ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
37417 Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES

COMPLÈTES

D'AUGUSTIN CAUCHY

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ET SOUS LES AUSPICES

DE M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

IRE SÉRIE. — TOME II.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

MCMVIII.

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

II.

MÉMOIRES

EXTRAITS DES

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

D'UNE

CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

ET

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES (1).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. III, p. XI; 1820 (*Histoire de l'Académie*).

Jusqu'à présent il n'est aucun Traité de Calcul intégral où l'on ait donné les moyens d'intégrer complètement les équations aux différences partielles du premier ordre, quel que soit le nombre des variables indépendantes. M'étant occupé il y a plusieurs mois de cet objet, je fus assez heureux pour obtenir une méthode générale propre à remplir le but désiré. Mais, après avoir terminé mon travail, j'ai appris que M. Pfaff, géomètre allemand, était parvenu, de son côté, aux intégrales des équations ci-dessus mentionnées. Comme il s'agit ici d'une des questions les plus importantes du Calcul intégral, et que la méthode de M. Pfaff est différente de la mienne, j'ai pensé qu'une analyse abrégée de cette dernière pourrait intéresser les géomètres. En conséquence, je l'expose ici, en profitant, pour simplifier l'exposition, de quelques remarques faites par M. Coriolis, ingénieur des

(1) Note rédigée par l'auteur sur le dernier de ces deux Mémoires, 27 janvier 1818.

Ponts et Chaussées, et de quelques autres qui me sont depuis peu venues à l'esprit. Ainsi simplifiée, la méthode dont j'ai fait usage fournit, à ce qu'il me semble, la solution la plus simple que l'on puisse donner de la question proposée. On en jugera par les considérations suivantes.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation aux différences partielles proposée renferme, avec les trois variables indépendantes x, y, z, une fonction inconnue u de ces trois variables, et les dérivées partielles p, q, r de la fonction u, par rapport à ces mêmes variables.

Pour que la valeur de u soit complètement déterminée, il ne suffira pas de savoir qu'elle doit vérifier l'équation donnée aux différences partielles. Il sera, de plus, nécessaire d'ajouter une condition; par exemple, d'assujettir la fonction u à recevoir, pour une valeur donnée x_0 de la variable x, une certaine valeur, fonction des variables y et z. La fonction de y et de z, dont il est ici question, pouvant être choisie à volonté, est la seule fonction arbitraire que doive renfermer l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles. Il est d'ailleurs facile, à l'aide des principes déjà connus, de ramener l'intégration de cette équation aux différences partielles, à l'intégration de cinq équations différentielles entre les six quantités

$$x, \quad y, \quad z, \quad u, \quad q, \quad r,$$

considérées comme fonctions d'une seule variable; et toute la difficulté se réduit à savoir ce que l'on doit faire des cinq constantes arbitraires introduites par l'intégration des cinq équations différentielles. Or, la méthode que je propose consiste à éviter l'introduction de ces constantes, ou plutôt à remplacer les constantes arbitraires par des valeurs particulières, attribuées aux inconnues y, z, u, q, r, et à intégrer les cinq équations différentielles, de manière que, pour $x = x_0$, on ait $y = y_0$, $z = z_0$, $u = u_0$, $q = q_0$, $r = r_0$; y_0, z_0 désignant deux nouvelles variables, u_0 une fonction arbitraire de ces mêmes variables, semblable à la fonction arbitraire de y et de z, qui représente la valeur de u pour $x = x_0$, et q_0, r_0 les deux dérivées partielles de u_0 relatives à y_0 et à z_0. Si, entre les cinq équations intégrales ainsi obtenues, on élimine q et r, il ne restera plus que trois formules, dont le système sera propre à représenter l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles. Ces trois formules renfermeront les quantités variables x, y, z, u; la quantité constante x_0, les deux nouvelles variables y_0, z_0, et la fonction arbitraire de ces nouvelles variables représentée par u_0, ainsi que ses dérivées du premier ordre relatives à y_0 et à z_0. Ce n'est qu'après avoir fixé la fonction arbitraire dont il s'agit qu'on pourra, en éliminant les nouvelles variables y_0, z_0, obtenir l'équation finie qui détermine u en fonction de x, y, z.

Rien n'empêche de conserver dans le calcul, avec les quantités variables x, y, z, u, q, r, la quantité p; si l'on observe d'ailleurs qu'on peut échanger entre elles, relativement aux rôles qu'elles jouent, les variables indépendantes x, y, z, on obtiendra, pour l'intégration générale d'une équation aux différences partielles à trois variables indépendantes, et même à un nombre quelconque de variables, la règle qui suit :

Substituez, par les moyens ordinaires, à l'équation aux différences partielles donnée, autant d'équations différentielles du premier ordre (moins une) qu'elle renferme de quantités variables, y compris les variables indépendantes, la fonction inconnue et ses dérivées partielles. Les variables indépendantes seront traitées symétriquement dans les équations différentielles dont l'une pourra être remplacée par l'équation aux différences partielles données.

Cela posé, intégrez les équations différentielles dont il s'agit, par rapport à toutes les variables qu'elles renferment, à partir de certaines limites que vous considérerez comme de nouvelles variables, assujetties aux mêmes relations que les premières. Regardez ensuite, dans les équations intégrales obtenues, l'une des nouvelles variables indépendantes, comme réduite à une quantité constante, et les autres comme devant être éliminées. Vous aurez un système de formules propres à représenter l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles données. Ces formules ne renferment qu'une seule fonction arbitraire avec ses dérivées partielles du premier ordre, savoir la nouvelle variable qui correspond à la fonction inconnue, et que l'on doit considérer comme une fonction arbitraire de celles des nouvelles variables qui doivent être éliminées.

SUR

LA RÉSOLUTION ANALYTIQUE

DES

ÉQUATIONS DE TOUS LES DEGRÉS

PAR LE MOYEN DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IV, p. XXVI; 1824. (*Histoire de l'Académie.*)

On a fait beaucoup de tentatives pour obtenir la solution des équations littérales d'un degré supérieur au quatrième. Toutes ces tentatives ont été inutiles; et même un géomètre italien, M. Ruffini, a démontré, dans ces derniers temps, qu'il était impossible de trouver, pour la solution de l'équation générale d'un degré supérieur au quatrième, des formules analogues à celles qu'on a découvertes pour les quatre premiers degrés. Il ne reste donc aucun espoir d'exprimer les racines d'une équation de degré quelconque par des fonctions irrationnelles des coefficients de son premier membre. Toutefois, avant de renoncer pour toujours à présenter ces racines sous une forme finie, il convenait d'examiner si l'on ne pourrait pas les réduire à des intégrales définies, qu'on a tant de moyens de réduire en nombres. Telle est la question que s'est proposée M. Cauchy. Déjà, en 1804, M. Parseval avait essayé de la résoudre en suivant, à l'aide d'un artifice très ingénieux, la suite donnée par M. Lagrange pour la résolution d'une équation algébrique ou transcendante.

Les calculs de M. Parseval étant fondés sur la considération de séries dont la convergence n'est pas toujours assurée, les résultats auxquels il parvient ne pourront être considérés comme établis généralement d'une manière rigoureuse. Aussi l'auteur ayant cherché à les vérifier *a posteriori*, dans le cas où l'équation proposée a toutes ses racines réelles, a-t-il reconnu que, dans cette hypothèse même, l'intégrale qu'il substitue à la suite de M. Lagrange ne représente une des racines que sous certaines conditions. La méthode de M. Cauchy, fondée immédiatement sur la propriété d'une classe d'intégrales définies, conduit facilement à la solution du problème dans tous les cas possibles. Nous nous bornerons aux principaux résultats :

1° Lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, chacune de ces racines peut être exprimée par une intégrale définie. Cette intégrale renferme deux constantes arbitraires entre lesquelles on suppose comprise la seule racine dont il est question. Du reste, ces deux constantes peuvent varier comme on voudra, sans que l'intégrale change pour cela de valeur. Si les deux constantes s'écartent l'une de l'autre, de manière que deux, trois ou quatre racines soient comprises entre elles, l'intégrale définie exprimera la somme de ces deux, trois, quatre racines, etc.

2° Lorsqu'une équation a en même temps des racines réelles et des racines imaginaires, on peut encore représenter chaque racine réelle par une intégrale définie qui renferme deux constantes arbitraires, pourvu que l'on suppose comprise entre ces deux constantes la partie réelle de la seule racine que l'on considère. Cette remarque suffit pour montrer en théorie que toute racine d'une équation peut être exprimée par une intégrale. Toutefois, comme, dans le cas où l'on veut obtenir les valeurs numériques des racines, la détermination des deux constantes peut entrainer de longs calculs, il est alors préférable d'employer le moyen qui va être indiqué.

On cherchera d'abord une constante unique, inférieure au plus petit coefficient positif de $\sqrt{-1}$, dans les racines imaginaires. On y parviendra sans peine par la méthode exposée dans la quatrième note de la *Résolution des équations numériques*. Cela posé, il deviendra facile de

substituer à l'équation proposée deux autres équations qui aient pour racines respectives : la première, les racines réelles de l'équation proposée, et la seconde, celles des racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Les coefficients de ces deux équations seront des intégrales définies renfermant la seule constante dont on vient de parler. On doit même observer que, si toutes les racines sont imaginaires, la constante dont il s'agit pourra être supposée nulle. Pour fixer les idées, considérons une équation du sixième ou du huitième degré dont toutes les racines sont imaginaires. On pourra, d'après ce qu'on vient de dire, et sans la recherche préliminaire d'une constante, réduire immédiatement cette équation à deux autres du troisième ou du quatrième degré.

Dans toutes les intégrales employées dans cette méthode, la fonction sous le signe $\int$ est une fonction rationnelle de la variable, qui ne devient jamais infinie, et pour laquelle le degré du dénominateur est supérieur au moins de deux unités à celui du numérateur. Il en résulte que chacune de ces intégrales a une valeur finie et déterminée que l'on peut réduire en nombres. Souvent même il sera aisé de la transformer en une série très convergente dont les termes suivent une loi connue ; en sorte que l'on peut immédiatement prolonger cette série autant qu'on voudra. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on considère une des équations à trois termes, que l'on ne sait pas résoudre dans le cas où toutes les racines sont imaginaires.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS

EN

SÉRIES PÉRIODIQUES [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VI, p. 603; 1827.

La solution d'un grand nombre de problèmes de Physique mathématique exige le développement des fonctions en séries périodiques; par exemple, en séries ordonnées suivant les sinus ou cosinus des multiples d'un même arc. Dans les séries de ce genre, les coefficients des différents termes sont ordinairement des intégrales définies qui renferment des sinus ou des cosinus; et, lorsque les intégrations peuvent s'effectuer, en raison d'une forme particulière attribuée à la fonction qu'il s'agit de développer, on reconnait aisément que les séries obtenues sont convergentes. Toutefois il était à désirer que cette convergence pût être démontrée d'une manière générale, indépendamment des valeurs des fonctions. Or, on y parvient facilement en faisant usage des formules que j'ai données dans les Mémoires sur les ondes [2], et sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et remplaçant, à l'aide de ces formules, les sinus ou cosinus renfermés sous

(1) Lu à l'Académie royale des Sciences, le 27 février 1826.

(2) *Voir* la page 232 du Mémoire *Sur la Théorie des ondes*, et la page 29 du Mémoire *Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*. (*Œuvres de Cauchy*, S. I, T. I, p. 236, 237 et S. II, T. XV.)

le signe $\int$ par des exponentielles dans lesquelles les parties variables des exposants sont négatives. Ajoutons que l'emploi des mêmes formules fournit le moyen de substituer, dans certains cas, à la série qui représente le développement d'une fonction une intégrale définie, et que cette substitution produit de nouvelles équations fort remarquables dont on peut se servir avec avantage dans les questions de Physique mathématique.

Pour montrer une application de ces principes, considérons la série

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^a f(\mu)\,d\mu + 2\int_0^a \cos\frac{2\pi}{a}(x-\mu)f(\mu)\,d\mu \\ &\qquad + 2\int_0^a \cos\frac{4\pi}{a}(x-\mu)f(\mu)\,d\mu + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Il est facile de reconnaitre : 1° que la fonction représentée par cette séire ne varie pas, quand on fait croitre ou diminuer x d'un multiple de a; 2° que cette fonction, entre les limites $x=0$, $x=a$, est équivalente au produit $af(x)$. En effet, si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et si l'on pose $\theta = 1-\varepsilon$, la série (1) pourra être remplacée par la suivante

$$\begin{aligned} &\int_0^a f(\mu)\,d\mu + \int_0^a e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \theta\int_0^a e^{\frac{4\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \ldots \\ &\quad + \int_0^a e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \theta\int_0^a e^{-\frac{4\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \ldots \\ &= \int_0^a f(\mu)\,d\mu + \int_0^a \frac{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}}{1-\theta e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}} f(\mu)\,d\mu + \int_0^a \frac{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}}{1-\theta e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}} f(\mu)\,d\mu \\ &= \int_0^a f(\mu)\,d\mu + \int_0^a \frac{1}{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta} f(\mu)\,d\mu + \int_0^a \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta} f(\mu)\,d\mu \\ &= \int_0^a \left[1 + \frac{1}{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta} + \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}\right] f(\mu)\,d\mu. \end{aligned}$$

Or, θ étant très rapproché de l'unité, et x étant compris entre zéro et a, l'expression

$$1+\frac{1}{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}+\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}$$

sera sensiblement nulle, excepté quand μ différera très peu de x. Par suite, la dernière des intégrales relatives à μ pourra être prise entre deux limites très rapprochées de x. Or, si l'on fait $\mu = x + \varepsilon w$ et $\theta = 1 - \varepsilon$, cette intégrale sera réduite sensiblement à

$$f(x)\int_{-\frac{x}{\varepsilon}}^{\frac{a-x}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{1+\frac{2\pi}{a}w\sqrt{-1}}+\frac{1}{1-\frac{2\pi}{a}w\sqrt{-1}}\right)dw = a\,f(x).$$

On aura donc, entre les limites $x = 0$, $x = a$,

$$(2)\quad \begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(\mu)\,d\mu+\dfrac{2}{a}\int_0^a \cos\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\,f(\mu)\,d\mu \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_0^a \cos\frac{4\pi}{a}(x-\mu)\,f(\mu)\,d\mu+\ldots. \end{cases}$$

La série précédente peut être fort utilement employée dans plusieurs circonstances. Mais il importe de montrer sa convergence. Or, pour y parvenir, il suffit de rappeler qu'on a généralement, lorsque la fonction $\varphi(\mu+\nu\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $\nu=\infty$,

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a \varphi(\mu)\,d\mu \\ \quad =\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\displaystyle\int_0^\infty \left[\varphi(a+\nu\sqrt{-1})-\varphi(\nu\sqrt{-1})\right]d\nu+2\pi\sqrt{-1}\,{}_{0}^{a}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((\varphi(z))); \end{cases}$$

et, lorsque la fonction $\varphi(\mu+\nu\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $\nu=-\infty$,

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a \varphi(\mu)\,d\mu \\ \quad =\dfrac{-1}{\sqrt{-1}}\displaystyle\int_0^\infty \left[\varphi(a-\nu\sqrt{-1})-\varphi(-\nu\sqrt{-1})\right]d\nu-2\pi\sqrt{-1}\,{}_{0}^{a}\mathcal{E}_{-\infty}^{0}((\varphi(z))). \end{cases}$$

Si, dans la première de ces équations, on pose

$$\varphi(\mu)=e^{b\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu),$$

b étant une quantité positive, et $\mathrm{f}(\mu)$ une fonction qui reste finie pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de μ, on aura

$$(5)\quad \int_0^a e^{b\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu)\,d\mu=\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left(e^{ab\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(a+\nu\sqrt{-1})-\mathrm{f}(\nu\sqrt{-1})\right)e^{-b\nu}\,d\nu.$$

Si l'on suppose, au contraire,

$$\varphi(\mu)=e^{-b\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu),$$

on aura

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a e^{-b\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu)\,d\mu \\ \quad =-\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{-ab\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(a-\nu\sqrt{-1})-\mathrm{f}(-\nu\sqrt{-1})\right)e^{-b\nu}\,d\nu. \end{cases}$$

Cela posé, revenons à l'équation (2). Cette équation, pouvant s'écrire comme il suit :

$$(7)\quad \begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(\mu)\,d\mu+\dfrac{1}{a}\int_0^a e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}\,f(\mu)\,d\mu+\ldots \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a e^{-\frac{2\pi}{a}(\mu-x)\sqrt{-1}}\,f(\mu)\,d\mu+\ldots, \end{cases}$$

on en déduira, à l'aide des équations (5) et (6),

$$(8)\quad \begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(\mu)\,d\mu \\ \quad +\dfrac{1}{a\sqrt{-1}}\displaystyle\int_0^\infty\left[e^{-\frac{2\pi}{a}(x-a)\sqrt{-1}}f(a+\nu\sqrt{-1})-e^{-\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,f(\nu\sqrt{-1})\right]e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}\,d\nu+\ldots \\ \quad -\dfrac{1}{a\sqrt{-1}}\displaystyle\int_0^\infty\left[e^{\frac{2\pi}{a}(x-a)\sqrt{-1}}\,f(a-\nu\sqrt{-1})-e^{\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}f(-\nu\sqrt{-1})\right]e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}\,d\nu+\ldots \\ =\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(\mu)\,d\mu+\dfrac{1}{a\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}+\ldots\right)\left[f(a+\nu\sqrt{-1})-\;f(\nu\sqrt{-1})\right]d\nu \\ \qquad -\dfrac{1}{a\sqrt{-1}}\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}\;\;e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}+\ldots\right)\left[f(a-\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})\right]d\nu, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)\,d\mu \\ &+ \frac{1}{a\sqrt{-1}}\int_0^\infty \left[\frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1} - \frac{f(a-\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{-\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}\right]d\nu. \end{aligned}\right.$$

La série comprise dans le dernier membre de la formule (8) a évidemment pour terme général

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}\left[f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})\right]d\nu \\ &-\frac{1}{a\sqrt{-1}}e^{\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}\left[f(a+\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})\right]d\nu, \end{aligned}\right.$$

ou, si l'on fait $\frac{2n\pi}{a}\nu = z$,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-z}\left[f\left(a+\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)-f\left(\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)\right]dz \\ &-\frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}}e^{\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-z}\left[f\left(a-\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)-f\left(-\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)\right]dz. \end{aligned}\right.$$

Or, pour des valeurs très grandes de n, chacune des intégrales comprises dans l'expression (11) se réduira sensiblement à

$$f(a)-f(0),$$

et cette expression elle-même à

$$(12)\qquad -\frac{1}{2n\pi}[f(a)-f(0)]\sin\frac{2n\pi}{a}.$$

Or, il est clair que la série qui aura pour terme général l'expression (12) sera une série convergente.

Il est essentiel de remarquer que la formule (9) peut se déduire immédiatement des équations (3) et (4). En effet, on a, en vertu

de ces équations, en supposant x renfermé entre les limites 0 et a,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{-\frac{2\pi}{a}(\mu-x)\sqrt{-1}}-1} &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}d\nu - \frac{a}{2}f(x), \\ \int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{\frac{2\pi}{a}(\mu-x)\sqrt{-1}}-1} &= -\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a-\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{-\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}d\nu - \frac{a}{2}f(x). \end{aligned}\right.$$

Or, il suffit d'ajouter ces dernières équations pour retrouver la formule (10).

Si l'on remplace x par a, dans les intégrales relatives à μ que renferment les équations (13), on tirera des formules (3) et (4)

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{-\frac{2\pi}{a}\mu\sqrt{-1}}-1} &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}d\nu - \frac{a}{4}[f(a)+f(0)], \\ \int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{\frac{2\pi}{a}\mu\sqrt{-1}}-1} &= -\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a-\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}d\nu - \frac{a}{4}[f(a)+f(0)], \end{aligned}\right.$$

puis, en ajoutant,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} -\int_0^a f(\mu)\,d\mu &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})-f(a-\nu\sqrt{-1})+f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}d\nu \\ &\quad - \frac{a}{2}[f(a)+f(0)]. \end{aligned}\right.$$

On aura donc

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(a-\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})+f(-\nu\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\,\frac{d\nu}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1} \\ &\quad = \frac{a}{2}[f(a)+f(0)] - \int_0^a f(\mu)\,d\mu. \end{aligned}\right.$$

La formule (16) paraît mériter l'attention des géomètres. Elle comprend, comme cas particuliers, des formules connues. Si l'on fait, par exemple, $f(x) = x^2$, elle donnera

$$\int_0^\infty \frac{\nu\,d\nu}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu} - 1} = \frac{a^2}{24};$$

puis, en prenant $a = 2\pi$,

$$\int_0^\infty \frac{\nu\,d\nu}{e^\nu - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nous terminerons en observant que la théorie des intégrales singulières suffit pour déduire la formule (16) de la formule (9), quoique au premier abord ces deux formules ne paraissent pas d'accord entre elles.

Post-scriptum. — Dans les formules (3) et (4), le signe $\mathcal{E}$, placé devant la fonction $\varphi(z)$, indique, conformément aux notations adoptées pour le calcul des résidus des fonctions, la somme de plusieurs résidus de la fonction $\varphi(z)$, c'est-à-dire, en général, la somme de plusieurs des valeurs du produit $\varepsilon\varphi(z + \varepsilon)$ correspondant à des valeurs infiniment petites de ε, et à des valeurs finies, réelles ou imaginaires de z, qui vérifient l'équation

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0. \tag{17}$$

Les limites placées à droite et à gauche du signe $\mathcal{E}$ sont les quantités entre lesquelles doivent rester comprises : 1° les parties réelles ; 2° les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les diverses valeurs de z tirées de l'équation (17). Ajoutons que la démonstration donnée ci-dessus de la convergence de la série (1) suppose évidemment : 1° que l'équation (2) peut être remplacée par l'équation (8), ce qui a effectivement lieu quand la fonction $f(\mu)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de μ ; 2° que l'expression (11) ne devient pas indéterminée pour des valeurs infinies de x, ce qui arriverait, par exemple, si l'on prenait $f(z) = e^{z^2}$. Si ces conditions n'étaient pas remplies, la série (1) pourrait devenir divergente. C'est, en particulier, ce qui aurait lieu, si l'on prenait

$$f(x) = \frac{1}{(a - 2x)^2},$$

puisque alors le terme général de la série (1), ou l'intégrale

$$2\int_0^a \cos\frac{2\pi}{a}(x - \mu)\,\frac{d\mu}{(a - 2\mu)^2},$$

aurait une valeur infinie.

Observons encore que, si l'on veut obtenir sous forme finie le reste de la série comprise dans l'équation (2), il suffira de remplacer, dans la formule (10), les produits

$$e^{-\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}, \quad e^{\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}$$

par les fractions

$$\frac{e^{-\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}}, \quad \frac{e^{\frac{2n\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}}{1 - e^{\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}}.$$

Après ce remplacement il deviendra facile, quand la série (1) sera convergente, d'assigner des limites entre lesquelles soit renfermé le reste dont il s'agit.

SECOND MÉMOIRE

SUR

L'APPLICATION DU CALCUL DES RÉSIDUS

AUX QUESTIONS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE (1).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VII, p. 463; 1827

J'ai montré dans divers Mémoires comment on peut déterminer par le calcul des résidus les constantes arbitraires et les fonctions arbitraires que comportent les intégrales générales des équations linéaires différentielles ou aux différences partielles, et dans l'un de ces Mémoires j'ai indiqué un moyen général de développer une fonction de x en une série d'exponentielles dont les exposants soient respectivement proportionnels aux diverses racines d'une équation transcendante. Cette dernière question, qui se présente sans cesse dans la Physique mathématique, avait été résolue dans des cas particuliers, à l'aide d'intégrations par parties. J'ai fait voir comment on pouvait étendre à un plus grand nombre de cas la méthode déjà employée par les géomètres et en même temps j'ai déduit du calcul des résidus une solution générale et rigoureuse de la même question, dans un Mémoire publié en février 1827. Cette solution exige seulement : 1° que la fonction qui forme le premier membre de l'équation transcendante puisse se partager en deux parties, dont le rapport soit nul pour des valeurs infinies

(1) Lu à l'Académie des Sciences, le 17 septembre 1827. Un premier Mémoire sur le même sujet a été imprimé séparément et publié en février 1827. (*Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.)

positives de la variable r comprise dans cette fonction, et infini pour des valeurs infinies négatives de la même variable; 2° que le rapport de la première ou de la seconde partie à la fonction totale, étant multiplié par une certaine exponentielle, il en résulte un produit qui s'évanouisse pour des valeurs infinies mais réelles de r, et dont le quotient par r s'évanouisse encore pour des valeurs infinies réelles ou imaginaires de la même variable. Comme ces conditions, lorsqu'il est possible d'y satisfaire, peuvent être remplies d'une infinité de manières, la question admet une infinité de solutions diverses; ce qu'il était facile de prévoir, attendu qu'il existe une multitude de séries d'exponentielles dont la somme est égale à zéro. Au reste, on peut encore résoudre la question que je viens de rappeler, à l'aide de plusieurs autres méthodes. L'une de ces méthodes est celle que M. Brisson vient d'exposer dans un Mémoire, présenté le 27 août dernier, mais auquel il travaillait depuis longtemps. Elle consiste à généraliser la formule qui fournit l'intégrale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et de l'ordre n, entre x et y, quand on connaît les valeurs de $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ correspondant à une valeur particulière x_0 de la variable x. Cette formule, qui se déduit aisément de l'analyse employée par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1775, peut subir diverses métamorphoses, après lesquelles elle devient, quand on suppose $x = \infty$, éminemment propre au développement d'une fonction en série d'exponentielles. Alors, en effet, la variable principale y se trouve représentée par une semblable série; et, si la généralisation de la formule dont il s'agit est légitime, y doit se réduire à une fonction qui reçoive, avec ses dérivées successives, les valeurs particulières données pour $x = x_0$. Toutefois, il importe d'observer : 1° qu'il existe une infinité de fonctions propres à remplir cette dernière condition; 2° que la formule, établie pour des valeurs finies de x, peut devenir inexacte dans le passage du fini à l'infini. Ces difficultés disparaissent devant une quatrième méthode qui a toute la rigueur des deux premières et s'applique non seulement au développement des fonctions en exponentielles, mais encore à une multitude de questions du même genre. Cette dernière méthode, qui se déduit immédiatement du calcul des résidus, est fondée sur le principe dont j'ai déjà fait usage pour déterminer les constantes arbitraires comprises dans les intégrales des équations différentielles. Pour la faire mieux saisir je commencerai par résoudre la question suivante :

Problème I. — *Soient*

$F(r)$ *et* $f(x, y, \ldots, r)$ *deux fonctions de* r *et de* $x, y, \ldots$ *qui restent finies l'une et l'autre pour des valeurs finies de* r;

ρ *une constante déterminée;*

$r_1, r_2, \ldots$ *les racines de l'équation algébrique ou transcendante*

$$F(r) = 0. \tag{1}$$

On propose de développer la fonction $f(x, y, \ldots, \rho)$ *en une série de la forme*

$$f(x, y, \ldots, \rho) = R_1 f(x, y, \ldots, r_1) + R_2 f(x, y, \ldots, r_2) + \ldots, \tag{2}$$

$R_1, R_2, \ldots$ *étant des fonctions semblables des racines* $r_1, r_2, \ldots$.

Solution. — Pour résoudre le problème qu'on vient d'énoncer il suffira évidemment de trouver une fonction $\varphi(r)$ qui demeure finie elle-même pour des valeurs finies de r, et qui soit propre à vérifier l'équation

$$f(x, y, \ldots, \rho) = \mathcal{E} \frac{\varphi(r) f(x, y, \ldots, r)}{((F(r)))}. \tag{3}$$

Or, on a identiquement

$$f(x, y, \ldots, \rho) = \mathcal{E} \frac{f(x, y, \ldots, r)}{((r - \rho))}, \tag{4}$$

et, par suite, l'équation (3) pourra être réduite à

$$\mathcal{E} \frac{f(x, y, \ldots, r)}{((r - \rho))} = \mathcal{E} \frac{\varphi(r) f(x, y, \ldots, r)}{((F(r)))}, \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\mathcal{E} \frac{(r - \rho)\varphi(r) - F(r)}{(((r - \rho) F(r)))} f(x, y \ldots, r) = 0. \tag{6}$$

Or, si l'on pose

$$(r - \rho)\varphi(r) - F(r) = \chi(r), \tag{7}$$

on en tirera

$$\varphi(r) = \frac{F(r) + \chi(r)}{r - \rho}, \tag{8}$$

et, pour que la fonction $\varphi(r)$ reste finie tant que la variable r l'est elle-même, il faudra que l'on ait

$$F(\rho) + \chi(\rho) = 0 \tag{9}$$

et, par suite,

$$\varphi(r) = \frac{F(r) - F(\rho)}{r - \rho} + \frac{\chi(r) - \chi(\rho)}{r - \rho},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi(r) = \frac{F(r) - F(\rho)}{r - \rho} + \psi(r), \tag{10}$$

$\psi(r)$ désignant une fonction qui ne devienne pas infinie pour des valeurs finies de la variable. Si l'on adopte la valeur précédente de r, la formule (6) deviendra

$$\mathcal{E} \frac{F(\rho) - (r - \rho)\psi(r)}{(((r - \rho) F(r)))} f(x, y, \ldots, r) = 0, \tag{11}$$

et, si l'on suppose, en particulier, $\psi(r) = 0$,

$$\varphi(r) = \frac{F(r) - F(\rho)}{r - \rho}, \tag{12}$$

elle se trouvera réduite à

$$F(\rho) \mathcal{E} \frac{f(x, y, \ldots, r)}{(((r - \rho) F(r)))} = 0. \tag{13}$$

Or, cette dernière se trouvera vérifiée, pour les systèmes de valeurs des variables x, y, ... compris entre certaines limites, si entre ces limites le rapport

$$\frac{\mathrm{f}(x, y, \ldots, r+s\sqrt{-1})}{\mathrm{F}(r+s\sqrt{-1})} \tag{14}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies, positives ou négatives, de l'une des variables r, s, et si le quotient de ce rapport par $r+s\sqrt{-1}$ s'évanouit lui-même pour des valeurs infinies et réelles de r et de s. Donc, alors l'équation (3) sera vérifiée par la valeur de $\varphi(r)$ que détermine la formule (12), et l'on aura, en supposant les variables x, y, ... renfermées entre les limites dont il s'agit,

$$\mathrm{f}(x, y, \ldots, \rho) = \mathcal{E}\,\frac{\mathrm{F}(r)-\mathrm{F}(\rho)}{r-\rho}\,\frac{\mathrm{f}(x, y, \ldots, r)}{((\mathrm{F}(r)))}. \tag{15}$$

Corollaire I. — Si l'on pose, en particulier,

$$\mathrm{f}(x, y, \ldots, r) = e^{rx},$$

la formule (15) donnera

$$e^{\rho x} = \mathcal{E}\,\frac{\mathrm{F}(r)-\mathrm{F}(\rho)}{r-\rho}\,\frac{e^{rx}}{((\mathrm{F}(r)))}. \tag{16}$$

Cette dernière équation suppose que le rapport

$$\frac{e^{(r+s\sqrt{-1})x}}{\mathrm{F}(r+s\sqrt{-1})} \tag{17}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies et réelles, positives ou négatives, de l'une des variables r, s, et que le quotient du même rapport par $r+s\sqrt{-1}$ s'évanouit pour des valeurs infinies et réelles de r et de s. La première condition sera remplie, en particulier, si le rapport

$$\frac{e^{rx}}{\mathrm{F}(r)} \tag{18}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies et réelles, positives ou négatives, de la variable r.

