§ II. — *Axes optiques.*

Nous appellerons ici *axes optiques* les directions que devra prendre la perpendiculaire au plan des ondes, dans un milieu doué de la double réfraction, pour que l'un des deux rayons lumineux observés se réunisse à l'autre. Or, les deux rayons ne peuvent se réunir que dans le cas où leur vitesse de propagation est la même. D'ailleurs, si l'on considère un milieu réfringent qui offre des axes de polarisation respectivement parallèles aux axes coordonnés et si l'on néglige la dispersion, la vitesse de propagation Ω d'une onde plane se trouvera déterminée par la formule (58) du paragraphe Ier, qui peut même être réduite, pour chacun des deux rayons lumineux, à l'équation (124) ou (165). Donc, pour déterminer les directions des axes optiques, il suffit de chercher quelles doivent être les valeurs des trois cosinus a, b, c, pour que l'équation (58), ou (124), ou (165) du paragraphe Ier, étant résolue par rapport à Ω^2, fournisse deux racines égales entre elles.

Remarquons maintenant que l'équation (58) du paragraphe Ier peut être présentée sous la forme

$$(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})s=0, \tag{1}$$

la valeur de s étant la suivante

$$s=\frac{\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{A}}+\frac{\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{B}}+\frac{\left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{C}}-\frac{1}{2\mathrm{PQR}}. \tag{2}$$

D'autre part, les racines égales de cette équation, dont le premier membre est une fonction entière de Ω^2, doivent vérifier non seulement l'équation elle-même, mais encore sa dérivée prise par rapport à Ω^2.

Enfin, si l'on nomme s' la dérivée de s, prise par rapport à Ω^2, on aura

$$s'=\frac{1}{2\Omega}\frac{ds}{d\Omega}=-\left[\frac{\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right)^2}{(\Omega^2-\mathfrak{A})^2}+\frac{\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2}{(\Omega^2-\mathfrak{B})^2}+\frac{\left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2}{(\Omega^2-\mathfrak{C})^2}\right], \tag{3}$$

et la dérivée de l'équation (1), prise par rapport à Ω^2, pourra s'écrire comme il suit

$$\left\{\begin{aligned}&[(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})+(\Omega^2-\mathfrak{C})(\Omega^2-\mathfrak{A})+(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})]s\\&\qquad+(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})s'=0.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Donc, les valeurs des cosinus

$$a,\quad b,\quad c,$$

correspondant à un axe optique, devront être telles qu'on puisse satisfaire par une même valeur de Ω^2 aux équations (1) et (4). Mais il est impossible que les équations (1) et (4) soient vérifiées simultanément, tant que Ω^2 ne devient pas égal à l'une des trois quantités

$$\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B},\quad \mathfrak{C}.$$

Car, si Ω^2 diffère de chacune d'elles, l'équation (1) sera réduite à

$$s=0,$$

et, par suite, la formule (4) donnera

$$s'=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right)^2}{(\Omega^2-\mathfrak{A})^2}+\frac{\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2}{(\Omega^2-\mathfrak{B})^2}+\frac{\left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2}{(\Omega^2-\mathfrak{C})^2}=0. \tag{5}$$

Or, la formule (5), dont chaque terme est positif, quand il n'est pas nul, entraînerait les trois équations

$$a=0,\qquad b=0,\qquad c=0, \tag{6}$$

qui ne peuvent subsister simultanément, puisque l'on doit avoir

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

Donc, pour que les valeurs de a, b, c correspondent à un axe optique, il faut que la valeur de Ω^2 se réduise à une ou à deux des trois quantités

$$\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B},\quad \mathfrak{C}$$

ou à toutes trois à la fois et vérifie, en conséquence, au moins l'une des trois formules

$$\Omega^2 = \mathfrak{A}, \qquad \Omega^2 = \mathfrak{B}, \qquad \Omega^2 = \mathfrak{C}, \tag{7}$$

en offrant une racine double de l'équation (1), que l'on peut écrire comme il suit

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{a}{P}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})+\left(\frac{b}{Q}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{C})(\Omega^2-\mathfrak{A})+\left(\frac{c}{R}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B}) \\ &\quad = \frac{(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})}{2PQR}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

D'ailleurs, lorsqu'on suppose vérifiée une seule des équations (7), par exemple la dernière, l'équation (8), réduite à

$$\left(\frac{c}{R}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B}) = 0,$$

entraîne la suivante

$$c = 0, \tag{9}$$

c'est-à-dire une seule des équations (6); et, lorsqu'on suppose vérifiées deux des équations (7), par exemple les deux dernières, l'équation (8), que la condition

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \tag{10}$$

réduit alors à

$$\left\{\begin{aligned} &(\Omega^2-\mathfrak{C})\Big\{\left(\frac{a}{P}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{C}) \\ &\qquad + \left[\left(\frac{b}{Q}\right)^2+\left(\frac{c}{R}\right)^2\right](\Omega^2-\mathfrak{A}) - \frac{(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{C})}{2PQR}\Big\} = 0, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

ne peut offrir deux racines égales à $\mathfrak{C}$ qu'autant que l'on a

$$\left[\left(\frac{b}{Q}\right)^2+\left(\frac{c}{R}\right)^2\right](\mathfrak{C}-\mathfrak{A}) = 0, \tag{12}$$

par conséquent

$$b = 0, \qquad c = 0, \tag{13}$$

ou

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{A} = 0$$

et, par suite,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}. \tag{14}$$

Donc, en définitive, pour que les valeurs de a, b, c correspondent à un axe optique, il faut qu'elles vérifient une ou deux des conditions (6), en sorte que le plan d'une onde soit parallèle à un ou à deux des axes coordonnés, c'est-à-dire à un ou à deux des axes de polarisation; ou bien qu'elles vérifient les deux équations comprises dans la formule (14).

D'après ce qui a été dit dans le paragraphe I[er], les valeurs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont respectivement

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \left(L - 2\frac{QR}{P} + G\right)a^2 + (R+H)b^2 + (Q+I)c^2, \\ \mathfrak{B} &= (R+G)a^2 + \left(M - 2\frac{RP}{Q} + H\right)b^2 + (P+I)c^2, \\ \mathfrak{C} &= (Q+G)a^2 + (P+H)b^2 + \left(N - 2\frac{PQ}{R} + I\right)c^2. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Cela posé, les valeurs des rapports

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}$$

pour lesquelles se vérifieront simultanément les deux équations comprises dans la formule (14) se confondront évidemment avec les valeurs des rapports

$$\frac{y}{x}, \quad \frac{z}{x}$$

pour lesquelles se vérifieront simultanément les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} &\left(L - 2\frac{QR}{P} + G\right)x^2 + (R+H)y^2 + (Q+I)z^2 = 1, \\ &(R+G)x^2 + \left(M - 2\frac{RP}{Q} + H\right)y^2 + (P+I)z^2 = 1, \\ &(Q+G)x^2 + (P+H)y^2 + \left(N - 2\frac{PQ}{P} + I\right)z^2 = 1. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

D'ailleurs, les équations (16) représenteront trois ellipsoïdes qui offriront le même centre, qui auront leurs axes dirigés suivant les mêmes droites et qui pourront : 1° se réduire à un seul ellipsoïde; 2° se rencontrer tous les trois suivant certaines courbes; 3° se rencontrer tous les trois suivant deux, quatre ou huit points situés sur une, deux ou quatre droites, savoir : sur une droite qui coïncide avec l'un des axes coordonnés, ou sur deux droites situées dans l'un des plans coordonnés, ou sur quatre droites dont aucune ne soit renfermée dans l'un des plans coordonnés. Dans ces différents cas, tout rayon vecteur qui joindra l'origine des coordonnées avec un point commun aux trois ellipsoïdes ou à deux d'entre eux, sera dirigé parallèlement à un axe optique du milieu réfringent.

Pour que les trois ellipsoïdes représentés par les équations (16) se réduisent à un seul, il faut que les coefficients de x^2, y^2, z^2 soient les mêmes dans la première, la deuxième ou la troisième des équations (16) et que l'on ait en conséquence

$$(17)\qquad \begin{cases} L - 2\dfrac{QR}{P} = R = Q, \\ R = M - 2\dfrac{RP}{Q} = P, \\ Q = P = N - 2\dfrac{PQ}{R}, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18)\qquad P = Q = R, \qquad L = M = N = 3P = 3Q = 3R.$$

Dans cette hypothèse, on trouve

$$(19)\qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = R + Ga^2 + Hb^2 + Ic^2,$$

et chacune des formules (7) se réduit à

$$(20)\qquad \Omega^2 = R + Ga^2 + Hb^2 + Ic^2,$$

tandis que les équations (56) du paragraphe Ier donnent

$$(21)\qquad aA + bB + cC = 0.$$

Alors la direction des axes optiques devient complètement indéterminée; en d'autres termes, une droite quelconque devient un axe optique et, quelle que soit la direction du plan de l'onde, les deux rayons lumineux observés se réunissent. Leur vitesse de propagation commune est celle que détermine la formule (20). Pour que cette vitesse devienne indépendante de la direction du plan de l'onde, ou, ce qui revient au même, des cosinus a, b, c, il faut que l'on ait

$$(22)\qquad G = H = I.$$

Les formules (18) et (22) ne diffèrent pas des formules (64) du paragraphe Ier, c'est-à-dire des formules auxquelles nous sommes parvenus, en cherchant les conditions qui expriment que la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois autour d'un point quelconque. Quant à l'équation (21), elle exprime que, dans les milieux doués de la réfraction simple, les vibrations lumineuses sont comprises dans le plan de l'onde, par conséquent perpendiculaires à la direction du rayon lumineux.

On n'a point trouvé de milieux qui offrent une infinité d'axes optiques situés sur une même surface courbe. Il est donc inutile de s'arrêter au cas où les trois ellipsoïdes représentés par les équations (16) se rencontreraient en une infinité de points situés sur certaines courbes. Comme on n'a pas trouvé non plus de milieux qui offrent quatre axes optiques, on peut, en admettant que les trois ellipsoïdes offrent seulement quelques points communs, se borner à considérer le cas où ces points sont au nombre de deux et situés sur l'un des axes coordonnés, ou au nombre de quatre et situés dans l'un des plans coordonnés. Mais alors on obtiendra ou un seul axe optique pour lequel se vérifieront deux des formules (6), ou deux axes optiques pour chacun desquels se vérifiera une seule de ces formules. En rapprochant ces remarques de ce qui a été dit plus haut, on conclura, en dernière analyse, que tout milieu doué de la double réfraction et dans lequel les axes de polarisation sont parallèles aux axes coordonnés, offre ou un seul axe optique pour lequel se vérifient deux des formules (6), ou deux axes optiques pour chacun desquels se vérifie une seule de ces formules. Nous allons examiner successivement et en détail ces deux cas spéciaux, que nous présente, en effet, l'expérience dans les cristaux à un et à deux axes optiques.

Supposons d'abord que le milieu réfringent offre un seul axe optique, pour lequel se vérifient deux des formules (6), par exemple les formules (13). En combinant l'équation (8) avec les formules (13) et (15), on reproduira l'équation (129) du paragraphe Ier, savoir

$$(\Omega^2 - \mathrm{L} - \mathrm{G})(\Omega^2 - \mathrm{R} - \mathrm{G})(\Omega^2 - \mathrm{Q} - \mathrm{G}) = 0, \tag{23}$$

et cette dernière, résolue par rapport à Ω^2, devra fournir deux racines égales, relatives aux deux rayons lumineux observés. D'ailleurs, les valeurs de Ω^2, tirées de l'équation (23) et relatives aux deux rayons lumineux, sont celles qui se réduisent à $\mathrm{R} + \mathrm{I}$, lorsque, la réfraction étant simple, les conditions (18) et (22) se trouvent remplies; c'est-à-dire $\mathrm{R} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{Q} + \mathrm{G}$. On aura donc, dans l'hypothèse admise,

$$\mathrm{R} + \mathrm{G} = \mathrm{Q} + \mathrm{G},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{R} = \mathrm{Q}. \tag{24}$$

Ce n'est pas tout; comme dans les cristaux à un seul axe la marche des rayons est symétrique autour de cet axe, les valeurs de Ω^2 relatives aux deux rayons lumineux devront se réduire à des fonctions de a et de $b^2 + c^2$. Or, quand on pose $a = 0$, l'équation (8) se réduit à

$$(\Omega^2 - \mathfrak{A})\left[\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2(\Omega^2 - \mathfrak{C}) + \left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2(\Omega - \mathfrak{B}) - \frac{(\Omega^2 - \mathfrak{B})(\Omega^2 - \mathfrak{C})}{2\mathrm{PQR}}\right] = 0; \tag{25}$$

et, en la résolvant par rapport à Ω^2, on obtient pour l'une des racines relatives aux rayons lumineux

$$\Omega^2 = \mathfrak{A} = (\mathrm{R} + \mathrm{H})b^2 + (\mathrm{Q} + \mathrm{I})c^2. \tag{26}$$

D'ailleurs, pour que le second membre de la formule (26) devienne

simplement fonction de $b^2 + c^2$, il faut que l'on ait

$$\mathrm{R} + \mathrm{H} = \mathrm{Q} + \mathrm{I}. \tag{27}$$

Enfin, comme il résulte de l'expérience que, dans les cristaux à un seul axe optique, les vibrations moléculaires sont pour l'un des rayons lumineux, savoir pour le rayon ordinaire, perpendiculaires à cet axe et comprises dans le plan de l'onde, on aura tout à la fois, pour ce rayon,

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad b\eta + c\zeta = 0, \tag{28}$$

par conséquent

$$\mathrm{A} = 0, \qquad b\mathrm{B} + c\mathrm{C} = 0, \tag{29}$$

et de ces dernières formules, jointes à la condition (24) et aux équations (56) du paragraphe Ier, l'on tirera

$$\Omega^2 - \mathfrak{B} = 0, \qquad \Omega^2 - \mathfrak{C} = 0; \tag{30}$$

par conséquent

$$\Omega^2 = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}. \tag{31}$$

En vertu des formules (15), l'équation (31) donnera

$$\left\{\begin{aligned} &(\mathrm{R} + \mathrm{G})a^2 + \left(\mathrm{M} - 2\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{Q}} + \mathrm{H}\right)b^2 + (\mathrm{P} + \mathrm{I})c^2 \\ &\quad = (\mathrm{Q} + \mathrm{G})a^2 + (\mathrm{P} + \mathrm{H})b^2 + \left(\mathrm{N} - 2\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{R}} + \mathrm{I}\right)c^2; \end{aligned}\right. \tag{32}$$

et, comme la formule (32) devra subsister indépendamment des valeurs attribuées aux rapports

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a},$$

on en conclura

$$\mathrm{R} + \mathrm{G} = \mathrm{Q} + \mathrm{G}, \qquad \mathrm{M} - 2\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{Q}} + \mathrm{H} = \mathrm{P} + \mathrm{H}, \qquad \mathrm{P} + \mathrm{I} = \mathrm{N} - 2\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{R}} + \mathrm{I},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(33)} \qquad Q = R, \qquad M = N = 3P.$$

Les formules (33) et (27) comprennent l'équation (24) avec la suivante

$$\text{(34)} \qquad H = I$$

et s'accordent, en conséquence, avec les formules (107) du paragraphe Ier, c'est-à-dire avec les conditions qui expriment que la propagation de la lumière s'effectue en tous sens, suivant les mêmes lois, autour de tout axe parallèle à l'axe des x. Lorsqu'on suppose ces conditions remplies, les formules (15) donnent simplement

$$\text{(35)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \left(L - 2\dfrac{R^2}{P} + G\right)a^2 + (R + I)(b^2 + c^2), \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = (R + G)a^2 + (P + I)(b^2 + c^2), \end{cases}$$

et l'équation (8) se réduit à

$$\text{(36)} \qquad (\Omega^2 - \mathfrak{C})\left[\frac{a^2}{P^2}(\Omega^2 - \mathfrak{C}) + \frac{b^2 + c^2}{R^2}(\Omega^2 - \mathfrak{A}) - \frac{(\Omega^2 - \mathfrak{A})(\Omega^2 - \mathfrak{C})}{2PR^2}\right] = 0.$$

Or, l'équation (36) se décompose évidemment en deux autres, dont l'une,

$$\text{(37)} \qquad \Omega^2 = \mathfrak{C},$$

se confond avec la formule (31) et se rapporte au rayon ordinaire; tandis que l'autre,

$$\text{(38)} \qquad \frac{a^2}{P^2}(\Omega^2 - \mathfrak{C}) + \frac{b^2 + c^2}{R^2}(\Omega^2 - \mathfrak{A}) - \frac{(\Omega^2 - \mathfrak{A})(\Omega^2 - \mathfrak{C})}{2PR^2} = 0,$$

fournit la valeur de Ω^2 relative au rayon extraordinaire. Comme cette dernière valeur de Ω^2 doit peu différer de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{C}$, elle doit correspondre à de très petites valeurs des différences

$$\Omega^2 - \mathfrak{A}, \qquad \Omega^2 - \mathfrak{C}.$$

En considérant ces différences comme très petites du premier ordre et négligeant dans le premier membre de l'équation (38) les quantités du second ordre, par conséquent le troisième terme proportionnel au produit de ces mêmes différences, on verra cette équation se réduire à

$$\text{(39)} \qquad \frac{a^2}{P^2}(\Omega^2 - \mathfrak{C}) + \frac{b^2 + c^2}{R^2}(\Omega^2 - \mathfrak{A}) = 0,$$

puis, en multipliant la formule (39) par P^2 et ajoutant au premier membre le produit du second ordre

$$\left(1 - \frac{P^2}{R^2}\right)(b^2 + c^2)(\Omega^2 - \mathfrak{A}),$$

on trouvera définitivement

$$\text{(40)} \qquad a^2(\Omega^2 - \mathfrak{C}) + (b^2 + c^2)(\Omega^2 - \mathfrak{A}) = 0.$$

L'expérience prouve que, dans les cristaux à un seul axe optique, la vitesse de propagation de la lumière est, pour le rayon ordinaire, indépendante de la direction du plan de l'onde. Donc alors la valeur de Ω^2 fournie par l'équation (37), savoir

$$\mathfrak{C} = (R + G)a^2 + (P + I)(b^2 + c^2) = (R + G)a^2 + (P + I)(1 - a^2)$$

ou

$$P + I + (R + G - P - I)a^2,$$

doit être indépendante de la direction du plan de l'onde et rester la même, quel que soit a; ce qui entraîne la condition

$$\text{(41)} \qquad R + G = P + I.$$

Cela posé, en désignant par Ω'' la vitesse de propagation de la lumière dans le rayon ordinaire, on aura

$$\text{(42)} \qquad \Omega''^2 = R + G = P + I.$$

Si l'on nomme d'ailleurs Ω' la vitesse de propagation de la lumière, dans le rayon extraordinaire, lorsque le plan de l'onde passe par l'axe des x, Ω'^2 sera, en vertu de la formule (40), la valeur de $\mathfrak{A}$ correspondant à

$$a = 0, \qquad b^2 + c^2 = 1.$$

On aura donc, eu égard à la première des équations (35),

$$\Omega'^2 = \mathrm{R} + \mathrm{I}. \tag{43}$$

Cela posé, si l'on fait pour abréger

$$\mathrm{L} - 2\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{P}} + \mathrm{G} = \Omega'^2 + \Theta', \tag{44}$$

les formules (35) et (40) donneront

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \Omega'^2 + \Theta' a^2, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{C} = \Omega''^2, \end{aligned}\right. \tag{45}$$

$$\Omega^2 = a^2\mathfrak{C} + (b^2 + c^2)\mathfrak{A} = \Omega''^2 a^2 + (\Omega'^2 + \Theta' a^2)(b^2 + c^2). \tag{46}$$

On se trouvera ainsi ramené aux équations (153), (154) du paragraphe Ier; puis, en désignant par λ l'angle formé par la perpendiculaire au plan d'une onde avec l'axe des x, on obtiendra de nouveau la formule

$$\Omega^2 = \Omega''^2 \cos^2\lambda + \Omega'^2 \sin^2\lambda + \Theta' \sin^2\lambda \cos^2\lambda, \tag{47}$$

relative au rayon ordinaire et qui se réduit à

$$\Omega^2 = \Omega''^2 \cos^2\lambda + \Omega'^2 \sin^2\lambda, \tag{48}$$

lorsque, pour la faire accorder avec les résultats de l'expérience, on suppose

$$\Theta' = 0. \tag{49}$$

Considérons maintenant un milieu, dans lequel les valeurs de a, b, c, relatives à chacun des axes optiques, vérifient une seule des formules (6); par exemple la formule

$$c = 0. \tag{50}$$

Si l'on a égard aux remarques énoncées à la fin du paragraphe Ier et si, en conséquence, on suppose vérifiées les conditions (142) et (169) de ce même paragraphe, on pourra, en négligeant les quantités du même ordre que les carrés des différences

$$\mathrm{Q} - \mathrm{P}, \quad \mathrm{R} - \mathrm{P}, \quad \ldots,$$

remplacer l'équation (8) par l'équation (165) du paragraphe Ier, ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$\left\{\begin{aligned} &a^2(\Omega^2 - \Omega''^2)(\Omega^2 - \Omega'''^2) \\ &\quad + b^2(\Omega^2 - \Omega'''^2)(\Omega^2 - \Omega'^2) + c^2(\Omega^2 - \Omega'^2)(\Omega^2 - \Omega''^2) = 0, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Ω', Ω'', Ω''' désignant trois quantités qui, prises deux à deux, représenteront les vitesses de propagation des deux espèces d'ondes, dont les plans seront parallèles à l'un des plans coordonnés. D'ailleurs, on tirera, de l'équation (51) jointe à la formule (50),

$$(\Omega^2 - \Omega'''^2)(\Omega^2 - \Omega''^2 a^2 - \Omega'^2 b^2) = 0; \tag{52}$$

et, pour que les valeurs de a, b correspondent à un axe optique, il faudra qu'elles rendent égales entre elles les deux valeurs de Ω^2 fournies par l'équation (52), ou, ce qui revient au même, il faudra que l'on ait

$$\Omega'''^2 = \Omega''^2 a^2 + \Omega'^2 b^2. \tag{53}$$

Enfin, si l'on nomme Λ l'angle formé par l'axe optique dont il s'agit, avec l'axe des x, l'équation (53) deviendra

$$\left\{\begin{aligned} \Omega''^2 \cos^2\Lambda + \Omega'^2 \sin^2\Lambda &= \Omega'''^2 \\ &= \Omega'''^2(\cos^2\Lambda + \sin^2\Lambda) \end{aligned}\right. \tag{54}$$

et l'on en tirera

$$\frac{\sin^2\Lambda}{\cos^2\Lambda} = \operatorname{tang}^2\Lambda = \frac{\Omega''^2 - \Omega'''^2}{\Omega'''^2 - \Omega'^2}; \tag{55}$$

par conséquent

$$\operatorname{tang}\Lambda = \pm\sqrt{\frac{\Omega''^2 - \Omega'''^2}{\Omega'''^2 - \Omega'^2}}. \tag{56}$$

Les deux valeurs de $\tang \Lambda$ déterminées par l'équation (56) correspondent évidemment à deux axes optiques, qui seront situés l'un et l'autre dans le plan des x, y, en vertu de la formule (50), et formeront entre eux des angles divisés en parties égales, soit par l'axe des x, soit par l'axe des y. D'autre part, comme en vertu de la formule (55) le rapport

$$\frac{\Omega'^2 - \Omega'''^2}{\Omega'''^2 - \Omega''^2} \tag{57}$$

devra être positif, les deux axes optiques ne pourront être compris, ainsi qu'on l'a supposé, dans le plan des x, y qu'autant que la valeur de Ω'''^2 sera moyenne entre les valeurs de Ω'^2, Ω''^2, et, par suite, la valeur de Ω''' entre celles de Ω', Ω''. Donc, parmi les plans coordonnés, le seul qui pourra renfermer deux axes optiques sera le plan parallèle aux deux systèmes d'ondes planes qui auront pour vitesses de propagation la plus petite et la plus grande des trois quantités

$$\Omega', \quad \Omega'', \quad \Omega'''.$$

Supposons, maintenant, que les trois cosinus a, b, c correspondent non plus à un axe optique, mais à une autre droite qui forme avec l'axe des x l'angle λ. Si cette droite est comprise dans le plan des x, y, on pourra prendre

$$a = \cos\lambda, \qquad b = \sin\lambda, \qquad c = 0, \tag{58}$$

et les vitesses de propagation des ondes perpendiculaires à cette même droite auront pour carrés les deux valeurs de Ω^2 fournies par l'équation (52). D'ailleurs, on tirera, de cette équation jointe aux formules (54) et (58),

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega^2 = \Omega'''^2 = \Omega''^2 \cos^2\Lambda + \Omega'^2 \sin^2\Lambda, \\ &\Omega^2 = \Omega''^2 \cos^2\lambda + \Omega'^2 \sin^2\lambda; \end{aligned}\right. \tag{59}$$

et la droite située dans le plan des x, y, de manière à former avec l'axe des x l'angle λ, formera évidemment avec les axes optiques deux

angles μ, ν, qui pourront être censés déterminés par les formules

$$\mu = \lambda - \Lambda, \qquad \nu = \lambda + \Lambda. \tag{60}$$

Cela posé, on pourra prendre

$$\lambda = \frac{\mu + \nu}{2}, \qquad \Lambda = \frac{\nu - \mu}{2}, \tag{61}$$

et les équations (59) deviendront

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega^2 = \Omega''^2 \cos^2\frac{\nu - \mu}{2} + \Omega'^2 \sin^2\frac{\nu - \mu}{2}, \\ &\Omega^2 = \Omega''^2 \cos^2\frac{\nu + \mu}{2} + \Omega'^2 \sin^2\frac{\nu + \mu}{2}; \end{aligned}\right. \tag{62}$$

Au reste, il est aisé, comme on va le voir, d'étendre les formules (62) au cas même où la droite perpendiculaire au plan d'une onde et correspondant aux trois cosinus a, b, c, ne serait pas comprise dans le plan des x, y. En effet, soient, dans tous les cas possibles,

$$\mu \quad \text{et} \quad \nu$$

les angles formés par cette droite avec les axes optiques. Les cosinus des angles que formeront, avec les demi-axes des coordonnées positives, d'une part la droite en question, d'autre part le premier et le second des axes optiques, seront respectivement

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ \cos\Lambda, & \sin\Lambda, & 0, \\ \cos\Lambda, & -\sin\Lambda, & 0; \end{matrix}$$

par conséquent, on pourra prendre

$$\cos\mu = a\cos\Lambda + b\sin\Lambda, \qquad \cos\nu = a\cos\Lambda - b\sin\Lambda, \tag{63}$$

et l'on en conclura

$$a\cos\Lambda = \frac{\cos\nu + \cos\mu}{2}, \qquad b\sin\Lambda = \frac{\cos\nu - \cos\mu}{2}. \tag{64}$$

D'ailleurs, de l'équation (51), jointe à la formule

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

on tirera

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega^4-[\Omega'^2+\Omega''^2+a^2(\Omega'''^2-\Omega'^2)+b^2(\Omega'''^2-\Omega''^2)]\Omega^2\\ &\quad+\Omega'^2\Omega''^2+a^2\Omega''^2(\Omega'''^2-\Omega'^2)+b^2\Omega'^2(\Omega'''^2-\Omega''^2)=0;\end{aligned}\right.$$

et, comme on tirera de la formule (54)

$$(66)\quad \Omega'''^2-\Omega'^2=(\Omega''^2-\Omega'^2)\cos^2\Lambda,\qquad \Omega'''^2-\Omega''^2=(\Omega'^2-\Omega''^2)\sin^2\Lambda;$$

par conséquent, eu égard aux formules (64),

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2(\Omega'''^2-\Omega'^2)=(\Omega''^2-\Omega'^2)\left(\frac{\cos\nu+\cos\mu}{2}\right)^2,\\ &b^2(\Omega'''^2-\Omega''^2)=(\Omega'^2-\Omega''^2)\left(\frac{\cos\nu-\cos\mu}{2}\right)^2,\end{aligned}\right.$$

l'équation (65) pourra être réduite à

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega^4-[\Omega'^2+\Omega''^2+(\Omega''^2-\Omega'^2)\cos\mu\cos\nu]\Omega^2\\ &\quad+\Omega'^2\Omega''^2+(\Omega''^2-\Omega'^2)\left[\Omega''^2\left(\frac{\cos\nu+\cos\mu}{2}\right)^2-\Omega'^2\left(\frac{\cos\mu-\cos\nu}{2}\right)^2\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Si, dans l'équation (68), on pose pour abréger

$$(69)\qquad \Omega''^2-\Omega'^2=\mathcal{D},\qquad \Omega''^2+\Omega'^2=\mathcal{E}$$

et, par suite,

$$\Omega'^2\Omega''^2=\frac{\mathcal{E}^2-\mathcal{D}^2}{4},$$

elle donnera

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega^4-(\mathcal{E}+\mathcal{D}\cos\mu\cos\nu)\Omega^2+\frac{\mathcal{E}^2+2\mathcal{E}\mathcal{D}\cos\mu\cos\nu}{4}\\ &\quad=\frac{1}{4}\mathcal{D}^2(1-\cos^2\mu-\cos^2\nu),\end{aligned}\right.$$

puis, en ajoutant aux deux membres de cette dernière formule le produit

$$\frac{\mathcal{D}^2}{4}\cos^2\mu\cos^2\nu,$$

on trouvera

$$(71)\qquad \left(\Omega^2-\frac{\mathcal{E}+\mathcal{D}\cos\mu\cos\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mathcal{D}\sin\mu\sin\nu}{2}\right)^2$$

et, par suite,

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega^2&=\frac{\mathcal{E}+\mathcal{D}(\cos\mu\cos\nu\mp\sin\mu\sin\nu)}{2}\\ &=\frac{\Omega'^2+\Omega''^2}{2}+\frac{\Omega''^2-\Omega'^2}{2}\cos(\nu\pm\mu).\end{aligned}\right.$$

Or, comme on a généralement

$$\cos(\nu\pm\mu)=\cos^2\frac{\nu\pm\mu}{2}-\sin^2\frac{\nu\pm\mu}{2},$$

il est clair que les deux valeurs de Ω^2, fournies par l'équation (72), seront respectivement

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega^2=\Omega''^2\cos^2\frac{\nu-\mu}{2}+\Omega'^2\sin^2\frac{\nu-\mu}{2},\\ &\Omega^2=\Omega''^2\cos^2\frac{\nu+\mu}{2}+\Omega'^2\sin^2\frac{\nu+\mu}{2}.\end{aligned}\right.$$

Donc, les carrés des vitesses de propagation, dans un cristal à deux axes optiques, sont, dans tous les cas possibles, exprimés par les valeurs de Ω^2 que présentent les équations (62).

Les conclusions auxquelles nous sommes parvenus dans ce paragraphe s'accordent avec les formules que Fresnel a données et, par conséquent, avec celles auxquelles M. Biot avait été conduit le premier par ses observations. Car on peut aisément passer des unes aux autres, ainsi que M. Fresnel l'a remarqué lui-même dans son Mémoire sur la double réfraction.

§ III. — *Surface des ondes.*

Comme on l'a déjà remarqué, les valeurs de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

fournies par les équations (1) du paragraphe Ier ne varient pas, lorsqu'on y fait croître simultanément t de Δt et z de $\Omega\Delta t$, la valeur de Ω étant déterminée par l'équation

$$k\Omega = s. \tag{1}$$

On conclut pareillement de ces équations que les valeurs de ξ, η, ζ correspondant à

$$r = 0 \tag{2}$$

et $t = 0$, savoir

$$\xi = \mathrm{A}\cos\varpi,\qquad \eta = \mathrm{B}\cos\varpi,\qquad \zeta = \mathrm{C}\cos\varpi, \tag{3}$$

ne diffèrent pas de celles qu'on obtient, au bout du temps t, en posant

$$r = \Omega t, \tag{4}$$

la quantité

$$\Omega = \frac{s}{k} \tag{5}$$

désignant la vitesse de propagation d'une onde plane. Donc, l'onde, dont le plan se trouve, à l'origine du mouvement, c'est-à-dire pour $t = 0$, représenté par la formule (2) ou

$$ax + by + cz = 0, \tag{6}$$

se transporte dans l'espace, de manière à coïncider au bout du temps t avec le plan représenté par la formule (4) ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$ax + by + cz = \Omega t. \tag{7}$$

Dans cette dernière formule, les coefficients a, b, c, c'est-à-dire les cosinus des angles formés par la perpendiculaire au plan d'une onde avec les deux axes des coordonnées positives, sont liés entre eux par l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{8}$$

D'ailleurs, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe II, la vitesse de propagation Ω, déterminée par un calcul approximatif en fonction des trois cosinus a, b, c, sera, pour chacun des rayons observés dans un milieu doublement réfringent, l'une des deux valeurs positives de Ω propres à vérifier la formule

$$\frac{a^2}{\Omega^2 - \Omega'^2} + \frac{b^2}{\Omega^2 - \Omega''^2} + \frac{c^2}{\Omega^2 - \Omega'''^2} = 0, \tag{9}$$

Ω', Ω'', Ω''' désignant les vitesses de propagation respectives d'ondes renfermées dans des plans parallèles à deux axes coordonnés, dont l'un soit l'axe des x ou des y ou des z.

Si l'on fait varier les trois cosinus a, b, c, la vitesse Ω, déterminée par la formule (9), variera elle-même, ainsi que la direction du plan représenté par l'équation (2), et ce plan changera de position, de manière à rester tangent à une certaine surface que l'on nomme la *surface des ondes*. Pour obtenir l'équation de cette surface, il faudra, en considérant Ω comme une fonction de a, b, c déterminée par la formule (9) et c lui-même comme une fonction de a, b déterminée par la formule (8), éliminer les cosinus a, b entre la formule (8) et ses deux dérivées prises successivement par rapport à chacun de ces cosinus. Or, de la formule (7), différentiée par rapport au cosinus a, on tirera, en regardant Ω comme fonction de a, b, c et c comme fonction de a,

$$x - t\frac{\partial\Omega}{\partial a} + \left(z - t\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)\frac{\partial c}{\partial a} = 0,$$

puis, en ayant égard à la formule (8) de laquelle on tire $\frac{\partial c}{\partial a} = -\frac{a}{c}$, on trouvera

$$x - t\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{a}{c}\left(z - t\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right).$$

Pareillement, on tirera de la formule (7), différentiée par rapport au cosinus b,

$$y - t\frac{\partial\Omega}{\partial b} = \frac{b}{c}\left(z - t\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right).$$

Donc, en définitive, les deux dérivées de l'équation (7), prises successivement par rapport à chacun des cosinus a et b, se trouveront comprises dans la seule formule

$$(10)\qquad \frac{x - t\dfrac{\partial\Omega}{\partial a}}{a} = \frac{y - t\dfrac{\partial\Omega}{\partial b}}{b} = \frac{z - t\dfrac{\partial\Omega}{\partial c}}{c},$$

à laquelle on parviendrait immédiatement en différentiant par rapport à

$$a, \quad b, \quad c$$

les équations (7) et (8), puis éliminant entre les équations différentiées

$$a\,da + b\,db + c\,dc = 0,$$
$$\left(x - t\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)da + \left(y - t\frac{\partial\Omega}{\partial b}\right)db + \left(z - t\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)dc = 0,$$

l'une des trois différentielles da, db, dc et égalant à zéro les coefficients des deux autres différentielles dans l'équation résultante. Ainsi, pour obtenir l'équation de la surface des ondes, il suffira, en regardant c comme fonction de a et de b, d'éliminer a et b entre les formules (7) et (10); ou bien encore il suffira d'éliminer entre les formules (7), (8) et (10) les trois cosinus

$$a, \quad b, \quad c.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$(11)\qquad \Theta = \frac{a^2}{(\Omega^2 - \Omega'^2)^2} + \frac{b^2}{(\Omega^2 - \Omega''^2)^2} + \frac{c^2}{(\Omega^2 - \Omega'''^2)^2}.$$

Les valeurs de $\frac{\partial\Omega}{\partial a}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial b}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial c}$, tirées de l'équation (9), seront celles que donneront les formules

$$\Theta\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{a}{\Omega^2 - \Omega'^2}, \qquad \Theta\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial b} = \frac{b}{\Omega^2 - \Omega''^2}, \qquad \Theta\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial c} = \frac{c}{\Omega^2 - \Omega'''^2}.$$

Donc, la formule (10) pourra encore s'écrire comme il suit

$$(12)\qquad \frac{x - \dfrac{t}{\Theta\Omega}\,\dfrac{a}{\Omega^2 - \Omega'^2}}{a} = \frac{y - \dfrac{t}{\Theta\Omega}\,\dfrac{b}{\Omega^2 - \Omega''^2}}{b} = \frac{z - \dfrac{t}{\Theta\Omega}\,\dfrac{c}{\Omega^2 - \Omega'''^2}}{c}.$$

Or, les trois fractions que renferme la formule (12), étant égales entre elles, seront encore équivalentes à la nouvelle fraction qu'on obtiendra en multipliant d'une part les trois numérateurs, d'autre part les trois dénominateurs par trois facteurs arbitrairement choisis. Si ces trois facteurs sont respectivement

$$(13)\qquad \frac{a}{\Omega^2 - \Omega'^2}, \qquad \frac{b}{\Omega^2 - \Omega''^2}, \qquad \frac{c}{\Omega^2 - \Omega'''^2},$$

le nouveau dénominateur étant nul, en vertu de l'équation (9), le numérateur devra l'être pareillement; et l'on aura en conséquence, eu égard à la formule (11),

$$(14)\qquad \frac{ax}{\Omega^2 - \Omega'^2} + \frac{by}{\Omega^2 - \Omega''^2} + \frac{cz}{\Omega^2 - \Omega'''^2} = \frac{t}{\Omega}.$$

Si, au lieu des facteurs (13), on emploie les trois cosinus

$$a, \quad b, \quad c,$$

ou bien encore les trois coordonnées

$$x, \quad y, \quad z,$$

les deux nouvelles fractions obtenues se réduiront, en vertu des formules (7), (8), (9) et (14), la première à

$$\Omega t,$$

la seconde à

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{t^2}{\Theta\Omega^2}}{\Omega t}.$$

D'ailleurs, ces deux nouvelles fractions devant être égales entre elles et à chacune de celles que renferme la formule (12), on en conclura d'abord

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{t^2}{\Theta\Omega^2} = \Omega^2 t^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(15)\qquad \frac{t^2}{\Theta\Omega^2} = x^2 + y^2 + z^2 - \Omega^2 t^2,$$

puis

$$(16)\qquad \frac{x}{a}-\frac{t}{\Theta\Omega}\,\frac{1}{\Omega^2-\Omega'^2}=\frac{y}{b}-\frac{t}{\Theta\Omega}\,\frac{1}{\Omega^2-\Omega''^2}=\frac{z}{c}-\frac{t}{\Theta\Omega}\,\frac{1}{\Omega^2-\Omega'''^2}=\Omega t.$$

On trouvera, par suite, eu égard à la formule (15),

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\frac{\Omega}{t}\left(t^2+\frac{t^2}{\Theta\Omega^2}\,\frac{1}{\Omega^2-\Omega'^2}\right)\\&=\frac{\Omega}{t}\left(t^2+\frac{x^2+y^2+z^2-\Omega^2t^2}{\Omega^2-\Omega'^2}\right)=\frac{\Omega}{t}\,\frac{x^2+y^2+z^2-\Omega'^2t^2}{\Omega^2-\Omega'^2},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

puis on en conclura

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{a}{\Omega^2-\Omega'^2}&=\frac{t}{\Omega}\,\frac{x}{x^2+y^2+z^2-\Omega'^2t^2},\\\frac{b}{\Omega^2-\Omega''^2}&=\frac{t}{\Omega}\,\frac{y}{x^2+y^2+z^2-\Omega''^2t^2},\\\frac{c}{\Omega^2-\Omega'''^2}&=\frac{t}{\Omega}\,\frac{z}{x^2+y^2+z^2-\Omega'''^2t^2}.\end{aligned}\right.$$

En vertu de ces dernières équations, la formule (14) donnera

$$(18)\qquad \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-\Omega'^2}t^2+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-\Omega''^2}t^2+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-\Omega'''^2}t^2=1.$$

L'équation (18) est précisément celle qui représente la surface des ondes. Lorsqu'on y fait disparaître les dénominateurs, le terme

$$(x^2+y^2+z^2)^3,$$

qui est du sixième degré, se trouve écrit dans les deux membres et, en l'effaçant, on obtient l'équation du quatrième degré, donnée par Fresnel, savoir

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)(\Omega'^2x^2+\Omega''^2y^2+\Omega'''^2z^2)\\&\quad-[\Omega''^2\Omega'''^2(y^2+z^2)+\Omega'''^2\Omega'^2(z^2+x^2)+\Omega'^2\Omega''^2(x^2+y^2)]t^2\\&\qquad\qquad+\Omega'^2\Omega''^2\Omega'''^2t^4=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on coupe la surface des ondes par l'un des plans coordonnés, par exemple par le plan des x, y, on aura

$$z=0,$$

et, par suite, on vérifiera l'équation (18) ou (19), soit en prenant

$$(20)\qquad x^2+y^2=\Omega'''t^2,$$

afin que le troisième des termes renfermés dans le premier membre de la formule (18) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, soit en posant

$$\frac{x^2}{x^2+y^2-\Omega'^2t^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2-\Omega''^2t^2}=1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(21)\qquad \frac{x^2}{\Omega''^2}+\frac{y^2}{\Omega'^2}=t^2.$$

Donc, la surface des ondes, coupée par le plan des x, y, donnera pour sections un cercle dont le rayon sera

$$\Omega'''t$$

et une ellipse dont les demi-axes, respectivement parallèles aux axes des x et des y, seront

$$\Omega''t \quad \text{et} \quad \Omega't.$$

Donc, les sections faites dans la surface par les trois plans coordonnés, se réduiront, dans chaque plan, à un cercle et à une ellipse, les rayons des trois cercles étant

$$\Omega't,\ \ \Omega''t,\ \ \Omega'''t,$$

et chaque ellipse ayant pour demi-axes les rayons des cercles non situés dans son plan.

