  reste arbitraire.

En général, les *différentielles* de plusieurs quantités géométriques ne sont autre chose que de nouvelles quantités géométriques, dont les rapports se réduisent aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits des premières.

## NOTE V.

SUR LES RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE LES RÉSIDUS DES FONCTIONS  
ET LES INTÉGRALES DÉFINIES.

Les équations (21), (23), (24) et (25) du paragraphe II sont du nombre de celles qu'on obtient en cherchant les relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies. Ces équations, qui prennent une forme très simple quand on fait usage du signe  $\varepsilon$ , coïncident avec quelques-unes de celles que contient le premier Vo-

lume des *Exercices de Mathématiques* (1), et sont toutes comprises dans une formule générale que renferme le Mémoire lithographié à Turin en 1831 (2). Dans cette formule, qui se réduit à

$$(1) \quad \int_{(c)} f(z) D_z z ds = 2\pi i \varepsilon (f(z)),$$

$z$  peut être censé représenter une quantité géométrique variable  $r_p$ , mesurée à partir du pôle  $O$  jusqu'à un point mobile  $A$ ,  $s$  l'arc mesuré sur une courbe fermée LMN, entre une origine fixe  $C$  et le point mobile  $A$ , et  $c$  le périmètre entier de la courbe. On suppose d'ailleurs l'arc  $s$  mesuré dans un sens tel que, cet arc venant à croître, son extrémité  $A$  ait, autour d'un point fixe très voisin et situé à l'intérieur du contour LMN, un mouvement de rotation *direct*, c'est-à-dire pareil au mouvement de rotation qu'indiquerait, pour le rayon mobile  $OA$ , une valeur croissante de l'angle polaire  $p$ . Enfin, on suppose que, pour toutes les valeurs de  $z$  auxquelles correspondent des points situés à l'intérieur de la courbe LMN, la fonction  $f(z)$  et sa dérivée restent continues, quand elles ne deviennent pas infinies, et que, dans ce dernier cas, on peut trouver une puissance entière de  $\Delta z$ , qui, multipliée par  $f(z + \Delta z)$ , fournisse pour produit une fonction de  $\Delta z$  qui reste continue avec sa dérivée. Ajoutons que, dans le second membre de la formule (1), le résidu intégral indiqué par le signe  $\varepsilon$  s'étend seulement à celles des racines de l'équation

$$(2) \quad \frac{1}{f(z)} = 0,$$

auxquelles correspondent des points situés à l'intérieur du contour LMN.

Il est bon d'observer que la formule (1) s'étend au cas même où la courbe LMN on substituerait un contour fermé quelconque, par exemple, le contour d'un polygone dont les côtés seraient rectilignes ou curvilignes. Alors l'intégrale que renferme le premier membre de

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. VI.

(2) *Ibid.*, S. II, T. XV.



L'équation (1) se trouverait remplacée par la somme de plusieurs intégrales correspondant aux divers côtés du polygone.

## NOTE VI.

SUR L'ANALOGIE DES PUISSANCES ET DES DIFFÉRENCES.

Les formules du paragraphe III fournissent un moyen facile d'établir rigoureusement l'analogie des puissances et des différences, déjà signalée par divers auteurs, et spécialement par M. Brisson. D'ailleurs ces formules et les applications qu'on peut en faire à l'intégration des équations différentielles ou aux dérivées partielles, ont été reproduites avec de nouveaux développements dans le second Volume des *Exercices de Mathématiques* (1).

## NOTE VII.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES  
À COEFFICIENTS CONSTANTS.

Les formules données dans le paragraphe IV, pour l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, peuvent être aisément réduites à celles que j'ai plus tard établies et démontrées fort simplement dans les *Exercices de Mathématiques*. Ainsi, par exemple, si l'on fait usage du signe  $\epsilon$ , et si l'on a égard à l'équation (24) du paragraphe II, la formule (48) du paragraphe IV, qui représente l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$(1) \quad F(D_\epsilon)u = f(t),$$

pourra s'écrire comme il suit

$$(2) \quad u = \mathcal{C} \left\{ \frac{F(\beta) - F(U)}{\beta - U} - \int_0^t e^{\beta(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \frac{1}{(F(\beta))},$$

les diverses puissances de U devant être remplacées, dans le développement de la fonction  $\frac{F(\beta) - F(U)}{\beta - U}$ , par les quantités

$$u_0, u_1, \dots, u_{n-1},$$

(1) *Oeuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

qui expriment les valeurs particulières de

$$u, D_\epsilon u, \dots, D_\epsilon^{n-1} u$$

correspondant à une valeur nulle de U.

## NOTE VIII.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Les formules qui sont renfermées dans les paragraphes V, VI, VII et qui se rapportent à l'intégration des équations linéaires sous des conditions données, ont été plus tard reproduites en partie, souvent démontrées d'une autre manière, dans divers Mémoires, et spécialement dans celui qui a pour objet l'*Application du calcul des résidus aux questions de Physique mathématique*. Parmi ces formules, il en est quelques-unes qui, au premier abord, peuvent laisser au lecteur des doutes sur la question de savoir si elles s'accordent entre elles. Il est bon d'éclaircir cette difficulté et de prouver, en particulier, que les résultats obtenus dans le paragraphe VI s'accordent avec ceux que l'on a déduits de la formule (20) du paragraphe VII. On y parviendra de la manière suivante :

Je commencerai par observer que, dans la formule (20) du paragraphe VII, le signe du second membre doit être choisi, non pas arbitrairement, mais de manière que la valeur de Q soit positive et que, en conséquence, Q représente, comme il est dit à la page 272, la valeur numérique de  $\varphi'(\rho_1)$  correspondant à une racine réelle de l'équation

$$\varphi(\rho_1) = 1.$$

Il en résulte que, si l'on pose

$$\varphi(x) = e^{ax},$$

$a$  étant positif, on aura  $Q = 2a$ , et que, par suite, l'équation (39) du paragraphe VII entrainera la formule (43), entièrement semblable à la formule (131) du paragraphe VI.



Il reste à faire voir que l'équation (54) du paragraphe VII s'accorde pareillement avec la formule (87) du paragraphe VI. Pour y parvenir, il suffit de prouver que, dans la formule (54) du paragraphe VII, la valeur de R peut être réduite à

$$(1) \quad R = D_{\rho} [(AB + \rho^2) \sin a\rho - (B - A)\rho \cos a\rho],$$

$\rho$  étant une quantité algébrique et en même temps une racine de l'équation

$$(2) \quad (AB + \rho^2) \sin a\rho - (B - A)\rho \cos a\rho = 0,$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$(3) \quad (A - \rho i)(B + \rho i)e^{a\rho i} = (A + \rho i)(B - \rho i)e^{-a\rho i}.$$

Or, effectivement, la valeur de R que détermine l'équation (1) peut être présentée sous la forme

$$R = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} [(A - \rho i)e^{i\rho\mu} - (A + \rho i)e^{-i\rho\mu}] [(B - \rho i)e^{i\rho(\mu-a)} - (B + \rho i)e^{i\rho(a-\mu)}] d\mu,$$

et, en vertu de la formule (3), elle peut être réduite à

$$(4) \quad R = \frac{\psi(\rho i)}{A^2 + \rho^2} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[ \frac{(A - \rho i)e^{i\rho\mu} - (A + \rho i)e^{-i\rho\mu}}{i} \right]^2 d\mu,$$

la valeur de  $\psi(x)$  étant

$$(5) \quad \psi(x) = (A - x)(B + x)e^{ax}.$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (4), le rapport  $\frac{2R}{\psi(\rho i)}$  sera évidemment positif et, par suite, la formule (49) du paragraphe VII, dans laquelle Q désigne une quantité positive, devra être réduite à

$$(6) \quad Q = \frac{2R}{\psi(\rho i)};$$

d'où l'on conclura que la valeur de  $f(x)$  peut être censée déterminée par l'équation (54) du paragraphe VII, jointe à la formule (1).

## MÉMOIRE

SUR LES

## SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES

OU AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES, A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES

ET SUR LES

INTÉGRALES ÉLÉMENTAIRES DE CES MÊMES ÉQUATIONS (1).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XXII, p. 587; 1850.

Je viens aujourd'hui appeler l'attention des géomètres sur une nouvelle branche de Calcul intégral qui me paraît devoir contribuer aux progrès de la Mécanique moléculaire, et qui a pour objet l'intégration des équations linéaires à coefficients périodiques.

J'appellerai *fonction périodique* d'une ou plusieurs variables indépendantes  $x, y, z, \dots$  celle qui ne sera point altérée quand on fera croître ou décroître ces variables de quantités représentées par des multiples de certains *paramètres*  $a, b, c, \dots$  en faisant varier  $x$  d'un multiple de  $a, y$  d'un multiple de  $b, z$  d'un multiple de  $c, \dots$  Des *équations linéaires à coefficients périodiques* ne seront autre chose que des équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles, dans lesquelles les diverses dérivées des inconnues auront pour coefficients des fonctions périodiques des variables  $x, y, z, \dots$  ou de variables représentées par des fonctions linéaires de  $x, y, z, \dots$  Enfin, j'appellerai *paramètres trigonométriques* les quotients  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  qu'on obtiendra en divisant la circonférence  $2\pi$  par les paramètres donnés  $a, b, c, \dots$

Dans les équations linéaires et à coefficients périodiques auxquelles

(1) Présenté dans la séance du 10 décembre 1849.



on se trouve conduit par la Mécanique moléculaire, les coefficients sont, en général, fonctions des coordonnées, mais indépendants du temps  $t$ ; et alors on peut obtenir des intégrales particulières qui fournissent pour les inconnues des valeurs représentées par des produits dont un seul facteur renferme le temps, ce facteur étant une exponentielle dont l'exposant est proportionnel à  $t$ . Lorsque l'exponentielle dont il s'agit sera une exponentielle trigonométrique, les intégrales trouvées deviendront *isochrones*, c'est-à-dire qu'elles fourniront, pour valeurs des inconnues, des fonctions périodiques du temps.

Les intégrales particulières dont nous venons de parler seront généralement imaginaires ou symboliques, mais elles ne cesseront pas pour cela d'être applicables à la solution des problèmes de Mécanique ou de Physique: car, si l'on réduit les valeurs symboliques des inconnues à leurs parties réelles, ces parties réelles satisferont encore aux équations données.

Une propriété remarquable d'une fonction périodique de  $x, y, z, \dots$  c'est qu'elle peut être développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles trigonométriques dont chacune a pour argument le produit d'une variable par le paramètre trigonométrique correspondant. Dans chaque terme de la série, le facteur constant est représenté par une intégrale définie multiple, les intégrations étant effectuées entre les limites  $x = 0, x = a; y = 0, y = b; z = 0, z = c; \dots$ . Le terme constant de la série est la *valeur moyenne* de la fonction entre ces limites. D'ailleurs, il est important d'observer que si une fonction périodique  $u$  renferme avec les variables indépendantes  $x, y, z, \dots$  d'autres quantités  $h, k, \dots$  la valeur moyenne de  $u$ , considérée comme fonction de  $h, k, \dots$  pourra changer de forme quand on changera les valeurs de  $h, k$  (1).

(1) Ainsi, par exemple, la fonction périodique

$$\frac{he^{kx}}{k + he^{2x}}$$

a pour valeur moyenne zéro, ou l'unité, suivant que le module de  $k$  est supérieur ou inférieur au module de  $h$ .

Ces principes étant admis, concevons d'abord que, dans les équations linéaires données, les coefficients cessent d'être périodiques et deviennent constants. Alors, on pourra satisfaire aux équations données en supposant les valeurs des diverses inconnues proportionnelles à une seule exponentielle dont l'exposant sera représenté par une fonction linéaire des variables indépendantes. Cette exponentielle, que j'appellerai l'*exponentielle caractéristique*, se trouvera d'ailleurs multipliée dans les diverses inconnues par des coefficients divers dont les équations linéaires données feront généralement connaître les rapports.

En opérant comme je viens de le dire, on obtient seulement des intégrales particulières d'un système donné d'équations linéaires et à coefficients constants. Ces intégrales, qu'on peut appeler *élémentaires*, représentent, en effet, dans les questions de Mécanique moléculaire, les mouvements *élémentaires*, ou, en d'autres termes, les mouvements *simples* et par *ondes planes*. Ajoutons que l'exponentielle caractéristique correspondant à un système quelconque d'intégrales élémentaires peut se déduire directement de l'*équation caractéristique* à laquelle on parvient en éliminant entre les équations données toutes les inconnues, à l'exception d'une seule.

Concevons maintenant que, dans un système d'équations linéaires, les coefficients redeviennent périodiques, mais diffèrent peu de leurs valeurs moyennes. Après avoir développé ces coefficients en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles trigonométriques ci-dessus mentionnées, on pourra substituer aux inconnues des développements de même forme, puis évaluer entre eux, dans les deux membres de chaque équation, les coefficients des puissances semblables de ces exponentielles. On obtiendra ainsi des équations *auxiliaires* qui seront encore linéaires, mais à coefficients constants, et qui serviront à déterminer les divers termes des développements des inconnues, ou plutôt les coefficients des exponentielles trigonométriques dans ces divers termes. Dans l'hypothèse admise, c'est-à-dire lorsque les coefficients périodiques renfermés dans



les équations données différeront peu de leurs valeurs moyennes, les séries qui représenteront les développements des inconnues seront ordinairement convergentes, et l'on pourra exprimer les valeurs des diverses inconnues par des produits de deux facteurs, dont l'un sera une exponentielle caractéristique propre à vérifier le système des équations auxiliaires, l'autre facteur de chaque produit étant un coefficient périodique.

Étant donné un système quelconque d'équations linéaires à coefficients périodiques, les intégrales particulières qui fourniront pour les inconnues des valeurs représentées par des produits de cette sorte, seront celles que je désignerai spécialement sous le nom d'*intégrales élémentaires*.

Il est important d'observer que, dans un système d'intégrales élémentaires d'équations à coefficients périodiques, l'exponentielle caractéristique offre ordinairement une valeur différente de celle qu'on obtiendrait si l'on réduisait chaque coefficient périodique à sa valeur moyenne. Cette observation est surtout utile lorsque les équations données se rapportent à une question de Mécanique ou de Physique, spécialement à la théorie du son ou à celle de la lumière.

