110. Kapitel.

Reihen seit 1737.

Wir erinnern uns, dass Jakob Bernoulli (S. 94) im vollen Bewusstsein des unendlichen Werthes der harmonischen Reihe gleichwohl in unbefangenster Weise mit derselben rechnend zu gewissen Summenbildungen gelangte. Auch Goldbach (S. 642) rechnete mit unendlichen Reihen von mindestens zweifelhafter Berechtigung, und ein Ergebniss theilte er Euler mit, der davon mit der Bemerkung, es rühre von Goldbach her, in der Abhandlung *Variae observationes circa series infinitas* [1]) Gebrauch machte. Sei x die Summe der unendlichen harmonischen Reihe oder $x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$. Man weiss, dass $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \cdots$, und setzt man der Reihe nach $a = 2$, $a = 3$, $a = 5$, $a = 6$, so erhält man

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \cdots.$$

Zieht man diese Reihen von x ab, so bleibt $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots$. Offenbar lassen weitere Reihen für $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots$ sich bilden, in denen lauter von einander verschiedene Glieder $\frac{1}{7^r}, \frac{1}{10^r}, \frac{1}{11^r}, \cdots$ mit $r \geqq 1$ vorkommen. Zieht man auch diese Reihen wieder von $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ ab, so erschöpfen sich schliesslich alle Glieder der harmonischen Reihe mit Ausnahme der 1 und man behält $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots\right) = 1$, beziehungsweise

$$x - 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots.$$

Nun war

$$x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 160–188.

und zieht man die obere Reihe von der unteren ab, so bleibt Goldbachs Reihe

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots,$$

deren Definition darin besteht, dass die Nenner der sie bildenden Stammbrüche um 1 vermehrt sämmtliche Potenzzahlen liefern, die in der natürlichen Zahlenreihe vorkommen.

Euler setzte ein ähnliches Verfahren fort, mittels dessen er die eben gefundene Reihe von der Summe 1 in zwei andere zerspaltete, deren eine nur mit ungraden Nennern behaftete Brüche enthielt, die zweite nur Brüche graden Nenners. Er fand

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots = \log 2,$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \cdots = 1 - \log 2.$$

In einem weiteren Satze ging Euler von der Leibnizischen Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ aus, und dieses dürfte die erste Stelle sein [1]), an welcher Euler sich des Buchstabens π für die Zahl 3,1415926 ⋯ bediente. Wir wissen, dass sich William Jones 1706 mit eben dieser Bezeichnung versuchte (S. 306), aber ohne Nachahmung blieb. Eulers Beispiel schlug durch, und bald nahm ein Schriftsteller nach dem anderen das π an. Noch eine andere bald allgemein gewordene Bezeichnung schreibt sich von dem in Rede stehenden Aufsatze her, in welchem die erste uns bekannte öffentliche Benutzung des Buchstabens e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems sich findet [2]), während Euler allerdings e in der gleichen Bedeutung schon in einem Briefe an Goldbach vom 25. November 1731 benutzt hatte [3]).

Euler blieb bei Reihensummirungen nicht stehen, sondern beschäftigte sich auch mit der Anwendung unendlicher Factorenfolgen [4]). Sei die unendlich grosse Summe der harmonischen Reihe [5]) wieder durch x bezeichnet. Von $x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ zieht Euler $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$ ab und behält $\frac{x}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$, eine Reihe, in welcher Stammbrüche geraden Nenners

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 165.
[2]) Ebenda T. IX, 187: *posito e pro numero cujus logarithmus hyperbolicus est* 1.
[3]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 58.
[4]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 172 sqq.
[5]) *estque adeo infinitum.*

貴重書

fehlen. Aus ihr folgt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\cdots$, und zieht man diese Reihe neuerdings ab, so erhält man $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$. In den Nennern dieser Reihe fehlen alle durch 2 oder durch 3 theilbaren Zahlen. Man sieht, dass in $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x = \frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots$ die Nenner der noch vorhandenen Stammbrüche durch 2, 3, 5 untheilbar sein werden, und dass ein ähnliches Verfahren sich dazu eignet, auch die Brüche aus der immer weniger Glieder enthaltenden Reihe zu entfernen, deren Nenner durch die folgenden Primzahlen 7, 11, 13 ... theilbar sind. Endlich erscheint $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdots x = 1$, beziehungsweise $x = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdots$, wo die unendliche Factorenfolge aus lauter Brüchen $\frac{p}{p-1}$ gebildet ist und p alle auf einander folgenden Primzahlen bedeutet. Die harmonische Reihe nähert sich aber, wie Euler in der früheren Abhandlung über dieselbe (S. 662) gezeigt hatte, bei i Gliedern dem Werthe $\log(i+1)$ und bei $i=\infty$ dem Werthe $\log\infty$, der, wiewohl unendlich gross, doch kleiner als jede Potenz des Unendlichgrossen ist, und eben diesen Werth muss man der angegebenen Factorenfolge zuschreiben[1]).

In dem gleichen Bande der Petersburger akademischen Veröffentlichungen findet sich eine theoretisch nicht gar bedeutende Zusammenstellung verschiedener Reihen, welche zur Berechnung von π Anwendung gefunden haben[2]). Euler zieht die Methode der Annäherung durch unendliche Reihen allen anderen vor, wenn die zu benutzenden Reihen zwei Eigenschaften besitzen, die erste rascher Convergenz, so dass nicht viele Glieder in Rechnung gezogen zu werden brauchen, die zweite einfachen Baues der Glieder, so dass deren Einzelberechnung keine übermässige Mühe verursacht. Die Leibnizische Reihe $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ befriedige z. B. in der zweiten, aber nicht in der ersten Beziehung, denn man müsse 10^{50} Glieder in Rechnung ziehen, um π auf 100 Decimalstellen genau zu erhalten. Unter den vortheilhafter zu gebrauchenden Reihen sind einige, deren Herleitung auf dem Gedanken beruht, dessen Machin

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 174: *Erit istius expressionis valor* $=\log\infty$, *quod infinitum inter omnes infiniti potestates est minimum.* [2]) Ebenda T. IX, 222—238.

(S. 364) sich bediente. Euler nennt aber diesen seinen Vorgänger nicht, wiewohl er dessen Zerlegung $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ ausdrücklich als eine der bequemsten anpreist. Als eine andere vortheilhafte Zerlegung wird $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99}$ vorgeschlagen. Wir erwähnen auch Eulers Zerlegung $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, weil sie mehrfach in Lehrbücher der Analysis Eingang gefunden hat.

Wir schliessen einige Bemerkungen über Dinge an, welche weder nach dem Orte noch nach der Zeit ihrer Entstehung hier vollberechtigt erscheinen, welche aber bekannt zu werden verdienen, und welche wir anderwärts nicht unterzubringen wissen. Um die Mitte des XVII. Jahrhunderts bereits bildete sich in Japan eine mathematische Schule unter dem Einflusse (so glauben japanische Gelehrte)[1]) der damals vollzogenen Einführung chinesischer Arithmetik, aber ohne unmittelbare Fühlung mit europäischer Wissenschaft. An der Spitze dieser Schule stand Seki[2]) († 1708). Ein handschriftlich gebliebenes Werk *Hōen Sankyō* von Matsunga gehört etwa dem Jahre 1739 an[3]). Yamaji verfasste um 1765 ein gleichfalls handschriftlich erhaltenes Werk *Ken Kon no Maki*, in welchem Erfindungen von Seki mitgetheilt werden[4]). Ein Schüler des Yamaji hiess Naomaru Ajima[5]). Er führte Coordinaten in die japanische Mathematik ein, und unser Gewährsmann lässt es dahingestellt, ob man dabei an eine selbständige Nacherfindung oder an fremde Lehren zu denken habe. Enzō Wada[6]) mit seinem als Handschrift aufbewahrten Werke *Enri Shinkō* führt bis zum Jahre 1800 herab, und Hasegawas *Kyūseki Tsūkō* ist gar 1844 gedruckt[7]). In den allerletzten Jahren hat T. Endō eine Geschichte der japanischen Mathematik in japanischer Sprache vollendet, welche er die Güte hatte uns 1898 gedruckt zuzusenden. Leider blieb das Buch, wie leicht begreiflich, für uns vollkommen unverständlich. Ob es, falls es in eine europäische Sprache übersetzt wird, eine genaue Bestimmung der Entstehungszeit der einzelnen Formeln ermöglichen kann, wissen wir nicht, unser bisheriger Berichterstatter

[1]) Briefliche Mittheilung von Prof. D. Kikuchi in Tōkiō vom 9. Januar 1896. H. Fujisawa aus Tōkiō hielt auf dem Mathematikencongress zu Paris (August 1900) in englischer Sprache einen Vortrag über die Mathematik der alten japanischen Schule. [2]) D. Kikuchi in der in Tōkiō erscheinenden Zeitschrift *Tōkiō Sūgaku Butsurigaku Kwai Kiji*. Vol. VII, pag. 107. [3]) Ebenda pag. 53. [4]) Ebenda pag. 107. [5]) Ebenda pag. 114. [6]) Ebenda pag. 47. [7]) Ebenda pag. 47.

hält eine solche Bestimmung für mindestens sehr schwierig, weil alles in tiefstes Geheimniss gehüllt und nur den wenigen Eingeweihten zugänglich war. Wir müssen dieser Schilderung nach fast an eine um 2000 Jahre verspätete Nachahmung der Pythagoräischen Schule denken.

