II. Abschnittes bildet der Satz[1]), dass der Uebergang von einem gradlinigen Coordinatensysteme zu einem anderen den Grad einer Curvengleichung nicht verändern könne.

Der III. Abschnitt wendet die allgemeinen Lehren des II. Abschnittes auf bestimmte Aufgaben an, welche zwar keineswegs des Interesses entbehren, uns aber doch nicht zur Berichterstattung verpflichten. Die Bemerkung mag genügen, dass dort De Guas Eliminationsverfahren (S. 577) mehrfach zur Anwendung gelangt.

115. Kapitel.

Analytische Geometrie 1740—1748. Maclaurin. Eulers Introductio, Band II.

Etwa zur gleichen Zeit, in welcher De Guas Usage de l'analyse de Descartes in den Buchhandel kam, gab Edmund Stone in den P. T. zwei Curven 3ten Grades an, welche Newton und Stirling in ihrer Aufzählung übersehen hatten[2]), und anderthalb Jahre später dürfen wir einen in derselben Zeitschrift veröffentlichten Aufsatz von De Castillon über eine besondere Curve 4ten Grades erwähnen[3]), welcher er den Namen der Cardioide beilegte, nachdem Louis Carré[4]) (1663—1711), ein Schüler von Varignon, im Februar 1705 die Curve zum Gegenstande einer Untersuchung gemacht hatte[5]), in welcher nicht einmal ihre Gestalt vollständig erkannt war, und in welcher ein gewisser Koenersma als Vorgänger auf diesem Gebiete erwähnt wurde. Der richtige Name dürfte Koërsma sein, wahrscheinlich ein Holländer Jacob Koërsma, von welchem eine kleine Druckschrift von 1690 bekannt ist[6]). Die Definition der Curve (Fig. 123) lässt sie als den Ort des Punktes N erkennen, der auf irgend einer von dem festen Punkte A einer gegebenen Kreislinie ausgehenden Sehne gefunden wird, wenn von dem zweiten Kreisdurchschnitte M aus dem

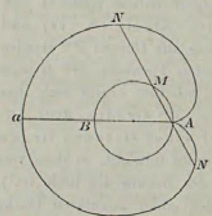

Fig. 123.

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 340. [2]) P. T. XLI, 319—320, Nr. 456, für Januar bis Juni 1740. [3]) Ebenda 778—781, Nr. 461, für August bis December 1741. [4]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1711. *Histoire* pag. 102—107. [5]) Ebenda. Année 1705, pag. 56—61. [6]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1898 S. 56.

Durchmesser AB des Kreises gleiche Strecken MN nach beiden Seiten abgeschnitten werden.

Der 1742 erschienene IV. Band der Gesammtwerke von Johann Bernoulli würde uns veranlassen müssen, an dieser Stelle einen Aufsatz über die kürzesten Linien auf gekrümmten Oberflächen zu besprechen, wir ziehen es aber vor, ihn nebst theils früheren, theils späteren Abhandlungen ähnlichen Inhaltes von Euler und Clairaut im 117. Kapitel zu behandeln.

Eine Schrift von Patrick Murdoch[1]) († 1774) über Newtons Schattenerzeugung der Curven[2]) gelangte 1746 zur Ausgabe, ist uns aber nie zu Gesicht gekommen.

Wir haben im 106. Kapitel über die Algebra Maclaurins berichtet, deren Druck 1748 sich vollendete. Wir haben dort gelegentlich (S. 589) von einem aus 65 Seiten bestehenden geometrischen Anhange gesprochen, und gegenwärtig, wo wir im Begriffe sind, unsere damalige Zusage erfüllend den Inhalt des Anhanges zu schildern, müssen wir zugleich unsere Leser daran erinnern, dass Maclaurin Braikenridge gegenüber von einem geometrischen Zusatze zu einem Kapitel seiner Algebra gesprochen hat (S. 792). Wir müssen daran erinnern, um zu betonen, dass der 1748 gedruckte Anhang sich nicht vollständig mit Maclaurins Ankündigung deckt, eine auch uns etwas räthselhafte Thatsache. Man kann den Herausgebern von Maclaurins nachgelassener Algebra nur beipflichten, dass sie dem Anhange[3]) eine neu beginnende Seitenzählung verliehen, denn es handelt sich in ihm nirgend um algebraische Dinge, man kann aber ebenso nur einverstanden damit sein, dass die Schrift als Anhang zur Algebra gedruckt wurde, denn die in ihr gezogenen Schlussfolgerungen sind trotz des geometrischen Inhaltes durchaus algebraisch. Maclaurin hat selbst die Trennung durch einen Wechsel in der Sprache herausgefordert, indem er die Algebra englisch, den Anhang lateinisch verfasste. Dessen Titel lautet: *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus.* Nach einer Einleitung von $1\frac{1}{2}$ Seiten folgt ein I. Abschnitt über geometrische Linien im Allgemeinen[4]), ein II. Abschnitt von den Kegelschnitten[5]), ein III. Abschnitt von den cubischen Curven[6]).

Aus dem I. Abschnitte, welcher die Grundlage der beiden anderen bildet, heben wir Folgendes hervor. Die Gleichung einer Curve

[1]) Poggendorff II, 240—241. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 146 (deutsch 142). [3]) Eine französische Uebersetzung des „*Appendix*" mit Noten und Zusätzen findet sich in E. de Jonquières, *Mélanges de géométrie pure* (1856) pag. 197—261. [4]) Maclaurin, *Appendix* pag. 2—29: *De lineis geometricis in genere.* [5]) Ebenda pag. 30—36: *De lineis secundi ordinis sive sectionibus conicis.* [6]) Ebenda pag. 37—65: *De lineis tertii ordinis.*

n^{ten} Grades wird, nach y geordnet, $y^n - (ax + b)y^{n-1} + (cx^2 - dx + e)y^{n-2} - \cdots = 0$ heissen. Durch die Substitution $y = u + \frac{ax+b}{n}$ entsteht eine nach u geordnete Gleichung wieder vom n^{ten} Grade, in welcher aber kein Glied u^{n-1} vorkommt, d. h. die Summe positiver und negativer u, welche zu einem bestimmten x gehören, ist 0, beziehungsweise die Abscissenaxe der Curve ist ein Durchmesser derselben[1]). **Stirling** hatte (S. 434) den gleichen Satz fast genau ebenso bewiesen, und an Stirling (S. 435) erinnert auch der Beweis des **Newtonschen** Satzes von den Producten der Abschnitte einer Curventransversale gestützt auf das von y freie letzte Glied der Curvengleichung[2]). Nun kommt Maclaurin zu einem wichtigen von ihm entdeckten Satze. Seien (Fig. 124) von P aus drei Gerade $PABC$, $Pabc$, $PDIE$ bis zum Durchschnitte mit einer Curve gezogen, welche beispielsweise als 3^{ten} Grades angenommen wird, dann stehen nach dem eben erwähnten Productensatze $AP \cdot BP \cdot CP$ und $aP \cdot bP \cdot cP$ in einem constanten Verhältnisse.

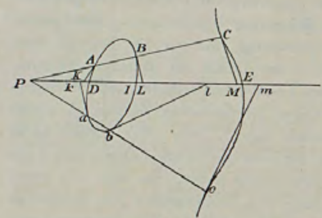

Fig. 124.

Die logarithmischen Differentiale solcher Producte sind aber, wie Maclaurin in einem Zwischensatze behauptet (natürlich ohne dieses Wortes oder der Differentialzeichen sich zu bedienen, statt deren er von Fluxionspünktchen Gebrauch macht), einander gleich, d. h. es ist $\frac{dAP}{AP} + \frac{dBP}{BP} + \frac{dCP}{CP} = \frac{daP}{aP} + \frac{dbP}{bP} + \frac{dcP}{cP}$. Eine weitere Zwischenbemerkung, von Maclaurin ohne Beweis und ohne Unterstützung durch eine Figur als etwas ganz Bekanntes[3]) ausgesprochen, ist folgende: Zieht man (Fig. 125) in A die Berührungslinie AK, verschiebt AP unendlich wenig parallel zur Anfangslage, so ist $\frac{A'L}{AL} = \frac{AP}{PK}$, aber $A'L = dAP$, $AL = PP' = dEP$, also $\frac{dAP}{dEP} = \frac{AP}{PK}$ und $\frac{dAP}{AP} = \frac{dEP}{PK}$. Auf ganz ähnliche Weise ergeben sich $\frac{dBP}{BP} = \frac{dEP}{PL}$, $\frac{daP}{aP} = \frac{dEP}{Pk}$ u. s. w. Das Lemma von dem logarithmischen Differen-

[1]) Maclaurin, *Appendix* pag. 5—7. [2]) Ebenda pag. 7—8. [3]) *notissimum.*

tiale der Producte führt also zu dem Satze $\frac{dEP}{PK} + \frac{dEP}{PL} + \frac{dEP}{PM} = \frac{dEP}{Pk} + \frac{dEP}{Pl} + \frac{dEP}{Pm}$, beziehungsweise zu $\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} + \frac{1}{Pm}$, und die Summe dieser reciproken Werthe ist auch $\frac{1}{PD} + \frac{1}{PI} + \frac{1}{PE}$. In Worten: Wenn man durch einen in der Ebene einer geometrischen Curve liegenden festen Punkt eine Transversale zieht, welche die Curve in so vielen Punkten trifft, als sie Dimensionen hat, darauf in diesen Punkten Tangenten an die Curve zieht und endlich durch den festen Punkt eine zweite Gerade in willkürlicher Richtung, die aber unveränderlich bleibt, legt, so wird die Summe der reciproken Werthe der Abstände von dem festen Punkte nach den Durchschnittspunkten der genannten Tangenten mit der festen Geraden constant sein, nämlich gleich der Summe der reciproken Abstände des Punktes von den Durchschnittspunkten der festen Geraden mit der Curve[1]). Ein anderer Satz[2]) hatte sich in den nachgelassenen Papieren von **Cotes** aufgefunden, woher **Robert Smith** ihn Maclaurin mittheilte, der dann seinerseits einen Beweis[3]) dazu erfand. Der Satz heisst: Wenn man um einen festen Punkt P eine Transversale in Drehung versetzt, welche eine geometrische Curve in so vielen Punkten $A, B, C \cdots$ schneidet, als sie Dimensionen hat und man auf dieser Transversalen in jeder ihrer Lagen einen solchen Punkt M annimmt, dass $\frac{1}{PM}$ das arithmetische Mittel aus $\frac{1}{PA}, \frac{1}{PB}, \frac{1}{PC} \cdots$ ist, so hat der Punkt M zu seinem geometrischen Orte eine gerade Linie. Maclaurin nennt dabei PM das harmonische Mittel, *medium harmonicum*, von $PA, PB, PC \cdots$.

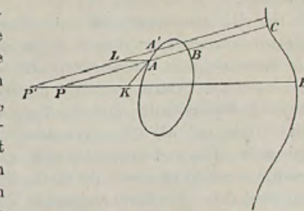

Fig. 125.

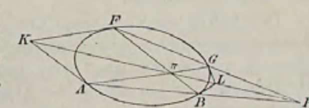

Fig. 126.

Im II. Abschnitte dürfte folgender Satz Maclaurins Eigenthum sein. Seien (Fig. 126) A, B, G, F vier Punkte eines

[1]) Maclaurin, *Appendix* pag. 11. [2]) Ebenda pag. 2. [3]) Ebenda pag. 24—25.

Kegelschnittes, P der Durchschnittspunkt der Geraden AB, FG, Π der AG, BF, so schneiden die Tangenten AK, FK, beziehungsweise BL, GL, einander in Punkten K, L, welche mit P und Π auf einer Geraden liegen [1]). Das Pascalsche Sechseck ist kurz erwähnt [2]). Maclaurin hatte es schon früher in seiner Abhandlung in den P. T. von 1735 und wiederholt in den Treatise of fluxions von 1742 behandelt.

Im III. Abschnitte sind viele Sätze bemerkenswerth. Wir beschränken unsere Auswahl auf einige wenige und kürzen den Wortlaut dahin ab, dass wir die Curve 3ten Grades einfach Curve nennen. Schneidet eine Gerade die Curve in drei reellen Punkten, zieht man an jeden Durchschnittspunkt die Tangente, welche noch einen weiteren Punkt mit der Curve gemeinsam haben wird, so liegen diese drei neuen Durchschnittspunkte auf einer Geraden [3]). Werden aus einem Curvenpunkte zwei Berührungslinien an die Curve gezogen, schneidet dann die Berührungssehne die Curve in einem weiteren Punkte, und werden an diesen und an den ersten Punkt die Berührungslinien gezogen, so schneiden letztere einander in einem Curvenpunkte [4]). Die Verbindungsgerade zweier Inflexionspunkte der Curve geht durch den dritten Inflexionspunkt [5]). Das ist der Satz, welchen De Gua schon 1740 veröffentlicht hatte (S. 797), was aber Maclaurin sehr gut unbekannt geblieben sein kann. Auch diese unsere sehr knapp gewählten Auszüge bestätigen das Urtheil des berufensten Kenners [6]), der den Anhang ein Werk von bewunderungswürdiger Eleganz und Präcision genannt hat.

Das Jahr 1748, in welchem Maclaurins Anhang bekannt wurde, war auch das der Veröffentlichung von Eulers Introductio, und wenn wir ihrem zweiten geometrischen Bande auch nicht ein ganzes Kapitel widmen, so verlangt er doch eine einigermassen ausführliche Berichterstattung über seine zweiundzwanzig Kapitel einer analytischen Geometrie der Ebene, denen ein Anhang von den Oberflächen in sechs Kapiteln nachfolgt.

Das 1. Kapitel, Von den Curven überhaupt, unterscheidet zwischen algebraischen oder geometrischen und transcendenten, zwischen ein- und mehrdeutigen Curven, bespricht die imaginären Durchschnittspunkte der Curven mit der Abscissenaxe, die nur paarweise auftreten, und ebenso die gleichfalls paarweise auftretenden unendlichen Aeste.

[1]) Maclaurin, *Appendix* pag. 31. [2]) Ebenda pag. 33, § 44. [3]) Ebenda pag. 39, § 57. [4]) Ebenda pag. 40, § 59. [5]) Ebenda pag. 44, § 68. [6]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 146 (deutsch S. 143).

Das 2. Kapitel, Von der Veränderung der Coordinaten, setzt nur geradlinige Coordinaten voraus, und zwar zunächst rechtwinklige. Die Coordinatenveränderung wird bei Verlegung des Anfangspunktes zu den Gleichungen $x = t - f$, $y = u - g$ führen, bei hierauf vorgenommener Drehung des rechtwinklig bleibenden Coordinatenkreuzes um den Winkel q zu den Gleichungen: $x = u \cdot \sin q + t \cdot \cos q - f$, $y = u \cdot \cos q - t \cdot \sin q - g$ oder $x = mu + nt - f$, $y = nu - mt - g$ mit $m^2 + n^2 = 1$. Wendet man sie z. B. auf die der Abscissenaxe in der Entfernung a parallele Gerade an, welche die Gleichung $y = a$ haben muss, so erscheint $a = nu - mt - g$ oder $nku - mkt - k(g + a) = 0$, beziehungsweise $\alpha u + \beta t + b = 0$ als allgemeine Gleichung einer Geraden im rechtwinkligen Coordinatensysteme. In zweiter Linie wird von der Rechtwinkligkeit des Coordinatensystems Abstand genommen und stufenweise die Umwandlung eines rechtwinkligen Systems in ein schiefwinkliges unter Beibehaltung der Richtung der Abscissenaxe oder in ein beliebiges schiefwinkliges System vorgenommen.

Das 3. Kapitel, Von der Eintheilung der algebraischen krummen Linien in Ordnungen, zeigt den Grad der Gleichungen als naturgemässen Eintheilungsgrund, weil derselbe durch Wahl eines anderen Coordinatensystems nicht verändert wird. Wohl aber kann die Art der Curve innerhalb derselben Ordnung sich verändern, je nachdem ein oder das andere Coordinatensystem zu Grunde liegt. Die Gleichung, welche z. B. im rechtwinkligen Systeme die eines Kreises ist, bedeutet in einem schiefwinkligen Systeme eine Ellipse. Die durch eine Gleichung dargestellte Curve ist folglich nur dann vollständig gegeben, wenn man das zu Grunde liegende Coordinatensystem kennt. Auch bemerkt Euler, dass die allgemeinste Gleichung n^{ten} Grades zwischen x und y aus $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gliedern bestehe, und dass Gleichungen, deren Polynome in reelle Factoren zerfallen, eine Verbindung mehrerer von einander verschiedener Linien bedeuten.

Das 4. Kapitel, Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien einer jeden Ordnung, nennt als Wissenswürdigstes bei jeder Curve die Anzahl der Punkte, in welchen sie durch eine Gerade geschnitten wird, und die bei der Curve n^{ten} Grades höchstens n ist. Man kann also aus dem Vorhandensein von n Durchschnittspunkten einer Curve mit einer Geraden nur folgern, dass sie nicht algebraisch von niedrigerem als dem n^{ten} Grade sei, denn sie kann auch algebraisch von höherem Grade oder auch transcendent sein. Zur Bestimmung der $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Glieder der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades genügen $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungen, weil ein Coefficient als Einheit gewählt werden darf. Die $\frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungen können ebensoviele Punkte sein, durch welche die Curve hindurchzugehen hat, und man wählt, wenn solche Punkte gegeben sind, die Coordinatenaxen vortheilhaft so, dass einer der gegebenen Punkte Coordinatenanfangspunkt werde, ein zweiter auf der Abscissenaxe, ein dritter auf der Ordinatenaxe liege.

Das 5. Kapitel, Von den Linien der zweiten Ordnung, geht von der allgemeinsten Gleichungsform $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 = 0$ oder $y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$ aus, welche erkennen lässt, dass zu jedem x zwei reelle y gehören oder gar keines. Bei $\zeta = 0$ fällt allerdings das eine $y = \infty$ aus. Schneidet (Fig. 127) die Ordinate NMP die Curve wirklich in zwei Punkten N und M,

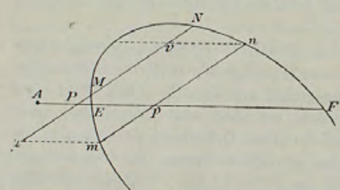

Fig. 127.

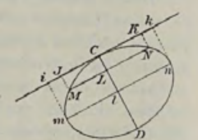

Fig. 128.

so sind die Ordinaten NP, MP diejenigen, welche zu $x = AP$ gehören, und ihre Summe ist der entgegengesetzt genommene Coefficient von y in der nach y quadratischen Gleichung, d. h. $PM + PN = -\frac{\varepsilon \cdot AP + \gamma}{\zeta}$. Eine andere Ordinate $nm \parallel NM$ liefert, da ihr Stück pm negativ ist, $pn - pm = -\frac{\varepsilon \cdot Ap + \gamma}{\zeta}$ und durch Subtraction beider Gleichungen von einander entsteht $PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon(Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta}$. Wird $m\mu \parallel n\nu \parallel AP$ gezogen, so zeigt sich $PM + pm + PN - pn = M\mu + N\nu$ und $\frac{M\mu + N\nu}{Pp} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, wo die einzigen Voraussetzungen in dem Parallelismus von MN und mn und von $n\nu$, $m\mu$ und von AP bestanden. Nun schiebe man (Fig. 128) die MN sich selbst parallel so weit fort, bis M und N in C zusammenfallen und die Sehne zur Berührungslinie wird, während immer noch $mn \parallel MN \parallel JC$ und CD die Axe darstellt, die parallel den mi, MJ, NK, nk verläuft. Während aber vorher $M\mu$, $N\nu$

nach gleicher Richtung sich erstreckten, ist bei CJ, CK und bei Ci, Ck das Entgegengesetzte der Fall, so dass dem vorigen Ergebnisse jetzt die Gleichungen entsprechen $\frac{CJ - CK}{MJ} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ und $\frac{Ci - Ck}{mi} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, aus welchem $Ci - Ck = \frac{mi}{MJ}(CJ - CK)$ folgt. Wählt man die von vornherein an keinerlei Bedingung geknüpfte Lage von CD so, dass die ihr parallelen MJ und NK derart in JK eintreffen, dass $CJ = CK$ oder $CJ - CK = 0$ wird, so muss auch $Ci - Ck = 0$ sein; oder, weil $CLMJ$, $CLNK$, $Clmi$, $Clnk$ lauter Parallelogramme sind, folgt aus $CJ = CK$ nicht bloss $LM = LN$, sondern auch $lm = ln$, d. h. die Gerade, welche von einem Curvenpunkte ausgehend eine der Berührungslinie an jenen Curvenpunkt parallele Sehne halbirt, muss auch jede andere ihr parallele Sehne halbiren und ist ein Durchmesser der Curve. Euler bezeichnet diese Eigenschaft der Curven 2ten Grades, die aus der Betrachtung des Coefficienten der ersten Potenz von y in der Curvengleichung ermittelt wurde, als erste Haupteigenschaft, welcher eine zweite zur Seite steht, zu der er von dem y nicht mehr enthaltenden Gliede $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ aus gelangt. Wenn (Fig. 127) die zur Abscissenaxe gewählte AP die Curve in zwei Punkten E und F schneidet, so ist dort $y = 0$, und weil ebendort die Curvengleichung erfüllt wird, so muss in E und F auch $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$ sein, d. h. diese letztere Gleichung hat die zwei reellen Wurzeln $x = AE$ und $x = AF$ oder es ist $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF)$. Derselbe Ausdruck $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ ist aber bei jedem x, z. B. bei $x = AP$, wodurch $x - AE = -PE$, $x - AF = -PF$, $\frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta} PE \cdot PF$ wird, das Product der beiden dem $x = AP$ entsprechenden y (PM und PN). Man hat also $\frac{\delta}{\zeta} PE \cdot PF = PM \cdot PN$, $\frac{PM \cdot PN}{PE \cdot PF} = \frac{\delta}{\zeta}$, wo der Bruch $\frac{\delta}{\zeta}$ ausschliesslich von dem Winkel, welchen die beiden Coordinaten mit einander bilden, abhängt. Bleibt dieser unverändert, indem z. B. $mn \parallel MN$, so muss auch $\frac{pm \cdot pn}{pE \cdot pF} = \frac{\delta}{\zeta}$ sein. Daraus folgt leicht, dass, wenn zwei parallele Paare einander schneidender Sehnen einer Curve 2ten Grades gegeben sind, der Quotient aus dem Producte der Abschnitte der einen Sehne getheilt durch das Product der Abschnitte der anderen Sehne bei beiden Paaren der gleiche sein muss, und dieser Satz bildet nach

Euler die zweite Haupteigenschaft der Curven 2^{ten} Grades. Betrachtet man einen Durchmesser CD (Fig. 128) als die eine Sehne und wählt sie zugleich zur Abscissenaxe mit C als Anfangspunkt, nimmt man ferner die Berührungslinie CK in C zur Ordinatenaxe und betrachtet eine ihr parallele Sehne MN als die von CD in L geschnittene, so ist $\frac{CL \cdot LD}{ML \cdot LN}$ von constantem Werthe, der etwa $\frac{k}{h}$ heissen mag. Nun sei $CD = a$ die Länge des Durchmessers bis zu seinem zweiten Durchschnitte mit der Curve, $CL = x$, also $LD = a - x$, $ML = LN = y$, so erscheint $y^2 = \frac{h}{k}(ax - x^2)$ als Gleichung der Curve 2^{ten} Grades. An einer späteren Stelle wird $y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ als Gleichung irgend einer Curve 2^{ten} Grades, bezogen auf einen Durchmesser als Abscissenaxe und die durch ihn halbirten Sehnen als Ordinaten, gefunden, weil in diesem Coordinatensysteme zu jedem x zwei gleiche einander entgegengesetzte y gehören müssen, weshalb in der Curvengleichung die erste Potenz von y nicht vorkommen kann. Wir würden über das ganze Kapitel Satz für Satz berichten müssen, wollten wir Alles angeben, was Euler an merkwürdigen, wenn auch an sich nicht neuen, doch meistens in neuer Weise hergeleiteten Ergebnissen in ihm vereinigt hat. Wir erwähnen nur in aller Kürze den Nachweis des Vorhandenseins zweier zusammengehöriger Durchmesser, eines Mittelpunktes, zweier rechtwinklig zusammengehöriger Durchmesser, endlich zweier Punkte auf dem grösseren Hauptdurchmesser, welche symmetrisch zum Mittelpunkte liegend die von Euler zuerst als Definition benutzte Eigenschaft besitzen, die von ihnen bis zum Durchschnitte mit der Curve gezogenen Strecken rational durch die auf dem Hauptdurchmesser selbst gemessenen Abscissen jener Durchschnittspunkte ausdrücken zu lassen, und welche Brennpunkte heissen.

Das 6. Kapitel, Von den Arten der Linien 2^{ten} Grades, steht dem 5. an Eigenartigkeit und Neuheit der Behandlungsweise keineswegs nach. Aus der allgemeinen Gleichung $y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, welche man, da sie nur zwei zusammengehörige Durchmesser als Coordinatenaxen voraussetzt, durch Wahl eines Hauptdurchmessers zur Abscissenaxe auch als auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen betrachten kann, folgert Euler ein wesentlich verschiedenes Aussehen der Curve, je nachdem γ positiv oder negativ oder Null ist. Bei $\gamma > 0$ besitzt die Curve vier ins Unendliche fortlaufende Aeste, weil sowohl $x = \infty$ als $x = -\infty$ zu $y = \pm\infty$ führt. Bei $\gamma < 0$ besitzt die Curve keinen Punkt im Unendlichen, weil y imaginär wird, wenn $x = \pm\infty$. Bei $\gamma = 0$ besitzt die Curve zwei ins Un-

endliche fortlaufende Aeste, weil $y = \pm\infty$ wird, wenn βx im Unendlichen positiv ist, während y imaginär ist, wenn βx im Unendlichen negativ ist. Die drei Curvenarten werden Hyperbel, Ellipse, Parabel genannt, und nunmehr hat Euler das Recht erlangt, sie einzeln jede für sich zu betrachten, was in der Reihenfolge: Ellipse mit dem Kreise als Sonderfall, Parabel als Ellipse mit unendlichgrosser Axe, Hyperbel mit ihren beiden Asymptoten geschieht. Die Tangenteneigenschaften ergeben sich aus im 5. Kapitel bereits ermittelten Gleichungen. Von den Merkmalen, welche sonst zur Unterscheidung der drei Curvenarten gebraucht werden, und die sich unter Annahme der Gleichungsform $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$ auf die Werthe von $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ beziehen, ist hier noch nicht die Rede.

Das 7. Kapitel, Von den ohne Ende fortlaufenden Aesten, füllt diese Lücke aus, und zwar von einem Gesichtspunkte, der weit über die Curven 2^{ten} Grades hinausreicht. Euler betrachtet die allgemeinste Curve n^{ten} Grades, deren Gleichungspolynom in $n+1$ Gruppen zerfällt, in deren jeder solche Glieder vereinigt sind, welche die beiden Veränderlichen zusammen in gleicher Dimension aufweisen. Die höchste Gruppe wird also sein $P = \alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \cdots + \xi x^n$. Die zweithöchste Gruppe soll Q, die dritthöchste R u. s. w. heissen, die Gleichung selbst also $P + Q + R + S + \cdots = 0$. Nun kann P theils aus reellen einfachen Factoren, theils aus Factoren 2^{ten} Grades $A^2y^2 - 2ABxy\cos\varphi + B^2x^2$ bestehen, welche letztere nur in imaginäre einfache Factoren zerfallen. Dass P ausschliesslich solche Factoren 2^{ten} Grades besitze, verlangt ein grades n, mindestens $n = 2$. In solchem Falle kann die Curve keinen Punkt im Unendlichen besitzen, denn mag $x = \infty$ oder $y = \infty$ oder $x = \infty$ und $y = \infty$ gesetzt werden, immer ist $-2ABxy\cos\varphi$ kleiner als das wesentliche positive $A^2y^2 + B^2x^2$, so dass der betreffende Factor unter jenen Annahmen ∞^2 wird und mit ihm auch P unendlichgross werden muss. Gegen P verschwinden aber die Gruppen von niedrigerer Abmessung $Q + R + S + \cdots$, und die Curve kann, wie vorausgeschickt wurde, keinen Punkt im Unendlichen, also auch keinen ohne Ende fortlaufenden Ast besitzen. Bei $n = 2$ ist $P = \alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2$, und dessen beide einfache Factoren $\alpha y + \frac{x}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})$ und $y + \frac{x}{2\alpha}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})$ sind imaginär, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Darin besteht also das Merkmal für die nur im Endlichen verlaufende Ellipse. Nun besitze zweitens P ausser dem aus lauter in grader Anzahl vorhandenen imaginären einfachen Factoren gebildeten Ausdrucke M noch den reellen einfachen Factor $p = ay - bx$, d. h. die Gleichung heisse $pM + Q + R + S + \cdots = 0$. Daraus folgt

$p = \frac{-Q - R - S - \cdots}{M}$. Im Unendlichen verschwinden $R, S, \ldots$ gegen Q, und es bleibt $p = -\frac{Q}{M}$, wo Q und M von gleicher Abmessung sind und einen endlichen von x und y unabhängigen Quotienten geben können, wenn nur das Verhältniss von y zu x gegeben ist, welches aus $p = ay - bx = 0$ sich als $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ ergibt. Mit anderen Worten: die Curve geht im Unendlichen in $ay - bx = 0$ über, in eine Gerade, welche der Curve von ungradem Grade als Asymptote dient, der sie sich mit zwei nach entgegengesetzter Richtung ins Unendliche sich erstreckenden Aesten nähert. In einem dritten Falle, wo $P = pqM$ und M sich aus in grader Anzahl vorhandenen imaginären einfachen Factoren zusammensetzt, während $p = ay - bx$, $q = cy - dx$ von einander verschiedene reelle Factoren sind, gibt es zwei Asymptoten $ay - bx = 0$, $cy - dx = 0$ bei vier ins Unendliche sich erstreckenden Aesten. Die Annahme $n = 2$ liefert hier die Hyperbel, so oft die beiden Factoren von $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2$ reell und von einander verschieden sind, d. h. so oft $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Die Parabel entsteht bei $n = 2$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, d. h. wenn die reellen einfachen Factoren p und q identisch sind. Geradlinige Asymptoten hat eine solche Curve $p^2M + Q + R + S + \cdots = 0$ nicht, wohl aber eine parabolische. Auch bei diesem Kapitel müssen wir es bei verhältnissmässig geringen Andeutungen bewenden lassen. Euler geht viel weiter. Er löst aus P mehr und mehr reelle einfache Factoren, die theils von einander verschieden sind, theils nicht, und die im letzteren Falle zu krummlinigen Asymptoten von der Gleichungsform $y^\mu = Ax^\nu$ führen.

Das 8. Kapitel, Von den Asymptoten, dringt tiefer in den gleichen Gegenstand ein und unterscheidet die ins Unendliche sich erstreckenden Curvenäste in hyperbolische und parabolische, von welchen nur die ersteren geradlinige Asymptoten besitzen.

Das 9. Kapitel, Von der Eintheilung der Linien 3ten Grades in Arten, benutzt als Eintheilungsgrund das Verhalten der ins Unendliche sich erstreckenden Curvenäste und zur Ermittelung desselben die cubischen Glieder des allgemeinsten Gleichungspolynoms $\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3$. Dieser Ausdruck besitzt entweder einen oder drei reelle einfache Factoren. Im letzteren Falle sind wieder drei Möglichkeiten zu unterscheiden: die Verschiedenheit der drei Factoren, die Gleichheit von zweien derselben, die Gleichheit aller drei. So kommt Euler unter Berücksichtigung einiger anderer Bedingungen zu im Ganzen 16 Geschlechtern, wie er zu sagen vorschlägt, um einer Verwechslung mit Newtons Arten vorzubeugen.

Das 10. Kapitel, Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien 3ten Grades, erläutert die Durchmesser dieser Curven in dem von Newton (S. 422) dem Worte beigelegten Sinne, beschäftigt sich mit der Frage, wann jene Curven einen Mittelpunkt, wieder in Newtons Sinne, nämlich einen gemeinsamen Durchschnittspunkt ihrer Durchmesser, besitzen, und mit der Natur ihrer ins Unendliche sich erstreckenden Aeste.

Das 11. Kapitel, Von den Linien 4ten Grades, will für diese die gleiche Aufgabe lösen, welche im 9. Kapitel für die Curven 3ten Grades behandelt worden war. Den Ausgangspunkt liefert die Zerlegung des Ausdrucks $\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \varepsilon x^4$ in seine theils imaginäre, theils reelle, theils verschiedene, theils gleiche einfache Factoren, und die acht in dieser Beziehung denkbaren Fälle führen zu nicht weniger als 146 Geschlechtern.

Das 12. Kapitel, Von der Erforschung der Gestalt der krummen Linien, geht nur in aller Kürze auf die an wenigen Beispielen erörterte Frage ein, wie die Curve im Endlichen aussehe, ob und wie viele reelle Ordinaten einer gegebenen Abscisse entsprechen, und ob solche Ordinaten auch unter einander gleich werden können, was einen vielfachen Curvenpunkt anzeigt, der auch ein einzelner conjugirter Punkt sein kann.

Das 13. Kapitel, Von den Eigenschaften der Curven, sucht Curven niedrigeren Grades auf, welche in der Nähe eines bestimmten Curvenpunktes der Gestalt der in Frage stehenden Curve sich anschmiegen. Niedrigsten Grades ist die geradlinige Berührungslinie, welche folgendermassen ermittelt wird. Weiss man, dass $x = p$, $y = q$ ein Punkt der betreffenden Curve ist, an welchen die Berührungslinie gesucht wird, so verlegt man dorthin den Anfangspunkt des in seiner Richtung unveränderten Coordinatensystems, indem man in die Curvengleichung $x = p + t$, $y = q + u$ einsetzt. Da die neue Gleichung durch $t = u = 0$ erfüllt werden muss, so kann ein constantes Glied nicht mehr in ihr vorkommen, sie muss vielmehr heissen $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$. Bei unendlich kleinen t und u verschwinden sämmtliche Glieder gegen die beiden ersten, d. h. die Gerade $0 = At + Bu$ stellt die Gestalt der Curve im neuen Coordinatenanfangspunkte dar, berührt sie daselbst. Ist allerdings der ursprünglich $= 0$ gesetzte Ausdruck in der Gleichung der Curve keine rationale ganze Function von x und y, so geht die Umwandlung in die gewünschte Gleichung in t und u nicht ganz so leicht vor sich, und solchen Schwierigkeiten zu begegnen war der Anlass zur Erfindung der Differentialrechnung. Wir wollen deshalb, setzt Euler in § 290 hinzu, die Methode, die Tangenten zu finden, wenn die für die Curve gegebene Gleichung keine rationale und ganze Gleichung ist, der Differentialrechnung aufbewahren. Das ist die Stelle, welche wir (S. 773) im Auge hatten, als wir von einer Bestätigung der Eulerschen Absicht, geometrische Anwendungen der Differentialrechnung zu schreiben, sprachen. Nach der Berührungslinie im neuen Coordinatenanfangspunkte sucht Euler die Normallinie ebendort, dann bespricht er den Fall, dass bei der vorgeschriebenen Verschiebung des Coordinatenkreuzes nicht bloss die Gleichungsconstante, sondern auch A und B verschwindet, dass also die neue Gleichung $0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$ heisst und die Curve folglich in der unmittelbaren Nähe des Nullpunktes die Gestalt der Curve $0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ besitzt. Hier ist $D^2 - 4CE$ für diese Gestalt ausschlaggebend. Bei $D^2 - 4CE < 0$ ist der neue Coordinatenanfangspunkt ein conjugirter Punkt der Curve; bei $D^2 - 4CE > 0$ ist er ein Doppelpunkt mit zwei verschiedenen Berührungslinien; bei $D^2 - 4CE = 0$ haben die beiden in dem Nullpunkte zusammentreffenden Curvenäste dort nur eine Berührungslinie, berühren einander. Das Wegfallen der quadratischen Glieder in Verbindung mit dem Wegfallen der Constanten und der Glieder ersten Grades und die Beziehungen dieser analytischen Erscheinung zum Vorhandensein eines dreifachen Punktes u. s. w. werden dann erörtert.

Das 14. Kapitel, Von der Krümmung der Curven, wendet sich der Lehre von den Osculationen zu, d. h. nachdem der Coordinatenanfangspunkt auf die Curve selbst gelegt ist, wird nicht die Gerade $At + Bu = 0$, sondern die krumme Linie $At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 = 0$ oder $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ untersucht, welche in der Nähe des Nullpunktes sich an die Curve anschmiegt.

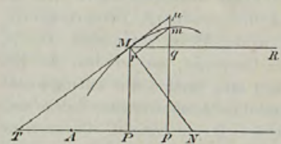

Fig. 129.

In dem gewählten rechtwinkligen Coordinatensysteme (Fig. 129) ist $Mq = t$, $qm = u$. Unter der Voraussetzung, dass $At + Bu = 0$ Gleichung der Berührungslinie μM ist, welche in μ erfüllt sein muss, ist $q\mu = -\frac{A}{B}t$. Nun sei MN die Normallinie an die Curve in M und $mr \parallel MT$, während $Mr = r$, $mr = s$ heisst. Nennen wir τ den Winkel MTP, so ist $\operatorname{tang}\tau = \frac{u}{t} = -\frac{A}{B}$, $\cos\tau = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\tau = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ und nach den Formeln der Coordinatendrehung, die Euler in seinem 2. Kapitel hergeleitet hat (S. 803), ist

$t = \frac{Bs - Ar}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{A^2+B^2}}$, was Euler ohne weitere Begründung, hinschreibt. Er findet alsdann $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Nun war $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$ angenommen, d. h. der Ausdruck für r ist von mindestens zweiter Dimension nach t und u, während der für s nur von erster Dimension ist. Daraus folgt, wenn t und u beide unendlichkleine Grössen sind, dass r unendlichmal kleiner als s sein muss. Nach diesen Vorerörterungen setzt Euler die gefundenen Werthe von t und u in $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ ein und findet $r\sqrt{A^2+B^2} = \frac{A^2C + ABD + B^2E}{A^2+B^2}r^2 + \frac{A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE}{A^2+B^2}rs + \frac{A^2E - ABD + B^2C}{A^2+B^2}s^2$. In dieser Gleichung ist, vermöge der erwähnten Kleinheitsbeziehung zwischen r und s, das Glied links vom Gleichheitszeichen unendlichklein 2[ter] Ordnung, während die Glieder rechts der Reihenfolge nach unendlichklein 4[ter], 3[ter], 2[ter] Ordnung sind, so dass die beiden ersten Glieder rechts neben dem dritten verschwinden und nur $r\sqrt{A^2+B^2} = \frac{A^2E - ABD + B^2C}{A^2+B^2}s^2$ oder $s^2 = \frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E - ABD + B^2C}r$ übrig bleibt, die Gleichung einer Parabel, welche ihren Scheitel in M besitzt und die Normallinie nebst der Berührungslinie in M als Coordinatenaxen benutzt. Die Curve aber hat im Coordinatenanfangspunkte M ebensolche Krümmung wie diese Parabel, deren Parameter $\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E - ABD + B^2C}$ ist. Nun kann, heisst es im § 308, die Krümmung keiner Curve so deutlich und leicht erkannt werden, als die des Kreises, weil dieselbe allenthalben gleich und desto grösser ist, je kleiner der Halbmesser wird. Deshalb ist es wünschenswerth, die osculirende Parabel durch einen osculirenden Kreis zu ersetzen. Man macht das so. Der Mittelpunkt des osculirenden Kreises oder Krümmungskreises liegt offenbar auf der Normallinie in einer Entfernung $MN = a$ von M, und dieses a ist dann der Halbmesser des Krümmungskreises oder der Krümmungshalbmesser. Man denkt sich die ursprüngliche x-Axe durch N gelegt, und deren Anfangspunkt A um a von N entfernt, so dass der Krümmungskreis ausser durch M auch durch A hindurchgeht. Euler sagt das Alles zwar nicht ausdrücklich, aber er nimmt die Gleichung des Krümmungskreises in der Gestalt $y^2 = 2ax - x^2$ an, woraus jene Bedingungen sich ablesen lassen. Der Punkt M hatte die Coordinaten $x = p$, $y = q$, also muss auch $q^2 = 2ap - p^2$ sein. Die Verschiebung des Coordinatenkreuzes erfolgte mittels $x = p + t$, $y = q + u$. Die Kreisgleichung heisst alsdann $q^2 + 2qu + u^2 = 2ap + 2at - p^2 - 2pt - t^2$, oder nach Tilgung von q^2 links gegen $2ap - p^2$ rechts, auch $0 = (2a - 2p)t - 2qu - t^2 - u^2$. Vergleicht man diese Form mit $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2$, so ergibt sich: $A = 2a - 2p$, $B = -2q$, $C = E = -1$, $D = 0$. Dann wird aber unter abermaliger Berücksichtigung von $q^2 = 2ap - p^2$ sofort $\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E - ABD + B^2C} = \frac{(4a^2 - 8ap + 4p^2 + 4q^2)^{\frac{3}{2}}}{-4a^2 + 8ap - 4p^2 - 4q^2} = -\sqrt{4a^2 - 8ap + 4p^2 + 4q^2} = -2a$. Der Kreis vom Halbmesser a wird folglich im Scheitel einer Parabel vom Parameter $2a$ sich innig mit ihr berühren, und umgekehrt ersetzt sich die Osculation einer Parabel vom Parameter b durch einen Krümmungskreis vom Halbmesser $\frac{b}{2}$, mithin ist der Krümmungshalbmesser der Curve $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$ im Nullpunkte durch $\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$ gegeben, eine durchaus eigenartige Herleitung, über welche wir darum ausführlich berichtet haben. Um so mehr müssen wir uns mit vorübergehender Erwähnung der weiteren wichtigen Ergebnisse des 14. Kapitels begnügen. In der Formel für den Krümmungshalbmesser kommt die Quadratwurzel $\sqrt{A^2 + B^2}$ vor, die als solche positiv oder negativ sein kann. Euler zeigt, dass dieses mit der Art der Wölbung der Curve zusammenhängt. Er zeigt ferner, dass $A^2E - ABD + B^2C = 0$ die Bedingung für das Unendlichgrosswerden des Krümmungshalbmessers ist, und dass dieses in Inflexionspunkten eintrifft. Bei endlichem Krümmungshalbmesser kann weder ein Inflexionspunkt noch eine Spitze vorhanden sein, wenn auch umgekehrt das Unendlichgrosswerden des Krümmungshalbmessers nicht immer das Auftreten solcher sichtbar merkwürdigen Punkte bedingt.

