110. Kapitel.

Reihen seit 1737.

Wir erinnern uns, dass Jakob Bernoulli (S. 94) im vollen Bewusstsein des unendlichen Werthes der harmonischen Reihe gleichwohl in unbefangenster Weise mit derselben rechnend zu gewissen Summenbildungen gelangte. Auch Goldbach (S. 642) rechnete mit unendlichen Reihen von mindestens zweifelhafter Berechtigung, und ein Ergebniss theilte er Euler mit, der davon mit der Bemerkung, es rühre von Goldbach her, in der Abhandlung *Variae observationes circa series infinitas*[1]) Gebrauch machte. Sei x die Summe der unendlichen harmonischen Reihe oder $x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$. Man weiss, dass $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \cdots$, und setzt man der Reihe nach $a = 2$, $a = 3$, $a = 5$, $a = 6$, so erhält man

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \cdots.$$

Zieht man diese Reihen von x ab, so bleibt $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots$. Offenbar lassen weitere Reihen für $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots$ sich bilden, in denen lauter von einander verschiedene Glieder $\frac{1}{7^r}, \frac{1}{10^r}, \frac{1}{11^r}, \cdots$ mit $r \geqq 1$ vorkommen. Zieht man auch diese Reihen wieder von $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ ab, so erschöpfen sich schliesslich alle Glieder der harmonischen Reihe mit Ausnahme der 1 und man behält $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots\right) = 1$, beziehungsweise

$$x - 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots.$$

Nun war

$$x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 160–188.

und zieht man die obere Reihe von der unteren ab, so bleibt Goldbachs Reihe

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots,$$

deren Definition darin besteht, dass die Nenner der sie bildenden Stammbrüche um 1 vermehrt sämmtliche Potenzzahlen liefern, die in der natürlichen Zahlenreihe vorkommen.

Euler setzte ein ähnliches Verfahren fort, mittels dessen er die eben gefundene Reihe von der Summe 1 in zwei andere zerspaltete, deren eine nur mit ungraden Nennern behaftete Brüche enthielt, die zweite nur Brüche graden Nenners. Er fand

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots = \log 2,$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \cdots = 1 - \log 2.$$

In einem weiteren Satze ging Euler von der Leibnizischen Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ aus, und dieses dürfte die erste Stelle sein[1]), an welcher Euler sich des Buchstabens π für die Zahl $3{,}1415926\cdots$ bediente. Wir wissen, dass sich William Jones 1706 mit eben dieser Bezeichnung versuchte (S. 306), aber ohne Nachahmung blieb. Eulers Beispiel schlug durch, und bald nahm ein Schriftsteller nach dem anderen das π an. Noch eine andere bald allgemein gewordene Bezeichnung schreibt sich von dem in Rede stehenden Aufsatze her, in welchem die erste uns bekannte öffentliche Benutzung des Buchstabens e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems sich findet[2]), während Euler allerdings e in der gleichen Bedeutung schon in einem Briefe an Goldbach vom 25. November 1731 benutzt hatte[3]).

Euler blieb bei Reihensummirungen nicht stehen, sondern beschäftigte sich auch mit der Anwendung unendlicher Factorenfolgen[4]). Sei die unendlich grosse Summe der harmonischen Reihe[5]) wieder durch x bezeichnet. Von $x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ zieht Euler $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$ ab und behält $\frac{x}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$, eine Reihe, in welcher Stammbrüche geraden Nenners

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 165.
[2]) Ebenda T. IX, 187: *posito e pro numero cujus logarithmus hyperbolicus est* 1.
[3]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 58.
[4]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 172 sqq.
[5]) *estque adeo infinitum.*

fehlen. Aus ihr folgt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\cdots$, und zieht man diese Reihe neuerdings ab, so erhält man $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$. In den Nennern dieser Reihe fehlen alle durch 2 oder durch 3 theilbaren Zahlen. Man sieht, dass in $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x = \frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots$ die Nenner der noch vorhandenen Stammbrüche durch 2, 3, 5 untheilbar sein werden, und dass ein ähnliches Verfahren sich dazu eignet, auch die Brüche aus der immer weniger Glieder enthaltenden Reihe zu entfernen, deren Nenner durch die folgenden Primzahlen 7, 11, 13 … theilbar sind. Endlich erscheint $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdots x = 1$, beziehungsweise $x = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdots$, wo die unendliche Factorenfolge aus lauter Brüchen $\frac{p}{p-1}$ gebildet ist und p alle auf einander folgenden Primzahlen bedeutet. Die harmonische Reihe nähert sich aber, wie Euler in der früheren Abhandlung über dieselbe (S. 662) gezeigt hatte, bei i Gliedern dem Werthe $\log(i+1)$ und bei $i=\infty$ dem Werthe $\log\infty$, der, wiewohl unendlich gross, doch kleiner als jede Potenz des Unendlichgrossen ist, und eben diesen Werth muss man der angegebenen Factorenfolge zuschreiben[1]).

In dem gleichen Bande der Petersburger akademischen Veröffentlichungen findet sich eine theoretisch nicht gar bedeutende Zusammenstellung verschiedener Reihen, welche zur Berechnung von π Anwendung gefunden haben[2]). Euler zieht die Methode der Annäherung durch unendliche Reihen allen anderen vor, wenn die zu benutzenden Reihen zwei Eigenschaften besitzen, die erste rascher Convergenz, so dass nicht viele Glieder in Rechnung gezogen zu werden brauchen, die zweite einfachen Baues der Glieder, so dass deren Einzelberechnung keine übermässige Mühe verursacht. Die Leibnizische Reihe $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ befriedige z. B. in der zweiten, aber nicht in der ersten Beziehung, denn man müsse 10^{50} Glieder in Rechnung ziehen, um π auf 100 Decimalstellen genau zu erhalten. Unter den vortheilhafter zu gebrauchenden Reihen sind einige, deren Herleitung auf dem Gedanken beruht, dessen Machin

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 174: *Erit istius expressionis valor* $=\log\infty$, *quod infinitum inter omnes infiniti potestates est minimum.* [2]) Ebenda T. IX, 222—238.

(S. 364) sich bediente. Euler nennt aber diesen seinen Vorgänger nicht, wiewohl er dessen Zerlegung $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}$ ausdrücklich als eine der bequemsten anpreist. Als eine andere vortheilhafte Zerlegung wird $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{70} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{99}$ vorgeschlagen. Wir erwähnen auch Eulers Zerlegung $\frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{7}$, weil sie mehrfach in Lehrbücher der Analysis Eingang gefunden hat.

Wir schliessen einige Bemerkungen über Dinge an, welche weder nach dem Orte noch nach der Zeit ihrer Entstehung hier vollberechtigt erscheinen, welche aber bekannt zu werden verdienen, und welche wir anderwärts nicht unterzubringen wissen. Um die Mitte des XVII. Jahrhunderts bereits bildete sich in Japan eine mathematische Schule unter dem Einflusse (so glauben japanische Gelehrte)[1]) der damals vollzogenen Einführung chinesischer Arithmetik, aber ohne unmittelbare Fühlung mit europäischer Wissenschaft. An der Spitze dieser Schule stand Seki[2]) († 1708). Ein handschriftlich gebliebenes Werk *Hōen Sankyō* von Matsunga gehört etwa dem Jahre 1739 an[3]). Yamaji verfasste um 1765 ein gleichfalls handschriftlich erhaltenes Werk *Ken Kon no Maki*, in welchem Erfindungen von Seki mitgetheilt werden[4]). Ein Schüler des Yamaji hiess Naomaru Ajima[5]). Er führte Coordinaten in die japanische Mathematik ein, und unser Gewährsmann lässt es dahingestellt, ob man dabei an eine selbständige Nacherfindung oder an fremde Lehren zu denken habe. Enzō Wada[6]) mit seinem als Handschrift aufbewahrten Werke *Enri Shinkō* führt bis zum Jahre 1800 herab, und Hasegawas *Kyūseki Tsūkō* ist gar 1844 gedruckt[7]). In den allerletzten Jahren hat T. Endō eine Geschichte der japanischen Mathematik in japanischer Sprache vollendet, welche er die Güte hatte uns 1898 gedruckt zuzusenden. Leider blieb das Buch, wie leicht begreiflich, für uns vollkommen unverständlich. Ob es, falls es in eine europäische Sprache übersetzt wird, eine genaue Bestimmung der Entstehungszeit der einzelnen Formeln ermöglichen kann, wissen wir nicht, unser bisheriger Berichterstatter

[1]) Briefliche Mittheilung von Prof. D. Kikuchi in Tōkiō vom 9. Januar 1896. H. Fujisawa aus Tōkiō hielt auf dem Mathematikencongress zu Paris (August 1900) in englischer Sprache einen Vortrag über die Mathematik der alten japanischen Schule. [2]) D. Kikuchi in der in Tōkiō erscheinenden Zeitschrift *Tōkiō Sūgaku Butsurigaku Kwai Kiji.* Vol. VII, pag. 107. [3]) Ebenda pag. 53. [4]) Ebenda pag. 107. [5]) Ebenda pag. 114. [6]) Ebenda pag. 47. [7]) Ebenda pag. 47.

hält eine solche Bestimmung für mindestens sehr schwierig, weil alles in tiefstes Geheimniss gehüllt und nur den wenigen Eingeweihten zugänglich war. Wir müssen dieser Schilderung nach fast an eine um 2000 Jahre verspätete Nachahmung der Pythagoräischen Schule denken.

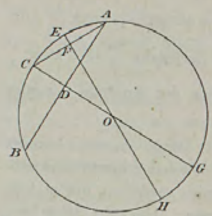

Fig. 106.

Die späten Veröffentlichungen beziehen sich auf Reihenentwicklungen für π und für π^2. Sei (Fig. 106) arc $AC = \frac{1}{2}$ arc AB, $CG = EH = d$, $CD = s$ $EF = s_1$. Man hat $AF^2 = EF \cdot FH = s_1(d - s_1)$. Andererseits $AF^2 = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{1}{4}(CD^2 + AD^2) = \frac{1}{4}(CD^2 + CD \cdot DG) = \frac{1}{4} CD \cdot CG = \frac{sd}{4}$. Mithin ist $s_1^2 - s_1 d + \frac{1}{4} sd = 0$. Nun fand Seki, welchem diese Entwicklung zugeschrieben wird, eine Reihendarstellung für s_1 aus der angegebenen Gleichung:

$$s_1 = \frac{1}{4} s + \frac{1}{16} \frac{s^2}{d} + \frac{1}{32} \frac{s^3}{d^2} + \frac{5}{256} \frac{s^4}{d^3} + \frac{7}{512} \frac{s^5}{d^4} + \frac{21}{2048} \frac{s^6}{d^5} + \cdots.$$

Eine Herleitung dieser Reihe ist vorläufig nicht mitgetheilt. Man kann sie erhalten, wenn man zuerst $\left(\frac{s_1}{d}\right)^2 - \frac{s_1}{d} = -\frac{1}{4} \frac{s}{d}$ schreibt, dann $\frac{s_1}{d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{s}{d}}$, die Quadratwurzel $\sqrt{1 - \frac{s}{d}}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt $\left(1 - \frac{s}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{s}{d} - \frac{1}{8}\left(\frac{s}{d}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{s}{d}\right)^3 - \cdots$ und nach Einsetzung dieses Werthes die ganze Gleichung mit d vervielfacht. Sollte Sekis Verfahren wirklich so gewesen sein, so müsste man entweder seinen mathematischen Geist aufs Höchste bewundern oder seine Unabhängigkeit anzweifeln. In der für s_1 gleichviel wie gefundenen Reihe ist das Anfangsglied $\frac{1}{4} s = \frac{s}{2^2}$ mit dem Namen der Urzahl, *original number*, belegt; die nachfolgenden Glieder heissen 1te, 2te, 3te ... Differenz und werden durch Recursionsformeln aus einander erhalten. Nennt man die Urzahl auch nullte Differenz (was der Japaner nicht thut), so entsteht allgemein die $k + 1$te Differenz aus der $k$ten durch Multiplication mit $\frac{s}{d}$ und mit einem Zahlenfactor f_{k+1} von der Art, dass $f_1 = \frac{1}{4}$, $f_2 = \frac{1}{2}$, $f_3 = \frac{5}{8}$, $f_3 = \frac{7}{10}$, $f_4 = \frac{3}{4}$, $f_6 = \frac{11}{14}$, $f_7 = \frac{13}{16}$. Allgemein ist $f_{k+1} = \frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+3)(2k+4)}$. Warum nicht $f_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4}$ als Regel gegeben wird, wird nachher ersichtlich.

Wie die Gleichung $s_1^2 - s_1 d + \frac{1}{4} sd = 0$ die Beziehung der Sagitta des halben Bogens zu der des ganzen Bogens ausdrückt, so muss, wenn $s_2, s_3, s_4 \cdots$ die Sagitta des viertel, achtel, sechzehntel ... Bogens bezeichnen soll, eine Reihe von Gleichungen stattfinden, deren erste heisst $s_2^2 - s_2 d + \frac{1}{4} s_1 d = 0$ oder $s_2^2 - ds_2 + \left(\frac{ds}{16} + \frac{s^2}{64} + \frac{s^3}{128 d} + \frac{5 s^4}{1024 d^2} + \cdots\right) = 0$. Aus ihr findet sich eine Reihe für s_2, die wieder mit einer Urzahl $\frac{s}{16} = \frac{s}{4^2}$ beginnt und sich durch Differenzen fortsetzt, welche abermals durch wiederkehrende Vervielfachung mit $\frac{s}{d}$ und mit Zahlenfactoren entstehen, welche der Reihe nach $\frac{5}{16}, \frac{21}{40}, \frac{143}{224}, \frac{17}{24}, \frac{133}{176}, \frac{575}{728}, \frac{261}{320} \cdots$ heissen.

Allgemein ist jetzt der $k + 1$te Factor $\frac{(4(k+1)-1)(4(k+1)+1)}{(4(k+1)+2)(4(k+2))}$. Ganz allgemein zeigt sich, dass, wenn der ursprüngliche Bogen in n gleiche Theile getheilt ist und die Sagitta zu einem Bogentheile gesucht wird, diese sich durch eine Reihe berechnet, welche mit einer Urzahl $\frac{s}{n^2}$ beginnt und durch Differenzen sich fortsetzt mittels Multiplication mit $\frac{s}{d}$ und mit Zahlenfactoren von der Form

$$\varphi_m = \frac{(mn-1)(mn+1)}{\left(mn + \frac{n}{2}\right)(mn+n)} = \frac{2m^2 - \frac{2}{n^2}}{2m^2 + 3m + 1},$$ welcher bei $n = \infty$ in $\frac{2m^2}{2m^2 + 3m + 1}$ übergeht.

Zu jeder Sagitta gehört eine Sehne oder Chorda, zu s_r die c_r, wobei, wie oben, $AF^2 = \frac{1}{4} CD \cdot CG$ oder $AC^2 = CD \cdot CG$ war, allgemein $c_{r+1} = \sqrt{s_r d}$ sein muss. Sei nun der ursprüngliche Bogen die halbe Kreisperipherie, c_{r+1} die Sehne zu dem Bogen, der 2^{r+1} mal genommen den Halbkreis liefert, so ist $2^{r+1} c_{r+1} = 2 \cdot 2^r \sqrt{s_r d}$ ein Näherungswerth für den Halbkreis $\frac{\pi d}{2}$, beziehungsweise $4 \cdot 2^{2r} s_r d$ ein Näherungswerth für dessen Quadrat $\frac{\pi^2 d^2}{4}$. Nun sei $2^r = n$ und für s_r entsteht eine mit $\frac{s}{2^r}$ als Urzahl beginnende Reihe. Diese Reihe muss mit $4 \cdot 2^{2r} \cdot d$ vervielfacht werden, um $\frac{\pi^2 d^2}{4}$ zu liefern, oder mit anderen Worten $\frac{\pi^2 d^2}{4}$ ist die Summe einer Reihe, in welcher die

Factoren, welche die einzelnen Differenzen hervorbringen, wie oben $\frac{2(mn-1)(mn+1)s}{(2m^2+3m+1)n^2d}$ heissen, die Urzahl aber $4 \cdot 2^{2r} \cdot d \cdot \frac{s}{2^{2r}} = 4ds$ ist. So entsteht

$$\frac{\pi^2 d^2}{4} = 4ds\Big[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\frac{s}{d} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\frac{s^2}{d^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\frac{s^3}{d^3} + \cdots\Big].$$

Beim Halbkreise, von welchem hier ausgegangen wird, ist $s = \frac{d}{2}$, also $4\,ds = 2d^2$, $\frac{s}{d} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\pi^2 d^2}{4} = 2d^2\Big[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{8} + \cdots\Big]$, beziehungsweise

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots.$$

Diese ganze Folge von Schlüssen soll, wie gesagt, der Hauptsache nach bis auf Seki zurückführen, bis zu der Zeit, in welcher Newton den binomischen Lehrsatz zuerst auf die Ausziehung von Quadratwurzeln anwandte. Sekis Nachfolger gaben alsdann Reihen für Bruchtheile von π selbst, die, ihrer Herleitung nach gleichfalls geometrisch, wieder so aufgefasst werden, dass sie mit einer Urzahl beginnen, aus welcher die Differenzen durch fortgesetzte Vervielfachung mit einem Gesetze gehorchenden Factoren gebildet werden. So soll z. B.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{7 \cdot 16} - \frac{5}{9 \cdot 128} + \cdots$$

eine japanische Reihe sein.

Gehen wir nach dieser Einschaltung zu Eulers nächster Abhandlung *Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae*[1]) über, so finden wir hier die erste Andeutung einer später als sehr merkwürdig erkannten Reihenart, nämlich der halbconvergenten Reihen. Da $\int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t$, so meint Euler, man könne das Integral in eine Summe zahlreicher sehr kleiner Glieder umwandeln, indem man $dt = \frac{t}{n}$ und t der Reihe nach mit den Werthen $\frac{1 \cdot t}{n}, \frac{2 \cdot t}{n}, \ldots \frac{n \cdot t}{n}$ versehen in Rechnung ziehe, ein Gedanke, dem wir schon bei Kepler (Bd. II, S. 830) begegnet sind, der ihn zum Nachweis der Richtigkeit der Gleichung $\int_0^\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 1 - \cos\varphi$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 116—127.

benutzte. Euler setzt also $\operatorname{arctg} t \sim \frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \cdots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, eine annähernde Gleichung, die um so richtiger ist, je grösser n gewählt wird, immer aber an einem wenn auch geringen Ueberschuss von $\operatorname{arctg} t$ über die Summe der rechtsstehenden Reihe leidet. Die genaue Summe nennt er s und entwickelt die einzelnen Reihenglieder durch Division selbst wieder in unendliche Reihen: $\frac{nt}{n^2+t^2} = \frac{t}{n} - \frac{t^3}{n^3} + \frac{t^5}{n^5} - \frac{t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+4t^2} = \frac{t}{n} - \frac{2^2t^3}{n^3} + \frac{2^4t^5}{n^5} - \frac{2^6t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+9t^2} = \frac{t}{n} - \frac{3^2t^3}{n^3} + \frac{3^4t^5}{n^5} - \frac{3^6t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+n^2t^2} = \frac{t}{n} - \frac{n^2t^3}{n^3} + \frac{n^4t^5}{n^5} - \frac{n^6t^7}{n^7} + \cdots$. Man fasse die Glieder der neuen Reihen, welche gleiche Potenzen von $\frac{t}{n}$ enthalten, zusammen, so entsteht $s = \frac{t}{n}[1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0] - \frac{t^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2] + \frac{t^5}{n^5}[1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3] + \cdots$. Jede der in eckigen Klammern stehenden n-gliedrigen Reihen hat Jakob Bernoulli (S. 344) in eine Summe vereinigen gelehrt, und wenn Euler sich auch nicht ausdrücklich auf ihn beruft, so benutzt er doch Bernoullis Formeln, über welche er in einer Beziehung hinausgeht. Während Bernoulli sich an den fünf ersten Bernoullischen Zahlen genügen liess, benutzt Euler noch sieben weitere, im Ganzen also zwölf Bernoullische Zahlen.

Der Anfang der Darstellung von s heisst also jetzt: $s = \frac{tn}{n} - \frac{t^3}{n^3}\Big[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\Big] + \frac{t^5}{n^5}\Big[\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\Big] - \cdots = t - \Big[\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2n} + \frac{t^3}{6n^2}\Big] + \Big[\frac{t^5}{5} + \frac{t^5}{2n} + \frac{t^5}{3n^2} - \frac{t^5}{30n^4}\Big] - \cdots$. Eine Umordnung der Glieder, so dass diejenigen zusammengefasst werden, welche gleichhohe Potenzen von n im Nenner besitzen, führt zu $s = \Big[\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots\Big] - \frac{t^2}{2n}[t - t^3 + t^5 - t^7 + \cdots] - \frac{t^2}{6n^2}[t - 2t^3 + 3t^5 - 4t^7 + \cdots] - \frac{t^4}{30n^4}[t - 5t^3 + 14t^5 - 30t^7 + \cdots] - \frac{t^6}{42n^6}\Big[t - \frac{28}{3}t^3 + 42t^5 - 132t^7 + \cdots\Big]$ u. s. w. Das Gesetz, welches die in der letzten Anordnung mit $\frac{t^m}{Nn^m}$ vervielfachte in Klammern eingeschlossene Reihe befolgt, wird ohne weitere Begründung angegeben. Es lässt diese Reihe in der Gestalt $t - \frac{(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3}t^3 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5 - \cdots$ erscheinen. Aber ihre für jeden positiven Werth von m unendliche Gestalt behagt Euler nicht, und er nimmt eine geradezu verblüffende Umformung mit ihr vor.

Heisst ihre Summe v, so wird $mv = mt - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} t^5 - \cdots = \frac{(1 - t\sqrt{-1})^{-m} - (1 + t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}$. eine Gleichung, welche unter der Voraussetzung, man dürfe die $(-m)^{\text{te}}$ Potenz ohne Weiteres nach ber binomischen Formel entwickeln, sich als richtig erweist.

Nun ist weiter $\frac{(1 - t\sqrt{-1})^{-m} - (1 + t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \left(\frac{1}{(1 - t\sqrt{-1})^m} - \frac{1}{(1 + t\sqrt{-1})^m}\right) = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^m - (1 - t\sqrt{-1})^m}{2(1+t^2)^m\sqrt{-1}}$ und unter abermaliger Anwendung des binomischen Satzes auf die im Zähler vorkommenden Potenzgrössen entsteht $mv = \frac{1}{(1+t^2)^m} \times \left[\frac{m}{1} t - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{(m(m-1) \cdots (m-4)}{1 \cdot 2 \cdots 5} t^5 - \cdots\right]$, d. h. v ist jetzt durch eine Reihe gegeben, welche von selbst abbricht, so oft m eine ganze positive Zahl ist. Diese Umformung liefert als Endergebniss $s = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots\right) - \frac{t^3}{2n(1+t^2)} - \frac{t^2}{2 \cdot 6n^2(1+t^2)^2} \cdot \frac{2t}{1} - \frac{t^4}{4 \cdot 30n^4(1+t^2)^4}\left(\frac{4t}{1} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3\right) - \cdots$. Die Annahme $t = 1$, also $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, liefert endlich die Formel $\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \cdots + \frac{4n}{n^2+n^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42}\frac{1}{2^3 \cdot 3n^6} + \frac{5}{66}\frac{1}{2^4 \cdot 5n^{10}} - \cdots$, welche um so mehr convergire, je grösser n gewählt werde[1]).

Unmittelbar an diese Aeusserung anschliessend beginnt Euler einen neuen Paragraphen seiner Abhandlung mit den Worten: Wenn auch diese Reihe um so mehr zu convergiren scheint, je grösser n ist, so convergirt sie doch stets nur bis zu einem gewissen Gliede, und nach diesem wachsen die Glieder wieder; deshalb taugt es nicht, die Reihe bis dahin anzuwenden, wo die Glieder zu divergiren beginnen, sondern es wird nützlich sein, das Verfahren da einzustellen, wo die grösste Convergenz beobachtet wird. Ist nämlich von den Brüchen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66} \cdots$ derjenige, dem der Stellenzeiger ν zukommt, $= X$ und der nächstfolgende $= Y$, so ist fortwährend $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{2\pi^2}$ und bei ins Unendliche wachsendem ν wird $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$. Daraus erkennt man, dass die Reihenglieder in beständig

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 121: *quae series eo magis convergit quo magis numerus pro n accipiatur.*

höherem Masse wachsen, so dass keine noch so sehr convergirende geometrische Progression, mit ihnen in Verbindung gebracht, sie zum Convergiren bringen kann.

Euler hat also eingesehen, dass die Bernoullischen Zahlen schneller als in geometrischem Verhältnisse wachsen, und dass vermöge dieser Eigenschaft die am Anfang convergente Reihe später der Divergenz verfällt. Er hilft sich dann bei der Anwendung dieser Reihen, indem er die neuerdings anwachsenden Glieder durch ein Restglied ersetzt, von welchem er nicht erläutert, wie er dazu gelangt ist, wenn man auch unschwer errathen kann, dass er sich dazu der Formel $1 - \frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4} + \left(\frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4}\right)^2 - \cdots = \frac{1}{1 + \frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4}}$ bediente, ohne die Divergenz der hier auftretenden geometrischen Reihe bei $4\mu^2 > \pi^4 n^4$ in Erwägung zu ziehen. Und doch sagt Euler nur wenige Seiten später[1]), man könne bei Anwendung divergenter Reihen nicht vorsichtig genug verfahren, während es ihm abermals nur eine Seite später nicht darauf ankommt, den Satz auszusprechen[2]), dass alle geometrischen Progressionen nach vorwärts und rückwärts ins Unendliche fortgesetzt die Summe 0 haben. Da nämlich $\frac{n}{1-n} = n + n^2 + n^3 + \cdots$ und $\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots$, so müsse wegen $\frac{n}{1-n} + \frac{n}{n-1} = 0$ auch $\cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \cdots = 0$ sein. Wir erinnern uns, dass Stirling (S. 650) dieselbe beiderseits ins Unendliche sich erstreckende Reihe mit ihren bei $n = 1$ unendlich grossem Werthe ins Auge gefasst hatte. Es kann wohl sein, dass Euler dort die Anregung fand, auf das eigenthümliche Gebilde zu achten. Jedenfalls aber wird es unseren Lesern durch die erwähnten Widersprüche deutlicher als bisher hervorgetreten sein, in welcher Unklarheit sich Euler damals über die Begriffe von Reihenconvergenz und Divergenz befand.

Euler hatte im VII. Bande der Petersburger Commentarien die Summe reciproker Potenzen der in der Zahlenreihe auf einander folgenden Zahlen untersucht und mittels der in unendlich viele Factoren zerlegten Sinusreihe gefunden (S. 658). Er hatte im VIII. Bande derselben Sammlung seine Summenformel abgeleitet, ohne in den in ihr auftretenden Coefficienten ein Gesetz erkennen zu können (S. 665). Euler hat sich niemals mit einem negativen Ergebnisse zufrieden gegeben. Im XII. Bande kehrte er mit den Be-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 125: *Ex his satis perspicitur, quam caute circa summationem serierum divergentium versari oportet.* [2]) Ebenda T. XI, 126—127, § 20.

trachtungen über einige Reihen, *De seriebus quibusdam considerationes*[1]), zu den gleichen Fragen zurück. Ist s ein Kreisbogen und $y = \sin s = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots$, sind dann wieder $a, b, c \cdots$ die Wurzeln der aus der Sinusreihe gebildeten Gleichung $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 y} - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 y} + \cdots$, schreibt man α für die Summe dieser Wurzeln, $\beta, \gamma, \delta \cdots$ für die Summe ihrer Producte zu zweien, dreien, vierten $\cdots$, setzt man dann, ungleich der früheren Bezeichnung, $a + b + c + d + \cdots = A$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \cdots = B$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \cdots = C$ u. s. w., so erhält man $A = \alpha$, $B = \alpha A - 2\beta$, $C = \alpha B - \beta A + 2\gamma$ u. s. w., Ergebnisse, welche von den früheren nur in Bezug auf die grossen Buchstaben abweichen. Nun tritt aber neu hinzu, dass eben diese grossen Buchstaben als Coefficienten einer recurrenten Reihe erkannt werden, indem $\frac{\alpha - 2\beta z + 3\gamma z^2 - 4\delta z^3 + \cdots}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots} = A + Bz + Cz^2 + \cdots$ ist, wie einfache Division bestätigt. Euler geht dann noch einen wichtigen Schritt weiter. Er setzt den Nenner des hier benutzten Bruches $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots = Z$, so wird der Zähler sofort $= -\frac{dZ}{dz}$ und demnach $A + Bz + Cz^2 + \cdots = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$. Ausser durch Z lässt sich aber $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots$ auch noch durch $1 - \frac{1}{y}\sin z$ bezeichnen, wie aus der geschilderten Entstehung der $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ hervorgeht. Ist demnach $Z = 1 - \frac{1}{y}\sin z$ und y dabei constant, so wird $\frac{dZ}{dz} = -\frac{1}{y}\cos z$ und $-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = \frac{\frac{1}{y}\cos z}{1 - \frac{1}{y}\sin z} = \frac{\cos z}{y - \sin z}$, mithin gefunden $A + Bz + Cz^2 + \cdots = \frac{\cos z}{y - \sin z}$. Wir bemerken dabei, dass Euler statt $\sin z$ und $\cos z$ die Schreibweise $\sin A \cdot z$ und $\cos A \cdot z$, d. h. sinus arcus z, cosinus arcus z hat, und dass der Abkürzungsbuchstabe A, abgesehen davon, dass ihm ein Pünktchen folgt, genau so aussieht, wie der Coefficient A, wodurch man sich beim Lesen der Abhandlung nicht irre machen lassen darf. Wird $y = 1$, also das frühere $s = \frac{\pi}{2}$ angenommen, so entsteht $A + Bz + Cz^2 + \cdots = \frac{\cos z}{1 - \sin z}$, und kann man $\frac{\cos z}{1 - \sin z}$ in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln, so sind damit die Coefficienten $A, B, C \cdots$ gegeben, denn eine zweite

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 53—96.

Reihe $P + Qz + Rz^2 + \cdots$, welche aus demselben geschlossenen Ausdruck sich herleitete, ohne dass $P = A$, $Q = B$, $R = C \cdots$ wäre, ist unmöglich[1]).

Beiläufig bemerkt, dürfte dieses die erste Stelle sein, an welcher der der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Grunde liegende Gedanke deutlich ausgeprochen ist, so vielfach die Methode auch seit ihrer Erfindung durch Descartes (Bd. II, S. 749) Anwendung gefunden hatte.

Jene gewünschte Reihe verschafft sich Euler so. Es ist $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$, ferner $1 - \sin z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2$, also $\frac{\cos z}{1 - \sin z} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$ und dieser Ausdruck muss der Reihe $A + Bz + Cz^2 + \cdots$ entsprechen, welche Euler jetzt durch s bezeichnet, wofür wir lieber σ schreiben, um jede Verwechslung mit dem früheren s zu vermeiden. Aus $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = \sigma$ folgt aber $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} = \operatorname{arctg}\sigma$, und durch Differentiation nach z erhält man $\frac{1}{2} = \frac{\frac{d\sigma}{dz}}{1 + \sigma^2}$, $1 + \sigma^2 = 2\frac{d\sigma}{dz}$, $1 + (A + Bz + Cz^2 + \cdots)^2 = 2(B + 2Cz + 3Dz^2 + \cdots) = 2B + 4Cz + 6Dz^2 + \cdots$. Nun endlich findet Euler durch Ausführung der links vom Gleichheitszeichen geforderten Quadrirung, und durch Gleichsetzung der auf beiden Seiten auftretenden z^k enthaltenden Glieder unter Berücksichtigung des schon bekannten Werthes $A = 1$ die zwischen $A, B, C \cdots$ stattfindenden Beziehungen $A = 1$, $B = \frac{A^2 + 1}{2}$, $C = \frac{2AB}{4}$, $D = \frac{2AC + B^2}{6}$ u. s. w.

Wir können unmöglich über alle weitere Entwicklungen berichten. Wir müssen uns begnügen, aus dem Zusammenhange herausgerissen, zu sagen, dass im § 16 von trigonometrischen Functionen mit imaginären Argumente und ihnen gleichen Exponentialausdrücken mit rellen Exponenten die Rede ist[2]), dass z. B. $\frac{\alpha\sqrt{-1}}{\sin(\alpha\sqrt{-1})} = \frac{2\alpha e^{\alpha}}{e^{2\alpha} - 1}$ erkannt ist, wenn auch die Bezeichnung weniger einfach gewählt ist. Wir erwähnen ferner, dass die Summen der reciproken Potenzen der ganzen Zahlen mit graden Exponenten bis zur Summe der reciproken 24ten Potenzen ausgerechnet sind[3]), und zwar jeweils in der Form

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 61.
[2]) Ebenda T. XII, 65—66. [3]) Ebenda T. XII, 73—74.

$\frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k+1)} A_{2k}$, wo aber Euler auch wieder insofern etwas anderer Bezeichnung sich bedient, als er da, wo wir durch Anwendung des Stellenzeigers k verallgemeinerten, die besonderen Zahlenwerthe anschreibt, auch wo es um die A_{2k} sich handelt. Statt $A_2, A_4, A_6, A_8 \cdots$ findet man also bei Euler $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10} \cdots$. Die allgemeine Summenformel endlich erhält durch Anwendung dieser Zahlen eine etwas andere Gestalt[1]): $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{A_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{dX}{dx} - \frac{A_4}{1 \cdot 2 \cdots 5} \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{A_6}{1 \cdot 2 \cdots 7} \frac{d^5X}{dx^5} + \cdots$.

Die Zeitfolge führt uns zu einem ganz hervorragenden umfangreichen Werke, welches 1742 in Edinburgh die Presse verliess, zu dem *Treatise of fluxions* von Maclaurin. Wir werden im 112. und im 118. Kapitel über dasselbe zu berichten haben, zunächst besprechen wir nur die Stellen, welche für die Reihenlehre von Wichtigkeit sind. Dazu gehört mittelbar der Satz[2]), dass die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve $y = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots}{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}$ unter der Voraussetzung $n > m$ die Abscissenaxe zur Asymptote habe, dass

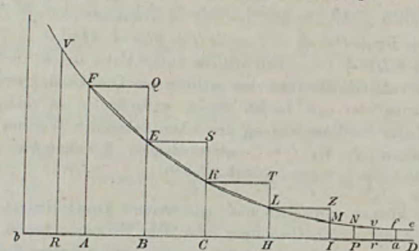

Fig. 107.

aber der Flächeninhalt zwischen einer Anfangsordinate, der Curve und der Abscissenaxe nur dann ein endlicher sei, wenn $n > m + 1$, dagegen ein unendlich grosser, wenn $n \leq m + 1$. Auf ihn beruft sich nämlich Maclaurin[3]), wo er die Summirung einer Reihe zur Ausmessung eines Flächenraums von der genannten Gestalt in Beziehung setzt. Seien (Fig. 107) die Abscissenstücke $AB = BC = CH = HI$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 74—75.
[2]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 272—273, § 327. [3]) Ebenda pag. 289 bis 304, § 350—362.

$= \cdots = 1$ und die Ordinaten $AF, BE, CK, HL \cdots$ die einzelnen Reihenglieder, so ist die Reihensumme gleich der Summe der Rechtecke $AQ + BS + CT + HZ + \cdots$. Diese Rechtecke sind aber zusammen grösser, als die von der Curve $FEKL \cdots$ mit AF und AD gebildete Fläche, welche selbst wieder, wie man durch gedachte Verlängerung der $SE, TK, ZL \cdots$ nach links sich leicht überzeugt, grösser ist als $BS + CT + HZ + \cdots$. Je nachdem man also die Curvenfläche endlich oder unendlich findet, wird das Gleiche für die Reihensumme gelten müssen. Wird ferner in Erwägung gezogen, dass die gradlinigen Dreiecke $FQE, ESK, KTL, LZM \cdots$ den Haupttheil des Ueberschusses der Rechteckssumme $AQ + BS + CT + HZ + \cdots$ über die Curvenfläche ausmachen und zusammen der Hälfte des Rechtecks AQ gleichkommen, so wird jene Rechteckssumme, d. h. die vorgelegte Reihe, annähernd eben so gross sein wie die um das halbe erste Reihenglied vermehrte Curvenfläche. Es sind das die gleichen Gedanken, welche zum Theil Newton (S. 200), welche genauer Euler 1736 ausgesprochen hatte (S. 663). Als dem Zwecke der Reihensummirung noch näher kommend wird dann eine Umformung vorgeschlagen[1]), welche zur Reihensummirung unter Ausrechnung von verhältnissmässig nur wenigen Gliedern führt, und welche mit der Eulerschen Summenformel (S. 657) übereinstimmt. Eine Herleitung verspart sich Maclaurin auf den zweiten Band.

Maclaurin macht dann darauf aufmerksam, dass, wenn $A, B, C, D \cdots$ die Glieder einer Reihe sind, und wenn man deren Differenzen bildet, eben diese Differenzen $A - B, B - C, C - D \cdots$ eine neue Reihe darstellen, deren Summe der Unterschied zwischen dem ersten und dem letzten Gliede der ursprünglichen Reihe ist. Nehmen die Glieder der ursprünglichen Reihe unter jeden angebbaren Werthe ab[2]), so bleibt ihr erstes Glied allein als Summe der Differenzenreihe, z. B. $1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$; $\frac{1}{1 \cdot 2} = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}\right) + \cdots = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$. Dieses Verfahren sei im Wesentlichen schon von Jakob Bernoulli (S. 92 flgg.) benutzt worden und habe auch in den Händen von Taylor, von Nicole, von Stirling Dienste erwiesen. Maclaurin selbst bedient sich desselben noch bei zahlreichen verwickelteren Betrachtungen.

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 292—293, § 352—353. [2]) Ebenda pag. 293, § 354: *If the terms of the first series decreaze in such a manner that by continuing the progression they may become less than any quantity how small soever that can be assigned.*

Die Verwandlung eines Ausdruckes in eine Reihe, mithin die der Reihensummirung als Umkehrung gegenüberstehende Aufgabe, kommt bei Integrationen in Betracht[1]). Kann das Integral nicht genau als algebraischer Ausdruck angegeben werden, so muss man es durch eine convergirende Reihe ausdrücken[2]). Wie das zu geschehen hat, ist verschieden. In sehr vielen Fällen genügt ein Divisionsverfahren, wie z. B. bei $\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \cdots$, wo unter der Voraussetzung eines gegen a sehr kleinen x wenige Anfangsglieder der Reihe ihrem Gesammtwerthe nahezu gleich sind[3]). Differentiation führt gleichfalls nicht selten zur Reihenentwicklung, und als Beispiel dient für Maclaurin der binomische Lehrsatz Newtons[4]). Ist n ganz beliebig, so wird gleichwohl für $(1+x)^n$ eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe vorausgesetzt werden dürfen, deren von x freies Anfangsglied 1 heisst. Man wird annehmen dürfen $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots$. Differentiation nach x liefert nach einander

$$\begin{aligned} n(1+x)^{n-1} &= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots \\ n(n-1)(1+x)^{n-2} &= 2B + 2\cdot 3Cx + 3\cdot 4Dx^2 + \cdots \\ n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} &= 2\cdot 3C + 2\cdot 3\cdot 4Dx + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzt man überall $x = 0$, so rechtfertigt sich einestheils der Anfang der für $(1+x)^n$ angenommenen Reihe mit 1 und ergibt sich anderntheils $n = A$, $n(n-1) = 2B$, $n(n-1)(n-2) = 6C$ u. s. w., d. h. $A = n$, $B = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots$. Aehnlich wird unmittelbar darauf der polynomische Lehrsatz[5]) hergeleitet, für dessen Erfindung auf De Moivre verwiesen ist (S. 86).

Die obige Herleitung des Binomialsatzes hat allerdings neben anderen Erfordernissen, deren Erkennung erst späteren Zeiten angehört, unter allen Umständen zur Voraussetzung, dass die Auffindung des Differentialquotienten von $(1+x)^n$ nach x als $n(1+x)^{n-1}$ nicht selbst mittels des Binomialsatzes stattgefunden habe, und diese Vorsicht hat Maclaurin geübt. Seine Herleitung jenes Differentialquotienten[6]) geht aus von der Ungleichung $nE^{n-1} > \frac{E^n - F^n}{E - F} > nF^{n-1}$,

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 604—607, § 745—747. [2]) *When a fluent cannot be represented accurately in algebraic terms, it is then to be expressed by a converging series.* [3]) *In that case a few terms at the beginning of the series will be nearly equal to the value of the whole.* [4]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 607—608, § 748. [5]) Ebenda pag. 608, § 749. [6]) Ebenda pag. 583—586, § 710—714.

sofern $E > F > 0$ und n ganzzahlig positiv. Aus ihr folgt $\frac{(A+a)^n - A^n}{(A+a) - A} > nA^{n-1}$ und $\frac{A^n - (A-a)^n}{A - (A-a)} < nA^{n-1}$ oder $(A+a)^n - A^n > naA^{n-1} > A^n - (A-a)^n$. Mit anderen Worten: die n^{ten} Potenzen positiver Zahlen wachsen in der Weise, dass ihre Differenzen fortwährend zunehmen. Ist nun a die Fluxion von A, so muss naA^{n-1} die Fluxion von A^n sein, weil die Annahme einer Fluxion $naA^{n-1} + r$ ebenso wie die Annahme einer Fluxion $naA^{n-1} - r$ zu Widersprüchen führt. Sei nämlich $\sqrt[n-1]{A^{n-1} + \frac{r}{na}} - A = o$, so folgt $naA^{n-1} + r = na(A+o)^{n-1}$, d. h. der Quotient der Fluxionen von A^n und von A ist $n(A+o)^{n-1}$. Denkt man sich ein $u < o$ als Fluxion von A, so muss demgemäss die entsprechende Fluxion von A^n sich als $nu(A+o)^{n-1}$ erweisen. Nach dem Vorausgeschickten ist $nu(A+o)^{n-1} > nu(A+u)^{n-1} > (A+u)^n - a^n$, und doch kann die Fluxion von A^n als Grenze von $(A+u)^n - A^n$ nicht grösser als diese Differenz selbst sein, welche bewiesenermassen zugleich mit u zunimmt, der angekündigte Widerspruch ist mithin aufgedeckt. Aehnlich ist der Beweis, dass auch $naA^{n-1} - r$ nicht die Fluxion von A^n sein kann, und demnach ist in der That naA^{n-1} die genannte Fluxion, wenn nur n eine ganze positive Zahl ist. Ist dagegen $\frac{m}{n}$ der Exponent von A und $A^{\frac{m}{n}} = K$, $A^m = K^n$, und ist a die Fluxion von A, k die von K, so ist $maA^{m-1} = nkK^{n-1}$, sowie $k = \frac{m}{n}a\frac{A^{m-1}}{K^{n-1}} = \frac{m}{n}aA^{m-1} : A^{m-\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}aA^{\frac{m}{n}-1}$. Ist dann weiter $A^{-r} = K$ oder $A^r \cdot K = 1$, so folgt durch Fluxionsbildung $raA^{r-1}K + kA^r = 0$ nebst $k = -ra\frac{K}{A} = -raA^{-r-1}$. Auf den Fall eines irrationalen Exponenten wird nicht Rücksicht genommen.

Wir unterbrechen hier einen Augenblick unseren Bericht über Maclaurins Werk, um einem am 6. Mai 1742 der Royal Society vorgelegten Aufsatze[1]) eine Erwähnung zu gönnen. Johann De Castillon hat damals den binomischen Lehrsatz mit einem Beweise versehen. Bei der Entwicklung von $(p+q)^m$ müssen, sagt er, unter Annahme eines positiven ganzzahligen m die Glieder p^m, $p^{m-1}q$, $p^{m-2}q^2$, $\cdots q^m$, im Ganzen $m+1$ Glieder vorkommen. Vervielfacht man $(p_1+q_1)(p_2+q_2)\cdots(p_m+q_m)$, so entstehen 2^m Glieder und $2^m > m+1$. Daraus folgt, dass beim Uebergange des Productes in

[1]) P. T. XLII, 91—98.

eine Potenz, d. h. wenn alle p unter sich und alle q unter sich gleich werden, gewisse Glieder identisch werden müssen. Das Glied $p^s q^t$ (wo $s + t = m$) wird so oft vorkommen, als s Elemente p und t Elemente q permutirt werden können, d. h. $\frac{(s+t)(s+t-1)(s+t-2)\cdots 1}{s(s-1)\cdots 1 \cdot t(t-1)\cdots 1}$ mal. Man kann auch von einer Potenzentwicklung auf die nächsthöhere schliessen mittels $(p+q)^m = (p+q)(p+q)^{m-1}$ und so unter Voraussetzung von $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + p^2$ zu dem gleichen Ergebnisse gelangen[1]). Wird $m = \frac{r}{n}$ und $(p+q)^{\frac{r}{n}} = Ap^{\frac{r}{n}} + Bp^{\frac{r}{n}-1}q + Cp^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \cdots$, ein versuchsweiser Ansatz, dessen Berechtigung keinerlei Begründung erhält, so folgt $(p+q)^r = \left(Ap^{\frac{r}{n}} + Bp^{\frac{r}{n}-1}q + Cp^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \cdots\right)^n$ oder $p^r + rp^{r-1}q + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}p^{r-2}q^2 + \cdots = A^n p^r + nA^{n-1}Bp^{r-1}q + nA^{n-1}Cp^{r-2}q^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^{n-2}B^2p^{r-2}q^2 + \cdots$ und durch Gleichsetzung der in Bezug auf p und q identischen Glieder zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens erhält man $A = 1$, $nB = r$ und $B = \frac{r}{n}$, $nC + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \frac{r(r-1)}{2}$ und $C = \frac{r(r-n)}{2n^2} = \frac{\frac{r}{n}\left(\frac{r}{n} - 1\right)}{1\cdot 2}$ u. s. w. Wird der Exponent negativ, so begnügt sich De Castillon mit Andeutung der in der Potenzirung alsdann mit enthaltenen Division, welche wiederum zu den durch den binomischen Lehrsatz geforderten Coefficienten führe. Der Vergleich von De Castillons Schlüssen mit denen Maclaurins fällt sehr zu Ungunsten des ersteren aus.