## ANALYSE.

Pour montrer une application très simple des principes exposés dans ce Mémoire, concevons que l'inconnue  $z$  doive vérifier l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \quad D_x z = K D_x z,$$

$K$  étant une *fonction périodique* de  $x$ , qui ne soit pas altérée quand on fait croître ou décroître la variable  $x$ , supposée réelle, d'un multiple du *paramètre*  $a$ . Posons d'ailleurs

$$\alpha = \frac{2\pi}{a}.$$

Enfin, nommons  $k_0$  la *valeur moyenne* de la fonction  $K$ , en sorte

qu'on ait

$$k_0 = \frac{1}{a} \int_0^a K dx,$$

et soit pareillement  $k_n$  la valeur moyenne du produit  $K e^{-n\alpha x}$ ,  $n$  étant une quantité entière quelconque, positive ou négative. La formule

$$(2) \quad K = k_0 + k_1 e^{\alpha x} + k_2 e^{2\alpha x} + \dots + k_{-1} e^{-\alpha x} + k_{-2} e^{-2\alpha x} + \dots,$$

fournira le développement de la fonction  $K$  en une série ordonnée suivant les puissances entières ascendantes et descendantes de l'exponentielle  $e^{\alpha x}$ . Si, d'ailleurs, la fonction  $K$  diffère peu de sa valeur moyenne  $k_0$ , on pourra, dans une première approximation, réduire  $K$  à  $k_0$ , et la formule (1) à l'équation

$$(3) \quad D_x z = k_0 D_x z.$$

Or, cette dernière équation, linéaire et à coefficients constants, sera vérifiée, si l'on pose

$$(4) \quad z = A e^{n\alpha x + s},$$

$u$ ,  $s$ ,  $A$  désignant trois constantes dont les deux premières soient liées entre elles par la formule

$$(5) \quad s = k_0 u;$$

et la valeur que l'équation (4) fournira pour l'inconnue  $z$  représentera non seulement ce que nous appelons une *intégrale élémentaire* de l'équation (3), mais encore une intégrale approchée de l'équation (1).

Si, maintenant, on veut obtenir, non plus une intégrale approchée, mais une intégrale exacte de l'équation (1), on pourra supposer la fonction  $z$  développée aussi bien que la fonction  $K$  en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'exponentielle  $e^{\alpha x}$ . Faisons, en conséquence,

$$(6) \quad z = z_0 + z_1 e^{\alpha x} + z_2 e^{2\alpha x} + \dots + z_{-1} e^{-\alpha x} + z_{-2} e^{-2\alpha x} + \dots$$

L'équation (1) sera vérifiée si, après y avoir substitué les valeurs





de K et  $\alpha$ , tirées des formules (2) et (6), on égale entre eux les coefficients des puissances semblables de l'exponentielle  $e^{2xi}$ , renfermés dans les deux membres. On obtiendra ainsi les équations auxiliaires

(7) (Dt - k\_0 D\_x) y\_0 = k\_{-1} (D\_x + \alpha i) y\_1 + ... + k\_1 (D\_x - \alpha i) y\_{-1} + ...

Or, ces équations, toutes linéaires et à coefficients constants, seront vérifiées, si l'on suppose les inconnues

y\_0, y\_1, y\_2, ..., y\_{-1}, y\_{-2}, ...

toutes proportionnelles à une seule exponentielle caractéristique de la forme

e^{ux + \alpha t}

en sorte qu'on ait

(8) y\_0 = A\_0 e^{ux + \alpha t}, y\_1 = A\_1 e^{ux + \alpha t}, ..., y\_{-1} = A\_{-1} e^{ux + \alpha t}, ...

et si, d'ailleurs, on assujettit les constantes

u, s, A\_0, A\_1, ..., A\_{-1}, ...

à vérifier les équations

(9) s = ku, (10) (k - k\_0) A\_0 = k\_{-1} (1 + \frac{\alpha i}{u}) A\_1 + ... + k\_1 (1 - \frac{\alpha i}{u}) A\_{-1} + ...

Alors aussi, en posant pour abrégé

(11) A = A\_0 + A\_1 e^{2xi} + A\_2 e^{4xi} + ... + A\_{-1} e^{-2xi} + A\_{-2} e^{-4xi} + ...

on tirera des formules (6) et (8)

(12) y = A e^{ux + \alpha t}

Cette dernière est semblable à la formule (4), mais avec cette différence que le coefficient A, constant dans la première, devient périodique dans la seconde. Ajoutons que la valeur de la constante s, déterminée dans l'équation (4) par la formule (5), se déduira, dans l'équation (12), de la formule (9), dans laquelle on devra substituer la valeur de k tirée des équations (10). Remarquons enfin que la formule (12) est ici tirée d'une méthode qui suppose la série (11) convergente et, par suite, la valeur de K généralement peu différente de sa valeur moyenne k\_0. Cette supposition étant admise, le calcul des valeurs de

k, A\_0, A\_1, A\_2, ...

déterminées par les formules (10), pourra s'exécuter comme il suit :

Concevons que, n étant un nombre entier quelconque, on néglige dans les seconds membres des formules (10) tous les termes qui renferment les quantités

A\_{n+1}, A\_{n+2}, ..., A\_{-(n+1)}, A\_{-(n+2)}, ...

Alors on obtiendra 2n + 1 équations qui détermineront, avec l'inconnue k, les rapports des inconnues

A\_0, A\_1, A\_2, ..., A\_n; A\_{-1}, A\_{-2}, ..., A\_{-n}

Toutefois les valeurs ainsi trouvées, pour ces rapports et pour la constante k, seront seulement approximatives. Mais, si n vient à croître indéfiniment, ces valeurs approximatives convergeront vers des limites qui seront les valeurs exactes de l'inconnue k et de ces rapports.

Il est important d'observer que, le nombre entier n venant à croître, le degré de l'équation en k, toujours représenté par le nombre 2n + 1, croîtra également. Mais, parmi les 2n + 1 racines de cette équation, on devra choisir évidemment celle qui aura pour valeur approchée k\_0. D'ailleurs à cette racine, prise pour valeur de k, correspondra un



système unique de valeurs des rapports

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}, \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0}, \dots, \frac{\Lambda_n}{\Lambda_0}, \frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_0}, \frac{\Lambda_{n-2}}{\Lambda_0}, \dots, \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}.$$

La méthode d'intégration que nous venons d'appliquer à l'équation (1) s'appliquerait pareillement à une équation de la forme

$$(13) \quad D_t^2 u = K D_t^2 u,$$

K étant toujours une fonction périodique de  $x$ , et généralement aux systèmes d'équations linéaires à coefficients périodiques auxquels on se trouve conduit par les problèmes de Mécanique ou de Physique. Dans le cas où les coefficients périodiques diffèrent peu de leurs valeurs moyennes, on obtiendra, en opérant comme on vient de le dire, des intégrales particulières, en vertu desquelles les inconnues se trouveront représentées par des produits de deux facteurs dont l'un sera une *exponentielle caractéristique* déterminée de manière à vérifier un certain système d'équations *auxiliaires* à coefficients constants. Quant à l'autre facteur, il se réduira simplement à un coefficient périodique. Ces intégrales particulières seront celles que nous désignerons sous le nom d'*intégrales élémentaires*. La méthode que nous venons d'indiquer fournira les intégrales élémentaires développées en séries, elle suppose d'ailleurs que les développements trouvés sont convergents. Dans certains cas spéciaux, on pourra obtenir ces intégrales élémentaires en termes finis. C'est ce qui arrive, par exemple, pour l'équation (1), ainsi qu'on va le faire voir.

Les quantités  $s, u$  étant deux constantes et A une fonction de  $x$ , il est clair qu'on pourra toujours satisfaire à l'équation (1) par une valeur de  $z$  de la forme

$$(14) \quad z = A e^{sx+ut},$$

car, si l'on substitue cette valeur de  $z$  dans l'équation (1) et si l'on pose, pour abrégér,

$$(15) \quad H = u - \frac{s}{K},$$

on obtiendra la formule

$$(16) \quad \frac{D_x A}{A} = -H,$$

que l'on vérifie en posant

$$(17) \quad A = e^{-\int H dx}.$$

Si, maintenant, K est une fonction périodique de  $x$ , qui ne varie pas quand on y fait croître  $x$  de  $a$ , il en sera de même de la fonction H, qui pourra être développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'exponentielle trigonométrique  $e^{2\pi x/a}$ , la valeur de  $x$  étant  $\frac{2\pi}{a}$ ; et alors, en posant

$$H = h_0 + h_1 e^{2\pi x/a} + \dots + h_{-1} e^{-2\pi x/a} + \dots,$$

on trouvera

$$\int H dx = h_0 x + \frac{1}{2\pi} (h_1 e^{2\pi x/a} + \dots - h_{-1} e^{-2\pi x/a} - \dots) + \text{const.}$$

Par suite A se réduira simplement à une fonction périodique de  $x$ , si l'on choisit  $s$  de manière que  $h_0$  s'évanouisse. Or,  $h_0$  étant la valeur moyenne de H, la condition énoncée sera remplie si l'on pose

$$s = ku,$$

$k$  étant choisi de manière que la valeur moyenne de  $1 - \frac{k}{K}$  s'évanouisse, ou, ce qui revient au même, si l'on détermine  $s$  et  $k$  à l'aide des formules

$$(18) \quad s = ku, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{dx}{K}.$$

D'ailleurs, on reconnaîtra facilement que l'intégrale élémentaire fournie par l'équation (14) jointe aux formules (15), (17) et (18), coïncide avec l'intégrale que donne le développement en série, effectué à l'aide de la méthode ci-dessus indiquée dans le cas où la fonction périodique K diffère peu de sa valeur moyenne  $k_0$ .



MÉMOIRE SUR LES VIBRATIONS  
D'UN DOUBLE SYSTÈME DE MOLÉCULES  
ET DE L'ÉTHER

CONTENU DANS UN CORPS CRISTALLISÉ <sup>(1)</sup>.

*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 599; 1850.

Dans ce Mémoire, après avoir reproduit les équations qui représentent les mouvements finis ou infiniment petits d'un double système de molécules, je considère, en particulier, le cas où les équations dont il s'agit sont linéaires et à coefficients périodiques, et je fais voir comment de celles-ci on peut déduire d'autres équations linéaires, mais à coefficients constants. Ces dernières équations, que je nomme *auxiliaires*, peuvent d'ailleurs être censées déterminer les *valeurs moyennes* des inconnues que renferment les équations primitives. Mais, comme j'en fais la remarque, elles sont généralement distinctes de celles auxquelles on parviendrait, si dans les équations primitives on remplaçait chaque coefficient périodique par sa valeur moyenne. Cette observation, très importante dans la Physique mathématique, explique à elle seule un grand nombre de phénomènes relatifs aux théories du son et de la lumière; par exemple, les singulières influences des milieux cristallisés sur les vibrations de l'éther. Elle montre comment il arrive que ces milieux peuvent tantôt éteindre la lumière, tantôt produire les divers phénomènes lumineux et, en particulier, la polarisation chromatique. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en

<sup>(1)</sup> Présenté dans la séance du 17 décembre 1849.

SUR LES VIBRATIONS D'UN DOUBLE SYSTÈME, ETC. 339  
détail dans de nouveaux Mémoires qui offriront le développement des principes posés dans celui-ci.

ANALYSE.

§ I. — *Équations de l'équilibre d'un double système de molécules.*

Considérons deux systèmes de molécules qui coexistent dans une portion donnée de l'espace. Rapportons d'ailleurs les positions des atomes dont se composent ces molécules à trois axes coordonnés rectangulaires; et soient, dans un premier instant,  $x, y, z$  les coordonnées d'un atome  $m$  appartenant au premier système, ou d'un atome  $m$ , appartenant au second système;  $X, Y, Z$  les projections algébriques de la force accélératrice qui sollicite l'atome  $m$  sur les axes coordonnés. Ces projections devront s'évanouir, avec la force dont il s'agit, s'il y a équilibre; en d'autres termes, les conditions d'équilibre de l'atome  $m$  seront

$$(1) \quad X=0, \quad Y=0, \quad Z=0.$$

Pareillement, si l'on nomme  $X, Y, Z$  les projections algébriques de la force accélératrice qui sollicite, au premier instant, non plus l'atome  $m$ , mais l'atome  $m$ , les équations d'équilibre de ce dernier atome seront

$$(2) \quad X_1=0, \quad Y_1=0, \quad Z_1=0.$$

Considérons, en particulier, le cas où la force accélératrice appliquée à l'atome  $m$  ou  $m$ , qui est censé coïncider avec le point  $(x, y, z)$ , résulte uniquement d'actions exercées sur cet atome par tous les autres. Supposons, d'ailleurs, que l'action mutuelle de deux atomes soit proportionnelle à leurs masses et à une certaine fonction de leur distance. Enfin, nommons :

$m, m$ , les masses de deux atomes distincts de  $m$ , et appartenant, l'un au premier système de molécules, l'autre au second;

$r, r$ , les distances qui séparent, au premier instant, l'atome  $m$  des atomes  $m$  et  $m$ ;



$m m r f(r)$ ,  $m m, r f(r)$  les actions exercées sur l'atome  $m$  par les atomes  $m$  et  $m, r$ , chacune des fonctions  $f(r)$ ,  $f(r)$  étant positive ou négative, suivant que l'atome  $m$  est attiré ou repoussé;

$x, y, z$  les projections algébriques de la distance  $r$  sur les axes coordonnés;

$x, y, z$  les projections algébriques de la distance  $r, r$  sur les mêmes axes.

On aura non seulement

$$(3) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$(4) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

mais encore

$$(5) \quad \begin{cases} X = S m x f(r) + S m, x f(r), \\ Y = S m y f(r) + S m, y f(r), \\ Z = S m z f(r) + S m, z f(r), \end{cases}$$

la sommation qu'indique chaque signe  $S$  s'étendant à tous les atomes  $m, \dots$  distincts de  $m$ , qui composent les molécules du premier système, ou à tous les atomes  $m$ , qui composent les molécules du second système. Ajoutons que les valeurs de  $X, Y, Z$ , se trouveront à leur tour déterminées par trois équations semblables aux formules (5).