Corollaire II. — L'équation (15) peut être présentée sous différentes formes, entre lesquelles on doit distinguer la suivante :

$$\mathrm{f}(x, y, \ldots, \rho) = \mathcal{E}\,\frac{\mathrm{f}(x, y, \ldots, r)\displaystyle\int_0^1 \mathrm{F}'[r+\lambda(\rho-r)]\,d\lambda}{((\mathrm{F}(r)))}. \tag{19}$$

En posant $\mathrm{f}(x, y, \ldots, r) = e^{rx}$, on aura

$$e^{\rho x} = \mathcal{E}\,\frac{e^{rx}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{F}'[r+\lambda(\rho-r)]\,d\lambda}{((\mathrm{F}(r)))}. \tag{20}$$

Je passe maintenant à la solution d'un second problème dont voici l'énoncé :

Problème II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le problème I, et $u = f(x, y, z, \ldots)$ désignant une fonction quelconque des variables $x, y, z, \ldots$, on propose de développer cette fonction en une série semblable à celle que renferme l'équation* (2).

Solution. — Pour ramener ce problème au précédent il suffit de transformer la fonction u en une intégrale de la forme

$$u = \sum \varphi(\rho)\,\mathrm{f}(x, y, \ldots, \rho), \tag{21}$$

ou

$$u = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \varphi(\rho)\,\mathrm{f}(x, y, \ldots, \rho)\,d\rho. \tag{22}$$

En effet, après avoir effectué cette transformation, on tirera immédiatement, des formules (19) et (21) ou (22),

$$u = \mathcal{E}\,\mathrm{f}(x, y, \ldots, r)\,\frac{\sum \varphi(\rho)\displaystyle\int_0^1 \mathrm{F}'[r+\lambda(\rho-r)]\,d\lambda}{((\mathrm{F}(r)))}, \tag{23}$$

ou bien

$$u = \mathcal{E}\,\mathrm{f}(x, y, \ldots, r)\,\frac{\displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho_1}\int_0^1 \varphi(\rho)\,\mathrm{F}'[r+\lambda(\rho-r)]\,d\lambda\,d\rho}{((\mathrm{F}(r)))}. \tag{24}$$

Concevons, en particulier, qu'il s'agisse de transformer la fonction

$$u = f(x)$$

en une série de la forme

$$R_1 e^{r_1 x} + R_2 e^{r_2 x} + \ldots,$$

$r_1, r_2, \ldots$ étant les racines de $F(r) = 0$. On observera d'abord qu'on a généralement

$$(25) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\, d\alpha\, d\mu.$$

De plus, on tirera de l'équation (20)

$$(26) \qquad e^{\alpha x\sqrt{-1}} = \mathcal{E}\, \frac{\int_0^1 F'[r + \lambda(\alpha\sqrt{-1} - r)]\, d\lambda}{((F(r)))}\, e^{rx}.$$

On aura donc, par suite,

$$(27) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{E}\, \frac{\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\mu\sqrt{-1}} F'[r+\lambda(\alpha\sqrt{-1} - r)] f(\mu)\, d\lambda\, d\alpha\, d\mu}{((F(r)))}\, e^{rx},$$

ou, ce qui revient au même (¹),

$$(28) \qquad f(x) = \mathcal{E}\, e^{rx}\, \frac{\int_0^1 F'[r + \lambda(\alpha\sqrt{-1} - r)] f(\xi)\, d\lambda}{((F(r)))};$$

le signe $\mathcal{E}$ se rapportant à la lettre r, le signe α à la lettre ξ, et la variable ξ devant être réduite à zéro après les opérations qu'indique le signe α.

(¹) Je suppose ici, comme je l'ai déjà fait dans les *Exercices de Mathématiques*, que l'on désigne par la notation

$$\varphi(\alpha) f(\xi)$$

l'intégrale double

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(\xi-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha\, d\mu.$$

Exemple. — Si l'on pose

$$(29) \qquad F(r) = e^{ar} - 1,$$

on trouvera

$$F'(r) = a e^{ar}, \qquad F'[r + \lambda(\alpha\sqrt{-1} - r)] = a e^{ar(1-\lambda)} e^{a\lambda\alpha\sqrt{-1}}.$$

Et comme on a d'ailleurs en posant $\xi = 0$, après les opérations indiquées par α,

$$e^{a\lambda\alpha\sqrt{-1}} f(\xi) = f(\xi + a\lambda) = f(a\lambda),$$

la formule (28) donnera

$$(30) \qquad f(x) = \mathcal{E}\, \frac{a\int_0^1 e^{ar(1-\lambda)} f(a\lambda)\, d\lambda}{((e^{ar} - 1))}\, e^{rx},$$

puis, en faisant pour abréger $a\lambda = \mu$,

$$(31) \qquad f(x) = \mathcal{E}\, \frac{e^{ar}\int_0^a e^{r(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{((e^{ar} - 1))},$$

ce qui est exact.

D'après ce qu'on a dit, la formule (28) suppose que le rapport

$$\frac{e^{rx}}{F(r)}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies et réelles, positives ou négatives, de r, ou du moins que le rapport

$$\frac{e^{(r+s\sqrt{-1})x}}{F(r + s\sqrt{-1})}$$

s'évanouit pour des valeurs infinies et réelles, positives ou négatives, de l'une des variables r, s. La première condition sera remplie, si l'on pose $F(r) = e^{ar} - 1$, quand la valeur numérique de x sera inférieure à celle de a. Donc la formule (31) suppose $x^2 < a^2$.

Concevons encore que l'on propose de transformer la fonction $f(x)$ en une série de la forme

$$R_1 \cos r_1 x + R_2 \cos r_2 x + \ldots,$$

$r_1, r_2, \ldots$ étant les racines de

$$F(r) = 0.$$

On observera d'abord qu'on a, pour des valeurs positives de x,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\alpha\mu \cos\alpha x\, f(\mu)\, d\alpha\, d\mu. \tag{32}$$

De plus, la formule (19) donnera

$$\cos\alpha x = \mathcal{E}\frac{\cos r x \displaystyle\int_0^1 F'[r+\lambda(\alpha-r)]\, d\lambda}{((F(r)))}. \tag{33}$$

On aura donc, par suite,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\mathcal{E}\frac{\cos r x \displaystyle\int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\alpha\mu\, F'[r+\lambda(\alpha-r)]\, f(\mu)\, d\lambda\, d\alpha\, d\mu}{((F(r)))}. \tag{34}$$

MÉMOIRE

SUR

DIVERS POINTS D'ANALYSE [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VIII, p. 97; 1829.

On peut, à l'aide d'une formule donnée par Lagrange et de plusieurs autres formules du même genre, développer en séries les racines des équations, ou les fonctions de ces racines. C'est ainsi que, dans l'Astronomie, on développe le rayon vecteur de l'orbite d'une planète et l'anomalie vraie en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Mais, comme les séries de ce genre ne peuvent être utiles que dans le cas où elles sont convergentes, il importait beaucoup de fixer les conditions de leur convergence. On n'y était parvenu jusqu'à présent que dans quelques cas particuliers, par exemple dans le cas où il s'agit de développer le rayon vecteur ou l'anomalie vraie d'une orbite planétaire. Ce cas est celui que M. Laplace a traité par une analyse fort délicate dans deux Mémoires, dont l'un a été inséré dans la *Connaissance des Temps* de 1828, et dont l'autre vient d'être publié tout nouvellement. Il a supposé, pour plus de simplicité, que l'anomalie moyenne était réduite à un angle droit, et alors il a trouvé que la valeur de l'excentricité, pour laquelle chaque série cessait d'être convergente, dépendait de la résolution d'une équation transcendante dans laquelle entrait le nombre e. Frappé d'un résultat si digne de

[1] Lu à l'Académie royale des Sciences, le 3 septembre 1827.

remarque, je me suis demandé s'il ne serait pas possible de fixer généralement les conditions de convergence de la série de Lagrange, et des formules du même genre que j'avais obtenues à l'aide du calcul des résidus. Mes recherches sur cet objet m'ont conduit à reconnaître que ces conditions peuvent toujours être déduites de la résolution d'une équation transcendante qui renferme, comme cas particulier, l'équation trouvée par M. Laplace. Mais, pour arriver à ce dernier résultat, j'ai été obligé de recourir à une méthode très différente de celle qui a été employée, dans la théorie du mouvement elliptique, par l'illustre géomètre que je viens de citer. Pour donner une idée de cette méthode il est nécessaire d'entrer ici dans quelques détails.

Je considère d'abord une intégrale définie dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ est imaginaire et composée de deux facteurs, dont le premier est une puissance fort élevée et du degré n, par exemple u^n, u désignant une fonction réelle ou imaginaire de la variable x par rapport à laquelle on intègre. Le second facteur v peut être pareillement une fonction réelle ou imaginaire. Cela posé, je prouve que, dans le cas où le plus grand des modules de u correspond à une valeur X de x, qui fait évanouir la dérivée $\frac{du}{dx}$, l'intégrale proposée est le produit de la valeur de $u^n v$ correspondant à $x = \mathrm{X}$, par la racine carrée du quotient qu'on obtient en divisant la circonférence décrite avec le rayon 1 par le nombre n et par une quantité très peu différente de la dérivée du second ordre de $l\left(\frac{1}{u}\right)$ [1]. Lorsque l'intégrale renferme une certaine constante r et a néanmoins une valeur indépendante de r, on peut disposer de cette constante de manière que le plus grand module de u réponde à une valeur nulle de $\frac{du}{dx}$, et, par conséquent, de manière à obtenir la valeur très approchée de l'intégrale que l'on considère. Pour y parvenir il suffit de chercher les valeurs de r et de x qui vérifient simultanément les deux équations réelles comprises dans

[1] Dans le cas particulier où les fonctions u, v se réduisent à des quantités réelles, le résultat que nous indiquons ici s'accorde avec une formule donnée par M. Laplace.

l'équation imaginaire

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

Parmi ces valeurs se trouvera nécessairement la valeur demandée de la constante r. Donc, cette valeur sera une racine de l'équation transcendante que fournira l'élimination de x entre les équations réelles dont je viens de parler.

Je recherche ensuite les valeurs approchées des différentielles dont l'ordre est très considérable, quand la fonction sous le signe $\int$ renferme des fonctions élevées à de très hautes puissances. J'y parviens en transformant ces différentielles en intégrales définies qui renferment une constante arbitraire dont leurs valeurs sont indépendantes. La détermination approximative des différentielles dont il s'agit dépend encore de la résolution d'une équation transcendante qui fixe la valeur de la constante arbitraire.

En partant de ce principe, on détermine aisément les conditions de convergence de la série de Lagrange et des autres séries du même genre, et l'on établit, par exemple, relativement à la série de Lagrange, une règle de convergence que je vais indiquer.

Z étant une fonction quelconque de la variable z, on peut attribuer à cette variable une infinité de valeurs imaginaires qui aient le même module r, et parmi ces valeurs il y en aura une pour laquelle le module de la fonction Z deviendra un *maximum maximorum*. Soit R le module maximum maximorum de Z, correspondant au module r de la variable z. R variera avec r, et l'on pourra choisir r de manière que R soit une valeur de Z correspondant à une valeur de r qui vérifie l'équation $\frac{dZ}{dz} = 0$. Dans ce cas, R deviendra ce que nous nommerons le *module principal* de la fonction Z. Cela posé, concevons que, par la formule de Lagrange, on développe en série la racine z de l'équation

$$z = t + f(z),$$

ou une fonction quelconque de cette racine. On prouvera, par les principes ci-dessus établis, que la série obtenue sera convergente ou divergente suivant que le module principal de la fonction

$$\frac{f(z)}{z}$$

sera inférieur ou supérieur à l'unité.

Au Mémoire dont je viens de donner un extrait j'en ai joint un second, dans lequel je détermine le reste de la série de Lagrange, en l'exprimant par une intégrale définie.

MÉMOIRE

SUR

DIVERS POINTS D'ANALYSE.

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VIII, p. 101; 1829.

§ I$^{\text{er}}$. — *Détermination approximative de l'intégrale*

$$S = \int_{x_0}^{x_1} u^n v\,dx, \tag{1}$$

u et v désignant deux fonctions réelles ou imaginaires de la variable x, et n un nombre très considérable.

Soient X une valeur particulière de x; U, V, U′, V′, U″, V″, … les valeurs correspondantes de u, v, u', v', u'', v'', … et cherchons la partie de l'intégrale S comprise entre les limites très voisines

$$x = X - \frac{a}{\sqrt{n}}, \qquad x = X + \frac{a}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

On aura, entre ces limites,

$$u = U + \frac{U'}{1}(x - X) + \frac{U''}{1.2}(x - X)^2 + \ldots, \tag{3}$$

puis, en posant

$$x = X + \frac{t}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

on trouvera

$$(5)\qquad u = \mathrm{U} + \frac{\mathrm{U}'}{1}\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\mathrm{U}''}{1.2}\frac{t^2}{n} + \ldots,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{l}(u) = \mathrm{l}(\mathrm{U}) + \mathrm{l}\left(1 + \dfrac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\dfrac{t}{\sqrt{n}} + \dfrac{\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}}\dfrac{t^2}{n} + \ldots\right) \\ \qquad = \mathrm{l}(\mathrm{U}) + \dfrac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\dfrac{t}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}\dfrac{t^2}{n} + \ldots. \end{cases}$$

On aura donc à très peu près, lorsque n sera très grand,

$$(7)\qquad u = \mathrm{U}e^{\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}\frac{t^2}{n}},$$

et, par suite,

$$(8)\qquad u^n = \mathrm{U}^n e^{\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}t\sqrt{n} - \frac{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}t^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\qquad u^n = \mathrm{U}^n e^{\frac{n}{2}\frac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}} e^{-\frac{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}\left(t - \frac{\mathrm{U}\mathrm{U}'}{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}\sqrt{n}\right)^2}.$$

On en conclura, à très peu près,

$$(10)\qquad \int_{\mathrm{X}-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{X}+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-a}^{+a} \mathrm{U}^n e^{\frac{n}{2}\frac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}} e^{-\frac{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}(t-c)^2}\,\mathrm{V}\,dt,$$

c désignant pour abréger la constante $\dfrac{\mathrm{U}\mathrm{U}'}{\mathrm{U}'^2-\mathrm{U}\mathrm{U}''}\sqrt{n}$.

Si, pour plus de commodité, on posait

$$(11)\qquad u = e^w, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U} = e^{\mathrm{W}} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{W} = \mathrm{l}(\mathrm{U}),$$

on trouverait sensiblement

$$(12)\qquad \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} = \mathrm{W}', \qquad \frac{-\mathrm{U}'^2 + \mathrm{U}\mathrm{U}''}{\mathrm{U}^2} = \mathrm{W}'',$$

$$(13)\qquad u = e^{\mathrm{W} + \mathrm{W}'\frac{t}{\sqrt{n}} + \mathrm{W}''\frac{t^2}{2n} + \cdots},$$

$$(14)\qquad u^n = e^{n\mathrm{W} + \mathrm{W}'t\sqrt{n} + \frac{\mathrm{W}''}{2}t^2 + \ldots} = e^{n\left(\mathrm{W} - \frac{\mathrm{W}'^2}{2\mathrm{W}''}\right)} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}\left(t + \frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}''}\sqrt{n}\right)^2},$$

$$(15)\qquad \int_{\mathrm{X}-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{X}+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx = \frac{e^{n\left(\mathrm{W} - \frac{\mathrm{W}'^2}{2\mathrm{W}''}\right)}}{\sqrt{n}}\int_{-a}^{a} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}\left(t + \frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}''}\sqrt{n}\right)^2}\,\mathrm{V}\,dt.$$

L'équation (15) suppose que $\dfrac{a}{\sqrt{n}}$ est très petit, ce qui peut avoir lieu, même lorsque a prend une valeur considérable, par exemple lorsqu'on fait $a = \sqrt[3]{n}$, $a = \sqrt[4]{n}$, ... Alors on a sensiblement, pourvu que la partie réelle de W'' soit négative,

$$(16)\qquad \int_{-a}^{a} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}t^2}\,\mathrm{V}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(-\frac{\mathrm{W}''}{2}\right)t^2}\,\mathrm{V}\,dt = \mathrm{V}\sqrt{\frac{2\pi}{-\mathrm{W}''}}.$$

Par suite, si, la partie réelle de W'' étant négative, la condition

$$(17)\qquad \mathrm{W}' = 0$$

se trouve remplie, l'équation (15) donnera sensiblement

$$(18)\qquad \int_{\mathrm{X}-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{X}+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx = \frac{\mathrm{V}e^{n\mathrm{W}}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2\pi}{-\mathrm{W}''}}.$$

Si W' n'était pas nul, il ne serait pas possible de remplacer l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}\left(t + \frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}''}\sqrt{n}\right)^2}\,dt$$

par

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}\left(t + \frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}''}\sqrt{n}\right)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}t^2}\,dt.$$

Car on aurait évidemment

$$(19)\qquad \int_{-a}^{a} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}\left(t + \frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}''}\sqrt{n}\right)^2}\,dt = \int_{-a-\frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}''}\sqrt{n}}^{a-\frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}''}\sqrt{n}} e^{\frac{\mathrm{W}''}{2}t^2}\,dt,$$

et, a étant très petit par rapport à $\sqrt{n}$, les limites de l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (19) seraient des infinis de même signe. Donc cette intégrale serait sensiblement nulle si la partie réelle de W'' était négative. Au contraire, si la partie réelle de W'' était positive, l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (19) deviendrait infinie.

Soient maintenant

$$w = p + q\sqrt{-1}, \tag{20}$$

et P, P', P'', Q, Q', Q'' ce que deviennent p, p', p'', q, q', q'' quand on pose $x = X$. On aura

$$u = e^w = e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q). \tag{21}$$

Donc e^p sera le module de u. De plus, on trouvera

$$W = P + Q\sqrt{-1}, \qquad W' = P' + Q'\sqrt{-1}, \qquad W'' = P'' + Q''\sqrt{-1}. \tag{22}$$

Donc, si W' est nul, on aura

$$P' = 0, \qquad Q' = 0, \tag{23}$$

et, si la partie réelle de W'' est négative, on aura

$$P'' < 0. \tag{24}$$

Cela posé, soit

$$P'' = -B^2, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{Q''}{P''}, \tag{25}$$

B étant une quantité positive; l'équation (18) donnera

$$\left\{\begin{aligned} \int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx &= \frac{V e^{n(P+Q\sqrt{-1})}}{B\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2\pi}{1+\operatorname{tang}\theta\sqrt{-1}}} \\ &= \frac{V e^{n(P+Q\sqrt{-1})}}{B\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sqrt{2\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}\right. \tag{26}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx = \frac{V}{B}\,\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\, e^{\left(nQ-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}. \tag{27}$$

Il est essentiel d'observer que, en vertu des conditions (23) et (24),

P sera nécessairement un maximum de p, et $e^P = U$ un maximum de $e^p = u$.

Lorsque P est non seulement un maximum de p, mais encore la plus grande des valeurs de p, correspondant à des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = x_1$, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque P est le *maximum maximorum* de p, alors il est facile de reconnaître que l'on a

$$S = \int_{x_0}^{x_1} u^n v\,dx = (1 \pm \varepsilon)\int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx, \tag{28}$$

ε désignant un nombre très petit et qui s'évanouisse avec $\frac{1}{n}$. Donc, par suite, on trouvera

$$S = (1 \pm \varepsilon)\frac{V}{B}\,\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\, e^{\left(nQ-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}. \tag{29}$$

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$V = A(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta), \tag{30}$$

on aura

$$S = (1 \pm \varepsilon)\frac{A}{B}\,\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\, e^{\left(nQ+\Theta-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}. \tag{31}$$

Si l'intégrale S a une valeur réelle, on aura nécessairement $nQ + \Theta - \frac{\theta}{2} = 0$,

$$S = (1 \pm \varepsilon)\frac{A}{B}\,\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta. \tag{32}$$

On doit toutefois excepter le cas où deux valeurs de x correspondraient au maximum maximorum de p. Admettons cette dernière hypothèse, et supposons que, dans le passage de la première valeur de x à la seconde, A, B, P ne varient pas, et que Q, Θ, θ changent seulement de signe. L'intégrale S sera évidemment déterminée par une équation de la forme

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S} = {} & (1 \pm \varepsilon_1)\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{e^{n\mathrm{P}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\, e^{\left(n\mathrm{Q}+\Theta-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}} \\ & + (1 \pm \varepsilon_2)\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{e^{n\mathrm{P}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\, e^{-\left(n\mathrm{Q}+\Theta-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}, \end{aligned}\right.$$

que l'on pourra réduire à la forme

$$(34)\qquad \mathrm{S} = (1 \pm \varepsilon)\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{e^{n\mathrm{P}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\cos\left(n\mathrm{Q}+\Theta-\frac{\theta}{2}\right).$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$(35)\qquad e^{\mathrm{P}} = \mathrm{R},$$

R sera le module maximum maximorum de la fonction u, et les formules (32), (34) donneront

$$(36)\qquad \mathrm{S} = (1 \pm \varepsilon)\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{R}^n\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta,$$

$$(37)\qquad \mathrm{S} = (1 \pm \varepsilon)\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{R}^n\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\cos\left(n\mathrm{Q}+\Theta-\frac{\theta}{2}\right).$$

Il est bon d'observer que la série, dans laquelle S représenterait le terme général correspondant à l'indice n, sera convergente quand on aura $\mathrm{R} < 1$, et divergente quand on aura $\mathrm{R} > 1$.

Ajoutons que, si l'intégrale S rencontre une constante arbitraire r, on pourra disposer de cette constante de manière que la valeur $x = \mathrm{X}$, correspondant au module maximum maximorum de la fonction u, vérifie non seulement la première des formules (23), mais encore la seconde, c'est-à-dire l'équation de condition

$$(38)\qquad q' = 0.$$

§ II. — *Sur la détermination approximative de la quantité*

$$(1)\qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots m}\,\frac{d^m\{\varphi(t)[\varpi(t)]^n\}}{dt^m},$$

m et n étant de très grands nombres.

On aura évidemment, quelle que soit la constante r,

$$(2)\qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{-m}e^{-ms\sqrt{-1}}\,\varphi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)\left[\varpi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)\right]^n ds,$$

puis, en posant $m = n\mu$,

$$(3)\qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)\left[\frac{\varpi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)^{\mu}}\right]^n ds.$$

Cette valeur de S_n coïncidera avec l'intégrale (1) du paragraphe I[er], si l'on pose $x = s$,

$$(4)\qquad u = \frac{\varpi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)}{r^{\mu}e^{s\mu\sqrt{-1}}},\qquad v = \frac{1}{2\pi}\varphi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right),$$

$$(5)\qquad w = \mathrm{l}\left[\varpi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)\right] - \mu\,\mathrm{l}(r) - s\mu\sqrt{-1},$$

$$(6)\qquad \frac{dw}{ds} = w' = p' + q'\sqrt{-1} = \left[\frac{re^{s\sqrt{-1}}\,\varpi'\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\varpi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)} - \mu\right]\sqrt{-1};$$

et la série qui aura pour terme général S_n sera convergente, si le module maximum maximorum de la fonction

$$(7)\qquad u = \frac{\varpi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)^{\mu}}$$

est plus petit que l'unité, quand la constante r est choisie de manière que la valeur de s correspondant à ce module vérifie l'équation imaginaire $w' = 0$, ou

$$(8)\qquad \frac{re^{s\sqrt{-1}}\,\varpi'\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\varpi\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)} = \mu.$$

Soit R ce module et posons, pour plus de commodité,

$$\psi(x) = \frac{\varpi(t+x)}{x^r}. \tag{9}$$

Pour obtenir la quantité R il suffira de chercher les valeurs réelles ou imaginaires de x qui rendent nulle la fonction dérivée $\psi'(x)$, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$\psi'(x) = 0. \tag{10}$$

Soit $x = \rho e^{s\sqrt{-1}}$ une de ces racines. Le module correspondant de $\psi(x)$, savoir

$$\psi(\rho e^{s\sqrt{-1}}), \tag{11}$$

sera précisément la quantité R, si ce module est la valeur maximum maximorum de la fonction $\psi(\rho e^{s\sqrt{-1}})$. Or, il y aura, en général, une racine de l'équation (10) qui vérifiera la condition précédente. Car, pour chaque valeur particulière de la constante r, la fonction

$$\psi(re^{s\sqrt{-1}})$$

aura un module maximum maximorum, correspondant à une valeur de s qui vérifiera l'équation

$$p' = 0;$$

et, si l'on attribue successivement à r une infinité de valeurs distinctes, la quantité q' recevra une infinité de valeurs correspondantes, parmi lesquelles on en trouvera généralement une égale à zéro.

La quantité R dont il est ici question, et qui représente toujours l'un des modules de $\psi(x)$ correspondant à une racine de l'équation

$$\psi'(x) = 0,$$

est ce que nous nommerons *le module principal* de la fonction $\psi(x)$. Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *La série qui a pour terme général*

$$S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots.m}\,\frac{d^n\{\varphi(t)[\varpi(t)]^n\}}{dt^n}, \tag{12}$$

m désignant un très grand nombre qui croît avec n de manière que $\frac{m}{n} = \mu$ conserve une valeur finie, sera convergente ou divergente, suivant que le module principal de la fonction

$$\frac{\varpi(t+x)}{x^\mu} \tag{13}$$

sera inférieur ou supérieur à l'unité.

En posant $m = n - 1$, on trouvera

$$\mu = 1 - \frac{1}{n},$$

ou à très peu près, pour de très grandes valeurs de n,

$$\mu = 1.$$

Par suite, on déduira immédiatement du théorème I cette autre proposition :

Théorème II. — *La série qui a pour terme général*

$$S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\{\varphi(t)[\varpi(t)]^n\}}{dt^{n-1}} \tag{14}$$

sera convergente ou divergente, suivant que le module principal de la fonction

$$\frac{\varpi(t+x)}{x} \tag{15}$$

sera inférieur ou supérieur à l'unité.

Il est bon d'observer que l'expression (14), divisée par n, deviendra le terme général de la série trouvée par Lagrange, et qui représente la valeur de $\int \varphi(z)\,dz$, z étant une racine de l'équation

$$z = t + \varpi(z). \tag{16}$$

Exemple I. — Considérons l'équation

$$z = t + c\sin z. \tag{17}$$

On aura, dans ce cas,

$$\left\{\begin{aligned} &\varpi(z) = c\sin z, \\ &\frac{\varpi(t+x)}{x} = c\,\frac{\sin(t+x)}{x}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Il reste à trouver le module principal de la fonction

$$c\,\frac{\sin(t+x)}{x} = c\,\frac{\sin\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)}{re^{s\sqrt{-1}}}. \tag{19}$$

Or ce module répond nécessairement à une racine de l'équation

$$\frac{d\left[\dfrac{\sin(t+x)}{x}\right]}{dx} = 0, \tag{20}$$

ou

$$d\,\mathrm{l}\sin(t+x) - d\,\mathrm{l}(x) = 0, \tag{21}$$

que l'on peut réduire à

$$\operatorname{tang}(t+x) = x. \tag{22}$$

Cela posé, soit d'abord $t = \frac{\pi}{2}$. L'équation (22) deviendra $-\cot x = x$, ou

$$\operatorname{tang} x = -\frac{1}{x}. \tag{23}$$

On satisfait à cette dernière en prenant

$$x = re^{s\sqrt{-1}}r\sqrt{-1}, \qquad \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^r} = \frac{1}{r}, \qquad s = \frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

De plus, le module de la fonction (19) est généralement

$$\frac{c}{2r}\sqrt{e^{2r\sin s} + e^{-2r\sin s} - 2\cos(2t + 2r\cos s)}. \tag{25}$$

Donc il se réduit, pour $t = \frac{\pi}{2}$, à

$$\frac{c}{2r}\sqrt{e^{2r\sin s} + e^{-2r\sin s} + 2\cos(2r\cos s)}. \tag{26}$$

Or, la valeur maximum maximorum de cette dernière quantité est évidemment celle qui répond à $s = \frac{\pi}{2}$, savoir

$$c\,\frac{e^r + e^{-r}}{2r}. \tag{27}$$

Donc la quantité (27), dans laquelle on doit supposer r déterminé par la formule

$$\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} = \frac{1}{r}, \tag{28}$$

est le module principal de la fonction

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{x} = \frac{\cos x}{x}. \tag{29}$$

Donc la racine z de l'équation

$$z = \frac{\pi}{2} + c\sin z \tag{30}$$

et les fonctions de cette même racine seront développables en séries convergentes par la formule de Lagrange, lorsqu'on aura

$$c\,\frac{e^r + e^{-r}}{2r} < 1, \quad \text{ou} \quad c < \frac{2r}{e^r + e^{-r}}. \tag{31}$$

D'ailleurs, on tire de l'équation (8)

$$\frac{e^r + e^{-r}}{r} = \frac{e^r - e^{-r}}{1} = \frac{2}{\sqrt{r^2 - 1}}, \tag{32}$$

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}} = \sqrt{r^2 - 1}. \tag{33}$$

Donc, les séries en question seront convergentes, quand on aura

$$c < \sqrt{r^2 - 1}. \tag{34}$$

Il reste à calculer approximativement dans la même hypothèse le terme général d'une semblable série, par exemple de celle qui fournira le développement de $\Phi(z)$. Or ce terme sera

$$S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} \frac{d^{n-1}[\Phi'(t)(c\sin t)^n]}{dt^{n-1}}, \tag{35}$$

pourvu que l'on fasse $t = \frac{\pi}{2}$ après les différentiations, ou, ce qui revient au même,

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi'\left(\frac{\pi}{2} + re^{s\sqrt{-1}}\right)\left[\frac{c\cos(re^{s\sqrt{-1}})}{(re^{s\sqrt{-1}})^{1-\frac{1}{n}}}\right]^n ds. \tag{36}$$

Pour comparer cette dernière intégrale à l'intégrale (1) du paragraphe I^{er}, il faudra faire

$$\left\{\begin{aligned} v &= \Phi'\left(\frac{\pi}{2} + re^{s\sqrt{-1}}\right) re^{s\sqrt{-1}}, \\ u &= c\,\frac{\cos(re^{s\sqrt{-1}})}{re^{s\sqrt{-1}}}, \\ w &= p + q\sqrt{-1} = \mathrm{l}[\cos(re^{s\sqrt{-1}})] - [\mathrm{l}(r) + s\sqrt{-1}] + \mathrm{l}(c). \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Cela posé, on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} w' &= p' + q'\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}\,[re^{s\sqrt{-1}}\operatorname{tang}(re^{s\sqrt{-1}}) + 1] = \frac{d(p + q\sqrt{-1})}{ds}, \\ w'' &= p'' + q''\sqrt{-1} = \left[re^{s\sqrt{-1}}\operatorname{tang}(re^{s\sqrt{-1}}) + \frac{r^2 e^{2s\sqrt{-1}}}{\cos^2(re^{s\sqrt{-1}})}\right]. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Par suite, l'équation $w' = 0$ donnera

$$re^{s\sqrt{-1}}\operatorname{tang}(re^{s\sqrt{-1}}) + 1 = 0 \tag{39}$$

et se réduira ainsi à la formule (23). De plus, r et s étant déterminés par la formule (39), ou, ce qui revient au même, par les équations

$$s = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} = \frac{1}{r}, \tag{40}$$

la seconde des formules (38) donnera

$$W'' = P'' + Q''\sqrt{-1} = -\left[1 + \frac{4r^2}{(e^r + e^{-r})^2}\right] = -(1 + r^2 - 1) = -r^2. \tag{41}$$

On aura donc

$$B^2 = -P'' = r^2, \qquad Q'' = 0, \qquad \theta = 0, \qquad B = r. \tag{42}$$

On trouvera de même

$$U = e^{P + Q\sqrt{-1}} = c\,\frac{\cos(r\sqrt{-1})}{r\sqrt{-1}} = -\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\sqrt{-1}, \tag{43}$$

et, par suite,

$$R = e^{P} = \frac{e^r + e^{-r}}{2r} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 1}}, \qquad Q = -\frac{\pi}{2}. \tag{44}$$

Si l'on fait d'ailleurs

$$V = r\sqrt{-1}\,\Phi'\left(\frac{\pi}{2} + r\sqrt{-1}\right) = A(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta), \tag{45}$$

la formule (37) du paragraphe I^{er} donnera

$$S_n = \frac{(1 \pm \varepsilon)}{2\pi}\frac{2A}{r}\left(c\,\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^n \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos\left(\Theta - \frac{n\pi}{2}\right). \tag{46}$$

Soit, en particulier,

$$\Phi(z) = 1 - c\cos z. \tag{47}$$

On trouvera

$$\Phi'(z) = c\sin z, \tag{48}$$

$$\left\{\begin{aligned} V &= cr\sqrt{-1}\cos(r\sqrt{-1}) = cr\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)\sqrt{-1}, \\ A &= cr\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right), \qquad \Theta = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}\right. \tag{49}$$

$$S_n = \frac{(1 \pm \varepsilon)}{2\pi}\,2r\left(c\,\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}, \tag{50}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &= \frac{(1 \pm \varepsilon)}{2\pi}\frac{2r\sqrt{2\pi}}{n\sqrt{n}}\left(c\,\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}\cos(n-1)\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(1 \pm \varepsilon)}{\sqrt{2\pi}}\frac{2r}{n\sqrt{n}}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2 - 1}}\right)^{n+1}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right. \tag{51}$$

La formule (51) s'accorde avec celle qu'a donnée M. Laplace.