Noch drei Jahre später begnügte sich Kästner in einem Programme über den Binomialsatz (Leipzig 1745) nun gar mit dem Beweise des einfachsten Falles bei ganzzahlig positivem Exponenten. Er nahm die Entwicklung von $(a+b)^m$ als gegeben an, vervielfachte mit $a + b$, ähnlich wie es De Castillon beiläufig gethan hatte, und zeigte die Uebereinstimmung des Productes $(a+b)(a+b)^m$ mit der Entwicklung von $(a+b)^{m+1}$. Aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ steht in vollem Einklange mit dem Binomialsatze, also gehorchen auch die folgenden Potenzen dem gleichen Gesetze. Als Erfinder der hier benutzten Schlussweise der vollständigen Induction nannte Kästner bei dieser Gelegenheit Jakob Bernoulli. Das Erstlingsrecht Pascals war ihm augenscheinlich unbekannt.

---

[1]) P. T. XLII, 94.

Hatte sich Maclaurin bei seinem Beweise für den binomischen Lehrsatz des Hilfsmittels bedient, eine Reihenentwicklung für $(1+x)^n$ vorläufig anzusetzen und durch wiederholte Differentiation nebst Einsetzung von $x = 0$ die Reihencoefficienten zu bestimmen, so führte ihn genau der gleiche Weg zu derjenigen Entwicklung, welche den Namen der Maclaurinschen Reihe[1]) erhalten hat, und von welcher Maclaurin selbst erklärt, sie finde sich bereits in Taylors *Methodus incrementorum*. Bei unserem Berichte ersetzen wir die Fluxionspünktchen und die Buchstaben $E, \dot{E}, \ddot{E}, \dddot{E} \cdots$, welche die Werthe bezeichnen, die y (eine an sich beliebige Function von z) und dessen Ableitungen unter der Voraussetzung $z = 0$ annehmen, durch die heute gebräuchliche Schreibweise bestrichelter Functionalzeichen. Wir setzen also in Maclaurins Geiste, aber abweichend von seiner Bezeichnung, $y = f(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und die Ableitungen $f'(z) = B + 2Cz + 3Dz^2 + \cdots$, $f''(z) = 2C + 2\cdot 3Dz + \cdots$, $f'''(z) = 2\cdot 3D + \cdots$. Die Substitution $z = 0$ bringt $f(0) = A$, $f'(0) = B$, $f''(0) = 2C$, $f'''(0) = 2\cdot 3D$, $\cdots$ beziehungsweise $A = f(0)$, $B = f'(0)$, $C = \frac{f''(0)}{1\cdot 2}$, $D = \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\cdots$ hervor, und so ist gefunden $f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \cdots$. Von einem Restgliede der Reihe ist, wie man sieht, ebensowenig die Rede, als von der Möglichkeit, dass die entstehende unendliche Reihe nicht brauchbar sein könne, und unbesorgt leitet Maclaurin einige allerdings schon bekannte Entwicklungen als Beispiele für die Anwendung seiner Reihe ab.

Noch ein letztes Mal kommt Maclaurin unter Benutzung des Taylorschen Satzes auf Reihen zurück[2]). Es sei uns abermals gestattet, seinen Gedankengang in die unseren Lesern jedenfalls geläufigere Bezeichnung zu kleiden. Nach dem Taylorschen Satze ist $f(x+z) = f(x) + f'(x)z + \frac{f''(x)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 \cdots$. Wird mit dz vervielfacht und von 0 bis 1 integrirt, so erhält man

$$1.\quad \int_0^1 f(x+z)dz = f(x) + \frac{f'(x)}{1\cdot 2} + \frac{f''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

Ersetzt man die Function $f(x)$, beziehungsweise $f(x+z)$ durch deren Ableitungen, so entstehen neue Gleichungen in beliebiger Anzahl:

---

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 610—611, § 751. Vergl. Alfr. Pringsheim, Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. *Bibliotheca mathematica* 1900, S. 433—479, insbesondere S. 438. [2]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 672—675, § 828—831.

$$2.\ \begin{cases} \int\limits_0^1 f'(x+z)\,dz = f'(x) + \frac{f''(x)}{1\cdot 2} + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\ \int\limits_0^1 f''(x+z)\,dz = f''(x) + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2} + \frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{\mathrm{V}}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\ \int\limits_0^1 f'''(x+z)\,dz = f'''(x) + \frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{1\cdot 2} + \frac{f^{\mathrm{V}}(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{\mathrm{VI}}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Vervielfacht man die Gleichungen des Systems 2., wie sie unter einander stehen, mit $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ und addirt sie dann sämmtlich zu 1., so entsteht:

$$3.\ \int\limits_0^1 f(x+z)\,dz + \alpha\int\limits_0^1 f'(x+z)\,dz + \beta\int\limits_0^1 f''(x+z)\,dz + \gamma\int\limits_0^1 f'''(x+z)\,dz + \cdots$$
$$= f(x) + f'(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \alpha\right) + f''(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \beta\right)$$
$$+ f'''(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma\right) + \cdots.$$

Die an sich beliebigen, also zur Erfüllung irgend eines Wunsches sich eignenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bestimmt man so, dass in 3. alle Glieder rechts vom Gleichheitszeichen mit Ausnahme von $f(x)$ in Wegfall kommen, d. h. mittels des Systems

$$4.\ \begin{cases} \frac{1}{1\cdot 2} + \alpha = 0 \\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \beta = 0 \\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wodurch $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{12}$, $\gamma = 0$, $\delta = -\frac{1}{720}$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = \frac{1}{30240} \cdots$ sich berechnet und 3. übergeht in

$$5.\ f(x) = \int\limits_0^1 f(x+z)\,dz - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f'(x+z)\,dz + \frac{1}{12}\int\limits_0^1 f''(x+z)\,dz$$
$$- \frac{1}{720}\int\limits_0^1 f^{\mathrm{IV}}(x+z)\,dz + \frac{1}{30240}\int\limits_0^1 f^{\mathrm{VI}}(x+z)\,dz + \cdots.$$

Die in 5. geforderten Integrationen lassen sich, so oft Differentialquotienten unter dem Integralzeichen stehen, also von $\int\limits_0^1 f'(x+z)\,dz$

$= f(x+1) - f(x)$ an beginnend, leicht vollziehen, und man erhält demnach

$$f(x) = \int\limits_0^1 f(x+z)\,dz - \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x)) + \frac{1}{12}(f'(x+1) - f'(x))$$
$$+ \frac{1}{720}(f''(x+1) - f''(x)) + \frac{1}{30240}(f'''(x+1)\quad f'''(x)) - \cdots.$$

Man kann ein ganzes System ähnlicher Gleichungen aufstellen, indem man x durch $x+1$, durch $x+2 \cdots$ ersetzt. Innerhalb der Klammern erscheint dann in jeder folgenden Gleichung als Subtrahend der Minuend der vorhergehenden Substitution, und bei Addition des Gleichungssystems, so dass man links $f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \cdots + f(x+n)$ zu stehen bekommt, bleibt rechts in der ersten Klammer $f(x+n+1) - f(x)$ und Aehnliches in den folgenden Klammern. Die den Klammergrössen vorausgehenden bestimmten Integrale vereinigen sich aber auch, denn es ist $\int\limits_0^1 f(x+1+z)\,dz = \int\limits_1^2 f(x+z)\,dz$ u. s. w., also $\int\limits_0^1 f(x+z)\,dz + \int\limits_0^1 f(x+1+z)\,dz + \cdots + \int\limits_0^1 f(x+n+z)\,dz = \int\limits_0^1 f(x+z)\,dz + \int\limits_1^2 f(x+z)\,dz + \cdots + \int\limits_n^{n+1} f(x+z)\,dz = \int\limits_0^{n+1} f(x+z)\,dz = \int\limits_x^{x+n+1} f(z)\,dz$. Man erhält also endlich

$$f(x) + f(x+1) + \cdots + f(x+n) = \int\limits_x^{x+n+1} f(z)\,dz - \frac{1}{2}(f(x+n+1) - f(x))$$
$$+ \frac{1}{12}(f'(x+n+1) - f'(x)) - \frac{1}{720}(f'''(x+n+1) - f'''(x))$$
$$+ \frac{1}{30240}(f^{\mathrm{V}}(x+n+1) - f^{\mathrm{V}}(x)) - \cdots,$$

und das ist, nur deutlicher geschrieben, die Eulersche Summenformel (S. 657). Die Frage liegt allzunahe, ob Maclaurin die Arbeiten seines Vorgängers auf diesem Gebiete im VI. und im VIII. Bande der Abhandlungen der Petersburger Akademie gekannt habe oder nicht, als dass sie nicht aufgeworfen worden wäre. Man hat sie verneinend beantworten zu müssen geglaubt[1]), und wir sind auch zu der gleichen Ueberzeugung gekommen. Es ist ja richtig, dass Maclaurin die Veröffentlichungen der Petersburger Akademie offenbar studirt und benutzt hat. Er führt in seinem *Treatise of fluxions*

[1]) Reiff S. 87.

den I., II., III., V. Band der *Commentarii Academiae Petropolitanae* als Quelle an[1]), aber eine Erwähnung späterer Bände ist uns nicht bemerklich gewesen. Schon damit ist wahrscheinlich gemacht, dass Malaurin den VI. und VIII. Band nicht benutzte. Beachtung des Erscheinungsjahres verstärkt die Wahrscheinlichkeit. Der VIII. Band mit Eulers Herleitung der Summenformel gelangte 1741 zur Ausgabe unmittelbar vor, vielleicht gleichzeitig mit dem Drucke des Treatise of fluxions, von seiner Benutzung kann mithin keine Rede sein. Aber auch der VI. Band, in welchem die Formel ohne Herleitung zu finden war, und der 1738 im Druck erschienen ist, wurde von Maclaurin kaum benutzt. Er beruft sich einmal[2]) auf eine Abhandlung von Clairaut, welche er einen *late ingenious essay*, einen jüngst veröffentlichten sinnreichen Versuch nennt. Diese Abhandlung gehört den P. T. von 1737 an, und damit dürfte der Endzeitpunkt der von Maclaurin benutzten Literatur bezeichnet sein. Nimmt man hinzu, dass Maclaurin in seiner Vorrede erklärt, der grösste Theil seines ersten Buches, also vermuthlich auch die Summenformel, sei schon 1737 gedruckt gewesen, dass ferner Maclaurin mit Verweisungen keineswegs geizte, und dass endlich die Art, wie er zur Summenformel gelangt, so gut wie keine Aehnlichkeit mit Eulers Gedankengange besitzt, so ist damit Maclaurins durchaus unabhängige Nacherfindung in unseren Augen wenigstens sichergestellt.

Bis zu einem gewissen Grade gehört auch die sogenannte Simpsonsche Regel zur Reihensummation und mag daher, wenn auch nicht in strenger Einhaltung der Zeitfolge, hier, wo wir über ein englisches Werk berichteten, eingeschaltet werden. Wir erinnern uns, dass Newton schon in den Principien eine Curve als Parabel zu betrachten lehrte (S. 372), dass er später auf den gleichen Gedanken eine angenäherte Quadratur gründete (S. 375—376). Thomas Simpson führte die Anwendung um einen grossen Schritt weiter, indem er eine sehr bequeme Formel angab, welche seinen Namen behalten hat und denselben bekannter machte als manches andere, welches wissenschaftlich bedeutender ist.

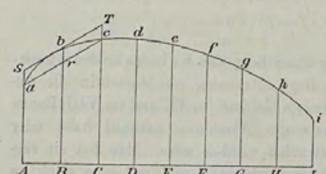

Fig. 108.

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 441, § 523; pag. 464, § 544; pag 485, § 569; pag. 671, § 826; pag. 691 (Note, wo auf einen Eulerschen Aufsatz des V. Bandes hingewiesen ist). [2]) Ebenda pag. 726, § 905.

Die Formel steht in den *Mathematical Dissertations on a variety of physical and analytical subjects* von 1743 und zwar in der Abhandlung *Of the areas of curves etc. by approximation*[1]). Sei abc (Fig. 108) als Bogen einer gewöhnlichen Parabel gedacht und aA, bB, cC als drei gleichweit von einander abstehende zu AJ senkrechte Durchmesser derselben. Weil bB Durchmesser ist und die Sehne ac in r halbirt, wird die Berührungslinie an die Parabel in b der ac parallel sein. Des Weiteren ist nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel jedes Parabelsegment $\frac{2}{3}$ des ihm umschriebenen Parallelogramms, also $abcra = \frac{2}{3} aSTc = \frac{2}{3}(ASTC - AacC) = \frac{2}{3}\frac{AS+CT}{2}\cdot AC - \frac{2}{3}\frac{Aa+Cc}{2}\cdot AC = \frac{AC}{3}(2Bb - Aa - Cc)$. Wird das gradlinige Viereck $AacC = \frac{AC}{3}\left(\frac{3}{2}Aa + \frac{3}{2}Cc\right)$ zum Segmente addirt, so entsteht $AabcC = \frac{AC}{3}\left(2Bb + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{2}Cc\right) = \frac{AB}{3}(Aa + 4Bb + Cc)$. Nun kann fortgesetzt jedes folgende Curvenstück cde, efg, ghi als Parabelbogen betrachtet werden, und ist fortgesetzt $AB = BC = CD$ $DE = EF = FG = GH = HJ$, so erhält man neben

$$AabcC = \frac{AB}{3}(Aa + 4Bb + Cc)$$

auch

$$CcdeE = \frac{AB}{3}(Cc + 4Dd + Ee)$$

$$EefgG = \frac{AB}{3}(Ee + 4Ff + Gg)$$

$$GghiJ = \frac{AB}{3}(Gg + 4Hh + Ji)$$

und als Summe $AabcdefghiJ = \frac{AB}{3}[Aa + Ji + 2(Cc + Ee + Gg) + 4(Bb + Dd + Ff + Hh)]$ und das ist die Simpsonsche Regel. War sie, wie wir oben sagten, auch keineswegs die bedeutendste von Simpsons Leistungen, neu war sie jedenfalls, und nicht jeder Schriftsteller hätte Simpsons Bescheidenheit besessen, der in der Vorrede erklärte[2]), sie sei von Newton erfunden, von De Moivre, von Stirling und anderen vervollkommnet, er nehme für sich Nichts in Anspruch als das Recht, den Gegenstand in ein helles und den Leser befriedigendes Licht zu setzen. Ob Simpson, ob die von ihm genannten Vorgänger Nichts davon wussten, dass James Gregory in seinen *Exercitationes geometricae* von 1668 Aehnliches hatte durch-

[1]) Simpson, *Mathematical dissertations* pag. 109—119. [2]) Ebenda Preface pag. VII.

blicken lassen[1]), wie wir (S. 63) hätten erwähnen sollen? Es scheint fast so, und in der That war die Ausdrucksweise Gregorys so wenig durchsichtig, dass es eines besonderen Studiums und besonders glücklichen Eindringens in seinen Gedankengang bedurfte, um bei ihm wiederzufinden, was man nur in ganz anderer Form kannte. Gregory selbst aber war 1675 gestorben und daher nicht in der Lage, Ansprüche zu erheben, als die Betrachtungsweise einer zu quadrirenden krummen Linie als parabolische Curve zweiten Grades durch Andere in die Oeffentlichkeit gebracht wurde.

Auf das europäische Festland zurückkehrend dürfen wir in aller Kürze auf einen Brief Daniel Bernoullis an Euler aufmerksam machen, welcher muthmasslich 1741 geschrieben ist und in welchem wohl erstmals von einem anderen Mathematiker als Euler der Buchstabe e in der Bedeutung der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems benutzt ist[2]).

Euler war seit 1741 in Berlin. Beiträge aus seiner Feder zu dem 1743 gedruckten VII. Bande der *Miscellanea Berolinensia*, wie damals die akademischen Veröffentlichungen dort hiessen, müssen erwähnt werden. Da ist in einem Aufsatze über bestimmte Integrale[3]) die Summe $\sin s + \sin(s+u) + \sin(s+2u) + \cdots + \sin(s+(p-1)u)$ gefunden[4]) und nicht minder die Summe $\cos s + \cos(s+u) + \cos(s+2u) + \cdots + \cos(s+(p-1)u)$, welche letztere in doppelter Weise hergeleitet ist[5]), einmal unabhängig von der Formel für die Summe der Sinusse der in arithmetischer Progression wachsenden Bögen, einmal mittels Differentiation dieser ersteren Formel.

Da ist in einer Abhandlung Eulers: *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum*[6]), über die Summen der reciproken Potenzen der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, die frühere Herleitung der gleichen Summe mittels der als Gleichung unendlich hohen Grades betrachteten Sinusreihe (S. 658) bemängelt. Man wisse freilich, dass die Factoren der damals gebildeten Factorenfolge den reellen Wurzeln jener Gleichung entstammen, aber man wisse nicht, ob eben jene Gleichung nicht auch imaginäre Wurzeln besitze, und sei dieses der Fall, so seien alle früheren Folgerungen falsch. In einem Versuche, an die Stelle der als mangelhaft erkannten Gedankenreihe eine einwandfreie zu setzen, ist mit

[1]) G. Heinrich, Notizen zur Geschichte der Simpsonschen Regel in der *Bibliotheca mathematica* 1900, S. 90—92. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1741—1743. T. XIII, 4. [3]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 129—171. [4]) Ebenda VII, 133. [5]) Ebenda VII, 142—143. [6]) Ebenda VII, 172—192.

dürren Worten ausgesprochen[1]), dass $e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n_{(n=\infty)}$, und dass $\sin s = \frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Schon 1730 oder 1731 hatte Euler erkannt (S. 655), dass $\left(\frac{1-x^z}{z}\right)_{(z=0)} = -\log z$, und von da an war der Uebergang zur Auffassung der Exponentialgrösse als Grenzwerth angebahnt. Auch der Zusammenhang zwischen trigonometrischen Ausdrücken und Exponentialgrössen mit imaginären Exponenten war Euler nachweislich schon früher nicht entgangen. Er hat 1740 von Formeln Gebrauch gemacht, welche dieses beweisen (S. 677), er hat in einem in Stockholm handschriftlich aufbewahrten Briefe[2]) an Johann Bernoulli vom 20. Juni 1740 ausdrücklich erklärt, die Reihenentwicklung von $2\cos x$ und von $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ führe zu dem gleichen Ergebnisse $2\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\right)$, er hat im folgenden Jahre, am 9. December 1741, an Goldbach geschrieben[3]): Ich habe letztens auch ein merkwürdiges Paradoxon gefunden, nehmlich, dass der Werth von dieser Expression $\frac{z^{+\sqrt{-1}} + z^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sei $\frac{10}{13}$, und dieser Bruch differirt nur in partibus millionesimis von der Wahrheit. Der wahre Werth aber dieser Expression ist der Cosinus dieses arcus 0,6931471805599, oder des arcus von $39^0\,42'\,51''\,52'''\,9^{IV}$ in einem Circul, dessen Radius $= 1$. Beide Thatsachen verhindern aber nicht, den Aufsatz von 1743 als erste nicht misszuverstehende deutliche Verkündigung der beiden merkwürdigen Wahrheiten in der Oeffentlichkeit erscheinen zu lassen. Eben dort findet sich[4]) die Formel $\cos s = \frac{e^{s\sqrt{-1}} + e^{-s\sqrt{-1}}}{2}$, während $e^{s\sqrt{-1}} = \cos s + \sqrt{-1}\sin s$, eine so naturgemässe Folgerung aus den Werthen von $\sin s$ und von $\cos s$, dass sie einem Euler nicht entgangen sein kann, nicht vorkommt.

Den Jahren 1742 und 1743 gehört ein Briefwechsel an, welcher für die Geschichte der Reihenlehre von Bedeutung ist, der Briefwechsel zwischen Niclaus I Bernoulli und Euler, oder richtiger gesagt, indem wir uns auf das noch Vorhandene beschränken, vier Briefe des Ersteren an den Letzteren[5]). Euler hat die Briefe beantwortet, Bernoulli nimmt auf die Antworten Bezug, aber sie scheinen sich leider nicht erhalten zu haben, sind jedenfalls nicht ver-

[1]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 177. [2]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1897 S. 48. [3]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 111. [4]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 179. [5]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 681—713.

öffentlicht. Niclaus I Bernoulli, aus dessen Briefen an Leibniz aus den Jahren 1712 und 1713 wir (S. 369—370) merkwürdig klare Anschauungen über Convergenz und Divergenz von Reihen mitzutheilen hatten, ist in diesen seinen Ansichten in den inzwischen verstrichenen 30 Jahren nur noch mehr befestigt. Er zeigt sich überhaupt in seinen Briefen als einen ungemein ideenreichen Kopf. Schreibt er doch unter dem 13. Juli 1742 in dem ersten der gedruckten Briefe an Euler[1]), er habe 1728 seinem Onkel, das ist also Johann Bernoulli, mitgetheilt, er sei bei Untersuchungen über recurrente Reihen zu der Formel $\sin s = \frac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}_{(n=\infty)}$ gelangt, und vielleicht bot diese Aeusserung für Euler den Anlass, dass er deutlicher als seither in dem oben erwähnten Aufsatze von 1743 die Sätze aussprach, zu welchen er, der 1728 erst 21 Jahre alt war, vermuthlich ziemlich viel später als Niclaus I Bernoulli, aber doch auch selbständig gekommen war.

Im zweiten Briefe vom 24. October 1742 gibt Bernoulli zwar zu[2]), man könne aus $\sin s = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots = s\left(1-\frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots$ die Folgerung $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$ ziehen, aber die erstere Gleichung erfordere zunächst den Beweis der Convergenz der Reihe $s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^6}{120} - \cdots$.

Im dritten Briefe vom 6. April 1743 schreibt Bernoulli[3]): Ich wundre mich, dass Sie mich in einer leichten, Ihnen nicht unbekannten Frage nicht verstehen sollten. Ich kann mir nicht vorstellen, dass Sie annehmen, eine divergente Reihe, welcher, auch wenn sie ins Unendliche fortgesetzt wird, immer etwas fehlt, gebe den genauen Werth des entwickelten Ausdruckes. Als Beispiel wird angeführt, es sei nicht etwa $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\infty$, sondern $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\infty + \frac{x^{\infty+1}}{1-x}$.

Auch im vierten Briefe vom 29. November 1743 kehrt der gleiche Gegenstand wieder[4]). Es heisst dort: Ich halte den Begriff einer Summe oder der Vereinigung vieler Glieder für nicht vereinbarlich mit dem Begriffe endlos weiter gehender Glieder und sehe diese beiden Begriffe als einander widersprechend an. Jener schliesst das Denken sämmtlicher Glieder, des ersten, des letzten, der mittleren

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 683. [2]) Ebenda II, 691. [3]) Ebenda II, 701—702. [4]) Ebenda II, 708—710.

ein, in diesem ist das Denken eines letzten Gliedes nicht eingeschlossen; der Geist wird vielmehr von dem Denken eines letzten Gliedes abgezogen und folglich auch von der Zusammensetzung eines Ersten, Mittleren und eines Letzten. Die Unterscheidung zwischen einem absoluten Unendlichen und einem bestimmten Unendlichen gebe ich nicht zu. Ich behaupte, jedes Unendliche, welches in Rechnung tritt, muss als ein Bestimmtes aufgefasst werden, und deshalb meine ich, dass die Eigenschaften abgeschlossener algebraischer Gleichungen, beispielsweise die Gleichheit des negativ genommenen Coefficienten des zweithöchsten Gliedes mit der Summe aller Wurzeln, keine richtige Anwendung auf Gleichungen mit endlos fortschreitenden Gliedern finde, deren keines als das Letzte betrachtet wird, Gleichungen also, bei welchen der Begriff der Anzahl ihrer Wurzeln wie der ihrer Summe fehlt. Bernoulli gibt nun Beispiele divergenter Reihen. Er bedient sich dabei einer Kürze der Ausdrucksweise, welche einem Euler gegenüber gerechtfertigt war, welche aber anderen Lesern im ersten Augenblick Schwierigkeiten bereiten könnte. Wir wollen deshalb nicht einfach übersetzen, sondern den Sinn der Beispiele erläutern. Nimmt man von der Reihe $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ erst 1 Glied, dann deren 2, 3, 4 u. s. w., so zeigen sich die Summen $1, -2, 3, -4 \cdots$. Die Summe der unendlichen Reihe $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ muss also das unendlich ferne Glied der Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ oder $-\infty(-1)^\infty$ sein. Andererseits ist durch Division $\frac{1-x}{1+2x+x^2} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + \cdots$ und mittels $x = 1$ entsteht $\frac{1-1}{1+2+1} = 0 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ als unlösbarer Widerspruch. Ein ähnlicher Widerspruch ist folgender: Durch Division ist $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ und $\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$. Setzt man in die erste Entwicklung $x = 2$, in die zweite $x = 1$, so erhält man

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

und

$$-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots.$$

Beide unendliche Reihen müssten also einander gleich sein, während, abgesehen vom Anfangsgliede 1, jedes Glied der ersten Reihe grösser als das ihm entsprechende Glied der zweiten Reihe ist. Ein letztes Beispiel bildet $\frac{1}{1-3x+x^2+2x^3} = 1 + 3x + 8x^2 + 19x^3 + 43x^4 + \cdots$. Setzt man $x = 1$, so entsteht $1 = 1 + 3 + 8 + 19 + 43 + \cdots$ d. h. die ganze Reihe ist gleich ihrem ersten Gliede, das Ganze gleich einem winzig kleinen Theile desselben.

Wir haben schon gesagt, dass Eulers Antworten keine Veröffentlichung gefunden haben, und ebensowenig Bernoullis weitere Briefe über den Gegenstand, der noch lange nicht abgethan war. Wir müssen uns statt ihrer mit einem Briefe Eulers an Goldbach begnügen, der die noch etwa anderthalbjährige Fortdauer jenes Briefwechsels mit Niclaus I Bernoulli bezeugt. Euler also berichtet an Goldbach[1]) aus Berlin unter dem 7. August 1745:

Ich habe seit einiger Zeit mit dem Herrn Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dargleichen diese ist $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 +$ etc. gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ haben, ich aber das Gegentheil behauptet, weilen ich glaube, dass eine jegliche series einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwierigkeiten, welche dagegen gemacht werden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Namen der Summ beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wenn die Summ durch eine würkliche Summirung herausgebracht würde: welche Idee bei den seriebus divergentibus nicht Statt findet. Da nun eine jegliche series aus der Evolution einer expressionis finitae entsteht, so habe ich diese neue Definition von der Summ einer jeglichen seriei gegeben: Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur. Der Herr Bernoulli hat diese Definition vollkommen approbirt, zweifelt aber noch, ob nicht öfters eben dieselbe series divergens aus verschiedener expressionum finitarum evolutione entstehen könne, also dass man nach dieser Definition verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein Exempel gegeben, ich glaube aber gewiss zu seyn, dass nimmer eben dieselbe series aus der Evolution zweyer wirklich verschiedener expressionum finitarum entstehen könne. Und hieraus folgt dann unstreitig, dass eine jegliche series, sowohl divergens als convergens einen determinirten Werth oder summam haben muss.

Für die am Anfange des Briefes angeführte Reihe $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \cdots$ gibt Euler als Summe den Werth 0,5963475922, welchen er mittels Verwandlung in einen Kettenbruch sich verschafft. Goldbachs Antwort[2]) (vermuthlich vom 25. September 1745) pflichtet Euler in allen Dingen bei und macht dabei einen Vorschlag, wie man eine divergente Reihe in eine convergente verwandeln könne. Wir werden im 112. Kapitel sehen, wie Euler auf Goldbachs Gedanken einging.

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 323 flgg. [2]) Ebenda I, 330—331.

Aus einem anderen Briefwechsel Eulers bemerken wir hier, dass Daniel Bernoulli ihm unter dem 20. September 1741 schrieb[1]): Ich habe Ew. meditata über die series gelesen; selbige sind freilich ingenios und profund, aber ich formire mir eine ganz andere Idee von den seriebus. Ich glaube nicht, dass man allhier den calculum differentialem und integralem ohne Limitation gebrauchen dürfe, weil es nicht erlaubt ist, eine seriem als quantitates continuas aut fluentes zu betrachten, indem es lauter quantitates discretae sind. Was Sie also de interpolatione terminorum sagen, ist, meiner Meinung nach, nicht proprie und stricte zu verstehen.

Wenn Daniel Bernoulli dann am 7. März 1742 sagte[2]): Die methodum series inveniendi summabiles per methodum integrationum et differentiationum hab ich schon gebraucht, ehe ich bin auf Petersburg kommen, so sehen wir keinen Widerspruch zwischen den beiden Stellen. Daniel Bernoulli hat, scheint uns, im September 1741 nicht etwa darüber Scrupel empfunden (wie man einen Augenblick glauben könnte), ob man eine unendliche Reihe differentiiren und integriren dürfe, das war ihm eine selbstverständliche Wahrheit, sondern nur darüber, ob von Reihengliedern mit nicht ganzzahlig positivem Stellenzeiger die Rede sein könne.

In seinem Briefe an Goldbach vom 7. August 1745 hatte Euler, wie wir oben sagten, von der Umwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch gesprochen. Diese Stelle benutzen wir als Brücke, um auf seither von uns Vernachlässigtes, auf die Lehre von den Kettenbrüchen überzugehen. Wir haben allerdings schon früher (zuletzt S. 97—98) derartige Ausdrücke von Mathematikern benutzt gesehen, aber die praktische Benutzung war dabei überall das Hervortretende, eine Theorie der Kettenbrüche war kaum, ein Name für dieselben überhaupt nicht vorhanden. Beides verdankt man Euler, der in zwei Abhandlungen im IX. und XI. Bande der Commentarii Academiae Petropolitanae zeigte, welches die Eigenschaften sind, um deren willen die *fractiones continuae* — das sind eben die Kettenbrüche — eine nähere Betrachtung lohnen.

In dem ersten Aufsatze *De fractionibus continuis*[3]) ist sogleich der unendliche Kettenbruch $a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \text{etc.}}}}$ definirt. Dabei erhalten alle durch griechische Buchstaben bezeichnete Zahlen den Namen Zähler, während die durch lateinische Buchstaben bezeichneten

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 476. [2]) Ebenda II, 487—488. [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 98—137.

Zahlen insgesammt (auch a mit eingeschlossen) Nenner heissen. Je nachdem man a oder $a+\frac{\alpha}{b}$ oder $a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}$ u. s. w. der Ausrechnung unterwirft, erhält man die Werthe $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+\alpha}{b}$, $\frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}$, $\frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$ u. s. w., welche abwechselnd einen kleineren und einen grösseren Betrag, als der des ganzen unendlichen Kettenbruches ist, bedeuten. Man kann dem genauen Werthe des Kettenbruches durch Fortsetzung des Verfahrens beliebig nahe kommen[1]). Zieht man den ersten so gefundenen Werth vom zweiten, den zweiten vom dritten, den dritten vom vierten u. s. w. ab, so erhält man die abwechselnd positiven und negativen Differenzen $\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$, $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$, $-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}$ u. s. w. Diese Differenzen zu a hinzugefügt geben dann selbst wieder den zweiten, dritten, vierten, fünften u. s. w. vorher ermittelten Näherungswerth, oder der Kettenbruch ist $=a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{a(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\cdots$. Hier kann man aber neuerdings zusammenfassen $\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}=\frac{\alpha c}{1(bc+\beta)}$ und ebenso je zwei aufeinanderfolgende Glieder, deren erstes positiv und deren zweites negativ ist, in eine regelmässig positive Summe. Man erhält dadurch die Umwandlung des Kettenbruches in eine heftig convergirende Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner einem nach dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Gesetze gehorchen[2]), nämlich $a+\frac{\alpha c}{1(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\cdots$. Die Raschheit der Convergenz hängt insbesondere davon ab, dass die Zähler $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ recht klein, die Nenner $a, b, c, d, e \cdots$ recht gross gewählt werden. Sind alle Zähler und Nenner ganze Zahlen, was durch Erweiterung immer hervorgebracht werden kann, so findet die rascheste Convergenz der Reihe, also auch des ihr gleichen Kettenbruches statt, wenn sämmtliche Zähler der Einheit gleich sind. Euler verwandelt

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 102: *Atque hoc modo fractionem continuam successive abrumpendo alternative valores iusto maiores et minores prodibunt; unde quantumvis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.* [2]) Ebenda T. IX, 105: *cuius numeratorum et denominatorum lex ex superiore sponte se prodit.*

nun gegebene Brüche in Kettenbrüche der letzteren Art und sucht aus ihnen wieder Näherungswerthe zum ursprünglichen Bruche in kleineren Zahlen. Als Vorgänger auf diesem Gebiete wird ausschliesslich Wallis genannt[1]), die Arbeiten von Huygens auf diesem Gebiete (S. 97—98) müssen Euler demnach unbekannt geblieben sein.

Periodische Kettenbrüche, für welche allerdings ein besonderer Name nicht angegeben ist, werden dann ausgewerthet. Aus $x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cdots}}$ wird geschlossen[2]), dass $x-a=\frac{1}{b+x-a}$ und $x=a-\frac{b}{2}+\sqrt{1+\frac{b^2}{4}}$, also z. B. $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=\sqrt{2}$, und ähnlich erkennt man den Werth eines Kettenbruches, dessen Periodicität sich über mehr als nur je einen Nenner ausdehnt, z. B. $x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots}}}}=a-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{c}{b}}$. Als wahrscheinlich erwähnt Euler bei dieser Gelegenheit[3]) die Kettenbruchentwicklungen

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}},\quad \frac{e^2-1}{2}=3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cdots}}},\quad \frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cdots}}}$$

und manche andere.

Eine Aufgabe, bei welcher gleichfalls verweilt wird, ist die der Umwandlung von Kettenbrüchen, wie der für e angegebene, bei welchem die eine arithmetische Progression bildenden Nenner 2, 4 6, 8 $\cdots$ durch andere periodisch auftretende 1, 1 unterbrochen werden, in Kettenbrüche ohne periodische Unterbrechung des Gesetzes der Nenner, z. B. in[4]) $e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cdots}}}}}}$. Endlich kommt Euler zu Be-

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 112. Vgl. auch T. XI, 39. [2]) Ebenda T. IX, 117. [3]) Ebenda T. IX, 120—122. [4]) Ebenda T. IX, 126.

ziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und gewissen Differentialgleichungen[1]), in welchen man eine ziemlich bestimmte Vorahnung des Beweises der **Irrationalität** von e und von e^2 erkannt hat[2]).

Eulers zweiter Abhandlung über Kettenbrüche hat derselbe Verfasser eine solche über **unendliche Factorenfolgen**: *De productis ex infinitis factoribus ortis*[3]) vorausgeschickt, auf die er sich alsdann bezieht. Auch der in dieser Abhandlung untersuchte Gegenstand schliesst sich der Reihenlehre eng genug an, dass wir in diesem Kapitel kurz darüber berichten dürfen, wie wir es ähnlich im vorigen Kapitel gehalten haben. Wir erinnern an Eulers Summirung reciproker Potenzreihen mit Hilfe von Factorenzerlegung (S. 658), wir erinnern insbesondere an die Untersuchungen über eine transcendente Reihe (S. 652). Wie Euler in der Abhandlung von 1730 Beziehungen zwischen Factorenfolgen und bestimmten Integralen aufdeckte, damals noch nicht alles enthüllend, was ihm bekannt war, indem er schon unter dem 13. October 1729 die Definition der Gammafunction als unendliche Factorenfolge in einem Briefe an Goldbach ausgesprochen hatte[4]), bilden solche Beziehungen auch den wesentlichen Inhalt des Aufsatzes von 1739. **Euler** entnimmt[5]) hier der älteren Veröffentlichung die Formeln $(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)$

$$= \frac{g^{n+1}\int\limits_0^1 (-\log x)^n dx}{(f+(n+1)g)\int\limits_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n dx} \text{ und } \int\limits_0^1 \sqrt{-\log x}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

aus welchen er dann weitere Folgerungen zieht. Wir erwähnen von letzteren[6]) die Formeln $\frac{\pi}{2ag} = \int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^{a+g-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$, $\frac{\pi}{2g} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^g dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$, so wie mancherlei Factorenfolge als Auswerthung bestimmter Integrale von der Gestalt $\int\limits_0^1 \frac{x^a dx}{\sqrt[c]{1-x^b}}$.

Wir haben gesagt, dass **Euler** in seiner zweiten Abhandlung

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 129 sqq.
[2]) **Pringsheim**, Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. (Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissensch. Mathem.-physik. Classe XXVIII, 325 bis 337. 1. August 1898).
[3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 3—31.
[4]) *Corresp. math.* (**Fuss**) I, 3—4.
[5]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 5 und 7.
[6]) Ebenda T. XI, 10, 11, 27.

über Kettenbrüche: *De fractionibus continuis observationes*[1]) sich auf diese Ergebnisse beziehe. Zu Anfang ist allerdings von bestimmten Integralen keine Rede, sondern der Kettenbruch $A + \cfrac{B}{C + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{G + \cfrac{H}{I + \cdots}}}}$ wird als identisch mit der Reihe $A = \frac{B}{1 \cdot P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \cdots$ erklärt, welche, so oft die $A, B, C, D \cdots$ alle positiv, im Uebrigen aber beliebig abnehmend oder wachsend sind, da $P = C$, $Q = EP + D$, $R = GQ + FP$, $S = IR + HQ \cdots$ ist, als convergent sich erweise, weil jedes folgende Glied kleiner als das ihm vorhergehende werde. Wir bemerken beiläufig, dass die Behauptung der Abnahme der Glieder an sich richtig ist, da z. B. $\frac{BDFH}{RS} : \frac{BDF}{QR} = \frac{HQ}{S} = \frac{HQ}{IR+HQ} < 1$, dass aber sie allein für die Convergenz der betreffenden Reihe trotz des von Glied zu Glied wechselnden Vorzeichens nicht ausreicht. Dazu wäre nothwendig, dass die Glieder beim Abnehmen unter jeden angebbaren Werth sinken, was bei der Allgemeinheit, in welcher $A, B, C, D \cdots$ gewählt werden dürfen, keineswegs sicher ist. Euler kümmert sich darum nicht, sondern zeigt nun rückwärts die Verwandlung der Reihe $\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS}$ in den Kettenbruch $\cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \cdots}}}}$ und der Reihe $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} - \cdots$ in den Kettenbruch $\cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq - bp + \cfrac{acq^2}{br - cq + \cfrac{bdr^2}{cs - dr + \cdots}}}}$ von welcher Beispiele gerechnet werden. Eine eben solche Reihe ist aber nicht selten das Ergebniss einer bestimmten Integration, und auf diesem Umwege kommt Euler dazu, ein bestimmtes Integral durch einen unendlichen Kettenbruch auszudrücken. Beispielsweise[2]) ist

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}} = \cfrac{1}{m + \cfrac{\mu n^2}{\nu m + (\nu-\mu)n + \cfrac{\nu(\mu+\nu)(m+n)^2}{(3\nu-\mu) + (\nu-\mu)n + \cfrac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+n)^2}{(5\nu-2\mu) + (\nu-\mu)n + \cdots}}}}$$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 32—80.
[2]) Ebenda T. XI, 36.

Eine andere Gedankenreihe führt zu folgenden Betrachtungen. Wallis hatte, wo er Brounckers Kettenbruch für π (Bd. II, S. 766) mittheilte, den Satz ausgesprochen, dass a^2 das Product der beiden unendlichen Kettenbrüche $(a-1)+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\cdots}}}$ und $(a+1)+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)+\cdots}}}$ sei, und Euler hatte schon in der ersten Kettenbruchabhandlung an dieses Ergebniss erinnert[1]). Jetzt kam er neuerdings auf den gleichen Satz zurück[2]). Gestatten wir uns (was Euler nicht thut) die abgekürzte Bezeichnung $K_\lambda = (a+\lambda)+\cfrac{1}{2(a+\lambda)+\cfrac{9}{2(a+\lambda)+\cfrac{25}{2(a+\lambda)+\cdots}}}$, so heisst der von Wallis ausgesprochene Satz $K_{-1}\cdot K_1 = a^2$, und ihm stehen augenscheinlich beliebig viele ähnliche Sätze zur Seite, welche man erhält, indem man a durch $a+2$, durch $a+4$, durch $a+6 \cdots$ ersetzt. So ist demnach

$$\begin{aligned} K_{-1}\cdot K_1 &= a^2 \\ (a+2)^2 &= K_1\cdot K_3 \\ K_3\cdot K_5 &= (a+4)^2 \\ (a+6)^2 &= K_5\cdot K_7 \end{aligned}$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen, wie sie unter einander stehen und Weglassung der auf beiden Seiten vorhandenen Factoren K_1, K_3, K_5 findet man $(a+2)^2\cdot(a+6)^2 K_{-1} = a^2\cdot(a+4)^2 K_7$, also auch $K_{-1} = a\cdot\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+6}\cdot\frac{K_7}{a+6}$.

Euler nimmt nun an, ohne diese Annahme ausdrücklich in Worte zu kleiden, dass man die Schlüsse fortsetze, bis rechts als letzter Factor $\frac{K_{4\mu+3}}{a+4\mu+2}$ erscheint, und dass dieser letzte Ausdruck sich bei wachsendem μ nicht mehr von der Einheit unterscheidet. So erhält er $K_{-1} = a+1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\cdots}}} = a\cdot\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+2}\cdot$

1) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 101.
2) Ebenda 1739. T. XI, 40.

$\frac{a+4}{a+6}\cdot\frac{a+8}{a+6}\cdots$. Den in der Abhandlung über unendliche Factorenfolgen gewonnenen Ergebnissen entnimmt nunmehr Euler, dass

$$\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+6}\cdot\frac{a+8}{a+6}\cdots = \frac{\int_0^1 x^{a+1}dx : \sqrt{1-x^4}}{\int_0^1 x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^4}}$$

und somit ist der wiederholt von uns definirte Kettenbruch K_{-1} das a-fache des eben angegebenen Quotienten zweier bestimmter Integrale.

Auch an verwandten Kettenbrüchen werden ähnliche Kunstgriffe geübt, so dass der Kettenbruch zunächst in eine Factorenfolge, dann in einen Quotienten zweier bestimmter Integrale umgewandelt erscheint. Durch Einsetzung besonderer Werthe zeigt sich[1])

$$\frac{\pi}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cdots}}}},$$

Als weitere Aufgabe stellt sich dann vor die Augen, derartige bestimmte Integrale $\int_0^1 P dx$ und $\int_0^1 PR dx$ zu finden, dass ihr Quotient sich als unendlicher Kettenbruch darstellen lasse, eine Aufgabe, welche Euler gleichfalls in ziemlicher Allgemeinheit löst[2]), um alsdann wieder besondere Beispiele der Rechnung zu unterwerfen.

111. Kapitel.

Eulers Introductio. Band I.

Zahlreiche Abhandlungen hatten Euler schon allbekannt gemacht, auch seine als besondere Bände gedruckten *Mechanica* von 1736 und *Methodus inveniendi* von 1744, von welch letzterer im 117. Kapitel die Rede sein wird, waren in den Händen derjenigen Mathematiker, welche im Stande waren, den damals höchsten Gebieten ihrer Wissenschaft Geschmack abzugewinnen. Da erschien

1) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 48.
2) Ebenda T. XI, 59 sqq.

1748 Eulers *Introductio in analysin infinitorum*[1]), von De Castillon während des in Lausanne stattfindenden Druckes beaufsichtigt (S. 509), und dieses Werk gab erst dem Namen Leonhard Eulers den volksthümlichen Klang, der ihm vermuthlich für alle Zeiten anhaftet.

Ein umfangreiches Vorwort, allzuumfangreich, um es hier abzudrucken, was sein Wortlaut eigentlich verdiente, erörtert die Absicht, welche der Veröffentlichung zu Grunde lag. Euler will zusammenstellen, was zu wissen bei Erlernung der Infinitesimalrechnung nothwendig oder wenigstens wünschenswerth sei, man könnte vielleicht sagen, was überhaupt ohne Infinitesimalrechnung erworben werden kann, und er geht darin viel weiter, als man es gewohnt war. Er schuf, um eine moderne Benennung anzuwenden, ein Lehrbuch der algebraischen Analysis sowie ein eben solches der analytischen Geometrie.

Der I. Band der Introductio oder die algebraische Analysis zerfällt in 13 Kapitel, über welche wir in denkbarer Kürze berichten wollen. Wir bemerken dabei ein für alle Mal, dass Euler es liebt, den Gang seiner Untersuchungen durch geschickt gewählte, lehrreiche Beispiele zu unterbrechen.

Das 1. Kapitel, Von den Functionen überhaupt, erklärt die Function einer veränderlichen Zahlengrösse als einen analytischen Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlengrösse, d. h. einer unbestimmten, allgemeinen Zahlengrösse, welche alle bestimmten Werthe ohne Ausnahme in sich begreift, und aus constanten Zahlengrössen zusammengesetzt ist. Die Function einer Veränderlichen ist wieder eine Veränderliche. Sie zerfällt in verschiedene Unterarten. Algebraische Functionen stehen im Gegensatz zu Transcendenten, unter den algebraischen Functionen werden rationale von irrationalen, unter den rationalen ganze von gebrochenen unterschieden. Eine sich anknüpfende Sonderung betrifft eindeutige und mehrdeutige Functionen[2]). Zur Bezeichnung einzelner eindeutiger Functionen dienen grosse Buchstaben wie P, Q, R, S, T. Des weiteren wird von graden und ungraden Functionen gesprochen. Jene behalten ihren Werth, mag man ihre Veränderliche $= +k$ oder $= -k$ setzen, diese nehmen durch die beiden erwähnten Substitutionen entgegengesetzte Werthe an. Aehnliche Functionen von y und z nennt man Y und Z, wenn Y auf eben

[1]) Eine deutsche Uebersetzung von Johann Andreas Christian Michelsen (Berlin 1788) hat den ursprünglichen 2 Bänden noch einen 3. Band Anmerkungen und Zusätze beigefügt, beziehungsweise 1791 folgen lassen. Eine deutsche Uebersetzung von H. Maser (Berlin 1885) enthält nur den 1. Band der Introductio. [2]) *Functiones uniformes, multiformes.*

die Art durch y und constante Zahlengrössen bestimmt wird, wie Z durch z und constante Zahlengrössen.