### § II. — Équation du mouvement d'un double système de molécules.

Concevons à présent que le double système de molécules passe de l'état d'équilibre à l'état de mouvement, et soient, au bout du temps  $t$ ,  $\xi, \eta, \zeta$  les déplacements de l'atome  $m$ , mesurés parallèlement aux axes coordonnés;  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  les projections algébriques de la force accélératrice qui sollicite l'atome  $m$ . Les équations du mouvement de cet atome seront de la forme

$$(1) \quad D_t^2 \xi = \mathfrak{X}, \quad D_t^2 \eta = \mathfrak{Y}, \quad D_t^2 \zeta = \mathfrak{Z}.$$

Si, d'ailleurs, on nomme  $\xi, \eta, \zeta, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  ce que deviennent  $\xi, \eta, \zeta, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ , quand on substitue l'atome  $m, r$  à l'atome  $m$ , on aura

$$(2) \quad D_t^2 \xi = \mathfrak{X}, \quad D_t^2 \eta = \mathfrak{Y}, \quad D_t^2 \zeta = \mathfrak{Z}.$$

Soient, maintenant,  $r + \rho, r, r + \rho$ , ce que deviennent, au bout du temps  $t$  et dans l'état de mouvement, les distances  $r, r$ , qui dans l'état d'équilibre séparaient l'atome  $m$  des atomes  $m$  et  $m, r$ . Supposons, de plus, qu'on indique, à l'aide de la lettre caractéristique  $\Delta$  ou  $\Delta$ , les accroissements que reçoivent  $\xi, \eta, \zeta$  ou  $\xi, \eta, \zeta$ , quand on passe de l'atome  $m$  ou  $m, r$  à l'atome  $m$  ou  $m, r$ . La longueur  $r + \rho$  aura évidemment pour extrémités les deux points dont les coordonnées respectives seront

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta$$

et

$$x + x + \xi + \Delta \xi, \quad y + y + \eta + \Delta \eta, \quad z + z + \zeta + \Delta \zeta;$$

pareillement la longueur  $r, r$  aura pour extrémités les deux points dont les coordonnées respectives seront

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta,$$

$$x + x, \quad y + y, \quad z + z,$$

Par suite, les projections algébriques de la longueur  $r + \rho$  sur les axes coordonnés seront

$$x + \Delta \xi, \quad y + \Delta \eta, \quad z + \Delta \zeta;$$

et les projections algébriques de la longueur  $r, r$  sur les mêmes axes seront

$$x, \quad y, \quad z,$$

Cela posé, lorsqu'on passera de l'état d'équilibre à l'état de mouvement, les formules (3), (4) du paragraphe I se trouveront évidemment remplacées par les suivantes

$$(3) \quad (r + \rho)^2 = (x + \Delta \xi)^2 + (y + \Delta \eta)^2 + (z + \Delta \zeta)^2,$$

$$(4) \quad (r, r)^2 = (x - \xi + \xi + \Delta \xi)^2 + (y - \eta + \eta + \Delta \eta)^2 + (z - \zeta + \zeta + \Delta \zeta)^2,$$

et les formules (5) du paragraphe I par les suivantes

$$(5) \quad \mathfrak{X} = S m (x + \Delta \xi) f(r + \rho) + S m, (x - \xi + \xi + \Delta \xi) f(r, r), \quad \dots$$



Ajoutons que des équations de même forme fourniront les valeurs de  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ .

Supposons, maintenant, que les actions mutuelles des atomes du premier système décroissent, quand la distance augmente, assez rapidement pour que l'on puisse développer, à l'aide du théorème de Taylor, les différences finies

$$\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$$

en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ces séries pourront être immédiatement déduites des équations de la forme

$$\xi + \Delta \xi = e^{x D_x + y D_y + z D_z} \xi,$$

par conséquent, de la formule symbolique

$$(6) \quad 1 + \Delta = e^{x D_x + y D_y + z D_z}.$$

Si, pour abrégé, l'on suppose

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z, \\ v = x D_x + y D_y + z D_z,$$

la formule (6) deviendra

$$(7) \quad 1 + \Delta = e^v,$$

et l'on en tirera

$$(8) \quad \Delta = e^v - 1.$$

Pareillement, si l'on suppose

$$\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta,$$

développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , alors, en posant, pour abrégé,

$$v = x D_x + y D_y + z D_z,$$

on pourra déduire ces séries de la formule symbolique

$$(9) \quad 1 + \Delta = e^v.$$

§ III. — *Mouvements infiniment petits d'un double système de molécules.*

Considérons, dans le double système de molécules donné, un mouvement vibratoire, en vertu duquel chaque atome s'écarte très peu de la position qu'il occupait dans un état d'équilibre du système. Si l'on cherche les lois du mouvement, celles du moins qui subsistent, quelque petite que soit l'étendue des vibrations moléculaires, alors, en regardant les déplacements

$$\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta',$$

et leurs différences finies comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on pourra négliger les produits, les carrés et les puissances supérieures, non seulement de ces déplacements et de leurs différences, mais aussi des quantités  $\rho$ ,  $\rho'$ . Cela posé, les formules (3) et (4) du paragraphe II donneront

$$(1) \quad \rho = \frac{x \Delta \xi + y \Delta \eta + z \Delta \zeta}{r},$$

$$(2) \quad \rho' = \frac{x(\xi' - \xi + \Delta \xi) + y(\eta' - \eta + \Delta \eta) + z(\zeta' - \zeta + \Delta \zeta)}{r},$$

et les formules (2), (5) du même paragraphe donneront

$$(3) \quad \begin{cases} D_t^2 \xi = L \xi + R \eta + Q \zeta + L' \xi' + R' \eta' + Q' \zeta', \\ D_t^2 \eta = R \xi + M \eta + P \zeta + R' \xi' + M' \eta' + P' \zeta', \\ D_t^2 \zeta = Q \xi + P \eta + N \zeta + Q' \xi' + P' \eta' + N' \zeta', \end{cases}$$

les valeurs de

$$L, M, N, P, Q, R, \\ L', M', N', P', Q', R',$$

étant déterminées par les formules symboliques

$$L = S m \left[ f(r) + \frac{x^2}{r} D_r f(r) \right] \Delta - S m' \left[ f(r) + \frac{x^2}{r} D_r f(r) \right], \quad \dots$$

$$P = S m \frac{y z}{r} D_r f(r) \Delta - S m' \frac{y z}{r} D_r f(r), \quad \dots$$



et

$$L_i = S m_i \left[ f(r_i) + \frac{x_i^2}{r_i} D_r f(r_i) \right] (1 + \Delta_i), \quad \dots,$$

$$P_i = S m_i \frac{y_i z_i}{r_i} D_r f(r_i) (1 + \Delta_i), \quad \dots;$$

maintenant on pose, comme dans le paragraphe précédent,

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z,$$

$$t = x D_x + y D_y + z D_z, \quad s_i = x_i D_x + y_i D_y + z_i D_z,$$

alors, en ayant égard aux formules symboliques

$$\Delta = e^t - 1, \quad 1 + \Delta_i = e^{s_i},$$

et en posant d'ailleurs

$$(4) \quad \begin{cases} G = S m f(r) (e^t - 1) - S m_i f(r_i), \\ H = S \frac{m}{r} D_r f(r) \left( e^t - \frac{t^2}{2} \right) - S \frac{m_i}{r_i} D_r f(r_i) \frac{s_i^2}{2}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} G_i = S m_i f(r_i) e^{s_i}, \\ H_i = S \frac{m_i}{r_i} D_r f(r_i) e^{s_i}, \end{cases}$$

on aura simplement

$$(6) \quad L = G + D_u^2 H, \quad \dots, \quad P = D_v D_w H, \quad \dots,$$

$$(7) \quad L_i = G_i + D_u^2 H_i, \quad \dots, \quad P_i = D_v D_w H_i, \quad \dots$$

et, par suite, les formules (3) deviendront

$$(8) \quad \begin{cases} D_i^2 \xi = G \xi + D_u (D_u H \xi + D_v H \eta + D_w H \zeta) \\ \quad + G_i \xi_i + D_u (D_u H_i \xi_i + D_v H_i \eta_i + D_w H_i \zeta_i), \\ D_i^2 \eta = G \eta + D_v (D_u H \xi + D_v H \eta + D_w H \zeta) \\ \quad + G_i \eta_i + D_v (D_u H_i \xi_i + D_v H_i \eta_i + D_w H_i \zeta_i), \\ D_i^2 \zeta = G \zeta + D_w (D_u H \xi + D_v H \eta + D_w H \zeta) \\ \quad + G_i \zeta_i + D_w (D_u H_i \xi_i + D_v H_i \eta_i + D_w H_i \zeta_i). \end{cases}$$

Ajoutons que, si l'on échange entre eux les deux systèmes de mo-

lécules donnés, on obtiendra, non plus les équations (6), mais trois équations de même forme, qui, jointes aux équations (6), pourront servir à déterminer les valeurs des six inconnues

$$\xi, \eta, \zeta; \xi_i, \eta_i, \zeta_i,$$

en fonctions des quatre variables indépendantes  $x, y, z, t$ .D'après ce qu'on vient de voir, les équations du mouvement d'un double système de molécules sont des équations linéaires. Les coefficients qu'elles renferment sont généralement variables avec les coordonnées  $x, y, z$ . Mais, ces coefficients étant nécessairement réels, il en résulte qu'on peut considérer les déplacements effectifs

$$\xi, \eta, \zeta; \xi_i, \eta_i, \zeta_i,$$

comme représentant les parties réelles d'inconnues imaginaires qui satisferaient à ces mêmes équations. Ces inconnues imaginaires, que je désignerai par les notations

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}; \bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i,$$

sont ce que j'appellerai les déplacements symboliques d'un atome  $m$  du premier système et d'un atome  $m_i$  du second système.§ IV. — *Mouvements infiniment petits d'un système de molécules, placé en présence d'un autre système dont chaque molécule reste sensiblement immobile.*

Si les molécules du premier des systèmes donnés, comparées aux molécules du second, sont bien supérieures en nombre, mais douées de masses beaucoup plus petites, alors dans un mouvement vibratoire les déplacements

$$\zeta, \eta, \xi,$$

d'un atome du second système seront généralement très petits par rapport aux déplacements

$$\xi, \eta, \zeta$$



d'un atome du premier. Alors aussi, en négligeant  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , vis-à-vis de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , on réduira les équations (3) du paragraphe III aux formules

$$(1) \quad \begin{cases} D_t^2 \xi = L\xi + R\eta + Q\zeta, \\ D_t^2 \eta = R\xi + M\eta + P\zeta, \\ D_t^2 \zeta = Q\xi + P\eta + N\zeta, \end{cases}$$

et les équations (8) du même paragraphe aux formules

$$(2) \quad \begin{cases} (D_t^2 - G)\xi = D_w(D_w H\xi + D_v H\eta + D_u H\zeta), \\ (D_t^2 - G)\eta = D_v(D_w H\xi + D_v H\eta + D_u H\zeta), \\ (D_t^2 - G)\zeta = D_w(D_w H\xi + D_v H\eta + D_u H\zeta); \end{cases}$$

les valeurs de

$$G, H, L, M, N, P, Q, R$$

étant fournies par les équations (4) et (6) du paragraphe III.

Il est naturel de supposer que les atomes du fluide éthéré, dans lequel se propagent les vibrations lumineuses, sont de beaucoup supérieurs en nombre aux molécules des corps, mais doués de masses beaucoup plus petites. Si l'on admet cette supposition, la théorie de la lumière pourra se déduire complètement du système des équations (1), ou, ce qui revient au même, du système des équations (2).

Ajoutons que, dans le cas où les systèmes de molécules donnés se réduisent à un seul, on se trouve de nouveau conduit aux équations (1) et (2). Seulement alors les formules (4) du paragraphe III se réduisent aux suivantes

$$(3) \quad G = S m f(r)(e^t - 1), \quad H = S \frac{m}{r} D_r f(r) \left( e^t - \frac{t^2}{2} \right).$$

#### § V. — Mouvements vibratoires des corps homogènes.

Lorsque chacun des systèmes de molécules donnés est homogène, on peut, dans une première approximation, réduire les coefficients variables que renferment les équations différentielles d'un mouvement vibratoire infiniment petit à des quantités constantes. Alors aussi, en éliminant entre ces équations toutes les inconnues à l'exception d'une

seule, on obtient une équation définitive que nous avons nommée l'équation caractéristique. Soient  $z$  l'une quelconque des inconnues et

$$(1) \quad \nabla z = 0$$

l'équation caractéristique,  $\nabla$  étant de la forme

$$(2) \quad \nabla = F(D_x, D_y, D_z).$$

Supposons, d'ailleurs, qu'après avoir écrit

$$s, u, v, w$$

au lieu de

$$D_x, D_y, D_z,$$

on prenne

$$(3) \quad s = F(s, u, v, w).$$

$s$ , regardé comme fonction de  $s$ , sera d'un degré  $n$  équivalent au produit qu'on obtient en multipliant par 6 le nombre des systèmes de molécules donnés, ou plutôt le nombre de ceux dont les atomes restent sensiblement immobiles. Par suite, l'équation linéaire (1) sera du sixième ordre, si l'on fait vibrer un système unique de molécules; du douzième ordre si l'on fait vibrer deux systèmes de molécules; etc. D'ailleurs, comme je l'ai montré dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, on pourra non seulement exprimer par une intégrale définie sextuple la fonction principale  $z$  assujettie à vérifier, quel que soit  $t$ , l'équation (1), et pour  $t = 0$ , les conditions

$$(4) \quad z = 0, \quad D_x z = 0, \quad \dots, \quad D_x^{n-1} z = 0;$$

mais encore réduire la détermination des diverses inconnues à l'évaluation de la fonction principale, en supposant que l'on connaisse la position initiale de chaque atome, et sa vitesse initiale.

Au reste, la méthode d'intégration que je viens de rappeler suppose que les équations linéaires données sont à coefficients constants; mais cette supposition n'est pas toujours conforme à la réalité. Concevons, pour fixer les idées, que l'on considère un double système de molé-



cules, et que les atomes dont se composent ces molécules appartiennent, les uns à un corps cristallisé, les autres au fluide lumineux ou étheré que renferme ce corps. Alors, comme je l'ai remarqué dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 1<sup>er</sup> avril 1839, *les molécules du corps, ou plutôt les atomes dont elles se composent, exerçant une attraction sur les molécules éthérées, ces dernières se rassembleront en plus grand nombre dans le voisinage d'un atome du corps et, par suite, la densité de l'éther pourra varier sensiblement d'un point de l'espace à l'autre dans un très petit intervalle.* Il y a plus : comme l'ont remarqué les minéralogistes, les centres de gravité des molécules d'un corps cristallisé composent un système *réticulaire* divisé en *cellules* ou *alvéoles* par trois systèmes de plans rectangulaires ou obliques, mais parallèles à trois plans fixes. Un tel système jouit de propriétés diverses étudiées avec soin par M. Bravais, et doit être censé renfermer des molécules similaires, dont les atomes correspondants occupent, dans les diverses cellules, des positions semblables. Par suite aussi, les atomes du fluide étheré doivent être distribués de la même manière dans toutes les cellules. Cela posé, les équations linéaires qui représenteront les mouvements vibratoires, infiniment petits et simultanés, d'un cristal homogène et du fluide étheré qu'il renferme, seront évidemment analogues à celles que j'ai considérées dans le précédent Mémoire; en d'autres termes, elles seront linéaires, mais à coefficients périodiques. Si, dans ce cristal, les *plans réticulaires* divisent l'espace en rhomboïdes dont chacun ait pour arêtes trois *paramètres* désignés par  $a, b, c$ , les divers coefficients seront des fonctions périodiques de coordonnées parallèles à ces arêtes, et ces fonctions ne seront point altérées quand on fera croître ou décroître chaque coordonnée d'un multiple du *paramètre* qui lui correspond. Si, d'ailleurs, ces coordonnées sont obliques, rien n'empêchera de prendre pour variables indépendantes, outre le temps, des coordonnées rectangulaires, dont les coordonnées obliques seront évidemment fonctions linéaires.