On a vu avec quelle facilité l'équation de la surface des ondes se déduit de la méthode exposée dans ce paragraphe. J'ignore si cette méthode diffère ou non de celle que M. d'Ettingshausen m'a dit avoir substituée avec avantage à l'analyse dont je m'étais servi pour le même objet dans mes *Exercices de Mathématiques*.

MÉMOIRE

SUR

LA RECTIFICATION DES COURBES

ET

LA QUADRATURE DES SURFACES COURBES (¹).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XXII, p. 3; 1850.

Les formules que j'ai récemment obtenues pour la résolution directe des équations de tous les degrés et qui sont mentionnées dans la *Gazette piémontaise* du 22 septembre, fournissent les moyens, non seulement de développer dans tous les cas en séries convergentes les racines réelles ou imaginaires d'une équation donnée, mais encore de fixer les limites des erreurs commises quand on arrête les séries convergentes après un certain nombre de termes. Or, la fixation de ces limites est fondée en partie sur quelques théorèmes relatifs à la rectification des courbes et dont la connaissance peut être fort utile dans un grand nombre de questions diverses, ainsi que dans la Géométrie pratique. Je vais énoncer, en peu de mots, ceux qui me paraissent les plus dignes d'être remarqués.

THÉORÈME I. — *p désignant l'angle polaire que forme une droite OO', tracée à volonté dans un plan $OO'O''$, avec un axe fixe, S le système d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes, fermées ou non fermées, A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur la droite OO' et π le rapport de la*

(¹) Présenté le 22 octobre 1832.

circonférence au diamètre, on aura

$$S = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp. \tag{1}$$

Démonstration. — On démontre ce théorème en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une longueur rectiligne s et par la projection a de cette longueur sur la droite OO′, puis en décomposant, dans le cas contraire, les longueurs S, A en éléments infiniment petits et correspondants.

Corollaire. — Lorsque S représente une longueur rectiligne, la quantité A se réduit à la projection absolue de cette longueur sur la droite OO′. Lorsque S représente une courbe fermée et convexe, en sorte qu'elle ne puisse être coupée par une droite en plus de deux points, A se réduit au double de la projection de cette courbe sur OO′.

Exemples. — Si S représente la circonférence d'un cercle décrit avec le rayon R, A sera évidemment le double du diamètre. On aura donc

$$A = 4R,$$

et la formule (1) donnera

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} R\,dp = 2\pi R.$$

Si S représente le périmètre de l'ellipse dont les demi-axes a, b sont le premier parallèle, le second perpendiculaire à l'axe fixe, on aura

$$A = 4\sqrt{a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p},$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p}\,dp;$$

Etc.

Théorème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent : soient menées, par un point du plan OO′O″, n droites qui comprennent entre elles des angles égaux et nommons M la moyenne arithmé-*

tique entre les n valeurs de A correspondant à ces n droites. On aura sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$S = \frac{1}{2}\pi M; \tag{2}$$

et l'erreur que l'on commettra en prenant le produit $\frac{1}{2}\pi M$ pour valeur de S sera inférieure au rapport qui existe entre ce produit et le carré de n, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2}\frac{\pi M}{n^2}, \tag{3}$$

pourvu que le nombre entier n surpasse 2.

Démonstration. — Ce théorème se déduirait sans peine du précédent et peut encore se démontrer de la manière suivante :

Soient

s une longueur rectiligne ;

a sa projection absolue sur la droite OO′ ;

μ la moyenne arithmétique entre les n valeurs de a qui correspondent aux n droites mentionnées dans le théorème II ;

$2n\mu$ sera la somme des projections absolues de s sur les $2n$ côtés d'un polygone régulier, parallèles deux à deux à ces mêmes droites, ou, ce qui revient au même, $n\mu$ sera la projection sur un de ces côtés d'un polygone régulier semblable au premier, mais qui aurait pour côté la longueur s.

Or, si l'on nomme R le rayon du cercle circonscrit à ce dernier polygone, son apothème sera

$$R\cos\frac{\pi}{2n}$$

et son côté

$$s = 2R\sin\frac{\pi}{2n},$$

tandis que sa projection sur une droite quelconque sera comprise entre le diamètre du cercle circonscrit et le diamètre du cercle inscrit.

c'est-à-dire entre les limites

$$2R = \frac{s}{\sin\frac{\pi}{2n}}, \qquad 2R\cos\frac{\pi}{2n} = \frac{s}{\tang\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc $n\mu$ sera compris entre ces limites et s entre les suivantes

$$n\mu\sin\frac{\pi}{2n}, \quad n\mu\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{2n}, \tag{4}$$

qui, pour de grandes valeurs de n, se réduisent sensiblement à

$$\frac{1}{2}\pi\mu. \tag{5}$$

Ajoutons que, si l'on prend l'expression (5) pour valeur approchée de s, l'erreur commise sera inférieure au produit de cette expression par la plus grande des différences

$$1 - \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}, \quad \frac{\mathrm{tang}\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} - 1,$$

et que ces deux différences, pour $n \overline{\gtrless} 3$, deviennent l'une et l'autre inférieures à $\frac{1}{n^2}$. Effectivement, si l'on nomme θ un nombre compris entre les limites 0, 1, on aura, en vertu de formules connues,

$$\sin x = x - x^3\frac{\cos\theta x}{6}, \qquad -\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = \frac{\cos\theta x}{6},$$

puis on conclura, en posant $x = \frac{\pi}{2n}$,

$$n^2\left(1 - \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right) = \frac{\pi^2}{24}\cos\theta x < \frac{\pi^2}{24} < 1.$$

D'autre part, le développement de $\mathrm{tang}\,x$ suivant les puissances ascendantes de x ne renfermant que des termes positifs pour $x > 0$

et subsistant pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{\pi}{2}$, la fonction

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{tang}\,x}{x} - 1\right)$$

croîtra avec x depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{\pi}{2}$ et, par suite, le produit

$$n^2\left(\frac{\mathrm{tang}\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} - 1\right)$$

décroîtra pour des valeurs croissantes de n. Or, pour $n = 3$, ce produit devient

$$\frac{9}{\pi}(2\sqrt{3} - \pi) < 3(2\sqrt{3} - \pi) = \sqrt{108} - 3\pi < 1.$$

Le théorème II étant ainsi démontré pour le cas particulier où la quantité S se réduit à une longueur rectiligne s, il suffira, pour le démontrer dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire I. — La valeur approchée de S étant calculée à l'aide de la formule (2), l'erreur commise ne dépassera pas la neuvième partie de cette valeur si l'on prend $n = 3$, la vingt-cinquième partie si l'on prend $n = 5$ et la centième partie si l'on prend $n = 10$. Dans le premier et le second cas, M sera la moyenne arithmétique entre les sommes des projections des éléments de S sur trois ou cinq droites respectivement parallèles aux côtés d'un hexagone ou d'un décagone régulier.

Exemple. — Si la longueur S est égale et parallèle à l'un des côtés d'un hexagone régulier, on trouvera $M = \frac{2}{3}S$ et, par suite,

$$\frac{\pi}{2}M = \frac{\pi}{3}S = 1{,}047S.$$

Or, la différence entre le nombre 1,047... et l'unité est effectivement inférieure à $\frac{1}{9}$.

Corollaire II. — Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

$$M = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp}{\int_{-\pi}^{\pi} dp} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp, \tag{6}$$

et la formule (2) se réduira, comme on devait s'y attendre, à la formule (1).

On déduit immédiatement du théorème II un troisième théorème, qu'on peut énoncer comme il suit :

Théorème III. — *Si, dans l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon R, on trace une ou plusieurs courbes fermées et si le système de ces courbes ne peut être traversé par une même droite en plus de $2m$ points, la somme des contours ou périmètres de ces courbes ne dépassera pas le produit de la circonférence $2\pi R$ par le nombre m.*

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, on aura évidemment, quel que soit p,

$$A < 2m.2R,$$

et, par suite, la formule (2) donnera

$$S < m.2\pi R. \tag{7}$$

Corollaire. — Si S se réduit au périmètre d'une courbe convexe, on aura, $m = 1$,

$$S < 2\pi R. \tag{8}$$

Des théorèmes, analogues à ceux qui précèdent, peuvent être appliqués à la quadrature des surfaces courbes et démontrés de la même manière. Nous nous contenterons d'énoncer ici l'un d'entre eux, duquel tous les autres se déduisent facilement.

Théorème IV. — *p désignant l'angle formé par une droite quelconque OO′ avec un axe fixe OP, q l'angle formé par le plan des droites OP, OO′ avec un plan fixe qui renferme la première, S le système d'une ou de plusieurs surfaces planes ou courbes et A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur un plan* HIK *perpendiculaire à la droite* OO′, *on aura*

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A \sin p\,dp\,dq. \tag{9}$$

Corollaire. — Lorsque S représente une surface plane, la quantité A se réduit à la projection absolue de cette surface sur le plan HIK. Lorsque S représente une surface fermée et convexe, en sorte qu'elle ne puisse être coupée par une droite en plus de deux points, A se réduit au double de la projection de cette surface sur le plan HIK.

Exemple. — Si S représente la surface de l'ellipsoïde qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10}$$

A sera la section transversale du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde et dont les arêtes sont parallèles à la droite OO′. Soient R le rayon de l'ellipsoïde parallèle à la droite OO′ et α, 6, γ les angles formés par cette droite avec les deux axes des coordonnées positives. On aura

$$\cos\alpha = \cos p, \qquad \cos 6 = \sin p \cos q, \qquad \cos\gamma = \sin p \sin q, \tag{11}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 6}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}, \tag{12}$$

et l'équation du cylindre ci-dessus mentionné deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos 6}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2}\right)^2 = 1. \tag{13}$$

Or, la section faite dans le cylindre par le plan des x, y étant l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos 6}{b^2}\right)^2 = 1,$$

la surface de cette section sera

$$\frac{\pi abc}{R\cos\gamma},$$

et, par conséquent, l'aire de la section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes sera

$$\frac{\pi abc}{R}.$$

On aura donc

$$A = \frac{2\pi abc}{R}, \qquad S = abc \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin p \, dp \, dq}{R}. \tag{14}$$

Dans le cas particulier où l'ellipsoïde se réduit à une sphère, on a

$$R = a = b = c$$

et, par suite, comme on devait s'y attendre,

$$S = R^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin p \, dp \, dq = 4\pi R^2.$$

Ajoutons que si, dans la seconde des formules (14), on substitue la valeur de R tirée des formules (11) et (12), on pourra effectuer dans tous les cas l'intégration relative à p et réduire ainsi la valeur de S à une intégrale simple. L'intégration s'effectuera complètement, si l'ellipsoïde est de révolution.

Post-scriptum. — On pourrait donner du théorème IV une démonstration analogue à celle du théorème I, en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une surface plane s et par la projection a de cette surface sur le plan HIK; puis, en décomposant, dans le cas contraire, les surfaces S, A en éléments infiniment petits et correspondants. On peut aussi déduire le théorème IV d'une proposition analogue au théorème II et dont voici l'énoncé :

Théorème V. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème IV, construisons un polyèdre convexe, dont les faces équivalentes entre elles soient comprises entre deux sphères concentriques décrites avec les rayons*

$$r, \quad r(1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité positive et nommons M la moyenne arithmétique

entre les n valeurs de A, correspondant aux plans de ces mêmes faces. On aura sensiblement, pour de petites valeurs de ε,

$$S = 2M, \tag{15}$$

et l'erreur que l'on commettra en prenant $2M$ pour valeur approchée de S, sera inférieure au produit de $2M$ par la différence

$$(1+\varepsilon)^2 - 1. \tag{16}$$

Démonstration. — Soient

s une surface plane renfermée dans un plan quelconque;
a la projection absolue de s sur le plan d'une face du polyèdre;
μ la moyenne arithmétique entre les n valeurs de a qui correspondent aux plans des différentes faces.

Si la surface s est équivalente à l'aire ς de chaque face du polyèdre, a représentera non seulement la projection absolue de s sur le plan d'une face, mais aussi la projection de cette face sur le plan de s et, par suite, $n\mu$ sera le double de la projection absolue du polyèdre sur le plan de s. Cela posé, soient

$$\mathrm{B}, \quad \mathrm{C}$$

la plus petite et la plus grande des valeurs que puisse acquérir la projection du polyèdre sur un plan quelconque. On aura, dans l'hypothèse admise,

$$n\mu > 2\mathrm{B}, \qquad n\mu < 2\mathrm{C},$$

et, si s cesse d'être équivalent à ς, $n\mu$ se trouvera compris entre les limites

$$\frac{2s\mathrm{B}}{\varsigma}, \quad \frac{2s\mathrm{C}}{\varsigma}. \tag{17}$$

Donc s sera compris entre les limites

$$\mu\frac{n\varsigma}{2\mathrm{B}}, \quad \mu\frac{n\varsigma}{2\mathrm{C}}. \tag{18}$$

D'ailleurs, le polyèdre ci-dessus mentionné étant convexe et renfermé entre les sphères décrites avec les rayons

$$r, \quad r(1+\varepsilon),$$

la surface $n\varsigma$ du polyèdre sera comprise entre les limites

$$4\pi r^2, \quad 4\pi r^2(1+\varepsilon)^2,$$

et ses projections B, C seront renfermées entre les surfaces des grands cercles

$$\pi r^2, \quad \pi r^2(1+\varepsilon)^2.$$

Donc, les expressions (18) seront comprises entre les limites

$$\mu\frac{4\pi r^2}{2\pi r^2(1+\varepsilon)^2}, \quad \mu\frac{4\pi r^2(1+\varepsilon)^2}{2\pi r^2},$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

$$\frac{2\mu}{(1+\varepsilon)^2}, \quad 2\mu(1+\varepsilon)^2,$$

qui, l'une et l'autre, diffèrent très peu de 2μ, quand ε est très petit; et, si l'on prend 2μ pour valeur approchée de s, l'erreur commise ne dépassera pas le produit de 2μ par la plus grande des différences

$$1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}, \quad (1+\varepsilon)^2-1,$$

c'est-à-dire par l'expression (16). Le théorème V étant ainsi démontré pour le cas où la quantité S se réduit à une surface plane s, il suffira, pour le démontrer dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire I. — Si le polyèdre mentionné dans le théorème V se réduit à l'un des cinq polyèdres réguliers et si l'on nomme

$$1-\varepsilon', \quad 1+\varepsilon'',$$

les quotients qu'on obtient en divisant la surface de ce polyèdre régulier par le quadruple de la projection maximum ou minimum de

ce polyèdre; l'erreur que l'on commettra en prenant $2M$ pour valeur de S sera inférieure au produit de $2M$ par le plus grand des nombres ε', ε''. Au reste, cette proposition subsisterait encore si le polyèdre cessait d'être régulier.

Corollaire II. — Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

$$(20) \qquad M=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} A \sin p\, dp\, dq}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \sin p\, dp\, dq}=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} A \sin p\, dp\, dq,$$

attendu que

$$\sin p\, dp\, dq$$

représente l'élément différentiel de la surface de la sphère décrite avec le rayon 1. Or, des équations (15) et (20) on déduit immédiatement la formule (9).

Corollaire III. — Si S représente un système de surfaces qui soit renfermé dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R et qui ne puisse être traversé par une droite en plus de $2m$ points, on aura évidemment

$$A < 2m\pi R^2$$

et, par suite,

$$S < 4m\pi R^2.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si, dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R, on trace un système de surfaces qui ne puisse être coupé par une droite en plus de $2m$ points, la somme des aires de ces surfaces ne dépassera pas le produit de la surface de la sphère par le nombre $2m$.*

MÉMOIRE

SUR LES

CONDITIONS RELATIVES AUX LIMITES DES CORPS

ET EN PARTICULIER SUR CELLES QUI CONDUISENT

AUX LOIS DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XXII, p. 17; 1850.

Comme j'en ai fait ailleurs la remarque, la solution des questions les plus importantes de la Physique mathématique dépend surtout des équations relatives aux limites des corps considérés comme des systèmes de molécules. La recherche de ces conditions est indispensable, par exemple, quand on se propose d'appliquer l'analyse aux phénomènes que présentent les vibrations des plaques élastiques, la transmission du son d'un milieu dans un autre ou bien encore la réflexion et la réfraction de la lumière. D'ailleurs, dans ces divers phénomènes, les lois recherchées par les physiciens sont ordinairement celles qui se rapportent à des mouvements infiniment petits, représentés par des équations linéaires aux différences partielles ou même aux différences mêlées et à coefficients constants. Enfin, tout mouvement vibratoire de cette nature, propagé dans un milieu homogène, ou se réduit à l'un de ceux que j'ai nommés *mouvements simples*, ou du moins peut être censé résulter de la superposition d'un nombre fini ou infini de mouvements simples. Donc, ce qu'il importe surtout d'étudier, ce sont les lois suivant lesquelles un mouvement simple se modifie en passant d'un milieu dans un autre.

[1] Présenté à l'Académie, le 24 juillet 1848.

Or, dans tout mouvement simple, les déplacements symboliques de chaque point matériel, c'est-à-dire les variables imaginaires, dont les parties réelles représentent les déplacements effectifs de ce point, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, sont les produits de certains coefficients relatifs à ces axes par une exponentielle généralement imaginaire, dont l'exposant est une fonction linéaire des coordonnées et du temps.

Cela posé, considérons deux milieux, séparés l'un de l'autre par une surface plane, que nous supposerons perpendiculaire à l'axe des x et que nous prendrons pour le plan des y, z, chaque milieu étant d'ailleurs homogène et pouvant contenir un ou plusieurs systèmes de points matériels. Parmi les mouvements simples qui pourront se propager, soit dans le premier, soit dans le second milieu, on devra surtout distinguer ceux qui ne différeront les uns des autres qu'en raison du coefficient par lequel l'abscisse x, c'est-à-dire la distance d'un point matériel à la surface de séparation des deux milieux, se trouvera multipliée dans l'exposant de l'exponentielle ci-dessus mentionnée. Ces mouvements, que nous avons nommés *correspondants*, ont entre eux, comme nous l'avons vu, des relations dignes de remarque. En effet, deux mouvements simples correspondants sont toujours deux mouvements isochrones, c'est-à-dire deux mouvements où les vibrations moléculaires s'effectuent dans le même temps. De plus, ils propagent des ondes planes dont les traces sur la surface de séparation sont parallèles à une même droite. Enfin, les longueurs d'ondulation dans ces deux mouvements sont proportionnelles aux sinus des angles formés par les plans des ondes avec la même surface. Or, une première loi de réflexion et de réfraction peut être facilement saisie d'après les considérations précédentes. Suivant cette première loi, que j'ai démontrée dans mes *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, si un mouvement simple, propagé dans le premier milieu, pénètre la surface de séparation et donne ainsi naissance à des mouvements réfléchis et réfractés, tous ces mouvements incidents, réfléchis, réfractés, seront des mouvements correspondants.

Dans l'application de cette première loi, il y a une remarque importante à faire. Lorsqu'un mouvement simple qui se propage sans s'affaiblir est du nombre de ceux que comporte un milieu donné, la propagation peut avoir lieu dans deux sens différents, opposés l'un à l'autre; mais, s'il s'agit d'un mouvement réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux, la propagation devra s'effectuer dans un sens tel que les ondes réfléchies ou réfractées s'éloignent de plus en plus de la surface réfléchissante. Cette loi, indiquée par l'expérience et que l'on pourrait, en quelque sorte, considérer comme évidente par elle-même, se trouve aussi indiquée par le calcul. Si un mouvement réfléchi ou réfracté, au lieu de se propager sans s'affaiblir, était du nombre de ceux qui s'éteignent en se propageant, les vibrations devraient, non pas croître, mais diminuer pour des valeurs croissantes de la distance à la surface. Cette dernière condition est nécessaire pour que les vibrations réfléchies ou réfractées deviennent très petites à de grandes distances et que le mouvement ne cesse pas d'être, suivant l'hypothèse admise, infiniment petit.

La loi générale que je viens de rappeler suffit pour déterminer les directions des ondes planes, liquides, sonores, lumineuses qui peuvent être réfléchies ou réfractées par la surface de séparation de deux milieux isotropes ou non isotropes. Elle détermine, en conséquence, les directions des rayons lumineux réfléchis ou réfractés, soit par les surfaces extérieures des corps transparents ou opaques, soit par la surface intérieure d'un corps transparent.

On conclut de cette loi que, dans les milieux isotropes ou isophanes, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, et qu'alors aussi, pour une longueur d'ondulation donnée, le sinus de réfraction est au sinus d'incidence, suivant la règle trouvée par Descartes, dans un rapport constant. Enfin, la même loi fournit immédiatement les règles établies par Malus et par M. Biot pour la détermination des rayons réfléchis par la seconde surface des cristaux à un ou à deux axes optiques et montre comment ces règles doivent être modifiées dans le cas où les milieux donnés sont doués l'un et l'autre de la double réfraction.

Parlons maintenant des lois qui déterminent, non plus les directions des ondes planes réfléchies et réfractées, mais la direction et les amplitudes des vibrations moléculaires dans ces mêmes ondes, par conséquent, le mode de polarisation et l'intensité de la lumière réfléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque. La recherche de ces lois sera plus ou moins compliquée, suivant les données du problème; et, pour ce motif, il convient de traiter l'un après l'autre les deux cas bien distincts qui peuvent se présenter, savoir : le cas où chacun des milieux que l'on considère renferme un seul système de points matériels et le cas où plusieurs systèmes de points matériels se trouvent contenus dans chaque milieu.

Considérons d'abord le cas où deux milieux de nature différente, mais dont chacun renferme un seul système de points matériels, se trouvent séparés l'un de l'autre par le plan des y, z. Concevons, d'ailleurs, que de part et d'autre de ce plan on mène deux plans parallèles à des distances très petites, mais cependant supérieures au rayon de la sphère d'activité sensible de deux molécules; et construisons un cylindre droit dont les bases soient comprises dans ces mêmes plans. Si les dimensions de chaque base, en demeurant très petites en elles-mêmes, sont néanmoins très considérables par rapport à la hauteur du cylindre, les pressions totales supportées par les deux bases du cylindre seront sensiblement égales, et l'on pourra en dire autant des variations que ces pressions totales subiront dans un mouvement infiniment petit. Par suite, si chacun des milieux donnés est homogène et si des mouvements simples propagés dans ces milieux offrent des longueurs d'ondulations notablement supérieures au rayon de la sphère d'activité sensible de deux molécules, les pressions, non plus totales, mais partielles, supportées par les deux bases du cylindre en deux points correspondants, situés sur une droite perpendiculaire au plan des y, z, seront deux forces sensiblement égales, dirigées suivant des droites parallèles, mais en sens contraires et l'on pourra en dire autant des pressions que subira sur ses deux faces le plan des y, z, c'est-à-dire la surface de séparation des deux milieux, ces dernières pressions et leurs variations étant calculées comme si la constitution de chaque milieu n'éprouvait aucune modification dans le voisinage de cette surface. Le principe qui consiste à *égaler ainsi entre elles, mais sous la condition ci-dessus rappelée, les pressions intérieure et extérieure supportées par la surface de séparation de deux milieux*, se trouvait déjà exposé dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie en 1843. (*Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVI, p. 151) [1]. Ce principe fournit immédiatement trois conditions relatives à la surface de séparation des deux milieux que l'on considère. Ces trois conditions sont effectivement celles que l'on emploie dans la théorie des corps élastiques, où l'on suppose que chaque milieu renferme un seul système de points matériels. Elles deviendront insuffisantes, si chaque milieu renferme un ou plusieurs systèmes de points matériels, comme il arrive dans la théorie de la lumière ou dans des cas semblables dont nous allons maintenant nous occuper.

Supposons, pour fixer les idées, que les deux milieux séparés l'un de l'autre par le plan des y, z soient deux corps solides ou fluides dont chacun renferme deux systèmes de molécules, savoir : ses molécules propres et les molécules de l'éther ou du fluide lumineux. Supposons encore, pour simplifier les calculs, que l'on réduise chaque molécule à un point matériel. Les équations des mouvements infiniment petits propagés dans chaque corps renfermeront six inconnues, qui représenteront les déplacements infiniment petits des molécules de ce corps et des molécules de l'éther, mesurés parallèlement aux axes coordonnés. De plus, les pressions supportées en un point donné de chaque corps par un plan quelconque ou plutôt leurs composantes parallèles aux axes coordonnés, s'exprimeront en fonction de ces déplacements et de leurs dérivées partielles ; et, si l'on néglige dans le calcul les actions exercées ou subies par les molécules éthérées, le principe de l'égalité entre les pressions intérieure et extérieure supportées par le plan des y, z fournira, pour les points situés dans ce plan, entre les déplacements correspondants des molécules des deux

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VII, p. 246.

corps, des équations de condition qui conduiront à des résultats confirmés par l'expérience. Mais ces équations de condition, considérées isolément, ne sauraient en aucune manière fournir une idée des modifications qu'éprouveront, en vertu de la réflexion et de la réfraction, les directions et les amplitudes des vibrations lumineuses, par conséquent, une idée du mode de polarisation ou de l'intensité des rayons réfléchis ou réfractés : car les valeurs approchées des termes que l'on négligeait dans une première approximation ne pourront se déduire des équations mêmes dans lesquelles on les omettait d'abord. Mais, pour retrouver les conditions auxquelles devront satisfaire, sur la surface de séparation des deux corps, les trois déplacements d'une molécule d'éther, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, il suffira de considérer les molécules d'éther comprises dans les deux corps comme formant un système unique de molécules, et d'admettre que, dans le mouvement de ce système, les déplacements moléculaires, et leurs dérivées prises par rapport à l'abscisse x, ou du moins celles de ces dérivées que ne déterminent pas les équations différentielles des mouvements infiniment petits, varient par degrés insensibles avec cette même abscisse. Ce dernier principe, qu'on peut appeler le *principe de la continuité du mouvement* dans le fluide éthéré, étant joint non seulement au principe de l'*égalité des pressions intérieure et extérieure* supportées en un point quelconque par la surface de séparation des deux corps, et à la condition sous laquelle celui-ci était admis, mais encore à la loi qui détermine la direction et la vitesse de propagation des ondes planes réfléchies et réfractées, permettra effectivement d'établir les diverses formules qui feront connaître, après la réflexion et la réfraction du mouvement simple, la nature et les propriétés des divers mouvements réfléchis ou réfractés. Disons maintenant quelques mots de l'analyse à l'aide de laquelle on pourra construire ces mêmes formules.

Après avoir établi, pour l'un des corps donnés, les équations qui représentent les mouvements infiniment petits des molécules de ce corps et des molécules de l'éther, éliminons de ces équations toutes les inconnues, à l'exception d'une seule. On obtiendra ainsi l'équation caractéristique à laquelle devra satisfaire chacune des inconnues, et l'on pourra, dans cette équation caractéristique, remplacer les symboles de dérivation relatifs au temps t et aux coordonnées x, y, z par les quatre coefficients qui affectent ces quatre variables dans l'exponentielle imaginaire qui caractérise un mouvement simple. Alors l'équation caractéristique exprimera la relation qui, pour tout mouvement simple, propagé dans le corps dont il s'agit, subsiste entre ces quatre coefficients. Si le corps donné est isotrope, l'équation caractéristique renfermera seulement, avec le coefficient relatif au temps, la somme des carrés des coefficients relatifs aux coordonnées, ou, ce qui revient au même, le carré d'un nouveau coefficient. Elle pourra donc être considérée comme établissant une relation entre les deux coefficients qui caractérisent un mouvement simple isotrope. Si, d'ailleurs, le mouvement simple et isotrope est du nombre de ceux qui se propagent sans s'affaiblir, les deux coefficients en question seront réciproquement proportionnels à la durée des vibrations lumineuses et à l'épaisseur des ondes planes, ou, ce qui revient au même, à ce qu'on nomme la *longueur des ondulations*.

Observons, maintenant, que les mouvements simples propagés dans l'un ou l'autre corps et caractérisés comme on vient de le dire, seront de deux espèces. Parmi ces mouvements, les uns disparaîtraient avec les molécules des deux corps, les autres avec les molécules de l'éther. Or, pour obtenir, du moins avec une certaine approximation, d'une part, les lois des mouvements simples propagés dans les deux corps, d'autre part, les lois des mouvements simples propagés dans l'éther, il suffira évidemment de réduire ces mouvements, dans le premier cas, à des mouvements de première espèce, c'est-à-dire à des mouvements qui continueraient de subsister si l'éther venait à disparaître; dans le second cas, à des mouvements de seconde espèce, c'est-à-dire à des mouvements qui continueraient de subsister si les corps venaient à disparaître; et de tirer les conditions relatives à la surface de séparation des deux corps, dans le premier cas, du principe de l'égalité des

pressions intérieure et extérieure supportées par cette surface, dans le second cas, du principe de la continuité du mouvement dans l'éther. Ajoutons que, les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples étant une fois trouvées, avec les équations de condition relatives à ces mouvements et aux points situés sur la surface de séparation des deux milieux, on pourra, eu égard aux notations que nous avons adoptées, étendre facilement ces équations de condition au cas où l'on considérerait des mouvements infiniment petits quelconques. Pour y parvenir, il suffira ordinairement de remplacer, par des symboles de dérivation relatifs au temps et aux coordonnées, les coefficients par lesquels ces quatre variables se trouvent multipliées dans l'exponentielle imaginaire qui caractérise chaque mouvement simple.

L'expérience confirme l'exactitude des conclusions ci-dessus énoncées, et semble même démontrer que l'approximation à laquelle on arrive en opérant comme nous venons de le dire est très considérable. Car la plupart des lois remarquables découvertes par le calcul, et vérifiées par l'observation dans la Physique mathématique, peuvent s'établir de cette manière, ainsi que je l'expliquerai plus en détail dans une série de Mémoires qui suivront celui-ci.

Pour montrer une application de la méthode que je viens d'exposer à un exemple utile, concevons que l'on cherche les lois suivant lesquelles un rayon lumineux et simple est réfléchi et réfracté par la surface de séparation de deux corps isophanes dont les molécules sont réduites, avec celles de l'éther, à des points matériels. Alors, dans chaque mouvement simple, les vibrations moléculaires seront ou transversales, c'est-à-dire comprises dans les plans des ondes, ou non transversales ([1]). Alors aussi l'équation caractéristique établira une relation entre les carrés des coefficients k, s qui caractérisent un mouvement simple isotrope, et qui, dans le cas où le mouvement se propage sans s'affaiblir, sont réciproquement proportionnels, d'une part, à l'épaisseur des ondes planes, d'autre part, à la durée des vibrations

([1]) Pour plus d'exactitude, nous substituons ici les mots *non transversales* aux mots *longitudinales, c'est-à-dire perpendiculaires à ces plans*, qui se trouvaient dans le manuscrit.

moléculaires. Ajoutons que cette équation caractéristique du huitième degré, par rapport à s, se décomposera immédiatement en deux équations du quatrième degré, qui répondront la première, à des mouvements simples à vibrations transversales, la seconde, à des mouvements simples à vibrations non transversales. Remarquons, enfin, que chaque mouvement simple pourra se propager en deux sens opposés auxquels correspondront deux valeurs de s qui ne se différeront que par le signe. Cela posé, aux quatre valeurs de s^2 que fourniront les deux équations du quatrième degré, correspondront quatre mouvements simples, dont deux seulement subsisteront si les molécules des deux corps viennent à disparaître. D'ailleurs, ces deux derniers mouvements, qui offriront, l'un des vibrations transversales, l'autre des vibrations non transversales, seront précisément ceux dont il faudra tenir compte pour déduire du principe de la continuité des mouvements dans l'éther les équations de condition relatives à la surface de séparation des deux corps.

Lorsque, dans les équations de condition ainsi obtenues, on néglige les termes qui proviennent des actions exercées par les molécules des deux corps, ces équations reprennent, ainsi qu'on devait s'y attendre, la forme sous laquelle elles se sont présentées dans mes précédents Mémoires.

J'observerai, en finissant, que M. Laurent, auquel j'ai parlé de mes nouvelles recherches, m'a dit avoir de son côté obtenu, par des procédés que j'ignore, des équations de condition relatives aux surfaces des corps, et spécialement applicables à la théorie de la chaleur. Il m'a dit encore que sa méthode fournissait un nombre d'équations égal au nombre des miennes. J'ai dû faire ces observations, non seulement dans l'intérêt de M. Laurent, mais aussi dans l'intérêt de la Science, qui gagne toujours à ce que les questions délicates soient éclairées par des discussions approfondies; et il est à désirer que cet habile géomètre, dont plusieurs fois l'Académie a eu déjà l'occasion d'apprécier tout le mérite, fasse bientôt connaître les résultats des recherches nouvelles qu'il a entreprises sur les divers points de la Physique mathématique.

MÉMOIRE

SUR

LES RAYONS LUMINEUX SIMPLES

ET SUR

LES RAYONS ÉVANESCENTS (¹).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XXII, p. 29; 1850.

Étant donné un système de molécules supposées réduites à des points matériels, j'ai appelé *mouvement simple* du système, tout mouvement infiniment petit, dans lequel les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires, sont les parties réelles de trois variables imaginaires, respectivement égales aux produits de trois constantes imaginaires par une même exponentielle, dont l'exposant imaginaire est une fonction linéaire des coordonnées et du temps. J'ai, de plus, nommé *déplacements symboliques* les trois variables imaginaires, dont les déplacements effectifs sont les parties réelles. Enfin, j'ai observé que l'exponentielle variable à laquelle les déplacements symboliques sont proportionnels, est le produit d'un facteur réel par une exponentielle trigonométrique; et ce facteur réel, et l'argument de l'exponentielle trigonométrique, sont ce que j'ai appelé le *module* et l'*argument* du mouvement simple. Cela posé, il est facile de reconnaître que tout mouvement simple d'un système de molécules est un mouvement par ondes planes, les diverses molécules se mouvant dans des plans qui sont parallèles entre eux, sans être nécessairement parallèles aux plans des ondes. Un mouvement simple est *durable et persistant*, lorsque son module est indépendant du temps, et alors

(¹) Lu dans la séance publique du 8 janvier 1849.

chaque molécule décrit une ellipse qui peut se réduire à un cercle ou à une portion de droite. Un tel mouvement se propagera sans s'éteindre, et les ellipses décrites seront toutes parallèles les unes aux autres, si le module se réduit constamment à l'unité. Mais, si le module ne se réduit à l'unité que pour les points situés dans un certain plan, alors l'amplitude d'une vibration moléculaire, c'est-à-dire le grand axe de l'ellipse décrite par une molécule, décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance de la molécule au plan dont il s'agit croîtra en progression arithmétique.

Dans la théorie de la lumière, à un mouvement simple, durable et persistant du fluide éthéré, correspond ce qu'on nomme un *rayon lumineux simple*. La *direction* du rayon est celle dans laquelle le mouvement se transmet à travers une très petite ouverture faite dans un écran. Le rayon lui-même est représenté à chaque instant par la courbe que dessinent, en vertu de leurs déplacements, les molécules primitivement situées sur sa direction. Si les molécules décrivent des cercles ou des ellipses, le rayon sera *polarisé circulairement* ou *elliptiquement*, et représenté par une espèce d'hélice ou de spirale à double courbure. Cette hélice se changera en une courbe plane, si les vibrations moléculaires sont rectilignes et dans ce cas le rayon *polarisé rectilignement* deviendra ce que nous appelons un *rayon plan*.

Le *module* et l'*argument* d'un rayon lumineux simple ne sont autre chose que le module et l'argument du mouvement simple qui lui correspond. Si le module se réduit constamment à l'unité, le rayon se propagera sans s'affaiblir. Si le module diffère généralement de l'unité, l'amplitude des vibrations lumineuses décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance à un plan fixe croîtra en progression arithmétique, et alors le rayon de lumière deviendra ce que nous appellerons un rayon *évanescent*. La lumière que renferme un rayon évanescent peut être, dans un grand nombre de cas, perçue par l'œil. Telle est, en particulier, la lumière verte transmise par voie de réfraction à travers une feuille d'or très mince. Telle est encore la lumière transmise à travers les faces latérales d'un prisme de verre qui a pour

bases deux triangles rectangles, et fournie par un rayon émergent qui rase la face de sortie, dans le cas où le rayon réfracté forme, avec la normale à cette dernière face, un angle supérieur à l'angle de réflexion totale. Alors, comme je l'ai dit en 1836 (t. II, p. 349), le rayon émergent s'éteint graduellement, tandis que le rayon incident forme un angle de plus en plus petit avec la face d'entrée.

Les coefficients des trois coordonnées dans l'exponentielle qui caractérise un rayon simple, c'est-à-dire dans l'exponentielle à laquelle les déplacements symboliques des molécules d'éther sont proportionnels, mérite une attention particulière.

Quand le milieu que l'on considère est un milieu isophane ordinaire, qui ne produit pas la polarisation chromatique, les rayons simples qui peuvent s'y propager sont de deux espèces. Pour certains rayons, les trois déplacements symboliques de chaque molécule sont proportionnels aux trois coefficients dont il s'agit. Pour d'autres rayons, si l'on multiplie respectivement les trois coefficients par les trois déplacements symboliques, la somme des produits obtenus devra se réduire à zéro. D'ailleurs, dans les milieux isophanes, les directions des rayons lumineux seront généralement perpendiculaires aux plans des ondes. Cela posé, on peut affirmer que, dans ces milieux, les vibrations des molécules d'éther seront ordinairement *longitudinales*, c'est-à-dire perpendiculaires aux plans des ondes, pour les rayons simples d'une espèce, et transversales, c'est-à-dire comprises dans les plans des ondes, pour les rayons de l'autre espèce, quand ces rayons se propageront sans s'affaiblir, ou, ce qui revient au même, quand leurs modules se réduiront constamment à l'unité. Mais, quand les modules seront généralement distincts de l'unité, les rayons simples propagés par les milieux isotropes cesseront d'offrir des vibrations longitudinales ou transversales, en devenant ce que nous appelons des rayons évanescents. Alors aussi *le rayon évanescent, qui tiendra la place d'un rayon à vibrations longitudinales, sera un rayon simple, composé de molécules dont les vibrations s'exécuteront dans des plans perpendiculaires aux traces des plans des ondes sur le plan fixe correspondant au module* 1.

Le troisième rayon de lumière réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux est précisément l'un de ceux que nous appelons *évanescents;* et, pour expliquer les phénomènes de la réflexion et de la réfraction lumineuse, il est nécessaire de tenir compte de ce troisième rayon. C'est ce qu'avait vu M. Georges Green, dès l'année 1837. Mais, en partant de cette idée, il avait cherché à déduire les lois de la réflexion des équations auxquelles on parvient appliquant à la détermination des mouvements de l'éther seul la méthode donnée par Lagrange dans la *Mécanique analytique*, ou, ce qui revient au même, en faisant coïncider les équations de condition relatives à la surface de séparation des deux milieux, avec celles qu'on obtient quand on égale entre elles les pressions exercées par les deux milieux sur la même surface. Comme je l'ai déjà dit, au principe de *l'égalité entre ces pressions*, on doit, dans la théorie de la lumière, substituer le principe de *la continuité du mouvement dans l'éther*, et alors, en opérant comme je l'ai fait dans la dernière séance, on arrive directement et promptement à résoudre le problème, dont la solution est donnée par des formules générales qui comprennent, comme cas particulier, celles de Fresnel. En vertu de ces formules générales, le troisième rayon est un rayon évanescent, dirigé de manière à raser la surface réfléchissante ou réfringente, et composé de molécules qui décrivent des ellipses comprises dans le plan d'incidence, les plans des ondes étant à la fois perpendiculaires au plan d'incidence et à la surface réfléchissante. Si, d'ailleurs, on reçoit sur une membrane placée tout près de la surface réfléchissante ou réfringente l'image de ce troisième rayon, cette image n'offrira une lumière représentée par une fraction sensible de la lumière incidente que dans une très petite épaisseur qui, vue à une distance de $0^{\mathrm{m}},1$, sous-tendra un angle inférieur à $\frac{1}{10}$ de seconde sexagésimale. Cette très petite épaisseur ne sera peut-être pas une raison suffisante pour que l'on doive désespérer de rendre le troisième rayon sensible à l'œil, surtout si l'on réfléchit à l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes, qui, très probablement, doit être, pour un grand nombre d'entre elles, inférieur à $\frac{1}{10}$ de seconde.