Revenons au cas où t a une valeur quelconque. Alors, en faisant, pour abréger,

$$x = re^{s\sqrt{-1}}, \tag{52}$$

on aura

$$u = c\,\frac{\sin(t+x)}{x}, \tag{53}$$

$$\left\{\begin{aligned} w &= p + q\sqrt{-1} = \mathrm{l}(c) + \mathrm{l}\sin(t+x) - \mathrm{l}(x), \qquad \frac{dx}{ds} = x\sqrt{-1},\\ w' &= \frac{dw}{ds} = p' + q'\sqrt{-1} = \left[\frac{\cos(t+x)}{\sin(t+x)} - \frac{1}{x}\right]\frac{dx}{ds} = \sqrt{-1}\left[\frac{x}{\mathrm{tang}(t+x)} - 1\right],\\ w'' &= \frac{d^2w}{ds^2} = p'' + q''\sqrt{-1} = \left[\frac{1}{\mathrm{tang}(t+x)} - \frac{x}{\sin^2(t+x)}\right]\frac{dx}{ds}\sqrt{-1}\\ &= -\left[\frac{x}{\mathrm{tang}(t+x)} - \frac{x^2}{\sin^2(t+x)}\right]. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Cela posé, l'équation $w' = 0$ donnera

$$\frac{\mathrm{tang}(t+x)}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{tang}(t+x) = x, \tag{55}$$

et l'on en tirera

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sin(t+x)}{x} = \frac{\cos(t+x)}{1},\\ &\frac{\sin^2(t+x)}{x^2} = \frac{\cos^2(t+x)}{1} = \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}\right. \tag{56}$$

$$W'' = P'' + Q''\sqrt{-1} = -[1 - (1+x^2)] = x^2. \tag{57}$$

Donc, le module principal de l'expression (53) correspondra nécessairement à une racine de l'équation (55) qui rendra négative la partie réelle de x^2. Il est clair que cette racine ne peut être réelle. Car, dans ce cas, x^2 serait réelle et positive. Donc, il faut exclure toutes les racines réelles de l'équation (55), et même les racines imaginaires dans lesquelles la partie réelle surpasserait (abstraction faite du signe) le coefficient de $\sqrt{-1}$. Car, si l'on pose

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \tag{58}$$

on aura

$$x^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{-1}; \tag{59}$$

et la partie réelle de x^2 ne pourra être négative, si l'on a $\alpha^2 > \beta^2$. Ajoutons que la valeur $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, substituée dans l'équation (55), donnera

$$\left\{\begin{aligned} \alpha + \beta\sqrt{-1} &= \frac{\sin(t+\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\cos(t+\alpha+\beta\sqrt{-1})} = \frac{2\sin(t+\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(t+\alpha-\beta\sqrt{-1})}{2\cos(t+\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(t+\alpha-\beta\sqrt{-1})}\\ &= \frac{\sin(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}(e^{2\beta} - e^{-2\beta})\sqrt{-1}}{\cos(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta})}, \end{aligned}\right. \tag{60}$$

$$\alpha = \frac{\sin(2t+2\alpha)}{\cos(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta})}, \quad \beta = \frac{\frac{1}{2}(e^{2\beta} - e^{-2\beta})}{\cos(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}(e^{2\beta} + e^{-2\beta})}. \tag{61}$$

Donc, par suite, si α et β diffèrent de zéro, l'on aura

$$\frac{\sin(2t+2\alpha)}{2\alpha} = \frac{e^{2\beta} - e^{-2\beta}}{4\beta} > 1. \tag{62}$$

Or, l'équation (62) ne peut subsister, ni pour $t = 0$, ni pour $t = \frac{\pi}{2}$, ou $2t = \pi$, puisque alors le premier membre se réduit à $\pm\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$ dont la valeur numérique est inférieure à l'unité. Donc, dans l'un et l'autre cas, il faut supposer $\alpha = 0$; ce qui réduit la seconde des équations (61), pour $t = 0$, à

$$\beta = \frac{e^{2\beta} - e^{-2\beta}}{(e^{\beta} + e^{-\beta})^2} = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}} \quad \text{ou} \quad \beta = 0, \tag{63}$$

et, pour $t = \frac{\pi}{2}$, à

$$\beta = \frac{e^{2\beta} - e^{-2\beta}}{(e^{\beta} - e^{-\beta})^2} = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{e^{\beta} - e^{-\beta}}. \tag{64}$$

La formule (64) s'accorde avec la seconde des équations (40). Quant au cas où l'on suppose $t = 0$, il donne à la fois $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et, par conséquent, $x = 0$. Donc alors le module principal de l'expression (53) correspond à $x = 0$ et se réduit à

$$c\,\frac{\sin x}{x} = c. \tag{65}$$

Donc, dans le même cas, la série de Lagrange sera convergente, si l'on a

$$c < 1. \tag{66}$$

Exemple II. — Considérons l'équation

$$z = \cos\theta + \frac{\alpha}{2}(z^2 - 1). \tag{67}$$

La série de Lagrange appliquée à cette équation du second degré fournira le développement en série de l'une de ses racines, savoir :

$$z = \frac{1 - (1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}, \tag{68}$$

et, si l'on pose, pour abréger, $\cos\theta = t$, ce développement sera

$$z = t + \frac{\alpha}{2}(t^2 - 1) + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1.2}\,\frac{d(t^2-1)^2}{dt} + \ldots + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots..n}\,\frac{d^{n-1}(t^2-1)^n}{dt^{n-1}} + \ldots. \tag{69}$$

Ici, la fonction $\varpi(z)$ étant donnée par l'équation

$$\varpi(z) = \frac{\alpha}{2}(z^2 - 1), \tag{70}$$

la série de Lagrange sera convergente lorsque le module principal de la fonction

$$\frac{\varpi(t+x)}{x} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{(t+x)^2 - 1}{x} \tag{71}$$

sera inférieur à l'unité. D'ailleurs, si l'on pose

$$u = \frac{\alpha}{2}\,\frac{(t+x)^2-1}{x}, \qquad x = re^{s\sqrt{-1}}, \qquad \frac{dx}{ds} = x\sqrt{-1}, \tag{72}$$

on aura

$$w = \mathrm{l}(u) = \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{l}[(t+x)^2 - 1] - \mathrm{l}(x), \tag{73}$$

$$\left\{\begin{aligned} w' &= \frac{dw}{ds} = \left[\frac{2(t+x)}{(t+x)^2-1} - \frac{1}{x}\right]x\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left[\frac{2tx+2x^2}{(t+x)^2-1} - 1\right],\\ w'' &= \frac{d^2w}{ds^2} = p'' + q''\sqrt{-1} = -\left\{\frac{2(t+2x)x}{(t+x)^2-1} - \left[\frac{2tx+2x^2}{(t+x)^2-1}\right]^2\right\}. \end{aligned}\right. \tag{74}$$

Par suite, l'équation $w' = 0$ donnera

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2tx+2x^2}{(t+x)^2-1} - 1 = 0,\\ &x^2 = t^2 - 1 = -\sin^2\theta,\\ &x = \pm\sin\theta\sqrt{-1}; \end{aligned}\right. \tag{75}$$

et l'on en conclura, en plaçant le signe $+$ devant $\sin\theta\sqrt{-1}$,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{W}'' &= \mathrm{P}'' + \mathrm{Q}''\sqrt{-1} = -\left[\frac{2(t+2x)x}{(t+x)^2-1} - 1\right] = \frac{3x^2+1-t^2}{1-t^2-x^2-2tx}\\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta} = \frac{\sin\theta(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)}{\sqrt{-1}}; \end{aligned}\right. \tag{76}$$

$$\mathrm{P}'' = -\sin^2\theta, \quad \mathrm{B} = \sin\theta, \quad \mathrm{Q}'' = -\sin\theta\cos\theta, \quad \frac{\mathrm{Q}''}{\mathrm{P}''} = \cot\theta = \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \tag{77}$$

$$\mathrm{U} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{(t+x)^2-1}{x} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos 2\theta - 1 + \sin 2\theta\sqrt{-1}}{\sin\theta\sqrt{-1}} = \alpha(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}), \tag{78}$$

$$\mathrm{R} = \alpha, \qquad \mathrm{Q} = \theta. \tag{79}$$

Donc, le module principal de la fonction (71) sera $\mathrm{R} = \alpha$, et la série (69) sera toujours convergente pour $\alpha < 1$. On peut en dire autant de toute série qui représentera le développement de

$$\Phi(z),$$

Φ étant une fonction quelconque, et z étant déterminée par la formule (68).

Si l'on voulait développer, en série ordonnée suivant les puissances de α, le radical

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{80}$$

on observerait que ce radical est équivalent à

$$\frac{1}{1-\alpha z}, \tag{81}$$

z désignant la racine de l'équation (67) ou

$$z - \cos\theta - \frac{\alpha}{2}(z^2-1) = 0, \tag{82}$$

qui se développé par la formule de Lagrange. On aurait par suite, en observant que la dérivée du premier membre de l'équation (82) est précisément $1-\alpha z$,

$$\left\{\begin{aligned} (1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} &= \mathcal{E}\frac{1}{\left(\left(z-\cos\theta-\frac{\alpha}{2}(z^2-1)\right)\right)} \\ &= \mathcal{E}\frac{1}{\left(\left(z-t-\frac{\alpha}{2}(z^2-1)\right)\right)}, \end{aligned}\right. \tag{83}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{1-\alpha z} = \mathcal{E}\frac{1}{((z-t))} + \frac{\alpha}{2}\mathcal{E}\frac{z^2-1}{(((z-t)^2))} + \frac{\alpha^2}{2^2}\mathcal{E}\frac{(z^2-1)^2}{(((z-t)^3))} + \ldots, \tag{84}$$

ou bien encore

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha z} = 1 &+ \frac{\alpha}{2}\frac{d(t^2-1)}{dt} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1.2}\frac{d^2(t^2-1)^2}{dt^2} + \ldots \\ &+ \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots..n}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{85}$$

Ainsi, l'on trouvera, en posant $\cos\theta = t$,

$$\left\{\begin{aligned} (1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 &+ \frac{\alpha}{2}\frac{d(t^2-1)}{dt} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1.2}\frac{d^2(t^2-1)^2}{dt^2} + \ldots \\ &+ \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots..n}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{86}$$

Or, cette dernière série sera convergente, lorsque le module principal de la fonction

$$\frac{\alpha}{2}\frac{(t+x)^2-1}{x},$$

c'est-à-dire la quantité α, sera inférieur à l'unité.

Soit maintenant

$$S_n = \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots..n}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n} \tag{87}$$

le terme général de la série (86). On aura

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha}{2}\frac{(t+re^{s\sqrt{-1}})^2-1}{re^{s\sqrt{-1}}}\right]^n ds. \tag{88}$$

En comparant cette valeur de S_n à l'intégrale (1) du paragraphe Ier, on trouvera

$$s = x,$$

$$u = \frac{\alpha}{2}\frac{(t+re^{s\sqrt{-1}})^2-1}{re^{s\sqrt{-1}}}, \qquad v = \frac{1}{2\pi}. \tag{89}$$

On aura, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} &R = \alpha, \qquad B = \sin\theta, \qquad \text{arc tang}\frac{Q''}{P''} = \frac{\pi}{2} - \theta, \\ &\qquad A = \frac{1}{2\pi}, \qquad \Theta = 0, \qquad Q = \theta, \end{aligned}\right. \tag{90}$$

et l'on tirera de la formule (37) du paragraphe Ier, après y avoir remplacé θ par $\frac{\pi}{2} - \theta$,

$$S_n = (1\pm\varepsilon)\frac{\alpha^n}{\sqrt{\frac{1}{2}n\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{1}{4}\pi\right]. \tag{91}$$

Ce résultat s'accorde avec celui qu'a obtenu M. Laplace. (*Voir* aussi une Note de M. Plana, insérée dans le quatorzième Volume de la *Correspondance astronomique de M. le baron de Zach.*)

§ III.

Cherchons généralement la valeur de l'intégrale

$$(1)\qquad S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(re^{s\sqrt{-1}}) \left[\frac{\psi(re^{s\sqrt{-1}})}{re^{s\sqrt{-1}}}\right]^n ds = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\,\frac{d^n\{\varphi(i)[\psi(i)]^n\}}{di^n},$$

i devant être supposé nul après les différentiations. On déterminera la valeur de x à laquelle correspond le module principal de la fonction

$$(2)\qquad \frac{\psi(x)}{x}.$$

Soit $x = \omega$ cette valeur qui pourra être réelle ou imaginaire. Si l'on fait

$$(3)\qquad \begin{cases} v = \varphi(re^{s\sqrt{-1}}), \qquad u = \dfrac{\psi(re^{s\sqrt{-1}})}{re^{s\sqrt{-1}}}, \qquad x = re^{s\sqrt{-1}}, \\ w = \mathrm{l}(u) = \mathrm{l}[\psi(re^{s\sqrt{-1}})] - \mathrm{l}(r) - s\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$v = \varphi(x), \qquad w = \mathrm{l}[\psi(x)] - \mathrm{l}(x),$$

on trouvera

$$\frac{dx}{ds} = x\sqrt{-1},$$

$$(4)\qquad \frac{dw}{ds} = \left[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{1}{x}\right]\frac{dx}{ds} = \left[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}x - 1\right]\sqrt{-1},$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2w}{ds^2} = \sqrt{-1}\left\{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \dfrac{\psi''(x)}{\psi(x)}x - x\left[\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right]^2\right\}\dfrac{dx}{ds} \\ \qquad = -\left\{\dfrac{x^2\psi''(x)}{\psi(x)} + \dfrac{x\psi'(x)}{\psi(x)} - \left[\dfrac{x\psi'(x)}{\psi(x)}\right]^2\right\}. \end{cases}$$

Donc, la valeur ω de x vérifiera l'équation $\frac{dw}{ds} = 0$, ou

$$(6)\qquad \omega\frac{\psi'(\omega)}{\psi(\omega)} - 1 = 0,$$

et la valeur correspondante de $\frac{d^2w}{ds^2} = p'' + q''\sqrt{-1}$ sera (*voir* le § I[er])

$$(7)\qquad W'' = P'' + Q''\sqrt{-1} = -\frac{\omega^2\psi''(\omega)}{\psi(\omega)}.$$

Quant à la valeur de

$$U = e^W,$$

elle sera

$$(8)\qquad e^W = \frac{\psi(\omega)}{\omega}.$$

Enfin, on aura

$$(9)\qquad V = \varphi(\omega).$$

Cela posé, le second membre de la formule (18) du paragraphe I[er] deviendra

$$(10)\qquad \frac{\varphi(\omega)\left[\dfrac{\psi(\omega)}{\omega}\right]^n}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left[\dfrac{\omega^2\psi''(\omega)}{\psi(\omega)}\right]}}.$$

Par suite, si le module principal de la fonction

$$\frac{\psi(x)}{x}$$

est réel et correspond à une seule valeur de x, on aura, pour de grandes valeurs de n,

$$(11)\qquad S_n = (1\pm\varepsilon)\left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(\omega)\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega}\right]^n\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega^2\psi''(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

ε désignant un nombre très petit. Mais, si le module principal de $\frac{\psi(x)}{x}$ correspond à deux valeurs imaginaires et conjuguées de la variable x, alors, en posant

$$(12)\qquad \varphi(\omega)\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega}\right]^n\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega^2\psi''(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}} = \Omega + \Omega_1\sqrt{-1},$$

on aura

$$(13)\qquad S_n = (1\pm\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi n}}\,\Omega.$$

Exemple. — Soient

$$\varphi(x)=1,\qquad \psi(x)=\frac{(t+x)^2-1}{2}\alpha,\qquad t=\cos\theta; \tag{14}$$

on trouvera,

$$\omega=\pm\sin\theta\sqrt{-1},\qquad \psi(\omega)=\frac{(\omega+t)^2-1}{2}\alpha,\qquad \psi''(\omega)=\alpha. \tag{15}$$

Cela posé, si l'on prend

$$\omega=\sin\theta\sqrt{-1}, \tag{16}$$

on aura

$$\psi(\omega)=\frac{(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^2-1}{2}\alpha=\frac{-2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\sqrt{-1}}{2}\alpha;$$

$$\frac{\psi(\omega)}{\omega^2\psi''(\omega)}=1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sqrt{-1}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sqrt{-1}}{\sin\theta},$$

$$\frac{\psi(\omega)}{\omega}=\alpha(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

$$\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega}\right]^n=\alpha^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta),$$

$$\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega^2\psi''(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}},\qquad \varphi(\omega)=1,$$

et, par suite,

$$\Omega+\Omega_1\sqrt{-1}=\frac{\alpha^n}{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\left[\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{17}$$

$$\Omega=\frac{\alpha^n}{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \tag{18}$$

Donc, la formule (13) donnera

$$S_n=(1\pm\varepsilon)\frac{\alpha^n\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi n\sin\theta}}, \tag{19}$$

ce que l'on savait déjà.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de calculer

$$S_n=\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}\{\Phi'(t)[\varpi(t)]^n\}}{dt^{n-1}}. \tag{20}$$

On aura évidemment, pourvu que l'on pose après les différentiations $i=0$,

$$S_n=\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\frac{\partial^n\{i\Phi'(t+i)[\varpi(t+i)]^n\}}{\partial i^n}. \tag{21}$$

Donc, pour déduire la valeur de S_n des formules (12) et (13), il suffira de prendre

$$\varphi(x)=x\Phi'(t+x),\qquad \psi(x)=\varpi(t+x). \tag{22}$$

On aura donc

$$S_n=\frac{1\pm\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi n}}\Omega, \tag{23}$$

la valeur de Ω étant donnée par l'équation

$$\omega\Phi'(t+\omega)\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega}\right]^n\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}=\Omega+\Omega_1\sqrt{-1}. \tag{24}$$

Si le module principal de la fonction $\frac{\varpi(t+x)}{x}$ correspondait à une valeur unique de x, on aurait simplement

$$S_n=\frac{1\pm\varepsilon}{\sqrt{2\pi n}}\omega\Phi'(t+\omega)\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega}\right]^n\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Dans le cas particulier où l'on suppose

$$\Phi'(t)=\varpi(t), \tag{26}$$

l'équation (24) se réduit à

$$\omega^2\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega}\right]^{n+1}\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}=\Omega+\Omega_1\sqrt{-1}. \tag{27}$$

Exemple. — Appliquons les formules (23) et (27) au cas où l'on a

$$\varpi(t)=c\sin t. \tag{28}$$

Dans ce cas, on tire de la formule (6), en y remplaçant $\psi(x)$ par $\varpi(t+x)$,

$$(29)\qquad \frac{\omega\cos(t+\omega)}{\sin(t+\omega)}=1.$$

On trouve, de plus,

$$(30)\qquad \frac{\varpi(t+\omega)}{\omega}=c\,\frac{\sin(t+\omega)}{\omega},$$

$$(31)\qquad \frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)}=-\frac{1}{\omega^2}.$$

Le second membre de la formule (31) devant avoir une partie réelle positive, la valeur de ω, tirée de l'équation (29), doit nécessairement être imaginaire. Cela posé, la formule (27) donnera

$$(32)\qquad \frac{[c\sin(t+\omega)]^{n+1}}{\omega^{n-1}}\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\Omega+\Omega_1\sqrt{-1}.$$

Si l'on fait, en particulier, $t=\frac{\pi}{2}$, on vérifiera l'équation (29) en prenant

$$(33)\qquad \omega=r\sqrt{-1},\qquad \frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}}=\frac{1}{r},$$

et l'on tirera de la formule (32)

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}\Omega+\Omega_1\sqrt{-1}&=\left(c\,\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}r\left(-\sqrt{-1}\right)^{n-1}\\ &=\left(c\,\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}r\left(\cos\frac{n-1}{2}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{n-1}{2}\pi\right).\end{aligned}\right.$$

Donc, par suite,

$$(35)\qquad \Omega=r\left(c\,\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}\cos\frac{n-1}{2}\pi;$$

et la formule (23) donnera

$$(36)\qquad S_n=\frac{(1\pm\varepsilon)2r}{\sqrt{2\pi n}}\left(c\,\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}\cos\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi,$$

ce que l'on savait déjà.

Post-Scriptum. — On peut aisément calculer à l'aide des formules précédentes la valeur approchée de la différence finie $\Delta^m s^n$, lorsque m et n sont des nombres entiers, et que, les valeurs de m, n, s étant très considérables, les deux rapports $\frac{m}{n}=\mu$, $\frac{s}{n}=\varsigma$ conservent des valeurs finies. En effet, on a identiquement, en posant $i=0$ après les différentiations,

$$(1)\qquad \Delta^m s^n=\frac{\partial^n\left(e^{(m+s)i}-\frac{m}{1}e^{(m+s-1)i}+\ldots\right)}{\partial i^n}=\frac{\partial^n[e^{si}(e^i-1)^m]}{\partial i^n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\qquad \Delta^m s^n=1.2.3\ldots\ldots n\,S_n,$$

la valeur de S_n étant donnée par l'équation

$$(3)\qquad S_n=\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\,\frac{\partial^n[e^{\varsigma i}(e^i-1)^\mu]^n}{\partial i^n}.$$

D'ailleurs, pour faire coïncider cette valeur de S_n avec celle que fournit l'équation (1) du paragraphe III, il suffit de poser

$$(4)\qquad \varphi(x)=1,\qquad \psi(x)=e^{\varsigma x}(e^x-1)^\mu=e^{\frac{sx}{n}}(e^x-1)^{\frac{m}{n}}.$$

Alors l'équation (6) du paragraphe III se réduit à

$$(5)\qquad \frac{s}{n}+\frac{m}{n}\,\frac{1}{1-e^{-\omega}}-\frac{1}{\omega}=0,$$

et la formule (11) du même paragraphe donne

$$(6)\qquad S_n=\frac{1\pm\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{\varsigma\omega}(e^\omega-1)^m}{\omega^{n+1}}\left[\frac{n}{\omega^2}-\frac{m}{\left(e^{\frac{\omega}{2}}-e^{-\frac{\omega}{2}}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

ω étant la racine réelle de l'équation (5). Comme on a d'ailleurs sensiblement, pour de très grandes valeurs de n,

$$(7)\qquad \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=\sqrt{2\pi},$$

on tirera de la formule (2) combinée avec les équations (6) et (7)

$$(8)\qquad \Delta^m s^n = (1 \pm \varepsilon)\left(\frac{n}{\omega}\right)^{n+1} e^{s\omega - n}(e^{\omega} - 1)^m \left[\frac{n^2}{\omega^2} - \frac{mn}{\left(e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

L'équation (8) coïncide avec une formule donnée par M. Laplace, et dont j'ai présenté une démonstration nouvelle dans le Mémoire sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies. Il est d'ailleurs facile de s'assurer : 1° que cette formule subsiste dans le cas même où n cesse d'être un nombre entier; 2° que, dans le cas où s devient négatif, elle fournit, non plus la valeur de la différence finie

$$(9)\qquad \Delta^m s^n = (m+s)^n - \frac{m}{1}(m+s-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2}(m+s-2)^n + \ldots,$$

mais seulement la partie de cette différence qui renferme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de quantités positives.

MÉMOIRE

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DE $f(\zeta)$ SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES DE h,

ζ ÉTANT UNE RACINE DE L'ÉQUATION

$$(1)\qquad z - x - h\varpi(z) = 0.$$

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VIII, p. 130; 1829.

§ I$^{\text{er}}$.

Si l'on désigne par ζ une racine de l'équation (1), on aura

$$(2)\qquad f(\zeta) = \mathcal{E}\frac{1 - h\varpi'(z)}{((z - x - h\varpi(z)))} f(z),$$

le signe $\mathcal{E}$ se rapportant à la seule racine que l'on considère. D'ailleurs

$$(3)\qquad \frac{1 - h\varpi'(z)}{z - x - h\varpi(z)} = \frac{\partial\, \mathrm{l}[z - x - h\varpi(z)]}{\partial z}.$$

De plus, si l'on pose

$$(4)\qquad \mathrm{l}[z - x - h\varpi(z)] = \mathrm{l}(z - x) - \frac{h\varpi(z)}{z - x} - \frac{1}{2}\frac{h^2[\varpi(z)]^2}{(z - x)^2} - \ldots - \frac{1}{n}\frac{h^n[\varpi(z)]^n}{(z - x)^n} + \varphi(z),$$

on trouvera, en différentiant par rapport à z,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1 - h\varpi'(z)}{z - x - h\varpi(z)} &= \frac{1}{z - x} - h\frac{\partial\left[\frac{\varpi(z)}{z - x}\right]}{\partial z} - \frac{h^2}{2}\frac{\partial\left[\frac{\varpi(z)}{z - x}\right]^2}{\partial z} - \ldots - \frac{h^n}{n}\frac{\partial\left[\frac{\varpi(z)}{z - x}\right]^n}{\partial z} + \varphi'(z) \\ &= \frac{1}{(z - x)}\left\{1 + \frac{h\varpi(z)}{z - x} + \ldots + \left[\frac{h\varpi(z)}{z - x}\right]^n\right\} \\ &\quad - \frac{h\varpi'(z)}{z - x}\left\{1 + \ldots + \left[\frac{h\varpi(z)}{z - x}\right]^{n-1}\right\} + \varphi'(z), \end{aligned}\right.$$

ou

$$1 - h\varpi'(z) = 1 - \left[\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right]^{n+1}$$
$$- h\varpi'(z)\left\{1 - \left[\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right]^{n}\right\} + \varphi'(z)[z - x - h\varpi(z)].$$

Donc

$$[z - x - h\varpi(z)]\varphi'(z) = \left[\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right]^{n+1} - h\varpi'(z)\left[\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right]^{n}$$
$$= \frac{h^{n+1}}{(z-x)^{n+1}}[\varpi(z) - (z-x)\varpi'(z)][\varpi(z)]^n,$$

$$(6) \qquad \varphi'(z) = \frac{h^{n+1}[\varpi(z)]^n[\varpi(z) - (z-x)\varpi'(z)]}{(z-x)^{n+1}[z - x - h\varpi(z)]};$$

et, par suite, si l'on fait pour abréger

$$(7) \qquad \frac{[\varpi(z)]^n[\varpi(z) - (z-x)\varpi'(z)]}{z - x - h\varpi(z)} f(z) = \frac{\chi(z)}{z-\zeta},$$

on aura

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{1 - h\varpi'(z)}{z - x - h\varpi(z)} f(z) &= \frac{f(z)}{z-x} - \frac{h}{1} f(z) \frac{\partial\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]}{\partial z} - \frac{h^2}{2} f(z) \frac{\partial\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]^2}{\partial z} - \ldots \\ &\quad - \frac{h^n}{n} f(z) \frac{\partial\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]^n}{\partial z} + \frac{h^{n+1}\chi(z)}{z-\zeta}\frac{1}{(z-x)^{n+1}}. \end{aligned}\right.$$

Concevons maintenant que l'on prenne les résidus des deux membres de l'équation (8) par rapport aux seules valeurs de z

$$z = x, \qquad z = \zeta.$$

Alors, en ayant égard à la formule

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E} f(z) \frac{\partial\left[\frac{\varpi(z)}{((z-x))}\right]^m}{\partial z} &= - \mathcal{E} f'(z) \frac{[\varpi(z)]^m}{(((z-x)^m))} \\ &= - \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}\{f'(x)[\varpi(x)]^m\}}{dx^{m-1}}, \end{aligned}\right.$$

on trouvera

$$(10) \quad \left\{\begin{aligned} f(\zeta) &= f(x) + \frac{h}{1} f(x)\varpi(x) + \frac{h^2}{1.2}\frac{d\{f'(x)[\varpi(x)]^2\}}{dx} + \ldots \\ &\quad + \frac{h^n}{1.2.3\ldots\ldots n}\frac{d^{n-1}\{f'(x)[\varpi(x)]^n\}}{dx^{n-1}} + \mathcal{E}\frac{h^{n+1}\chi(z)}{(((z-\zeta)(z-x)^{n+1}))}. \end{aligned}\right.$$

La série comprise dans le second membre de la formule (10) est la série de Lagrange. Si l'on nomme r_{n+1} le reste qui complète cette série prolongée jusqu'au terme qui renferme h^n, on aura

$$(11) \qquad r_{n+1} = \mathcal{E}\frac{\chi(z)}{(((z-\zeta)(z-x)^{n+1}))} h^{n+1},$$

la valeur de $\chi(z)$ étant donnée par la formule (7); et, par conséquent,

$$(12) \qquad r_n = \mathcal{E}\frac{\psi(z)}{(((z-x)^n(z-\zeta)))} h^n,$$

la valeur de $\psi(z)$ étant donnée par l'équation

$$(13) \qquad \frac{\psi(z)}{z-\zeta} = \frac{[\varpi(z)]^{n-1}[\varpi(z) - (z-x)\varpi'(z)]}{z - x - h\varpi(z)} f(z).$$

§ II.