Das 15. Kapitel, Von den Curven, die einen oder mehrere Durchmesser haben, erörtert die Fragen, welche bei einer symmetrischen Gestaltung der Curven auftreten, und welche zum Theil schon im Voraus errathen lassen, wie die Gleichungen solcher Curven aussehen können.

Das 16. Kapitel, Von der Erfindung der Curven aus gegebenen Eigenschaften der Ordinaten, behandelt Gleichungen wie $y^2 - Py + Q = 0$, $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ u. s. w. mit von x abhängenden $P, Q, R \cdots$, deren algebraische Beziehungen zu den abermals von x abhängenden Wurzelwerthen $y = p$, $y = q$, $y = r \cdots$ über manche Eigenschaften der Curve Auskunft geben, über das Vorhandensein von Durchmessern, über Proportionen von Streckenproducten u. dergl.

Das 17. Kapitel, Von der Erfindung der Curven aus anderen Eigenschaften, ist, so weit wir uns entsinnen können, die erste geschichtlich bekannte umfassende Behandlung von Curven, die keine Spirale sind, mittels Polarcoordinaten, wenn auch ein Name für dieses System nicht eingeführt ist. Die Entfernung des festen Punktes C von dem Curvenpunkte M bezeichnet Euler durch z, den Winkel der CM mit einer festen Geraden CA durch φ, und ist C zugleich Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y mit CA als Abscissenaxe, so findet der Uebergang aus dem einen Systeme in das andere durch $x = z \cdot \cos\varphi$, $y = z \cdot \sin\varphi$, $x^2 + y^2 = z^2$ statt. Allerdings ist für Euler die Anwendung dieser Polarcoordinaten doch nur Mittel zum Zweck, und der Zweck ist die Bestimmung von Curven, welche durch eine von C ausgehende Gerade nur einmal, beziehungsweise zweimal geschnitten werden, den Punkt C selbst, falls er der Curve angehört, nicht als Schnittpunkt mitgerechnet. Dann wird bei zwei Schnittpunkten M und N die Frage nach der Curve gestellt, welche $CM^2 + CN^2$ constant sein lasse u. s. w.

Das 18. Kapitel, Von der Aehnlichkeit und Verwandtschaft der Curven, schickt gleich in seinem ersten Paragraphen (§ 435) den wichtigen Satz voraus, dass eine Gleichung mit geometrischem Sinne homogen sein müsse, wenn constante Strecken, sogenannte Parameter, von welchen eine auch als Einheit dienen kann, bei der Zählung der Dimensionen mitgerechnet werden, und dass eine nur zwischen den Coordinaten x und y ohne Parameter stattfindende homogene Gleichung überhaupt keine Curve, sondern eine Vereinigung von Geraden bedeute. Das ist also der Satz, dass jede homogene rationale ganze Function n^{ten} Grades von zwei Veränderlichen in n reelle oder imaginäre Factoren 1^{ten} Grades zerfällt. Ist nur ein Parameter a in der Curvengleichung neben x und y vorhanden, so entstehen je nach Wahl dieses a lauter einander ähnliche Curven, welche die Eigenschaft besitzen, dass homologe Abscissen und Ordinaten in gleichem Verhältnisse stehen. Heissen etwa x, y die Coordinaten der einen, X, Y die Coordinaten der anderen ihr ähnlichen Curve, so muss $x = nX$ und $y = nY$ sein. Ist dagegen $x = mX$ und $y = nY$, so sind die beiden Curven immerhin verwandt, und Euler betrachtet nun verschiedene Formen solcher Verwandtschaft. Auch von Curven mit mehreren Parametern ist in diesem Kapitel die Rede, wo die Veränderung von einem, von zwei ... Parametern eine Schar von Curven in der Anzahl von unendlich, von unendlich mal unendlich ... hervorbringt, welche durch gewisse Bewegungen zu erzeugen sind.

Das 19. Kapitel, Von den Durchschnittspunkten der

Curven, ist dasjenige, von welchem schon (S. 596) die Rede war, als wir ihm zwei Eliminationsmethoden entnahmen. In der That ist das Aufsuchen von Durchschnittspunkten stets nur eine Eliminationsaufgabe, insbesondere wenn neben den reellen Durchschnittspunkten auch die imaginären Berücksichtigung finden, in welchen nicht beide Coordinaten reell sind.

Das 20. Kapitel, Von der Construction der Gleichungen, benutzt das vorher über die Durchschnittspunkte der Curven Gesagte zur graphischen Darstellung der reellen Wurzeln einer Gleichung mit nur einer Unbekannten, welche zu diesem Zwecke als das Ergebniss der Elimination einer zweiten Unbekannten zwischen zwei Curvengleichungen aufgefasst wird. Es stellt sich heraus, dass zwei Gerade zur Auflösung einer Gleichung ersten Grades führen, eine Gerade und ein Kreis oder auch zwei Kreise zur Auflösung einer quadratischen Gleichung, zwei Kegelschnitte zur Auflösung einer biquadratischen Gleichung.

Das 21. Kapitel, Von den transcendenten Curven, kann selbstverständlich das Gebiet der aus transcendenten Gleichungen hervorgehenden Curven nicht entfernt erschöpfen. Nur einzelne Beispiele sind behandelt. Unter ihnen heben wir die in § 519 erörterte Curve $x^y = y^x$ hervor. Mittels $y = tx$ und $t - 1 = \frac{1}{u}$ verwandelt sich die Gleichung leicht in das Gleichungspaar $x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$, $y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$, welches Punkte der Curve auffinden lässt. Man erhält z. B. als zusammengehörige Werthe: $u = 1$, $x = 2$, $y = 4$; $u = 2$, $x = \frac{9}{4}$, $y = \frac{27}{8}$; $u = 3$, $x = \frac{64}{27}$, $y = \frac{256}{81}$.

Das 22. Kapitel, Auflösung einiger den Kreis betreffenden Aufgaben, beschliesst den der analytischen Geometrie der Ebene gewidmeten Theil, mit welchem es eigentlich gar nichts zu thun hat. In diesem Schlusskapitel handelt es sich ausschliesslich um näherungsweise Auflösung gewisser transcendenter Gleichungen mit Hilfe eines doppelten falschen Ansatzes. Die erste dieser Aufgaben verlangt die Auflösung von $s = \cos s$, die neunte und letzte die von $s = \operatorname{tng} s$.

Wir sind bei dem Anhang von den Flächen angelangt, bei dessen 1. Kapitel, Von den Oberflächen der Körper überhaupt. Nach einer rühmenden Erwähnung von Clairauts Abhandlung über die Curven doppelter Krümmung, deren Lehre aber nicht gesondert vorzutragen, sondern sie mit der von den Flächen zu verbinden in Eulers Absicht liege, werden die krummen Oberflächen in ihrem Gegensatze zu der Ebene als solche erklärt, die es nicht gestatten,

durch irgendwelche vier Punkte derselben eine Ebene zu legen. Das dreiaxige rechtwinklige Raumcoordinatensystem der x, y, z wird eingeführt, und es wird gezeigt, wie eine Oberfläche als Versinnlichung einer Gleichung zwischen x, y, z zu betrachten sei. Die acht Octanten des Raumes, welche mit Bezug auf die Coordinatenaxen entstehen, werden unterschieden.

Das 2. Kapitel, Von den Schnitten der Flächen, wenn Ebenen durch sie gelegt werden, lehrt zunächst die Gleichungen einer bestimmten Flächen kennen, von denen hier nur die Kugel, die Cylinderfläche, die Kegelfläche, die Umdrehungsfläche, die Fläche zweiten Grades genannt sein mögen, und zeigt dann, dass ein ebener Schnitt gefunden wird, wenn man in die Gleichung der Fläche $x = t \cdot \cos\vartheta + v \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$, $y = v \cdot \cos\varphi \cdot \cos\vartheta - t \cdot \sin\vartheta - f$, $z = v \cdot \sin\varphi$ einsetzt. Als Kegelflächen, gebildet durch eine von A ausgehende Gerade, welche sich (Fig. 130) längs des Umfangs $MSTsm$ irgend einer Curve hinbewegt, geben sich diejenigen Flächen zu erkennen, deren Gleichung in den Coordinaten x, y, z homogen ist, also z. B. $z^2 = mzx + x^2 + y^2$. Jede einer der drei Coordinatenebenen, etwa der xy-Ebene APQ, parallele Ebene $z = h$ schneidet die Fläche in $h^2 = mhx + x^2 + y^2$, und diese Schnitte sind alle einander ähnlich, sowie sie auch von dem der Fläche angehörenden Coordinatenanfangspunkte A aus in dem Verhältnisse ihrer Entfernung von der Ebene APQ wachsen. Auf die parameterlose Homogenität der Gleichung einer Kegelfläche hatte auch Clairaut (S. 781) aufmerksam gemacht.

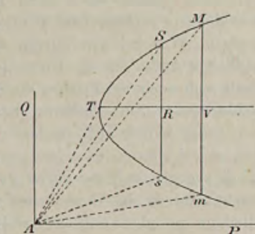

Fig. 130.

Das 3. Kapitel, Von den Cylinder-, Kegel- und Kugelschnitten, wendet das im 2. Kapitel Gelehrte auf die in der Ueberschrift genannten Flächen an und zieht insbesondere die Kegelschnitte in Betracht.

Das 4. Kapitel, Von der Verwechslung der Coordinaten, enthält die Gleichungen, welche als die Eulerschen Formeln zur Veränderung von Raumcoordinaten bekannt sind. Euler gelangt allmählich zu denselben, indem er erstlich eine Verlegung des Anfangspunktes mittels $x = t \pm a$, $y = u \pm b$, $z = v \pm c$ vornimmt, zweitens drei Drehungen von Geraden und von Ebenen nach einander vollziehen lässt, welche zu den Endformeln $x = p(\cos\zeta \cdot \cos\vartheta -$

$\sin\zeta \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\eta) + q(\cos\zeta \cdot \sin\vartheta + \sin\zeta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\eta) - r\sin\zeta \cdot \sin\eta \pm a$; $y = -p(\sin\zeta \cdot \cos\vartheta + \cos\zeta \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\eta) - q(\sin\zeta \cdot \sin\vartheta - \cos\zeta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\eta) - r\cos\zeta \cdot \sin\eta \pm b$; $z = -p\sin\vartheta \cdot \sin\eta + q\cos\vartheta \cdot \sin\eta + r\cos\eta \pm c$ führen. Die Coordinatenecke des ursprünglichen wie des umgewandelten Systems ist rechtwinklig. Der Grad der Gleichungen bleibt unverändert. Aehnlicherweise zeigen die im 2. Kapitel des Anhangs entwickelten Formeln, dass der ebene Schnitt einer Fläche von gleichem Grade wie die Fläche selbst ist. Die Fläche 1^{ten} Grades $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ kann mithin durch eine Ebene nur in einer Linie 1^{ten} Grades, d. h. in einer Geraden, geschnitten werden, und dadurch bestätigt sich, dass die Fläche 1^{ten} Grades eine Ebene sein muss.

Das 5. Kapitel, Von den Flächen 2^{ten} Grades, wagt sich an die vor Euler niemals gestellte Aufgabe, die allgemeine Gleichung $\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$ auf ihren geometrischen Sinn zu befragen, beziehungsweise Unterscheidungen je nach dem Werthe der einzelnen Coefficienten zu versuchen. War bei den Curven die Frage nach dem Vorkommen unendlicher Aeste für die Eintheilung der Curven von Wichtigkeit, so stellt sich auch bei Flächen die Frage nach unendlich fernen Flächenpunkten ein. Sie erfordern, dass mindestens eine Coordinate unendlich gross werde, und, da man bei Benennung der Axen freie Wahl hat, so sei $z = \infty$ in einem unendlich fernen Punkte. Dort kommt $\eta z + \varkappa$ gegen αz^2, ϑy gegen βyz, ιx gegen γxz nicht mehr in Betracht, und die im Unendlichen den Ausschlag gebenden Gleichungsglieder vermindern sich auf $\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 = 0$, welches zwar eine von der ursprünglichen Fläche verschiedene Fläche ist, die aber gleichwohl bei $z = \infty$ mit jener zusammenfällt, ähnlicherweise wie Asymptoten mit Curven. Da alle Glieder der neuen Gleichung vom 2^{ten} Grade nach x, y, z sind, so hat man es, wie im 2. Kapitel des Anhangs gezeigt worden war, mit einer Kegelfläche zu thun, welcher der Name des Asymptotenkegels beigelegt wird. Aus dessen Gleichung folgt $2\alpha z = -\beta y - \gamma x \pm \sqrt{[(\beta^2 - 4\alpha\delta)y^2 + 2(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)xy + (\gamma^2 - 4\alpha\zeta)x^2]}$. Ein unendlich ferner Flächenpunkt in der Richtung der z-Coordinate ist nicht vorhanden, wenn der Asymptotenkegel nur aus dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ besteht, d. h. wenn jede Wahl für x und y ausserhalb des Nullpunktes ein imaginäres z hervorbringt. Die Bedingungen dafür sind $4\alpha\zeta > \gamma^2$, $4\alpha\delta > \beta^2$, $4\delta\zeta > \alpha^2$, $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta > \alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$, deren Eintreten eine rings begrenzte, im Endlichen verlaufende Fläche anzeigen. Das Fehlen auch nur einer dieser Bedingungen beweist das Vorhandensein eines Asymptotenkegels, der also sicherlich schon

als Folge von $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 > \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ sich ergibt. Ist $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, so wird die Gleichung des Asymptotenkegels zu $2\alpha z = -\beta y - \gamma x \pm [y\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma^2 - 4\alpha\zeta)}]$, d. h. sein Gleichungspolynom zerfällt in zwei Factoren, die reell verschieden, oder imaginär, oder reell einander gleich sein können. Im Ganzen sind folglich fünf Geschlechter von Flächen 2^{ten} Grades zu unterscheiden. Nach Gewinnung dieser Erkenntniss wendet Euler eine Drehung der Coordinatenecke unter Anwendung seiner aus dem 4. Kapitel des Anhangs bekannten Formeln an, während eine Verschiebung zunächst unterbleibt, also $a = b = c = 0$ sind. Die drei Winkel, welche in jenen Formeln vorkommen, können so gewählt werden, dass drei Coefficienten in der neuen Gleichung verschwinden, und dass diese bei aller Allgemeinheit nur noch $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Gp + Hq + Jr + K = 0$ heisst. Die in diesem Augenblicke vorgenommene Verschiebung der Coordinatenecke gestattet auch die Coefficienten der ersten Potenzen der Coordinaten zum Verschwinden zu bringen, und alsdann bleibt die noch immer allgemeine Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = a^2$ übrig. Aus ihr folgt, dass jede der drei Coordinatenebenen eine Diametralebene der Fläche sein muss, d. h. zu jedem Punkte einer Coordinatenebene gibt es zwei zu ihm symmetrisch liegende Flächenpunkte. Der Coordinatenanfangspunkt selbst ist Mittelpunkt der Fläche, ob er gleich, setzt Euler in § 115 des Anhangs sofort hinzu, in einigen Fällen unendlich weit entfernt ist. Die Unterscheidung von Geschlechtern der Fläche legt die Vorzeichen der Coefficienten A, B, C und deren Verschwinden zu Grunde. Man sieht, dass Euler bei seinem ersten Versuche einer Discussion der Flächengleichung 2^{ten} Grades der Hauptsache nach bereits den Weg eingeschlagen hat, der noch heute vielfach gewählt wird, um die gleiche Aufgabe zu lösen.

Das 6. Kapitel, Von den Durchschnitten zweier Flächen, ist die Einlösung des von Euler in der Einleitung zum Anhange gegebenen Versprechens, die Curven doppelter Krümmung von den Flächen aus behandeln zu wollen. In der That bilden irgend zwei Flächen, deren keine eine Ebene ist, bei ihrem Durchschnitte eine Curve doppelter Krümmung, und will man dieselbe genauer kennen lernen, so löst sich diese Aufgabe dadurch, dass man zwischen den beiden Flächengleichungen der Reihe nach z, y, x eliminirt und so drei Gleichungen erhält: eine zwischen x, y, eine zweite zwischen x, z, eine dritte zwischen y, z, von welchen aber nur zwei gegeben zu sein brauchen, da die dritte als Folgerung aus diesen beiden entsteht. Erschiene dabei eine Projectionsgleichung, welche geometrisch keinen Sinn besitzt, wie z. B. $x^2 + y^2 + a^2 = 0$, so wäre dieses ein Kennzeichen dafür, dass die beiden Flächen sich nirgend schneiden. Führt die Projectionsgleichung zu einem Punkte als bildliche Darstellung, so berühren die Flächen einander in einem Punkte. Berührung der beiden Flächen in einer Linie verlangt das Auftreten einer Projectionsgleichung des Durchschnittes mit gleichen Wurzeln. In einem Beispiele wird der Schnitt der Kugel $z^2 + y^2 + x^2 = a^2$ mit der Ebene $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ gesucht. Einsetzung von $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ in die Kugelgleichung gibt als xy-Projection des Durchschnittes die Ellipse $f^2 - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma x y + (\alpha^2 + \gamma^2) x^2 = 0$, aus welcher $y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{[a^2(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) x^2]}}{\alpha^2 + \beta^2}$ entsteht. Nimmt man nun an, es sei $f = a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, so geht der Werth von y über in $y = \frac{\beta a \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{-(\gamma a - x\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2})^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$, welches nur dann reell ist, wenn die imaginäre Quadratwurzel verschwindet, d. h. wenn $x = \frac{\gamma a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$. Alsdann wird $y = \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ und $z = \frac{\alpha a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$, d. h. Ebene und Kugel haben nur den einen Punkt gemein, welcher ihr Berührungspunkt ist. Als leichtestes Mittel, die Berührungsebene einer Fläche in einem bestimmten Punkte M zu finden, wird gelehrt, man solle die Fläche in dem Berührungspunkte durch eine Ebene schneiden und die Berührungslinie an die Schnittcurve in M suchen, diese müsse in der die Fläche berührenden Ebene liegen. Nehme man dann einen zweiten durch M hindurchgehenden ebenen Schnitt mit seiner Berührungslinie in M, so bestimmen die beiden Berührungslinien die gesuchte Berührungsebene. Wir erinnern uns auch dieses Satzes bei Clairaut (S. 782), und Eulers Beweisführung in § 147 des Anhangs ist um nichts schärfer als die Clairauts. Allerdings könnte für Euler eine gewisse Entschuldigung leichter als für Clairaut gefunden werden. Dieser nämlich bediente sich aller Hilfsmittel, welche die Infinitesimalrechnung ihm bot, während Euler ohne dieselben auskommen wollte. Er beabsichtigte vielleicht, wie wir wiederholt gesagt haben, eine höhere Geometrie als besonderes Werk zu schreiben, und in diesem Sinne könnten die letzten Worte des Anhangs verstanden werden müssen: Reicht das Bisherige nicht hin, so ist dazu die Analysis des Unendlichen erforderlich, wozu die gegenwärtigen Bücher den Weg bahnen.

116. Kapitel.

Analytische Geometrie 1748—1756. Cramer.

Eulers Introductio, ein Werk, dem wir jetzt, nachdem wir über beide Bände berichtet haben, die Bezeichnung als eines der inhaltreichsten, der schönsten, der fruchtbarsten, die jemals die Presse verliessen, verleihen dürfen, ohne Widerspruch von unseren Lesern zu befürchten, war wahrscheinlich noch im Drucke begriffen, als Euler der Berliner Akademie zwei zusammenhängende Aufsätze einreichte, durchaus geeignet, bei den Geometern im engeren Sinne dieses Wortes Aufsehen zu erregen. Die Ueberschriften lauten: *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*[1]), über einen scheinbaren Widerspruch in der Curvenlehre, und *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper*[2]), über die Anzahl der Schnittpunkte zweier Curven beliebigen Grades.

Der im ersten Aufsatze gemeinte Widerspruch ist folgender. Eine Curve n^{ten} Grades besitzt in ihrer allgemeinsten Gleichung $\frac{n^2 + 3n}{2}$ Coefficienten, ist also durch ebensoviele Punkte bestimmt, z. B. eine Curve 2^{ten} Grades durch 5 Punkte, eine Curve 3^{ten} Grades durch 9 Punkte. Eine Curve m^{ten} Grades und eine solche n^{ten} Grades können einander höchstens in mn Punkten schneiden, zwei Curven 3^{ten} Grades also in 9 Punkten. Dann gibt es aber zwei Curven 3^{ten} Grades, die durch 9 gegebene Punkte gehen, und die 9 Punkte bestimmen die Curve nicht. Noch auffälliger ist der Widerspruch bei Curven von höherem als dem 3^{ten} Grade, bei welchen immer $n^2 > \frac{n^2 + 3n}{2}$ ist. Euler zeigt, dass hierdurch nur der Beweis geliefert ist, es sei nicht immer wahr, dass $\frac{n^2 + 3n}{2}$ Punkte zur Bestimmung einer Curve n^{ten} Grades ausreichen, weil diese Bestimmung auf die Auffindbarkeit von $\frac{n^2 + 3n}{2}$ Coefficienten aus ebensovielen Gleichungen 1^{ten} Grades, welche die erwähnten Coefficienten als Unbekannte besitzen, beruht, während jene Auffindbarkeit nur dann vorhanden ist, wenn die betreffenden Gleichungen alle von einander unabhängig sind. Seien z. B. (Fig. 131) 9 Punkte $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ quadratisch geordnet, und sei α

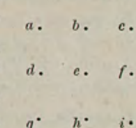

Fig. 131.

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748, T. IV, 219—233.
[2]) Ebenda T. IV, 234—248.

die Entfernung von je zwei neben einander oder senkrecht unter einander liegenden Punkten[1]). Sei c der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten mit der Abscissenaxe def und der Ordinatenaxe beh. Man erkennt sofort, dass die Curve $my(y^2 - \alpha^2) = nx(x^2 - \alpha^2)$ durch die 9 Punkte hindurchgeht, d. h. dass diese Gleichung durch die Coordinaten der 9 Punkte erfüllt ist, welchen Zahlenwerth auch m und n besitzen. Wählt man also einmal m_1 und n_1, ein andresmal m_2 und n_2 u. s. w., so erhält man beliebig viele Curven 3ten Grades, die alle durch jene 9 Punkte hindurchgehen, und die mit Ausnahme der Fälle $m = 0$, oder $n = 0$, oder $m = n$, oder $m = -n$ wirkliche Curven sind. In jenen Ausnahmefällen hat man es mit drei Geraden, oder mit einer Geraden und einer Ellipse zu thun, da die Gleichungen alsdann $x(x + \alpha)(x - \alpha) = 0$, $y(y + \alpha)(y - \alpha) = 0$, $(y - x)(y^2 + xy + x^2 - \alpha^2) = 0$, $(y + x) \cdot (y^2 - xy + x^2 - \alpha^2) = 0$ heissen.

Der zweite Aufsatz versucht den allgemein als wahr angenommenen, aber niemals streng bewiesenen Satz von den mn Durchschnittspunkten einer Curve m^{ten} Grades mit einer solchen n^{ten} Grades, wofern man die im Unendlichen liegenden, sowie die imaginären Durchschnittspunkte mitzählt, Curven dagegen, die in einzelnen gradlinigen oder krummlinigen Aesten zusammenfallen, nicht als einander schneidend auffasst, zu sichern. Wir haben wiederholt von diesem Satze gesprochen, haben auch über Eulers versuchten Beweis von 1748 bei Gelegenheit der Aufgabe, eine Unbekannte zwischen zwei Gleichungen zu eliminiren (S. 598), berichtet und damals hervorgehoben, Euler scheine selbst die Empfindung von der Unzulänglichkeit seiner Folgerungen besessen zu haben.

Auch in dem unmittelbar folgenden Bande der Berliner Veröffentlichungen[2]) begegnen wir einem Aufsatze Eulers: *Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hôpital.* Es ist eine Rechtfertigung von De L'Hôpitals Rückkehrpunkten zweiter Art, die einem Schnabel gleichen[3]), gegen De Guas Angriffe (S. 796). De Gua sei allerdings berechtigt gewesen anzunehmen, eine Curvengleichung lasse sich, wenn die Abscissenaxe die Curve im Coordinatenanfangspunkte berühre, in die Form $y = \frac{x^2}{2a} \pm Ax^m \pm Bx^n \pm Cx^k \pm \cdots$ bringen, aber die weitere Folgerung,

---

[1]) Bei Euler heisst die Entfernung a. Wir wählten α, um die Verwechslung mit dem Punkte a auszuschliessen. [2]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 204—221. [3]) *semblables à un bec d'oiseau* sagt Euler in § 1 seines Aufsatzes unter erstmaliger Anwendung dieses Ausdrucks.

jene Gleichung gehe in unmittelbarer Nähe jenes Anfangspunktes in $y = \frac{x^2}{2a}$ über, und deshalb müsse die Curve auf der positiven und auf der negativen Abscissenseite, unmittelbar nach wie unmittelbar vor dem Anfangspunkte, genau die gleiche Gestalt haben, sei irrig. Die Glieder mit höheren Exponenten verschwinden gegen x^2 nur, wenn sie reell sind, d. h. wenn $m, n, k \cdots$ ganze Zahlen oder Brüche mit ungradem Nenner sind. Sei etwa $y = x + x\sqrt{x}$ die Gleichung einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Curve. Nach De Guas Auffassung müsste die Curve mit der Geraden $y = x$ nahezu zusammenfallen, also im Anfangspunkte die Abscissenaxe unter einem Winkel von 45° schneiden. Das findet aber nur nach der positiven Abscissenseite zu statt, während auf der negativen Seite $y = -x - x\sqrt{-x}$ imaginär ist und das Aufhören der Curve im Coordinatenanfangspunkte anzeigt. Die Curve $(y - x)^2 = x^3$ erstreckt sich nur nach der Seite der positiven x und hat im Coordinatenanfangspunkte einen Rückkehrpunkt erster Art. Nun betrachte man $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$ oder $y = \alpha x^2 \pm \beta x^2 \sqrt{x}$ (Fig. 132). Die Parabel $y = \alpha x^2$ erstreckt sich als $L'AL$ rechts und links von der Ordinatenaxe, aber die Curve $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$ hat nur die Aeste AM, AN mit gleichen Ordinatenentfernungen LM von der Parabel nach oben und unten, während auf der negativen Abscissenseite kein Curvenpunkt vorhanden ist. In A findet ein Rückkehrpunkt zweiter Art statt, welchen De Gua

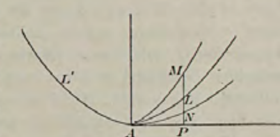

Fig. 132.

gemeint hatte, leugnen zu sollen. Euler macht dazu die Bemerkung, der Halbmesser der Evolute sei in jenem Punkte von endlicher Grösse[1]). Er meint damit, der Krümmungshalbmesser von $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$ sei bei $x = y = 0$ von endlichem Werthe, und in der That wird derselbe dort $\frac{1}{2\alpha}$. Ist $y = \alpha x^k \pm \beta x^{k + \frac{m}{n}}$ und m eine ungrade, n eine grade Zahl, damit das Glied $\beta x^{k + \frac{m}{n}}$ ein doppeltes Vorzeichen besitze, so verläuft die Curve immer in zwei Aesten vom Coordinatenanfangspunkte nach der positiven Abscissenseite. Der Exponent k übt einen eigenthümlichen Einfluss auf die Gestalt der

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 210: *La courbe au commencement où $x = 0$, un point de rebroussement de la seconde espèce, et le rayon de la développée est dans ce point d'une quantité finie.*

Curve[1]), ohne dass auf die Ganzzahligkeit von k, vorausgesetzt dass es, wenn gebrochen, keinen graden Nenner besitzt, also keine Zweideutigkeit von ax^k bedingt, Gewicht zu legen wäre. Wir haben gesehen, dass im Anfangspunkte der Coordinaten, der zugleich Anfangspunkt der Curve ist, ein Rückkehrpunkt stattfindet. Er ist, wie wir auch schon gesehen haben, erster Art bei $k = 1$. Bei $k > 2$ ist er zweiter Art und der Krümmungshalbmesser unendlichgross. Bei $1 < k < 2$ ist der Rückkehrpunkt wieder zweiter Art und der Krümmungshalbmesser 0. Bei $k < 1$ wird die Curve senkrecht zur Abscissenaxe mit einem Rückkehrpunkte zweiter Art, in welchem die Ordinatenaxe beide Curvenäste berührt und der Krümmungshalbmesser ist 0 bei $\frac{1}{2} < k < 1$ und ∞ bei $k < \frac{1}{2}$. Euler geht hier auch bezüglich des Krümmungshalbmessers wesentlich über das hinaus, was De L'Hôpital (S. 247) angegeben hatte.

Noch 1748 erschien in Mailand ein von einer Dame verfasstes Werk, dessen wir hier wie der Verfasserin, Maria Gaetana Agnesi[2]) (1718—1799), zu gedenken haben. Eine Hauptquelle für die Kenntniss ihres Lebens ist eine von Antonio Francesco Frisi herrührende Lobrede. Man darf diesen natürlich nicht mit seinem Bruder Paolo Frisi (1728—1784), Professor der Mathematik in Mailand und Verfasser verschiedener anderer Lobreden, welcher 15 Jahre vor der Agnesi starb, verwechseln. Maria Agnesi war in Sprachen ausserordentlich bewandert und hat auch der Mathematik erfolgreiche Bemühungen zugewandt. Nicht als ob sie, sagt ihr Lobredner, eine tiefe Spur von sich hinterlassen hätte, aber sie nahm einen ehrenvollen Platz unter den grossen Mathematikern des XVIII. Jahrhunderts ein. Im Juni 1748 nahm die Akademie von Bologna sie unter ihre Mitglieder auf, im gleichen Jahre erschienen die *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* von Maria Agnesi in zwei starken Quartbänden, und dieses Werk wurde so sehr geschätzt, dass es ins Englische, und wenigstens der zweite Band auch ins Französische übersetzt wurde. Zwei Pariser Akademiker, De Mairan und Montigny, rühmten das Werk als das vollständigste und bestgearbeitete seiner Art. Unter mancherlei Curven, an welchen die Methoden der Infinitesimalrechnung geübt werden, ist auch eine, mit welcher schon Fermat bekannt war, der sich in seiner Abhandlung über die Quadra-

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 211—212.
[2]) J. Boyer, *La mathématicienne Agnesi* in der *Revue Catholique des Revues françaises et étrangères* vom 20. März 1897, pag. 451—458. — Gino Loria, *Versiera visiera e pseudo-versiera* in der *Bibliotheca mathematica* 1897, pag. 7 bis 12 und pag. 33—34.

turen[1]) mit der Gleichung $b^3 = a^2e + b^2e$ und mit der Fläche der durch diese Gleichung bezeichneten Curve beschäftigt. Da Fermat a für die Abscissen, e für die Ordinaten, b für irgend eine constante Strecke zu schreiben pflegte (Bd. II, S. 817), so war jene Curve die mit der Gleichung $a^3 = (a^2 + x^2)y$, aber Fermat hatte sie weder gezeichnet noch sich eingehender mit ihr beschäftigt. Er hat nur gezeigt, dass, wenn man Substitutionen vornimmt, welche wir in die Formeln $y = \frac{\eta^2}{a}$, $x = \frac{a\xi}{\eta}$ kleiden dürfen, die Kreisgleichung $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ entstehe, dass folglich die Quadratur der ursprünglichen Curve von der des Kreises abhängen müsse.

Maria Agnesi hat eine geometrische Definition der Curve ausgesprochen und hat ihr von ihrer geschwungenen Gestalt (Fig. 133) den Namen *versiera* beigelegt[1]), den wir bei der sprachwissenschaftlichen Gewandtheit seiner Erfinderin mit *vertere* (wenden) in Verbindung zu bringen alle Veranlassung haben. Die Definition ist folgende: Ein Kreis mit seinem Durchmesser $AC = a$ sei gegeben, ebenso seine Berührungslinien AG, CE an den Endpunkten des Durchmessers, AG und AC sind Theile der im Anfangspunkte A senkrecht zu einander stehenden Coordinatenaxen. Wird BM in irgend einem Punkte B der AC senkrecht errichtet und der Punkt M dieser Senkrechten mittels der Proportion $AB : AC = BD : BM$ bestimmt, so gehört er der Curve an. Eine bequeme Construction von M ist folgende: Nachdem $BD \perp AC$ gezogen ist, verbindet man A mit D gradlinig bis zum Durchschnitte mit CE und zieht dann $EM \parallel AC$. Ist $AB = y$, $BM = x$, so heisst die Proportion $y : a = \sqrt{y(a-y)} : x$, und daraus findet man die Gleichung $a^3 = (a^2 + x^2)y$.

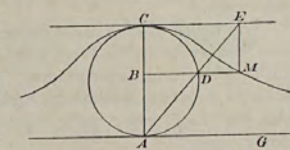

Fig. 133.

Wenn wir uns jetzt der im Jahre 1750 erschienenen *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* von Gabriel Cramer zuwenden, von welcher schon im 106. Kapitel (S. 605 flgg.) die Rede war, so könnte die Zeit der Veröffentlichung vermuthen lassen, das Werk sei unter dem ganzen Einflusse von Eulers Introductio verfasst, wenn nicht Cramer dem widerspräche, ein Widerspruch, der allerdings einen fast mehr als unbedingten Glauben an Cramers Wahrhaftigkeit

[1]) Fermat, *Oeuvres* I, 279—280 und III, 233—234. [2]) Agnesi, *Istituzioni analitiche* I, 380—381 und 391—393.

von dem Leser verlangt. Newtons Enumeratio, Stirlings Curven 3ten Grades, die Aufsätze von Nicole, von Bragelongne, die uns im 114. Kapitel bekannt geworden sind, De Guas Usage de l'Analyse de Descartes nennt Cramer als von ihm benutzte Vorarbeiten, um alsdann fortzufahren[1]): Ich würde grossen Nutzen aus Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichkleinen gezogen haben, wenn dieses Buch mir früher bekannt geworden wäre. Da sein Gegenstand fast der gleiche wie der meinige ist, so ist darüber nicht zu staunen, dass unsere Folgerungen einander oftmals begegnen. Allein der Unterschied der Methode ist so gross, als er nur bei Bearbeitung des gleichen Gegenstandes sein kann. Ich sage das nicht, um dem Wege, den ich eingeschlagen habe, vor dem Eulers einen Vorzug zu beanspruchen, sondern nur um den Leser auf die Verschiedenheit hinzuweisen.

Wir wollen über Cramers ungemein ausführliches auf 680 Quartseiten sich ausdehnendes Werk genauer, wenn auch so kurz als thunlich berichten und vorausschicken, dass Cramer nicht weniger als 33 Tafeln sorgfältig gezeichneter Figuren beigegeben hat, aus welchen man den Lauf vieler auch recht absonderlicher Curven genau kennen lernt.

Das 1. Kapitel, Von der Natur der Curven im Allgemeinen und ihren Gleichungen, beschränkt zunächst die Untersuchung auf ebene Curven unter Ausschluss derjenigen von doppelter Krümmung[2]). Jede Curve kennzeichnet sich durch eine Gleichung zwischen den in einem beständigen Winkel gegen einander geneigten Strecken x, y, welche ihre Coordinaten heissen. Die Art der Gleichung beeinflusst die Natur der Curven, und nun tritt die zweite Beschränkung auf algebraische Curven ein[3]). Zahlreiche Beispiele lehren die Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit der Ordinaten, ihre endliche oder unendliche Grösse, ihr Imaginärwerden bei gewissen Abscissenwerthen kennen. Man erfährt von der Vereinigung mehrerer Curven, deren Gleichungspolynome mit einander vervielfacht $= 0$ gesetzt werden[4]), von der Erleichterung beim Aufsuchen einzelner Curvenpunkte, die darin liegt, dass man nicht y als Function von x, sondern x und y als Functionen einer dritten Veränderlichen z darstellt[5]), wie z. B. $y^4 + x^2y^2 + 2y^3 - x^3 = 0$, indem man $x = yz$ einsetzt, in $y = \frac{z^3 - 2}{z^2 + 1}$, $x = \frac{z^4 - 2z}{z^2 + 1}$ übergeht. Es fällt sehr schwer, hierbei nicht an das zu denken, was wir (S. 702) aus dem 3. Kapitel des

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes. Préface*, pag. XI. [2]) Ebenda pag. 3. [3]) Ebenda pag. 8. [4]) Ebenda pag. 28. [5]) Ebenda pag. 34.

I. Bandes der Introductio berichteten, insbesondere wenn man berücksichtigt, dass Cramer wie Euler bei dieser Parameterdarstellung der Curvengleichung, um einen unserer Zeit angehörenden Kunstausdruck zu gebrauchen, an nichts Anderes dachten, als an die Möglichkeit, dadurch ohne grosse Mühe beliebig viele einzelne Curvenpunkte ermitteln zu können. Auf die Gleichung einer Zusammensetzung von Raumgebilden zurückgreifend, bemerken wir, dass Cramer ein nicht in Factoren zerlegbares Gleichungspolynom irreductibel[1]) genannt hat, und dass er an einer späteren Stelle[2]) von reductiblen Gleichungen neben den irreductiblen spricht, um die Zerlegbarkeit oder Nichtzerlegbarkeit des Gleichungspolynoms in Factoren anzudeuten.

Das 2. Kapitel, Von den Veränderungen, welche die Gleichung einer Curve bei Beziehung derselben auf andere Coordinaten erleidet, unterscheidet die Fälle der Verlegung des Anfangspunktes, der Drehung der Coordinatenaxen, der Vereinigung beider Veränderungen und gibt für jeden Einzelfall die ihm entsprechenden Formeln.