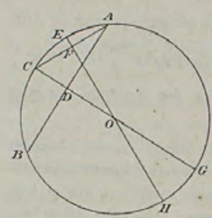

Fig. 106.

Die späten Veröffentlichungen beziehen sich auf Reihenentwicklungen für π und für π^2. Sei (Fig. 106) arc $AC = \frac{1}{2}$ arc AB, $CG = EH = d$, $CD = s$ $EF = s_1$. Man hat $AF^2 = EF \cdot FH = s_1(d - s_1)$. Andererseits $AF^2 = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{1}{4}(CD^2 + AD^2) = \frac{1}{4}(CD^2 + CD \cdot DG) = \frac{1}{4} CD \cdot CG = \frac{sd}{4}$. Mithin ist $s_1^2 - s_1 d + \frac{1}{4} sd = 0$. Nun fand Seki, welchem diese Entwicklung zugeschrieben wird, eine Reihendarstellung für s_1 aus der angegebenen Gleichung:

$$s_1 = \frac{1}{4} s + \frac{1}{16} \frac{s^2}{d} + \frac{1}{32} \frac{s^3}{d^2} + \frac{5}{256} \frac{s^4}{d^3} + \frac{7}{512} \frac{s^5}{d^4} + \frac{21}{2048} \frac{s^6}{d^5} + \cdots.$$

Eine Herleitung dieser Reihe ist vorläufig nicht mitgetheilt. Man kann sie erhalten, wenn man zuerst $\left(\frac{s_1}{d}\right)^2 - \frac{s_1}{d} = -\frac{1}{4}\frac{s}{d}$ schreibt, dann $\frac{s_1}{d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{s}{d}}$, die Quadratwurzel $\sqrt{1 - \frac{s}{d}}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt $\left(1 - \frac{s}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{s}{d} - \frac{1}{8}\left(\frac{s}{d}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{s}{d}\right)^3 - \cdots$ und nach Einsetzung dieses Werthes die ganze Gleichung mit d vervielfacht. Sollte Sekis Verfahren wirklich so gewesen sein, so müsste man entweder seinen mathematischen Geist aufs Höchste bewundern oder seine Unabhängigkeit anzweifeln. In der für s_1 gleichviel wie gefundenen Reihe ist das Anfangsglied $\frac{1}{4}s = \frac{s}{2^2}$ mit dem Namen der Urzahl, *original number*, belegt; die nachfolgenden Glieder heissen 1^{te}, 2^{te}, 3^{te} ... Differenz und werden durch Recursionsformeln aus einander erhalten. Nennt man die Urzahl auch nullte Differenz (was der Japaner nicht thut), so entsteht allgemein die $k + 1^{\text{te}}$ Differenz aus der k^{ten} durch Multiplication mit $\frac{s}{d}$ und mit einem Zahlenfactor f_{k+1} von der Art, dass $f_1 = \frac{1}{4}$, $f_2 = \frac{1}{2}$, $f_3 = \frac{5}{8}$, $f_3 = \frac{7}{10}$, $f_4 = \frac{3}{4}$, $f_6 = \frac{11}{14}$, $f_7 = \frac{13}{16}$. Allgemein ist $f_{k+1} =$

$\frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+3)(2k+4)}$. Warum nicht $f_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4}$ als Regel gegeben wird, wird nachher ersichtlich.

Wie die Gleichung $s_1^2 - s_1 d + \frac{1}{4} sd = 0$ die Beziehung der Sagitta des halben Bogens zu der des ganzen Bogens ausdrückt, so muss, wenn $s_2, s_3, s_4 \cdots$ die Sagitta des viertel, achtel, sechzehntel ... Bogens bezeichnen soll, eine Reihe von Gleichungen stattfinden, deren erste heisst $s_2^2 - s_2 d + \frac{1}{4} s_1 d = 0$ oder $s_2^2 - ds_2 + \left(\frac{ds}{16} + \frac{s^2}{64} + \frac{s^3}{128 d} + \frac{5 s^4}{1024 d^2} + \cdots\right) = 0$. Aus ihr findet sich eine Reihe für s_2, die wieder mit einer Urzahl $\frac{s}{16} = \frac{s}{4^2}$ beginnt und sich durch Differenzen fortsetzt, welche abermals durch wiederkehrende Vervielfachung mit $\frac{s}{d}$ und mit Zahlenfactoren entstehen, welche der Reihe nach $\frac{5}{16}, \frac{21}{40}, \frac{143}{224}, \frac{17}{24}, \frac{133}{176}, \frac{575}{728}, \frac{261}{320} \cdots$ heissen.

Allgemein ist jetzt der $k + 1^{\text{te}}$ Factor $\frac{(4(k+1)-1)(4(k+1)+1)}{(4(k+1)+2)(4(k+2))}$. Ganz allgemein zeigt sich, dass, wenn der ursprüngliche Bogen in n gleiche Theile getheilt ist und die Sagitta zu einem Bogentheile gesucht wird, diese sich durch eine Reihe berechnet, welche mit einer Urzahl $\frac{s}{n^2}$ beginnt und durch Differenzen sich fortsetzt mittels Multiplication mit $\frac{s}{d}$ und mit Zahlenfactoren von der Form

$$\varphi_m = \frac{(mn-1)(mn+1)}{\left(mn + \frac{n}{2}\right)(mn+n)} = \frac{2m^2 - \frac{2}{n^2}}{2m^2 + 3m + 1},$$ welcher bei $n = \infty$ in $\frac{2m^2}{2m^2 + 3m + 1}$ übergeht.

Zu jeder Sagitta gehört eine Sehne oder Chorda, zu s_r die c_r, wobei, wie oben, $AF^2 = \frac{1}{4} CD \cdot CG$ oder $AC^2 = CD \cdot CG$ war, allgemein $c_{r+1} = \sqrt{s_r d}$ sein muss. Sei nun der ursprüngliche Bogen die halbe Kreisperipherie, c_{r+1} die Sehne zu dem Bogen, der 2^{r+1} mal genommen den Halbkreis liefert, so ist $2^{r+1} c_{r+1} = 2 \cdot 2^r \sqrt{s_r d}$ ein Näherungswerth für den Halbkreis $\frac{\pi d}{2}$, beziehungsweise $4 \cdot 2^{2r} s_r d$ ein Näherungswerth für dessen Quadrat $\frac{\pi^2 d^2}{4}$. Nun sei $2^r = n$ und für s_r entsteht eine mit $\frac{s}{2^r}$ als Urzahl beginnende Reihe. Diese Reihe muss mit $4 \cdot 2^{2r} \cdot d$ vervielfacht werden, um $\frac{\pi^2 d^2}{4}$ zu liefern, oder mit anderen Worten $\frac{\pi^2 d^2}{4}$ ist die Summe einer Reihe, in welcher die

Factoren, welche die einzelnen Differenzen hervorbringen, wie oben $\frac{2(mn-1)(mn+1)s}{(2m^2+3m+1)n^2d}$ heissen, die Urzahl aber $4 \cdot 2^{2r} \cdot d \cdot \frac{s}{2^{2r}} = 4ds$ ist. So entsteht

$$\frac{\pi^2 d^2}{4} = 4ds\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\frac{s}{d} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\frac{s^2}{d^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\frac{s^3}{d^3} + \cdots\right].$$

Beim Halbkreise, von welchem hier ausgegangen wird, ist $s = \frac{d}{2}$, also $4ds = 2d^2$, $\frac{s}{d} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\pi^2 d^2}{4} = 2d^2\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{8} + \cdots\right]$, beziehungsweise

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots.$$

Diese ganze Folge von Schlüssen soll, wie gesagt, der Hauptsache nach bis auf Seki zurückführen, bis zu der Zeit, in welcher Newton den binomischen Lehrsatz zuerst auf die Ausziehung von Quadratwurzeln anwandte. Sekis Nachfolger gaben alsdann Reihen für Bruchtheile von π selbst, die, ihrer Herleitung nach gleichfalls geometrisch, wieder so aufgefasst werden, dass sie mit einer Urzahl beginnen, aus welcher die Differenzen durch fortgesetzte Vervielfachung mit einem Gesetze gehorchenden Factoren gebildet werden. So soll z. B.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{7 \cdot 16} - \frac{5}{9 \cdot 128} + \cdots$$

eine japanische Reihe sein.