ANALYSE.

Le théorème relatif aux rayons qui se propagent dans les milieux isotropes peut être démontré de la manière suivante :

Soient, dans un mouvement simple de l'éther, ξ, η, ζ les déplacements d'un atome, mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires des x, y, z et $\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta$ les déplacements symboliques dont les déplacements effectifs ξ, η, ζ sont les parties réelles. On aura au bout du temps t

$$(1)\qquad \bar\xi = Ae^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar\eta = Be^{ux+vy+wz-st}, \qquad \bar\zeta = Ce^{ux+vy+wz-st},$$

A, B, C, u, v, w, s désignant des constantes, dont chacune pourra être en partie réelle, en partie imaginaire. En conséquence, on pourra supposer

$$(2)\qquad \begin{cases} A = \mathfrak{a} + \mathrm{a}i, & B = \mathfrak{b} + \mathrm{b}i, & C = \mathfrak{c} + \mathrm{c}i, \\ u = \mathfrak{u} + \mathrm{u}i, & v = \mathfrak{v} + \mathrm{v}i, & w = \mathfrak{w} + \mathrm{w}i, \\ & s = \mathfrak{s} + \mathrm{s}i, & \end{cases}$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{s}$; $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s}$ étant des quantités réelles et i une racine carrée de -1. Soient maintenant α, β, γ des constantes réelles, choisies de manière à vérifier simultanément les deux conditions

$$(3)\qquad \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma = 0, \qquad \mathrm{a}\alpha + \mathrm{b}\beta + \mathrm{c}\gamma = 0;$$

on aura encore

$$(4)\qquad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Or, de cette deuxième formule, jointe aux équations (1), on tirera

$$(5)\qquad \alpha\bar\xi + \beta\bar\eta + \gamma\bar\zeta = 0,$$

par conséquent

$$(6)\qquad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$

et l'on conclura de la formule (5) que chaque molécule d'éther décrit une courbe plane, dont le plan est perpendiculaire à la droite, représentée par l'équation

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{6} = \frac{z}{\gamma}. \tag{7}$$

D'autre part, l'exponentielle $e^{ux+vy+wz-st}$, qui caractérise le mouvement simple, représenté symboliquement par les équations (1), se décompose, en vertu des formules (3), en deux facteurs, dont l'un $e^{\mathfrak{u}x+\mathfrak{v}y+\mathfrak{w}z-\mathfrak{s}t}$ est le *module* du mouvement simple, tandis que l'autre $e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t)i}$ se réduit à une exponentielle trigonométrique, dont l'argument $\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t$ est ce que nous appelons l'*argument* du mouvement simple. En égalant cet argument à zéro, pour une valeur nulle de t, on obtient l'équation

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z = 0, \tag{8}$$

qui représente le plan invariable, auquel les *plans des ondes* sont parallèles. Si d'ailleurs le mouvement simple est durable et persistant, on aura

$$\mathfrak{s} = 0;$$

et si, de plus, le mouvement se propage sans s'affaiblir, on aura encore

$$\mathfrak{u} = 0, \qquad \mathfrak{v} = 0, \qquad \mathfrak{w} = 0.$$

Si, au contraire, le mouvement s'affaiblit en se propageant, l'une au moins des constantes $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ cessera de se réduire à zéro et l'on obtiendra un rayon évanescent, dans lequel l'intensité de la lumière décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance d'une molécule au plan invariable représenté par l'équation

$$\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z = 0 \tag{9}$$

croîtra en progression arithmétique.

Supposons maintenant que le mouvement infiniment petit, représenté par les équations (1), soit un mouvement simple de l'éther, dans

un milieu isophane qui ne produise pas la polarisation chromatique. Alors les déplacements symboliques vérifieront l'une des deux formules

$$\frac{\bar{\xi}}{u} = \frac{\bar{\eta}}{v} = \frac{\bar{\zeta}}{w}, \tag{10}$$

$$u\bar{\xi} + v\bar{\eta} + w\bar{\zeta} = 0. \tag{11}$$

Cela posé, si le module $e^{\mathfrak{u}x+\mathfrak{v}y+\mathfrak{w}z-\mathfrak{s}t}$ se réduit à l'unité, ou, en d'autres termes, si les constantes $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{s}$ s'évanouissent, on aura

$$u = \mathrm{u}i, \qquad v = \mathrm{v}i, \qquad w = \mathrm{w}i, \qquad s = \mathrm{s}i,$$

et l'on tirera de la formule (10)

$$\frac{\bar{\xi}}{\mathrm{u}} = \frac{\bar{\eta}}{\mathrm{v}} = \frac{\bar{\zeta}}{\mathrm{w}}, \tag{12}$$

par conséquent

$$\frac{\xi}{\mathrm{u}} = \frac{\eta}{\mathrm{v}} = \frac{\zeta}{\mathrm{w}},$$

puis de la formule (11)

$$\mathrm{u}\bar{\xi} + \mathrm{v}\bar{\eta} + \mathrm{w}\bar{\zeta} = 0, \tag{13}$$

par conséquent

$$\mathrm{u}\xi + \mathrm{v}\eta + \mathrm{w}\zeta = 0.$$

Donc les vibrations des molécules d'éther seront dans le premier cas perpendiculaires, dans le second cas parallèles aux plans des ondes. Mais si, $\mathfrak{s}$ étant nul, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ cessent de s'évanouir, il suffira d'assujettir les coefficients α, 6, γ à vérifier simultanément les deux conditions

$$\mathfrak{u}\alpha + \mathfrak{v}6 + \mathfrak{w}\gamma = 0, \qquad \mathrm{u}\alpha + \mathrm{v}6 + \mathrm{w}\gamma = 0, \tag{14}$$

pour que l'on ait aussi

$$u\alpha + v6 + w\gamma = 0, \tag{15}$$

et alors la formule (10) entraînera les équations

$$\alpha\bar{\xi} + \text{б}\bar{\eta} + \gamma\bar{\zeta} = 0, \qquad \alpha\xi + \text{б}\eta + \gamma\zeta = 0. \tag{16}$$

D'ailleurs, de la seconde des équations (16), jointe aux formules (14), on conclura que les vibrations moléculaires s'exécutent dans des plans perpendiculaires à la commune intersection des plans (8) et (9).

MÉMOIRE

SUR

LE CALCUL INTÉGRAL [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XXII, p. 39; 1850.

§ Ier. — *Calcul des fonctions génératrices.*

$y = f(x)$ désignant une fonction de x, M. Laplace appelle *fonction génératrice de* $f(x)$ la suite infinie

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + \ldots = u \tag{1}$$

ou

$$f(0) + t f(1) + t^2 f(2) + \ldots + t^x f(x) + \ldots. \tag{2}$$

La fonction génératrice étant donnée, la fonction $f(x)$ s'en déduit, mais seulement pour des valeurs entières de x. La connaissance de la fonction génératrice ne suffit pas pour déterminer $f'(x)$, $f''(x)$, ...

A la vérité, en partant de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \Delta y - \frac{1}{2}\Delta^2 y + \frac{1}{3}\Delta^3 y + \ldots, \tag{3}$$

dans laquelle $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, et observant que $\Delta^x y$ a

[1] Présenté à l'Académie des Sciences, le 27 décembre 1824 [a].

[a] Je livre ce Mémoire à l'impression tel que je le retrouve dans le manuscrit qui le renferme. La signature de M. Georges Cuvier, apposée sur le premier et sur le dernier feuillet du Mémoire, indique, comme date de présentation, le 27 décembre 1824.

pour fonction génératrice $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^x$, on trouverait

$$u\,\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{t}-1\right)=u\,\mathrm{l}(t), \tag{4}$$

pour fonction génératrice de $\frac{dv}{dx}=f'(x)$. Mais la formule (3), qui est exacte pour des fonctions entières, cesse de l'être pour des fonctions quelconques. Le second membre ne varie pas quand on y fait croître y d'une fonction périodique de x, tandis que le premier membre change alors de valeur. Si l'on fait par exemple

$$y=\sin 2\pi x,$$

cette équation donnera

$$\cos 2\pi x=0,$$

quel que soit x, ce qui est absurde. On ne voit pas, d'ailleurs, comment le développement de $u\,\mathrm{l}(t)$ suivant les puissances ascendantes de t pourrait s'effectuer.

Une autre difficulté que présente le calcul des fonctions génératrices consiste en ce que l'on regarde

$$\frac{u}{t}=\frac{y_0}{t}+y_1+y_2 t+\ldots+y_{x+1}t^x+\ldots \tag{5}$$

comme fonction génératrice de y_{x+1}, tandis qu'en remplaçant, dans la série (1), y_0 par y_1, y_1 par y_2 et généralement y_x par y_{x+1}, on trouverait simplement

$$y_1+y_2 t+\ldots+y_{x+1}t^x, \tag{6}$$

pour fonction génératrice de y_{x+1}. On ne peut lever cette difficulté qu'en admettant, pour chaque valeur de $f(x)$, une infinité de fonctions génératrices, telles que

$$y_0+y_1 t+y_2 t^2+\ldots+y_x t^x+\ldots,$$
$$\frac{y_{-1}}{t}+y_0+y_1 t+y_2 t^2+\ldots+y_x t^x+\ldots,$$
$$\frac{y_{-2}}{t^2}+\frac{y_{-1}}{t}+y_0+y_1 t+y_2 t^2+\ldots+y_x t^x+\ldots,$$

ou même, en prenant pour fonction génératrice, ainsi qu'on l'a proposé, la somme de la série

$$y_{-\infty}t^{-\infty}+\ldots+y_{-1}t^{-1}+y_0 t^0+y_1 t+y_2 t^2+\ldots+y_\infty t^\infty+\ldots. \tag{7}$$

Cette dernière série devra nécessairement être employée si l'on veut que la fonction génératrice de y_{-x} soit représentée par ut^x. Or, il arrive malheureusement que la série (7) est généralement divergente et n'a pas de somme.

Quant aux résultats déduits du calcul des fonctions génératrices, à l'égard des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites, on peut les établir directement, comme nous le ferons dans les paragraphes qui suivent.

§ II. — *Formules de M. Fourier et autres du même genre* (¹).

On a, en vertu du théorème de M. Fourier,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}e^{\alpha(x-\mu)i}f(\mu)\,d\alpha\,d\mu, \tag{1}$$

x étant renfermé entre les limites μ' et μ''. On peut encore écrire

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}f(\mu)\,d\alpha\,d\mu, \tag{2}$$

a étant une constante arbitraire. On trouvera de même

$$f(x,y,z,\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\mathrm{6}(y-\nu)i}\ldots f(\mu,\nu,\ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d\mathrm{6}\,d\nu\ldots, \tag{3}$$

et

$$f(x,y,z,\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\cdots e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}e^{(b+\mathrm{6}i)(y-\nu)}\ldots f(\mu,\nu,\ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d\mathrm{6}\,d\nu\ldots, \tag{4}$$

(¹) Dans l'impression de ce paragraphe et des suivants, j'ai cru devoir, pour la commodité du lecteur, me conformer à l'usage maintenant adopté par les géomètres, en substituant partout la lettre i au signe algébrique $\sqrt{-1}$, employé dans le manuscrit.

n étant le nombre des variables $x, y, z, \ldots$ et $a, b, \ldots$ des constantes arbitraires.

On a encore, x, μ', μ'' étant des nombres entiers,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+1} e^{v(x-\mu)i} f(\mu)\,dv, \tag{5}$$

$\sum_{\mu'}^{\mu''}$ désignant une somme de la forme

$$\sum_{\mu'}^{\mu''}\varphi(\mu) = \varphi(\mu') + \varphi(\mu'+1) + \ldots + \varphi(\mu''-1), \tag{6}$$

et x étant renfermé entre les limites μ', μ''. On pourrait écrire encore

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+1} e^{(a+\alpha i)(x-\mu)} f(\mu)\,d\alpha. \tag{7}$$

Si l'on supposait x, μ', μ'' multiples de h et de plus

$$\sum_{\mu'}^{\mu''}\varphi(\mu) = \varphi(\mu') + \varphi(\mu'+h) + \ldots + \varphi(\mu''-h), \tag{8}$$

on trouverait

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+h} e^{v\left(\frac{x-\mu}{h}\right)i} f(\mu)\,dv, \tag{9}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\sum_{\mu'}^{\mu''+h} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu)\,h\,d\alpha, \tag{10}$$

puis, en posant $h = 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha, \tag{11}$$

ce qui s'accorde avec la formule (1). On aurait encore, dans la même hypothèse,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+h} r^{\frac{x-\mu}{h}} e^{v\left(\frac{x-\mu}{h}\right)i} f(\mu)\,dv, \tag{12}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\sum_{\mu'}^{\mu''+h} r^{\frac{x-\mu}{h}} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu)\,h\,d\alpha, \tag{13}$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\sum_{\mu'}^{\mu''+h} e^{(a+\alpha i)(x-\mu)} f(\mu)\,h\,d\alpha, \tag{14}$$

x étant renfermé entre les limites μ', μ'' et $r^{\frac{1}{h}} = e^a$ désignant une constante arbitraire.

Pour démontrer toutes les formules qui précèdent, il suffit de développer les sommes indiquées par le signe $\sum$, et d'observer que l'on a toujours (m étant un nombre entier)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-m\alpha i}\,d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}\cos m\alpha\,d\alpha = 0, \tag{15}$$

excepté dans le cas où l'on suppose $m = 0$ et pour lequel on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\,d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha = 2\pi. \tag{16}$$

On établirait généralement de la même manière la formule

$$f(x, y, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} \cdots \sum_{\mu'}^{\mu''+h}\sum_{\nu'}^{\nu''+k} \ldots e^{(a+\alpha i)(x-\mu)} e^{(b+6 i)(y-\nu)} \ldots f(\mu, \nu, \ldots)\,hk\ldots d\alpha\,d6\ldots, \tag{17}$$

$\frac{x}{h}$ étant un nombre entier, compris entre les deux nombres entiers $\frac{\mu'}{h}$, $\frac{\mu''}{h}$; $\frac{y}{k}$ étant un autre entier compris entre les nombres entiers $\frac{\nu'}{k}$, $\frac{\nu''}{k}$, ...; et $a, b, \ldots$ désignant des constantes arbitraires; puis on en conclurait : 1° en réduisant $a, b, \ldots$ à zéro

$$f(x, y, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} \cdots \sum_{\mu'}^{\mu''+h}\sum_{\nu'}^{\nu''+k} \ldots e^{\alpha i(x-\mu)} e^{6 i(x-\nu)} \ldots f(\mu, \nu, \ldots)\,hk\ldots d\alpha\,d6\ldots; \tag{18}$$

2° en réduisant $h, k, \ldots$ à l'unité

$$(19)\quad f(x,y,\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\sum_{\mu'}^{\mu''+1}\sum_{\nu'}^{\nu''+1}\cdots e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}e^{(b+6i)(y-\nu)}\cdots f(\mu,\nu,\ldots)\,d\alpha\,d6\ldots,$$

$$(20)\quad f(x,y,\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\sum_{\mu'}^{\mu''+1}\sum_{\nu'}^{\nu''+1}\cdots e^{\alpha(x-\mu)i}e^{6(y-\nu)i}\cdots f(\mu,\nu,\ldots)\,d\alpha\,d6\ldots.$$

Lorsque, dans les équations (17) et (18), on pose $h=0$, $k=0$, ... on retrouve les formules (4) et (3).

Il est encore essentiel de rappeler les formules que nous allons écrire. On a d'abord

$$(21)\qquad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}re^{\nu i}\frac{f(re^{\nu i})}{F(re^{\nu i})}\,d\nu.$$

Cette formule suppose que la fonction $f(ue^{\nu i})$ ne varie jamais d'une manière brusque et ne devient pas infinie entre les limites $\nu=-\pi$, $\nu=+\pi$, $u=0$, $u=r$. De plus,

$$x_0,\quad x_1,\quad \ldots,\quad x_{m-1}$$

représentent celles des racines de l'équation

$$(22)\qquad F(x)=0,$$

dont les modules, ou les valeurs numériques, sont inférieurs à r.

On a encore

$$(23)\quad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(u''+\nu i)}{F(u''+\nu i)}-\frac{f(u'+\nu i)}{F(u'+\nu i)}\right]d\nu,$$

lorsque $f(u+\nu i)$ ne devient pas infini et ne varie pas d'une manière brusque entre les limites $u=u'$, $u=u''$, $\nu=-\infty$, $\nu=+\infty$ et s'évanouit pour $\nu=\pm\infty$, quel que soit u. Dans la formule (23), $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ représentent les racines de l'équation (22), dans lesquelles les parties réelles restent comprises entre les limites u', u''.

Lorsque la fonction $f(u+\nu i)$ s'évanouit, non seulement pour $\nu=\pm\infty$, quel que soit u, mais encore pour $u=-\infty$, quel que soit ν,

alors, en prenant $u'=-\infty$, $u''=U$, on réduit la formule (23) à

$$(24)\qquad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(U+\nu i)}{F(U+\nu i)}\,d\nu.$$

Le premier membre de celle-ci renfermera toutes les racines de $F(x)=0$, si U surpasse les parties réelles de toutes ces racines et à plus forte raison si U surpasse leurs modules.

Lorsque la fonction $f(u+\nu i)$ s'évanouit, non seulement pour $\nu=\pm\infty$, quel que soit u, mais encore pour $u=\infty$, quel que soit ν, alors, en prenant $u'=-U$, $u''=\infty$, on trouve

$$(25)\qquad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(-U+\nu i)}{F(-U+\nu i)}\,d\nu.$$

Le premier membre de l'équation (25) renfermera toutes les racines de $F(x)=0$, si $-U$ est inférieur aux parties réelles de toutes les racines, ce qui aura nécessairement lieu si U surpasse tous les modules.

§ III. — *Analogies des puissances et des différences.*

Supposons que les caractéristiques

$$\alpha=\frac{\partial}{\partial x},\qquad 6=\frac{\partial}{\partial y},\qquad \gamma=\frac{\partial}{\partial z},\qquad \ldots,$$

placées devant les fonctions

$$f(x),\quad f(x,y,z,\ldots),$$

indiquent les dérivées de ces fonctions par rapport à $x, y, z, \ldots$ et que les puissances des mêmes caractéristiques indiquent les dérivées des divers ordres, en sorte qu'on ait

$$\alpha f(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=f'(x),$$

$$\alpha^2 f(x)=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=f''(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\alpha^n f(x)=\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}=f^{(n)}(x)$$

et

$$\alpha\mathsf{6} f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si l'on désigne par

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots)$$

une fonction entière de α, $\mathsf{6}$, γ, ..., la notation

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots) \tag{1}$$

représentera une fonction linéaire de $f(x, y, z, \dots)$ et de ses dérivées des divers ordres. De plus, on aura évidemment, en vertu du théorème de Taylor,

$$e^{h\alpha} f(x) = f(x+h) = f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) = (1+\Delta) f(x), \tag{2}$$

h étant la différence finie de x; et, l'on trouvera, par suite, en appelant $k = \Delta y$, $l = \Delta z$, ... les différences finies de y, z, ...

$$\mathrm{F}(e^{h\alpha}, e^{k\mathsf{6}}, e^{l\gamma}, \dots) f(x, y, z, \dots) = \mathrm{F}(1+\Delta_x, 1+\Delta_y, 1+\Delta_z, \dots) f(x, y, z, \dots). \tag{3}$$

Ajoutons que l'on aura généralement

$$(1+\Delta_x)^n f(x) = f(x+nh). \tag{4}$$

Remarquons à présent que si, dans l'expression (1), on substitue pour $f(x, y, z, \dots)$ sa valeur, tirée de la formule (3) du deuxième paragraphe, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mu'}^{\mu''} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\nu'}^{\nu''} \dots e^{\alpha(x-\mu)i} e^{\mathsf{6}(y-\nu)i} \dots f(\mu, \nu, \dots)\, \mathrm{F}(\alpha i, \mathsf{6} i, \dots)\, d\alpha\, d\mu\, d\mathsf{6}\, d\nu \dots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Si, par analogie, l'on étend cette dernière formule au cas où la fonction $\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots)$ devient quelconque, il en résultera que l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mu'}^{\mu''} \dots e^{\alpha(x-\mu)i} e^{\mathsf{6}(y-\nu)i} \dots f(\mu, \nu, \dots)\, \mathrm{F}(\alpha i, \mathsf{6} i, \dots)\, d\alpha\, d\mu\, d\mathsf{6}\, d\nu \dots \tag{6}$$

sera représentée, dans tous les cas possibles, par la notation

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots).$$

Cette convention étant admise, il est facile de voir :

1° Que, si l'on a généralement

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) = \varphi_0(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) + \varphi_1(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) + \varphi_2(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) + \dots, \tag{7}$$

le second membre de l'équation (7) étant composé d'un nombre fini de termes, on aura aussi

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots) \\ &= \varphi_0(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots) + \varphi_1(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots) + \varphi_2(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots) + \dots; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

2° Que l'équation (7) entraînera encore l'équation (8), si la série

$$\varphi_0(\alpha i, \mathsf{6} i, \gamma i, \dots), \quad \varphi_1(\alpha i, \mathsf{6} i, \gamma i, \dots), \quad \dots \tag{9}$$

est convergente pour toutes les valeurs de α, $\mathsf{6}$, γ, ...;

3° Que l'on vérifiera toujours l'équation

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots) = \Phi(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots), \tag{10}$$

en posant

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) = \Phi(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots); \tag{11}$$

4° Que, si $\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots)$ est une fonction entière, l'on vérifiera encore l'équation

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) u = \Phi(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots), \tag{12}$$

en posant

$$u = \frac{\Phi(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots) f(x, y, z, \dots)}{\mathrm{F}(\alpha, \mathsf{6}, \gamma, \dots)}. \tag{13}$$

On arriverait aux mêmes conclusions si, en attribuant à x, y, z, ... des valeurs entières, et partant de la formule

$$f(x, y, z, \dots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \sum_{\mu'}^{\mu''+1} \sum_{\nu'}^{\nu''+1} \dots e^{\alpha(x-\mu)i} e^{\mathsf{6}(y-\nu)i} \dots f(\mu, \nu, \dots)\, d\alpha\, d\mathsf{6} \dots, \tag{14}$$

on regardait la notation

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) f(x, y, z, \ldots),$$

comme généralement définie par l'équation

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) f(x, y, z, \ldots) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots \sum_{\mu'}^{\mu''+1}\sum_{\nu'}^{\nu''+1}\ldots e^{\alpha(x-\mu)i} e^{\beta(y-\nu)i}\ldots f(\mu, \nu, \ldots) F(\alpha i, \beta i, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots \end{aligned}\right.$$

Concevons maintenant que, dans la formule (5), on pose $\mu' = -\infty$, $\mu'' = +\infty$, $\nu' = -\infty$, $\nu'' = +\infty$, ... en sorte que, $F(\alpha, \beta, \ldots)$ désignant une fonction quelconque, l'expression

$$F(\alpha, \beta, \ldots) f(x, y, \ldots)$$

soit définie par la formule

$$(16)\quad F(\alpha, \beta, \ldots) f(x, y, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{\alpha(x-\mu)i} e^{\beta(y-\nu)i}\ldots f(\mu, \nu, \ldots) F(\alpha i, \beta i, \ldots)\, d\alpha\, d\mu \ldots,$$

et posons, en outre,

$$(17)\quad \varpi(x, y, \ldots) = F(\alpha, \beta, \ldots) f(x, y, \ldots),$$

on aura, en désignant par $\varphi(\alpha, \beta, \ldots)$ une fonction quelconque de α, β, ...,

$$(18)\quad \varphi(\alpha, \beta, \ldots)\varpi(x, y, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{a(x-m)i} e^{b(y-n)i}\ldots \varphi(ai, bi, \ldots)\varpi(m, n, \ldots)\, da\, dm\, db\, dn \ldots,$$

$$(19)\quad \varpi(m, n, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{\alpha(m-\mu)i} e^{\beta(n-\nu)i}\ldots F(\alpha i, \beta i, \ldots) f(\mu, \nu, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu \ldots,$$

et, par suite,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(\alpha, \beta, \ldots)\varpi(x, y, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{m(\alpha-a)i} e^{n(\beta-b)i}\ldots e^{axi} e^{byi}\ldots e^{-\alpha\mu i} e^{-\beta\nu i}\ldots \\ &\qquad \times F(\alpha i, \beta i, \ldots)\varphi(ai, bi, \ldots f(\mu, \nu, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, da\, dm \ldots \end{aligned}\right.$$

Mais on a encore

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{\pm m(\alpha-a)i} e^{\pm n(\beta-b)i}\ldots e^{-\alpha\mu i} e^{-\beta\nu i}\ldots F(\alpha i, \beta i, \ldots)\, d\alpha\, dm \ldots \\ &= e^{-a\mu i} e^{-b\nu i}\ldots F(ai, bi, \ldots) \end{aligned}\right.$$

Donc, par suite, l'équation (20) donnera

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(\alpha, \beta, \ldots)\varpi(x, y, \ldots) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{a(x-\mu)i} e^{b(y-\nu)i}\ldots \varphi(ai, bi, \ldots) F(ai, bi, \ldots) f(\mu, \nu, \ldots)\, da\, d\mu\, db\, d\nu \ldots \\ &= \varphi(\alpha, \beta, \ldots) F(\alpha, \beta, \ldots) f(x, y, \ldots). \end{aligned}\right.$$

Par conséquent, $F(\alpha, \beta, \ldots)$, $\varphi(\alpha, \beta, \ldots)$, désignant deux fonctions quelconques de α, β, ..., l'équation (17), savoir

$$(17)\quad \varpi(x, y, \ldots) = F(\alpha, \beta, \ldots) f(x, y, \ldots),$$

entrainera toujours la suivante

$$(18)\quad \varphi(\alpha, \beta, \ldots)\varpi(x, y, \ldots) = [\varphi(\alpha, \beta, \ldots) F(\alpha, \beta, \ldots)] f(x, y, \ldots),$$

la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots) f(x, y, \ldots)$ étant supposée définie par la formule (16).

§ IV. — *Intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

On a généralement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \Phi(\Theta + \theta i) e^{(\Theta+\theta i)t}\, d\theta \\ &= \frac{e^{(\Theta+\theta i)t}}{ti}\Phi(\Theta + \theta i) - \frac{1}{t}\int e^{(\Theta+\theta i)t}\Phi'(\Theta + \theta i)\, d\theta \\ &= \frac{e^{(\Theta+\theta i)t}}{i}\left[\frac{\Phi(\Theta + \theta i)}{t} - \frac{\Phi'(\Theta + \theta i)}{t^2} + \frac{\Phi''(\Theta + \theta i)}{t^3} + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si l'on désigne par a un nombre fini, par ε un nombre infiniment petit, et si l'on pose

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi\left(\Theta + \frac{a}{\varepsilon} i\right) = P + Q i, \\ &\Phi'\left(\Theta + \frac{a}{\varepsilon} i\right) = P' + Q' i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

on trouvera, en prenant pour $\Phi(x)$ une fonction entière de x,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\frac{a}{\varepsilon}}^{\frac{a}{\varepsilon}} \Phi(\Theta+\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta+\theta \mathrm{i})t}\, d\theta \\
&= \frac{e^{\Theta t}}{t}\left(\frac{\cos\frac{at}{\varepsilon}+\mathrm{i}\sin\frac{at}{\varepsilon}}{\mathrm{i}}\right)\left[\left(P+\frac{P'}{t}+\frac{P''}{t^2}+\ldots\right)+\left(Q+\frac{Q'}{t}+\frac{Q''}{t^2}+\ldots\right)\mathrm{i}\right] \\
&\quad+\frac{e^{\Theta t}}{t}\left(\frac{\cos\frac{at}{\varepsilon}-\mathrm{i}\sin\frac{at}{\varepsilon}}{-\mathrm{i}}\right)\left[\left(P+\frac{P'}{t}+\frac{P''}{t^2}+\ldots\right)+\left(Q+\frac{Q'}{t}+\frac{Q''}{t^2}+\ldots\right)\mathrm{i}\right],
\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\frac{a}{\varepsilon}}^{\frac{a}{\varepsilon}} \Phi(\Theta+\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta+\theta \mathrm{i})t}\, d\theta \\
&= \frac{2e^{\Theta t}}{t}\left[\left(P+\frac{P'}{t}+\frac{P''}{t^2}+\ldots\right)\sin\frac{at}{\varepsilon}+\left(Q+\frac{Q'}{t}+\frac{Q''}{t^2}+\ldots\right)\cos\frac{at}{\varepsilon}\right].
\end{aligned}\right.$$

Or, quand ε devient infiniment petit, le second membre de l'équation (4) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et reçoit effectivement une valeur indéterminée. On peut même, quel que soit t, disposer de ε de manière à le faire évanouir, puisqu'il suffit de prendre

$$(5)\quad \left(P+\frac{P'}{t}+\frac{P''}{t^2}+\ldots\right)\sin\frac{at}{\varepsilon}+\left(Q+\frac{Q'}{t}+\frac{Q''}{t^2}+\ldots\right)\cos\frac{at}{\varepsilon}=0,$$

ou

$$(6)\quad \operatorname{tang}\frac{at}{\varepsilon}=-\frac{Q+\frac{Q'}{t}+\frac{Q''}{t^2}+\ldots}{P+\frac{P'}{t}+\frac{P''}{t^2}+\ldots},$$

et que l'on satisfait à l'équation (6) par une infinité de valeurs infiniment petites de ε [1]. Généralement on tirera de l'équation (4), en

[1] Nous avons supprimé ici une transformée des équations (5), (6) et, dans les formules (3), (4), (5), (6), nous avons restitué à l'arc $\frac{at}{\varepsilon}$ le facteur t omis par erreur dans le manuscrit.

supposant que la lettre caractéristique Φ désigne une fonction entière,

$$(7)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Theta+\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta-\theta \mathrm{i})t}\, d\theta=\frac{0}{0}.$$

Si l'on considérait l'intégrale (7) comme la limite de la suivante

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}\,\Phi(\Theta-\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta+\theta \mathrm{i})t}\, d\theta \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\theta}\,\frac{\Phi(\Theta+\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta+\theta \mathrm{i})t}+\Phi(\Theta-\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta-\theta \mathrm{i})t}}{2}\, d\theta,
\end{aligned}\right.$$

on trouverait une valeur nulle, au lieu d'une valeur indéterminée. Car on a généralement

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}} e^{(\Theta-\theta \mathrm{i})t}\, dt \\
&= e^{\Theta t}\,\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2}=e^{\Theta t}\left(\frac{1}{\varepsilon \mathrm{i}-t}+\frac{1}{\varepsilon \mathrm{i}+t}\right)\mathrm{i}=e^{\Theta t}\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{t+\varepsilon \mathrm{i}}+\frac{1}{t-\varepsilon \mathrm{i}}\right),
\end{aligned}\right.$$

et, par suite, l'intégrale

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}(\Theta+\theta \mathrm{i})^n e^{(\Theta+\theta \mathrm{i})t}\, d\theta \\
&= \mathrm{i}\,\frac{d^n\left[e^{\Theta t}\left(\frac{1}{t+\varepsilon \mathrm{i}}-\frac{1}{t-\varepsilon \mathrm{i}}\right)\right]}{dt^n} \\
&= \mathrm{i}e^{\Theta t}\left\{\Theta^n\left(\frac{1}{t+\varepsilon \mathrm{i}}-\frac{1}{t-\varepsilon \mathrm{i}}\right)-n\,\Theta^{n-1}\left[\left(\frac{1}{t+\varepsilon \mathrm{i}}\right)^2-\left(\frac{1}{t-\varepsilon \mathrm{i}}\right)^2\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\,n(n-2)\,\Theta^{n-2}\left[\left(\frac{1}{t+\varepsilon \mathrm{i}}\right)^3-\left(\frac{1}{t+\varepsilon \mathrm{i}}\right)^3\right]-\ldots\right\}
\end{aligned}\right.$$

sera composée de termes qui s'évanouiront tous pour $\varepsilon=0$.

On obtiendrait encore une valeur nulle pour l'intégrale (7), si on la considérait comme limite de l'une des suivantes

$$(11)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\theta^2}\,\Phi(\Theta+\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta+\theta \mathrm{i})t}\, d\theta,$$

ou

$$(12)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\Theta+\theta \mathrm{i}) e^{(\Theta+\theta \mathrm{i})t}\, d\theta}{1+\varepsilon^2\theta^2}.$$

Enfin, si l'on désigne par $\varphi(\theta)$ une fonction entière de θ, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta) e^{t\theta i}\, d\theta, \tag{13}$$

considérée comme limite de l'une des suivantes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}} \varphi(\theta) e^{\theta t i}\, d\theta, \quad \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon\theta^2} \varphi(\theta) e^{\theta t i}\, d\theta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta) e^{\theta t i} \frac{d\theta}{1+\varepsilon^2\theta^2} d\theta, \tag{14}$$

aura toujours une valeur nulle, et, par suite, il en sera de même de

$$e^{\Theta t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta) e^{t\theta i}\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta) e^{(\Theta+\theta i)t}\, d\theta. \tag{15}$$

Concevons, maintenant, qu'il s'agisse d'intégrer l'équation différentielle

$$A_0 u + A_1 \frac{du}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n u}{dt^n} = 0, \tag{16}$$

de manière que l'on ait, pour $t = 0$,

$$u = u_0, \qquad \frac{du}{dt} = u_1, \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = u_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{n-1} u}{d^{n-1}} = u_{n-1}, \tag{17}$$

on fera

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} v e^{(\Theta+\theta i)t}\, d\theta, \tag{18}$$

v étant une fonction inconnue de θ, et Θ une constante arbitraire. En substituant la valeur précédente de u dans l'équation (16), et posant

$$F(\theta) = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + \ldots + A_n\theta^n, \tag{19}$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} v\, F(\Theta+\theta i) e^{(\Theta+\theta i)t}\, d\theta = 0. \tag{20}$$

Or, en vertu des principes ci-dessus établis, on vérifiera l'équation (20), si l'on prend

$$v\, F(\Theta+\theta i) = \varphi(\Theta+\theta i), \tag{21}$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière quelconque de x. Par suite, la

formule (18) deviendra

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\Theta+\theta i)}{F(\Theta+\theta i)} e^{(\Theta+\theta i)t}\, d\theta. \tag{22}$$

Si, dans cette dernière, on suppose la fonction $\varphi(x)$ du degré $n-1$, et si l'on désigne par

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_{n-1} \tag{23}$$

les racines de l'équation $F(\theta) = 0$, on aura, en prenant pour Θ une limite supérieure aux parties réelles de toutes ces racines et en vertu de l'équation (24) (§ II),

$$\frac{u}{2\pi} = \frac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)} e^{\theta_0 t} + \frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)} e^{\theta_1 t} + \ldots + \frac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})} e^{\theta_{n-1} t}, \tag{24}$$

la variable t étant considérée comme positive. La fonction φ étant arbitraire et du degré $n-1$, il est clair que les fractions

$$\frac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)}, \quad \frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})} \tag{25}$$

représentent n constantes arbitraires. Donc l'équation (24) fournit la valeur générale de u. Il reste à substituer aux quantités (25) les constantes arbitraires $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. Or, les formules (17) donneront

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)} + \frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)} + \ldots + \frac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})} = \frac{u_0}{2\pi},\\
&\theta_0\frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)} + \theta_1\frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)} + \ldots + \theta_{n-1}\frac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})} = \frac{u_1}{2\pi},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\theta_0^{n-1}\frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)} + \theta_0^{n-1}\frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)} + \ldots + \theta_{n-1}^{n-1}\frac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})} = \frac{u_{n-1}}{2\pi}.
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

On aura d'ailleurs, d'après la formule de Lagrange,

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= \frac{(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)\ldots(\theta-\theta_{n-1})}{(\theta_0-\theta_1)(\theta_0-\theta_2)\ldots(\theta_0-\theta_{n-1})}\varphi(\theta_0) + \ldots\\
&= \frac{F(\theta)-F(\theta_0)}{(\theta-\theta_0)F'(\theta_0)}\varphi(\theta_0) + \frac{F(\theta)-F(\theta_1)}{(\theta-\theta_1)F'(\theta_1)}\varphi(\theta_1) + \ldots\\
&= \frac{F(\theta)-F(\theta_0)}{\theta-\theta_0}\frac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)} + \frac{F(\theta)-F(\theta_1)}{\theta-\theta_1}\frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)} + \ldots
\end{aligned}\right. \tag{27}$$

En développant le second membre de l'équation (27) suivant les puissances de θ, on obtiendra précisément le même développement qui résulterait de la fraction

$$\frac{1}{2\pi}\frac{F(\theta)-F(U)}{\theta-U}, \tag{28}$$

si l'on remplaçait ensuite les puissances successives de U, savoir

$$U^0,\quad U^1,\quad U^2,\quad \ldots,\quad U^{n-1},$$

par les quantités

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_{n-1},$$

déterminées à l'aide des équations (26). On aura donc sous cette condition

$$\varphi(\theta)=\frac{F(\theta)-F(U)}{\theta-U}\,\frac{1}{2\pi}, \tag{29}$$

en sorte que la formule (22) donnera

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\,\frac{F(\Theta+\theta i)-F(U)}{(\Theta+\theta i)-U}\,\frac{e^{(\Theta+\theta i)t}\,d\theta}{F(\Theta+\theta i)}. \tag{30}$$

En développant cette dernière formule suivant les puissances de U, on trouverait

$$u=u_0T_0+u_1T_1+u_2T_2+\ldots+u_{n-1}T_{n-1}, \tag{31}$$

T_0, T_1, ..., T_{n-1} désignant des fonctions connues de t, représentées par des intégrales définies, savoir

$$\left\{\begin{aligned}
T_0 &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_1+A_2(\Theta+\theta i)+\ldots+A_n(\Theta+\theta i)^{n-1}}{F(\Theta+\theta i)}\,e^{(\Theta+\theta i)t}\,\frac{d\theta}{2\pi},\\
T_1 &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_2+A_3(\Theta+\theta i)+\ldots+A_n(\Theta+\theta i)^{n-2}}{F(\Theta+\theta i)}\,e^{(\Theta+\theta i)t}\,\frac{d\theta}{2\pi},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
T_{n-1}&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_n}{F(\Theta+\theta i)}\,e^{(\Theta+\theta i)t}\,\frac{d\theta}{2\pi}.
\end{aligned}\right. \tag{32}$$

Concevons à présent que l'on désigne par

$$\nabla_0 u,\quad \nabla_1 u,\quad \ldots,\quad \nabla_{n-1}u$$

des fonctions linéaires de la fonction u et de ses dérivées des divers ordres $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, ..., en sorte que, $\alpha=\frac{d}{dt}$ étant la caractéristique d'une différentiation relative à t, on ait, en adoptant les conventions du paragraphe III,

$$\nabla_0 u=f_0(\alpha)u,\qquad \nabla_1 u=f_1(\alpha)u,\qquad \ldots,\qquad \nabla_{n-1}u=f_{n-1}(\alpha)u. \tag{33}$$

On tirera des équations (32)

$$\left\{\begin{aligned}
\nabla_0T_0 &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_1+\ldots+A_n(\Theta+\theta i)^{n-1}}{F(\Theta+\theta i)}\,f_0(\Theta+\theta i)\,e^{(\Theta+\theta i)t}\,\frac{d\theta}{2\pi},\\
\nabla_0T_1 &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_2+\ldots+A_n(\Theta+\theta i)^{n-1}}{F(\Theta+\theta i)}\,f_0(\Theta+\theta i)\,e^{(\Theta+\theta i)t}\,\frac{d\theta}{2\pi},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\nabla_0T_{n-1}&=\int_{0}^{\infty}\frac{A_n}{F(\Theta+\theta i)}\,f_0(\Theta+\theta i)\,e^{(\Theta+\theta i)t}\,\frac{d\theta}{2\pi},
\end{aligned}\right. \tag{34}$$

et de l'équation (31)

$$\left\{\begin{aligned}
\nabla_0 u &=u_0\nabla_0T_0+u_1\nabla_0T_1+\ldots+u_{n-1}\nabla_0T_{n-1},\\
\nabla_1 u &=u_0\nabla_1T_0+u_1\nabla_1T_1+\ldots+u_{n-1}\nabla_1T_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\nabla_{n-1}u&=u_0\nabla_{n-1}T_0+u_1\nabla_{n-1}T_1+\ldots+u_{n-1}\nabla_{n-1}T_{n-1}.
\end{aligned}\right. \tag{35}$$

Cela posé, il deviendra facile de fixer la valeur de u, si l'on donne, au lieu des quantités

$$u_0,\quad u_1,\quad \ldots,\quad u_{n-1},$$

la valeur de

$\nabla_0 u$	correspondante à	$t=t_0$,
$\nabla_1 u$	»	$t=t_1$,
....	»	......
$\nabla_{n-1} u$	»	$t=t_{n-1}$.