Das 3. Kapitel, Von den verschiedenen Ordnungen der algebraischen Linien, spricht von dem Grade der Curvengleichungen, welcher mit der Ordnung der Curven oder Linien zusammenfällt[3]). Den gleichen Tausch der beiden Wörter gestatteten sich nahezu alle Schriftsteller. Wird eine Coordinatenveränderung von den x und y zu neuen geradlinigen Coordinaten z und u vorgenommen, was mittels $x = m + pz + ru$, $y = n + qz + su$ geschieht, so bleibt, wie De Gua bemerkt habe, der Grad der Gleichung unverändert[4]). Wir haben in der That auf diesen Satz bei De Gua (S. 798), auf eben denselben bei Euler (S. 803) hingewiesen. Nun folgt die Schilderung von Newtons Parallelogramm, von De Guas Dreieck[5]), von welcher (S. 605) die Rede war, und auch was wir (S. 607—608) aus dem Anhange zu Cramers Werke berichteten, schliesst sich eng an das 3. Kapitel an, denn nach der Bemerkung, dass die allgemeinste Curvengleichung v^{ten} Grades aus $\frac{(v+1)(v+2)}{2}$ Gliedern mit $\frac{v(v+3)}{2}$ Coefficienten bestehe, und dass diese Coefficienten aus der Kenntniss eben so vieler Punkte, welche der Curve angehören sollen, mittels lauter Gleichungen 1ten Grades gefunden werden können, verweist Cramer[6]) für die Ausführung dieser algebraischen Aufgabe auf seinen ersten Anhang und weiter unten[7]) auf seinen zweiten Anhang für den Beweis

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 29. [2]) Ebenda pag. 53. [3]) Ebenda pag. 53. [4]) Ebenda pag. 54. [5]) Ebenda pag. 54—57. [6]) Ebenda pag. 60. [7]) Ebenda pag. 76.

des Satzes, dass eine Curve m^{ten} und eine Curve n^{ten} Grades einander höchstens in mn Punkten schneiden. Findet sich eine Ausnahme davon, hat z. B. die in fünf Punkten erfüllte Gleichung 2^{ten} Grades mit einer Gleichung 1^{ten} Grades drei Wurzeln gemein, so stellt jene Gleichung 2^{ten} Grades keine Curve, sondern zwei Gerade dar, deren eine durch drei von den gegebenen Punkten, die andere durch die zwei übrigen Punkte geht[1]). Gleichfalls als Paradoxon, dessen Lösung keine Schwierigkeit bereite, stellt Cramer es dar[2]), dass zwei Curven 3^{ten} Grades einander in neun Punkten schneiden, also beide durch diese neun Punkte hindurchgehen, während doch $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ Punkte eine cubische Curve bestimmen sollen, ein Paradoxon, welches bei Curven v^{ten} Grades noch schärfer hervortrete, sobald $\frac{v(v+3)}{2} < v^2$ sei. Der Grund dieser Erscheinung liege darin, dass n Gleichungen 1^{ten} Grades zwar im Allgemeinen zur Bestimmung von n Unbekannten ausreichen, dass aber auch Umstände eintreten können, welche eine Unbestimmtheit einiger Unbekannten bedingen. Das ist auch (S. 819) von Euler 1748 bemerkt und veröffentlicht worden, doch scheint Cramer davon nicht gewusst zu haben, wenigstens nennt er Euler nicht. Die geometrisch merkwürdige Thatsache hat unter Benutzung von Cramers Ausdruck den Namen des Euler-Cramerschen Paradoxon erhalten.

Das 4. Kapitel, Einige Bemerkungen über die geometrische Construction von Gleichungen, will zeigen, wie die Durchschnittspunkte zweier Curven zur Auffindung der Wurzeln einer Gleichung mit nur einer Unbekannten nutzbar zu machen sind. Sei y die Unbekannte der aufzulösenden Gleichung, welche die Anfangsgleichung heissen mag, so kann fast nach Belieben eine Curvengleichung zwischen y und einer Hilfsunbekannten x aufgestellt und mit ihrer Hilfe eine Umformung der Anfangsgleichung vorgenommen werden, welche die zweite Curvengleichung erzeugt. Die Ordinaten der Durchschnittspunkte beider Curven sind die Wurzeln der Anfangsgleichung. Beispielsweise[3]) wird $y^3 = a^2 b$ auf $y^2 = ax$ in Verbindung mit $x^2 = by$ zurückgeführt. Allerdings hat die betonte angenäherte Willkür, die bei der Wahl der ersten Curvengleichung herrscht[4]), ihre Grenzen. Der Schnittpunkt, der eine Gleichungswurzel liefern soll, darf kein imaginärer sein. Man hat $y^4 + 15a^3 y$

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 77—78.
[2]) Ebenda pag. 78—79. [3]) Ebenda pag. 80—81. [4]) Ebenda pag. 83: *le choix de la première des deux équations indéterminées qui servent à construire une Égalité est presque arbitraire.*

$$+ 14a^4 = (y+a)(y+2a)\left(y - \frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{-19}\right)\left(y - \frac{3a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{-19}\right).$$

Wählt man nun die Curvengleichungen $y^3 - ax^2 = 0$, $yx^2 + 15a^2 y + 14a^3 = 0$, welche durch Elimination von x die Anfangsgleichung liefern, so zeigt sich, dass unter Voraussetzung von $a > 0$ die Curve $y^3 - ax^2 = 0$ nur oberhalb der Abscissenaxe, die Curve $yx^2 + 15a^2 y + 14a^3 = 0$ nur unterhalb der Abscissenaxe verläuft, dass also ausschliesslich imaginäre Durchschnittspunkte der beiden Curven stattfinden, während die Anfangsgleichung zwei reelle Wurzeln besitzt[1]). Eine andere Schwierigkeit kann dadurch entstehen, dass die Curven mehr reelle Durchschnittspunkte besitzen, als die Anfangsgleichung reelle Wurzeln. Diese Unbequemlichkeit erscheint, wenn zwei Durchschnittspunkte in Bezug auf die Hilfsunbekannte zwar verschieden, in Bezug auf die anfängliche Unbekannte aber in Uebereinstimmung sind[2]).

Wir erinnern uns hier an die Abhandlung von Rolle und De la Hire aus den Jahren 1708, 1709, 1710 (S. 392—393). Sehr verwandten Inhaltes war 1727 ein Aufsatz von Jacob Hermann[3]). Hier findet sich die Bemerkung, man solle als erste Curve eine solche wählen, deren Ordinaten von 0 beginnend alle Werthe bis ∞ (Hermann meint wohl eigentlich bis $\pm\infty$) durchlaufen, damit unter ihnen jedenfalls die reellen Wurzelwerthe der Anfangsgleichung, deren Unbekannte die Ordinate geworden ist, vorkommen[4]). Dann findet sich bei Hermann eine zweite Regel[5]). Sei die Anfangsgleichung vom Grade $2n$, was entweder thatsächlich der Fall ist, oder, wenn ihr Grad $2n-1$ gewesen sein sollte, durch Vervielfachung mit y erzielt werden kann. Dann gibt es einen Ausdruck $y^n + gy^{n-1} + \cdots + k$, welcher genau oder annähernd die Quadratwurzel des Gleichungspolynoms der Anfangsgleichung darstellt, und dessen Coefficienten man soviel als möglich durch Vergleichung von $(y^n + gy^{n-1} + \cdots + k)^2$ mit dem Gleichungspolynome der Anfangsgleichung bestimmt. Man soll alsdann die parabolische Curve $mx = y^n + gy^{n-1} + \cdots + k$ als erste Curvengleichung wählen und mittels ihrer und der Anfangsgleichung durch Einsetzung von mx in letztere die zweite Curvengleichung sich verschaffen.

Cramer eignet sich in seinem 4. Kapitel unter Berufung auf Hermann diesen Vorschlag in der Form an, man solle die erste Curve so wählen, dass in ihrer Gleichung die Hilfsunbekannte nur in erster

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 84—85.
[2]) Ebenda pag. 85—86. [3]) *Observatio in schediasma Rollii de constructione aequationum. Miscellanea Berolinensia* T. III, 131—146. [4]) Ebenda III, 135.
[5]) Ebenda III, 142—143.

Potenz auftrete, weil dann sicherlich nur eindeutige reelle Werthe derselben in Frage kommen können[1]). Auch eine andere Grenze hat man der Wahl der ersten Curvengleichung gesteckt, indem man die beiden Curven von so wenig als möglich verschiedenem Grade zu erhalten wünscht oder noch andere Zwecke erfüllen will, wofür Cramer gleichfalls Regeln aufstellt, die zwar schon von Jakob Bernoulli, von De L'Hôpital, von Stirling ähnlich gegeben waren, die aber Cramer einer eingehenden Prüfung unterwirft[2]).

Das 5. Kapitel, Werth des Productes der zu einer Abscisse gehörenden Ordinaten, gilt einem Satze, der, wie so Vieles bei Cramer, nicht grade neu ist, für den er sich auch auf Newton, Stirling, De Gua unter genauer Stellenangabe beruft, der aber in seiner Behandlung durch die eingehendste Erörterung an Bedeutung gewinnt. Sei (Fig. 134) die Curve $QMSLRN$ vom Grade v. Ihre Gleichung, die man nach y geordnet und auf 0 gebracht hat, beginne mit $(\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \cdots)y^{v-s}$ und schliesse mit $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} + Cx^{v-t-2} + \cdots$. Betrachtet man $\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \cdots = 0$ und denkt sich AT, AV, $AX \cdots$ als die ausschliesslich reellen Wurzeln dieser Gleichung, so kann man $\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \cdots = \alpha(x - AT)(x - AV)(x - AX) \cdots$ setzen. Ferner geht die Curvengleichung in $y = 0$ in $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} + Cx^{v-t-2} + \cdots = 0$ über, und die wieder ausschliesslich reellen Wurzeln dieser letzteren Gleichung sind nothwendig AQ, AR, $AS \cdots$, wenn die Curve die Abscissenaxe in Q, R, $S \cdots$ schneidet; man kann daher $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} + Cx^{v-t-2} + \cdots = A(x - AQ)(x - AR)(x - AS) \cdots$ setzen. Dividirt man die Curvengleichung durch den Coefficienten von y^{v-s}, was immer gestattet ist, weil man das Gleichungspolynom nicht mit dem ersten denkbaren, sondern mit dem ersten wirklich vorhandenen Gliede hat beginnen lassen, und setzt für ihn sowie für das letzte von y freie Glied die soeben gefundenen Werthe, so nimmt die Curvengleichung die Gestalt an $y^{v-s} + \cdots + \frac{A}{\alpha} \cdot$

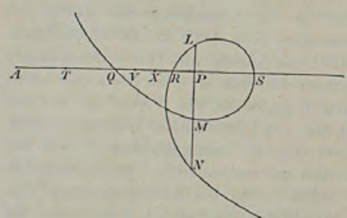

Fig. 134.

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 86—87.
[2]) Ebenda pag. 88—108

$\frac{(x - AQ)(x - AR)(x - AS) \cdots}{(x - AT)(x - AV)(x - AX) \cdots} = 0$, welche bei jedem Werthe von x die zugehörigen Ordinaten y liefern muss, z. B. $y = LP$, $y = MP$, $y = NP \cdots$, wenn $x = AP$ gesetzt wird. Dadurch erkennt man, dass $LP \cdot MP \cdot NP \cdots = \frac{A}{\alpha} \frac{PQ \cdot PR \cdot PS \cdots}{PT \cdot PV \cdot PX \cdots}$, und darin besteht der in der Ueberschrift des 5. Kapitels gemeinte Satz von dem Producte der Ordinaten[1]). Cramer verfolgt seine Bedeutung bei verschiedenen Werthen von v auch in den Fällen, in welchen die verschiedenen in dem Satze vorkommenden Gleichungswurzeln nicht sämmtlich reell sind.

Das 6. Kapitel, Von den Durchmessern, Gegendurchmessern und Mittelpunkten der Curven, geht aus von dem Coefficienten des zweithöchsten Gliedes der wie im 5. Kapitel nach y geordneten Curvengleichung $(\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots)y^{v-t} + (ax^{t+1} + bx^t + \cdots) \cdot y^{v-t-1} + \cdots = 0$, welche auch in $y^{v-t} + \frac{ax^{t+1} + bx^t + \cdots}{\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots} y^{v-t-1} + \cdots = 0$ umgeformt werden kann. Bei Annahme irgend einer Abscisse x, zu welcher $v - t$ Ordinaten y gehören, ist $-\frac{ax^{t+1} + bx^t + \cdots}{\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots}$ die Summe aller dieser Ordinaten, und das Gleiche findet statt, wenn man die $v - s$ Ordinaten einer Curve $y^{v-s} + \frac{ax^{t+1} + bx^t + \cdots}{\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots} + \cdots = 0$, welche zur Abscisse x gehören, negativ zu einer Summe vereinigt. Heissen die zu $x = AP$ gehörenden Ordinaten der ersten Curve PM, Pm, $P\mu \cdots$, die der zweiten Curve PN, Pn, $P\nu \cdots$, so ist also $PM + Pm + P\mu + \cdots = PN + Pn + P\nu + \cdots$. Der Satz hat die einfachste Gestalt, wenn $t = s$, d. h. wenn die beiden Curvengleichungen in ihren zwei ersten Gliedern und mithin auch in der Anzahl der in jeder derselben zu einer Abscisse gehörenden Ordinaten genau übereinstimmen. Dann ist $(PM - PN) + (Pm - Pn) + (P\mu - P\nu) + \cdots = NM + nm + \nu\mu + \cdots = 0$, und die gegenseitige Lage der Punkte N und M, n und m, ν und $\mu \cdots$ gibt dafür den Ausschlag, welche Strecken positiv, welche negativ sind[2]). Cramer beschränkt hierauf die Allgemeinheit des Satzes weiter. Er nimmt $t = 0$ an und $y^v + (ax + b)y^{v-1}$ als die Anfangsglieder beider Curvengleichungen. Die eine Gleichung kann als Vereinigung von v Geraden gedacht werden, d. h. ihre Gleichung als $(y + a_1 x + b_1) \cdot (y + a_2 x + b_2) \cdots (y + a_v x + b_v) = 0$, wobei es genügt, a_1, a_2, $\cdots a_v$ und b_1, b_2, $\cdots b_v$ so zu wählen, dass $a_1 + a_2 + \cdots + a_v = a$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_v = b$ werde. Es steht des Weiteren nichts im

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 108—110.
[2]) Ebenda pag. 129—131.

Wege $a_1 = a_2 = \cdots = a_v = \frac{a}{v}$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_v = \frac{b}{v}$ zu wählen, so dass die v Geraden zusammenfallend die Gleichung $\left(y + \frac{a}{v}x + \frac{b}{v}\right)^n = 0$ erhalten und mit der Ordinate PS, die zur Abscisse AP gehört, nur einen Durchschnittspunkt S besitzen. Alsdann ist $SM + Sm + S\mu + \cdots = 0$ und die v-fache Gerade ist ein Durchmesser der Curve [1]) in dem von Newton diesem Worte beigelegten Sinne (S. 422). Da aber jede Curve v^{ten} Grades, wenn sie nicht von vorn herein eine Gleichung mit den Anfangsgliedern $y^v + (ax + b)y^{v-1}$ besitzt, durch Drehung der Coordinatenaxen zu einer solchen gelangen kann [2]), so hat jede algebraische Curve geradlinige Durchmesser. Wie das zweithöchste Glied der Gleichung $y^v + (ax + b)y^{v-1} + (cx^2 + dx + e)y^{v-2} + \cdots = 0$ durch seinen Coefficienten die entgegengesetzte Summe der Wurzeln darbietet, so steht der Coefficient von y^{v-2} in Beziehung zu der Summe der Producte der Wurzeln zu je zweien u. s. w., und daraus folgen Sätze über sogenannte krummlinige Durchmesser. Die in der Ueberschrift des 6. Kapitels genannten Gegendurchmesser stellen einen von Bragelongne eingeführten Begriff dar [3]), der sich aber in der Geometrie nicht zu erhalten wusste, und dessen Erörterung wir unterlassen. Als Mittelpunkt [4]) wird in vollständigem Anschluss an De Gua (S. 794) der Punkt bezeichnet, von dem aus nach allen Richtungen symmetrisch gelegene Curvenpunkte zu erkennen sind.

Das 7. Kapitel, Bestimmung der grössten Glieder einer Gleichung; Grundzüge der Methode der Reihen, soll den Uebergang zur Beschäftigung mit den unendlichen Aesten der Curven bilden. In einem unendlich fernen Punkte überwiegen diejenigen Glieder, welche höhere Potenzen einer unendlichgrossen Strecke enthalten, gegen andere, und diese letzteren dürfen vernachlässigt werden. Das ist ungemein einfach, wenn nur eine Grösse, etwa x, unendlichgross wird, aber wenn zwei Veränderliche x und y vorkommen, von denen man zum Voraus, namentlich bei vielgliedrigen Gleichungen, nicht weiss, ob sie beide unendlichgross werden, und, wenn das der Fall sein sollte, welche Ordnung der Unendlichkeit jede erreicht, ist es viel schwieriger, die grössten Glieder des Gleichungspolynoms zu ermitteln, gegen welche alle anderen verschwinden. Klar ist vor allen Dingen, dass mindestens zwei Glieder des Gleichungspolynoms unendlichgross von gleicher Ordnung sein müssen [5]), weil ein ein-

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 131—134.
[2]) Ebenda pag. 134—135. [3]) Ebenda pag. 141. [4]) Ebenda pag. 144.
[5]) Ebenda pag. 152.

zelnes Unendlichgrosses, neben welchem alle anderen Glieder vernachlässigt werden, unmöglich $= 0$ sein kann. Man wird also versuchsweise irgend zwei Glieder als die von überwiegender Unendlichkeit betrachten, daraus das Verhältniss der Unendlichkeitsgrade von x und y ermessen und schliesslich zusehen, ob unter Festhaltung dieses Verhältnisses alle anderen Gleichungsglieder unendlichgross von niedrigerer Ordnung oder gar endlich oder unendlichklein werden. Bei der Gleichung [1]) $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$ sind drei Möglichkeiten. Entweder kann x^2y zugleich mit ay^2 überwiegend unendlichgross werden, oder x^2y und $-a^2x$, oder ay^2 und $-a^2x$. Im ersten Falle folgt aus $x^2y + ay^2 = 0$, dass $y = -\frac{x^2}{a}$. Hier ist x unendlichgross erster, y unendlichgross zweiter Ordnung, x^2y und ay^2 sind beide vierter Ordnung, $-a^2x$ nur erster Ordnung und bleibt mit Recht weg. Im zweiten Falle folgt aus $x^2y - a^2x = 0$, dass $xy = a^2$, x wird unendlichgross erster Ordnung, $y = \frac{a^2}{x}$ unendlichklein erster Ordnung, x^2y und $-a^2x$ sind beide unendlichgross erster Ordnung, ay^2 unendlichklein zweiter Ordnung und bleibt mit Recht weg. Im dritten Falle folgt aus $ay^2 - a^2x = 0$, dass $y^2 = ax$, x wird unendlichgross erster Ordnung, y unendlichgross von der Ordnung $\frac{1}{2}$, ay^2 und $-a^2x$ sind beide unendlichgross von der Ordnung 1, x^2y unendlichgross von der Ordnung $\frac{5}{2}$ und darf nicht weggelassen werden. Der dritte Fall führt mithin auf einen Widerspruch, und nur die beiden ersten sind zur Annahme gestattet. Ganz ähnliche Betrachtungen sind anzustellen, wenn die kleinsten Glieder eines Gleichungspolynoms gesucht werden, wobei nur zu beachten ist, dass bei unendlichkleinen Grössen die höherer Ordnung neben denen niedrigerer Ordnung verschwinden. Das Zeitraubende einer so geführten Untersuchung, insbesondere wenn das Gleichungspolynom aus zahlreichen Gliedern besteht, ist ein wahrer Missstand, und Cramer beseitigt ihn durch Anwendung des analytischen Dreiecks. Wie auf demselben allen Gliedern des Gleichungspolynoms Felder entsprechen, welche bemerklich gemacht werden, wie man ein Lineal durch je zwei solcher Felder zu legen und dabei zu beobachten hat, dass nur diejenigen Geraden nähere Betrachtung finden, welche kein bemerklich gemachtes Feld über, beziehungsweise unter sich erkennen lassen, je nachdem unendlichgrosse oder unendlichkleine Glieder aufgesucht werden, das sind Dinge, die weitläufig bei Cramer beschrieben sind. Hat er unabhängig von

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 153.

Maclaurin, den er nicht nennt, gearbeitet, und ist er mit Maclaurin auf gleichen Vorarbeiten fussend selbständig zu Ergebnissen gelangt, welche mit dem, was wir aus Maclaurins Algebra berichtet haben (S. 594), so nahe übereinstimmt, dass wir ein erneutes Eingehen darauf uns ersparen dürfen? Wir müssen uns auch hier auf Cramers wissenschaftliche Redlichkeit verlassen. Er beruft sich an so zahlreichen Stellen auf Newton, auf Taylor, auf Stirling, auf De Gua u. s. w., dass wir nicht wüssten, warum er Maclaurins Namen hier hätte übergehen sollen, wenn er dessen Algebra studirt gehabt hätte. Wir haben übrigens zweierlei hinzuzufügen, das Eine, dass es der Gedankenübereinstimmung zwischen Cramer und Maclaurin keinen Abbruch thut, dass Letzterer das Newtonsche Parallelogramm, Ersterer De Guas analytisches Dreieck anwendet, das Andere, dass Cramer vielleicht als Erster die Namen der Zeilen (*lignes*) und Columnen (*colomnes*) einführte[1]), um Felder zu bezeichnen, die sich in einer wagerechten oder senkrechten Linie befinden. Ausserdem müssen wir feststellen, dass, wie es auch mit Cramers Unabhängigkeit von Maclaurin beschaffen sein möge, er unter allen Umständen wesentlich über diesen seinen Vorgänger hinausgegangen ist. Cramer wendet nämlich seine Aufmerksamkeit auch dem Falle zu, dass das Lineal mehr als zwei mit Marken versehene Felder berühre[2]). Ist $x^m y^n$ ein berührtes Feld, so heissen die anderen längs des Lineals folgenden Felder vermöge der unmittelbar vorausgehenden Auseinandersetzung $x^{m+k}y^{n+l}$, $x^{m+2k}y^{n+2l}$ u. s. w., und die im Unendlichen übrig bleibenden Gleichungsglieder liefern $0 = ax^m y^n + bx^{m+k}y^{n+l} + cx^{m+2k}y^{n+2l} + dx^{m+3k}y^{n+3l} + \cdots$, wo einzelne der Coefficienten $a, b, c, d \cdots$ auch 0 sein können. Dividirt man diese Gleichung durch $x^m y^n$ und setzt dann $x^k y^l = z$, so geht die Gleichung über in $0 = a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots$, oder nach weiterer Division durch den Coefficienten der höchsten auftretenden Potenz von z und darauf folgender Zerlegung des Gleichungspolynoms in einfache Factoren $0 = (z - R)(z - r)(z - \varrho) \cdots$, d. h. die Gleichung zerfällt in $z = x^k y^l = R$, $x^k y^l = r$, $x^k y^l = \varrho$ u. s. w. Cramer unterscheidet hier zwischen reellen und imaginären Werthen $R, r, \varrho \cdots$, worüber wir aber zu berichten unterlassen. Cramer ist nun bei dem zweiten in der Ueberschrift des 7. Kapitels genannten Gegenstande angelangt, bei der Methode der Reihen, d. h. bei der Darstellung von y durch eine nach Potenzen von x geordnete Reihe auf Grund einer zwischen x und y vorhandenen Gleichung. Cramer löst die Aufgabe mittels

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 158. [2]) Ebenda pag. 169 sqq.

des analytischen Dreiecks mit Unterscheidung der beiden Fälle, dass die Reihe nach steigenden oder nach fallenden Potenzen von x geordnet sein soll. Die ersteren Reihen nennt er[1]) wachsend, *séries croissantes*, oder ansteigend, *s. ascendantes*, die zweiten abnehmend, *s. décroissantes*, oder absteigend, *s. descendantes*. Beide Gattungen von Reihen sollen convergiren, nicht divergiren. Die Reihe ist convergent, wenn man dem gesuchten Wurzelwerthe um so näher kommt, je mehr Reihenglieder man zusammenfasst; sie würde divergent sein, wenn man sich von dem Wurzelwerthe um so mehr entfernte, je mehr Reihenglieder man zusammenfasste. Es ist klar, dass eine divergente Reihe irreführend oder mindestens nutzlos ist[2]). Wann aber das Eine, wann das Andere der Fall sei, fragt Cramer gar nicht, geschweige denn, dass er darüber Auskunft ertheilte. Soll eine steigende Reihe für y gesucht werden, so dient das analytische Dreieck zur Auffindung ihres Anfangsgliedes Ax^h unter Voraussetzung eines unendlichkleinen x, wie die Voraussetzung eines unendlichgrossen x zur Auffindung des Anfangsgliedes Ax^h einer fallenden Reihe führt. Dann setzt man $y = Ax^h + u$ in die zwischen x und y gegebene Gleichung, welche dadurch in eine solche zwischen x und u übergeht, die nach der gleichen Methode behandelt $u = Bx^i + \cdots$, also auch $y = Ax^h + Bx^i + \cdots$ mit Kenntniss zweier Reihenglieder liefert. Bei Fortsetzung des Verfahrens könnte entweder u oder ein späteres Reihenglied mehr als nur einen Werth annehmen. Alsdann gibt es mehrere mit denselben Gliedern beginnende, später aber sich gabelnde Reihen[3]). Die Punkte, wo eine Gabelung eintritt, nennt Cramer unregelmässige[4]). Wir möchten in diesem hochinteressanten Kapitel nur noch auf zwei Einzelheiten hinweisen. Cramer bemerkt[5]), dass, wenn ein einziges Reihenglied imaginär ausfalle, die ganze Reihe imaginär sei. Das ist genau der Gedanke Eulers in der Abhandlung von 1749 (S. 821), die Cramer kaum noch zu Gesicht bekommen haben konnte. Ferner spricht Cramer von des Descartes *méthode des indéterminées*[6]). Das dürfte das erste Vorkommen dieses Kunstausdruckes sein.

Das 8. Kapitel, Von den unendlichen Aesten der Curven, ist von einem Reichthume und einer Langathmigkeit des Inhaltes[7]), welche nur die Wahl übrig lässt, sehr ausführlich oder ungemein

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 177. [2]) Ebenda pag. 174: *Il est clair qu'une série divergente est trompeuse ou du moins inutile.* [3]) Ebenda pag. 184: *La série se fourche.* [4]) Ebenda pag. 200: *termes irreguliers.* [5]) Ebenda pag. 184. [6]) Ebenda pag. 205. [7]) Ebenda pag. 215 bis 351.

knapp zu berichten. Wir ziehen das Letztere vor und erklären, dass hier die geometrischen Folgerungen aus den Lehren des 7. Kapitels gezogen werden, indem wir nur wenige allgemeine Gedanken hervorheben. Das Hinausrücken eines Punktes in die Unendlichkeit kann ebenso bei $x = \infty$ als bei $y = \infty$ erfolgen. Es genügt also nicht, die Reihe $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + \cdots$ sich zu verschaffen, man muss auch, wozu freilich neue Vorschriften nicht erforderlich sind, x in eine nach y geordnete Reihe entwickeln[1]). Es genügt ferner nicht, um einen unendlichen Curvenast kennen zu lernen, bei dem ersten Gliede der Entwicklung $y = Ax^h$ stehen zu bleiben[2]). Es war gezeigt, dass man auch $u = Bx^i$, $t = Cx^k$ finden könne, und dass alsdann die ganze zu $x = \infty$ gehörende Ordinate des wirklichen Curvenpunktes $y + u + t + \cdots$ sei. So wichtig es nun ist, dass bei der Ausrechnung das reelle u gegen y, das reelle t gegen $u \cdots$ als unendlichklein vernachlässigt werden kann, so hört diese Erlaubniss auf, wenn u oder $t \cdots$ imaginär wird. In diesem Falle wiederholt sich die im 7. Kapitel hervorgehobene Bemerkung, dass ein imaginärer Bestandtheil der Ordinate sie ganz imaginär macht, und dass alsdann der unendliche Ast nicht wirklich vorhanden ist. Aber selbst bei lauter reellen Bestandtheilen ist eine Untersuchung von $u, t \cdots$ erforderlich, um zu wissen, ob keine Gabelung des unendlichen Astes stattfinde. Die unendlichen Aeste sind entweder hyperbolische mit geradlinigen Asymptoten oder parabolische ohne solche[3]). Den Schluss des Kapitels bilden zehn Sätze über geradlinige Asymptoten, die fast insgesammt nicht neu sind, vielmehr als schon bei Newton, Stirling, Nicole, De Gua vorkommend in Fussnoten nachgewiesen sind. Die Beweisführung Cramers von der Methode der Reihen aus ist jedoch so durchaus eigenartig, dass wir uns nicht versagen können, wenigstens über die des ersten Satzes von dem paarweisen Vorkommen unendlicher Aeste[4]) zu berichten. Die Ordinate des unendlichfernen Punktes sei $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + \cdots$, und diese Reihenentwicklung sei durchaus reell, möge man x positiv oder negativ wählen. In diesem Falle muss es auf beiden Seiten der Abscissenaxe bei $x = \infty$ und bei $x = -\infty$ einen unendlichfernen Punkt geben, der einem unendlichen Aste angehören muss. Zweitens kann die Entwicklung imaginär sein, dann führt sie überhaupt zu keinem unendlichen Aste. Aber die Entwicklung kann drittens auch das sein, was Cramer an einer früheren Stelle[5]) halbimaginär genannt hat, d. h. sie enthält

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 215. [2]) Ebenda pag. 216—217. [3]) Ebenda pag. 230. [4]) Ebenda pag. 342—343. [5]) Ebenda pag. 171.

Potenzen von x mit gebrochenem Exponenten mit gradzahligem Nenner, z. B. $x^{\frac{m}{2n}}$ mit ungradem m, und wird dadurch bei negativem x imaginär. Alsdann gibt es freilich nur bei $x = +\infty$ eine reelle Entwicklung, aber sie ist doppelt vorhanden, weil die Ausziehung der $2n^{\text{ten}}$ Wurzel dazu nöthigt, das betreffende Glied in der Entwicklung einmal mit dem Pluszeichen und einmal mit dem Minuszeichen eingehen zu lassen.

Das 9. Kapitel, Allgemeine Eintheilung der Linien der fünf ersten Grade, bedient sich schon bei den Kegelschnitten der unendlichen Aeste als Unterscheidungsmerkmal[1]). Die im Unendlichen den Ausschlag gebenden Glieder der Gleichung 2^{ten} Grades $a + by + cx + dx^2 + exy + fx^2 = 0$ sind $dy^2 + exy + fx^2$ und dieser dreigliedrige Ausdruck ist entweder bei $e < 2\sqrt{df}$ das Product zweier imaginärer einfacher Factoren, oder bei $e > 2\sqrt{df}$ das Product zweier verschiedener reeller einfacher Factoren, oder bei $e = 2\sqrt{df}$ das Product zweier gleicher reeller einfacher Factoren, und diese drei Möglichkeiten entsprechen der Ellipse ohne unendlichen Ast, der Hyperbel mit vier hyperbolischen unendlichen Aesten und zwei geradlinigen Asymptoten, der Parabel. Bei den Curven 3^{ten} Grades heissen die im Unendlichen den Ausschlag gebenden Glieder $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3$ und ihre Zerlegung in einfache Factoren führt zur Unterscheidung von vier Fällen: ein reeller Factor ist mit zwei imaginären Factoren vervielfacht, oder alle drei Factoren sind reell und von einander verschieden, oder von den drei reellen Factoren sind zwei einander gleich oder alle drei reelle Factoren sind einander gleich. Diese vier Fälle lassen dann weiter 14 Geschlechter unterscheiden[2]), was mit Newtons Abzählung (S. 423) übereinstimmt. Aehnlich ist die Eintheilung der Curven 4^{ten} und 5^{ten} Grades, welche letztere Cramer zuerst unternahm. Es handelt sich immer um das Reellsein oder Imaginärsein der einfachen Factoren der im Unendlichen den Ausschlag gebenden Glieder des Gleichungspolynoms der betreffenden Curve, deren Zerlegbarkeit in Factoren vorausgesetzt ist, und wenn diese Factoren reell sind, um ihre Verschiedenheit oder Gleichheit, Unterscheidungen, welche Cramer allerdings hier in andere Worte kleidet, indem er von der Anzahl der parabolischen und der hyperbolischen Aeste und der den letzteren zukommenden geradlinigen Asymptoten redet. Cramer kommt zu neun Gruppen von Curven 4^{ten} Grades[3]) und zu elf Gruppen von Curven 5^{ten} Grades[4]), jede mit zahllosen Unterabtheilungen.

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 352—359. [2]) Ebenda pag. 369. [3]) Ebenda pag. 395—396. [4]) Ebenda pag. 397—398.

Das 10. Kapitel, Von den singulären Punkten, den vielfachen Punkten, den Inflexionspunkten, den Schlängelungspunkten, behandelt zuerst die Inflexionspunkte und Schlängelungspunkte, in welchen eine Berührungslinie nicht bloss zwei, sondern mehrere coincidirende Punkte[1]) mit der Curve gemein hat, und zwar $2n+1$ Punkte in den Inflexionspunkten, $2n$ Punkte in den Schlängelungspunkten oder unsichtbaren Inflexionspunkten, welche nur die Analysis erkennt, deren Auge schärfer ist als das leibliche[2]). Dann kommen die vielfachen Punkte, deren immer wieder durch das analytische Dreieck erleichterte Auffindung darauf hinausläuft, dass man den Coordinatenanfangspunkt mittels $x = m + z$, $y = n + u$ verlegt. Lassen sich Werthe von m und n bestimmen, vermöge deren die umgeformte Gleichung kein constantes Glied mehr besitzt, so liegt der neue Coordinatenanfangspunkt auf der Curve, und er ist ein einfacher, doppelter, dreifacher $\cdots$ Punkt, je nachdem die Unbekannten z und u in der neuen Gleichung zusammengerechnet von der 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} $\cdots$ Dimension anfangend vorhanden sind[3]). Cramer zeigt dabei, wie man sich viele überflüssige Rechnung zu ersparen vermöge, wenn man die Glieder der einzelnen Dimensionen nach einander berechne, also aufhöre, sobald ein Glied irgend einer Dimension nicht mit dem Coefficienten 0 behaftet erscheine. Ein isolirter Punkt tritt in einem Beispiele hervor[4]). Bei der Berechnung anderer Beispiele erscheinen auch Gleichungen mit nur einer Unbekannten und mehrfachen Wurzeln. Cramer bemerkt[5]), dass eine von Hudde herrührende Methode bei der Aufsuchung solcher Wurzeln gute Dienste leiste und verweist für dieselbe auf den dritten Anhang.

Das 11. Kapitel, Von der Methode der Tangenten. Von den Inflexionspunkten u. s. w. Von den grössten und kleinsten Abscissen oder Ordinaten u. s. w., baut auf die im 10. Kapitel festgestellte Thatsache weiter, dass die Verlegung des Coordinatenanfangspunktes auf die Curve selbst die Curvengleichung in die Gestalt bringt, dass sie nunmehr durch die Dimension ihrer niedersten Glieder die Vielfachheit des zum neuen Anfangspunkt gewählten Curvenpunktes anzeigt. Wir hätten vielfach auf Parallelstellen im II. Bande von Eulers Introductio hinzuweisen Gelegenheit gehabt. Wenn wir es in der Regel unterliessen, so wollen wir doch hier an

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 401: *Points infiniment proches l'un de l'autre et coïncidents.* [2]) Ebenda pag. 403: *L'inflexion ne parait plus, quoiqu'elle existe réellement dans un espace infiniment petit et qu'élle soit sensible à l'Analyse, dont la vuë, si l'on ose parler ainsi, est plus perçante que la nôtre.* [3]) Ebenda pag. 415. [4]) Ebenda pag. 449. [5]) Ebenda pag. 445.

das 13. Kapitel jenes Bandes erinnern (S. 809—810). Euler wusste, dass der Grad der Vielfachheit des als Anfangspunkt gewählten Curvenpunktes dem Grade des niedersten Gleichungsgliedes entspricht. Er wusste, dass, wenn nur das constante Glied in der umgewandelten Curvengleichung fehlt, die $= 0$ gesetzten Glieder erster Dimension die Gleichung der Berührungslinie im Coordinatenanfangspunkte darstellen. Auch diese Folgerung entging Cramer nicht, aber er verallgemeinerte sie noch. Er erkannte in den $= 0$ gesetzten Gleichungsgliedern niedersten Ranges $gy^t + hxy^{t-1} + \cdots + lx^t$ die vereinigten Gleichungen der Berührungslinien an die im Anfangspunkte zusammentreffenden t Curvenäste[1]); er sprach beweislos aus, was er im 9. Kapitel schon vorausgesetzt hatte, dass jene Glieder t^{ter} Dimension in t einfache Factoren $(Ay + \alpha x)(By + \beta x)(Cy + \gamma x) \cdots$ zerfallen, worin eine Begegnung mit dem 18. Kapitel des II. Bandes von Eulers Introductio (S. 813) zu erkennen ist. Ein maschinales Verfahren zur Bestimmung der Vielfachheit des Coordinatenanfangspunktes und der Gleichung der dort vorhandenen Berührungslinien[2]) gestattet das analytische Dreieck. Sei etwa die Conchoide $y^2x^2 + x^4 - 2axy^2 - 2ax^3 + a^2y^2 + (a^2 - b^2)x^2 = 0$ zu untersuchen. Man legt das Dreieck mit der Spitze nach unten, so dass die Felder von unten nach oben im rechten Schenkel $1, x, x^2, x^3, x^4$ und im linken Schenkel $1, y, y^2, y^3, y^4$ heissen. Man bezeichnet die Felder, welche mit vorhandenen Gliedern gleichnamig sind, durch einen Stern, die leeren Felder durch ein Ringelchen. Das Leersein der beiden unteren Horizontalzeilen (Fig. 135) zeigt, dass der Coordinatenanfangspunkt (er ist der Pol derjenigen Abart der Conchoide, welche eine Schleife besitzt) ein zweifacher Punkt ist. In der dritten Zeile von unten tragen die Felder x^2 und y^2 Sterne, also ist $a^2y^2 + (a^2 - b^2)x^2 = 0$ die Gleichung der beiden Berührungslinien, welche in $ay + \sqrt{b^2 - a^2}x = 0$ und $ay - \sqrt{b^2 - a^2}x = 0$ zerfällt. Eine durch die Substitutionen $x = ru$, $y = su$ bewirkte Drehung der Ordinatenaxe lässt $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$ erscheinen und verwandelt die Curvengleichung $a + (by + cx) + (dy^2 + exy + fx^2) + \cdots = 0$ in $a + (bs + cr)u + (ds^2 + ers + fr^2)u^2 + \cdots = 0$. Fehlt bei der, wie gelehrt wurde, bewirkten Ausbreitung der Gleichung auf dem analytischen Dreiecke eine gewisse Anzahl unterer

```
○   ○   *   ○   *
  ○   *   ○   *
    *   ○   *
      ○   ○
        ○
```

Fig. 135.

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 463. [2]) Ebenda pag. 412 und pag. 466.