Das 2. Kapitel, Von der Umformung der Functionen, unterscheidet zunächst zwei Gattungen von Umformungen, je nachdem dieselbe Veränderliche beibehalten oder eine andere Veränderliche an Stelle der ersten eingeführt wird. Bleibt die Veränderliche, so bleibt auch die Art der Abhängigkeit ihrer Function von derselben, nur können vielleicht in der neuen Gestalt manche Eigenschaften deutlicher hervortreten. In dieser Beziehung ist die Zerlegung einer ganzen algebraischen Function in einfache Factoren von besonderer Wichtigkeit. Eine ganze Function Z von z, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von z gleich n ist, wird n einfache Factoren enthalten, was ohne Weiteres daraus gefolgert wird, dass $f + gz + hz^2$ in zwei, $f + gz + hz^2 + iz^3$ in drei einfache Factoren, d. h. in solche zerlegbar sei, in welchen z nur in erster Potenz vorkomme. Man findet die einfachen Factoren von Z, indem man die Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ aufsucht. Aus jedem Wurzelwerthe entspringt ein einfacher Factor der Function Z. Die einfachen Factoren des reellen Productes Z sind theils reell, theils imaginär. Letztere treten immer in grader Anzahl auf, und zwei imaginäre einfache Factoren vereinigen sich dann zu einem reellen Factor 2[ten] Grades, den man auch einen reellen zweifachen Factor nennt. Die ganze Function Z von z ist eindeutig. Wird $Z = A$ bei $z = a$ und $Z = B$ bei $z = b$, d. h. geht Z von A in B über, während z von a in b übergeht, so kann ersterer Uebergang nicht anders als durch alle zwischen A und B gelegene Zwischenwerthe hindurch erfolgen, d. h. es muss einen zwischen $z = a$ und $z = b$ gelegenen Werth $z = c$ geben, der $Z = C$ hervorbringt, wenn C zwischen A und B liegt. Mit anderen Worten, wenn $Z - A = 0$ und $Z - B = 0$ je eine reelle Wurzel besitzt, so muss, wenn $A < C < B$ oder $A > C > B$ ist, auch $Z - C = 0$ eine reelle Wurzel besitzen. Ist beispielsweise Z von ungrader Höhe, d. h. $Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \cdots$, so bewirkt $z = \infty$, dass $Z = \infty$ und $z = -\infty$, dass $Z = -\infty$ wird, mithin haben $Z - \infty$ und $Z + \infty$ je einen bekannten reellen einfachen Factor $z - \infty$ und $z + \infty$. Alsdann muss auch $Z - 0 = Z$ einen reellen einfachen Factor besitzen oder $z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \cdots = 0$ hat mindestens eine reelle Wurzel. Die Gleichung $Z = z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \cdots \pm \nu z - A = 0$ mit positivem A hat mindestens zwei reelle Wurzeln. Die Annahmen $z = -\infty$ und $z = 0$ liefern nämlich $Z = \infty$ und $Z = -A$, zwischen welchen $Z = 0$ liegt, welches durch irgend ein negatives $z = -c$ erzeugt werden muss. Andererseits liefern $z = 0$ und $z = \infty$ die Werthe $Z = -A$ und $Z = \infty$, zwischen welchen abermals $Z = 0$ liegt, welches durch irgend ein positives $z = d$ erzeugt werden muss. Das sind lauter Sätze, auf welche Euler 1749 zurückkam (S. 602). Nun kommt die Zerfällung einer echtgebrochenen Function in Partialbrüche an die Reihe. Der einfachste Fall $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p - qz)S}$, wo S den einfachen Factor $p - qz$ nicht weiter erhält, wird erledigt durch die Annahme $\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S}$ oder $M = AS + (p - qz)P$, woraus $A = \frac{M - (p - qz)P}{S}$ folgt. Hierein setzt man (weil A eine Constante ist, darf man das) $p - qz = 0$ und erhält $A = \frac{M}{S}_{(p - qz = 0)}$. Der verwickeltere Fall, dass $p - qz$ mehr als einmal als Factor in N vorkomme, und dass also Partialbrüche mit den Nennern $p - qz$, $(p - qz)^2$, $(p - qz)^3 \ldots$ zu ermitteln sind, beschliesst das Kapitel.

Das 3. Kapitel, Von der Umformung der Functionen durch Substitution, hat die Rationalisirung irrationaler Ausdrücke zum Zweck. So wird $y = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$ durch $(a + bz)^{\frac{1}{n}} = x$ in rationale Gestalt übergeführt. Ebenso wird $\left(\frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}\right)^n = \left(\frac{a + bz}{c + dz}\right)^m$ durch rationale Werthe von z und y erfüllt, indem man den beiden Ausdrücken gemeinsamen Werth in die Gestalt x^{mn} kleidet. Bei $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)}$ setzt Euler $\frac{c + dz}{a + bz} = x^2$, $z = \frac{c - ax^2}{bx^2 - d}$, worauf $y = (a + bz)x = \frac{(bc - ad)x}{bx^2 - d}$ wird. Eine andere Methode der Rationalisirung von $y = \sqrt{p + qz + rz^2}$ besteht darin, dass $y = xz + \sqrt{p}$ oder auch $y = x + \sqrt{r}\,z$ gesetzt wird, je nachdem p oder r positiv ist. Sind beide Constanten p und r negativ, und ist zugleich $q^2 \leq 4pr$, so ist y wesentlich imaginär. Ist dagegen p und r negativ, aber $q^2 > 4pr$, so ist man im Stande $p + qz + rz^2 = (a + bz)(c + dz)$ zu setzen, wie vorher gelehrt wurde. Neben dieser ersten Anwendung von Substitutionen lehrt alsdann Euler eine zweite, welche darin besteht, dass er, wenn eine Gleichung zwischen y und z vorliegt, eine dritte Hilfsveränderliche x wählt und Beziehungen zwischen y und x sowie zwischen z und x aufsucht, vermöge deren die ursprüngliche Gleichung erfüllt wird. Sei z. B. $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$, so setzt Euler zunächst $y = x^m z^n$ und erhält $ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^\beta + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0$ und es kommt darauf an, n so zu wählen, dass aus der neuen Gleichung z in x gefunden werden kann. Dazu liegen drei Wege vor. Erstens kann $\alpha n = \beta$, $n = \frac{\beta}{\alpha}$ gesetzt werden, dann ist nach Division durch z^β die weitere Behandlung

augenscheinlich. Zweitens kann $\gamma n + \delta = \beta$, $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$ gesetzt und abermals durch z^β dividirt werden. Drittens kann $\alpha n = \gamma n + \delta$, $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$ gesetzt und durch $z^{\alpha n}$ dividirt werden. Andere Beispiele erfordern und gestatten andere Kunstgriffe.

Das 4. Kapitel, Von der Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen, ist schon durch den einleitenden Paragraphen, welcher zeigt, wie Euler über Reihenentwicklungen dachte, von höchster Bedeutung. Die Natur transcendenter Functionen, sagt Euler, dürfte sogar besser zu erkennen sein, sobald dieselben in einer solchen, wenn auch ins Unendliche fortlaufenden Form ausgedrückt sind. Denn ebenso wie die Natur einer ganzen Function am besten dann erkennbar ist, wenn sie nach Potenzen von z entwickelt, also auf die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ gebracht ist, so ist auch diese Form, selbst wenn die Anzahl der Glieder unendlich gross ist, am geeignetsten, um sich von der wesentlichen Beschaffenheit aller anderen Functionen eine klare Vorstellung zu bilden. Wir dürfen bei dieser Gelegenheit an die Bemerkung erinnern, welche wir (S. 465) an Newtons Integration durch unendliche Reihen knüpften. Wenn wir dort eine nur unbewusste Verwandtschaft mit heutigem Denken zu erkennen vermochten, so ist Eulers Aeusserung von ganz anderer Natur. Mag ihm, wie wir mehr als nur einmal gesagt haben und künftig zu wiederholen haben werden, das Gefühl für die Anforderungen, welche die Mathematik an die von ihr zu benutzenden unendlichen Reihen zu stellen hat, mehr abgegangen sein, als dieses bei Newton der Fall war, den analytischen Nutzwerth der Reihen, wenn wir so sagen dürfen, klar ausgesprochen zu haben, ist Eulers Verdienst. Die einfachste Art der Reihenentwicklung ist die der Division bei Umwandlung eines Bruches, und sie erzeugt die recurrente Reihe, deren Namen und erste Untersuchung nach Eulers Aussage De Moivre angehöre. Jene Umwandlung selbst braucht nicht durch Division vollzogen zu werden. Sie erfolgt besser durch Multiplication des Bruchnenners mit einer versuchsweise unter Benutzung unbestimmter Coefficienten aufgestellten unendlichen Reihe. Euler setzt z. B. $\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und erhält $a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots) = \alpha A + (\alpha B + \beta A)z + (\alpha C + \beta B)z^2 + (\alpha D + \beta C)z^3 + \cdots$, woraus neben $A = \frac{a}{\alpha}$ die einander vollständig ähnlich gebauten, die Recursion vermittelnden Gleichungen $0 = \alpha B + \beta A$, $0 = \alpha C + \beta B$, $0 = \alpha D + \beta C \cdots$ hervorgehen. In wesentlich übereinstimmendem Verfahren wird sodann

$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und $a + bz = (\alpha + \beta z + \gamma z^2)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots) = \alpha A + (\alpha B + \beta A)z + (\alpha C + \beta B + \gamma A)z^2 + (\alpha D + \beta C + \gamma B)z^3 + \cdots$ gesetzt, woraus erstlich die zwei Coefficienten $A = \frac{a}{\alpha}$, $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$ und ferner die unmittelbar nur α, β, γ aber nicht a, b enthaltenden Recursionsgleichungen $0 = \alpha C + \beta B + \gamma A$, $0 = \alpha D + \beta C + \gamma B \cdots$ entstehen. Je mehr Glieder der Nenner $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots$ besitzt, um so zahlreicher sind die Glieder der einzelnen Recursionsgleichungen, und die von den Coefficienten des Zählers $a + bz + \cdots$ abhängenden Zahlen A, $B \cdots$ mehren sich in gleicher Weise. Voraussetzung des Verfahrens ist ein von Null verschiedenes α, da sonst die Entwicklung mit $A = \frac{a}{\alpha} = \infty$ beginnen müsste. Unter der gleichen erfüllten Voraussetzung einer von Null verschiedenen Anfangsconstante des Nenners wird auch der Bruch in eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende recurrente Reihe verwandelt, dessen Nenner die n^{te} Potenz von $1 - \alpha z$ ist, während im Zähler Glieder bis zur Höhe von z^{n-1} vorkommen. Setzt man nach vollzogener Entwicklung $\alpha = z = 1$, so geht die Reihe in eine arithmetische Progression $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung über, welche somit auch eine recurrente Reihe ist. Euler geht alsdann zur Entwicklung von Ausdrücken über, deren Nenner eine Potenz des Polynoms $1 - \alpha z - \beta z^2 - \cdots$ ist, ferner zu dem bis dahin ausgeschlossenen Falle, dass die Anfangsconstante des Nenners Null wird, und den er dadurch erledigt, dass er z, oder welche Potenz z^μ von z dem wirklich vorhandenen Anfangsgliede des Nenners angehört, als Factor heraussetzt. Dann ist die ohne Berücksichtigung dieses Factors entwickelte Reihe noch durch z^μ zu dividiren. Sie behält dabei ihren Charakter als eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Entwicklung, beginnt aber mit $\frac{A}{z^\mu}$. Nun folgen die Reihen für $(P + Q)^{\frac{m}{n}}$ und allgemeiner für die $\frac{m}{n}^{\text{te}}$ Potenz von Polynomen. Von einem Beweise ihrer Richtigkeit ist keine Rede. Der Binomialsatz und Polynomialsatz tritt bei gebrochenem Exponenten in Anwendung, als wenn es sich von selbst verstände.

Im 5. Kapitel, Von den Functionen zweier oder mehrerer Veränderlichen, fällt das Hauptgewicht auf die homogenen Functionen, deren Name 1726 von Johann Bernoulli[1]) eingeführt worden war. Ist V eine homogene Function n^{ter} Dimension von y und z, so wird die Substitution $y = uz$ zu dem Producte von z^n in eine Function von u führen. Ist $n = 0$, d. h. ist V eine Function nullter Dimension von y und z, so wird, wegen $z^0 = 1$, die Substitution $y = uz$ dahin führen, dass V als Function von u allein erscheint.

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae* T. I, abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* III, 108—124: *De integrationibus aequationum differentialium.* In § IX dieser Abhandlung heisst es: . . . *p et q designant functiones rationales et homogeneas indeterminatarum x et y utcumque inter se complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatae in singulis terminis eandem habeant exponentium summam propter quod functiones, quae ita sunt comparatae, . . . voco homogeneas.*

Das 6. Kapitel, Von den Exponentialgrössen und den Logarithmen, schildert das Wesen der genannten Functionen, wobei die Behauptung auftritt, ausser den Potenzen der Basis a gebe es keine Zahl b mit rationalem Logarithmus, nebst dem unbewiesenen Zusatze, der Logarithmus von b könne auch keine irrationale Zahl sein und müsse deshalb zu den Transcendenten gerechnet werden. Von den zur Anwendung der Logarithmen eingeschalteten Beispielen nennen wir zwei. Einmal fragt Euler, wie gross nach 100 Jahren die Bevölkerung eines Landes sein werde, welche jetzt aus 100 000 Menschen bestehe und sich jährlich um ihren dreissigsten Theil vermehre. Wir erkennen hier einen Vorläufer der schon (S. 360) erwähnten Untersuchungen Eulers von 1760 über Bevölkerungsverhältnisse. Ein andermal fragt Euler nach der Anzahl x der Jahre, welche zur Tilgung einer mit p Procent verzinslichen Schuld a erforderlich sei, wenn jährlich für Zins und Rückzahlung die Summe b verwandt werde. Unter Benutzung der Abkürzung $\frac{100+p}{100} = n$ findet Euler die Gleichung $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$, welche man neuerdings die Amortisationsgleichung zu nennen liebt, und folgert aus ihr $x = \frac{\log b - \log(b - (n-1)a)}{\log n}$.

Das 7. Kapitel, Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen, gibt seinen Inhalt durch die Ueberschrift aufs Deutlichste an. Der Gedankengang ähnelt sehr dem, welchen Halley 1695 eingeschlagen hatte (S. 85), ohne dass auf diesen Schriftsteller verwiesen wäre. Wir haben dieses Schweigen wohl weniger daraus zu erklären, dass Euler Halleys Abhandlung nicht gekannt hätte, als wahrscheinlicher daraus, dass er Dinge, welche seit mehr als fünfzig Jahren der Oeffentlichkeit angehörten, als wissenschaftliches Gemeingut betrachtete, von welchem Jeder ohne Quellenangabe Gebrauch machen dürfe. Sei a, die Basis des zu wählenden Logarithmensystems, grösser als 1, sei ferner ω eine unendlich kleine positive Zahl, so wird $a^{\omega} = 1 + \psi$, wo ψ gleichfalls positiv unendlich klein ist und etwa $= k\omega$ gesetzt werden darf. Ist $a^{\omega} = 1 + k\omega$, so ist $\omega = \log(1 + k\omega)$ in dem Logarithmensysteme von der Basis a. Erhebt man $a^{\omega} = 1 + k\omega$ auf die i^{te} Potenz mit vorläufig beliebigem i, so wird $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i = 1 + ik\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} k^2\omega^2 + \cdots$. Ist aber $i = \frac{z}{\omega}$ und z endlich, so wird $i = \infty$, zugleich aber auch $\omega i = z$ und $\omega = \frac{z}{i}$. Diese Substitutionen liefern $a^z = 1 + kz + \frac{i-1}{1 \cdot 2 \cdot i} k^2 z^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i^2} k^3 z^3 + \cdots$. Bei $i = \infty$ streichen sich die in den Zählern und Nennern auftretenden i enthaltenden Factoren gegen einander, und man erhält $a^z = 1 + kz + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ mit endlichen a, k, z. Wird vollends $z = 1$, so zeigt sich der zwischen a und k obwaltende Zusammenhang $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots$. Der Ausdruck $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i$, welcher, wie wir sahen, den Werth 1 übersteigt, kann als $1 + x$ bezeichnet werden. Alsdann ist einerseits $\omega i = \log(1 + x)$, andererseits $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$, $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$, $\omega i = \frac{i}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right] = \frac{i}{k}\left[\frac{1}{i}x - \frac{i-1}{1 \cdot 2 \cdot i^2}x^2 + \frac{(i-1)(2i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i^3}x^3 - \cdots\right] = \frac{1}{k}\left[x - \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{i-1}{i} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{(i-1)(2i-1)}{i^2} - \cdots\right]$. Bei $i = \infty$ vereinfachen sich wieder die i im Zähler und im Nenner mit sich führenden gebrochenen Coefficienten, und mit Benutzung von $\omega i = \log(1 + x)$ erhält man $\log(1 + x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$. Diese Reihe verhilft alsdann zur Ermittelung von k aus a, was aus $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ nicht zu erreichen war. Sei nämlich $1 + x = a$, $x = a - 1$, $\log(1 + x) = \log a = 1$, so geht die Reihe über in $1 = \frac{1}{k}\left[\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots\right]$, beziehungsweise in $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots$. Bei $a = 10$ wird $k = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \cdots$ eine Reihe, von welcher Euler in fast naiver Weise sagt, es sei schwer einzusehen, wie sie den Werth 2,30258 haben könne[1]). Dazu gelangt er durch folgende Schlüsse. Neben $k \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ wird bei negativ gewähltem x auch

[1]) Euler, *Introductio* I, § 120 am Schlusse.

$k \log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$ sein, und Subtraction führt zu $\frac{k}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$. Jetzt setzt Euler $\frac{1+x}{1-x} = a$, wodurch $\log\frac{1+x}{1-x} = 1$ und $x = \frac{a-1}{a+1}$ wird. Dann zeigt sich $\frac{k}{2} = \frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots$ und bei $a = 10$ die rasch zur Ermittelung des entsprechenden k führende Reihe $\frac{k}{2} = \frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \cdots$. Wird aber k als bekannt angenommen, z. B. $k = 1$, so geht $1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ in $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ über, einen Werth, der durch e bezeichnet die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen heisst, und den Euler auf 23 Decimalstellen berechnet angibt. Durch $a = e$, $k = 1$ geht $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i$ über in $e^{\omega i} = (1 + \omega)^i$, und da bei $\omega i = z$, $\omega = \frac{z}{i}$ war, so hat man $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i_{(i=\infty)}$. Wir bemerken dabei beiläufig, dass der Sonderfall $\left(1 + \frac{1}{A}\right)^A_{(A=\infty)} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ schon am 30. Januar 1728 im Besitze von Daniel Bernoulli war, der ihn damals brieflich Goldbach mittheilte[1]).

Das 8. Kapitel, Von den transcendenten Zahlengrössen, welche aus dem Kreise entspringen, nimmt die auf 127 Decimalstellen angegebene Zahl π und die trigonometrischen Functionen in Untersuchung. Mittels der bekannten Formeln für den Sinus und den Cosinus zusammengesetzter Winkel kommt Euler leicht zu den Gleichungen

$$\sin(2y + z) = 2\cos y \sin(y + z) - \sin z$$
$$\cos(2y + z) = 2\cos y \cos(y + z) - \cos z,$$

welche Recursionen darstellen, deren Fortgang einleuchtet, wenn z durch $y + z$ ersetzt wird, was beliebig oft geschehen kann. Auch bei Ausführung der Multiplication $(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y + z) + \sqrt{-1}\sin(y + z)$ bedient sich Euler der Formeln $\cos y \cdot \cos z - \sin y \cdot \sin z = \cos(y + z)$; $\cos y \cdot \sin z + \sin y \cdot \cos z = \sin(y + z)$. Die fortgesetzte Multiplication führt allmählich zu $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$, mit n als ganzer positiver Zahl, was Euler allerdings zu betonen unterlässt, und dann weiter zu $2\cos nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 246.

und zu $2\sqrt{-1}\sin nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$. Die Binomialentwicklung der hier vorkommenden n^{ten} Potenzen liefert Werthe von $\cos nx$ und von $\sin nx$ ausgedrückt durch Producte von Potenzen von $\cos z$ und von $\sin z$

$$\cos nz = \cos z^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos z^{n-2}\sin z^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos z^{n-4}\sin z^4 - \cdots$$
$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos z^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos z^{n-3}\sin z^3$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{1\cdot 2\cdots 5}\cos z^{n-5}\sin z^5 - \cdots.$$

Ist $nz = v$ und dabei n unendlich gross, z unendlich klein, so kann $\cos z = 1$, $\sin z = z = \frac{v}{n}$ gesetzt werden nebst denjenigen Veränderungen der auftretenden Brüche in Bezug auf n, welche im vorhergehenden Kapitel benutzt waren. Man erhält die Reihen $\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$, $\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$. Werden diese Reihen benutzt, um die Sinus und Cosinus von Bögen unterhalb $\frac{\pi}{6}$ $(= 30^0)$ zu berechnen, so findet man, da $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und somit $\sin(30^0 + z) = \cos z - \sin(30^0 - z)$ nebst $\cos(30^0 + z) = \cos(30^0 - z) - \sin z$, von den Functionen der kleineren Winkel aus mit Leichtigkeit die der grösseren. Die gleiche Substitution $nz = v$ mit $n = i$ (*infinitum*, unendlichgross), $z = \frac{v}{i}$ lässt die für $2\cos nz$ und für $2\sqrt{-1}\sin nz$ gefundenen Formeln in folgende übergehen: $2\cos v = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ und $2\sqrt{-1}\sin v = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$. Nun war aber $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, mithin ist auch $e^{v\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$, $e^{-v\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ und $\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$, $\sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $e^{\pm v\sqrt{-1}} = \cos v \pm \sin v\sqrt{-1}$. Ferner war im natürlichen Logarithmensysteme $\log(1 + x) = i\left((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$. Ersetzt man $1 + x$ zuerst durch $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, dann durch $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$ und zieht beide Ergebnisse von einander ab, so entsteht $\log(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) - \log(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z} = i\Big[(\cos z +$

$\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}\Big]$. Wiewohl vorhin die Herleitung der Formel $2\sqrt{-1}\sin nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$ die Nothwendigkeit eines positiven ganzzahligen n mit sich führte, welche wir deshalb besonders hervorhoben, nimmt Euler nicht den geringsten Anstand $n = \frac{1}{i}$ zu setzen, und er gelangt damit zu $2\sqrt{-1}\sin\frac{z}{i} = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}$ beziehungsweise zu $\log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z} = 2\sqrt{-1}\cdot i\cdot\sin\frac{z}{i}$. Wird $i = \infty$, so geht $i\sin\frac{z}{i}$ in $i\cdot\frac{z}{i} = z$ über, und man erhält $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}$ oder eine Gleichung, welche den Logarithmen einer imaginären Zahl auf einen Kreisbogen zurückführt. Der logarithmirte Bruch kann auch durch $\cos z$ gekürzt werden, worauf $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tng} z}{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tng} z}$ entsteht. Im 7. Kapitel war $\frac{1}{2}\log\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ gefunden worden. Einsetzung von $x = \sqrt{-1}\operatorname{tng} z$ liefert $\frac{1}{2}\log\frac{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tng} z}{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tng} z} = \sqrt{-1}\left(\frac{\operatorname{tng} z}{1} - \frac{\operatorname{tng} z^3}{3} + \frac{\operatorname{tng} z^5}{5} - \cdots\right)$, also auch $z = \frac{\operatorname{tng} z}{1} - \frac{\operatorname{tng} z^3}{3} + \frac{\operatorname{tng} z^5}{5} - \cdots$ beziehungsweise mittels $\operatorname{tng} z = t$, $z = \operatorname{arctg} t$ auch $\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots$. Diese zahlreichen Ergebnisse des 8. Kapitels sind, wie kaum hervorgehoben zu werden braucht, weder in einwandfreier Weise erworben, noch einzeln genommen neu. Johann Bernoulli hatte 1702 den Zusammenhang zwischen einem Arcustangens und dem Logarithmen einer imaginären Zahl erkannt (S. 362), James Gregory besass 1671 die Reihe für $\operatorname{arctg} t$ (S. 75), Leibniz hat deren besonderen Fall $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ gefunden (S. 79). Machin hat 1706 eine zur praktischen Anwendung vortheilhaftere Reihe für $\frac{\pi}{4}$ veröffentlicht (S. 364). Euler selbst hat 1737 eine Anzahl von Reihen zur Berechnung von π in den Druck gegeben (S. 668). Jetzt kam er in der Introductio auf die Umformung der Arcustangensreihe zurück. Ausgehend von $\operatorname{tng}(a + b) = \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} b}{1 - \operatorname{tng} a\cdot\operatorname{tng} b}$ und von $\operatorname{tng}\frac{\pi}{4} = 1$ findet er, dass, wenn $a + b = \frac{\pi}{4}$ ist, $1 = \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} b}{1 - \operatorname{tng} a\cdot\operatorname{tng} b}$ sein muss und $\operatorname{tng} b = \frac{1 - \operatorname{tng} a}{1 + \operatorname{tng} a}$.

Mithin ergibt sich aus $\operatorname{tng} a = \frac{1}{2}$ ein $\operatorname{tng} b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ und $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, worauf zweimalige Anwendung der Arcustangensreihe eintritt.

Das 9. Kapitel, Untersuchung der trinomischen Factoren, kehrt zu dem Gegenstande des 2. Kapitels zurück. Dort war von den reellen einfachen Factoren und von den paarweise auftretenden imaginären Factoren einer ganzen reellen algebraischen Function die Rede, welche letztere einander zu einem reellen trinomischen Factor vervielfachen, und auf sie wendet Euler nunmehr sein Augenmerk. Das Trinom $p - qz + rz^2$ besteht aus zwei imaginären einfachen Factoren, wenn $4pr > q^2$ oder $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$ ist. Jede Zahl, welche kleiner als 1 ist, kann als ein Cosinus gedacht werden, z. B. $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos\varphi$ als Merkmal, dass $p - qz + rz^2$ aus imaginären einfachen Factoren entstand. Das Trinom heisst alsdann $p - 2\cos\varphi\sqrt{pr}\,z + rz^2$ oder wenn p durch p^2 und r durch q^2 ersetzt wird, $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2 = [qz - p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]\cdot[qz - p(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)]$, und die ganze algebraische Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \cdots$, auf deren Zerlegung es ankommt, muss verschwinden, sowohl wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ als auch wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$ eingesetzt wird, was unter Benutzung von $(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi$ zu geschehen hat. Diese allgemeinen Vorbemerkungen leiten über zur Zerlegung von $a^n + z^n$, bei welcher die beiden Fälle eines ungraden und eines graden n unterschieden werden. Ist n ungrad, so hat $a^n + z^n$ ausser dem Factor $a + z$ noch $\frac{n-1}{2}$ trinome Factoren, ist n grad, so sind ausschliesslich trinome Factoren $\frac{n}{2}$ an der Zahl vorhanden. Aehnliches gilt für die Zerlegung von $a^n - z^n$. Bei ungradem n ist der Factor $a - z$ neben $\frac{n-1}{2}$ trinomen Factoren vorhanden, bei gradem n vereinigen sich die beiden einfachen Factoren $a - z$ und $a + z$ mit $\frac{n-2}{2}$ trinomen Factoren. Sodann sind die einzelnen Factoren von $a^n + z^n$ und von $a^n - z^n$ wirklich gebildet. Letztere heissen $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2$, wo k alle positiven ganzen Zahlenwerthe von 0 anfangend erhält, bis das Product der Factoren die nöthige Dimension erreicht. Es war

$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ und ebenso $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i_{(i=\infty)}$. Folglich muss, unter der Voraussetzung $i = \infty$, auch sein $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 2} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1$. Der Ausdruck rechts ist aber von der Form $a^n - z^n$, wenn $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1$, $n = i$, und die Factoren desselben werden $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i} + 1$. Bei $k = 0$ erscheint $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos 0 + 1 = \left(1 + \frac{x}{i} - 1\right)^2 = \left(\frac{x}{i}\right)^2$, welches aber durch $\frac{x}{i}$ ersetzt werden muss, weil $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ sich nur durch x $\left(\text{beziehungsweise } \frac{x}{i}\right)$, aber nicht durch x^2 $\left(\text{beziehungsweise } \frac{x^2}{i^2}\right)$ als theilbar erweist. Bei $k > 0$ tritt für $\cos\frac{2k\pi}{i}$ seine Reihenentwicklung $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{i}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{2k\pi}{i}\right)^4 - \cdots$, welche aber wegen $i = \infty$ auf die beiden Anfangsglieder $1 - \frac{2k^2\pi^2}{i^2}$ beschränkt werden darf. So wird das Trinom $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i} + 1 = \frac{x^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2 x}{i^3} = \frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)$, wobei der constante Factor $\frac{4k^2\pi^2}{i^2}$ unberücksichtigt bleiben darf. Somit zerfällt $e^x - 1$ in unendlich viele jetzt bekannte Factoren, d. h. man erhält $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = x\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{36\pi^2}\right)\cdots$. Euler setzt ausdrücklich die Bemerkung hinzu[1]): Obwohl hierin die einzelnen Factoren den unendlich kleinen Theil $\frac{x}{i}$ enthalten, so darf derselbe doch nicht weggelassen werden, weil sich aus ihm nach ausgeführter Multiplication aller $\frac{i}{2}$ trinomen Factoren das Glied $\frac{x}{2}$ ergeben wird; Euler nennt das eine Unbequemlichkeit, der er aus dem Wege gehen will, und dazu bedient er sich einer anderen Factorenzerlegung. Neben $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ ist $e^{-x} = \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ und $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right]$. Nun setzt Euler

[1]) Euler, *Introductio* I, § 156 am Anfang.

$\left(1+\frac{x}{i}\right)^i - \left(1-\frac{x}{i}\right)^i = a^n - z^n$, d. h. $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1 - \frac{x}{i}$, $n = i$. Hierdurch wird $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2 = 2 + \frac{2x^2}{i^2} - 2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{i}$. Man kann wieder $\cos\frac{2k\pi}{i} = 1 - \frac{2k^2\pi^2}{i^2}$ schreiben und erhält dann $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2 = \frac{4x^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2}{i^2} - \frac{4k^2\pi^2x^2}{i^4} = \frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}\right)$, oder $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{6} + \cdots$ ist durch $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}$ theilbar. Hiervon aber, fährt Euler fort, kann man sicher den Theil $\frac{x^2}{i^2}$ weglassen, weil derselbe auch mit i multiplicirt immer noch unendlich klein bleibt. Somit ist also ermittelt: $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \cdots = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$. Diese Gleichung dient selbst wieder als Ausgangspunkt neuer Zerlegungen. So lässt $x = z\sqrt{-1}$ links die Sinusreihe entstehen, rechts Factoren $1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} = \left(1-\frac{z}{k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)$, und daher hat man die Zerlegung $\sin z = z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots$ Wieder eine neue Betrachtung beginnt mit $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots = \frac{\left(1+\frac{x}{i}\right)^i + \left(1-\frac{x}{i}\right)^i}{2}$ mit $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1 - \frac{x}{i}$, $n = i$. Man erhält eine Factorenzerlegung von $1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$, welche mittels $x = z\sqrt{-1}$ in $\cos z = \left(1-\frac{2z}{\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi}\right)\cdots$ übergeht. Auch die Ausdrücke $\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i \pm \left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i$ besitzen die Gestalt $a^n \pm z^n$ und führen Factorenzerlegungen herbei. Die trinomen Factoren sind, nachdem der auftretende Cosinus durch die beiden ersten Glieder der ihm gleichen Reihe ersetzt und ein constanter Factor unberücksichtigt geblieben ist, von der Form $1 + \frac{4(b-c)x + 4x^2}{m^2\pi^2 + (b-c)^2}$ mit ungradem, beziehungsweise gradem m, je nachdem die Summe oder die Differenz der beiden Potenzgrössen zu zerlegen war. Auch bei $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ muss, damit eine wirkliche Gleichung entstehe, ein Divisor hinzutreten, und zwar $e^b \pm e^c$, weil $\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$ durch $x = 0$ in 1 übergeht, wie alle Factoren der Zerlegung durch $x = 0$ zu 1 werden. Besondere Annahmen wie $b = 0$, $c = -c$, $x = \frac{y}{2}$ werden gemacht und mittels $c = g\sqrt{-1}$, $y = v\sqrt{-1}$

noch weiter ausgebeutet. Schliesslich entstehen Factorenzerlegungen für $\cos z + \operatorname{tng}\frac{g}{2}\sin z$ und für $\cos z - \operatorname{cotg}\frac{g}{2}\sin z$. Es lohnt, die frühere Herleitung von Factorenfolgen (S. 658) zu vergleichen, um den Fortschritt zu erkennen, so ungenügend uns vom gegenwärtigen Zustande der Mathematik aus auch die Schlüsse in der Introductio noch vorkommen mögen.

Das 10. Kapitel, Von dem Gebrauche der gefundenen Producte bei der Bestimmung der Summen unendlicher Reihen, erinnert gleichfalls an Eulers Abhandlung von 1734. Genau nach denselben Grundsätzen wie damals folgert Euler aus $1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{5040} + \cdots = \left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$, welche Gleichung mittels $x^2 = \pi^2 z$ in $1 + \frac{\pi^2}{6}\cdot z + \frac{\pi^4}{120}\cdot z^2 + \frac{\pi^6}{5040}\cdot z^3 + \cdots = \left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1+\frac{z}{9}\right)\cdots$ übergeht, dass $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^4}{120}, \frac{\pi^6}{5040}\cdots$ die Summe der in den einzelnen zweigliedrigen Factoren auftretenden Coefficienten von z, ihrer Producte zu je zweien, zu je dreien $\cdots$ sein muss, und nennt man $P, Q, R, S, T\cdots$ die Summe der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten $\cdots$ Potenzen jener Coefficienten, welche mittels des Girardschen Satzes aus $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^4}{120}, \frac{\pi^6}{5040}$ hergeleitet werden, so entsteht $P = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, $Q = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$, $R = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$, und allgemein zeigt sich $\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots$ als summirbar. Die Summe ist $\frac{2^{2n-2}\pi^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+1)}$ vervielfacht mit Constanten, welche, wie Euler bei dieser Gelegenheit sagt[1]), eine beim ersten Anblick ziemlich unregelmässige Reihe von Brüchen $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1}\cdots$ bilden, die bei sehr vielen Gelegenheiten gebraucht werden. Jakob Bernoulli ist nicht erwähnt und ebenso wenig wird der Beziehungen gedacht, welche zwischen den von Jenem beobachteten Zahlen (S. 347) und den hier genannten obwalten. Euler leitet dann aus der Factorenzerlegung von $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots$ ähnliche Reihensummirungen ab, bei welchen wir uns nicht aufhalten wollen, und ebenso gehen wir über die Herleitung von Reihen für die Tangente hinweg[2]).

---

[1]) Euler, *Introductio* I, § 168 am Ende. [2]) Ebenda I, § 181.

Das 11. Kapitel, Von anderen unendlichen Ausdrücken für die Bögen und die Sinus, setzt den Gegenstand fort. Euler hat den Wallisschen Ausdruck (Bd. II, S. 904) $\frac{\pi}{4} = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\ldots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\ldots}$ selbständig hergeleitet. Er hat ihn durch Zusammenfassung von je zwei Factoren des Zählers und des Nenners $\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)(2n+1)} = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}$ in die Gestalt $\frac{\pi}{4} = \left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$ gebracht und hat auch mittels $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ unter Anwendung der Factorenzerlegung der Sinusreihe $\sqrt{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 6\cdot 6\cdot 10\cdot 10\ldots}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\ldots}$ gefunden. Logarithmirung gibt ihm $\log\frac{\pi}{4} = \log\left(1-\frac{1}{9}\right) + \log\left(1-\frac{1}{25}\right) + \log\left(1-\frac{1}{49}\right) + \cdots$, wo jeder der rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Logarithmen sich vermöge $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$ in Reihengestalt anschreiben lässt. So wird, wenn man die mit den Coefficienten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\cdots$ vervielfachten Glieder sämmtlicher Reihen vereinigt, $\log\pi = \log 4 - 1\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots\right) - \cdots$ und alle in Klammern befindlichen Summen sind dem Leser des 10. Kapitels bekannt, wenn auch unser Bericht, um nicht über Gebühr sich auszudehnen, sie übergehen musste. Euler berechnet mit deren Hilfe $\log\pi$ im natürlichen Logarithmensysteme auf 23 Decimalstellen[1]). Dass auch die Logarithmen eines Sinus, eines Cosinus von der Factorenzerlegung der Sinus-, der Cosinusreihe aus ermittelt werden, liegt in der Natur der Untersuchung. Den Schluss des Kapitels bilden weitere Reihen für die Tangente, welche aus denen im 10. Kapitel dadurch gewonnen werden, dass in ihnen auftretende Brüche abermals in Reihenform gebracht werden.

Das 12. Kapitel, Von der Entwicklung der gebrochenen Functionen in reeller Form, kehrt zu der im 2. Kapitel begonnenen Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche zurück. Dort war auf das Reell- oder Imaginärsein der in den Nennern der Partialbrüche auftretenden Factoren des ursprünglichen Nenners keinerlei Gewicht gelegt; jetzt vereinigt Euler wieder je zwei Partialbrüche imaginären Nenners zu einem einzigen, in dessen Nenner ein reelles Trinom zweiten Grades erscheint, d. h. es handelt sich um die Er-

[1]) Euler, *Introductio* I, § 190 am Ende.

mittlung der Brüche von der Gestalt $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k}$. Heisst der zu zerlegende Bruch $\frac{M}{N}$, ist zunächst $N = (p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)Z$, wo Z durch das erwähnte Trinom nicht weiter theilbar sein soll, und setzt man $\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2} + \frac{Y}{Z}$, so zeigt sich $Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}$, welches aber eine ganze Function sein muss. Mithin muss der Ausdruck $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ durch den trinomen Nenner theilbar sein oder gleichzeitig mit $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ verschwinden, beziehungsweise verschwinden, wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)$ ist. Die Vollziehung der beiden Substitutionen für z in $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ unter Anwendung von $z^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$ liefert zwei Gleichungen, denen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ zu entnehmen sind. Im weiteren Verlaufe des Kapitels wird alsdann der allgemeinere Fall erörtert, dass N das Trinom k-mal als Factor enthält und die ganze positive Zahl $k > 1$ ist.

Das 13. Kapitel, Von den recurrenten Reihen, kehrt zu dem Gegenstande des 4. Kapitels zurück. Dort war die recurrente Reihe aus einem ihr gleichen Bruche unter Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten hergestellt, während die Division als Entwicklungsmittel verschmäht wurde. Jetzt tritt grade die Division in ihre Rechte. Zugleich kann aber der erzeugende Bruch in seine Partialbrüche zerlegt werden. Jeder Partialbruch gibt für sich eine recurrente Reihe, und die Summe dieser Reihen muss gleich der aus dem unzerlegten Bruche hervorgegangenen Reihe sein, wobei der Satz in Anwendung kommt, der die eigentliche Grundlage der Methode der unbestimmten Coefficienten bildet, dass aus der Gleichheit der Reihen $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \cdots$ mit Nothwendigkeit die Gleichheit der Coefficienten gleich hoher Potenzen von z in beiden Reihen folge. Euler war der Erste gewesen, der diesen Satz unmittelbar aussprach (S. 677), er war auch der Erste, der die Empfindung der Nothwendigkeit einer Rechtfertigung des Satzes besass. Sein Beweis[1]) besteht darin, dass er mittels $z = 0$ zeigt, dass $A = \mathfrak{A}$ sein müsse, dass er alsdann durch Weglassung dieser einander gleichen Grössen aus der anfänglichen Gleichung und darauf folgende Division durch z sich die neue Gleichung $B + Cz + Dz^2 + \cdots = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 + \cdots$ verschafft, aus welcher er mittels $z = 0$ auf $B = \mathfrak{B}$ schliessen kann u. s. w. Der

[1]) Euler, *Introductio* I, § 214.

Nutzen der von uns als Grundgedanke des Kapitels bezeichneten Betrachtung liegt darin, dass die vorhergegangene Zerlegung in Partialbrüche es vielfach ermöglicht, das an sich undurchsichtige allgemeine Glied einer recurrenten Reihe deutlich zu erkennen. Eine solche Undurchsichtigkeit herrscht z. B. bei den Coefficienten von $\frac{1-z}{1-5z+6z^2} = 1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + 454z^5 + \cdots$, während $\frac{1-z}{1-5z+6z^2} = \frac{-1}{1-2z} + \frac{2}{1-3z} = (-1 - 2z - 2^2z^2 - \cdots) + (2 + 2\cdot 3z + 2\cdot 3^2z^2 + \cdots)$ zeigt, dass das allgemeine Glied $(2\cdot 3^n - 2^n)z^n$ heisst. Verwickelter, aber keineswegs unlösbar wird die Aufgabe, das allgemeine Glied der einer Division entstammenden recurrenten Reihe zu finden, wenn die reellen Nenner der gebildeten Partialbrüche Trinome zweiten Grades oder deren Potenzen sind.

Das 14. Kapitel, Von der Vervielfachung und Theilung der Winkel, ist die Fortbildung der dem 8. Kapitel angehörenden Recursionsformeln

$$\sin(2y+z) = 2\cos y \cdot \sin(y+z) - \sin z$$
$$\cos(2y+z) = 2\cos y \cdot \cos(y+z) - \cos z.$$

Wie im 8. Kapitel wird der Sinus und der Cosinus des n-fachen Winkels aus den Functionen des einfachen Winkels gefunden, aber auch umgekehrt ist der Sinus oder Cosinus des einfachen Winkels als Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades aufzufassen, welcher eine Function des n-fachen Winkels als Gleichungsconstante dient. Dem algebraischen Nachweise, dass eine solche Gleichung n Wurzeln besitze, steht die Thatsache zur Seite, dass $\sin s = \sin(\pi - s) = \sin(2\pi + s) = \sin(3\pi - s) = \cdots$ und dass, wenn $z = \frac{s}{n}$ ist, auch $z = \frac{\pi - s}{n}$, $z = \frac{2\pi + s}{n}$, $z = \frac{3\pi - s}{n} \cdots$ gewählt werden darf, wodurch $\sin z$ und $\cos z$ jedes so viele verschiedene Werthe erhält, als die Zahl n angibt. Jede zum voraus zu erkennende Gleichungswurzel entspricht einem Factor des Gleichungspolynoms, und nun ergibt sich die Zerfällung des Gleichungspolynoms in Factoren, ergibt sich die Vergleichung der Gleichungscoefficienten mit den Coefficienten des Productes aus den erkannten Factoren, ein Verfahren, welches im 9. Kapitel nicht angewandt worden war. Die erwähnten Recursionsformeln für Sinus und Cosinus von in arithmetischer Progression fortschreitenden Kreisbögen führen[1]) zu $\sin a + z\cdot\sin(a+b) + z^2\cdot\sin(a+2b) + \cdots = \frac{\sin a + z(\sin(a+b) - 2\sin a\cdot\cos b)}{1 - 2z\cos b + z^2}$ und mittels

[1]) Euler, *Introductio* I, § 258.

$z = 1$ zur Summirung der unendlichen Reihe $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots = \frac{\sin a + \sin(a+b) - 2\sin a\cdot\cos b}{2 - 2\cos b} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{2(1-\cos b)} = \frac{2\cos\left(a - \frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2}}{4\sin\frac{b^2}{2}} = \frac{\cos\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$. Ganz ähnlich muss die unendliche Reihe $\sin(a + (n+1)b) + \sin(a + (n+2)b) + \sin(a + (n+3)b) + \cdots = \frac{\cos\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)b\right)}{2\cdot\sin\frac{b}{2}}$ sein, und durch Subtraction der beiden unendlichen Reihen von einander entsteht die endliche Reihe $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots + \sin(a+nb) = \frac{\cos\left(a - \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)b\right)}{2\cdot\sin\frac{b}{2}} = \frac{\sin\left(a + \frac{nb}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$. Es ist geradezu merkwürdig, wie Euler hier auf dem Umwege über zwei ganz unzulässige Summirungen divergenter Reihen zu einer durchaus richtigen Summe einer endlichen Reihe gelangte. Wie für den Sinus verfuhr Euler auch für den Cosinus. Er gelangte[1]) zu dem unrichtigen $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots = -\frac{\sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$ und von da aus zu dem richtigen $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos(a+nb) = \frac{\cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$.