Gehen wir nach dieser Einschaltung zu Eulers nächster Abhandlung *Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae*[1]) über, so finden wir hier die erste Andeutung einer später als sehr merkwürdig erkannten Reihenart, nämlich der halbconvergenten Reihen. Da $\int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t$, so meint Euler, man könne das Integral in eine Summe zahlreicher sehr kleiner Glieder umwandeln, indem man $dt = \frac{t}{n}$ und t der Reihe nach mit den Werthen $\frac{1 \cdot t}{n}, \frac{2 \cdot t}{n}, \ldots \frac{n \cdot t}{n}$ versehen in Rechnung ziehe, ein Gedanke, dem wir schon bei Kepler (Bd. II, S. 830) begegnet sind, der ihn zum Nachweis der Richtigkeit der Gleichung $\int_0^\varphi \sin\varphi \, d\varphi = 1 - \cos\varphi$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 116—127.

benutzte. Euler setzt also $\operatorname{arctg} t \sim \frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \cdots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, eine annähernde Gleichung, die um so richtiger ist, je grösser n gewählt wird, immer aber an einem wenn auch geringen Ueberschuss von $\operatorname{arctg} t$ über die Summe der rechtsstehenden Reihe leidet. Die genaue Summe nennt er s und entwickelt die einzelnen Reihenglieder durch Division selbst wieder in unendliche Reihen: $\frac{nt}{n^2+t^2} = \frac{t}{n} - \frac{t^3}{n^3} + \frac{t^5}{n^5} - \frac{t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+4t^2} = \frac{t}{n} - \frac{2^2t^3}{n^3} + \frac{2^4t^5}{n^5} - \frac{2^6t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+9t^2} = \frac{t}{n} - \frac{3^2t^3}{n^3} + \frac{3^4t^5}{n^5} - \frac{3^6t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+n^2t^2} = \frac{t}{n} - \frac{n^2t^3}{n^3} + \frac{n^4t^5}{n^5} - \frac{n^6t^7}{n^7} + \cdots$. Man fasse die Glieder der neuen Reihen, welche gleiche Potenzen von $\frac{t}{n}$ enthalten, zusammen, so entsteht $s = \frac{t}{n}[1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0] - \frac{t^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2] + \frac{t^5}{n^5}[1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3] + \cdots$. Jede der in eckigen Klammern stehenden n-gliedrigen Reihen hat Jakob Bernoulli (S. 344) in eine Summe vereinigen gelehrt, und wenn Euler sich auch nicht ausdrücklich auf ihn beruft, so benutzt er doch Bernoullis Formeln, über welche er in einer Beziehung hinausgeht. Während Bernoulli sich an den fünf ersten Bernoullischen Zahlen genügen liess, benutzt Euler noch sieben weitere, im Ganzen also zwölf Bernoullische Zahlen.

Der Anfang der Darstellung von s heisst also jetzt: $s = \frac{tn}{n} - \frac{t^3}{n^3}\left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right] + \frac{t^5}{n^5}\left[\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right] - \cdots = t - \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2n} + \frac{t^3}{6n^2}\right] + \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^5}{2n} + \frac{t^5}{3n^2} - \frac{t^5}{30n^4}\right] - \cdots$. Eine Umordnung der Glieder, so dass diejenigen zusammengefasst werden, welche gleichhohe Potenzen von n im Nenner besitzen, führt zu $s = \left[\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots\right] - \frac{t^2}{2n}[t - t^3 + t^5 - t^7 + \cdots] - \frac{t^2}{6n^2}[t - 2t^3 + 3t^5 - 4t^7 + \cdots] - \frac{t^4}{30n^4}[t - 5t^3 + 14t^5 - 30t^7 + \cdots] - \frac{t^6}{42n^6}\left[t - \frac{28}{3}t^3 + 42t^5 - 132t^7 + \cdots\right]$ u. s. w. Das Gesetz, welches die in der letzten Anordnung mit $\frac{t^m}{Nn^m}$ vervielfachte in Klammern eingeschlossene Reihe befolgt, wird ohne weitere Begründung angegeben. Es lässt diese Reihe in der Gestalt $t - \frac{(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3}t^3 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5 - \cdots$ erscheinen. Aber ihre für jeden positiven Werth von m unendliche Gestalt behagt Euler nicht, und er nimmt eine geradezu verblüffende Umformung mit ihr vor.

Heisst ihre Summe v, so wird $mv = mt - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} t^5 - \cdots = \frac{(1 - t\sqrt{-1})^{-m} - (1 + t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}$. eine Gleichung, welche unter der Voraussetzung, man dürfe die $(-m)^{\text{te}}$ Potenz ohne Weiteres nach ber binomischen Formel entwickeln, sich als richtig erweist.

Nun ist weiter $\frac{(1 - t\sqrt{-1})^{-m} - (1 + t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \left(\frac{1}{(1 - t\sqrt{-1})^m} - \frac{1}{(1 + t\sqrt{-1})^m}\right) = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^m - (1 - t\sqrt{-1})^m}{2(1+t^2)^m \sqrt{-1}}$ und unter abermaliger Anwendung des binomischen Satzes auf die im Zähler vorkommenden Potenzgrössen entsteht $mv = \frac{1}{(1+t^2)^m} \times \left[\frac{m}{1} t - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{(m(m-1) \cdots (m-4)}{1 \cdot 2 \cdots 5} t^5 - \cdots\right]$, d. h. v ist jetzt durch eine Reihe gegeben, welche von selbst abbricht, so oft m eine ganze positive Zahl ist. Diese Umformung liefert als Endergebniss $s = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots\right) - \frac{t^3}{2n(1+t^2)} - \frac{t^2}{2 \cdot 6n^2(1+t^2)^2} \cdot \frac{2t}{1} - \frac{t^4}{4 \cdot 30 n^4 (1+t^2)^4} \left(\frac{4t}{1} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3\right) - \cdots$. Die Annahme $t = 1$, also $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, liefert endlich die Formel $\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \cdots + \frac{4n}{n^2+n^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 n^2} - \frac{1}{42} \frac{1}{2^3 \cdot 3 n^6} + \frac{5}{66} \frac{1}{2^4 \cdot 5 n^{10}} - \cdots$, welche um so mehr convergire, je grösser n gewählt werde[1]).

Unmittelbar an diese Aeusserung anschliessend beginnt Euler einen neuen Paragraphen seiner Abhandlung mit den Worten: Wenn auch diese Reihe um so mehr zu convergiren scheint, je grösser n ist, so convergirt sie doch stets nur bis zu einem gewissen Gliede, und nach diesem wachsen die Glieder wieder; deshalb taugt es nicht, die Reihe bis dahin anzuwenden, wo die Glieder zu divergiren beginnen, sondern es wird nützlich sein, das Verfahren da einzustellen, wo die grösste Convergenz beobachtet wird. Ist nämlich von den Brüchen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66} \cdots$ derjenige, dem der Stellenzeiger ν zukommt, $= X$ und der nächstfolgende $= Y$, so ist fortwährend $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{2\pi^2}$ und bei ins Unendliche wachsendem ν wird $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$. Daraus erkennt man, dass die Reihenglieder in beständig

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 121: *quae series eo magis convergit quo magis numerus pro n accipiatur.*

höherem Masse wachsen, so dass keine noch so sehr convergirende geometrische Progression, mit ihnen in Verbindung gebracht, sie zum Convergiren bringen kann.

Euler hat also eingesehen, dass die Bernoullischen Zahlen schneller als in geometrischem Verhältnisse wachsen, und dass vermöge dieser Eigenschaft die am Anfang convergente Reihe später der Divergenz verfällt. Er hilft sich dann bei der Anwendung dieser Reihen, indem er die neuerdings anwachsenden Glieder durch ein Restglied ersetzt, von welchem er nicht erläutert, wie er dazu gelangt ist, wenn man auch unschwer errathen kann, dass er sich dazu der Formel $1 - \frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4} + \left(\frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4}\right)^2 - \cdots = \frac{1}{1 + \frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4}}$ bediente, ohne die Divergenz der hier auftretenden geometrischen Reihe bei $4\mu^2 > \pi^4 n^4$ in Erwägung zu ziehen. Und doch sagt Euler nur wenige Seiten später[1]), man könne bei Anwendung divergenter Reihen nicht vorsichtig genug verfahren, während es ihm abermals nur eine Seite später nicht darauf ankommt, den Satz auszusprechen[2]), dass alle geometrischen Progressionen nach vorwärts und rückwärts ins Unendliche fortgesetzt die Summe 0 haben. Da nämlich $\frac{n}{1-n} = n + n^2 + n^3 + \cdots$ und $\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots$, so müsse wegen $\frac{n}{1-n} + \frac{n}{n-1} = 0$ auch $\cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \cdots = 0$ sein. Wir erinnern uns, dass Stirling (S. 650) dieselbe beiderseits ins Unendliche sich erstreckende Reihe mit ihren bei $n = 1$ unendlich grossem Werthe ins Auge gefasst hatte. Es kann wohl sein, dass Euler dort die Anregung fand, auf das eigenthümliche Gebilde zu achten. Jedenfalls aber wird es unseren Lesern durch die erwähnten Widersprüche deutlicher als bisher hervorgetreten sein, in welcher Unklarheit sich Euler damals über die Begriffe von Reihenconvergenz und Divergenz befand.