Horizontalreihen, so zeigt die erste übrigbleibende Potenz von u durch ihren Exponenten diese Anzahl an. Bringt das Verhältniss $\frac{r}{s} = \frac{x}{y}$, welches aus der Nullsetzung des Coefficienten jener ersten übrigen Potenz von u hervorgeht, auch den Coefficienten der nächsthöheren Potenz von u zum Verschwinden, so ist im Anfangspunkte ein Inflexionspunkt erkannt[1]). Cramer sucht auch die Gleichung der Berührungslinie an einen ausserhalb des Coordinatenanfangspunktes liegenden Curvenpunkt. Sie findet sich am Leichtesten durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in den Berührungspunkt, und die dazu führenden Rechnungen entsprechen einer Differentiation. Cramer sagt das zwar nicht, aber die Vorschriften, wie man es machen solle, sind in genauer Uebereinstimmung mit den Lehren der Differentialrechnung[2]) und ebenso auch die Aufsuchung der Subtangente[3]) und die Ermittelung eines Inflexionspunktes[4]), in welchem der zweite Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse verschwinden muss. War bis dahin das Ergebniss so zu fassen, dass man die Gleichung, d. h. die Lage und Richtung der Berührungslinie an einem bestimmten Curvenpunkt finden könne, so kann man auch umgekehrt nach den Curvenpunkten fragen, in welchen die Berührungslinie eine bestimmte Richtung besitze, und wählt man dazu die Richtung parallel zur Abscissenaxe, so findet man die Punkte eines Maximum oder Minimum der Ordinate, es sei denn, dass ein sichtbarer Inflexionspunkt auftrete[5]). Abermals treibt Cramer verhüllte Differentialrechnung in umfassendster Weise. Auch die Methode der Reihen führt zur Kenntniss der in unserem Berichte erwähnten Dinge. Wird die geometrische Eigenthümlichkeit eines Curvenpunktes M gesucht, so wählt Cramer einen senkrecht unter demselben gelegenen Punkt P zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Ordinatenaxe mit MP zusammenfällt. Die Ordinaten dieses Systems heissen u, die Abscissen z, und die Reihenentwicklung $u = A + Bz + Cz^2 + \cdots$ wird vorgenommen, welche um so richtiger ist, je kleiner z gewählt wird. Alsdann ist[6]) A die Ordinate von M, B die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie an M mit der Abscissenaxe bildet, C nach Grösse und Vorzeichen der Unterschied zwischen den Ordinaten von unendlich nahe bei M liegenden Punkten der Curve und der Berührungslinie. Ein Maximum oder Minimum der Ordinate in dem Sinne, dass die rechts und links befindlichen Nachbarordinaten beide kleiner oder beide grösser als

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 467. [2]) Ebenda pag. 471—472. [3]) Ebenda pag. 473—475. [4]) Ebenda pag. 481—482. [5]) Ebenda pag. 487. [6]) Ebenda pag. 517—525.

die zwischen ihnen befindliche Ordinate sind, findet meistens statt, wenn die Berührungslinie der Abscissenaxe parallel läuft, kann aber auch bei dem Parallelismus der Berührungslinie mit der Ordinatenaxe in einem Rückkehrpunkte eintreten[1]).

Das 12. Kapitel, Von der Krümmung der Curven in ihren verschiedenen Punkten, bringt die erste nähere Begründung, warum der Kreis zum Vergleiche mit der Krümmung einer Curve gewählt wurde. Zwar dass der Kreis überall gleich gekrümmt sei, haben schon Andere, dass seine Krümmung um so grösser sei, je kleiner der Halbmesser ist, hat auch Euler ausgesprochen (S. 811), aber Cramer erläutert es. Biegt man, sagt er[2]), zwei gleiche Strecken kreisförmig zusammen, und zwar so, dass man aus der einen Strecke einen ganzen Kreis bildet, aus der anderen einen Halbkreis, so ist letzterer zweimal weniger gekrümmt als ersterer, und sein Halbmesser ist zweimal so gross als der des ganzen Kreises. Stehen, fährt er fort, die Halbmesser AC, ac zweier Kreise im Verhältnisse von m zu n, und ist der Bogen AB des ersten Kreises genau gleich lang mit dem Bogen ab des zweiten Kreises, misst man dann die Bogen AB, ab in Graden, Minuten u. s. w., so verhält sich AB zu ab wie n zu m, d. h. wie ac zu AC, oder wie $\frac{1}{AC}$ zu $\frac{1}{ac}$, d. h. die Krümmung gleich langer Kreisbogen steht im reciproken Verhältnisse ihrer Halbmesser. Die Auffindung des Krümmungskreises einer Curve lehrt Cramer folgendermassen[3]). Sei (Fig. 136) $Mm\mu$ die auf das Coordinatensystem der AP und AQ bezogene Curve, und sei $AP = x$, $MP = y$, $Pp = Mn = z$. Im 11. Kapitel war gezeigt, dass, wenn die Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ gebildet wird, A die Ordinate y bedeutet, Bz das Stück nO, $Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ das Stück Om. Nun ist OM Berührungslinie wie an die Curve $Mm\mu$, so auch an den Kreis $MmiJH$, und Omi ist eine Secante dieses letzteren Kreises, also $OM^2 = Om \cdot Oi$, $Oi = \frac{OM^2}{Om}$ $= \frac{Mn^2 + On^2}{Om} = \frac{z^2 + B^2z^2}{Cz^2 + Dz^3 + \cdots} = \frac{1 + B^2}{C + Dz + \cdots}$ nebst $OM = z\sqrt{1 + B^2}$. Bei $z = 0$ fällt Oi mit MJ zusammen, und man hat $MJ = \frac{1 + B^2}{C}$. Nun ist ferner $\triangle MJH \sim MnO$ und deshalb $\frac{MH}{MJ} = \frac{MO}{Mn}$, $MH =$

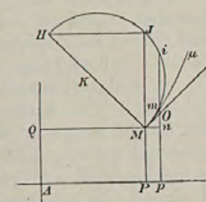

Fig. 136.

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 527. [2]) Ebenda pag. 539. [3]) Ebenda pag. 541—542.

$\frac{MJ \cdot MO}{Mn} = \frac{1+B^2}{C} \cdot \frac{z\sqrt{1+B^2}}{z} = \frac{(1+B^2)^{\frac{3}{2}}}{C}$, der Krümmungshalbmesser aber ist $MK = \frac{(1+B^2)^{\frac{3}{2}}}{2C}$. Der Krümmungshalbmesser wird ∞, die Krümmung also 0, wenn $C = 0$, und das ist nur in Inflexionspunkten oder Schlängelungspunkten, aber nicht in allen solchen der Fall, es gibt vielmehr auch Inflexionspunkte, in denen die Krümmung ∞, der Krümmungshalbmesser also 0 ist[1]). Die Krümmung einer Curve in einem Punkte wird am leichtesten erkannt, indem man den Punkt zum Coordinatenanfangspunkte wählt und die Curvengleichung in die Form $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + \cdots$ bringt, d. h. sie als eine parabolische Curve betrachtet[2]), womit die Voraussetzung $h > 0$ verbunden ist. Innerhalb der positiven Werthe von h sind alsdann Unterscheidungen wie $0 < h < \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < h < 1$, $h = 1$, $1 < h < 2$, $h > 2$ zu treffen, welchen Folgerungen bezüglich der Krümmungsgrösse entsprechen.

Das 13. Kapitel, Von den verschiedenen Arten vielfacher Punkte, welche bei Curven der sechs ersten Grade vorkommen, beschliesst das Werk. Er nimmt die ermittelten Sätze noch einmal im Zusammenhange und unter Vorführung zahlreicher Beispiele in Betrachtung.

So wenig wir einer Entschuldigung dafür zu bedürfen glaubten, dass wir dem II. Bande von Eulers Introductio fast das ganze 115. Kapitel widmeten, ebensowenig werden wir unser langes Verweilen bei Cramers Einführung in die Lehre von den algebraischen Curven besonders rechtfertigen müssen. Beide Bände, in Vielem übereinstimmend, in Mehrerem einander ergänzend, stellen die ersten wirklichen Lehrbücher der algebraischen Curven dar, in einer Vollendung auftretend, wie sie nur als Frucht jahrelanger Vorbereitung erreicht werden kann. Grade diese Vortrefflichkeit des Cramerschen Werkes kann als Bestätigung seines Ausspruches dienen, er habe die Eulersche Introduction allzuspät kennen gelernt, um den Nutzen aus ihr zu ziehen, den er sonst davon hätte haben können (S. 824). Es ist nicht möglich, in noch nicht zwei Jahren, wenn man die Druckzeit von Cramers dickem Bande von dem Zwischenraume zwischen dem Erscheinen beider Werke in Abzug bringt, ein Manuscript wie das Cramersche herzustellen, beziehungsweise unter Zuhilfeziehung eines neu erschienenen Werkes ganz umzuarbeiten. Eulers Erstlingsrecht

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 549. [2]) Ebenda pag. 555.

auf gemeinschaftliche Entdeckungen bleibt natürlich unangetastet, aber Cramers Unabhängigkeit im Allgemeinen, abgesehen von kleinen Einschaltungen, deren Vorhandensein die von Cramer gebrauchte Redewendung gar nicht ausschliesst, ist anzuerkennen.

Wir haben gelegentlich (S. 531) ein im Jahre 1750 erschienenes Buch des Abbé De la Chapelle über Kegelschnitte genannt und von dessen rascher Beliebtheit gesprochen. Wir haben gegenwärtig, wo wir das Buch um seines Gegenstandes willen abermals nennen müssen, unserer früheren Kennzeichnung nichts hinzuzufügen. De la Chapelle unterschied in seiner Vorrede zum *Traité des sections coniques* erfindende Mathematiker von solchen, die es verstehen, Erfindungen angenehm und leicht vorzutragen. Er beansprucht nur einen Platz unter den Letzteren, und den darf die Geschichte ihm gönnen.

In gleicher Kürze mögen die *Institutiones geometriae sublimioris* von Georg Wolfgang Krafft erwähnt werden, deren wir auch schon (S. 505) gedachten. Das als I. Band bezeichnete Buch kündet in der vom 5. April 1753 datirten Vorrede eine Fortsetzung an, welche man allerdings nicht gar bald erwarten dürfe. Wäre diese erschienen, was bei dem 1754 eingetretenen Tode des Verfassers unmöglich wurde, so hätte sie vielleicht sich mit höheren Curven beschäftigt und dem Namen des Werkes mehr entsprochen, als der I. Band, der es nur mit Kegelschnitten und dem Kreise zu thun hat, und der ein Interesse fast ausschliesslich durch die zahlreichen geschichtlichen Angaben verdient, um derenwillen wir das Werk im 101. Kapitel nannten. Wir fügen hier noch bei, dass die geschichtlichen Angaben bis auf die Druckzeit hinabgreifen, und dass z. B. mehrere angenäherte Rectificationen des Kreises aus der ersten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts dort Platz gefunden haben.

Noch rascher müssen wir an zwei Schriften vorübergehen, welche wir nur aus zweiter Quelle erwähnen können. Der Minoritenpater François Jacquier[1]) (1711—1788), aus Vitri-le-Français, der in Rom lebte und lehrte, gab dort 1755 Elemente der Perspective nach Taylors Grundgedanken bearbeitet heraus. In Form eines Anhanges soll dort die perspectivische Erzeugung aller Curven 3ten Grades von den fünf divergirenden Parabeln aus behandelt sein.

Achille Pierre Dionis du Séjour (1734—1794) und dessen Freund Mathieu Bernard Goudin[2]) (1734—1817), von denen der

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 146 (deutsch 142). Poggendorff I, 1184—1185.
[2]) Chasles, *Aperçu hist.* 153 (deutsch 150). Poggendorff I, 574—575 und 932. Loria in der *Bibliotheca mathematica* 1899 S. 10—12. Vergl. auch *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris* 1756, *Histoire* pag. 79 über die Namen der Verfasser des Werkes.

Erstere der Pariser Akademie der Wissenschaften angehörte, gaben 1756 gemeinschaftlich, aber ohne ihren Namen zu nennen, ein Werk über algebraische Curven heraus. Aus einer Notiz in den Veröffentlichungen der Pariser Akademie aus dem Erscheinungsjahre des Buches sind die Verfasser bekannt. Das kleine aber inhaltsreiche Buch behandelt in acht Kapiteln, denen eine aus zwei Kapiteln bestehende Einleitung vorhergeht, allgemeine Curveneigenschaften, wie sie in den älteren Schriften von De Gua, von Euler, von Cramer vorkommen, daneben auch manches Neue. Aus der Einleitung heben wir den Satz hervor, dass eine Curve, welche durch ein System paralleler Geraden in keinem Punkte geschnitten wird, selbst aus einem System paralleler Geraden bestehe, dann besonders aus dem 3. Kapitel von den vielfachen Punkten den wichtigen Satz, eine Curve t^{ten} Grades könne nicht mehr als höchstens $t^2 - t$ Punkte besitzen, in welchen die Berührungslinien einer gegebenen Richtung parallel laufen. Dieser Satz ist erst 1818 von Poncelet zum zweiten Male entdeckt worden.

117. Kapitel.

Maximal- und Minimalaufgaben. Eulers Methodus inveniendi.

Den Arbeiten, welche Aufgaben der analytischen Geometrie in thunlich elementarster Weise behandeln, schliessen sich am natürlichsten solche an, welche die Mittel der höchsten Mathematik der damaligen Zeit in den Dienst der Geometrie stellten, und wir kommen so zu der (S. 799) für dieses Kapitel in Aussicht gestellten Erzählung der Fortschritte, welche aus dem im 92. und im 100. Kapitel geschilderten Streit der Brüder Jakob und Johann Bernoulli über grösste und kleinste Werthe hervorgingen[1]). Wir haben (S. 244) gesehen, dass Johann Bernoulli zu Ende August 1698 die Lehre von den kürzesten Linien darauf gründen wollte, dass die Ebene durch drei consecutive Punkte einer kürzesten Linie senkrecht zur Berührungsebene an die Oberfläche in einem jener drei Punkte stehe, und dass er Ende 1728 eine Abhandlung über diesen Gegenstand an Professor Klingenstierna von Upsala mitgetheilt haben will, welche aber erst 1742 im IV. Bande der damals im Druck erscheinenden

[1]) F. Giesel, Geschichte der Variationsrechnung I. Theil (Torgau 1857). P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der kürzesten Linien (Leipzig 1893). Abhandlungen zur Variationsrechnung I. Theil, herausgegeben von P. Stäckel (Ostwalds Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 46, Leipzig 1894).

Gesammtausgabe von Johann Bernoullis Schriften mit anderen vorher noch nicht herausgegebenen Arbeiten in die Oeffentlichkeit gelangte[1]). Professor Klingenstierna[2]) (1698—1765) gehörte zu den hervorragenden schwedischen Mathematikern und ist auch wohl als deren Erster bezeichnet worden. Sein handschriftlicher Nachlass umfasst mehr als 200 Abhandlungen. Unter den gedruckten Aufsätzen behandelt einer die linearen Differentialgleichungen. Er ist in den Abhandlungen der schwedischen Akademie von 1755 veröffentlicht. Wir haben jetzt über die an Klingenstierna gelangte Abhandlung von Johann Bernoulli zu berichten, vorher allerdings über Arbeiten Eulers und Clairauts, welche gleichfalls höheren Aufgaben aus der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen gewidmet waren.

Euler, der 1727 als zwanzigjähriger Jüngling, wie wir in Erinnerung bringen möchten, nach Petersburg gekommen war (S. 550), traf dort Daniel Bernoulli (S. 90) und erhielt durch diesen[3]) die Aufforderung seines Vaters Johann Bernoulli, sich mit der Frage der kürzesten Linien zu beschäftigen. Johann Bernoulli selbst, wurde bemerkt, besitze die allgemeine Gleichung jener Linien. In einem Briefe Eulers an diesen vom 10. December 1728 ist von der Aufgabe noch keine Rede, dagegen gab Euler in einem am 18. Februar nachfolgenden Briefe die Differentialgleichung der kürzesten Linien als neuerdings von ihm aufgefunden an. Die Niederschrift der Eulerschen Abhandlung *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente*[4]) muss daher frühestens im December 1728 begonnen worden sein, und ihr Schluss ist sicherlich noch später niedergeschrieben, denn er bezieht sich auf die kürzesten Linien auf besonderen Oberflächen, auf welche Johann Bernoulli erst in der Nachschrift eines Briefes vom 18. April 1729 Euler hingewiesen hat. Die Ausgabe des Bandes der Petersburger Veröffentlichungen für 1728 und in ihm des Eulerschen Aufsatzes erfolgte 1732. Wenn am Rande das Datum November 1728 angegeben ist, so kann nach den vorerwähnten Thatsachen damit unmöglich das Einreichungsdatum des Aufsatzes gemeint sein. Höchst wahrscheinlich war vielmehr November 1728 das Datum des Bekanntwerdens Eulers mit der Aufgabe der kürzesten Linien. Wohl könne man, sagt Euler in der genannten Abhandlung, eine mechanische Auflösung sofort erhalten, wenn man einen Faden von einem Punkte der als convex

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* T. IV, 108—128. [2]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1898 S. 57. [3]) Eneström, *Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques* in der *Bibliotheca mathematica* 1899 S. 19—24. [4]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1728. T. III, 110—124.

gedachten Oberfläche nach einem zweiten Punkte straff anziehe, aber schon bei einer concaven Oberfläche genüge dieses Verfahren nicht, welches nur eine Sehne der Oberfläche liefere, wenn man den Faden nicht zwinge, sich überall der Oberfläche anzuschmiegen, und geometrisch sei das Verfahren unter keiner Bedingung. Der Geometer müsse damit beginnen, die Gleichung einer Oberfläche herzustellen, und dazu bedürfe man dreier Coordinaten x, y, z, wie zwei Coordinaten in der Ebene dazu dienen, die Natur der Curve in eine Gleichung zu kleiden.

Wir schalten hier ein, dass wir nicht absichtslos auf das Druckjahr 1732 aufmerksam gemacht haben. Wir entnehmen ihm, dass Clairaut, als er 1730 seine *Recherches sur les courbes à double courbure* herausgab, Eulers Aufsatz noch nicht kennen konnte, wie Eulers Unabhängigkeit von Clairauts durch den Brief vom Februar 1729 verbürgt ist.

Eine Curve auf der Oberfläche, fährt Euler fort, könne man, nachdem die Flächengleichung gegeben sei, entweder dadurch bestimmen, dass man einer der drei Coordinaten einen festen Werth gebe, oder dadurch, dass man sich eine zweite Flächengleichung verschaffe, so dass die Curve der Durchschnitt der zwei Oberflächen werde. Endlich einen Flächenpunkt liefere die Verleihung fester Werthe an zwei von den drei Coordinaten der Flächengleichung oder die Vereinigung dreier Flächengleichungen. So läuft die Auffindung der kürzesten Linien auf einer Oberfläche von gegebener Gleichung darauf hinaus, eine zweite Gleichung zwischen x, y, z zu ermitteln, was unter Zugrundelegung der für die Auffindung grösster und kleinster Werthe giltigen Methode erfolge, unter Berücksichtigung des Satzes, dass die Minimaleigenschaft der ganzen Curve auch irgendwelchen Elementen der Curve zukommen müsse.

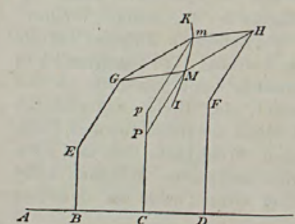

Fig. 137.

Das war der Satz, welchen Jakob Bernoulli 1697 aussprach (S. 235), welchen ebenderselbe 1701 wiederholt benutzte (S. 448), von welchem auch Johann Bernoulli 1706 Gebrauch machte (S. 456), ebenso wie die Bemerkung Eulers über eine mechanische Lösung der Aufgabe an Redewendungen Johann Bernoullis aus dem Jahre 1698 (S. 243) anknüpft.

Euler sagt: Es mögen (Fig. 137) G und H irgend zwei Punkte der Oberfläche sein, deren Coordinaten AB, $BE\,(=b)$, $EG\,(=c)$, und $AD\,(=AB+2a)$, $DF\,(=f)$, $FH\,(=g)$ heissen. Zwischen ihnen liege der Punkt M mit den Coordinaten $AC\,(=AB+a)$, $CB\,(=x)$, $PM\,(=y)$. Dann ist $GM=\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}$, $MH=\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}$ und soll $GM+MH=\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}+\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}$ ein Minimum werden, so ist die Bedingung dafür das Verschwinden seines Differentials, d. h. $\frac{(x-b)dx+(y-c)dy}{\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}}=\frac{(f-x)dx+(g-y)dy}{\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}}$, welches sich rechtfertigt, indem m als unendlichnahe bei M gelegen und alsdann $GM+MH=Gm+mH$ angenommen wird. Die vorhergehende Annahme $BC=CD=a$ rechtfertigt sich, wenn die Punkte G und H selbst unendlichnahe bei M auf der als bekannt angesehenen kürzesten Linie IK liegen. Alsdann ersetzen sich aber a, b, c, f, g durch andere Bezeichnungen. Es ist nämlich $a=dt$, $f=x+dx$, $g=y+dy$, $b=x-dx+d^2x$, $c=y-dy+d^2y$, wie Euler ohne weitere Begründung hinschreibt. Ferner ist, sagt er, durch die Kenntniss der IK auch die Kenntniss des Verhältnisses von dx zu dy im Punkte M bedingt als $\frac{dx}{dy}=\frac{Q}{P}$, und die erhaltene Gleichung geht, wenn in den Zählern der darin vorkommenden Brüche dx und dy durch Q und P, wenn sodann a, b, c, f, g durch ihre erwähnten Werthe ersetzt werden, über in $\frac{Q(dx-d^2x)+P(dy-d^2y)}{\sqrt{dt^2+(dx-d^2x)^2+(dy-d^2y)^2}}=\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2}}$. Der links vom Gleichheitszeichen stehende Bruch ist dasjenige, was aus dem rechts befindlichen entsteht, wenn dx um d^2x, dy um d^2y abnimmt, während P, Q, dt constant bleiben, d. h. die Gleichung behauptet, das unter der Voraussetzung constanter P, Q, dt gewonnene Differential von $\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2}}$ sei Null, oder

$$\frac{(dt^2+dx^2+dy^2)(Qd^2x+Pd^2y)-(Qdx+Pdy)(dxd^2x+dyd^2y)}{(\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2})^3}=0,$$

beziehungsweise $\frac{Qd^2x+Pd^2y}{Qdx+Pdy}=\frac{dxd^2x+dyd^2y}{dt^2+dx^2+dy^2}$. Neben dieser ersten Differentialgleichung bedarf man einer zweiten, welche durch Differentiation der Flächengleichung als $Pdx=Qdy+Rdt$ gewonnen wird. Dass in ihr die Grössen P, Q vorkommen müssen, geht daraus hervor, dass, wenn in dem der kürzesten Linie angehörenden Flächenpunkte M das Coordinatenstück t constant geworden ist, nur $Pdx=Qdy$ übrig bleiben kann, wie vorher angenommen war.

Will man Eulers Gleichung auf ihre Uebereinstimmung mit der heute üblichen Form der Gleichung der kürzesten Linie prüfen, welche $F(x, y, z) = 0$ als Flächengleichung und $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial F}{\partial z} = R$, voraussetzend $P(dy d^2z - dz d^2y) + Q(dz d^2x - dx d^2z) + R(dx d^2y - dy d^2x) = 0$ lautet, so ist zu beachten, dass bei Euler t steht, wo wir heute z, und $-P$, wo wir heute P schreiben, dass er ferner dt (beziehungsweise dz) als constant betrachtet, wodurch $d^2z = 0$ wird. Die heutige Gleichung verwandelt sich dadurch in $P dt d^2y + Q dt d^2x + R(dx d^2y - dy d^2x) = 0$. Vervielfacht man sie mit dt, so nimmt sie die Gestalt an $(Pd^2y + Qd^2x) dt^2 + R dt (dx d^2y - dy d^2x) = 0$ oder $(Pd^2y + Qd^2x) dt^2 = (Qdy - Pdx)(dx d^2y - dy d^2x) = - Pd^2y dx^2 - Qd^2x dy^2 + dx dy (Pd^2y + Qd^2y) - Pd^2y dy^2 - Qd^2x dx^2 + Pd^2y dy^2 + Qd^2x dx^2$ oder endlich $\frac{Qd^2x + Pd^2y}{Qdx + Pdy} = \frac{dx d^2x + dy d^2y}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$ wie bei Euler.

Die weitere Fortsetzung des Aufsatzes wendet die bisher allgemein gehaltenen Betrachtungen auf besondere Oberflächen an, wie wir (S. 843) gesagt haben.

Von viel grösserer Tragweite waren die Ergebnisse des um vier Jahre späteren Aufsatzes *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*[1]). Euler wusste hier, unter dem Titel einer allgemeinen Auflösung des im weitesten Sinne des Wortes gefassten isoperimetrischen Problems, alle auf die Auffindung grösster oder kleinster Werthe gerichteten Aufgaben in ein System von Classen zu bringen, welche die Art ihrer Behandlung sofort von selbst enthüllen.

1. Solle eine Curve bestimmt werden, welche eine Eigenschaft A im grössten oder kleinsten Masse besitze, so müsse man zwei aneinanderstossende Curvenelemente in Betrachtung ziehen.

2. Solle eine die Eigenschaft A besitzende Curve bestimmt werden, welche ausserdem die Eigenschaft B im grössten oder kleinsten Masse besitze, so müsse man drei aneinanderstossende Elemente in Betrachtung ziehen.

3. Solle eine die Eigenschaften A und B besitzende Curve bestimmt werden, welche ausserdem eine Eigenschaft C im grössten oder kleinsten Masse besitze, so müsse man vier aneinanderstossende Curvenelemente in Betrachtung ziehen u. s. w.

4. Solle man also eine mit n Eigenschaften bereits versehene Curve so bestimmen, dass sie eine $(n+1)^{\text{te}}$ Eigenschaft im grössten

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos 1732 et 1733.* T. VI. 123—155.

oder kleinsten Masse besitze, so müsse man $n+2$ aneinanderstossende Curvenelemente in Betrachtung ziehen.

Euler erkennt ferner die Vertauschbarkeit der Bedingungen in dem Sinne, dass, wenn von $n+1$ geometrischen Thatsachen n der Curve bereits anhaften, die $(n+1)^{\text{te}}$ im grössten oder kleinsten Masse erzielt werden soll, jede der $n+1$ Eigenschaften als die $(n+1)^{\text{te}}$ gewählt werden darf, ohne den Classencharakter der Aufgabe zu verändern. Als Princip gilt ihm[1]), dass die Maximal- oder Minimaleigenschaft der ganzen Curve jedem ihrer Theile innewohnen müsse. Als Regel schreibt er vor[2]), dass man von der Curve, welche bereits als gefunden gedacht werde, zu einer nächsten Lage derselben übergehen und dann die bedungene Eigenschaft als noch bestehend in Rechnung bringen solle. Dann gibt er genauere Vorschriften für die Aufgaben der aufeinanderfolgenden Classen, jedem Kenner sein Studium der Jakob Bernoullischen Abhandlung vom Mai 1697 (S. 235, Fig. 41) sofort enthüllend.

In der ersten Aufgabenclasse ist (Fig. 138) $a\beta c$ die neue Lage der früheren Curve abc, in welche der Uebergang so stattfindet, dass das Curvenelement ab zu $a\beta$ wird und um βm zunimmt, während das Curvenelement bc zu βc wird und um bn abnimmt; eine Zunahme (Abnahme) um das Stück $b\beta$ hat auch $bM (cN)$ erlitten. Nun ist $\triangle \beta bm \sim baM$ und $\triangle \beta bn \sim bcN$ und deshalb $\beta m = \frac{bM \cdot b\beta}{ab}$ sowie $bn = \frac{cN \cdot b\beta}{cb}$, sodass alle Veränderungen auf $b\beta$ zurückgeführt erscheinen. Als Beispiel wird die Aufgabe[3]) behandelt,

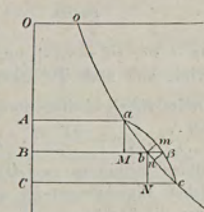

Fig. 138.

diejenige Curve zu finden, für welche $\int x^n ds$ ein Minimum sei. Das findet statt, wenn jedes Element des Integrals ein Minimum ist, also auch $OA^n \cdot ab$ und $OB^n \cdot bc$, sowie deren Summe. Der Summe $OA^n \cdot ab + OB^n \cdot bc$ entspricht in der Neulage $OA^n \cdot a\beta + OB^n \cdot \beta c$, und Gleichsetzung der Summen führt zu $OA^n \cdot \beta m = OB^n \cdot bn$ oder zu $\frac{OA^n \cdot bM \cdot b\beta}{ab} = \frac{OB^n \cdot cN \cdot b\beta}{cb}$ oder zu $\frac{OA^n \cdot bM}{ab} = \frac{OB^n \cdot cN}{cb}$. Der Ausdruck rechts ist das, was aus dem Ausdrucke links wird, wenn die denselben bildenden Strecken sich je um ihr Differential verändern. Die Gleichung besagt also, dass das Differential von

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos 1732 et 1733.* T. VI, 128. [2]) Ebenda T. VI, 129. [3]) Ebenda T. VI, 129—130.

$\frac{OA^n \cdot bM}{ab}$ verschwinde, beziehungsweise dass $\frac{OA^n \cdot bM}{ab}$ eine Constante sei, welche man durch a^n bezeichnen darf. Dabei ist $OA = x$, $bM = dy$, $ab = ds$, folglich $\frac{x^n dy}{ds} = a^n$ die Differentialgleichung der gesuchten Curve. Wäre die Bedingung allgemeiner die gewesen, es soll $\int P ds$ ein Minimum sein, wo P irgend eine Function von x bezeichnet, so hiesse die Differentialgleichung der gesuchten Curve $P dy = A ds$, wo A eine Constante ist.

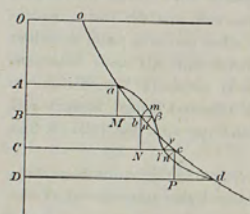

Fig. 139.

Bei der zweiten Aufgabenclasse bildet sich (Fig. 139) die neue Lage $a\beta\gamma d$ der als bekannt gedachten Curve $abcd$ in der Weise[1]), dass $OA = x$, $Aa = y$, $oa = s$, $AB = BC = CD = dx$, $bM = dy$, $ab = ds$, $cN = dy + d^2y$, $bc = ds + d^2s$, $dP = dy + 2d^2y + d^3y$, $cd = ds + 2d^2s + d^3s$ war, und dass $a\beta = ab + m\beta$, $\beta\gamma = bc - b\mu - \nu c$, $\gamma d = cd + \gamma n$, $M\beta = Mb + b\beta$, $N\gamma = Nc - b\beta - c\gamma$ wird, und auch Pd ist gegen das frühere Pd um $c\gamma$ gewachsen. Dreiecksähnlichkeiten fordern $\beta m = \frac{bm \cdot b\beta}{ab}$, $b\mu = \frac{cN \cdot b\beta}{ab}$, $c\nu = \frac{cN \cdot c\gamma}{cb}$, $\gamma n = \frac{dP \cdot c\gamma}{cd}$. Zwei Bedingungen sollen erfüllt werden, führen mithin zu zwei Gleichungen, in welchen nach den erforderlichen Einsetzungen $b\beta$ und $c\gamma$ im ersten Grade hervortreten, so dass die Gleichungen die Form haben $P \cdot b\beta - Q \cdot c\gamma = 0$, $R \cdot b\beta - S \cdot a\gamma = 0$. Meistentheils, fährt Euler fort[2]), ist dabei $Q = P + dP$, $S = R + dR$; haben aber die Grössen P, Q und R, S diese formelle Eigenschaft nicht, so können sie dieselbe immer erhalten, indem man die Gleichungen mit einem Factor vervielfacht oder durch einen Divisor theilt[3]).

Bleiben wir einen Augenblick bei dieser Aeusserung stehen. Sie sagt nichts Anderes als dass $Q - P$, und genau das Gleiche gilt für $S - R$, ein vollständiges Differential sei, beziehungsweise dass diese Behauptung immer für $M(Q - P)$ Geltung habe, wo M irgend einen Factor bezeichnet, der im einfachsten Falle die Einheit ist. Euler

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 132—134. [2]) Ebenda T. VI, 134. [3]) *Si vero huiusmodi formam non habuerint poterunt semper multiplicando vel dividendo aequationes ad talem reduci.*

muss also damals das Vorhandensein des integrirenden Factors bereits erkannt haben, von welchem allerdings ein ganz besonderer Fall schon bei Johann Bernoulli (S. 227) Anwendung fand. Wir haben (S. 760) zum voraus auf diese Stelle verwiesen.

Sei nun der einfachste Fall $M = 1$ als vorhanden gedacht, und dividirt man die Gleichungen $P \cdot b\beta = (P + dP)c\gamma$, $R \cdot b\beta = (R + dR)c\gamma$ durch einander, so entsteht $\frac{P}{R} = \frac{P + dP}{R + dR}$ und daraus leicht $\frac{dP}{P} = \frac{dR}{R}$, woraus durch Integration $P + aR = 0$ folgt, worin a eine Integrationsconstante ist. Die Aufgabe ist aber damit auf die der Auffindung der Functionen P und R zurückgeführt, und ist diese gelungen, so ist ein maschinales Hinschreiben der Endgleichung ermöglicht. Euler führt specielle Annahmen für die in der Einleitung (S. 846) als A und B bezeichneten Eigenschaften ein, d. h. er wählt gewisse Integrale, von denen das eine constant bleiben, das andere ein Maximum oder ein Minimum werden soll, und zeigt, wie unter dieser Voraussetzung P und R ausfallen. Soll etwa die ebene Curve gesucht werden[1]), welche bei gleichem Umfange die grösste Fläche umschliesst, so ist $A = \int y dx$, $B = \int ds$. Euler findet $P = dx$ und $R = dq$, wo q eine Abkürzung für $\frac{dy}{ds}$ ist[2]). Die gesuchte Differentialgleichung heisst demnach $dx = adq$ und nach der Integrirung $x = aq = a\frac{dy}{ds}$ oder $dy = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, welche neuerdings integrirt zu $x^2 + y^2 = a^2$ führt.

Bei der dritten Aufgabenclasse werden an einer den vorigen Figuren im Ganzen ähnlichen und nur durch die Berücksichtigung von vier Curvenelementen von ihnen abweichenden Zeichnung und mit gleichfalls im Ganzen ähnlichen Schlüssen drei Gleichungen ermittelt[4]), deren jede die Form $P \cdot b\beta - Q \cdot c\gamma + R \cdot d\delta = 0$ besitzt, zwischen welchen alsdann $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ sich eliminiren, so dass eine Endgleichung $P + mp + n\pi = 0$ entsteht, innerhalb deren m und n willkürliche Constanten sind, hervorgegangen aus zwei nach einander vollzogenen Integrationen.

Eulers Aufsatz war noch nicht gedruckt, da reichte Clairaut 1733 der Pariser Akademie eine Arbeit über einige Maximal- und Minimalaufgaben, *Sur quelques questions de maximis et minimis*[4]), ein, Die Aufgaben, welche er erwähnt, sind ungemein sinnreich erdacht, z. B. diejenige, welche verlangt, auf einer gegebenen Oberfläche den

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 143. [2]) Ebenda T. VI, 142. [3]) Ebenda T. VI, 149. [4]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1733 pag. 186—194.

Weg zwischen zwei gegebenen Punkten der Art zu vollziehen, dass der auf diesem Wege sich Befindende die geringstmögliche Einwirkung von mehreren Kräften empfinde, welche selbst auf der Fläche ihre Wirkungsmittelpunkte besitzen und jede von dem ihrigen aus nach irgend einem bekannten Gesetze sich äussern. Insbesondere behandelt alsdann Clairaut die Aufgabe: Auf einer durch ihre Gleichung nach x, y, z gegebenen Oberfläche eine Curve zwischen den gegebenen Punkten f und g zu zeichnen, so dass für die Ausdehnung der Curve fGg das Integral $\int X ds$ einen constanten Werth besitze, das Integral $\int X^2 ds$ dagegen ein Minimum werde[1]). Dabei bedeuten X und X^2 irgend welche Functionen von x, y, z, also X^2 nicht etwa das Quadrat von X. Auch Clairaut benutzt drei consecutive Curvenelemente[2]) GH, HJ, JK und sucht sie so zu bestimmen, dass, wenn X und X^2 in H die Werthe Y, Y^2, in J die Werthe Z, Z^2 annehmen, $X \cdot GH + Y \cdot HJ + Z \cdot JK$ constant und $X^2 \cdot GH + Y^2 \cdot HJ + Z^2 \cdot JK$ ein Minimum werde. Ein wesentlich neuer Gedanke ist zu dem, was man schon längere Zeit wusste, nicht hinzugetreten.

Ausserdem hat Clairaut in dem gleichen Jahre 1733 einen wenigstens zum Theil hierher gehörenden Aufsatz über die Gestalt der Erde veröffentlicht[3]), welchem er 1739 eine Fortsetzung folgen liess[4]). Beide Aufsätze hängen mit den Gradmessungen in Lappland und in Peru zusammen, an deren ersterer Clairaut theilnahm. In dem Aufsatze von 1733 bewies Clairaut den Satz, dass bei jeder kürzesten Linie auf einer Umdrehungsfläche das Product aus dem Radius des Parallelkreises, dem einer ihrer Punkte angehört, in den Sinus des Winkels, den ihre ebendort gezogene Berührungslinie mit dem Meridiane bildet, einen constanten Werth besitzt; in der Fortsetzung von 1739 sind die kürzesten Linien auf wenig von der Kugelgestalt abweichenden Umdrehungsellipsoiden mit Hilfe von Reihen, die nach Potenzen der Excentricität fortschreiten, näherungsweise bestimmt

Wollen wir die der Zeitfolge nach sich hier anschliessenden Arbeiten Eulers, dessen Interesse an verwickelteren Maximal- und Minimalaufgaben 1732 keineswegs erschöpft war, besprechen, so fordert der Zusammenhang, dass wir rückgreifend einen älteren Aufsatz kurz erwähnen. Euler hatte 1726 in den A. E. einen Aufsatz

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1733 pag. 188. [2]) Ebenda pag. 189: *Soient GH, HJ, JK trois côtes consécutifs de la courbe cherchée.* [3]) Ebenda: *Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre.* [4]) Ebenda. Année 1739: *Suite du mémoire de* 1733.

über die Isochrone im widerstehenden Mittel veröffentlicht und dabei gelegentlich die Aufgabe gestellt[1]): Die Brachystochrone im widerstehenden Mittel unter der Voraussetzung einer gleichmässig wirkenden Schwerkraft zu finden. Hermann gab 1727 eine Auflösung dieser Aufgabe[2]) in einem ausserdem noch mannigfache mechanische Fragen behandelnden Aufsatze und kam darin auf Irrwege, welche ihn zu einem anderen Ergebnisse führten als Euler erlangt hatte. Euler machte ihn brieflich darauf aufmerksam und erhielt von Hermann die Antwort, er sei selbst an seiner Untersuchung zweifelhaft geworden und behalte sich vor, diese Frage neuerdings zu prüfen. Bevor ihm dieses möglich war, starb Hermann im Juli 1733, und nun glaubte Euler es dem Andenken des verstorbenen Freundes schuldig zu sein, den Sachverhalt so, wie wir es ihm folgend gethan haben, zu schildern, damit man Hermann nicht später einmal beschuldige, Unrichtiges veröffentlicht zu haben, ohne jemals seinen Irrthum eingesehen zu haben. Zugleich theilte Euler seine eigene Auflösung mit[3]), und es kennzeichnet die für die damalige Zeit noch unbesiegbare Schwierigkeit der Aufgabe, dass auch Eulers Behandlung als eine verfehlte bezeichnet werden muss, was Daniel Bernoulli in einem Briefe vom 12. September 1736[4]) (also bevor der betreffende Band der Petersburger Abhandlungen 1740 in die Oeffentlichkeit gelangte) Euler selbst gegenüber aussprach.

In eben diesem Jahre 1736 erschien Eulers erstes umfangreiches Werk, seine *Mechanica sive motus scientia analytice exposita.* Wie wir, um uns nicht allzuweit von der reinen Mathematik zu entfernen, Hermanns Phoronomie von 1716 nur im Vorübergehen (S. 276) genannt haben, wie wir auch auf Daniel Bernoullis Hydrodynamik von 1738 keine Rücksicht zu nehmen gedenken, so werden wir uns versagen müssen, ausführlich über Eulers Mechanik zu berichten. Was indessen in ihrem II. Theile in nächster Beziehung zu den in diesem Kapitel behandelten Fragen steht, dürfen wir nicht übergehen.

Schon in der Vorrede zum II. Theile der Mechanik[5]) sagt Euler: Ich habe bewiesen, dass ein durch keine Kräfte angetriebener Körper sowohl auf einer gegebenen Linie als auch auf einer gegebenen Oberfläche sich gleichförmig bewegen müsse; dass aber auf der letzteren der Weg des Körpers die kürzeste Linie sein werde, welche auf dieser Oberfläche gezogen werden kann.