Das 15. Kapitel, Von den Reihen, welche aus der Entwicklung von Producten entspringen, enthält Untersuchungen, welche man Anwendungen der Reihenlehre auf die Zahlentheorie zu nennen versucht wäre, indem, wo seither alle ganzen Zahlen der Reihe nach gewählt wurden, um das Gesetz einer Reihe zu verwirklichen, jetzt ausschliesslich Primzahlen an deren Stelle treten. Schon im Briefwechsel Eulers mit Goldbach von 1739 traten solche Dinge auf[2]). Bei Annahme gleichen Werthes für die beiden unendlichen Ausdrücke $(1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z)\cdots = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ zeigt sich A als Summe der einzelnen Zahlen $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$, $B, C, D \cdots$ als Summe ihrer Producte

[1]) Euler, *Introductio* I, § 260. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 82 sqq.

zu je 2, 3, 4 $\cdots$. Ist nun $\alpha = \frac{1}{2^n}$, $\beta = \frac{1}{3^n}$, $\gamma = \frac{1}{5^n}$, $\delta = \frac{1}{7^n} \cdots$, d. h. hat man die reciproken n^{ten} Potenzen der Primzahlen gewählt, so ist A deren Summe u. s. w., und das ganze Product wird bei $z = 1$ zu $P = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\left(1 + \frac{1}{5^n}\right)\left(1 + \frac{1}{7^n}\right) \cdots = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \cdots$ und die Nenner der addirten Brüche sind die n^{ten} Potenzen aller Zahlen, welche weder Potenzen, noch durch irgend eine Potenz theilbar sind. Wird $z = -1$ angenommen, so sind die Glieder der aus dem Producte entstandenen Reihe absolut betrachtet die gleichen wie vorher, nur mit derart wechselnden Vorzeichen, dass bei ungrader, beziehungsweise bei grader Factorenzahl derjenigen Zahl, deren n^{te} Potenz im Nenner steht, das Minuszeichen, beziehungsweise das Pluszeichen auftritt. $P = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \cdots = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \cdots$. Dann kommt $\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\cdots} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ an die Reihe. Hier sind offenbar, sagt Euler[1]), die $A, B, C, D \cdots$ aus den $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ so zusammengesetzt, dass A die Summe dieser Zahlen einzeln genommen, $B, C, D \cdots$ die Summe der Producte aus je 2, 3, 4 $\cdots$ ist, jedoch so, dass bei der Bildung dieser Summen diejenigen Producte, welche zwei oder mehrere gleiche Factoren enthalten, nicht ausgeschlossen werden dürfen. Euler dachte sich muthmasslich die Herleitung mittels auf einander folgender Division durch die einzelnen Nennerfactoren. So bekam er $\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots$, dann $\frac{1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots}{1 - \beta z} = 1 + (\alpha + \beta)z + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)z^2 + (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3)z^3 + \cdots$, ferner $\frac{1 + (\alpha+\beta)z + (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)z^2 + (\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)z^3 + \cdots}{1 - \gamma z} = 1 + (\alpha + \beta + \gamma)z + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2)z^2 + (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \gamma^3)z^3 + \cdots$, und ähnlich muss jede folgende Division wirken, wenn man sich mit der rein formalen Bildung der Quotienten in Gestalt unendlicher Reihen begnügt. Auch hier setzt Euler $z = 1$ und wählt für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ der reciproken Primzahlen mit Ausschluss der 1. Die Reihenentwicklung muss sämmtliche Stammbrüche liefern, deren Nenner Primzahlen oder aus solchen durch Multiplicationen entstanden sind, d. h. überhaupt

---

1) Euler, *Introductio* I, § 270.

alle Stammbrüche, und es muss daher sein $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdots} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$. Nach dem gleichen Verfahren gelangt man zu $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\cdots} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$. Kenntniss des Werthes des im Nenner links vom Gleichheitszeichen auftretenden Productes führt also zur Kenntniss der Reihensumme rechts und umgekehrt. Ferner kann auch rechts und links die Logarithmirung vorgenommen werden. Links entstehen Summen von Logarithmen, deren jeder durch eine unendliche Reihe ersetzt werden kann, und so kommen wieder neue Reihen mit neu bekannt werdenden Summen, beziehungsweise neue Producte zu Stande. Eine Reihe, welche in diesem Zusammenhange zum ersten Male auftritt, ist

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \cdots = 0.$$

Das Gesetz der Reihe besteht darin, dass in ihr alle Stammbrüche fehlen, deren Nenner einen quadratischen Theiler besitzen, und dass die vorhandenen Glieder positiv oder negativ sind, je nachdem ihr Nenner das Product aus einer geraden oder ungraden Anzahl von einander verschiedener Factoren ist. Nur das positive Anfangsglied $\frac{1}{1}$ weicht von dieser Regel ab[1]).

Das 16. Kapitel, Von der Zerlegung der Zahlen in Theile, setzt die zahlentheoretischen Betrachtungen fort und zwar an einer Aufgabe, welche, wie wir wissen (S. 617), vor 1743 von Philip Naudé dem Jüngeren gestellt worden war. Euler bringt sie in Verbindung mit Productenbildungen, wie das 15. Kapitel sie gelehrt hatte. Wird $(1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z) \cdots = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ gesetzt, so ist $P = x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \cdots$. Die nachfolgenden Coefficienten sind: Q die Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summen je zweier verschiedener Zahlen aus der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ sind, R die Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summe je dreier verschiedener unter den genannten Zahlen sind u. s. w. Kann ein Exponent auf mehrere verschiedene Arten durch Addition hervorgebracht werden, so erhält das betreffende Glied einen Zahlencoefficienten. Das Auftreten von $Nx^n z^m$ in dem gebil-

---

1) Euler, *Introductio* I, § 277. Ein Beweis von H. von Mangoldt in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1897² S. 835.

deten Producte bedeutet also, dass n in N verschiedenen Arten aus m unter einander verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ additiv hergestellt wurde, oder N ist die Zerlegungszahl von n in m verschiedene Theile. Die Bedingung der Verschiedenheit der Theile fällt weg, sobald der Quotient $\frac{1}{(1-x^\alpha z)(1-x^\beta z)(1-x^\gamma z)\ldots}$ in die Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ verwandelt wird. Die Aufgabe der Zahlenzerlegung ist damit auf eine andere Aufgabe zurückgeführt. Zu ihrer Lösung genügt die Möglichkeit, in den beiden vorerwähnten Hauptfällen die Coefficienten $P, Q, R \cdots$ leicht ermitteln zu können. Ist $Z=(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$, so ist $\frac{Z}{1+xz}=(1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$. Das ist aber das gleiche Product, welches entsteht, wenn in $(1+xz)(1+x^2z)\cdots$ der Buchstabe z durch xz ersetzt wird. Das Z genannte Product heisst als Reihe $1 + Pz + Qz^2 \cdots$. Ersetzt man in ihr z durch xz, so entsteht $1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots$ und man erhält die Gleichung $\frac{Z}{1+xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots$, woraus $Z = (1+xz)(1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots) = 1 + (1+P)xz + (P+Q)x^2z^2 + \cdots$ folgt. Durch Gleichsetzung der gleiche Potenzen von z in sich schliessenden Glieder der beiden Reihenformen für Z entsteht $P=(1+P)x$, $Q=(P+Q)x^2$, $R=(Q+R)x^3 \cdots$ und $P=\frac{x}{1-x}$, $Q=\frac{Px^2}{1-x^2}=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$, $R=\frac{Qx^3}{1-x^3}=\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ u. s. w. Der allgemeine Ausdruck für den m^{ten} Coefficienten heisst $\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$. Da nun der Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ in eine Reihe entwickelt genau dieselben Reihenglieder liefert wie derjenige, welcher $x^{\frac{m(m+1)}{2}}$ im Zähler besitzt, wenn man auf die Coefficienten allein achtet, während freilich der Unterschied der Exponenten von x in einander der Rangordnung und den Coefficienten nach entsprechenden Gliedern stets $\frac{m(m+1)}{2}$ ist, da ferner die Coefficienten die Zerlegungszahlen sind, so folgt der Satz: Die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{2}$ lässt sich auf ebensoviele Arten in m ungleiche Theile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, \cdots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann. Wird das dem Sinne nach gleiche Verfahren auf den anderen Fall angewandt, wo $Z = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\cdots} = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ war, so findet sich als allgemeiner Ausdruck für $P, Q, R \cdots$ der Bruch $\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ und

daraus der Satz: Die Zahl $n + m$ lässt sich auf ebensoviele Arten in m gleiche oder ungleiche Theile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, \cdots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Das 17. Kapitel, Von dem Gebrauch der recurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen, hat uns schon (S. 643) den Anlass zu einer Verweisung gegeben. Euler verspricht nämlich in den Einleitungsworten des Kapitels eine sorgfältigere Auseinandersetzung der von Daniel Bernoulli im IV. Bande der Petersburger Commentarien über denselben Gegenstand enthaltenen Untersuchungen. Unser Bericht wird sich auf die ersten Paragraphen des Kapitels beschränken dürfen, welche den grundlegenden Gedanken erörtern. Sei in dem Bruche $\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\cdots}$ der Nenner das Product lauter von einander verschiedener reeller einfacher Factoren $(1-pz)(1-qz)(1-rz)\cdots$, und sei der Bruch ebensowohl in Gestalt einer recurrenten Reihe $A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots$, als in seiner Zerlegung in Partialbrüche $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}+\frac{\mathfrak{B}}{1-qz}+\frac{\mathfrak{C}}{1-rz}+\cdots$ bekannt. Jeder Partialbruch gibt selbst wieder eine recurrente Reihe wie $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}pz + \mathfrak{A}p^2z^2 + \cdots + \mathfrak{A}p^nz^n + \cdots$, und setzt man die Summe dieser partiellen recurrenten Reihe gliedweise gleich der aus dem ursprünglichen Bruche hervorgegangenen Reihe, so zeigt sich $P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \cdots$ und $Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1} + \mathfrak{C}r^{n+1} + \cdots$. Ist nun p am grössten, oder $\frac{1}{p}$ die kleinste Wurzel der Gleichung $1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\cdots=0$ und n eine grosse Zahl, so dass p^n über $q^n, r^n \cdots$ und p^{n+1} über $q^{n+1}, r^{n+1} \ldots$ weit überwiegt, so ist annähernd $P=\mathfrak{A}p^n$, $Q=\mathfrak{A}p^{n+1}$ und demzufolge $p = \frac{Q}{P}$ ein Werth, der um so richtiger ist, je grösser n gewählt wurde. Zugleich ist aber p die grösste Wurzel derjenigen Gleichung, welche aus $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots = 0$ mittels der Substitution $z = \frac{1}{x}$ entsteht. Die Zählercoefficienten $a, b, c, d \cdots$ sind dabei vollkommen willkürlich, können somit so gewählt werden, dass die Rechnung so wenig Mühe als möglich macht.

Das 18. Kapitel, Von den Kettenbrüchen, endlich beruht auf den beiden Abhandlungen im IX. und XI. Bande der Petersburger Commentarien (S. 693—699). Neues ist so gut wie nicht hinzugetreten, vielmehr ist nur der Inhalt jener Abhandlungen, soweit er elementarer Natur ist, klar und einfach dargestellt.

112. Kapitel.

Reihen 1749—1754. Die Grundlagen der Differentialrechnung.

In der Introductio war der umfassendste Gebrauch von Exponentialgrössen mit complexen Exponenten gemacht. De Moivre (S. 646) hatte 1730 einen für jene Grössen grundlegenden Satz ausgesprochen. D'Alembert (S. 586—587) hatte 1746 erörtert, dass jede Function einer imaginären Zahl sich auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ bringen lassen müsse. Euler (S. 601) bestätigte in dem auf das Erscheinen der Introductio folgenden Jahre 1749 D'Alemberts Behauptung. Eulers Bestätigung wurde in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie gedruckt und in einer anderen Abhandlung ebendesselben Bandes wandte sich Euler einer verwandten Frage zu, die schon lange theils in dem Drucke übergebenen Abhandlungen von Johann Bernoulli (S. 362) und Leibniz (S. 367—368) angedeutet, theils in dem Briefwechsel Beider erörtert war (S. 371). Dieser Briefwechsel war aber seit 1745 in allen Händen, und damit war der Aufmerksamkeit der Zeitgenossen ein Gegenstand empfohlen, welchen endgiltig zu erledigen der Augenblick gekommen war. Der Titel von Eulers Abhandlung[1]) lautet: Ueber die Meinungsverschiedenheit von Leibniz und Bernoulli bezüglich der Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen.

Euler beginnt damit, über Bernoullis Meinung, man müsse $\log(-x) = \log x$ setzen, zu berichten und die von ihrem Urheber angegebenen Gründe zu prüfen. Wenn Johann Bernoulli anführe, die nach x genommenen Differentialquotienten von $\log(-x)$ und von $\log x$ seien einander gleich, oder, was eigentlich dasselbe nur in geometrischer Form besage, die Differentialgleichung der Curve $y\,dx = dy$ bleibe unverändert, wenn y durch $-y$ ersetzt werde, und daraus folge, dass jene Curve auch unterhalb der Abscissenaxe einen Ast besitzen müsse (vergl. Fig. 48 auf S. 371), so könne dem entgegengehalten werden, die Gleichheit der Differentialquotienten bedinge die Gleichheit ihrer Integrale nur unter Zuziehung einer Constanten. Finde doch auch die Gleichung $\frac{d(\log nx)}{dx} = \frac{d(\log x)}{dx}$ statt, und doch sei nicht $\log nx = \log x$, sondern $\log nx = \log x + \log n$, und ähnlicherweise sei $\log(-x) = \log x + \log(-1)$. Wenn Bernoulli sich für die Zusammensetzung der logarithmischen Curve aus zwei

[1]) *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les Logarithmes des nombres négatifs et imaginaires par M. Euler* in der *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 139—179.

Aesten weiterhin darauf stütze, die Differentialgleichung $dx = \frac{dy}{y^n}$ gehöre, so oft n eine ganze ungrade Zahl sei, stets zu einer symmetrisch zur Abscissenaxe zweiästig verlaufenden Curve, und $n = 1$ könne keinen Ausnahmefall darstellen, so erinnert Euler daran, das sei höchstens wahr, so lange es sich um algebraische Curven handle, und auch bei diesen könne das Einsetzen bestimmter Werthe den Charakter der Curve wesentlich ändern. Aus $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ entstehe z. B. durch Rationalisirung eine Gleichung 8^{ten} Grades, in welcher y nur grade Exponenten besitze, die Curve habe also zwei zur Abscissenaxe symmetrische Aeste. Werde der besondere Fall $b = 0$ ins Auge gefasst, und rationalisire man $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$, so entstehe $y^4 - 2axy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0$, und das in dieser Gleichung vorkommende Glied $-4a^2xy$ beweise, dass von einer Symmetrie zur Abscissenaxe nicht die Rede sein könne. Wenn Bernoulli endlich sage, wegen $(-a)^2 = (+a)^2$ sei $\log[(-a)^2] = \log[(+a)^2]$ oder $2\log(-a) = 2\log(+a)$, also $\log(-a) = \log(+a)$ so könne man mit genau gleichem Rechte aus $(a\sqrt{-1})^4 = (+a)^4$ und aus $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = (+a)^3$ auch folgern $\log a = \log(a\sqrt{-1}) = \log\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)$. Dass aber $\log(\sqrt{-1})$ nicht 0 sei, habe grade Johann Bernoulli einst selbst gelehrt, wo er den Zusammenhang zwischen den Logarithmen imaginärer Grössen und der Rectification des Kreises in einer Weise erkannte (S. 362), welche auf die Behauptung $\log(\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ hinausläuft.

Auf der anderen Seite führe die Bestreitung der Bernoullischen Meinung zu grossen Schwierigkeiten. Ist z. B. $\log(-a)$ von $\log a$ verschieden, also $\log(-1)$ nicht $= 0$, so sei $\log(-1) = \omega$. Nun ist $(-1)\cdot x = \frac{x}{-1}$ und durch Logarithmirung $\log x + \omega = \log x - \omega$, oder $\omega = -\omega$, was einen Widerspruch gegen die Behauptung, ω sei von 0 verschieden, enthält.

Euler geht sodann zur Prüfung der Leibnizschen Meinung vom Imaginärsein von $\log(-1)$ über. Die logarithmische Reihe $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ zeige bei $x = 0$, dass $\log 1 = 0$ sein müsse[1]). Setze man $x = -2$, so komme man zu

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 149 schreibt hier infolge eines offenbaren Druckfehlers die Substitution $x = 1$ anstatt $x = 0$ vor. Auf andere Druckfehler, die nicht gar selten sind, machen wir nicht besonders aufmerksam.

$\log(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \cdots$ und die Summe dieser divergenten Reihe könne nicht 0 sein, also sei $\log(-1)$ von Null verschieden. Aber warum, wirft Euler sich selbst ein, sollte $-2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \cdots$ von 0 verschieden sein müssen? Setze man in $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ zuerst $x = -3$, dann $x = 1$, so erhalte man $-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots$, $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, und die Addition beider Entwicklungen führe zu $0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \cdots$, was nicht weniger Schwierigkeit besitze, als die Annahme $0 = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \cdots$. Einen anderen Beweis dafür, dass $\log(-1)$ nicht $= 0$ sein könne, erhalte man von der Reihenentwicklung $e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ aus, welche immer convergire, eine wie grosse Zahl man auch für y wähle, so dass die aus der Natur der divergenten Reihen entnommenen Gegengründe nicht Platz greifen[1]). Wenn $e^y = -1$, $y = \log(-1)$ sein solle, liefere diese Reihe $-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ und dieser Gleichung könne nicht durch $y = 0$ genügt werden, weil sonst $-1 = 1$ sein müsste. Aber auch hier weiss Euler einen Einwand, der sich dahin ausspricht, dass die Function, welche einer Reihe als Ursprung diene, Werthe besitzen könne, welche in der Reihe nicht ihren Ausdruck finden. So sei z. B. $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots$, und die Reihe gebe einen eindeutigen Werth, während die Function zweideutig sei und ebensowohl positiv als negativ genommen werden dürfe[2]).

Nachdem Euler so die unleugbaren Schwierigkeiten hervorgehoben hat, welche sich ergeben, mag man nun für Bernoulli oder für Leibniz Partei ergreifen, fragt er nach dem tieferen Grunde aller dieser Schwierigkeiten und findet ihn in der bis dahin von Niemand bemerkten Unendlichvieldeutigkeit der Logarithmen. Ist $y = \log x$ und $x = (1 + \omega)^n$, wo n unendlich gross, ω unendlich klein, so ist bekannt, dass $y = n\omega$. Aber aus $x = (1+\omega)^n$ folgt $\omega = \sqrt[n]{x} - 1$, $n\omega = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ oder $\log x = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)_{(n=\infty)}$. Wie eine Quadratwurzel 2, eine Kubikwurzel 3 von einander verschiedene Werthe hat,

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 150. [2]) Ebenda T. V, 152.

so muss es bei einer n^{ten} Wurzel n dergleichen geben. In dem der Aufsuchung von $\log x$ zu Grunde liegenden Falle ist $n = \infty$, folglich gibt es hier unendlich viele $\sqrt[n]{x}$ und ebensoviele $\log x$. Ist insbesondere $x = 1$, so findet sich $y = \log 1 = 0\left(\sqrt[n]{1} - 1\right)$ oder $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$, aus welcher Gleichung die n Werthe von y hervorgehen, indem man $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1$ in n einfache Factoren zerlegt, deren jedes für sich $= 0$ zu setzen ist, deren zwei sich aber auch zu einem reellen trinomen Factor vereinigen. Nun weiss man, dass ein reeller trinomer Factor von $p^n - q^n$ die Gestalt $p^2 - 2pq\cos\frac{2\lambda\pi}{n} + q^2$ besitzt, wo λ beliebig ganzzahlig ist, und dass $p^2 - 2pq\cos\frac{2\lambda\pi}{n} + q^2 = 0$ zu $p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$ führt. In dem besonderen Falle von $p = 1 + \frac{y}{n}$, $q = 1$ wird also $1 + \frac{y}{n} = \cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi\lambda}{n}$. Dabei ist $n = \infty$, folglich $\cos\frac{2\lambda\pi}{n} = 1$, $\sin\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$, mithin $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \sqrt{-1} \cdot \frac{2\lambda\pi}{n}$ und $y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ als unendlichvieldeutiger Logarithmus von 1, indem λ jeden ganzzahligen Werth annehmen kann. Die Annahme $\lambda = 0$ liefert den einzigen reellen $\log 1 = 0$. Um $\log(-1)$ mit seinen unendlichvielen Werthen zu finden, hat man $y = \log(-1) = n\left(\sqrt[n]{-1} - 1\right)$ zu setzen, beziehungsweise $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = -1$, und der in n Factoren zu zerlegende Ausdruck heisst $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1$. Die trinomen Factoren von $p^n + q^n$ sind $p^2 - 2pq\cos\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} + q^2$, und setzt man diese allgemeine Form des Trinoms $= 0$, so wird $p = q\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right)$. Gegenwärtig ist $p = 1 + \frac{y}{n}$, $q = 1$, also $1 + \frac{y}{n} = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} = 1 \pm \sqrt{-1} \cdot \frac{(2\lambda-1)\pi}{n}$ und $y = \log(-1) = \pm(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}$. Nun bleiben noch die Logarithmen imaginärer Zahlen zu bestimmen. Jede imaginäre Zahl kann auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ gebracht werden. Man kann $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$ setzen, und das entsprechende φ trigonometrischen Tabellen entnehmen. Setzt man ferner $\sqrt{a^2+b^2} = c$, so ist $a + b\sqrt{-1} = c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = e^C(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$. Demzufolge ist $\log(a + b\sqrt{-1}) = C + \log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ und es kommt auf die Auffindung von

$y = \log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ an, zu welcher die Gleichung $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = 0$ führen müsste, wenn man im Stande wäre, ihr die Gestalt $p^n - q^n = 0$ zu geben. Nun ist $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1\cdot 2} + \frac{\varphi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$, $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\varphi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$, $\left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n_{(n=\infty)} = 1 + \varphi\sqrt{-1} - \frac{\varphi^2}{1\cdot 2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$, d. h. die Umwandlung $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = \left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ ist erfolgt, und $p = 1 + \frac{y}{n}$, $q = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}$. Die einzelnen Factoren ergeben sich, wenn fortwährend $n = \infty$ berücksichtigt und deshalb der Cosinus eines durch n getheilten Bogens durch 1, sein Sinus durch den Bogen ersetzt wird, mittels $p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right) = q\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$, d. h. $1 + \frac{y}{n} = \left(1+\frac{\varphi}{n}\sqrt{-1}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right) = 1 \mp \frac{2\lambda\varphi\pi}{n^2} + \frac{\varphi \pm 2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$ und $y = \log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1}$, beziehungsweise $\log(a + b\sqrt{-1}) = C + (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1}$, wo $C = \log\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Die Lehre von den imaginären Zahlen war damit plötzlich um ein Wesentliches gefördert, so wenig man vergessen darf, dass der erzielte Fortschritt allmählich und seit geraumer Zeit von Cotes, von De Moivre, von Euler selbst vorbereitet war. Aber in einem Punkte war noch keine Klarheit geschaffen. Das Imaginäre galt nach wie vor als unmögliche Schöpfung einer ungezügelten Einbildungskraft. Man hatte gelernt, alle ersinnlichen Rechnungsarten an imaginären Zahlen auszuüben, aber man hatte nicht gelernt, sie selbst zu versinnlichen. Den ersten Versuch dieser Art machte Heinrich Kühn[1]) (1690—1769), der, in Königsberg geboren, seit 1734 am Gymnasium in Danzig wirkte, auch 1743 an der Begründung der Danziger naturforschenden Gesellschaft theilnahm. Die Abhandlung *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis*, um derenwillen wir Kühn zu nennen haben, ist von der Petersburger Akademie veröffentlicht[2]). Kühns Gedanken über die Construction imaginärer Grössen und über die Nach-

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XVII, 341. Artikel von S. Günther.
[2]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 170—223.

weisung imaginärer Wurzeln sind folgende. Seien (Fig. 109) vier congruente Rechtecke α, β, γ, δ aus den Seiten a, b hergestellt und um den Punkt P herumgelegt, eine Annahme, deren erster Theil fast unmittelbar dahin abgeändert wird, dass die Rechtecksseiten als gleich gedacht und die Rechtecke dadurch zu Quadraten werden. Die entgegengesetzte Richtung der Seiten zwingt dazu, wenn $PQ = +a$, $PR = +b$ ist, $Pq = -a$, $Pr = -b$ zu setzen. Die Flächen der einzelnen Rechtecke sind demnach $\alpha = +a\cdot +b = +ab$, $\beta = -b\cdot +a = -ba$, $\gamma = -a\cdot -b = = ba$, $\delta = -a\cdot +b = -ab$. Man erkennt $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Die formell verschiedene Anordnung der Factoren ab, ba in den Producten ist nur gewählt, um äusserlich zwischen α und γ, zwischen β und δ zu unterscheiden. Ist die absolute Länge von $a = b = 3$, so haben die Quadrate α und γ jeweils die Fläche 9, die Quadrate β und δ jeweils die Fläche -9, und $\pm\sqrt{9}$, $\pm\sqrt{-9}$ müssen die Seiten jener Quadrate sein. Es ist unthunlich, dagegen den Einwand zu erheben, eine Grösse wie $\pm\sqrt{-9}$ sei nur imaginär, unmöglich und unangebbar[1]), weil aus $-a^2$ in keiner Weise eine Quadratwurzel gezogen werden könne, da sowohl $+a\cdot +a = +a^2$ als auch $-a\cdot -a = +a^2$ sei; denn einestheils könne eine Rechnung, welche von möglichen oder reellen gegebenen Grössen ausgehe und in Uebereinstimmung mit unzweifelhaften Grundsätzen behandelt sei[2]), auf keinerlei Weise zu Unmöglichem, oder Nichtreellem, oder Unangebbarem führen, und anderntheils lasse die vorgeschriebene Construction erkennen, dass die Voraussetzung, alle reellen Quadrate seien positiv, nicht zu Recht bestehe[3]). Auch auf quadratische Gleichungen, denen das Glied ersten Grades nicht fehlt, geht Kühn in fast zu ausführlicher Darstellung ein, um die Fälle zu unterscheiden, in welchen deren Wurzeln imaginär werden, dann auf die Gleichungen dritten Grades, zu deren Versinnlichung er acht

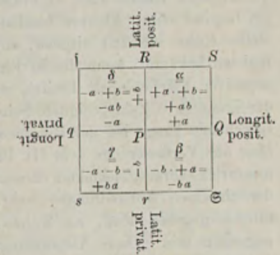

Fig. 109.

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 176: *esse mere imaginarias, impossibiles et inassignabiles.* [2]) *Calculus ex datis possibilibus aut realibus profectus, et axiomatibus indubiis convenienter tractatus.* [3]) *minus recte etiam supponi videtur, omnia quadrata realia esse positiva.*

um einen Punkt des Raumes herumgelagerte Würfel benutzt, deren Rauminhalt absolut genommen gleich, dem Vorzeichen nach verschieden ist. Es sind das Untersuchungen, welche, wenigstens so weit quadratische Gleichungen in Frage treten, auch **Wallis** im 66. bis 69. Kapitel seiner Algebra beschäftigten. **Eine** Frage stellte Wallis, stellte Kühn nie und nirgend, auf deren Beantwortung es grad am meisten ankäme: wenn das in Fig. 109 gezeichnete Quadrat β einen negativen Flächeninhalt besitzt, wo liegt dessen zur Versinnlichung der imaginären Zahl geeignete Seite? Und ganz ähnlich fehlt die entsprechende Frage bei der Untersuchung über die cubische Gleichung. Mag der Verfasser der dem III. Bande der neuen Petersburger Commentarien vorausgeschickten Einleitung, in welcher über den Inhalt der einzelnen Abhandlungen mehr oder weniger genügende Andeutungen gegeben sind, an Kühns Arbeit mit den Worten vorbeigegangen sein: Diese Abhandlung ist so werthvoll, dass wegen der Art der Auseinandersetzung nichts zu sagen ist, und wir vorzögen, dass die Leser die Abhandlung selbst in Augenschein nähmen[1]), so hindert das von ihm ausgesprochene überschwängliche Lob doch nicht den Eindruck, als ob jenes Lob eine Art von Verlegenheitsredensart gewesen sei, hinter welcher ein gewisses Nichtverstehen sich verbarg. Alles in allem wird man es begreiflich finden, dass Kühns Verdienst die Frage nach dem sinnlichen Vorhandensein des Imaginären auf die Tagesordnung gesetzt zu haben, nachmals höher geschätzt wurde, als die Art, in welcher er selbst sich mit der unleugbaren Schwierigkeit abzufinden suchte.

Der Band Petersburger Akademieschriften, in welchem Kühns Erläuterungsversuch des Imaginären der Oeffentlichkeit übergeben wurde, enthält auch zwei **Eulersche** Aufsätze, in welchen der Lehre von den Reihen eine neue Seite abgewonnen ist. Deren erster, *De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum*[2]), oder Bestimmung von Reihen und neue Methode, das allgemeine Reihenglied zu finden, beleuchtet eine Schwierigkeit der **Interpolationsaufgabe**. Man sei, sagt Euler, geneigt anzunehmen, dass der Verlauf einer Reihe bekannt sei, wenn man beliebig viele Glieder derselben kenne, aber dem sei nicht so. Denke man sich die einzelnen Reihenglieder als Ordinaten zu Abscissen, deren Länge die Ordnungszahl des betreffenden Reihengliedes angibt, so kann durch die Endpunkte jener Ordinaten eine unbegrenzte Anzahl von Curven gezogen werden, welche alle unter einander verschieden darin allein

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, Einleitung pag. 18. [2]) Ebenda T. III, 36—85.

übereinstimmen, dass sie bei ganzzahlig positiver Abscisse die gleiche Ordinate besitzen. Für die Interpolation der vorgelegten Reihe, für die Auffindung eines Reihengliedes mit nicht ganzzahlig positiver Ordnungszahl, oder geometrisch gesprochen für den Verlauf der Curve zwischen den gegebenen Punkten sei gar nichts gewonnen. Soll z. B. bei jedem ganzzahligen Werthe von x die Ordinate $y = x$ sein, so wird dieses erreicht, wenn y die Summe von x und solchen Ausdrücken ist, welche bei ganzzahligem x zu Null werden, wie z. B. $\sin n\pi x$ bei irgend ganzzahligem n. Man kann also jedes Reihenglied ansetzen als $y = x + P \cdot \sin \pi x + Q \cdot \sin 2\pi x + R \cdot \sin 3\pi x + \cdots$, wo $P, Q, R \cdots$ beliebige Functionen von x bedeuten. Euler geht dann zu Betrachtungen über, welche zu tief in die Lehre von den Differentialgleichungen eingreifen, als dass sie hier besprochen werden könnten. Wir werden im 118. Kapitel in Kürze darauf zurückkommen.

Eulers zweiter Aufsatz in dem betreffenden Bande, *Consideratio quarundam serierum quae singularibus proprietatibus sunt praeditae*[1]), geht von einer besonderen Reihe aus, nämlich von $\frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3}$

$$+ \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \cdots + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)\cdots(a^{n-1}-x)}{a^{\frac{1}{2}n(n-1)} - a^{\frac{1}{2}n(n+1)}} + \cdots,$$

deren Summe $= n$ ist, wenn $x = a^n$, wie durch Induction sich ergibt, wenn nach einander $x = a^0 = 1$, $x = a^1$, $x = a^2$, $x = a^3$ u. s. w. eingesetzt wird. Aber diese Summenbestimmung hört auf richtig zu sein, wenn x einer Potenz von a mit nicht ganzzahlig positivem Exponenten gleich gesetzt wird, anders ausgesprochen: s als Summe der genannten Reihe ist nicht immer der Logarithmus von x für die Basis a, sondern nur dann, wenn x eine Potenz von a mit ganzem positiven Exponenten ist. Euler schreitet dann weiter zu Umwandlungen der Reihe fort, aus welchen vielfältige Folgerungen gezogen werden, deren wir nicht näher gedenken, weil sie nicht das Wesen der Reihen überhaupt betreffen.

Anders steht es mit zwei Aufsätzen **Eulers** im V. Bande der neuen Abhandlungen der Petersburger Akademie. Der Aufsatz *Subsidium calculi sinuum*[2]) bildet eine Ergänzung zum 8. Kapitel des I. Bandes der Introductio (S. 708). Dort war der Cosinus beziehungsweise der Sinus eines vielfachen Bogens durch Potenzen der Functionen des einfachen Bogens dargestellt, jetzt wurden Formeln abgeleitet, welche Potenzen der trigonometrischen Functionen einfacher Bögen auf Functionen vielfacher Bögen zurückführen. Die Grundlage bildet

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 86—108. [2]) Ebenda 1754 *et* 1755. T. V, 164—204.

die mittels fortgesetzter Multiplication bewiesene und demgemäss n als ganze positive Zahl voraussetzende Formel $(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}$. Wird abkürzend $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1} = u$, $\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1} = v$ gesetzt, so ist $\cos\varphi = \frac{u+v}{2}$ und $2^n \cdot \cos\varphi^n = (u+v)^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \cdots$. Offenbar kann man auch $2^n \cdot \cos\varphi^n = (v+u)^n = v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}v^{n-2}u^2 + \cdots$ schreiben und beide Gleichungen addiren. Man erhält $2^{n+1}\cos\varphi^n = (u^n + v^n) + n(u^{n-2} + v^{n-2})uv + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(u^{n-4} + v^{n-4})u^2v^2 + \cdots$. Leicht ersichtlich ist $uv = u^2v^2 = \cdots = 1$, sowie $u^n + v^n = 2\cos n\varphi$ u. s. w. Man gewinnt dadurch $2^n \cdot \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n\varphi - 2\varphi) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n\varphi - 4\varphi) + \cdots$. Die Reihe bricht ab, sobald der Binomialcoefficient, der in jedem Gliede auftritt, den Werth 0 annimmt. Tritt vorher ein $\cos(n\varphi - m\varphi)$ mit $m > n$ auf, so ist zu erwägen, dass $\cos(n\varphi - m\varphi) = \cos(m\varphi - n\varphi)$. Nachdem die Untersuchung so weit mit genügender Strenge geführt war, setzt Euler plötzlich und ohne die geringste Rechtfertigung seines Verfahrens n als negative ganze Zahl, so dass die entstehende Reihe nicht von selbst abbricht, sondern ins Unendliche fortläuft. Mit verblüffender Sorglosigkeit schreibt er $\frac{1}{2\cos\varphi} = \cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 4\varphi - \cos 5\varphi + \cdots$, $\frac{1}{4\cos\varphi^2} = \cos 2\varphi - 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi - 4\cos 8\varphi + \cdots$, $\frac{1}{8\cos\varphi^3} = \cos 3\varphi - 3\cos 5\varphi + 6\cos 7\varphi - 10\cos 9\varphi + \cdots$ u. s. w. In beiden Entwicklungsgruppen, bei positivem wie bei negativem n, geht Euler vom Cosinus zum Sinus über, indem er $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ schreibt. Dadurch wird $\cos\varphi = \sin\psi$, $\cos 2\varphi = -\cos 2\psi$, $\cos 3\varphi = -\sin 3\psi$, $\cos 4\varphi = \cos 4\psi$ u. s. w. Zunächst treten Gleichungen für $2^{n-1}\sin\psi^n$ auf, in welchen wegen positiv ganzzahligem n rechts vom Gleichheitszeichen die Reihe abbricht und vorher bei ungradem n nur Sinus, bei gradem n nur Cosinus enthält, z. B. $\sin\psi = \sin\psi$, $4\sin\psi^3 = -\sin 3\psi + 3\sin\psi$, $2\sin\psi^2 = -\cos 2\psi + 1$, $8\sin\psi^4 = \cos 4\psi - 4\cos 2\psi + 3$ u. s. w. Neben diesen gesicherten Ergebnissen steht in grösster Unbefangenheit $\frac{1}{2\sin\psi} = \sin\psi + \sin 3\psi + \sin 5\psi + \sin 7\psi + \cdots$, $\frac{1}{4\sin\psi^2} = -\cos 2\psi - 2\cos 4\psi - 3\cos 6\psi - 4\cos 8\psi - \cdots$ u. s. w. War bis dahin nur $\cos\varphi = \frac{u+v}{2}$ unmittelbar benutzt und der Uebergang zu Sinusformeln vom Cosinus aus gewonnen worden, so liefert auch $\sin\varphi =$

$\frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$ Stoff zu weiteren Untersuchungen. Will man etwa $\sin\varphi^m \cdot \cos\varphi^n$ in Reihengestalt ansetzen, so genügt dazu die Erwägung, dass $\sin\varphi^m \cdot \cos\varphi^n = \frac{(u-v)^m(u+v)^n}{2^{m+n}(\sqrt{-1})^m} = \frac{u^{m+n}}{2^{m+n}(\sqrt{-1})^m}\left(1 - \frac{v}{u}\right)^m\left(1 + \frac{v}{u}\right)^n$. Zur Reihenentwicklung des Ausdruckes $S = \left(1 - \frac{v}{u}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{v}{u}\right)^n$ benutzt Euler, nachdem er $\frac{v}{u} = z$ gesetzt hat, die logarithmische Differentiation. Er schreibt $\log S = m\log(1-z) + n\log(1+z)$, dann $\frac{dS}{S} = -\frac{m\,dz}{1-z} + \frac{n\,dz}{1+z} = \frac{(n-m)dz - (m+n)z\,dz}{1-z^2}$ und $(1-z^2)\frac{dS}{dz} - fS + gSz = 0$, wo die Abkürzungen $f = n - m$, $g = m + n$ bedeuten. Wird nach der Methode der unbestimmten Coefficienten $S = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ angenommen und in die gewonnene Differentialgleichung eingesetzt, so entsteht $(A - f) + (2B - fA + g)z + (3C - A - fB + gA)z^2 + (4D - 2B - fC + gB)z^3 + \cdots = 0$ woraus die einzelnen Coefficienten der Reihe für S folgen, welche die Gleichungen erfüllen müssen $A = f$, $2B = fA - g$, $3C = fB - (g-1)A$, $4D = fC - (g-2)B$ u. s. w. Bei der Wahl der Exponenten m und n lässt Euler sich wieder den weitesten Spielraum. Er setzt unter Anderen $n = -m$, so dass eine Reihendarstellung von $\frac{\sin\varphi^m}{\cos\varphi^m} = \operatorname{tng}\varphi^m$ in Frage kommt. Am Schlusse des Aufsatzes wird von der Differentiation sowie von der Integration unendlicher trigonometrischer Reihen ganz beliebige Anwendung gemacht. Euler hatte gefunden $\cos\varphi + a\cos 2\varphi + a^2\cos 3\varphi + \cdots = \frac{\cos\varphi - a}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}$, $\sin\varphi + a\sin 2\varphi + a^2\sin 3\varphi + \cdots = \frac{\sin\varphi}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}$. Einsetzung von $a = 1$, dann von $a = -1$ liefert ihm $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots = -\frac{1}{2}$, $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \cdots = \frac{1}{2\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}}$, $\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}$. Differentiation der zweiten Reihe führt zu $\sin\varphi - 2\sin 2\varphi + 3\sin 3\varphi - \cdots = 0$, wiederholte Differentiation zu $\cos\varphi - 4\cos 2\varphi + 9\cos 3\varphi - \cdots = 0$. Dagegen führt die Reihe $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}$ durch Integration zu

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots = \frac{\varphi}{2},$$

einem Ergebnisse, welches unter die vielen falschen Angaben, man möchte fast sagen, sich verirrt hat. Die an dieser Stelle zuerst auftretende Reihenentwicklung von $\frac{\varphi}{2}$ wurde in späterer Zeit vielfach bestätigt. Wiederholte Integration führt alsdann zu $\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{1}{9}\cos 3\varphi - \cdots = \alpha - \frac{\varphi^2}{4}$. Die Constante α wird gefunden, indem $\varphi = 0$ eingesetzt wird. Alsdann entsteht $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots = \alpha$ und da die Summe $\frac{\pi^2}{12}$ der mit wechselndem Vorzeichen versehenen reciproken Quadratwurzeln bekannt ist, $\alpha = \frac{\pi^2}{12}$.

Euler war (S. 689—692) seit 1743 von Niclaus I Bernoulli wegen seines Gebrauches divergenter Reihen zur Rede gestellt worden, und niemals hat er mehr Missachtung der ihm gemachten Vorstellungen an den Tag gelegt als in dem Aufsatze, über welchen wir soeben berichtet haben. Vielleicht war dieser Umstand die Veranlassung, dass Euler in unmittelbarem Anschlusse an den betreffenden Aufsatz die allgemein wichtige Streitfrage öffentlich zu behandeln beschloss, und so entstand vermuthlich die Abhandlung *De seriebus divergentibus*[1]). Im ersten Paragraphen erklärt Euler convergente Reihen als solche, deren Glieder fortwährend abnehmen und schliesslich verschwinden; Reihen, deren Glieder nicht schliesslich verschwinden, sondern entweder von endlicher Grösse bleiben oder ins Unendliche wachsen, müssen, weil sie nicht convergiren, zu den divergenten Reihen gerechnet werden. Unter ihnen sind wieder zwei Abarten zu unterscheiden, je nachdem alle Glieder gleichen Vorzeichens sind oder von Glied zu Glied abwechselnd bald positiv bald negativ auftreten. Bei divergenten Reihen mit durchweg positiven Gliedern kann nach Eulers im zweiten Paragraphen vorgetragener Meinung ein Zweifel nicht bestehen. Ihre Summe wird immer durch einen Ausdruck $\frac{a}{0}$ dargestellt werden. Um so bestrittener ist der Summenwerth divergenter Reihen mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern. Euler berichtet hier mit grosser Unparteilichkeit über die Gründe und Gegengründe, welche geltend gemacht wurden, seit Leibniz gewagt hatte $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ zu setzen. Die Gegner dieser Meinung stützen sich wesentlich darauf, dass $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \cdots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ und dass $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$ sei, und dass die Mantisse (Euler versteht darunter das, was man heute

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1754 *et* 1755 T. V, 205—237.

Restglied nennt) nur dann weggelassen werden dürfe, wenn a einen echtgebrochenen Werth besitze. Nur in diesem Falle dürfe also die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen als eine unendliche in Rechnung gezogen werden. Dagegen sei $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ und $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$, wovon das erste Ergebniss aus der Reihe für $\frac{1}{1+a}$ durch $a = 1$, das zweite aus der Reihe für $\frac{1}{1-a}$ durch $a = 2$ hervorgehe, gleich unstatthaft. Die Anhänger der divergenten Reihen behaupten ihrerseits theils mit Leibniz (S. 366), die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ an und für sich ins Auge gefasst habe bei grader Gliederzahl die Summe 0, bei ungrader Gliederzahl die Summe 1, im Unendlichen gebe es weder Grades noch Ungrades, folglich müsse dort der mittlere Werth zwischen 0 und 1 oder $\frac{1}{2}$ auftreten, theils berufen sie sich zur Erklärung der Möglichkeit von $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ darauf, dass zum Negativen der Durchgang durch das Unendlichgrosse nicht minder führe, als der Durchgang durch 0. Sie schliessen sich also an Wallis (Bd. II, S. 902) an. Brüche, sagen sie, wachsen mit Abnahme des Nenners; wenn aber $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0}$, so müsse dieses Gesetz auch Geltung haben, wenn der Nenner unter 0 herabsinke, so müsse $\frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$ d. h. $\infty < -1$ sein. Jetzt lässt Euler wieder die Gegner der divergenten Reihen zum Worte kommen. Es gebe überhaupt keine Summe derselben. Wenn man $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ setze, so sei es zulässig von einer Summe 2 zu reden, denn je mehr Glieder der Reihe man durch gewöhnliche Addition vereinige, um so näher komme man an die 2 heran, bei divergenten Reihen dagegen sei, je mehr Glieder man durch Addition vereinige, um so weniger eine Annäherung an einen bestimmten Werth vorhanden, im Gegentheil unterscheide sich jede Summe beliebig vieler Glieder um so mehr von der nächsten, eine je grössere Gliederzahl man in ihr zusammenfasse. Merkwürdig findet Euler[1]), dass trotz dieses Gegensatzes der Meinungen niemals ein durch Anwendung divergenter Reihen hervorgebrachter eigentlicher Fehlschluss habe nachgewiesen werden können! Wo immer man z. B. die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ durch $\frac{1}{2}$ ersetzt habe, sei Fehlerloses hervorgetreten. Es gewinne daher den Anschein, als ob es sich nur um einen Wortstreit handle, und in Wirklichkeit

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1754 *et* 1755. T. V, 211, § 10.

verhalte sich die Sache so. Wenn man in der Analysis zu einem gebrochenen oder zu einem transcendenten Ausdrucke gelange, so pflege man ihn in eine geeignete Reihe zu verwandeln, mittels deren die weiteren Rechnungen leichter ausgeführt werden können; unendliche Reihen finden dem entsprechend in der Analysis nur in so weit eine Stelle, als sie aus der Entwicklung irgend eines geschlossenen Ausdrucks hervorgegangen sind, und deshalb kann auch rückwärts an Stelle der unendlichen Reihe allemal die Formel gesetzt werden, aus deren Entwicklung sie entstand. Der Fruchtbarkeit der Regeln zur Verwandlung geschlossener Ausdrücke in unendliche Reihen steht der grosse Nutzen solcher Regeln gegenüber, mit deren Hilfe man dem geschlossenen Ausdruck auf die Spur kommt, aus welchem eine vorgelegte Reihe zu entstehen vermag, und da dieser Ausdruck immer ohne Fehler an Stelle der unendlichen Reihe gesetzt werden kann, so muss der Werth beider derselbe sein. Es gibt also keine unendliche Reihe von der Art, dass nicht ein gleichwerthiger geschlossener Ausdruck gedacht werden könnte[1]). Alle Schwierigkeiten verschwinden folglich, wenn man den hergebrachten Begriff einer Summe dahin abändert, dass man sagt: **Summe einer jeden Reihe sei der geschlossene Ausdruck, aus welchem sie durch Entwicklung hervorgebracht werden kann.** Nach diesen einleitenden Bemerkungen glaubt Euler berechtigt zu sein, mit divergenten Reihen ganz beliebig umzuspringen und irgend welche Kunstgriffe anzuwenden, welche zu einer zweckmässig erscheinenden Umformung verhelfen. Ist z. B. $s = a - b + c - d + e - f + \cdots$ eine umzuwandelnde Reihe, so kann man die aufeinanderfolgenden Differenzenreihen bilden, deren jede entsteht, indem man, absehend von den den Reihengliedern vorstehenden alternirenden Vorzeichen, mit welchen verbunden sie s bilden, jedes vorhergehende Reihenglied von dem nachfolgenden abzieht. Die erste Differenzenreihe besteht also aus $b - a$, $c - b$, $d - c$, $e - d$, $f - e \cdots$. Die zweite besteht aus $c - 2b + a$, $d - 2c + b$, $e - 2d + c$, $f - 2e + d \cdots$. Die dritte lautet $d - 3c + 3b - a$, $e - 3d + 3c - b$, $f - 3e + 3d - c \cdots$ u. s. w. Heissen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ die Anfangsglieder der aufeinander folgenden Differenzenreihen, d. h. ist $\alpha = b - a$, $\beta = c - 2b + a$, $\gamma = d - 3c + 3b - a$, $\delta = e - 4d + 6c - 4b + a$ u. s. w., so ist: $\frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} = \frac{31}{32}a - \frac{13}{16}b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{16}d + \frac{1}{32}e$. Bleibt man aber

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1754 *et* 1755. T. V, 212: *et cum haec expressio semper sine errore loco seriei infinitae substitui possit, necesse est, ut utriusque idem sit valor; ex quo efficitur, nullam dari seriem infinitam, quin simul expressio finita illi aequivalens concipi queat.*

nicht bei δ stehen, sondern führt die neue Reihe nach dem in den angeschriebenen Gliedern auftretenden Gesetze endlos weiter, so erhält man einen mehr und mehr mit s zusammenfallenden Werth, d. h. man erhält:

$$s = \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} - \cdots$$

und diese Reihe convergirt ausserordentlich viel rascher als die ursprüngliche. Auch eine Umwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch wird gelehrt, bei deren Erörterung wir uns die den Grundgedanken zur Erscheinung bringende Aenderung gestatten, dass wir die Coefficienten durch mit Stellenzeigern versehene Buchstaben bezeichnen, während Euler seine Rechnung mit bestimmten Zahlencoefficienten führt. Sei also in dieser Beziehung über Euler hinausgehend $A = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots$. Setzt man $A = \frac{1}{1 + B}$, so wird $B = \frac{1}{A} - 1 = \frac{-(A-1)}{A} = \frac{a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \cdots}{1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 - \cdots} = \frac{a_1 x}{1 + C}$, beziehungsweise $\frac{1}{1 + C} = \frac{1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 - \cdots}{1 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots}$ und $C =$

$$\frac{(1 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots) - \left(1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 - \cdots\right)}{1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 - \cdots} = \frac{\frac{a_2 - a_1^2}{a_1} x - \frac{a_3 - a_1 a_2}{a_1} x^2 + \cdots}{1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 - \cdots}.$$

Nun kann man durch weitere Anwendung des gleichen Gedankens $C = \frac{\frac{a_2 - a_1^2}{a_1} x}{1 + D}$ setzen und so fort. Man erhält

$$A = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_1 x}{1 + \cfrac{\frac{a_2 - a_1^2}{a_1} x}{1 + \cdots}}}$$

Beide Umwandlungsverfahren und Abarten derselben werden an bestimmten divergenten Reihen in Anwendung gebracht.