Ces principes étant admis, si l'on veut déduire de l'analyse les lois des vibrations de l'éther dans un corps cristallisé, on aura évidemment

à intégrer un système d'équations linéaires, non plus à coefficients constants, mais à coefficients périodiques. Il en sera de même, s'il s'agit de déterminer les vibrations propres de ce corps; et généralement les équations de cette espèce pourront être appliquées à l'étude d'un grand nombre de phénomènes en Physique ou en Mécanique.

Cela posé, considérons un mouvement vibratoire représenté par un système d'équations linéaires à coefficients périodiques. Soient  $x$  l'une quelconque des inconnues et  $K$  l'un quelconque des coefficients périodiques, dans les équations dont il s'agit.  $K$  sera une fonction périodique ou des trois coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ , ou du moins de trois coordonnées obliques  $r, \eta, \zeta$ , liées aux coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ , par trois équations du premier degré, et ne variera pas quand on fera croître ou décroître  $r, \eta, \zeta$  de quantités représentées par des multiples de trois paramètres donnés  $a, b, c$ . Si, maintenant, on pose

$$(5) \quad \alpha = \frac{2\pi}{a}, \quad \beta = \frac{2\pi}{b}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{c},$$

la fonction périodique  $K$  pourra être développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes des exponentielles trigonométriques

$$e^{\alpha xi}, \quad e^{\beta \eta}, \quad e^{\gamma \zeta},$$

en sorte qu'on aura

$$(6) \quad K = \sum_{l, l', l''} s_{l, l', l''} e^{l \alpha xi} e^{l' \beta \eta} e^{l'' \gamma \zeta},$$

la sommation qu'indique  $S$  s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives des quantités  $l, l', l''$ ; et pour satisfaire aux équations données, il suffira de développer non seulement chaque coefficient, mais encore chaque inconnue, en une série de même forme, en posant, par exemple,

$$(7) \quad x = \sum_{l, l', l''} s_{l, l', l''} e^{l \alpha xi} e^{l' \beta \eta} e^{l'' \gamma \zeta},$$

puis d'égaliser entre eux, dans les deux membres de chacune des équations obtenues, les coefficients des puissances semblables des exponen-





tielles

$$e^{2x_1}, e^{6y_1}, e^{7z_1}.$$

En opérant comme on vient de le dire, et supposant que dans les développements des inconnues on néglige les termes où la somme des valeurs numériques des trois quantités

$$l, l', l''$$

surpasse un nombre donné N, on obtiendra un nombre fini d'équations *auxiliaires* qui renfermeront, à la place de l'inconnue  $z$ , les inconnues

$$z_0, z_2, z_6, z_7, z_{22}, z_6, z_{17}, \dots, z_{2,6}, \dots$$

dont la première,  $z_0$ , représentera précisément la *valeur moyenne* de  $z$ , considéré comme fonction de  $x, y, z$ ; puis, en éliminant de ces équations toutes les inconnues, à l'exception d'une seule, on formera une *équation caractéristique*

$$(8) \quad \square z_0 = 0.$$

Ajoutons qu'on pourra, si l'on veut, à l'aide d'éliminations, réduire les *équations auxiliaires* à ne contenir d'autres inconnues que celles qui sont analogues à  $z_0$ , par conséquent, celles qui représentent les valeurs moyennes des divers déplacements atomiques.

Il importe d'observer que les équations auxiliaires ainsi obtenues différeront, en général, même pour une valeur infinie du nombre N, de celles auxquelles se réduiraient les équations proposées, si l'on y remplaçait chaque coefficient périodique par sa valeur moyenne.

## MÉMOIRE

SUR

## LES SYSTÈMES ISOTROPES

DE POINTS MATÉRIELS <sup>(1)</sup>.

*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 615; 1850.

Dans le Mémoire lithographié, sous la date d'août 1836, et dans celui que j'ai présenté à l'Académie, le 17 juin 1839 <sup>(2)</sup>, j'ai recherché ce que deviennent les équations des mouvements infiniment petits d'un ou même de deux systèmes homogènes de points matériels, quand elles acquièrent la propriété de ne pouvoir être altérées, tandis que l'on fait tourner les axes coordonnés autour de l'origine, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand les systèmes donnés deviennent isotropes. Mais, dans cette recherche, les coefficients que renfermaient les équations linéaires données étaient supposés réduits à des quantités constantes; et, comme j'en ai fait la remarque, cette supposition n'est pas toujours conforme à la réalité. Dans un grand nombre de problèmes de Physique et de Mécanique, les équations linéaires auxquelles on se trouve conduit renferment des coefficients, non plus constants, mais périodiques. Il est vrai qu'alors l'intégration de ces équations linéaires et à coefficients périodiques peut être ramenée à l'intégration d'autres équations linéaires, à coefficients constants, savoir, de celles que j'ai

<sup>(1)</sup> Présenté dans la séance du 25 décembre 1849.

<sup>(2)</sup> Voir le Tome VIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et le Tome I des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. (*Oeuvres de Cauchy*, S. I, T. IV, et S. II, T. XI.)



désignées sous le nom d'équations auxiliaires, et qui déterminent les valeurs moyennes des inconnues. Mais, la forme de ces équations auxiliaires étant plus générale que celle des équations primitives, il devient nécessaire de généraliser les formules qui s'en déduisent, et spécialement celles qui représentent les mouvements infiniment petits des systèmes isotropes. Ajoutons qu'on peut obtenir aisément ces dernières formules, sans le secours du Calcul intégral, en s'appuyant sur quelques théorèmes fondamentaux relatifs aux fonctions isotropes de coordonnées rectilignes, c'est-à-dire aux fonctions qui ne sont pas altérées quand on fait tourner les axes coordonnés autour de l'origine. Parmi ces théorèmes nous nous bornerons à citer le suivant :

THEOREME. — Une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de trois points dépend uniquement des distances de ces points à l'origine, de leurs distances mutuelles et de la somme alternée dont la sixième partie représente, au signe près, le volume du tétraèdre dont ces distances sont les arêtes.

Remarquons, d'ailleurs, que le carré du volume d'un tétraèdre étant une fonction entière des carrés des six arêtes, on pourra réduire toute fonction isotrope des coordonnées rectilignes de trois points à une fonction de six quantités variables. Ajoutons qu'une telle fonction deviendra hémisotrope, si elle change de signe avec les coordonnées elles-mêmes.

Quand on veut appliquer le théorème que nous venons d'énoncer à la recherche des conditions d'isotropie d'un système de points matériels, il convient de remplacer les trois équations qui déterminent les déplacements d'un point, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, par l'équation unique qui détermine, pour le même point, le déplacement mesuré parallèlement à un quatrième axe, arbitrairement choisi. En opérant ainsi, on se trouve immédiatement conduit aux équations que j'ai mentionnées dans la séance du 14 novembre 1842, et qui représentent avec tant de précision les phénomènes de polarisation circulaire produits par l'huile de térébenthine, l'acide tartrique, etc.

## ANALYSE.

§ 1<sup>er</sup>. — Caractères et propriétés d'une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points.

Soient

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad \dots$$

les coordonnées de divers points P, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ... mesurées parallèlement à trois axes rectangulaires ou obliques. Une fonction de ces coordonnées sera dite isotrope, si on ne l'altère pas en faisant subir à ces mêmes coordonnées les changements de valeurs qui résultent d'un mouvement de rotation quelconque imprimé aux axes autour de l'origine O. Les fonctions de cette espèce se trouvant naturellement introduites dans le calcul par certaines questions de Physique ou de Mécanique, il importe de rechercher leur forme générale et leurs propriétés principales. Tel est l'objet dont nous allons ici nous occuper.

D'abord, toute quantité variable qui ne dépendra que des positions relatives des points donnés P, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ... et de l'origine O, sera évidemment une fonction isotrope des coordonnées de ces points. Telles seront, en particulier, les fonctions qui exprimeront les rayons vecteurs

$$r, \quad r_1, \quad r_2, \quad \dots$$

menés de l'origine aux points P, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ...; les sinus et cosinus des angles

$$(r, r_1), \quad (r_1, r_2), \quad \dots, \quad (r_1, r_2), \quad \dots,$$

compris entre ces rayons vecteurs; les distances mutuelles des points donnés; enfin, le volume du tétraèdre qui aura pour sommets trois de ces points et l'origine. Si, pour fixer les idées, on suppose que les points donnés se réduisent à trois P, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, alors, en désignant par

$$r, \quad r_1, \quad r_2; \quad \alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2$$

es six distances

$$OP, \quad OP_1, \quad OP_2; \quad P_1P_2, \quad P_2P, \quad PP_1,$$



c'est-à-dire, en d'autres termes, les six arêtes du tétraèdre qui aura pour sommet le point O, et pour base le triangle PP<sub>o</sub>P<sub>o</sub>, on obtiendra pour  $r, r_o, r_o; \nu, \nu_o, \nu_o$  des fonctions isotropes des coordonnées  $x, y, z; x_o, y_o, z_o$ ; et l'on pourra en dire autant de la somme alternée dont la sixième partie représentera, au signe près, le volume du tétraèdre OPP<sub>o</sub>. Nommons  $\frac{\tau}{6}$  ce volume pris avec le signe + ou avec le signe -, suivant que le mouvement de rotation d'un rayon vecteur mobile, assujéti à parcourir successivement les trois faces latérales du tétraèdre, de manière à passer de la position OP à la position OP<sub>o</sub>, puis de la position OP<sub>o</sub> à la position OP<sub>o</sub>, pour revenir ensuite de celle-ci à la position OP, sera ou ne sera pas un mouvement de rotation de même nature que celui qu'on obtiendrait en substituant aux droites OP, OP<sub>o</sub>, OP<sub>o</sub> les demi-axes des  $x, y$  et  $z$  positives. Si, d'ailleurs, pour plus de simplicité, on suppose les axes coordonnés rectangulaires entre eux, on trouvera

$$(1) \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, & \nu^2 = (x_o - x)^2 + (y_o - y)^2 + (z_o - z)^2, \\ r_o^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2, & \nu_o^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2, \\ r_o^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2, & \nu_o^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 \end{cases}$$

et

$$(2) \quad \tau = xy_o z_o - xy_o z + x_o y_o z - x_o y_o z + x_o y_o z - x_o y_o z,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \quad \tau = S(\pm xy_o z_o).$$

Donc, les axes étant supposés rectangulaires, les seconds membres des formules (1) et (2) seront des fonctions isotropes des coordonnées des trois points P, P<sub>o</sub>, P<sub>o</sub>. C'est, au reste, ce qu'on peut aisément vérifier *a posteriori*, en transformant ces seconds membres, à l'aide des équations linéaires auxquelles on doit recourir pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires.

Ajoutons que le carré de  $\tau$  sera lié aux carrés de  $r, r_o, r_o; \nu, \nu_o, \nu_o$  par une équation qu'il est facile d'obtenir.

Les quantités variables

$$r, r_o, r_o; \nu, \nu_o, \nu_o; \tau,$$

étant des fonctions isotropes des coordonnées des trois points P, P<sub>o</sub>, P<sub>o</sub>, on pourra en dire encore autant d'une fonction quelconque de ces mêmes quantités. Ajoutons que, si l'on pose pour abrégé

$$(4) \quad \begin{cases} \rho = r^2, & \zeta = \frac{r^2 + r_o^2 - \nu^2}{2} = r_o r \cos(r_o, r), \\ \rho_o = r_o^2, & \zeta_o = \frac{r_o^2 + r^2 - \nu_o^2}{2} = r_o r \cos(r_o, r), \\ \rho_o = r_o^2, & \zeta_o = \frac{r^2 + r_o^2 - \nu_o^2}{2} = r_o r \cos(r, r_o), \end{cases}$$

toute fonction des six quantités  $r, r_o, r_o; \nu, \nu_o, \nu_o$  pourra être considérée comme une fonction des six quantités  $\rho, \rho_o, \rho_o; \zeta, \zeta_o, \zeta_o$ , liées aux coordonnées  $x, y, z; x_o, y_o, z_o; x_o, y_o, z_o$ , par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} \rho = x^2 + y^2 + z^2, & \zeta = x_o x_o + y_o y_o + z_o z_o, \\ \rho_o = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2, & \zeta_o = x_o x + y_o y + z_o z, \\ \rho_o = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2, & \zeta_o = x_o x + y_o y + z_o z, \end{cases}$$

et que la quantité variable  $\tau$  sera liée aux six quantités  $\rho, \rho_o, \rho_o; \zeta, \zeta_o, \zeta_o$ , par la formule

$$(6) \quad \tau^2 = \rho \rho_o \rho_o - \rho \zeta^2 - \rho_o \zeta_o^2 + 2 \zeta \zeta_o \zeta_o.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — Pour obtenir une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires

$$x, y, z; x_o, y_o, z_o; x_o, y_o, z_o,$$

de trois points P, P<sub>o</sub>, P<sub>o</sub>, il suffit de prendre une fonction quelconque des sept quantités

$$\rho, \rho_o, \rho_o; \zeta, \zeta_o, \zeta_o; \tau,$$

déterminées par les équations (5) et (2), et liées entre elles par la for-



mule (6) qui permet d'éliminer de la fonction dont il s'agit l'une des trois quantités  $\rho, \rho', \rho''$ .

Il y a plus; la forme ici indiquée d'une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires de trois points est la plus générale possible, et l'on établira aisément la proposition suivante :

THEOREME II. — Toute fonction isotrope des coordonnées rectangulaires

$$x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'',$$

de trois points P, P', P'', peut être réduite à une fonction des sept quantités

$$\rho, \rho', \rho''; \zeta, \zeta', \zeta''; \tau,$$

déterminées par les équations (5) et (2), ou, ce qui revient au même, à une fonction de  $\zeta, \zeta', \zeta'', \tau$ , et de deux des trois quantités  $\rho, \rho', \rho''$ , liées à  $\zeta, \zeta', \zeta'', \tau$  par la formule (6).