[1]) A. E. 1726 pag. 363. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727. T. II, 139 sqq. [3]) Ebenda 1733 *et* 1734. T. VII, 135—149. [4]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 434. [5]) Eulers Mechanik (deutsch von J. Ph. Wolfers) II, 3.

Gleich im 1. Kapitel von der nichtfreien Bewegung im Allgemeinen ist der 8. und 9. Satz[1]) dazu bestimmt, die in der Vorrede ausgesprochene Bemerkung zu rechtfertigen. Der 8. Satz hat folgenden Inhalt. Sei (Fig. 140) auf der Oberfläche ABC ein Weg DM durch einen bewegten Körper durchlaufen. An und für sich hätte der Körper alsdann die Neigung, sich in der Tangentialrichtung Mn zur seitherigen Bahn weiter zu bewegen, wenn dem nicht der Zwang auf der Oberfläche zu bleiben, entgegenstünde. Um die thatsächliche Bahn der Fortbewegung des Körpers zu ermitteln, zerlegt man das in einem Zeitelemente zu durchlaufende Wegelement Mn in zwei Componenten, in die zur Oberfläche senkrechte $nm \parallel MO$ und in die der Oberfläche selbst angehörende Mm. Die Bewegung nm wird durch den genannten Zwang aufgehoben, die Bewegung Mm wird durch jenen Zwang nicht verändert und bleibt die eigentliche Bahn des Körpers. Die Ebene Mmn auch nach rückwärts in der Richtung der MD fortgesetzt, enthält die zur Oberfläche senkrechte nm, ist also selbst senkrecht zu dem als Ebene aufzufassenden Flächenelement, die Bewegungsbahn hat also die Eigenschaft, dass die Ebene, in welcher zwei beliebige zusammenhängende Elemente derselben liegen, normal zur Oberfläche steht. Das ist die Eigenschaft der kürzesten Linie, welche Johann Bernoulli schon 1698 kannte (S. 244), welche aber, da dessen Briefwechsel mit Leibniz erst 1745 im Drucke erschien, 1736 für die Oeffentlichkeit noch neu war. Für Euler war sie allerdings nicht neu, denn Johann Bernoulli hatte sie ihm in dem (S. 843) angeführten Briefe vom 18. April 1729 mitgetheilt, und Euler hatte sie nur zu beweisen. Das that er im 9. Satze. Der Krümmungshalbmesser der Curve DMm liegt in der durch zwei zusammenhängende Curvenelemente bestimmten Ebene und fällt deshalb in die Richtung der Flächennormale MO, während er zugleich senkrecht zur Curve DMm ist. Es war also einestheils der Krümmungshalbmesser einer beliebigen Flächencurve im Punkte M, anderentheils die Flächennormale in ebendemselben Punkte M zu ermitteln und alsdann die Frage zu beantworten, unter welcher Bedingung beide Richtungen zusammenfallen. Die Antwort bringt Euler in die Gestalt einer Differentialgleichung, welche genau ebendieselbe ist, die er im III. Bande der Petersburger Commentarien,

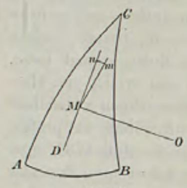

Fig. 140.

[1]) Eulers Mechanik (deutsch von J. Ph. Wolfers) II, 24—29.

auf den er sich ausdrücklich bezieht, als Gleichung der kürzesten Linie (S. 845) gefunden hatte. Soweit war Doppeltes erreicht: es war gezeigt, dass die Bewegungsbahn eines zum Verbleiben auf einer Oberfläche genöthigten Körpers eine kürzeste Linie sei, es war die geometrische Haupteigenschaft der kürzesten Linien bewiesen.

Ein Zusatz zum 8. Satze[1]) sagt: Ein auf der Oberfläche ausgespannter Faden bezeichnet die kürzeste Linie, und daher wird derselbe zugleich den Weg angeben, auf welchem der Körper an der Oberfläche fortgeht. Vielleicht darf man annehmen, Euler sei, als er Satz 8 kennen lernte, alsbald auf diesen Zusatz gestossen, der ihn dann veranlasste, in Satz 9 den Nachweis des Besitzes der Eigenschaft des Satzes 8 für die kürzesten Linien zu liefern. Hat man doch auch für Johann Bernoulli die Entdeckung eben jener Eigenschaft der kürzesten Linien mit mechanischen Untersuchungen, nämlich mit der Aufsuchung der Kettenlinie, in Verbindung zu bringen gewusst[2]).

Im 4. Kapitel, von der Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Oberfläche[3]), ist wiederholt von kürzesten Linien die Rede, ist wiederholt auf die Abhandlung von 1728 Bezug genommen. Wir begnügen uns damit, dieses zu bemerken und zu gleicher Zeit darauf aufmerksam zu machen, dass Euler schon hier eine volle Beherrschung der analytischen Geometrie des Raumes an den Tag legte, wenn auch die im Anhange zum II. Bande der Introductio zusammengestellten Entdeckungen noch fehlten, vielleicht auch nur noch nicht zum Ausspruche kamen, weil keine Gelegenheit dazu vorlag.

In dem Erscheinungsjahre 1736 der Mechanik legte Euler der Petersburger Akademie eine Abhandlung unter dem Titel *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis*[4]) vor. Die Bedeutung dieser neuen und leichten Auffindung von mit Maximal- oder Minimaleigenschaften versehenen Curven ist schon aus folgendem ihrer Einleitung entnommenen Satze ersichtlich: „Ich bin jüngst auf derartige Fragen gestossen, zu deren Erledigung die früher von mir aufgestellten Formeln nicht genügten, so dass ich mich genöthigt sah, neue weitere Aussichten eröffnende Formeln zu betrachten und für sie zur Auflösung der Aufgabe geeignete Werthe zu suchen.“ Er will also die 24 früher betrachteten Einzelformeln (S. 849) zunächst durch eine einzige ersetzen und dann früher noch Unberücksichtigtes erledigen. Euler bedient sich dabei römischer Zahlzeichen als Stellen-

[1]) Eulers Mechanik (deutsch von J. Ph. Wolfers) II, 25, Zusatz 2. [2]) P. Stäckel, Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vom 3. Juli 1893. S. 447—448. [3]) Eulers Mechanik (deutsch von J. Ph. Wolfers) II, 419—460. [4]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 159—190.

zeiger, welche über den Buchstaben angebracht andeuten sollen, dass von einem Raumpunkte zu einem zweiten, dritten u. s. w. Consecutivpunkte übergegangen sei, für welche die mit dem Stellenzeiger versehenen Buchstaben das Gleiche bedeuten, wie die nichtindicirten Buchstaben für den ursprünglichen Punkt. Demnach ist $\overset{\mathrm{I}}{y} = y + dy$, $\overset{\mathrm{II}}{y} = y + 2dy + d^2y$, $\overset{\mathrm{I}}{dy} = dy + d^2y$, $\overset{\mathrm{II}}{dy} = dy + 2d^2y + d^3y$, $\overset{\mathrm{I}}{d^2y} = d^2y + d^3y$, $\overset{\mathrm{I}}{Q} = Q + dQ$ u. s. w. Ferner bedeutet p die erste Ableitung von y nach x, s die Bogenlänge, so dass $dy = pdx$, $ds = \sqrt{1+p^2}dx$ ist, wobei dx als constant gilt. Stellt nun $\int Qdx$ das Integral vor, von welchem gewünscht wird, dass es eine Maximal- oder Minimaleigenschaft erhalte, und ist Q eine Function von s, y, x, p, so wird $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$, oder mit anderen Worten: es ist $\frac{\partial Q}{\partial s} = L$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = M$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = N$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = V$. Das auf das einzelne Element ab der gesuchten Curve bezügliche Qdx wird in dem consecutiven Elemente bc zu $\overset{\mathrm{I}}{Q}dx$, und für die beiden Curvenelemente $ab + bc$ zusammen findet $Qdx + \overset{\mathrm{I}}{Q}dx$ statt. Bei einer benachbarten Curve, welche zwischen a und c einen Zwischenpunkt β besitzt, bringt der Uebergang von ab nach $a\beta$ nur die Veränderung von p in $p + \frac{b\beta}{dx}$ zu Stande, während die dem Punkte a entsprechenden x, y, s unverändert bleiben, daher ist hier $dQdx = V \cdot b\beta$. Der Uebergang von bc nach βc dagegen verlangt, dass in $\overset{\mathrm{I}}{Q}$ die Grössen $\overset{\mathrm{I}}{y}, \overset{\mathrm{I}}{s}, \overset{\mathrm{I}}{p}$ in $\overset{\mathrm{I}}{y} + b\beta$, $\overset{\mathrm{I}}{s} + \frac{dy \cdot b\beta}{ds}$, $\overset{\mathrm{I}}{p} - \frac{b\beta}{dx}$ übergehen, und dadurch wird $\overset{\mathrm{I}}{d}Qdx = \left[\overset{\mathrm{I}}{L}\overset{\mathrm{I}}{d}s + \overset{\mathrm{I}}{M}\overset{\mathrm{I}}{d}y + \overset{\mathrm{I}}{N}dx + \overset{\mathrm{I}}{V}\overset{\mathrm{I}}{d}p\right]dx = \overset{\mathrm{I}}{L}\frac{dx \cdot dy \cdot b\beta}{ds} + \overset{\mathrm{I}}{M}dx \cdot b\beta - \overset{\mathrm{I}}{V} \cdot b\beta$. Der Unterschied zwischen den Ausdrücken, welche der Elementensumme $ab + bc$ und derjenigen $a\beta + \beta c$ entsprechen, ist daher $\left[V + \frac{\overset{\mathrm{I}}{L}dxdy}{ds} + \overset{\mathrm{I}}{M}dx - \overset{\mathrm{I}}{V}\right]b\beta$ oder $\left[\frac{\overset{\mathrm{I}}{L}dxdy}{ds} + \overset{\mathrm{I}}{M}dx - dV\right]b\beta$, und da derselbe $= P \cdot b\beta$ sein und $P = 0$ die Curvengleichung darstellen soll, so heisst eben diese[1]) $\overset{\mathrm{I}}{L}dxdy + \overset{\mathrm{I}}{M}dxds = dsdV$, wo alsdann die Indicirung von L und M weggelassen ist. Euler zeigt die Anwendung dieser Formel an Beispielen, auch an solchen, deren Maximal- beziehungsweise Minimal-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 164.

eigenschaft sich nicht auf ein einfaches Integral $\int Qdx$, sondern auf ein Doppelintegral $\int Qdx \int Rdx$ bezieht[1]), und wo das gelehrte Verfahren weniger einfache, aber doch dem Grundgedanken nach ganz ähnliche Ergebnisse zu Tage fördert.

Wesentlich anderer Natur wird aber die Aufgabe, wenn die Function ausser x, y, s und deren erste Differentiale auch zweite Differentiale in sich schliesst[2]) und vier Curvenelemente der Betrachtung zu unterziehen sind. Euler fügt seinen bisherigen Bezeichnungen noch r für die zweite Ableitung von y nach x bei, setzt also $d^2y = r \cdot dx^2$ und $d^2s = \frac{prdx^2}{\sqrt{1+p^2}}$, und nimmt $\frac{\partial Q}{\partial r} = W$ an. In diesem Falle erhält er die Curvengleichung[3]): $d^2W - dV \cdot dx + \frac{Ldx^2 \cdot dy}{ds} + M \cdot dx^2 = 0$, und unter den Beispielen für diese Annahme ist die berichtigte Herleitung der Brachistochrone im widerstehenden Mittel zu finden[4]). Im noch allgemeineren Falle, dass wieder ein Doppelintegral in Frage komme, führt die Darstellung von P zu einer äusserst verwickelten Exponentialgrösse[5]).

Gegen Ende der Abhandlung kommt Euler zu dem wichtigsten Ergebnisse von der Unrichtigkeit von Jakob Bernoullis Voraussetzung, von welcher er selbst, wie alle seine Vorgänger, bis zu diesem Zeitpunkte unbedenklich ausgegangen war. Wenn, sagt er[6]), unter allen die Punkte o und z verbindenden Curven eine bestimmt werden soll, bei welcher die bedingende Function Q weder s noch ein Integral einschliesst, dann wird die Curve oz die betreffende Bedingung erfüllen, insofern jedes ihrer Elemente oa die gleiche Eigenschaft besitzt; hängt dagegen Q von s oder von einem Integrale ab, so kann die Curve oz die Grösse $\int Qdx$ zu einem Maximum oder Minimum machen, auch ohne dass irgend eines ihrer Elemente der gleichen Eigenschaft theilhaftig wäre.

Man begreift, dass Johann Bernoulli, auch wenn sein Charakter ein anderer gewesen wäre, und wenn er nicht so eifersüchtig darüber gewacht hätte, dass ihm der Ruhm seiner unleugbar ausserordentlichen Verdienste nicht vorenthalten bliebe, nur mit einigem Verdrusse sehen konnte, wie Euler und, wenn auch in geringerem Masse, Clairaut die Aufgabe von der kürzesten Linie erledigten, ohne dass seiner anders gedacht wurde als dadurch, dass Euler ihn 1729 als

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 165. [2]) Ebenda VIII, 167. [3]) Ebenda VIII, 169. [4]) Ebenda VIII, 172—174 und 180—181. [5]) Ebenda VIII, 184. [6]) Ebenda VIII, 188.

Denjenigen nannte, durch welchen er selbst auf den Gegenstand hingewiesen worden sei, und der sich in Besitz der allgemeinen Lösung befinde (S. 843). Bernoulli musste die Gelegenheit der Herausgabe seiner Gesammtwerke 1742 benutzen, um zu veröffentlichen, was, weil schon überholt, in Akademieschriften nicht mehr gut unterzubringen war, und er fügte, wie schon (S. 244) angedeutet wurde, eine Fussnote des Inhaltes bei, die Niederschrift rühre nicht von ihm selbst her, sondern von Professor Klingenstierna in Upsala, welchem er Ende 1728 die entsprechenden Mittheilungen gemacht habe, eine Datirung, welche sich sehr gut damit deckt, dass Euler gleichzeitig oder auch schon etwas früher die Aufgabe vorgelegt erhielt. Johann Bernoulli hat dann der Klingenstiernaschen Fassung noch Verschiedenes beigefügt, Erläuterungen und Zusätze, für welche er auch die stylistische Verantwortung übernahm[1]). Nach einleitenden Bemerkungen über ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z, zwischen welchen eine Gleichung als Flächengleichung gedacht ist, stellt Johann Bernoulli die Aufgabe der kürzesten Linie und findet ihre Lösung darin[2]), es werde die Ebene, welche durch drei einander unendlich nahe liegende Punkte einer kürzesten Linie bestimmt sei, senkrecht zur Berührungsebene der Oberfläche stehen. Einen Beweis für diese Behauptung sucht man vergeblich. Was Johann Bernoulli gibt, ist eine Gleichung, welche unter der Voraussetzung des gegenseitigen Senkrechtstehens jener beiden Ebenen zu einander erfüllt wird, und welche die Differentialgleichung der kürzesten Linie ist. Aendert man die Buchstaben und einige Annahmen, so zeigt sich volle Uebereinstimmung mit Eulers Ergebnisse von 1729, wie in einem Scholium gezeigt wird[3]). Johann Bernoulli hat bei dieser Gelegenheit der durch drei Consecutivpunkte einer Raumcurve bestimmten Ebene den Namen der osculirenden Ebene, *planum osculans*[4]), beigelegt, welcher von manchen Schriftstellern beibehalten worden ist, während andere ihn durch den der Schmiegungsebene ersetzten. Den Rest der Abhandlung bilden Beispiele.

Wir mussten diesen Seitenblick auf die Abhandlung Johann Bernoullis werfen und kehren nun wieder zu Euler zurück. Die Ergebnisse von 1736, mit welchen er theilweise sich selbst widerlegte, hatten ihn noch fester an den Gegenstand gefesselt. Es war an der Zeit, die Summe aller Forschungen zu ziehen, und er that es in einem 320 Quartseiten starken Bande, der 1744 unter dem Titel:

---

[1]) Joh. Bernoulli, *Opera* IV, 111, Fussnote: *Scholii hujus ut et sequentium sunt ipsius Authoris verba.* [2]) Ebenda IV, 109. [3]) Ebenda IV, 112. [4]) Ebenda IV, 113 und 115.

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti bei dem bekanntesten Verleger mathematischer Schriften in jener Zeit, bei Bousquet in Lausanne und Genf, erschien. Der lange Titel wird gemeiniglich abgekürzt, und man spricht schlechtweg von Eulers *Methodus inveniendi*. Der Band zerfällt in 6 Kapitel und 2 Zusätze, von welchen Unterabtheilungen jede aus Paragraphen mit immer neu beginnender Nummerirung besteht.

Kapitel 1, Von der zur Auffindung krummer Linien dienenden Methode der Maxima und Minima im Allgemeinen, zeigt zuerst das Unterscheidende des Aufgabe. Nicht eine Curve sei gegeben, auf welcher Punkte gesucht werden, in denen gewisse Grössen Maxima oder Minima werden, die Curve selbst werde gesucht. Die Brüder Bernoulli hätten zuerst solcherlei Aufgaben gestellt, und zwar hätten sie die Brachistochrone erforscht. Man hat mit Recht darauf aufmerksam gemacht[1]), dass darin eine geschichtliche Ungenauigkeit liege. Schon Newton hatte in der in seinen Principien behandelten Frage nach dem Körper des kleinsten Widerstandes (S. 291) eine Aufgabe gestellt und gelöst, welche dem gleichen Gebiete angehört, und welche Euler selbst in § 36 des 2. Kapitels seiner Methodus inveniendi sich vorgelegt hat. Dass er weder an jener späteren Stelle noch hier bei den geschichtlichen Bemerkungen Newton genannt hat, kann in seiner unleugbar vorhandenen, durch die Art, wie der Prioritätsstreit gegen Leibniz geführt worden war, hervorgerufenen Abneigung gegen Newton und dessen nächste Anhänger begründet sei, doch halten wir auch nicht für ganz ausgeschlossen, dass Euler die Newtonschen Behauptungen im Scholium zum 34. Satze des 7. Abschnittes des 2. Buches der Principien nicht als eine Behandlung der eigentlichen Frage gelten liess, wenn er sie auch wohl gekannt haben wird. Als Brachistochrone, sagt Euler, bezeichne man nicht etwa eine Curve, auf welcher die Zeit des Herabfallens die kürzeste wird, denn dann wäre eine verticale Gerade die Brachistochrone, vielmehr sei nur diejenige Curve gemeint, längs welcher das Herabgleiten von einem gegebenen Punkte nach einem zweiten in der kürzesten Zeit erfolge. Die Differentialgleichung der Brachistochrone, zu welcher man gelange, sei zweiter Ordnung. Deren Integration führt also zwei Constanten ein, und diese werden durch die zwei Punkte als Anfangspunkt und Endpunkt der Bewegung bestimmt[2]). Innerhalb der schon als nothwendig gekennzeichneten Ein-

---

[1]) Stäckel in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 46, S. 139, Anmerkung 18. [2]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. I, § 6.

schränkung der Aufgabe ist eine weitere Unterscheidung geboten. Entweder hat man es mit der absoluten Methode der Maxima und Minima zu thun, welche lehrt[1]), unter der Gesammtheit aller Curven diejenige zu bestimmen, in welcher eine vorgelegte veränderliche Grösse den grössten oder kleinsten Werth erhält, oder mit der relativen Methode der Maxima und Minima, welche das Gleiche nur für diejenigen Curven lehrt[2]), welche überdies eine vorgeschriebene Eigenschaft besitzen. Man weiss, dass die von Euler den Methoden beigelegten Benennungen als absolut und relativ später auf die Maxima und Minima selbst übertragen worden sind. Was die Bezeichnung betrifft, so schreibt Euler in der Methodus inveniendi[3]) $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$ und w für die meistens s genannte Bogenlänge[4]). Formel des Maximum oder Minimum heisst, und wird durch W bezeichnet[5]), die Grösse, welche in der gesuchten Curve einen grössten oder kleinsten Werth annehmen soll. Ob es um ein Maximum oder um ein Minimum sich handelt, ist für den Gang der Untersuchung unwesentlich und wird am sichersten nachträglich zur Entscheidung gebracht[6]). Das erwähnte W ist ein Integral mit der Integrationsvariabeln x und muss auf einen bestimmten Abscissenabschnitt bezogen werden[7]), d. h. W ist ein bestimmtes Integral zwischen Grenzen x_1 und x_2. In ihm müssen ausser x auch noch andere Variable vorkommen[8]), sei es y oder Ableitungen von y nach x, oder w oder andere Integrale, in welchen wiederum x nicht allein vorkommen darf, die aber wie W selbst erst dann bestimmbar werden, wenn der Zusammenhang zwischen y und x gefunden ist[9]). In diesem Sinne heisst $W = \int Zdx$, wo Zdx aber nicht integrirt werden kann, ohne dass eine Gleichung zwischen y und x festgestellt wird[10]), und drei Fälle sind zu unterscheiden[11]). Erstens kann Z eine algebraische oder doch eine bestimmte Function von $x, y, p, q, r \cdots$ sein; zweitens können in Z ausserdem Integrale vorkommen; drittens kann Z durch eine Differentialgleichung gegeben sein, deren Integration man nicht zu vollziehen weiss. Im ersten Falle waltet das Princip, dass die Eigenschaft des Maximum oder Minimum für jeden noch so kleinen Theil der Curve gilt, wenn sie für die ganze Curve stattfinden soll[12]), während in den anderen Fällen von diesem Principe abgesehen und

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. 1, § 7. [2]) Ebenda Cap. I, § 10. [3]) Ebenda Cap. I, § 16. [4]) Ebenda Cap. I, § 20. [5]) Ebenda Cap. I, § 23 und 29. [6]) Ebenda Cap. I, § 33. [7]) Ebenda Cap. I, § 25. [8]) Ebenda Cap. I, § 28. [9]) Ebenda Cap. I, § 34. [10]) Ebenda Cap. I, § 36. [11]) Ebenda Cap. I, § 37. [12]) Ebenda Cap. I, § 38.

auf die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung Rücksicht genommen werden muss[1]). Die Beweisführung für diesen schon 1736 von Euler ausgesprochenen Satz (S. 855) ist folgende. Man will $W = \int_{x_1}^{x_2} Zdx$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sage man etwa, um Zweideutigkeiten auszuschliessen, zu einem Maximum. Die Curve amz werde durch die Ordinate in m (bei $x = x_m$) in zwei Theile getheilt, und es sei $\int_{x_1}^{x_m} Zdx = P$, $\int_{x_m}^{x_2} Zdx = Q$, also $W = P + Q$. Ist Q unabhängig von P, so muss allerdings, damit W Maximum werde, auch P und Q ein solches sein. Kommt aber in Z ein ohne die Kenntniss der Functionalität von y in x unbestimmbarer Ausdruck vor, so findet jene Unabhängigkeit zwischen P und Q nicht statt. Das Curvenstück mz könnte ausser von seinem Anfangspunkte m auch von dem nach m hinführenden Curvenstücke am abhängen, und in Folge dessen könnte, nachdem das Curvenstück am etwas geändert wurde, P in $P - p$, Q in $Q + q$, W in $P - p + Q + q$ übergehen. Ist alsdann $q > p$, so wird W für die ganze neue Curve ein Maximum, aber nicht für deren einzelne Stücke. Zur bequemeren Uebersicht werden weitere Bezeichnungen eingeführt[2]), nicht übereinstimmend mit denen von 1736 (S. 854), aber doch ihnen ähnlich. Statt der römischen Zahlzeichen über den Buchstaben dient eine rechts oben angebrachte Bestrichelung, um den Zustand in einem späteren consecutiven Punkte anzudeuten, und eine rechts unten angebrachte Bestrichelung weist auf den Zustand in einem früheren Punkte hin. So ist z. B. $y' = y + dy$, $y'' = y' + dy' = y + 2dy + d^2y$, während $y = y_{,} + dy_{,}$, $y_{,} = y_{,,} + dy_{,,}$ bezeichnet. Auch irgend eine durch F dargestellte Function von x erleidet solche Bestrichelung, wie an $F = F_{,} + dF_{,}$ und $F' = F + dF$ ersichtlich ist. Dem F als Functionalzeichen die Variable x beizuschreiben unterliess Euler in der Methodus inveniendi, wiewohl er schon zehn Jahre früher (S. 736) diese Bezeichnungsweise benutzt hatte. Die Methode, deren man sich zu bedienen hat, um die Curve zu entdecken, für welche $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ einen grössten oder kleinsten Werth annimmt, ist die gleiche, deren Euler sich seit 1728 bediente, in der Methodus inveniendi begründet er sie aber[3]). Jeder Ausdruck, sagt

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. I, § 43. [2]) Ebenda Cap. I, § 48 bis 55. [3]) Ebenda Cap. I, § 58.

er, der ein Maximum wird, d. h. bis zu einem gewissen Werthe ansteigt und dann wieder abnimmt, nähert sich dem Maximalwerthe in der Weise, dass die Zunahme, beziehungsweise die Abnahme, vor und nach dem grössten Werthe unmerklich ist. In Ausnahmefällen sei freilich die Zu- und Abnahme nahe beim Maximum unendlich gross, doch dürfe man von diesen absehen. Sei nun die Curve *amnoz* diejenige, für welche $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx$ Maximum (Minimum) wird. Bei einer anderen von *a* nach *z* sich erstreckenden Curve wird $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx$ einen anderen Werth annehmen, der sich von dem vorhergehenden um so mehr unterscheidet, je mehr die Curven von einander abweichen. Der Unterschied wird nur dann unmerklich, wenn die Abweichung unendlich klein ist. Man wähle daher einen Punkt *ν* unendlich nahe bei *n*, berechne den Werth von $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx$ einmal über die Curve *amnoz* und einmal über die Curve *amνoz* und setze beide Werthe einander gleich, beziehungsweise deren Unterschied gleich Null, so erhält man die Bedingung dafür, dass *amnoz* die gewünschte Maximal- oder Minimaleigenschaft besitzt, d. h. die Differentialgleichung von *amnoz*. Man darf ja nicht ausser Augen lassen, dass die Aenderung der Curve unendlichklein sein muss, es genügt also z. B. nicht, den Bogen *mno* unendlichklein zu wählen, die Entfernung *nν* muss im Verhältnisse zum Bogen *mno* unendlichklein sein[1]). Der vorerwähnte Unterschied zwischen den beiden Werthen von $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx$ wird der **Differentialwerth der Formel**, *valor differentialis formulae*, genannt[2]).

Kapitel 2, **Ueber die absolute Methode der Maxima und Minima zur Auffindung von Curven**, wendet die am Schlusse des 1. Kapitels gegebene Vorschrift auf bestimmte Aufgaben an, welche selbst wieder vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreiten, indem zuerst die Gestaltung von Z im weiteren Sinne des Wortes zur Rede kommt, woran einzelne Beispiele sich anschliessen. Die erste Aufgabe ist und muss sein, die Aenderungen zu finden, welche in einer Curve *amz* die einzelnen bestimmten, auf die Curve bezüglichen Grössen erleiden, wenn die Ordinate Nn eines Punktes um ein unendlich kleines Stück $n\nu$ vermehrt wird[3]) (Fig. 141). Die

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. I, § 59. [2]) Ebenda Cap. I, § 62.
[3]) Ebenda Cap. II, § 1.

Ordinate $Mm = y$, welche zur Abscisse $AM = x$ gehört, bleibt unverändert, ebenso $Ll = y_{,}$, welches zu $x - dx$ gehört, und $Oo = y''$, $Pp = y'''$ u. s. w., denen die Abscissen $x + 2dx$, $x + 3dx$ u. s. w. entsprechen. Die zu $x + dx$ gehörende Ordinate $Nn = y'$ erhält den Zuwachs $n\nu$. Daraus folgt aber das Uebrige. Es ist z. B. $p = \frac{y' - y}{dx}$, $p' = \frac{y'' - y'}{dx}$. Die Veränderung von p ist folglich $\frac{n\nu}{dx}$ und die von p' ist $-\frac{n\nu}{dx}$. Ferner ist $q = \frac{p' - p}{dx} = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$, dessen Veränderung also $-\frac{2n\nu}{dx^2}$ u. s. w.

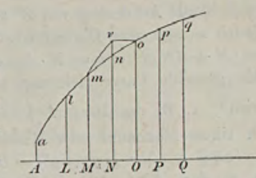

Fig. 141.

Euler stellt in einer kleinen Tabelle die Aenderungen von $y', p, p', q_{,}, q, q', r_{,,}, r_{,}, r, r', r''$ zusammen. Ist die Aenderung eines aus solchen Grössen zusammengesetzten Ausdruckes zu ermitteln[1]), so differentiirt man den betreffenden Ausdruck und ersetzt die Differentiale der einzelnen Grössen durch die ihnen der Tabelle gemäss zukommenden Aenderungen. Ist z. B. $y'\sqrt{1 + p^2}$ zu behandeln, so sucht man $d(y'\sqrt{1 + p^2}) = dy'\sqrt{1 + p^2} + \frac{y'pdp}{\sqrt{1 + p^2}}$. Man hatte aber $n\nu$ als Aenderung von y' und $\frac{n\nu}{dx}$ als Aenderung von p. Die gesuchte Aenderung von $y'\sqrt{1 + p^2}$ ist mithin $n\nu\sqrt{1 + p^2} + \frac{y'p \cdot n\nu}{dx\sqrt{1 + p^2}}$. Als zweite Aufgabe wird die Curve gesucht, welche $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, während Z eine bestimmte Function von x und y ist[2]). Theilt man das Abscissenintervall von x_1 bis x_2 in lauter gleiche Elemente dx von unendlicher Kleinheit, so lässt das Integral $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx$ sich als Summe ebensovieler Theile von der Gestalt Zdx betrachten, welche aber in jedem Theilpunkte der Abscissen ein anderes Z in sich schliessen, d. h. man hat $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx = \cdots + Z_{,,}dx + Z_{,}dx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \cdots$. Der Differentialwerth der Formel wird, wenn $Nn = y'$ um $n\nu$ wächst, alle übrigen Ordinaten aber ungeändert bleiben, einzig in dem Diffe-

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. II, § 3 u. 4. [2]) Ebenda Cap. II, § 7.

rentialwerthe von $Z'dx$ bestehen. Ist $dZ = Mdx + Ndy$, $dZ' = M'dx + N'dy'$, und erwägt man, dass infolge der unmittelbar vorhergehenden Erörterung in dZ' für dx der Werth 0 (weil die Abscisse sich nicht ändert), für dy' der Werth $n\nu$ gesetzt werden muss, so entsteht als Aenderung von Z' ausschliesslich $N' \cdot n\nu$, und als den 0 gleich zu setzenden Differentialwerth von $Z'dx$ erhält man $N' \cdot dx \cdot n\nu = (N + dN)dx \cdot n\nu = N \cdot dx \cdot n\nu$, weil dN gegen N verschwindet. Als gesuchte Curvengleichung behält man schliesslich $N = 0$. So wird[1]) z. B. das Integral $\int(15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)dx$ zu einem Maximum oder Minimum, wenn $a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4 = (ax - y^2)(ax + y^2 - a^2) = 0$ ist. Enthält Z neben x und y auch p, so dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ ist, so verleiht die Curve $N - \frac{dP}{dx} = 0$ dem Integrale $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ einen Maximal- oder Minimalwerth[2]). Als Beispiel wird eine kürzeste Linie in der Ebene gefordert, oder verlangt, dass $\int\sqrt{1 + p^2}dx$ ein Minimum werde[3]). Zunächst wird darauf aufmerksam gemacht, dass der Sinn der Aufgabe es mit sich bringe, dass kein Maximum, sondern nur ein Minimum eintreten könne. Ferner ist $Z = \sqrt{1 + p^2}$, $dZ = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}dp$, also $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$ und $dP = 0$ die verlangte Gleichung, welche integrirt zu $P = C$, d. h. $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = C$, $p = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = n$ führt. Dann ist weiter $dy = ndx$ und $y = a + nx$ eine Gerade, deren beide Integrationsconstanten n und a sich bestimmen, sobald man die beiden Punkte der Ebene kennt, zwischen denen die kürzeste Linie verlangt wird. Ein anderes Beispiel[4]) fordert, dass $\int \frac{ydy^3}{dx^2 + dy^2}$ ein Maximum oder Minimum werde, welches, wie Euler sagt, bei der Frage nach dem Rotationskörper auftritt, der in der Richtung seiner Axe, in einer Flüssigkeit bewegt, den geringsten Widerstand erleidet. Das ist also die Newtonsche Aufgabe ohne Newtons Namen, wie wir (S. 857) ankündigten. Durch $dy - pdx$ nimmt das früher W genannte Integral eine andere Gestalt an. $\int \frac{ydy^3}{dx^2 + dy^2} = \int \frac{yp^3dx}{1 + p^2}$ mit $Z = \frac{yp^3}{1 + p^2}$, $dZ = Mdx + Ndy + Pdp = \frac{p^3}{1 + p^2}dy + \frac{y(3p^2 + p^4)}{(1 + p^2)^2}dp$. Nun hatte Euler schon etwas früher[5]) die Bemerkung gemacht, eine

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. II, § 18. [2]) Ebenda Cap. II, § 21. [3]) Ebenda Cap. II, § 33. [4]) Ebenda Cap. II, § 36. [5]) Ebenda Cap. II, § 30.

einmalige Integration der Differentialgleichung der gesuchten Curve vollziehe sich leicht, wenn (wie hier) $M = 0$ sei. Die Curvengleichung war $N - \frac{dP}{dx} = 0$, oder nach Multiplication mit dy und Ersetzung von $\frac{dy}{dx}$ durch p auch $Ndy - pdP = 0$, oder $Ndy + Pdp - Pdp - pdP = 0$, oder $Ndy + Pdp = Pdp + pdP$, d. h. $dZ = d(Pp)$, woraus $Z + a = Pp$ folgt. In unserem Beispiele heisst diese Gleichung $\frac{yp^3}{1 + p^2} + a = \frac{py(3p^2 + p^4)}{(1 + p^2)^2}$ oder $y = \frac{a(1 + p^2)^2}{2p^3}$. Nun kann man aus $p = \frac{dy}{dx}$ den Schluss ziehen $dx = \frac{dy}{p}$, $x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2}$ und in unserem Falle $x = \frac{a(1 + p^2)^2}{2p^4} + \int \frac{a(1 + p^2)^2}{2p^5}dp = \frac{a}{2}\left[\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log p\right]$, so dass die Curve ermittelt oder wenigstens construirt werden kann. Der weitere allgemein gehaltene Fortschritt lässt ausser x, y, p auch q in Z vorkommen, so dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$ ist. Dann wird $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ ein Maximum oder Minimum für die Curve[1]) $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$. Kommen aber in Z ausser x und y beliebig hohe Ableitungen von y nach x vor, so dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \cdots$ wird, dann ist $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \cdots$ die Gleichung der Curve, welche dem Integrale $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ einen Maximal- oder Minimalwerth verleiht[2]). Wir gehen an den Beispielen für die beiden letzterwähnten Fälle, an den Bemerkungen über die vollständige oder mindestens theilweise Integrirbarkeit der Gleichung für den bisher allgemeinsten Fall vorüber.

Kapitel 3. Ueber die Auffindung von mit Maximal- oder Minimaleigenschaften versehenen Curven, wenn in der Formel des Maximum oder Minimum unbestimmte Grössen vorkommen. Euler versteht unter unbestimmten Grössen, welche in Z vorkommen sollen, ein unbestimmbares Integral $\Pi = \int [Z]dx$, wo $[Z]$ eine Function von $x, y, p, q, r \cdots$ bezeichnet und $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \cdots$ ist. Euler zeigt nun[3]), dass, wenn $[Z]$ etwa α aufeinanderfolgende Ableitungen von y nach x

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. II, § 40. [2]) Ebenda Cap. II, § 56. [3]) Ebenda Cap. III, § 1.

enthält (er wählt $\alpha = 5$, d. h. er lässt p, q, r, s, t vorkommen), man Π für zwei Curvenpunkte mehr mit um gleiche Stückchen dx zunehmenden Abscissen, also $\Pi, \Pi', \Pi'', \cdots \Pi^{(\alpha+1)}$ beachten müsse, deren Veränderung in Folge der Zunahme einer Ordinate um das Element $n\nu$ zu suchen ist. Für noch spätere Punkte sind die Aenderungen des entsprechenden Π dieselben, wie die zuletzt gefundene, d. h. $d\Pi^{(\alpha+1)} = d\Pi^{(\alpha+2)} = d\Pi^{(\alpha+3)} = \cdots$. Dieser Satz dient als Grundlage zur Auflösung von Aufgaben, bei welchen $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum werden soll, während in Z ausser Π mehr und mehr andere veränderliche Grössen vorkommen. Zuletzt ist vorausgesetzt[1]), es sei $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$, neben $\Pi = \int [Z] dx$. Die Allgemeinheit erstreckt sich bezüglich des Π so weit, dass dasselbe sogar nur durch eine Differentialgleichung $d\Pi = [Z]dx$ gegeben zu sein braucht, während Π selbst innerhalb $[Z]$ vorkommt[2]).

Kapitel 4, Von der Anwendung der bisher gelehrten Methode auf die Auflösung verschiedener Aufgaben, fügt den schon unmittelbar an die gegebenen Vorschriften sich anschliessenden Beispielen noch weitere hinzu. Da begegnen wir, um nur wenige Einzelheiten zu erwähnen, der Aufgabe, die ebene Curve von geringster Bogenlänge zu finden, welche über einer gegebenen Strecke mit Hilfe zweier der Lage nach gegebenen Endordinaten einen gegebenen Flächenraum bilde, nebst ihrer Auflösung den Kreis[3]). Da finden wir die Aufgabe, auf irgend einer nach aussen oder nach innen gewölbten Oberfläche die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten zu ermitteln[4]), welche zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung führt. Ein andermal soll das Product zweier Integrale $\int_0^x Zdx \cdot \int_0^x Ydx$ bei $x = a$ ein Maximum oder Minimum werden und die Curve gesucht sein, bei welcher dieses stattfindet[5]). Euler nimmt die Curvengleichung zwischen x und y als bereits gefunden an, wodurch $\int_0^a Zdx = A$, $\int_0^a Ydx = B$ sich ergibt und A und B Constante sind. Nimmt y um $n\nu$ zu, so wird A in $A + dA$, B in $B + dB$, AB in $AB + AdB + BdA + dA \cdot dB$ übergehen. Die Veränderung von AB ist also, da $dA \cdot dB$ gegen die anderen Glieder verschwindet, $AdB + BdA$, welches $= 0$ gesetzt werden muss. Aller-

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. III, § 31. [2]) Ebenda Cap. III, § 38. [3]) Ebenda Cap. IV, § 8. [4]) Ebenda Cap. IV, § 11. [5]) Ebenda Cap. IV, § 14.

dings dürfe man, fährt Euler fort, von dieser Gleichung aus nicht weiter schliessen $0 = AdB + BdA = d(AB)$, also $AB = \text{Const.}$, denn dA und dB seien nur uneigentlich so geschrieben und bedeuten die Differentialwerthe von $\int_0^x Zdx$ und $\int_0^x Ydx$, aus welchen die Constanten A und B mittels $x = n$ hervorgingen[1]).

Kapitel 5, Methode unter allen mit der gleichen Eigenschaft ausgestatteten Curven diejenige zu finden, welche überdies ein Maximum oder Minimum hervorbringt, geht zur relativen Methode über und beginnt nach Schilderung dessen, was gemeinschaftliche Eigenschaft von beliebig vielen Curven heisse, mit der Behauptung[2]), dass, wenn eine Curve unter der Gesammtheit aller zu derselben Abscisse gehörenden eine vorgeschriebene Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitze, sie zugleich diese Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade unter denjenigen Curven besitzen müsse, welche mit ihr irgend eine Eigenschaft gemeinsam haben. Der allgemeine Gang bei Behandlung der Aufgabe[3]), unter allen Curven mit der Eigenschaft B diejenige zu ermitteln, welche eine andere Eigenschaft A im höchsten oder im geringsten Grade besitze, wird folgender sein. Die der Aufgabe genügende Curve az (Fig. 142) wird, weil es um ein Maximum oder Minimum von A sich handelt, diesem A den gleichen Werth bewahren, nachdem eine unendlich kleine Aenderung vorgenommen wurde, welche aber die gemeinsame Eigenschaft B nicht stören darf. Zwei Bedingungen — Unveränderlichkeit von A und von B — können unmöglich durch Beachtung einer einzigen der Veränderung unterworfenen Ordinate in Rechnung gezogen werden.