En effet, il suffira, dans ce cas, de substituer, dans la formule (31), à la place de u_0, u_1, ..., u_{n-1}, leurs valeurs déduites des équations (35), dont les premiers membres se réduiront à des quantités constantes et les seconds membres à des fonctions linéaires des inconnues u_0, u_1, ..., u_{n-1}, les coefficients étant représentés par des intégrales définies semblables à celles que fournissent les formules (34), quand on y pose $t = \tau_0$.

Nous avons, dans ce qui précède, supposé la variable t positive. Si elle devenait négative, il faudrait, pour retrouver la valeur générale de u, remplacer dans l'équation (22) la constante arbitraire Θ par une limite inférieure aux parties réelles des racines θ_0, θ_1, ..., θ_{n-1}, puis, dans les formules (24) et (26), les quantités

$$u, \quad u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{n-1}$$

par

$$-u, \quad -u_0, \quad -u_1, \quad \ldots, \quad -u_{n-1}.$$

En conséquence, les équations (30), (32), etc. conserveraient la même forme. Seulement Θ y aurait changé de valeur.

Il est bon de remarquer que, en vertu des conventions admises dans le paragraphe III, l'équation (16) peut être présentée sous la forme

$$\text{(36)} \qquad \mathrm{F}(\alpha)u = 0.$$

Si l'on avait à résoudre l'équation

$$\text{(37)} \qquad \mathrm{F}(\alpha)u = f(t),$$

ou

$$\text{(38)} \qquad \mathrm{A}_0 u + \mathrm{A}_1 \frac{du}{dt} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{d^n u}{dt^n} = f(t),$$

il est clair qu'une valeur particulière de u serait

$$\text{(39)} \qquad u = \frac{f(t)}{\mathrm{F}(\alpha)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{(40)} \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau'}^{\tau''}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha i(t-\tau)} f(\tau)\frac{d\tau\, d\alpha}{\mathrm{F}(\alpha i)};$$

ou bien encore, en remplaçant αi par $a + \alpha i$, puis écrivant Θ au lieu

de a et θ au lieu de α, on trouverait

$$\text{(41)} \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau'}^{\tau''}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} \frac{f(\tau)\, d\tau\, d\theta}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)},$$

t étant renfermée entre les limites τ', τ''. Telle serait une valeur particulière de u. Il suffirait ensuite de poser

$$\text{(42)} \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau'}^{\tau''}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} \frac{f(\tau)}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)}\, d\tau\, d\theta + v,$$

pour obtenir en v une équation entièrement semblable à l'équation (16).

Il est facile de s'assurer que la formule (41) résout l'équation (37), dans le cas même où l'on pose $\tau' = 0$, $\tau'' = t$. Soit, en effet,

$$\text{(43)} \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} \frac{f(\tau)\, d\tau\, d\theta}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)},$$

on aura

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} \frac{(\Theta+\theta i) f(\tau)\, d\tau\, d\theta}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)} + \frac{f(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)}, \quad \ldots,$$

et, par suite,

$$\text{(44)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}(\alpha)u = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau\, d\theta \\ & + \frac{1}{2\pi}[\mathrm{A}_1 f(t) + \mathrm{A}_2 f'(t) + \ldots + \mathrm{A}_n f^{(n-1)}(t)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)} \\ & + \frac{1}{2\pi}[\mathrm{A}_2 f(t) + \mathrm{A}_3 f'(t) + \ldots + \mathrm{A}_n f^{(n-2)}(t)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Theta+\theta i)\, d\theta}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{2\pi}[\mathrm{A}_n f(t)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Theta+\theta i)^{n-1}\, d\theta}{\mathrm{F}(\Theta+\theta i)}. \end{aligned} \right.$$

Or, il est clair que, dans le second membre de l'équation (44), les coefficients de

$$f'(t), \quad f''(t), \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(t)$$

sont ce que deviennent les intégrales

$$T_1,\quad T_2,\quad \ldots,\quad T_{n-1},$$

pour $t = 0$, c'est-à-dire, égaux aux nombres

$$0,\quad 0,\quad \ldots,\quad 0.$$

Quant au coefficient de $f(t)$, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1 + A_2(\Theta+\theta i) + \ldots + A_n(\Theta+\theta i)^{n-1}}{F(\Theta+\theta i)}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\Theta+\theta i) - F(0)}{F(\Theta+\theta i)}\,\frac{d\theta}{\Theta+\theta i},$$

il est facile de s'assurer que sa valeur sera indépendante de la quantité Θ; et, comme pour de très grandes valeurs de Θ on a sensiblement

$$\frac{F(\Theta+\theta i) - F(0)}{F(\Theta+\theta i)} = 1,$$

cette même intégrale se réduira sensiblement à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\Theta+\theta i} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta\,d\theta}{\Theta^2+\theta^2} = \frac{1}{2},$$

pourvu que l'on se borne à calculer sa valeur principale, qui est effectivement la limite de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}\,\frac{d\theta}{\Theta+\theta i}.$$

De plus, comme on a généralement

$$(45)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\tau}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\,d\theta = \frac{1}{2}f(t),$$

l'équation (44) donnera évidemment

$$F(\alpha)u = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(t) = f(t).$$

Ainsi la valeur de u, déterminée par l'équation (43), satisfait à

l'équation (37). Si, d'ailleurs, on observe que cette valeur de u s'évanouit pour $t = 0$, on arrivera aux conclusions suivantes.

Pour obtenir une valeur de u qui soit propre à vérifier l'équation (37), quelle que soit la valeur de t, et les conditions (17) lorsqu'on pose $t = 0$, il suffit de prendre

$$(46)\qquad u = u_0 T_0 + u_1 T_1 + \ldots + u_{n-1} T_{n-1} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\,d\theta}{F(\Theta+\theta i)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(47)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Theta+\theta i) - F(U)}{\Theta+\theta i - U}\,\frac{e^{(\Theta+\theta i)t}}{F(\Theta+\theta i)} + \int_0^t \frac{e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau}{F(\Theta+\theta i)}\right]d\theta,$$

les puissances de U devant être remplacées par $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, et Θ devant être supérieur ou inférieur aux parties réelles de toutes les racines, suivant que la variable t est considérée comme positive ou négative. On peut encore présenter l'équation (47) sous la forme

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Theta+\theta i) - F(U)}{\Theta+\theta i - U}\,e^{(\Theta+\theta i)t} + \int_0^t e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\right]\frac{d\theta}{F(\Theta+\theta i)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Theta+\theta i) - F(U)}{\Theta+\theta i - U} + \int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{e^{(\Theta+\theta i)\tau}}\right]\frac{e^{(\Theta+\theta i)t}\,d\theta}{F(\Theta+\theta i)}.\end{aligned}\right.$$

Il est important de remarquer que, dans l'intégrale double que renferme le second membre de l'équation (41), la fonction

$$\frac{1}{F(\Theta+\theta i)}$$

ne devient infinie pour aucune valeur réelle de θ, lorsque Θ est une limite supérieure ou inférieure aux parties réelles de toutes les racines. Il n'en serait plus de même si Θ devenait précisément égale à l'une des parties réelles dont il s'agit. Alors l'intégrale en question deviendrait indéterminée et la différence entre sa valeur générale et sa valeur principale serait un terme de la forme

$$c e^{\theta_m t},$$

c désignant une constante arbitraire et θ_m une racine de l'équation

$F(\theta) = 0$. Si les parties réelles de toutes les racines étaient égales entre elles et à Θ, alors

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau'}^{\tau''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\Theta + \theta i)(t-\tau)}}{F(\Theta + \theta i)} f(\tau)\, d\tau\, d\theta \tag{41}$$

représenterait l'intégrale générale de l'équation

$$F(\alpha) u = f(t). \tag{37}$$

En se servant uniquement de la notation de M. Brisson, on peut trouver, de la manière suivante, l'intégrale générale de l'équation (37) sous la forme donnée par ce géomètre.

Supposons l'expression

$$F(\alpha, 6, \gamma, \ldots) f(x, y, z, \ldots),$$

définie par l'équation (16) du paragraphe III, et soient toujours

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_{n-1}$$

les racines de l'équation

$$F(\theta) = 0, \tag{49}$$

on aura identiquement

$$F(\alpha) = A_n(\alpha - \theta_0)(\alpha - \theta_1)\ldots(\alpha - \theta_{n-1}), \tag{50}$$

et, par suite, u désignant une fonction quelconque de x, on aura, en vertu des principes établis dans le paragraphe III,

$$F(\alpha) u = [A_n(\alpha - \theta_1)(\alpha - \theta_2)\ldots(\alpha - \theta_{n-1})](\alpha - \theta_0) u, \tag{51}$$

ou, si l'on pose

$$(\alpha - \theta_0) u = v, \tag{52}$$

on aura

$$F(\alpha) u = A_n(\alpha - \theta_1)(\alpha - \theta_2)\ldots(\alpha - \theta_{n-1}) v. \tag{53}$$

Par suite, on vérifiera l'équation

$$F(\alpha) u = 0, \tag{54}$$

en prenant $v = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$(\alpha - \theta_0) u = 0. \tag{55}$$

On prouvera également que l'équation (54) est vérifiée par toutes les valeurs de u propres à vérifier les suivantes

$$(\alpha - \theta_0) u = 0, \quad (\alpha - \theta_1) u = 0, \quad \ldots, \quad (\alpha - \theta_{n-1}) u = 0. \tag{56}$$

Donc, on la vérifiera encore si l'on prend pour u la somme des intégrales générales des équations (56), c'est-à-dire

$$u = c_0 e^{\theta_0 t} + c_1 e^{\theta_1 t} + \ldots + c_{n-1} e^{\theta_{n-1} t}, \tag{57}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ désignant n constantes arbitraires.

Si l'on propose de résoudre, à la place de l'équation (54), la suivante

$$F(\alpha) u = f(t), \tag{58}$$

il suffira de connaître une valeur particulière de u, telle que

$$u = \frac{f(t)}{F(\alpha)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta(t-\tau)i} f(\tau)\, d\tau\, d\theta}{F(\theta i)}. \tag{59}$$

En ajoutant à cette valeur particulière de u le second membre de la formule (57), on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (56).

Observons maintenant que

$$\frac{1}{F(\alpha)} = \frac{1}{F'(\theta_0)} \frac{1}{\alpha - \theta_0} + \frac{1}{F'(\theta_1)} \frac{1}{\alpha - \theta_1} + \ldots + \frac{1}{F'(\theta_{n-1})} \frac{1}{\alpha - \theta_{n-1}}. \tag{60}$$

Donc

$$\frac{f(t)}{F(\alpha)} = \frac{1}{F'(\theta_0)} \frac{f(t)}{\alpha - \theta_0} + \frac{1}{F'(\theta_1)} \frac{f(t)}{\alpha - \theta_1} + \ldots + \frac{1}{F'(\theta_{n-1})} \frac{f(t)}{\alpha - \theta_{n-1}}. \tag{61}$$

De plus

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(t)}{\alpha-\theta_0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(t-\tau)i}\,\frac{f(\tau)\,d\tau\,d\theta}{\theta i-\theta_0} \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{\theta_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta i-\theta_0)t}e^{-\theta\tau i}\,\frac{f(\tau)\,d\tau\,d\theta}{\theta i-\theta_0} \\ &= e^{\theta_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{(\theta i-\theta_0)t}e^{-\theta\tau i}f(\tau)\,d\tau\,d\theta\,dt \\ &= e^{\theta_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\theta_0 t}e^{\theta(t-\tau)i}f(\tau)\,d\tau\,d\theta\,dt \\ &= e^{\theta_0 t}\int e^{-\theta_0 t}f(t)\,dt, \end{aligned}\right.$$

l'intégration relative à t étant effectuée à partir de la limite qui fait évanouir l'exponentielle $e^{-\theta_0 t}$, c'est-à-dire à partir de $t=-\infty$ si la partie réelle de θ_0 est positive, et à partir de $t=+\infty$ dans le cas contraire. On aura, par suite, en vertu des équations (59) et (61),

$$(63)\quad u=\frac{1}{F'(\theta_0)}e^{\theta_0 t}\int e^{-\theta_0 t}f(t)\,dt+\ldots+\frac{1}{F'(\theta_{n-1})}e^{\theta_{n-1}t}\int e^{-\theta_{n-1}t}f(t)\,dt.$$

Si à cette valeur de u, dans laquelle chaque intégrale est prise à partir de la limite $-\infty$ ou $+\infty$, on ajoute le second membre de l'équation (57), on obtiendra une valeur de la même forme, mais dans laquelle chaque signe $\int$ indiquera une intégration indéfinie. Cette nouvelle valeur sera l'intégrale générale de la formule (58).

Si, en supposant toujours la notation

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)f(x,y,z,\ldots),$$

définie par l'équation (16) du paragraphe III, on indique par les caractéristiques

$$(64)\qquad D_x=\frac{\partial}{\partial x},\qquad D_y=\frac{\partial}{\partial y},\qquad \ldots$$

les dérivées d'une fonction de $x, y, z, \ldots$ relatives à $x, y, z, \ldots$, et par

$$(65)\qquad u=\frac{f(x,y,z,\ldots)}{F(D_x,D_y,\ldots)},$$

l'intégrale générale de l'équation

$$F(D_x,D_y,D_z,\ldots)u=f(x,y,z,\ldots),$$

dans le cas où $F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ est une fonction entière de $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$, on aura généralement dans le même cas

$$(66)\quad F(D_x,D_y,D_z,\ldots)f(x,y,z,\ldots)=F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)f(x,y,z,\ldots).$$

Mais l'expression

$$(67)\qquad \frac{f(x,y,z,\ldots)}{F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}$$

ne sera qu'une valeur particulière de

$$(68)\qquad \frac{f(x,y,z,\ldots)}{F(D_x,D_y,D_z,\ldots)}.$$

Ces conventions étant admises, l'équation (58) pourra être présentée sous la forme

$$(69)\qquad F(D_t)u=f(t),$$

et l'on en conclura facilement

$$(70)\qquad u=\frac{f(t)}{F(D_t)}=\frac{1}{F'(\theta_0)}\,\frac{f(t)}{D_t-\theta_0}+\ldots+\frac{1}{F'(\theta_{n-1})}\,\frac{f(t)}{D_t-\theta_{n-1}}.$$

Cette dernière équation ramène l'expression

$$\frac{f(t)}{F(D_t)}$$

aux suivantes

$$\frac{f(t)}{D_t-\theta_0},\quad \frac{f(t)}{D_t-\theta_1},\quad \ldots,\quad \frac{f(t)}{D_t-\theta_{n-1}},$$

c'est-à-dire qu'elle ramène l'intégrale générale de l'équation (69) à celles des équations

$$(71)\qquad (D_t-\theta_0)u=f(t),\quad \ldots,\quad (D_t-\theta_{n-1})u=f(t),$$

ou, en d'autres termes, à celles des équations

$$(72)\qquad \frac{du}{dt}-\theta_0 u=f(t),\quad \ldots,\quad \frac{du}{dt}-\theta_{n-1}u=f(t).$$

Or, ces intégrales générales étant respectivement

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l} u = e^{\theta_0 t}\left[c_0 + \int_0^t e^{-\theta_0 t} f(t)\,dt\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u = e^{\theta_{n-1} t}\left[c_{n-1} + \int_0^t e^{-\theta_{n-1} t} f(t)\,dt\right], \end{array}\right.$$

l'équation (70) deviendra

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{e^{\theta_0 t}}{F'(\theta_0)}\left[c_0 + \int_0^t e^{-\theta_0 t} f(t)\,dt\right] + \dots \\ \qquad + \dfrac{e^{\theta_{n-1} t}}{F'(\theta_{n-1})}\left[c_{n-1} + \int_0^t e^{-\theta_{n-1} t} f(t)\,dt\right]. \end{array}\right.$$

Telle est la méthode la plus simple pour former l'intégrale générale de l'équation (38).

§ V. — *Intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants.*

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$(1)\qquad F(D_x, D_y, D_z, \dots, D_t)u = f(x, y, z, \dots, t),$$

de manière que, pour $t = 0$,

$$(2)\qquad u,\quad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \dots,\quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}$$

se réduisent à

$$(3)\qquad f_0(x, y, z, \dots),\quad f_1(x, y, z, \dots),\quad \dots,\quad f_{m-1}(x, y, z, \dots),$$

m étant l'ordre de l'équation par rapport à t, c'est-à-dire le plus haut exposant de D_t dans $F(D_x, D_y, D_z, \dots, D_t)$; on posera

$$(4)\qquad u = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''} \dots e^{\alpha(x-\mu)i} e^{6(y-\nu)i} \dots v\, d\alpha\, d\mu\, d6\, d\nu \dots,$$

et il suffira évidemment d'intégrer l'équation différentielle

$$(5)\qquad F(\alpha i, 6i, \dots, D_t)v = f(\mu, \nu, \dots, t),$$

dans laquelle l'inconnue v représente une fonction de t, de manière que l'on ait, pour $t = 0$,

$$(6)\qquad v = f_0(\mu, \nu, \dots),\quad \frac{dv}{du} = f_1(\mu, \nu, \dots),\quad \dots,\quad \frac{d^{m-1} v}{dt^{m-1}} = f_{m-1}(\mu, \nu, \dots).$$

Ce dernier problème se résout très facilement par le paragraphe IV.

Supposons encore que l'on doive avoir

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{pour} & t = t_0, & F_0(D_x, D_y, \dots, D_t)u = f_0(x, y, z, \dots), \\ \quad » & t = t_1, & F_1(D_x, D_y, \dots, D_t)u = f_1(x, y, z, \dots), \\ & \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \quad » & t = t_{m-1}, & F_{m-1}(D_x, D_y, \dots, D_t)u = f_{m-1}(x, y, z, \dots). \end{array}\right.$$

Dans ce cas, il suffira d'intégrer l'équation (5), de manière que l'on ait

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{pour} & t = t_0, & F_0(\alpha i, 6i, \dots, D_t)v = f_0(\mu, \nu, \dots), \\ \quad » & t = t_1, & F_1(\alpha i, 6i, \dots, D_t)v = f_1(\mu, \nu, \dots), \\ & \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \quad » & t = t_{m-1}, & F_{m-1}(\alpha i, 6i, \dots, D_t)v = f_{m-1}(\mu, \nu, \dots). \end{array}\right.$$

Ce problème se résout encore très simplement par le paragraphe IV.

Soient maintenant

$$(9)\qquad \varphi_0(\alpha, 6, \dots),\quad \varphi_1(\alpha, 6, \dots),\quad \dots,\quad \varphi_{m-1}(\alpha, 6, \dots)$$

les valeurs de θ tirées de l'équation

$$(10)\qquad F(\alpha, 6, \gamma, \dots, \theta) = 0,$$

on vérifiera l'équation

$$(11)\qquad F(\alpha i, 6i, \dots, D_t)v = 0,$$

en posant

$$(12)\qquad v = e^{t\varphi_0(\alpha i, 6i, \dots)}\psi_0(\mu, \nu, \dots) + \dots + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha i, 6i, \dots)}\psi_{m-1}(\mu, \nu, \dots),$$

et, en substituant cette valeur de v dans la formule (4), puis adoptant les notations du paragraphe III, on trouvera, pour l'intégrale générale de l'équation

$$(13)\qquad F(D_x, D_y, \dots, D_t)u = 0,$$

la formule

$$(14)\qquad u = e^{t\varphi_0(\alpha,6,\ldots)}\psi_0(x,y,\ldots)+\ldots+e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,6,\ldots)}\psi_{m-1}(x,y,\ldots).$$

Si l'on ajoute au second membre de cette dernière une valeur particulière de u propre à vérifier l'équation (1), telle que

$$(15)\qquad u=\frac{f(x,y,z,\ldots,t)}{\mathrm{F}(\alpha,6,\gamma,\ldots,\theta)},$$

on trouvera, pour l'intégrale générale de l'équation (1),

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= e^{t\varphi_0(\alpha,6,\ldots)}\psi_0(x,y,\ldots)+\ldots\\ &\quad + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,6,\ldots)}\psi_{m-1}(x,y,\ldots)+\frac{f(x,y,z,\ldots,t)}{\mathrm{F}(\alpha,6,\gamma,\ldots,\theta)}.\end{aligned}\right.$$

La valeur correspondante de v serait

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} v &= e^{t\varphi_0(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots)}\psi_0(\mu,\nu,\ldots)+\ldots\\ &\quad + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots)}\psi_{m-1}(\mu,\nu,\ldots)+\frac{f(\mu,\nu,\ldots,t)}{\mathrm{F}(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots,\theta)},\end{aligned}\right.$$

le dernier terme représentant l'intégrale

$$(18)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta(t-\tau)\mathrm{i}}\,\frac{f(\mu,\nu,\ldots,\tau)}{\mathrm{F}(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots,\theta\mathrm{i})}\,d\tau\,d\theta.$$

Cela posé, il est facile de voir que les équations (7) donneront

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &f_0(x,y,z,\ldots)\\ &\quad = e^{t_0\varphi_0(\alpha,6,\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha,6,\ldots,\varphi_0(\alpha,6,\ldots)]\psi_0(x,y,\ldots)+\ldots\\ &\qquad + e^{t_0\varphi_{m-1}(\alpha,6,\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha,6,\ldots,\varphi_{m-1}(\alpha,6,\ldots)]\psi_{m-1}(x,y,\ldots)\\ &\qquad + \frac{\mathrm{F}_0(\alpha,6,\ldots,\theta)}{\mathrm{F}(\alpha,6,\ldots,\theta)}f(x,y,z,\ldots,t_0),\\ &f_1(x,y,z,\ldots)\\ &\quad = e^{t_0\varphi_0(\alpha,6,\ldots)}\mathrm{F}_1[\alpha,6,\ldots,\varphi_0(\alpha,6,\ldots)]\psi_0(x,y,\ldots)+\ldots\\ &\qquad + e^{t_1\varphi_{m-1}(\alpha,6,\ldots)}\mathrm{F}_1[\alpha,6,\ldots,\varphi_{m-1}(\alpha,6,\ldots)]\psi_{m-1}(x,y,\ldots)\\ &\qquad + \frac{\mathrm{F}_1(\alpha,6,\ldots,\theta)}{\mathrm{F}(\alpha,6,\ldots,\theta)}f(x,y,z,\ldots,t_1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

tandis que les équations (8) donneront

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &f_0(\mu,\nu,\ldots)\\ &\quad = e^{t_0\varphi_0(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots,\varphi_0(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots)]\psi_0(\mu,\nu,\ldots)+\ldots\\ &\qquad + e^{t_0\varphi_{m-1}(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots,\varphi_{m-1}(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots)]\psi_{m-1}(\mu,\nu,\ldots)\\ &\qquad + \frac{\mathrm{F}_0(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots,\theta)}{\mathrm{F}(\alpha\mathrm{i},6\mathrm{i},\ldots,\theta)}f(\mu,\nu,\ldots,t_0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Les équations (19), dans lesquelles α, 6, ... représentent des caractéristiques, serviront, en vertu des principes établis dans le paragraphe III, à déterminer les fonctions inconnues

$$\psi_0(x,y,\ldots),\quad \psi_1(x,y,\ldots),\quad \ldots,\quad \psi_{m-1}(x,y,\ldots).$$

Les équations (20), dans lesquelles α, 6, ..., μ, ν, ... (θ excepté) représentent de véritables quantités, serviront à déterminer, de la même manière, les fonctions inconnues

$$\psi_0(\mu,\nu,\ldots),\quad \psi_1(\mu,\nu,\ldots),\quad \ldots,\quad \psi_{m-1}(\mu,\nu,\ldots),$$

qui renfermeront, de plus, α, 6, γ, ... Le calcul sera le même dans les deux cas, et l'on retrouvera les mêmes résultats, soit que l'on substitue les valeurs de $\psi_0(\mu,\nu,\ldots)$, $\psi_1(\mu,\nu,\ldots)$, ... dans les formules (4) et (17), soit que l'on substitue les valeurs de $\psi_0(x,y,\ldots)$, $\psi_1(x,y,\ldots)$, ... dans la formule (16), pourvu toutefois que l'on se borne aux valeurs particulières de $\psi_0(x,y,\ldots)$, $\psi_1(x,y,\ldots)$, ..., déduites par l'élimination des équations (19).

Si, conformément aux conventions établies dans le paragraphe IV, on regarde la notation

$$(21)\qquad \frac{f(x,y,z,\ldots,t)}{\mathrm{F}(\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_y,\ldots,\mathrm{D}_t)},$$

comme expliquant l'intégrale de

$$(22)\qquad \mathrm{F}(\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_y,\ldots,\mathrm{D}_t)u=f(x,y,z,\ldots,t),$$

alors, en supposant

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{F(D_x, D_y, \ldots, D_t)} \\ &\quad = \frac{A}{aD_x + bD_y + \ldots + kD_t + l} + \frac{A'}{a'D_x + b'D_y + \ldots + k'D_t + l'} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x, y, z, \ldots, t)}{F(D_x, D_y, \ldots, D_t)} = {} & A\,\frac{f(x, y, z, \ldots, t)}{aD_x + bD_y + \ldots + kD_t + l} \\ & + A'\,\frac{f(x, y, z, \ldots, t)}{a'D_x + b'D_y + \ldots + k'D_t + l'} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière formule ramène l'intégration de l'équation (22) à celles des équations de la forme

$$(25)\qquad (aD_x + bD_y + \ldots + kD_t + l)u = f(x, y, z, \ldots, t).$$

Supposons, par exemple, que $F(\alpha, 6)$ soit une fonction homogène de α et 6 du degré m, en sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} F(\alpha, 6) = 6^m F\left(\frac{\alpha}{6}, 1\right) &= A_m 6^m\left(\frac{\alpha}{6} - \theta_0\right)\left(\frac{\alpha}{6} - \theta_1\right)\cdots\left(\frac{\alpha}{6} - \theta_{m-1}\right) \\ &= A_m \quad (\alpha - \theta_0 6)(\alpha - \theta_1 6)\ldots(\alpha - \theta_{m-1} 6), \end{aligned}$$

on trouvera, en posant $F\left(\frac{\alpha}{6}, 1\right) = \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right)$,

$$\frac{1}{F(\alpha, 6)} = \frac{1}{\Phi'(\theta_0)}\,\frac{1}{\alpha - \theta_0 6} + \ldots + \frac{1}{\Phi'(\theta_{m-1})}\,\frac{1}{\alpha - \theta_{m-1} 6},$$

et, par suite, l'intégrale de l'équation

$$(26)\qquad F(D_x, D_y)u = f(x, y)$$

sera

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{f(x, y)}{F(D_x, D_y)} \\ &= \frac{1}{\Phi'(\theta_0)}\,\frac{f(x, y)}{D_x - \theta_0 D_y} + \frac{1}{\Phi'(\theta_1)}\,\frac{f(x, y)}{D_x - \theta_1 D_y} + \ldots + \frac{1}{\Phi'(\theta_{m-1})}\,\frac{f(x, y)}{D_x - \theta_{m-1} D_y}. \end{aligned}\right.$$

En général, si $F(\alpha, 6, \gamma, \ldots, \theta)$ se décompose en plusieurs facteurs

du premier degré, ou de la forme

$$a\alpha + b6 + c\gamma + \ldots + k\theta + l,$$

alors, en posant

$$(28)\qquad \frac{\partial F(\alpha, 6, \gamma, \ldots, \theta)}{\partial \alpha} = \varphi(\alpha, 6, \gamma, \ldots, \theta),$$

on trouvera

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{F(\alpha, 6, \gamma, \ldots, \theta)} \\ &\quad = \frac{1}{\varphi\left(-\frac{b6 + c\gamma + \ldots + k\theta + l}{a}, 6, \gamma, \ldots, \theta\right)}\,\frac{1}{a\alpha + b6 + \ldots + k\theta + l} + \ldots; \end{aligned}\right.$$

et, par suite, l'intégrale générale de l'équation

$$(30)\qquad F(D_x, D_y, D_z, \ldots, D_t)u = f(x, y, z, \ldots, t)$$

sera

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{f(x, y, z, \ldots, t)}{F(D_x, D_y, \ldots, D_t)} \\ &= \frac{f(x, y, z, \ldots, t)}{(aD_x + bD_y + \ldots + kD_t + l)\,\varphi\left[-\left(\frac{b}{a}D_y + \frac{c}{a}D_y + \ldots + \frac{k}{a}D_t + \frac{l}{a}\right), D_y, D_z, \ldots, D_t\right]} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et se trouvera ramenée à celle des équations de la forme

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &(aD_x + bD_y + \ldots + kD_t + l) \\ &\quad \times \varphi\left[-\left(\frac{b}{a}D_y + \ldots + \frac{k}{a}D_t + l\right), D_y, \ldots, D_t\right]u = f(x, y, \ldots, t). \end{aligned}\right.$$

On peut aussi, dans cette hypothèse, présenter l'équation (30) sous la forme

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &A_m(aD_x + bD_y + \ldots + kD_t + l)(a'D_x + b'D_y + \ldots + k'D_t + l')\ldots u \\ &\quad = f(x, y, \ldots, t), \end{aligned}\right.$$

et l'on en conclut

$$\begin{aligned} &A_m(a'D_x + b'D_y + \ldots + k'D_t + l')(a''D_x + \ldots + k''D_t + l'')\ldots u \\ &\quad = \frac{f(x, y, \ldots, t)}{aD_x + bD_y + \ldots + l}. \end{aligned}$$

Par suite, si l'on fait

$$\frac{f(x, y, z, \ldots, t)}{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + \ldots + k\mathrm{D}_t + l} = v, \tag{34}$$

c'est-à-dire, si l'on intègre une équation aux différences partielles du premier ordre, on n'aura plus qu'à résoudre l'équation

$$\mathrm{A}_m(a'\mathrm{D}_x + \ldots + k'\mathrm{D}_t + l')(a''\mathrm{D}_x + \ldots + k''\mathrm{D}_t + l'')\ldots u = v, \tag{35}$$

dont le second membre est censé connu, et qui se trouve réduite à l'ordre $m - 1$. Or, on tirera de celle-ci, en posant

$$\frac{v}{a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y + \ldots + c'\mathrm{D}_t + l'} = w, \tag{36}$$

la nouvelle équation

$$\mathrm{A}_m(a''\mathrm{D}_x + b''\mathrm{D}_y + \ldots + k''\mathrm{D}_t + l'')\ldots u = w, \tag{37}$$

qui est de l'ordre $m - 2$ seulement; etc., et, si tous les facteurs sont du premier degré, comme on l'a supposé, on finira par intégrer complètement l'équation (33).

Si l'on supposait

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\chi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\ldots, \tag{38}$$

on ferait dépendre l'intégration de l'équation

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \ldots)u = f(x, y, z, \ldots), \tag{39}$$

de celle d'une suite d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \ldots)v = f(x, y, z, \ldots), \\ \chi(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z, \ldots)w = v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{40}$$

Lorsque $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ désigne, non plus une fonction entière, mais une fonction quelconque de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, on peut toujours satisfaire à l'équation linéaire

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)u = f(x, y, z, \ldots), \tag{41}$$

en posant

$$u = \frac{f(x, y, z, \ldots)}{\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)}. \tag{42}$$

Mais ce n'est là qu'une valeur particulière de u. Pour obtenir la valeur générale de u, il faut ajouter, au second membre de l'équation (42), l'intégrale générale de

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)u = 0. \tag{43}$$

Or, soit

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\chi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots), \tag{44}$$

et posons

$$\chi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)u = v, \tag{45}$$

on aura, en vertu des principes établis à la fin du paragraphe III,

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)u = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)v, \tag{46}$$

et, par suite, on satisfera à l'équation (43), non seulement en posant $u = 0$, mais encore en posant $v = 0$ ou

$$\chi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)u = 0. \tag{47}$$

Ainsi, $\chi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ étant un facteur quelconque de $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, la valeur la plus générale de u, qui vérifiera la formule (47), vérifiera aussi l'équation (43). Donc, par suite, on pourra prendre pour u, dans l'équation (43), la somme des intégrales générales qu'on déduit de l'équation (47), en substituant successivement à $\chi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ tous les facteurs possibles de $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

Si l'équation

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta) = 0, \tag{48}$$

étant résolue par rapport à θ, donne les valeurs

$$\theta_0 = \varphi_0(\alpha, \beta, \ldots), \quad \theta_1 = \varphi_1(\alpha, \beta, \ldots), \quad \ldots, \quad \theta_{m-1} = \varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \ldots), \tag{49}$$

on vérifiera l'équation (43) en prenant pour u la somme des intégrales générales des équations

$$(50)\quad \begin{cases} [\theta - \varphi_0\ \ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)]u = 0, \\ [\theta - \varphi_1\ \ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)]u = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [\theta - \varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)]u = 0, \end{cases}$$

ou

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \varphi_0\ \ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du}{dt} = \varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)u. \end{cases}$$

Or, si l'on pose

$$u = e^{t\varphi_0(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)}\psi_0(x, y, \ldots),$$

on aura évidemment

$$\frac{du}{dt} = \varphi_0(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)e^{t\varphi_0(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)}\psi_1(x, y, \ldots) = \varphi_0(\alpha, \beta, \ldots)u.$$

Donc, la première des équations (51) sera vérifiée. En raisonnant de même pour les suivantes, puis, réunissant les diverses valeurs de u, on retrouvera

$$(52)\quad u = e^{t\varphi_0(\alpha, \beta, \ldots)}\psi_0(x, y, \ldots) + \ldots + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \ldots)}\psi_{m-1}(x, y, \ldots),$$

c'est-à-dire la formule (14). Du reste, il parait difficile de démontrer en toute rigueur que la valeur de u, donnée par l'équation (52), est l'intégrale générale de la formule (43).

Revenons maintenant aux équations (19), et faisons, pour abréger,

$$(53)\quad \begin{cases} f_0(x, y, z, \ldots) - \dfrac{F_0(\alpha, \beta, \ldots, \theta)}{F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)} f(x, y, z, \ldots, t_0) = \mathfrak{f}_0(x, y, z, \ldots), \\ f_1(x, y, z, \ldots) - \dfrac{F_1(\alpha, \beta, \ldots, \theta)}{F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)} f(x, y, z, \ldots, t_1) = \mathfrak{f}_1(x, y, z, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

puis, écrivons simplement φ_0, φ_1, ..., au lieu de $\varphi_0(\alpha, \beta, \ldots)$,

$\varphi_1(\alpha, \beta, \ldots)$, ...; les équations (19) deviendront

$$(54)\quad \begin{cases} e^{t_0\varphi_0}F_0(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_0)\psi_0(x, y, \ldots) + \ldots + e^{t_0\varphi_{m-1}}F_0(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_{m-1})\psi_{m-1}(x, y, \ldots) = \mathfrak{f}_0(x, y, \ldots), \\ e^{t_1\varphi_0}F_1(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_0)\psi_0(x, y, \ldots) + \ldots + e^{t_1\varphi_{m-1}}F_1(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_{m-1})\psi_{m-1}(x, y, \ldots) = \mathfrak{f}_1(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour obtenir les valeurs générales de

$$\psi_0(x, y, \ldots),\quad \psi_1(x, y, \ldots),\quad \ldots,\quad \psi_{m-1}(x, y, \ldots),$$

propres à vérifier ces dernières, il suffit de calculer leurs valeurs particulières, en opérant comme si, dans les équations (54), toutes les lettres représentaient des quantités véritables, puis de joindre à ces valeurs particulières les valeurs générales propres à résoudre les équations

$$(55)\quad \begin{cases} e^{t_0\varphi_0}F_0(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_0)\psi_0(x, y, \ldots) + \ldots + e^{t_0\varphi_{m-1}}F_0(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_{m-1})\psi_{m-1}(x, y, \ldots) = 0, \\ e^{t_1\varphi_0}F_1(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_0)\psi_0(x, y, \ldots) + \ldots + e^{t_1\varphi_{m-1}}F_1(\alpha, \beta, \ldots, \varphi_{m-1})\psi_{m-1}(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on élimine entre ces dernières ψ_1, ψ_2, ..., ψ_{m-1}, on obtiendra une nouvelle équation de la forme

$$(56)\quad \varpi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\psi_0(x, y, z, \ldots) = 0.$$

$\varpi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ désignant le dénominateur commun des valeurs particulières de $\psi_0(x, y, z, \ldots)$, $\psi_1(x, y, z, \ldots)$, ..., $\psi_{m-1}(x, y, z, \ldots)$, déduites par l'élimination des équations (54). Cela posé, on cherchera la valeur générale de $\psi_0(x, y, z, \ldots)$, propre à résoudre l'équation (56), à l'aide de la méthode indiquée pour la solution de l'équation (43), puis on la combinera avec des valeurs de $\psi_1(x, y, z, \ldots)$, $\psi_2(x, y, z, \ldots)$, ..., $\psi_{m-1}(x, y, z, \ldots)$, déduites des équations

$$(57)\quad \begin{cases} \varpi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\psi_1\ \ (x, y, z, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\psi_{m-1}(x, y, z, \ldots) = 0, \end{cases}$$

de manière que les équations (55) soient toujours satisfaites. On pourrait aussi substituer chaque valeur de $\psi_0(x, y, z, \ldots)$ dans les équations (55) pour en déduire les valeurs correspondantes de $\psi_1(x, y, \ldots)$, $\psi_2(x, y, \ldots)$, $\ldots$, $\psi_{m-1}(x, y, \ldots)$.