Démonstration. — En effet, soit

$$(7) \quad \omega = f(x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'')$$

une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires

$$x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'',$$

La valeur de  $\omega$  demeurant invariable, tandis que l'on imprimera aux axes coordonnés un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine O, il sera permis de concevoir qu'à l'aide d'un tel mouvement on a fait coïncider le demi-axe des  $x$  positives avec la droite OP dirigée de O vers P. Cette coïncidence étant admise, on aura

$$(8) \quad x = r = \rho^{\frac{1}{2}}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Si, d'ailleurs, les points P, P' sont situés sur la droite OP, indéfiniment prolongée dans les deux sens,  $y', z', y'', z''$  s'évanouiront ainsi que  $y, z$ ; et comme alors les formules (5) donneront

$$\zeta = x, x, \quad \zeta' = x, x,$$

on aura encore

$$(9) \quad \begin{cases} x' = \frac{\zeta'}{r} = \rho^{-\frac{1}{2}} \zeta', & y' = 0, & z' = 0, \\ x'' = \frac{\zeta''}{r} = \rho^{-\frac{1}{2}} \zeta'', & y'' = 0, & z'' = 0. \end{cases}$$

Or, en vertu des formules (8) et (9), les coordonnées

$$x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$$

se réduiront à des fonctions des trois quantités

$$\rho, \zeta, \zeta''.$$

Donc, dans l'hypothèse adoptée, c'est-à-dire lorsque les points P, P' seront situés sur la droite OP, la fonction isotrope

$$\omega = f(x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'')$$

pourra être réduite elle-même à une fonction des seules quantités

$$\rho, \zeta, \zeta''.$$

Supposons maintenant que la condition énoncée ne soit pas remplie, en sorte que l'un des points P, P', le premier par exemple, se trouve situé hors de la droite OP. On pourra, dans ce cas, en faisant tourner, s'il est nécessaire, les axes coordonnés autour de l'origine O, faire coïncider non seulement le demi-axe des  $x$  positives avec la droite OP, mais encore le demi-axe des  $y$  positives avec la perpendiculaire élevée par le point O sur la droite OP, dans le plan OPP', et du même côté que le point P'. Alors on aura non seulement

$$y' > 0, \quad z' = 0,$$

mais encore, en vertu des formules (5) et (2),

$$\zeta' = xx', \quad \rho' = x'^2 + y'^2$$

et

$$\zeta'' = x, x, \quad \zeta'' = x, x + y, y, \quad \tau = xy, z'';$$



puis on en conclura

$$(10) \quad \begin{cases} x_i = \rho^{-\frac{1}{2}} \zeta_i, & y_i = (\rho_i - \rho^{-1} \zeta_i^2)^{\frac{1}{2}}, & z_i = 0, \\ x_p = \rho^{-\frac{1}{2}} \zeta_p, & y_p = \frac{\zeta_p - \rho^{-1} \zeta_p \zeta_i}{(\rho_i - \rho^{-1} \zeta_i^2)^{\frac{1}{2}}}, & z_p = \frac{\rho^{-\frac{1}{2}} \tau}{(\rho_i - \rho^{-1} \zeta_i^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Or, en vertu des formules (8), (10), les coordonnées

$$x, y, z; \quad x_i, y_i, z_i; \quad x_p, y_p, z_p$$

se réduiront évidemment à des fonctions des six quantités

$$\rho, \rho_i; \quad \zeta_i, \zeta_p, \tau;$$

et l'on pourra en dire autant de la fonction

$$\omega = f(x, y, z; x_i, y_i, z_i; x_p, y_p, z_p).$$

Donc le théorème II se trouvera encore vérifié, quand l'un des points  $P_i, P_p$  sera situé hors de la droite OP; donc, il se vérifiera dans tous les cas possibles.

Il est bon d'observer qu'en vertu des formules (4)  $\zeta_i, \zeta_p, \tau$  sont des fonctions entières de

$$r_i, r_p, r_p; \quad v_i, v_i, v_p.$$

Donc toute fonction des quantités

$$\rho, \rho_i, \rho_p; \quad \zeta_i, \zeta_p, \tau;$$

pourra être réduite à une fonction des quantités

$$r_i, r_p, r_p; \quad v_i, v_i, v_p; \quad \tau,$$

et le théorème II entraînera la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Toute fonction isotrope des coordonnées rectangulaires de trois points P, P<sub>i</sub>, P<sub>p</sub> peut être réduite à une fonction des distances de ces points à l'origine, de leurs distances mutuelles et de la quantité dont la sixième partie représente, au signe près, le volume du*

tétraèdre dont ces distances sont les arêtes. Ajoutons que le carré de ce volume sera lié aux carrés des six arêtes par une formule qui se déduira immédiatement des équations (4) et (6).

Ce n'est pas tout; si l'on rapporte les positions de trois points P, P<sub>i</sub>, P<sub>p</sub>, d'abord à trois axes rectangulaires, puis à trois axes obliques partant de la même origine, une fonction des coordonnées rectangulaires des points dont il s'agit pourra être, à l'aide de formules connues, transformée en une fonction des coordonnées obliques. Or, si l'on suppose, comme il est permis de le faire, les deux systèmes d'axes liés invariablement l'un à l'autre, ils ne pourront tourner l'un sans l'autre autour de l'origine et, par suite, une fonction isotrope des coordonnées obliques ne pourra être qu'une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires. Donc, le troisième théorème entraînera encore la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Toute fonction isotrope des coordonnées rectilignes de trois points P, P<sub>i</sub>, P<sub>p</sub> peut être réduite à une fonction des distances de ces points à l'origine, de leurs distances mutuelles et de la somme alternée dont la sixième partie représente, au signe près, le volume du tétraèdre dont ces distances sont les arêtes.*

Jusqu'ici nous avons supposé que le nombre des points donnés se réduisait à trois. Mais les mêmes raisonnements pourraient être appliqués au cas où l'on considérerait une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires ou obliques de divers points matériels, quel que fût le nombre de ces points, et l'on se trouverait alors conduit aux propositions suivantes :

THÉORÈME V. — *Toute fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points peut être réduite à une fonction de leurs distances à l'origine, de leurs distances mutuelles et des quantités dont l'une quelconque, divisée par 6, représente, au signe près, le volume d'un tétraèdre que l'on forme en prenant pour sommets l'origine et trois de ces mêmes points.*



THÉOREME VI. — *Étant donnés divers points  $P_1, P_2, P_3, \dots$  si, en nommant*

$$x_n, y_n, z_n$$

*les coordonnées rectangulaires du point  $P_n$ , on pose généralement*

$$(11) \quad \rho_n = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2,$$

$$(12) \quad \zeta_{m,n} = x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n,$$

$$(13) \quad \tau_{l,m,n} = x_l y_m z_n - x_l y_n z_m + x_m y_n z_l - x_m y_l z_n + x_n y_l z_m - x_n y_m z_l,$$

*toute fonction isotrope des coordonnées des divers points pourra être réduite à une fonction des quantités de la forme*

$$\rho_n, \zeta_{m,n}, \tau_{l,m,n}$$

*qui représentent les carrés des rayons vecteurs menés de l'origine aux points donnés, les produits que l'on forme en multipliant deux quelconques de ces rayons vecteurs par le cosinus de l'angle compris entre eux, ou, ce qui revient au même, en multipliant le premier de ces deux rayons par la projection algébrique du second sur le premier, et enfin, aux signes près, les volumes des parallélépipèdes dont l'un quelconque a pour arêtes non parallèles les rayons vecteurs menés de l'origine à trois de ces mêmes points.*

Ajoutons que, dans le cas particulier où tous les points donnés sont situés sur la droite  $OP_1$ , indéfiniment prolongée dans les deux sens, la fonction isotrope  $\omega$  peut être réduite à une fonction de  $\rho_1$  et des quantités de la forme  $\zeta_{1,n}$ , ou, ce qui revient au même, à une fonction des distances qui séparent le point  $P_1$  de l'origine  $O$  et des autres points  $P_2, P_3, \dots$

Dans le cas contraire, si l'on nomme  $P_2$  un des points situés en dehors de la droite  $OP_1$ , la fonction isotrope  $\omega$  pourra être réduite à une fonction de  $\rho_1, \rho_2$  et des quantités de la forme

$$\zeta_{1,2}, \zeta_{2,3}, \tau_{1,2,3}$$

ou, ce qui revient au même, à une fonction des distances  $OP_1, OP_2$

qui séparent les points  $P_1, P_2$  de l'origine, des projections algébriques que l'on obtient quand l'on projette sur  $OP_1$  et sur  $OP_2$  les rayons vecteurs de l'origine aux autres points, et des quantités équivalentes (aux signes près) aux volumes des tétraèdres qui ont pour sommets ces autres points et pour base le triangle  $OP_1 P_2$ .

Pour vérifier, sur un exemple très simple, l'exactitude des principes que nous venons d'établir, considérons un système de points matériels liés invariablement les uns aux autres et à un point fixe  $O$ . Nommons  $m$  la masse de l'un quelconque des points matériels donnés,  $x, y, z$  ses coordonnées relatives à trois axes rectangulaires menés par le point  $O$  et  $K$  le moment d'inertie du système par rapport à un certain axe  $OA$ , qui passe par le même point. On aura, en prenant l'axe  $OA$  pour axe des  $x$ ,

$$(14) \quad K = S m (y^2 + z^2),$$

la sommation qu'indique le signe  $S$  s'étendant à tous les points du système. Supposons maintenant que le moment d'inertie  $K$  offre une valeur indépendante de la direction de l'axe  $OA$ . Alors, la somme

$$S m (y^2 + z^2)$$

devra être une fonction isotrope des coordonnées des divers points. En d'autres termes, cette fonction ne devra pas être altérée quand on fera tourner les axes des  $x, y, z$  d'une manière quelconque autour de l'origine. Donc, elle ne devra pas être altérée quand on fera coïncider l'axe  $OA$ , non plus avec l'axe des  $x$ , mais avec l'axe des  $y$ , ou avec l'axe des  $z$ ; et, dans l'hypothèse admise, l'équation (14) entraînera les deux suivantes :

$$(15) \quad K = S m (z^2 + x^2),$$

$$(16) \quad K = S m (x^2 + y^2).$$

Par suite aussi,  $K$  sera équivalent à la moyenne arithmétique entre les sommes que renferment les équations (14), (15), (16), et l'on



aura

$$(17) \quad K = \frac{2}{3} Sm(x^2 + y^2 + z^2),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18) \quad K = \frac{2}{3} Smr^2,$$

$r$  étant la distance du point  $(x, y, z)$  à l'origine des coordonnées. Or, en vertu de la formule (18),  $K$  se trouve réduit à une fonction des distances qui séparent les points matériels donnés de l'origine, ce qui s'accorde avec le théorème V.

Remarquons encore que les formules (14), (15), (16) entraînent toujours avec elles la formule (18). Donc, pour que la fonction  $K$  soit isotrope, ou, en d'autres termes, pour que le moment d'inertie du système donné devienne indépendant de la direction de l'axe  $OA$ , il suffira que les moments d'inertie du système autour de trois axes rectangulaires soient égaux entre eux.

§ II. — Sur les conditions analytiques auxquelles doit satisfaire une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points.

Soient

$$x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$$

les coordonnées de divers points  $P, P_1, P_2, \dots$  mesurées parallèlement à trois axes rectangulaires ou obliques; et soit encore

$$(1) \quad \omega = f(x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots)$$

une fonction déterminée des coordonnées dont il s'agit. Soient enfin

$$x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$$

les valeurs nouvelles qu'acquerront les coordonnées des points  $P, P_1, P_2, \dots$  lorsqu'on aura déplacé les axes coordonnés en leur imprimant un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine  $O$ . Les

nouvelles coordonnées  $x, y, z$  se trouveront liées aux coordonnées primitives  $x, y, z$  par trois équations linéaires de la forme

$$(2) \quad x = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \quad z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$  étant neuf coefficients qui ne changeront pas de valeurs quand on remplacera les coordonnées du point  $P$  par celles du point  $P_1$  ou  $P_2, \dots$ ; et ces neuf coefficients pourront être réduits à des fonctions déterminées de trois angles polaires, par exemple de l'angle  $\varphi$  que formera le demi-axe des  $x$  positives avec le demi-axe des  $x$  positives, et des angles  $\chi, \psi$  que formera le plan mené par ces deux demi-axes avec les plans des  $x, y$  et des  $x, z$ . Cela posé, si  $\omega$  est une fonction isotrope des coordonnées rectilignes des points  $P, P_1, P_2, \dots$  l'équation (1) entraînera la suivante :

$$(3) \quad \omega = f(x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots),$$

et, par suite, en supposant les valeurs de  $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$ , déterminées par les équations (2), on aura identiquement

$$(4) \quad f(x, y, z; x_1, y_1, z_1; \dots) = f(x, y, z; x_1, y_1, z_1; \dots).$$

En d'autres termes, on aura

$$(5) \quad \begin{cases} f(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1; \dots) \\ = f(x, y, z; x_1, y_1, z_1; \dots), \end{cases}$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux trois angles polaires  $\varphi, \chi, \psi$ .

Si les points donnés se réduisent à un seul  $P$ , la formule (5) deviendra

$$(6) \quad f(\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) = f(x, y, z).$$

Pour mieux fixer les idées, considérons, en particulier, le cas où les axes coordonnés sont rectangulaires. Dans ce cas, les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$  pourront être exprimés en fonction des



angles polaires  $\varphi, \gamma, \psi$  par des équations de la forme

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \varphi, \\ \alpha' = \sin \varphi \cos \psi, \\ \alpha'' = \sin \varphi \sin \psi, \\ \beta = \sin \varphi \cos \gamma, \\ \beta' = -\sin \gamma \sin \psi - \cos \varphi \cos \gamma \cos \psi, \\ \beta'' = \sin \gamma \cos \psi - \cos \varphi \cos \gamma \sin \psi, \\ \gamma = \sin \varphi \sin \gamma, \\ \gamma' = \cos \gamma \sin \psi - \cos \varphi \sin \gamma \cos \psi, \\ \gamma'' = -\cos \gamma \cos \psi - \cos \varphi \sin \gamma \sin \psi. \end{cases}$$

Donc, la formule (6) ou (5) devra se transformer en une équation identique lorsqu'en prenant pour  $f(x, y, z)$ , ou pour  $f(x, y, z; x', y', z'; \dots)$  une fonction isotrope, on supposera les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$  déterminés par les équations (7). Par conséquent, l'équation (6) deviendra identique, lorsqu'on réduira  $f(x, y, z)$  à la fonction isotrope  $x^2 + y^2 + z^2$ . On aura donc identiquement, quels que soient d'ailleurs  $x, y, z$ ,

$$(8) \quad (xx + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)^2 + (\alpha''x + \beta''y + \gamma''z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et, par suite,

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0. \end{cases}$$

Pareillement, l'équation (5) deviendra identique, lorsqu'on prendra pour  $f(x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'')$  la fonction isotrope

$$S(\pm xy, z) = xy, z - xy, z + x, y, z - x, y, z + x, y, z - x, y, z,$$

On aura donc identiquement, quels que soient d'ailleurs  $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$ ,

$$(10) \quad \begin{cases} S[\pm (xx + \beta y + \gamma z)(\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)(\alpha''x + \beta''y + \gamma''z)] \\ = S(\pm xy, z), \end{cases}$$

et, par suite,

$$(11) \quad S(\pm \alpha\beta'\gamma'') = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \quad \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta'\gamma'' + \alpha''\beta'\gamma - \alpha''\beta''\gamma' = 1.$$