Euler hatte im VII. Bande der Petersburger Commentarien die Summe reciproker Potenzen der in der Zahlenreihe auf einander folgenden Zahlen untersucht und mittels der in unendlich viele Factoren zerlegten Sinusreihe gefunden (S. 658). Er hatte im VIII. Bande derselben Sammlung seine Summenformel abgeleitet, ohne in den in ihr auftretenden Coefficienten ein Gesetz erkennen zu können (S. 665). Euler hat sich niemals mit einem negativen Ergebnisse zufrieden gegeben. Im XII. Bande kehrte er mit den Be-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 125: *Ex his satis perspicitur, quam caute circa summationem serierum divergentium versari oportet.* [2]) Ebenda T. XI, 126—127, § 20.

trachtungen über einige Reihen, *De seriebus quibusdam considerationes*[1]), zu den gleichen Fragen zurück. Ist s ein Kreisbogen und $y = \sin s = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$, sind dann wieder $a, b, c \cdots$ die Wurzeln der aus der Sinusreihe gebildeten Gleichung $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3y} - \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y} + \cdots$, schreibt man α für die Summe dieser Wurzeln, $\beta, \gamma, \delta \cdots$ für die Summe ihrer Producte zu zweien, dreien, vierten $\cdots$, setzt man dann, ungleich der früheren Bezeichnung, $a + b + c + d + \cdots = A$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \cdots = B$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \cdots = C$ u. s. w., so erhält man $A = \alpha$, $B = \alpha A - 2\beta$, $C = \alpha B - \beta A + 2\gamma$ u. s. w., Ergebnisse, welche von den früheren nur in Bezug auf die grossen Buchstaben abweichen. Nun tritt aber neu hinzu, dass eben diese grossen Buchstaben als Coefficienten einer recurrenten Reihe erkannt werden, indem $\frac{\alpha - 2\beta z + 3\gamma z^2 - 4\delta z^3 + \cdots}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots} = A + Bz + Cz^2 + \cdots$ ist, wie einfache Division bestätigt. Euler geht dann noch einen wichtigen Schritt weiter. Er setzt den Nenner des hier benutzten Bruches $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots = Z$, so wird der Zähler sofort $= -\frac{dZ}{dz}$ und demnach $A + Bz + Cz^2 + \cdots = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$. Ausser durch Z lässt sich aber $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots$ auch noch durch $1 - \frac{1}{y}\sin z$ bezeichnen, wie aus der geschilderten Entstehung der $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ hervorgeht. Ist demnach $Z = 1 - \frac{1}{y}\sin z$ und y dabei constant, so wird $\frac{dZ}{dz} = -\frac{1}{y}\cos z$ und $-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = \frac{\frac{1}{y}\cos z}{1 - \frac{1}{y}\sin z} = \frac{\cos z}{y - \sin z}$, mithin gefunden $A + Bz + Cz^2 + \cdots = \frac{\cos z}{y - \sin z}$. Wir bemerken dabei, dass Euler statt $\sin z$ und $\cos z$ die Schreibweise $\sin A \cdot z$ und $\cos A \cdot z$, d. h. sinus arcus z, cosinus arcus z hat, und dass der Abkürzungsbuchstabe A, abgesehen davon, dass ihm ein Pünktchen folgt, genau so aussieht, wie der Coefficient A, wodurch man sich beim Lesen der Abhandlung nicht irre machen lassen darf. Wird $y = 1$, also das frühere $s = \frac{\pi}{2}$ angenommen, so entsteht $A + Bz + Cz^2 + \cdots = \frac{\cos z}{1 - \sin z}$, und kann man $\frac{\cos z}{1 - \sin z}$ in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln, so sind damit die Coefficienten $A, B, C \cdots$ gegeben, denn eine zweite

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 53—96.

Reihe $P + Qz + Rz^2 + \cdots$, welche aus demselben geschlossenen Ausdruck sich herleitete, ohne dass $P = A$, $Q = B$, $R = C \cdots$ wäre, ist unmöglich[1]).

Beiläufig bemerkt, dürfte dieses die erste Stelle sein, an welcher der der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Grunde liegende Gedanke deutlich ausgeprochen ist, so vielfach die Methode auch seit ihrer Erfindung durch Descartes (Bd. II, S. 749) Anwendung gefunden hatte.

Jene gewünschte Reihe verschafft sich Euler so. Es ist $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$, ferner $1 - \sin z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2$, also $\frac{\cos z}{1 - \sin z} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$ und dieser Ausdruck muss der Reihe $A + Bz + Cz^2 + \cdots$ entsprechen, welche Euler jetzt durch s bezeichnet, wofür wir lieber σ schreiben, um jede Verwechslung mit dem früheren s zu vermeiden. Aus $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = \sigma$ folgt aber $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} = \operatorname{arctg}\sigma$, und durch Differentiation nach z erhält man $\frac{1}{2} = \frac{\frac{d\sigma}{dz}}{1 + \sigma^2}$, $1 + \sigma^2 = 2\frac{d\sigma}{dz}$, $1 + (A + Bz + Cz^2 + \cdots)^2 = 2(B + 2Cz + 3Dz^2 + \cdots) = 2B + 4Cz + 6Dz^2 + \cdots$. Nun endlich findet Euler durch Ausführung der links vom Gleichheitszeichen geforderten Quadrirung, und durch Gleichsetzung der auf beiden Seiten auftretenden z^k enthaltenden Glieder unter Berücksichtigung des schon bekannten Werthes $A = 1$ die zwischen $A, B, C \cdots$ stattfindenden Beziehungen $A = 1$, $B = \frac{A^2 + 1}{2}$, $C = \frac{2AB}{4}$, $D = \frac{2AC + B^2}{6}$ u. s. w.

Wir können unmöglich über alle weitere Entwicklungen berichten. Wir müssen uns begnügen, aus dem Zusammenhange herausgerissen, zu sagen, dass im § 16 von trigonometrischen Functionen mit imaginären Argumente und ihnen gleichen Exponentialausdrücken mit rellen Exponenten die Rede ist[2]), dass z. B. $\frac{\alpha\sqrt{-1}}{\sin(\alpha\sqrt{-1})} = \frac{2\alpha e^\alpha}{e^{2\alpha} - 1}$ erkannt ist, wenn auch die Bezeichnung weniger einfach gewählt ist. Wir erwähnen ferner, dass die Summen der reciproken Potenzen der ganzen Zahlen mit graden Exponenten bis zur Summe der reciproken 24ten Potenzen ausgerechnet sind[3]), und zwar jeweils in der Form

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 61.
[2]) Ebenda T. XII, 65—66. [3]) Ebenda T. XII, 73—74.

貴重書

$\frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k+1)} A_{2k}$, wo aber Euler auch wieder insofern etwas anderer Bezeichnung sich bedient, als er da, wo wir durch Anwendung des Stellenzeigers k verallgemeinerten, die besonderen Zahlenwerthe anschreibt, auch wo es um die A_{2k} sich handelt. Statt $A_2, A_4, A_6, A_8 \cdots$ findet man also bei Euler $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10} \cdots$. Die allgemeine Summenformel endlich erhält durch Anwendung dieser Zahlen eine etwas andere Gestalt[1]): $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{A_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{dX}{dx} - \frac{A_4}{1 \cdot 2 \cdots 5} \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{A_6}{1 \cdot 2 \cdots 7} \frac{d^5X}{dx^5} + \cdots$.

Die Zeitfolge führt uns zu einem ganz hervorragenden umfangreichen Werke, welches 1742 in Edinburgh die Presse verliess, zu dem *Treatise of fluxions* von Maclaurin. Wir werden im 112. und im 118. Kapitel über dasselbe zu berichten haben, zunächst besprechen wir nur die Stellen, welche für die Reihenlehre von Wichtigkeit sind. Dazu gehört mittelbar der Satz[2]), dass die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve $y = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots}{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}$ unter der Voraussetzung $n > m$ die Abscissenaxe zur Asymptote habe, dass

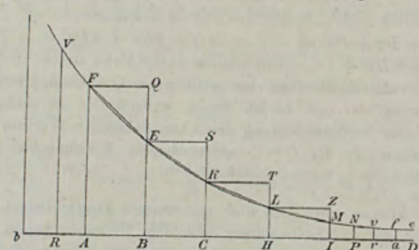

Fig. 107.

aber der Flächeninhalt zwischen einer Anfangsordinate, der Curve und der Abscissenaxe nur dann ein endlicher sei, wenn $n > m + 1$, dagegen ein unendlich grosser, wenn $n \leq m + 1$. Auf ihn beruft sich nämlich Maclaurin[3]), wo er die Summirung einer Reihe zur Ausmessung eines Flächenraums von der genannten Gestalt in Beziehung setzt. Seien (Fig. 107) die Abscissenstücke $AB = BC = CH = HI$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 74—75.
[2]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 272—273, § 327. [3]) Ebenda pag. 289 bis 304, § 350—362.