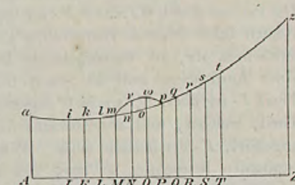

Fig. 142.

Der Anzahl der Bedingungen entsprechend müssen vielmehr bei der abweichenden Gestalt der Curve zwei Ordinaten Nn und Oo sich um Elemente $n\nu$ und $o\omega$ verändert haben. Darauf werden beide Bedingungen gesondert berücksichtigt. Man setzt den Differentialwerth von B für sich $= 0$ und ebenso den von A, so weit beide durch die Verschiebung von n und o nach ν und ω zu Stande kommen. Beide Gleichungen haben die

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. IV, § 18. [2]) Ebenda Cap. V, § 10. [3]) Ebenda Cap. V, § 14.

Form $S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0$ mit S und T als auf die Curve bezüglichen Grössen. Sie gestatten die Elimination von $n\nu$ und $o\omega$, und deren Ergebniss ist die gesuchte Differentialgleichung der fraglichen Curve. Die beiden Ausdrücke A und B werden ganz gleichmässig behandelt, und es kommt nicht in Betracht, welcher von ihnen die gemeinsame Eigenschaft, und welcher das Maximum oder Minimum bezeichnet. Beide können daher unter einander vertauscht werden[1]). Da die ganze Rechnung auf die Bildung der beiden Gleichungen $S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0$ hinausläuft, d. h. auf die Bildung der Differentialwerthe von B und von A, so ist die grundlegende Aufgabe die, den Differentialwerth irgend eines unbestimmten auf ein gegebenes Stück der Abscissenaxe sich beziehenden Ausdruckes zu finden, welche aus der Verschiebung der beiden Curvenpunkte n und o nach ν und ω hervorgeht[2]). Eine die Aenderungen der Ordinaten y und ihrer drei ersten Ableitungen p, q, r für fünf aufeinanderfolgende Curvenpunkte enthaltende Tabelle lässt als Differentialwerth jedes unbestimmten Ausdruckes ein $I \cdot n\nu + K \cdot o\omega$ erkennen, in welchem $K = I'$, d. h. gleich dem Werthe von I im nächstfolgenden Curvenpunkte. Mit anderen Worten: hat ein Ausdruck V unter der Voraussetzung alleiniger Zunahme von Nn um $n\nu$ nach den Regeln der früheren Kapitel den Differentialwerth $I \cdot n\nu$, so ist sein Differentialwerth bei gleichzeitiger Zunahme von Nn um $n\nu$ und von Oo um $o\omega$ durch $I \cdot n\nu + I' \cdot o\omega$ gegeben. Zu den gleichen Folgerungen führt folgende Betrachtung[3]). Der aus den beiden Ordinatenzuwächsen $n\nu$, $o\omega$ hervorgehende Differentialwerth $I \cdot n\nu + K \cdot o\omega$ eines Ausdruckes geht bei $o\omega = 0$ in den einzig $n\nu$ enthaltenden Theil $I \cdot n\nu$ über, bei $n\nu = 0$ dagegen in den einzig $o\omega$ enthaltenden Theil, welcher, weil der Zuwachs $o\omega$ einer nachfolgenden Ordinate angehört, $I' \cdot o\omega$ heissen muss. Werden beide Zuwächse $n\nu$ und $o\omega$ zusammen betrachtet, so muss der Differentialwerth $I \cdot n\nu + I' o\omega$ sein (vervielfacht mit dem in unserer ganzen Darstellung weggelassenen gemeinschaftlichen Factor dx), denn bei der Rechnung beeinflussen die Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ einander nicht. Ebenso leicht wie die Gleichungen, welche oben $S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0$ hiessen, sich beschaffen lassen, ist auch die Elimination von $n\nu$ und $o\omega$ zwischen denselben auszuführen. Soll nämlich die Curve gesucht werden, für welche W mit anderen über einem gegebenen Stücke der Abscissenaxe gezeichneten Curven gemeinschaftlich und zugleich V am grössten oder am kleinsten ist, und ist $dA \cdot n\nu + dA' \cdot o\omega$ der Differentialwerth von V, nebst $dB \cdot n\nu + dB' \cdot o\omega$ der Differentialwerth von W, so vervielfache man die der Null gleichgesetzten Differentialwerthe mit zwei Factoren α und β, so dass man erhält:

[1]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. V, § 19. [2]) Ebenda Cap. V, § 22. [3]) Ebenda Cap. V, § 26.

$$\alpha \cdot dA \cdot n\nu + \alpha \cdot dA' \cdot o\omega = 0$$
$$\beta \cdot dB \cdot n\nu + \beta \cdot dB' \cdot o\omega = 0.$$

Dann setzt man $\alpha \cdot dA + \beta \cdot dB = 0$ und $\alpha \cdot dA' + \beta\, dB' = 0$, woraus α und β proportionale Werthe sich bestimmen lassen müssen. Ist aber $\alpha \cdot dA + \beta \cdot dB = 0$, so muss auch $\alpha' \cdot dA' + \beta' \cdot dB' = 0$, d. h. beim Vergleich mit $\alpha dA' + \beta dB' = 0$ unter Berücksichtigung des Umstandes, dass α' sich von α nicht um ein Endliches unterscheiden kann[1]), muss $\alpha = \alpha'$ und zugleich $\beta = \beta'$ sein. Der Sinn dieser Gleichungen $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ist der, dass α und β constant sind, und zwar willkürliche Constante, und die mit diesen Constanten behaftete Gleichung $\alpha dA + \beta dB = 0$ ist die Differentialgleichung der gesuchten Curve[2]). Mit Herstellung dieser Gleichung hat aber Euler die Aufgabe, welche er sich vorlegte, so weit bewältigt, dass der ganze übrige Theil des Kapitels, so lesenswerth er ist, gewissermassen als Folgerung oder als Anhäufung von Beispielen zu dem in unserem Berichte Enthaltenen aufgefasst werden kann.

Kapitel 6, Methode unter allen Curven, welchen mehrere Eigenschaften gemeinschaftlich sind, diejenige zu bestimmen, bei der ein grösster oder ein kleinster Werth auftritt, erweitert nur die im Vorhergehenden benutzten Methoden, ohne sie, abgesehen von der Anzahl der in der Schlussgleichung auftretenden willkürlichen Constanten, wesentlich zu verändern. Auch über die beiden Anhänge, Von den elastischen Curven und Von der nach der Methode der grössten und kleinsten Werthe zu behandelnden Bewegung geworfener Körper im widerstandlosen Mittel, eilen wir schweigend hinweg.

Dagegen müssen wir bei zwei Eulerschen Abhandlungen von 1753 kurz verweilen, von welchen schon (S. 560—561) in einem ganz anderen Zusammenhange die Rede war. In der ersten Abhandlung: *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits*[3]), schickt Euler gewissermassen eine Entschuldigung voraus. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie auf die Lehre von den kürzesten Linien stützen zu wollen, scheine eine Anwendung allzuhoher Mittel zu niedrigeren Zwecken, wenn man

[1]) Auf diese nothwendige in der *Methodus inveniendi* fehlende Ergänzungsbemerkung hat P. Stäckel in seiner Uebersetzung (Ostwalds Klassiker Nr. 46, S. 141, Note 28) hingewiesen. [2]) Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. V, § 27. [3]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 223—257.

nicht bedenke, dass damit der Weg zur Trigonometrie kürzester Linien überhaupt auf jeder Oberfläche gezeigt sei. Sei (Fig. 143) O der Pol einer Kugel, AB der Aequator, M ein beliebiger Punkt mit der Breite MP und der Länge AP, AM die kürzeste Linie von A nach M; sei ferner AM um das Element Mm bis zum Durchschnitte mit dem Meridiane Op verlängert und Mn senkrecht zu Op. Euler führt dabei folgende abkürzende Bezeichnungen ein: $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, $mn = dy$, $AM = s$, $Mm = ds$, $\angle AMP = \vartheta$, $\angle PAM = \zeta$. Der Kreishalbmesser ist als Einheit gewählt. Euler nimmt ferner als bekannt an, dass Mn und Pp im Verhältnisse von $\sin OM$ und $\sin OP$ stehen, d. h. $Mn : dx = \sin(90^0 - y) : \sin 90^0$ und $Mn = \cos y \cdot dx$. In dem bei n recht-

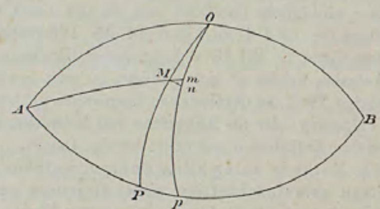

Fig. 143.

winkligen Dreieckchen Mnm ist mithin $ds^2 = dy^2 + \cos y^2 dx^2$, oder unter Einsetzung von $dy = p dx$ auch $ds = dx\sqrt{p^2 + \cos y^2}$, beziehungsweise $s = \int dx\sqrt{p^2 + \cos y^2}$. Damit AM eine kürzeste Linie sei, muss also $\int dx\sqrt{p^2 + \cos y^2}$ ein Minimum werden. Euler beruft sich jetzt auf seine früheren Arbeiten. Er setzt $\sqrt{p^2 + \cos y^2} = Z$, er erinnert daran, dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ zu suchen sei, dass, wenn x in Z nicht unmittelbar vorkomme, wenn also $M = 0$ sei, die Curvengleichung $Ndx - dP = 0$ in $Ndy - pdP = 0$ übergehe, wodurch $dZ = pdP + Pdp = d(Pp)$ sich ergebe, beziehungsweise $Z = Pp + C$ (S. 863). Auf das hier vorliegende Z angewandt führt die Vorschrift zu $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\sqrt{\cos y^2 - C^2}}{C}$ und zu $dx = \frac{C dy}{\cos y\sqrt{\cos y^2 - C^2}}$, sowie zu $ds = \frac{\cos y dy}{\sqrt{\cos y^2 - C^2}}$. Nun soll die Integrationsconstante C bestimmt werden. Im Dreieckchen Mmn ist $\angle Mmn = \vartheta$ und $\operatorname{tng}\vartheta = \frac{Mn}{mn} = \frac{dx \cdot \cos y}{dy} = \frac{\cos y}{p} = \frac{C}{\sqrt{\cos y^2 - C^2}}$,

woraus weiter $\sin\vartheta = \frac{C}{\cos y}$ folgt. C ist als Constante unabhängig von der Lage von M, man kann also M auch auf A fallen lassen. In diesem Augenblicke wird $y = 0$, $\cos y = 1$, $\sin\vartheta = \cos\zeta$, also $C = \cos\zeta$. Die beiden gefundenen Differentialgleichungen gehen also über in

$$dx = \frac{\cos\zeta dy}{\cos y\sqrt{\cos y^2 - \cos\zeta^2}}$$

und

$$ds = \frac{\cos y dy}{\sqrt{\cos y^2 - \cos\zeta^2}},$$

neben welchen die endliche Gleichung

$$\sin\vartheta = \frac{\cos\zeta}{\cos y}$$

besteht. Die Integration jener Differentialgleichungen, welche keine neue Integrationsconstante erfordert, weil im Punkte A sowohl x, als y, als s verschwindet, führt zu $x = \arcsin\frac{\cos\zeta \cdot \sin y}{\cos y \cdot \sin\zeta}$ und $s = \arccos\sqrt{\frac{\cos y^2 - \cos\zeta^2}{1 - \cos\zeta^2}}$ oder zu $\sin x = \frac{\cos\zeta \cdot \sin y}{\cos y \cdot \sin\zeta}$ und $\cos s = \frac{\sqrt{\cos y^2 - \cos\zeta^2}}{\sin\zeta}$ immer wieder neben $\sin\vartheta = \frac{\cos\zeta}{\cos y}$. Mit Hilfe dieser drei Gleichungen lassen sich aber alle möglichen Beziehungen zwischen je vier von den sechs Grössen x, y, s, ϑ, ζ und $90^0 = \angle AMP$ herstellen, d. h. die Formeln der sphärischen Trigonometrie für das rechtwinklige Dreieck sind gefunden, ohne dass die eigentliche Natur der kürzesten Linien auf der Kugeloberfläche sich hätte wahrnehmen lassen müssen. Da es nur in unserer Absicht lag anzudeuten, welchen Weg Euler einschlug, so dürfen wir uns damit begnügen zu bemerken, dass nach dem rechtwinkligen auch das beliebigwinklige sphärische Dreieck untersucht wird, und dass alle dafür geltenden Gleichungen mit Einschluss der Flächenformel hergeleitet werden.

Mit noch grösserer Kürze gehen wir über die zweite jener ersten sich unmittelbar anschliessenden Abhandlung Eulers: *Éléments de trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits*[1]) hinweg. Sie bringt in Ausführung, was in der Einleitung zur ersten Abhandlung angekündigt war: eine Trigonometrie kürzester Linien auf einer von der Kugel verschiedenen Oberfläche, nämlich auf dem Sphäroid, d. h. dem Umdrehungsellipsoid.

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 258—293.

118. Kapitel.

Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen.

Wir haben im 109., im 110., im 117. Kapitel bestimmte Integrale auftreten sehen und uns überzeugen können, dass Euler in den Jahren 1730 bis 1733 mehrfach von solchen Ausdrücken umzugehen hatte und umzugehen wusste. Euler war es auch, der 1743 den ersten Aufsatz veröffentlichte, der seiner Ueberschrift *De inventione integralium si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur*[1]) nach den bestimmten Integralen gewidmet war oder, mit Euler zu reden, der Auffindung von Integralen, wenn nach vollzogener Integration der veränderlichen Grösse ein bestimmter Werth beigelegt wird. Es ist der gleiche Aufsatz, von welchem (S. 686) als wichtig für die Lehre von den Reihen die Rede war. Allerdings kommen nur solche bestimmte Integrale vor, deren Integration auch unbestimmt vollzogen werden kann, und wo das eigentlich Fesselnde erst bei Einsetzung des bestimmten Werthes der Veränderlichen sich bemerklich macht.

Schon ein Jahr früher (1742) war Maclaurins *Treatise of fluxions* erschienen, jenes hervorragende Werk, das uns im 110. und im 112. Kapitel beschäftigte, das jetzt abermals unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt. Wir meinen nicht wegen solcher bestimmten Integrale, wie sie in der Eulerschen von Maclaurin nacherfundenen Summenformel vorkommen, darüber hat das 110. Kapitel uns Aufschluss gegeben, wir meinen Maclaurins Behandlung der elliptischen Integrale.

Ganz neu war auch dieser Gegenstand nicht. Wir haben im 100. Kapitel (S. 482) die Anfänge der Lehre von den elliptischen Integralen entstehen sehen. Wir könnten eine Abhandlung Eulers *Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium*[2]) von 1736 nennen, in welcher Aufgaben gelöst sind, welche mit der Rectification von Ellipsen zusammenhängen, d. h. die Aufgabe auf Ellipsen, welche über einer und derselben Axe $2a$ mit veränderlicher zweiter Axe $2b$ beschrieben sind, von dem Endpunkte A der gemeinschaftlichen Axe aus gleiche Bogenlängen abzuschneiden, beziehungsweise die Curve anzugeben, welche von der unendlichen Schar solcher Ellipsen je gleiche Bögen, alle von dem gemeinsamen Anfangspunkte A aus gemessen, abschneidet. Gleichwohl sind diese Ergebnisse für die

[1]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 129—171 (Berlin 1743). [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 86—98.

spätere Entwicklung der Wissenschaft nicht von solcher Tragweite gewesen wie die Untersuchungen Maclaurins.

Maclaurin[1]) hat sich dabei, wie in seinem ganzen *Treatise of fluxions*, geometrischer Methoden bedient, welche auf gewisse Eigenschaften der Kegelschnitte, insbesondere der gleichseitigen Hyperbel, deren Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ heisst, sich stützen. Sei (Fig. 144) EAE' eine solche gleichseitige Hyperbel mit A als Scheitelpunkt, S als Mittelpunkt, SA als Axe. Der Hyperbelpunkt E hat die Coordinaten $SG = \xi$, $EG = \eta$, die Berührungslinie EP hat die Gleichung $\xi x - \eta y = a^2$. Im Durchschnittspunkte C der EP mit der Abscissenaxe ist $x = SC = \frac{a^2}{\xi}$, mithin $CG = \xi - \frac{a^2}{\xi} = \frac{\eta^2}{\xi} = \eta \cdot \operatorname{tng} ESG$. Im Dreiecke CEG ist $CG = \eta \cdot \operatorname{tng} CEG$. Folglich ist $\operatorname{tng} CEG = \operatorname{tng} ESG$ und $\angle ESG = CEG = CSP$, wenn SP die von S auf die Berührungslinie EP gefällte Senkrechte ist, oder die Axe der gleichseitigen Hyperbel halbirt den Winkel, welchen der Leitstrahl r vom Mittelpunkte S an einen Hyperbelpunkt E mit der Senkrechten SP von S an die Berührungslinie in E bildet. Den Winkel $\alpha = PSG = GSE$ trägt man zum dritten Male als ESM auf, so dass M der Durchschnitt seines Schenkels SM mit der Scheitelberührenden AM ist. Man hat zunächst $\xi = SE \cdot \cos\alpha$, $\eta = SE \cdot \sin\alpha$, $a^2 = SA^2 = \xi^2 - \eta^2$ $= SE^2(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) = SE^2 \cdot \cos 2\alpha = SE^2 \cdot \cos MSA = SE^2 \cdot \frac{SA}{SM}$ und $SA^2 = SE^2 \cdot \frac{SA}{SM}$ gestattet die Folgerung $SE^2 = SA \cdot SM$, d. h. $SE = r$ ist das geometrische Mittel zwischen $SA = a$ und SM, welche letztere Strecke m heissen soll, so dass die gefundene Gleichung auch $r^2 = am$ geschrieben werden kann. Ist ferner $AN \perp SM$, so soll $SN = n$, $AM = \mu$, $AN = \nu$, $EP = t$, $SP = \varrho$ geschrieben werden, wo die Beziehungen $\mu = \sqrt{m^2 - a^2}$, $\nu = \sqrt{a^2 - n^2}$, $t = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ auf der Hand liegen. Da $2\alpha = ASM = NSA = PSE$, so sind die durch dieselben drei Buchstaben benannten rechtwinkligen Dreiecke einander ähnlich, und es ist $\frac{r}{t} = \frac{m}{\mu}$, $\frac{n}{a} = \frac{a}{m}$, $\frac{\varrho}{r} = \frac{n}{a}$ neben $r^2 = am$,

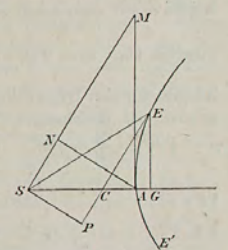

Fig. 144.

[1]) Felix Müller, Studien über Max Laurins geometrische Darstellung elliptischer Integrale. Osterprogramm 1875 für die Königl. Realschule, Vorschule und Elisabethschule in Berlin.

woraus sich $\varrho^2 = \frac{a^3}{m}$ ergibt. Auch eine Differentialbeziehung zwischen dem Hyperbelbogen $s = AE$ und dem Leitstrahle r weiss Maclaurin sich zu verschaffen, nämlich $\frac{ds}{dr} = \frac{m}{\mu} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - a^2}}$. Aus $r^2 = am$ folgt $2r\,dr = a\,dm$, $dr = \frac{a\,dm}{2r} = \frac{a\,dm}{2\sqrt{am}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{m}}\,dm$ und $ds = \frac{m}{\sqrt{m^2 - a^2}}\,dr$ $= \frac{\sqrt{am}}{2\sqrt{m^2 - a^2}}\,dm$. Wird $a = 1$ gesetzt und der Anfang des Hyperbelbogens s, wie oben schon angedeutet ist, im Scheitel A angenommen, woselbst auch $m = a = 1$ wird, so ist $s = \int_1^m \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{m^2 - 1}}\,dm$. Dieses Integral für den Hyperbelbogen ist mit Hilfe der vorher geometrisch gewonnenen Beziehungen in andere Formen zu bringen. Es war $\mu = \sqrt{m^2 - a^2} = \sqrt{m^2 - 1}$. Mithin ist $m = \sqrt{1 + \mu^2}$, $dm = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}\,d\mu$ und $s = \int_0^\mu \frac{d\mu}{2\sqrt[4]{1 + \mu^2}}$. Andererseits war $\frac{n}{a} = \frac{a}{m}$, und bei $a = 1$ ist $m = \frac{1}{n}$, $dm = -\frac{dn}{n^2}$, $s = \int_1^n \frac{-dn}{2n\sqrt{n}\sqrt{1 - n^2}}$. Die Gleichung $v = \sqrt{a^2 - n^2} = \sqrt{1 - n^2}$ liefert $n = \sqrt{1 - v^2}$, $dn = -\frac{v}{\sqrt{1 - n^2}}\,dv$, $s = \int_0^v \frac{dv}{2\sqrt[4]{(1 - v^2)^5}}$ u. s. w. Der wesentliche Grundzug aller dieser Umformungen ist ein geometrischer. Maclaurin vertauscht nicht eine Veränderliche mit einer anderen Veränderlichen, zwischen welcher und der ersten eine algebraische Gleichung stattfindet, er bringt vielmehr den Zuwachs des Hyperbelbogens in Verhältniss zu dem Zuwachse einer bestimmten Strecke, welche in der Figur hervortritt und in Folge geometrischer Sätze von einer anderen Strecke abhängt. Neben dem Hyperbelbogen ist auch der Ellipsenbogen und der Lemniscatenbogen durch mehrfach ungewandelte Integrale dargestellt und nicht minder der Unterschied zwischen Curvenbögen und der Länge von Berührenden[1]).

Genau den entgegengesetzten Gedanken hat D'Alembert verfolgt. Ihm sind die Umformungen, welchen er bestimmte Integrale unterwirft, durchaus analytische Verfahren. Geometrische Bedeutung als Mass eines Hyperbel- oder Ellipsenbogens hat für ihn nur das einfachste zur Ausführung der Rectification jener Curven hergestellte

---

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 652—660.

Integral und allenfalls die analytische Umwandlung anderer Integralformen auf diese, in so weit als dieselbe eine Zurückführung auf die Rectification der Ellipse und Hyperbel genannt wird. D'Alemberts französisch geschriebene Abhandlung *Recherches sur le calcul intégral*[1]) ist von ihm 1746 der Berliner Akademie zugeschickt worden. Die Untersuchungen zur Integralrechnung zerfallen in zwei Abtheilungen, deren erste den besonderen Titel Integration rationaler Brüche[2]) führt. Sie beginnt[3]) mit dem (S. 585) von uns besprochenen Versuche eines Beweises des algebraischen Fundamentalsatzes von der Zerfällbarkeit jeder ganzen algebraischen Function einer Veränderlichen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades, und daran schliessen sich Bemerkungen über die Integration rationaler Brüche nach ihrer Zerlegung in Partialbrüche mit Nennern ersten oder zweiten Grades. Die zweite Abtheilung[4]), von den Differentialen, welche sich auf die Rectification der Hyperbel oder der Ellipse beziehen, ist es eigentlich, um derenwillen die Abhandlung uns in diesem Kapitel beschäftigt. Nachdem D'Alembert ausdrücklich Maclaurins Treatise of fluxions als das Werk genannt hat, in welchem zuerst Untersuchungen über auf die Rectification der Ellipse oder der Hyperbel zurückführbare Differentiale vorkommen, gibt er das Differential des Ellipsenbogens als $ds = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{p - 2a}{2a}x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$, wo p den Parameter der Ellipse, d. h. die Doppelordinate im Brennpunkte bedeutet oder $p = \frac{2b^2}{a}$ ist, wenn a die grosse, b die kleine Halbaxe bezeichnet, die Mittelpunktsgleichung der Ellipse also $px^2 + 2ay^2 = a^2p$ oder $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$ geschrieben werden kann. Eine Umwandlung erfolgt mittels $\frac{p}{2a} = q$ und $a^2 + (q - 1)x^2 = az$. Dadurch wird $ds = \frac{dz \cdot \sqrt{az}}{2\sqrt{(qa + a)z - z^2 - qa^2}}$. Setzt man $qa + a\left(= \frac{b^2 + a^2}{a}\right) = f$ und $qa^2 (= b^2) = g^2$, so heisst die Gleichung $ds = \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{fz - z^2 - g^2}}$, und das Differential rechts vom Gleichheitszeichen beruht auf der Rectification einer Ellipse von den Halbaxen g und r, wo $fr - r^2 = g^2$, beziehungsweise $r = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - g^2}$ ist. Darnach darf, wenn die Ellipse nicht imaginär sein soll[5]), $f^2 < 4g$

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. T. II, 182—224. [2]) Ebenda T. II, 182—200. [3]) Ebenda T. II, 182—191. [4]) Ebenda T. II, 200—224. [5]) Ebenda T. II, 201: *l'Ellipse serait imaginaire aussi.*

nicht stattfinden. Wäre dieses doch der Fall, so sähe man aus $fz - z^2 - g^2 = \frac{f^2}{4} - g^2 - \left(\frac{f}{2} - z\right)^2$, dass der Ausdruck $\sqrt{fz - z^2 - g^2}$ imaginär würde und mit ihm zugleich ds, welches folglich kein reelles Integral besitzen könnte. In einer Hyperbel[1]) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, in deren Gleichung man wieder $p = \frac{2b^2}{a}$ einführt, ist $ds = \frac{dx\sqrt{\frac{p+2a}{2a}x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Setzt man $\frac{p}{2a} = q$ nebst $(q+1)x^2 - a^2 = az$, so wird $ds = \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{z^2 + (a - qa)z - qa^2}}$. Auch hier bringt die neue Bezeichnung $qa^2 (= b^2) = g^2$ und $a - qa \left(= \frac{a^2 - b^2}{a}\right) = \pm f$ die neue Form $ds = \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{z^2 - g^2 \pm fz}}$ hervor und zeigt, dass ein solches Differential auf der Rectification einer Hyperbel mit den Halbaxen g und r beruht, wo $r^2 - g^2 = \pm fr$ ist[2]). Die beiden gewonnenen Differentiale des Ellipsen- und Hyperbelbogens bilden die oben erwähnte geometrisch entstandene Grundlage aller weiteren Rechnung. Ist z. B. $\int \frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{b^2 \pm fz - z^2}}$ zu ermitteln[3]), so setzt D'Alembert $z = \frac{b^2}{u}$ und erhält $\int \frac{-b^2 du}{u\sqrt{u}\sqrt{u^2 \pm fu - b^2}} = -\frac{2\sqrt{u^2 \pm fu - b^2}}{\sqrt{u}} + \int \frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{u^2 - b^2 \pm fu}}$, d. h. die Zurückführung auf den Hyperbelbogen. Als zweites Beispiel ist $\int \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{b^2 \pm fz - z^2}}$ gewählt[4]). Der Ausdruck $b^2 \pm fz - z^2$ ist immer durch Multiplication zweier reeller Factoren $\left(\sqrt{b^2 + \frac{f^2}{4}} \pm \frac{f}{2} + z\right) \cdot \left(\sqrt{b^2 + \frac{f^2}{4}} \mp \frac{f}{2} - z\right)$ entstanden, kann also $= (a - z)(m + z)$ gesetzt werden. Dann aber ist weiter $\int \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{(a-z)(m+z)}} = \int \frac{dz}{m\sqrt{z}} \left(\frac{m+z}{\sqrt{(a-z)(m+z)}} - \frac{z}{\sqrt{(a-z)(m+z)}}\right) = \int \frac{dz\sqrt{m+z}}{m\sqrt{z}\sqrt{a-z}} - \int \frac{dz\sqrt{z}}{m\sqrt{(a-z)(m+z)}}$. Das zweite dieser beiden neuen Integrale ist das im ersten Beispiele auf die Rectification einer Hyperbel zurückgeführte. Im ersten bringt $m + z = u$ die Umformung $\int \frac{du\sqrt{u}}{m\sqrt{(a+2m)u - u^2 - m(a+m)}}$ hervor, welches einem Ellipsenbogen entspricht. Diese beiden Beispiele, setzt D'Alembert hinzu, sind die einzigen, deren Umwandlung Maclaurin gelang. In ihnen ist unter

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. T. II, 202. [2]) Ebenda T. II, 203. [3]) Ebenda T. II, 203. [4]) Ebenda T. II, 204.

dem Integralzeichen $\sqrt{z}$ bald im Zähler, bald im Nenner und ausserdem im Nenner die Quadratwurzel $\sqrt{b^2 \pm fz - z^2}$. Man sieht sofort, wie reichhaltige Abänderungen möglich sind. Innerhalb des Trinoms $b^2 \pm fz - z^2$ kann den einzelnen Gliedern bald das positive, bald das negative Vorzeichen beigelegt werden; $\sqrt{z}$ kann zu $z^{\frac{p}{2}}$ mit ungradem p, sowie $\sqrt{a + bz + cz^2}$ zu $(a + bz + cz^2)^{\frac{n}{2}}$ mit ungradem n erweitert werden. Alle diese Einzelfälle behandelt D'Alembert, d. h. er führt so gestaltete Integrale auf elliptische Integrale zurück. Auch bei ihnen bleibt er nicht stehen. Seine neunte Aufgabe[1]) verlangt die Umformung des Integrals $\int dx(ax + b)^p(f + gx + hx^2 \pm x^3)^{\pm\frac{n}{2}}$ mit ganzzahlig positivem p und ganzzahlig ungradem n. Seine zwölfte Aufgabe bezieht sich auf $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4}}$.

Der ersten Abhandlung von 1746 liess D'Alembert am 13. April 1747 eine zweite wieder aus zwei Abtheilungen bestehende folgen[2]). Diese beginnt aber unter fortgesetzter Zählung der Abschnitte mit der dritten Abtheilung von den Differentialen, welche sich auf die Quadratur von Curven dritten Grades beziehen. Einfache Differentiation führt zu $d\left(\frac{\sqrt{a + bx + cx^2 + fx^3}}{x^q}\right) = \frac{dx}{2\sqrt{a + bx + cx^2 + fx^3}} \cdot [-2aqx^{-q-1} - 2bqx^{-q} - 2cqx^{-q+1} - 2fqx^{-q+2} + bx^{-q} + 2cx^{-q+1} + 3fx^{-q+1}]$. Ist nun $q = 1$, so erkennt man leicht, dass $\frac{1}{x}\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3} = \int \frac{k\,dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}} + \int \frac{l\,dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}} + \int \frac{m\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}} + \int \frac{nx\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$. Das erste der vier rechts vom Gleichheitszeichen vorkommenden Integrale ist dadurch in Abhängigkeit von den drei anderen gebracht. Die beiden letzten (das dritte und das vierte Integral) sind in Folge der neunten Aufgabe der zweiten Abtheilung von 1746 auf Rectificationen von Kegelschnitten zurückzuführen. Eine Zurückführung von $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ auf Kegelschnittbögen fehle, und doch führe auf dieses Integral in letzter Linie[4]) nicht bloss $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a + bx + cx^2 + fx^3}}$, sondern jedes $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx+cx^2+fx^2}}$ mit ganzzahlig positivem n. In besonderen Fällen, welche mit ziemlichen Aufwande von Rechnung namhaft ge-

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. T. II, 219. [2]) Ebenda T. II, 222. [3]) Ebenda Année 1748. T. IV, 249—291. [4]) Ebenda T. IV, 250.

macht werden, erfolgt das Zurückführen von $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ auf Kegelschnittbögen, im Allgemeinen aber, gesteht D'Alembert in einer Anmerkung[1]) zu, sei ihm solches nicht gelungen. Alsdann hilft er sich durch die Einsetzung von $x = \frac{1}{u}$, welche $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}} = \int \frac{\sqrt{u} \cdot du}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ hervorbringt. Das neue Integral hängt aber mit $\int \frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ zusammen. Letzteres ist nämlich $= \int \frac{du(k+lu+mu^2+nu^3)}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{k+lu+mu^2+mu^3}} = \int \frac{l\,du\sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}} + \int \frac{du(k+mu^2+nu^3)}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ und das zweite der rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Integrale weiss D'Alembert durch Kegelschnittbögen darzustellen[2]), folglich gelangt man von $\int \frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ zu $\int \frac{du \cdot \sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ oder umgekehrt, welches von beiden man vorziehen möge. Das Integral $\int \frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ stellt die Quadratur der Curve dritten Grades $t^2u = k + lu + mu^2 + nu^3$ dar, und somit ist erzielt, was die Ueberschrift der dritten Abtheilung erwarten liess, eine Zurückführung von mit Irrationalitäten behafteten Integralen auf durch Curven dritten Grades begrenzte Flächenräume, insofern Kegelschnittbögen zur Auswerthung nicht ausreichen, während allerdings das Hauptgewicht auf die Ermittelung solcher Beziehungen zwischen den innerhalb der Irrationalgrösse vorkommenden Coefficienten gelegt ist, welche von jenen Quadraturen abzusehen gestatten und ausschliesslich von Kegelschnittbögen Gebrauch machen. D'Alembert hat unter dem 21. Juni 1752 noch eine dritte Abhandlung über Integralrechnung veröffentlicht[3]), welche bezüglich der Auswerthung mit Irrationalitäten behafteter Integrale mittels Kegelschnittbögen nur einen Irrthum verbessert, der sich in den vorhergehenden Aufsatz eingeschlichen hatte. Auf die vierte Abtheilung, beziehungsweise die zweite von 1748, kommen wir weiter unten zurück.

Schon im vorigen Abschnitte erwies sich die Nothwendigkeit, das 100. Kapitel für die Differentialgleichungen in Anspruch zu nehmen, d. h. die Mathematiker begnügten sich nicht mehr damit, Differentialgleichungen, zu welchen die Behandlung irgend einer Auf-

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 257, Remarque II.
[2]) Ebenda T. IV, 254—255. [3]) Ebenda Année 1750. T. VI, 361—378.

gabe geführt hatte, um der betreffenden Aufgabe willen zu integriren, das Integriren der Differentialgleichungen wurde ihnen allmählich an und für sich erforschungswürdig, und die frühere Hauptaufgabe sank zum Range eines Beispiels herab, bei welchem eine Differentialgleichung von einer vorbestimmten Form auftrat. Diese Verschiebung wurde nachgerade zu einer bleibenden, und gleich im I. Bande der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie für 1726 finden sich Abhandlungen von Jacob Hermann, Johann Bernoulli, Christian Goldbach, Niclaus II Bernoulli in unmittelbarer Folge, welche der Wahrheit unserer Behauptung als Stütze dienen.

Jacob Hermann reichte im Mai 1726 eine Abhandlung *De calculo integrali*[1]) ein. Nicht jedes Differential, sagt er, besitze ein algebraisches Integral, weit häufiger trete ein transcendentes Integral auf, dessen Werth sich nur mittels der Quadratur einer Curve ergebe. Daher sei es die eigentliche Aufgabe der Integralrechnung, Mittel an die Hand zu geben, welche sicher entscheiden lassen, ob eine vorgelegte Differentialgleichung integrirbar sei oder nicht, und wenn integrirbar, ob algebraisch oder nur durch eine Quadratur, beziehungsweise welche Curve alsdann die einfachste sei, deren Quadratur zur Integration der Differentialgleichung hinreiche. Hermann schlägt vor, jede Differentialgleichung auf eine canonische Gleichung[2]) zurückzuführen, eine Benennung, welche er Harriot (Bd. II, S. 791) nachgebildet haben dürfte. Ist z. B. $du = R^\lambda dK$, wo R, K, aber auch in anderen Aufgaben etwa erscheinende Ausdrücke S, T u. s. w. Functionen beliebig vieler Veränderlichen darstellen, so möge $u = MR^{\lambda+1}$ das gesuchte Integral sein. Dessen Differentiation führt zu $du = (\lambda+1)MR^\lambda dR + R^{\lambda+1}dM$ und die Vergleichung mit $du = R^\lambda dK$ zu $dK = (\lambda+1)MdR + RdM$, welches die canonische Gleichung ist. Ganz entsprechend wird als Integral von $du = R^\lambda S^\mu dK$ die $u = MR^{\lambda+1}S^{\mu+1}$, als Integral von $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$ die $u = MR^{\lambda+1}S^{\mu+1}T^{\nu+1}$ angenommen, und die entsprechenden canonischen Gleichungen sind $dK = (\lambda+1)MSdR + (\mu+1)MRdS + RSdM$ und $dK = (\lambda+1)MSTdR + (\mu+1)MRTdS + (\nu+1)MRSdT + RSTdM$. Alsdann wird folgende allgemeine Vorschrift[3]) gegeben: Man solle in dem Elemente dR irgend ein Glied auslesen, welches bezüglich der Veränderlichen von höherer Dimension als die übrigen Glieder sei, und mit diesem Gliede in alle Glieder des Elementes dK dividiren, bei welchen die Division möglich sei; Vorzeichen und Zahlencoefficienten der Quotientenglieder solle man durch unbestimmte

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 149—167.
[2]) Ebenda I, 151. [3]) Ebenda I, 152.

Coefficienten $A, B, C, D \cdots$ ersetzen und für die Summe der so veränderten Quotientenglieder Z, ferner $M = Z + N$ schreiben; die Substitution dieses Werthes von M in die canonische Gleichung und die Vergleichung der so entstehenden Glieder mit den homologen Bestandtheilen des Elementes dK gestatte die Bestimmung von $A, B, C, D \cdots$; was aber von dR gesagt sei, gelte ähnlich für SdR, für $STdR$ u. s. w. Nach mehreren Beispielen, in welchen nur eine Veränderliche vorkommt, so dass die Frage ausschliesslich auf die Auswerthung eines Integrals gerichtet ist, legt sich Hermann die Differentialgleichung vor[1]: $du = 3a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2xy^2dx + 12ax^3ydx - 6x^5dx = (3a^3x^{-5}y^2dy - 6a^2x^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6a^2x^{-4}y^2dx + 12ax^{-2}ydx - 6dx)x^5 = dK \cdot R^\lambda$. Er nimmt folglich $R = x$, $\lambda = 5$ und $dK = 3a^3x^{-5}y^2dy - 6a^2x^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6a^2x^{-4}y^2dx + 12ax^{-2}ydx - 6dx$. Die canonische Gleichung ist: $dK = 6Mdx + xdM$. Die in dem für dK angenommenen Ausdrucke mit dx behafteten Glieder heissen $(-6a^2x^{-4}y^2 + 12ax^{-2}y - 6)dx$. Ersetzung der Vorzeichen und Zahlencoefficienten durch A, B, C bringt $Ax^{-4}y^2 + Bx^{-2}y + C$ hervor und $M = Ax^{-4}y^2 + Bx^{-2}y + C + N$ nebst $dM = -4Ax^{-5}y^2dx - 2Bx^{-3}ydx + 2Ax^{-4}ydy + Bx^{-2}dy + dN$, und die canonische Gleichung wird: $3a^3x^{-5}y^2dy - 6a^2x^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6a^2x^{-4}y^2dx + 12ax^{-2}ydx - 6dx = 2Ax^{-3}ydy + Bx^{-1}dy + 2Ax^{-4}y^2dx + 4Bx^{-2}ydx + 6Cdx + 6Ndx + xdN$. Homologe und folglich einander gleich zu setzende Glieder sind $-6a^2x^{-4}y^2dx = 2Ax^{-4}y^2dx$, $12ax^{-2}ydx = 4Bx^{-2}ydx$, $-6dx = 6Cdx$, woraus $A = -3a^2$, $B = 3a$, $C = -1$ folgt. Setzt man diese Werthe von A, B, C in die umgewandelte canonische Gleichung ein und streicht Identisches auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens weg, so bleibt $3a^3x^{-5}y^2dy = 6Ndx + xdN$. Multiplication mit x^5 führt zu $3a^3y^2dy = 6Nx^5dy + x^6dN$, und das Integral dieser letzten Gleichung ist $a^3y^3 = Nx^6$, beziehungsweise $N = a^3x^{-6}y^3$. Nun folgt weiter $M = Ax^{-4}y^2 + Bx^{-2}y + C + N = -3a^2x^{-4}y^2 + 3ax^{-2}y - 1 + a^3x^{-6}y^3$ und $u = M \cdot R^{\lambda+1} = Mx^6 = -3a^2x^2y^2 + 3ax^4y - x^6 + a^3y^3 = (ay - x^2)^3$. In weiteren Beispielen treten bald drei Veränderliche x, y, z neben u auf, bald zweite Differentiale.