Pour obtenir, sous forme d'intégrale définie, la valeur de r_n, il suffit de remarquer qu'on a généralement

$$(14) \quad \left\{\begin{aligned} \psi(z) &= \psi(x) + \frac{z-x}{1}\psi'(x) + \ldots + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\psi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[z - u(z-x)]\,du. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on substitue la valeur précédente de $\psi(z)$ dans l'équation (12), en observant que l'on a, pour toutes les valeurs entières et positives de m,

$$\mathcal{E}\frac{1}{(((z-x)^m(z-\zeta)))} = 0,$$

on trouvera

$$(15)\qquad r_n = \frac{h^n}{1.2.3.\ldots.(n-1)} \mathcal{E} \frac{\int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[z-u(z-x)]\,du}{((z-\zeta))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(16)\qquad r_n = \frac{h^n}{1.2.3.\ldots.(n-1)} \int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[\zeta-u(\zeta-x)]\,du.$$

Ainsi, pour obtenir le reste r_n de la série de Lagrange, il suffit de multiplier le rapport

$$(17)\qquad \frac{h^n}{(\zeta-x)^n}$$

par l'expression

$$(18)\qquad \frac{(\zeta-x)^n}{1.2.3.\ldots.(n-1)} \int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[\zeta-u(\zeta-x)]\,du,$$

qui représente le reste de la série à laquelle on parvient quand on développe $\psi(\zeta)=\psi(x+\zeta-x)$ suivant les puissances ascendantes de $\zeta-x$. Effectivement $f(\zeta)$ est ce que devient le produit

$$(19)\qquad \frac{h^n}{(\zeta-x)^n}\psi(z) = \frac{h}{\zeta-x}\left[\frac{\varpi(z)}{\varpi(\zeta)}\right]^{n-1} \frac{z-\zeta}{z-x-h\varpi(z)}[\varpi(z)-(z-x)\varpi'(z)]f(z),$$

quand on y pose $z=\zeta$, puisque alors ce même produit se réduit à

$$(20)\qquad \frac{h}{\zeta-x}\,\frac{1}{1-h\varpi'(\zeta)}[\varpi(\zeta)-(\zeta-x)\varpi'(\zeta)]f(\zeta)=f(\zeta).$$

De plus, il est facile de s'assurer que

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{h^n}{(\zeta-x)^n}\left[\psi(x)+\frac{\zeta-x}{1}\psi'(x)+\ldots+\frac{(\zeta-x)^{n-1}}{1.2.3.\ldots.(n-1)}\psi^{(n-1)}(x)\right]\\ &\quad = f(x)+\frac{h}{1}f'(x)\varpi(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-2}\{f'(x)[\varpi(x)]^{n-1}\}}{dx^{n-2}}. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, par exemple, si l'on pose $n=1$, on aura

$$\frac{h}{\zeta-x}\psi(x) = \frac{h}{\zeta-x}\cdot\frac{x-\zeta}{-h\varpi(x)}\varpi(x)f(x)=f(x).$$

Si l'on pose $n=2$, on trouvera

$$\frac{h^2}{(\zeta-x)^2}\left[\psi(x)+\frac{\zeta-x}{1}\psi'(x)\right]=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)\varpi(x)+\ldots.$$

Ajoutons que la valeur de r_n, donnée par l'équation (16), peut être présentée sous la forme

$$(22)\qquad r_n=\frac{h^n}{1.2.3.\ldots.n}\psi^{(n)}(s),$$

s désignant une quantité comprise entre les limites x et ζ.

Il est encore essentiel de remarquer que l'on a généralement

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varpi(z)-(z-x)\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)} = \frac{1}{h}\,\frac{h\varpi(z)-h(z-x)\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}\\ &\quad = \frac{1}{h}\left[(z-x)\frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}-1\right]; \end{aligned}\right.$$

puis, en nommant

$$\zeta,\quad \zeta_1,\quad \zeta_2,\quad \ldots$$

les diverses racines de l'équation $z-x-h\varpi(z)=0$, et supposant cette équation algébrique,

$$(24)\qquad \frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{1}{z-\zeta_1}+\frac{1}{z-\zeta_2}+\ldots.$$

Cela posé, en ayant égard à l'équation (23), on tirera de la formule (13)

$$(25)\qquad \psi(z)=\frac{z-\zeta}{h}\left[(z-x)\frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}-1\right][\varpi(z)]^{n-1}f(z);$$

et l'on trouvera encore, en ayant égard à la formule (24),

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{h}\left[\zeta-x+(z-x)\left(\frac{z-\zeta}{z-\zeta_1}+\frac{z-\zeta}{z-\zeta_2}+\ldots\right)\right][\varpi(z)]^{n-1}f(z)\\ &= [\varpi(\zeta)][\varpi(z)]^{n-1}f(z)\\ &\quad + \frac{z-x}{h}\left(\frac{z-\zeta}{z-\zeta_1}+\frac{z-\zeta}{z-\zeta_2}+\ldots\right)[\varpi(z)]^{n-1}f(z). \end{aligned}\right.$$

§ III.

Il est facile de calculer directement la somme

$$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)\varpi(x)+\frac{h^2}{1.2}\frac{d\{f'(x)[\varpi(x)]^2\}}{dx}+\ldots \tag{27}$$

dans le cas où, la série

$$f(x),\quad \frac{h}{1}f'(x)\varpi(x),\quad \frac{h^2}{1.2}\frac{d\{f'(x)[\varpi(x)]^2\}}{dx},\quad \ldots, \tag{28}$$

étant convergente, les fonctions $f(x)$, $\varpi(x)$ sont elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Pour y parvenir, supposons d'abord $f(x)=x$, et faisons

$$X=x+\frac{h}{1}\varpi(x)+\frac{h^2}{1.2}\frac{d[\varpi(x)]^2}{dx}+\ldots. \tag{29}$$

On tirera de l'équation (29) multipliée plusieurs fois de suite par elle-même, en ayant égard à une formule établie dans le premier Volume des *Exercices de Mathématiques* (p. 52) [1],

$$\left\{\begin{aligned}
X^2&=x^2+\frac{h}{1}[2x\varpi(x)] &&+\frac{h^2}{1.2}\frac{d\{2x[\varpi(x)]^2\}}{dx}&&+\ldots,\\
X^3&=x^3+\frac{h}{1}[3x^2\varpi(x)] &&+\frac{h^2}{1.2}\frac{d\{3x^2[\varpi(x)]^2\}}{dx}&&+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X^n&=x^n+\frac{h}{1}[nx^{n-1}\varpi(x)]&&+\frac{h^2}{1.2}\frac{d\{nx^{n-1}[\varpi(x)]^2\}}{dx}&&+\ldots,
\end{aligned}\right. \tag{30}$$

n étant un nombre entier quelconque; puis, en supposant

$$\varpi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

et ajoutant les équations (29) et (30) respectivement multipliées par a_1, a_2, a_3, ..., on trouvera

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VI, p. 71, 72.

$$\left\{\begin{aligned}
\varpi(X)&=\varpi(x)+\frac{h}{1}\varpi'(x)\varpi(x)+\frac{h^2}{1.2}\frac{d\{\varpi'(x)[\varpi(x)]^2\}}{dx}+\ldots\\
&=\varpi(x)+\frac{h}{1.2}\frac{\partial[\varpi(x)]^2}{\partial x}+\frac{h^2}{1.2.3}\frac{d^2[\varpi(x)]^3}{dx^2}+\ldots=\frac{1}{h}(X-x),
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

et, par suite, X sera une racine de l'équation

$$z-x-h\varpi(z)=0, \tag{1}$$

puisqu'on aura

$$X-x-h\varpi(X)=0. \tag{32}$$

La valeur de X étant déterminée comme on vient de le dire, si l'on suppose maintenant

$$f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots, \tag{33}$$

on tirera des formules (29) et (30) respectivement multipliées par b_0, b_1, b_2, ...

$$f(X)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)\varpi(x)+\frac{h^2}{1.2}\frac{d\{f'(x)[\varpi(x)]^2\}}{dx}+\ldots. \tag{34}$$

§ IV.

Si l'on pose, dans l'équation (10), $f(z)=z$, et si l'on admet que le reste r_n déterminé par la formule (22) décroisse indéfiniment avec $\frac{1}{n}$, on aura

$$\zeta=x+\frac{h}{1}\varpi(x)+\frac{h^2}{1.2}\frac{d[\varpi(x)]^2}{dx}+\ldots. \tag{35}$$

Si l'on suppose, en particulier,

$$\varpi(x)=x^m,$$

m étant un nombre quelconque, l'équation (1) deviendra

$$z-x-hz^m=0, \tag{36}$$

et la formule (35) donnera

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta &= x + \frac{h}{1}x^m + \frac{h^2}{1.2}\frac{dx^{2m}}{dx} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^2x^{3m}}{dx^2} + \ldots \\ &= x + \frac{1}{1}hx^m + \frac{2m}{1.2}h^2x^{2m-1} + \frac{3m(3m-1)}{1.2.3}h^3x^{3m-2} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Or, la série, comprise dans le second membre de l'équation (37), aura pour terme général

$$(38)\quad \frac{nm(nm-1)\ldots(nm-n+2)}{1.2.3\ldots n}h^n x^{nm-n+1},$$

et, si l'on nomme u_n ce terme général, on trouvera, pour de grandes valeurs de n,

$$(39)\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}\,\frac{(nm+m)(nm+m-1)\ldots(nm+1)}{(nm-n+2)\ldots(nm-n+m)}hx^{m-1},$$

ou, à très peu près,

$$(40)\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}hx^{m-1}.$$

Il est aisé d'en conclure que, si m est un nombre entier, la série, comprise dans le second membre de la formule (37), sera convergente toutes les fois que la valeur numérique du produit

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}hx^{m-1}$$

sera inférieure à l'unité. Alors, la somme de la série sera très certainement une racine réelle de l'équation trinome $z - x - hz^m = 0$.

EXTRAIT DU MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES (1).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 97; 1830.

J'ai montré, dans ce Mémoire, comment les formules que j'avais déduites de la théorie des intégrales singulières pouvaient être appliquées à l'intégration des équations différentielles linéaires, des équations aux différences finies et des équations aux différences partielles. Les formules que j'ai présentées dans les trois premiers paragraphes du Mémoire ont été insérées dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Je vais transcrire ici celles auxquelles j'étais parvenu dans le quatrième paragraphe, et qui sont relatives à l'intégration des équations aux différences partielles, linéaires, mais à coefficients variables.

J'ai donné dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (2) une formule que l'on peut écrire comme il suit :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &f(\mu_0, \nu_0, \varpi_0, \ldots) + f(\mu_1, \nu_1, \varpi_1, \ldots) + \ldots \\ &\quad = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots e^{\alpha M\sqrt{-1}}e^{\beta N\sqrt{-1}}\ldots\sqrt{L^2}\,f(\mu, \nu, \varpi, \ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d\beta\,d\nu\,d\gamma\,d\varpi\ldots. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule M, N, ... sont des fonctions quelconques des variables μ, ν, ϖ, ...; n désigne le nombre de ces mêmes variables

(1) Présenté à l'Académie royale des Sciences, le 26 mai 1823.

(2) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. I, p. 302.

et L le dénominateur commun des fractions qui représentent les valeurs de $p, q, r, \ldots$ tirées des équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &p\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}+q\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\nu}+r\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\varpi}+\ldots=1,\\ &p\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\mu}+q\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\nu}+r\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\varpi}+\ldots=1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Enfin, $\mu_0, \nu_0, \varpi_0, \ldots; \mu_1, \nu_1, \varpi_1, \ldots$ désignent les divers systèmes de valeurs de $\mu, \nu, \varpi, \ldots$ propres à résoudre les équations simultanées

$$(3)\qquad \mathrm{M}=0,\qquad \mathrm{N}=0,\qquad \ldots,$$

et composés de valeurs de μ renfermées entre les limites μ', μ''; de valeurs de ν renfermées entre les limites $\nu', \nu'', \ldots$. Dans le cas particulier où l'on suppose

$$(4)\qquad \mathrm{M}=x-u,\qquad \mathrm{N}=y-v,\qquad \ldots,$$

le nombre des variables $x, y, z, \ldots$ étant égal à n, et $u, v, \ldots$ représentant des fonctions des variables $\mu, \nu, \varpi, \ldots$, on tire de la formule (1)

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(x,y,z,\ldots)\\ &=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots e^{(x-u)\alpha\sqrt{-1}}e^{(y-v)6\sqrt{-1}}\ldots\sqrt{\mathrm{L}^2}\,\mathrm{F}(u,v,\ldots)\,d\alpha\,d\mu\,d6\,d\nu\ldots. \end{aligned}\right.$$

Dans cette dernière formule, la fonction $\mathrm{F}(u,v,\ldots)$ remplace la fonction $f(\mu,\nu,\varpi,\ldots)$; $\mu', \mu'', \ldots; \nu', \nu'', \ldots$, sont choisies de manière que les valeurs correspondantes de $u, v, \ldots$ puissent être considérées comme des limites inférieures et supérieures des valeurs attribuées aux variables $x, y, z, \ldots$ et L désigne le dénominateur commun des valeurs de $p, q, r, \ldots$, tirées des équations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &p\frac{\partial u}{\partial\mu}+q\frac{\partial u}{\partial\nu}+r\frac{\partial u}{\partial\varpi}+\ldots=0,\\ &p\frac{\partial v}{\partial\mu}+q\frac{\partial v}{\partial\nu}+r\frac{\partial v}{\partial\varpi}+\ldots=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ajoutons que, dans les formules (1) et (5), on pourrait, au lieu de $\alpha\sqrt{-1}$, $6\sqrt{-1}$, écrire partout $a+\alpha\sqrt{-1}$, $b+6\sqrt{-1}, \ldots$, a, b désignant des constantes choisies arbitrairement.

Concevons maintenant que

$$\mathrm{K},\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \ldots,\ \mathrm{T}$$

étant des fonctions quelconques des variables $x, y, z, \ldots, t$, il s'agisse d'intégrer l'équation aux différences partielles

$$(7)\qquad \mathrm{K}\varphi+\mathrm{X}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathrm{Y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\ldots+\mathrm{T}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f(x,y,z,\ldots,t),$$

de manière que la variable principale φ se réduise à

$$(8)\qquad f_0(x,y,z,\ldots),$$

pour $t=t_0$. On présentera l'équation (7) sous la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K}\varphi+\Big[&\frac{\partial(\mathrm{X}\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{Y}\varphi)}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial(\mathrm{T}\varphi)}{\partial t}\\ &-\varphi\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}-\varphi\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}-\ldots-\varphi\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\Big]=f(x,y,z,\ldots,t), \end{aligned}\right.$$

et la valeur inconnue de φ sous la forme

$$(10)\quad \varphi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\ldots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}e^{6(y-v)\sqrt{-1}}\ldots\psi\,d\alpha\,d\mu\,d6\,d\nu\ldots,$$

$u, v, \ldots, \psi$ étant des quantités que l'on supposera fonctions des variables $\mu, \nu, \ldots$ et t. Soient d'ailleurs

$$\mathrm{S},\ \mathrm{U},\ \mathrm{V},\ \ldots,\ \mathrm{W}$$

ce que deviennent

$$\mathrm{K},\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \ldots,\ \mathrm{T},$$

quand on y remplace x par u, y par $v, \ldots$. On tirera des équations (5) et (10)

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
K\varphi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \mathrm{S}\psi\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,\\
X\varphi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \mathrm{U}\psi\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,\\
Y\varphi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \mathrm{V}\psi\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
T\varphi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \mathrm{W}\psi\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

et

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi\frac{\partial X}{\partial x} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \psi\frac{\partial U}{\partial u}\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,\\
\varphi\frac{\partial Y}{\partial y} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \psi\frac{\partial V}{\partial t}\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\varphi\frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \psi\frac{\partial W}{\partial t}\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots.
\end{aligned}\right.
$$

Enfin, on aura

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&f(x, y, z, \ldots, t)\\
&\quad = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-u)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-v)\sqrt{-1}}\cdots \sqrt{\mathrm{L}^2}\, f(u, v, \ldots, t)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots.
\end{aligned}\right.
$$

Cela posé, on satisfera évidemment à l'équation (7), en posant

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\left(U - W\frac{\partial u}{\partial t}\right)\alpha\sqrt{-1} + \left(V - W\frac{\partial v}{\partial t}\right)\beta\sqrt{-1} + \ldots\right.\\
&\qquad\qquad \left. + S - \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} - \ldots\right]\psi + W\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{\mathrm{L}^2}\, f(u, v, \ldots, t).
\end{aligned}\right.
$$

Pour que cette dernière équation se vérifie, sans que u, v, ... deviennent fonctions de α, β, ..., il est nécessaire que l'on ait

$$
(15)\qquad U - W\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad V - W\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad \ldots,
$$

et

$$
(16)\qquad \left(S - \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} - \ldots\right)\psi + W\frac{\partial \psi}{\partial t} = f(u, v, \ldots, t)\sqrt{\mathrm{L}^2}.
$$

Si l'on veut, en outre, que φ se réduise à

$$
(17)\quad f_0(x, y, \ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''}\cdots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\cdots f_0(\mu, \nu, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\ldots,
$$

pour $t = t_0$, il suffira d'admettre que cette supposition réduit les valeurs de u, v, ..., ψ à celles que déterminent les formules

$$
(18)\qquad u = \mu, \qquad v = \nu, \qquad \psi = f_0(\mu, \nu, \varpi, \ldots).
$$

On devra donc alors intégrer les équations simultanées (15) et (16), de manière que les conditions (18) soient remplies pour $t = t_0$.

Pour appliquer à un exemple fort simple les principes que nous venons d'établir, supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$
x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \ldots + t\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\varphi = 0,
$$

de manière que l'on ait $\varphi = f_0(x, y, z, \ldots)$ pour $t = 0$. Dans ce cas particulier on trouvera

$$
\begin{array}{llllll}
X = x, & Y = y, & \ldots, & T = t, & K = -a, & f(x, y, \ldots, t) = 0,\\
U = u, & V = v, & \ldots, & W = t, & S = -a, & f(u, v, \ldots, t) = 0,
\end{array}
$$

et, par suite, les équations (15) et (16) deviendront

$$
u - t\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad v - t\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad \ldots,
$$

$$
-(a + n)\psi + t\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.
$$

En intégrant celles-ci de manière que les conditions (18) soient vérifiées pour $t = 1$, on trouvera

$$
u = \mu t, \qquad v = \nu t, \qquad \ldots, \qquad \psi = t^{a+n} f_0(\mu, \nu, \ldots).
$$

Cela posé, la formule (10) donnera

$$\begin{aligned}\varphi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n t^{a+n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \cdots e^{\alpha(x-\mu t)\sqrt{-1}} e^{6(y-\nu t)\sqrt{-1}} \cdots f_0(\mu, \nu, \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d6\, d\nu \ldots \\ &= t^a \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\nu'}^{\nu''} \cdots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}} e^{6(y-\nu)\sqrt{-1}} \cdots f_0\left(\frac{\mu}{t}, \frac{\nu}{t}, \cdots\right) d\alpha\, d\mu\, d6\, d\nu \ldots = t^a f_0\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \cdots\right),\end{aligned}$$

ce qui est exact.

Comme toute équation aux différences partielles du premier ordre peut être remplacée par une équation linéaire du même ordre qui renferme un plus grand nombre de variables, il est clair que la méthode précédente peut être appliquée à l'intégration de toutes les équations aux différences partielles du premier ordre.

En appliquant la même méthode à l'équation linéaire la plus générale du second ordre et à coefficients variables, et présentant cette équation sous la forme

$$K\varphi + \frac{\partial^2(P\varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Q\varphi)}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial t^2} + \frac{\partial(X\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(T\varphi)}{\partial t} = f(x, t),$$

on reconnaît qu'on peut toujours disposer de la fonction $f(x, t)$, de manière à la rendre intégrable.

Exemple. — On intègre par cette méthode l'équation

$$2\frac{\partial^2(x^2\varphi)}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2(xt\varphi)}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2(t^2\varphi)}{\partial t^2} = 0,$$

et l'on trouve pour son intégrale

$$\varphi = \frac{1}{t^2}\left[f_0\left(\frac{x}{t}\right) + f_1\left(\frac{x}{t^2}\right)\right].$$

EXTRAIT DU MÉMOIRE

SUR QUELQUES

SÉRIES ANALOGUES A LA SÉRIE DE LAGRANGE,

SUR

LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

ET SUR

LA FORMATION DIRECTE DES ÉQUATIONS

QUE PRODUIT L'ÉLIMINATION DES INCONNUES ENTRE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONNÉES ([1]).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 104; 1830.

Dans ce Mémoire, après avoir rappelé les formules que j'ai données dans le XIX[e] Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique* ([2]), et qui servent à convertir en intégrales définies les sommes des fonctions semblables des racines d'une équation quelconque, j'ai fait voir que le développement de ces intégrales en séries conduisait à plusieurs formules remarquables qui comprennent, comme cas particulier, la formule de Taylor et la série de Lagrange. Quelquefois les séries obtenues se composent d'un nombre fini de termes. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par a une quantité constante, par m un nombre entier, par $\varphi(x)$, $\mathrm{f}(x)$ deux fonctions entières de x, dont la seconde soit d'un degré inférieur à m et par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de l'équation

$$(x-a)^m - \mathrm{f}(x) = 0, \tag{1}$$

([1]) Lu à l'Académie royale des Sciences, le 9 août 1824.
([2]) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. I, p. 304.

on trouvera

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m) \\ \quad = m\varphi(a) + \dfrac{1}{1.2.3\ldots..(m-1)}\dfrac{d^{m-1}[\varphi'(a)\,\mathrm{f}(a)]}{da^{m-1}} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1.2.3\ldots..(2m-1)}\dfrac{d^{2m-1}\{\varphi'(a)[\mathrm{f}(a)]^2\}}{da^{2m-1}} \\ \quad + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{1.2.3\ldots..(3m-1)}\dfrac{d^{3m-1}\{\varphi'(a)[\mathrm{f}(a)]^3\}}{da^{3m-1}} + \ldots, \end{cases}$$

et il est clair que le terme général de la série comprise dans le second membre de l'équation (2), savoir

$$(3)\qquad \frac{1}{n}\,\frac{1}{1.2.3\ldots..(nm-1)}\,\frac{d^{nm-1}\{\varphi'(a)[\mathrm{f}(a)]^n\}}{da^{nm-1}},$$

s'évanouira, dès que le nombre $nm-1$ deviendra supérieur au degré de la fonction $\varphi'(x)[\mathrm{f}(x)]^n$.

Si l'on pose, en particulier,

$$(4)\quad \begin{cases} (x-a)^m - \mathrm{f}(x) = x^2 - 2rx\cos 2z + r^2 \\ \qquad = (x-r)^2 + 4rx\sin^2 z = (x+r)^2 - 4rx\cos^2 z, \end{cases}$$

l'équation (2) donnera

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi\left[r\left(\cos 2z + \sqrt{-1}\sin 2z\right)\right] + \varphi\left[r\left(\cos 2z - \sqrt{-1}\sin 2z\right)\right] \\ \quad = 2\varphi(r) - \dfrac{4r}{1}\,\dfrac{d[r\varphi'(r)]}{dr}\sin^2 z + \dfrac{\frac{1}{2}(4r)^2}{1.2.3}\,\dfrac{d^3[r^2\varphi'(r)]}{dr^3}\sin^4 z \\ \qquad - \dfrac{\frac{1}{3}(4r)^3}{1.2.3.4.5}\,\dfrac{d^5[r^3\varphi'(r)]}{dr^5}\sin^6 z + \ldots \\ \quad = 2\varphi(-r) + \dfrac{4r}{1}\,\dfrac{d[r\varphi'(-r)]}{dr}\cos^2 z - \dfrac{\frac{1}{2}(4r)^2}{1.2.3}\,\dfrac{d^3[r^2\varphi'(-r)]}{dr^3}\cos^4 z \\ \qquad + \dfrac{\frac{1}{3}(4r)^3}{1.2.3.4.5}\,\dfrac{d^5[r^3\varphi'(-r)]}{dr^5}\cos^6 z - \ldots. \end{cases}$$

En terminant le Mémoire j'ai indiqué les moyens de composer directement l'équation qui résulte de l'élimination de plusieurs inconnues entre des équations algébriques. Pour y parvenir, dans le cas où l'on considère seulement deux inconnues, il suffit de résoudre les deux problèmes que nous allons énoncer.

Problème I. — $\mathrm{F}(x)$ *désignant une fonction entière du degré* m, *et* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *les racines de l'équation*

$$(6)\qquad \mathrm{F}(x) = 0,$$

on demande la somme S_n *déterminée par la formule*

$$(7)\qquad \mathrm{S}_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n.$$

Solution. — Concevons que le coefficient de x^m dans $\mathrm{F}(x)$ ait été réduit à l'unité; posons, pour abréger,

$$(8)\qquad \mathrm{F}(x) = x^m - \mathrm{f}(x),$$

et désignons par k un nombre entier quelconque. Les deux expressions

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)}\{x^{mk} - [\mathrm{f}(x)]^k\} = \mathrm{F}'(x)\,\frac{x^{mk}-[\mathrm{f}(x)]^k}{x^m - \mathrm{f}(x)}$$

seront des fonctions entières de x, la première d'un degré inférieur à m, la seconde du degré $mk-1$. De plus, on aura évidemment

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x-x_m} \\ \quad = \dfrac{m}{x} + \dfrac{\mathrm{S}_1}{x^2} + \dfrac{\mathrm{S}_2}{x^3} + \ldots + \dfrac{\mathrm{S}_n}{x^{n+1}} + \dfrac{1}{x^{n+1}}\left(\dfrac{x_1^{n+1}}{x-x_1} + \ldots + \dfrac{x_m^{n+1}}{x-x_m}\right), \end{cases}$$

et l'on en conclura

$$(10)\quad \frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)}\{x^{mk} - [\mathrm{f}(x)]^k\} = x^{mk-n-1}(mx^n + \mathrm{S}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{S}_{n-1}x + \mathrm{S}_n) + \varpi(x),$$

$\varpi(x)$ étant un polynome déterminé par la formule

$$(11)\qquad \varpi(x) = x^{mk-n-1}\left(\frac{x_1^{n+1}}{x-x_1} + \ldots + \frac{x_m^{n+1}}{x-x_m}\right) - \frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)}[\mathrm{f}(x)]^k,$$

et, par conséquent, un polynome dont le degré ne pourra surpasser le plus grand des deux nombres $mk-n-2$, $(m-1)k-1$. Ce degré sera donc inférieur à $mk-n-1$, si l'on suppose $k =$ ou $> n+1$; et alors il suffira, pour obtenir S_n, de chercher dans le développement de l'expression (10) le coefficient de x^{mk-n-1}. Donc, si l'on désigne par ε une quantité infiniment petite, on trouvera

$$(12)\qquad S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-n-1)} \frac{d^{mk-n-1}}{d\varepsilon^{mk-n-1}} \left\{ F'(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{mk} - [f(\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\},$$

ε devant être réduit à zéro, après que l'on aura effectué les différentiations.

Corollaire I. — Comme le coefficient de x^{mk-n-1}, dans l'expression (10), est égal au coefficient de x^{mk-1} dans le produit qu'on obtient en multipliant cette expression par x^n, il en résulte que la formule (12) peut être remplacée par la suivante

$$(13)\qquad S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-1)} \frac{d^{mk-1}}{d\varepsilon^{mk-1}} \left\{ \varepsilon^n F'(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{mk} - [f(\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\}.$$

Corollaire II. — Soit $\varphi(x)$ une fonction entière du degré n. Comme la formule (13) subsiste dans le cas où l'on y remplace le nombre entier n par un nombre entier plus petit, on en tirera, en ayant égard à l'équation identique $F'(x) = mx^{m-1} - f'(x)$,

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_m) \\ &\quad = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-1)} \frac{d^{mk-1}}{d\varepsilon^{mk-1}} \left\{ \varphi(\varepsilon)[m\varepsilon^{m-1} - f'(\varepsilon)] \frac{\varepsilon^{mk} - [f(\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\}, \end{aligned} \right.$$

k désignant toujours un nombre entier égal ou supérieur à $n+1$. En développant le second membre de la formule (14) et supprimant lès termes qui se détruisent mutuellement, on en conclura

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_m) \\ &\quad = m\varphi(0) + \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}[\varphi'(\varepsilon) f(\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}} \\ &\qquad + \frac{1}{2} \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(2m-1)} \frac{d^{2m-1}\{\varphi'(\varepsilon)[f(\varepsilon)]^2\}}{d\varepsilon^{2m-1}} \\ &\qquad + \frac{1}{3} \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(3m-1)} \frac{d^{3m-1}\{\varphi'(\varepsilon)[f(\varepsilon)]^3\}}{d\varepsilon^{3m-1}} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Corollaire III. — Si l'on supposait la fonction $F(x)$ déterminée, non

par l'équation (8), mais par la suivante

$$(16)\qquad F(x) = (x-a)^m - f(x),$$

alors il faudrait à la formule (14) substituer celle-ci

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_m) \\ &\quad = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-1)} \frac{d^{mk-1}}{d\varepsilon^{mk-1}} \left\{ \varphi(a+\varepsilon)[m\varepsilon^{m-1} - f'(a+\varepsilon)] \frac{\varepsilon^{mk} - [f(a+\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

En développant le second membre de cette dernière on retrouvera l'équation (2).

Problème II. — *Étant données les sommes*

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} &S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \qquad S_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2, \qquad \ldots, \\ &\qquad\qquad S_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m, \end{aligned} \right.$$

on demande la valeur du produit $x_1 x_2 \ldots x_m$.