Exemple I. — Résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (m+n)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + mn\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{58}$$

de manière que l'on ait pour $t = t_0$,

$$u = f_0(x),$$

pour $t = t_1$,

$$u = f_1(x).$$

Solution. — L'équation (58) se réduit à

$$[\theta^2 + (m+n)\alpha\theta + mn\alpha^2]u = 0. \tag{59}$$

Or, de la formule

$$\theta^2 + (m+n)\alpha\theta + mn\alpha^2 = 0,$$

ou

$$(\theta + m\alpha)(\theta + n\alpha) = 0,$$

on tire les valeurs suivantes de θ

$$\theta = -m\alpha, \qquad \theta = -n\alpha.$$

Donc, par suite,

$$u = e^{-m\alpha t}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t}\psi_1(x). \tag{60}$$

En outre, les conditions prescrites donneront

$$\left\{\begin{aligned} e^{-m\alpha t_0}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_0}\psi_1(x) &= f_0(x), \\ e^{-m\alpha t_1}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_1}\psi_1(x) &= f_1(x), \end{aligned}\right. \tag{61}$$

et l'on en conclura

$$\left\{\begin{aligned} \varpi(\alpha)\psi_0(x) &= e^{-n\alpha t_1} f_0(x) - e^{-n\alpha t_0} f_1(x), \\ \varpi(\alpha)\psi_1(x) &= e^{-m\alpha t_0} f_1(x) - e^{-m\alpha t_1} f_0(x), \end{aligned}\right. \tag{62}$$

$\varpi(\alpha)$ étant déterminé par la formule

$$\varpi(\alpha) = e^{-m\alpha t_0}e^{-n\alpha t_1} - e^{-n\alpha t_0}e^{-m\alpha t_1} = e^{-(nt_0+mt_1)\alpha}[e^{-(m-n)(t_1-t_0)\alpha} - 1]. \tag{63}$$

Par suite, en posant

$$(m-n)(t_1-t_0) = k, \tag{64}$$

on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} (e^{k\alpha}-1)\psi_0(x) &= e^{(mt_0+k)\alpha} f_0(x) + e^{mt_1\alpha} f_1(x), \\ (e^{k\alpha}-1)\psi_1(x) &= e^{(nt_1+k)\alpha} f_1(x) + e^{n\alpha t_0} f_0(x). \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Cela posé, les valeurs particulières de $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ seront

$$\left\{\begin{aligned} \psi_0(x) &= \frac{e^{(mt_0+k)\alpha} f_0(x) + e^{mt_1\alpha} f_1(x)}{e^{k\alpha}-1}, \\ \psi_1(x) &= \frac{e^{(nt_1+k)\alpha} f_1(x) + e^{nt_0\alpha} f_0(x)}{e^{k\alpha}-1}, \end{aligned}\right. \tag{66}$$

et l'on devra joindre, à ces valeurs particulières, les valeurs générales de $\psi_0(x, y)$, $\psi_1(x, y)$ tirées des équations

$$\left\{\begin{aligned} e^{-m\alpha t_0}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_0}\psi_1(x) &= 0, \\ e^{-m\alpha t_1}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_1}\psi_1(x) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{67}$$

Or, ces dernières donnent

$$\varpi(\alpha)\psi_0(x) = 0,$$

ou

$$(e^{k\alpha}-1)\psi_0(x) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Delta\psi_0(x) = 0, \tag{68}$$

Δx étant égal à k. Donc

$$\psi_0(x) = \varphi\left(\cos\frac{2\pi x}{k}, \sin\frac{2\pi x}{k}\right). \tag{69}$$

De plus, on tirera de la première des équations (67)

$$\psi_1(x) = e^{(n-m)t_0\alpha}\psi_0(x) = \psi_0[x + (n-m)t_0].$$

Si, pour plus de simplicité, on écrit

$$\psi_0(x) = \varphi\left(\frac{x + mt_0}{k}\right), \tag{70}$$

on trouvera

$$\psi_1(x) = \varphi\left(\frac{x + nt_0}{k}\right). \tag{71}$$

Lorsque

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} \tag{72}$$

doivent se réduire à

$$f_0(x, y, \ldots), \quad f_1(x, y, \ldots), \quad \ldots, \quad f_{m-1}(x, y, \ldots), \tag{73}$$

pour $t = 0$, les équations (55) deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
&\psi_0(x, y, \ldots) + \psi_1(x, y, \ldots) + \ldots + \psi_{m-1}(x, y, \ldots) = 0,\\
&\varphi_0(\alpha, 6, \ldots)\psi_0(x, y, \ldots) + \varphi_1(\alpha, 6, \ldots)\psi_1(x, y, \ldots) + \ldots\\
&\qquad + \varphi_{m-1}(\alpha, 6, \ldots)\psi_{m-1}(x, y, \ldots) = 0,\\
&[\varphi_0(\alpha, 6, \ldots)]^2\psi_0(x, y, \ldots) + [\varphi_1(\alpha, 6, \ldots)]^2\psi_1(x, y, \ldots) + \ldots\\
&\qquad + [\varphi_{m-1}(\alpha, 6, \ldots)]^2\psi_{m-1}(x, y, \ldots) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&[\varphi_0(\alpha, 6, \ldots)]^{m-1}\psi_0(x, y, \ldots) + [\varphi_1(\alpha, 6, \ldots)]^{m-1}\psi_1(x, y, \ldots) + \ldots\\
&\qquad + [\varphi_{m-1}(\alpha, 6, \ldots)]^{m-1}\psi_{m-1}(x, y, \ldots) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{74}$$

Or, en éliminant $\psi_1(x, y, \ldots)$, $\psi_2(x, y, \ldots)$, $\ldots$, $\psi_{m-1}(x, y, \ldots)$, on tire des équations (74)

$$(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2)\ldots(\varphi_0 - \varphi_{m-1})\psi_0(x, y, \ldots) = 0. \tag{75}$$

Soient d'ailleurs

$$\alpha = \chi_0(6, \gamma, \ldots), \qquad \alpha = \chi_1(6, \gamma, \ldots), \qquad \ldots, \tag{76}$$

les valeurs de α déduites des équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\varphi_0(\alpha, 6, \gamma, \ldots) - \varphi_1(\alpha, 6, \gamma, \ldots) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi_0(\alpha, 6, \gamma, \ldots) - \varphi_{m-1}(\alpha, 6, \gamma, \ldots) = 0,
\end{aligned}\right. \tag{77}$$

on trouvera pour la valeur générale de $\psi_0(x, y, z, \ldots)$ déduite de

l'équation (75)

$$\psi_0(x, y, z, \ldots) = e^{x\chi_0(6, \gamma, \ldots)}\aleph_0(y, z, \ldots) + e^{x\chi_1(6, \gamma, \ldots)}\aleph_1(y, z, \ldots) + \ldots, \tag{78}$$

$\aleph_0$, $\aleph_1$, $\ldots$ indiquant de nouvelles fonctions arbitraires. Des valeurs correspondantes, mais particulières, de $\psi_1(x, y, \ldots)$, $\psi_2(x, y, \ldots)$, $\ldots$ tirées des équations (74), seront

$$\left\{\begin{aligned}
&\psi_1(x, y, z, \ldots) = -\frac{(\varphi_0 - \varphi_2)(\varphi_0 - \varphi_3)\ldots(\varphi_0 - \varphi_{m-1})}{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3)\ldots(\varphi_1 - \varphi_{m-1})}\psi_0(x, y, z, \ldots),\\
&\psi_2(x, y, z, \ldots) = -\frac{(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_3)\ldots(\varphi_0 - \varphi_{m-1})}{(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_3)\ldots(\varphi_2 - \varphi_{m-1})}\psi_0(x, y, z, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\psi_{m-1}(x, y, z, \ldots) = -\frac{(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2)\ldots(\varphi_0 - \varphi_{m-1})}{(\varphi_{m-1} - \varphi_1)(\varphi_{m-1} - \varphi_2)\ldots(\varphi_{m-1} - \varphi_{m-1})}\psi_0(x, y, z, \ldots),
\end{aligned}\right. \tag{79}$$

et la valeur correspondante de u donnée par la formule (52) deviendra

$$u = \left[e^{t\varphi_0} - \frac{(\varphi_0 - \varphi_2)(\varphi_0 - \varphi_3)\ldots(\varphi_0 - \varphi_{m-1})}{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3)\ldots(\varphi_1 - \varphi_{m-1})}e^{t\varphi_1} - \ldots\right]\psi_0(x, y, z, \ldots). \tag{80}$$

Si, dans cette dernière, on substitue à la place de $\psi_0(x, y, z, \ldots)$ un terme de la forme

$$e^{x\chi_0(\alpha, 6, \ldots)}\aleph_0(y, z, \ldots),$$

$\alpha = \chi_0(6, \gamma, \ldots)$ étant l'une des racines des équations (77), on obtiendra un résultat nul. Donc la valeur de u, donnée par la formule (80), se réduira tout entière à zéro.

Si, au lieu des valeurs particulières de $\psi_1(x, y, \ldots)$, $\psi_2(x, y, \ldots)$, $\ldots$, on voulait employer leurs valeurs générales, il faudrait ajouter à la valeur de u, donnée par l'équation (80), celle qu'on obtiendrait en posant dans l'équation (52)

$$\psi_0(x, y, z, \ldots) = 0,$$

c'est-à-dire en posant

$$u = e^{t\varphi_1(\alpha, 6, \gamma, \ldots)}\psi_1(x, y, z, \ldots) + \ldots + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha, 6, \gamma, \ldots)}\psi_{m-1}(x, y, z, \ldots),$$

puis déterminant

$$\psi_1(x, y, z, \ldots), \quad \ldots, \quad \psi_{m-1}(x, y, z, \ldots),$$

à l'aide des équations

$$(81)\quad \left\{\begin{array}{r} \psi_1(x,y,z,\ldots)+\ldots+\psi_{m-1}(x,y,z,\ldots)=0, \\ \varphi_1(\alpha,\beta,\ldots)\psi_1(x,y,z,\ldots)+\ldots+\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\ldots)\psi_{m-1}(x,y,\ldots)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [\varphi_1(\alpha,\beta,\ldots)]^{m-2}\psi_1(x,y,z,\ldots)+\ldots+[\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\ldots)]^{m-1}\psi_{m-2}(x,y,\ldots)=0. \end{array}\right.$$

On se trouvera ainsi ramené au cas où l'équation linéaire en u serait de l'ordre $m-1$ relativement à t, et de la forme

$$(82)\qquad (\theta-\varphi_1)(\theta-\varphi_2)\ldots(\theta-\varphi_{m-1})u=0.$$

Par conséquent, une seule valeur de u sera propre à vérifier l'équation

$$(83)\qquad (\theta-\varphi_0)(\theta-\varphi_1)\ldots(\theta-\varphi_{m-1})u=0,$$

de manière que

$$u,\quad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}$$

se réduisent à des fonctions données de $x, y, z, \ldots$, pour $t=0$, si une seule valeur de u est propre à vérifier l'équation (82), avec la condition que

$$u,\quad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}$$

se réduisent à des fonctions données, ou bien à des valeurs nulles pour $t=0$. En continuant de la même manière, on prouvera qu'une seule valeur de u peut vérifier l'intégrale (83) avec les conditions prescrites, si une seule valeur de u peut vérifier une équation de la forme

$$(84)\qquad (\theta-\varphi_0)u=0,$$

de manière à s'évanouir pour $t=0$. Or, on aura, dans ce cas,

$$(85)\qquad u=e^{t\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}\psi_0(x,y,z,\ldots),$$

et l'équation de condition donnera

$$\psi_0(x,y,z,\ldots)=0$$

et, par suite,

$$(86)\qquad u=0.$$

Telle est la seule valeur de u, propre à vérifier l'équation (85) avec la condition requise. Par conséquent, une seule valeur de u vérifiera l'équation (83) avec les conditions prescrites. Donc, par suite, une seule valeur de u pourra vérifier l'équation (41), supposée de l'ordre m par rapport à t, de manière que

$$u,\quad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}$$

se réduisent à des fonctions données

$$f_0(x,y,z,\ldots),\quad f_1(x,y,z,\ldots),\quad \ldots,\quad f_{m-1}(x,y,z,\ldots),$$

pour $t=0$. Donc l'équation (4), après que l'on aura déterminé v de manière à remplir les conditions prescrites, sera l'intégrale générale de la formule (1).

Exemple II. — Intégrer l'équation

$$(87)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-m^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0,$$

relative au mouvement d'une corde tendue, de manière que l'on ait, pour $t=0$,

$$(88)\qquad \frac{\partial z}{\partial t}=0\quad \text{et}\quad z=f(x).$$

Solution. — On trouvera

$$z=e^{\frac{\alpha t}{m}}\psi_0(x)+e^{-\frac{\alpha t}{m}}\psi_1(x),$$

$$\psi_0(x)+\psi_1(x)=f(x),$$

$$\frac{\alpha}{m}\psi_0(x)-\frac{\alpha}{m}\psi_1(x)=0,$$

$$\psi_0(x)=\psi_1(x)=\frac{1}{2}f(x).$$

$$(89)\quad z=e^{\frac{1}{m}\alpha t}\frac{1}{2}f(x)+e^{-\frac{1}{m}\alpha t}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{t}{m}\right)+f\left(x-\frac{t}{m}\right)\right].$$

Nota. — La solution précédente suppose la fonction $f(x)$ connue au premier instant pour toutes les valeurs de x.

Concevons maintenant que les conditions (88) doivent être remplies seulement entre les limites $x = 0$, $x = a$, et que de plus z doive s'évanouir aux deux limites, quel que soit t; on aura

$$\begin{aligned} z &= e^{m\theta x}\psi_0(t) + e^{-m\theta x}\psi_1(t), \\ 0 &= \psi_0(t) + \psi_1(t), \\ 0 &= e^{m\theta a}\psi_0(t) + e^{-m\theta a}\psi_1(t), \\ (e^{m\theta a} &- e^{-m\theta a})\psi_0(t) = 0. \end{aligned}$$

On satisfait à la dernière équation, en posant

$$m\theta a = \pm n\pi i,$$

n étant un entier quelconque. Donc, par suite, on aura

$$\psi_0(t) = \mathrm{S}\left(c_0 e^{\frac{nt\pi i}{ma}} + c_1 e^{\frac{-nt\pi i}{ma}}\right) = -\psi_1(t),$$

$$\begin{aligned} z &= (e^{m\theta x} - e^{-m\theta x})\,\mathrm{S}\left(c_0 e^{\frac{nt\pi i}{ma}} + c_1 e^{\frac{-nt\pi i}{ma}}\right) \\ &= \mathrm{S}\left[c_0\left(e^{\frac{n(t+mx)\pi i}{ma}} - e^{\frac{n(t-mx)\pi i}{ma}}\right) - c_1\left(e^{\frac{-n(t+mx)\pi i}{ma}} - e^{\frac{-n(t-mx)\pi i}{ma}}\right)\right]; \end{aligned}$$

et, pour $t = 0$,

$$\frac{dz}{dt} = \mathrm{S}\left[\frac{n\pi i}{ma}\left(e^{\frac{nx\pi i}{a}} - e^{\frac{-nx\pi i}{a}}\right)(c_0 - c_1)\right].$$

Pour que $\frac{dz}{dt}$ s'évanouisse alors quel que soit x, il faudra que l'on ait $c_1 = c_0$. Donc, par suite,

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= \mathrm{S}\left[c\left(e^{\frac{n\pi t i}{a}} + e^{\frac{-n\pi t i}{a}}\right)\left(e^{\frac{n\pi x i}{a}} - e^{\frac{-n\pi x i}{a}}\right)\right] \\ &= \mathrm{S}\left[\mathrm{A}\cos\left(\frac{n\pi t}{ma}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

A étant égal à $4ci$.

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients A, de manière que

l'on ait, pour $t = 0$, $z = f(x)$, c'est-à-dire

$$(91)\qquad f(x) = \mathrm{S}_0^{\infty}\left(\mathrm{A}\sin\frac{n\pi x}{a}\right) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\sin\frac{\pi x}{a} + \mathrm{A}_2\sin\frac{2\pi x}{a} + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$ et $x = a$.

Exemple III. — Intégrer l'équation

$$(92)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

de manière que l'on ait, pour $z = h$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

pour $z = 0$,

$$g\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

pour $z = 0$ et $t = 0$,

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y).$$

Solution. — On trouvera, en mettant x, y, z en évidence,

$$(93)\qquad u = e^{zi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_0(x, y) + e^{-zi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_1(x, y),$$

$$(94)\qquad 0 = \sqrt{\alpha^2 + 6^2}\left[e^{hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_0(x, y) - e^{-hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_1(x, y)\right].$$

Soient

$$(95)\qquad \left\{\begin{aligned} e^{hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_0(x, y) + e^{-hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_1(x, y) &= \varpi_0(x, y), \\ e^{hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_0(x, y) - e^{-hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\psi_1(x, y) &= \varpi_1(x, y); \end{aligned}\right.$$

l'équation (94) deviendra

$$(96)\qquad \sqrt{\alpha^2 + 6^2}\,\varpi_1(x, y) = 0,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= e^{-hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\left[\varpi_0(x, y) + \varpi_1(x, y)\right], \\ \psi_1(x, y) &= e^{hi\sqrt{\alpha^2+6^2}}\left[\varpi_0(x, y) - \varpi_1(x, y)\right]. \end{aligned}$$

Or, on tire de l'équation (96), $\alpha^2+\beta^2$ étant égal au produit $(\alpha-\beta i)(\alpha+\beta i)$,

$$\varpi_1(x,y)=e^{\beta x i}\varkappa_0(y)+e^{-\beta x i}\varkappa_1(y)=\varkappa_0(y+x i)+\varkappa_1(y-x i).$$

Cela posé, la valeur de u deviendra

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned} u=&\quad\left(e^{(h-z)i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+e^{-(h-z)i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\varpi_0(x,y)\\ &-\left(e^{(h-z)i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-e^{-(h-z)i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)[\varkappa_0(y+x i)+\varkappa_1(y-x i)],\end{aligned}\right.$$

et la seconde condition donnera

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} &i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,g\left(e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\varpi_0(x,y)+\left(e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\frac{d^2\varpi_0(x,y)}{dt^2}\\ &-i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,g\left(e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)(\varkappa_0+\varkappa_1)-\left(e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\left(\frac{d^2\varkappa_0}{dt^2}+\frac{d^2\varkappa_0}{dt^2}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, pour abréger, $\varkappa_0=0$, $\varkappa_1=0$, et de plus

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\lambda,\qquad \frac{d}{dt}=\theta,\qquad \varpi_0(x,y)=v,$$

$$i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}=\mu^2,$$

l'équation (98) deviendra

$$(99)\qquad [\theta^2(e^{h\lambda i}+e^{-h\lambda i})+g\lambda i(e^{h\lambda i}-e^{-h\lambda i})]v=0,$$

et l'on en tirera, en mettant t en évidence,

$$v=e^{\mu t i}\chi_0(x,y)+e^{-\mu t i}\chi_1(x,y),$$

$$(100)\qquad u=(e^{(h-z)\lambda i}+e^{-(h-z)\lambda i})[e^{\mu t i}\chi_0(x,y)+e^{-\mu t i}\chi_1(x,y)].$$

Par suite, la dernière condition donnera

$$(101)\qquad \left\{\begin{aligned} (e^{h\lambda i}+e^{-h\lambda i})[\chi_0(x,y)+\chi_1(x,y)]&=0,\\ \mu i(e^{h\lambda i}+e^{-h\lambda i})[\chi_0(x,y)-\chi_1(x,y)]&=f(x,y).\end{aligned}\right.$$

Or, on vérifie les équations (101) en prenant

$$\chi_0(x,y)=-\chi_1(x,y)=\frac{f(x,y)}{2\mu i(e^{h\lambda i}+e^{-h\lambda i})}.$$

Alors l'équation (100) deviendra

$$(102)\qquad u=\frac{(e^{(h-z)\lambda i}+e^{-(h-z)\lambda i})(e^{\mu t i}-e^{-\mu t i})}{2\mu i(e^{h\lambda i}+e^{-h\lambda i})}f(x,y).$$

Telle est effectivement la valeur de u, trouvée dans la théorie des ondes.

§ VI. — *Sur la détermination des fonctions arbitraires que comportent des intégrales générales des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants.*

Conservons les notations du paragraphe précédent; soit

$$(1)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta)u=f(x,y,z,\ldots,t)$$

une équation linéaire donnée, de l'ordre m par rapport à t, et désignons par

$$(2)\qquad \varphi_0(\alpha,\beta,\gamma,\ldots),\quad \varphi_1(\alpha,\beta,\gamma,\ldots),\quad \ldots,\quad \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$$

les m valeurs de θ, déduites de la formule

$$(3)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta)=0,$$

l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u=&\,e^{t\varphi_0(\alpha,\beta,\ldots)}\psi_0(x,y,\ldots)+\ldots\\ &+e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\ldots)}\psi_{m-1}(x,y,\ldots)+\frac{f(x,y,z,\ldots,t)}{F(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta)};\end{aligned}\right.$$

$\psi_0(x,y,z,\ldots)$, ..., $\psi_{m-1}(x,y,z,\ldots)$ désignant les fonctions arbitraires.

Supposons maintenant que l'on doive avoir

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \text{Pour} & t=t_0, & F_0(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta)u=f_0(x,y,z,\ldots),\\ \quad » & t=t_1, & F_1(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta)u=f_1(x,y,z,\ldots),\\ \quad » & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \quad » & t=t_{m-1}, & F_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\theta)u=f_{m-1}(x,y,z,\ldots),\end{array}\right.$$

les fonctions arbitraires se trouveront alors déterminées par les équations (19) du paragraphe précédent et ne pourront l'être que d'une seule manière, si les conditions (5) exigent seulement que l'on ait, pour $t = t_0$,

$$u = f_0(x, y, \ldots), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x, y, \ldots), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = f_{m-1}(x, y, \ldots). \tag{6}$$

Toutefois, cette dernière conclusion suppose que

$$f_0(x, y, \ldots), \quad f_1(x, y, \ldots), \quad \ldots, \quad f_{m-1}(x, y, \ldots) \tag{7}$$

sont connues pour toutes les valeurs possibles de $x, y, \ldots$. Or, il peut arriver, comme dans le problème des cordes vibrantes, que les fonctions (6) soient données *a priori* seulement pour certaines valeurs de $x, y, z, \ldots$ comprises entre certaines limites, et doivent être prolongées hors de ces limites, à l'aide de nouvelles conditions. Par exemple, dans le cas où $x, y, z, \ldots$ représentent des coordonnées, il peut arriver que des fonctions de la forme

$$f_0(x), \quad f_0(x, y), \quad f_0(x, y, z)$$

soient connues pour tous les points compris dans une longueur, dans une surface, ou dans un volume donné. Alors on pourra représenter la variable principale par des sommes d'exponentielles, respectivement multipliées par des constantes arbitraires, et il ne restera plus qu'à déterminer ces constantes de manière qu'entre les limites données les fonctions (6) prennent les valeurs qu'elles doivent avoir. C'est ce qui arrivera, par exemple, dans le problème des cordes vibrantes, si l'on fixe la valeur de z par le moyen de l'équation (90) du paragraphe V. Mais on pourrait aussi résoudre les questions proposées en exprimant la variable principale à l'aide des fonctions initiales, sauf à prolonger ensuite ces fonctions hors des limites primitives, en recourant, pour y parvenir, aux conditions supplémentaires. Ainsi, par exemple, si, dans le problème des cordes vibrantes, on représente par

$$z = f_0(x)$$

la valeur initiale de z, on trouvera, pour l'intégrale de

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \tag{8}$$

déterminée de manière que l'on ait à la fois

$$t = 0, \quad z = f_0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

on trouvera, dis-je,

$$z = \frac{1}{2}\left[f_0\left(x + \frac{t}{m}\right) + f_0\left(x - \frac{t}{m}\right)\right]. \tag{10}$$

Or, la fonction $f_0(x)$, qui détermine la forme initiale de la corde, est censée connue seulement entre les limites

$$x = 0, \quad x = a; \tag{11}$$

mais, pour la prolonger hors de ces limites, il suffit d'admettre que les valeurs de z correspondant aux valeurs précédentes de x sont toujours nulles, c'est-à-dire que l'on a, quel que soit t,

$$f_0\left(\frac{t}{m}\right) \quad + f_0\left(-\frac{t}{m}\right) \quad = 0,$$
$$f_0\left(a + \frac{t}{m}\right) + f_0\left(a - \frac{t}{m}\right) = 0,$$

et, par conséquent, quel que soit x,

$$f_0(x) + f_0(-x) = 0, \qquad f_0(a + x) + f_0(a - x) = 0. \tag{12}$$

Si, dans la seconde des équations (12), on remplace x par $x + a$, on en tirera

$$f_0(x + 2a) = -f_0(-x) = f_0(x).$$

Donc, par suite,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_0(x + 2a) = f_0(x + 4a) = \ldots \\ &= f_0(x - 2a) = f_0(x - 4a) = \ldots, \end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned} f_0(x + a) &= f_0(x + 3a) = f_0(x + 5a) = \ldots \\ &= f_0(x - a) = f_0(x - 3a) = f_0(x - 5a) = \ldots. \end{aligned}$$

Cela posé, soit $f(x)$ la valeur donnée de $f_0(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = a$. On aura, en vertu des équations qui précèdent,

$$(13)\quad \begin{cases} f_0(x) = f(x) & \text{entre les limites } \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}, \\ f_0(x) = -f(2a - x) & \text{»} \quad \begin{cases} x = a \\ x = 2a \end{cases}, \\ f_0(x) = f(x - 2a) & \text{»} \quad \begin{cases} x = 2a \\ x = 3a \end{cases}, \\ f_0(x) = -f(4a - x) & \text{»} \quad \begin{cases} x = 3a \\ x = 4a \end{cases}, \\ f_0(x) = f(x - 4a) & \text{»} \quad \begin{cases} x = 4a \\ x = 5a \end{cases}, \\ \dots\dots\dots\dots & \text{»} \quad \dots\dots \end{cases}$$

On trouvera, au contraire

$$(14)\quad \begin{cases} f_0(x) = -f(-x) & \text{entre les limites } \begin{cases} x = 0 \\ x = -a \end{cases}, \\ f_0(x) = f(x + 2a) & \text{»} \quad \begin{cases} x = -a \\ x = -2a \end{cases}, \\ f_0(x) = -f(-2a - x) & \text{»} \quad \begin{cases} x = -2a \\ x = -3a \end{cases}, \\ f_0(x) = f(x + 4a) & \text{»} \quad \begin{cases} x = -3a \\ x = -4a \end{cases}, \\ f_0(x) = -f(-4a - x) & \text{»} \quad \begin{cases} x = -4a \\ x = -5a \end{cases}, \\ \dots\dots\dots\dots & \text{»} \quad \dots\dots \end{cases}$$

Par conséquent, la valeur générale de $f_0(x)$ sera donnée par l'équation

$$(15)\quad \begin{cases} f_0(x) = A_0 f(x) - A_1 f(2a - x) + A_2 f(x - 2a) - \dots \\ - B_0 f(-x) + B_1 f(x + 2a) - B_2 f(-2a - x) + \dots, \end{cases}$$

si l'on désigne par A_n un coefficient qui se réduise à l'unité entre les limites $x = na$, $x = (n+1)a$, et soit toujours nul hors de ces limites; et par B_n un coefficient qui se réduise à l'unité, entre les limites $x = -na$, $x = -(n+1)a$, en restant toujours nul hors de ces limites. Or, on satisfera aux conditions requises, si l'on prend

$$(16)\qquad A_n = \frac{1}{2}\left[\frac{x - na}{\sqrt{(x - na)^2}} + \frac{(n+1)a - x}{\sqrt{[(n+1)a - x]^2}}\right]$$

et

$$(17)\qquad B_n = \frac{1}{2}\left[\frac{x + na}{\sqrt{(x + na)^2}} + \frac{(n+1)a + x}{\sqrt{[(n+1)a - x]^2}}\right].$$

On peut encore supposer

$$(18)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{na}^{(n+1)a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}\, d\mu\, d\alpha, \\ B_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-(n+1)a}^{-na}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}\, d\mu\, d\alpha, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(19)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-na-\mu)i}\, d\mu\, d\alpha, \\ B_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x+\overline{n+1}.a-\mu)i}\, d\mu\, d\alpha. \end{cases}$$

Si l'on a égard à ces dernières formules, l'équation (15) donnera

$$(20)\quad \begin{cases} f_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}\left[f(x) - e^{-a\alpha i} f(2a - x) + e^{-2a\alpha i} f(x - 2a) - \dots\right] d\mu\, d\alpha \\ - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}\left[e^{a\alpha i} f(-x) - e^{2a\alpha i} f(x + 2a) + e^{3a\alpha i} f(-2a - x) - \dots\right] d\mu\, d\alpha. \end{cases}$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{e^{\frac{\pi x}{a}i} - e^{-\frac{\pi x}{a}i}}{2i},$$

on trouvera, comme on devait s'y attendre,

$$f_0(x) = \sin\frac{\pi x}{a}.$$

Au lieu d'employer la formule (15), on pourrait recourir aux considérations suivantes :

En vertu du théorème de M. Fourier, les intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha,\quad -\frac{1}{2\pi}\int_a^{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}\,f(2a-\mu)\,d\mu\,d\alpha,\quad \ldots$$

sont respectivement égales aux fonctions

$$f(x),\quad -f(2a-x),\quad \ldots,$$

entre les valeurs de x qui correspondent aux limites de la variable μ, et toujours nulles hors de ces limites. Par suite, la somme

$$A_0 f(x) - A_1 f(2a-x) + A_2 f(x-2a) + \ldots \tag{21}$$

est équivalente à

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha - \int_a^{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i} f(2a-\mu)\,d\mu\,d\alpha + \ldots\right], \tag{22}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}(1+\eta e^{-2a\alpha i}+\ldots)\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&-\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x+\mu)i}(e^{-2a\alpha i}+\eta e^{-4a\alpha i}+\ldots)\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha(x-\mu)i}-e^{\alpha(x-2a+\mu)i}}{1-\eta e^{-2a\alpha i}}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha(x-\mu+a)i}-e^{\alpha(x-a+\mu)i}}{e^{a\alpha i}-\eta e^{-a\alpha i}}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha,
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

η désignant un nombre qui diffère infiniment peu de l'unité. On prouvera de même que la somme

$$-B_0 f(-x) + B_1 f(x+2a) - B_2 f(-2a-x) + \ldots$$

est équivalente à

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-a}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i} f(-\mu)\,d\mu\,d\alpha\right.\\
&\qquad\left.-\int_{-2a}^{-a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu+2a)\,d\mu\,d\alpha+\ldots\right],
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x+\mu)i}(1+\eta e^{2a\alpha i}+\ldots)\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)i}(e^{2a\alpha i}+\eta e^{4a\alpha i}+\ldots)\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x i}\,\frac{e^{\alpha\mu i}-e^{2a\alpha i}e^{-\alpha\mu i}}{1-\eta e^{2a\alpha i}}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x i}\,\frac{e^{(\mu-a)\alpha i}-e^{(a-\mu)\alpha i}}{e^{-a\alpha i}-\eta e^{a\alpha i}}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha.
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Par suite, la valeur générale de $f_0(x)$ deviendra

$$\left\{\begin{aligned}
f_0(x) &= +\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{(a-\mu)\alpha i}-e^{(\mu-a)\alpha i}}{e^{a\alpha i}-\eta e^{-a\alpha i}} - \frac{e^{(\mu-a)\alpha i}-e^{(a-\mu)\alpha i}}{e^{-a\alpha i}-\eta e^{a\alpha i}}\right) f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&= \frac{1-\eta}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} 2\sin\alpha x\,\frac{\sin(\mu\alpha)+\sin(\mu-2a)\alpha}{1-2\eta\cos 2a\alpha+\eta^2}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha.
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Or, $1-\eta$ étant infiniment petit, le rapport

$$\frac{1-\eta}{1-2\eta\cos 2a\alpha+\eta^2}$$

n'aura de valeurs sensibles que pour des valeurs de $a\alpha$ équivalentes à des multiples de la circonférence. On peut donc, dans l'équation (26), remplacer $\sin(\mu-2a)\alpha$ par $\sin\mu\alpha$, et réduire cette équation à

$$\left\{\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1-\eta}{\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} 2\,\frac{\sin\alpha x\sin\alpha\mu}{1-2\eta\cos 2a\alpha+\eta^2}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} 2\sin\alpha x\sin\alpha\mu\,\frac{1-\eta}{(1-\eta\cos 2a\alpha)^2+(\eta\sin 2a\alpha)^2}\,f(\mu)\,d\mu\,d\alpha.
\end{aligned}\right. \tag{27}$$

Observons maintenant que, si l'on désigne par ε un nombre très petit, on aura (n étant un nombre entier quelconque)

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\frac{n\pi}{a}-\varepsilon}^{\frac{n\pi}{a}+\varepsilon} \frac{1-\eta}{(1-\eta\cos 2a\alpha)^2+(\eta\sin 2a\alpha)^2}\sin\alpha x\sin\alpha\mu\, d\alpha \\ &= \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{a}\int_{\frac{n\pi}{a}-\varepsilon}^{\frac{n\pi}{a}+\varepsilon}\frac{1-\eta}{(1-\eta)^2+(2a\alpha-2n\pi)^2}\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant on fait $a\alpha = n\pi + \frac{1}{2}(1-\eta)6$, le second membre de l'équation (28) deviendra

$$\frac{1}{2a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{a}\int_{-\frac{2a\varepsilon}{1-\eta}}^{+\frac{2a\varepsilon}{1-\eta}}\frac{d6}{1+6^2}$$

et se réduira, pour $\eta = 1$, à

$$\frac{\pi}{2a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{a}.$$

Cela posé, il est aisé de voir qu'on tirera de la formule (27)

$$(29)\quad f_0(x) = \frac{2}{a}\left[\sin\frac{\pi x}{a}\int_0^a \sin\frac{\pi\mu}{a}\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu + \sin\frac{2\pi x}{a}\int_0^a\sin\frac{2\pi\mu}{a}\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu + \ldots\right].$$

On peut vérifier directement la formule (29). En effet, si l'on pose

$$(30)\quad f_0(x) = c_0 + c_1\sin\frac{\pi x}{a} + c_2\sin\frac{2\pi x}{a} + \ldots + c_n\sin\frac{n\pi x}{a} + \ldots,$$

on en conclura, en multipliant les deux membres par

$$\sin\frac{n\pi x}{a},$$

puis intégrant entre les limites $x = 0$, $x = a$,

$$\begin{aligned}\int_0^a f_0(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx &= c_n\int_0^a\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)^2 dx \\ &= c_n\int_0^a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}c_n.\end{aligned}$$

Donc

$$c_n = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}f_0(x)\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a\sin\frac{n\pi\mu}{a}\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu.$$

En général, lorsque à l'aide des conditions prescrites on aura prolongé les fonctions initiales hors des limites entre lesquelles leurs valeurs étaient connues, les valeurs des fonctions ainsi prolongées se trouveront représentées par des expressions différentes, suivant qu'elles correspondront à tels ou tels systèmes de valeurs de x, y, z, ... Si, pour fixer les idées, x, y, z, désignent des coordonnées rectangulaires, une fonction initiale de la forme $f_0(x)$ se trouvera successivement représentée par des expressions diverses, suivant que le point correspondant à l'abscisse x appartiendra à telle ou telle portion de l'axe des x; une fonction initiale de la forme $f_0(x, y)$ se trouvera représentée par des expressions diverses, suivant que le point (x, y) se trouvera compris dans telle ou telle portion du plan des x, y; enfin, une fonction initiale de la forme $f_0(x, y, z)$ sera représentée par des expressions diverses, selon que le point (x, y, z) appartiendra à tel ou tel volume compris dans telle ou telle enveloppe extérieure. Cela posé, pour obtenir les expressions générales de

$$f_0(x),\quad f_0(x, y),\quad f_0(x, y, z),\quad \ldots,$$

correspondant à toutes les valeurs possibles de x, y, z, ..., il suffira évidemment de transformer chaque expression particulière en une autre, qui ait précisément la même valeur dans les limites prescrites, mais qui devienne constamment nulle, hors de ces limites; puis de faire la somme de toutes les expressions nouvelles ainsi obtenues. Or, la formule de M. Fourier et une formule semblable que j'ai donnée dans le XIX[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* fournissent le moyen de résoudre complètement les problèmes de ce genre. C'est ce que nous allons faire voir en peu de mots.

Problème I. — *Trouver une fonction $\varphi(x)$ qui soit constamment égale à*

$$f(x)$$

entre les limites $x=a$, $x=b>a$, *et constamment nulle hors de ces limites.*

Solution. — Il suffira de prendre

$$(31)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha(x-\mu)i}f(\mu)\,d\mu\,d\alpha.$$

Si, dans cette formule, on pose

$$\mu=a+(b-a)m,$$

elle donnera

$$(32)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha[x-a-(b-a)m]i}f(a+\overline{b-a}.m)(b-a)\,dm\,d\alpha.$$

Ainsi l'intégrale relative à μ, qui était prise entre les limites $\mu=a$, $\mu=b$, se trouve remplacée par une autre intégrale prise entre les limites $m=0$, $m=1$.

Problème II. — *Trouver une fonction* $\varphi(x)$ *qui soit constamment égale à* $f(x)$ *entre les limites déterminées par les deux équations*

$$\mathrm{f}(x)=0,\qquad \mathrm{F}(x)=0,$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. — Il suffira de prendre

$$(33)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha[m\mathrm{F}(x)+(1-m)\mathrm{f}(x)]i}f(\mathrm{M})\sqrt{[\mathrm{F}(x)-\mathrm{f}(x)]^2}\,dm\,d\alpha,$$

M étant une fonction de m, déterminée par l'équation

$$(34)\qquad m\,\mathrm{F}(\mathrm{M})+(1-m)\,\mathrm{f}(\mathrm{M})=0.$$

Si l'on pose, dans l'équation (33),

$$\mathrm{f}(x)=x-a,\qquad \mathrm{F}(x)=x-b,$$

on retrouvera la formule (32).

Problème III. — *Trouver une fonction* $\varphi(x,y)$ *qui soit constamment égale à* $f(x,y)$ *entre les limites*

$$\left\{\begin{matrix} y=\mathrm{f}(x) \\ y=\mathrm{F}(x)\end{matrix}\right\},\qquad \left\{\begin{matrix} x=a \\ x=b\end{matrix}\right\},$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. — Il suffira de prendre

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\int\int\int e^{\alpha(x-\mu)i}e^{6(y-\nu)i}f(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu\,d\alpha\,d6 \\ &\qquad\left\{\begin{matrix} \nu=\mathrm{f}(\mu), & \mu=a, & \alpha=-\infty, & 6=-\infty \\ \nu=\mathrm{F}(\mu), & \mu=b, & \alpha=+\infty, & 6=+\infty\end{matrix}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule se démontre avec la même facilité que celle de M. Fourier dans le cas de plusieurs variables.

Problème IV. — *Trouver une fonction* $\varphi(x,y)$ *qui soit constamment égale à* $f(x,y)$ *entre les limites déterminées par les équations*

$$\begin{matrix} \mathrm{f}(x,y)=0, & x=a & \text{ou} & \mathrm{f}_0(x)=0, \\ \mathrm{F}(x,y)=0, & x=b & \text{ou} & \mathrm{F}_0(x)=0,\end{matrix}$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. — Il suffira de prendre

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^1\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \\ &\qquad\times e^{6[n\mathrm{F}(x,y)+(1-n)\mathrm{f}(x,y)]i}e^{\alpha[m\mathrm{F}_0(x)+(1-m)\mathrm{f}_0(x)]i}f(\mathrm{M},\mathrm{N})\,\mathrm{P}\,dm\,dn\,d\alpha\,d6,\end{aligned}\right.$$

les valeurs de M et de N étant déterminées par les équations

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} n\,\mathrm{F}(\mathrm{M},\mathrm{N})+(1-n)\,\mathrm{f}(\mathrm{M},\mathrm{N})&=0, \\ m\,\mathrm{F}_0(\mathrm{M})+n\,\mathrm{f}_0(\mathrm{M})&=0,\end{aligned}\right.$$

et la valeur de P étant positive et donnée par la formule

$$(38)\qquad \mathrm{P}=\pm[\mathrm{F}_0(x)-\mathrm{f}_0(x)][\mathrm{F}(x,y)-\mathrm{f}(x,y)].$$

Problème V. — *Trouver une fonction $\varphi(x, y, z, \ldots)$ qui soit constamment égale à $f(x, y, z, \ldots)$ entre les limites déterminées par les équations*

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \mathfrak{f}_0(x) = 0, & \mathfrak{f}_1(x, y) = 0, & \mathfrak{f}_2(x, y, z) = 0, & \ldots, \\ F_0(x) = 0, & F_1(x, y) = 0, & F_2(x, y, z) = 0, & \ldots, \end{array} \right.$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. — Il suffira de prendre (n étant le nombre des variables x, y, ...)

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, z, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \\ \qquad \times e^{\alpha[\mu F_0(x) + (1-\mu)\mathfrak{f}_0(x)]i} e^{\delta[\nu F_1(x, y) + (1-\nu)\mathfrak{f}_1(x, y)]i} \ldots f(M, N, \ldots) P \, d\mu \, d\nu \, d\alpha \, d\delta \ldots, \end{array} \right.$$

les valeurs de M, N, ... étant déterminées par les équations

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu F_0(M) \quad + (1-\mu) \mathfrak{f}_0(M) \quad = 0, \\ \nu F_1(M, N) + (1-\nu) \mathfrak{f}_1(M, N) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

et celle de P, qui est toujours censée positive, par la formule

$$(42) \quad P = \pm [F_0(x) - \mathfrak{f}_0(x)][F_1(x, y) - \mathfrak{f}_1(x, y)] \ldots$$

Nota. — Les formules (36) et (40) peuvent être démontrées par la méthode qui a servi à établir les formules du même genre que j'ai données dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1).

Ajoutons que la formule (40) subsistera encore, si l'on remplace

$$\mathfrak{f}_0(x), \quad F_0(x), \quad \mathfrak{f}_1(x, y), \quad \ldots, \quad \mathfrak{f}_0(M), \quad \ldots$$

par

$$\mathfrak{f}_0(x, y, z, \ldots), \quad F_0(x, y, z, \ldots), \quad \mathfrak{f}_1(x, y, z, \ldots), \quad \ldots, \quad \mathfrak{f}_0(M, N, \ldots), \quad \ldots.$$

Faisons voir maintenant comment, à l'aide de certaines conditions données, on peut prolonger une fonction hors des limites entre lesquelles sa valeur était connue.

(1) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. I, p. 275 et suivantes.

Problème I. — *Intégrer l'équation*

$$(43) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\alpha^2 - m^2 \theta^2) z = 0,$$

de manière que l'on ait, pour $t = 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$
$$z = f(x).$$

Supposons, d'ailleurs, la fonction initiale $f(x)$ connue seulement entre les limites 0, a. Mais ajoutons la condition que l'on ait, pour $x = 0$ et pour $x = a$,

$$z = 0,$$

quel que soit t.