Etwa gleichzeitig mit der Einreichung von Eulers Abhandlung über divergente Reihen bei der Petersburger Akademie erschien 1754 in Paris der I. Band eines dreibändigen Werkes von D'Alembert: *Recherches sur differens points importans du système du monde.* Schon der Titel zeigt, dass wir nicht eingehender davon zu reden haben, nur eine einzige Stelle[1]) fordert unser Verweilen. D'Alembert gab nämlich dort seine später so berühmt gewordene **Herleitung der Taylorschen Reihe mittels partieller Integration.** Taylor selbst wird dabei nicht genannt und natürlich ebensowenig dessen

[1]) D'Alembert, *Recherches sur differens points importans du système du monde* I, 50.

Herleitung der Johann Bernoullischen Reihe (S. 383), welche für D'Alembert vorbildlich gewesen sein könnte. Sei $\varphi(z)$ eine Function von z, so beginnt D'Alembert unter Benutzung eines Functionalzeichens, welches, wie wir im 118. Kapitel sehen werden, etwa 20 Jahre früher gleichzeitig von **Euler** und von **Clairaut** erfunden worden war. Die aufeinander folgenden Differentialquotienten von $\varphi(z)$ nach z nennt D'Alembert alsdann $\Delta(z)$, $\Gamma(z)$, $\Psi(z)$ mit systemloser und dadurch wenig durchsichtiger Auswahl der Functionalbuchstaben, wie denn überhaupt Klarheit der Darstellung niemals eine hervorstechende Eigenschaft D'Alemberts gewesen ist. Man wird uns gestatten, zur leichteren Uebersicht uns der späteren Bestrichelung der Differentialquotienten bedienen zu dürfen, also $\Delta(z) = \varphi'(z)$, $\Gamma(z) = \varphi''(z)$, $\Psi(z) = \varphi'''(z)$ zu setzen. D'Alembert nimmt weiter ζ als eine sehr kleine Grösse an, eine Annahme, deren Nutzen er zwar in keiner Weise begründet, welche ihm jedoch vielleicht die Berechtigung gewähren sollte, sich einer nach steigenden Potenzen von ζ fortschreitenden unendlichen Reihe zu bedienen. Nun setzt D'Alembert $\varphi(z+\zeta) = \varphi(z) + u$ und differentirt diese Gleichung nach ζ, während z constant bleibt, was gestattet sei[1]). Er erhält $\varphi'(z+\zeta)d\zeta = du$ und $u = \int \varphi'(z+\zeta)d\zeta$, mithin $\varphi(z+\zeta) = \varphi(z) + \int \varphi'(z+\zeta)d\zeta$. Weiter sei, fährt er fort, $\varphi'(z+\zeta) = \varphi'(z) + \int \varphi''(z+\zeta)d\zeta$, ferner $\varphi''(z+\zeta) = \varphi''(z) + \int \varphi'''(z+\zeta)d\zeta$ u. s. w. Durch allmähliche Einsetzung dieser Werthe entstehe: $\varphi(z+\zeta) = \varphi(z) + \int \varphi'(z)d\zeta + \int d\zeta \int \varphi''(z)d\zeta + \int d\zeta \int d\zeta \int \varphi'''(z)d\zeta + \cdots = \varphi(z) + \zeta\varphi'(z) + \frac{\zeta^2\varphi''(z)}{2} + \frac{\zeta^3\varphi'''(z)}{2\cdot 3} + \cdots$. Eine Integrationsconstante fügt D'Alembert nirgend hinzu, sagt aber auch nicht, dass er von 0 bis ζ integrire, und dass deshalb jene Constante $= 0$ sei.

Die nächsten Untersuchungen **Eulers** über Reihen sind in seiner Differentialrechnung von 1755 enthalten. Wollen wir diesem hochbedeutenden Werke, ähnlich wie wir es mit dem I. Bande der Introductio hielten, einen ausführlichen Bericht widmen, so dürfte es gerathen sein, uns zuvor umzuschauen, was inzwischen im Laufe der Jahre aus der Differentialrechnung überhaupt geworden war, und zwar ist es wesentlich England, wohin wir unsere Blicke zu richten haben.

Mochte auch die Verfehmung Leibnizens und seiner Schule, eine Frucht des Prioritätsstreites, über Newtons Tod hinaus manchen Engländer vom Studium und noch mehr von der Würdigung fest-

[1]) *ce qui nous est permis.*

ländischer Werke zurückhalten, so ganz absperren konnte auch die englische Mathematik sich nicht, und **Edmund Stone** gab 1730 *A method of fluxions* heraus, deren erster Theil nichts anderes war, als eine Uebersetzung von **L'Hospitals** *Analyse des infiniments petits*.

Auch in anderer Weise äusserte sich eine Art von Gegenwirkung gegen die unbedingte Verhimmelung Newtons und aller seiner Leistungen auf mathematischem Gebiete. **George Berkeley**[1]) (1685—1753), aus einer hohen englischen Beamtenfamilie in Irland geboren, erhielt seine Ausbildung im Trinity College in Dublin, dem er zuerst als Schüler, dann als Unterlehrer (*fellow*) bis 1713 angehörte. Dort liess er schon 1707 eine *Arithmetica absque Algebra aut Euclide demonstrata* gefolgt von *Miscellanea mathematica* erscheinen, eine herzlich unbedeutende Schrift, welche wir im vorigen Abschnitte mit Fug und Recht übergehen durften. In Dublin gab er auch 1709 den *Essay towards a new Theory of Vision*[2]) heraus, welcher mehr die Physiologie als die Physik des Sehens zum Gegenstande hat, in Dublin ferner 1710 die *Principles of Human Knowledge* und von Dublin aus wenigstens 1713 die *Dialogues between Hylas and Philonous*. Die beiden letztgenannten Schriften, besonders die über die Grundlagen der menschlichen Erkenntniss, enthalten Berkeleys philosophisches Glaubensbekenntniss, ein vollendetes Leugnen der Materie. Sie ist nicht vorhanden. Es gibt keine an und für sich ausserhalb des Geistes bestehende Körperwelt. Nur dem Menschen und Gebilden innerhalb seines Geistes kommt wirkliches Dasein zu. Im Jahre 1713 beginnen Berkeleys Wanderjahre, welche ihn sieben Jahre in verschiedenen Eigenschaften in Frankreich und Italien umherführten. Von 1721 bis 1728 war er wieder in England, dann bis 1731 in Amerika, wohin seine neu angetraute Gemahlin ihn begleitete. Schriftstellerische Thätigkeit füllte nach Berkeleys abermaliger Rückkehr nach England drei Jahre aus, 1734 wurde ihm der Bischofssitz zu Cloyne in Irland übertragen. Dort verweilte er bis 1752. Er zog sich alsdann nach Oxford zurück, wo er nach einigen Monaten starb. Seine letzten Schriften waren medicinischen Inhaltes zum Lobe des Theerwassers, welchem er die grösste Heilkraft nachrühmte. Dem Jahre 1734 gehört Berkeleys Schrift *The Analyst* an, deren

[1]) *George Berkeleys Works.* 3 Bände. London 1820. — **Berkeley**, Die Principien der menschlichen Erkenntniss, übersetzt und mit einer Einleitung über Berkeleys Leben und Schriften versehen von F. **Ueberweg**. Berlin 1869 [12. Band von **Kirchmanns** Philosophischer Bibliothek]. — **Friedrich Clausen**, Kritische Darstellung der Lehren Berkeleys über Mathematik und Naturwissenschaften. Halle 1889. [2]) Im Jahre 1733 folgte *Theory of vision vindicated and explained.*

Veröffentlichung mit seiner Uebersiedelung nach Cloyne nahezu zusammenfällt, und um derenwillen namentlich wir Berkeley hier zu erwähnen haben.

Schon in den Grundlagen der menschlichen Erkenntniss von 1710 hatte Berkeley im 118. bis 130. Paragraphen von der Mathematik gesprochen, insbesondere von den die Infinitesimalbetrachtungen einschliessenden Kapiteln derselben. Als ein Widerspruch erscheint ihm[1]) die Annahme einer aus unendlich vielen Theilen bestehenden endlichen Ausdehnung, und die Lösung des Widerspruchs verlangt er von dem Bewusstwerden[2]), dass die einzelnen Linien in den zur Unterstützung geometrischer Untersuchungen gezeichneten Figuren nur so betrachtet werden dürfen, dass man ihre Grösse ausser Acht lässt. Es gibt nichts derartiges, sagt er, wie der zehntausendste Theil eines Zolles, wohl aber einer Meile oder des Erddurchmessers, welche durch jenen Zoll dargestellt werden können. Wenn ich also ein Dreieck auf Papier zeichne und eine Seite, die z. B. nicht über einen Zoll lang ist, als Radius eines Kreises wähle, so kann ich diesen als in 10000 oder in 100000 oder mehr Theile getheilt mir vorstellen. Die Linie sei dann, meint er, ein blosses Zeichen für grössere Ausdehnungen, bei welchen so viele oder mehr Theile thatsächlich genommen werden können. In der jüngsten Zeit, fuhr Berkeley in dem Buche von 1710 fort[3]), sind die Speculationen über unendliche Grössen so weit getrieben worden und haben so seltsame Vorstellungen erzeugt, dass dadurch nicht geringe Zweifel und Widerstreit der Meinungen unter den Geometern der Gegenwart veranlasst worden sind. Berkeley bezieht sich dabei darauf, dass man sich nicht damit begnügt habe, endliche Längen in eine unendliche Zahl von Theilen zu zerlegen, sondern dass man jeden dieser unendlich kleinen Theile selbst wieder in eine unendliche Zahl unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung zerlegbar sein lasse und so fort selbst ins Unendliche.

Diesem frühen Geplänkel folgte 1734 ein ernster Angriff. Ein Freund Berkeleys hatte auf dem Krankenbette geistlichen Zuspruch abgelehnt, weil Halley, der so gewandte Handhaber von Beweisen, ihn der Unbegreifbarkeit der Lehren des Christenthums versichert habe. Das erfuhr Berkeley, und nun schrieb er seinen *Analyst* oder Rede an einen ungläubigen Mathematiker — gemeint war Halley — in welcher geprüft wird, ob Gegenstand, Grundlage und Folgerungen der modernen Analysis deutlicher zu erfassen oder

[1]) Berkeley, *Principles of Human Knowledge* § 124. [2]) Ebenda § 126 bis 127. [3]) Ebenda § 130.

augenscheinlicher herzuleiten sind, als religiöse Geheimnisse und Glaubenssätze.

Er beginnt mit der Anrede: Persönlich sind Sie mir fremd, aber nicht fremd ist mir der Name, den Sie in dem Wissenszweige, welcher Ihr besonderes Studium bildet, erworben haben und ebensowenig die Machtfülle, welche Sie in Ihrem Berufe ganz fremden Dingen beanspruchen, noch auch der Missbrauch, welchen Sie und nur zu viele Ihresgleichen bekanntermassen mit einer ihnen nicht zukommenden Machtfülle treiben, um unachtsame Persönlichkeiten bei Fragen von höchster Bedeutung irre zu leiten, bei denen Ihr mathematisches Wissen keineswegs ausreicht, Ihnen die Eigenschaft eines berufenen Richters zu gewähren.

Mit ähnlich scharfen Worten fährt Berkeley fort, schickt er im § 2 sich an, Zweifel zu erheben, ob denn der Mathematiker als solcher über ganz besonders scharfe Denkweise verfüge, welche ihn befähige ein Richteramt auszuüben, und prüft er von § 3 an die Grundlagen der Fluxionsmethode als des Schlüssels, mittels dessen die modernen Mathematiker die Geheimnisse der Geometrie und in deren Gefolge die der Natur erschliessen. Ein Haupteinwurf geht gegen die Fluxionen, beziehungsweise die Differentiale höherer Ordnung. Wenn Newton die Fluxion als die Geschwindigkeit bezeichne, mittels deren Grössen erzeugt werden, so möge das gestattet sein; aber was sei denn die zweite, die dritte Fluxion und so fort ins Unendliche? Was bedeute Geschwindigkeit einer Geschwindigkeit u. s. w.? An anderen Stellen erklärte Newton die erste Fluxion als Zuwachs *in statu nascendi.* Dadurch sei der Schwierigkeit, einen Begriff mit den höheren Fluxionen zu verbinden, ebensowenig abgeholfen. Leibniz und die Mathematiker des europäischen Festlandes, welche, sich deutlicher ausdrückend, geradezu die unendlich kleinen Theile einer Grösse als deren Differentiale erklären[1]), lassen ziemlich gleichlautende Gegenbemerkungen unbeantwortet. Ungemein wichtig sei es, die Fluxion eines Rechtecks zu finden, und Newton mache das im 2. Lemma des II. Buches der Principien folgendermassen[2]). Er sage, A möge die eine, B die andere Rechtecksseite, a und b deren momentane Zuwächse sein. Ein dem Rechteck AB in der Entstehung vorhergehendes Rechteck sei $\left(A-\frac{a}{2}\right)\left(B-\frac{b}{2}\right)=AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. Ein auf AB

[1]) Wir dürfen hier aufmerksam machen, dass Berkeley über die Entstehung der Differentialrechnung als Engländer denkt. Im § 18 des *Analyst* stellt er Fluxionstheorie und Calculus differentialis einander gegenüber, *which method is supposed to have been borrowed from the former with some alterations.*

[2]) Berkeley, *The Analyst* § 9.

folgendes Rechteck sei $\left(A+\frac{a}{2}\right)\left(B+\frac{b}{2}\right)=AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. Ziehe man das vorhergehende Rechteck von dem nachfolgenden ab, so bleibe $aB+bA$ als Fluxion des Rechteckes. Aber Newton gestatte sich da ein unerlaubtes Kunststück. Man müsse A und B um ihre ganzen Zuwächse, nicht um halbe sich ändern lassen, und dann erscheine $(A+a)(B+b)-AB=aB+bA+ab$. Nachmals habe Newton die Fluxion von x^n durch ein anderes Kunststück hergeleitet[1]). Er habe $(x+o)^n-x^n=nx^{n-1}o+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2+\cdots$ zu $(x+o)-x=o$ im Verhältniss gesetzt und $nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o+\cdots$ gefunden, welches bei $o=0$ in nx^{n-1} übergehe. Dass sei wieder unerlaubt. Wenn x beim Fliessen den Zuwachs o erhalte, so müsse dieser Zuwachs als solcher bestehen bleiben und dürfe nicht nachher $=0$ gesetzt, d. h. als gar nicht vorhanden betrachtet werden.

Allerdings verwahrt sich Berkeley dagegen, selbst missverstanden zu werden. Er beabsichtige keineswegs die mathematischen Thatsachen anzuzweifeln, welche die Anhänger der neuen Methoden beweisen. Er untersuche nur die Rechtmässigkeit ihrer Darlegungen, deren Klarheit oder Dunkelkeit, ob sie den Werth der Wissenschaftlichkeit oder nur den eines Umhertastens besitzen, und er wolle dabei zeigen, wie Irrthum Wahrheit, wenn auch nicht Wissenschaft hervorzubringen vermöge[2]). Sei[3]) z. B. (Fig. 110) ABN eine Parabel, deren Gleichung $y^2=px$ und TBL deren Berührungslinie im Punke B. Sei ferner $AP=x$, $PM=dx$, $PB=y$, $RN=dy$. In der Infinitesimalrechnung nimmt man an, das Differentialdreieck BRN sei dem Dreiecke TPB ähnlich, weil die Curve als Unendlichvieleck mit gradlinigen Seiten gedacht wird, deren eine BN mit der Berührungslinie zusammenfalle. Aus jener Dreiecksähnlichkeit folgt $RN:RB=PB:PT$, also $PT=\frac{y\cdot dx}{dy}$. Das ist aber falsch, denn nicht das Dreieck BRN, sondern BRL ist dem TPB ähnlich, und ist $NL=z$, so müsste es richtig heissen $PT=\frac{y\cdot dx}{dy+z}$, und der

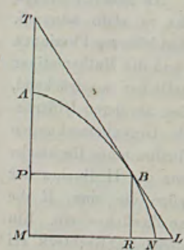

Fig. 110.

[1]) Berkeley, *The Analyst* § 13—14. [2]) Ebenda § 20. [3]) Ebenda § 21—22.

vorige Nenner war zu klein. Die Differentialrechnung folgert ferner aus $y^2=px$, dass $dy=\frac{pdx}{2y}$. Das ist abermals falsch, denn $(y+dy)^2-y^2=p(x+dx)-px$ liefert $2ydy+dy^2=pdx$ und $dy=\frac{pdx}{2y}-\frac{dy^2}{2y}$. Setzt man also in $PT=\frac{ydx}{dy}$ für den Nenner den Werth $\frac{pdx}{2y}$, so wird derselbe zu gross. Man hat zwei Fehler begangen, hat einen Nenner erst zu klein, dann zu gross gewählt, und die beiden Fehler heben einander auf, so dass ein richtiges Ergebniss $PT=\frac{2y^2}{p}=2x$ herauskommt. Dass in der That die Fehler einander aufheben können, dass $z=\frac{dy^2}{2y}$, beweist Berkeley wie folgt. Gemäss der Eigenschaften der Parabel ist $y^2=px$, $PT=2x$, und oben war $PT=\frac{ydx}{dy+z}$. Demnach ist $2x=\frac{ydx}{dy+z}$, $dy+z=\frac{ydx}{2x}=\frac{ypdx}{2px}=\frac{ypdx}{2y^2}=\frac{pdx}{2y}$, also $pdx=2ydy+2yz$. Die Parabelgleichung liefert ferner, wie oben gezeigt, $2ydy+dy^2=pdx$ und die Vergleichung der beiden Werthe von pdx lässt erkennen, dass $2yz=dy^2$ oder $z=\frac{dy^2}{2y}$. Nun wirft sich Berkeley selbst Folgendes ein[1]). Sei (Fig. 111) die Curve ARS gegeben, deren Gleichung $y=x^2$. Sei MRS eine Secante der Curve, LR deren Berührungslinie in R, $MN=s$ die Subsecante, LN die Subtangente der Curve. Man setze $NR=y$, $AN=x$, $NO=v$, $PS=z$.

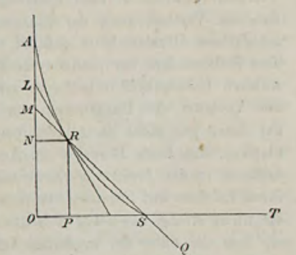

Fig 111.

Dreiecksähnlichkeit lässt erkennen, dass $\frac{z}{v}=\frac{y}{s}$, also $s=\frac{vy}{z}$. Wie $y=x^2$, ist auch $y+z=(x+v)^2$ und daher $z=2vx+v^2$. Mithin ist $s=\frac{vx^2}{2vx+v^2}=\frac{x^2}{2x+v}$. Bei unendlich kleinem v geht die Subsecante in die Subtangente mit dem ganz richtigen Werthe $\frac{x}{2}$ über, und hier scheint doch nur einmal ein Unendlichkleines weggelassen zu sein. Aber es scheint nur so! Eine Secante wird niemals Tangente, eine Subsecante niemals Subtangente. Der Irrthum des Weglassens von v

[1]) Berkeley, *The Analyst* § 24.

wird durch den zweiten Irrthum, MN und LN als gleich anzusehen, aufgehoben. Berkeley zeigt dann noch an anderen Beispielen, wie die Annahme verschwindender Zuwächse stets an dem Mangel leide, dass jede Berechtigung fehle, eine Grösse o, aus deren Vorhandensein man eben erst Schlüsse gezogen hatte, plötzlich $= 0$ werden zu lassen. Zum Schlusse kommt er wiederholt auf die Schwierigkeiten zu reden, welche das Verständniss der Fluxionen höherer Ordnung bereite.

Kaum war *The Analyst* 1734 erschienen, so traten Kämpfer für die Fluxionsrechnung auf, zunächst Dr. James Jurin[1]) (1684 bis 1750), ein berühmter Londoner Arzt und Secretär der Königlichen Gesellschaft. Ueber das Mathematische zog Jurin den Professor der Universität Cambridge Robert Smith zu Rathe. Jurin nannte sich nicht, sondern gab seiner Schrift den Titel *Geometry no friend to infidelity by Philalethes Cantabrigiensis.* Ein zweiter Vertheidiger der Fluxionsrechnung war ein Dubliner Professor Walton, der Verfasser einer *Vindication of Sir Isaac Newton's Principles of Fluxions.*

Wir kennen keine der beiden Schriften aus eigenem Augenschein, wohl aber neue Entgegnungen Berkeleys, und wenn diese nur einigermassen ehrlich geschrieben sind, was bei dem Charakter ihres Verfassers keinem Zweifel unterliegen kann, so muss man gestehen, dass die Vertheidigung der Fluxionsrechnung nicht leicht von ungeschickteren Händen hätte geführt werden können. Scheint es doch, dass insbesondere der pseudonyme Philalethes, wie schon aus der gewählten Ueberschrift erhellt, es namentlich darauf abgesehen hatte, den Vorwurf des Unglaubens von den Mathematikern abzuwenden, der ihnen gar nicht im Allgemeinen gemacht war. Einzelne Mathematiker, das hatte Berkeley im Analyst behauptet, und das wiederholte er in der *Defence of freethinking in mathematics*, missbrauchten ihren Einfluss auf Freunde, um diese zu Zweiflern an Glaubenssätzen, die nicht streng beweisbar seien, zu machen. Dem gegenüber zeige er, dass die Sätze der modernen Infinitesimalrechnung noch weniger als jene Glaubenssätze beweisbar seien. Er denke nicht daran, ein Ketzergericht gegen Mathematiker heraufzubeschwören, er wolle nur zeigen, wie wenig grade diese berufen seien, strenge Beweisführung für das zu fordern, woran man glaube. Und nun kehren die im Analyst erhobenen Einwendungen wieder[2]), eine Fluxion sei etwas

[1]) George A. Gibson in den *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* Vol. 17, und ebenderselbe: *Berkeley's Analyst and its critics: an episode in the developement of the doctrine of limits* in der *Bibliotheca mathematica* 1899, S. 65—70. [2]) Berkeley, *Defence of freethinking in mathematics* § 17.

Unverständliches, eine zweite, dritte, vierte Fluxion sei noch unverständlicher, es sei nicht möglich, sich einen Begriff von einem einfach Unendlichkleinen zu machen, noch weniger von dem Unendlichkleinen eines Unendlichkleinen. Berkeley fordert[1]) für den Leser ohne mathematische Vorbildung, aber mit gesundem Menschenverstand das Recht, darüber zu urtheilen, ob er sich eine Geschwindigkeit ohne Bewegung, eine Bewegung die keinen Raum durchmesse, ob er sich Grössen denken könne, die weder endlich noch unendlich seien, oder ein Ding ohne Grösse, welches noch theilbar sei, eine Figur ohne Raumausdehnung, ein Verhältniss von Nichts zu Nichts, ein wirkliches Product aus Nichts vervielfacht mit Etwas. Die letzterwähnten Worte zielen auf Newtons im Analyst bekämpfte Herleitung der Fluxion eines Rechtecks. Sind, sagt Berkeley etwas später[2]), a und b wirkliche Grössen, dann ist ab ein Etwas und bringt einen wirklichen Unterschied hervor, sind beide Nichts, dann werden auch die Rechtecke zu Nichts, in welchen sie als Seiten auftreten, und das ganze *momentum* oder *incrementum* ist gar Nichts. Berkeley versäumt nicht, von dem Meinungswechsel in Newtons Schriften Gebrauch zu machen, den er allerdings nicht als solchen, sondern als Widerspruch gegen sich selbst vorführt:

Sagen Sie mir doch, scharfsichtiger Herr! ob Newtons *momentum* eine endliche Grösse ist, oder ein Unendlichkleines, oder nur eine Grenze? Sagen Sie eine endliche Grösse, so heben Sie gefälligst den Widerspruch gegen das Scholium des 2. Lemma des 1. Abschnittes des I. Buches der Principien auf: *Cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.* Sagen Sie ein Unendlichkleines, so heben Sie den Widerspruch gegen die Einleitung der Quadratura auf: *Volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in geometriam introducere.* Sagen Sie eine blosse Grenze, so versöhnen Sie das mit dem Ausspruche des 1. Falles des 2. Lemma des II. Buches der Principien: *Ubi de lateribus A et B durant momentorum dimidia*, wo eine Theilung der Momente vorgenommen ist[3]).

Wir sahen, wie Berkeley im Analyst das Erscheinen richtiger Sätze trotz Anwendung der Infinitesimalrechnung aus dem Vorkommen zweier entgegengesetzter Fehler erklärte. Seine Gegner nannten diese Erklärung alt und längst von Newton im 1. Abschnitte des I. Buches der Principien vorweggenommen. Das konnte Berkeley leicht bestreiten. Erstens, sagt er[4]), habe er mit diesem Bruchstücke seiner

[1]) Berkeley, *Defence of freethinking in mathematics* § 20. [2]) Ebenda § 32. [3]) Ebenda § 36. [4]) Ebenda § 38—39.

Kritik sich gar nicht gegen Newton, sondern gegen den Marquis de l'Hôpital gewandt, und zweitens sei es unwahr und ein Zeichen der unerreichbaren Wahrheitsmissachtung des Philalethes, dass Aehnliches bei Newton sich vorfinde. Philalethes wird öffentlich herausgefordert, die von ihm behauptete Thatsache zu beweisen; er werde dazu nicht im Stande sein. Einen Versuch dazu machte Jurin allerdings mit der Schrift *The minute Mathematician, or the Freethinker no Just Thinker* (1735), welche, wenn auch etwas besser als seine *Geometry no friend to infidelity*, der Hauptsache nach doch die alten Redensarten wiederholte und von Berkeley keiner Antwort gewürdigt wurde[1]). Der Widerspruch kam, wie wir weiter unten sehen werden, vielmehr von Anhängern Newtons, von Benjamin Robins und George Pemberton.

Dem zweiten Gegner, Walton, widmete Berkeley zunächst nur einen kurzen Anhang zur *Defence of freethinking in mathematics.* Darauf scheint Walton unter dem Titel *Full answer* erwidert zu haben, und ihm neuerdings Berkeley mit einem Briefe: *Reason for not replying to Mr. Walton's full answer.* Das Hauptgewicht ist auf die Frage gelegt, ob Geschwindigkeit ohne Bewegung, Bewegung ohne Ausdehnung, Ausdehnung ohne Grösse gedacht werden könne. Walton sage Ja. Die Geschwindigkeit, welche einem Körper durch eine stetig wirkende Kraft beigelegt werde, sei nicht die gleiche in irgend zwei Punkten des durchlaufenen Weges, ändere sich vielmehr bei den geringsten Platzwechsel. Berkeley spottet über diese Beweisführung, die nicht ernst gemeint sein könne[2]). Wie? Wenn in zwei Punkten nicht die gleiche Geschwindigkeit stattfinden kann, so soll daraus folgen, dass in einem Punkte eine Geschwindigkeit stattfindet? Ist das nicht ein Schluss von der gleichen Art, wie wenn man sagte: ein und derselbe Mann kann sich nicht in zwei Nussschalen befinden, also kann er sich in einer Nussschale befinden? Auf Berkeleys Bemängelung der Fluxion des Rechtecks AB hatte Walton geantwortet, in $Ab + Ba$ bedeuteten b und a keine ausgedehnten Grössen, sondern nur Geschwindigkeiten. Was ist, fragt Berkeley neuerdings[3]), ein Product aus einer Linie in eine Geschwindigkeit? Der Zuwachs eines Rechtecks kann nur wieder ein Rechteck sein, ein Product zweier Linien, also müssen b und a Linien sein oder Zuwächse von Linien, was dasselbe ist. Gegen die Bemängelung der Fluxionen höherer Ordnung hatte Walton sich auf das Beispiel eines Würfels berufen, der sich vergrössert zeige, möge man nur eine oder zwei oder alle

[1]) Gibson l. c. [2]) Berkeley, *Reason for not replying to Mr. Walton's full answer* § 4. [3]) Ebenda § 9.

drei in einem Eckpunkte zusammentreffende Kanten als einer Vergrösserung unterworfen denken. Wo, entgegnet Berkeley[1]), ist bei Newton die Rede davon, dass bei höheren Fluxionen ihm Würfel vorschweben? Jede Grösse, auch eine Länge, muss zweite, dritte, vierte Fluxionen der Auffassung zugänglich machen, und wie kann dieses geschehen?

Es lässt sich nicht leugnen, dass Berkeleys Angriffe, wenn auch nicht durchweg neu (S. 254), nicht durchweg vernichtend, immerhin den Grundlagen der noch immer verhältnissmässig neuen Methoden gefährlich waren, und das von Berkeley erfundene Hilfsmittel der sich gegenseitig aufhebenden Fehler wurde nachmals 1797 von Lazare Carnot zum Ausgangspunkte für die Rechtfertigung der Infinitesimalrechnung genommen.

Während die Streitschriften zwischen Berkeley, Jurin, Walton gewechselt wurden, erschien ein neuer Kämpfer für die Fluxionsmethode in Benjamin Robins[2]) (1707—1751). Er war ein in Bath geborener Quäker, hatte ohne Lehrer sich reiches mathematisches Wissen angeeignet. Am bekanntesten sind seine *New principles of gunnery* (1742), in welchen seine Erfindung des ballistischen Pendels vorkommt. Als General-Ingenieur der Ostindischen Gesellschaft überwachte Robins die Anlage der Befestigungen von Madras, erkrankte darüber und starb nach zweijährigem Hinsiechen in Ostindien. Wir haben es mit seiner (S. 744) von uns angekündigten Schrift *A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios* (1735) zu thun. Robins trat für Newtons Anschauungen ein, indem er sie besser als jener selbst darlegte. Er sicherte zunächst den Satz, dass die Fluxion von $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ sich zu der von x wie $\frac{n x^{n-1}}{a^{n-1}}$ zur Einheit verhalte, durch ein den Alten nachgebildetes Exhaustionsverfahren, also so etwa wie Archimed den Beweis geführt haben könnte, wenn ihm der Satz bekannt gewesen wäre. Hierauf zeigte er, dass die Fluxionsmethode zu dem gleichen Ergebnisse führe und somit schon den Vorzug zu erkennen gebe, leicht und rasch Richtiges auffinden zu lassen. Dann erst erörtert Robins, was eigentlich unter den ersten und letzten Verhältnissen zu verstehen sei. Der Kern der Darstellung liegt in folgendem Satze: Nähert sich eine veränderliche Grösse durch fortgesetzte Zu- oder Abnahme einer bestimmten Grösse, ohne sie je zu überschreiten, und kann der Unterschied zwischen der bestimmten

[1]) Berkeley, *Reason for not replying to Mr. Walton's full answer* § 15.
[2]) Poggendorff II, 666. — Gibson l. c.

Grösse und der sich ihr nähernden Veränderlichen kleiner als irgend eine noch so kleine angebbare Grösse gemacht werden, so nimmt man an, die Veränderliche werde schliesslich der bestimmten Grösse gleich. An einer wenig späteren Stelle nimmt Robins das, was er von einer Veränderlichen ausgesagt hatte, auch für ein veränderliches Verhältniss in Anspruch: es könne einer Grenze sich nähern, ohne dass damit behauptet werden wolle, dass die im Verhältnisse stehenden Grössen selbst, jede für sich, eine endliche Grösse oder Grenze besitzen. So wurde Robins der Begründer einer unanfechtbaren Grenzmethode.

Robins' *Discourse* war gegen Niemand persönlich zugespitzt. Inhaltlich verwandt sind Streitaufsätze, welche Robins und der bald an seine Seite tretende Pemberton gegen Jurin losliessen. Sie waren erzeugt durch die Empfindung, Jurin schade der Fluxionsmethode durch seine ungeschickte Vertheidigung derselben. Jurin nahm den neuen Kampf auf, aber seine späteren Aufsätze sind nicht besser als die früheren, und man braucht sie der Vergessenheit, der sie anheimgefallen sind, nicht zu entreissen.

Dass auch Robins' Discourse nahezu der Verschollenheit anheimfiel, war die unbeabsichtigte Folge des Erscheinens eines grossartigen Werkes, welches ebenfalls die unanfechtbare Begründung der Fluxionsmethode sich als erste Aufgabe stellte, aber weit über diese hinausging. Der Verfasser war Maclaurin. Sein 1742 erschienenes Lehrbuch (S. 678) *A treatise of fluxions* wurde, wie es ausdrücklich in dessen Einleitung ausgesprochen ist, durch den Analyst von 1734 hervorgerufen, durch die dort sich kundgebenden Angriffe auf die Fluxionsrechnung, deren falsche Schlüsse und Geheimnisse. Der grösste Theil des I. Buches von Maclaurins Lehrbuch war schon 1737 gedruckt, wenn auch das Werk erst 1742 in den Handel kam. Wir sprechen nicht neuerdings von den Kapiteln, welche wir in unserem 110. Kapitel benutzt haben, wohl aber müssen wir, wie wir dort zusagten, über Anderes berichten. Maclaurin greift auf die Exhaustionsmethode der Alten zurück, deren Wesen er in folgendem Satze kennzeichnet[1]): Wenn zwei veränderliche Grössen AP und AQ, welche fortwährend in unveränderlichem Verhältnisse zu einander stehen, sich gleichzeitig zwei bestimmte Grössen AB und AD in der Weise nähern, dass sie sich von ihnen um weniger als irgend ein Angebbares unterscheiden, so muss das Verhältniss dieser Grenzen AB und AD das gleiche sein, wie das unveränderliche Verhältniss der AP und AQ. Erst nachdem er sich länger mit diesen Begriffen

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 6.

beschäftigt hat, kommt Maclaurin zur Erzeugung von Grössen mittels Bewegung. Zwei Principien, sagt er[1]), sind grundlegend. Das erste besteht darin, dass, wenn erzeugte Grössen einander fortwährend gleich sind, auch die erzeugenden Bewegungen fortwährend gleich sein müssen. Das zweite Princip ist die Umkehrung des ersten: sind erzeugende Bewegungen einander fortwährend gleich, so müssen auch die in gleicher Zeit erzeugten Grössen einander fortwährend gleich sein. Das erste Princip bildet die Grundlage der directen, das zweite die der inversen Fluxionsmethode. Der Berkeleysche Vorwurf einer Bewegung oder Geschwindigkeit ohne Raum oder Zeit wird alsdann entkräftet. Setzen wir voraus[2]), dass ein Körper in irgend einem Augenblicke der Zeit, während welcher er sich bewegt, eine Geschwindigkeit besitze, so ist damit keineswegs vorausgesetzt, Bewegung könne in einem Endpunke, einer Grenze, einem Augenblicke der Zeit oder in einem untheilbaren Punkte des Raumes stattfinden. Wir werden vielmehr diese Geschwindigkeit stets durch den Raum messen, welcher durchlaufen werden würde, wenn die Geschwindigkeit gleichförmig während einer gegebenen endlichen Zeit anhielte, und so wird sicherlich nicht gesagt werden, wir erhöben den Anspruch, eine Bewegung oder Geschwindigkeit ohne Beachtung von Raum oder Zeit denken zu müssen. Fluxionen verschiedener Ordnung erläutert Maclaurin mit Hilfe der Bewegungslehre[3]), und hier tritt der Begriff der Beschleunigung zu dem der Geschwindigkeit. Maclaurin vernachlässigt überhaupt keine Betrachtungsweise, welche sich dazu eignet, die Fluxionslehre dem Verständnisse näher zu bringen, und deshalb erinnert er auch an Neper und seine Logarithmenerklärung (Bd. II, S. 730). Deren Natur und Entstehung, sagt er[4]), ist von dem Erfinder nach einer Methode hergestellt, welche derjenigen ähnelt, die in der Fluxionstheorie zur Erklärung der Entstehung von Grössen jeglicher Art dient, und er beschrieb diese Methode nahezu mit den gleichen Ausdrücken. Zu der Lehre von dem Unendlichkleinen leitet die Bemerkung hinüber[5]), es wäre unverantwortlich, den Geometern nicht gestatten zu wollen, sich eine gegebene, beispielsweise einen Zoll lange, und in der Entfernung von zehn Fuss sichtbare Strecke in mehr Theilchen getheilt zu denken, als in dieser Entfernung unterschieden werden können, da bei Näherbringung der Strecke eine grössere Anzahl von Theilchen thatsächlich unterschieden werden. Dann heisst es an einer anderen

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 55. [2]) Ebenda pag. 56, § 8. [3]) Ebenda pag. 99—103, § 66—70. [4]) Ebenda pag. 158, § 151. [5]) Ebenda pag. 243, § 291.

Stelle[1]), die Infinitesimalbetrachtungen seien nur andere Ausdrucksweisen für die Auffassung sich bewegender Grössen. Das Gleiche gelte für die ersten und letzten Verhältnisse. Allerdings sei Vorsicht unerlässlich; bei Infinitesimalbetrachtungen müsse man namentlich darauf achten, dass man nicht über die Ordnung des Unendlichkleinen strauchle; bei Uebung der nöthigen Vorsicht aber seien die vorgeworfenen Irrthümer in der Infinitesimalrechnung wie in der Fluxionsmethode gegenstandslos.

Neben diesen der Begründung der Infinitesimalmethoden gewidmeten Stellen enthält Maclaurins Treatise of fluxions noch sehr viel Lesenswerthes. Wir heben hier nur zweierlei hervor, werden auf ein Drittes im 118. Kapitel zu reden kommen.

Die Lehre von den grössten und kleinsten Werthen war früher nur so weit geführt, dass man das Verschwinden der ersten Ableitung und das Vorzeichen der zweiten Ableitung derjenigen Function, die auf ein Maximum oder ein Minimum untersucht werden sollte, beachtete. Sie erhielt jetzt die Weiterbildung[2]), dass unter Umständen noch die folgenden Ableitungen hergestellt wurden, und dass Maclaurin zeigte, dass, wenn ein Werth der unabhängigen Veränderlichen x sämmtliche Ableitungen der Function y von der 1^{ten} anfangend bis zuletzt zur n^{ten} verschwinden lasse, ein Maximum oder Minimum nur dann stattfinde, wenn n ungrad ist, bei gradem n dagegen nicht stattfinde, und dass im ersteren Falle das negative, beziehungsweise positive Vorzeichen der $n+1^{\text{ten}}$ Ableitung das Kennzeichen eines Maximum, beziehungsweise eines Minimum bilde.

Das Zweite, was wir hier zu erwähnen nicht unterlassen wollen, ist der später sogenannte Maclaurinsche Satz von der Anziehung confocaler Ellipsoide[3]). Schon der Begriff der diesem Satze zu Grunde liegenden Körper, ja der der entsprechenden ebenen Figuren war neu, und uns wenigstens ist keine frühere Erwähnung concentrischer und zugleich confocaler Ellipsen erinnerlich, als wenn Maclaurin sagt[4]): Seien ADP, Pdp zwei Halbellipsen, welche den gleichen Mittelpunkt C und den gleichen Brennpunkt F besitzen. Maclaurin hat nun nach einander folgende Sätze bewiesen: 1. Die Kräfte, mit denen confocale Rotationsellipsoide — Maclaurin nennt sie durchweg Sphäroide — denselben auf ihrer verlängerten Rotationsaxe liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 413—423, § 495—505. [2]) Ebenda pag. 226, § 261 und pag. 659, § 859. [3]) Ebenda pag. 540, § 649; pag. 541, § 651; pag. 543, § 653. Vergl. F. Grube in der Zeitschr. Math. Phys. XVI, 261 bis 266. [4]) Ebenda pag. 539, § 648.

2. Die Kräfte, mit denen confocale Rotationsellipsoide denselben in der verlängerten Ebene ihres Aequators liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen. 3. Die Kräfte, mit denen dreiaxige confocale Ellipsoide denselben auf ihrer verlängerten Axe liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen. Die Beweise der beiden ersten Sätze sind synthetisch-geometrischer Natur und genau durchgeführt. Der Beweis des dritten wesentlich allgemeineren Satzes überlässt dem Leser die Ausfüllung einiger weniger Lücken, schliesst sich aber so eng an die vorhergehenden Beweise an, dass es keinem Leser, der bis dahin verständnissvoll folgte, schwer fallen konnte, jene kleinen Ergänzungen vorzunehmen.

Was wir übrigens von der Natur der Beweise zu den Sätzen über Anziehung sagten, das gilt von dem ganzen Werke. Maclaurin hat sich fast überall bemüht, synthetisch geometrische Beweise zu liefern. Nicht allein, dass er dadurch in einen gewissen Einklang mit Newtons Principien kam, er konnte auch der niemals angezweifelten Exhaustionsmethode der Alten sich nähern und dadurch um so sicherer den Zweck erfüllen, den er (S. 746) sich als eigentliche Aufgabe gestellt hatte, die Infinitesimalmethode gegen Angriffe zu vertheidigen.

Möglicherweise wäre an dieser Stelle ein Eingehen auf Georg Wolfgang Kraffts 1752 in Petersburg gedruckte Schrift *De infinito mathematico ejusque natura* geboten, doch kennen wir dieselbe nur dem Titel nach.

113. Kapitel.

Eulers Differentialrechnung.

Wir sind bei Eulers *Differentialrechnung*[1]) von 1755 angelangt. Es ist schwer, so beginnt Euler seine Vorrede, die Differentialrechnung und die Analysis des Unendlichen, wovon jene ein Theil ist, denen zu erklären, die darin noch gar keine Kenntniss besitzen. Die Verhältnisse der Zuwächse einer Veränderlichen und ihrer Function, heisst es dann ungefähr, sollen unter der Voraussetzung beiderseitigen Nullseins untersucht werden, und die Differentialrechnung ist nichts anderes als die Methode, das Verhältniss der verschwindenden

[1]) Wir bedienen uns der sehr verbreiteten deutschen Uebersetzung von Michelsen (1790), auf welche sich die Seitenzahlen unserer Anführungen beziehen. Die gleichfalls angegebene Paragraphennummer vermittelt die Vergleichung des lateinischen Originals.

Zuwächse oder Incremente zu bestimmen, welche die Functionen veränderlicher Grössen erhalten, wenn die veränderlichen Grössen, deren Functionen sie sind, um ein verschwindendes Increment vermehrt werden[1]). Die Integralrechnung ist dann die Methode, aus dem Verhältnisse der verschwindenden Incremente die Functionen zu finden, von welchen sie dergleichen Incremente sind[2]). Um jene Verhältnisse bezeichnen zu können, hat man für die verschwindenden Incremente Symbole eingeführt und hat sie Differentiale genannt, nur muss man dabei beständig vor Augen haben, dass man daraus, weil sie im strengen Verstande Null sind, nichts weiter ableite, als das Verhältniss derselben zu einander, welches man allerdings im Stande ist, durch endliche Grössen anzugeben[3]). Dass die Differentiale nicht etwa unendlich klein, sondern streng Null sind, folgt aus der Richtigkeit der Ergebnisse, welche aus dem Weglassen von Differentialen in der Differentialrechnung gewonnen werden; es müsste sonst irgend ein Fehler entstehen, es sei denn, dass man den begangenen Fehler durch einen entgegengesetzten verbessert hätte, und das ist nicht der Fall[4]).

So hat Euler sein Glaubensbekenntniss gleich in der Vorrede niedergelegt. Er entfernt sich von Leibniz, indem er von dem Unendlichkleinen nichts wissen will, er nimmt auch nicht mit Berkeley einander aufhebende Irrthümer an, er verschmäht Newtons Grenzwerthe, er sieht in den Differentialen wirkliche Nullen, in den Differentialquotienten Brüche mit Nullen im Zähler und Nenner, welche aber gleichwohl einen endlichen Werth besitzen.

Die Vorrede ist, wie es meistens geschieht, für solche Leser geschrieben, welche den im Werke behandelten Gegenstand schon mehr oder weniger beherrschen. Die Ausführung der dort angedeuteten Gedanken gibt die Differentialrechnung selbst.