Il est, au reste, facile de s'assurer que les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$  fournies par les équations (7) satisfont effectivement aux conditions (9) et (12). Ajoutons que les trois dernières des formules (9), jointes à l'équation (12), donneront

$$(13) \quad \frac{\alpha}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'} = \frac{\alpha'}{\beta''\gamma - \beta'\gamma''} = \frac{\alpha''}{\beta'\gamma - \beta''\gamma'} = \frac{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2}{1} = 1, \quad \dots$$

ou, ce qui revient au même,

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & \beta = \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \gamma = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta', \\ \alpha' = \beta''\gamma - \beta'\gamma'', & \beta' = \gamma''\alpha - \gamma'\alpha'', & \gamma' = \alpha''\beta - \alpha'\beta'', \\ \alpha'' = \beta'\gamma - \beta''\gamma', & \beta'' = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha'', & \gamma'' = \alpha'\beta - \alpha''\beta'. \end{cases}$$

Il est bon d'observer que des formules (14), jointes à l'équation (12), on tirera immédiatement

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, & \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, & \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, & \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0. \end{cases}$$

On pourra de ces diverses formules déduire les valeurs de six des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$  exprimées en fonction des trois autres. Ainsi, par exemple, après avoir choisi arbitrairement les valeurs de  $\alpha, \beta, \alpha'$ , on pourra déduire  $\gamma$  et  $\alpha''$  des deux équations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

auxquelles on satisfait en prenant

$$(16) \quad \gamma = \pm \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha'' = \pm \sqrt{1 - \alpha^2 - \alpha'^2},$$

puis  $\beta'$  et  $\gamma'$  des deux équations

$$6\beta' + \gamma\gamma' = -\alpha\alpha', \quad 6\gamma' - \beta'\gamma = \alpha\alpha'',$$





auxquelles on satisfait en prenant

$$(17) \quad \delta' = -\frac{\alpha\alpha'\delta + \alpha^2\gamma}{1 - \alpha^2}, \quad \gamma' = -\frac{\alpha\alpha'\gamma - \alpha^2\delta}{1 - \alpha^2};$$

puis enfin,  $\delta''$  et  $\gamma''$  des formules

$$(18) \quad \delta'' = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, \quad \gamma'' = \alpha\delta' - \alpha'\delta.$$

Cela posé, en admettant, comme ci-dessus, que la fonction  $f(x, y, z; x', y', z', \dots)$  soit isotrope, l'équation (5) devra évidemment devenir identique, non seulement quand on y substituera les valeurs de  $\alpha, \delta, \gamma; \alpha', \delta', \gamma'; \alpha'', \delta'', \gamma''$  exprimées en fonction des angles polaires  $\varphi, \chi, \psi$  à l'aide des formules (7), mais encore quand on y substituera les valeurs de

$$\gamma; \delta', \gamma'; \alpha'', \delta'', \gamma'',$$

exprimées en fonction de  $\alpha, \delta, \alpha'$ , à l'aide des formules (16), (17) et (18), quels que soient d'ailleurs les signes adoptés dans les seconds membres des équations (16).

Réciproquement, la fonction  $f(x, y, z; x', y', z', \dots)$  sera isotrope, si, pour transformer la formule (5) en une équation identique, il suffit d'y substituer les valeurs de  $\alpha, \delta, \gamma; \alpha', \delta', \gamma'; \alpha'', \delta'', \gamma''$  exprimées en fonction des angles polaires  $\varphi, \chi, \psi$  à l'aide des formules (7), ou les valeurs de

$$\alpha', \delta', \gamma'; \alpha'', \delta'', \gamma'',$$

exprimées en fonction de  $\alpha, \delta, \alpha'$  à l'aide des formules (16), (17), (18).

### § III. — Formes spéciales de fonctions isotropes assujetties à certaines conditions.

Les fonctions isotropes acquièrent des formes spéciales et dignes de remarque, lorsqu'on les assujettit à certaines conditions.

Ainsi, en particulier, il arrive souvent qu'une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points change de signe sans changer de valeur numérique, quand on change les signes des coor-

données parallèles à un seul axe. Alors cette fonction isotrope devient ce que nous appellerons une fonction *hémisotrope*. Telles sont, par exemple, les fonctions  $\tau$  et  $\tau_{r,m,n}$ , déterminées, dans le paragraphe I<sup>er</sup>, par les équations (2) et (13), c'est-à-dire les sommes alternées dont chacune, divisée par 6, représente, au signe près, le volume d'un tétraèdre que l'on construit en prenant pour sommets trois points quelconques et l'origine des coordonnées. Il résulte d'ailleurs de la définition précédente qu'une fonction hémisotrope n'est point altérée, quand on change à la fois les signes des coordonnées parallèles à deux axes, et qu'elle change de signe sans changer de valeur numérique, quand on change les signes de toutes les coordonnées. Il est encore évident que le rapport de deux fonctions hémisotropes sera une fonction isotrope, mais non hémisotrope, qui conservera la même valeur et le même signe, quand on changera le signe des coordonnées parallèles à un même axe.

Imaginons maintenant qu'une fonction isotrope  $\omega$  des coordonnées rectilignes de divers points doive être en même temps une fonction linéaire de quelques-unes d'entre elles. On déduira aisément, des principes établis dans le paragraphe I<sup>er</sup>, la forme particulière que devra prendre cette fonction isotrope.

Concevons, pour fixer les idées, que les points donnés se réduisent à trois P, P', P'', et que  $\omega$  doive être non seulement une fonction isotrope de leurs coordonnées

$$x, y, z; \quad x', y', z'; \quad x'', y'', z''$$

supposées rectangulaires, mais encore une fonction linéaire des coordonnées de chacun des points P, P', P''. Supposons d'ailleurs que  $\omega$  soit assujéti à s'évanouir quand on fait coïncider l'un des points P, P', P'' avec l'origine. En vertu des principes établis dans le paragraphe I<sup>er</sup>,  $\omega$  devra être une fonction des quantités

- (1)  $\rho = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho' = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \rho'' = x''^2 + y''^2 + z''^2,$
- (2)  $\varsigma = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad \varsigma_1 = x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3, \quad \varsigma_2 = x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1,$
- (3)  $\tau = xy_1z_2 - x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 - x_3y_1z_2 + x_1y_2z_3 - x_2y_3z_1.$



Parmi ces quantités, trois seulement, savoir

$$\zeta, \zeta_0, \tau,$$

sont fonctions linéaires des coordonnées  $x, y, z$ , avec lesquelles elles s'évanouissent; trois aussi, savoir

$$\zeta, \zeta_0, \tau,$$

sont fonctions linéaires des coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  avec lesquelles elles s'évanouissent. Cela posé, pour que  $\omega$  soit en même temps une fonction linéaire de  $x, y, z$ , assujettie à s'évanouir quand  $x, y, z$ , s'évanouissent, et une fonction linéaire de  $x_0, y_0, z_0$  assujettie à s'évanouir quand  $x_0, y_0, z_0$  s'évanouissent, il sera évidemment nécessaire que  $\omega$  soit non seulement une fonction linéaire de

$$\zeta, \zeta_0, \tau,$$

dans laquelle les coefficients de  $\zeta, \zeta_0, \tau$  restent indépendants de  $x, y, z$ , mais encore une fonction linéaire de

$$\zeta, \zeta_0, \tau,$$

dans laquelle les coefficients de  $\zeta, \zeta_0, \tau$  restent indépendants de  $x_0, y_0, z_0$ . Donc, dans la fonction  $\omega$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  devront se trouver multipliés par des facteurs indépendants des coordonnées  $x, y, z; x_0, y_0, z_0$ ; et, de plus, la partie de  $\omega$  indépendante de  $\zeta$  et  $\tau$  devra être proportionnelle à chacune des quantités  $\zeta, \zeta_0$ , par conséquent au produit  $\zeta\zeta_0$ , et se réduire à ce produit multiplié par un facteur indépendant de  $x, y, z; x_0, y_0, z_0$ . Donc, en définitive,  $\omega$  devra être déterminé par une équation de la forme

$$(4) \quad \omega = P\zeta + Q\zeta_0 + R\tau,$$

P, Q, R étant indépendants de  $x, y, z; x_0, y_0, z_0$ . Mais parmi les quantités

$$\rho, \rho_0, \rho_0; \zeta, \zeta_0, \zeta_0; \tau$$

dont  $\omega$  doit être fonction, une seule, savoir  $\rho$ , est indépendante de  $x,$

$y, z; x_0, y_0, z_0$ . Donc, dans la formule (4), les facteurs P, Q, R doivent se réduire à des fonctions de  $\rho$ ; et l'on doit avoir

$$(5) \quad \omega = \zeta\varphi(\rho) + \zeta_0\chi(\rho) + \tau\psi(\rho),$$

$\varphi(\rho), \chi(\rho), \psi(\rho)$  étant des fonctions de la seule quantité  $\rho$ , ou, ce qui revient au même,

$$(6) \quad \omega = \zeta\varphi(\rho^2) + \zeta_0\chi(\rho^2) + \tau\psi(\rho^2).$$

En d'autres termes, dans l'hypothèse admise, la fonction  $\omega$  sera de la forme

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= (x, x_0 + y, y_0 + z, z_0)\varphi(\rho^2) + (xx_0 + yy_0 + zz_0)(xx_0 + yy_0 + zz_0)\chi(\rho^2) \\ &+ (xy, z_0 - x, y_0, z_0 + x, y_0, z_0 - x, y, z_0 + x, y, z_0 - x_0, y_0, z) \psi(\rho^2). \end{aligned} \right.$$

#### § IV. — Sur les fonctions isotropes et symboliques des coordonnées rectilignes de divers points.

Nous appellerons *fonction symbolique* de diverses variables une fonction qui renfermera, non seulement ces variables, mais encore des *lettres symboliques* indiquant des dérivées prises par rapport à quelques-unes de ces variables.

Une fonction symbolique qui dépendra uniquement des coordonnées rectilignes de divers points sera *isotrope*, si l'on n'altère pas sa valeur en imprimant aux axes coordonnés un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on nomme  $x, y, z$  les coordonnées rectangulaires d'un point mobile P;  $\xi, \eta, \zeta$  les coordonnées rectangulaires d'un autre point mobile Q, dont la position dépende de celle du premier, et  $a, b, c$  les coordonnées rectangulaires d'un point R, arbitrairement choisi.

Soit, de plus,

$$(1) \quad \omega = f(a, b, c; D_x, D_y, D_z; \xi, \eta, \zeta)$$

une fonction symbolique des coordonnées  $a, b, c, \xi, \eta, \zeta$ , et des lettres



caractéristiques  $D_x, D_y, D_z$ ; c'est-à-dire une fonction des coordonnées  $a, b, c$ , des coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  et des dérivées des divers ordres de  $\xi, \eta, \zeta$  différenciés par rapport à  $x, y, z$ . Soient enfin

$$a, b, c; x, y, z; \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta},$$

et

$$(2) \quad \bar{\omega} = f(a, b, c; D_x, D_y, D_z; \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$$

ce que deviendront les coordonnées

$$a, b, c; x, y, z; \xi, \eta, \zeta$$

des points R, P, Q, et la fonction  $\omega$ , si l'on déplace les axes coordonnés en leur imprimant un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine. La fonction symbolique  $\omega$  sera isotrope, si elle n'est pas altérée par le déplacement des axes, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$(3) \quad \bar{\omega} = \omega;$$

et réciproquement si la fonction  $\omega$  est isotrope, l'équation (3) devra être une équation identique. D'ailleurs les coordonnées nouvelles des points P, Q, R seront liées à leurs coordonnées primitives par des équations semblables aux formules (2) du paragraphe II, en sorte qu'on aura

$$(4) \quad x = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \quad z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

$$(5) \quad \xi = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta, \quad \bar{\eta} = \alpha' \xi + \beta' \eta + \gamma' \zeta, \quad \bar{\zeta} = \alpha'' \xi + \beta'' \eta + \gamma'' \zeta,$$

$$(6) \quad a = \alpha a' + \beta b + \gamma c, \quad b = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c, \quad c = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c,$$

les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$  pouvant être réduits à trois, ou exprimés en fonction de trois angles polaires  $\varphi, \chi, \psi$  en vertu des formules (7) du paragraphe II; et c'est en égard à ces dernières formules et à la réduction dont il s'agit que l'équation (3) devra être identique. En d'autres termes, si la fonction  $\omega$  est isotrope, l'équation (3) devra subsister, quelles que soient les valeurs attribuées aux trois angles polaires  $\varphi, \chi, \psi$ .