Soit toujours ε une quantité infiniment petite, et posons

$$(19)\qquad E = S_1 - \frac{\varepsilon}{2} S_2 + \frac{\varepsilon^2}{3} S_3 - \ldots \pm \frac{\varepsilon^{m-1}}{m} S_m .$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned} l[(1+\varepsilon x_1)(1+\varepsilon x_2)\ldots(1+\varepsilon x_m)] &= l(1+\varepsilon x_1) + \ldots + l(1+\varepsilon x_m) \\ &= \varepsilon E \mp \frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1}(S_{m+1} + \alpha), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(20)\qquad (1+\varepsilon x_1)(1+\varepsilon x_2)\ldots(1+\varepsilon x_m) = e^{\varepsilon E \mp \frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1}(S_{m+1}+\alpha)},$$

α devant s'évanouir avec ε. Si, maintenant, on développe les deux membres de la formule (20) suivant les puissances ascendantes de ε, on trouvera, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur à m,

$$(21)\qquad (1+\varepsilon x_1)(1+\varepsilon x_2)\ldots(1+\varepsilon x_m) = e^{\varepsilon E} = 1 + \frac{\varepsilon E}{1} + \frac{\varepsilon E^2}{1.2} + \ldots + \frac{\varepsilon^m E^m}{1.2.3\ldots\ldots m},$$

puis, en égalant de part et d'autre les coefficients de ε^m, on aura définitivement

$$(22)\quad \begin{cases} x_1 x_2 \ldots x_m = \dfrac{1}{1.2.3\ldots\ldots m}\,\dfrac{d^m(e^{\varepsilon E})}{d\varepsilon^m} \\ \quad = \dfrac{1}{1.2.3\ldots\ldots m}\left[E^m + \dfrac{m}{1}\,\dfrac{dE^{m-1}}{d\varepsilon} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\,\dfrac{d^2E^{m-2}}{d\varepsilon^2} + \ldots\right], \end{cases}$$

ε devant être réduit à zéro après les différentiations.

Corollaire. — Si, dans les formules (18) et (22), l'on remplace x_1, x_2, ..., x_m par $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_m)$, la dernière de ces formules suffira pour déterminer la valeur du produit

$$(23)\qquad \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_m)$$

quand on connaîtra les valeurs des sommes

$$\begin{array}{l} \varphi(x_1) \;+\; \varphi(x_2) \;+\ldots+\; \varphi(x_m), \\ [\varphi(x_1)]^2 + [\varphi(x_2)]^2 + \ldots + [\varphi(x_m)]^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [\varphi(x_1)]^m + [\varphi(x_2)]^m + \ldots + [\varphi(x_m)]^m. \end{array}$$

Or, ces mêmes sommes pouvant être facilement calculées à l'aide du premier problème, quand on connaît les fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$, nous devons conclure que, ces fonctions étant données, on formera sans peine le produit (23). D'ailleurs, lorsque les fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$ renferment, avec la variable x, d'autres variables y, z, ..., le produit (23) est précisément le premier membre de l'équation qui résulte de l'élimination de x entre les deux suivantes :

$$(24)\qquad \varphi(x) = 0, \qquad F(x) = 0.$$

Au reste, la méthode d'élimination que nous venons d'indiquer diffère peu de celle qui a été donnée par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour l'année 1769, et qui est également fondée sur la solution des problèmes I et II.

MÉMOIRE SUR L'ÉQUATION

QUI A POUR RACINES LES

MOMENTS D'INERTIE PRINCIPAUX D'UN CORPS SOLIDE,

ET SUR

DIVERSES ÉQUATIONS DU MÊME GENRE [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 111; 1830.

On sait que la détermination des axes d'une surface du second degré, ou des axes principaux et des moments d'inertie d'un corps solide dépend d'une équation du troisième degré, dont les trois racines sont nécessairement réelles. Toutefois, les géomètres ne sont parvenus à démontrer la réalité des trois racines qu'à l'aide de moyens indirects, par exemple en ayant recours à une transformation de coordonnées dans l'espace, afin de réduire l'équation dont il s'agit à une autre équation qui soit du second degré seulement, ou en faisant voir que l'on arriverait à des conclusions absurdes si l'on supposait deux racines imaginaires. La question que je me suis proposée consiste à établir directement la réalité des trois racines, quelles que soient les valeurs des six coefficients renfermés dans l'équation donnée. La solution, qui mérite d'être remarquée à cause de sa simplicité, se trouve comprise dans un théorème que je vais énoncer.

Théorème I. — *Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de déterminer les moments d'inertie principaux d'un corps. Pour obtenir les*

[1] Lu à l'Académie royale des Sciences, le 20 novembre 1826.

limites des trois racines de l'équation qui sert à déterminer ces moments, il suffira de supprimer dans cette équation les termes qui s'évanouiraient si l'un des axes coordonnés coïncidait avec l'un des axes principaux. Alors on obtiendra une nouvelle équation qui sera immédiatement divisible par un facteur du premier degré, et pourra être ainsi réduite à une équation du second degré dont les deux racines seront réelles. Soient α, β *ces deux dernières racines, rangées par ordre de grandeur. Si, dans l'équation proposée, on substitue successivement à la variable les quatre valeurs*

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \infty,$$

on obtiendra quatre résultats alternativement positifs et négatifs. Donc la proposée aura trois racines réelles : l'une inférieure à la quantité α; *l'autre comprise entre les limites* α, β; *la troisième supérieure à* β.

La démonstration de ce théorème ne présente aucune espèce de difficulté. Ajoutons qu'il se trouve compris comme cas particulier dans un autre théorème plus général, et que je vais indiquer.

Théorème II. — *Si l'on nomme* s *la somme des carrés de* n *variables indépendantes* $x, y, z, u, \ldots,$ *et* r *une fonction homogène du second degré, composée avec ces mêmes variables, et si l'on cherche les valeurs maximum ou minimum du rapport* $\frac{r}{s}$, *la détermination de ces valeurs dépendra d'une équation du* $n^{\text{ième}}$ *degré dont toutes les racines sont réelles.*

La méthode que j'ai suivie pour arriver à la démonstration de ce théorème m'a encore fourni quelques autres propositions, parmi lesquelles je citerai la suivante :

Théorème III. — *Étant donnée une fonction homogène du second degré de plusieurs variables* $x, y, z, \ldots$ *on peut toujours leur substituer d'autres variables* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *liées à* $x, y, z, \ldots$ *par des équations linéaires tellement choisies que la somme des carrés de* $x, y, z, \ldots$ *soit équivalente à la somme des carrés de* $\xi, \eta, \zeta, \ldots,$ *et que la fonction donnée de* $x, y, z, \ldots$ *se transforme en une fonction de* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *homogène et du second degré, mais qui renferme seulement les carrés de ces dernières variables.*

Le dernier théorème entraîne évidemment plusieurs relations entre les coefficients des équations linéaires par lesquelles les variables ξ, η, ζ sont liées aux variables $x, y, z, \ldots.$ Ces relations sont semblables à celles qui existent entre les cosinus des angles que forment trois axes rectangulaires donnés avec les axes des coordonnées, supposés eux-mêmes rectangulaires.

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE MOLÉCULES

QUI S'ATTIRENT OU SE REPOUSSENT A DE TRÈS PETITES DISTANCES

ET SUR LA

THÉORIE DE LA LUMIÈRE (1).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 114; 1830.

Les équations aux différences partielles que j'ai données dans les 30e, 31e et 32e Livraisons des *Exercices de Mathématiques*, expriment le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances, et que l'on suppose très peu écartées des positions qu'elles occupaient dans un état d'équilibre. D'ailleurs, ces équations peuvent être facilement intégrées par les méthodes que j'ai indiquées dans le XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et dans le *Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de Physique mathématique;* et alors les valeurs des inconnues se trouvent représentées par des intégrales multiples, dans lesquelles entrent sous le signe $\int$ les fonctions qui expriment, à l'origine du mouvement, les déplacements et les vitesses des molécules mesurés parallèlement aux axes coordonnés. Or, ces intégrales fournissent le moyen d'assigner les lois, suivant lesquelles un ébranlement, primitivement produit en un point donné du système que l'on con-

(1) Lu à l'Académie royale des Sciences, le 12 janvier 1829.

sidère, se propagera dans tout le système. C'est ainsi que je suis parvenu aux résultats que je vais énoncer, et qui me paraissent dignes de fixer un moment l'attention des physiciens et des géomètres.

1° Si un système de molécules est tellement constitué que l'élasticité de ce système soit la même en tous sens, un ébranlement primitivement produit en un point quelconque se propagera de manière qu'il en résulte deux ondes sphériques animées de vitesses constantes, mais inégales. De ces deux ondes la première disparaîtra, si la dilatation initiale du volume se réduit à zéro, et alors, si l'on suppose les vibrations des molécules primitivement parallèles à un plan donné, elles ne cesseront pas d'être parallèles à ce plan.

2° Si un système de molécules est tellement constitué que l'élasticité reste la même autour d'un axe parallèle à une droite donnée, dans toutes les directions perpendiculaires à cet axe, les équations du mouvement renfermeront plusieurs coefficients dépendant de la nature du système; et l'on pourra établir entre ces coefficients une relation telle que la propagation d'un ébranlement, primitivement produit en un point du système, donne naissance à trois ondes dont chacune coïncide avec une surface du second degré. De plus, si l'on fait abstraction de celle des trois ondes qui disparaît avec la dilatation du volume quand l'élasticité redevient la même en tous sens, les surfaces des deux ondes restantes se réduiront au système d'une sphère et d'un ellipsoïde de révolution, cet ellipsoïde ayant pour axe de révolution le diamètre même de la sphère. L'accord remarquable de ce résultat avec le théorème d'Huygens sur la double réfraction de la lumière dans les cristaux à un seul axe, nous a paru assez important pour mériter d'être signalé, et nous croyons devoir en conclure que les équations du mouvement de la lumière sont renfermées dans celles qui expriment le mouvement d'un système de molécules très peu écarté d'une position d'équilibre.

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE

D'UNE

LOI DÉCOUVERTE PAR M. SAVART

ET RELATIVE AUX

VIBRATIONS DES CORPS SOLIDES OU FLUIDES [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 115; 1830.

J'ai donné dans les *Exercices de Mathématiques* les équations générales qui représentent le mouvement d'un corps élastique dont les molécules sont très peu écartées des positions qu'elles occupaient dans l'état naturel du corps, de quelque manière que l'élasticité varie dans les diverses directions. Ces équations qui servent à déterminer, en fonction du temps t et des coordonnées x, y, z, les déplacements ξ, η, ζ d'un point quelconque mesurés dans le sens de ces coordonnées, sont de deux espèces. Les unes se rapportent à tous les points du corps élastique, les autres aux points renfermés dans sa surface extérieure. Or, à l'inspection seule des équations dont il s'agit, on reconnaît immédiatement qu'elles continuent de subsister, lorsqu'on y remplace x par kx, y par ky, z par kz, ξ par $k\xi$, η par $k\eta$, ζ par $k\zeta$, k désignant une constante choisie arbitrairement, et lorsqu'en même temps on fait varier les forces accélératrices appliquées aux diverses molécules dans le rapport de 1 à $\frac{1}{k}$. Donc, si ces forces accélératrices sont nulles, il suffira de faire croître ou diminuer les dimensions du corps

[1] Lu à l'Académie royale des Sciences, le 12 janvier 1829.

solide, et les valeurs initiales des déplacements dans le rapport de 1 à k, pour que les valeurs générales de ξ, η, ζ et les durées des vibrations varient dans le même rapport. Donc, si l'on prend pour mesure du son rendu par un corps, par une plaque, ou par une verge élastique, le nombre des vibrations produites pendant l'unité de temps, ce son variera en raison inverse des dimensions du corps, de la plaque ou de la verge, tandis que ces dimensions croîtront ou décroîtront dans un rapport donné. Cette loi, découverte par M. Savart, s'étend aux sons rendus par une masse fluide contenue dans un espace fini, et se démontre alors de la même manière.

On prouverait encore de même que, si, les dimensions d'un corps venant à croître ou à diminuer dans un certain rapport, sa température initiale croît ou diminue dans le même rapport, la durée de la propagation de la chaleur variera comme le carré de ce rapport.

MÉMOIRE

SUR

LA TORSION

ET

LES VIBRATIONS TOURNANTES D'UNE VERGE RECTANGULAIRE [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 117; 1830.

A l'aide des principes que j'ai posés dans le troisième Volume des *Exercices de Mathématiques*, on peut déterminer non seulement les vibrations longitudinales et transversales, mais aussi les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire, et l'on parvient alors aux résultats que je vais indiquer.

Considérons une verge rectangulaire qui dans l'état naturel ait pour axe l'axe des x, et supposons que, chaque point de cet axe étant immobile, la verge soit tordue autour de ce même axe. Désignons par ρ la densité naturelle de la verge, par $2h$ et $2i$ ses deux épaisseurs; par ξ, η, ζ les déplacements d'un point de la verge, mesurés parallèlement aux axes des x, y, z; par A, F, E; F, B, D; E, D, C les projections algébriques des pressions que supportent au point (x, y, z), et du côté des coordonnées positives, des plans perpendiculaires à ces mêmes axes; par

$$\mathrm{E} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \tag{1}$$

ce que devient la fonction E, quand on suppose $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{D} = 0$,

[1] Lu à l'Académie royale des Sciences, le 9 février 1829.

$\mathrm{F} = 0$, $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0$, et par

$$\mathrm{F} = \mathrm{h}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) \tag{2}$$

ce que devient la fonction F quand on suppose $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{D} = 0$, $\mathrm{E} = 0$, $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0$. Enfin, soient

$$\rho\Omega^2 = \frac{8}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{h^2}{\mathrm{h}} + \frac{i^2}{\mathrm{i}}\right)\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{i^2}\right)}; \tag{3}$$

ψ l'angle de torsion, dans le plan perpendiculaire à l'axe des x, et correspondant à l'abscisse x; Y, Z les projections algébriques de la force accélératrice sur les axes des y et z dirigés dans le sens des épaisseurs $2h$, $2i$; et $\mathrm{Y}_{0,1}$, $\mathrm{Z}_{1,0}$ les valeurs de

$$\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z}, \quad \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial y}$$

correspondant à des valeurs nulles des coordonnées y, z. On aura, au bout d'un temps quelconque t, et pour une valeur quelconque de x,

$$\Omega^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{h^2\mathrm{Z}_{1,0} - i^2\mathrm{Y}_{0,1}}{h^2 + i^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{4}$$

On aura d'ailleurs, pour une extrémité fixe, $\psi = 0$ et, pour une extrémité libre, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$.

Si la force accélératrice est nulle, on trouvera simplement

$$\Omega^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Cette dernière formule est semblable à celle qui détermine les vibrations longitudinales. On en conclut, en représentant par n un nombre entier quelconque, par a la longueur de la verge rectangulaire et par $\mathfrak{N}$ le nombre des vibrations tournantes exécutées dans l'unité de temps,

$$\mathfrak{N} = \frac{n\Omega}{2a}. \tag{6}$$

Lorsque le son produit par les vibrations tournantes devient le plus grave possible, on a $n = 1$,

$$(7)\qquad \mathcal{M} = \frac{\Omega}{2a} = \left(\frac{2}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a\left(\frac{i^2}{\mathrm{i}} + \frac{h^2}{\mathrm{h}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on suppose la verge extraite d'un corps solide qui offre la même élasticité en tous sens, on aura

$$(8)\qquad \mathrm{h} = \mathrm{i};$$

et, par suite, en nommant f la valeur commune de h et de i, on trouvera

$$(9)\qquad \mathcal{M} = \left(\frac{2\mathrm{f}}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{hi}{a(i^2 + h^2)}.$$

Si les épaisseurs h, i deviennent égales, l'équation (9) donnera

$$(10)\qquad \mathcal{M} = \left(\frac{\mathrm{f}}{6\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a};$$

et, comme le nombre N des vibrations longitudinales les plus lentes sera déterminé par la formule

$$(11)\qquad \mathrm{N} = \left(\frac{5\mathrm{f}}{2\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2a},$$

on trouvera

$$(12)\qquad \frac{\mathrm{N}}{\mathcal{M}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{15} = 1,9364\ldots.$$

Enfin, si l'épaisseur $2i$ est très petite relativement à l'épaisseur $2h$, l'équation (6) donnera sensiblement

$$(13)\qquad \mathcal{M} = \left(\frac{2\mathrm{h}}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{ah}.$$

Si l'on considère la verge tordue non plus dans l'état de mouvement mais dans l'état d'équilibre, alors, au lieu de l'équation (5), on obtiendra la suivante :

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Ajoutons que, si l'on nomme K le moment du système des pressions ou tensions, supportées par un plan perpendiculaire à l'axe dont il s'agit, on aura

$$(15)\qquad \mathrm{K} = \frac{\frac{16}{3} h^3 i^3}{\frac{i^2}{\mathrm{i}} + \frac{h^2}{\mathrm{h}}} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Si K devient le moment de la force appliquée à une extrémité libre de la verge, on trouvera, en supposant l'autre extrémité fixe, et pour une abscisse quelconque x,

$$(16)\qquad \psi = \frac{3}{16} \frac{\mathrm{K}}{h^3 i^3}\left(\frac{i^2}{\mathrm{i}} + \frac{h^2}{\mathrm{h}}\right) x.$$

Des formules qui précèdent on déduit immédiatement les conclusions suivantes :

1° L'angle de torsion d'une verge rectangulaire qui offre une extrémité fixe et une extrémité libre, étant mesuré dans un plan perpendiculaire à l'axe de la verge, est en raison directe non seulement de la distance qui sépare ce plan de l'extrémité fixe, mais aussi du moment de la force appliquée à l'extrémité libre.

2° Si la section transversale de la verge varie en demeurant semblable à elle-même, l'angle de torsion variera en raison inverse du carré de l'aire de cette section, ou, ce qui revient au même, en raison inverse de la quatrième puissance de chaque épaisseur. Ces résultats, semblables à ceux que M. Poisson a obtenus, en considérant la torsion d'une verge cylindrique à base circulaire, extraite d'un corps dont l'élasticité est la même en tous sens, subsisteront pareillement pour une verge cylindrique ou prismatique à base quelconque.

3° Si l'une des épaisseurs de la verge devient très petite par rapport à l'autre, l'angle de torsion variera en raison inverse de la plus grande épaisseur et du cube de la plus petite.

4° Les sons produits par les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire ne varient pas, lorsque les deux épaisseurs de la verge croissent ou diminuent dans le même rapport. Cette proposition a été confirmée par des expériences de M. Savart.

5° Si l'une des épaisseurs de la verge devient très petite par rapport à l'autre, le son le plus grave, produit par des vibrations tournantes, sera en raison directe de la plus petite épaisseur de la verge, et en raison inverse de l'aire de la section faite par un plan perpendiculaire à cette épaisseur. Cette loi est encore une de celles que M. Savart a découvertes, et auxquelles il a été conduit par l'expérience. (*Voir* le Tome XXV des *Annales de Chimie et de Physique*.)

6° Si la verge est extraite d'un corps solide qui offre la même élasticité en tous sens, les sons correspondant aux vibrations tournantes seront en raison directe du produit des deux épaisseurs de la verge, et en raison inverse de la somme de leurs carrés.

7° Si, de plus, les deux épaisseurs deviennent égales, le son le plus grave, produit par des vibrations longitudinales, sera au son le plus grave produit par des vibrations tournantes dans le rapport de $\sqrt{15}$ à 2, ou de 1,9364 à l'unité.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE.

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. X, p. 293; 1831.

PREMIÈRE PARTIE (¹).

J'ai donné le premier, dans les *Exercices de Mathématiques* (troisième et quatrième Volume) (²), les équations générales d'équilibre ou de mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, en admettant que ces forces fussent représentées par des fonctions des distances entre les molécules; et j'ai prouvé que ces équations, qui renferment un grand nombre de coefficients dépendant de la nature du système, se réduisaient, dans le cas où l'élasticité redevenait la même en tous sens, à d'autres formules qui ne renferment qu'un seul coefficient, et qui avaient été primitivement obtenues par M. Navier. J'ai, de plus, déduit de ces équations celles qui déterminent les mouvements des plaques et des verges élastiques, quand on suppose que l'élasticité n'est pas la même en tous sens; et j'ai ainsi obtenu des formules qui comprennent, comme cas particuliers, celles que M. Poisson et d'autres géomètres avaient trouvées dans la supposition contraire. L'accord remarquable de ces diverses formules, et des lois qui s'en déduisent, avec les observations des physiciens, et spécialement avec les belles expériences de

(¹) Présentée et lue à l'Académie royale des Sciences, les 31 mai et 7 juin 1830.
(²) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, IX.

M. Savart, devait m'encourager à suivre les conseils de quelques personnes qui m'engageaient à faire, des équations générales que j'avais données, une application nouvelle à la théorie de la lumière. Ayant suivi ce conseil, j'ai été assez heureux pour arriver aux résultats que je vais exposer dans ce Mémoire, et qui me paraissent dignes de fixer un moment l'attention des physiciens et des géomètres.

Les trois équations aux différences partielles qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, renferment, avec le temps t et les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de l'espace, les déplacements ξ, η, ζ de la molécule $\mathfrak{M}$ qui coïncide, au bout du temps t, avec le point dont il s'agit; ces déplacements étant mesurés parallèlement aux axes des x, y, z. Les mêmes équations offriront vingt et un coefficients dépendant de la nature du système, si l'on fait abstraction des coefficients qui s'évanouissent, lorsque les masses m, m', m'' des diverses molécules sont deux à deux égales entre elles et distribuées symétriquement de part et d'autre de la molécule $\mathfrak{M}$ sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide. Enfin, ces équations seront du second ordre, c'est-à-dire qu'elles ne contiendront que des dérivées du second ordre des variables principales ξ, η, ζ; et l'on pourra, en considérant chaque coefficient comme une quantité constante, ramener leur intégration à celle d'une équation du sixième ordre, qui ne renfermera plus qu'une seule variable principale. Or, cette dernière pourra être facilement intégrée à l'aide des méthodes générales que j'ai données dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et dans le Mémoire *Sur l'application du calcul des résidus aux questions de Physique mathématique*. En appliquant ces méthodes au cas où l'élasticité du système reste la même en tous sens, et réduisant la valeur de la variable principale à la forme la plus simple, à l'aide d'un théorème établi depuis longtemps par M. Poisson, on obtient précisément les intégrales qu'a données ce géomètre dans les *Mémoires de l'Académie*. Mais, dans le cas général, la variable principale étant représentée par une intégrale définie sextuple, il fallait,

pour découvrir les lois des phénomènes, réduire cette intégrale sextuple à une intégrale d'un ordre moins élevé. Cette réduction m'a longtemps arrêté : mais je suis enfin parvenu à l'effectuer, pour l'équation aux différences partielles ci-dessus mentionnée, et même généralement pour toutes les équations aux différences partielles dans lesquelles les diverses dérivées de la variable principale, prises par rapport aux variables indépendantes x, y, z, t, sont des dérivées de même ordre. Alors, j'ai obtenu, pour représenter la variable principale, une intégrale définie quadruple, et j'ai pu rechercher les lois des phénomènes dont la connaissance devait résulter de l'intégration des équations proposées. Cette recherche a été l'objet du dernier Mémoire que j'ai eu l'honneur d'offrir à l'Académie, et qui renferme entre autres la proposition suivante :

Étant donnée une équation aux différences partielles dans laquelle toutes les dérivées de la variable principale relatives aux variables indépendantes x, y, z, t, sont de même ordre, si les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées prises par rapport au temps sont sensiblement nulles dans tous les points situés à une distance finie de l'origine des coordonnées, cette variable et ses dérivées n'auront plus de valeurs sensibles au bout du temps t, dans l'intérieur d'une certaine surface, et, par conséquent, les vibrations sonores, lumineuses, etc., qui peuvent être déterminées à l'aide de l'équation aux différences partielles, se propageront dans l'espace, de manière à produire une onde sonore, lumineuse, etc., dont la surface sera précisément celle que nous venons d'indiquer.

De plus, on obtiendra facilement l'équation de la surface de l'onde, en suivant la règle que je vais tracer.

Concevons que, dans l'équation aux différences partielles, on remplace une dérivée quelconque de la variable principale prise par rapport aux variables indépendantes x, y, z, t par le produit de ces variables élevées à des puissances dont les degrés soient marqués, pour chaque variable indépendante, par le nombre des différentiations qui lui sont relatives. La nouvelle équation que l'on obtiendra sera de la forme

$$F(x, y, z, t) = 0$$

et représentera une certaine surface courbe. Considérez maintenant le rayon vecteur mené de l'origine à un point quelconque de cette surface courbe; portez sur ce rayon vecteur, à partir de l'origine, une longueur égale au carré du temps divisé par ce même rayon; menez ensuite par l'extrémité de cette longueur un plan perpendiculaire à sa direction. Ce plan sera le plan tangent à la surface de l'onde, et, par conséquent, cette surface sera l'enveloppe de l'espace que traverseront les divers plans qu'on peut construire en opérant comme on vient de le dire. Au reste, on arrive encore aux mêmes conclusions, en suivant une autre méthode que je vais exposer en peu de mots, et que j'ai développée dans mes dernières Leçons au Collège de France.

Supposons que les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées prises par rapport au temps ne soient sensibles que pour les points situés à des distances très petites d'un certain plan mené par l'origine des coordonnées, et dépendent uniquement de ces distances. Cette même variable et ces dérivées ne seront sensibles, au bout du temps t, que dans le voisinage de l'un des plans parallèles, construits à l'aide de la règle que nous avons précédemment indiquée.

Par conséquent, si les vibrations sonores, lumineuses, etc. sont primitivement renfermées dans une onde plane, cette onde, que nous nommerons *élémentaire*, se divisera en plusieurs autres dont chacune se propagera dans l'espace, en restant parallèle à elle-même, avec une vitesse constante. Mais ces diverses ondes auront des vitesses de propagation différentes. Si, maintenant, on conçoit qu'au premier instant plusieurs ondes élémentaires soient renfermées dans des plans divers menés par l'origine des coordonnées, mais peu inclinés les uns sur les autres, et que les vibrations sonores, lumineuses, etc. soient assez petites pour rester insensibles dans chaque onde élémentaire prise séparément; alors, ces vibrations ne pouvant devenir sensibles que par la superposition d'un grand nombre d'ondes élémentaires, il est clair que les phénomènes relatifs à la propagation du son, de la lumière, etc. ne pourront être observés, au premier moment, que dans une très petite étendue autour de l'origine des coordonnées et, au bout du temps t, que dans le voisinage des diverses nappes de la surface qui sera touchée par toutes les ondes élémentaires. Or, cette dernière surface sera précisément la surface courbe dont nous avons parlé ci-dessus, et que l'on nomme généralement *surface des ondes*.

Cela posé, si l'on considère le mouvement de propagation des ondes planes, dans un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, on pourra prendre successivement pour variables principales trois déplacements rectangulaires d'une molécule $\mathfrak{M}$ mesurés parallèlement aux trois axes d'un certain ellipsoïde qui aura pour centre l'origine des coordonnées, et que l'on construira facilement dès que l'on connaîtra les coefficients dépendants de la nature du système proposé, et la direction du plan ABC, qui renfermait une onde plane au premier instant. Alors cette onde se divisera en six autres qui auront constamment la même épaisseur que la première et se propageront, avec des vitesses constantes, dans des plans parallèles à ABC. Ces ondes, prises deux à deux, auront des vitesses de propagation égales, mais dirigées en sens contraires. De plus, ces vitesses, mesurées suivant une droite perpendiculaire au plan ABC, pour les trois ondes qui se mouvront dans un même sens, seront constantes et respectivement égales aux quotients qu'on obtient en divisant l'unité par les trois demi-axes de l'ellipsoïde ci-dessus mentionné. Les points situés hors de ces ondes seront en repos et, si les trois demi-axes de l'ellipsoïde sont inégaux, le déplacement absolu et la vitesse absolue des molécules, dans une onde plane, resteront toujours parallèles à celui des trois axes de l'ellipsoïde qui sera réciproquement proportionnel à la vitesse de propagation de cette onde. Mais, si deux ou trois axes de l'ellipsoïde deviennent égaux, les ondes planes qui se propageront dans le même sens avec des vitesses réciproquement proportionnelles à ces axes, coïncideront, et la vitesse absolue de chaque molécule renfermée dans une onde plane sera, au bout d'un temps quelconque, parallèle aux droites suivant lesquelles les vitesses initiales se projetaient sur le plan mené par les deux axes égaux de l'ellipsoïde, ou même, si l'ellipsoïde se change en une sphère, aux directions de ces vitesses initiales.

Concevons, maintenant, qu'au premier instant plusieurs ondes planes, peu inclinées les unes sur les autres et sur un certain plan ABC, se rencontrent et se superposent en un certain point A. Le temps venant à croître, chacune de ces ondes se propagera dans l'espace, en donnant naissance, de chaque côté du plan qui la renfermait primitivement, à trois ondes semblables renfermées dans des plans parallèles, mais douées de vitesses de propagation différentes; par conséquent, le système d'ondes planes que l'on considérait d'abord se subdivisera en trois autres systèmes, et le point de rencontre des ondes qui feront partie d'un même système se déplacera suivant une certaine droite avec une vitesse de propagation distincte de celle des ondes planes. Donc, au bout d'un temps quelconque t, le point A se trouvera remplacé par trois autres points, dont les positions dans l'espace pourront être calculées pour une direction donnée du plan ABC, et les diverses positions que pourront prendre les trois points dont il s'agit, pour diverses directions primitivement attribuées au plan ABC, détermineront une surface courbe à trois nappes, dans laquelle chaque nappe sera constamment touchée par les ondes planes qui feront partie d'un même système. Or, cette surface courbe sera précisément celle dont nous avons déjà parlé ci-dessus, et que nous avons nommée *surface des ondes*.

Au reste, pour que la propagation des ondes planes puisse s'effectuer dans un corps élastique, il est nécessaire que les coefficients, ou du moins certaines fonctions des coefficients renfermés dans les équations aux différences partielles qui représentent le mouvement du corps élastique, restent positives. Dans le cas contraire, les ondes planes ne pourraient plus se propager, et l'on en serait averti par le calcul qui donnerait pour les vitesses de propagation des valeurs imaginaires.

Dans la théorie de la lumière, on désigne sous le nom d'*éther* le fluide impondérable que l'on considère comme étant le milieu élastique dans lequel se propagent les ondes lumineuses. Le point de rencontre d'un grand nombre d'ondes planes dont les plans sont peu inclinés les uns aux autres est celui dans lequel on suppose que la lumière peut être perçue par l'œil. La série des positions que ce point de rencontre prend dans l'espace, tandis que les ondes se déplacent, constitue ce qu'on nomme *un rayon lumineux;* et la vitesse de la lumière mesurée dans le sens de ce rayon doit être soigneusement distinguée : 1° de la vitesse de propagation des ondes planes; 2° de la vitesse propre des molécules éthérées. Enfin, l'on appelle *rayons polarisés* ceux qui correspondent à des ondes planes dans lesquelles les vibrations des molécules restent constamment parallèles à une droite donnée, quelles que soient les directions des vibrations initiales.

Pour plus de généralité, nous dirons que, dans un rayon lumineux, la lumière est polarisée parallèlement à une droite ou à un plan donné, lorsque les vibrations des molécules lumineuses seront parallèles à cette droite ou à ce plan, sans être parallèles dans tous les cas aux directions des vibrations initiales; et nous appellerons *plan de polarisation* le plan qui renfermera la direction du rayon lumineux, et celle des vitesses propres des molécules éthérées. Ces définitions s'accordent, comme on le verra plus tard, avec les dénominations reçues.