$= \cdots = 1$ und die Ordinaten $AF, BE, CK, HL \cdots$ die einzelnen Reihenglieder, so ist die Reihensumme gleich der Summe der Rechtecke $AQ + BS + CT + HZ + \cdots$. Diese Rechtecke sind aber zusammen grösser, als die von der Curve $FEKL \cdots$ mit AF und AD gebildete Fläche, welche selbst wieder, wie man durch gedachte Verlängerung der $SE, TK, ZL \cdots$ nach links sich leicht überzeugt, grösser ist als $BS + CT + HZ + \cdots$. Je nachdem man also die Curvenfläche endlich oder unendlich findet, wird das Gleiche für die Reihensumme gelten müssen. Wird ferner in Erwägung gezogen, dass die gradlinigen Dreiecke $FQE, ESK, KTL, LZM \cdots$ den Haupttheil des Ueberschusses der Rechteckssumme $AQ + BS + CT + HZ + \cdots$ über die Curvenfläche ausmachen und zusammen der Hälfte des Rechtecks AQ gleichkommen, so wird jene Rechteckssumme, d. h. die vorgelegte Reihe, annähernd eben so gross sein wie die um das halbe erste Reihenglied vermehrte Curvenfläche. Es sind das die gleichen Gedanken, welche zum Theil Newton (S. 200), welche genauer Euler 1736 ausgesprochen hatte (S. 663). Als dem Zwecke der Reihensummirung noch näher kommend wird dann eine Umformung vorgeschlagen[1]), welche zur Reihensummirung unter Ausrechnung von verhältnissmässig nur wenigen Gliedern führt, und welche mit der Eulerschen Summenformel (S. 657) übereinstimmt. Eine Herleitung verspart sich Maclaurin auf den zweiten Band.

Maclaurin macht dann darauf aufmerksam, dass, wenn $A, B, C, D \cdots$ die Glieder einer Reihe sind, und wenn man deren Differenzen bildet, eben diese Differenzen $A - B, B - C, C - D \cdots$ eine neue Reihe darstellen, deren Summe der Unterschied zwischen dem ersten und dem letzten Gliede der ursprünglichen Reihe ist. Nehmen die Glieder der ursprünglichen Reihe unter jeden angebbaren Werthe ab[2]), so bleibt ihr erstes Glied allein als Summe der Differenzenreihe, z. B. $1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$; $\frac{1}{1 \cdot 2} = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}\right) + \cdots = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$. Dieses Verfahren sei im Wesentlichen schon von Jakob Bernoulli (S. 92 flgg.) benutzt worden und habe auch in den Händen von Taylor, von Nicole, von Stirling Dienste erwiesen. Maclaurin selbst bedient sich desselben noch bei zahlreichen verwickelteren Betrachtungen.

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 292—293, § 352—353. [2]) Ebenda pag. 293, § 354: *If the terms of the first series decreaze in such a manner that by continuing the progression they may become less than any quantity how small soever that can be assigned.*

Die Verwandlung eines Ausdruckes in eine Reihe, mithin die der Reihensummirung als Umkehrung gegenüberstehende Aufgabe, kommt bei Integrationen in Betracht[1]). Kann das Integral nicht genau als algebraischer Ausdruck angegeben werden, so muss man es durch eine convergirende Reihe ausdrücken[2]). Wie das zu geschehen hat, ist verschieden. In sehr vielen Fällen genügt ein Divisionsverfahren, wie z. B. bei $\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \cdots$, wo unter der Voraussetzung eines gegen a sehr kleinen x wenige Anfangsglieder der Reihe ihrem Gesammtwerthe nahezu gleich sind[3]). Differentiation führt gleichfalls nicht selten zur Reihenentwicklung, und als Beispiel dient für Maclaurin der binomische Lehrsatz Newtons[4]). Ist n ganz beliebig, so wird gleichwohl für $(1+x)^n$ eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe vorausgesetzt werden dürfen, deren von x freies Anfangsglied 1 heisst. Man wird annehmen dürfen $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots$. Differentiation nach x liefert nach einander

$$n(1+x)^{n-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots$$
$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2B + 2\cdot 3Cx + 3\cdot 4Dx^2 + \cdots$$
$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} = 2\cdot 3C + 2\cdot 3\cdot 4Dx + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man überall $x = 0$, so rechtfertigt sich einestheils der Anfang der für $(1+x)^n$ angenommenen Reihe mit 1 und ergibt sich anderntheils $n = A$, $n(n-1) = 2B$, $n(n-1)(n-2) = 6C$ u. s. w., d. h. $A = n$, $B = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots$. Aehnlich wird unmittelbar darauf der polynomische Lehrsatz[5]) hergeleitet, für dessen Erfindung auf De Moivre verwiesen ist (S. 86).

Die obige Herleitung des Binomialsatzes hat allerdings neben anderen Erfordernissen, deren Erkennung erst späteren Zeiten angehört, unter allen Umständen zur Voraussetzung, dass die Auffindung des Differentialquotienten von $(1+x)^n$ nach x als $n(1+x)^{n-1}$ nicht selbst mittels des Binomialsatzes stattgefunden habe, und diese Vorsicht hat Maclaurin geübt. Seine Herleitung jenes Differentialquotienten[6]) geht aus von der Ungleichung $nE^{n-1} > \frac{E^n - F^n}{E - F} > nF^{n-1}$,

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 604—607, § 745—747. [2]) *When a fluent cannot be represented accurately in algebraic terms, it is then to be expressed by a converging series.* [3]) *In that case a few terms at the beginning of the series will be nearly equal to the value of the whole.* [4]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 607—608, § 748. [5]) Ebenda pag. 608, § 749. [6]) Ebenda pag. 583—586, § 710—714.

sofern $E > F > 0$ und n ganzzahlig positiv. Aus ihr folgt $\frac{(A+a)^n - A^n}{(A+a) - A} > nA^{n-1}$ und $\frac{A^n - (A-a)^n}{A - (A-a)} < nA^{n-1}$ oder $(A+a)^n - A^n > naA^{n-1} > A^n - (A-a)^n$. Mit anderen Worten: die n^{ten} Potenzen positiver Zahlen wachsen in der Weise, dass ihre Differenzen fortwährend zunehmen. Ist nun a die Fluxion von A, so muss naA^{n-1} die Fluxion von A^n sein, weil die Annahme einer Fluxion $naA^{n-1} + r$ ebenso wie die Annahme einer Fluxion $naA^{n-1} - r$ zu Widersprüchen führt. Sei nämlich $\sqrt[n-1]{A^{n-1} + \frac{r}{na}} - A = o$, so folgt $naA^{n-1} + r = na(A+o)^{n-1}$, d. h. der Quotient der Fluxionen von A^n und von A ist $n(A+o)^{n-1}$. Denkt man sich ein $u < o$ als Fluxion von A, so muss demgemäss die entsprechende Fluxion von A^n sich als $nu(A+o)^{n-1}$ erweisen. Nach dem Vorausgeschickten ist $nu(A+o)^{n-1} > nu(A+u)^{n-1} > (A+u)^n - a^n$, und doch kann die Fluxion von A^n als Grenze von $(A+u)^n - A^n$ nicht grösser als diese Differenz selbst sein, welche bewiesenermassen zugleich mit u zunimmt, der angekündigte Widerspruch ist mithin aufgedeckt. Aehnlich ist der Beweis, dass auch $naA^{n-1} - r$ nicht die Fluxion von A^n sein kann, und demnach ist in der That naA^{n-1} die genannte Fluxion, wenn nur n eine ganze positive Zahl ist. Ist dagegen $\frac{m}{n}$ der Exponent von A und $A^{\frac{m}{n}} = K$, $A^m = K^n$, und ist a die Fluxion von A, k die von K, so ist $maA^{m-1} = nkK^{n-1}$, sowie $k = \frac{m}{n} a \frac{A^{m-1}}{K^{n-1}} = \frac{m}{n} aA^{m-1} : A^{m-\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} aA^{\frac{m}{n}-1}$. Ist dann weiter $A^{-r} = K$ oder $A^r \cdot K = 1$, so folgt durch Fluxionsbildung $raA^{r-1}K + kA^r = 0$ nebst $k = -ra\frac{K}{A} = -raA^{-r-1}$. Auf den Fall eines irrationalen Exponenten wird nicht Rücksicht genommen.