Supposons maintenant que les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  du point Q soient liées aux coordonnées  $x, y, z$  du point P par des équations de la forme

$$(7) \quad \xi = A e^{ux+vy+wz}, \quad \eta = B e^{ux+vy+wz}, \quad \zeta = C e^{ux+vy+wz},$$

$u, v, w$  et  $A, B, C$  étant les coordonnées rectangulaires de deux points fixes S, T. Si l'on pose, pour abréger,

$$(8) \quad z = e^{ux+vy+wz},$$

on aura non seulement

$$(9) \quad D_x z = uz, \quad D_y z = vz, \quad D_z z = wz,$$

mais encore

$$(10) \quad \begin{cases} D_x \xi = u\xi, & D_y \xi = v\xi, & D_z \xi = w\xi, \\ D_x \eta = u\eta, & D_y \eta = v\eta, & D_z \eta = w\eta, \\ D_x \zeta = u\zeta, & D_y \zeta = v\zeta, & D_z \zeta = w\zeta; \end{cases}$$

et, par suite, dans la valeur de  $\omega$  déterminée dans la formule (1), on pourra substituer aux lettres caractéristiques  $D_x, D_y, D_z$  les quantités  $u, v, w$ . En conséquence, on aura, dans l'hypothèse admise,

$$(11) \quad \omega = f(a, b, c; u, v, w; \xi, \eta, \zeta),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12) \quad \omega = f(a, b, c; u, v, w; Ax, Bx, Cx).$$

D'autre part, si la fonction  $\omega$  est isotrope, l'équation (3) sera identique et ne cessera pas de l'être quand on attribuera aux coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  du point Q les valeurs particulières que fournissent les équations (7). Mais alors  $\bar{\omega}$  sera précisément ce que devient la valeur de  $\omega$  déterminée par l'équation (12) quand on substitue aux coordonnées primitives

$$a, b, c; u, v, w; A, B, C; x, y, z$$

des trois points fixes R, S, T, et du point mobile P, les coordonnées

$$a, b, c; u, v, w; A, B, C; x, y, z$$



de ces mêmes points, mesurées parallèlement aux directions nouvelles que prennent les axes des  $x, y, z$ , en vertu de leurs déplacements. En effet, les nouvelles coordonnées étant liées aux coordonnées primitives par les formules

$$(13) \quad \begin{cases} a = \alpha a + \varepsilon b + \gamma c, & b = \alpha' a + \varepsilon' b + \gamma' c, & c = \alpha'' a + \varepsilon'' b + \gamma'' c, \\ u = \alpha u + \varepsilon v + \gamma w, & v = \alpha' u + \varepsilon' v + \gamma' w, & w = \alpha'' u + \varepsilon'' v + \gamma'' w, \\ A = \alpha A + \varepsilon B + \gamma C, & B = \alpha' A + \varepsilon' B + \gamma' C, & C = \alpha'' A + \varepsilon'' B + \gamma'' C, \end{cases}$$

et la fonction  $ux + vy + wz$  étant isotrope, on aura non seulement

$$(14) \quad ux + vy + wz = u'x + v'y + w'z$$

et, par suite,

$$(15) \quad x = e^{u'x + v'y + w'z},$$

mais encore

$$(16) \quad \bar{x} = A e^{u'x + v'y + w'z}, \quad \bar{y} = B e^{u'x + v'y + w'z}, \quad \bar{z} = C e^{u'x + v'y + w'z}.$$

En conséquence, la fonction  $\bar{\omega}$ , déterminée par l'équation (2), pourra être réduite à la forme

$$(17) \quad \bar{\omega} = f(a, b, c; u, v, w; Ax, Bx, Cx).$$

Or, pour obtenir le second membre de l'équation (17), il suffira évidemment de remplacer dans le second membre de l'équation (12) les coordonnées primitives des points fixes R, S, T par leurs coordonnées nouvelles, sans altérer la valeur de  $z$ , qui reste d'ailleurs invariable, tandis qu'aux coordonnées primitives du point fixe R et du point mobile P on substitue leurs coordonnées nouvelles. Donc, si la quantité  $\omega$ , déterminée par l'équation (1), est une fonction symbolique et isotrope des coordonnées du point fixe R et des points mobiles P, Q, la valeur particulière de  $\omega$ , déterminée par la formule (12), sera elle-même une fonction isotrope des coordonnées du point mobile P et des points fixes R, S, T.

Concevons maintenant que la quantité  $\omega$ , déterminée par l'équation (1), soit une fonction linéaire et homogène, non seulement des coordonnées  $a, b, c$  du point fixe R, mais encore des coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  du point mobile P et de leurs dérivées des divers ordres, prises par rapport aux variables  $x, y, z$ ; l'équation (12) donnera

$$(18) \quad \omega = \Omega x,$$

la valeur de  $\Omega$  étant

$$(19) \quad \Omega = f(a, b, c; u, v, w; A, B, C);$$

et l'équation (17) donnera pareillement

$$(20) \quad \bar{\omega} = \bar{\Omega} x,$$

la valeur de  $\bar{\Omega}$  étant

$$(21) \quad \bar{\Omega} = f(a, b, c; u, v, w; A, B, C).$$

Cela posé, la condition (3) entraînera évidemment la suivante :

$$(22) \quad \bar{\Omega} = \Omega.$$

D'ailleurs  $\bar{\Omega}$  sera précisément ce que devient  $\Omega$  quand, aux coordonnées primitives des points fixes R, S, T, on substitue leurs coordonnées nouvelles. Donc, dans l'hypothèse admise, l'isotropie de la fonction symbolique  $\omega$  entraînera l'isotropie de la fonction  $\Omega$ , qui sera une fonction linéaire et homogène, non seulement des coordonnées  $a, b, c$  du point R, mais encore des coordonnées A, B, C du point fixe T. Si, d'ailleurs, l'isotropie doit subsister, quelles que soient les positions attribuées aux points fixes et aux points mobiles, alors, en vertu de la formule (7) du paragraphe III,  $\Omega$  devra être de la forme qu'indique l'équation

$$(23) \quad \begin{cases} \Omega = (aA + bB + cC) \varphi(k^2) \\ \quad + (au + bv + cw)(uA + vB + wC) \chi(k^2) \\ \quad + [a(wB - vC) + b(uC - wA) + c(vA - uB)] \psi(k^2), \end{cases}$$



la valeur de  $k^2$  étant

$$(24) \quad k^2 = a^2 + c^2 + w^2.$$

Donc, puisque, pour déduire  $\omega$  de  $\Omega$ , il suffit de remplacer

$$u, v, w \quad \text{par} \quad D_x, D_y, D_z,$$

et

$$A, B, C \quad \text{par} \quad \xi, \eta, \zeta,$$

la fonction symbolique  $\omega$  devra, dans l'hypothèse admise, être de la forme indiquée par l'équation

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = E(a\xi + b\eta + c\zeta) \\ \quad + F(aD_x + bD_y + cD_z)(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) \\ \quad + K[a(D_y\eta - D_z\zeta) + b(D_x\zeta - D_z\xi) + c(D_y\xi - D_x\eta)], \end{array} \right.$$

E, F, K désignant trois fonctions entières du trinôme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Il est, au reste, facile de s'assurer *a posteriori* que la valeur de  $\Omega$ , déterminée par l'équation (25), est toujours une fonction isotrope des coordonnées

$$a, b, c; \quad x, y, z; \quad \xi, \eta, \zeta,$$

du point fixe R et des points mobiles P, Q. En effet, des équations (4) jointes aux formules (9) du paragraphe II, on tire

$$(26) \quad x = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \quad y = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \quad z = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z,$$

par conséquent

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_x = \alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z, \\ D_y = \alpha' D_x + \beta' D_y + \gamma' D_z, \\ D_z = \alpha'' D_x + \beta'' D_y + \gamma'' D_z. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, des formules (27), jointes aux équations (5), (6) et aux formules (12) et (15) du paragraphe II, on tirera non seulement

$$(28) \quad a\bar{\xi} + b\bar{\eta} + c\bar{\zeta} = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

$$(29) \quad D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,$$

mais encore

$$aD_x + bD_y + cD_z = aD_x + bD_y + cD_z,$$

$$D_x\bar{\xi} + D_y\bar{\eta} + D_z\bar{\zeta} = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta,$$

par conséquent

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (aD_x + bD_y + cD_z)(D_x\bar{\xi} + D_y\bar{\eta} + D_z\bar{\zeta}) \\ = (aD_x + bD_y + cD_z)(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) \end{array} \right.$$

et

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} aD_x\bar{\eta} - aD_y\bar{\zeta} + bD_x\bar{\zeta} - bD_x\bar{\xi} + cD_y\bar{\xi} - cD_x\bar{\eta} \\ = aD_x\eta - aD_y\zeta + bD_x\zeta - bD_x\xi + cD_y\xi - cD_x\eta. \end{array} \right.$$

Donc, les fonctions

$$a\xi + b\eta + c\zeta,$$

$$(aD_x + bD_y + cD_z)(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta),$$

$$aD_x\eta - aD_y\zeta + bD_x\zeta - bD_x\xi + cD_y\xi - cD_x\eta$$

et la fonction symbolique

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

sont toutes isotropes, et l'on pourra en dire autant de la valeur de  $\omega$  fournie par l'équation (25), dans laquelle E, F, K désignent, comme on l'a dit, trois fonctions entières de la somme  $D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$ , ces trois dernières fonctions pouvant d'ailleurs être composées ou d'un nombre fini ou d'un nombre infini de termes.

Nous remarquerons, en finissant, qu'il n'est pas absolument nécessaire de supposer, dans les formules (1), (2) et (25), les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  et  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  comptées à partir de la même origine que toutes les autres. On pourrait, sans inconvénient, supposer que, dans les formules dont il s'agit,  $\xi, \eta, \zeta$  représentent ou des coordonnées mesurées à partir d'une origine distincte de celle à laquelle se rapportent les coordonnées des points R et P, ou même des déplacements quelconques subis par le point mobile P au bout d'un temps plus ou moins considérable.



§ V. — Sur les mouvements vibratoires et infiniment petits d'un ou de plusieurs systèmes isotropes de points matériels.

Considérons les mouvements vibratoires et infiniment petits d'un ou de plusieurs systèmes de points matériels. Ces mouvements seront généralement représentés par des équations aux différences mêlées, qui renfermeront avec les dérivées des inconnues différentiées deux fois par rapport au temps, leurs différences finies, prises par rapport aux coordonnées; et il suffira de développer ces différences en séries pour transformer les équations d'abord obtenues en équations aux dérivées partielles. D'ailleurs, les coefficients des dérivées prises par rapport aux coordonnées seront quelquefois constants, plus souvent périodiques et, dans ce dernier cas, l'intégration des équations linéaires trouvées pourra être ramenée à l'intégration d'autres équations qui seront encore linéaires, mais à coefficients constants, savoir, de celles que nous avons nommées équations *auxiliaires*, et qui peuvent être censées déterminer les valeurs moyennes des inconnues.

Dans tous les cas, les équations trouvées, ou les équations auxiliaires, seront dites *isotropes*, si on ne les altère pas en faisant subir aux axes coordonnés un déplacement qui résulte d'un mouvement de rotation imprimé à ces axes autour de l'origine. Les systèmes de points matériels dont les mouvements vibratoires se trouveront représentés par des équations isotropes, seront appelés eux-mêmes *systèmes isotropes*. Il résulte de cette définition que les systèmes isotropes sont ceux où les mouvements vibratoires se propagent en tous sens suivant les mêmes lois. Lorsque les vibrations propagées seront celles de l'éther, ou, en d'autres termes, du fluide lumineux, le mot *isotrope* sera remplacé par le mot *isophane*. En conséquence, un corps isophane sera celui qui aura la propriété de propager de la même manière en tous sens les vibrations lumineuses.

Les principes établis dans les paragraphes précédents s'appliquent naturellement à la recherche des formes que prennent les équations

des mouvements infiniment petits d'un ou de plusieurs systèmes de points matériels, quand ces équations deviennent isotropes.

Considérons, pour fixer les idées, un système homogène de points matériels dans lequel se propage un mouvement vibratoire infiniment petit. Supposons d'ailleurs ce système renfermé dans une certaine portion de l'espace, ou à l'état d'isolement, ou avec un second système pareillement homogène, mais dont les molécules subissent des déplacements beaucoup plus petits que l'on puisse négliger sans erreur sensible. Soient :

$m$  la masse d'un atome appartenant au premier système;

$x, y, z$  les coordonnées initiales de cet atome, relatives à trois axes rectangulaires;

$x + \xi, y + \eta, z + \zeta$  les coordonnées du même atome, au bout du temps  $t$ .

Enfin, supposons que les atomes des deux systèmes soient uniquement sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Les déplacements  $\xi, \eta, \zeta$  d'un atome du premier système, mesurés au bout du temps  $t$ , parallèlement aux axes coordonnés, seront déterminés par trois équations de la forme

$$(1) \quad D_t^2 \xi = X, \quad D_t^2 \eta = Y, \quad D_t^2 \zeta = Z,$$

$X, Y, Z$  étant des fonctions linéaires homogènes des inconnues  $\xi, \eta, \zeta$ , et des dérivées de divers ordres de  $\xi, \eta, \zeta$ , différentiées par rapport à  $x, y, z$ . Ajoutons que, si le premier système est à l'état d'isolement, les coefficients des inconnues et de leurs dérivées pourront se réduire à des quantités constantes, c'est-à-dire indépendantes de  $x, y, z$ ; et que, dans le cas contraire, pour obtenir des valeurs très approchées des inconnues, il suffira souvent d'intégrer, à la place des équations (1), d'autres équations linéaires qui seront de même forme et à coefficients constants.

Cela posé, concevons que les quantités  $X, Y, Z$  se réduisent effectivement à des fonctions linéaires de  $\xi, \eta, \zeta$ , qui soient en même temps des fonctions symboliques entières de  $D_x, D_y, D_z$ , les divers coefficients étant des quantités constantes, c'est-à-dire indépendantes



de  $x, y, z$ . Pour déterminer les formes particulières que pourront prendre les fonctions  $X, Y, Z$ , quand les équations (1) deviendront isotropes, on devra commencer par substituer aux trois formules (1) une équation unique, qui détermine, non plus les dérivées secondes

$$D_x^2 \xi, D_y^2 \eta, D_z^2 \zeta$$

des déplacements  $\xi, \eta, \zeta$ , de l'atome  $m$ , mesurés parallèlement aux axes des  $x, y, z$ , mais la dérivée seconde

$$D_x^2 u$$

d'un déplacement  $u$ , mesuré parallèlement à une direction quelconque. En supposant que cette direction soit celle d'un rayon vecteur, équivalent à l'unité de longueur, et mené de l'origine à un point fixe  $R$ , dont les coordonnées soient  $a, b, c$ , on aura

$$(2) \quad u = a\xi + b\eta + c\zeta;$$

et de cette dernière formule, jointe aux équations (1), on tirera

$$(3) \quad D_x^2 u = aX + bY + cZ.$$

D'ailleurs, si les équations (1) sont isotropes, l'équation (3) devra rester inaltérée, quand on déplacera les axes coordonnés, à l'aide d'un mouvement de rotation quelconque imprimé à ces axes autour de l'origine; et cette condition devra être remplie, quelle que soit la position attribuée au point fixe  $R$ . Donc alors le second membre de la formule (3) devra être une fonction symbolique isotrope des coordonnées  $a, b, c$ , des déplacements  $\xi, \eta, \zeta$  et des lettres caractéristiques  $D_x, D_y, D_z$ . Mais, d'autre part, le second membre de la formule (3) sera en même temps une fonction linéaire homogène des coordonnées  $a, b, c$ , et une fonction linéaire homogène de  $\xi, \eta, \zeta$ . Donc, ce second membre devra être de la forme de la fonction représentée par  $\omega$  dans l'équation (25) du paragraphe IV, en sorte qu'on aura

$$(4) \quad \begin{cases} aX + bY + cZ = E(a\xi + b\eta + c\zeta) \\ \quad + F(aD_x + bD_y + cD_z)(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) \\ \quad + K[a(D_x\eta - D_y\xi) + b(D_x\zeta - D_z\xi) + c(D_y\xi - D_x\eta)]. \end{cases}$$

$E, F, K$  désignant trois fonctions entières du trinôme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Enfin, la formule (4) devant subsister quelle que soit la position attribuée au point fixe  $R$  situé à l'unité de distance de l'origine, on pourra, dans cette formule, réduire l'une quelconque des trois coordonnées de ce point  $R$  à l'unité, les deux autres à zéro. On pourra donc évaluer séparément entre eux, dans les deux membres de la formule (4), les coefficients des trois coordonnées  $a, b, c$ . En opérant ainsi, et en posant pour abrégé

$$(5) \quad v = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta,$$

on obtiendra immédiatement les trois formules

$$(6) \quad \begin{cases} X = E\xi + FD_x v + K(D_x\eta - D_y\zeta), \\ Y = E\eta + FD_y v + K(D_x\zeta - D_z\xi), \\ Z = E\zeta + FD_z v + K(D_y\xi - D_x\eta), \end{cases}$$

en vertu desquelles les équations (1) seront réduites aux suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = E\xi + FD_x v + K(D_x\eta - D_y\zeta), \\ D_y^2 \eta = E\eta + FD_y v + K(D_x\zeta - D_z\xi), \\ D_z^2 \zeta = E\zeta + FD_z v + K(D_y\xi - D_x\eta). \end{cases}$$

Telle est la forme à laquelle se réduiront les équations (1), quand elles seront isotropes, si d'ailleurs les fonctions de

$$\xi, \eta, \zeta \quad \text{et de} \quad D_x, D_y, D_z,$$

représentées par

$$X, Y, Z,$$

soient non seulement linéaires par rapport aux déplacements  $\xi, \eta, \zeta$  et à leurs dérivées des divers ordres, mais aussi homogènes et à coefficients constants.