Cela posé, il résulte des principes ci-dessus établis que, en partant d'un point donné de l'espace, un rayon de lumière, dans lequel les vitesses propres des molécules ont des directions quelconques, se subdivisera généralement en trois rayons de lumière polarisée parallèlement aux trois axes d'un certain ellipsoïde. Mais chacun de ces rayons polarisés ne pourra plus être divisé par l'action du fluide élastique dans lequel la lumière se propage. De plus, le mode de polarisation dépendra de la constitution de ce fluide, c'est-à-dire de la distribution de ses molécules dans l'espace ou dans un corps transparent, et du plan qui renfermait primitivement les molécules vibrantes. Si la constitution du fluide élastique est telle que les vitesses de propagation des ondes planes deviennent imaginaires, cette propagation ne pourra plus s'effectuer, et le corps dans lequel le fluide éthéré se trouve compris deviendra ce qu'on nomme *un corps opaque*. Si le corps reste transparent, et si dans ce corps le fluide éthéré se trouve distribué de telle sorte que son élasticité demeure la même en tous sens autour d'un point quelconque, les trois rayons polarisés dans lesquels se subdivise généralement un rayon de lumière seront dirigés suivant la même droite; et, comme la vitesse de la lumière sera la même dans les deux premiers rayons, ceux-ci se confondront l'un avec l'autre. Il ne restera donc alors que deux rayons polarisés : l'un double, l'autre simple, ayant la même direction. Or, le calcul fait voir que dans le rayon simple la lumière sera polarisée suivant la direction dont il s'agit, tandis que dans le rayon double la lumière sera polarisée perpendiculairement à cette direction. Si les vibrations initiales des molécules lumineuses sont renfermées dans un plan perpendiculaire à la direction dont il s'agit, le rayon simple disparaîtra, et les vitesses propres des molécules dans le rayon double resteront constamment dirigées suivant des droites parallèles aux directions des vitesses initiales; de sorte qu'à proprement parler il n'y aura plus de polarisation. Alors aussi la vitesse de propagation de la lumière sera équivalente à la vitesse de propagation d'une onde plane, et la même en tous sens autour de chaque point. Or, la réduction de tous les rayons à un seul, et l'absence de toute polarisation dans les milieux où la lumière se propage en tous sens avec la même vitesse, étant des faits constatés par l'expérience, nous devons conclure de ce qui précède que dans ces milieux les vitesses propres des molécules éthérées sont perpendiculaires aux directions des rayons lumineux et comprises dans les ondes planes. Ainsi, l'hypothèse admise par Fresnel devient une réalité. Cet habile physicien, malheureusement enlevé aux sciences par une mort prématurée, a donc eu raison de dire que dans la lumière ordinaire les vibrations sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux directions des rayons. A la vérité, les idées de Fresnel sur cet objet ont été vivement combattues par un

illustre académicien dans plusieurs articles que renferment les *Annales de Chimie et de Physique*, et dont l'un est relatif au mouvement de deux fluides superposés. Suivant l'auteur de ces articles, les vibrations des molécules dans l'éther finiraient par être toujours sensiblement perpendiculaires aux surfaces des ondes que le mouvement produit en se propageant; et dès lors, la polarisation, telle qu'elle a été précédemment définie, deviendrait impossible et disparaîtrait complètement. Alors aussi la surface des ondes serait toujours un ellipsoïde et n'offrirait qu'une seule nappe, en sorte que, pour expliquer la double réfraction, on serait obligé de supposer deux fluides éthérés simultanément renfermés dans le même milieu. Mais on doit remarquer que l'auteur, comme il le dit lui-même, avait déduit ces diverses conséquences de l'intégration de l'équation connue aux différences partielles qui représente les mouvements des fluides élastiques, et de celle qu'on en déduit lorsqu'on suppose inégaux les trois coefficients des dérivées partielles de la variable principale. Or, ces équations ne paraissent point applicables à la propagation des ondes lumineuses dans un fluide éthéré, et l'accord remarquable de la théorie que je propose avec l'expérience me semble devoir confirmer l'assertion que j'ai déjà émise dans un précédent Mémoire sur le mouvement de la lumière : savoir, que les équations différentielles de ce mouvement sont comprises dans celles que renferment les 31^e^ et 32^e^ livraisons des *Exercices de Mathématiques*.

Dans la deuxième Partie de ce Mémoire que je me propose de lire à la séance prochaine, j'appliquerai les principes que je viens d'établir à la détermination des lois suivant lesquelles la lumière se propage dans les cristaux à un seul axe ou à deux axes optiques, et je montrerai comment on peut déduire de mes formules des règles propres à faire connaître les vitesses de propagation des ondes élémentaires, et les plans de polarisation des rayons lumineux. Lorsqu'on s'arrête à un premier degré d'approximation, ces règles s'accordent d'une manière digne de remarque avec celles que plusieurs savants ont déduites de l'expérience ou de l'hypothèse des ondulations, et, en particulier, avec celles que Fresnel a données dans son beau Mémoire sur la double réfraction. Seulement, il s'est trompé en admettant que les vibrations des molécules éthérées dans un rayon lumineux étaient sensiblement perpendiculaires au plan généralement nommé *plan de polarisation*. Dans la réalité, le plan de polarisation renferme la direction du rayon et celle des vibrations de l'éther. Un jeune géomètre, M. Blanchet, avait, de son côté, et même avant moi, déduit cette conséquence et les lois de la polarisation pour les cristaux à un seul axe optique des premières formules que j'avais données. Mais la nouvelle analyse dont j'ai fait usage ne laisse rien à désirer à cet égard, et s'étend à tous les cas possibles.

Je ferai voir encore dans la deuxième Partie du Mémoire que la pression est nulle dans le fluide éthéré qui propage les vibrations lumineuses, et je montrerai les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients renfermés dans les équations différentielles du mouvement des corps élastiques, pour que la surface de l'onde lumineuse acquière la forme indiquée par l'expérience. Enfin, dans une troisième Partie, je dirai comment on peut établir les lois de la réflexion et de la réfraction à la première ou à la seconde surface d'un corps transparent, et déterminer la proportion de lumière réfléchie ou réfractée. Ici encore, la théorie s'accorde parfaitement avec l'observation, et l'analyse me ramène aux lois que plusieurs physiciens ont déduites de l'expérience. Ainsi, en particulier, le calcul me fournit la loi de M. Brewster sur l'angle de la polarisation complète par réflexion et la loi de M. Arago sur la quantité de lumière réfléchie à la première ou à la seconde surface d'un milieu transparent. J'obtiens aussi les formules que Fresnel a insérées dans le dix-septième numéro des *Annales de Chimie et de Physique*, et qui suffiraient à elles seules pour constater la sagacité vraiment extraordinaire de cet illustre physicien.

Enfin, je rechercherai les moyens à l'aide desquels les physiciens pourront constater la réalité de la triple réfraction, ou, ce qui revient au même, l'existence du troisième rayon polarisé, traversant un milieu dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens.

DEUXIÈME PARTIE (1).

Ainsi qu'on l'a vu dans la première Partie de ce Mémoire, l'intégration des équations aux différences partielles que j'ai données dans les *Exercices*, comme propres à représenter le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, conduit directement à l'explication des divers phénomènes que présente la théorie de la lumière. Il y a plus : pour établir cette théorie, il n'est pas nécessaire de recourir aux intégrales générales des équations dont il s'agit. Il suffit de discuter les intégrales particulières qui expriment le mouvement de propagation d'une onde plane dans un milieu élastique. En effet, la sensation de lumière étant supposée produite par les vibrations des molécules d'un fluide éthéré, pour déterminer la direction et les lois suivant lesquelles de semblables vibrations, d'abord circonscrites dans des limites très resserrées, autour d'un certain point O, se propageraient à travers ce fluide, il suffit de considérer au premier instant un grand nombre d'ondes planes qui se superposent dans le voisinage du point O, et d'admettre que, les plans de ces ondes étant peu inclinés les uns sur les autres, les vibrations des molécules sont assez petites pour rester insensibles dans chaque onde prise séparément, mais deviennent sensibles par la superposition indiquée. Or, le calcul nous a fait voir que dans un fluide éthéré, dont l'élasticité n'est pas la même en tous sens, chaque onde plane se subdivise généralement en trois autres de même épaisseur, comprises dans des plans parallèles, mais propagées avec des vitesses différentes, de chaque côté du plan qui renfermait l'onde initiale. Nous en avons conclu qu'un système d'ondes planes, superposées d'abord dans le voisinage d'un point donné O, se subdivise en trois systèmes d'ondes qui viennent successivement se superposer en différents points de l'espace, et nous avons nommé *rayon lumineux* la droite qui renferme, pour l'un des systèmes, tous les points de super-

(1) Présentée à l'Académie, le 14 juin 1830.

position. Nous avons ainsi montré que trois rayons lumineux résultent généralement de vibrations moléculaires qui ne s'étendaient d'abord qu'à une très-petite distance autour du point O. Nous avons d'ailleurs reconnu que, dans chacun de ces rayons lumineux, les vibrations des molécules éthérées demeuraient constamment parallèles à l'un des trois axes d'un certain ellipsoïde, et qu'en conséquence, dans les trois rayons, la lumière était polarisée suivant trois directions perpendiculaires l'une à l'autre et parallèles aux trois axes de l'ellipsoïde, quelles que fussent, d'ailleurs, les directions des vibrations initiales. Nous avons vu les trois rayons se réduire à deux, ou même à un seul, lorsque les vibrations initiales étaient parallèles à l'un des plans principaux de l'ellipsoïde ou à l'un de ses axes, et dès lors il a été facile de comprendre pourquoi les rayons polarisés ne se subdivisent pas à l'infini. Nous avons prouvé que, dans le cas où l'élasticité de l'éther est la même en tous sens, les trois rayons se réduisaient à deux; savoir : un rayon simple et un rayon double, dirigés suivant la même droite, et polarisés, le premier parallèlement, le second perpendiculairement à cette droite. Enfin, nous avons vu le rayon simple disparaître, lorsque les vibrations initiales des molécules de l'éther étaient supposées perpendiculaires aux directions des rayons, et alors il n'y avait plus, à proprement parler, de polarisation. Or, la réduction de tous les rayons à un seul, et l'absence de toute polarisation dans les milieux où la lumière reste la même en tous sens, étant constatées par l'expérience, nous avons tiré de notre analyse cette conclusion définitive que, dans la lumière ordinaire, les vibrations sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux directions des rayons; et ainsi l'hypothèse que Fresnel avait admise, malgré les arguments et les calculs d'un illustre adversaire, s'est transformée en une réalité.

Nous allons maintenant appliquer la théorie que nous venons de reproduire en peu de mots à la propagation de la lumière dans les cristaux à un axe ou à deux axes optiques. Pour y parvenir, il ne sera pas nécessaire d'employer les équations générales que nous avons données dans la 31[e] livraison des *Exercices* comme propres à représenter le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, et l'on pourra réduire ces équations aux formules (68) de la page 208 du troisième Volume (¹), c'est-à-dire aux formules qui expriment le mouvement d'un système qui offre trois axes d'élasticité perpendiculaires entre eux. On pourra, d'ailleurs, supposer qu'aucune force intérieure n'est appliquée au système, et alors les formules dont il s'agit renfermeront seulement le temps t, les coordonnées x, y, z d'une molécule quelconque m, ses déplacements ξ, η, ζ, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et neuf coefficients G, H, I, L, M, N, P, Q, R, dont les trois premiers sont proportionnels aux pressions supportées, dans l'état naturel du fluide éthéré, par trois plans respectivement perpendiculaires à ces mêmes axes. Les coefficients dont il est ici question étant regardés comme constants, on construira sans peine l'ellipsoïde dont les trois axes sont réciproquement proportionnels aux trois vitesses de propagation des ondes planes parallèles à un plan donné, et dirigés parallèlement aux droites suivant lesquelles se mesurent les vitesses propres des molécules éthérées dans ces ondes planes. On pourra ainsi déterminer : 1° les directions des trois rayons polarisés, produits par la subdivision d'un rayon lumineux dans lequel les vibrations des molécules auraient des directions quelconques; 2° la vitesse de la lumière dans chacun de ces trois rayons; 3° les diverses valeurs que prendrait cette vitesse dans les rayons polarisés, produits par la subdivision de plusieurs rayons lumineux qui partiraient simultanément d'un même point. Enfin, l'on pourra construire la surface à trois nappes, qui, au bout du temps t, passerait par les extrémités de ces rayons, et que l'on nomme la *surface des ondes*. Quant à l'intensité de la lumière, elle sera mesurée, dans chaque rayon, par le carré de la vitesse des molécules. Cela posé, si l'élasticité du fluide éthéré reste la même en tous sens autour d'un axe quelconque, parallèle à l'axe des z, on aura

$$G = H, \quad L = M = 3R, \quad P = Q; \tag{1}$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VIII, p. 247.

et, par conséquent, les neuf coefficients dépendant de la distribution des molécules dans l'espace se réduiront à cinq, savoir : H, I, N, Q, R. Il y a plus : deux nappes de la surface ci-dessus mentionnée pourront se réduire au système de deux ellipsoïdes de révolution, circonscrits l'un à l'autre; et, pour que cette dernière réduction ait lieu, il suffira que la condition

$$(3R - Q)(N - Q) = 4Q^2 \tag{2}$$

soit remplie. Enfin, l'un des deux ellipsoïdes deviendra une sphère qui aura pour diamètre l'axe de révolution de l'autre ellipsoïde, si l'on suppose

$$H = I; \tag{3}$$

et alors la marche des deux rayons polarisés sera précisément celle qu'indique le théorème d'Huygens, relatif aux cristaux qui offrent un seul axe optique. Or, l'exactitude de ce théorème ayant été mise hors de doute par les nombreuses expériences des physiciens les plus habiles, il résulte de notre analyse que, dans les cristaux à un axe optique, les coefficients H, I, N, Q, R vérifient les conditions (2) et (3). D'ailleurs, l'élasticité du fluide éthéré n'étant, par hypothèse, la même en tous sens qu'autour de l'axe des z, il n'est pas naturel d'admettre que l'on ait $G = H = I$, à moins que l'on ne suppose les trois coefficients G, H, I généralement nuls. Il est donc très probable que dans l'éther ces trois coefficients s'évanouissent, et avec eux les pressions supportées par un plan quelconque dans l'état naturel. Cette hypothèse étant admise, l'ellipsoïde et la sphère ci-dessus mentionnés seront représentés par les équations

$$\frac{x^2+y^2}{R} + \frac{z^2}{Q} = t^2, \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{Q} = t^2; \tag{4}$$

en sorte que $\sqrt{Q}$ sera le demi-diamètre de la sphère et $\sqrt{R}$ le demi-diamètre de l'équateur dans l'ellipsoïde. Il importe d'observer que, dans les cristaux doués d'un seul axe optique, ces deux demi-diamètres, ou leurs carrés Q, R, sont toujours très peu différents l'un

de l'autre et qu'en conséquence l'ellipse génératrice de l'ellipsoïde offre une excentricité très petite. Il en résulte aussi que la condition (2) se réduit sensiblement à la suivante

$$N = 3R,$$

c'est-à-dire à une condition qui est remplie toutes les fois que l'élasticité d'un milieu reste la même en tous sens autour d'un point quelconque. Ajoutons que l'intensité de la lumière déterminée par le calcul, pour chacun des deux rayons polarisés que nous considérons ici, est précisément celle que fournit l'observation. Quant au troisième rayon polarisé, le calcul montre qu'il est très difficile de l'apercevoir, attendu que l'intensité de la lumière y demeure toujours très petite quand elle n'est pas rigoureusement nulle. Nous rechercherons plus tard les moyens d'en constater l'existence.

Concevons à présent que, dans le fluide éthéré, l'élasticité cesse d'être la même en tous sens autour d'un axe parallèle à l'axe des z. Si l'on coupe la surface des ondes lumineuses par les plans coordonnés, les sections faites dans deux nappes de cette surface pourront se réduire aux trois cercles et aux trois ellipses représentés par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{y^2}{R} + \frac{z^2}{Q} = t^2, && \frac{y^2+z^2}{P} = t^2, \\ &\frac{z^2}{P} + \frac{x^2}{R} = t^2, && \frac{z^2+x^2}{Q} = t^2, \\ &\frac{x^2}{Q} + \frac{y^2}{P} = t^2, && \frac{x^2+y^2}{R} = t^2; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

et, pour que cette réduction ait lieu, il suffira que, les coefficients G, H, I étant nuls, les trois conditions

$$\left\{\begin{aligned} &(M-P)(N-P) = 4P^2, \qquad (N-Q)(L-Q) = 4Q^2, \\ &\qquad\qquad (L-R)(M-R) = 4R^2, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

toutes trois semblables à la condition (2), soient vérifiées. Il y a plus, si les excentricités des trois ellipses sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés, les conditions (6) entraîneront la suivante

$$(M-P)(N-Q)(L-R)=(N-P)(L-Q)(M-R)=8PQR,$$

et l'équation de la surface des ondes pourra être réduite à

$$(7)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(Px^2+Qy^2+Rz^2) \\ \quad -[P(Q+R)x^2+Q(R+P)y^2+R(P+Q)z^2]t^2+t^4=0. \end{cases}$$

Or, les trois cercles, les trois ellipses et la surface du quatrième degré représentés par les équations (5) et (7) sont précisément ceux que Fresnel a donnés comme propres à indiquer la marche des deux rayons polarisés, aperçus jusqu'à ce jour dans les cristaux à deux axes optiques; et l'on sait d'ailleurs que, dans ces cristaux, les excentricités des ellipses sont fort petites. Donc, les conditions (6) doivent y être sensiblement vérifiées. Au reste, il est bon d'observer que, si les excentricités devenaient nulles, ou, en d'autres termes, si l'on avait

$$(8)\qquad P=Q=R,$$

les conditions (6) donneraient

$$(9)\qquad L=M=N=3R,$$

et que les conditions (8), (9) sont précisément celles qui doivent être remplies pour que l'élasticité d'un milieu reste la même dans tous les sens.

Quant au troisième rayon polarisé, comme l'intensité de sa lumière est fort petite, il sera généralement très difficile de l'apercevoir, ainsi que nous l'avons déjà remarqué.

En résumant ce qu'on vient de dire, on voit que, les conditions (6) étant supposées rigoureusement remplies, les sections faites dans la surface des ondes lumineuses par les plans coordonnés coïncideront exactement avec celles que Fresnel a données. Quant à la surface même, elle sera peu différente de la surface du quatrième degré que cet illustre physicien a obtenue, et, par conséquent, cette dernière est, dans la théorie de la lumière, ce qu'est le mouvement elliptique des planètes dans le système du monde.

Les excentricités des ellipses suivant lesquelles la surface des ondes se trouve coupée par les plans coordonnés, étant généralement fort petites pour les cristaux à un ou à deux axes optiques, il en résulte qu'on peut déterminer avec une grande approximation, dans ces cristaux, les vitesses de propagation des ondes planes et les plans de polarisation des rayons lumineux à l'aide de la règle que je vais indiquer.

Pour obtenir les vitesses de propagation des ondes planes parallèles à un plan donné ABC et correspondant aux deux rayons polarisés que transmet un cristal à un ou à deux axes optiques, il suffit de couper l'ellipsoïde que représente l'équation

$$(10)\qquad \frac{x^2}{P}+\frac{y^2}{Q}+\frac{z^2}{R}=1,$$

par un plan diamétral parallèle au plan donné. La section ainsi obtenue sera une ellipse dont les deux axes seront numériquement égaux aux vitesses de propagation des ondes planes dans les deux rayons. De plus, celui de ces deux rayons dans lequel les ondes planes se propageront avec une vitesse représentée par le grand axe de l'ellipse, sera polarisé parallèlement au petit axe, et réciproquement le rayon dans lequel les ondes planes se propageront avec une vitesse représentée par le petit axe de l'ellipse sera polarisé parallèlement au grand axe. Si l'on fait coïncider le plan ABC avec l'un des plans principaux de l'ellipsoïde, les deux rayons polarisés suivront la même route, et les deux vitesses de la lumière dans ces rayons seront précisément les vitesses de propagation des ondes planes. Par suite, les vitesses de la lumière dans les six rayons polarisés, dont les directions coïncident avec les trois axes de l'ellipsoïde, sont deux à deux égales entre elles et à l'un des nombres $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, $\sqrt{R}$. Ajoutons que les deux rayons dont la vitesse est $\sqrt{P}$ sont polarisés perpendiculairement à l'axe des x, ceux dont la vitesse est $\sqrt{Q}$ perpendiculairement à l'axe des y, et ceux dont la vitesse est $\sqrt{R}$ perpendiculairement à l'axe des z. Dans le cas particulier où les quantités P, Q deviennent égales entre elles, la surface représentée par l'équation (10), ou

$$\frac{x^2+y^2}{Q}+\frac{z^2}{R}=1, \tag{11}$$

devient un ellipsoïde de révolution dont l'axe est ce qu'on appelle *l'axe optique du cristal*. Alors, l'un des demi-axes de la section faite par un plan diamétral quelconque est constamment égal à $\sqrt{Q}$, ainsi que la vitesse de la lumière dans l'un des deux rayons polarisés. Le rayon dont il s'agit est celui qu'on nomme *rayon ordinaire* et il se trouve polarisé parallèlement à la droite qui dans le plan ABC forme le plus petit et le plus grand angle avec l'axe optique, tandis que l'autre rayon, appelé *rayon extraordinaire*, est polarisé parallèlement à la droite d'intersection du plan ABC et d'un plan perpendiculaire à l'axe optique. Alors aussi les deux rayons ordinaire et extraordinaire se superposent, quand ils sont dirigés suivant l'axe optique, et se réduisent à un rayon unique qui n'offre plus aucune trace de polarisation.

Lorsque les trois quantités P, Q, R sont inégales, l'ellipsoïde représenté par l'équation (10) peut être coupé suivant des cercles par deux plans diamétraux qui renferment tous deux l'axe moyen. Donc, les deux rayons polarisés se superposent lorsque les ondes planes deviennent parallèles à l'un de ces plans. Alors, la direction commune des deux rayons est ce qu'on appelle un *axe optique*. Donc, pour les cristaux dans lesquels l'élasticité de l'éther n'est pas la même en tous sens autour d'un axe, il existe deux axes optiques suivant lesquels se dirigent les rayons qui n'offrent plus aucune trace de polarisation.

Toutes ces conséquences de notre analyse sont conformes à l'expérience, et même, dans des Leçons données au Collège royal de France, M. Ampère avait déjà remarqué que la construction de l'ellipsoïde représenté par l'équation (10) fournit le moyen de déterminer les vitesses de propagation des ondes planes et des plans de polarisation des rayons lumineux. Seulement ces plans, que l'on croyait perpendiculaires aux directions des vitesses propres des molécules éthérées, renferment, au contraire, ces mêmes directions.

Nous ajouterons qu'à l'équation (10) on pourrait substituer la suivante

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=1. \tag{12}$$

En effet, les deux sections faites par un même plan dans les deux ellipsoïdes que représentent les équations (10) et (12) ont leurs axes parallèles et ceux de la seconde section sont respectivement égaux aux quotients qu'on obtient en divisant l'unité par les axes de la première.

P. S. — Pour faire mieux saisir les principes ci-dessus exposés, je développerai, dans un second Mémoire, les diverses formules que j'ai seulement indiquées dans celui-ci. Je ferai encore, au sujet des mêmes principes, deux remarques importantes; et d'abord, lorsqu'on parle de l'attraction ou de la répulsion mutuelle des molécules d'un fluide éthéré, on doit seulement entendre que, dans la théorie de la lumière, tout se passe comme si les molécules de l'éther s'attiraient ou se repoussaient effectivement. Ainsi, la recherche des lois que présentent les phénomènes si variés de la propagation, de la réflexion, de la réfraction, etc. de la lumière, se réduit au développement d'une loi plus générale qui renferme toutes les autres. C'est ainsi que, dans le système du monde, on ramène la détermination des lois suivant lesquelles se meuvent les corps célestes à l'hypothèse unique de la gravitation universelle.

Je remarquerai en second lieu que, pour établir les propositions énoncées dans ce Mémoire, nous avons eu recours aux formules (68) de la page 208 des *Exercices de Mathématiques*, et que, pour réduire les équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle aux formules dont il s'agit, on est obligé de négliger plusieurs termes, par exemple ceux qui renferment les puissances supérieures des déplacements ξ, η, ζ et de leurs dérivées prises par rapport aux variables indépendantes x, y, z. Lorsqu'on cesse de négliger ces mêmes termes, on obtient, comme je le montrerai dans un nouveau Mémoire déjà présenté à l'Académie, des formules à l'aide desquelles on peut non seulement assigner la cause de la dispersion des couleurs par le prisme, mais encore découvrir les lois de ce phénomène qui, malgré les nombreux et importants travaux des physiciens sur cette matière, étaient restées inconnues jusqu'à ce jour.

MÉMOIRE SUR LA POLARISATION RECTILIGNE ET LA DOUBLE RÉFRACTION [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XVIII, p. 153; 1842.

Ce Mémoire sera divisé en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, après avoir rappelé les formules qui représentent les mouvements du fluide lumineux, dans le cas où la polarisation est rectiligne, je chercherai ce que deviennent ces formules quand on s'arrête à l'approximation du premier ordre, en négligeant la dispersion. Dans le second paragraphe, je montrerai comment on peut déduire, des formules dont je viens de parler, les axes optiques des milieux doués de la double réfraction. Enfin, dans le troisième paragraphe, j'indiquerai une méthode très simple, qui fournit immédiatement l'équation de ce qu'on nomme la *surface des ondes*.

§ Ier. — *Polarisation rectiligne.*

Considérons un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles; supposons que ces molécules se réduisent à celles du fluide éthéré dans un milieu doué de la double réfraction et soient, au bout du temps t,

ξ, η, ζ les déplacements de la molécule $\mathfrak{m}$ qui coïncide avec le point

[1] Présenté à l'Académie des Sciences, le 20 mai 1839.

(x, y, z), ces déplacements étant mesurés parallèlement aux axes coordonnés;

r la distance de l'origine des coordonnées au plan de l'onde lumineuse qui passe par le point (x, y, z);

l l'épaisseur d'une onde lumineuse;

T le temps d'une vibration du fluide éthéré.

Enfin, posons

$$k = \frac{2\pi}{l}, \qquad s = \frac{2\pi}{T}.$$

Les équations du mouvement de l'éther dans la polarisation rectiligne seront

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = A\cos(kr - st + \varpi), \qquad \eta = B\cos(kr - st + \varpi), \\ \zeta = C\cos(kr - st + \varpi) \end{cases}$$

(*voir* le Mémoire lithographié, sous la date d'août 1836, p. 81) (¹), ϖ, A, B, C désignant quatre constantes, dont les trois dernières seront liées entre elles par trois équations de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathcal{L} - s^2)A + \mathcal{R}B + \mathcal{Q}C = 0, \\ \mathcal{R}A + (\mathcal{M} - s^2)B + \mathcal{P}C = 0, \\ \mathcal{Q}A + \mathcal{P}B + (\mathcal{N} - s^2)C = 0, \end{cases}$$

où les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dépendront de l'épaisseur et de la direction d'une onde plane. Si, d'ailleurs, on nomme

$$a, \quad b, \quad c$$

les cosinus des angles que forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, la perpendiculaire au plan de l'onde qui passe par le point (x, y, z), on aura non seulement

$$(3) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

mais encore

$$(4) \qquad ax + by + cz = r;$$

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. XV.

et, si l'on prend

$$(5) \qquad u = ka, \qquad v = kb, \qquad w = kc,$$

on tirera des équations (4) et (5)

$$(6) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = k^2$$

et

$$(7) \qquad ux + vy + wz = kr.$$

Alors aussi le plan, mené par l'origine parallèlement à celui de l'onde lumineuse, pourra être représenté à volonté par l'une ou l'autre des deux formules

$$(8) \qquad ax + by + cz = 0, \qquad ux + vy + wz = 0.$$

D'autre part, comme on tirera des équations (1)

$$(9) \qquad \frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = \frac{\zeta}{C},$$

il est clair que, dans le mouvement exprimé par ces équations, les molécules éthérées se déplaceront parallèlement à la droite représentée par la formule

$$(10) \qquad \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

Donc, A, B, C désigneront des quantités proportionnelles aux cosinus des angles formés par cette droite avec les demi-axes des coordonnées positives et pourront représenter ces cosinus eux-mêmes, si aux formules (2) on joint la suivante

$$(11) \qquad A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Enfin, il est évident que les valeurs de ξ, η, ζ, fournies par les équations (1), ne varieront pas, si l'on y fait croître simultanément t de Δt et r de $\Omega\,\Delta t$, pourvu que la valeur de Ω vérifie la condition

$$(12) \qquad k\Omega = s$$

de laquelle on tire

$$\Omega = \frac{k}{s} = \frac{\mathrm{T}}{l}. \tag{13}$$

Donc, la vitesse de propagation de la lumière sera précisément la valeur de Ω, déterminée par la formule (13).

Si l'on fait pour abréger

$$\mathfrak{L} = \mathcal{L} - \frac{\mathcal{Q}\mathcal{R}}{\mathcal{P}}, \qquad \mathfrak{M} = \mathcal{M} - \frac{\mathcal{R}\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}, \qquad \mathfrak{N} = \mathcal{N} - \frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{\mathcal{R}}, \tag{14}$$

les formules (2) donneront

$$\left\{\begin{aligned} (s^2 - \mathfrak{L})\mathrm{A} &= \mathcal{Q}\mathcal{R}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathcal{P}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathcal{Q}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathcal{R}}\right), \\ (s^2 - \mathfrak{M})\mathrm{B} &= \mathcal{R}\mathcal{P}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathcal{P}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathcal{Q}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathcal{R}}\right), \\ (s^2 - \mathfrak{N})\mathrm{C} &= \mathcal{P}\mathcal{Q}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathcal{P}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathcal{Q}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathcal{R}}\right), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

puis on en tirera

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(s^2 - \mathfrak{L})\mathrm{A}}{\mathcal{Q}\mathcal{R}} = \frac{(s^2 - \mathfrak{M})\mathrm{B}}{\mathcal{R}\mathcal{P}} = \frac{(s^2 - \mathfrak{N})\mathrm{C}}{\mathcal{P}\mathcal{Q}} \\ &\qquad = \frac{\mathrm{A}}{\mathcal{P}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathcal{Q}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathcal{R}} = \frac{\dfrac{\mathrm{A}}{\mathcal{P}} + \dfrac{\mathrm{B}}{\mathcal{Q}} + \dfrac{\mathrm{C}}{\mathcal{R}}}{\dfrac{\mathcal{Q}\mathcal{R}}{\mathcal{P}(s^2 - \mathfrak{L})} + \dfrac{\mathcal{R}\mathcal{P}}{\mathcal{Q}(s^2 - \mathfrak{M})} + \dfrac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{\mathcal{R}(s^2 - \mathfrak{N})}} \end{aligned}\right. \tag{16}$$

et, par suite,

$$\frac{\mathcal{Q}\mathcal{R}}{\mathcal{P}(s^2 - \mathfrak{L})} + \frac{\mathcal{R}\mathcal{P}}{\mathcal{Q}(s^2 - \mathfrak{M})} + \frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{\mathcal{R}(s^2 - \mathfrak{N})} = 1, \tag{17}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{Q}^2\mathcal{R}^2(s^2 - \mathfrak{M})(s^2 - \mathfrak{N}) + \mathcal{R}^2\mathcal{P}^2(s^2 - \mathfrak{N})(s^2 - \mathfrak{L}) + \mathcal{P}^2\mathcal{Q}^2(s^2 - \mathfrak{L})(s^2 - \mathfrak{M}) \\ &\quad = \mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}(s^2 - \mathfrak{L})(s^2 - \mathfrak{M})(s^2 - \mathfrak{N}). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

L'équation (18) étant du troisième degré, par rapport à s^2, fournira trois valeurs de s^2 et, par suite, trois valeurs de la quantité positive s,

auxquelles répondront trois systèmes de valeurs des rapports

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}},$$

déterminés par les équations (2) et, par suite, trois droites, représentées chacune par une formule semblable à la formule (10). Or, d'après la forme des équations (2), on reconnait immédiatement que les trois droites dont il s'agit sont respectivement parallèles aux trois axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\mathcal{L}x^2 + \mathcal{M}y^2 + \mathcal{N}z^2 + 2\mathcal{P}yz + 2\mathcal{Q}zx + 2\mathcal{R}xy = 1, \tag{19}$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$\mathfrak{L}x^2 + \mathfrak{M}y^2 + \mathfrak{N}z^2 + \mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}\left(\frac{x}{\mathcal{P}} + \frac{y}{\mathcal{Q}} + \frac{z}{\mathcal{R}}\right)^2 = 1, \tag{20}$$

tandis que les trois valeurs de s sont respectivement égales aux quotients qu'on obtient en divisant l'unité par les trois demi-axes de cet ellipsoïde.