Das 1. Kapitel, Von den Differenzen, entwickelt folgende Begriffe. Ist y eine Function von x und ersetzt man in ihr x durch $x+\omega$, durch $x+2\omega$, durch $x+3\omega$, $\cdots$ durch $x+n\omega$, so entstehen aus y die Werthe y^{I}, y^{II}, y^{III}, $\cdots y^{(n)}$, deren Differenzen man bildet. Man erhält[5]) $y^{\mathrm{I}}-y=\Delta y$, $y^{\mathrm{II}}-y^{\mathrm{I}}=\Delta y^{\mathrm{I}}$, $y^{\mathrm{III}}-y^{\mathrm{II}}=\Delta y^{\mathrm{II}}$ u.s.w. mit erstmaliger Einführung des Differenzenzeichens. Auch die höheren Differenzen hat Euler eingeführt und symbolisch dargestellt[6]): $\Delta\Delta y=\Delta y^{\mathrm{I}}-\Delta y$, $\Delta\Delta y^{\mathrm{I}}=\Delta y^{\mathrm{II}}-\Delta y^{\mathrm{I}}$, $\Delta^3 y=\Delta\Delta y^{\mathrm{I}}-\Delta\Delta y$ u.s.w. Die nächstliegenden Aufgaben bestehen darin: zu gegebenen Functionen ihre Differenzen, zu gegebenen Differenzen ihre Functionen zu ermitteln. Die erste dieser Aufgaben wird stufenweise gelöst. Differenzen jeder Ordnung einer Summe von Functionen bestehen aus der Summe der Differenzen der einzelnen Functionen. Differenzen einer Constanten sind Null. Differenzen des Productes einer Function in einen constanten Coefficienten bestehen aus dem Producte jenes Coefficienten in die entsprechende Differenz der Function. Die erste Differenz des Productes pq zweier Functionen[1]) ist $p\cdot\Delta q+q\cdot\Delta p+\Delta p\cdot\Delta q$. Dann kommen die Differenzen aller Ordnungen der Potenz x^n an die Reihe und bei ihrer Bildung erweist sich eine kleine Tabelle als nützlich, welche in ihren Anfängen folgendermassen aussieht[2]):

y	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Δy	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Delta^2 y$	0	0	2	6	14	30	62	126	254
$\Delta^3 y$	0	0	0	6	36	150	540	1806	5796
$\Delta^4 y$	0	0	0	0	24	240	1560	8400	40824
$\Delta^5 y$	0	0	0	0	0	120	1800	16800	126000
$\Delta^6 y$	0	0	0	0	0	0	720	15120	191520
$\Delta^7 y$	0	0	0	0	0	0	0	5040	141120

und deren Entstehung der Art ist, dass jede ihrer Zahlen gefunden wird, indem man die vorhergehende Zahl ebenderselben Zeile zu der darüber stehenden Zahl addirt und die Summe mit dem Ordnungszeiger des vorn stehenden Differenzenzeichen multiplicirt, z. B. $5(1800+1560)=16800$. Führt man ferner, woran Euler noch nicht dachte, Abkürzungszeichen für die Binomialcoefficienten ein, schreibt z. B. $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}=\binom{n}{k}$, so entstehen die Gleichungen

$$y = x^n$$

$$\Delta y = \binom{n}{1}\omega x^{n-1}+\binom{n}{2}\omega^2 x^{n-2}+\binom{n}{3}\omega^3 x^{n-3}+\cdots$$

$$\Delta^2 y = 2\binom{n}{2}\omega^2 x^{n-2}+6\binom{n}{3}\omega^3 x^{n-3}+14\binom{n}{4}\omega^4 x^{n-4}+\cdots$$

$$\Delta^3 y = 6\binom{n}{3}\omega^3 x^{n-3}+36\binom{n}{4}\omega^4 x^{n-4}+150\binom{n}{5}\omega^5 x^{n-5}+\cdots$$

$$\Delta^4 y = 24\binom{n}{4}\omega^4 x^{n-4}+240\binom{n}{5}\omega^5 x^{n-5}+1560\binom{n}{6}\omega^6 x^{n-6}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo jede Reihe fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht, was bei ganzzahlig positivem n stets der Fall sein muss. Auch die allgemeine

1) Euler, Differentialrechnung I, S. LIV. 2) Ebenda I, S. LVI—LVII. 3) Ebenda I, S. LXIII. 4) Ebenda I, S. LXXV. 5) Ebenda I, 5, § 4. 6) Ebenda I, 6—7, § 6.

1) Euler, Differentialrechnung I, 10—11, § 12. 2) Ebenda I, 16, § 14.

Formel für $\Delta^m(x^n)$ ist Euler nicht entgangen[1]), und er geht so weit, von allen diesen Formeln auch noch Gebrauch zu machen, wenn n keine ganze positive Zahl ist. Dann brechen freilich die für die einzelnen Differenzen sich ergebenden Reihen nicht ab, sondern laufen ins Unendliche fort. Die gleichen unendlichen Reihen z. B. für $\Delta(x^{-2})$ ergeben sich auch folgendermassen. Ist $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, so ist $y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{(x+\omega)^2}$ und $\Delta y = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{x^2}$. Verwandelt man dann $\frac{1}{(x+\omega)^2}$ durch Division in eine nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende unendliche Reihe, deren Anfangsglied $\frac{1}{x^2}$ durch $-\frac{1}{x^2}$ vernichtet wird, so entsteht, wie aus der allgemeinen Formel, $\Delta(x^{-2}) = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \cdots$. Eine dem letztgelehrten Verfahren nachgebildete Entwicklung führt zu den Differenzen transcendenter Functionen. Der Zusammenhang der auf einander folgenden $y, y^{\mathrm{I}}, \cdots y^{(n)}$ mit Δy, $\Delta^2 y \cdots$ wird erörtert[2]) und $y^{(n)} = y + \binom{n}{1}\Delta y + \binom{n}{2}\Delta^2 y + \binom{n}{3}\Delta^3 y + \cdots$ ermittelt. So oft n ganzzahlig positiv ist, bricht der Reihenausdruck für $y^{(n)}$, d. h. für den Werth, welchen y annimmt, wenn x durch $x + n\omega$ ersetzt wird, von selbst ab, allein auch hier wird die Formel mit grösster Unbefangenheit als unendliche Reihe benutzt, um $y^{(-n)}$ zu ermitteln, d. h. den Werth, welchen y in Folge des Ueberganges von x in $x - n\omega$ annimmt. Als zweite Hauptaufgabe bezeichneten wir es, die Function aus ihrer Differenz zu finden, eine Operation, welcher das Summenzeichen $\sum$ dient[3]). Wenn $z = \Delta y$, so ist $y = \sum z$, genauer $y = \sum z + C$, da die hinzutretende additive Constante bei der Differenzenbildung wegfällt. Das $\sum$ einer Summe besteht aus der Summe der $\sum$. Ein constanter Coefficient hinter dem $\sum$ kann vor dasselbe gesetzt werden. Beide Regeln vereinigt führen zur Kenntniss von $\sum(x^n)$. Da nämlich $\Delta(x^1) = \omega$, $\Delta(x^2) = 2\omega x + \omega^2$, $\Delta(x^3) = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$ u. s. w., so ist $\sum(\omega) = x$, $\sum(2\omega x + \omega^2) = x^2 = \sum(2\omega x) + \sum(\omega^2) = 2\omega\sum x + \omega x$ und $\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$. Ferner $\sum(3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3 = \sum(3\omega x^2) + \sum(3\omega^2 x) + \sum(\omega^3) = 3\omega\sum(x^2) + 3\omega^2\sum x + \omega^2 x = 3\omega\sum(x^2) + \frac{3\omega}{2}x^2 - \frac{3\omega^2}{2}x + \omega^2 x = 3\omega\sum(x^2) + \frac{3\omega}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}x$ und $\sum(x^2)$

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 17, § 15. [2]) Ebenda I, 25, § 23. [3]) Ebenda I, 27, § 26.

$= \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$ u. s. w. Die allgemeine Formel[1]) zeigt $\sum(x^n)$ als eine Summe von Gliedern beginnend mit x^{n+1}, x^n, x^{n-1}, dann aber umschichtig auftretenden Potenzen von x, als x^{n-3}, $x^{n-5} \cdots$. Auch bei negativem n wendet Euler mit grösster Gemüthsruhe die Formel an, ausser in dem einzigen Falle $n = -1$. Das Glied der Entwicklung, welches x^{n+1} enthält, heisst nämlich immer $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ und würde bei $n = -1$ in $\frac{x^0}{0 \cdot \omega}$ übergehen. Wesentlich bequemer findet sich das $\sum$ gewisser Producte[2]). Aus $\Delta[(x+\omega)\cdot(x+2\omega)] = 2\omega(x+2\omega)$ folgt $\sum(x+2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega)$, beziehungsweise $\sum(x+n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)$. Aus $\Delta[(x+(n-1)\omega)\cdot(x+n\omega)\cdot(x+(n+1)\omega] = 3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$ folgt $\sum[(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)] = \frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)\cdot(x+n\omega)\cdot(x+(n+1)\omega)$ u. s. w. Auch bei den Differenzen gebrochener Functionen erweist dieser Weg sich gangbar. $\Delta\left(\frac{1}{x+n\omega}\right) = \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$ und deshalb $\sum\left(\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}\right) = -\frac{1}{\omega}\frac{1}{x+n\omega}$. Aehnlicherweise ist $\sum\left(\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}\right) = -\frac{1}{2\omega}\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$ u. s. w. Ist die Function, deren $\sum$ gesucht wird, eine echtgebrochene, aber mit nicht constantem Zähler, so ist der Bruch in seine Partialbrüche zu zerlegen und für jeden derselben die Bildung des $\sum$ vorzunehmen. Wir haben einen sehr ausführlichen Auszug aus dem 1. Kapitel veranstaltet, weil in ihm erstmalig ein Lehrbuch der Differentialrechnung eine leichtverständliche, wenn auch nicht immer gründliche Lehre von den endlichen Differenzen und Summen zum Ausgangspunkte nahm. Wir glauben wenigstens trotz des Vorausgehens von Taylors *Methodus incrementorum* diesen Ausspruch rechtfertigen zu können, da jenes Werk kaum als leichtverständlich und noch weniger als Lehrbuch der Differentialrechnung wird bezeichnet werden wollen.

Das 2. Kapitel, Von dem Nutzen der Differenzen in der Lehre von den Reihen. Es gibt Reihen, bei denen in Folge von so oft als nöthig wiederholter Differenzenbildung zwischen den einzelnen Gliedern irgend einmal lauter Nulldifferenzen auftreten, und

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 31, § 29. [2]) Ebenda I, 33—35, § 32—34.

andere Reihen, bei denen dieses nie der Fall ist. Zu den letzteren gehört die geometrische Reihe, deren Differenzen stets aufs Neue geometrische Reihen bilden, zu den ersteren gehören die arithmetischen Reihen verschiedener Ordnung, und von ihnen will Euler handeln. Bei ihnen ist das allgemeine Glied und das summirende Glied zu finden, d. h. zwei Functionen von x von solcher Beschaffenheit, dass die erste das x^{te} Glied der vorgelegten Reihe liefert, die zweite die Summe der ersten x Glieder derselben. Alle Reihen, deren Differenzen einer bestimmten Ordnung constant, oder die der nächsthöheren Ordnung als Nullen erscheinen, sind recurrente Reihen[1]), und deren allgemeines Glied kann gefunden werden. Mittels desselben findet sich sogar der Werth eines Gliedes mit gebrochenem Stellenzeiger, d. h. die Interpolation einer Reihe ist ermöglicht[2]). Auf einander folgende summirende Glieder bilden selbst eine Reihe, die summirende Reihe, zu welcher die gegebene Reihe als erste Differenzenreihe gehört. Sind also die n^{ten} Differenzen der gegebenen Reihe constant, so bilden diese die $n+1^{\text{ten}}$ Differenzen der summirenden Reihe, welche folglich wieder eine recurrente Reihe ist, deren allgemeines Glied daher gefunden werden kann[3]). In eine Formel gekleidet, spricht diese Folgerung sich also aus[4]): Sei X das x^{te} Glied der vorgelegten Reihe, S die Summe ihrer x ersten Glieder. Offenbar ist $S - X$ die Summe der $x - 1$ ersten Glieder und $\Delta(S - X) = S - (S - X) = X$, mithin $S - X = \sum X$. Unter Hinzufügung der Constanten C wird also $S = C + X + \sum X$, wo C sich dadurch bestimmt, dass augenscheinlich bei $x = 0$ auch $S = 0$ sein muss. Euler wendet die Formel an, um die Summe der n^{ten} Potenzen der x ersten Zahlen zu ermitteln, wozu der im 1. Kapitel gefundene Werth von $\sum x^n$ dient. Euler macht dann darauf aufmerksam[5]), dass die auf einander folgenden Summen $1^n + 2^n + \cdots + x^n$ und $1^{n+1} + 2^{n+1} + \cdots + x^{n+1}$ leicht aus einander gefunden werden können, wenn n eine gerade Zahl ist, indem alsdann von dem höchsten Gliede der Summenformel anfangend ein jedes mit $n+1$ und noch mit einem Factor vervielfacht wird, welcher der Reihe nach $\frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n}$, dann $\frac{1}{n-2}$, $\frac{1}{n-4}$, $\cdots \frac{1}{2}$ heisst. Ist n ungrad, so heisst der letzt erscheinende Zahlenfactor $\frac{1}{3}$, dann aber tritt in der Summenformel der $n+1^{\text{ten}}$ Potenzen noch ein neues Glied φx hinzu. Die Constante φ findet man, indem $x = 1$ gesetzt wird; φ muss nämlich

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 47, § 46. [2]) Ebenda I, 52, § 52. [3]) Ebenda I, 53, § 53. [4]) Ebenda I, 57, § 59 [5]) Ebenda I, 61—62, § 63.

alsdann die übrigen Coefficienten der Formel zur Einheit ergänzen. Den gleichen Satz hatte (S. 347) Jakob Bernoulli ausgesprochen und vermuthlich ebenso hergeleitet.

Das 3. Kapitel, Von dem Unendlichen und dem Unendlichkleinen, leugnet eigentlich die Begriffe, welche seine Ueberschrift bilden. Eine unendliche Grösse gibt es nicht[1]), weil jede Grösse ins Unendliche vermehrt werden kann. Eine Grösse aber, die immerfort vermehrt wird, wird nicht früher unendlich, ehe sie ohne Ende gewachsen ist, und was ohne Ende geschehen muss, das kann man nicht als schon geschehen betrachten. Ein Unendlichkleines aber ist[2]) nichts anderes, als eine verschwindende Grösse und folglich in der That $= 0$. Wenn eine Grösse kleiner sein soll als jede Grösse, die sich angeben lässt, so muss sie nothwendig $= 0$ sein, weil sich, wenn sie nicht $= 0$ wäre, eine andere ihr gleiche Grösse angeben liesse, welches wider die Voraussetzung streitet. Mit dieser Vereinheitlichung der beiden Begriffe, des Unendlichkleinen und der Null, ist Euler auf dem Standpunkte angelangt, den er schon in der Vorrede als den seinigen schilderte. Von ihm aus betont er dann weiter[3]), dass $n \cdot 0 = 0$ und also $n : 1 = 0 : 0$ ist, dass zwei Nullen, ob sie gleich arithmetisch betrachtet in dem Verhältniss der Gleichheit stehen, dennoch jedes geometrische Verhältniss zu einander haben. Letztere Möglichkeit gibt auch die Erklärung der Unendlichkleinen verschiedener Ordnung. Ist dx ein Unendlichkleines, also thatsächlich $= 0$, so gilt das Gleiche für dx^2, für dx^3 u. s. w. Es gilt auch, dass Unendlichkleines gegen Endliches, Unendlichkleines höherer Ordnung gegen solches niedrigerer Ordnung weggelassen werden kann, beziehungsweise das Verhältniss der Gleichheit nicht stört, mag man arithmetisches oder geometrisches Verhältniss darunter verstehen: $(a + n \cdot dx) - a = n \cdot dx = 0$ und $\frac{a + n \cdot dx}{a} = 1 + \frac{n}{a} \cdot dx = 1$ bestätigen diese Wahrheit ebenso wie $(dx \pm dx^2) - dx = \pm dx^2 = 0$ und $\frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$. Wie dx ein Symbol des Unendlichkleinen oder der 0 ist, so hat man ∞ als Symbol des Unendlichgrossen, des Quotienten eines Endlichen dividirt durch 0, aufzufassen. Ja es scheint aus der Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$ selbst möglich, dass Nichts mit Unendlichgross multiplicirt ein endliches Product gebe, welches allerdings auffallend sein müsste, wenn man nicht durch eine ganz richtige Folgerung darauf käme[4]). Jenes Product kann

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 73, § 75. [2]) Ebenda I, 79, § 83. [3]) Ebenda I, 81, § 85. [4]) Ebenda I, 86, § 92. Vergl. auch I, 88, § 94 am Schlusse.

sogar unendlich gross werden, wie es unendlich klein sein kann: $\frac{a}{dx^n} \cdot b \cdot dx^m = abdx^{m-n}$ ist, je nachdem $m > n$, $m = n$, $m < n$, unendlichklein, endlich, unendlichgross[1]). Die Stellung der 0, aber auch des Unendlichgrossen, innerhalb von Reihen endlicher Grössen gibt zu mannigfachen Betrachtungen Anlass. Die nach rückwärts fortgesetzte Zahlenreihe $\cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots$ führt durch die 0 hindurch vom Positiven zum Negativen. Die Reihe $\cdots \frac{1}{-4}, \frac{1}{-3}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ vollzieht den gleichen Uebergang durch das Unendlichgrosse hindurch. Man hat aus Ersterem geschlossen, die negativen Zahlen seien kleiner als 0, aus Letzterem sie seien grösser als ∞ (Bd. II, S. 902). Solche Schlüsse sind voreilig. Setzt man die Quadrate der positiven und negativen Zahlen und deren Umkehrungen in Reihengestalt an, so tritt in $(-4)^2$, $(-3)^2$, $(-2)^2$, $(-1)^2$, 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 und in $\left(\frac{1}{-4}\right)^2, \left(\frac{1}{-3}\right)^2, \left(\frac{1}{-2}\right)^2, \left(\frac{1}{-1}\right)^2, \frac{1}{0^2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$ die 0 zwischen 1 und 1, aber auch ∞ zwischen 1 und 1, und Niemand wird von diesen Reihen behaupten wollen, sie setzten in ihren Gliedern das Grösserwerden regelmässig fort, so wenig man aus der Zahlenreihe $\frac{1}{\sqrt{-4}}, \frac{1}{\sqrt{-3}}, \frac{1}{\sqrt{-2}}, \frac{1}{\sqrt{-1}}, \frac{1}{\sqrt{0}}, \frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}$ auf Beziehungen zwischen dem Unendlichgrossen und dem Imaginären schliessen darf[2]). Den Schluss des Kapitels bilden Erörterungen über den Begriff einer divergenten Reihe und ihrer Summe[3]) in genauer Uebereinstimmung mit dem, was Euler kurz zuvor im V. Bande der neuen Petersburger Commentarien ausgeführt hatte. Er sucht die ganze Schwierigkeit, deren Vorhandensein er keineswegs leugnet, auf den Sinn, der mit dem Worte Summe verknüpft wird, überzuladen (S. 734).

Das 4. Kapitel, Von der Natur der Differentiale aller Ordnungen, führt Euler zu den Ergebnissen des 1. Kapitels zurück. Er lässt den Zuwachs ω, welchen x erhalten soll, $= 0$ sein und deutet ihn deshalb durch das Symbol dx an, worauf Δy zu dem gleichfalls nicht von 0 verschiedenen dy wird. Wie es Differenzen höherer Ordnung gab, in welchen ω einen Bestandtheil bildete, so werden Differentiale höherer Ordnung wieder durch $\omega = dx$ gebildet werden. Die Bezeichnung ist an und für sich sehr nebensächlich,

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 90, § 97. [2]) Ebenda I, 90—93, § 98 bis 101. [3]) Ebenda I, 93—100, § 102—111.

und es lohnt kaum, darüber zu streiten, ob man Newton oder Leibniz in Schreibweise und Benennung nachahmen solle. Für die Leibnizische Form spricht vorzugsweise die Möglichkeit, ein Differential unbestimmter Ordnung mittels $d^n y$ zu bezeichnen, dem die englische Schreibweise nichts Aehnliches an die Seite stellen kann[1]). Freilich äussert Euler nebenbei einen Wunsch, der leider unerfüllt geblieben ist. Als Wurzelzeichen, sagt er[2]), gebrauche man den Buchstaben r, dem man aber die Gestalt $\sqrt{}$ gegeben habe, und dadurch sei r zu beliebiger Verwendung wieder frei geworden. Wenn man Logarithmus durch l, Differential durch d abkürze, empfehle es sich, diese Buchstaben gleichfalls in etwas veränderter Gestalt anzuwenden, damit man sie nicht mit dem gewöhnlichen Buchstaben, durch welche man beliebige Grössen zu bezeichnen wünschen könne, verwechsle. Die Differentiale höherer Ordnung von x selbst, welches voraussetzungsmässig sich durch immer gleiche Zuwächse dx ändert, müssen wegen der Unveränderlichkeit von dx an sich 0 sein. Damit ist, sagt Euler bei dieser Gelegenheit[3]), nicht etwa gemeint, es seien $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ als unendlich kleine Grössen, sondern diese höheren Differentiale seien ebensowohl jedes für sich 0, als auch im Vergleich mit irgend welchen Potenzen von dx, eine Eigenschaft, welche sie mit den Differentialen jeder Ordnung aller constanten Grössen theilen. Anders verhält es sich[4]) mit den Differentialen höherer Ordnung der Function y. Hier ist $dy = pdx$, und setzt man voraus $dp = qdx$, so wird $d^2y = qdx^2$, d. h. das zweite Differential von y hat ein endliches Verhältniss zur zweiten Potenz von dx. Ganz anders lauten die Formeln der höheren Differentiation von y und werden z. B. $d^2y = pd^2x + qdx^2$, wenn dx nicht beständig ist, d. h. wenn die Werthe $x, x^{\mathrm{I}}, x^{\mathrm{II}}, \cdots$ nicht in arithmetischer Progression auf einander folgen, welches eintrifft, wenn x und ebenso y Functionen einer dritten Veränderlichen sind, die selbst einander gleiche Incremente erhält[5]). Bei Gleichungen zwischen Differentialausdrücken muss Homogenität herrschen, wobei die Ordnung der Differentiale für ihre Dimension gilt, und Glieder höherer Dimension neben niedrigeren additiv verschwinden[6]). Das Kapitel schliesst mit kurzen Bemerkungen über einfache und wiederholte Integration, welche den Differentiationen gegenüberstehen und mit Vorschriften bezüglich der Bezeichnung. Der Buchstabe d soll ausschliesslich zu dem ihm nachfolgenden gehören, mit welchem er ein untrennbares Ganzes bildet, auf welches

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 104, § 116. [2]) Ebenda I, 106, § 119. [3]) Ebenda I, 109—111, § 124—125. [4]) Ebenda I, 111, § 127. [5]) Ebenda I, 112—114, § 129—130. [6]) Ebenda I, 116—118, § 134—137.

sich ein etwa auftretender Exponent bezieht. Soll eine Potenz der Veränderlichen differentiirt werden, so muss eine Klammer oder ein Pünktchen solches andeuten und $d(x^2) = d \cdot x^2$ von $dx^2 = (dx)^2$ unterscheiden[1]). Auch von den Bezeichnungen der Integralrechnung ist die Rede.

Das 5. Kapitel, Von der Differentiation der algebraischen Functionen einer veränderlichen Grösse; das 6. Kapitel, Von der Differentiation der transcendenten Functionen; das 7. Kapitel, Von der Differentiation der Functionen zweier oder mehrerer veränderlicher Grössen; das 8. Kapitel, Von der ferneren Differentiation der Differentialformeln; das 9. Kapitel, Von den Differentialgleichungen, beschliessen den I. Theil der Eulerschen Differentialrechnung. Wir können verhältnissmässig rasch über sie hinweggehen. Euler lehrt in ihnen das eigentliche Differentiiren, mithin Dinge, welche zumeist schon in allen vorhandenen Lehrbüchern der Differentialrechnung vorhanden waren, wenn auch die Herleitung nicht überall in gleicher Weise erfolgte. Euler setzt den binomischen Lehrsatz als für jeden Werth des Exponenten unbedingt giltig voraus und findet von ihm aus $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, wovon er dann bei der Differentiation verwickelterer Functionsformen Gebrauch macht. Er kommt dabei zu dem bedeutsamen Satze[2]), dass man bei Aufsuchung des Differentials einer Function das Differential eines jeden Theiles so nehmen solle, als wenn nur dieser Theil veränderlich und die übrigen alle beständige Grössen wären, worauf man alle gefundenen Differentiale zu einer Summe zu vereinigen habe. In heutiger Redeweise entspricht diesem Satze die Regel, dass das totale Differential einer Function sich aus der Summe ihrer partiellen Differentiale zusammensetze. Der Satz wird z. B. auf die Differentiation von p^q angewandt[3]), später auf die Differentiation von Functionen mehrerer Veränderlichen[4]), und wir finden auch ein erstes Symbol partieller Differentiation mittels Einklammerung. Euler schreibt $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, um den partiellen Differentialquotienten von Q nach x zu bezeichnen[5]), also für das heutige $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Innerhalb des 7. Kapitels erscheint der hochwichtige Satz[6]), der sich unter dem Namen von Eulers Satz von den homogenen Functionen eingebürgert hat. Ist V ein Function von x und y und $dV = Pdx + Qdy$, so muss zwischen P und Q

1) Euler, Differentialrechnung I, 122—123, § 144—146. 2) Ebenda I, 146, § 170. 3) Ebenda I, 164, § 189. 4) Ebenda I, 183—185, § 213—215. 5) Ebenda I, 197—198, § 231. 6) Ebenda I, 186—192, § 217—225.

eine gewisse Beziehung obwalten. Wäre z. B. V eine Function von x und y von der Dimension 0, so muss, mittels $y = tx$, die Veränderliche x gänzlich aus V verschwinden, und nur t noch in der Function übrig bleiben, die alsdann T heissen soll. Dann ist $dT = \Theta dt$ und Θ eine Function von t. Aus $y = tx$ folgt ferner $dy = tdx + xdt$, also $Pdx + Qdy = (P + Qt)dx + Qxdt = \Theta dt$, d. h. $P + Qt = 0$, $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, beziehungsweise $Px + Qy = 0$ neben $\Theta = Qx$. Weil aber Θ weder x noch y enthält, oder nullter Dimension nach diesen Veränderlichen ist, muss auch Qx nullter Dimension nach x und y sein, und mit Hilfe von $Px + Qy = 0$ (eben der oben als nothwendig bestehend angekündigten Beziehung zwischen P und Q) erkennt man leicht, dass auch Px und Qy nullter Dimension nach x und y sein müssen. Die mehrerwähnte Beziehung $Px + Qy = 0$ merkt sich Euler in der Weise, dass, wenn in $dV = Pdx + Qdy$ die Grössen dx und dy durch x und y ersetzt werden, das Nullfache von V entsteht. Ist ferner V eine Function von x und y von der Dimension n, und setzt man auch hier $y = tx$, so geht V in Tx^n über, wo T wieder eine Function von t allein und $dT = \Theta dt$ ist. Differentiation liefert dann $dV = d(Tx^n) = nx^{n-1}Tdx + x^n dT$ neben $dV = Pdx + Qdy = Pdx + Qtdx + Qxdt$ und $nx^{n-1}T = \frac{nV}{x} = P + Qt$, $nV = Px + Qtx = Px + Qy$. Abermals ist also $Pdx + Qdy$ durch Einsetzung von x und y statt dx und dy zu verändern und dem n-fachen von V gleichzusetzen. Euler hatte den Satz schon 1736 für den Fall einer Function von zwei Veränderlichen in Besitz und deutete ihn damals in seiner *Mechanik*[1]) so weit an, dass, als derselbe Satz von Fontaine nachentdeckt wurde, Eulers Früherrecht Anerkennung fand[2]). Wir kommen im 118. Kapitel darauf zurück. Der Satz behält seine Richtigkeit, wenn V eine Function von der Dimension n (worunter selbstverständlich wie oben eine homogene Function von der Dimension n gemeint ist) mehrerer als nur zweier Veränderlichen bedeutet. Aber auch, wenn V eine ganz beliebige Function von x und y und fortwährend $dV = Pdx + Qdy$ ist, muss immerhin eine Beziehung zwischen P und Q obwalten. Sie heisst[3]) in heutiger Schreibweise $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, wofür auch $\frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial x}$ geschrieben werden kann[4]), und dieser Satz erweitert sich wieder dahin, dass auch bei $\frac{\partial^3 V}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z}$ die Reihenfolge der par-

1) Euler, *Mechanica* T. II, Propositio 14, § 106. 2) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1740 pag. 322, Fussnote. 3) Euler, Differentialrechnung I, 193—195, § 226—228. 4) Ebenda I, 196—197, § 231.

tiellen Differentiation gleichgiltig ist[1]). Ist $Pdx + Qdy$ gegeben, ist aber $\frac{\partial P}{\partial y}$ von $\frac{\partial Q}{\partial x}$ verschieden, so kann $Pdx + Qdy$ kein totales Differential sein; ob es aber unter der Voraussetzung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ immer ein totales Differential sein muss, ist eine Frage, die erst in der Integralrechnung gründlich beantwortet werden kann[2]). Wir werden uns im 117. Kapitel überzeugen, dass Euler schon 1732 von dem Dasein eines integrirenden Factors zum Mindesten eine Ahnung hatte, und dadurch vergrössert sich die Tragweite des Ausspruches von 1755, so dass wir annehmen dürfen, Euler sei damals mit der Integration totaler Differentialgleichungen im Reinen gewesen. In dem 8. Kapitel ist ausführlich von der Vertauschung der Veränderlichen die Rede. Euler kleidet die Aufgabe in die Worte, es solle nicht dx, sondern irgend ein anderer Differentialausdruck, beispielsweise $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ als beständig betrachtet werden, was bei Anwendung der Differentialrechnung auf die Curvenlehre häufig geschehe[3]). Das 9. Kapitel hat es mit denjenigen Aufgaben zu thun, welche in späterer Zeit als Differentiation impliciter Functionen benannt wurden. Unter Anderem ist gezeigt, wie mittels Differentiation Constante aus einer Gleichung entfernt werden können[4]). Ist $x^3 + y^3 = 3axy$, so folgt mittels Differentiation $3x^2dx + 3y^2dy = 3aydx + 3axdy = 3a(ydx + xdy) = \frac{x^3 + y^3}{xy}(ydx + xdy)$ oder $(2x^3y - y^4)dx + (2xy^3 - x^4)dy = 0$. Eben diese Gleichung erhält man aber auch ohne nachmalige Elimination von a, wenn man zuerst die ursprüngliche Gleichung auf die Gestalt $\frac{x^3 + y^3}{xy} = 3a$ bringt und alsdann differentiirt. Wenn Euler in diesem Kapitel ausspricht[5]), es sei möglich, jede Differentialgleichung auf eine endliche Form zu bringen, worin bloss endliche Grössen enthalten, und woraus alle Differentiale oder unendlichkleine Grössen weggeschafft seien, so versteht er darunter die Benutzung von Differentialquotienten unter Entfernung der Differentiale. Er gebraucht dabei regelmässig die Buchstaben p, q, r für die drei ersten Differentialquotienten von y nach x.

Der II. Theil von Eulers Differentialrechnung will, seinem besonderen Titel entsprechend, den Gebrauch dieser Rechnung in der Analysis des Endlichen sowie auch in der Lehre von den Reihen zeigen. Er besteht aus achtzehn Kapiteln.

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 200—201, § 235. [2]) Ebenda I, 205, § 240. [3]) Ebenda I, 229, § 269. [4]) Ebenda I, 250, § 289. [5]) Ebenda I, 259, § 299.

Das 1. Kapitel, Von der Umformung der Reihen, bedient sich[1]) nach einander der doppelten Substitution $x = \frac{y}{1+y}$, $y = \frac{x}{1-x}$, deren zweite die unmittelbare Folge der ersten ist, indem nur zwischen der ersten und zweiten Substitution die vorkommenden Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden. Die Reihe $S = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$ wird demnach $S = \frac{ay}{1+y} + \frac{by^2}{(1+y)^2} + \frac{cy^3}{(1+y)^3} + \cdots = a[y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - \cdots] + b[y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + \cdots] + c[y^3 - 3y^4 + 6y^5 - \cdots] + \cdots = ay + (b-a)y^2 + (c - 2b + a)y^3 + \cdots = \frac{ax}{1-x} + \frac{(b-a)x^2}{(1-x)^2} + \frac{(c-2b+a)x^3}{(1-x)^3} + \cdots$. Die hier auftretenden Coefficienten a, $b - a$, $c - 2b + a \cdots$ sind aber die Differenzen verschiedener Ordnung, welche aus den Coefficienten a, b, $c \cdots$ der ursprünglichen Reihe gebildet wurden, und sie können durch a, Δa, $\Delta^2 a \cdots$ bezeichnet werden. Folglich ist $S = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \cdots$. Sind die Coefficienten a, b, $c \cdots$ so beschaffen, dass sie zu constanten Differenzen irgend einer Ordnung führen, so bricht die umgeformte Reihe nothwendig irgend einmal ab, d. h. sie stellt eine Summenformel der ursprünglichen Reihe dar. Die Reihe $1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots + n^2x^n + \cdots$ z. B. besitzt 3, 5, 7, 9 $\cdots$ als erste Differenzen der Coefficienten, 2, 2, 2 $\cdots$ als deren zweite Differenzen, mithin ist $1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots + n^2x^n + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$. Ist eine ähnlich gebaute abgeschlossene Reihe $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots + ox^n$ zu summiren, so bildet man die beiden Summen[2]) der unendlichen Reihen $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$ und $px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + \cdots = x^n(px + qx^2 + rx^3 + \cdots)$, deren erste uns schon bekannt ist, während sich die zweite in der Gestalt $\frac{x}{1-x}x^np + \frac{x^2}{(1+x)^2}x^n\Delta p + \frac{x^3}{(1-x)^3}x^n\Delta^2 p + \cdots$ darstellt. Der Unterschied dieser beiden Summen bildet den Werth der abgeschlossenen Reihe, mithin $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots + ox^n = \frac{x}{1-x}(a - x^np) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a - x^n\Delta p) + \frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2 a - x^n\Delta^2 p) + \cdots$. Eine grade für Euler höchst auffallende Bemerkung bezieht sich auf Reihen, deren Coefficienten nicht zu constanten Differenzen irgend einer Ordnung führen, bei welchen also die umgewandelte Reihe nicht abbricht. Ist alsdann, heisst es wörtlich[3]), $x < 1$ in der Reihe $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$, und in diesem

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 4—7, § 2—4. [2]) Ebenda II, 7—9, § 5. [3]) Ebenda II, 9, § 6.

Falle findet die Summation im eigentlichen Verstande allein statt, so ist $\frac{x}{1-x} > x$, und die gefundene Reihe convergirt weniger als die gegebene. Entgegengesetzt verhält es sich mit Reihen, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben, und welche aus den vorhergehenden entstehen, indem man x negativ nimmt[1]). Dann geht $S = ax - bx^2 + cx^3 - \cdots$ in $S = \frac{x}{1+x}a - \frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2 a - \cdots$ über, und diese Umwandlung ist immer vortheilhaft, weil bei positivem x unter allen Umständen $\frac{x}{1+x} < 1$, die gefundene Reihe also stärker als die gegebene convergirt. Bei $x = 1$ wird $a - b + c - \cdots = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta a + \frac{1}{8}\Delta^2 a + \cdots$, und diese Formel dient alsdann zur Summirung divergenter Zahlenreihen wie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$, $1 - 4 + 9 - 16 + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0$ u. s. w. Bricht die umgewandelte Reihe nicht ab, so bedingt das Verfahren an Reihen mit wechselndem Vorzeichen ausgeführt mindestens die Herstellung einer neuen convergenteren Reihe, deren Summirung durch Addition näherungsweise gelingt[2]), z. B. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$. Ausser den Substitutionen $x = \frac{y}{1+y}$, $y = \frac{x}{1-x}$ nimmt Euler im Verlauf des Kapitels noch andere vor.

Das 2. Kapitel, Von der Erfindung summirbarer Reihen, bedient sich vorzugsweise der Differentiation von abgeschlossenen oder unendlichen eine allgemeine Grösse enthaltenden summirbaren Reihen, um neue Reihen ähnlichen Charakters zu erhalten. Eine Verallgemeinerung des Verfahrens tritt ein, wenn die gegebene Reihe und ebenso ihre Summenformel vor der Differentiation noch mit irgend einer Potenz der allgemeinen Grösse vervielfacht wird. Auch gliedweise Vervielfachung einer summirbaren Reihe, welche nach den Potenzen von x fortschreitet, mit je einem Gliede einer schliesslich auf constante Differenzen führenden Zahlenreihe liefert neue summirbare Reihen, wovon wir ein einfachstes Beispiel[3]) anführen. Sei $S = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$. Multiplication mit x^m und Differentiation nach x bringt $\frac{d(x^m S)}{dx} = mx^{m-1}S + x^m\frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} + (m+3)cx^{m+2} + \cdots$ hervor, und Division durch x^{m-1} liefert $mS + x\frac{dS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3$

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 9—12, § 7—9. [2]) Ebenda II, 16, § 11. [3]) Ebenda II, 30, § 24.

$+ \cdots$. Nun sei $m = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$, so entsteht nach dieser Substitution und nachfolgender Multiplication mit β die Reihe: $\alpha ax + (\alpha + \beta)bx^2 + (\alpha + 2\beta)cx^3 + \cdots = (\alpha - \beta)S + \beta x\frac{dS}{dx}$.

Das 3. Kapitel, Von der Erfindung der Differenzen, will die Differenzen der Functionen mit Hilfe ihrer Differentiale berechnen, also die Umkehrung der im ersten Bande erledigten Aufgabe der Auffindung der Differentiale mit Hilfe der Differenzen bewerkstelligen[1]). Euler versteht darunter die Herstellung der Taylorschen Reihe, welche er fast wörtlich so vollzieht[2]) wie der Erfinder, dessen Verfahren wir (S. 381—382) mitgetheilt haben. Die Veränderung, welche x erleiden soll, nennt Euler $\pm\omega$, und er findet als den Werth der Function y, der dem veränderten Werthe von x, also $x \pm \omega$, entspricht, $y \pm \omega\frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{\omega^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\omega^4}{24}\frac{d^4y}{dx^4} \pm \cdots$. Die Differenz von y, auf deren Aufsuchung das eigentliche Bestreben gerichtet ist, findet sich naturgemäss durch Subtraction des ersten Werthes von y von dem nachfolgenden zweiten Werthe oder $\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y$. Ersetzt man x durch $x + 2\omega$, durch $x + 3\omega \cdots$, so entsteht y^{II}, $y^{\mathrm{III}} \cdots$ und daraus $\Delta^2 y = y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}} + y$, $\Delta^3 y = y^{\mathrm{III}} - 3y^{\mathrm{II}} + 3y^{\mathrm{I}} - y$ u. s. w., beziehungsweise unter Anwendung der Taylorschen Reihe für y^{I}, für y^{II}, für $y^{\mathrm{III}} \cdots$ Ausdrücke für die höheren Differenzen von y, in welchen die Differentialquotienten von y nach x vorkommen[3]). In der Reihe, welche den Werth von y unter der Voraussetzung, dass x durch $x - \omega$ ersetzt werde, angibt, nimmt Euler $\omega = x$, d. h. eigentlich $x = 0$. Er erhält den entsprechenden Werth von y in Gestalt der Reihe[4]) $y - \frac{x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{d^4y}{dx^4} - \cdots$. Das ist die von Johann Bernoulli herrührende Reihe (S. 228), welche als Sonderfall der Taylorschen Reihe auftritt.

Das 4. Kapitel, Von der Umwandlung der Functionen in Reihen, wendet die Bernoullische und die Taylorsche Reihe auf bestimmte Functionen an. Die binomische Reihe entsteht z. B. mittels der Taylorschen Formel[5]), allerdings ein Kreisschluss, da im ersten Bande die Differenzirung von x^n mittels des Binomialsatzes gewonnen worden war (S. 758). Euler zieht aus $(x + \omega)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\omega$

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 52, § 44. [2]) Ebenda II, 52—56, § 45 bis 49. [3]) Ebenda II, 58—60, § 52—53. [4]) Ebenda II, 74, § 67. [5]) Ebenda II, 80—82, § 72—73.

$+\binom{n}{2}x^{n-2}\omega^2+\cdots$ eine geistreiche Folgerung. Sei $\omega=-\frac{ux}{x+u}$, $x+\omega=\frac{x^2}{x+u}$, so wird $\frac{x^{2n}}{(x+u)^n}=x^n-\binom{n}{1}\frac{x^n u}{x+u}+\binom{n}{2}\frac{x^n u^2}{(x+u)^2}-\cdots$. Division durch x^{2n} liefert $(x+u)^{-n}=x^{-n}-\binom{n}{1}x^{-n}\frac{u}{x+u}+\binom{n}{2}x^{-n}\frac{u^2}{(x+u)^2}-\cdots$. Wird nun $n=-m$ gesetzt, so erscheint $(x+u)^m=x^m+\frac{m}{1}x^m\frac{u}{x+u}+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^m\frac{u^2}{(x+u)^2}+\cdots$, eine Reihe, welche ins Unendliche fortläuft, wenn m positiv ist, und welche von selbst abbricht, wenn m ganzzahlig negativ ist. Auch auf gebrochene n wird die Reihe für $(x+\omega)^n$ angewandt und mit ihrer Hilfe der Werth verschiedener Wurzelgrössen gesucht. Dann kommen transcendente Functionen an die Reihe, Logarithmen, Arcussinus, Arcuscosinus, Arcustangens, Sinus, Cosinus, Tangens u. s. w.

Das 5. Kapitel, Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede, bringt Untersuchungen, welche Euler im VI. und VIII. Bande der Petersburger Commentarien angebahnt hatte (S. 656 und 664) mit welchen auch Maclaurin sich unabhängig von Euler beschäftigt hatte (S. 685). Sei y das x^{te} Glied einer Reihe und Sy die Summe der x ersten Glieder, mithin 0, wenn $x=0$. Ist $y=p+q+r+\cdots$, so ist selbstverständlich $Sy=Sp+Sq+Sr+\cdots$. Das $x-1^{\text{te}}$ Reihenglied, welches y unmittelbar vorhergeht, heisse v, so dass also v aus y entsteht, wenn darin x durch $x-1$ ersetzt wird. Daraus folgt $v=y-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{1}{24}\frac{d^4y}{dx^4}-\cdots$ neben $Sv=Sy-y+A$, insofern das Summenzeichen S sich stets über x Glieder zu erstrecken hat. Man muss nämlich alsdann, um Sv überhaupt bilden zu können, noch ein nulltes Glied der ursprünglichen Reihe, welches A heissen soll, nach rückwärts hinzudenken, oder mit anderen Worten, A ist eine Summationsconstante. Summirt man jetzt gliedweise die für v aufgestellte Reihe, so wird neben $Sv=Sy-y+A$ auch $Sv=Sy-S\frac{dy}{dx}+S\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-S\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}+S\frac{1}{24}\frac{d^4y}{dx^4}-\cdots$ und $S\frac{dy}{dx}=y-A+S\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-S\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}+S\frac{1}{24}\frac{d^4y}{dx^4}-\cdots$, worin die Constante A am einfachsten derart bestimmt wird, dass man $x=0$ setzt, wodurch die Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens verschwinden müssen. Ist $\frac{dy}{dx}=z$, so wird $\frac{d^my}{dx^m}=\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}$ und $y=\int z\,dx$, in welches unbestimmte Integral die Constante $-A$ mit inbegriffen werden kann,

und man erhält $Sz=\int z\,dx+\frac{1}{2}S\frac{dz}{dx}-\frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3}-\cdots$, da Zahlencoefficienten wie $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}\cdots$ augenscheinlich dem Summenzeichen vorgesetzt werden dürfen. Die nicht ausdrücklich angeschriebene Integrationsconstante zu $\int z\,dx$ ist so zu wählen, dass $x=0$ die Summe Sz zum Verschwinden bringe. Entsprechend der Reihe für Sz findet man: $S\frac{dz}{dx}=z+\frac{1}{2}S\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3}+\cdots$, $S\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dx}+\frac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4}+\cdots$ u. s. w. Einsetzung dieser Werthe verwandelt aber die Reihe für Sz in

$$Sz=\int z\,dx+\alpha z+\beta\frac{dz}{dx}+\gamma\frac{d^2z}{dx^2}+\delta\frac{d^3z}{dx^3}+\cdots,$$

und wird rückwärts statt jedes Werthes dieses neuen Ausdruckes die ihm gleiche, Summenzeichen enthaltende Form benutzt, wird also

$$\begin{aligned}
\int z\,dx &= Sz-\frac{1}{2}S\frac{dz}{dx}+\frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dy^3}+\cdots\\
\alpha z &= \qquad\alpha S\frac{dz}{dx}-\frac{\alpha}{2}S\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3}-\cdots\\
\beta\frac{dz}{dx} &= \qquad\qquad\beta S\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3}+\cdots\\
\gamma\frac{d^2z}{dx^2} &= \qquad\qquad\qquad\gamma S\frac{d^3z}{dx^3}-\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

gesetzt und nach Addition aller dieser Gleichungen die links vom Gleichheitszeichen entstehende Summe gegen das zu rechter Hand sich findende Sz gestrichen, so sind die noch übrigen rechts stehenden Glieder nur dann, ohne Rücksicht auf die Art wie z von x abhängt, $=0$, wenn die Zahlencoefficienten der einzelnen Summen $=0$ sind, d. h.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}+\alpha=0 &\quad\text{oder}\quad \alpha=\frac{1}{2}\\
\frac{1}{6}-\frac{\alpha}{2}+\beta=0 &\quad\text{oder}\quad \beta=12\\
-\frac{1}{24}+\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{2}+\gamma=0 &\quad\text{oder}\quad \gamma=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die nächsten Werthe[1]) sind $\delta=-\frac{1}{720}$, $\varepsilon=0$ u. s. w. Man hat damit γ und ε d. h. die Zahlencoefficienten von $\frac{d^2z}{dx^2}$ und von $\frac{d^4z}{dx^4}$

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 120—127, § 103—112.

als 0 erkannt, und Euler will nunmehr allgemein beweisen, dass jedes $\frac{d^{2k}z}{dx^{2k}}$ den Zahlencoefficienten 0 besitzen muss[1]). Zu diesem Zwecke setzt er $V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \cdots$ und hebt hervor, dass vermöge der Recursionsgleichungen, welche $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ verbinden, die Reihe für V eine recurrente sein müsse, und zwar dieselbe, welche aus der Division $V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \cdots}$ sich ergebe. Bekanntlich ist $e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 - \cdots$ und daraus $1 - e^{-u} = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{24}u^4 + \cdots$, beziehungsweise $\frac{1-e^{-u}}{u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \cdots$. So ist gefunden $V = \frac{u}{1-e^{-u}}$ und $V - \frac{u}{2} = \frac{u - \frac{u}{2} + \frac{u}{2}e^{-u}}{1-e^{-u}} = \frac{u}{2}\frac{1+e^{-u}}{1-e^{-u}}$. Man verwandelt den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen durch Multiplication mit $\frac{e^{\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}}}$ und erhält $V - \frac{u}{2} = \frac{u}{2}\frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}$. Aber $e^{\frac{u}{2}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots$ und $e^{-\frac{u}{2}} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{u}{2}\right)^4 - \cdots$. Demzufolge ist $e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}} = 2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots\right]$ und $e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}} = 2u\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots\right]$. Also endlich $V - \frac{u}{2} = \frac{1 + \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots}{1 + \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \cdots}$. Vollzieht man die rechts vom Gleichheitszeichen angedeutete Division, so können im Quotienten nur Potenzen von u mit gradem Exponenten erscheinen. Andererseits war $\alpha = \frac{1}{2}$, also $V - \frac{u}{2} = V - \alpha u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \cdots$, und da nach dem soeben Bewiesenen Potenzen von u mit ungradem Exponenten in der Entwicklung nicht vorkommen können, so muss $\gamma = \varepsilon = \cdots = 0$ sein. Ausserdem gibt der Bruch, dessen Werth $1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \cdots$ durch die letzte Erörterung bekannt geworden ist, neue Recursionsgleichungen zwischen $\beta, \delta \cdots$. Euler zieht vor, in der Reihe für Sz wechselnde Vorzeichen auftreten zu sehen, und schreibt sie deshalb, nachdem α durch seinen be-

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 127—129, § 113—115.

kannten Zahlenwerth $\frac{1}{2}$ ersetzt ist, $Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}z + A\frac{dz}{dx} - B\frac{d^3z}{dx^3} + C\frac{d^5z}{dx^5} - D\frac{d^7z}{dx^7} + \cdots$, während $A, B, C, D \cdots$ die Werthe besitzen, welche aus der Entwicklung $\frac{1 - \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \cdots}{1 - \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \cdots} = 1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - \cdots$ sich ergeben[1]). Aber Zähler und Nenner des hier auftretenden Bruches sind bekannte Reihen: $1 - \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \cdots = \cos\frac{u}{2}$, $1 - \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \cdots = \frac{2}{u}\sin\frac{u}{2}$ und daher $\frac{u}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{2} = 1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - \cdots$, beziehungsweise $\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{u}{2} = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - \cdots$ oder die Zahlen $A, B, C, D \cdots$ treten als Coefficienten in der Cotangensreihe auf. Setzt man $\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - \cdots = s$ oder $\frac{u}{2} = \operatorname{arccotg} 2s$ und differentiirt nach u, so erhält man $\frac{1}{2} = \frac{-2}{1+4s^2}\frac{ds}{du}$, $4\frac{ds}{du} + 1 + 4s^2 = 0$. Aber jeder der Ausdrücke $4\frac{ds}{du}$ und $4s^2$ kann in Reihenform berechnet und in $4\frac{ds}{du} + 1 + 4s^2 = 0$ eingesetzt werden, welche Gleichung bei allgemein gelassenem Werthe von u nur dann erfüllt werden kann, wenn die Zahlencoefficienten aller Potenzen von u verschwinden. Diese Bedingung liefert die Recursionsgleichungen $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{A^2}{5}$, $C = \frac{2AB}{7}$, $D = \frac{2AC + B^2}{9} \cdots$ und es fällt aus diesen Formeln sehr deutlich in die Augen, dass jeder dieser Werthe positiv sein muss[2]). Euler setzt alsdann $1\cdot 2A = \mathfrak{A}$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4B = \mathfrak{B}$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6C = \mathfrak{C}$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8D = \mathfrak{D} \cdots$ und nennt diese letzteren nach dem Namen ihres Erfinders, Jakob Bernoulli, die Bernoullischen Zahlen, deren 15 erste er angibt[3]), während Bernoulli nur 5 derselben ermittelt hatte.