Solution. — On trouvera

$$(44) \quad z = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}} + e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) f(x) = e^{\theta m x} \varphi(t) + e^{-\theta m x} \chi(t).$$

De plus, les conditions prescrites donneront

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{r} \varphi(t) + \chi(t) = 0, \\ e^{\theta m a} \varphi(t) + e^{-\theta m a} \chi(t) = 0. \end{array} \right.$$

Donc, par suite,

$$(46) \quad z = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}} + e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) f(x) = (e^{\theta m x} - e^{-\theta m x}) \varphi(t),$$

et

$$(47) \quad (e^{\theta m a} - e^{-\theta m a}) \varphi(t) = 0.$$

Faisons maintenant pour abréger

$$F(\alpha) = e^{a\alpha} - e^{-a\alpha} = -F(-\alpha).$$

On aura, en vertu de l'équation (47),

$$\begin{array}{l} F(\alpha)[(e^{\theta m x} - e^{-\theta m x}) \varphi(t)] \\ \quad = [F(\theta m) e^{\theta m x} - F(-\theta m) e^{-\theta m x}] \varphi(t) = (e^{\theta m x} + e^{-\theta m x}) F(\theta m) \varphi(t) = 0, \end{array}$$

et, par suite, on tirera de la formule (46)

$$(48)\qquad o=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}}+e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)\mathrm{F}(\alpha)f(x).$$

Cette dernière devant être satisfaite, quel que soit t, on en conclura

$$(49)\qquad \mathrm{F}(\alpha)f(x)=o,$$

ou

$$(e^{a\alpha}-e^{-a\alpha})f(x)=o,$$

ou encore

$$(50)\qquad f(x+a)=f(x-a).$$

Enfin, comme on tire de l'équation (46)

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}}+e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)f(x)=\mathfrak{f}(t,x)-\mathfrak{f}(t,-x),$$

$\mathfrak{f}(t,x)$ désignant la fonction $e^{\theta m x}\varphi(t)$, on en conclura évidemment, en posant $t=o$,

$$f(x)=\mathfrak{f}(o,x)-\mathfrak{f}(o,-x),$$

et, par suite,

$$(51)\qquad f(x)=-f(-x).$$

Les équations (50) et (51) suffisent pour prolonger la fonction $f(x)$ au delà des limites $x=o$, $x=a$.

Problème II. — *Intégrer l'équation*

$$(52)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}-m^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+ru=o,\qquad \text{ou}\qquad \theta-m^2\alpha^2+r=o,$$

de manière que l'on ait, pour $t=o$,

$$u=f(x),$$

$f(x)$ *étant connue entre les limites* $x=a$, $x=b$, *et que l'on ait aussi, pour* $x=a$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{A}u=o,\qquad \text{ou}\qquad (\mathrm{A}+\alpha)u=o,$$

pour $x=b$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{B}u=o,\qquad \text{ou}\qquad (\mathrm{B}+\alpha)u=o,$$

quel que soit t.

Solution. — On trouvera, en posant $\Theta=\frac{\sqrt{\theta+r}}{m}$,

$$(53)\qquad u=e^{(m^2\alpha^2-r)t}f(x)=e^{x\Theta}\varphi(t)+e^{-x\Theta}\chi(t),$$

et les conditions prescrites donneront

$$(54)\qquad \begin{cases}(\mathrm{A}+\Theta)e^{a\Theta}\varphi(t)+(\mathrm{A}-\Theta)e^{-a\Theta}\chi(t)=o,\\ (\mathrm{B}+\Theta)e^{b\Theta}\varphi(t)+(\mathrm{B}-\Theta)e^{-b\Theta}\chi(t)=o.\end{cases}$$

On satisfait à la première des équations (54) en prenant

$$(55)\qquad \begin{cases}\varphi(t)=(\mathrm{A}-\Theta)e^{-a\Theta}\psi(t),\\ \chi(t)=-(\mathrm{A}-\Theta)e^{a\Theta}\,\psi(t);\end{cases}$$

alors la seconde se réduit à

$$(56)\qquad \mathrm{F}(\Theta)\psi(t)=o,$$

la fonction $\mathrm{F}(\alpha)$ étant déterminée par l'équation

$$(57)\qquad \mathrm{F}(\alpha)=(\mathrm{B}+\alpha)(\mathrm{A}-\alpha)e^{(b-a)\alpha}-(\mathrm{B}-\alpha)(\mathrm{A}+\alpha)e^{(a-b)\alpha}.$$

De plus, la valeur de u devient

$$(58)\qquad \begin{cases}u=e^{(m^2\alpha^2-r)t}f(x)=[(\mathrm{A}-\Theta)e^{(x-a)\Theta}-(\mathrm{A}+\Theta)e^{(a-x)\Theta}]\psi(t)\\ \qquad=(\mathrm{A}-\alpha)[(e^{(x-a)\Theta}-e^{(a-x)\Theta})\psi(t)].\end{cases}$$

On satisfait à cette dernière formule en posant

$$(59)\qquad \begin{cases}(e^{(x-a)\Theta}-e^{(a-x)\Theta})\psi(t)=e^{(m^2\alpha^2-r)t}\varpi(x),\\ \qquad f(x)=(\mathrm{A}-\alpha)\varpi(x).\end{cases}$$

Comme on a d'ailleurs

$$\mathrm{F}(\alpha)[(e^{(x-a)\Theta}-e^{(a-x)\Theta})\psi(t)]$$
$$=[e^{(x-a)\Theta}\mathrm{F}(\Theta)-e^{(a-x)\Theta}\mathrm{F}(-\Theta)]\psi(t)=(e^{(x-a)\Theta}+e^{(a-x)\Theta}]\mathrm{F}(\Theta)\psi(t)=o,$$

on tirera de la première des équations (59)

$$o = e^{(m^2\alpha^2 - r)t}\,F(\alpha)\,\varpi(x).$$

Cette dernière sera satisfaite, quel que soit t, si l'on pose

$$F(\alpha)\,\varpi(x) = o. \tag{60}$$

De plus, on tirera de la première des équations (59)

$$e^{(m^2\alpha^2 - r)t}\,\varpi(x) = \mathfrak{f}(t, x-a) - \mathfrak{f}(t, a-x),$$

$\mathfrak{f}(t, x-a)$ désignant la fonction $e^{(x-a)\Theta}\,\psi(t)$; et, par suite, on trouvera, en posant $t = o$,

$$\varpi(x) = \mathfrak{f}(o, x-a) - \mathfrak{f}(o, a-x).$$

Donc

$$\varpi(x) = -\varpi(2a - x). \tag{61}$$

Les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \varpi(x) = -\varpi(2a-x), \\ F(\alpha)\,\varpi(x) = o, \\ f(x) = (A-\alpha)\,\varpi(x) = A\,\varpi(x) - \varpi'(x) \end{array}\right. \tag{62}$$

suffiront pour prolonger la fonction $f(x)$ au delà des limites entre lesquelles sa valeur est connue.

Il est bon de remarquer que l'on tire des équations (62)

$$\varpi(x+a) = -\varpi(a-x),$$

et de plus

$$\begin{aligned} f(x+a) &= A\,\varpi(x+a) - \varpi'(x+a) = (A-\alpha)\,\varpi(x+a), \\ f(a-x) &= A\,\varpi(a-x) - \varpi'(a-x) \\ &= (A+\alpha)\,\varpi(a-x) = -(A+\alpha)\,\varpi(x+a), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(A+\alpha) f(x+a) + (A-\alpha) f(a-x) = o, \tag{63}$$

ou

$$(A+\alpha) e^{a\alpha} f(x) + (A-\alpha) e^{-a\alpha} f(-x) = o. \tag{64}$$

On trouverait de même

$$(B+\alpha) f(x+b) + (B-\alpha) f(b-x) = o, \tag{65}$$

ou

$$(B+\alpha) e^{b\alpha} f(x) + (B-\alpha) e^{-b\alpha} f(-x) = o. \tag{66}$$

Si l'on élimine $f(-x)$ entre les équations (64) et (66) on en tirera

$$[(A+\alpha)(B-\alpha) e^{(a-b)\alpha} - (A-\alpha)(B+\alpha) e^{(b-a)\alpha}] f(x) = o,$$

ou

$$F(\alpha) f(x) = o, \tag{67}$$

ce que l'on pouvait également conclure des deux dernières des formules (62).

Les équations (64) et (66), dont l'une peut être remplacée par la formule (67), suffisent pour prolonger la fonction $f(x)$.

Afin de montrer comment on peut y parvenir, faisons pour abréger $a = o$, et remplaçons en même temps b par a; les équations (64) et (67) donneront

$$\left\{\begin{array}{r} (A+\alpha) f(x) + (A-\alpha) f(-x) = o, \\ [(A-\alpha)(B+\alpha) e^{a\alpha} - (A+\alpha)(B-\alpha) e^{-a\alpha}] f(x) = o. \end{array}\right. \tag{68}$$

On en tirera

$$f(-x) = -\frac{A+\alpha}{A-\alpha} f(x), \tag{69}$$

et

$$e^{2a\alpha} f(x) = \frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)} f(x),$$

ou

$$f(x+2a) = \frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)} f(x), \tag{70}$$

et, par suite,

$$f(2a-x) = -\frac{A+\alpha}{A-\alpha} f(x-2a) = -\frac{B+\alpha}{B-\alpha} f(x). \tag{71}$$

On aura donc

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x) &= -\frac{B-\alpha}{B+\alpha} f(2a-x),\\ f(x) &= \frac{A+\alpha}{A-\alpha}\,\frac{B-\alpha}{B+\alpha} f(x-2a). \end{aligned}\right.$$

Par conséquent, si l'on nomme $\mathfrak{f}(x)$ la valeur connue de u entre les limites $x=0$, $x=a$, on trouvera

$$f(x) = \mathfrak{f}(x) \qquad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x=a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = -\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\mathfrak{f}(2a-x) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=a \\ x=2a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = \frac{A+\alpha}{A-\alpha}\,\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\mathfrak{f}(x-2a) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=2a \\ x=3a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = -\left(\frac{A+\alpha}{A-\alpha}\,\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\right)\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\mathfrak{f}(4a-x) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=3a \\ x=4a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = \left(\frac{A+\alpha}{A-\alpha}\,\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\right)^2\mathfrak{f}(x-4a) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=4a \\ x=5a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = -\left(\frac{A+\alpha}{A-\alpha}\,\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\right)^2\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\mathfrak{f}(6a-x) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=5a \\ x=6a \end{matrix}\right\},$$

....

On aura, au contraire, en vertu de l'équation (69),

$$f(x) = -\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\mathfrak{f}(-x) \qquad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x=-a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = \frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\mathfrak{f}(2a+x) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=-a \\ x=-2a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = -\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\,\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\mathfrak{f}(-x-2a) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=-2a \\ x=-3a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = \left[\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^2\mathfrak{f}(4a+x) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=-3a \\ x=-4a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = -\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\left(\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\,\frac{B+\alpha}{B-\alpha}\right)^2\mathfrak{f}(-x-4a) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=-4a \\ x=-5a \end{matrix}\right\},$$

$$f(x) = \left(\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\,\frac{B+\alpha}{B-\alpha}\right)^3\mathfrak{f}(6a+x) \qquad \text{»} \quad \left\{\begin{matrix} x=-5a \\ x=-6a \end{matrix}\right\},$$

....

On aura donc généralement, n désignant un nombre entier quelconque,

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned}
f(x) &= \left[\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n \mathfrak{f}(x-2na)\\
&\qquad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x=2na \\ x=(2n+1)a \end{matrix}\right\},\\
f(x) &= -\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\left[\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n \mathfrak{f}(2na+2a-x)\\
&\qquad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x=(2n+1)a \\ x=(2n+2)a \end{matrix}\right\},\\
f(x) &= \left[\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n \mathfrak{f}(x+2na)\\
&\qquad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x=-(2n-1)a \\ x=-2na \end{matrix}\right\},\\
f(x) &= -\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\left[\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n \mathfrak{f}(-x-2na)\\
&\qquad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x=-2na \\ x=-(2n+1)a \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

On aura d'ailleurs, en vertu du théorème de M. Fourier,

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_k^{k+a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu-k)\,d\mu\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-k-\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda = \mathfrak{f}(x-k) \qquad \left\{\begin{matrix} x=k \\ x=k+a \end{matrix}\right\},\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{k-a}^{k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)i}\,\mathfrak{f}(k-\mu)\,d\mu\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-k+\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda = \mathfrak{f}(k-x) \qquad \left\{\begin{matrix} x=k-a \\ x=k \end{matrix}\right\},
\end{aligned}\right.$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites indiquées, tandis que les mêmes intégrales doubles s'évanouiront hors de ces limites. On trouvera en conséquence

$$
(75)\quad
\left\{
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x-\mu)i}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\
&\qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{array}{l} x = 2na \\ x = (2n+1)a \end{array}\right\}, \\
f(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\left[\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x-2a+\mu)i}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\
&\qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{array}{l} x = (2n+1)a \\ x = (2n+2)a \end{array}\right\}, \\
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x-\mu)i}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\
&\qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{array}{l} x = -(2n-1)a \\ x = -2na \end{array}\right\}, \\
f(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\left[\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x+\mu)i}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\
&\qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{array}{l} x = -2na \\ x = -(2n+1)a \end{array}\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Par suite, si l'on appelle η un nombre qui diffère infiniment peu de l'unité, on trouvera pour la valeur générale de $f(x)$

$$
(76)\quad
\left\{
\begin{aligned}
f(x) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda(x-\mu)i}}{1-\eta\,\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\lambda i}}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\
& -\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda(x-2a+\mu)i}}{1-\eta\,\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\lambda i}}\,\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\
& +\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda(x-\mu+2a)i}}{1-\eta\,\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\lambda i}}\,\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\
& -\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda(x+\mu)i}}{1-\eta\,\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\lambda i}}\,\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,
\end{aligned}
\right.
$$

ou, ce qui revient au même,

$$
(77)\quad f(x) = \frac{A-\alpha}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\left[(B+\alpha)e^{\lambda(a-\mu)i}-(B-\alpha)e^{\lambda(\mu-a)i}\right]\mathcal{F}(\alpha)\,e^{\lambda x i}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,
$$

la valeur de $\mathcal{F}(\alpha)$ étant donnée par l'équation

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha) = {} & \frac{1}{(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}-\eta(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}} \\
& + \frac{1}{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}-\eta(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}} \\
= {} & 4(1-\eta)\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}}{(1-\eta)^2[(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}]^2-\ldots},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire par l'équation

$$
(78)\quad \mathcal{F}(\alpha) = 4(1-\eta)\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}}{\left\{\begin{array}{l}(1-\eta)^2[(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}]^2 \\ -(1+\eta)^2[(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}-(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}]^2\end{array}\right\}}.
$$

Si, dans l'équation (77), on fait passer le facteur $A-\alpha$ sous le signe $\int\int$, on pourra remplacer ensuite α, qui indique une différentiation relative à x, par λi. On trouvera de cette manière

$$
(79)\quad f(x) = \frac{2(1-\eta)}{\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} A\,e^{\lambda x i}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,
$$

la valeur de A étant donnée par la formule

$$
(80)\quad A = (A-\lambda i)i\,\frac{[B\sin(a-\mu)\lambda+\lambda\cos(a-\mu)\lambda][(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]}{\left\{\begin{array}{l}(1-\eta)^2[(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]^2 \\ +(1+\eta)^2[(AB+\lambda^2)\sin a\lambda-(B-A)\lambda\cos a\lambda]^2\end{array}\right\}};
$$

ou bien encore, à cause des limites $\lambda = -\infty$, $\lambda = \infty$,

$$
(81)\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda\cos\lambda x - A\sin\lambda x)\,\mathcal{L}\,f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,
$$

la valeur de $\mathcal{L}$ étant à très peu près

$$
(82)\quad \mathcal{L} = [B\sin(a-\mu)\lambda+\lambda\cos(a-\mu)\lambda]\,\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)[(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^2[(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]^2 \\ \qquad +[(AB+\lambda^2)\sin a\lambda-(B-A)\lambda\cos a\lambda]^2\end{array}\right\}}.
$$

Or, il est clair que la valeur précédente de $\mathcal{L}$, à cause du facteur infiniment petit $\frac{1-\eta}{2}$, sera toujours sensiblement nulle, excepté quand la valeur de λ vérifiera la condition

$$(\mathrm{AB}+\lambda^2)\sin a\lambda-(\mathrm{B}-\mathrm{A})\lambda\cos a\lambda=0. \tag{83}$$

On aura de plus

$$u=e^{(m^2\alpha^2-r)t}f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(m^2\lambda^2+r)t}(\lambda\cos\lambda x-\mathrm{A}\sin\lambda x)\mathcal{L}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda. \tag{84}$$

Enfin, si l'on désigne par ρ une des racines de l'équation (83), et par ε un nombre infiniment petit, on aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon}\mathcal{L}(\lambda\cos\lambda x-\mathrm{A}\sin\lambda x)\,d\lambda\\&\quad=\frac{\pi}{2}\,\frac{(\rho\cos\rho x-\mathrm{A}\sin\rho x)[\mathrm{B}\sin(a-\mu)\rho+\rho\cos(a-\mu)\rho]}{\mathrm{D}_\rho[(\mathrm{AB}+\rho^2)\sin a\rho-(\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\cos a\rho]}.\end{aligned}\right. \tag{85}$$

Donc, si l'on fait pour abréger

$$\mathcal{M}=\frac{[\mathrm{B}\sin(a-\mu)\rho+\rho\cos(a-\mu)\rho]}{a[(\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\sin a\rho+(\mathrm{AB}+\rho^2)\cos a\rho]+2\rho\sin a\rho-(\mathrm{B}-\mathrm{A})\cos a\rho}, \tag{86}$$

on trouvera

$$f(x)=\sum\int_0^a(\rho\cos\rho x-\mathrm{A}\sin\rho x)\mathcal{M}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu \quad (^1), \tag{87}$$

(1) On a

$$\int_0^a\mathcal{M}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu=\frac{1}{2}\mathrm{i}\,\frac{\int_0^a[(\mathrm{B}-\rho\mathrm{i})e^{\rho(\mu-a)\mathrm{i}}-(\mathrm{B}+\rho\mathrm{i})e^{\rho(a-\mu)\mathrm{i}}]\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu}{\mathrm{D}_\rho[(\mathrm{AB}+\rho^2)\sin a\rho-(\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\cos a\rho]},$$

ou

$$\int_0^a\mathcal{M}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu=\frac{-\mathrm{i}\int_0^a[(\mathrm{B}-\rho\mathrm{i})e^{\rho(\mu-a)\mathrm{i}}-(\mathrm{B}+\rho\mathrm{i})e^{\rho(a-\mu)\mathrm{i}}]\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu}{\int_0^a[(\mathrm{A}-\rho\mathrm{i})e^{\rho\mu\mathrm{i}}-(\mathrm{A}+\rho\mathrm{i})e^{-\rho\mu\mathrm{i}}][(\mathrm{B}-\rho\mathrm{i})e^{\rho(\mu-a)\mathrm{i}}-(\mathrm{B}+\rho\mathrm{i})e^{\rho(a-\mu)\mathrm{i}}]\,d\mu}$$

$$=-\frac{\mathrm{i}\int_0^a[(\mathrm{A}-\rho\mathrm{i})e^{\rho\mu\mathrm{i}}-(\mathrm{A}+\rho\mathrm{i})e^{-\rho\mu\mathrm{i}}]\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu}{\int_0^a[(\mathrm{A}-\rho\mathrm{i})e^{\rho\mu\mathrm{i}}-(\mathrm{A}+\rho\mathrm{i})e^{-\rho\mu\mathrm{i}}]^2\,d\mu}.$$

et

$$u=\int_0^a\sum e^{-m^2\rho^2t-rt}(\rho\cos\rho x-\mathrm{A}\sin\rho x)\mathcal{M}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu, \tag{88}$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de ρ.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point qui a pour abscisse $\frac{a}{2}$, il faudra remplacer x par $x+\frac{a}{2}$. Si de plus on fait pour abréger

$$\left\{\begin{aligned}&\mu=\frac{a}{2}+z,\qquad \mathfrak{f}\left(\frac{a}{2}+z\right)=\mathrm{f}(z),\\&\mathrm{R}=\frac{d[(\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\cos a\rho-(\mathrm{AB}+\rho^2)\sin a\rho]}{d\rho},\end{aligned}\right. \tag{89}$$

on trouvera

$$f(x)=-\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sum\frac{\left\{\begin{aligned}&\left[\rho\cos\left(z-\frac{a}{2}\right)\rho-\mathrm{B}\sin\left(z-\frac{a}{2}\right)\rho\right]\\&\times\left[\rho\cos\left(x+\frac{a}{2}\right)\rho-\mathrm{A}\sin\left(x+\frac{a}{2}\right)\rho\right]\end{aligned}\right\}}{\mathrm{R}}\,\mathrm{f}(z)\,dz, \tag{90}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned}f(x)&=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{P}\cos\rho x+\mathrm{Q}\sin\rho x}{\mathrm{R}},\\u&=e^{-rt}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{P}\cos\rho x+\mathrm{Q}\sin\rho x}{\mathrm{R}}e^{-m^2\rho^2t},\end{aligned}\right. \tag{91}$$

pourvu que l'on fasse

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{P}&=-\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}[\rho\cos(z-l)\rho-\mathrm{B}\sin(z-l)\rho][\rho\cos l\rho-\mathrm{A}\sin l\rho]\,\mathrm{f}(z)\,dz,\\\mathrm{Q}&=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}[\rho\cos(z-l)\rho-\mathrm{B}\sin(z-l)\rho][\rho\sin l\rho+\mathrm{A}\cos l\rho]\,\mathrm{f}(z)\,dz,\end{aligned}\right. \tag{92}$$

la valeur de l étant $\frac{a}{2}$.

Si l'on observe d'ailleurs que ρ désigne une des racines de l'équation

$$(\mathrm{AB}+\rho^2)\sin 2l\rho-(\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\cos 2l\rho=0, \tag{93}$$

on reconnaitra immédiatement que les formules (91) et (92) coïncident avec celles que M. Poisson a données.

Les formules précédentes paraissent n'être établies que par induction, attendu que, suivant la méthode de M. Brisson, l'on a plusieurs fois considéré la lettre α comme indiquant une différentiation relative à x. Mais, pour rendre les calculs rigoureux, il suffit de revenir aux formules et aux notations du paragraphe II. En effet, en employant ces notations, l'on aura généralement

$$\varphi(\alpha) f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u\mathrm{i}) f(v) e^{u(x-v)\mathrm{i}}\, dv\, du, \tag{94}$$

et, par suite, si l'on pose

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\lambda\mathrm{i}) e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda, \tag{95}$$

on trouvera non seulement

$$f(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\lambda\mathrm{i}) e^{\lambda(v-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda, \tag{96}$$

et

$$e^{\lambda x\mathrm{i}}\varphi(\lambda\mathrm{i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u\mathrm{i}) e^{v(\lambda-u)\mathrm{i}} e^{ux\mathrm{i}}\, dv\, du, \tag{97}$$

mais encore, en vertu des formules (96) et (97),

$$\varphi(\alpha) f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda\mathrm{i})\, \varpi(\lambda\mathrm{i})\, e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda. \tag{98}$$

Ainsi l'équation (95) entraine l'équation (98). Il est bon de remarquer en passant que la fonction $f(x)$, déterminée par la formule (95), s'évanouit hors des limites $x = 0$, $x = a$, et qu'il en est de même du second membre de la formule (98). Ajoutons que, des formules (95) et (98) réunies, l'on conclut immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(\alpha)\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\lambda\mathrm{i}) e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda \\ &\quad = \int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda\mathrm{i})\, \varpi(\lambda\mathrm{i})\, e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda. \end{aligned}\right. \tag{99}$$

On aura donc aussi

$$\left\{\begin{aligned} &[\varphi(\alpha)\,\varpi(\alpha)]\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda \\ &= \varphi(\alpha)\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\lambda\mathrm{i}) e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda \\ &= \int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda\mathrm{i})\, \varpi(\lambda\mathrm{i}) e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathrm{F}(\mu)\, d\mu\, d\lambda \\ &= \varphi(\alpha)\,\varpi(\alpha)\,\mathrm{F}(x) \qquad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = a \end{matrix}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{100}$$

Cela posé, on pourra immédiatement remplacer, dans les formules (75) et, par suite, dans les formules (76), (77), etc., α par $\lambda\mathrm{i}$, et l'on obtiendra de cette manière la formule (79). Réciproquement, on pourra écrire partout dans la formule (77) α au lieu de $\lambda\mathrm{i}$; et l'on trouvera ainsi, au lieu de l'équation (77) ou (79), une équation de la forme

$$f(x) = (\mathrm{A} - \alpha)\,\varphi(\alpha)[(\mathrm{B} + \alpha) e^{a\alpha}\,\mathfrak{f}(x) - (\mathrm{B} - \alpha) e^{-a\alpha}]\,\mathfrak{f}(-x), \tag{101}$$

pourvu que l'on fasse

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \frac{1}{(\mathrm{A} - \alpha)(\mathrm{B} + \alpha) e^{a\alpha} - \eta(\mathrm{A} + \alpha)(\mathrm{B} - \alpha) e^{-a\alpha}} \\ &\quad + \frac{1}{(\mathrm{A} + \alpha)(\mathrm{B} - \alpha) e^{-a\alpha} - \eta(\mathrm{A} - \alpha)(\mathrm{B} + \alpha) e^{a\alpha}} \\ &= 4(1 - \eta)\frac{(\mathrm{A} + \alpha)(\mathrm{B} - \alpha) e^{-a\alpha} + (\mathrm{A} - \alpha)(\mathrm{B} + \alpha) e^{a\alpha}}{\left\{\begin{matrix} (1 - \eta)^2[(\mathrm{A} + \alpha)(\mathrm{B} - \alpha) e^{-a\alpha} + (\mathrm{A} - \alpha)(\mathrm{B} + \alpha) e^{a\alpha}]^2 \\ - (1 + \eta)^2[(\mathrm{A} + \alpha)(\mathrm{B} - \alpha) e^{-a\alpha} - (\mathrm{A} - \alpha))\mathrm{B} + \alpha) e^{a\alpha}]^2 \end{matrix}\right\}} \\ &= \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 - [(\mathrm{A} + \alpha)(\mathrm{B} - \alpha) e^{-a\alpha} - (\mathrm{A} - \alpha)(\mathrm{B} + \alpha) e^{a\alpha}]^2}, \end{aligned}\right. \tag{102}$$

ε étant un nombre infiniment petit, et que l'on désigne par

$$\mathfrak{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\, \mathfrak{f}(\mu)\, d\mu\, d\lambda \tag{103}$$

une fonction qui soit considérée comme toujours nulle, hors des limites $x = 0$, $x = a$, et toujours connue entre ces limites.

En remettant pour $\varphi(\alpha)$ sa valeur dans $f(x)$, on trouvera

$$(104)\qquad f(x)=\frac{2\varepsilon(\mathrm{A}-\alpha)[(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}\mathfrak{f}(x)-(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}\mathfrak{f}(-x)]}{\varepsilon^2-[(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}-(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}]},$$

ε désignant un nombre infiniment petit. Cette formule, jointe à la suivante

$$(105)\qquad \psi(\alpha)f(x)=\frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda i)f(\mu)e^{\lambda(x-\mu)i}\,d\mu\,d\lambda,$$

dans laquelle $\psi(\alpha)$ désigne une fonction quelconque de α, suffit pour déterminer complètement la valeur de $f(x)$ et de $\psi(\alpha)f(x)$. On aura par suite, en vertu de la formule (53),

$$(106)\qquad u=\frac{2\varepsilon(\mathrm{A}-\alpha)e^{t(m^2\alpha^2-r)}[(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}\mathfrak{f}(x)-(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}\mathfrak{f}(-x)]}{\varepsilon^2-[(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}-(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}]^2}.$$

On peut encore présenter l'équation (104) sous la forme

$$(107)\qquad f(x)=(\mathrm{A}-\alpha)\varpi(x),$$

la valeur de $\varpi(x)$ étant

$$(108)\qquad \varpi(x)=\frac{2\varepsilon[(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}\mathfrak{f}(x)-(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}\mathfrak{f}(-x)]}{\varepsilon^2-[(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}-(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}]^2}.$$

Cette dernière valeur de $\varpi(x)$ vérifie deux équations semblables aux formules (62), savoir

$$(109)\qquad \begin{cases} \varpi(x)=-\varpi(-x), \\ [(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}-(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}]\,\varpi(x)=0, \end{cases}$$

et, de plus, elle satisfait, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=0$, $x=a$, à la formule

$$(110)\qquad \varpi(x)=\frac{\mathfrak{f}(x)}{\mathrm{A}-\alpha}.$$

Remarquons enfin que, si l'on pose comme ci-dessus

$$(102)\qquad \begin{cases} \varphi(\alpha)= \dfrac{1}{(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}-\eta(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}} \\ \qquad\quad +\dfrac{1}{(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}-\eta(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}} \\ \qquad = \dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon^2-[(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}-(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}]^2}, \end{cases}$$

la valeur de $\varpi(x)$ deviendra simplement

$$(111)\qquad \varpi(x)=\varphi(\alpha)[(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}\mathfrak{f}(x)-(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}\mathfrak{f}(-x)].$$

On pourrait, à l'aide des équations (109) et (110), déterminer directement la valeur de $\varpi(x)$, ainsi qu'il suit :

Soit d'abord

$$(112)\qquad \varpi(x)=\chi(\alpha)\mathfrak{f}(x)+\psi(\alpha)\mathfrak{f}(-x).$$

Si, dans cette formule, on change x en $-x$, on devra changer aussi α en $-\alpha$, et l'on trouvera, par suite,

$$(113)\qquad \varpi(-x)=\chi(-\alpha)\mathfrak{f}(-x)+\psi(-\alpha)\mathfrak{f}(x).$$

Si l'on ajoute les équations (112) et (113), on trouvera, en ayant égard à la première des équations (109),

$$0=[\chi(\alpha)+\psi(-\alpha)]\,\mathfrak{f}(x)+[\chi(-\alpha)+\psi(\alpha)]\,\mathfrak{f}(-x).$$

On satisfait à cette dernière en posant

$$\psi(\alpha)=-\chi(-\alpha).$$

Donc

$$(114)\qquad \varpi(x)=\chi(\alpha)\mathfrak{f}(x)-\chi(-\alpha)\mathfrak{f}(-x).$$

Observons, de plus, qu'on tirera de la seconde des équations (109)

$$(115)\qquad \varpi(x)=\frac{(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)}{(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)}e^{-2a\alpha}\varpi(x)=\frac{(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)}{(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)}e^{2a\alpha}\varpi(x),$$

et, par suite, η désignant un nombre très peu différent de l'unité, et n un nombre entier quelconque,

$$(116)\qquad \begin{cases} \varpi(x)=\left[\eta\dfrac{(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)}{(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)}\right]^n\varpi(x-2na), \\ \varpi(x)=\left[\eta\dfrac{(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)}{(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)}\right]^n\varpi(x+2na). \end{cases}$$

Si, dans les formules précédentes, on remplace x par $-x$, on devra remplacer aussi α par $-\alpha$. On trouvera donc

$$(117)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(-x) &= \left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n \varpi(-x-2na),\\ \varpi(-x) &= \left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n \varpi(-x+2na),\end{aligned}\right.$$

et l'on aura, par suite, en vertu de la première des équations (109),

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(x) &= -\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n \varpi(-x-2na),\\ \varpi(x) &= -\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n \varpi(-x+2na).\end{aligned}\right.$$

Les équations (116) et (118) peuvent encore s'écrire comme il suit :

$$(119)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(x) &= \left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n \varpi(x) \qquad \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix}\right\},\\ \varpi(x) &= \left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n \varpi(x),\end{aligned}\right.$$

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(x) &= -\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n \varpi(-x),\\ \varpi(x) &= -\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n \varpi(-x).\end{aligned}\right.$$

Si maintenant on écrit dans les seconds membres des équations précédentes

$$\frac{f(x)}{A-\alpha} \quad \text{au lieu de} \quad \varpi(x),$$

et

$$\frac{f(-x)}{A+\alpha} \quad \text{au lieu de} \quad \varpi(-x),$$

elles auront respectivement lieu pour les valeurs de

$$x-2na,\quad x+2na,\quad -x-2na,\quad -x+2na,$$

comprises entre zéro et a; d'où il résulte qu'on devra y poser successivement

$$x-2na=\iota a,\qquad x+2na=\iota a,$$
$$-x-2na=\iota a,\qquad -x+2na=\iota a,$$

ι désignant un nombre inférieur à l'unité. On aura donc, par suite,

$$x=(2n+\iota)a,\qquad -x=(2n-\iota)a,$$
$$-x=(2n+\iota)a,\qquad x=(2n-\iota)a,$$

et l'on pourra, dans ces quatre équations, prendre pour limites inférieures de n

$$n=0,\qquad n=1,\qquad n=0,\qquad n=1.$$

En réunissant toutes les valeurs particulières de $\varpi(x)$, on aura la valeur générale, savoir :

$$(121)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(x) = {} & \frac{f(x)}{A-\alpha}\left\{\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n + \sum_1^\infty\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n\right\}\\ & -\frac{f(-x)}{A+\alpha}\left\{\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n + \sum_1^\infty\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ici l'on reconnait immédiatement que $\varpi(x)$ est de la forme exigée par l'équation (114). Si, dans chacune des sommes prises depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, on supprime le premier des facteurs égaux à 0, et, si l'on pose, en outre,

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha) = {} & \frac{e^{-a\alpha}}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n\\ & +\frac{e^{a\alpha}}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n,\end{aligned}\right.$$

on trouvera

$$(123)\qquad \varpi(x)=\varphi(\alpha)[(B+\alpha)e^{a\alpha}f(x)-(B-\alpha)e^{-a\alpha}f(-x)].$$

De plus, il est clair que la valeur de $\varphi(\alpha)$ donnée par l'équation (122) deviendra

$$(124)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha) = {} & \frac{1}{(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}-\eta(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}}\\ & +\frac{1}{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}-\eta(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}}.\end{aligned}\right.$$

Les formules (123) et (124) coïncident exactement avec les formules (102) et (111). Pour achever la solution du problème et retrouver la formule (79), il suffira de recourir à l'équation

$$(103)\qquad \mathfrak{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

et d'observer qu'on aura généralement

$$(125)\qquad \left\{\begin{aligned} \chi(\alpha)\,\mathfrak{f}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda i)\,e^{\lambda(x-\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda, \\ \chi(-\alpha)\,\mathfrak{f}(-x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \chi(-\lambda i)\,e^{\lambda(x+\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda. \end{aligned}\right.$$

Revenons maintenant à l'équation des cordes vibrantes. On a, dans ce cas, pour déterminer $f(x)$, les deux équations

$$(126)\qquad \left\{\begin{aligned} &(e^{a\alpha} - e^{-a\alpha})f(x) = 0, \\ &f(x) = -f(-x). \end{aligned}\right.$$

De plus, nous appellerons encore $\mathfrak{f}(x)$ une fonction qui sera égale à la valeur connue de $f(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = a$, et qui deviendra constamment nulle hors de ces limites. Cela posé, on tirera des équations (126)

$$f(x) = e^{-2a\alpha}f(x) = e^{2a\alpha}f(x),$$

et, par suite, en nommant ι, η, deux nombres inférieurs à la limite 1, mais dont le dernier η diffère infiniment peu de l'unité,

$$\begin{array}{rlcrl} f(x) = \eta^n e^{-2an\alpha}f(x) & \text{pour} & x = (2n+\iota)a & (n \gtreqless 0), \\ f(x) = \eta^n e^{2an\alpha}f(x) & \text{»} & -x = (2n-\iota)a & (n \gtreqless 1), \\ -f(x) = f(-x) = \eta^n e^{2an\alpha}f(-x) & \text{»} & -x = (2n+\iota)a & (n \gtreqless 0), \\ -f(x) = f(-x) = \eta^n e^{-2an\alpha}f(-x) & \text{»} & x = (2n-\iota)a & (n \gtreqless 1). \end{array}$$

En remplaçant dans les seconds membres des équations précédentes $f(x)$ par $\mathfrak{f}(x)$, $f(-x)$ par $\mathfrak{f}(-x)$, puis réunissant toutes les valeurs particulières de $f(x)$ qui en résulteront, on obtiendra la valeur générale de $f(x)$, savoir :

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \sum_0^{\infty}\eta^n e^{-2an\alpha}\,\mathfrak{f}(x) - \sum_1^{\infty}\eta^n e^{-2an\alpha}\,\mathfrak{f}(-x) \\ & + \sum_1^{\infty}\eta^n e^{2an\alpha}\,\mathfrak{f}(x) - \sum_0^{\infty}\eta^n e^{2an\alpha}\,\mathfrak{f}(-x), \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_0^{\infty}\eta^n e^{-2an\alpha} + \sum_0^{\infty}\eta^n e^{2an\alpha} - 1\right)[\mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}(-x)] \\ &= \frac{1-\eta^2}{1 - \eta(e^{2a\alpha} + e^{-2a\alpha}) + \eta^2}[\mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}(-x)], \end{aligned}$$

ou à très peu près

$$(127)\qquad f(x) = \frac{2(1-\eta)}{1 - \eta(e^{2a\alpha} + e^{-2a\alpha}) + \eta^2}[\mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}(-x)].$$

On a d'ailleurs

$$(128)\qquad \mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda(x-\mu)i} - e^{\lambda(x+\mu)i})\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda;$$

puis, en désignant par ρ une racine de l'équation

$$(129)\qquad e^{a\lambda i} - e^{-a\lambda i} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin a\lambda = 0,$$

on trouve

$$(130)\qquad \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} \frac{(1-\eta)\,d\lambda}{1 - 2\eta\cos(2a\lambda) + \eta^2} = \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} \frac{(1-\eta)\,d\lambda}{(1-\eta\cos 2a\lambda)^2 + (\eta\sin 2a\lambda)^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

Donc, par suite, on aura

$$(131)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a (e^{\rho(x-\mu)i} - e^{\rho(x+\mu)i})\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu \\ &= \frac{1}{2a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a [\cos\rho(x-\mu) - \cos\rho(x+\mu)]\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu \\ &= \frac{1}{a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \sin\rho x \sin\rho\mu\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu \\ &= \frac{2}{a}\sum_0^{\infty}\sin\rho x\int_0^a \sin\rho\mu\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu, \end{aligned}\right.$$

ce qui est exact.

Il est aisé de voir que les méthodes ci-dessus exposées sont applicables à tous les problèmes du même genre.