Soient maintenant :

r la distance de la molécule $\mathfrak{m}$, ou du point (x, y, z) avec laquelle elle coïncide, à une molécule voisine m, dont les coordonnées sont $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$;

$\mathfrak{m} m \mathfrak{f}(r)$ l'action mutuelle des deux molécules $\mathfrak{m}$, m;

α, β, γ les angles formés par le rayon r avec les demi-axes des coordonnées positives;

δ l'angle formé par le même rayon avec la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan de l'onde.

Enfin, posons

$$f(r) = r\mathfrak{f}'(r) - \mathfrak{f}(r). \tag{21}$$

On aura

$$\cos\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma, \tag{22}$$

par conséquent

$$k\cos\delta = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma. \tag{23}$$

Cela posé, si l'on fait pour abréger

$$\mathfrak{z} = \mathrm{S}\left\{m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\left[1-\cos(kr\cos\delta)\right]\right\}, \tag{24}$$

$$\mathcal{X} = \mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[\frac{1}{2}k^2\cos^2\delta + \frac{\cos(kr\cos\delta)}{r^2}\right]\right\}, \tag{25}$$

le signe S indiquant une somme de termes semblables, relatifs aux diverses molécules m voisines de $\mathfrak{m}$; les valeurs de $\mathfrak{z}$, $\mathcal{X}$, déterminées par les formules (24), (25), ou, ce qui revient au même, par les suivantes

$$\mathfrak{z} = \mathrm{S}\left\{m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\left[1-\cos r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\right]\right\}, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{X} = \mathrm{S}\Bigg\{m\frac{f(r)}{r}\bigg[&\frac{(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2}{2} \\ &+ \frac{\cos r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)}{r^2}\bigg]\Bigg\}, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

pourront être considérées comme des fonctions des seules quantités u, v, w; et les valeurs des coefficients

$$\mathcal{L},\quad \mathcal{M},\quad \mathcal{N},\quad \mathcal{P},\quad \mathcal{Q},\quad \mathcal{R},$$

contenus dans les équations (2), seront déterminées en fonction de u, v, w par les formules

$$\mathcal{L} = \mathfrak{z} + \frac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial u^2},\qquad \mathcal{M} = \mathfrak{z} + \frac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial v^2},\qquad \mathcal{N} = \mathfrak{z} + \frac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial w^2}, \tag{28}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial v\,\partial w},\qquad \mathcal{Q} = \frac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial w\,\partial u},\qquad \mathcal{R} = \frac{\partial^2\mathcal{X}}{\partial u\,\partial v}. \tag{29}$$

Les formules (26), (27), (28), (29) supposent que les deux conditions

$$\mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\sin(kr\cos\delta)\right] = 0,\qquad \mathrm{S}\left[m\frac{f(r)}{r}\sin(kr\cos\delta)\right] = 0, \tag{30}$$

ou, ce qui revient au même, les deux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\sin r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\right] = 0, \\ &\mathrm{S}\left[m\frac{f(r)}{r}\sin r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\right] = 0, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

se trouvent vérifiées, quelles que soient les valeurs attribuées à u, v, w; ce qui arrivera, par exemple, si dans l'état d'équilibre du fluide éthéré les diverses molécules sont deux à deux égales et distribuées symétriquement de part et d'autre d'une molécule quelconque $\mathfrak{m}$, sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide.

En vertu des formules (26), (27), (28), (29), jointes aux équations (14), les coefficients

$$\mathcal{L},\quad \mathcal{M},\quad \mathcal{N},\quad \mathcal{P},\quad \mathcal{Q},\quad \mathcal{R},\quad \mathfrak{L},\quad \mathfrak{M},\quad \mathfrak{N}$$

représentent des fonctions déterminées des trois quantités

$$u,\quad v,\quad w\qquad \text{ou}\qquad ka,\quad kb,\quad kc,$$

par conséquent des trois cosinus

$$a,\quad b,\quad c$$

et de la quantité k. Considérés simplement comme fonctions de k, ces coefficients sont développables en séries qui, ordonnées suivant les puissances ascendantes de k, offriront des premiers termes proportionnels à k^2. Cela posé, étant donnés les trois cosinus a, b, c, qui déterminent la direction d'une onde plane et l'épaisseur l de cette onde, ou, ce qui revient au même, la quantité k, l'équation (18) fournira trois valeurs différentes de s et, par suite, trois valeurs différentes $\Omega = \frac{s}{k}$, qui se trouveront immédiatement exprimées en fonctions de a, b, c, k. Il y a plus : comme l'équation (18) fait dépendre s de k et réciproquement k de s, on pourra supposer les trois valeurs de Ω exprimées en fonctions de a, b, c, s. D'ailleurs, la constante s ou T est celle qui détermine la nature de la couleur. Donc, la propagation de la lumière dans une direction donnée donnera généralement naissance, pour chaque couleur, à trois systèmes d'ondes planes, qui se propageront dans un milieu doublement réfringent, avec trois vitesses différentes. De ces trois systèmes d'ondes planes, deux correspondront évidemment aux deux rayons lumineux qui ont été observés dans les milieux doués de la double réfraction, et qui se réunissent de manière à n'en plus former qu'un seul dans les milieux où la réfraction est simple. Quant au troisième système d'ondes, il répond à des vibrations d'une nature particulière dans le fluide éthéré, qui n'ont point été encore observées, à moins qu'elles ne soient précisément les vibrations calorifiques. Si l'on réduisait les développements obtenus à leurs premiers termes, respectivement proportionnels à k^2, les trois valeurs de s seraient proportionnelles à k; par conséquent, les trois valeurs de $\Omega = \frac{s}{k}$ deviendraient indépendantes de k, ou de s, et dépendraient uniquement des cosinus a, b, c. Donc, alors la vitesse de chaque système d'ondes deviendrait indépendante de la nature de la couleur; et les formules obtenues seraient celles auxquelles on parvient quand on néglige la dispersion. Alors aussi les valeurs de

$$\frac{B}{A},\quad \frac{C}{A}$$

tirées des équations (2) seraient elles-mêmes indépendantes de k ou de s, et pour une direction donnée du plan représenté par l'équation (8), c'est-à-dire pour des valeurs données de a, b, c, on obtiendrait trois espèces d'ondes propagées avec trois vitesses différentes, et dans lesquelles les vibrations moléculaires seraient parallèles à trois axes rectangulaires, savoir aux trois axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation (19). Il y a plus : les trois espèces d'ondes qui rempliront ces dernières conditions pourront être censées correspondre à la même valeur de k et à trois couleurs différentes, ou bien à la même couleur et à trois valeurs différentes de k, puisque les trois valeurs de chacune des quantités

$$\Omega,\quad \frac{B}{A},\quad \frac{C}{A}$$

dépendront uniquement de a, b, c. Mais, si l'on cesse de négliger la dispersion, les valeurs de

$$\Omega,\quad \frac{B}{A},\quad \frac{C}{A}$$

dépendront, en vertu des formules (15) et (18), non seulement de a, b, c, mais encore de la quantité k ou l, par conséquent de l'épaisseur d'une onde; et les trois espèces d'ondes, dans lesquelles les vibrations moléculaires seront respectivement parallèles aux trois axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation (19), correspondront à une même valeur de k et à trois valeurs différentes de $s = k\Omega$, ou à trois couleurs différentes, les trois valeurs de s étant déterminées par l'équation (18), ainsi que les trois valeurs correspondantes de la vitesse de propagation Ω. Il ne sera pas inutile d'observer que l'ellipsoïde représenté par l'équation (19) peut l'être encore par la suivante

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{I}(x^2+y^2+z^2) + x^2 \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial u^2} + y^2 \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial v^2} + z^2 \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial w^2} \\ &\qquad + 2yz \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial v\, \partial w} + 2zx \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial w\, \partial u} + 2xy \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial u\, \partial v} = 1, \end{aligned} \right.$$

à laquelle on parvient en substituant dans l'équation (19) les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, tirées des formules (28) et (29).

Dans un milieu doué de la double réfraction, on peut, en général, faire passer par un point quelconque trois plans rectangulaires entre eux et tellement choisis que, étant données deux droites symétriquement placées par rapport à l'un de ces plans, les ondes planes perpendiculaires soit à l'une, soit à l'autre droite, se propagent avec la même vitesse et que, dans les deux espèces d'ondes perpendiculaires aux deux droites, les molécules symétriquement placées, par rapport au plan que l'on considère, offrent encore des vitesses de vibration égales, dont les directions soient celles de deux nouvelles droites symétriquement disposées de part et d'autre du même plan. L'expérience montre du moins qu'en chaque point d'un milieu doublement réfringent ces conditions se trouvent remplies, par rapport à trois plans rectangulaires entre eux, à l'égard des deux systèmes d'ondes planes qui correspondent aux deux systèmes de rayons lumineux observés. Il est naturel de supposer que les mêmes conditions se vérifieraient encore à l'égard du troisième système d'ondes planes. Nous admettrons cette hypothèse et nous appellerons *axes de polarisation* les trois axes rectangulaires suivant lesquels se coupent les trois plans dont il s'agit : axes qui, comme ces plans, restent parallèles à eux-mêmes, quand le point par lequel ils passent varie. Si, en faisant coïncider ce point avec l'origine des coordonnées, on prend les axes de polarisation pour axes des x, y, z; les trois valeurs de la vitesse Ω, par conséquent les trois valeurs de la quantité $s = k\Omega$, déterminées, à l'aide de la formule (18), en fonctions de a, b, c, k ou de u, v, w, resteront invariables, quand, des trois cosinus

$$a, \quad b, \quad c,$$

un seul, par exemple a, changera de signe avec $ka = u$, tandis que les valeurs correspondantes de A et, par suite, celles des rapports

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{C}{A},$$

déterminées à l'aide des formules (15), changeront de signe. Donc alors, dans l'ellipsoïde représenté par l'équation (19) ou (32), les longueurs des trois demi-axes, respectivement égales aux quotients qu'on obtient en divisant l'unité par les trois valeurs de s, resteront invariables; tandis que chacune des trois droites, suivant lesquelles sont dirigés les trois axes de l'ellipsoïde, se trouvera remplacée par une droite symétriquement placée de l'autre côté du plan des y, z. En effet, lorsque le changement de a en $-a$ ou, ce qui revient au même, de u en $-u$ entraînera un changement de signe des rapports

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{C}{A},$$

la formule (10) se trouvera remplacée par la suivante

$$(33) \qquad -\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C},$$

et les formules (10), (33) représentent évidemment deux droites symétriquement disposées de part et d'autre du plan des y, z. Il y a plus : d'après ce qu'on vient de dire, dans tout milieu réfringent qui aura pour axe de polarisation les axes rectangulaires des x, y, z, le changement de u en $-u$ transformera l'ellipsoïde représenté par l'équation (19) ou (32) en un autre ellipsoïde, qui offrira des axes égaux à ceux du premier, et dirigés, non plus suivant les mêmes droites, mais suivant des droites symétriquement placées de l'autre côté du plan des y, z. Donc, le nouvel ellipsoïde sera égal au premier, et tous deux seront symétriquement placés par rapport au plan des y, z. Donc, l'équation du nouvel ellipsoïde sera celle qu'on obtient en remplaçant, dans l'équation (32), x par $-x$, savoir

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{z}(x^2+y^2+z^2) + x^2\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial u^2} + y^2\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial v^2} + z^2\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial w^2} \\ &\qquad + 2yz\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial v\,\partial w} - 2zx\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial w\,\partial u} - 2xy\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial u\,\partial v} = 1; \end{aligned} \right.$$

par conséquent, $\mathfrak{z}$ restera invariable, tandis que u changera de signe; et, des six dérivées du second ordre

$$(35) \qquad \frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial w^2}, \quad \frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial v\,\partial w}, \quad \frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial w\,\partial u}, \quad \frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial u\,\partial v},$$

les deux dernières devront seules changer de signe avec u. Or, cette condition ne pourra être remplie, pour la fonction de u, v, w, représentée par $\mathcal{K}$ et développable, en vertu de la formule (27), suivant les puissances ascendantes et entières des variables u, v, w, en une série dont chaque terme sera de degré pair relativement au système de ces trois variables, à moins que tous les termes proportionnels à des puissances impaires de la variable u ne disparaissent par la réduction de leurs coefficients à zéro. Effectivement, les termes de cette espèce étant différentiés deux fois de suite par rapport à u, ou bien une seule fois par rapport à u et une seule fois par rapport à v ou à w, fourniront chacun trois dérivées du second ordre qui, si elles diffèrent de zéro, changeront de signe avec u dans le premier cas, sans en changer dans le second, et qui, en conséquence, devront disparaître des développements des trois expressions

$$(36)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{K}}{\partial u^2},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{K}}{\partial u\,\partial v},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{K}}{\partial u\,\partial w}.$$

Or, $\mathfrak{K}$ ne renfermant aucun terme proportionnel à la seule variable u, la disparition dont il s'agit ne peut avoir lieu que dans le cas où tous les termes proportionnels à des puissances impaires de u disparaissent eux-mêmes et s'évanouissent avec leurs coefficients respectifs. Par conséquent, dans un milieu qui offrira pour axes de polarisation les axes rectangulaires des x, y, z, $\mathfrak{K}$ restera invariable avec $\mathfrak{I}$, tandis que u changera de signe. On prouvera de même que, dans un tel milieu, $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{K}$ devront rester invariables, après le changement de signe de v ou de w. Donc, en définitive, les développements de $\mathfrak{I}$ et de $\mathfrak{K}$ devront alors renfermer uniquement les puissances paires de chacune des variables u, v, w, et les seconds membres des formules (26), (27) ne seront point altérés quand on y remplacera ensemble ou séparément u par $-u$, v par $-v$ et w par $-w$. Ainsi l'on aura, quels que soient u, v, w,

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\cos r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\right]\\ =&\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\cos r(-u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\right]\\ =&\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\cos r(u\cos\alpha-v\cos\beta+w\cos\gamma)\right]\\ =&\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\cos r(u\cos\alpha+v\cos\beta-w\cos\gamma)\right],\end{aligned}\right.$$

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[\frac{(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2}{2}+\frac{\cos r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)}{2}\right]\right\}\\ =&\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[\frac{(-u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2}{2}+\frac{\cos r(-u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)}{2}\right]\right\}\\ =&\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[\frac{(u\cos\alpha-v\cos\beta+w\cos\gamma)^2}{2}+\frac{\cos r(u\cos\alpha-v\cos\beta+w\cos\gamma)}{2}\right]\right\}\\ =&\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[\frac{(u\cos\alpha+v\cos\beta-w\cos\gamma)^2}{2}+\frac{\cos r(u\cos\alpha+v\cos\beta-w\cos\gamma)}{2}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\sin(rv\cos\beta)\sin(rw\cos\gamma)\cos(ru\cos\alpha)\right]=0,\\ &\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\sin(rw\cos\gamma)\sin(ru\cos\alpha)\cos(rv\cos\beta)\right]=0,\\ &\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\sin(ru\cos\alpha)\sin(rv\cos\beta)\cos(rw\cos\gamma)\right]=0\end{aligned}\right.$$

et

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[vw\cos\beta\cos\gamma-\frac{\sin(rv\cos\beta)\sin(rw\cos\gamma)\cos(ru\cos\alpha)}{r^2}\right]\right\}=0,\\ &\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[wu\cos\gamma\cos\alpha-\frac{\sin(rw\cos\gamma)\sin(ru\cos\alpha)\cos(rv\cos\beta)}{r^2}\right]\right\}=0,\\ &\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[uv\cos\alpha\cos\beta-\frac{\sin(ru\cos\alpha)\sin(rv\cos\beta)\cos(rw\cos\gamma)}{r^2}\right]\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

Les formules (39) et (40) devant, ainsi que les formules (31), subsister indépendamment des valeurs attribuées à u, v, w, entraîneront les diverses conditions qu'on obtient quand, après avoir développé les seconds membres de ces formules en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de u, v, w, on égale à zéro le coefficient de chaque terme. Les conditions ainsi obtenues se vérifieront, par exemple, si les molécules d'éther sont deux à deux égales entre elles et distribuées symétriquement de part et d'autre d'un plan mené par une molécule quelconque $\mathfrak{m}$ parallèlement à l'un quelconque des plans coordonnés.

En vertu des formules (39), (40), les équations (26), (27) donneront

$$(41)\qquad \mathfrak{I}=\mathrm{S}\left\{m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\left[1-\cos(ru\cos\alpha)\cos(rv\cos\beta)\cos(rw\cos\gamma)\right]\right\},$$

$$(42)\qquad \mathfrak{K}=\mathrm{S}\left\{m\frac{f(r)}{r}\left[\frac{u^2\cos^2\alpha+v^2\cos^2\beta+w^2\cos^2\gamma}{2}+\frac{\cos(ru\cos\alpha)\cos(rv\cos\beta)\cos(rw\cos\gamma)}{r^2}\right]\right\}.$$

Si l'on développe les seconds membres de ces dernières, et si l'on fait d'ailleurs, pour abréger,

$$(43)\quad \begin{cases} \mathrm{G}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}\mathrm{f}(r)\cos^2\alpha\right], \qquad \mathrm{H}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}\mathrm{f}(r)\cos^2\beta\right], \\ \mathrm{I}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}\mathrm{f}(r)\cos^2\gamma\right], \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} \mathrm{L}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}f(r)\cos^4\alpha\right], \qquad \mathrm{M}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}f(r)\cos^4\beta\right], \\ \mathrm{N}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}f(r)\cos^4\gamma\right], \end{cases}$$

$$(45)\quad \begin{cases} \mathrm{P}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}f(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma\right], \qquad \mathrm{Q}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}f(r)\cos^2\gamma\cos^2\alpha\right], \\ \mathrm{R}=\mathrm{S}\left[\dfrac{mr}{2}f(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta\right], \end{cases}$$

on trouvera

$$(46)\quad \mathcal{S}=\mathrm{G}u^2+\mathrm{H}v^2+\mathrm{I}w^2+\ldots,$$

$$(47)\quad \begin{cases} \mathcal{X}=\mathrm{S}\left[m\dfrac{f(r)}{r^4}\right]+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\mathrm{L}u^4+\mathrm{M}v^4+\mathrm{N}w^4}{6} \\ \qquad\qquad +\mathrm{P}v^2w^2+\mathrm{Q}w^2u^2+\mathrm{R}u^2v^2\Big)+\ldots; \end{cases}$$

puis on en conclura, eu égard aux formules (28) et (29),

$$(48)\quad \begin{cases} \mathcal{L}=(\mathrm{L}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{R}+\mathrm{H})v^2+(\mathrm{Q}+\mathrm{I})w^2+\ldots, \\ \mathcal{M}=(\mathrm{R}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{M}+\mathrm{H})v^2+(\mathrm{P}+\mathrm{I})w^2+\ldots, \\ \mathcal{N}=(\mathrm{Q}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{P}+\mathrm{H})v^2+(\mathrm{N}+\mathrm{I})w^2+\ldots, \end{cases}$$

$$(49)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}=2\mathrm{P}vw+\ldots, \\ \mathfrak{Q}=2\mathrm{Q}wu+\ldots, \\ \mathfrak{R}=2\mathrm{R}uv+\ldots, \end{cases}$$

et, par suite, eu égard aux formules (14),

$$(50)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}=\left(\mathrm{L}-2\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{P}}+\mathrm{G}\right)u^2+(\mathrm{R}+\mathrm{H})v^2+(\mathrm{Q}+\mathrm{I})w^2+\ldots \\ \mathfrak{M}=(\mathrm{Q}+\mathrm{G})u^2+\left(\mathrm{M}-2\dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{Q}}+\mathrm{H}\right)v^2+(\mathrm{P}+\mathrm{I})w^2+\ldots, \\ \mathfrak{N}=(\mathrm{R}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{P}+\mathrm{H})v^2+\left(\mathrm{N}-2\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{R}}+\mathrm{I}\right)w^2+\ldots. \end{cases}$$

Enfin, si l'on pose

$$(51)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}=\left(\mathrm{L}-2\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{P}}+\mathrm{G}\right)a^2+(\mathrm{R}+\mathrm{H})b^2+(\mathrm{Q}+\mathrm{I})c^2, \\ \mathfrak{B}=(\mathrm{R}+\mathrm{G})a^2+\left(\mathrm{M}-2\dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{Q}}+\mathrm{H}\right)b^2+(\mathrm{P}+\mathrm{I})c^2, \\ \mathfrak{C}=(\mathrm{Q}+\mathrm{G})a^2+(\mathrm{P}+\mathrm{H})b^2+\left(\mathrm{N}-2\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{R}}+\mathrm{I}\right)c^2, \end{cases}$$

on tirera des formules (49), (50), jointes aux équations (5),

$$(52)\quad \mathfrak{P}=2\mathrm{P}bck^2+\ldots, \qquad \mathfrak{Q}=2\mathrm{Q}cak^2+\ldots, \qquad \mathfrak{R}=2\mathrm{R}abk^2+\ldots,$$

$$(53)\quad \mathfrak{L}=\mathfrak{A}k^2+\ldots, \qquad \mathfrak{M}=\mathfrak{B}k^2+\ldots, \qquad \mathfrak{N}=\mathfrak{C}k^2+\ldots.$$

Pour obtenir l'approximation relative au cas où l'on néglige la dispersion, l'on devra, dans les développements de

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N},$$

fournis par les équations (52), (53), conserver seulement les premiers termes, c'est-à-dire les termes proportionnels à k^2. En opérant ainsi, l'on aura simplement

$$(54)\quad \mathfrak{P}=2\mathrm{P}bck^2, \qquad \mathfrak{Q}=2\mathrm{Q}cak^2, \qquad \mathfrak{R}=2\mathrm{R}abk^2,$$

$$(55)\quad \mathfrak{L}=\mathfrak{A}k^2, \qquad \mathfrak{M}=\mathfrak{B}k^2, \qquad \mathfrak{N}=\mathfrak{C}k^2$$

et, en vertu de ces dernières équations jointes à la formule (12), les équations (15), (17), (18), (20) donneront respectivement

$$(56)\quad \begin{cases} (\Omega^2-\mathfrak{A})\mathrm{A}=2\mathrm{QR}a\left(\dfrac{a\mathrm{A}}{\mathrm{P}}+\dfrac{b\mathrm{B}}{\mathrm{Q}}+\dfrac{c\mathrm{C}}{\mathrm{R}}\right), \\ (\Omega^2-\mathfrak{B})\mathrm{B}=2\mathrm{RP}b\left(\dfrac{a\mathrm{A}}{\mathrm{P}}+\dfrac{b\mathrm{B}}{\mathrm{Q}}+\dfrac{c\mathrm{C}}{\mathrm{R}}\right), \\ (\Omega^2-\mathfrak{C})\mathrm{C}=2\mathrm{PQ}c\left(\dfrac{a\mathrm{A}}{\mathrm{P}}+\dfrac{b\mathrm{B}}{\mathrm{Q}}+\dfrac{c\mathrm{C}}{\mathrm{R}}\right), \end{cases}$$

$$(57)\quad \frac{\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{A}}+\frac{\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{B}}+\frac{\left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{C}}=\frac{1}{2\mathrm{PQR}}$$

et

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})+\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{C})(\Omega^2-\mathfrak{A})\\ &\qquad+\left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})=\frac{(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})}{2\mathrm{PQR}},\end{aligned}\right.$$

$$(59)\qquad \mathfrak{A}x^2+\mathfrak{B}y^2+\mathfrak{C}z^2+2\mathrm{PQR}\left(\frac{ax}{\mathrm{P}}+\frac{by}{\mathrm{Q}}+\frac{cz}{\mathrm{R}}\right)^2=1.$$

Les valeurs des quantités

$$\Omega,\quad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},\quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}},$$

fournies par l'équation (57) ou (58) et par les équations (56), dépendent uniquement des cosinus a, b, c et restent indépendantes de s ou de T, par conséquent de la nature de la couleur. Donc, ces équations se rapportent effectivement au cas où l'on suppose les diverses couleurs propagées avec la même vitesse, c'est-à-dire au cas où l'on néglige la dispersion. Ces mêmes équations supposent d'ailleurs que le milieu réfringent offre trois axes de polarisation respectivement parallèles aux axes rectangulaires des x, y, z.

Lorsque la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, ce qui a lieu dans le vide, les valeurs de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{X}$ se réduisent aux suivantes

$$(60)\qquad \mathcal{S}=\mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\left(1-\frac{\sin kr}{kr}\right)\right]=k^2\,\mathrm{S}\left[\frac{mr}{2.3}\mathrm{f}(r)\right]+\ldots,$$

$$(61)\qquad \mathcal{X}=\mathrm{S}\left[m\frac{f(r)}{r^3}\left(\frac{1}{6}k^2r^2+\frac{\sin kr}{kr}\right)\right]=\mathrm{S}\left[m\frac{f(r)}{r^3}\right]+\frac{k^4}{3.4}\mathrm{S}\left[\frac{mr}{2.5}f(r)\right]+\ldots$$

du Mémoire lithographié. On a donc alors, eu égard à l'équation (6),

$$(62)\qquad \mathcal{S}=(u^2+v^2+w^2)\,\mathrm{S}\left[\frac{mr}{2.3}\mathrm{f}(r)\right]+\ldots,$$

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{X}&=\mathrm{S}m\left[\frac{f(r)}{r^3}\right]\\ &\quad+\frac{u^4+v^4+w^4+2v^2w^2+2w^2u^2+2u^2v^2}{3.4}\mathrm{S}\left[\frac{mr}{2.5}\mathrm{f}(r)\right]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules devant s'accorder avec les formules (46), (47), quelles que soient les valeurs attribuées à u, v, w, on en conclura, dans l'hypothèse admise,

$$\mathrm{G}=\mathrm{H}=\mathrm{I}=\mathrm{S}\left[\frac{mr}{2.3}\mathrm{f}(r)\right],$$

$$\mathrm{L}=\mathrm{M}=\mathrm{N}=3\mathrm{P}=3\mathrm{Q}=3\mathrm{R}=\mathrm{S}\left[\frac{mr}{2.5}f(r)\right].$$

Donc, lorsque la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, les valeurs de

$$\mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{I},\quad \mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N},\quad \mathrm{P},\quad \mathrm{Q},\quad \mathrm{R}$$

vérifient les conditions

$$(64)\qquad \mathrm{G}=\mathrm{H}=\mathrm{I},\qquad \mathrm{L}=\mathrm{M}=\mathrm{N}=3\mathrm{P}=3\mathrm{Q}=3\mathrm{R}.$$

Au reste, pour obtenir immédiatement ces dernières formules, il suffit d'exprimer que les quantités

$$\mathcal{S},\quad \mathcal{X},$$

considérées comme fonctions de u, v, w ou de

$$a,\quad b,\quad c,\quad k,$$

dépendent uniquement de k, par conséquent de la somme

$$u^2+v^2+w^2=k^2.$$

Car, dès lors, on doit avoir, quels que soient u, v, w,

$$\mathrm{G}u^2+\mathrm{H}v^2+\mathrm{I}w^2=\mathrm{G}k^2=\mathrm{G}(u^2+v^2+w^2),$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}u^4+\mathrm{M}v^4+\mathrm{N}w^4+6\mathrm{P}v^2w^2+6\mathrm{Q}w^2u^2+6\mathrm{R}u^2v^2\\ &\quad=\mathrm{L}k^4=\mathrm{L}(u^4+v^4+w^4+2v^2w^2+2w^2u^2+2u^2v^2)\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\mathrm{G}=\mathrm{H}=\mathrm{I},\qquad \mathrm{L}=\mathrm{M}=\mathrm{N},\qquad 6\mathrm{P}=6\mathrm{Q}=6\mathrm{R}=2\mathrm{L}.$$

Des équations (28) et (29) jointes aux formules (60) et (61) l'on tirera

$$(65)\qquad \mathcal{L}=\mathcal{G}+\mathfrak{H}u^2,\qquad \mathcal{M}=\mathcal{G}+\mathfrak{H}v^2,\qquad \mathcal{N}=\mathcal{G}+\mathfrak{H}w^2,$$

$$(66)\qquad \mathfrak{P}=\mathfrak{H}vw,\qquad \mathfrak{Q}=\mathfrak{H}wu,\qquad \mathfrak{R}=\mathfrak{H}uv,$$

les valeurs de $\mathcal{G}$, $\mathfrak{H}$ étant celles qui déterminent les équations

$$(67)\qquad \mathcal{G}=\mathfrak{s}+\frac{1}{k}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial k},$$

$$(68)\qquad \mathfrak{H}=\frac{1}{k}\frac{\partial\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial k}\right)}{\partial k}$$

ou

$$(69)\qquad \mathcal{G}=\mathrm{S}\left[m\frac{\mathfrak{f}(r)}{r}\left(1-\frac{\sin kr}{kr}\right)\right]+\mathrm{S}\left[m\frac{f(r)}{r}\left(\frac{1}{3}+\frac{\cos kr}{k^2r^2}-\frac{\sin kr}{k^3r^3}\right)\right],$$

$$(70)\qquad k^2\mathfrak{H}=\mathrm{S}\left[m\frac{f(r)}{r}\left(-\frac{\sin kr}{kr}-3\frac{\cos kr}{k^2r^2}+3\frac{\sin kr}{k^3r^3}\right)\right].$$

Cela posé, les formules (14) donneront

$$(71)\qquad \mathfrak{L}=\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathcal{G}$$

et les formules (15), (18) se réduiront à

$$(72)\qquad \begin{cases}(s^2-\mathcal{G})\mathrm{A}=\mathfrak{H}u\,(u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C}),\\ (s^2-\mathcal{G})\mathrm{B}=\mathfrak{H}v\,(u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C}),\\ (s^2-\mathcal{G})\mathrm{C}=\mathfrak{H}w\,(u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C}),\end{cases}$$

$$(73)\qquad (s^2-\mathcal{G})^2(s^2-\mathcal{G}-\mathfrak{H}k^2)=0.$$

L'équation (73), résolue par rapport à s^2, fournit deux racines égales à $\mathcal{G}$, une seule égale à $\mathcal{G}+\mathfrak{H}k^2$. Les deux premières racines correspondent aux deux systèmes d'ondes planes et de rayons lumineux, qui se réduisent à un seul système dans les milieux doués de la réfraction simple. Comme on tire d'ailleurs des formules (72) et (73), jointes aux formules (5) et (1), ou

$$(74)\qquad s^2=\mathcal{G}$$

et

$$(75)\qquad u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C}=0,$$

par conséquent

$$(76)\qquad a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C}=0$$

et

$$(77)\qquad a\xi+b\eta+c\zeta=0;$$

ou bien

$$(78)\qquad s^2=\mathcal{G}+\mathfrak{H}k^2$$

et

$$\frac{\mathrm{A}}{u}=\frac{\mathrm{B}}{v}=\frac{\mathrm{C}}{w},$$

par conséquent

$$(79)\qquad \frac{\mathrm{A}}{a}=\frac{\mathrm{B}}{b}=\frac{\mathrm{C}}{c}$$

et

$$(80)\qquad \frac{\xi}{a}=\frac{\eta}{b}=\frac{\zeta}{c},$$

il est clair que, dans un milieu où la lumière se propagera en tous sens suivant les mêmes lois, les vibrations des molécules d'éther seront, en vertu de la formule (77) ou (80), comprises dans les plans des ondes, ou perpendiculaires à ces mêmes plans, suivant qu'il s'agira des ondes de l'une ou de l'autre espèce, c'est-à-dire des ondes qui correspondront ou de celles qui ne correspondront pas aux rayons lumineux observés.