Wir unterbrechen hier einen Augenblick unseren Bericht über Maclaurins Werk, um einem am 6. Mai 1742 der Royal Society vorgelegten Aufsatze[1]) eine Erwähnung zu gönnen. Johann De Castillon hat damals den binomischen Lehrsatz mit einem Beweise versehen. Bei der Entwicklung von $(p+q)^m$ müssen, sagt er, unter Annahme eines positiven ganzzahligen m die Glieder p^m, $p^{m-1}q$, $p^{m-2}q^2$, $\cdots q^m$, im Ganzen $m+1$ Glieder vorkommen. Vervielfacht man $(p_1+q_1)(p_2+q_2)\cdots(p_m+q_m)$, so entstehen 2^m Glieder und $2^m > m+1$. Daraus folgt, dass beim Uebergange des Productes in

[1]) P. T. XLII, 91—98.

eine Potenz, d. h. wenn alle p unter sich und alle q unter sich gleich werden, gewisse Glieder identisch werden müssen. Das Glied $p^s q^t$ (wo $s + t = m$) wird so oft vorkommen, als s Elemente p und t Elemente q permutirt werden können, d. h. $\frac{(s+t)(s+t-1)(s+t-2)\cdots 1}{s(s-1)\cdots 1 \cdot t(t-1)\cdots 1}$ mal. Man kann auch von einer Potenzentwicklung auf die nächsthöhere schliessen mittels $(p+q)^m = (p+q)(p+q)^{m-1}$ und so unter Voraussetzung von $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + p^2$ zu dem gleichen Ergebnisse gelangen[1]). Wird $m = \frac{r}{n}$ und $(p+q)^{\frac{r}{n}} = Ap^{\frac{r}{n}} + Bp^{\frac{r}{n}-1}q + Cp^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \cdots$, ein versuchsweiser Ansatz, dessen Berechtigung keinerlei Begründung erhält, so folgt $(p+q)^r = \left(Ap^{\frac{r}{n}} + Bp^{\frac{r}{n}-1}q + Cp^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \cdots\right)^n$ oder $p^r + rp^{r-1}q + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}p^{r-2}q^2 + \cdots = A^n p^r + nA^{n-1}Bp^{r-1}q + nA^{n-1}Cp^{r-2}q^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^{n-2}B^2p^{r-2}q^2 + \cdots$ und durch Gleichsetzung der in Bezug auf p und q identischen Glieder zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens erhält man $A = 1$, $nB = r$ und $B = \frac{r}{n}$, $nC + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \frac{r(r-1)}{2}$ und $C = \frac{r(r-n)}{2n^2} = \frac{\frac{r}{n}\left(\frac{r}{n}-1\right)}{1\cdot 2}$ u. s. w. Wird der Exponent negativ, so begnügt sich De Castillon mit Andeutung der in der Potenzirung alsdann mit enthaltenen Division, welche wiederum zu den durch den binomischen Lehrsatz geforderten Coefficienten führe. Der Vergleich von De Castillons Schlüssen mit denen Maclaurins fällt sehr zu Ungunsten des ersteren aus.

Noch drei Jahre später begnügte sich Kästner in einem Programme über den Binomialsatz (Leipzig 1745) nun gar mit dem Beweise des einfachsten Falles bei ganzzahlig positivem Exponenten. Er nahm die Entwicklung von $(a+b)^m$ als gegeben an, vervielfachte mit $a + b$, ähnlich wie es De Castillon beiläufig gethan hatte, und zeigte die Uebereinstimmung des Productes $(a+b)(a+b)^m$ mit der Entwicklung von $(a+b)^{m+1}$. Aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ steht in vollem Einklange mit dem Binomialsatze, also gehorchen auch die folgenden Potenzen dem gleichen Gesetze. Als Erfinder der hier benutzten Schlussweise der vollständigen Induction nannte Kästner bei dieser Gelegenheit Jakob Bernoulli. Das Erstlingsrecht Pascals war ihm augenscheinlich unbekannt.

[1]) P. T. XLII, 94.

Hatte sich Maclaurin bei seinem Beweise für den binomischen Lehrsatz des Hilfsmittels bedient, eine Reihenentwicklung für $(1+x)^n$ vorläufig anzusetzen und durch wiederholte Differentiation nebst Einsetzung von $x = 0$ die Reihencoefficienten zu bestimmen, so führte ihn genau der gleiche Weg zu derjenigen Entwicklung, welche den Namen der Maclaurinschen Reihe[1]) erhalten hat, und von welcher Maclaurin selbst erklärt, sie finde sich bereits in Taylors *Methodus incrementorum.* Bei unserem Berichte ersetzen wir die Fluxionspünktchen und die Buchstaben $E, \dot{E}, \ddot{E}, \dddot{E} \cdots$, welche die Werthe bezeichnen, die y (eine an sich beliebige Function von z) und dessen Ableitungen unter der Voraussetzung $z = 0$ annehmen, durch die heute gebräuchliche Schreibweise bestrichelter Functionalzeichen. Wir setzen also in Maclaurins Geiste, aber abweichend von seiner Bezeichnung, $y = f(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und die Ableitungen $f'(z) = B + 2Cz + 3Dz^2 + \cdots$, $f''(z) = 2C + 2\cdot 3Dz + \cdots$, $f'''(z) = 2\cdot 3D + \cdots$. Die Substitution $z = 0$ bringt $f(0) = A$, $f'(0) = B$, $f''(0) = 2C$, $f'''(0) = 2\cdot 3D$, $\cdots$ beziehungsweise $A = f(0)$, $B = f'(0)$, $C = \frac{f''(0)}{1\cdot 2}$, $D = \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\cdots$ hervor, und so ist gefunden $f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \cdots$. Von einem Restgliede der Reihe ist, wie man sieht, ebensowenig die Rede, als von der Möglichkeit, dass die entstehende unendliche Reihe nicht brauchbar sein könne, und unbesorgt leitet Maclaurin einige allerdings schon bekannte Entwicklungen als Beispiele für die Anwendung seiner Reihe ab.

Noch ein letztes Mal kommt Maclaurin unter Benutzung des Taylorschen Satzes auf Reihen zurück[2]). Es sei uns abermals gestattet, seinen Gedankengang in die unseren Lesern jedenfalls geläufigere Bezeichnung zu kleiden. Nach dem Taylorschen Satze ist $f(x+z) = f(x) + f'(x)z + \frac{f''(x)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 \cdots$. Wird mit dz vervielfacht und von 0 bis 1 integrirt, so erhält man

$$1.\quad \int_0^1 f(x+z)\,dz = f(x) + \frac{f'(x)}{1\cdot 2} + \frac{f''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

Ersetzt man die Function $f(x)$, beziehungsweise $f(x+z)$ durch deren Ableitungen, so entstehen neue Gleichungen in beliebiger Anzahl:

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 610—611, § 751. Vergl. Alfr. Pringsheim, Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. *Bibliotheca mathematica* 1900, S. 433—479, insbesondere S. 438. [2]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 672—675, § 828—831.

$$2.\quad\begin{cases}\int_0^1 f'(x+z)\,dz = f'(x) + \frac{f''(x)}{1\cdot 2} + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{IV}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\\ \int_0^1 f''(x+z)\,dz = f''(x) + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2} + \frac{f^{IV}(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{V}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\\ \int_0^1 f'''(x+z)\,dz = f'''(x) + \frac{f^{IV}(x)}{1\cdot 2} + \frac{f^{V}(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{VI}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Vervielfacht man die Gleichungen des Systems 2., wie sie unter einander stehen, mit $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ und addirt sie dann sämmtlich zu 1., so entsteht:

$$3.\ \int_0^1 f(x+z)\,dz + \alpha\int_0^1 f'(x+z)\,dz + \beta\int_0^1 f''(x+z)\,dz + \gamma\int_0^1 f'''(x+z)\,dz + \cdots$$
$$= f(x) + f'(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \alpha\right) + f''(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \beta\right)$$
$$+ f'''(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma\right) + \cdots.$$

Die an sich beliebigen, also zur Erfüllung irgend eines Wunsches sich eignenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bestimmt man so, dass in 3. alle Glieder rechts vom Gleichheitszeichen mit Ausnahme von $f(x)$ in Wegfall kommen, d. h. mittels des Systems

$$4.\quad\begin{cases}\frac{1}{1\cdot 2} + \alpha = 0\\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \beta = 0\\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma = 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

wodurch $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{12}$, $\gamma = 0$, $\delta = -\frac{1}{720}$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = \frac{1}{30240}\cdots$ sich berechnet und 3. übergeht in

$$5.\ f(x) = \int_0^1 f(x+z)\,dz - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x+z)\,dz + \frac{1}{12}\int_0^1 f''(x+z)\,dz$$
$$- \frac{1}{720}\int_0^1 f^{IV}(x+z)\,dz + \frac{1}{30240}\int_0^1 f^{VI}(x+z)\,dz + \cdots.$$