On ne doit pas oublier que, dans les formules (7), les coefficients symboliques

$$E, F, K$$



représentent des fonctions entières du trinome

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Ajoutons que la variable  $v$ , déterminée par l'équation (5), est précisément la dilatation de volume du système des points matériels donnés autour du point  $(x, y, z)$ .

§ VI. — *Sur les coefficients symboliques renfermés dans les équations linéaires et isotropes qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système unique et homogène de points matériels.*

Lorsque les systèmes de molécules donnés se réduisent à un système unique de points matériels, uniquement soumis à des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, alors, comme on l'a vu dans le Mémoire précédent, les équations (1) du paragraphe V peuvent être présentées sous une forme digne de remarque; et, en posant pour abrégé

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z,$$

on réduit ces équations aux suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = G \xi + D_u (D_u H \xi + D_v H \eta + D_w H \zeta), \\ D_y^2 \eta = G \eta + D_u (D_u H \xi + D_v H \eta + D_w H \zeta), \\ D_z^2 \zeta = G \zeta + D_u (D_u H \xi + D_v H \eta + D_w H \zeta), \end{cases}$$

G, H étant des fonctions entières de  $u, v, w$ .

Si d'ailleurs on nomme :

$m$  la masse du point matériel ou de l'atome qui, dans l'état d'équilibre, avait pour coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ ;

$m$  la masse d'un second atome;

$r$  la distance qui séparait, dans l'état d'équilibre, l'atome  $m$  de l'atome  $m$ ;

$x, y, z$  les projections algébriques de la distance  $r$  sur les axes coordonnés;

$mmr f(r)$  l'action exercée sur l'atome  $m$  par l'atome  $m$ , placé à la dis-

tance  $r$ , la fonction  $f(r)$  étant positive ou négative, suivant que l'atome  $m$  est attiré ou repoussé.

Alors, en posant, pour abrégé,

$$(2) \quad \iota = xD_x + yD_y + zD_z, \quad \epsilon = xu + yv + zw,$$

on aura

$$(3) \quad G = \sum m f(r) (e^\iota - 1),$$

$$(4) \quad H = \sum \frac{m}{r} D_r f(r) \left( e^\iota - \frac{\epsilon^2}{2} \right),$$

la sommation qu'indique chaque signe  $\sum$  s'étendant à tous les atomes  $m$  distincts de l'atome  $m$ . Ajoutons que l'on pourra, sans inconvénient, dans le second membre de la formule (4), remplacer le rapport  $\frac{\epsilon^2}{2}$  par le trinome

$$1 + \iota + \frac{\epsilon^2}{2},$$

c'est-à-dire par la somme des trois premiers termes du développement de  $e^\iota$ , et supposer en conséquence la valeur de H déterminée, non plus par l'équation (4), mais par la formule

$$(5) \quad H = \sum \frac{m}{r} D_r f(r) \left( e^\iota - 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \right).$$

En effet,

$$\iota = xu + yv + zw$$

étant une fonction linéaire de  $u, v, w$ , les valeurs de

$$D_x^2 H, D_y^2 H, D_z^2 H, D_x D_y H, D_y D_x H, D_x D_z H, D_z D_x H,$$

tirées des formules (4) et (5), seront les mêmes et, par conséquent, on n'altère pas les équations (1) en substituant la formule (5) à la formule (4).

Supposons maintenant que le système de molécules donné soit homogène. Alors, dans les seconds membres des formules (4) et (5),





développés suivant les puissances ascendantes et entières des lettres caractéristiques  $u, v, w$ , les coefficients que renfermeront les divers termes pourront devenir indépendants des coordonnées  $x, y, z$ , et se réduire ainsi à des quantités constantes. C'est ce qui arrivera, en particulier, si les divers atomes ou points matériels, étant doués de masses égales, coïncident avec les *nœuds* d'un système réticulaire, c'est-à-dire avec les points d'intersection de trois systèmes de plans équidistants et parallèles à trois plans fixes. D'ailleurs lorsque, dans les développements de G et de H, les coefficients des divers termes se réduiront à des constantes, les seconds membres des formules (1), c'est-à-dire les valeurs des quantités représentées par  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  dans les équations (1) du paragraphe précédent, se réduiront à des fonctions linéaires de  $\xi, \eta, \zeta$  qui seront en même temps fonctions explicites, non pas des coordonnées  $x, y, z$ , mais seulement des lettres symboliques  $D_x, D_y, D_z$ .

D'autre part, lorsque, dans les équations (1) du paragraphe V, les seconds membres  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  se réduisent à des fonctions linéaires de  $\xi, \eta, \zeta$  qui sont en même temps fonctions symboliques de  $D_x, D_y, D_z$ , ces équations ne peuvent, quand les coefficients demeurent constants, devenir isotropes sans coïncider avec les formules

$$(6) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = E\xi + FD_x v + K(D_x \eta - D_y \zeta), \\ D_y^2 \eta = E\eta + FD_y v + K(D_x \zeta - D_z \xi), \\ D_z^2 \zeta = E\zeta + FD_z v + K(D_y \xi - D_x \eta), \end{cases}$$

la valeur de  $v$  étant

$$(7) \quad v = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta$$

et les expressions symboliques

$$E, F, K$$

étant des fonctions entières du trinome

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Enfin, si dans les formules (6), (7) on remplace les lettres symboliques  $D_x, D_y, D_z$  par les lettres  $u, v, w$  et si, d'ailleurs, on pose pour

abrégé

$$(8) \quad h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

on trouvera, non seulement

$$(9) \quad v = u\xi + v\eta + w\zeta,$$

mais encore

$$(10) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = E\xi + F u(u\xi + v\eta + w\zeta) + K(w\eta - v\zeta), \\ D_y^2 \eta = E\eta + F v(u\xi + v\eta + w\zeta) + K(u\xi - w\zeta), \\ D_z^2 \zeta = E\zeta + F w(u\xi + v\eta + w\zeta) + K(v\xi - u\eta), \end{cases}$$

$E, F, K$  étant trois fonctions entières de  $h$ . Donc, lorsque les équations (1) seront isotropes, mais à coefficients constants, elles se confondront avec les équations (10), en sorte que les seconds membres des unes et des autres devront être identiquement égaux. Donc alors, les fonctions de  $u, v, w$ , qui représenteront les coefficients symboliques des déplacements  $\xi, \eta, \zeta$ , dans les seconds membres des équations (1), devront se confondre avec les coefficients symboliques de ces mêmes déplacements dans les seconds membres des équations (10); et, puisque le coefficient symbolique de  $\xi$  dans la seconde des équations (1) ne diffère pas du coefficient symbolique de  $\eta$  dans la première, les coefficients de  $\xi$  dans la seconde des équations (10) et de  $\eta$  dans la première devront encore être égaux entre eux. En d'autres termes, il faudra que l'on ait, dans les équations (10),

$$K = -K,$$

par conséquent

$$(11) \quad K = 0.$$

De plus, cette condition étant remplie, et les équations (10) étant ainsi réduites aux formules

$$(12) \quad \begin{cases} D_x^2 \xi = E\xi + F u(u\xi + v\eta + w\zeta), \\ D_y^2 \eta = E\eta + F v(u\xi + v\eta + w\zeta), \\ D_z^2 \zeta = E\zeta + F w(u\xi + v\eta + w\zeta), \end{cases}$$



les seconds membres de ces formules devront coïncider eux-mêmes avec les seconds membres des équations (1). Or, cette coïncidence entraînera les six conditions

$$(13) \begin{cases} G + D_u^2 H = E + F u^2, & G + D_v^2 H = E + F v^2, & G + D_w^2 H = E + F w^2, \\ D_v D_w H = F v w, & D_w D_u H = F w u, & D_u D_v H = F u v. \end{cases}$$

Il reste à examiner quelle est la forme que devront prendre les fonctions G, H pour satisfaire aux conditions (13).

J'observerai d'abord que, E, F étant par hypothèse des fonctions du trinome

$$u^2 + v^2 + w^2,$$

ou, ce qui revient au même, des fonctions de  $h$ , il suffira, pour satisfaire aux conditions (13), de supposer les fonctions symboliques G, H, réduites elles-mêmes à des fonctions de  $h$ . En effet, dans cette hypothèse, les conditions (13), jointes à la formule (8), donneront

$$(14) \quad D_h^2 H = F,$$

$$(15) \quad G + D_h H = E$$

et se trouveront toutes vérifiées si G, H vérifient les formules (14) et (15). D'ailleurs, la valeur de H fournie par l'équation (5) s'évanouit avec ses dérivées de premier ordre  $D_u H$ ,  $D_v H$ ,  $D_w H$ , lorsque  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et, par suite,  $h$  s'évanouissent; et l'on satisfait à cette équation en même temps qu'à l'équation (14) lorsqu'on prend

$$(16) \quad H = \int \int F dh^2,$$

chaque intégration étant effectuée à partir de la limite  $h = 0$ . Enfin, en supposant la valeur de H déterminée par la formule (16), on tirera de l'équation (15)

$$(17) \quad G = F - D_h H = F - \int F dh,$$

l'intégration étant encore effectuée à partir de  $h = 0$ .

Ce n'est pas tout; H devant, en vertu de la formule (15), s'évanouir avec ses dérivées de premier ordre, pour des valeurs nulles de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,

les valeurs les plus générales de G et H qui satisferont en même temps à cette condition et aux formules (13) ne pourront différer des valeurs fournies par les équations (16) et (17). Car, si l'on nomme  $\zeta$ ,  $\xi$  les accroissements qu'on devra faire subir à ces dernières valeurs pour passer aux valeurs générales de G et H, il faudra, pour satisfaire aux formules (13), poser

$$(18) \quad \begin{cases} \zeta + D_u^2 \xi = 0, & \zeta + D_v^2 \xi = 0, & \zeta + D_w^2 \xi = 0, \\ D_v D_w \xi = 0, & D_w D_u \xi = 0, & D_u D_v \xi = 0, \end{cases}$$

et de plus  $\xi$  devra s'évanouir avec ses dérivées de premier ordre  $D_u \xi$ ,  $D_v \xi$ ,  $D_w \xi$  pour des valeurs nulles de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Or, pour vérifier en même temps cette dernière condition et les formules (18), il est nécessaire de supposer

$$(19) \quad \zeta = 0, \quad \xi = 0.$$

En résumé, si, dans les équations (1), c'est-à-dire dans les équations linéaires et aux dérivées partielles qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système unique de molécules, les coefficients des dérivées des divers ordres se réduisent à des quantités constantes; alors, pour que ces équations deviennent isotropes, il sera nécessaire et il suffira que les fonctions symboliques G, H, déterminées par les formules (3) et (5), se réduisent à des fonctions de la lettre symbolique

$$h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

ou, ce qui revient au même, à des fonctions symboliques du trinome

$$u^2 + v^2 + w^2 = D_u^2 + D_v^2 + D_w^2.$$

D'ailleurs, cette condition étant supposée remplie, il suffira de poser

$$(20) \quad E = G + D_h H, \quad F = D_h^2 H$$

pour réduire les équations (1) aux formules (12).



Appliquées à la théorie de la lumière, les équations (12) représentent les mouvements infiniment petits de l'éther dans ceux des corps isophanes qui ne produisent pas le phénomène de la polarisation chromatique. Dans les corps qui produisent ce remarquable phénomène, les vibrations de l'éther se trouvent représentées non plus par les formules (12), mais par les formules (10). Je montrerai, dans un autre Mémoire, comment ces dernières formules se déduisent des équations à coefficients périodiques qui représentent les mouvements vibratoires de deux systèmes de molécules ou de l'un d'eux seulement.

FIN DU TOME II DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

## TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

## PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES  
DE L'INSTITUT DE FRANCE.*Mémoires extraits des « Mémoires de l'Académie des Sciences ».*

	Pages
Mémoire sur l'intégration d'une classe particulière d'équations différentielles et	
Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles, du premier	
ordre, à un nombre quelconque de variables . . . . .	5
Sur la résolution analytique des équations de tous les degrés par le moyen des	
intégrales définies . . . . .	9
Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques . . . . .	12
Second Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de Physique	
mathématique . . . . .	20
Mémoire sur divers points d'Analyse . . . . .	29
Mémoire sur divers points d'Analyse . . . . .	33
Mémoire sur le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de $h$ ,	
$\zeta$ étant une racine de l'équation $z - x - h \alpha(z) = 0$ . . . . .	59
Extrait du Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles . . . . .	67
Extrait du Mémoire sur quelques séries analogues à la série de Lagrange, sur les	
fonctions symétriques, et sur la formation directe des équations que produit	
l'élimination des inconnues entre des équations algébriques données . . . . .	73
Mémoire sur l'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un	
corps solide, et sur diverses équations du même genre . . . . .	79
Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent	
à de très petites distances et sur la théorie de la lumière . . . . .	82
Démonstration analytique d'une loi découverte par M. Savart et relative aux vibra-	
tions des corps solides ou fluides . . . . .	84
Mémoire sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire . . . . .	86
Mémoire sur la théorie de la lumière :	
Première Partie . . . . .	91
Deuxième Partie . . . . .	101



388

## TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction.....	111
Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes....	167
Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps, et en particulier sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière..	178
Mémoire sur les rayons lumineux simples, et sur les rayons évanescents.....	187
Mémoire sur le Calcul intégral.....	195
Mémoire sur les systèmes d'équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles à coefficients périodiques, et sur les intégrales élémentaires de ces mêmes équations.....	329
Mémoire sur les vibrations d'un double système de molécules, et de l'éther contenu dans un corps cristallisé.....	338
Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels.....	351

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II DE LA PREMIÈRE SÉRIE.



圖書