Johann Bernoulli brachte im Juni 1726 seine Abhandlung: *De integrationibus aequationum differentialium, ubi traditur methodi alicuius specimen integrandi sine praevia separatione indeterminatarum*[2]), von der Integration der Differentialgleichungen, wo ein Muster einer

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 163—164.
[2]) Ebenda I, 167—184. (Vergl. Joh. Bernoulli *Opera* III, 108—124.)

Integrationsmethode ohne vorherige Trennung der Veränderlichen mitgetheilt wird. Es ist die Abhandlung, von welcher (S. 479) vorankündigend die Rede war, in welcher der Kunstausdruck der homogenen Differentialgleichung eingeführt[1]) und deren Integration durch die Annahme $y = xz$, $dy = xdz + zdx$ gelehrt wurde, indem letztere Annahme die Trennung der Veränderlichen in der umgewandelten Differentialgleichung leicht gestatte. Auch Johann Bernoulli spricht dabei von canonischen Gleichungen[2]), versteht aber darunter ganz Anderes als Hermann, nämlich diejenigen homogenen Gleichungen von aufeinanderfolgenden Dimensionen, welche alle überhaupt mögliche ganze Glieder enthalten, also $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0$, $(ax^2 + bxy + cy^2)dx + (ex^2 + fxy + gy^2)dy = 0$, $(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3)dx + (fx^3 + gx^2y + hxy^2 + iy^3)dy = 0$ u. s. w. Die canonische Form der homogenen Differentialgleichung gestattet aber die Integration ohne vorhergegangene Trennung der Veränderlichen[3]). Ist sowohl dx als dy mit einer homogenen ganzen Function n^{ten} Grades, die aus $n + 1$ Gliedern besteht, vervielfacht, so kommen in der homogenen Differentialgleichung $2n + 2$ Constante vor. Ebensoviele enthält das Product von $n + 1$ Factoren von der Gestalt $(x + \alpha y)^\pi$, und setzt man dieses $n + 1$-factorige Product $= C$ und differentiirt nach vorhergehender Logarithmirung, so erscheint eine homogene Differentialgleichung von Art der vorgelegten. Man erhält so nothwendigerweise die genügende Anzahl der Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Constanten α, π u. s. w. Sei z. B. $n = 1$, also $(x + \alpha y)^\pi \cdot (x + \beta y)^\tau = C$ das vorausgesetzte Integral von $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0$. Logarithmirung liefert $\pi \log(x + \alpha y) + \tau \log(x + \beta y) = c$. Differentiirung bringt dann $\frac{\pi dx + \alpha\pi dy}{x + \alpha y} + \frac{\tau dx + \beta\tau dy}{x + \beta y} = 0$ hervor oder $((\pi + \tau)x + (\beta\pi + \alpha\tau)y)dx + ((\alpha\pi + \beta\tau)x + (\alpha\beta\pi + \alpha\beta\tau)y)dy = 0$. Die Vergleichung mit der canonischen Form erfolgt mittels $\pi + \tau = a$, $\beta\pi + \alpha\tau = b$, $\alpha\pi + \beta\tau = c$, $\alpha\beta\pi + \alpha\beta\tau = e$, d. h. man erhält

$$\alpha = \frac{b + c - \sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2a}, \quad \beta = \frac{b + c + \sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2a},$$

$$\pi = \frac{ab - ac + a\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}, \quad \tau = \frac{-ab + ac + a\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}.$$

Ist, setzt Johann Bernoulli hinzu, $(x + \alpha y)^\pi \cdot (x + \beta y)^\tau$ mit constantem Werthe versehen, so muss das Gleiche auch für $(2ax + 2a\alpha y)^{\frac{\pi}{n}} \cdot (2ax + 2a\beta y)^{\frac{\tau}{n}}$ gelten, und das gesuchte Integral

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 175.
[2]) Ebenda I, 175—176. [3]) Ebenda I, 178—180.

lässt sich unter Anwendung der Abkürzung $\sqrt{b^2+2bc+c^2-4ae}=m$ auch schreiben $(2ax+(b+c-m)y)^{b-c+m}\cdot(2ax+(b+c+m)y)^{c-b+m}=C$. Bernoulli geht auf beachtenswerthe Einzelfälle ein und schliesst mit der Bemerkung, bei höherer Dimension der mit dx und mit dy vervielfachten ganzen homogenen Function sei die Arbeit mühseliger, aber nicht schwieriger.

Christian Goldbach schrieb[1]) über die der Riccatischen Differentialgleichung (S. 476—481) unter Einfügung eines weiteren Gliedes ähnlich gestaltete Gleichungsform $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ und deren Integrirbarkeit, sowie einen zweiten kleinen Aufsatz[2]) über einige besondere Differentialgleichungen. Er zeigte in diesem letzteren die Ueberführung von $(ax^\pi + bz^\tau x^{\pi-1} + cz^{2\tau}x^{\pi-2} + \cdots)dx + (mx^\pi z^{\tau-1} + nx^{\pi-1}z^{2\tau-1} + ox^{\pi-2}z^{3\tau-1} + \cdots)dz = 0$ durch $z^\tau = y$ in eine homogene Differentialgleichung, zeigte auch wie ebendasselbe für die Gleichung $(a + cx + fy)dx + (b + ex + gy)dy = 0$ durch $x = z + \frac{bf - ag}{cg - ef}$, $y = u + \frac{ae - bc}{cg - ef}$ erzielt werde. Er gab ohne weitere Herleitung das Integral der Gleichung $dy = dx(ay + bx^n + cx^{n-1} + ex^{n-2} + \cdots)$ in der Gestalt $y = \frac{-b}{a}x^n + \frac{nA - c}{a}x^{n-1} + \frac{(n-1)B - e}{a}x^{n-2} + \frac{(n-2)C - f}{a}x^{n-3} + \cdots$, wo $A, B, C \cdots$ die Coefficienten der jeweils unmittelbar vorhergehenden Glieder bedeuten.

Zwischen Goldbachs beiden Aufsätzen steht ein solcher von Niclaus II Bernoulli[3]), die letzte Arbeit des im Juli 1726 verstorbenen geistvollen jungen Gelehrten. Ihren Hauptinhalt bildet die Riccatische Gleichung und deren Integrabilitätsbedingungen, in der Einleitung aber stehen einige andere Bemerkungen, welche der Vergessenheit entrissen zu werden verdienen. Wir haben (S. 232—233) von einem Aufsatze von Johann Bernoulli von 1697 gesprochen, in welchem $ady = ypdx + by^n qdx$, wo p und q irgend welche Functionen von x bedeuten, durch die Substitution $y = mz$, d. h. y gleich einem Producte zweier Functionen von x, integrirt wird. Wir haben gesagt, dass diese Methode sich bei der Integration der linearen Differentialgleichung erster Ordnung erhalten habe. Wir hätten dort auch hervorheben können, dass Johann Bernoulli den Uebergang jener sogenannten Bernoullischen Differentialgleichung in die lineare Differentialgleichung $\frac{a}{1-n}dv = vpdx + bqdx$ mittels der Substitu-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 185—197. [2]) Ebenda I, 207—209 [3]) Ebenda 198—207.

tion $y^{1-n} = v$ bemerkt hat[1]). Auf diese Dinge bezieht sich die Einleitung des Aufsatzes von Niclaus II Bernoulli von 1726. Ist eine Gleichung $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$ gegeben, und setzt man $x^{p+1} = u$, so geht sie in $\frac{a}{p+1}u^{\frac{m-p}{p+1}}y^n du + \frac{b}{p+1}y^q du = dy$ und nach Division durch y^n in $\frac{a}{p+1}u^{\frac{m-p}{p+1}}du + \frac{b}{p+1}y^{q-n}du = y^{-n}dy$ über. Nun sei $y^{1-n} = v$, also $y^{-n}dy = \frac{dv}{1-n}$, so entsteht $dv = \frac{a(1-n)}{p+1}u^{\frac{m-p}{p+1}}du + \frac{b(1-n)}{p+1}v^{\frac{q-n}{1-n}}du$ oder, wenn u und v wieder durch x und y, ferner $\frac{a(1-n)}{p+1}$, $\frac{b(1-n)}{p+1}$, $\frac{m-p}{p+1}$, $\frac{1-n}{q-n}$ durch a, b, m, q ersetzt werden, die einfachere Gleichungsgestalt $ax^m dx + by^q dx = dy$. Diese sei aber unter der Voraussetzung $q = 1$ auch dann noch integrirbar, wenn an Stelle von ax^m irgend eine Function X von x trete, das habe Johannes Bernoulli gezeigt. Man sieht also, dass Niclaus II Bernoulli hier gleichfalls die Integrirbarkeit der linearen Differentialgleichung $Xdx + bydx = dy$ betont, einen Namen hat er ihr noch nicht beigelegt. Die von ihm vorgeschlagene Integrationsmethode weicht von der seines Vaters ab. Sein Verfahren ist folgendes, wobei wir uns die einzige Aenderung gestatten, die Basis des natürlichen Logarithmensystemes durch den erst 1737 dafür eingeführten (S. 667) Buchstaben e zu bezeichnen, während Niclaus II Bernoulli 1726 dafür c schrieb. Man setze y allerdings als ein Product, aber nicht als ein solches zunächst ganz unbestimmter Factoren m und z, sondern $y = e^{bx}\cdot z$. Alsdann ist $dy = be^{bx}zdx + e^{bx}dz$, und die Gleichung $Xdx + bydx = dy$ geht über in $Xdx + be^{bx}zdx = be^{bx}zdx + e^{bx}dz$, beziehungsweise in $dz = e^{-bx}Xdx$ mit getrennten Veränderlichen.

Bahnbrechend nach den verschiedensten Richtungen waren zwei zusammenhängende Abhandlungen Eulers: *De infinitis curvis ejusdem generis*[2]) und *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis*[3]). Da finden wir zum ersten Male den Satz, der in moderner Bezeichnung $\frac{\partial^2 A}{\partial t\cdot\partial u} = \frac{\partial^2 A}{\partial u\cdot\partial t}$ lautet[4]), und der in dem 7. Kapitel der Eulerschen Differentialrechnung von 1755 auch auf höhere Differentialquotienten ausgedehnt erscheint (S. 759). Der partielle Differentialquotient wird schon im Aufsatze von 1734 als ein solcher

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 175. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1734 *et* 1735. T VII, 174—183. Diese Abhandlung füllt nicht 9, sondern 19 Seiten, da die Pagination hinter 189 nochmals mit 180 beginnt. [3]) Ebenda VII, 184—200. [4]) Ebenda VII, 177.

definirt, der beispielsweise sich bilde, indem t als veränderlich, u dagegen als constant betrachtet, beziehungsweise behandelt werde. Eulers damaliger Beweis für den Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge ist in moderner Bezeichnung folgender. Sei $F(t, u)$ eine Function von t und u. Ihr Differential nach t ist $F(t + dt, u) - F(t, u)$. Das nach u genommene Differential dieses Ausdrucks ist $(F(t + dt, u + du) - F(t, u + du)) - (F(t + dt, u) - F(t, u)) = F(t + dt, u + du) - F(t, u + du) - F(t + dt, u) + F(t, u) = F(t + dt, u + du) - F(t + dt, u) - F(t, u + du) + F(t, u) = (F(t + dt, u + du) - F(t + dt, u)) - (F(t, u + du) - F(t, u))$ und die zuletzt geschriebene Form ist das zweite zuerst nach u und dann nach t genommene Differential. Da finden wir gleichfalls zum ersten Male ausgeführt, wovon wir eine Andeutung in einem Aufsatze des vorhergehenden VI. Bandes der Petersburger Veröffentlichungen erkannt haben (S. 849), nämlich die Benutzung eines integrirenden Factors. Euler sagt[1]) $dx - \frac{xda}{a}$ werde durch Vervielfachung mit $\frac{1}{a}$ integrirbar, und das Integral sei $\frac{x}{a} + c$, wo c eine constante von a unabhängige Grösse bedeute. Er sagt ferner[2]), $dx - \frac{nxda}{a}$ werde durch Vervielfachung mit $\frac{1}{a^n}$ integrirbar, und das Integral sei $\frac{x}{a^n}$ u. s. w. Da finden wir zum ersten Male die Bezeichnung einer Function durch den Buchstaben f, hinter welchem in Klammern die Grösse angegeben ist, welche der Function zu Grunde liegt[3]), die eine der (S. 736) angekündigten Stellen.

Man darf nie ausser Augen lassen, dass der Druck der akademischen Veröffentlichungen im 18. Jahrhunderte längere Zeit in Anspruch nahm, und dass die Zeit der Einreichung einer Abhandlung zwar das Erfinderrecht ihres Verfassers ausser Zweifel, die Unabhängigkeit eines Nacherfinders jedoch durch ihr Datum allein keineswegs in Frage stellt. So ist der VII. Band der Petersburger Veröffentlichungen für die Jahre 1734 und 1735 erst 1740 erschienen und zuverlässig ohne Einfluss auf Abhandlungen gewesen, welche Fontaine, welche Clairaut am 4. März 1739 der Pariser Akademie vorlegten.

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1734 *et* 1735. T. VII, 186 (zweiter Zählung). [2]) Ebenda VII, 187 (zweiter Zählung). [3]) Ebenda VII, 187 (zweiter Zählung): *Si* $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ *denotet functionem quamcunque ipsius* $\frac{x}{a} + c$.

Fontaines Abhandlung war die frühere. Sie kam vermuthlich durch Schuld des Verfassers, der sie nicht rechtzeitig zum Drucke fertig gestaltete, in den Veröffentlichungen der Pariser Akademie überhaupt nie zum Abdrucke, sondern bildet einen Bestandtheil der 1764 besonders herausgegebenen *Mémoires de mathématiques recueillis et publiés avec quelques pièces inédites* von Fontaine (S. 588), so dass wir berechtigt sind, die Abhandlung dem Verfasser eines etwaigen IV. Bandes dieser Vorlesungen über Geschichte der Mathematik zum Berichte zu überlassen, eine Berechtigung, von welcher wir insbesondere mit Rücksicht auf den Umstand Gebrauch machen, dass Fontaines sehr seltener Band von 1764 uns nicht zugänglich war.

Clairauts Abhandlung *Recherches générales sur le calcul intégral*[1]) zeigt, dass der Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge bei Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen Clairaut ebensowenig als Euler entgangen war. Clairaut beweist ihn dadurch, dass er sagt, jede solche Function müsse, wenn sie in eine Reihe entwickelt werde, aus Gliedern $rx^m y^n p^q$ bestehen, wo p einen Parameter der Function bedeute. Für jedes einzelne dieser Glieder finde augenscheinlich der betreffende Satz statt, also auch für deren Gesammtheit. Aber auch der Gedanke des integrirenden Factors war in Clairauts Geiste aufgetaucht. Die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ ist, sagt er, integrirbar und liefert, so oft der partielle Differentialquotient von M nach y dem von N nach x gleich ist (was Clairaut in das Symbol $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ kleidet), als Integral eine einer Constanten gleich zu setzende Function von x und y, welche er φ nennt. Finde aber die Bedingungsgleichung nicht statt, so könne man sie durch Vervielfachung der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ mit einem Factor μ herbeiführen, welcher $\frac{d(\mu M)}{dy} = \frac{d(\mu N)}{dx}$ hervorbringen müsse, oder, was auf das Gleiche herauskomme, welcher die Gleichung $\mu \frac{dM}{dy} + M \frac{d\mu}{dy} - \mu \frac{dN}{dx} - N \frac{d\mu}{dx} = 0$ befriedige. Ist $\mu Mdx + \mu Ndy = d\varphi$ und dividirt man durch das Integral φ, so entsteht $\frac{Mdx + Ndy}{R} = \frac{d\varphi}{\varphi} = d \log \varphi$, wobei $R = \frac{\varphi}{\mu}$. Nun sei, setzt Clairaut hinzu, $d \log \varphi$ als Differential eines Logarithmen von der Dimension -1. Gleicher Dimension müsse $\frac{M}{R}$ sein, d. h. R sei von einer um eine Einheit höheren Dimension als M. Weiter aber sei $\log \varphi$ selbst eine Function oder mit

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1739, pag. 425—436.

Rücksicht darauf $\frac{Mdx + Ndy}{R}$ das vollständige Integral einer Function, mithin $\frac{1}{R}$ ein integrirender Factor, der gefunden werde, indem man für R die allgemeine ganze Function von x und y setze, deren Dimension die von M um eine Einheit übertreffe. Als Beispiel wird die Integration von $(ix + ky)dx + (lx + my + np)dy = 0$ versucht, in welcher Differentialgleichung das Fehlen eines constanten Bestandtheiles hp in dem Factor von dx die Allgemeinheit nicht beeinträchtige, da es keiner Schwierigkeit unterworfen sei, einen solchen, wenn er vorkomme, durch eine einfache Umformung zu beseitigen. Hierauf wird, da M vom ersten Grade ist, R vom zweiten Grade gewählt, d. h. $R = x^2 + bxy + cpx + ey^2 + fpy + gp^2$ gesetzt. Ist $\frac{M}{R}$ $\left(\text{beziehungsweise } \frac{N}{R}\right)$ der partielle Differentialquotient der Integralfunction nach x (nach y), so muss, indem wir von hier an Clairauts Schreibweise durch die heutige ersetzen, $\frac{\partial\left(\frac{M}{R}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{N}{R}\right)}{\partial x}$ sein, oder $R\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial R}{\partial y} - R\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, d. h. unter Einsetzung von $\frac{\partial M}{\partial y} = k$, $\frac{\partial N}{\partial x} = l$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 2x + by + cp$, $\frac{\partial R}{\partial y} = bx + 2ey + fp$, es muss sein: $(k + l - bi)x^2 + 2(m - ei)xy + (kc - fi + 2n)px + (bm - ek - el)y^2 + (bn + cm - fl)py + (gk - gl + nc)p^2 = 0$. Aus den sechs Gleichungen, welche man erhält, wenn jeder Coefficient für sich $= 0$ gesetzt wird, findet Clairaut die mit einigen Rechen- oder Druckfehlern behafteten Werthe von b, c, e, f, g, mithin R, und dann ergibt sich ihm die vollständige Differentialgleichung und deren Integral. Will man Clairauts Gedanken verstehen, so muss man offenbar davon ausgehen, dass er — wenn er es auch nicht ausdrücklich ausspricht — M und N als ganze Functionen von x und y betrachtet, die überdies unter Zuziehung des constanten Parameters p beide homogen von der gleichen Dimension sind.

Im darauf folgenden Jahrgange hat Clairaut abermals eine Abhandlung: *Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre*[1]) der Oeffentlichkeit übergeben. Ihr erster Abschnitt stimmt in der Hauptsache mit der Arbeit von 1739 überein, deren Form nur noch klarer und durchsichtiger geworden ist. So ist z. B. der Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge in ein viel helleres Licht gesetzt. Clairaut erörtert die Sache jetzt folgendermassen, wobei wir uns wieder als einzige

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1740, pag. 293—323.

Aenderung den Gebrauch der geschwungenen ∂ zum Zeichen partieller Differentiation gestatten. Sei $Adx + Bdy$ das vollständige Differential einer Function, so muss diese gefunden werden, indem man Adx ausschliesslich nach x, oder Bdy ausschliesslich nach y integrirt, das erste Mal aber die Integrationsconstante durch Y bezeichnet, weil sie, nur nach x constant, y enthalten wird, und das andere Mal aus ähnlichem Grunde die Integrationsconstante durch X bezeichnet. Man hat also $\int Adx + Y = \int Bdy + X$. Diese Gleichung partiell nach y differentiirt gibt $\int\frac{\partial A}{\partial y}dx + \frac{\partial Y}{\partial y} = B$ und differentiirt man neuerdings partiell nach x, so entsteht $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, was bewiesen werden sollte. Clairaut erklärt in einer Fussnote, auch Fontaine sei, wie er sich aus einem Manuscripte habe überzeugen können, im Besitz des Satzes $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ gewesen, und das Gleiche gelte für Euler, dessen hierher gehörige Abhandlung in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie sich zur Zeit unter der Presse befinde. Er selbst habe 1739 noch in keiner Verbindung mit Euler gestanden und erst ziemlich viel später von seinem geistigen Zusammentreffen mit jenem hervorragenden Mathematiker Kenntniss erhalten. In Clairauts Beweise hatte sich als Zwischenergebniss $\int\frac{\partial A}{\partial y}dx + \frac{\partial Y}{\partial y} = B$ oder $\frac{\partial Y}{\partial y} = B - \int\frac{\partial A}{\partial y}dx$ herausgestellt, und diese Gleichung wird dann zur Auffindung von Y benutzt, so dass damit die Integration der vollständigen Differentialgleichung erledigt ist. Clairaut geht hierauf zur Aufsuchung des integrirenden Factors μ für den Fall, dass die gegebene Differentialgleichung keine vollständige ist, über und benutzt das gleiche Beispiel wie 1739 mit der kleinen Veränderung, dass $p = 1$ gewählt ist, dass also $(ix + ky)dx + (lx + my + n)dy = 0$ integrirt werden soll. Die Rechnung ist diesmal richtig geführt oder gedruckt.

Ein zweiter selbst in drei Kapitel zerfallender Abschnitt ist den Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen gewidmet. Das 1. Kapitel nimmt drei Veränderliche x, y, z an oder eine Differentialgleichung $Mdx + Ndy + Pdz = 0$. Damit diese vollständig sei, müssen die Bedingungen $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$ erfüllt werden. Die Integration verlangt alsdann $\int Mdx$ unter ausschliesslicher Betrachtung von x als veränderlich zu berechnen, die hinzutretende Integrationsconstante K wird y und z enthalten. Nun ist rückwärts die Gleichung $\int M dx + K = \text{const.}$ nach y und nach z zu differentiiren, und so gewinnt man Mittel, die Grösse K nach den im ersten Abschnitte gelehrten Regeln aufzufinden. Auch hier kann ein integrirender Factor μ die unvollständige Differentialgleichung $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ in eine vollständige verwandeln, und dieses μ wird alsdann drei partielle Differentialgleichungen erfüllen müssen, aber es gibt auch Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen, welche der Integration überhaupt widerstreben, und bei welchen also der Versuch μ aufzufinden ein vergeblicher sein muss. Eliminirt man, sagt Clairaut, zwischen den drei partiellen Differentialgleichungen die Grössen $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial z}$, so fällt μ von selbst mit heraus, und es bleibt nur $N\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial z} - N\frac{\partial M}{\partial z} + P\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, welche Gleichung mithin für sich erfüllt sein muss, wenn die Integration von $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ möglich sein soll. Die Meinung ist die, dass die mehrerwähnten drei partiellen Differentialgleichungen

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$
$$M\frac{\partial \mu}{\partial z} + \mu\frac{\partial M}{\partial z} = P\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial P}{\partial x}$$
$$N\frac{\partial \mu}{\partial z} + \mu\frac{\partial N}{\partial z} = P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y},$$

wenn man die erste mit P, die zweite mit N, die dritte mit M vervielfacht und dann addirt, als Summe

$$\mu\left[N\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial z} - N\frac{\partial M}{\partial z} + P\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial P}{\partial y}\right] = 0$$

liefern, womit wir aber keineswegs behauptet haben wollen, Clairaut habe sich gerade dieses Eliminationsverfahrens bedient. Was er analytisch gezeigt oder doch behauptet hatte, bestätigt er alsdann geometrisch. Sei (Fig. 145) versucht, die Oberfläche herzustellen, welche der Differentialgleichung $dz = \omega dx + \vartheta dy$ genügt, und dabei zu ermitteln, ob es immer eine solche geben könne. Man legt durch die Oberfläche zwei benachbarte Schnitte $PN\nu$ und pnl senkrecht zur x-Axe und zwei andere gleichfalls benachbarte Schnitte QNn, $q\nu l$ senk-

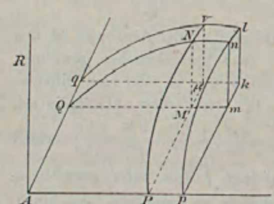

Fig. 145.

recht zur y-Axe. Ausgehend von der Oberflächengleichung erkennt man, dass QN die Gleichung $dz = \omega dx$ und PN die Gleichung $dz = \vartheta dy$ besitzen muss. Nun sei $NM = z$ eine Ordinate der Curve $PN\nu$. Die Nachbarordinate $\nu\mu$ ist $z + dz = z + \vartheta dy$. Geht man von n auf der Curve pnl nach l, so findet sich lk, indem vorher NM durch $nm = z + \omega dx$ ersetzt wird und dann ϑ durch das, was es wird, wenn x in $x + dx$ und z in $z + \omega dx$ übergeht, d. h. durch $\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\omega dx$. Man hat also $lk = z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx\,dy + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\omega dx\,dy$. Andererseits kann man auch auf $q\nu l$ nach l gelangen. Das geschieht, indem man erst NM durch $\nu\mu = z + \vartheta dy$ ersetzt und dann mit ω die Veränderung vornimmt, welche auf dem Uebergange von y in $y + dy$, von z in $z + \vartheta dy$ beruht. Man erhält $lk = z + \vartheta dy + \omega dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}dydx + \frac{\partial \omega}{\partial z}\vartheta dydx$. Damit beide Werthe von lk übereinstimmen, was nothwendig der Fall sein muss, wenn eine Oberfläche überhaupt vorhanden sein soll, ist erforderlich, dass $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\cdot\omega = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\cdot\vartheta$ sei, eine Bedingung, von welcher nach einer Fussnote Clairauts auch Fontaine Kenntniss gehabt haben muss. Früher war $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ die Form der gegebenen Differentialgleichung, welche auch $dz = -\frac{M}{P}dx - \frac{N}{P}dy$ geschrieben werden kann, d. h. die Beziehungen $\omega = -\frac{M}{P}$, $\vartheta = -\frac{N}{P}$ finden statt, nebst $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{M}{P^2}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{P}\frac{\partial M}{\partial y}$ u. s. w. Durch Einsetzung dieser Werthe nimmt aber die Bedingungsgleichung die frühere Form $M\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial z} - N\frac{\partial M}{\partial z} + P\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ an. Das 2. Kapitel behandelt die Gleichung mit noch mehr Veränderlichen $0 = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + Rds + \cdots$. Clairaut zeigt, dass hier, wenn die Integration möglich sein soll, je drei Veränderliche das Dasein einer Bedingungsgleichung nöthig machen, n Veränderliche also zunächst so viele, als Dreiergruppen aus ihnen gebildet werden können, d. h. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Aber diese Bedingungsgleichungen sind nicht alle von einander unabhängig, die Nothwendigkeit einiger derselben fällt somit weg, und schliesslich müssen bei n Veränderlichen noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Bedingungsgleichungen nach dem Wegfall von deren $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ übrig bleiben. Das 3. Kapitel behandelt die Differentialgleichungen von der Gestalt $\omega = Mdx + Ndy + Pdz + \cdots$ für den Fall, dass M, N, $P \cdots$ keine Constanten in sich schliessen. Hier sind Clairauts Worte in gleicher Weise zu deuten, wie eine Aeusserung in seinem Aufsatze von 1739 (S. 883). Er meint $M, N, P \cdots$, welche von vornherein als homogen gelten, so dass ihre Dimensionen theils durch Veränderliche $x, y, z \cdots$, theils durch einen constanten Parameter p hergestellt werden, enthalten diesen Parameter überhaupt nicht, sind also homogene Functionen von $x, y, z \cdots$. Beschränken sich die Veränderlichen auf x, y, z und setzt man $y = xu$, $z = xt$, ist ferner m der Grad der Homogenität, so dass $M = x^m F$, $N = x^m G$, $P = x^m H$ wird, wo F, G, H nur t und u enthalten, erwägt man endlich $dy = xdu + udx$, $dz = xdt + tdx$, so geht $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ über in $x^m dx(F + Gu + Ht) + x^{m+1} Gdu + x^{m+1} Hdt = 0$, beziehungsweise in $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$ mit soweit getrennten Veränderlichen, dass die Integration bezüglich x sofort vollzogen werden kann, ohne dass es eines weiteren integrirenden Factors bedürfte. Dabei bleibt aber Clairaut nicht stehen. Er frägt, welcher integrirende Factor μ es war, der die Umwandlung von $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ in $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$ bewirkt habe? Unmittelbar zeigt sich $\mu = \frac{1}{x^{m+1}(F + Gu + Ht)}$. Aber dafür lässt sich auch schreiben $\mu = \frac{1}{x \cdot x^m F + xu \cdot x^m G + xt \cdot x^m H} = \frac{1}{xM + yN + zP}$ oder die neue keines integrirenden Factors mehr bedürftige Differentialgleichung ist $\frac{Mdx + Ndy + Pdz}{Mx + Ny + Pz} = 0$. Clairaut ist damit der Erfinder der in spätere Lehrbücher übergegangenen Methode, die Integration der homogenen Differentialgleichungen als ein Beispiel für die Benutzung eines Integrirenden Factors zu behandeln. Clairaut zieht noch eine letzte Folgerung. Wenn $x^m dx(F + Gu + Ht) + x^{m+1} Gdu + x^{m+1} Hdt = 0$ integrirbar sein soll, so muss $\frac{x^{m+1}}{m+1}(F + Gu + Ht) = \text{const.}$ das Integral sein, ohne dass weitere Functionen von t und u hinzuträten, weil sonst bei rückwärts vollzogener Differentiation in der Differentialgleichung Glieder vorkommen müssten, welche keinerlei Factor x enthielten. Wird sowohl in der Differentialgleichung als in ihrem Integrale $u = \frac{y}{x}$, $t = \frac{z}{x}$ u. s. w. gesetzt, so zeigt sich $\frac{Mx + Ny + Pz}{m+1} = \varphi$ als Integral von $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, insofern M, N, P homogene Functionen m^{ten} Grades von x, y, z sind,

φ also ebenfalls homogene Function vom Grade $m + 1$ ist. Ist aber $Mdx + Ndy + Pdz = d\varphi$, so bedeutet dieses, es sei $M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $P = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\frac{Mx + Ny + Pz}{m+1} = \frac{x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{m+1} = \varphi$ und mithin $(m + 1)\varphi = x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Das ist aber Eulers Satz von den homogenen Functionen. Clairaut erkennt, wie wir (S. 759) gesagt haben, in einer Fussnote Eulers Erfinderrechte offen an, betont aber zugleich, auch Fontaine habe unabhängig von Euler, dessen Arbeiten über diesen Gegenstand er nicht kennen konnte, den Satz entdeckt.

Wir müssen, nachdem wir der Entwicklung der Lehre von den Differentialgleichungen erster Ordnung so weit nachgegangen sind, auf einen mehrere Jahre älteren Aufsatz Clairauts von 1734 zurückgreifen, auf die *Solution de plusieurs problèmes, où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée*[1]). In ihm ist nämlich ganz gelegentlich gezeigt, wie man die singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung mittels wiederholter Differentiation erhalte[2]), und wie die so erzielte Lösung in der That durch keinen der willkürlichen Constanten beigelegten besonderen Werth aus dem allgemeinen Integrale hervorgehe. Eines der von Clairaut gewählten Beispiele ist $dy^2 - (x + 1)dydx + ydx^2 = 0$, dessen allgemeines Integral eine gerade Linie bedeutet, während die singuläre Lösung die Gleichung einer Parabel liefert, wie man leicht erkennt, wenn man das Ergebniss wiederholter Differentiation in der Form $\left(2\frac{dy}{dx} - x - 1\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ schreibt und entweder aus $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ durch Integration die Folgerung $\frac{dy}{dx} = a$, oder aus $2\frac{dy}{dx} - x - 1 = 0$ ohne Integration die Folgerung $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2}$ zieht. In diesem Aufsatze Clairauts von 1734 befindet sich die zweite (S. 736) angekündigte Stelle: eine Function der Veränderlichen u ist durch Πu bezeichnet, jedenfalls in gegenseitiger Unabhängigkeit von Eulers $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ (S. 882), da beide Abhandlungen gleichzeitig geschrieben, beide auch nicht sofort gedruckt wurden.

In einer deutschen Zeitschrift finden wir eine Differentialgleichung mit singulärer Lösung zuerst 1752 von Heinrich Wil-

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1734, pag. 196—215.
[2]) Ebenda pag. 209—213.

helm Clemm[1]) behandelt. Clemm (1726—1775) war württemberger Theologe und Mathematiker, in letzterer Eigenschaft Schüler von G. W. Krafft seit dessen Anstellung in Tübingen 1744. Von 1750 bis 1752 war Clemm Repetent in Tübingen. Er ging hierauf auf Reisen und wechselte dann in seiner Heimath mit bald mathematischer, bald theologischer Thätigkeit ab. Zuletzt war er seit 1767 Professor der Theologie in Tübingen. Wir haben es mit einem Aufsatze von 1752 zu thun, der die Differentialgleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

behandelt[2]). Differentiation derselben liefert:

$$-x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Aus der Multiplication der ursprünglichen Gleichung mit der aus ihr abgeleiteten geht nach leichter Umformung

$$\left((x^2 - a^2)\frac{dy}{dx} - xy\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

hervor und daraus entweder $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - a^2}$ oder $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ mit der Folge $\frac{dy}{dx} = c$. Die erstere Annahme bringt die singuläre Lösung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

hervor, die zweite das allgemeine Integral

$$y - cx = a\sqrt{1 + c^2}.$$

Wir wenden uns zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Man war wiederholt zu solchen gekommen und hatte bald diesen, bald jenen Kunstgriff zu Hilfe gezogen, um sie zu integriren. Euler war der Erste, welcher 1728 in der Abhandlung *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus*[3]) die Zurückführung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung[4]) auf die erste Ordnung sich als eigentliche Aufgabe stellte, und welcher als Mittel zur Lösung dieser Aufgabe die Einführung neuer Veränderlichen in der Art erkannte, dass er, wenn x die unabhängige Veränderliche,

[1]) Allgemeine deutsche Biographie IV, 321—322. [2]) Hamburgisches Magazin X, 637 (1752). [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727. T. III, 124—137. [4]) *gradus* ist hier mit Ordnung zu übersetzen.

d. h. dx constant war, $x = e^{\alpha v}$ und $y = e^v t$ setzte[1]). So wurde $dx = \alpha e^{\alpha v} dv$, $dy = e^v(dt + tdv)$, $d^2x = \alpha e^{\alpha v}(d^2v + \alpha dv^2)$, $d^2y = e^v(d^2t + 2dtdv + td^2v + tdv^2)$. Aber wegen der Annahme dx sei constant, musste $d^2x = 0$, d. h. $d^2v = -\alpha dv^2$ genommen werden, und so ging der Werth von d^2y in die Form über $d^2y = e^v(d^2t + 2dtdv + (1-\alpha)tdv^2)$. Diese Einsetzungen erfüllen z. B. ihren Zweck bei der Gleichung $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} d^2y$. Sie verwandeln dieselbe in

$$ae^{\alpha v(m+p)}\alpha^p dv^p = e^{(n+p-1)v} t^n (dt + tdv)^{p-2}(d^2t + 2dtdv + (1-\alpha)tdv^2).$$

Die Exponentialgrösse hebt sich durch Division weg, wenn $\alpha v(m+p) = (n+p-1)v$, d. h. $\alpha = \frac{n+p-1}{m+p}$. Mit anderen Worten, die Einsetzung von $x = e^{\frac{(n+p-1)v}{m+p}}$, $y = e^{vt}$ bringt

$$a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p dv^p = t^n(dt + tdv)^{p-2}\left(d^2t + 2dtdv + \frac{m-n+1}{m+p}tdv^2\right)$$

hervor, eine Gleichung, welche der ursprünglichen gegenüber so weit vereinfacht ist, dass v selbst nicht mehr in ihr vorkommt, sondern nur dv. Sei nun neuerdings $dv = zdt$ oder $v = \int zdt$. Wir hatten oben $d^2v = \alpha dv^2$ erkannt, welches jetzt zu $d^2v = -\alpha z^2 dt^2$ wird. Andererseits führt die Differentiation von $dv = zdt$ zu $d^2v = zd^2t + dzdt$, und da beide Werthe von d^2v übereinstimmen müssen, also $-\alpha z^2 dt^2 = zd^2t + dzdt$ sich zeigt, so ist nothwendigerweise $d^2t = -\frac{dzdt}{z} + \frac{1-n-p}{m+p}\alpha dt^2$, und aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen v und t ist mittels $v = \int zdt$ eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen z und t hervorgegangen. Ist $a = m = n = p = 1$, also $xdxdy = yd^2y$ gegeben, und vollzieht man die nothwendigen Einsetzungen auf einen Schlag, so werden sie $x = e^{\int zdt}$, $y = e^{2\int zdt}t$ heissen müssen. Aehnlich werden gewisse andere Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Das Gemeinsame des Verfahrens liegt wesentlich in der Einführung einer Exponentialgrösse für die eine, einer mit einer Veränderlichen vervielfachten Exponentialgrösse für die andere Veränderliche. Zum Schluss der Abhandlung gestattete Euler einen Ausblick auf künftige Untersuchungen, indem er bemerkte, eine Benutzung von Exponentialgrössen führe auch in zahlreichen Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung zur Integration.

[1]) Euler nannte 1727 die Grundzahl des natürlichen Exponentialsystems noch nicht e, sondern c. Wir gestatten uns die kleine Abänderung.

Es dauerte 16 Jahre, bis Euler seine dahin gerichteten Arbeiten herausgab und unvermuthet die Lehre von den linearen Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung als einen Gegenstand des Nachdenkens von bisher nicht geahnter Fruchtbarkeit enthüllte.

Im Stillen war Euler schon früher dahin gelangt. Wir entnehmen einen in der Bibliothek der Stockholmer Akademie aufbewahrten und wenigstens zum Theil veröffentlichten[1]) Briefe Eulers an Johann Bernoulli vom 15. September 1739, dass Ersterer damals schon mit der Integration der Differentialgleichung $0 = y + a\frac{dy}{dx} + b\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{d^3y}{dx^3} + d\frac{d^4y}{dx^4} + e\frac{d^5y}{dx^5} + \text{etc.}$, also mit der Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten im Reinen war, und dass er dieselbe in Beziehung zu der algebraischen Gleichung $1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 + \text{etc.} = 0$ zu setzen wusste. Aus Johann Bernoullis Antworten[2]) vom 9. December 1739 und vom 14. April 1740 ist zu entnehmen, dass dieser Eulers Methode aus dessen Andeutung nicht ganz vollständig zu errathen vermochte, sowie dass er schon vor 1700 die Integration einer anderen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung zu vollziehen wusste, nämlich die von $0 = y + ax\frac{dy}{dx} + bx^2\frac{d^2y}{dx^2} + cx^3\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$ Bernoulli versprach Euler die Mittheilung seines Verfahrens auf einem besonderen Blatte, und auch dieses ist in Stockholm aufgefunden worden. Nach dem über dessen Inhalt Veröffentlichten[3]) ging Bernoulli folgendermassen zu Wege. Er vervielfachte seine Gleichung mit x^p, so dass diese zu $0 = x^py + ax^{p+1}\frac{dy}{dx} + bx^{p+2}\frac{d^2y}{dx^2} + cx^{p+3}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$ wurde. Nun setzte er $z = \frac{d\left(\frac{x^{p+1}y}{p+1}\right)}{dx} = x^py + \frac{x^{p+1}}{p+1}\frac{dy}{dx}$ oder $ax^{p+1}\frac{dy}{dx} = a(p+1)z - a(p+1)x^py$. Fortgesetzte Differentiation führt zu $bx^{p+2}\frac{d^2y}{dx^2} = -2b(p+1)^2z + b(p+1)x\frac{dz}{dx} + b(p+1)(p+2)x^py$ u. s. w. Die Gleichung nimmt folglich die Gestalt an $0 = \alpha x^py + a_{,}z + b_{,}x\frac{dz}{dx} + c_{,}x^2\frac{d^2z}{dx^2} + \text{etc.}$ und erstreckt sich zu einer um die Einheit niedrigeren Ordnung als die ursprüngliche Gleichung. Ausserdem kommt p in α vor und kann so ge-

[1]) Eneström, *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Bibliotheca mathematica* 1897 pag. 43—50. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 28—29 und 36. [3]) Eneström l. c. pag. 49 Note 1.

wählt werden, dass $\alpha = 0$ wird. Dann ist die Form der ursprünglichen Gleichung unter Erniedrigung ihrer Ordnung wieder vollständig vorhanden, und man kann das einmal erprobte Verfahren abermals anwenden, so oft es nöthig ist.