Wir dürfen nicht weiter ähnlich eingehend berichten. Wir müssen das 6. Kapitel, Von der Summation der Progressionen durch ohne Ende fortlaufende Reihen; das 7. Kapitel, Fortführung der Summation der Progressionen durch unendliche Reihen; das 8. Kapitel, Von dem Gebrauch und dem Nutzen

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 131—132, § 118. [2]) Ebenda II, 133, § 119. [3]) Ebenda II. 137, § 122.

der **Differentialrechnung bei Bildung der Reihen**, als solche kennzeichnen, welche die allgemeinen Sätze des 5. Kapitels anwenden. Im 8. Kapitel kommen vielfach Entwicklungen folgender Art vor. Es seien Z, N, S drei nach Potenzen von x fortschreitende Reihen, deren letzte hypothetisch, d. h. mit unbestimmten Coefficienten angenommen ist und $\frac{Z^m}{N^n} = S$. Logarithmirung und darauf folgende Differentiation liefern $\frac{m\,dZ}{Z} - \frac{n\,dN}{N} - \frac{dS}{S} = 0$, beziehungsweise $mNSdZ - nZSdN - ZNdS = 0$, und bei Ausrechnung der links vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrücke, deren Nullwerden auf dem Verschwinden der Coefficienten der einzelnen Potenzen von x beruht, erscheinen zahlreiche Gleichungen, welche die Coefficienten in S zu bestimmen gestatten. In eben diesem 8. Kapitel erscheinen zum ersten Male die **Secantencoefficienten**[1]).

Das 9. Kapitel, **Von dem Nutzen der Differentialrechnung bei der Auflösung der Gleichungen**, behandelt zuerst die Anwendung der Taylorschen Reihe auf Gleichungen. Ist y eine Function von x, welche durch $x = f$ zu Null wird, d. h. hat $y = 0$ die Wurzel $x = f = x + (f - x)$, so ist nach der Taylorschen Entwicklung $0 = y + (f - x)\frac{dy}{dx} + \frac{(f-x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(f-x)^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$, und kennt man ein von dem wahren Werthe f nicht sehr abweichendes x, welches $f - x$ und noch mehr dessen höhere Potenzen sehr klein werden lässt, so kann man näherungsweise $y + (f - x)\frac{dy}{dx} = 0$ oder $y + (f - x)\frac{dy}{dx} + \frac{(f-x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ setzen und daraus einen angenäherten Werth von f finden, der dann selbst wieder für x angenommen eine weitere Annäherung gestattet. Man kann aber auch sagen[2]), es sei, wenn y eine Function von x ist, auch x eine Function von y, deren Werth unter der Voraussetzung $y = 0$ gesucht wird. Dann muss anstatt $0 = y + (f - x)\frac{dy}{dx} + \frac{(f-x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(f-x)^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$ eine andere Gleichung stattfinden, welche f für 0 und 0 für f, y für x und x für y erscheinen lässt, d. h. die Gleichung $f = x - y\frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{y^3}{6}\frac{d^3x}{dy^3} + \cdots$. Ein zweiter Gegenstand, der im 9. Kapitel zur Behandlung kommt[3]), ist das Auftreten mehrfacher Wurzeln einer Gleichung. Euler geht hier von der Annahme aus, man wisse, dass eine Gleichung zwei um a verschiedene Wurzeln besitze, dass also x

[1]) **Euler**, Differentialrechnung II, 259—260, § 224. [2]) Ebenda II, 271 bis 273, § 234—235. [3]) Ebenda II, 287—294, § 244—249.

und $x + a$ beide genügen, um $y = 0$ werden zu lassen. Der besondere Fall $a = 0$ enthüllt alsdann die bekannten Merkmale mehrfacher Wurzeln.

Das 10. Kapitel, **Von den grössten und kleinsten Werthen der veränderlichen Grössen**, gibt seinen Inhalt durch die Ueberschrift deutlich genug zu erkennen. Dass es in ihm nicht an lehrreichen Beispielen, noch an lesenswerthen Einzelheiten fehlt, bedarf kaum der Erwähnung. Wir machen nur etwa auf die Auffindung des Maximum oder Minimum von $y = \frac{P}{Q}$ aufmerksam[1]), wo $dy = \frac{QdP - PdQ}{Q^2} = \frac{Rdx}{Q^2}$ ist, und wo $R = 0$ den Werth von x liefert, welcher ein Maximum oder Minimum von y hervorbringt, je nachdem $dR \lesseqgtr 0$ ist.

Das 11. Kapitel, **Von den grössten und kleinsten Werthen der vielförmigen Functionen und der Functionen mehrerer veränderlichen Grössen**, ist gleichfalls in der Ueberschrift deutlich gekennzeichnet. Bei vielförmigen Functionen betont Euler, dass sie ihre Versinnlichung in Curven besitzen, welche aus so vielen Schenkeln bestehen, als y für jedes x Werthe besitzt, und dass jeder solche Schenkel für sich auf grösste und kleinste Werthe der Ordinate y zu untersuchen sei[2]). Bei vielförmigen Functionen gibt es aber auch eine Art grösster und kleinster Werthe, welche nicht mittels $\frac{dy}{dx} = 0$ gefunden werden[3]). Es sei y eine zweiförmige Function von x, und zwar seien ihre beiden Werthe reell und verschieden bei $x < f$, ihre beiden Werthe reell und gleich, etwa $= g$, bei $x = f$, ihre beiden Werthe imaginär bei $x > f$, so ist $y = g$ ein Maximum oder Minimum, ohne dass $\frac{dy}{dx} = 0$ wäre. Wir werden im 116. Kapitel hierauf zurückzukommen haben. Ist eine Function zweier Veränderlichen x und y auf ihre grössten und kleinsten Werthe zu prüfen, so ist der Fall der einfachste, in welchem die Function $X + Y$ heisst. wo X ausschliesslich von x, Y ausschliesslich von y abhängt[4]). Diese Summe wird Maximum, beziehungsweise Minimum, wenn sowohl X als Y für sich diese Eigenschaft besitzt, wogegen Werthe von x und y, welche die eine der beiden Functionen X und Y zu einem Maximum, die andere zu einem Minimum machen, für die Summe $X + Y$ weder ein Maximum noch ein Minimum hervorbringen. Ganz ähnliche Betrachtungen ruft die Function $X - Y$ hervor. Ist U eine irgendwie beschaffene Function von x und y, so

[1]) **Euler**, Differentialrechnung III, 28, § 266. [2]) Ebenda III, 46, § 273. [3]) Ebenda III, 55—56, § 278. [4]) Ebenda III, 69—70, § 286.

ist die Behandlung folgendermassen[1]). Differentiation möge $dU = Pdx + Qdy$ hervorbringen, wo P, Q die partiellen Differentialquotienten von U nach x und y sind. Wäre der Werth von y bekannt, der U zu einem Maximum oder Minimum macht, und nur der entsprechende Werth von x gesucht, so wäre U nach x allein zu differentiiren und dieser Differentialquotient von U nach x, mithin $P = 0$ zu setzen. Desgleichen wäre $Q = 0$ zu setzen, wenn der Werth von x bekannt wäre, der U zu einem Maximum oder Minimum macht, und nur der zugehörige Werth von y in Frage stünde. Wenn also sowohl x als y veränderlich sein sollen, so muss gleichzeitig $P = 0$ und $Q = 0$ sein. Darüber, ob ein Maximum oder ein Minimum von U vorhanden ist, würde in den beiden getrennt besprochenen Fällen das Vorzeichen von $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und von $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ den Ausschlag geben. In dem allgemeinen Falle müssen wieder diese beiden Ausdrücke befragt werden, und sie müssen gleichen Vorzeichens sein, sonst kann weder ein Maximum noch ein Minimum von U stattfinden. Von der in späterer Zeit hinzugetretenen Bedingung bezüglich $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ ist noch keine Rede, was man Euler nicht so hoch anrechnen darf, da die ganze Frage nach grössten und kleinsten Werthen von Functionen zweier Veränderlichen in seiner Differentialrechnung zum ersten Male allgemein gestellt ist.

Das 12. Kapitel, Von dem Gebrauche der Differentiale bei der Erforschung der reellen Wurzeln der Gleichungen, bringt hauptsächlich den Satz, dass, wenn $z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots$, die Anzahl der reellen Wurzeln von $z = 0$ mit der Anzahl der Maximal- oder Minimalwerthe von z in Zusammenhang stehe, und diese wieder mit der Anzahl der reellen Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$. Hat $z = 0$ etwa m reelle Wurzeln, so hat $\frac{dz}{dx} = 0$ deren gewiss mindestens $m - 1$, und das Vorhandensein von weniger als $m - 1$ reellen Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$ lässt erkennen, dass $z = 0$ weniger als m reelle Wurzeln besitze, wie viele weniger ist unbekannt, da die Wurzeln von $z = 0$ sogar insgesammt imaginär sein können, während die von $\frac{dz}{dx} = 0$ insgesammt reell sind[2]). Ein sicherer Schluss von den Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$ auf die von $z = 0$ lässt sich nur dann ziehen, wenn von den beiden Werthen von z, die durch

[1]) Euler, Differentialrechnung III, 63—76, § 288—290. [2]) Ebenda III, 91—92, § 298.

Einsetzung solcher Werthe von x erscheinen, welche benachbarte Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$ sind, der eine positiv, der andere negativ ist[1]). Von diesen grundlegenden Sätzen, welche mit solchen, über welche im 105. und 106. Kapitel berichtet wurde, mannigfache Aehnlichkeit besitzen, werden dann zahlreiche Anwendungen auf bestimmte Gleichungen gemacht, namentlich auf solche des 2[ten], 3[ten] und 4[ten] Grades und dann auch auf trinome Gleichungen[2]). Das 12. Kapitel lehrt mittelbar auch die Anzahl der imaginären Gleichungswurzeln erkennen, welche die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades zu n ergänzen muss.

Das 13. Kapitel, Von den Kennzeichen der imaginären Wurzeln, sucht deren Anzahl unmittelbar. Es kann genügen zu wiederholen, was Euler selbst ausspricht[3]), dass es sich um die Wiedergabe der Regeln handelt, welche Newton aufstellte, Campbell ergänzte.

Das 14. Kapitel, Von den Differentialen für besondere Fälle, erörtert Dinge, welche seitdem, wenigstens in der von Euler gewählten Form, der Differentialrechnung nicht mehr angehören. Wenn unter Annahme eines bestimmten Werthes von x das Differential dy einer Function zu verschwinden scheint, so kann es, meint Euler, darum doch als Unendlichkleines höherer Ordnung vorhanden sein. Nach Taylors Satze ist $y + dy$ oder der Werth, den y annimmt, wenn x in $x + dx$ übergeht, durch die Reihe gegeben: $y + dx \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dx^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \cdots = y + dy + \frac{1}{2} d^2y + \frac{1}{6} d^3y + \cdots$ und $dy = dy + \frac{1}{2} d^2y + \frac{1}{6} d^3y + \cdots$. Für gewöhnlich lässt man die rechts vom Gleichheitszeichen hinter dy nachfolgenden Glieder einfach weg, weil sie als unendlichklein höherer Ordnung gegen dy verschwinden. Ist aber bei irgend einem bestimmten Werthe von x das $dy = 0$, so ist das wahre Differential von y, d. h. also der unendlichkleine Zuwachs, den y erhält, während x um das unendlichkleine dx gewachsen ist, thatsächlich durch $\frac{1}{2} d^2y$ dargestellt. Der Nutzen dieser Auffassung, von der wir nur nicht sehen können, wie sie mit dem Grundgedanken der Eulerschen Differentialrechnung, die Differentiale seien wirkliche Nullen und nicht Unendlichkleines, in Einklang zu bringen ist, trete, sagt Euler unter Anführung von Fällen, die sich auf transcendente Functionen beziehen, in der Lehre

[1]) Euler, Differentialrechnung III, 92—93, § 299. [2]) Ebenda III, 114 bis 117, § 310. [3]) Ebenda III, 134, § 326.

von den Curven oft hervor[1]). Er denkt dabei an die Untersuchung von Singularitäten einer gewissen Gattung. Die Curve $y = x^2 - \frac{1}{\log x}$ beginnt beispielsweise im Coordinatenanfangspunkte. Sie setzt sich von ihm aus steigend nach der positiven Abscissenrichtung fort, ohne dass man von einem im Coordinatenanfangspunkte vorhandenes Minimum reden könnte. Ein gewöhnliches Minimum finde dort nicht statt, weil y keinen nächstvorhergehenden, einem negativen x entsprechenden Werth besitze, und ein Minimum zweiter Art (S. 769) sei dort auch nicht vorhanden, weil die Curve sich vom Coordinatenanfangspunkte aus nur in einem Zweige und nicht in deren zwei fortsetze.

Das 15. Kapitel, Von den Werthen der Functionen, die in gewissen Fällen unbestimmt zu sein scheinen, gestattet Euler eine zweite Anwendung des im 14. Kapitel Erörterten zu machen. Wenn $\frac{P}{Q}$ ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner bei $x = a$ gleichzeitig verschwinden, so setze man statt x zunächst $x + dx$, was eigentlich wegen $dx = 0$ keine Veränderung ist[2]). Die Substitution verwandelt $\frac{P}{Q}$ in $\frac{P + dP}{Q + dQ}$, und dieses geht bei $x = a$ in $\frac{dP}{dQ}$ über. Man muss aber hier die wahren Differentiale von P und Q wählen, weil nur dann, d. h. wenn man weiss von welcher Kleinheitsordnung dP und dQ ist, der Werth von $\frac{dP}{dQ}$ richtig ermessen werden kann. Nach mannigfaltigen Beispielen, bei welchen auch wohl wiederholte Differentiation des Zählers und des Nenners nöthig fällt, geht Euler zu den Formen $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ über[3]), deren Auswerthung er, so viel uns bekannt ist, zuerst lehrte.

Auch im 16. Kapitel, Von der Differentiation der inexplicablen Functionen, und im 17. Kapitel, Von der Interpolation der Reihen, spielen die sogenannten wahren Differentiale eine Rolle. Inexplicabel heisst für Euler eine Function wie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$, die zwar von x abhängt, aber auf keine Weise entwickelt werden kann, wenn x keine positive ganze Zahl bedeutet. Um sie zu differentiiren, muss gleichwohl ein auf das x^{te} Glied X (in dem erwähnten Sonderfalle $\frac{1}{x}$) folgendes Glied Z ermittelt werden, welches mit dem Stellenzeiger $x + dx$ versehen ist, und welches sich als

[1]) Euler, Differentialrechnung III, 166, § 353, 1. Beispiel. [2]) Ebenda III, 175, § 357. [3]) Ebenda III, 192—195, § 362—364.

$Z = dS$ zu erkennen gibt, wenn $S = A + B + C + \cdots + X$ die inexplicable Function und $S + dS = A + B + C + \cdots + X + Z$ ihr nächster Werth ist. Die in der Ueberschrift des 17. Kapitels genannte Interpolation nimmt gleichfalls eine aus x Gliedern bestehende Reihe $S = A + B + C + \cdots + X$ an und sucht deren Glied mit dem Stellenzeiger $x + \omega$, wo ω ein echter Bruch ist.

Das 18. Kapitel, Von dem Gebrauche der Differentialrechnung bei Auflösung der Brüche, endlich lehrt die Zerlegung in Partialbrüche ausgehend von der einfachsten Aufgabe: den Partialbruch $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$ der Zerlegung von $\frac{P}{Q}$ zu finden, wenn $Q = (f + gx)S$ und S den Factor $f + gx$ nicht mehr enthält. Sei $\frac{P}{Q} = \frac{\mathfrak{A}}{f + gx} + \frac{V}{S}$, so folgt $V = \frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx}$, und da V eine ganze Function sein muss, so ist nothwendigerweise $P - \mathfrak{A}S$ durch $f + gx$ theilbar, d. h. $f + gx = 0$ oder $x = -\frac{f}{g}$ macht $P - \mathfrak{A}S = 0$. Daraus folgt aber, dass $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, wenn in diesem Bruch $x = -\frac{f}{g}$ eingesetzt wird. Zuverlässig ist $\frac{P}{S} = \frac{P(f + gx)}{S(f + gx)} = \frac{P(f + gx)}{Q}$, eine Form, welche mittels $x = -\frac{f}{g}$ zu $\frac{0}{0}$ wird und nach Kapitel 15 ihre Auswerthung findet. Der wahre Werth ist daher $\frac{(f + gx)dP + gPdx}{dQ}$, wenn darin $x = -\frac{f}{g}$ gesetzt wird, oder noch einfacher $\mathfrak{A} = \frac{gPdx}{dQ}$ nach Einsetzung von $x = -\frac{f}{g}$.

114. Kapitel.

Analytische Geometrie bis 1740. Clairaut. Braikenridge. De Gua.

Was dem Leser unseres Berichtes über Eulers Differentialrechnung aufgefallen sein muss, ist, dass bei aller Aehnlichkeit des Inhaltes mit demjenigen späterer Differentialrechnungen zwar auf geometrische Anwendungen hie und da hingewiesen ist, diese selbst aber, wie z. B. Berührungen, Krümmungen, Abwicklungen u. s. w. nie näher erörtert werden. Lag es in Eulers Absicht ein besonderes Werk, etwa unter dem Titel: Anwendungen der Differentialrechnung auf Geometrie, zu schreiben? Es will fast so scheinen, wir werden auch im nächsten Kapitel eine Art von Bestätigung dieser Vermuthung finden, aber bestimmte Angaben fehlen. Nicht als ob zu den Anwendungen, welche schon bei De L'Hospital vorkamen, nicht inzwischen Neues hinzugetreten wäre. Euler und vor und nach ihm zahlreiche andere Schriftsteller haben früher, haben auch in der Zeit von 1727—1758 die Lehre von den Curven und Oberflächen bald ohne bald mit Benutzung der Infinitesimalbetrachtungen mächtig gefördert, wie wir jetzt in einigen Kapiteln zu zeigen haben.

Guido Grandi veröffentlichte schon 1723 in den P. T. eine Abhandlung *Florum geometricorum manipulus*[1]), eine Handvoll geometrischer Blumen, welche bereits (S. 445) kurze Erwähnung fand. Welche ebene Curven unter diesen Blumen gemeint sind, hat Grandi dann 1728 noch ausführlicher erörtert unter Erweiterung seiner Constructionen auf den Raum. Er gab nämlich 1728 in Florenz eine besondere Schrift[2]): *Flores geometrici ex Rhodonearum et Cleliarum curvarum descriptione resultantes* zum Drucke, gewidmet der Gräfin Clelia Borromei, weil sie im Stande sei, den Geruch dieser geometrischen Blumen zu empfinden und zu schätzen. Die Rhodoneen sind innerhalb eines Kreises gezeichnete, aus vielen Blättern bestehende und dadurch an eine Rose erinnernde ebene Curven, die Clelien sind ähnlich gestaltete Curven auf einer Kugeloberfläche. Ein einzelnes Blatt einer Rhodonea entsteht so: In einem gegebenen Kreise (Fig. 112) wird der Halbmesser $CD = r$ unter dem Winkel ϑ mit dem der Lage nach gegebenen Halbmesser CA gezogen. CG soll dann mit CA einen Winkel bilden, zu welchem ϑ in dem gegebenen Verhältnisse $a:b$ steht, d. h. $\angle GCA = \frac{b\vartheta}{a}$. Dann ist $GH = r \cdot \sin\frac{b\vartheta}{a}$ und nimmt man auf CD ein Stück $CJ = GH = \varrho$ ab, so soll J ein Punkt der Rhodonea sein, deren von Grandi nicht hergestellte Gleichung in Polarcoordinaten $\varrho = r \cdot \sin\frac{b\vartheta}{a}$ lautet. Später hat dann Grandi 1737 in Neapel noch eine *Sectionum conicarum Synopsis*[3]), eine Uebersicht über die Kegelschnitte herausgegeben.

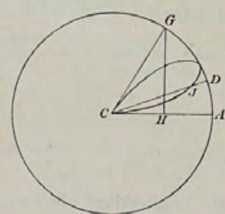

Fig. 112.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis[4]) (1698—1759) hat 1729 in der Zwischenzeit, während welcher er, nach Austritt aus der französischen Armee und vor seiner Aufnahme in die Pariser Akademie, als Privatmann in Paris lebte, einen Aufsatz: *Sur quelques*

[1]) P. T. XXXII, 355—371, Nr. 378 *for the months of July and August 1723.*
[2]) Klügel IV, 296. [3]) Poggendorff I, 940. [4]) Ebenda II, 84—85.

affections des courbes[1]) veröffentlicht. *Affection*, Beschaffenheit oder anhaftende Eigenschaft, nannten die französischen Geometer der damaligen Zeit das, was man später mit dem Namen Singularitäten der Curven belegt hat. Maupertuis erinnert daran, dass man seit langer Zeit Inflexionspunkte und Rückkehrpunkte kenne. Nun sei aber augenscheinlich auch eine Aufeinanderfolge zweier Inflexions-

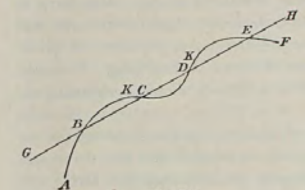

Fig. 113.

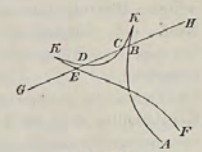

Fig. 114.

punkte K (Fig. 113) oder zweier Rückkehrpunkte K (Fig. 114) oder eines Rückkehrpunktes K und eines Inflexionspunktes K (Fig. 115) möglich, in deren Nähe eine Gerade GH die Curve AF in vier Punkten schneide, woraus folge, dass die Curve mindestens vom vierten Grade sein müsse. Die vier Durchschnittspunkte können durch besondere Gestaltung der Curve näher und näher bei einander liegen, in der äussersten denkbaren Nähe zusammenfallen. Das Auge merkt dann nichts davon, dass in diesen Grenzfällen die Berührende GH vier beieinander liegende Punkte mit der Curve gemein hat. Den Punkt $BCDE$ nennt Maupertuis in den drei genannten Unterfällen einen *point de serpentement* (Schlängelungspunkt), *point de double pointe* (Doppelspitze), *point de rebroussement de la seconde sorte* (Schnabel). Die analytische Bedingung besteht darin, dass $\frac{d^3y}{dx^3}$ in einem solchen Punkte 0 oder ∞ werden muss. Irgend ein bestimmtes Beispiel gibt Maupertuis nicht an.

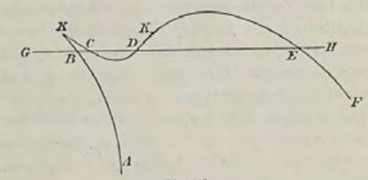

Fig. 115.

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1729, pag. 277—282. Vergl. in demselben Bande den Abschnitt *Histoire* pag. 44—50.

In demselben Bande der Pariser Abhandlungen, von welchem wir reden, befindet sich auch ein Aufsatz von François Nicole: *Traité des lignes du troisième ordre*[1]). Nicole beruft sich gleich am Anfange desselben auf die Vorarbeiten von Newton (S. 421—426), von Stirling (S. 430—435), von Maclaurin (S. 435—444), von denen er Gebrauch zu machen nicht unterlassen habe. Dem ist in der That so, und zwar in einem solchen Umfange, dass wir, da Neues, wenn überhaupt, nur in unerheblicher Menge vorkommt, uns weiterer Berichterstattung entheben dürfen. Am Schlusse verspricht Nicole eine Fortsetzung in einer weiteren Abhandlung. Vielleicht hat man zwei Aufsätze[2]) von 1731 als Theile dieser Fortsetzung zu betrachten.

Der erste derselben, *Sur les sections coniques*, betrachtet die Kegelschnitte als solche, d. h. Nicole denkt sich zwei mit der Spitze zusammentreffende grade Gegenkegel von kreisförmiger Basis und deren beide in einer und derselben Ebene befindlichen Axendreiecke. Senkrecht zu dieser Ebene lässt er eine zweite Ebene durch einen Punkt A der Seite des Axendreiecks gehen, und diese Ebene bringt auf der Kegeloberfläche einen Schnitt hervor, welcher andere und andere Eigenschaften zeigt, wenn die schneidende Ebene immer senkrecht zum Axendreiecke bleibend um A in Drehung versetzt wird. Das ist die älteste schon von den griechischen Geometern benutzte Entstehung der Kegelschnitte, und Nicole weicht von diesen seinen um zwei Jahrtausende älteren Vorgängern nur darin ab, dass er bewusstermassen Coordinaten benutzt und mit diesen rechnet, bis er zur Gleichung der Curve gelangt, was nach unserer Ueberzeugung den Griechen fern lag, wenn auch selbstverständlich die Ergebnisse nicht von einander abweichen können.

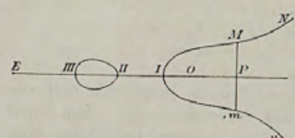

Fig. 116.

Der zweite Aufsatz heisst: *Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre.* Eine der von Newton sogenannten divergirenden Parabeln dritter Ordnung schneide (Fig. 116) die Abscissenaxe EOP in den drei Punkten I, II, III. Um das Abscissenstück $II\,III$ als Durchmesser stellt die Curve ein Oval vor, von dem Punkte I aus geht sie oberhalb

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1729, pag. 194—224. Vergl. in demselben Bande den Abschnitt *Histoire* pag. 37—44. [2]) Ebenda. Année 1731, pag. 130—143 und pag. 494—510.

und unterhalb der Abscissenaxe in zwei symmetrischen Aesten ins Unendliche. Ist $MP = y$ eine Ordinate, O der Coordinatenanfangspunkt, E ein auf der Abscissenaxe gegebener fester Punkt, so ist die kennzeichnende Eigenschaft der Curve in der Gleichung $OE \cdot PM^2 = PI \cdot PII \cdot PIII$ enthalten. In O wird senkrecht zur Ebene der Curve eine Gerade OC errichtet, von deren Punkte C aus Gerade nach allen Curvenpunkten gehen, welche also eine Kegelfläche bilden, und nun untersucht Nicole die auf diesem Kegel durch ebene Schnitte hervorzubringenden Curven. Es sind Schnitte eines Kegels von anderer Ordnung als die im ersten Aufsatze behandelten, aber immerhin Schnitte eines Kegels, und damit ist der von Nicole selbst betonte Zusammenhang der beiden Aufsätze hergestellt. Nicoles Zweck ist es, die von Newton in seiner Enumeratio behauptete, aber weder von ihm noch von Stirling oder Maclaurin bewiesene Erzeugung aller Curven dritter Ordnung als Centralprojectionen (Schatten) der fünf divergirenden Parabeln gleicher Ordnung sicher zu stellen. Er erfüllt seine Absicht mittels analytischer Rechnung für die aus der gegebenen Parabel herzuleitenden Curven. Die Untersuchung der von den vier anderen divergirenden Parabeln abhängigen Curven stellt Nicole wiederum als Gegenstand eines späteren Aufsatzes in Aussicht. Ein solcher ist aber niemals erschienen.

Der nächste von uns zu erwähnende Schriftsteller ist der Abbé Christophle Bernard de Bragelongne[1]) (1688—1744), der in seinem 17. Jahre sich der Freundschaft Mallebranches erfreute, in dessen Nähe er der Erholung bestimmte Stunden und Tage zubrachte. Schon 1708 veröffentlichte Bragelongne in dem Journal des Sçavans einen Artikel über Newtons Zeichnung der Curven 3ten und 4ten Grades mit Doppelpunkten. Der Akademie legte er dann 1711 eine erste Abhandlung über Quadraturen vor. Eine kirchliche Stellung in Brioude (Haute-Loire) nöthigte ihn zur Entfernung von Paris, während seine Ernennung zum Associé libre es ihm seit 1728 ermöglichte, die Beziehungen zur Pariser Akademie von Brioude aus aufrecht zu erhalten. Von dort schickte er 1730 den Anfang einer grossen Abhandlung[2]) über Curven 4ten Grades ein. Im folgenden Jahre kam die Fortsetzung[3]). Eine weitere Fortsetzung konnte 1732 nicht mehr unter die eigentlichen Abhandlungen aufgenommen werden. Man begnügte sich mit einer sehr abgekürzten Inhaltsangabe[4]) und mit der

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1744. *Histoire* pag. 65—70. [2]) Ebenda. Année 1730, pag. 158—216 und pag. 363—434. Vergl. auch *Histoire* pag. 68—87. [3]) Ebenda. Année 1731, pag. 10—49. Vergl. auch *Histoire* pag. 45—53. [4]) Ebenda. Année 1732. *Histoire* pag. 63—70.

Zusage, die ganze Untersuchung, welche immer weitere Ausdehnung gewann, werde künftig als besonderer Band im Drucke erscheinen, eine Zusage, die freilich niemals erfüllt worden ist. Bragelongnes Verfahren ist durchweg analytisch. Er hat die Vorarbeiten von Newton, von Stirling, von Maclaurin gründlich in sich aufgenommen und erkannt, dass es bei den höheren algebraischen Curven wesentlich darauf ankomme, ihre vielfachen Punkte der Art und der Anzahl nach zu erforschen. Er hat bei dieser Untersuchung eine grössere Mannigfaltigkeit solcher Punkte entdeckt, als jemals vor ihm bemerkt worden war, und hat, was einen besonderen Vorzug seiner Aufsätze bildet, sich nicht mit Aeusserung allgemeiner Gedanken begnügt, sondern überall mit bestimmten Beispielen seine Behauptungen belegt. Eine Eintheilung, beziehungsweise Aufzählung der Curven 4^{ten} Grades, beginnt erst in dem vorerwähnten Auszuge von 1732. Zu den von Bragelongne benutzten Eintheilungsgründen gehört seine Classenzahl, welche so zu verstehen ist: eine Curve n^{ten} Grades, deren Coordinaten x und y heissen, besitzt die allgemeinste Gleichung $a_0y^n + (a_1 + b_1x)y^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}x + \cdots + l_{n-1}x^{n-1})y + (a_n + b_nx + \cdots + m_nx^n) = 0$, und vermöge des Verschwindens auftretender Coefficienten können Potenzen von y ganz in der Gleichung fehlen. Kommt y^n vor, so ist die Curve von der n^{ten} Classe. Ist y^{n-1} die höchste vorkommende Potenz von y, so ist die Curve von der $n-1^{\text{ten}}$ Classe. Sie gehört der 1^{ten} Classe an, wenn y nur als y^1 vorkommt. Beispielsweise ist die Parabel $ay - x^2 = 0$ eine Curve 2^{ten} Grades und 1^{ter} Classe, die Ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$ eine Curve 2^{ten} Grades und 2^{ter} Classe. Einen anderen Unterscheidungsgrund bilden für Bragelongne die Asymptoten. Jeder sich ins Unendliche erstreckende Curvenast besitzt nämlich, wie er behauptet, eine gradlinige oder eine krummlinige Asymptote, und auf diese ihre Verschiedenheit lässt sich abermals eine Eintheilung gründen.

Alexis Claude Clairaut[1] (1713—1765) war das zweite von 21 Kindern eines Mathematikers in Paris und wuchs, wie man sagen darf, als Mathematiker unter Mathematikern auf. Schon im Jahre 1726 reichte er mit $12\frac{1}{2}$ Jahren der Pariser Akademie einen Aufsatz ein, welchem Nicole und Pitot als Berichterstatter das Lob spendeten, er lasse grosse Erwartungen auf den jugendlichen Verfasser setzen. Der Aufsatz wurde 1734 in den Veröffentlichungen der

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences des Paris.* Année 1765. *Histoire* pag. 144—159.

Berliner Akademie gedruckt[1]). Er beschäftigte sich mit den vier Curven 4^{ten} Grades, deren Gleichungen $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$, $x^2(x^2 + y^2) = a^4$, $x^2(a^2 - y^2) = a^4$, $x^4 = a^2(a^2 - y^2)$ heissen, und welche mit den Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung discutirt werden. Die so rege gemachten Hoffnungen täuschten nicht. Mit kaum 16 Jahren reichte Clairaut der Pariser Akademie eine grosse Abhandlung ein, welche von De Mairan und Nicole geprüft wurde. Ihr Urtheil vom 23. August 1729 ging dahin, es stünden viele merkwürdige und neue Dinge in der Abhandlung, welche in dem Verfasser sowohl Erfindungsgabe, als Kenntnisse in der Differential- und Integralrechnung verrathen. Weit lobender drückte sich am 3. Juni 1730 Josef Privat de Molières[2]) (1677—1742) aus. Ihm, der seit 1721 der Akademie angehörte, und von dessen mathematischen Leistungen eine Methode zur Auffindung der Primzahlen, von der behauptet wird[3]), sie habe in Zeit von 2—3 Stunden sämmtliche Primzahlen unterhalb 25 000 ermitteln lassen, am Anfange des 98. Kapitels hätte erwähnt werden müssen, wenn nur die leiseste Andeutung, worin die Methode bestand, vorhanden wäre, wurde die Arbeit Clairauts zu abermaliger Berichterstattung vom Minister übergeben. Die geschicktesten Mathematiker der Gegenwart und der Vergangenheit, sagte er, würden eine Ehre darein gesetzt haben, Verfasser dieser Schrift zu sein; sie verdiene nicht nur gedruckt zu werden, man müsse sie als ein Wunderwerk der Phantasie und der Fähigkeit anstaunen.

Der Druck erfolgte 1731 unter dem Titel *Recherches sur les courbes à double courbure* in einem Bändchen von 173 Nummern auf 119 Seiten mit 6 Figurentafeln. Clairauts Name fehlt auf dem Titelblatte, ist dagegen in den auf die Vorrede folgenden Gutachten, welche wir erwähnt haben, genannt. Die Vorrede ist so bemerkenswerth, dass wir uns nicht enthalten können, einige Stellen in Uebersetzung mitzutheilen.

Descartes dürfte der Einzige sein, der solche (d. h. auf gekrümmten Oberflächen beschriebene) Curven ins Auge gefasst zu haben scheint. Was er von ihnen sagt, belehrt uns einfach darüber, dass man, um sie zu prüfen, von jedem ihrer Punkte Senkrechte auf zwei selbst zu einander senkrechte Ebenen zu fällen und ihre Punkte dann auf die Punkte der Curven zu beziehen habe, welche man solcherweise auf den beiden Ebenen gebildet hat .... Ich glaubte dergleichen Curven Curven doppelter Krümmung nennen zu sollen, weil sie,

[1]) *Miscellanea Berolinensia* T. IV, 143—152 (Berlin 1734). [2]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1742. *Histoire* pag. 195—205. [3]) Ebenda. Année 1705. *Histoire* pag. 81.

in der geschilderten Weise betrachtet, immer so zu sagen an der Krümmung zweier Curven theilnehmen, auch hat man ihnen diesen Namen in einem der Akademie vorgelegten Aufsatze gegeben, wo man sie den Geometern als einen der Untersuchung würdigen Gegenstand vorschlägt[1] . . . Ich beabsichtige in einiger Zeit eine Schrift über gekrümmte Oberflächen herauszugeben, zu welcher diese als Vorbereitung dienen kann. Ich halte den Gegenstand nicht für minder neu als die Curven doppelter Krümmung, und bekannt dürfte darüber nur die Darstellung gekrümmter Oberflächen mittels einer Gleichung zwischen drei Veränderlichen sein, von der ich erfahre, dass sie gelegentlich in einer Abhandlung des berühmten Herrn Bernoulli in den Leipziger Acten erwähnt sei . . . . Was die Curven doppelter Krümmung betrifft, deren Coordinaten von einem Punkte ausgehen[2], oder deren Coordinaten krumme Linien sind, so verlangen diese eine besondere Methode und können den Gegenstand einer anderen Schrift bilden, welche ich mir zu veröffentlichen Rechnung mache.

Aus diesen Worten geht hervor, dass Clairaut kannte, was Descartes (Bd. II, S. 815), was Pitot (S. 445) über Raumgeometrie geäussert hatten, dass seine Gewährsmänner dem Aufsatze Johann Bernoullis in den A. E. von 1698 (S. 242 und 244) die Bedeutung beilegten, als zeuge er schon von einer Benutzung dreier Raumcoordinaten bei Oberflächen, dass er nicht kannte, was Parent (S. 418) in dieser Beziehung geleistet hatte. Für die Wahl der Benennung der Curven doppelter Krümmung gibt Clairaut einen ganz anderen Grund an als den, der nach unserer Ansicht wenigstens (S. 446), Pitot zu demselben Namen führte. Sollte Clairaut die Meinung Pitots richtiger als wir erkannt und wiedergegeben haben? Wir glauben es kaum, denn wenn Pitot die Curve doppelter Krümmung eine solche nennt, welche man sich auf der krummen Oberfläche eines Körpers gezeichnet denkt, so ist doch bei ihm in keiner Weise von Projectionen der Curve die Rede, und ebenso wenig behauptet Clairaut, in Pitots Sinne den Namen gewählt zu haben. Wir verstehen Clairauts Aeusserungen vielmehr nur so, dass sie zwei von einander unabhängige Dinge aussprechen: erstens er nenne die Curven doppelter Krümmung so, weil sie zwei Curven als Projectionen haben, zweitens komme der Name schon früher einmal vor. Was Clairaut von einem Punkte ausgehende Coordinaten nennt, dürften Raumpolarcoordi-

[1]) *c'est même le nom qu'on leur donne dans un mémoire de l'Académie Royale des Sciences où on les propose comme un objet digne des recherches des Géomètres.* [2]) *dont les coordonnées partent d'un point.*

naten sein. Die in Aussicht genommenen besonderen Arbeiten über dieses Coordinatensystem und über Oberflächen sind nicht erschienen.

Der 1. Abschnitt, Ueber die Art, Curven doppelter Krümmung zu betrachten[1]), ist für sich schon eine Zusammenstellung wichtiger raumgeometrischer Lehren. Wird aus drei zu einander senkrechten Geraden ein Coordinateneck gebildet, dessen drei Ebenen die der x und y, der x und z, der y und z heissen[2]), und projicirt man eine Raumcurve auf diese drei Ebenen, so entstehen Curven, denen Gleichungen zwischen x und y, zwischen x und z, zwischen y und z angehören. Zwei dieser Gleichungen genügen zur Bildung der dritten und zur Bestimmung der Raumcurve[3]). Auch anders gebildete Gleichungen können diesen letzteren Erfolg haben, aber immer müssen es zwei Gleichungen sein, die möglicherweise aus den Gleichungen zweier Projectionscurven durch Vereinigung hergeleitet sind. Eine einzelne Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z gehört einer Oberfläche an[4]). Die Gleichung ersten Grades zwischen x, y, z ist die einer Ebene[5]). Lassen also die Gleichungen der Projectionscurven eine solche Vereinigung zu, dass eine Gleichung ersten Grades entsteht, so ist die Curve nicht doppelter Krümmung, sondern liegt in einer Ebene[6]). Zwei Gleichungen zwischen x, y, z lassen die Raumcurve als Durchschnitt zweier Oberflächen erscheinen[7]). Clairaut zeigt nun, welche Gleichungen den bekanntesten Oberflächen angehören[8]). Er findet bei der Kegelfläche[9]), dass unter Annahme der Kegelspitze als Coordinatenanfangspunkt die Gleichung aus lauter homogenen Gliedern nach x, y, z mit Zahlencoefficienten vervielfacht besteht, oder, um Clairauts Worte zu gebrauchen, dass die Gleichung alsdann keinen Parameter enthält, d. h. ausser der Längeneinheit keine Strecke, deren Kenntniss in der Gleichung als nothwendig vorausgesetzt ist. Clairaut entwickelt die Gleichung der Kugel, des Kegels mit kreisförmiger Basis, des Paraboloids, anderer Rotationsflächen, allgemeiner Kegelflächen. Er stellt diese Gleichungen in homogener Gestalt her, indem er z. B. $(y^2+z^2)^3 = x^2$ durch $(y^2+z^2)^3 = a^4x^2$ ersetzt, wobei a statt der Einheit eintritt[10]). Dann wird der allgemeine Lauf einiger durch ihre zwei Gleichungen gegebenen Raumcurven besprochen[11]) und zum Schlusse darauf auf-

[1]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 1—39. *Première Section. De la manière de considérer les courbes à double courbure.* Nr. 1—67. [2]) Ebenda pag. 20, Nr. 42. [3]) Ebenda pag. 2—3, Nr. 4. [4]) Ebenda pag. 5, Nr. 8. [5]) Ebenda pag. 6, Nr. 10 und pag. 38, Nr. 66. [6]) Ebenda pag. 6—7, Nr. 12. [7]) Ebenda pag. 7, Nr. 13. [8]) Ebenda pag. 8 bis 19, Nr. 15—41. [9]) Ebenda pag. 14, Nr. 30. [10]) Ebenda pag. 11, Nr. 22: *en mettant a pour l'unité.* [11]) Ebenda pag. 28—34, Nr. 56—65.

merksam gemacht, wie man von der Gestalt einer Oberfläche eine Vorstellung gewinne, indem man untersuche, was aus der Oberflächengleichung werde, wenn man jede einzelne Coordinate für sich bald zu Null, bald unendlichgross werden lasse[1]).