§ VII. — *Développement des principes établis dans le paragraphe précédent.*

Adoptons les notations du paragraphe III, en sorte qu'on ait

$$\text{(1)} \qquad F(\alpha)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)i}\,F(\lambda i)f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

quelles que soient les fonctions $F(\alpha)$ et $f(\mu)$. On en conclura, si $F(\alpha)$ désigne une fonction entière de α et de e^{α}, en sorte qu'on ait

$$\text{(2)} \qquad F(\alpha) = \varphi(\alpha, e^{\alpha}),$$

on en conclura, dis-je,

$$\text{(3)} \qquad \varphi(\alpha, e^{\alpha})f(x) = \varphi(D_x, 1 + \Delta_x)f(x).$$

De plus, si, la valeur de $F(\alpha)$ restant quelconque, on a

$$\text{(4)} \qquad F(\alpha) = \varphi(\alpha)\chi(\alpha),$$

alors, en posant

$$\text{(5)} \qquad \chi(\alpha)f(x) = \varpi(x),$$

on trouvera

$$\text{(6)} \qquad F(\alpha)f(x) = \varphi(\alpha)\varpi(x).$$

ou

$$\text{(7)} \qquad [\varphi(\alpha)\chi(\alpha)]f(x) = \varphi(\alpha)[\chi(\alpha)f(x)] = \chi(\alpha)[\varphi(\alpha)f(x)].$$

Enfin, si l'on a

$$\text{(8)} \qquad f(x) = \mathbf{S}\,\varphi(k)e^{kx},$$

$\mathbf{S}$ indiquant une somme quelconque de termes finis ou infiniment

petits, on trouvera

$$\text{(9)} \qquad F(\alpha)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda i)\Big[\mathbf{S}\,\varphi(k)e^{k\mu}\Big]e^{\lambda(x-\mu)i}\,d\mu\,d\lambda;$$

et, parce que

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(k-\lambda)i}\,F(\lambda i)\,d\lambda\,d\mu = F(k),$$

on aura

$$\text{(11)} \qquad F(\alpha)f(x) = \mathbf{S}\,F(k)\varphi(k)e^{kx}.$$

Ainsi, par exemple, l'équation

$$\text{(12)} \qquad f(x) = \int_{u'}^{u''} e^{uxi}\,\varphi(u)\,du$$

entraînera la suivante :

$$\text{(13)} \qquad F(\alpha)f(x) = \int_{u'}^{u''} F(ui)\,\varphi(u)e^{uxi}\,du.$$

Si l'on désigne par $\mathfrak{f}(x)$ une fonction de x qui soit toujours connue entre les limites $x = 0$, $x = a$, et toujours nulle hors de ces limites, on aura

$$\text{(14)} \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{f}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{\lambda(x-\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu,\\ \mathfrak{f}(-x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{\lambda(x+\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu,\end{aligned}\right.$$

et l'on en conclura

$$\text{(15)} \qquad \left\{\begin{aligned} F(\alpha)\quad \mathfrak{f}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a F(\lambda i)e^{\lambda(x-\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu,\\ F(\alpha)\,\mathfrak{f}(-x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a F(\lambda i)e^{\lambda(x+\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu.\end{aligned}\right.$$

Observons enfin que, si la fonction $\varpi(x)$, étant propre à vérifier l'équation

$$\text{(16)} \qquad [\varphi(\alpha) - 1]\varpi(x) = 0,$$

est donnée par la formule

$$\varpi(x)=\left\{\sum_0^\infty \eta^n[\varphi(\alpha)]^n+\sum_0^\infty \eta^n\left[\frac{1}{\varphi(\alpha)}\right]^n-1\right\}\mathrm{f}(x), \tag{17}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} \varpi(x)&=\left[\frac{1}{1-\eta\,\varphi(\alpha)}+\frac{1}{1-\dfrac{\eta}{\varphi(\alpha)}}-1\right]\mathrm{f}(x),\\ \varpi(x)&=\frac{1-\eta^2}{1-\eta\left[\varphi(\alpha)+\dfrac{1}{\varphi(\alpha)}\right]+\eta^2}\,\mathrm{f}(x),\end{aligned}\right. \tag{18}$$

η représentant un nombre très rapproché de l'unité; on trouvera, en désignant par ρ une racine réelle de l'équation

$$\varphi(\rho i)=1, \tag{19}$$

et posant

$$Q=\pm\varphi'(\rho i), \tag{20}$$

ou, ce qui revient au même, en représentant par Q la valeur numérique de la fonction $\varphi'(\alpha)$ correspondant à $\alpha=\rho i$,

$$\int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon}\frac{(1-\eta^2)\,d\lambda}{1-\eta\left[\varphi(\lambda i)+\dfrac{1}{\varphi(\lambda i)}\right]+\eta^2}=\frac{2\pi}{Q},$$

ε étant un nombre très petit; et, par suite,

$$\varpi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{Q}e^{\rho(x-\mu)i}\,\mathrm{f}(\mu)\,d\mu. \tag{21}$$

C'est là, en effet, ce que l'on conclura de l'équation (18) combinée avec la formule

$$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\mu)e^{\lambda(x-\mu)i}\,d\mu\,d\lambda. \tag{22}$$

Si la fonction $\mathrm{f}(x)$ était assujettie à s'évanouir hors des limites $x=0$, $x=a$, on aurait

$$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\mu)e^{\lambda(x-\mu)i}\,d\mu\,d\lambda, \tag{23}$$

et l'équation (21) serait remplacée par la suivante :

$$\varpi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a\frac{1}{Q}e^{\rho(x-\mu)i}\,\mathrm{f}(\mu)\,d\mu. \tag{24}$$

Enfin, si l'on supposait

$$\mathrm{f}(x)=\int_{\lambda'}^{\lambda''}\chi(\lambda)e^{\lambda xi}\,d\lambda, \tag{25}$$

on trouverait

$$\varpi(x)=2\pi\sum_{\lambda'}^{\lambda''}\left[\frac{\chi(\rho)}{Q}e^{\rho xi}\right], \tag{26}$$

le signe $\sum$ devant s'étendre à toutes les racines réelles de l'équation (19) comprises entre les limites λ' et λ''.

Si l'on supposait

$$\varphi(\alpha)=\frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)}, \tag{27}$$

l'équation (19), qui fournit les valeurs de ρ, deviendrait

$$\psi(\rho i)-\psi(-\rho i)=0, \tag{28}$$

et la valeur de Q serait donnée par la formule

$$Q=\pm\frac{\psi'(\rho i)+\psi'(-\rho i)}{\psi(\rho i)}. \tag{29}$$

Appliquons maintenant les formules qui précèdent à des exemples particuliers.

Problème I. — *La fonction*

$$f(x)$$

étant assujettie à vérifier l'équation

$$f(x+a)=f(x)\quad\text{ou}\quad e^{a\alpha}f(x)=f(x), \tag{30}$$

et la valeur de cette fonction étant connue entre les limites

$$x=0,\qquad x=a,$$

on demande sa valeur générale.

Solution. — Désignons par $\mathfrak{f}(x)$ une fonction qui obtienne la même valeur que $f(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = a$, et qui soit constamment nulle hors de ces limites. L'expression

$$e^{na\alpha}\,\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}(x + na)$$

(n étant un nombre entier quelconque) sera toujours nulle, excepté entre les limites $x = -na$, $x = -na + a$, et l'expression

$$e^{-na\alpha}\,\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}(x - na)$$

sera pareillement nulle, excepté entre les limites $x = na$, $x = na + a$. De plus, on aura généralement, en désignant par

$$\varepsilon \quad \text{et} \quad \eta = 1 - \varepsilon$$

deux nombres, l'un infiniment petit, l'autre infiniment rapproché de l'unité,

$$(31) \qquad \begin{cases} f(x) = \eta^n e^{an\alpha}\, f(x), \\ f(x) = \eta^n e^{-an\alpha} f(x), \end{cases}$$

et l'on en conclura évidemment

$$(32) \qquad f(x) = \left(\sum_0^\infty \eta^n e^{an\alpha} + \sum_0^\infty \eta^n e^{-an\alpha} - 1\right)\mathfrak{f}(x).$$

On a retranché l'unité des deux sommes $\sum_0^\infty \eta^n e^{an\alpha}$, $\sum_0^\infty \eta^n e^{-an\alpha}$, afin de ne pas trouver $2\mathfrak{f}(x)$ au lieu de $\mathfrak{f}(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = a$, correspondantes à $n = 0$. Pour déduire l'équation (32) de la formule (17) il suffit de remplacer $\varpi(x)$ par $f(x)$, $\mathrm{f}(x)$ par $\mathfrak{f}(x)$ et $\varphi(\alpha)$ par $e^{a\alpha}$. Cela posé, on aura

$$\varphi'(\alpha) = a e^{a\alpha}.$$

L'équation (19) deviendra

$$(33) \qquad e^{a\rho i} = 1 \quad \text{ou} \quad \cos a\rho = 1,$$

et la valeur de Q sera

$$(34) \qquad Q = a e^{a\rho i} = a.$$

Par suite la formule (24) donnera

$$(35) \qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a e^{\rho(x-\mu)i}\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu \\ \quad = \dfrac{1}{a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \cos\rho(x-\mu)\,\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu \\ \quad = \dfrac{2}{a}\int_0^a\left[\dfrac{1}{2} + \sum_0^\infty \cos\dfrac{2n\pi}{a}(x-\mu)\right]\mathfrak{f}(\mu)\,d\mu. \end{cases}$$

Problème II. — *Supposons qu'il s'agisse de résoudre l'équation*

$$(36) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - m^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad (\alpha^2 - m^2\theta^2)z = 0,$$

de manière que l'on ait :

Pour $x = 0$ et pour $x = a$,

$$z = 0,$$

quel que soit t, et, de plus, pour $t = 0$,

$$z = \mathfrak{f}(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

entre les limites $x = 0$, $x = a$ [$\mathfrak{f}(x)$ désignant une fonction qui s'évanouisse hors de ces limites].

Solution. — Dans ce cas, comme on l'a déjà prouvé, on est conduit aux équations

$$(37) \qquad z = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}} + e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)f(x),$$

la valeur de $f(x)$ étant déterminée par les formules

$$(38) \qquad (e^{a\alpha} - e^{-a\alpha})f(x) = 0, \qquad f(x) = -f(-x).$$

La première de ces formules pouvant s'écrire comme il suit

$$e^{2a\alpha} f(x) = f(x),$$

on aura $\varphi(\alpha) = e^{2a\alpha}$, et de plus

$$f(x) = e^{2an\alpha}\, f(x), \qquad f(x) = -e^{-2an\alpha} f(-x),$$
$$f(x) = e^{-2an\alpha} f(x), \qquad f(x) = -e^{2an\alpha}\, f(-x),$$

$$(39) \qquad f(x) = \left(\sum_0^\infty \eta^n e^{2an\alpha} + \sum_0^\infty \eta^n e^{-2an\alpha} - 1\right)[\mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}(-x)].$$

Cela posé, on trouvera, pour déterminer ρ, l'équation

$$e^{2a\rho i} = 1 \quad \text{ou} \quad \cos 2a\rho = 1, \tag{40}$$

et la valeur de Q deviendra

$$Q = 2a. \tag{41}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda(x-\mu)i} - e^{\lambda(x+\mu)i}\right) \mathrm{f}(\mu)\, d\mu\, d\lambda, \tag{42}$$

on tirera de la formule (26)

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2a}\sum\nolimits_{-\infty}^{\infty} e^{\rho x i}\int_0^a \left(e^{-\rho\mu i} - e^{\rho\mu i}\right)\mathrm{f}(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{1}{a i}\sum\nolimits_{-\infty}^{\infty} e^{\rho x i}\int_0^a \sin(\rho\mu)\, \mathrm{f}(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{2}{a}\sum\nolimits_0^{\infty} \sin\rho x \int_0^a \sin(\rho\mu)\, \mathrm{f}(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{2}{a}\sum\nolimits_0^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi\mu}{a}\, \mathrm{f}(\mu)\, d\mu, \end{aligned}\right. \tag{43}$$

ce qui est exact.

Problème III. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - m^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r u = 0 \quad \text{ou} \quad (\theta - m^2\alpha^2 + r)\, u = 0, \tag{44}$$

de manière que l'on ait :

Pour $t = 0$,

$$u = \mathrm{f}(x) \quad \text{entre les limites} \quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = a \end{matrix}\right\};$$

pour $x = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + A u = 0;$$

pour $x = a$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + B u = 0,$$

quel que soit t.

Solution. — On aura, comme nous l'avons prouvé,

$$u = e^{(m^2\alpha^2 - r)t} f(x), \tag{45}$$

$$f(x) = (A - \alpha)\,\varpi(x); \tag{46}$$

la valeur de $\varpi(x)$ étant assujettie aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &[(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha} - (A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}]\,\varpi(x) = 0, \\ &\varpi(x) = -\varpi(-x), \end{aligned}\right. \tag{47}$$

et devant être égale à

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{A - \alpha},$$

entre les limites $x = 0$, $x = a$. Cela posé, on trouvera

$$\psi(\alpha) = (A - \alpha)(B + \alpha)e^{a\alpha},$$

$$\begin{aligned} \varpi(x) &= \eta^n\left[\frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)}\right]^n \varpi(x) = \eta^n\left[\frac{\psi(-\alpha)}{\psi(\alpha)}\right]\varpi(x) \\ &= -\eta^n\left[\frac{\psi(-\alpha)}{\psi(\alpha)}\right]^n \varpi(-x) = -\eta^n\left[\frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)}\right]^n \varpi(-x), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\varpi(x) = \left\{\sum\nolimits_0^{\infty} \eta^n\left[\frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)}\right]^n + \sum\nolimits_0^{\infty} \eta^n\left[\frac{\psi(-\alpha)}{\psi(\alpha)}\right]^n - 1\right\}\left[\frac{\mathrm{f}(x)}{(A - \alpha)} - \frac{\mathrm{f}(-x)}{A + \alpha}\right]. \tag{48}$$

De plus, l'équation (28) donnera

$$(A - \rho i)(B + \rho i)e^{a\rho i} - (A + \rho i)(B - \rho i)^{-a\rho i} = 0,$$

ou

$$(AB + \rho^2)\sin a\rho - (B - A)\rho\cos a\rho = 0; \tag{49}$$

et comme on aura identiquement

$$(AB + \rho^2)\sin a\rho - (B - A)\rho\cos a\rho = \frac{\psi(\rho i) - \psi(-\rho i)}{2i},$$

il est clair qu'en posant

$$R = \pm\frac{d[(AB + \rho^2)\sin a\rho - (B - A)\rho\cos a\rho]}{d\rho} = \pm\frac{\psi'(\rho i) + \psi'(-\rho i)}{2},$$

on tirera de la formule (29)

$$Q = \pm \frac{2R}{\psi(\rho i)} = \pm \frac{2R}{\psi(-\rho i)},$$

eu égard à l'équation

$$\psi(\rho i) = \psi(-\rho i).$$

Par suite, comme on aura aussi

$$\frac{f(x)}{A-\alpha} - \frac{f(-x)}{A+\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{\lambda(x-\mu)i}}{A-\lambda i} - \frac{e^{\lambda(x+\mu)i}}{A+\lambda i}\right) f(\mu)\, d\mu\, d\lambda, \tag{50}$$

on tirera des formules (26) et (48)

$$\left\{\begin{aligned} \varpi(x) &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R}\int_0^a \left[\frac{\psi(\rho i)e^{\rho(x-\mu)i}}{A-\rho i} - \frac{\psi(-\rho i)e^{\rho(x+\mu)i}}{A+\rho i}\right] f(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\rho x i}}{R}\int_0^a \left[(B+\rho i)e^{(a-\mu)\rho i} - (B-\rho i)e^{(\mu-a)\rho i}\right] f(\mu)\, d\mu, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} \varpi(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\rho x i}\,i}{R} \int_0^a [B\sin(a-\mu)\rho + \rho\cos(a-\mu)\rho]\, f(\mu)\, d\mu \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-\sin\rho x}{R}\int_0^a [B\sin(a-\mu)\rho + \rho\cos(a-\mu)\rho]\, f(\mu)\, d\mu; \end{aligned}\right. \tag{52}$$

après quoi la formule

$$f(x) = (A-\alpha)\varpi(x) = (A - D_x)\varpi(x) \tag{53}$$

donnera

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\cos\rho x - A\sin\rho x}{R} \\ &\quad \times \int_0^a [B\sin(a-\mu)\rho + \rho\cos(a-\mu)\rho]\, f(\mu)\, d\mu. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Problème IV. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad (\theta^2 - r^2\alpha^2 - s^2\beta^2)z = 0, \tag{55}$$

de manière que l'on ait :

Pour $x = 0$ et pour $x = a$,

$$z = 0,$$

quels que soient y et t;

Pour $y = 0$ et pour $y = b$,

$$z = 0,$$

quels que soient x et t;

Pour $t = 0$,

$$z = f(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

entre les limites $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = b$ et $f(x, y)$ étant une fonction toujours nulle hors de ces limites.

Solution. — On trouvera, en raisonnant comme dans le second problème,

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}} + e^{-t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}\right) f(x, y) \\ &= \left(e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}} - e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)\chi(y, t) \\ &= \left(e^{\frac{y}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}} - e^{-\frac{y}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}}\right)\psi(x, t), \end{aligned}\right. \tag{56}$$

et de plus

$$\left(e^{\frac{a}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}} - e^{-\frac{a}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)\chi(y, t) = 0, \tag{57}$$

$$\left(e^{\frac{b}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}} - e^{-\frac{b}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}}\right)\psi(x, t) = 0. \tag{58}$$

Soit maintenant

$$F(\alpha) = e^{a\alpha} - e^{-a\alpha} = -F(-\alpha).$$

On aura, en vertu des équations (3) et (57),

$$\begin{aligned} &F(\alpha)\left(e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}} - e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)\chi(y, t) \\ &\quad = \left[F\left(\frac{\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}{r}\right)e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}} - F\left(-\frac{\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}{r}\right)e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right]\chi(y, t) \\ &\quad = \left(e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}} + e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)F\left(\frac{\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}{r}\right)\chi(y, t) = 0. \end{aligned}$$

On aura donc, par suite,

$$\mathrm{F}(\alpha)z = \frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}} + e^{-t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}\right)\mathrm{F}(\alpha)f(x,y) = 0,$$

et, en posant $t = 0$, on en conclura

$$\mathrm{F}(\alpha)f(x,y) = 0,$$

ou

$$(59)\qquad (e^{a\alpha} - e^{-a\alpha})f(x,y) = 0.$$

On établira de la même manière l'équation

$$(60)\qquad (e^{b\beta} - e^{-b\beta})f(x,y) = 0.$$

Enfin, comme on tire de l'équation (56)

$$\frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}} - e^{-t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}\right)f(x,y) = \varpi(x,y,t) - \varpi(-x,y,t),$$

on en conclura, en posant $t = 0$,

$$f(x,y) = \varpi(x,y,0) - \varpi(-x,y,0),$$

et, par suite,

$$(61)\qquad f(-x,y) = -f(x,y).$$

On trouvera de même

$$(62)\qquad f(x,-y) = -f(x,-y).$$

Les équations (59), (60), (61) et (62) suffisent pour prolonger indéfiniment la fonction $f(x,y)$ hors des limites $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. On y parviendra, en suivant la méthode employée dans le second problème. En effet, si l'on désigne par m, n deux nombres entiers quelconques, on tirera des formules (59), (60), (61) et (62)

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x,y) &= \eta^m\eta'^n e^{\pm 2ma\alpha}e^{\pm 2nb\beta}f(x,y),\\ f(-x,y) &= -\eta^m\eta'^n e^{\mp 2ma\alpha}e^{\pm 2nb\beta}f(-x,y),\\ f(x,-y) &= -\eta^m\eta'^n e^{\pm 2ma\alpha}e^{\mp 2nb\beta}f(x,-y),\\ f(-x,-y) &= \eta^m\eta'^n e^{\mp 2ma\alpha}e^{\mp 2nb\beta}f(-x,-y),\end{aligned}\right.$$

$\eta = 1 - \varepsilon$ et $\eta' = 1 - \varepsilon'$ désignant deux nombres très rapprochés de l'unité. On aura, par suite,

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x,y) = {} & \left(\sum_0^\infty \eta^m e^{2ma\alpha} + \sum_0^\infty \eta^m e^{-2ma\alpha} - 1\right)\left(\sum_0^\infty \eta'^n e^{2nb\beta} + \sum_0^\infty \eta'^n e^{-2nb\beta} - 1\right)\\ & \times[\mathfrak{f}(x,y) - \mathfrak{f}(-x,y) - \mathfrak{f}(x,-y) + \mathfrak{f}(-x,-y)].\end{aligned}\right.$$

De plus, si, dans la formule qu'on obtient en égalant l'un à l'autre les derniers membres des équations (39) et (43), on remplace n par m, et $\mathfrak{f}(x)$ par $\mathfrak{f}(x,y) - \mathfrak{f}(x,-y)$, on trouvera

$$\begin{aligned} & \left(\sum_0^\infty \eta^m e^{2ma\alpha} + \sum_0^\infty \eta^m e^{-2ma\alpha} - 1\right)[\mathfrak{f}(x,y) - \mathfrak{f}(x,-y) - \mathfrak{f}(-x,y) + \mathfrak{f}(-x,-y)]\\ & = \frac{2}{a}\sum_0^\infty \sin\frac{m\pi x}{a}\int_0^a \sin\frac{m\pi\mu}{a}[\mathfrak{f}(\mu,y) - \mathfrak{f}(\mu,-y)]\,d\mu.\end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} & \left(\sum_0^\infty \eta'^n e^{2nb\beta} + \sum_0^\infty \eta'^n e^{-2nb\beta} - 1\right)[\mathfrak{f}(\mu,y) - \mathfrak{f}(\mu,-y)]\\ & = \frac{2}{b}\sum_0^\infty \sin\frac{n\pi y}{b}\int_0^a \sin\frac{n\pi\nu}{b}\mathfrak{f}(\mu,\nu)\,d\nu.\end{aligned}$$

Cela posé, la formule (64) donnera

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x,y) = {} & \frac{4}{ab}\sum_0^\infty\sum_0^\infty \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\ & \times\int_0^a\int_0^b \sin\frac{m\pi\mu}{a}\sin\frac{n\pi\nu}{b}\mathfrak{f}(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu \quad (^1).\end{aligned}\right.$$

(1) Il m'a semblé inutile de reproduire ici des formules qui, dans le manuscrit, suivaient celles qu'on vient de lire, et qui se rapportaient uniquement à la question traitée aux pages 33 et 34 du Mémoire sur l'Application du calcul des résidus à la solution des problèmes de Physique mathématique (*Œuvres de Cauchy*, S. II, t, XV).

POST-SCRIPTUM.

Plusieurs des formules établies dans le Mémoire précédent ont, avec celles que j'ai données plus tard dans d'autres Mémoires, des rapports faciles à saisir. L'objet des Notes qu'on va lire est non seulement d'indiquer ces rapports, mais encore de joindre à ces formules quelques éclaircissements, ou quelques développements, qui m'ont paru propres à intéresser les amis des Sciences et à contribuer aux progrès de l'Analyse mathématique.

NOTE I.

SUR LES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES.

Dans le présent Mémoire, un grand nombre de formules renferment quelques-unes des expressions que l'on a nommées *imaginaires*. J'avais même, dans le manuscrit, conservé la notation généralement admise à l'époque où j'écrivais, et le signe $\sqrt{-1}$, auquel j'ai substitué dans l'impression la lettre i, ainsi qu'il est dit à la page 197, afin de me conformer à l'usage maintenant adopté par les géomètres. J'ajouterai que la théorie des expressions imaginaires a été, à diverses époques, envisagée sous divers points de vue. Dès l'année 1806, M. l'abbé Buée et M. Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné des expressions imaginaires une interprétation géométrique contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées. Plus tard, M. Argand et d'autres auteurs, particulièrement MM. Français, Faure, Mourey, Vallès, etc., ont publié des recherches (¹) qui avaient pour but de développer ou de modifier l'interprétation dont il s'agit. Dans mon *Analyse algébrique*, publiée en 1821, je m'étais contenté de faire voir qu'on peut rendre rigoureuse la théorie des expressions et des équations imaginaires en considérant ces expressions et ces équations comme *symboliques*. Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des expressions *imaginaires* par la théorie des quantités que j'appellerai *géométriques*, en mettant à profit les idées émises et les notations proposées non seulement par les auteurs déjà cités, mais aussi par M. de Saint-Venant, dans un Mémoire digne de remarque sur les *sommes géométriques*. C'est ce que j'essayerai d'expliquer dans les paragraphes suivants, qui offriront une sorte de résumé des travaux faits sur cette matière, reproduits, dans un ordre méthodique, avec des modifications utiles, sous une forme simple et nouvelle en quelques points.

(¹) Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre.

§ I. — *Définitions, notations.*

Menons, dans un plan fixe et par un point fixe O pris pour *origine* ou *pôle*, un axe *polaire* OX. Soient, d'ailleurs, r la distance de l'origine O à un autre point A du plan fixe et p l'angle polaire, positif ou négatif, décrit par un rayon mobile qui, en tournant autour de l'origine O dans un sens ou dans un autre, passe de la position OX à la position OA.

Nous appellerons *quantité géométrique*, et nous désignerons par la notation r_p le rayon vecteur OA dirigé de O vers A. La longueur de ce rayon, représentée par la lettre r, sera nommée la *valeur numérique* ou le *module* de la quantité géométrique r_p; l'angle p, qui indique la direction du rayon vecteur OA, sera l'*argument* ou l'*azimut* de cette même quantité. Deux quantités géométriques seront *égales* entre elles, lorsqu'elles représenteront le même rayon vecteur. Donc, puisqu'un tel rayon revient toujours à la même position, quand on le fait tourner autour de l'origine dans un sens ou dans un autre, de manière que chacun de ses points décrive une ou plusieurs circonférences du cercle, il est clair que, si l'on désigne par k une quantité entière quelconque, positive, nulle ou négative et par π le rapport de la circonférence au diamètre, une équation de la forme

$$R_P = r_p$$

entraînera toujours les deux suivantes :

$$R = r, \qquad P = p + 2k\pi,$$

et, par suite, les formules

$$\cos P = \cos p, \qquad \sin P = \sin p.$$

Enfin, nous conviendrons de mesurer les longueurs absolues sur l'axe polaire OX, en sorte qu'on aura identiquement

$$r_0 = r.$$

Quant à la quantité géométrique r_π (¹), elle se mesurera aussi bien que r_0, sur l'axe polaire OX, mais en sens inverse et, par suite, la notation r_π pourra être censée représenter ce qu'on nomme en Algèbre une *quantité négative*.

Cela posé, la notion de *quantité géométrique* comprendra, comme cas particulier, la notion de *quantité algébrique*, positive ou négative et à plus forte raison la notion de *quantité arithmétique* ou de *nombre*, renfermée elle-même, comme cas particulier, dans la notion de quantité algébrique.

Ajoutons que, pour plus de généralité, on pourra désigner encore, sous le nom de *quantité géométrique* et à l'aide de la notation r_p, une longueur r mesurée dans le plan fixe donné, à partir d'un point quelconque, mais dans une direction qui forme avec l'axe fixe OX, ou avec un axe parallèle, l'angle polaire p. Alors le point à partir duquel se

(¹) En général, les notations

$$r_p, \quad r_{p+\pi}$$

représenteront deux longueurs mesurées sur la même droite, mais dans des *directions opposées*.

mesurera la longueur r et le point auquel elle aboutira seront l'*origine* et l'*extrémité* de cette longueur.

§ II. — *Sommes, produits et puissances entières des quantités géométriques.*

Après avoir défini les quantités géométriques, il est encore nécessaire de définir les diverses fonctions de ces quantités, spécialement leurs sommes, leurs produits et leurs puissances entières, en choisissant des définitions qui s'accordent avec celles que l'on admet dans le cas où il s'agit simplement de quantités algébriques. Or, cette condition sera remplie, si l'on adopte les conventions que nous allons indiquer.

Étant données plusieurs quantités géométriques

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \quad \ldots$$

représentées en grandeur et en direction par les rayons vecteurs

$$OA, \quad OA', \quad OA'', \quad \ldots$$

qui joignent le pôle O aux points A, A′, A″, ..., concevons que l'on mène par l'extrémité A du rayon vecteur OA une droite AB égale et parallèle au rayon vecteur OA′, puis, par le point B une droite BC égale et parallèle au rayon vecteur OA″, ...; et joignons le pôle O au dernier sommet K de la portion de polygone OABC...HK construite comme on vient de le dire. On obtiendra le dernier côté OK d'un polygone fermé dont les premiers côtés seront OA, AB, BC, ..., HK. Or, ce dernier côté OK sera ce que nous appellerons la *somme* des quantités géométriques données et ce que nous indiquerons par la juxtaposition de ces quantités, liées l'une à l'autre par le signe +, comme on a coutume de le faire pour une somme de quantités algébriques. En conséquence, si l'on nomme R la valeur numérique du rayon vecteur OK et P l'angle polaire formé par ce rayon avec l'axe polaire, on aura

$$R_P = r_p + r'_{p'} + r''_{p''} + \ldots \tag{1}$$

Observons d'ailleurs que les côtés OA, AB, BC, ..., HK, du polygone OABCD...HK, peuvent être censés représenter eux-mêmes les quantités géométriques désignées par les notations r_p, $r'_{p'}$, $r''_{p''}$, ... Donc, *pour obtenir la somme de plusieurs quantités géométriques, il suffit de porter, l'une après l'autre, les diverses longueurs qu'elles représentent, dans les directions indiquées par les divers arguments, en prenant pour origine de chaque longueur nouvelle l'extrémité de la longueur précédente, puis de joindre l'origine de la première longueur à l'extrémité de la dernière par une droite qui représentera en grandeur et en direction la somme cherchée.*

Si l'on projette orthogonalement les divers côtés du polygone OABC...HK sur l'axe polaire, la projection algébrique du dernier côté OK sera évidemment la somme des projections algébriques de tous les autres, ou, ce qui revient au même, la somme des projections algébriques des rayons vecteurs OA, OA′, OA″, ... Donc, l'équation (1) entraînera la suivante

$$(2)\qquad R\cos P = r\cos p + r'\cos p' + r''\cos p'' + \ldots.$$

On trouvera de même, en projetant les divers côtés du polygone OABC...HK, non plus sur l'axe polaire, mais sur un axe fixe, perpendiculaire à celui-ci,

$$(3)\qquad R\sin P = r\sin p + r'\sin p' + r''\sin p'' + \ldots.$$

Les équations (2) et (3) fournissent le moyen de déterminer aisément le module R et l'argument P de la somme de plusieurs quantités géométriques.

Si l'on considère seulement deux rayons vecteurs OA, OA′, représentés en grandeur et en direction par les quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$, la somme de ces dernières sera, en vertu de la définition admise, une troisième quantité géométrique propre à représenter en grandeur et en direction la diagonale OK du parallélogramme construit sur les rayons vecteurs donnés. En d'autres termes, elle sera le troisième côté d'un triangle qui aura pour premier côté le rayon vecteur OA, le deuxième côté AK étant égal et parallèle au rayon vecteur OA′. D'ailleurs dans ce triangle, le côté OK, représenté en grandeur par le module de la somme $r_p + r'_{p'}$, sera compris entre la somme et la différence des deux autres côtés, représentés en grandeur par les modules r et r'. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Le module de la somme de deux quantités géométriques est toujours compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Il est bon d'observer que le module de la somme de deux quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$ pourrait atteindre les limites qui lui sont assignées par le théorème précédent et se réduirait effectivement à la somme ou à la différence des modules r, r', si les rayons vecteurs OA, OA′ étaient dirigés suivant une même droite, dans le même sens ou en sens opposés.

Le théorème I entraîne évidemment le suivant :

Théorème II. — *Le module de la somme de plusieurs quantités géométriques ne peut surpasser la somme de leurs modules.*

On peut, au reste, déduire directement ce second théorème de cette seule considération que, dans un polygone fermé OABC...HK, le dernier côté OK ne peut surpasser la somme de tous les autres.

Ce que nous nommerons le *produit* de plusieurs quantités géométriques, ce sera une nouvelle quantité géométrique qui aura pour module le produit de leurs modules et pour argument la somme de leurs arguments. Nous indiquerons le produit de plusieurs quantités géométriques,

$$r_p,\quad r'_{p'},\quad r''_{p''},\quad \ldots,$$

à l'aide des notations que l'on emploie dans le cas où il s'agit de quantités algébriques, par exemple, en plaçant ces quantités à la suite les unes des autres, sans les faire précéder d'aucun signe. Cela posé, on aura, d'après la définition énoncée,

$$(4)\qquad r_p r'_{p'} r''_{p''} \ldots = (r r' r'' \ldots)_{p+p'+p''+\ldots}$$

On sait que, pour multiplier par un facteur donné la somme de plusieurs nombres ou de plusieurs quantités algébriques, il suffit de multiplier chaque terme de la somme par le facteur dont il s'agit. La somme R_P de plusieurs quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$, ... jouit de la même propriété. Pour le prouver, il suffit de faire voir que l'équation (1) continuera de subsister, si l'on multiplie les divers termes

$$R_P, \quad r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \quad \ldots$$

par un facteur géométrique ρ_ϖ. Or, en premier lieu, si le module ρ se réduit à l'unité, il suffira, pour effectuer la multiplication dont il s'agit, d'ajouter l'argument ϖ à chacun des arguments P, p, p', p'', ... Mais cette opération revient à faire tourner autour de l'origine chacun des rayons vecteurs

$$R_P, \quad r_p, \quad r'_{p'}, \quad \ldots$$

et, par suite, le polygone OABC...HK dont la construction fournit la valeur de R_P, en faisant décrire à chaque rayon vecteur l'angle ϖ; elle laissera donc subsister l'équation (1), qui deviendra

$$R_{P+\varpi} = r_{p+\varpi} + r'_{p'+\varpi} + r''_{p''+\varpi} + \ldots. \tag{5}$$

En second lieu, on pourra, sans altérer les directions des côtés du polygone OABC...HK, le transformer en un polygone semblable, en faisant varier ses côtés dans le rapport de 1 à ρ et l'on pourra ainsi de la formule (5) déduire l'équation

$$(R\rho)_{P+\varpi} = (r\rho)_{p+\varpi} + (r'\rho)_{p'+\varpi} + \ldots$$

qui peut être présentée sous la forme

$$\rho_\varpi R_P = \rho_\varpi r_p + \rho_\varpi r'_{p'} + \ldots. \tag{6}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Pour multiplier la somme*

$$r_p + r'_{p'} + \ldots$$

de plusieurs quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$, ... par le facteur géométrique ρ_ϖ, il suffit de multiplier chacun des termes qui la composent par ce même facteur.

Ce théorème une fois établi, on en déduit immédiatement la proposition plus générale dont voici l'énoncé :

Théorème IV. — *Le produit de plusieurs sommes de quantités géométriques est la somme des produits partiels que l'on peut former avec les divers termes de ces mêmes sommes, en prenant un facteur dans chacune d'elles.*

Soit maintenant m un nombre entier quelconque. Le produit de m facteurs égaux à la quantité géométrique r_p est ce que nous appellerons la $m^{\text{ième}}$ *puissance* de cette quantité et ce que nous indiquerons, suivant l'usage adopté pour les quantités algébriques, par la notation

$$r_p^m.$$

Cela posé, l'équation (4) entrainera évidemment la formule

$$r_p^m = (r^m)_{mp}; \tag{7}$$

et l'on étendra sans peine aux puissances entières de quantités géométriques les propositions connues et relatives aux puissances entières de quantités algébriques. Ainsi, par exemple, en désignant par m, n deux nombres entiers, on aura

$$r_p^m r_p^n = r_p^{m+n}, \tag{8}$$

$$(r_p^m)^n = r_p^{mn}. \tag{9}$$

Ainsi encore, on conclura du quatrième théorème que la formule de Newton, relative au développement de la puissance entière d'un binome, subsiste dans le cas même où ce binome est la somme de deux quantités géométriques.

Deux quantités géométriques seront dites *opposées* l'une à l'autre, lorsque leur somme sera nulle, et *inverses* l'une de l'autre, lorsque leur produit sera l'unité. D'après ces définitions, la quantité géométrique $r_{p+\pi}$ sera l'opposée de r_p. De plus, si l'on étend les formules (7), (8), au cas même où l'exposant m devient nul ou négatif, on aura identiquement

$$r_p^0 = 1$$

et la quantité géométrique r_p^{-1} ne sera autre chose que l'inverse de r_p. Pareillement, r_p^{-m} sera l'inverse de r_p^m et l'on aura

$$r_p^{-m} = (r^{-m})_{-mp}. \tag{10}$$

Suivant l'usage adopté pour les quantités algébriques, une quantité géométrique pourra quelquefois être représentée par une seule lettre.

§ III. — *Différences, quotients et racines de quantités géométriques.*

Pour les quantités géométriques, comme pour les quantités algébriques, la soustraction, la division, l'extraction des racines ne seront autre chose que les opérations inverses de l'addition, de la multiplication, de l'élévation aux puissances. Par suite, les résultats de ces opérations inverses, désignés sous les noms de *différences*, de *quotients*, de *racines*, se trouveront complètement définis. Ainsi, en particulier :

La *différence* entre deux quantités géométriques sera ce qu'il faut ajouter à la seconde pour obtenir la première;

Le *quotient* d'une quantité géométrique par une autre sera le facteur qui, multiplié par la seconde, reproduit la première;

La *racine* $n^{ième}$ d'une quantité géométrique, n étant un nombre entier quelconque, sera un facteur dont la $n^{ième}$ puissance reproduira la quantité dont il s'agit.

De ces définitions on déduira immédiatement les propositions suivantes :

Théorème I. — *Pour soustraire une quantité géométrique, il suffit d'ajouter la quantité opposée.*

Théorème II. — *Pour diviser par une quantité géométrique, il suffit de multiplier par la quantité inverse.*

Les différences et quotients de quantités géométriques s'indiqueront à l'aide des notations usitées pour les quantités algébriques. Ainsi la différence des deux quantités géométriques R_P, r_p sera désignée par la notation

$$R_P - r_p,$$

et le rapport ou quotient qu'on obtient en divisant la première par la seconde sera exprimé par la notation

$$\frac{R_P}{r_p}.$$

Lorsque, dans une somme ou différence de quantités géométriques, quelques-unes s'évanouiront, on pourra se dispenser de les écrire. Donc, la somme et la différence des quantités géométriques o et r_p pourront être représentées simplement par $+r_p$ et $-r_p$; et l'on aura, eu égard au premier théorème,

$$+r_p = r_p, \qquad -r_p = r_{p+\pi}.$$

Si dans la dernière des deux formules précédentes on pose $p = 0$, elle donnera

$$r_\pi = -r_0 = -r.$$

Soit maintenant ρ_ϖ la racine $n^{ième}$ de r_p : l'équation

$$\rho_\varpi^n = r_p \tag{1}$$

donnera

$$(\rho^n)_{n\varpi} = r_p$$

et, par suite (*voir* le § Ier),

$$\rho^n = r, \qquad n\varpi = p + 2k\pi, \tag{2}$$

k désignant une quantité entière, positive, nulle ou négative; puis on en conclura

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \qquad \varpi = \frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \tag{3}$$

$$\rho_\varpi = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}}. \tag{4}$$

En vertu de la seconde des formules (3), l'angle polaire

$$\varpi = \frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

pourra être un terme quelconque de la progression arithmétique dont la raison serait $\frac{2\pi}{n}$, l'un des termes étant $\frac{p}{n}$. Il en résulte qu'une même quantité géométrique r_p offrira n racines du degré n, toutes comprises dans la formule

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}}, \tag{5}$$

et représentées par des rayons vecteurs égaux, menés du pôle à n points qui diviseront une même circonférence en parties égales. Ajoutons que, l'expression (5) reprenant exactement la même valeur, lorsqu'on fait croître ou décroître le rapport $\frac{k}{n}$ d'une ou de plusieurs unités, par conséquent, lorsqu'on fait croître ou décroître k de n ou d'un multiple de n, il suffira, pour obtenir les diverses valeurs de cette expression, de prendre successivement pour k les divers termes de la suite

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n-1. \tag{6}$$

Si p se réduit à zéro et r à l'unité, on aura simplement

$$r_p = 1_0 = 1.$$

Alors les diverses valeurs de l'expression (5), réduites à la forme

$$1_{\frac{2k\pi}{n}}, \tag{7}$$

ne seront autre chose que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, représentées par les divers termes de la suite

$$1_0 = 1,\quad 1_{\frac{2\pi}{n}},\quad 1_{\frac{4\pi}{n}},\quad \ldots,\quad 1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}. \tag{8}$$

Il est bon d'observer que, parmi ces termes, deux au plus se réduiront à des quantités algébriques, savoir : le premier terme $1_0 = 1$ et, quand n sera pair, le terme $1_\pi = -1$, que l'on obtiendra en posant

$k = \frac{n}{2}$. De plus, comme on aura

$$\frac{2(n-1)\pi}{n} = 2\pi - \frac{2\pi}{n},\qquad \frac{2(n-2)\pi}{n} = 2\pi - \frac{4\pi}{n},\qquad \ldots$$

et, par conséquent,

$$1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}} = 1_{-\frac{2\pi}{n}},\qquad 1_{\frac{2(n-2)\pi}{n}} = 1_{-\frac{4\pi}{n}},\qquad \ldots,$$

il est clair que les diverses racines de l'unité pourront être représentées non seulement par les divers termes de la suite (8), mais encore, si n est impair, par les termes de la suite

$$1_{-\frac{(n-1)\pi}{n}},\quad \ldots,\quad 1_{-\frac{4\pi}{n}},\quad 1_{-\frac{2\pi}{n}},\quad 1,\quad 1_{\frac{2\pi}{n}},\quad 1_{\frac{4\pi}{n}},\quad \ldots,\quad 1_{\frac{(n-1)\pi}{n}}, \tag{9}$$

et, si n est pair, par les termes de la suite

$$1_{-\frac{(n-2)\pi}{2}},\quad \ldots,\quad 1_{-\frac{4\pi}{n}},\quad 1_{-\frac{2\pi}{n}},\quad 1,\quad 1_{\frac{2\pi}{n}},\quad 1_{\frac{4\pi}{n}},\quad \ldots,\quad 1_{\frac{(n-2)\pi}{n}},\quad -1. \tag{10}$$

Si, par exemple, on attribue successivement à n les valeurs

$$2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad \ldots,$$

on trouvera pour *racines carrées* de l'unité les deux quantités algébriques

$$-1,\quad +1;$$

pour *racines cubiques* de l'unité, la seule quantité algébrique 1 et les deux quantités géométriques

$$1_{-\frac{2\pi}{3}},\quad 1_{\frac{2\pi}{3}};$$

pour *racines quatrièmes* de l'unité, les deux quantités algébriques 1, -1 et les deux quantités géométriques

$$1_{-\frac{\pi}{2}},\quad 1_{\frac{\pi}{2}},$$

liées entre elles par la formule

$$1_{-\frac{\pi}{2}} = -1_{\frac{\pi}{2}},$$

etc.