Die in 5. geforderten Integrationen lassen sich, so oft Differentialquotienten unter dem Integralzeichen stehen, also von $\int_0^1 f'(x+z)\,dz$

$= f(x+1) - f(x)$ an beginnend, leicht vollziehen, und man erhält demnach

$$f(x) = \int_0^1 f(x+z)\,dz - \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x)) + \frac{1}{12}(f'(x+1) - f'(x))$$
$$+ \frac{1}{720}(f''(x+1) - f''(x)) + \frac{1}{30240}(f'''(x+1) \quad f'''(x)) - \cdots.$$

Man kann ein ganzes System ähnlicher Gleichungen aufstellen, indem man x durch $x+1$, durch $x+2\cdots$ ersetzt. Innerhalb der Klammern erscheint dann in jeder folgenden Gleichung als Subtrahend der Minuend der vorhergehenden Substitution, und bei Addition des Gleichungssystems, so dass man links $f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \cdots + f(x+n)$ zu stehen bekommt, bleibt rechts in der ersten Klammer $f(x+n+1) - f(x)$ und Aehnliches in den folgenden Klammern. Die den Klammergrössen vorausgehenden bestimmten Integrale vereinigen sich aber auch, denn es ist $\int_0^1 f(x+1+z)\,dz = \int_1^2 f(x+z)\,dz$ u. s. w., also $\int_0^1 f(x+z)\,dz + \int_0^1 f(x+1+z)\,dz + \cdots + \int_0^1 f(x+n+z)\,dz = \int_0^1 f(x+z)\,dz + \int_1^2 f(x+z)\,dz + \cdots + \int_n^{n+1} f(x+z)\,dz = \int_0^{n+1} f(x+z)\,dz = \int_x^{x+n+1} f(z)\,dz$. Man erhält also endlich

$$f(x) + f(x+1) + \cdots + f(x+n) = \int_x^{x+n+1} f(z)\,dz - \frac{1}{2}(f(x+n+1) - f(x))$$
$$+ \frac{1}{12}(f'(x+n+1) - f'(x)) - \frac{1}{720}(f'''(x+n+1) - f'''(x))$$
$$+ \frac{1}{30240}(f^{V}(x+n+1) - f^{V}(x)) - \cdots,$$

und das ist, nur deutlicher geschrieben, die Eulersche Summenformel (S. 657). Die Frage liegt allzunahe, ob Maclaurin die Arbeiten seines Vorgängers auf diesem Gebiete im VI. und im VIII. Bande der Abhandlungen der Petersburger Akademie gekannt habe oder nicht, als dass sie nicht aufgeworfen worden wäre. Man hat sie verneinend beantworten zu müssen geglaubt[1]), und wir sind auch zu der gleichen Ueberzeugung gekommen. Es ist ja richtig, dass Maclaurin die Veröffentlichungen der Petersburger Akademie offenbar studirt und benutzt hat. Er führt in seinem *Treatise of fluxions*

[1]) Reiff S. 87.

den I., II., III., V. Band der *Commentarii Academiae Petropolitanae* als Quelle an[1]), aber eine Erwähnung späterer Bände ist uns nicht bemerklich gewesen. Schon damit ist wahrscheinlich gemacht, dass Malaurin den VI. und VIII. Band nicht benutzte. Beachtung des Erscheinungsjahres verstärkt die Wahrscheinlichkeit. Der VIII. Band mit Eulers Herleitung der Summenformel gelangte 1741 zur Ausgabe unmittelbar vor, vielleicht gleichzeitig mit dem Drucke des Treatise of fluxions, von seiner Benutzung kann mithin keine Rede sein. Aber auch der VI. Band, in welchem die Formel ohne Herleitung zu finden war, und der 1738 im Druck erschienen ist, wurde von Maclaurin kaum benutzt. Er beruft sich einmal[2]) auf eine Abhandlung von Clairaut, welche er einen *late ingenious essay*, einen jüngst veröffentlichten sinnreichen Versuch nennt. Diese Abhandlung gehört den P. T. von 1737 an, und damit dürfte der Endzeitpunkt der von Maclaurin benutzten Literatur bezeichnet sein. Nimmt man hinzu, dass Maclaurin in seiner Vorrede erklärt, der grösste Theil seines ersten Buches, also vermuthlich auch die Summenformel, sei schon 1737 gedruckt gewesen, dass ferner Maclaurin mit Verweisungen keineswegs geizte, und dass endlich die Art, wie er zur Summenformel gelangt, so gut wie keine Aehnlichkeit mit Eulers Gedankengange besitzt, so ist damit Maclaurins durchaus unabhängige Nacherfindung in unseren Augen wenigstens sichergestellt.

Bis zu einem gewissen Grade gehört auch die sogenannte Simpsonsche Regel zur Reihensummation und mag daher, wenn auch nicht in strenger Einhaltung der Zeitfolge, hier, wo wir über ein englisches Werk berichteten, eingeschaltet werden. Wir erinnern uns, dass Newton schon in den Principien eine Curve als Parabel zu betrachten lehrte (S. 372), dass er später auf den gleichen Gedanken eine angenäherte Quadratur gründete (S. 375—376). Thomas Simpson führte die Anwendung um einen grossen Schritt weiter, indem er eine sehr bequeme Formel angab, welche seinen Namen behalten hat und denselben bekannter machte als manches andere, welches wissenschaftlich bedeutender ist.

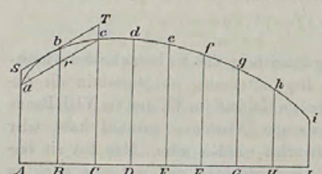

Fig. 108.

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 441, § 523; pag. 464, § 544; pag 485, § 569; pag. 671, § 826; pag. 691 (Note, wo auf einen Eulerschen Aufsatz des V. Bandes hingewiesen ist). [2]) Ebenda pag. 726, § 905.

Die Formel steht in den *Mathematical Dissertations on a variety of physical and analytical subjects* von 1743 und zwar in der Abhandlung *Of the areas of curves etc. by approximation*[1]). Sei abc (Fig. 108) als Bogen einer gewöhnlichen Parabel gedacht und aA, bB, cC als drei gleichweit von einander abstehende zu AJ senkrechte Durchmesser derselben. Weil bB Durchmesser ist und die Sehne ac in r halbirt, wird die Berührungslinie an die Parabel in b der ac parallel sein. Des Weiteren ist nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel jedes Parabelsegment $\frac{2}{3}$ des ihm umschriebenen Parallelogramms, also $abcra = \frac{2}{3} aSTc = \frac{2}{3}(ASTC - AacC) = \frac{2}{3} \frac{AS + CT}{2} \cdot AC - \frac{2}{3} \frac{Aa + Cc}{2} \cdot AC = \frac{AC}{3}(2Bb - Aa - Cc)$. Wird das gradlinige Viereck $AacC = \frac{AC}{3}\left(\frac{3}{2} Aa + \frac{3}{2} Cc\right)$ zum Segmente addirt, so entsteht $AabcC = \frac{AC}{3}\left(2Bb + \frac{1}{2} Aa + \frac{1}{2} Cc\right) = \frac{AB}{3}(Aa + 4Bb + Cc)$. Nun kann fortgesetzt jedes folgende Curvenstück cde, efg, ghi als Parabelbogen betrachtet werden, und ist fortgesetzt $AB = BC = CD$ $DE = EF = FG = GH = HJ$, so erhält man neben

$$AabcC = \frac{AB}{3}(Aa + 4Bb + Cc)$$

auch

$$CcdeE = \frac{AB}{3}(Cc + 4Dd + Ee)$$

$$EefgG = \frac{AB}{3}(Ee + 4Ff + Gg)$$

$$GghiJ = \frac{AB}{3}(Gg + 4Hh + Ji)$$

und als Summe $AabcdefghiJ = \frac{AB}{3}[Aa + Ji + 2(Cc + Ee + Gg) + 4(Bb + Dd + Ff + Hh)]$ und das ist die Simpsonsche Regel. War sie, wie wir oben sagten, auch keineswegs die bedeutendste von Simpsons Leistungen, neu war sie jedenfalls, und nicht jeder Schriftsteller hätte Simpsons Bescheidenheit besessen, der in der Vorrede erklärte[2]), sie sei von Newton erfunden, von De Moivre, von Stirling und anderen vervollkommnet, er nehme für sich Nichts in Anspruch als das Recht, den Gegenstand in ein helles und den Leser befriedigendes Licht zu setzen. Ob Simpson, ob die von ihm genannten Vorgänger Nichts davon wussten, dass James Gregory in seinen *Exercitationes geometricae* von 1668 Aehnliches hatte durch-

[1]) Simpson, *Mathematical dissertations* pag. 109—119. [2]) Ebenda Preface pag. VII.

blicken lassen[1]), wie wir (S. 63) hätten erwähnen sollen? Es scheint fast so, und in der That war die Ausdrucksweise Gregorys so wenig durchsichtig, dass es eines besonderen Studiums und besonders glücklichen Eindringens in seinen Gedankengang bedurfte, um bei ihm wiederzufinden, was man nur in ganz anderer Form kannte. Gregory selbst aber war 1675 gestorben und daher nicht in der Lage, Ansprüche zu erheben, als die Betrachtungsweise einer zu quadrirenden krummen Linie als parabolische Curve zweiten Grades durch Andere in die Oeffentlichkeit gebracht wurde.