Der 2. Abschnitt ist der Von der Anwendung der Differentialrechnung bei Curven doppelter Krümmung mit Rücksicht auf ihre Berührungslinien und Normallinien[2]). Ist N ein Punkt der Curve doppelter Krümmung, n ein zweiter unendlich nahe bei N gelegener Punkt derselben, sind M und m die Projectionen dieser Punkte in der Ebene der x und der y, so ist Nn ein Theil der Berührungslinie an die Curve doppelter Krümmung, Mm ein Theil der Berührungslinie an die Projectionscurve. Da nun Nn und Mm der Ebene $NMmn$ angehören, so werden die verlängerten Nn und Mm sich in t in der Ebene der x und der y schneiden, und das rechtwinklige Dreieck NMt nebst einem ihm ähnlichen unendlich kleinen Dreiecke, dessen Hypotenuse Nn ist, und dessen Katheten dz und $\sqrt{dx^2+dy^2}$ sind, lassen $Mt = \frac{z}{dz}\sqrt{dx^2+dy^2}$ und $Nt = \frac{z}{dz}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ finden[3]). Die Subtangente Mt lässt auch die Schreibweise $Mt = \sqrt{\left(z\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(z\frac{dy}{dz}\right)^2}$ zu, d. h. sie ist so gross wie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Subtangenten der Projectionscurven in der xz- und der yz-Ebene in den Projectionspunkten von N sind[4]). Neben der Subtangente ist auch die Subnormale hergeleitet. Nach zahlreichen Beispielen von Tangenten an bestimmte Curven doppelter Krümmung ist der Satz ausgesprochen, dass die Tangenten an zwei auf einer Oberfläche in einem Punkte durch zu zwei Coordinatenaxen senkrechte Ebenen herausgeschnittene Curven die Tangentialebene an die Oberfläche in eben jenem Punkte bestimmen[5]). Was Clairaut als Beweis des Satzes anführt, ist allerdings recht dürftig. Die Oberfläche wird, sagt er, durch die genannten Ebenen in den Curven NQ, NP geschnitten. Auf jeder der beiden Curven ist ein Punkt n unendlich nahe bei N vorhanden, und es ist klar, dass die Tangentialebene an die Oberfläche in N diejenige sein muss, welche das Dreieckchen Nnn enthält[6]). Der Satz wird etwas später erweitert[7]), in-

[1]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 35—39, Nr. 66—67. [2]) Ebenda pag. 40—60. *Seconde Section. Usage du calcul différentiel dans les courbes à double courbure par rapport à leurs tangentes et à leurs perpendiculaires.* Nr. 68—92. [3]) Ebenda pag. 40—41, Nr. 68—69. [4]) Ebenda pag. 43, Nr. 74. [5]) Ebenda pag. 49, Nr. 81. [6]) *il est clair que le plan tangent de la surface au point N est celui qui passe par ce petit triangle.* [7]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 52, Nr. 84.

dem von der Tangente einer Curve, die als Durchschnitt irgend zweier krummen Oberflächen gedacht ist, behauptet wird, sie müsse der Tangentialebene jeder der beiden Oberflächen in dem Punkte, in welchem die Berührungslinie an die Curve gesucht wird, angehören. Andere Aufgaben verlangen die Orte der Durchschnittpunkte aller Tangenten[1]) und aller Normalen[2]) an eine Curve doppelter Krümmung mit einer Coordinatenebene zu finden.

Der 3. Abschnitt ist der Anwendung der Integralrechnung auf Curven doppelter Krümmung, deren Rectification, der Ausmessung der durch sie bestimmten Räume u. s. w.[3]) gewidmet. Die Rectification wird durch $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ geleistet[4]). Die zweite Aufgabe verlangt die Complanation einer Oberfläche besonderer Art. Ist nämlich in der yz-Ebene eine Curve gegeben, auf welcher als Basis ein gerader Cylinder errichtet ist, ist auf diesen Cylinder eine Curve doppelter Krümmung gezeichnet, und wird der Flächenraum des gemischtlinigen Dreiecks aus Abscissenaxe, Curve doppelter Krümmung und obere Leitcurve der Cylinderfläche gesucht, so findet Clairaut für denselben den Ausdruck[5]) $\int dx\int\sqrt{dy^2+dz^2}$. Zieht man dieses Dreieck von der ganzen graden Cylinderfläche ab, so bleibt ein zweites gemischtliniges Dreieck, dessen Fläche unmittelbar durch die Formel $\int x\sqrt{dy^2+dz^2}$ dargestellt ist[6]), während die Cylinderfläche sich als $x\int\sqrt{dy^2+dz^2}$ ermittelt und durch die Gleichung $x\int\sqrt{dy^2+dz^2} - \int x\sqrt{dy^2+dz^2} = \int dx\int\sqrt{dy^2+dz^2}$ eine Prüfung der Ergebnisse gestattet. Eine weitere Aufgabe ist die folgende[7]). Die Curve doppelter Krümmung befindet sich wieder auf einer zur yz-Ebene senkrechten Cylinderfläche. Wird nun die Cylinderfläche auf die xz-Ebene abgerollt, so wird dabei die Curve doppelter Krümmung in eine ebene Curve verwandelt und diese wird gesucht. Endlich werden auch Cubaturen aufgesucht[8]), welche aber ebensowenig wie die Complanationen in allgemeinster Weise aufgefasst sind, sondern mindestens theilweise zu einer Coordinatenebene senkrechte Cylinderflächen voraussetzen. Wir haben kaum nothwendig

[1]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 53, Nr. 85. [2]) Ebenda pag. 57, Nr. 90. [3]) Ebenda pag. 61—96. *Troisième Section. Usage du calcul intégral dans les courbes à double courbure, par rapport à leurs rectifications, à la quadrature des espaces, qu'elles déterminent etc.* Nr. 93—136. [4]) Ebenda pag. 61—62, Nr. 93. [5]) Ebenda pag. 65—66, Nr. 98. [6]) Ebenda pag. 69—70, Nr. 101—103. [7]) Ebenda pag. 74, Nr. 108. [8]) Ebenda pag. 78 bis 79, Nr. 115; pag. 83—84, Nr. 121; pag. 88—89, Nr. 128—129; pag. 90 bis 91, Nr. 131.

zu sagen, dass auch im 3. Abschnitte jedem Satze Anwendungen auf bestimmte Curven zugesellt sind.

Das Gleiche gilt für die Sätze des 4. und letzten Abschnittes, Ueber einige allgemeine grundlegende Betrachtungen bei Bildung von Curven doppelter Krümmung und Erforschung ihrer Natur[1]). Die Curve, deren Gleichungen ermittelt werden, ist bald durch einen Zirkel mit gegebener Weite auf einer gegebenen Oberfläche beschrieben, indem die eine Zirkelspitze in einem ebenfalls gegebenen Punkte der Oberfläche haftet, bald ist sie der geometrische Ort der Endpunkte gleicher Strecken, welche auf den Erzeugungsgeraden einer beliebigen Kegelfläche mit doppelt gekrümmter Leitcurve von jener Leitcurve aus von der Kegelspitze sich entfernend abgemessen werden u. s. w.

Die Leser unseres Auszuges werden wohl gleich uns in das entzückte Lob einstimmen, welches in dem Urtheile von Molières (S. 779) sich kund gab, und welches bald durch eine Thatsache bekräftigt wurde, welche vereinzelt dastehen dürfte. Nach den Satzungen der Pariser Akademie war die Aufnahme in dieselbe nicht vor dem Abschlusse des zwanzigsten Lebensjahres möglich, Clairaut hätte also erst im Mai 1733 auf diese Ehre Anspruch erheben dürfen. Die Akademiker richteten an den König die Bitte, bei Clairaut eine Ausnahme von der Regel zu gestatten, und nach Genehmigung dieses Antrages wählte man den erst Achtzehnjährigen am 14. Juli 1731.

Der Band der Veröffentlichungen der Pariser Akademie für das Jahr 1731 enthält zwei Aufsätze Clairauts[2]). Der erste leitet den Schwerpunkt eines ebenen Raumgebildes (sei es einer Fläche oder eines Curvenbogens) ab, indem das Raumgebilde um ein Differential vergrössert, der Schwerpunkt um ein Differential verschoben wird und alsdann der Satz in Anwendung kommt, dass der Schwerpunkt der Vereinigung zweier Gebilde auf der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte der einzelnen Gebilde liegt, von jedem derselben im umgekehrten Verhältnisse des Gewichtes des betreffenden Gebildes entfernt. Der zweite Aufsatz will die Curve kennen lehren, welche auf irgend einer Oberfläche durch eine schneidende Ebene erzeugt wird. Clairaut nimmt an (Fig. 117), A sei Coordinatenanfangspunkt, AP, AQ, AR seien die Axen der x, der y, der z, BV sei der Durchschnitt der xy-Ebene mit der die gegebene Oberfläche in N schnei-

[1]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 97—119. *Quatrième Section. Quelques principes généraux pour former des courbes à double courbure et pour en trouver la nature*, Nr. 137—173. [2]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1731, pag. 159—162 und pag. 483—492.

denden Ebene, welche als eine neue Coordinatenebene gewählt ist. Der Anfangspunkt der neuen Coordinaten ist in B, und $BL = u$, $LN = s$ sind die neuen Coordinaten von N, dessen frühere Coordinaten leicht ersichtlich $AP = x$, $PM = y$, $MN = z$ waren. Damit die Schnittebene VLN bekannt sei, muss gegeben sein $AB = g$, $\operatorname{cotg} VBT = \frac{BT}{VT} = \frac{m}{n}$, $\operatorname{cotg} NLM = \frac{LM}{NM} = \frac{p}{q}$, wobei wir den auffälligen von Clairaut gebrauchten Ausdruck Oeffnung eines Winkels[1]) für deren Cotangente bemerken.

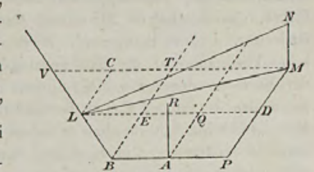

Fig. 117.

Unter Benutzung der g, m, n, p, q gelingt es, x, y, z durch s und u in Verbindung mit jenen fünf Constanten auszudrücken. Aus $\operatorname{cotg} NLM = \frac{p}{q}$ folgt $\frac{1}{\sin NLM} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}$ und $\sin NLM = \frac{z}{s} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$, also $z = \frac{qs}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Aehnlicherweise ist $LM = \frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Ferner $\operatorname{cotg} VBT = \frac{m}{n}$, $\cos VBT = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{BE}{u}$, $BE = \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}$, sowie $LE = \frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Weiter ist $LC = ET = BT - BE = y - \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $CM = LD = LE + BA + AP = \frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}} + g + x$. Nun steht LC auf VM und ML auf VB senkrecht, d. h. $\Delta\, VCL \sim LCM$ und $\frac{VC}{VL} = \frac{LC}{LM} = \sin VLC = \sin VBT = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} = \left(y - \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}\right) : \frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}$, also $y = \frac{nps}{\sqrt{m^2+n^2}\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Aus derselben Dreiecksähnlichkeit folgt $\frac{CM}{LM} = \frac{CL}{VL} = \cos VLC = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} = \left(\frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}} + g + x\right) : \frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}$ beziehungsweise $x = \frac{mps}{\sqrt{m^2+n^2}\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}} - g$. Setzt man endlich die Werthe von x, y, z in die Gleichung der gegebenen Oberfläche ein, so entsteht die Gleichung der ebenen Schnittcurve mit den Veränderlichen u, s. Wir brauchen kaum hervorzuheben, dass Clairauts Verfahren nichts Anderes ist, als eine Coordinatenveränderung, bei welcher die Schnittebene der u, s eine der neuen

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1731, pag. 484: *l'ouverture de l'angle.*

Coordinatenebenen ist, die man als im Punkte B zu einem Coordinateneck zusammenstossend zu denken hat.

Wir erwähnen aus dem nächstfolgenden Bande der Pariser Veröffentlichungen[1]) zwei nicht sehr bedeutende Aufsätze über diejenige Curve, von welcher (S. 215) unter dem Namen der Tractorie die Rede war. Pierre Bouguer[2]) (1698—1758), am bekanntesten durch seine Theilnahme an der Gradmessungsreise nach Peru von 1735, ist der Verfasser des ersten, Maupertuis der des zweiten Aufsatzes. In beiden ist von früheren Bearbeitungen des Gegenstandes keine Rede, in beiden führt die Curve den Namen der Verfolgungslinie, *courbe de poursuite*. Clairaut hat dann 1736 die Kraft untersucht, mit welcher der Faden fortbewegt werden muss, damit der an ihm befestigte Körper dem Zuge folge, und ebenderselbe[4]) hat sich 1737 mit der Gestalt der Tractorie unter der Voraussetzung beschäftigt, dass der die Curve beschreibende Punkt in einer anderen Ebene seinen Weg vollziehe als die ist, in welcher der andere Endpunkt des ziehenden Fadens sich längs einer gegebenen Curve bewegt. Auch Euler und Vincenzo Riccati haben, der Erstere 1736 in den Petersburger Abhandlungen[5]), der Zweite 1752 in einer in Bologna gedruckten Abhandlung *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium commentarius* und 1755 in den Veröffentlichungen der Akademie von Bologna[6]) über die Tractorie geschrieben, beziehungsweise über deren Anwendung zur Construction von Differentialgleichungen[7]).

Gleichfalls nur beiläufig gedenken wir eines Aufsatzes von Jakob Hermann über Oberflächengleichungen[8]): *De superficiebus ad aequationes locales revocatis variisque earum affectionibus* aus dem Jahre 1732. Könnte man daraus, dass von Clairauts 1731 gedruckter grundlegender Schrift mit keinem Worte die Rede ist, die an sich nicht unwahrscheinliche Folgerung ziehen, Hermann habe deren Einfluss nicht empfunden und ganz selbständig gearbeitet, so müsste man ihn mit unter die Schriftsteller zählen, welche zur Verbreitung der Kenntniss von der analytischen Geometrie des Raumes beitrugen. Hermann gibt die Gleichung der Ebene $az + by + cx - e^2 = 0$ und bestimmt sie genau, indem er die Punkte F, E, H

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1732, pag. 1—14 und 15—16, sowie *Histoire* pag. 56—60. [2]) Poggendorff I, 254—255. [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1736, pag. 1—22. [4]) *Miscellanea Berolinensia* V, 33—35. [5]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 65—85. [6]) *Commentarii Bonon.* T. III. [7]) Klügel V, 90—91. [8]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 36—67.

finden lehrt, deren Coordinaten $x = y = 0$, $z = \frac{e^2}{a}$; $y = z = 0$, $x = \frac{e^2}{c}$; $z = x = 0$, $y = \frac{e^2}{b}$ sind, d. h. die Punkte, in welchen die drei Coordinatenaxen durch die Ebene getroffen werden. Er gibt auch die Gleichung verschiedener krummer Oberflächen, von Curven doppelter Krümmung aber nur die kürzesten auf einer gegebenen Oberfläche zwischen zwei gegebenen Punkten zu ziehende Linien.

Das Jahr 1733 brachte eine in London gedruckte Abhandlung: *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum.* Dem Namen des Verfassers William Braikenridge ist die Bezeichnung als *Ecclesiae Anglicanae presbyter* beigefügt, und dieser Titel nebst einigen geringfügigen Angaben in der Vorrede ist Alles, was über die Persönlichkeit bekannt ist. Auch eine Besprechung des Buches in den A. E.[1]) geht nicht über das hinaus, was in der Vorrede gesagt ist, und ebensowenig ein Aufsatz von Braikenridge in den P. T. für 1735 und 1736. Der Vorrede entnehmen wir, dass Braikenridge 1726 in Edinburg war und dort die wesentlichsten Sätze seiner Curvenerzeugung fand. Er theilte sie einem dortigen Geistlichen George Martin mit, dann auch 1727 in London einem der Mathematik sehr kundigen Mann, J. Craig, worunter offenbar John Craig (S. 56) zu verstehen ist, der Schotte und längere Zeit Geistlicher war und 1731 in London starb. Damals (1727) befand sich auch Maclaurin vorübergehend in London, erfuhr aus Craigs Munde die von Braikenridge gefundenen Sätze und sagte diesem selbst, den er gelegentlich sprach, er habe auch Aehnliches gefunden. Maclaurin zeigte dabei Braikenridge eine gewisse Handschrift[2]), die er ihm allerdings nicht in die Hände gab, und in welche er ihm auch nicht den flüchtigsten Einblick gestattete. Nun wollte Braikenridge — wann? sagt er nicht — nach Schottland zurückkehren, und er gab vor seiner Abreise ein Papier, welches seine Sätze enthielt, an Georg Gordon, der es Desaguliers[3]) (1683—1744), abermals einem Theologen, damals mit der Abhaltung physikalischer Vorlesungen in London beauftragt, und dieser wieder der Royal Society vorlegen sollte. Durch irgend ein Missverständniss ging, wie Braikenridge erfuhr, jenes Papier zu Grunde. Ausserdem meldet die Vorrede, in der ganzen Schrift sei beweislos der Satz als wahr vorausgesetzt, dass eine Curve m^{ten} und eine solche n^{ten} Grades einander in mn Punkten schneiden. Georg Campbell besitze einen

[1]) *Nova Acta Eruditorum anno* 1735 *publicata*, pag. 28—30. [2]) *M. S. S. ostendit, quo innuebat inventa sua contineri, sed qua ratione ductus nescio in manus meas non tradidit nec licuit in illud vel leviter inspicere.* [3]) Poggendorff I, 553—554.

Beweis dieses Satzes, auf dessen Veröffentlichung in Bälde zu hoffen sei. Der Satz selbst war (S. 444) in Maclaurins Geometria organica zuerst ausgesprochen. Der von Braikenridge genannte Georg Campbell ist offenbar derselbe, von welchem (S. 564) ein algebraischer Aufsatz von 1728 herrührt, und dessen Persönlichkeit uns ebensowenig näher bekannt ist, als die seines Freundes Braikenridge.

Braikenridges Schrift zerfällt in drei Abschnitte. Der I. Abschnitt ist bezeichnet als über die Curven erster Art oder die Linien 2ten Grades und ihre Construction[1]). Dessen erster Satz ist folgender[2]). Seien

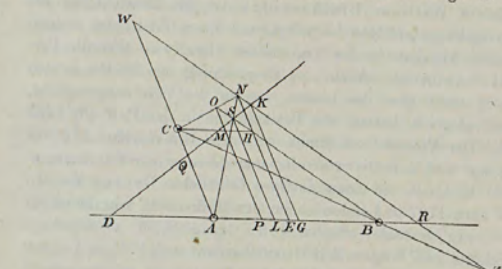

Fig. 118.

(Fig. 118) drei Punkte A, B, C in einer Ebene gegeben. Drei Gerade ASN, BSO, CON sind um jene Punkte drehbar und bilden bei ihrer Drehung die Durchschnittspunkte S, N, O. Richtet man die Drehungen so ein, dass S und N je eine Gerade DSK und RKN durchlaufen, so beschreibt O einen Kegelschnitt. Man sieht leicht den Fortschritt, der in dieser Construction gegen diejenige enthalten ist, welche Newton in seiner Enumeratio vorschlug (S. 424), welche Maclaurin in seiner Geometria organica bewies (S. 436—438). Jene hatten den immerhin verwickelteren Apparat zweier Winkel, welche in Drehung versetzt waren, während Braikenridge sich mit in Drehung versetzten Geraden begnügte. Braikenridges Beweisführung ist analytisch und verfolgt den gleichen Weg, welchen Maclaurin bei dem Beweise für die Newtonsche Entstehung der Kegelschnitte eingeschlagen hatte. Es wird gezeigt, dass zwischen den Coordinaten des Punktes O eine quadratische Gleichung stattfinde. Die Figur ist so zu verstehen: Die Punkte A, B, C, die Geraden DSK, RKN sind beliebig gegeben. Die von A, B, C ausgehenden Geraden ASN,

[1]) Braikenridge pag. 1—23. [2]) Ebenda pag. 1—3.

BSO, CON gehorchen keiner anderen Bedingung, als dass ihre Durchschnittspunkte S und N auf den vorgenannten Geraden liegen, welche kurzweg die Träger heissen mögen, während Braikenridge keinen Namen für sie besitzt. Die drei Punkte A, B, C dagegen nennt er Pole. Durch A, B wird eine Gerade gezogen, welche die Träger in D und R schneidet, desgleichen eine zweite Gerade durch A, C, welche die Träger in Q und W schneidet. Damit ist die Gerade $WNKR$ gegeben nebst ihrem Durchschnittspunkte Z mit der CB. Als eigentliche Hilfslinien sind noch OP, SL, NE, KG sämmtlich $\parallel CA$ und $CMH \parallel AB$ gezogen. Braikenridge bedient sich folgender Abkürzungen: $AB = a$, $AR = b$, $AD = d$, $AC = c$, $AE = u$, $AL = z$, $AP = x$, $OP = y$. Die Dreiecke KGR, DKG sind aus gegebenen unveränderlichen Stücken hergestellt, das Verhältniss ihrer Seiten zu einander ist mithin bekannt und kann durch $\frac{GR}{GK} = \frac{a}{g}$ und $\frac{DG}{GK} = \frac{a}{k}$ dargestellt werden. Nun ist $\Delta KGR \sim NER$ und $\Delta DKG \sim DSL$, also $\frac{GR}{GK} = \frac{ER}{EN} = \frac{AR - AE}{EN}$; $\frac{DG}{GK} = \frac{DL}{LS} = \frac{AD + AL}{LS}$ oder $\frac{a}{g} = \frac{b-u}{EN}$, $\frac{a}{k} = \frac{d+z}{LS}$, beziehungsweise $EN = \frac{bg - gu}{a}$, $LS = \frac{dk + kz}{a}$. Ferner ist $\Delta AEN \sim ALS$, also $\frac{AE}{AL} = \frac{EN}{LS}$ oder $\frac{u}{z} = \frac{bg - gu}{dk + kz}$ und daraus $z = \frac{dku}{bg - gu - ku}$. Andererseits folgt aus $\Delta BPO \sim BLS$, dass $\frac{BP}{BL} = \frac{PO}{LS}$ oder $\frac{a-x}{a-z} = \frac{ay}{dk + kz}$ und $z = \frac{a^2y + dkx - adk}{ay - kx + ak}$. Die Gleichsetzung der beiden für z gefundenen Ausdrücke liefert $u = \frac{a^2bgy + bdgkx - abdgk}{(adk + a^2g + a^2k)y + dgkx - adgk}$. Daneben ist $\Delta CMO \sim CHN$, also $\frac{CM}{MO} = \frac{CH}{HN}$ oder $\frac{AP}{OP - CA} = \frac{AE}{NE - CA}$ oder $\frac{x}{y-c} = \frac{u}{\frac{bg - gu}{a} - c}$, woraus $u = \frac{(bg - ac)x}{ay + gx - ac}$. Jetzt endlich werden die beiden für u gefundenen Werthe einander gleichgesetzt und liefern nach Wegschaffung der Brüche mittels Multiplication mit beiden Nennern eine in x und y quadratische Gleichung. Als Zusatz ist bewiesen[1]), dass die Gleichung sich in den Punkten K, B, R, C, Q erfüllt, dass diese fünf Punkte folglich dem Kegelschnitte angehören, und noch 14 andere Zusätze folgen, die sich meist auf besondere Lagen der Punkte A, B, C und der Träger DSK, RKN beziehen. Zwei Aufgaben schliessen sich dann an. Die erste verlangt einen Kegelschnitt mit Hilfe eines gegebenen Durchmessers, des Winkels,

[1]) Braikenridge pag. 3.

welchen er mit dem ihm conjugirten Durchmesser bilden soll, und des Parameters zu zeichnen. Braikenridge löst sie[1]) für die Ellipse, die Hyperbel, die Parabel, indem er in jedem einelnen Falle die drei Pole und die zwei Träger ermittelt, die zu der im ersten Satze gelehrten Construction verwandt den jedesmal verlangten Kegelschnitt liefern. Die zweite Aufgabe, einen Kegelschnitt durch fünf gegebene Punkte B, C, K, Q, R zu zeichnen, wird in dem gleichen Sinne der Auflösung zugeführt[2]). Werden davon zwei Punkte B, C als Pole gewählt, so findet sich der dritte Pol A als Durchschnittspunkt von BR und CQ, während R und Q, mit dem fünften Punkte K verbunden, die beiden Träger KR, KQ liefern.

Der II. Abschnitt von der Beschreibung von Curven jeden Grades mit Hilfe von Curven niedrigeren Grades[3]) benutzt ebenfalls drei Gerade, drei Pole, zwei Träger, wählt aber die letzteren nicht geradlinig. Schneiden die um die Pole A, B, C drehbaren Geraden ASN, BSO, CNO einander in N, S, O und lässt man N eine Gerade, S eine Curve n^{ten} Grades als Träger durchlaufen, so beschreibt O eine Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades[4]). Der Beweis ist nach zwei Methoden geführt, deren erste dem oben ausführlich berichteten Beweise des ersten Satzes, die zweite den Beweisen der Geometria organica für die Entstehung von Curven höheren Grades nachgebildet ist, in welchen es sich um Abzählung der Durchschnittspunkte einer Geraden und einer Curve handelt. Wird der eine Träger vom m^{ten}, der andere vom n^{ten} Grade gewählt, so ist $2mn$ der Grad der durch den dritten Durchschnittspunkt der drei drehbaren Geraden erzeugten Curve[5]). Geht unter der Voraussetzung eines geradlinigen Trägers und eines Trägers n^{ten} Grades der letztere durch einen Pol, so entsteht eine Curve $2n - 1^{\text{ten}}$ Grades[6]). Ist der eine Träger m^{ten} Grades und geht durch einen Pol, der andere n^{ten} Grades und geht durch einen zweiten Pol, so wird die Curve $2mn - m - n^{\text{ten}}$ Grades erzeugt[7]) u. s. w.

Der III. Abschnitt, in welchem Kegelschnitte durch mehrere um Pole drehbare Gerade erzeugt werden[8]), gelangt, von Sonderfällen beginnend, zu dem allgemeinen Satze[9]), dass, wenn n Gerade sich um ebenso viele Pole drehen, und wenn von ihren $\frac{n(n-1)}{2}$ Durchschnittspunkten, deren $n - 1$ auf geradlinigen Trägern bleiben, die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Durchschnittspunkte lauter Kegelschnitte beschreiben.

[1]) Braikenridge pag. 15—21. [2]) Ebenda pag. 21—23. [3]) Ebenda pag. 24—59. [4]) Ebenda pag. 24—26. [5]) Ebenda pag. 28—29. [6]) Ebenda pag. 30—32. [7]) Ebenda pag. 41—42. [8]) Ebenda pag. 60—70. [9]) Ebenda pag. 66.

Wir haben (S. 787) einen Aufsatz Braikenridges in den P. T. erwähnt. Es ist ein Brief[1]) an den königlichen Leibarzt Benjamin Hoadly[2]) (1706—1757), welcher seit 1727 Mitglied der Royal Society war. Braikenridge wiederholt hier den ersten Satz aus seiner *Exercitatio geometrica* und fügt ihm andere hinzu, ohne sie weitläufig zu beweisen, aber mit Angabe der betreffenden Sätze der genannten Schrift, auf welche der Beweis sich gründe. Es handelt sich um Pole, um welche Gerade in Drehung versetzt sind, um geradlinige Träger einiger Durchschnittspunkte, um Erzeugung von Curven mittels eines beschreibenden Punktes, der mit anderen Durchschnittspunkten der um die Pole gedrehten Geraden in Verbindung steht. Das erste Beispiel, dessen Anführung hier genügen muss, ist folgendes. Seien (Fig. 119) ANS, BOS, CNO, DPO die vier um die Pole A, B, C, D drehbaren Geraden; seien dK und RK zwei geradlinige Träger der Durchschnittspunkte S und N; der dritte Durchschnittspunkt O der um die Pole A, B, C beweglichen Geraden ist mit dem vierten Pole D durch DO verbunden und diese DO schneidet die NS, d. h. die Verbindungsgerade der auf den beiden Träger verbleibenden Punkte in P. Dieses P beschreibt alsdann eine Curve dritten Grades.

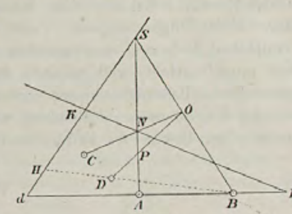

Fig. 119.

Sechs Monate später sah Maclaurin sich veranlasst, eine Erklärung abzugeben[3]). Er habe, sagt er, schon 1721 an einem Nachtrage zur *Geometria organica* drucken lassen, aber nach Vollendung einiger Bogen sei der Rest nicht fertig geworden und die Schrift nicht zum Verkaufe gelangt. Inzwischen habe Braikenridge, der einige Jahre hindurch in Edinburg Privatunterricht in der Mathematik ertheilte, sich mit Curvenerzeugung beschäftigt und ihm einmal einen Lehrsatz gezeigt, der schon in der Geometria organica vorkam, ein Zusammentreffen, welches Braikenridge nicht bemerkt zu haben scheine, wie denn in der That derartige Methoden sich oft als mit einander übereinstimmend erweisen, ohne dass man es beim ersten Anblick erkennt. Dann habe etwas später 1727 Braikenridge

[1]) P. T. XXXIX, 25—36, Nr. 436, Januar, Februar, März 1735. [2]) Poggendorff I, 1115. [3]) P. T. XXXIX, 143—165, Nr. 439, October, November, December 1735. Bei Poggendorff II, 6 fehlt die Angabe dieses Aufsatzes.

zu ihm von neuen Lehrsätzen gesprochen, und er habe ihm sofort auch diese in seinen Papieren gezeigt. Wir bemerken beiläufig, dass Maclaurin nicht sagt, wo diese spätere Unterredung stattfand. Es war jedenfalls dieselbe, welche Braikenridges Bericht (S. 787) nach London verlegt. Jetzt, fährt Maclaurin fort, müsse er wenigstens Einiges von dem, was er nach 1719 gefunden, der Oeffentlichkeit übergeben, damit man ihm nicht später den Vorwurf der Aneignung fremden Gutes machen könne. So habe er im November 1722 näheres Augenmerk auf das zwanzigste Lemma im 5. Abschnitte des I. Buches von Newtons Principien geworfen und habe erkannt, dass ihm die Entstehung eines Kegelschnittes mittels dreier um ebenso viele Pole drehbarer Geraden unmittelbar entnommen werden könne, da das Lemma selbst nur einen besonderen Fall dieser Entstehung bilde. Später habe er noch Vieles über Berührungslinien, über Asymptoten, über zwei- und mehrfache Curvenpunkte entdeckt, aber nicht gross beachtet, weil er darin keinen Fortschritt über das in seinem Buche Behandelte hinaus fand. Er habe des Weiteren 1727 in einem Kapitel seiner in Edinburg sehr bekannten Algebra[1]) einen algebraischen Beweis des Falles der Benutzung von drei Polen geliefert, sowie auch die Construction eines Kegelschnittes durch fünf gegebene Punkte mit dem Zusatze, dass bei Anwendung von noch mehr Polen und um dieselben sich drehenden Winkeln oder Geraden immer ein Kegelschnitt entstehe.

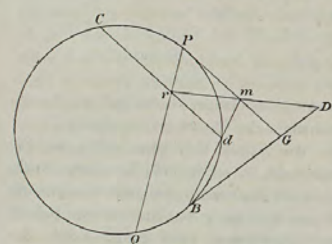

Fig. 120

Aus der Uebersicht über Maclaurins Entdeckungen nach 1719 begnügen wir uns ein mit dem Vermerk *Nancy 27. November 1722* versehenes Bruchstück in lateinischer Sprache hervorzuheben[2]). Um die Pole C, B, D (Fig. 120) werden die Geraden Cd, Bm, Dr bewegt und der Durchschnitt der Bm, Dr wird längs der gegebenen Geraden PG, der der Cd, Dr

[1]) In 1727 *I added to a chapter of my Algebra, which is very publick in this place.* Da die Algebra nicht vor 1748 gedruckt wurde, so kann der Satz nur entweder bedeuten, dass die handschriftliche Algebra von Vielen benutzt wurde, oder eine Berufung auf gehaltene Vorlesungen sein. [2]) P. T. XXX, 163.

längs der gleichfalls gegebenen Geraden PQ geführt, alsdann beschreibt der Durchschnitt der Cd, Bm einen Kegelschnitt[1]).

Der Streit wurde unseres Wissens nicht weiter geführt. Wir glauben nicht irre zu gehen, wenn wir das allgemeine Urtheil dahin fassen, dass Niemand auch nur den leisesten Verdacht hegte, Maclaurin könne sich eine fremde Entdeckung angeeignet haben. Aber auch für Braikenridge wird man selbständige Arbeit anerkennen müssen, die nur zufällig mit Maclaurins Ergebnissen zusammentraf, wie dieser Letztere es selbst zugab.

Ein französischer Officier und Ingenieur Frézier (1682—1773) ist wegen eines 1738—1739 in Strassburg erschienenen zweibändigen Werkes: *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de stéréotomie* zu nennen. Eine zweite Auflage folgte in 3 Bänden (Paris 1754, 1768, 1769). Wir haben (Bd. II, S. 675—676) unter den Händen von Desargues und von Bosse die descriptive Geometrie entstehen sehen, die damals freilich diesen Namen noch nicht führte. Auch Frézier kannte ihn noch nicht, bezeichnet aber in jeder anderen Beziehung einen grossen Fortschritt. Wir selbst haben freilich sein Werk nie gesehen und berichten nach zweiten Quellen[2]). Darnach ist bei Frézier die Theorie von der Praxis getrennt und ersterer nebst den Beweisen der erörterten Dinge der ganze I. Band eingeräumt.

Zur Darstellung, *description*, dient hauptsächlich die senkrechte Parallelprojection, die man sich durch herabfallende Tropfen Tinte veranschaulichen könne. Die Projectionsebene, *plan de description*, ist entweder horizontal zur Aufnahme des Grundrisses, *projection horizontale* oder *ichnographie*, oder vertical zur Aufnahme des Aufrisses, *orthographie*. Unter den Oberflächen sind auch die windschiefen, *surfaces gauches*, hervorgehoben. Diese werden durch parallel zu einer Ebene fortgeführtes Hingleiten einer Geraden längs zweier nicht derselben Ebene angehörenden Linien erzeugt, welche Linien beide gerade, oder die eine gerade, die andere gekrümmt, oder beide gekrümmt sein können. Frézier rechnet zur den windschiefen Flächen auch noch die durch ein ähnliches Gleiten einer krummen Linie erzeugten Flächen, welche heute nicht mehr als windschief gelten. Einen weiteren Gegenstand von Fréziers Untersuchungen bildet die Durchdringung von Körpern und die Abwickelung solcher Flächen,

[1]) Auf Maclaurins Figur in den P. T. sind zwei Buchstaben unrichtig, welche wir mit dem Texte in Einklang gebracht haben. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 355 (deutsch S. 376) und besonders Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, 23—24, dem wir fast wörtlich folgen.

welche aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Ebenen gebildet erscheinen.

Gleichfalls in Frankreich erschien 1740 das Buch: *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secour du calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres* von Jean Paul de Gua de Malves. Wir haben es schon (S. 577 und 605) wegen des algebraischen Dreiecks als Ersatz für das Newtonsche Parallelogramm erwähnt, auch (S. 577) eine darin vorkommende Eliminationsmethode geschildert. Das Buch von De Gua wurde gleich dem von Clairaut (S. 779) durch Privat de Molières geprüft, der es am 3. November 1739 als des Druckes würdig bezeichnete. Das Buch, im kleinsten Formate gedruckt, zerfällt in drei Abschnitte von sehr ungleicher Ausdehnung. Der I. Abschnitt geht von S. 1—24, der II. von S. 24—347, der III. von S. 348—454. Ein Inhaltsverzeichniss irgend welcher Art fehlt, wodurch das Zurechtfinden ungemein erschwert ist, während die nichts weniger als klare Schreibweise dem Studium des Buches in der Zeit, als es erschien, ganz besonders hindernd in den Weg getreten sein muss.

Der I. Abschnitt handelt von den Mittelpunkten der Curven, d. h. der algebraischen Curven, von welchen allein die Rede ist, und auf welche sich auch die Titelworte der geometrischen Linien jeder Ordnung beziehen. Als Mittelpunkt, *centre général*, wird der Punkt bezeichnet, in welchem alle durch ihn hindurchgehenden Sehnen halbirt werden, oder von welchem aus ein Auge alle einander diametral gegenüberliegende Curvenpunkte als symmetrische Punkte sehen würde[1]). De Gua verlegt nun zunächst das Coordinatensystem, auf welches die Curvengleichung sich bezieht, durch Parallelverschiebung nach einem anderen Anfangspunkte und dreht alsdann die Ordinatenaxe. Heissen die ursprünglichen Coordinaten x, y, so wird die Verschiebung durch $x = \xi + p$, $y = \eta + q$, die Drehung durch $\eta = mu$, $\xi = z + nu$ vollzogen, die ganze Coordinatenveränderung beruht also auf den Gleichungen $x = p + z + nu$, $y = q + mu$ mit u und z als den neuen Veränderlichen und m und n als von der Neigung der Ordinatenaxe abhängigen Constanten. Ist der neue Coordinatenanfangspunkt ein Mittelpunkt, so muss bei jeder Neigung der Ordinaten zur Abscissenaxe im Mittelpunkte eine ebensogrosse positive als negative Ordinate eines Curvenpunktes entstehen, d. h.

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 2: *si l'on suppose un oeil placé dans le centre général d'une Courbe quelconque, les parties diamétralement opposées de cette Courbe présenteront en tout sens une symétrie parfaite.*

wenn $z = 0$ gesetzt ist, muss eine Gleichung in u erscheinen, welche ebensoviele positive als negative Wurzeln von absolut genommen gleichem Werthe besitzt. Das kann nur dann der Fall sein, wenn in der entstehenden Gleichung in u keine Potenz von u mit ungradem Exponenten auftritt, d. h. wenn solche Potenzen alle den Coefficienten 0 besitzen. Anstatt $x = p + z + nu$, $y = q + mu$ und dann $z = 0$ zu setzen, kann man aber sofort die Substitution $x = p + nu$, $y = q + mu$ vornehmen, worauf die Coefficienten ungerader Potenzen, von u gleich Null gesetzt die Werthe p und q der Coordinaten des Mittelpunktes, wenn es einen solchen gibt, unabhängig von m und n finden lassen müssen[1]). Wäre z. B. $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ zu untersuchen, so verwandle man die Gleichung in $(m^2 + n^2)u^2 + (2mq + 2np - 2an)u + (p^2 + q^2 - 2ap) = 0$ und setze $2mq + 2n(p-a) = 0$. Bei willkürlichem m und n kann diese Gleichung nur mittels $q = 0$, $p = a$ erfüllt werden, und in der That hat der Kreis $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ bei $x = a$, $y = 0$ einen Mittelpunkt. De Gua behandelt dieses Beispiel allerdings ganz anders[2]). Er differentiirt die Curvengleichung, wodurch er $2(x-a)dx + 2y\,dy = 0$ erhält, und setzt die Coefficienten von dx und von dy, jeden für sich, $= 0$, wobei sich $x = a$, $y = 0$ ergibt. Dass man so verfahren kann, beruht auf der Entwicklung des Gleichungspolynoms $x^2 - 2ax + y^2 = F(x, y)$, in welchem $x(y)$ den Zuwachs $dx(dy)$ erhalten hat, nach dem Taylorschen Satze. In dieser Entwicklung erhalten dx und dy die Coefficienten $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, die man zum Verschwinden zu bringen hat, wenn die ersten Potenzen von dx und dy in der Entwicklung nicht vorkommen dürfen[3]). Ist die Curvengleichung von höherem als dem zweiten Grade, so muss die Differentiation und die Nullsetzung von partiellen Differentialquotienten fortgesetzt werden, wie Saurin (S. 429) erkannt hatte, und führt ausser zu den Coordinaten des Mittelpunktes auch zu Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten der Curvengleichung, welche erfüllt sein müssen, damit ein Mittelpunkt vorkomme.

Der II. Abschnitt gibt die allgemeine Lehre von den singulären oder merkwürdigen Punkten[4]) der Curven und dergleichen mehr. Der Name eines singulären Punktes dürfte hier erstmalig erscheinen, während Saurin (S. 427) nur von einem singulären Falle der Berührung gesprochen hatte. War im I. Abschnitte infolge von Coor-

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 3—7. [2]) Ebenda pag. 10. [3]) Ebenda pag. 7—8 und *Addition* pag. 455—457. [4]) Ebenda pag. 72: *des points Singuliers ou Remarquables.* Auch in der Vorrede pag. X ist von den *Points Singuliers* die Rede.

dinatenveränderungen der etwaige Mittelpunkt einer Curve zum Coordinatenanfangspunkte geworden, so gebraucht De Gua im II. Abschnitte ein ganz ähnliches Verfahren. Er verlegt den neuen Coordinatenanfangspunkt nach einem singulären Punkte. Im Anfang des Abschnittes erscheint das mehrgenannte algebraische Dreieck mit seiner Verwendung. Dahin gehört die Darstellung von y oder einer Potenz von y durch eine nach Potenzen von x mit steigenden Exponenten geordnete Reihe, die sich in unmittelbarer Nähe des gewählten Anfangspunktes, wo x unendlich klein ist, auf das erste Glied beschränkt[1]). Daraus folgert De Gua weiter[2]) die Umwandelbarkeit des Gleichungspolynoms der Curve ebendort in $y^m - Ax^{\pm n}$ mit positiven A, m und n, oder in ein Product solcher Ausdrücke. Da ein singulärer Punkt der Curve als Coordinatenanfangspunkt gewählt wurde, d. h. da $x = 0$, $y = 0$ einen Curvenpunkt darstellt, so muss mindestens ein Factor des Gleichungspolynoms unter dieser Voraussetzung verschwinden, d. h. x und y müssen gleichzeitig positive Exponenten besitzen, der erwähnte Factor muss $y^m - Ax^n$ heissen[3]). Nun seien drei Fälle zu unterscheiden. Ist erstens m grad und n ungrad, so entspricht auf der positiven Abscissenseite jedem x ein positives und ein negatives y von gleicher Länge, auf der negativen Abscissenseite sind die y imaginär. Ist zweitens m und n ungrad, so wird dem positiven x ein positives y, dem negativen x ein negatives y entsprechen, und die singuläre Coordinatenanfangspunkt ist Inflexionspunkt. Ist drittens m ungrad und n grad, so entspricht dem positiven wie dem negativen x ein gleichgrosses positives y, und im Coordinatenanfangspunkt ist ein Rückkehrpunkt erster Art, eine Spitze, erkannt. Der vierte Fall, dass m und n beide grad, etwa $m = 2\mu$, $n = 2\nu$ wären, lässt die weitere Zerlegung $y^{2\mu} - Ax^{2\nu} = (y^\mu - \sqrt{A}x^\nu)(y^\mu + \sqrt{A}x^\nu)$ zu, die einen der drei früheren Fälle herbeiführt, oder, wenn auch μ und ν noch beide grad sind, bei weiterer Zerlegung schliesslich herbeiführen muss[4]). Ein Rückkehrpunkt der zweiten Art, ein Schnabel, ist also nach diesem Beweis a priori nicht möglich[5]). Auf diese Behauptung legte De Gua ein solches Gewicht, dass er sie in seiner Vorrede aufnahm[6]). An Figuren, welche wir so getreu als möglich nachbilden, um unseren Lesern eine Vorstellung von den Figurentafeln von De Guas Buche zu geben, zeigt der Verfasser zuerst (Fig. 121), wie der Rückkehrpunkt zweiter Art nach der Meinung De L'Hôpitals aussehe[7]),

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 47. [2]) Ebenda pag. 72. [3]) Ebenda pag. 77. [4]) Ebenda pag. 77—79. [5]) Ebenda pag. 76. [6]) Ebenda *Préface* pag. XVII. [7]) Ebenda pag. 74.

um dann später zu behaupten[1]), eine solche Zeichnung sei nur als Hälfte einer anderen (Fig. 122) aufzufassen, von welcher aber De L'Hôpital vermöge der Evoluten, die er sich zeichnete, ein Theil entging. Das 116. Kapitel wird uns mit der Widerlegung dieser Meinung, welche nicht ausblieb, bekannt machen. Ist die Curvengleichung nach Potenzen von y mit fallenden Exponenten geordnet, welchen nach x geordnete Polynome als Coefficienten dienen, so zeigt das Fehlen der niedersten Glieder in y an[2]), dass der Coordinatenanfangspunkt der Curve als vielfacher Punkt angehört. Aehnliche Beziehungen finden zwischen dem Fehlen der dem Grade der Curvengleichung nach möglichen höchsten Glieder in y und dem Vorhandensein von unendlichen Curvenästen und Asymptoten statt[3]). Wenn auch die von De Gua hervorgehobenen Thatsachen bekannt waren (S. 431 und 440), so hatte man doch die Frage nach einem inneren Zusammenhange derselben noch unterlassen. De Gua stellte sie[4]) und beantwortete sie durch eine Einführung neuer Veränderlichen auf Grundlage der Gleichungen $x = \frac{\pm pq}{z}$, $y = \frac{\pm pu}{z}$, ein Verfahren, welches er eine Projection nennt und mit dem Schatten von Newtons Enumeratio in Uebereinstimmung findet[5]). De Gua folgert daraus später[6]) den von Newton (S. 423) ausgesprochenen, von Nicole (S. 777) und Clairaut (S. 784—785) bewiesenen Satz, dass alle Curven 3ten Grades als Projectionen einer der fünf divergirenden Parabeln 3ten Grades anzusehen sind, und aus den sogenannten Schatten ergibt sich ihm der neue Satz, dass, wenn eine Curve 3ten Grades drei Inflexionspunkte besitze, dieselben auf einer Geraden liegen müssen. De Gua legt auf diesen Satz grosses Gewicht, so dass von ihm in der Vorrede und an zwei Stellen des Buches die Rede ist[7]). Hatte De Gua bisher immer darauf geachtet, einen singulären Punkt zum Coordinatenanfangspunkte zu wählen, so wendet er sich im weiteren Verlaufe der Aufgabe zu, ausserhalb des Coordinatenanfangspunktes befindliche vielfache Punkte zu ermitteln[8]) und gelangt zu den Saurinschen Ergebnissen (S. 429). Er verbindet mit diesen Erörterungen Bemerkungen gegen De L'Hôpital, gegen Leibniz u.s.w., bei welchen das Recht nicht auf seiner Seite ist. Den Schluss des

Fig. 121.

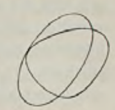

Fig. 122.

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 81. [2]) Ebenda pag. 91 bis 92. [3]) Ebenda pag. 148 sqq. [4]) Ebenda pag. 198. [5]) Ebenda pag. 202: *l'équation de l'Ombre ou de la Projection cherchée.* [6]) Ebenda pag. 222. [7]) Ebenda *Préface* pag. XVIII, pag. 225 und 313. [8]) Ebenda pag. 238.