Si, dans l'expression (5), on posait $k = 0$, cette expression, réduite à

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}},$$

représenterait une seule des racines $n^{\text{ièmes}}$ de r_p. Or, il suffira de multiplier celle-ci par l'une des valeurs de $1_{\frac{2k\pi}{n}}$, c'est-à-dire par l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, pour reproduire l'expression (5), propre à représenter l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de r_p, attendu que l'on aura généralement

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{p}{n}} 1_{\frac{2k\pi}{n}}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Pour obtenir les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ d'une quantité géométrique, il suffit de multiplier successivement l'une quelconque d'entre elles par les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

§ IV. — *Fonctions entières. Équations algébriques.*

Nous appellerons *fonction entière* d'une quantité géométrique une somme de termes proportionnels à des puissances entières et positives de cette quantité. Le degré de la puissance la plus élevée sera le *degré* de la fonction. Cela posé, si l'on désigne par z une quantité géométrique variable et par Z une fonction de z entière et du degré n, la forme générale de la fonction Z sera

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n, \tag{1}$$

$a, b, c, \ldots, g, h$ désignant des coefficients constants, dont chacun pourra être une quantité géométrique. Ajoutons que l'on pourra encore écrire l'équation (1) comme il suit

$$Z = z^n(h + gz^{-1} + \ldots + cz^{-n+2} + bz^{-n+1} + az^{-n}). \tag{2}$$

Si n se réduisait à zéro, la fonction entière Z se réduirait à la constante a. Dans toute autre hypothèse, la fonction Z sera variable avec z et son module deviendra infini avec le module de z. En effet, posons

$$z = r_p, \qquad Z = \mathrm{R}_{\mathrm{P}};$$

soit de plus h le module de la constante h et concevons que le module r de z vienne à croître indéfiniment; on verra décroître indéfiniment les modules de $z^{-1}, z^{-2}, \ldots, z^{-n}$ et, par suite, le polynome

$$h + gz^{-1} + \ldots + az^{-n}$$

s'approchera indéfiniment de la limite h. Donc, pour de très grandes valeurs de r, le module de ce polynome différera très peu du module h de la constante h et le module R de Z, eu égard à la formule (2), différera très peu du module de hz^n, c'est-à-dire du produit

$$\mathrm{h}r^n.$$

Donc le module R de Z deviendra infiniment grand avec le module r de z et *à une valeur finie du module* R *de la fonction* Z *ne pourra jamais correspondre qu'une valeur finie du module r de la variable* Z.

Concevons, maintenant, que l'on attribue à la variable z une valeur finie, puis à cette valeur finie un accroissement

$$\zeta = \rho_\varpi,$$

dont le module ρ soit très petit; et en désignant cet accroissement par Δz, nommons ΔZ l'accroissement correspondant de la fonction Z. Pour obtenir $Z + \Delta Z$, il suffira de remplacer z par $z + \zeta$ dans le second membre de l'équation (1), où chaque terme pourra être développé, à l'aide de la formule du binome, en une suite ordonnée selon les puissances entières et ascendantes de ζ. En opérant ainsi et réunissant les termes semblables, on obtiendra le développement de $Z + \Delta Z$ en une suite de termes proportionnels aux puissances entières de ζ, d'un degré inférieur ou égal à n. Si de cette suite on retranche la fonction Z représentée par le terme indépendant de ζ, on obtiendra un reste qui sera divisible algébriquement par ζ et qui représentera le développement de ΔZ. Nommons ζ^m la plus petite des puissances de ζ, comprises dans ce développement. Le quotient, que produira la division de ΔZ par ζ^m, sera une fonction entière de ζ qui se réduira, pour une valeur nulle de ζ, à une limite finie et différente de zéro. Soient $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ ce quotient et $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ la limite dont il s'agit. On aura, non seulement

$$\zeta^m = (\rho^m)_{m\varpi},$$

mais encore

$$\Delta Z = \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}\zeta^m = (\mathfrak{R}\rho^m)_{\mathfrak{p}+m\varpi},$$

et pour des valeurs décroissantes de ρ l'argument $\mathfrak{P} + m\varpi$ de ΔZ convergera vers la limite $\mathcal{P} + m\varpi$. Cela posé, nommons A et B les extrémités de deux rayons vecteurs qui, partant du pôle O, soient représentés en grandeur et en direction par les deux quantités géométriques

$$Z, \quad Z + \Delta Z.$$

La longueur AB, représentée géométriquement par ΔZ et numériquement par le module $\mathfrak{R}\rho^m$, se mesurera dans une direction qui formera l'angle $\mathfrak{P} + m\varpi$ avec l'axe polaire. Si, d'ailleurs, on fait croître le module ρ à partir de zéro, le point B, d'abord appliqué sur le point A, décrira un arc dont la droite AB sera la corde et la tangente menée à cet arc, par le point A, formera, avec l'axe polaire, un angle égal, non plus à la somme $\mathfrak{P} + m\varpi$, mais à sa limite $\mathcal{P} + m\varpi$. Or, évidemment la distance OB sera plus petite que la distance OA, si le point B est intérieur à la circonférence de cercle décrite du pôle O comme centre avec le rayon OA et l'on peut ajouter que cette dernière condition sera certainement remplie, pour de très petites valeurs du module ρ, si la tangente menée par le point A à l'arc AB forme un angle obtus avec le prolongement du rayon OA, ou, en d'autres termes, si l'angle polaire Π, déterminé par la formule

$$\Pi = \mathcal{P} + m\varpi - P, \tag{3}$$

offre un cosinus négatif; ce qui aura lieu, par exemple, si l'on a $\Pi = \pi$. Mais, après avoir choisi arbitrairement pour Π un angle dont le cosinus soit négatif, on pourra toujours satisfaire à l'équation (3), en attribuant à ϖ une valeur convenable, puisque, pour y parvenir, il suffira

de prendre

$$\varpi = \frac{\Pi + P - \mathcal{P}}{m}. \tag{4}$$

Donc, en définitive, si le module R de Z, correspondant à une valeur finie de la variable z, n'est pas nul, on pourra modifier cette valeur de manière à faire décroître le module R. En conséquence, la plus petite valeur que pourra prendre le module R ne pourra différer de zéro. Mais, quand R s'évanouira, la valeur de z, d'après ce qui a été dit plus haut, devra rester finie, et, puisqu'une telle valeur vérifiera l'équation

$$Z = 0,$$

on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient z une quantité géométrique variable et Z une fonction entière de z. On pourra toujours satisfaire, par une ou plusieurs valeurs finies de z, à l'équation*

$$Z = 0. \tag{5}$$

Une valeur finie de z, qui vérifie l'équation (5), est ce qu'on nomme une *racine* de cette équation. Soit z' une telle racine, la fonction Z s'évanouira avec la différence $z - z'$, et, si le degré n de cette fonction surpasse l'unité, elle sera le produit de $z - z'$ par une autre fonction entière qui devra s'évanouir à son tour pour une nouvelle valeur z'' de z, et sera, en conséquence, divisible par $z - z''$. En continuant ainsi, on finira par établir la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit z une quantité géométrique variable et*

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de z du degré n. L'équation

$$Z = 0$$

admettra n racines, et, si l'on nomme

$$z', \quad z'', \quad \ldots, \quad z^{(n)}$$

ces mêmes racines, on aura identiquement, quel que soit z,

$$(6)\qquad Z = h(z - z')(z - z'')\ldots(z - z^{(n)}),$$

en sorte que la fonction z *sera le produit de la constante* h *par les facteurs linéaires*

$$z - z',\quad z - z'',\quad \ldots,\quad z - z^{(n)}.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'équation (5) se vérifie, le terme hz^n de la fonction z équivaut à la somme de tous les autres, prise en signe contraire. Donc alors le module $\mathrm{h}r^n$ de ce terme doit être égal ou inférieur à la somme des modules de tous les autres et, si l'on nomme $\mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{g}, \mathrm{h}$ les modules des coefficients $b, c, \ldots, g, h$, on doit avoir

$$(7)\qquad \mathrm{a} + \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} - \mathrm{h}r^n \geqq \mathrm{o}.$$

Or, cette dernière condition peut s'écrire comme il suit :

$$(8)\qquad \frac{\mathrm{a}}{r^n} + \frac{\mathrm{b}}{r^{n-1}} + \frac{\mathrm{c}}{r^{n-2}} + \ldots + \frac{\mathrm{g}}{r} - \mathrm{h} \geqq \mathrm{o}.$$

D'ailleurs, le premier membre de la formule (8) varie, en décroissant, par degrés insensibles et passe de la limite ∞ à la limite $-\mathrm{h}$, tandis que r croît et varie par degrés insensibles en passant de zéro à l'infini. Donc ce premier membre s'évanouira pour une certaine valeur de r qui vérifiera l'équation

$$(9)\qquad \mathrm{a} + \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} - \mathrm{h}r^n = \mathrm{o};$$

et, si l'on nomme l la racine positive unique de l'équation (9), la condition (7) ou (8) donnera $r < \mathrm{l}$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Les mêmes choses étant admises que dans le théorème II, chacune des racines de l'équation proposée offrira un module inférieur à la racine positive unique de l'équation auxiliaire qu'on obtient lorsqu'on remplace dans la proposée chaque terme par son module, en affectant du signe — le terme qui renferme la plus haute puissance de l'inconnue et tous les autres du signe +.*

Lorsque dans la fonction entière z tous les termes s'évanouissent, à l'exception des termes extrêmes a et hz^n, la formule (5), réduite à l'*équation binome*

$$(10)\qquad a + hz^n = \mathrm{o},$$

donne

$$(11)\qquad z^n = -\frac{a}{h},$$

et ses diverses racines ne sont autres que les racines $n^{\text{ièmes}}$ du rapport $-\frac{a}{h}$.

§ V. — *Sur la résolution des équations algébriques.*

Considérons toujours une équation algébrique,

$$(1)\qquad Z = \mathrm{o},$$

dont le premier membre

$$(2)\qquad Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

soit une fonction entière de la variable

$$z = r_p,$$

les coefficients $a, b, c, \ldots, g, h$ pouvant être eux-mêmes des quantités géométriques. Comme on l'a prouvé dans le précédent paragraphe, cette équation admettra généralement n racines, c'est-à-dire que l'on pourra généralement assigner à z, n valeurs pour lesquelles la fonction Z s'évanouira. *Résoudre* l'équation, c'est déterminer ces racines, en commençant par l'une quelconque d'entre elles, et la condition à laquelle une méthode de résolution devra satisfaire sera de fournir chaque racine avec telle approximation que l'on voudra. Or, le caractère d'une racine est de réduire à zéro la fonction Z avec son module R, et, si des valeurs successives de z correspondent à des valeurs de R qui décroissent sans cesse, en s'approchant indéfiniment de la limite zéro, ces valeurs de z formeront une série dont le terme général convergera vers une racine de l'équation (1). Donc, pour résoudre cette équation, il suffira de faire décroître indéfiniment le module R et l'on pourra considérer comme appropriée à ce bût toute méthode qui permettra de substituer à une valeur finie quelconque de z une autre valeur qui fournisse un module sensiblement plus petit de la fonction Z. D'ailleurs, si de ces deux valeurs de z la première n'est pas nulle, on pourra considérer la seconde comme composée de deux parties dont l'une serait précisément la première valeur de z, à laquelle s'ajouterait une valeur particulière d'une variable nouvelle qui aurait commencé par être nulle. Donc on peut admettre comme méthode de résolution tout procédé qui permet d'assigner à une variable z comprise dans une fonction entière Z, une valeur à laquelle corresponde un module R de Z sensiblement inférieur au module du terme constant a, qu'on obtient en posant dans cette fonction $z = 0$.

Cela posé, concevons que la valeur générale de Z étant donnée par l'équation (2), on considère d'abord le cas où le coefficient b de z diffère de zéro. Si la variable r passe d'une valeur nulle à une valeur très peu différente de zéro, la fonction Z passera de la valeur a à une valeur peu différente de a et représentée approximativement par le binome

$$a + bz.$$

Si d'ailleurs le module de a est très petit relativement au module de b, l'équation (1) offrira pour l'ordinaire une racine très rapprochée de zéro et cette racine se confondra sensiblement avec celle de l'équation binome

$$a + bz = 0, \tag{3}$$

ou, ce qui revient au même, avec la quantité géométrique ρ_ϖ déterminée par la formule

$$\rho_\varpi = -\frac{a}{b}. \tag{4}$$

On pourra donc alors prendre ordinairement la quantité ρ_ϖ pour *valeur approchée* de l'une des racines de l'équation (1) et c'est en cela que consiste la *méthode d'approximation linéaire* ou *newtonienne*. Toutefois, la valeur ρ_ϖ attribuée à la variable z ne pourra être admise comme valeur approchée d'une racine qu'autant qu'elle fournira un module R de Z inférieur au module de a.

Si, en posant

$$z = \rho_\varpi, \tag{5}$$

on obtient un module de Z supérieur au module de a, on pourra substituer à la valeur précédente de z une autre valeur de la forme

$$z = r_\varpi, \tag{6}$$

r étant inférieur à ρ et convenablement choisi. Effectivement, soient

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \ldots,\ \mathrm{g},\ \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ g,\ h.$$

Le module de

$$a + bz,$$

qui se réduisait à

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}\rho = 0$$

lorsqu'on prenait $z = \rho_\varpi$, deviendra

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r > 0, \tag{7}$$

lorsqu'on posera $z = r_\varpi$; alors aussi le module de la somme

$$cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

sera, en vertu du deuxième théorème du paragraphe II, égal ou inférieur à la quantité positive

$$\mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n,$$

et, par suite, le module du polynome

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

sera égal ou inférieur à la quantité positive

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n,$$

ou, ce qui revient au même, à la différence

$$\mathrm{a} - r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}). \tag{8}$$

Donc, le module R de Z sera inférieur au module a de la constante a, si l'on détermine z à l'aide de l'équation (6), en assujettissant le module r à vérifier, non seulement la condition (7), mais encore la suivante

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1} > 0. \tag{9}$$

D'ailleurs, si l'on nomme r la racine positive unique de l'équation

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1} = 0, \tag{10}$$

il suffira, pour satisfaire simultanément aux conditions (7) et (9), que le module r devienne inférieur au plus petit des deux nombres ρ et r. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient*

$$Z = a + bz + cz^2 + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$ et

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{b}, \quad \mathrm{c}, \quad \ldots, \quad \mathrm{g}, \quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad g, \quad h.$$

Supposons, d'ailleurs, que, les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_ϖ *la racine de l'équation binome*

$$a + bz = 0,$$

et r *la racine positive unique de l'équation*

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module de son premier terme a, il suffira de poser $p = \varpi$ *et d'attribuer au module r de z une valeur inférieure au plus petit des deux nombres* ρ, r.

Nous avons ici supposé que, dans la fonction Z, le coefficient de z ne se réduisait pas à zéro. Mais ce coefficient et d'autres encore pourraient s'évanouir. Admettons cette hypothèse, ou, ce qui revient au même, supposons la fonction Z déterminée, non plus par l'équation (2), mais par une équation de la forme

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n, \tag{11}$$

les nombres l, m, …, n formant une suite croissante. Alors, si le module de a était très petit relativement au module de b, on pourrait, dans une première approximation, réduire pour l'ordinaire l'équation algébrique

$$Z = 0$$

à l'équation binome

$$a + bz^l = 0. \tag{12}$$

De plus, en raisonnant comme ci-dessus, on établirait, à la place du théorème I, la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit*

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n,$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, *et*

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{b}, \quad \mathrm{c}, \quad \ldots, \quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h.$$

Supposons d'ailleurs que les nombres l, m, …, n forment une suite croissante, et que, les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_ϖ *l'une quelconque des racines de l'équation binome*

$$a + bz^l = 0, \tag{12}$$

et r la racine positive unique de l'équation

$$\mathrm{b} - \mathrm{c}\,r^{m-l} - \ldots - \mathrm{h}\,r^{n-l} = 0. \tag{13}$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module de son premier terme a, il suffira de poser $p = \varpi$, et d'attribuer au module r de z une valeur inférieure au plus petit des deux nombres ρ, r.

En s'appuyant sur les théorèmes I et II, on pourra, d'une valeur nulle de z, déduire une série d'autres valeurs auxquelles correspondront des valeurs sans cesse décroissantes du module R de la fonction Z. Si ces valeurs décroissantes de R s'approchent indéfiniment de zéro, les valeurs correspondantes de z convergeront vers une limite qui sera certainement une racine de l'équation (1). Mais il peut arriver aussi que les valeurs de R successivement obtenues décroissent sans s'approcher indéfiniment de zéro. C'est ce que l'on reconnaîtra sans peine en essayant d'appliquer les théorèmes énoncés à la résolution d'équations très simples, par exemple, d'équations du second degré.

En effet, considérons le cas où Z, étant du second degré, l'on aurait

$$Z = a + bz + cz^2. \tag{14}$$

Supposons d'ailleurs que, a, b, c étant les modules de a, b, c, on ait

$$a = \mathrm{a}, \qquad b = -\mathrm{b}, \qquad c = \mathrm{c}.$$

La valeur de Z deviendra

$$Z = \mathrm{a} - \mathrm{b}z + \mathrm{c}z^2; \tag{15}$$

et les racines ρ_ϖ, r des équations

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}z = 0, \qquad \mathrm{b} - \mathrm{c}r = 0$$

seront

$$\rho_\varpi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \qquad \mathrm{r} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}},$$

de sorte qu'on aura encore

$$\rho = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \qquad \varpi = 1.$$

Si d'ailleurs ρ est supérieur à r, ou, ce qui revient au même, si l'on a

$$\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2 > 0, \tag{16}$$

alors, pour obtenir un module de Z inférieur au module a, il suffira, en vertu du théorème I, de poser

$$z = \theta\mathrm{r}, \tag{17}$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité, mais qui pourra varier arbitrairement entre les limites 0, 1; et comme en posant

$$z = \theta\mathrm{r} + \zeta, \tag{18}$$

on trouvera

$$Z = \mathrm{a}' - \mathrm{b}'\zeta + \mathrm{c}\zeta^2, \tag{19}$$

les valeurs de a', b' étant

$$\mathrm{a}' = \mathrm{a} - \theta(1-\theta)\mathrm{br}, \qquad \mathrm{b}' = (1-2\theta)\mathrm{b}; \tag{20}$$

il est clair qu'à la valeur zéro de ζ, ou, ce qui revient au même, à la valeur $\theta\mathrm{r}$ de z correspondra un module de Z, inférieur au module de a, et représenté par a'. Il y a plus : comme des formules (20), jointes à la condition (16), on tirera

$$\mathrm{a}'\mathrm{c} - \mathrm{b}'^2 > 0, \tag{21}$$

il suffira d'appliquer le théorème I à la valeur générale de Z, que détermine, non plus l'équation (15), mais l'équation transformée (19), pour démontrer que le module de Z décroîtra encore si la nouvelle variable ζ passe de la valeur zéro à la valeur

$$\theta\frac{\mathrm{b}'}{\mathrm{c}} = \theta\Theta\mathrm{r},$$

Θ étant déterminé par la formule

$$\Theta = 1 - 2\theta,$$

ou, ce qui revient au même, si la variable z passe de la valeur θr à la valeur $\theta r(1+\Theta)$. En continuant ainsi, on reconnaîtra que, pour obtenir des valeurs décroissantes du module de Z, il suffit de prendre pour valeurs successives de z les divers termes de la suite

$$(22) \qquad 0,\quad \theta r,\quad \theta r(1+\Theta),\quad \theta r(1+\Theta+\Theta^2),\quad \ldots.$$

Or, le terme général de cette suite converge vers la limite

$$\theta r(1+\Theta+\Theta^2+\ldots) = \frac{\theta}{1-\Theta} r = \frac{1}{2} r,$$

et comme en supposant remplie la condition (16) on trouve, pour $z = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}\frac{b}{c}$,

$$Z = a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c} > \frac{3}{4} a;$$

il est clair que dans cette hypothèse la limite vers laquelle converge le terme général de la série (22) ne peut être une racine de l'équation du second degré

$$(23) \qquad a - bz + cz^2 = 0.$$

On arriverait aux mêmes conclusions en formant la série des valeurs décroissantes du module R de Z, qui correspondraient aux valeurs successives de la variable z, et l'on reconnaîtrait ainsi que le terme général de cette nouvelle série, au lieu de s'approcher indéfiniment de zéro, converge vers la limite

$$a - (1-\theta) r b (1+\Theta^2+\Theta^4+\ldots) = a - \frac{\theta(1-\theta)}{1-\Theta^2} b r = a - \frac{1}{4} b r,$$

par conséquent vers la limite

$$a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c},$$

supérieure à $\frac{3}{4}$a.

La limite vers laquelle converge le terme général de la série (22) n'étant pas une racine de l'équation (21), on pourrait être tenté de regarder le calcul de cette limite comme inutile à la résolution de cette

équation. Mais cette opinion serait une erreur; car si l'on décompose la variable z en deux parties, dont la première soit la limite trouvée, ou, en d'autres termes, si l'on pose

$$z = \frac{1}{2} r + \zeta,$$

il suffira de substituer à la variable z la nouvelle variable ζ, pour réduire l'équation (23) à l'équation binome

$$(24) \qquad a' + c\zeta^2 = 0,$$

la valeur de a' étant

$$a' = a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c}.$$

D'ailleurs, les deux racines de l'équation (24) ne sont autres que les deux racines carrées du rapport $-\frac{a'}{c}$.

Généralement, si au lieu d'une équation du second degré, on considère une équation de degré quelconque, la série des valeurs de z, successivement déduites des règles que nous avons énoncées, et correspondant à des valeurs décroissantes du module R de Z, pourra converger vers une limite qui, n'étant pas une racine de l'équation donnée, ne fasse pas évanouir le module R. Mais alors il suffira d'attribuer à cette limite un accroissement représenté par une nouvelle variable ζ; puis de substituer ζ à z, pour obtenir, à la place de l'équation donnée, une équation transformée, de laquelle on pourra déduire, par l'application des mêmes règles, une nouvelle série de valeurs de ζ et, par conséquent, une nouvelle série de valeurs de z, correspondant à de nouvelles valeurs décroissantes du module R.

En continuant de la sorte, c'est-à-dire en déduisant, s'il est nécessaire, des règles énoncées plusieurs séries de valeurs de z, en déterminant d'ailleurs avec une approximation suffisante les limites vers lesquelles convergent les termes généraux de ces séries et en transformant l'équation donnée par l'introduction de variables nouvelles qui, ajoutées à ces limites, reproduisent la variable z, on pourra, non seulement diminuer sans cesse, mais encore rapprocher indéfiniment de zéro le module R; par conséquent, on finira par résoudre l'équation donnée avec une approximation aussi grande que l'on voudra. Il y a plus : cette méthode de résolution peut encore servir à démontrer l'existence des racines. Lorsqu'on veut l'employer à cet usage, il n'est pas absolument nécessaire de considérer les équations auxiliaires (9) et (10) ou (12) et (13); il suffit d'observer que l'on satisfait aux conditions requises, par exemple aux conditions (7) et (9), en attribuant au module r de z une valeur infiniment petite; et l'on se trouve ainsi ramené au théorème I du paragraphe IV, par une démonstration qui est précisément celle qu'en a donnée M. Argand dans un Article que renferme le quatrième Volume des *Annales* de M. Gergonne, page 133 et suivantes (¹). C'est encore à cette démonstration que se réduit celle que M. Legendre a proposée pour le même théorème dans la seconde édition de la *Théorie des nombres*. D'ailleurs, M. Legendre observe qu'en diminuant continuellement le module d'une fonction entière par des opérations semblables, répétées convenablement, on parviendra en définitive à une valeur de ce module aussi petite que l'on voudra; il présente, en conséquence, ce décroissement graduel comme méthode de résolution pour les équations algébriques, et surtout comme propre à fournir une première valeur approchée d'une racine d'une telle équation. Mais le moyen qu'il propose pour conduire le calculateur à ce but laisse beaucoup à désirer et consiste à faire décroître le module de la fonction entière Z, en attribuant à la variable z une valeur égale au produit d'un coefficient très petit par la racine de l'équation (3), ou par une racine de l'équation (12). Du reste, il n'explique pas comment on doit s'y prendre pour obtenir un coefficient d'une petitesse telle que le module de Z décroisse effectivement, et ne parle pas de l'équation (10) ou (13) qui permet de répondre à cette question. Ajoutons que, même en ayant égard à l'équation (10) ou (13), et en

(¹) J'ai en ce moment sous les yeux un exemplaire de l'Ouvrage dont cet article offre le résumé. Cet Ouvrage, qui a pour titre : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, porte la date de 1806. Le nom de l'auteur, *Robert Argand, de Genève*, est écrit à la main.

suivant la méthode ci-dessus tracée, on peut être exposé à un travail long et pénible, si l'on n'a pas soin de choisir convenablement les quantités que la méthode laisse indéterminées; par exemple, le nombre désigné par θ dans la formule (18). Supposons, pour fixer les idées, que l'équation (23) se réduise à la suivante

$$2 - z + z^2 = 0.$$

Alors, le rapport $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$ ou r étant réduit à l'unité, le $n^{\text{ième}}$ terme de la série (22) sera

$$\theta(1 + \Theta + \Theta^2 + \ldots + \Theta^{n-2}) = \theta\,\frac{1 - \Theta^{n-1}}{1 - \Theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta^{n-1}$$

et convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite $\frac{1}{2}$. Mais il s'approchera très lentement de cette limite, si l'on attribue au nombre θ une valeur peu différente de zéro, à laquelle correspondra une valeur de Θ peu différente de l'unité. Donc alors on devra prolonger fort loin la série (22), avant d'obtenir un terme sensiblement égal à cette limite; et l'on peut ajouter que les valeurs de R correspondant aux valeurs successives de z décroîtront très lentement. A la vérité, dans le cas présent, on peut déterminer directement la limite cherchée. Mais il n'en sera plus de même quand l'équation donnée sera d'un degré supérieur au second; et généralement le calcul des valeurs successives de z deviendra pénible, si le module R décroît très lentement tandis que l'on passe d'une valeur de z à la suivante : ce qui obligera le calculateur d'effectuer une longue suite d'opérations avant que ce module devienne sensiblement nul.

On évitera ces inconvénients, ou du moins on les atténuera notablement, si, en appliquant à une fonction entière Z le théorème I ou II, on attribue à la variable z un module r qui, sans dépasser la plus petite des limites indiquées ρ et r, fasse décroître autant qu'il sera possible le module de Z. D'ailleurs, lorsque le coefficient de z dans Z étant différent de zéro, on attribue à la variable z, avec l'argument ϖ, un module égal et inférieur au plus petit des nombres ρ, r, le module de Z ne dépasse pas la somme (8), savoir

$$\mathrm{a} - r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}), \tag{8}$$

dont la valeur minimum, inférieure à a, correspond à la valeur maximum du produit

$$r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}). \tag{25}$$

Enfin, le produit (25), dont les deux facteurs s'évanouissent, le premier quand on pose $r = 0$, le second quand on pose $r = \mathrm{r}$, aura évidemment pour maximum une valeur positive correspondant à une valeur ι de r, qui vérifiera la condition

$$\iota < \mathrm{r}.$$

Donc, la quantité ι, inférieure à r, sera la valeur de r à laquelle correspondra la valeur minimum de la somme (8), que le module de Z ne dépassera point si l'on a $r < \rho$. On se trouvera donc naturellement conduit à substituer, dans le théorème I, ι à r; on pourra même réduire le module r de z à celle des deux quantités ρ, r qui fournira le plus petit module de Z; et l'on obtiendra ainsi, pour la résolution des équations algébriques, la méthode nouvelle et très simple qui fera l'objet du paragraphe suivant.

§ VI. — *Méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques.*

Soit toujours

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de la variable

$$z = r_p.$$

Comme on l'a expliqué dans le paragraphe V, on pourra résoudre une équation algébrique quelconque à l'aide de tout procédé qui fournira pour la variable z une valeur à laquelle corresponde un module R

de la fonction Z, sensiblement inférieur au module a du premier terme a.

Cela posé, considérons d'abord le cas où, la valeur de Z étant donnée par l'équation (1), le coefficient b de z diffère de zéro. Alors une méthode de résolution très simple pourra évidemment se déduire du théorème que nous allons énoncer.

Théorème I. — *Soient*

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n \tag{1}$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, *et*

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \ldots,\quad \mathrm{g},\quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad g,\quad h.$$

Supposons d'ailleurs que, les coefficients a, b *n'étant pas nuls, on nomme* ρ_ϖ *la racine de l'équation binome*

$$a + bz = 0 \tag{2}$$

et ι *la valeur de* r *pour laquelle le produit*

$$r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1}) \tag{3}$$

devient un maximum, ou, ce qui revient au même, la racine positive unique de l'équation

$$\mathrm{b} - 2\mathrm{c}r - \ldots - (n-1)\mathrm{g}r^{n-2} - n\mathrm{h}r^{n-1} = 0. \tag{4}$$

Pour rendre le module de la fonction Z *inférieur au module de son premier terme* a, *il suffira de réduire ce module* R *à la plus petite des deux valeurs qu'il obtient quand on pose successivement*

$$z = \rho_\varpi, \qquad z = \iota_\varpi.$$

Démonstration. — Lorsque, l'argument de z étant égal à ϖ, le module de z est égal ou inférieur à ρ, le module du binome $a+bz$ se réduit à la différence

$$\mathrm{a}-\mathrm{b}r;$$

par conséquent, le module de Z ne surpasse pas la somme

$$(5)\qquad \mathrm{a}-\mathrm{b}r+\mathrm{c}r^2+\ldots+\mathrm{g}r^{n-1}+\mathrm{h}r^n.$$

D'autre part, le produit (3), qui croîtra en passant d'une valeur nulle à sa valeur maximum, tandis que r croîtra depuis zéro jusqu'à $\mathfrak{r}$, sera toujours positif dans cet intervalle. Donc pour $r \overline{\gtrless} \mathfrak{r}$, on aura

$$(6)\qquad \mathrm{c}r^2+\ldots+\mathrm{g}r^{n-1}+\mathrm{h}r^n > \mathrm{b}r.$$

Or, il résulte immédiatement de cette dernière formule que, si l'on réduit le module r au plus petit des deux nombres ρ, $\mathfrak{r}$, la somme (5), et à plus forte raison le module R de Z, offriront des valeurs inférieures au module a. Donc le plus petit des modules de Z, correspondant aux valeurs ρ_ϖ, $\mathfrak{r}_\varpi$ de z, sera certainement inférieur au module a.

Corollaire. — Il est bon d'observer que, si l'on considère le produit (3) comme fonction de r, ce produit, qui croît toujours avec r quand on fait varier r entre les limites o, $\mathfrak{r}$, offrira dans cet intervalle une dérivée toujours positive. Donc, pour $r<\mathfrak{r}$, on aura toujours

$$\mathrm{b}-2\mathrm{c}r-\ldots-(n-1)\mathrm{g}r^{n-2}-n\mathrm{h}r^{n-1}>0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{b}r-2\mathrm{c}r^2-\ldots-(n-1)\mathrm{g}r^{n-1}-n\mathrm{h}r^n>0,$$

puis on en conclura

$$(7)\qquad \mathrm{b}r-\mathrm{c}r^2-\ldots-\mathrm{g}r^{n-1}-\mathrm{h}r^n>\mathrm{c}r^2+\ldots+(n-2)\mathrm{g}r^{n-1}+(n-1)\mathrm{h}r^n.$$

Or, en vertu de cette dernière formule, qui entraîne évidemment avec elle la condition (6), le module a surpassera la somme (5) d'une quantité supérieure au nombre α déterminé par la formule

$$(8)\qquad \alpha=\mathrm{c}r^2+\ldots+(n-2)\mathrm{g}r^{n-1}+(n-1)\mathrm{h}r^n.$$

Donc, par suite, le module R de Z deviendra inférieur à la différence $\mathrm{a}-\alpha$, si l'on pose $z=r_\varpi$ en prenant pour r le plus petit des deux nombres, ρ, $\mathfrak{r}$; et à plus forte raison si l'on réduit le module R à la plus petite des deux valeurs qu'il acquiert quand on pose successivement $z=\rho_\varpi$, $z=\mathfrak{r}_\varpi$.

Ajoutons que le nombre α ne s'évanouira jamais, si ce n'est dans le cas particulier où, les coefficients $c, \ldots, g, h$ s'évanouissant tous simultanément, le polynome Z se trouverait réduit au binome $a+bz$. D'ailleurs dans ce cas particulier l'équation algébrique $Z=0$ se réduirait précisément à l'équation binome $a+bz=0$, dont la racine est $z=\rho_\varpi=-\frac{a}{b}$.

Considérons maintenant le cas où dans la fonction Z le coefficient de z s'évanouirait, ou, ce qui revient au même, supposons cette fonction déterminée, non plus par la formule (1), mais par une équation de la forme

$$Z=a+bz^l+cz^m+\ldots+hz^n.$$

Alors, au théorème I on pourra substituer la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient*

$$(9)\qquad Z=a+bz^l+cz^m+\ldots+hz^n$$

une fonction entière de la variable $z=r_p$, *et*

$$\mathrm{a},\quad \mathrm{b},\quad \mathrm{c},\quad \ldots,\quad \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad h.$$

Supposons, d'ailleurs, que les nombres $l, m, \ldots, n$ *forment une suite croissante, et que les coefficients* a, b *n'étant pas nuls, on nomme* ρ_ϖ *l'une quelconque des racines de l'équation binome*

$$(10)\qquad a+bz^l=0.$$

Enfin, soit $\mathfrak{r}$ *la valeur de* r, *pour laquelle le produit*

$$(11)\qquad r^l(\mathrm{b}-\mathrm{c}r^{m-l}-\ldots-\mathrm{h}r^{n-l})$$

devient un maximum, ou, ce qui revient au même, la racine positive unique de l'équation

(12) $$l\mathrm{b} - m\mathrm{c}r^{m-l} - \ldots - n\mathrm{h}r^{n-l} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module de son premier terme a, il suffira de réduire ce module à la plus petite des deux valeurs qu'il obtient quand on pose successivement

$$z = \rho_{\varpi}, \qquad z = \mathrm{r}_{\varpi}.$$

Démonstration. — Lorsque, l'argument de z étant égal à ϖ, le module de z est égal ou inférieur à ρ, le module du binome $a + bz^l$ se réduit à la différence

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r^l;$$

par conséquent le module de Z ne surpasse pas la somme

(13) $$\mathrm{a} - \mathrm{b}r^l + \mathrm{c}r^m + \ldots + \mathrm{h}r^n.$$

D'autre part, le produit (11), qui croîtra en passant d'une valeur nulle à sa valeur maximum, tandis que r croîtra depuis zéro jusqu'à r, sera toujours positif dans cet intervalle. Donc pour $r \leqq \mathrm{r}$, on aura

(14) $$\mathrm{c}r^m + \ldots + \mathrm{h}r^n < \mathrm{b}r^l.$$

Or, il résulte immédiatement de cette dernière formule que, si l'on réduit le module r au plus petit des deux nombres ρ, r, la somme (13) et, à plus forte raison, le module de Z offriront des valeurs inférieures au module a. Donc, le plus petit des modules de Z correspondant aux valeurs ρ_{ϖ}, r_{ϖ} de z, sera certainement inférieur au module a.

Corollaire. — Il est bon d'observer que, si l'on considère le produit (11) comme une fonction de r, ce produit, qui croît toujours avec r quand on fait varier r entre les limites 0, r, offrira dans cet intervalle une dérivée toujours positive. Donc, pour $r < \mathrm{r}$, on aura toujours

(15) $$l\mathrm{b}r^{l-1} - m\mathrm{c}r^{m-1} - \ldots - n\mathrm{h}r^{n-1} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$l\mathrm{b}r^l - m\mathrm{c}r^m - \ldots - n\mathrm{h}r^n > 0;$$

puis on en conclura

(16) $$\mathrm{b}r^l - \mathrm{c}r^m - \ldots - \mathrm{h}r^n > \left(\frac{m}{l} - 1\right)\mathrm{c}r^m + \ldots + \left(\frac{n}{l} - 1\right)\mathrm{h}r^n.$$

Or, en vertu de cette dernière formule, qui entraîne évidemment avec elle la condition (14), le module a surpassera la somme (13) d'une quantité supérieure au nombre α déterminé par la formule

(17) $$\alpha = \left(\frac{m}{l} - 1\right)\mathrm{c}r^m + \ldots + \left(\frac{n}{l} - 1\right)\mathrm{h}r^n.$$

Donc, par suite, le module R de Z deviendra inférieur à la quantité $\mathrm{a} - \alpha$, si l'on pose $z = r_{\varpi}$, en prenant pour r le plus petit des deux nombres ρ, r, et à plus forte raison si l'on réduit le module R à la plus petite des deux valeurs qu'il acquiert quand on pose successivement $z = \rho_{\varpi}$, $z = \mathrm{r}_{\varpi}$. Ajoutons que le nombre α ne s'évanouira jamais, si ce n'est dans le cas particulier où, les coefficients c, ..., g, h s'évanouissant tous simultanément, le polynome Z se trouverait réduit au binome $a + bz^l$. D'ailleurs, dans ce cas particulier l'équation algébrique $Z = 0$ se réduirait précisément à l'équation binome $a + bz^l = 0$, dont les racines se confondent avec les racines de degré l du rapport $-\frac{a}{b}$, l'une d'elles étant ρ_{ϖ}.

L'application du théorème I ou II aux fonctions entières, qui représentent les premiers membres d'une équation algébrique et de ses transformées successives, fournit, pour la résolution de cette équation, une méthode et des formules précises qui ne renferment plus de quantités indéterminées et arbitraires, analogues au nombre θ du paragraphe précédent. A la vérité, pour déduire cette méthode des principes exposés dans le paragraphe précédent, il suffit d'attribuer aux indéterminées dont il s'agit des valeurs spéciales, en prenant, par exemple, $\theta = \frac{1}{2}$. Mais, comme ces valeurs spéciales sont précisément celles qui font décroître plus rapidement le module de la fonction entière donnée, ou du moins certains nombres que ce module ne dépasse point, elles seront aussi généralement celles qui rendront les approximations plus rapides.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on applique la nouvelle méthode à la formule (23) du paragraphe V, c'est-à-dire à l'équation du second degré

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}z + \mathrm{c}z^2 = 0,$$

en supposant toujours

$$\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2 > 0.$$

On trouvera

$$\rho_\varpi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \qquad \iota_\varpi = \iota = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}, \qquad \alpha = \mathrm{c}\iota^2;$$

puis, en prenant

$$z = \iota + \zeta,$$

et faisant pour abréger $\mathrm{a}' = \mathrm{a} - \alpha$, on obtiendra immédiatement la transformée

$$\mathrm{a}' + \mathrm{c}\zeta^2 = 0,$$

dont les deux racines coïncident avec les racines carrées du rapport $-\frac{\mathrm{a}'}{c}$. On retrouvera donc ainsi l'équation (24) du paragraphe V; et ce qu'il importe de remarquer, on aura été conduit à cette équation, non plus par la recherche de la limite vers laquelle converge le terme général d'une série formée avec des valeurs successives de la variable z, mais par la détermination d'une seule valeur de cette même variable.

S'il arrivait que la fonction Z offrît, à la suite de son premier terme a, un ou plusieurs autres termes dont les coefficients fussent sensiblement nuls, on pourrait, en se servant du théorème I ou II pour déterminer un module de Z inférieur à celui de a, faire abstraction de ces mêmes termes, sauf à constater ensuite que le module trouvé de Z, quand on a égard aux termes omis, reste inférieur au module de a. Cette remarque permet d'employer la nouvelle méthode à la résolution d'une équation numérique donnée, dans le cas même où l'application rigoureuse des théorèmes I et II aux premiers membres des transformées de cette équation ferait décroître très lentement, après

un certain nombre d'opérations, les modules de ces premiers membres.

On sait que l'on peut toujours ramener la résolution d'une équation algébrique au cas où cette équation n'offre pas de racines égales. D'ailleurs, lorsque à l'aide de la nouvelle méthode on sera parvenu à une valeur très approchée ω d'une racine simple d'une équation algébrique,

$$Z = 0, \tag{18}$$

alors, en posant

$$z = \omega + \zeta, \tag{19}$$

on transformera Z en une fonction de ζ dans laquelle le terme constant sera sensiblement nul, tandis que le coefficient de ζ différera sensiblement de zéro. Quant au coefficient de ζ^n, il se réduira précisément au coefficient de z^n dans la fonction Z. Donc, dans l'hypothèse admise on trouvera

$$Z = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\zeta + \mathfrak{c}\zeta^2 + \ldots + \mathfrak{g}\zeta^{n-1} + \mathfrak{h}\zeta^n; \tag{20}$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{g}$ désignent de nouveaux coefficients dont le premier $\mathfrak{a}$ offrira un module très petit, tandis que le module de $\mathfrak{b}$ différera sensiblement de zéro. Donc alors, en vertu du théorème I, il faudra, pour rendre le module de Z inférieur au module de $\mathfrak{a}$, poser

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\zeta = 0, \tag{21}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\zeta = -\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}; \tag{22}$$

et, par suite, la nouvelle valeur approchée de la racine simple, qui différait peu de ω, sera celle que détermine la formule

$$z = \omega - \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}. \tag{23}$$

Ainsi, *la nouvelle méthode, appliquée à la résolution d'une équation algébrique, finira par coïncider, après un certain nombre d'opérations, avec la méthode linéaire ou newtonienne.*