Au reste, on arriverait aux mêmes conclusions en partant des formules (56), (58), qui peuvent être substituées aux formules (15) et (18) dans le cas où le milieu réfringent offre trois axes de polarisation parallèles aux axes rectangulaires des x, y, z, et où l'on néglige la dispersion. Car, en supposant que la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, et ayant égard aux conditions (64) ainsi qu'à la formule (3), on tirera des équations (51)

$$(81)\qquad \mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}=\mathrm{R}+\mathrm{I},$$

et, par suite, les formules (56), (58) donneront

$$(82)\qquad \left\{ \begin{aligned} (\Omega^2 - R - I)A &= 2Ra(aA + bB + cC), \\ (\Omega^2 - R - I)B &= 2Rb(aA + bB + cC), \\ (\Omega^2 - R - I)C &= 2Rc(aA + bB + cC); \end{aligned} \right.$$

$$(83)\qquad (\Omega^2 - R - I)^2(\Omega^2 - 3R - I) = 0.$$

Or, l'équation (83), résolue par rapport à Ω^2, fournira deux racines égales à $R + I$, une seule égale à $3R + I$; et il est aisé de s'assurer qu'en vertu des formules (82) l'équation

$$(84)\qquad \Omega^2 = R + I$$

entraînera les formules (76), (77), tandis que l'équation

$$(85)\qquad \Omega^2 = 3R + I$$

entraînera les formules (79) et (80).

Lorsque la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois, non plus autour d'un point quelconque, mais seulement autour de tout axe parallèle à une droite donnée, alors, en prenant cette droite pour axe des x, on voit les valeurs de $\mathfrak{s}$ et de $\mathcal{K}$, considérées comme fonctions de u, v, w, se réduire à celles que fournissent les équations (12), (13) du paragraphe VI du Mémoire lithographié, par conséquent à des fonctions des seules quantités u et

$$(86)\qquad v^2 + w^2 = \iota^2.$$

Alors aussi, en posant, pour abréger,

$$(87)\qquad \mathcal{G} = \mathfrak{s} + \frac{1}{\iota}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \iota},$$

$$(88)\qquad \mathcal{H} = \frac{1}{\iota}\frac{\partial\left(\frac{1}{\iota}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \iota}\right)}{\partial \iota},$$

$$(89)\qquad \mathcal{V} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\iota}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \iota}\right)}{\partial u},$$

on trouve

$$(90)\qquad \mathcal{M} = \mathcal{G} + \mathcal{H}v^2, \qquad \mathcal{N} = \mathcal{G} + \mathcal{H}w^2,$$

$$(91)\qquad \mathfrak{P} = \mathcal{H}vw, \qquad \mathfrak{Q} = \mathcal{V}w, \qquad \mathfrak{R} = \mathcal{V}v,$$

$$(92)\qquad \mathfrak{L} = \mathcal{L} - \frac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{H}}, \qquad \mathfrak{M} = \mathcal{G}, \qquad \mathfrak{N} = \mathcal{G},$$

et, par suite, les formules (15) et (18) deviennent

$$(93)\qquad \left\{ \begin{aligned} (s^2 - \mathcal{L})A &= \mathcal{V}(vB + wC), \\ (s^2 - \mathcal{G})B &= v[\mathcal{V}A + \mathcal{H}(vB + wC)], \\ (s^2 - \mathcal{G})C &= w[\mathcal{V}A + \mathcal{H}(vB + wC)] \end{aligned} \right.$$

et

$$(94)\qquad (s^2 - \mathcal{G})[(s^2 - \mathcal{L})(s^2 - \mathcal{G} - \mathcal{H}\iota^2) - \mathcal{V}^2\iota^2] = 0.$$

Or, comme les deux dernières des formules (93) donnent

$$(95)\qquad (s^2 - \mathcal{G})(Bw - Cv) = 0,$$

on vérifiera ces formules, soit en posant

$$(96)\qquad s^2 = \mathcal{G}$$

et, par suite,

$$(97)\qquad A = 0, \qquad Bv + Cw = 0,$$

excepté dans le cas où, la condition

$$(98)\qquad (\mathcal{L} - \mathcal{G})\mathcal{H} - \mathcal{V}^2 = 0$$

étant remplie, les équations (97) devront être remplacées par la seule équation

$$(99)\qquad \mathcal{V}A + \mathcal{H}(vB + wC) = 0,$$

soit en posant

$$(100)\qquad \frac{B}{v} = \frac{C}{w}$$

et, par suite,

$$(101)\qquad (s^2 - \mathcal{L})(s^2 - \mathcal{G} - \mathcal{H}\iota^2) - \mathcal{V}^2\iota^2 = 0.$$

On tire, d'ailleurs, de la formule (100), combinée avec la première des équations (93),

$$(102)\qquad \frac{A}{\dfrac{\mathfrak{v}}{s^2-\mathfrak{L}}(v^2+w^2)}=\frac{B}{v}=\frac{C}{w},$$

puis, des formules (97) et (102), combinées avec les formules (1),

$$(103)\qquad \xi=0,\qquad v\eta+w\zeta=0,$$

$$(104)\qquad \frac{\xi}{\dfrac{\mathfrak{v}}{s^2-\mathfrak{L}}(v^2+w^2)}=\frac{\eta}{v}=\frac{\zeta}{u}.$$

En vertu des formules (103) et (104), jointes aux formules (5), les déplacements moléculaires s'exécuteront parallèlement à la droite représentée par les équations

$$(105)\qquad x=0,\qquad by+cz=0,$$

ou parallèlement à la droite représentée par la formule

$$(106)\qquad \frac{x}{\dfrac{\mathfrak{v}}{s^2-\mathfrak{L}}(b^2+c^2)}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

suivant que la relation entre s^2 et k se trouvera exprimée par l'équation (96) ou par l'équation (101). Il est d'ailleurs facile de reconnaître que ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que la première coïncide avec la trace du plan des y, z sur le plan mené parallèlement au plan d'une onde par l'origine des coordonnées.

Puisqu'en supposant la lumière propagée suivant les mêmes lois en tous sens autour de tout axe parallèle à l'axe des x, on voit les valeurs de s et de k se réduire à des fonctions des seules quantités

$$u\qquad \text{et}\qquad v^2+w^2=\iota^2,$$

on doit avoir alors, dans les formules (46) et (47),

$$\mathrm{G}u^2+\mathrm{H}v^2+\mathrm{I}w^2=\mathrm{G}u^2+\mathrm{H}\iota^2=\mathrm{G}u^2+\mathrm{H}(v^2+w^2),$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}u^4+\mathrm{M}v^4+\mathrm{N}w^4+6\mathrm{P}u^2w^2+6\mathrm{Q}w^2u^2+6\mathrm{R}u^2v^2\\&\quad=\mathrm{L}u^4+6\mathrm{Q}u^2\iota^2+\mathrm{M}\iota^4=\mathrm{L}u^4+6\mathrm{Q}u^2(v^2+w^2)+\mathrm{M}(v^4+2v^2w^2+w^4),\end{aligned}$$

quels que soient u, v, w, et, par suite,

$$(107)\qquad \mathrm{H}=\mathrm{I},\qquad \mathrm{M}=\mathrm{N}=3\mathrm{P},\qquad \mathrm{Q}=\mathrm{R}.$$

Les conditions exprimées par ces dernières formules font évidemment partie de celles que donnent les formules (64).

En vertu des formules (107), jointes à la formule (86), les équations (46) et (47) donnent

$$(108)\qquad \mathfrak{I}=\mathrm{G}u^2+\mathrm{I}\iota^2+\ldots,$$

$$(109)\qquad \mathfrak{K}=\mathrm{S}m\frac{f(r)}{r^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\mathrm{L}u^4+\mathrm{R}u^2\iota^2+\frac{1}{2}\mathrm{P}\iota^4\right)+\ldots;$$

et, par suite, on tire des formules (87), (88), (89),

$$(110)\qquad \mathfrak{G}=(\mathrm{R}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{P}+\mathrm{I})\iota^2+\ldots,$$

$$(111)\qquad \mathfrak{H}=2\mathrm{P}+\ldots,$$

$$(112)\qquad \mathfrak{v}=2\mathrm{R}u+\ldots,$$

tandis que la première des formules (28) donne

$$(113)\qquad \mathfrak{L}=(\mathrm{L}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{R}+\mathrm{I})v^2+\ldots.$$

Les seconds membres de ces dernières équations peuvent être réduits à leurs premiers termes, lorsqu'on néglige la dispersion. On peut donc prendre alors

$$(114)\qquad \mathfrak{G}=(\mathrm{R}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{P}+\mathrm{I})(v^2+w^2),$$

$$(115)\qquad \mathfrak{H}=2\mathrm{P},$$

$$(116)\qquad \mathfrak{v}=2\mathrm{R}u,$$

$$(117)\qquad \mathfrak{L}=(\mathrm{L}+\mathrm{G})u^2+(\mathrm{R}+\mathrm{I})(v^2+w^2).$$

Alors aussi des formules (96) et (101), combinées avec les formules (5) et (12), on tire

$$(118)\qquad \Omega^2=(\mathrm{R}+\mathrm{G})a^2+(\mathrm{P}+\mathrm{I})(b^2+c^2)$$

et

$$(119)\qquad \left\{\begin{aligned}&[\Omega^2-(\mathrm{L}+\mathrm{G})a^2-(\mathrm{R}+\mathrm{I})(b^2+c^2)]\\&\quad\times[\Omega^2-(\mathrm{R}+\mathrm{G})a^2-(2\mathrm{P}+\mathrm{R}+\mathrm{I})(b^2+c^2)]-4\mathrm{R}^2a^2(b^2+c^2)=0\end{aligned}\right.$$

Quand on se propose seulement de tirer de l'équation (57) les valeurs approchées des Ω^2 relatives aux deux rayons lumineux observés, on peut remplacer cette équation par une autre plus simple. En effet, quoiqu'il existe un grand nombre de milieux doués de la double réfraction, et dans lesquels la lumière ne se propage pas en tous sens suivant les mêmes lois, par conséquent, un grand nombre de milieux dans lesquels les conditions (64) cessent d'être rigoureusement remplies, néanmoins, comme dans ces milieux mêmes la différence entre les vitesses de propagation des deux rayons observés est ordinairement très petite, il est naturel de penser que les conditions (64) s'y vérifient approximativement, ainsi que les formules (81), et qu'en conséquence les valeurs de Ω^2 relatives aux deux rayons lumineux y diffèrent très peu de chacune des quantités

$$\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B},\quad \mathfrak{C}.$$

Cela posé, les valeurs de Ω relatives aux deux rayons lumineux fourniront généralement de très petites valeurs des différences

$$\Omega^2-\mathfrak{A},\quad \Omega^2-\mathfrak{B},\quad \Omega^2-\mathfrak{C}, \tag{120}$$

par conséquent, de très grandes valeurs de chacune des fractions comprises dans le premier membre de l'équation (57). On pourra donc, dans un calcul approximatif, négliger le second membre par rapport aux fractions dont il s'agit, et réduire l'équation (57) à celle-ci

$$\frac{\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{A}}+\frac{\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{B}}+\frac{\left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2}{\Omega^2-\mathfrak{C}}=0, \tag{121}$$

ou même, puisque les quantités P, Q, R sont peu différentes l'une de l'autre, à la simple formule

$$\frac{a^2}{\Omega^2-\mathfrak{A}}+\frac{b^2}{\Omega^2-\mathfrak{B}}+\frac{c^2}{\Omega^2-\mathfrak{C}}=0. \tag{122}$$

Lorsque, dans cette dernière formule, on fait disparaître les dénominateurs, l'équation que l'on obtient, savoir

$$a^2(\Omega-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})+b^2(\Omega^2-\mathfrak{C})(\Omega^2-\mathfrak{A})+c^2(\Omega-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})=0, \tag{123}$$

ou

$$\Omega^4-[\mathfrak{A}(b^2+c^2)+\mathfrak{B}(c^2+a^2)+\mathfrak{C}(a^2+b^2)]\Omega^2+\mathfrak{B}\mathfrak{C}a^2+\mathfrak{C}\mathfrak{A}b^2+\mathfrak{A}\mathfrak{B}c^2=0, \tag{124}$$

est par rapport à Ω^2, non plus du troisième degré, mais du deuxième degré seulement, et ses deux racines représentent les carrés des valeurs approchées des vitesses avec lesquelles se propagent les deux rayons lumineux observés dans un milieu doué de la double réfraction. On arriverait encore aux mêmes conclusions en partant de l'équation (58). En effet, si l'on considère comme très petites du premier ordre les différences qui existent soit entre les trois quantités G, H, I, soit entre les six quantités

$$\mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N},\quad 3\mathrm{P},\quad 3\mathrm{Q},\quad 3\mathrm{R},$$

les différences (120) seront elles-mêmes très petites du premier ordre, et comme, dans l'équation (58), les termes que renferme le premier membre seront du deuxième ordre, on pourra, vis-à-vis de chacun de ces termes, négliger le dernier membre, qui sera du troisième ordre, et réduire l'équation (58) à

$$\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})+\left(\frac{b}{\mathrm{Q}}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{C})(\Omega^2-\mathfrak{A})+\left(\frac{c}{\mathrm{R}}\right)^2(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})=0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{a^2(\Omega^2-\mathfrak{B})(\Omega^2-\mathfrak{C})+b^2(\Omega^2-\mathfrak{C})(\Omega^2-\mathfrak{A})+c^2(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B})}{\mathrm{P}^2}$$
$$=b^2\left(\frac{1}{\mathrm{P}^2}-\frac{1}{\mathrm{Q}^2}\right)(\Omega^2-\mathfrak{C})(\Omega^2-\mathfrak{A})+c^2\left(\frac{1}{\mathrm{P}^2}-\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)(\Omega^2-\mathfrak{A})(\Omega^2-\mathfrak{B}).$$

Or, les différences

$$\frac{1}{\mathrm{P}^2}-\frac{1}{\mathrm{Q}^2},\quad \frac{1}{\mathrm{P}^2}-\frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

ou

$$\frac{\mathrm{Q}+\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2\mathrm{Q}^2}(\mathrm{Q}-\mathrm{P}),\quad \frac{\mathrm{R}+\mathrm{P}}{\mathrm{R}^2\mathrm{P}^2}(\mathrm{R}-\mathrm{P})$$

étant évidemment du premier ordre, le second membre de la dernière formule pourra encore être négligé comme étant du deuxième ordre, et, par suite, cette formule pourra être réduite à l'équation (124).

Concevons maintenant que, dans un milieu réfringent qui offre trois axes de polarisation respectivement parallèles aux axes rectangulaires des x, y, z, le plan d'une onde soit perpendiculaire à l'un de ces axes, par exemple à l'axe des x, on aura

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \tag{125}$$

et les formules (56), (57), relatives au cas où l'on néglige la dispersion, donneront

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\Omega^2 - \mathfrak{A} - 2\frac{QR}{P}a^2\right)A = 0, \\ &(\Omega^2 - \mathfrak{B})B = 0, \\ &(\Omega^2 - \mathfrak{C})C = 0, \end{aligned}\right. \tag{126}$$

$$\left(\Omega^2 - \mathfrak{A} - \frac{2QR}{P}a^2\right)(\Omega^2 - \mathfrak{B})(\Omega^2 - \mathfrak{C}) = 0, \tag{127}$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (51),

$$\left\{\begin{aligned} &(\Omega^2 - L - G)A = 0, \\ &(\Omega^2 - R - G)B = 0, \\ &(\Omega^2 - Q - G)C = 0, \end{aligned}\right. \tag{128}$$

$$(\Omega^2 - L - G)(\Omega^2 - R - G)(\Omega^2 - Q - G) = 0. \tag{129}$$

Des trois valeurs de Ω^2 fournies par l'équation (129), savoir

$$L + G, \quad R + G, \quad Q + G, \tag{130}$$

la première se réduit à $3R + I$, et les deux dernières à $R + I$, lorsque les conditions (64) sont rigoureusement remplies. Les deux dernières sont donc celles qui se rapportent aux deux rayons lumineux observés, et, en vertu des formules (128), on aura pour ces deux rayons, en supposant les plans des ondes perpendiculaires à l'axe des x, ou

$$\Omega^2 = R + G, \quad A = 0, \quad C = 0, \tag{131}$$

par conséquent

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \tag{132}$$

ou

$$\Omega^2 = Q + G, \quad A = 0, \quad B = 0, \tag{133}$$

par conséquent

$$\xi = 0, \quad \eta = 0. \tag{134}$$

Donc, lorsque les plans des ondes sont perpendiculaires à l'axe des x et parallèles au plan des y, z, les vibrations des molécules sont parallèles à l'axe des y, en vertu des formules (132), et se propagent avec la vitesse $\sqrt{R + G}$, ou bien elles sont, en vertu des formules (134), parallèles à l'axe des z et se propagent avec la vitesse $\sqrt{Q + G}$. Par des raisonnements semblables, on prouve généralement que les vitesses de propagation des ondes renfermées dans des plans perpendiculaires aux axes de polarisation pris pour axes des x, y, z sont respectivement égales aux racines carrées des quantités

$$R + G, \quad Q + G \tag{135}$$

si les plans des ondes sont perpendiculaires à l'axe des x,

$$P + H, \quad R + H \tag{136}$$

si les plans des ondes sont perpendiculaires à l'axe des y,

$$Q + I, \quad P + I \tag{137}$$

si les plans des ondes sont perpendiculaires à l'axe des z.

Ajoutons que les vibrations des molécules sont parallèles à l'axe des x, ou à l'axe des y, ou à l'axe des z, suivant qu'il s'agira des ondes dans lesquelles la vitesse de propagation aura pour carré l'une des quantités

$$Q + I, \quad R + H, \tag{138}$$

ou

$$R + G, \quad P + I, \tag{139}$$

ou

$$P+H, \quad Q+G. \tag{140}$$

Ce que Fresnel appelle le *plan de polarisation* d'un rayon lumineux, c'est le plan perpendiculaire aux droites suivant lesquelles sont dirigées les vibrations des molécules éthérées. Cela posé, comme l'expérience démontre que, parmi ces ondes dont les plans sont perpendiculaires aux axes de polarisation, celles qui répondent à des rayons dont les plans de polarisation sont les mêmes se propagent avec la même vitesse, il est clair qu'il devra y avoir égalité entre les deux expressions (138), ou (139), ou (140). Ainsi

$$G, \quad H, \quad I, \quad P, \quad Q, \quad R$$

devront généralement vérifier les trois conditions

$$Q+I=R+H, \qquad R+G=P+I, \qquad P+H=Q+G, \tag{141}$$

que l'on peut réduire aux deux équations comprises dans la formule

$$P-G=Q-H=R-I. \tag{142}$$

Si la propagation de la lumière s'effectue en tous sens, suivant les mêmes lois, autour de tout axe parallèle à l'axe des x, les conditions (141) se réduiront à la seule équation

$$R+G=P+I, \tag{143}$$

et la vitesse de propagation deviendra indépendante de a, b, c, pour l'un des deux rayons lumineux observés, savoir, pour celui qui correspond aux formules (103), (118) et à des vibrations lumineuses dirigées, dans les plans des ondes, perpendiculairement à l'axe des x. En effet, on tirera de la formule (118), jointe à la condition (143),

$$\Omega^2 = R+G = P+I. \tag{144}$$

Alors le rayon, dont la vitesse de propagation sera indépendante de a, b, c, par conséquent indépendante de la direction du plan de l'onde et déterminée par la formule (144), se nommera *le rayon ordinaire*. L'autre rayon, correspondant à des vibrations moléculaires comprises,

non plus rigoureusement, mais sensiblement dans les plans des ondes, et perpendiculaires aux vibrations excitées dans le premier, se nommera *le rayon extraordinaire*.

Revenons maintenant aux formules (141), et désignons par

$$\Omega', \quad \Omega'', \quad \Omega'''$$

les vitesses de propagation des ondes, lorsque les plans des ondes sont parallèles à l'un des deux plans coordonnés qui renferment l'axe des x, s'il s'agit de Ω', l'axe des y, s'il s'agit de Ω'', l'axe des z, s'il s'agit de Ω'''. On aura

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega'^2 = Q+I = R+H, \qquad \Omega''^2 = R+G = P+I, \\ &\qquad\qquad \Omega'''^2 = P+H = Q+G. \end{aligned}\right. \tag{145}$$

Posons, en outre,

$$\left\{\begin{aligned} &L - 2\frac{QR}{P} + G = \Omega'^2 + \Theta', \qquad M - \frac{2RP}{Q} + H = \Omega''^2 + \Theta'', \\ &\qquad\qquad N - 2\frac{PQ}{R} + I = \Omega'''^2 + \Theta'''. \end{aligned}\right. \tag{146}$$

Les formules (51) donneront

$$\mathfrak{A} = \Omega'^2 + \Theta' a^2, \qquad \mathfrak{B} = \Omega''^2 + \Theta'' b^2, \qquad \mathfrak{C} = \Omega'''^2 + \Theta''' c^2. \tag{147}$$

Si, d'ailleurs, la lumière se propage en tous sens suivant les mêmes lois autour d'un point quelconque, les formules (145), (146), jointes aux conditions (64), donneront

$$\Omega'^2 = \Omega''^2 = \Omega'''^2 = R+I, \tag{148}$$

$$\Theta' = \Theta'' = \Theta''' = 0; \tag{149}$$

et, par suite, les équations (147) reproduiront la formule (81). Enfin, si la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens autour de tout axe parallèle à l'axe des x, les formules (145), (146), jointes aux conditions (107), donneront

$$\Omega'^2 = R+I, \tag{150}$$

$$\Omega''^2 = \Omega'''^2 = R+G = P+I, \tag{151}$$

$$\Theta' = L - 2\frac{R^2}{P} + G - \Omega'^2, \qquad \Theta'' = \Theta''' = 0; \tag{152}$$

par conséquent, les formules (147) se réduiront à

$$\mathfrak{A} = \Omega'^2 + \Theta' a^2, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \Omega''^2. \tag{153}$$

En vertu de ces dernières, l'équation (123) deviendra

$$(\Omega^2 - \Omega''^2)[\Omega^2 - \Omega''^2 a^2 - (\Omega'^2 + \Theta' a^2)(b^2 + c^2)] = 0 \tag{154}$$

et fournira deux valeurs de Ω^2, dont l'une

$$\Omega^2 = \Omega''^2 = R + G = P + I \tag{155}$$

ne différera pas de celle que présente l'équation (144); tandis que l'autre sera

$$\Omega^2 = \Omega''^2 a^2 + (\Omega'^2 + \Theta' a^2)(b^2 + c^2). \tag{156}$$

Les valeurs correspondantes de Ω seront les vitesses de propagation de la lumière dans les rayons ordinaire et extraordinaire. Donc, la vitesse de propagation sera représentée dans le rayon ordinaire par Ω'' et par Ω' dans le rayon extraordinaire, si le plan de l'onde vient à passer par l'axe des x, c'est-à-dire si l'on a

$$a = 0, \qquad b^2 + c^2 = 1. \tag{157}$$

Si, d'ailleurs, on nomme λ l'angle formé par la perpendiculaire au plan d'une onde avec l'axe des x, on aura généralement

$$a^2 = \cos^2\lambda, \qquad b^2 + c^2 = \sin^2\lambda, \tag{158}$$

et, par suite, la formule (156) pourra s'écrire ainsi

$$\Omega^2 = \Omega''^2 \cos^2\lambda + \Omega'^2 \sin^2\lambda + \Theta' \sin^2\lambda \cos^2\lambda. \tag{159}$$

Telle est l'équation qui, dans un milieu où la propagation de la lumière s'effectue en tous sens suivant les mêmes lois autour de tout axe parallèle à l'axe des x, devra fournir généralement la vitesse de propagation Ω dans le rayon extraordinaire. Mais, pour s'accorder avec les observations des physiciens, cette formule doit se réduire à

$$\Omega^2 = \Omega''^2 \cos^2\lambda + \Omega'^2 \sin^2\lambda, \tag{160}$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\Theta' = 0. \tag{161}$$

Donc, les trois conditions exprimées par la formule (149) se vérifient non seulement lorsque la lumière se propage en tous sens, suivant les mêmes lois, autour d'un point quelconque; mais encore lorsqu'elle se propage en tous sens, suivant les mêmes lois, autour d'une droite quelconque parallèle à l'axe des x ou, plus généralement, à l'un des trois axes de polarisation. Il est donc naturel de penser que ces conditions se vérifient toujours, quelle que soit la nature du milieu réfringent. En admettant cette hypothèse, on verra les formules (145), (146) se réduire à

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega'^2 &= L - 2\frac{QR}{P} + G = R + H = Q + I,\\
\Omega''^2 &= R + G = M - 2\frac{RP}{Q} + H = P + I,\\
\Omega'''^2 &= Q + G = P + H = N - 2\frac{PQ}{R} + I;
\end{aligned}\right. \tag{162}$$

par suite, les formules (51) donneront

$$\mathfrak{A} = \Omega'^2, \qquad \mathfrak{B} = \Omega''^2, \qquad \mathfrak{C} = \Omega'''^2, \tag{163}$$

et l'équation (122) ou (124) deviendra

$$\frac{a^2}{\Omega^2 - \Omega'^2} + \frac{b^2}{\Omega^2 - \Omega''^2} + \frac{c^2}{\Omega^2 - \Omega'''^2} = 0, \tag{164}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned}
&\Omega^4 - [\Omega'^2(b^2 + c^2) + \Omega''^2(c^2 + a^2) + \Omega'''^2(a^2 + b^2)]\\
&\qquad + \Omega''^2\Omega'''^2 a^2 + \Omega'''^2\Omega'^2 b^2 + \Omega'^2\Omega''^2 c^2 = 0.
\end{aligned}\right. \tag{165}$$

L'équation (165) fournit, comme on devait s'y attendre, deux valeurs de Ω, respectivement équivalentes à deux des trois quantités

$$\Omega', \quad \Omega'', \quad \Omega''',$$

lorsque deux des trois cosinus

$$a, \quad b, \quad c$$

s'évanouissent, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque les plans des ondes sont perpendiculaires à l'un des axes de polarisation.

Les formules (162) comprennent les suivantes

$$(166)\qquad \begin{cases} L-2\dfrac{QR}{P}G=R+H=Q+I, \\ R+G=M-2\dfrac{RP}{Q}+H=P+I, \\ Q+G=P+H=N-2\dfrac{PQ}{R}+I, \end{cases}$$

et, comme chacune de ces dernières établit deux relations différentes entre les coefficients

$$G,\ H,\ I;\quad L,\ M,\ N;\quad P,\ Q,\ R,$$

il semble qu'en vertu des formules (162) ces coefficients se trouvent assujettis à six conditions distinctes. Mais ces six conditions se réduisent évidemment à cinq, puisque les trois conditions (141) peuvent être réduites aux deux équations comprises dans la formule (142). D'autre part, en combinant entre elles, par voie de soustraction, d'abord la première et la deuxième des formules (166), puis la première et la troisième, on en tirera

$$L-2\frac{QR}{P}-R=R+\frac{2RP}{Q}-M=Q-P,$$
$$L-2\frac{QR}{P}-Q=R-P=Q+\frac{2PQ}{R}-N,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(167)\qquad \begin{cases} L=Q+R+2\dfrac{QR}{P}-P, \qquad M=R+P+2\dfrac{RP}{Q}-Q, \\ N=P+Q+2\dfrac{PQ}{R}-R. \end{cases}$$

Enfin, en considérant les différences

$$Q-P,\quad R-P,$$

comme très petites du premier ordre et en négligeant les quantités du

second ordre, on verra l'expression

$$Q+R+2\frac{QR}{P}-P=3(Q+R-P)+2\frac{(Q-P)(R-P)}{P}$$

se réduire à

$$3(Q+R-P),$$

et les formules (167) à

$$(168)\qquad L=3(Q+R-P),\qquad M=3(R+P-Q),\qquad N=3(P+Q-R),$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(169)\qquad M+N=6P,\qquad N+L=6Q,\qquad L+M=6R.$$

Donc, les seules relations établies par les formules (162) entre les coefficients

$$G,\ H,\ I,\ L,\ M,\ N,\ P,\ Q,\ R$$

sont les cinq conditions renfermées dans la formule (142) et dans les équations (168) ou (169). D'ailleurs, ces dernières équations s'accordent avec les conditions

$$(170)\qquad \begin{cases} (M-P)(N-P)=6P^2, \qquad (N-Q)(L-Q)=6Q^2, \\ (L-R)(M-R)=6R^2, \end{cases}$$

obtenues dans les *Exercices de Mathématiques*. En effet, la première des conditions (170) peut s'écrire ainsi

$$[2P+(M-3P)][2P+(N-3P)]=4P^2,$$

ou

$$2P(M+N-6P)+(M-3P)(N-3P)=0,$$

et, en négligeant dans le premier membre de la dernière formule le produit

$$(M-3P)(N-3P),$$

qui est une quantité très petite du second ordre, on retrouve la première des équations (169).