Wir kommen zu Eulers Aufsatz: *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*[1]), über die Integration von Differentialgleichungen höherer Ordnung, in welchem er 1743 durch den Druck bekannt machte, worüber er 1739 nur gegen Johann Bernoulli sich geäussert hatte, die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Er schrieb sie in der Form $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \cdots$, und man darf wohl die Wahl dieser unbedingt weit durchsichtigeren Form, als es die sonst im Drucke übliche unter Anwendung von Differentialen war, als einen Fortschritt bezeichnen. Wesentlicher sind folgende neue Wahrheiten, welche im Drucke zum ersten Male ausgesprochen wurden. Bei der Integration der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung müssen n willkürliche Constanten auftreten[2]), denn jede Integration, welche eine Constante mit sich führt, erniedrigt die Ordnung der Differentialgleichung um eine Einheit und n solcher Integrationen sind folglich erforderlich. Ist $y = p$ ein Integral von $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \cdots$, so ist auch $y = \alpha p$ ein Integral, wenn α eine Constante bedeutet[3]). Man suche daher n partikuläre Integrale[4]) $y = p$, $y = q$ etc., vervielfache jedes mit einer Constanten $\alpha, \beta \cdots$ und bilde deren Summe, so ist $y = \alpha p + \beta q + \cdots$ die gesuchte vollständige Integralgleichung. Nachdem diese Sätze vorausgeschickt sind, nimmt Euler die Substitution $y = e^{\int p\,dx}$ vor[5]), durch welche, nachdem p als constant angenommen, mithin $\int p\,dx = px$ gesetzt ist, die gegebene Gleichung $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$ sich verwandelt in $0 = A + Bp + Cp^2 + \cdots + Np^n$. Sei nun $pz - q$ ein Factor von $A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$ oder $z = \frac{q}{p}$ eine Wurzel der Gleichung $0 = A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$, so muss $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$ ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein. Der Zusammenhang zwischen der Differentialgleichung

[1]) *Miscellanea Berolinensia* T. VII, 193—242. [2]) Ebenda VII, 194—195. [3]) Ebenda VII, 198. [4]) Ebenda VII, 200: *valores particulares* im Gegensatz zur *aequatio integralis completa*. [5]) Ebenda VII, 201.

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$$

und der algebraischen Gleichung

$$0 = A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$$

ist also folgender[1]): Erfüllt die Wurzel $z = \frac{q}{p}$ der algebraischen Gleichung $q - pz = 0$ die genannte algebraische Gleichung n^{ten} Grades, so erfüllt $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$ als Integral der Differentialgleichung $qy - p\frac{dy}{dx} = 0$ die gegebene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, und ebensoviele von einander verschiedene reelle Factoren $A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$ besitzt, ebensoviele partikuläre Integrale der Differentialgleichung $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$ sind ermittelt. Eine erste Schwierigkeit besteht in dem Auftreten mehrfacher Wurzeln der Gleichung in z. In solchem Falle schreibt Euler vor[2]), die Substitution $y = e^{\frac{qx}{p}}u$ in die Differentialgleichung vorzunehmen, und er findet mittels derselben, dass dem k-fachen Factor $(q - pz)^k$ das mit k Constanten behaftete partikuläre Integral $y = e^{\frac{qx}{p}}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \varkappa x^{k-1})$ entspricht. Eine zweite Schwierigkeit besteht in dem paarweisen Auftreten complexer Wurzeln[3]) der Gleichung in z. Ein solches Paar complexer Wurzeln vereinigt sich zu $p + qz + rz^2$ oder zu $p - 2z\sqrt{pr}\cos\varphi + rz^2$ mit $\cos\varphi = \frac{q}{2\sqrt{pr}}$, und diesem Factor entspricht die Differentialgleichung $0 = py - 2\sqrt{pr}\cos\varphi\frac{dy}{dx} + r\frac{d^2y}{dx^2}$, zu deren Integration die Substitution $y = e^{fx\cos\varphi}u$ führt. Auch das wiederholte Auftreten eines Factors $p - qz + rz^2$ weiss Euler zu bewältigen[4]). Elf Aufgaben zur Einübung der allgemein geschilderten Methode beschliessen die Abhandlung.

Euler kam 1750 in dem Aufsatze: *Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota*[5]) auf die Untersuchung zurück und zeigte hier zunächst, wie man die Sache nicht machen solle, d. h. er zeigte, zu welchen fast unüberwindlichen Rechnungsschwierigkeiten es führe, wenn man auch nur bei der unvollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten versuchte von dem 1743 gezeigten Wege abzuweichen. Dann vollzog

[1]) *Miscellanea Berolinensia* T. VII, 203—204. [2]) Ebenda VII, 204—206. [3]) Ebenda VII, 206—207. [4]) Ebenda VII, 208—210. [5]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 3—35.

er aber den Uebergang zur vollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten[1]) $X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots$. Die von Euler benutzte Methode besteht darin, dass die Differentialgleichung mit $e^{\alpha x}dx$ vervielfacht und dann integrirt wird, so dass man erhält $\int e^{\alpha x}Xdx = \int[e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}C\frac{d^2y}{dx} + \cdots]$. Die versuchsweise anzusetzende Form des rechts vom Gleichheitszeichen sich befindenden Integrals möge (wenn wir annehmen, die vorgelegte Differentialgleichung sei zweiter Ordnung, schliesse also mit $\frac{Cd^2y}{dx^2}$ ab) etwa $e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$ heissen. Durch Differentiation der angenommenen Gleichung $\int\left[e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}C\frac{d^2y}{dx}\right] = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$ erhalten wir: $e^{\alpha x}\left(Aydx + Bdy + C\frac{d^2y}{dx}\right) = e^{\alpha x}\left(\alpha A'ydx + (A' + \alpha B')dy + B'\frac{d^2y}{dx}\right)$ und daraus: $B' = C$, $A' = B - \alpha C = \frac{A}{\alpha}$, mithin $A - B\alpha + C\alpha^2 = 0$, woraus α und dann A' und B' sich finden, d. h. man hat $\int e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$ beziehungsweise $e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}Xdx = A'y + \frac{B'dy}{dx}$, und das ist eine Differentialgleichung von ganz ähnlicher Gestalt wie die ursprünglich gegebene, nur von einer um die Einheit erniedrigten Ordnung. Man vervielfache sie weiter mit $e^{\beta x}dx$ u. s. f. Dabei zeigt sich $\alpha + \beta = \frac{B}{C}$, d. h. α und β sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $A - B\alpha + C\alpha^2 = 0$. Bei der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung treten n solcher Exponentialgrössen $e^{\alpha x}$ auf, in welchen jedes α eine der Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades ist. Auch hier treten die Schwierigkeiten gleicher reeller Wurzeln und complexer Wurzeln der betreffenden algebraischen Gleichung auf, und Euler weiss sich mit ihnen abzufinden.

Wir haben (S. 728—729) von einem Aufsatze Eulers über Reihen: *De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum*[2]), gesprochen, der fast ebensosehr der Lehre von den Differentialgleichungen, als der von den Reihen angehöre. Er schliesst sich unmittelbar an den über lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten an, über welchen wir soeben berichtet haben. Wir haben bei seiner ersten Erwähnung nicht mehr zuge-

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 13. [2]) Ebenda III, 36—85.

sagt, als dass wir in Kürze darauf zurückkommen würden, und dem entsprechend werden wir uns damit begnügen, an einer Aufgabe den Zusammenhang zwischen Reihenlehre und Differentialgleichungen aufzudecken. Euler verlangt[1]), das allgemeine Glied einer mit 1 beginnenden Reihe aus der Bedingung zu ermitteln, dass jedes Glied demjenigen, dessen Stellenzeiger um die Einheit grösser ist, gleich sein solle, möge man den Stellenzeiger ganzzahlig wählen oder nicht. Gehört also das Glied y zum Stellenzeiger x, das Glied y' zum Stellenzeiger $x+1$, so soll $y'=y$ sein. Weil y' das ist, was aus y wird, wenn x in $x+1$ übergeht, so muss (nach Taylors Reihe) $y'=y+\frac{dy}{1\cdot dx}+\frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+\cdots$ sein, und in Verbindung mit $y'=y$ erhalten wir $0=\frac{dy}{1\cdot dx}+\frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+\cdots$ als Differentialgleichung des allgemeinen Gliedes der betreffenden Reihe. Sie ist von unendlich hoher Ordnung, und die ihr nach den Vorschriften von 1743 entsprechende algebraische Gleichung wird unendlichen Grades sein, nämlich $0=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots=e^z-1=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-1^n$ unter der Voraussetzung $n=\infty$. Aber a^n-b^n ist durch $a^2-2ab\cos\frac{2k\pi}{n}+b^2$ theilbar, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Bedenkt man nun erstens, dass z ein Factor von $\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$ ist, und zweitens dass, wenn $a=1+\frac{z}{n}$, $b=1$ ist, $a^2-2ab\cos\frac{2k\pi}{n}+b^2=\left(1+\frac{z}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n}+1=2\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)+\frac{z^2}{n^2}=2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{2n^2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$ wird, und dass wegen $\cos\frac{2k\pi}{n}=1-\frac{4k^2\pi^2}{2n^2}$ ebensowohl $2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{4k^2\pi^2}{n^2}$ als $2n^2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=4k^2\pi^2$ wird, so nimmt jener allgemeine Factor die Gestalt $\frac{4k^2\pi^2}{n^2}\left(1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right)=\frac{1}{n^2}\left(4k^2\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{n}z+z^2\right)$ an. Des Weiteren ist $\frac{1}{n^2}$ sowohl von z als von k unabhängig und braucht deshalb bei der Ermittelung der Factoren von e^z-1 nicht beachtet zu werden, und man hat als solche z enthaltende Factoren nur z selbst und $4k^2\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{n}z+z^2$ mit ganzzahligem k. Der Factor z bringt das

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 43.

partikuläre Integral $y=C$ hervor. Das aus $4k^2\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{n}z+z^2$ entstehende partikuläre Integral heisst $e^{\frac{4k^2\pi^2x}{n}}(\alpha\sin 2k\pi x+\mathfrak{A}\cos 2k\pi x)$. Es geht durch $n=\infty$ in $\alpha\sin 2k\pi x+\mathfrak{A}\cos 2k\pi x$ über. Das allgemeine Glied der Reihe heisst also, indem k alle ganzzahligen Werthe von $k=1$ an annimmt und die Bedingung zu berücksichtigen ist, dass $y=1$ sein muss, wenn $x=0$ ist:

$$y=1+\alpha\sin 2\pi x+\beta\sin 4\pi x+\gamma\sin 6\pi x+\cdots$$
$$+\mathfrak{A}(\cos 2\pi x-1)+\mathfrak{B}(\cos 4\pi x-1)+\mathfrak{C}(\cos 6\pi x-1)+\cdots,$$

wo α, $\mathfrak{A}$, β, $\mathfrak{B}$, γ, $\mathfrak{C}$ $\cdots$ ganz beliebige constante Werthe besitzen.

Zwischen die Abhandlungen Eulers von 1743 und 1750, welche wir ihres inneren Zusammenhanges wegen nicht trennen wollten, fallen Untersuchungen von D'Alembert. Sie bilden den vom 13. April 1747 datirten 4. Abschnitt seines Aufsatzes über Integralrechnung[1]), dessen Besprechung wir uns (S. 876) aufgespart haben. Ungleich mit unseren Berichten über andere Schriftsteller halten wir uns nicht an die Bezeichnungen des Verfassers. Er benutzt nicht x, sondern y als unabhängige Veränderliche, er setzt $\frac{dx}{dy}=z$, $\frac{d^2x}{dy^2}=u$, $\frac{d^3x}{dy^3}=k$, er benutzt neben φ auch Δ als Functionalzeichen und klammert das Argument der Function nicht ein, lauter ungewohnte Dinge, welche das Verständniss nur erschweren und deshalb von uns in die heute übliche Schreibweise umgewandelt werden. Sei $y=x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)+F\left(\frac{dy}{dx}\right)$ zur Integration vorgelegt. D'Alembert sagt, aus jeder solchen Gleichung lasse sich durch Differentiation $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)+x\varphi'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+F'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ finden und behauptet, ohne an einem Beispiele seine Behauptung zu bestätigen, es sei leicht, nunmehr x durch $\frac{dy}{dx}$ auszudrücken; ebenso könne auch $y=\int\frac{dy}{dx}dx$ alsdann durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt werden. In einem Zusatze ist erklärt, genau das gleiche Verfahren führe zur Integration von $\frac{d^ny}{dx^n}=x\varphi\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)+F\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)$. In einem zweiten Zusatze wird der besondere Fall $y=x\frac{dy}{dx}+F\left(\frac{dy}{dx}\right)$ erörtert. Aus dieser Gleichung gehe $\left(x+F'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$ hervor, und diese wieder führe entweder mittels $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ zu einer Geraden,

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 275—291.

oder mittels $x + F'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ zu einer Curve. Eine Einwirkung von Clairauts Abhandlung von 1734 (S. 889) ist hier ersichtlich. In anderen in dieser Veröffentlichung von 1748 enthaltenen Aufgaben[1]) sind n Differentialgleichungen zwischen $n + 1$ Veränderlichen, von denen eine als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, gegeben, und D'Alembert verbindet ein Eliminationsproblem mit dem der Integration. Das Erstere führt ihn dazu, die vorgelegten Gleichungen zu addiren, nachdem jede derselben mit Ausnahme der ersten mit einem zunächst unbestimmten Factor vervielfacht ist, während die Factoren nachher so gewählt werden, dass gewisse Bedingungen zur Erfüllung kommen, ein Gedanke, der wenige Jahrzehnte später sich in der Lehre von den algebraischen Gleichungen als ungemein fruchtbar erwies. In zweiter Beziehung ist D'Alembert hier als Begründer der Lehre von den simultanen Differentialgleichungen aufgetreten. Ein allerdings ziemlich dunkel gehaltener Zusatz[2]) macht auf die Möglichkeit der Zurückführung einer Differentialgleichung höherer Ordnung auf mehrere von niedrigerer Ordnung aufmerksam.

D'Alembert ist in dem zwei Jahre später gedruckten Schlusse der Abhandlung[3]) darauf zurückgekommen, und zwar mit Bezug auf die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten. Damals war der VII. Band der Miscellanea Berolinensia längst gedruckt, der III. Band der Novi Commentarii Academiae Petropolitanae kaum geschrieben. D'Alembert kannte also nur Eulers Behandlung der unvollständigen linearen Differentialgleichung, und wenn er seine Methode auf die vollständigen linearen Differentialgleichungen anwandte, so war das ein Fortschritt, von dem er noch nicht wissen konnte, dass Euler ihn gleichzeitig ebenfalls vollzog.

Doch wir müssen zu den simultanen Gleichungen des Bandes für das Jahr 1748 zurückkehren, welche, wie es vielfach bei den Anfängen einer Lehre sich zeigt, von besonders einfacher Gestalt sind. Zuerst[4]) behandelt D'Alembert die zwei Gleichungen

$$dx + (Cx + Dy)dt = 0$$
$$dy + (Kx + Ly)dt = 0,$$

wo t als die unabhängige Veränderliche gilt. Multiplication der zweiten Gleichung mit v und darauf folgende Addition zur ersten liefert die

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 283 (Problème V) und IV, 286 (Problème VI, wofür durch einen Druckfehler Problème IV steht). [2]) Ebenda T. IV, 289, Nr. LIII. [3]) Ebenda Année 1750. T. VI, 369—374. [4]) Ebenda Année 1748. T. IV, 283.

combinirte Gleichung $dx + vdy + ((C + Kv)x + (D + Lv)y)dt = 0$ D'Alembert will, dass $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ ein Vielfaches von $x + vy$ sei, mit anderen Worten, er will, dass $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$ sei, uud er erkennt, dass dieses der Fall, wenn $v = \frac{L - C}{2K} \pm \frac{1}{2K}\sqrt{(L - C)^2 + 4DK}$ ist, zwei Werthe von v, welche er p und p' nennt. Nun setzt er $x + vy = u$, $dx + vdy = du$, $(C + Kv)x + (D + Lv)y = (C + Kv)(x + vy) = (C + Kv)u$ und erhält für die combinirte Gleichung die neue Gestalt $du + (C + Kv)udt = 0$, welche sich durch $u = ge^{-(C+Kv)t}$ integrirt. In diesem Integrale ist g eine willkürliche Constante, während eine andere willkürliche Constante, welche wir sogleich auftreten sehen werden, g' heisst. Setzen wir nämlich für v einmal p und einmal p', schreiben $x + py = u$ und $x + p'y = u'$, wo aus $y = \frac{u - u'}{p - p'}$, $x = \frac{pu' - p'u}{p - p'}$ folgt, so hat man für u und u' die beiden Gleichungen $u = ge^{-(C+Kp)t}$, $u' = g'e^{-(C+Kp')t}$. Die Constanten g und g' werden vermöge der Werthe bestimmt, welche x und y bei $t = 0$ annehmen. Eine weitere Aufgabe behandelt[1]) die drei Gleichungen

$$dx + (ax + by + cz)dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz)dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz)dt = 0.$$

D'Alembert multiplicirt die zweite Gleichung mit ν, die dritte mit μ und addirt dann zur ersten. Er erhält die combinirte Gleichung $dx + \nu dy + \mu dz + ((a + e\nu + h\mu)x + (b + f\nu + m\mu)y + (c + g\nu + n\mu)z)dt = 0$. Dann wird $a + e\nu + h\mu = \frac{b + f\nu + m\mu}{\nu} = \frac{c + g\nu + n\mu}{\mu}$ gesetzt, damit unter der weiteren Abkürzung $x + \nu y + \mu z = u$ die combinirte Gleichung die Gestalt $du + (a + e\nu + h\mu)udt$ annehme, welche durch $x + \nu y + \mu z = ke^{-(a+e\nu+h\mu)t}$ integrirt wird[2]). Es handelt sich darum, die zweckentsprechenden Werthe von μ und ν zu finden. Aus $a + e\nu + h\mu = \frac{b + f\nu + m\mu}{\nu}$ ergibt sich $\mu = \frac{b + (f - a)\nu - e\nu^2}{-m + h\nu}$, und setzt man diesen Werth von μ in $a + e\nu + h\mu = \frac{c + g\nu + n\mu}{\mu}$ ein, so erhält man eine Gleichung in ν, welche dadurch vom 4^{ten} auf den 3^{ten} Grad sich erniedrigt, dass ν^4 in ihr den Coefficienten $e^2h - e^2h = 0$ erhält. Es gibt also drei Werthe von ν, zu deren

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 268. [2]) Bei D'Alembert steht g statt k. Wir haben k vorgezogen, weil g schon innerhalb der zweiten simultanen Differentialgleichung eine bestimmte Bedeutung hatte.

jedem ein Werth von μ gehört, mithin drei Werthepaare $\nu = p$, $\mu = m$; $\nu = p'$, $\mu = m'$; $\nu = p''$, $\mu = m''$. Die eine Integralgleichung liefert demnach deren drei, und aus ihnen lässt sich x, y, z jedes einzeln als Function von t darstellen. D'Alembert übersieht keineswegs die Schwierigkeiten, welche durch das Auftreten gleicher oder complexer Wurzeln in den algebraischen Hilfsgleichungen entstehen, wir wollen indessen hier auf diese Ergänzungsbemerkungen nicht näher eingehen.

Haben wir D'Alembert als denjenigen Mathematiker kennen gelernt, der sich zuerst mit simultanen Differentialgleichungen beschäftigte, so ist sein Verdienst um die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen kaum geringer[1]. Die Aufgabe von der schwingenden Saite war erstmalig von Brook Taylor (S. 384) in Angriff genommen worden. Er hatte sie sich in dem Sinne gestellt, dass er durch mathematische Erwägung die Geschwindigkeit jedes einzelnen Punktes der Saite und hierauf die Anzahl der Schwingungen innerhalb einer gegebenen Zeit zu finden beabsichtigte. Johann Bernoulli lenkte dann 1727 in einem im II. Bande der Commentarien der Petersburger Akademie veröffentlichten[2] Briefe an seinen Sohn Daniel Bernoulli dessen Aufmerksamkeit auf den Gegenstand und brachte selbst im III. Bande jener Veröffentlichungen einen Aufsatz *De chordis vibrantibus*[3], von den schwingenden Saiten. Johann Bernoulli ging ebenso wie Taylor von der Voraussetzung aus, dass alle Punkte der Saite gleichzeitig ihre Gleichgewichtslage verlassen, oder anders ausgedrückt, dass die Saite stets als Ganzes schwinge. Von dieser unrichtigen, weil zu engen Annahme aus kam Johann Bernoulli für die Gestalt der Saite, welche sich durch ihre Schwingung ergebe, zu der gleichen Meinung, welche auch Taylor schon besass, sie sei die einer *compagne de la cycloide*, d. h. also (Bd. II, S. 878 bis 879) einer Sinuslinie. D'Alembert liess in dem Aufsatze *Sur la courbe que forme une chorde tendue mise en vibration*[4] jene einengende Annahme fallen und ersetzte sie durch die folgenden, welche in der That mit de Vorgängen der Natur in sehr angenäherter Uebereinstimmung sich befinden. Erstens sollen die Schwingungen unendlich klein sein, so dass, wenn ein Punkt P aus seiner Ruhelage um ein Stückchen $PM = y$ entfernt und dadurch nach dem senkrecht über

---

[1] Einen vorzüglichen Ueberblick über die hier in Frage kommenden Abhandlungen von D'Alembert, Euler und Daniel Bernoulli gab Riemann in der Einleitung zu seiner berühmten Habilitationsschrift von 1854: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. [2] Johann Bernoulli, *Opera* III, 125. [3] Ebenda III, 198—210. [4] *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1747. T. III, pag. 214—219.

P befindlichen Punkte M gebracht wird und A der eine Befestigungspunkt der Saite ist, die Gleichung $AM = AP = s$ gerechtfertigt erscheine. Zweitens soll die Saite überall gleich dick sein. Drittens soll die spannende Kraft F dem Gewichte der Saite proportional oder $F = mpl$ sein, wo l die Länge der Seite, p das Gewicht ihrer Längeneinheit, m einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Viertens endlich soll die Beschleunigung des Punktes M in der Richtung MP sich durch $\mp F\frac{d^2y}{ds^2}$ ausdrücken, wo das Vorzeichen davon abhängt, ob die durch die Saite gebildete Curve in M gegen die Ruhelage concav oder convex ist. D'Alembert kommt[1] von diesen Annahmen aus durch der Mechanik angehörende Betrachtungen zu einer Gleichung $\alpha = \beta$, welche wir in die gegenwärtig gebräuchliche Form umsetzen müssen. Wenn D'Alembert $AM = AP = s$ schreibt und dabei an den Bogen AM denkt, so konnte er ebenso gut die Abscisse AP als namengebend betrachten und x schreiben. Alsdann ist $y = \varphi(t, x)$, und die übrigen bei D'Alembert auftretenden Buchstaben bedeuten: $p = \frac{\partial y}{\partial t}$, $q = \frac{\partial y}{\partial x}$, $\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\nu = \frac{\partial^2 y}{\partial t \cdot \partial x}$, $\beta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, und die erwähnte Differentialgleichung $\alpha = \beta$ heisst $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, unterscheidet sich also von der heute gewöhnlichen Schreibart $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nur durch das Fehlen des positiven Coefficienten a^2. Wenn y, mithin eine Strecke, zu der Strecke x und zugleich zur Zeit t in einem Abhängigkeitsverhältnisse steht, so wird die darin enthaltene begriffliche Schwierigkeit dadurch gehoben, dass auch die Zeit durch eine Strecke versinnlicht wird[2]. Sei a der Raum, welcher von einem unter dem Einflusse des Gewichtes p stehenden Körpers in einer Zeit Θ durchlaufen wird, und lässt man Θ durch eine an sich beliebig lange Strecke darstellen, so muss auch jedes t als Strecke gezeichnet werden. Nach der oben erläuterten, den einzelnen Buchstaben beigelegten Bedeutung ist $dp = \alpha dt + \nu dx$, $dq = \nu dt + \beta dx = \nu dt + \alpha dx$, mithin $dp + dq = (\alpha + \nu)(dt + dx)$ und $dp - dq = (\alpha - \nu)(dt - dx)$. D'Alembert zieht daraus den Schluss[3], $\alpha + \nu$ müsse eine Function von $t + x$, $\alpha - \nu$ eine Function von $t - x$ sein. Er begründet ihn nicht näher, meint aber offenbar, nur wenn die in seinem Schlusse ausgesprochenen Abhängigkeiten stattfinden, sei eine Integration der beiden Differentialgleichungen ausführbar. Dann folgt aber weiter bei Vollziehung der Integration, dass $p + q$ eine Function von $t + x$ und $p - q$ eine Function von $t - x$ sein muss, etwa $p + q = \varphi(t + x)$,

---

[1] *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1747. T. III, 216. [2] Ebenda T. III, 215—216. [3] Ebenda T. III, 216.

$p - q = \Delta(t - x)$, $p = \frac{\varphi(t + x) + \Delta(t - x)}{2}$, $q = \frac{\varphi(t + x) - \Delta(t - x)}{2}$. Ferner soll $y = \int (p dt + q dx)$ sein, oder $y = \frac{1}{2}\int \varphi(t + x) d(t + x) + \frac{1}{2}\int \Delta(t - x) d(t - x) = \Psi(t + x) + \Gamma(t - x)$, wo Ψ und Γ zunächst ganz unbestimmte Functionalzeichen sind. Der Natur der Aufgabe innewohnende Bedingungen lehren Einiges über sie. Bei $t = 0$ ist die Ruhelage noch nicht gestört, mithin $y = 0$. Ebenso ist $y = 0$ in den beiden Befestigungspunkten der Saite, bei $x = 0$ und bei $x = l$. Man weiss also:

1. $\Psi(x) + \Gamma(-x) = 0$
2. $\Psi(t) + \Gamma(t) = 0$
3. $\Psi(t + l) + \Gamma(t - l) = 0$.

Aus 2. folgt $\Gamma(t) = -\Psi(t)$, also auch $\Gamma(t - x) = -\Psi(t - x)$, und man ist schon berechtigt $y = \Psi(t + x) - \Psi(t - x)$ zu schreiben. Durch $\Gamma(t - x) = -\Psi(t - x)$ geht aber 1. über in $\Psi(x) - \Psi(-x) = 0$ oder in $\Psi(x) = \Psi(-x)$. Die Ψ-Function muss also, damit sie bei Ersetzung ihres Argumentes durch den entgegengesetzten Werth ungeändert bleibe, eine solche sein, welche, in eine Reihe entwickelt, nur grade Potenzen des Argumentes enthält[1]), oder, wie es etwas später heisst[2]), $\psi(x)$ muss eine grade Function von x sein. Dazu kommt noch mit Rücksicht auf 3. die Bedingung $\Psi(t + l) = \Psi(t - l)$, wodurch nachgewiesen ist, dass die Function Ψ ihren Werth unverändert wiedererhält, wenn das Argument sich um die Constante $2l$ vergrössert, oder dass $\Psi(z) = \Psi(z + 2l)$ sein muss. Wird y nach t partiell differentiirt, so entsteht die Geschwindigkeit des betreffenden Punktes der schwingenden Saite $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(t + x)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi(t - x)}{\partial t}$, welche, wenn $t = 0$ gesetzt wird, seine Anfangsgeschwindigkeit ist und eine ungrade Function sein muss, wenn die Aufgabe überhaupt möglich sein soll[3]).

Unmittelbar hinter diesem an den fruchtbarsten neuen Wahrheiten überreichen Aufsatze ist eine zweite weit umfangreichere, auch inhaltlich sich anschliessende und deshalb durch Ziffern, welche die Paragraphennummerirung der ersten Veröffentlichung einfach fortsetzen, in kleinere Absätze abgetheilte Arbeit D'Alemberts gedruckt[4]). Sie will der eigentlichen Gestalt der schwingenden Saite

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1747. T. III, 217. [2]) Ebenda T. III, 218: $\Psi(s)$ *doit être une fonction paire de s.* [3]) Ebenda T. III, 219: *si la fonction de s, qui exprime cette vitesse initiale, n'était pas une fonction impaire de s, le problème serait impossible.* [4]) Ebenda T. III, 220—249.

näher kommen und bedient sich zu diesem Zwecke einer erzeugenden Curve, *courbe génératrice*, OTK (Fig. 146). Ihre Definition liegt in der Gleichung $y = \Psi(x)$. Aus den ermittelten Eigenschaften der Function Ψ folgt, dass der zu O symmetrisch liegende Punkt K von O um $2l$ entfernt sein muss, und dass $OS = l$, wenn T der senkrecht über S gelegene Höhepunkt der Curve ist. Die unter einander parallelen Geraden QP, JF, BA sind so gezeichnet, dass die erstere mit QN einen Winkel von 45° bildet, dann wird, wenn QN als Mass von t gewählt ist, auch $PN = t$ sein. Q ist der Anfangspunkt der Saite, welche zugleich auch Abscissenaxe ist, $QG = Qg = x$ und $QN + QG = PN + NA = QB = t + x$ nebst $QN - Qg = NP - NF = QJ = t - x$. Wegen der Gleichung der erzeugenden Curve ist demnach $BD = \Psi(t + x)$, $JE = \Psi(t - x)$ und $\Psi(t + x) - \Psi(t - x) = BD - JE = CD - DE$. Wird diese Differenz als

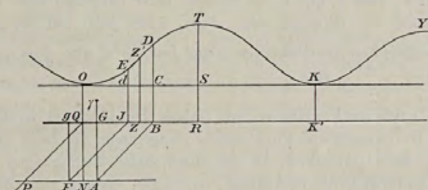

Fig. 146.

$G\gamma$ gezeichnet, so ist γ der Ort, nach welchem der Punkt G der Saite in einer Schwingung gelangt. D'Alembert nennt nun σdt den Weg, welchen jeder Punkt der Saite im ersten Augenblicke der Bewegung (also bei $t = 0$) zurückzulegen das Bestreben hat. Alsdann ist $\frac{d\Psi(x)}{dx} + \frac{d\Psi(-x)}{dx} = \sigma$, $\Psi(x) + \Psi(-x) = \int \sigma dx$. Ferner war $\Psi(x) - \Psi(-x) = 0$. Mithin ist $\Psi(x) = \frac{1}{2}\int \sigma dx + \text{Const.}$, und rückwärts ist die Anfangsgeschwindigkeit σ jedes Punktes der Saite proportional $\frac{d\Psi(x)}{dx}$, d. h. proportional den Differenzen von Ordinaten der erzeugenden Curve, getheilt durch die Differenzen der zugehörigen Abscissen. Ganz frei ist aber die Wahl der betreffenden Function $\Psi(x)$ nicht. Diese muss den Gesetzen gehorchen, welche in Bezug auf Gradheit oder Ungradheit der Functionen im ersten Aufsatze bekannt geworden waren. Dabei verändern sich, wenn als Anfangslage der Saite nicht eine Gerade, sondern eine Curve angenommen wird, die Functionalbedingungen so sehr, dass in diesem

Falle $\Psi(x)$ als eine ungrade Function erscheint[1]), und unter ihrer Voraussetzung werden betreffende Functionen zu ermitteln gesucht.

Die Behauptung D'Alemberts von den die freie Wahl von $\Psi(x)$ hemmenden Beschränkungen sollte einen Streitpunkt zwischen ihm und Euler bilden. Man kann, sagte Euler in einer im nächstfolgenden Bande der Veröffentlichungen der Berliner Akademie abgedruckten Abhandlung *Sur la vibration des cordes*[2]) eine Saite von gegebener Länge, gegebenem Gewichte und gegebener Spannung in irgend eine von der graden Gestalt nur unendlich wenig abweichende, sonst aber ganz beliebige Form bringen und sich alsdann die Aufgabe stellen, die Schwingungen der plötzlich losgelassenen Saite zu bestimmen, welche auch durch eine geometrische Construction lösbar wird. Er erhielt als eine Gleichung der Curve, welche die Saite bildet, und welche für sich allein genüge, die ganzen Bewegungserscheinungen zu begreifen, dass y gleich der Summe einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern sein müsse, deren jedes aus einem mit einem Coefficienten vervielfachten Sinus bestehe[3]), also $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$.

Nun nahm nach weiteren zwei Jahren D'Alembert wieder das Wort[4]). Der wesentliche Punkt seiner Entgegnung ist darin erkannt worden[5]), dass D'Alembert, an den functionalen Bedingungen seiner früheren Untersuchung festhaltend, verlangte, dass y sich durch t und x derart darstelle, dass die verschiedenen Gestalten, welche die schwingende Saite zu erhalten vermöge, sich aus einer und derselben Gleichung herauslesen lassen. Neben dieser Verschiedenheit zwischen den Anschauungen von D'Alembert und Euler, dass Ersterer eine analytisch erfassbare, Letzterer irgend eine empirisch herzustellende Anfangsveränderung der schwingenden Saite beanspruchte, blieb zwischen Beiden und Taylor der Streitpunkt, ob eine nicht in allen Theilen regelmässige Curve oder ausschliesslich eine einfache Sinuslinie die Schwingungscurve bilde.

Daniel Bernoulli suchte in zwei zusammenhängenden Abhandlungen[6]) Klarheit darüber zu verbreiten. Er begann mit physikalischen Betrachtungen, aus welchen wir nur hervorheben, dass die Gehörsempfindung der sogenannten Obertöne als eine solche bezeichnet wird, über welche alle Musiker einig seien[7]), und in der That gehört

[1]) *Histoire de l'Académie ds Berlin.* Année 1747. T. III, 230—231. [2]) Ebenda Année 1748. T. IV, 69—85. [3]) Ebenda T. IV, 85. [4]) Ebenda Année 1750. T. VI, 355—360. [5]) Riemann l. c. [6]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 147—172 und 173—195. [7]) Ebenda T. IX, 152.

die Entdeckung der Obertöne schon dem Pater Mersenne an (S. 384), deren Bestätigung zahlreichen Physikern und Praktikern. Wenn aber eine angestrichene Saite mehrere Töne gleichzeitig vernehmen lässt, wenn jeder Einzelton einer in einer Sinuslinie gekrümmten Saite entstammt, so muss bei dem Entstehen mehrerer Töne die Saite gleichzeitig in mehreren Sinuslinien schwingen, und eine Darstellung von deren Vereinigung muss geometrisch möglich sein. Bernoulli meint das so (Fig. 147). Wenn ein Ton, der der Curve $AmanB$ entspricht, sich mit einem Tone vereinigt, dessen ebenfalls ganz regelmässig ausschauende Curve ihre Axe ausser in A und B auch in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten schneidet, so kann bei der unendlich kleinen

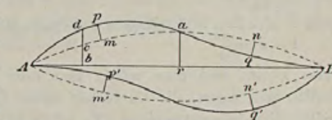

Fig. 147.

Weite der Schwingungen die $AmanB$ selbst als geradlinige Axe gedacht werden, um welche sich die zweite Toncurve schlängelt, und so entsteht die Curve $ApaqB$, welche den beiden gemeinschaftlich vernehmbaren Tönen entspricht, und welche zugleich den Bedingungen der Symmetrie und der Periodicität genügt, welche für solche Curven gefordert werden müssen. Aehnlich verhält es sich, wenn noch mehr Töne gleichzeitig vernommen werden. Die allgemeinste Gleichung der Curve ist $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$, also genau dieselbe Gleichungsform, welche Euler 1748 erhalten hatte[1]). Bernoulli knüpfte an diese synthetische und geometrische Behandlung der Aufgabe auch noch analytische Betrachtungen, über welche wir ebenso hinweggehen, wie über den ganzen zweiten Aufsatz, dessen Hauptinhalt dahin zusammengefasst worden ist[2]), dass Daniel Bernoulli in ihm die Schwingungen eines masselosen gespannten Fadens untersuchte, der in einzelnen Punkten mit endlichen Massen beschwert ist, und dabei zeigte, dass die Schwingungen desselben stets in eine der Zahl der beschwerten Punkte gleiche Anzahl von solchen Schwingungen zerlegt werden kann, deren jede für alle Massen gleich lange dauert.

An den zweiten Aufsatz Daniel Bernoullis schliesst im Drucke unmittelbar eine letzte von uns zu berücksichtigende Abhandlung Eulers an: *Remarques sur les mémoires de Daniel Bernoulli*[3]). Euler drückt seine Bewunderung über Bernoullis theils physikalische, theils geometrisch combinirende Auffassung der Aufgabe aus und würde ihr

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 157. [2]) Riemann l. c. [3]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 196—222.

einen weit höheren Rang zuweisen, als D'Alemberts und seine eigenen Bemühungen beanspruchen dürften, wenn Bernoullis Auflösung in der That die allgemeine wäre, was aber von der Gleichung $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$ nicht behauptet werden könne. Denke man sich etwa die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ als eine unendliche geometrische Reihe bildend, so könne die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Reihe summirt werden, und man gelange zur Gleichung $y = \frac{c \sin \frac{\pi x}{a}}{1 - n \cos \frac{\pi x}{a}}$. Letztere sei unbedingt viel durchsichtiger als die erste Form, und man würde sich sehr uneigentlich ausdrücken[1]), wollte man sagen, die Curve mit dieser Gleichung sei aus unendlich vielen Sinuslinien combinirt. Er selbst habe seiner Zeit die Gleichung $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$ nur als die in einem besonderen Falle zutreffende aufgestellt, und die Hauptfrage, ob alle durch schwingende Saiten gebildete Curven in jener Gleichung enthalten seien oder nicht, bleibe zu erörtern[2]). Euler leugnet die Möglichkeit. Es sei doch sicher, dass man zu Anfang die Saite in irgend eine Gestalt bringen könne, bevor sie losgelassen ihre Schwingungen beginne, und dass, selbst wenn man behaupten wolle, die Gestalt der Saite werde allgemach in eine aus Sinuslinien combinirte übergehen, dieses doch immer eine grössere Zeit beanspruchen müsse, und dass die Anfangsschwingungen sich keiner solchen Combination unterordnen würden. Bestimmte Eigenschaften von $\sin \frac{n\pi x}{a}$, z. B. diejenige, zugleich mit x in den entgegengesetzten Werth überzugehen, bei Zunahme des x um a eine Periodicität an den Tag zu legen, müssen sich auf y übertragen, und keine Curve, welcher derartige Eigenschaften abgehen, z. B. keine algebraische Curve, könne in der mehrerwähnten Gleichungsform enthalten sein[3]). Nur soviel sei an der Bernoullischen Darstellung zweifellos, dass, wenn P, Q, R Functionen von x und t seien, welche $y = P$, $y = Q$, $y = R$ als Integrale von $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Fa}{2M} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ erscheinen lassen, auch $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ ein Integral sein müsse[4]).

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 197: *ce serait parler fort inproprement.* [2]) Ebenda T. IX, 198: *La question principale que j'ai à développer est donc si toutes les courbes d'une corde mise en mouvement sont comprises dans l'équation rapportée, ou non?* [3]) Ebenda T. IX, 200—201. [4]) Ebenda T. IX, 208—209.

Man sieht hier die Frage nach der Darstellbarkeit irgend eines Werthes, z. B. einer algebraischen Function, durch eine Sinusreihe verstohlen auftauchen, aber nur um so rascher wieder zu verschwinden. Die Zeit ihrer Beantwortung war noch nicht gekommen. Fourier, der Mathematiker, welcher in überraschender Weise leisten sollte, was Euler, ohne Widerspruch zu befürchten, für unmöglich erklärte, war noch nicht geboren. Lagrange, den man freilich irrigerweise ehedem als Vorgänger Fouriers auf diesem Gebiete zu rühmen liebte, schrieb erst an seiner ersten Abhandlung, welche 1759 in einer neuen Abhandlungssammlung, in den Turiner Veröffentlichungen, erscheinen sollte.

Register.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

U.

V.

W.

Y.

Z.