Auf das europäische Festland zurückkehrend dürfen wir in aller Kürze auf einen Brief Daniel Bernoullis an Euler aufmerksam machen, welcher muthmasslich 1741 geschrieben ist und in welchem wohl erstmals von einem anderen Mathematiker als Euler der Buchstabe e in der Bedeutung der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems benutzt ist[2]).

Euler war seit 1741 in Berlin. Beiträge aus seiner Feder zu dem 1743 gedruckten VII. Bande der *Miscellanea Berolinensia*, wie damals die akademischen Veröffentlichungen dort hiessen, müssen erwähnt werden. Da ist in einem Aufsatze über bestimmte Integrale[3]) die Summe $\sin s + \sin(s+u) + \sin(s+2u) + \cdots + \sin(s+(p-1)u)$ gefunden[4]) und nicht minder die Summe $\cos s + \cos(s+u) + \cos(s+2u) + \cdots + \cos(s+(p-1)u)$, welche letztere in doppelter Weise hergeleitet ist[5]), einmal unabhängig von der Formel für die Summe der Sinusse der in arithmetischer Progression wachsenden Bögen, einmal mittels Differentiation dieser ersteren Formel.

Da ist in einer Abhandlung Eulers: *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum*[6]), über die Summen der reciproken Potenzen der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, die frühere Herleitung der gleichen Summe mittels der als Gleichung unendlich hohen Grades betrachteten Sinusreihe (S. 658) bemängelt. Man wisse freilich, dass die Factoren der damals gebildeten Factorenfolge den reellen Wurzeln jener Gleichung entstammen, aber man wisse nicht, ob eben jene Gleichung nicht auch imaginäre Wurzeln besitze, und sei dieses der Fall, so seien alle früheren Folgerungen falsch. In einem Versuche, an die Stelle der als mangelhaft erkannten Gedankenreihe eine einwandfreie zu setzen, ist mit

[1]) G. Heinrich, Notizen zur Geschichte der Simpsonschen Regel in der *Bibliotheca mathematica* 1900, S. 90—92. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1741—1743. T. XIII, 4. [3]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 129—171. [4]) Ebenda VII, 133. [5]) Ebenda VII, 142—143. [6]) Ebenda VII, 172—192.

dürren Worten ausgesprochen[1]), dass $e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n_{(n=\infty)}$, und dass $\sin s = \frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Schon 1730 oder 1731 hatte Euler erkannt (S. 655), dass $\left(\frac{1-x^z}{z}\right)_{(z=0)} = -\log x$, und von da an war der Uebergang zur Auffassung der Exponentialgrösse als Grenzwerth angebahnt. Auch der Zusammenhang zwischen trigonometrischen Ausdrücken und Exponentialgrössen mit imaginären Exponenten war Euler nachweislich schon früher nicht entgangen. Er hat 1740 von Formeln Gebrauch gemacht, welche dieses beweisen (S. 677), er hat in einem in Stockholm handschriftlich aufbewahrten Briefe[2]) an Johann Bernoulli vom 20. Juni 1740 ausdrücklich erklärt, die Reihenentwicklung von $2\cos x$ und von $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ führe zu dem gleichen Ergebnisse $2\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\right)$, er hat im folgenden Jahre, am 9. December 1741, an Goldbach geschrieben[3]): Ich habe letztens auch ein merkwürdiges Paradoxon gefunden, nehmlich, dass der Werth von dieser Expression $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sei $\frac{10}{13}$, und dieser Bruch differirt nur in partibus millionesimis von der Wahrheit. Der wahre Werth aber dieser Expression ist der Cosinus dieses arcus 0,6931471805599, oder des arcus von $39^0\,42'\,51''\,52'''\,9^{IV}$ in einem Circul, dessen Radius $= 1$. Beide Thatsachen verhindern aber nicht, den Aufsatz von 1743 als erste nicht misszuverstehende deutliche Verkündigung der beiden merkwürdigen Wahrheiten in der Oeffentlichkeit erscheinen zu lassen. Eben dort findet sich[4]) die Formel $\cos s = \frac{e^{s\sqrt{-1}} + e^{-s\sqrt{-1}}}{2}$, während $e^{s\sqrt{-1}} = \cos s + \sqrt{-1}\sin s$, eine so naturgemässe Folgerung aus den Werthen von $\sin s$ und von $\cos s$, dass sie einem Euler nicht entgangen sein kann, nicht vorkommt.

Den Jahren 1742 und 1743 gehört ein Briefwechsel an, welcher für die Geschichte der Reihenlehre von Bedeutung ist, der Briefwechsel zwischen Niclaus I Bernoulli und Euler, oder richtiger gesagt, indem wir uns auf das noch Vorhandene beschränken, vier Briefe des Ersteren an den Letzteren[5]). Euler hat die Briefe beantwortet, Bernoulli nimmt auf die Antworten Bezug, aber sie scheinen sich leider nicht erhalten zu haben, sind jedenfalls nicht ver-

[1]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 177. [2]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1897 S. 48. [3]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 111. [4]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 179. [5]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 681—713.

öffentlicht. Niclaus I Bernoulli, aus dessen Briefen an Leibniz aus den Jahren 1712 und 1713 wir (S. 369—370) merkwürdig klare Anschauungen über Convergenz und Divergenz von Reihen mitzutheilen hatten, ist in diesen seinen Ansichten in den inzwischen verstrichenen 30 Jahren nur noch mehr befestigt. Er zeigt sich überhaupt in seinen Briefen als einen ungemein ideenreichen Kopf. Schreibt er doch unter dem 13. Juli 1742 in dem ersten der gedruckten Briefe an Euler[1]), er habe 1728 seinem Onkel, das ist also Johann Bernoulli, mitgetheilt, er sei bei Untersuchungen über recurrente Reihen zu der Formel $\sin s = \dfrac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}_{(n=\infty)}$ gelangt, und vielleicht bot diese Aeusserung für Euler den Anlass, dass er deutlicher als seither in dem oben erwähnten Aufsatze von 1743 die Sätze aussprach, zu welchen er, der 1728 erst 21 Jahre alt war, vermuthlich ziemlich viel später als Niclaus I Bernoulli, aber doch auch selbständig gekommen war.

Im zweiten Briefe vom 24. October 1742 gibt Bernoulli zwar zu[2]), man könne aus $\sin s = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots = s\left(1-\frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots$ die Folgerung $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$ ziehen, aber die erstere Gleichung erfordere zunächst den Beweis der Convergenz der Reihe $s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^6}{120} - \cdots$.

Im dritten Briefe vom 6. April 1743 schreibt Bernoulli[3]): Ich wundre mich, dass Sie mich in einer leichten, Ihnen nicht unbekannten Frage nicht verstehen sollten. Ich kann mir nicht vorstellen, dass Sie annehmen, eine divergente Reihe, welcher, auch wenn sie ins Unendliche fortgesetzt wird, immer etwas fehlt, gebe den genauen Werth des entwickelten Ausdruckes. Als Beispiel wird angeführt, es sei nicht etwa $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\infty$, sondern $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\infty + \frac{x^{\infty+1}}{1-x}$.

Auch im vierten Briefe vom 29. November 1743 kehrt der gleiche Gegenstand wieder[4]). Es heisst dort: Ich halte den Begriff einer Summe oder der Vereinigung vieler Glieder für nicht vereinbarlich mit dem Begriffe endlos weiter gehender Glieder und sehe diese beiden Begriffe als einander widersprechend an. Jener schliesst das Denken sämmtlicher Glieder, des ersten, des letzten, der mittleren

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 683. [2]) Ebenda II, 691. [3]) Ebenda II, 701—702. [4]) Ebenda II, 708—710.

ein, in diesem ist das Denken eines letzten Gliedes nicht eingeschlossen; der Geist wird vielmehr von dem Denken eines letzten Gliedes abgezogen und folglich auch von der Zusammensetzung eines Ersten, Mittleren und eines Letzten. Die Unterscheidung zwischen einem absoluten Unendlichen und einem bestimmten Unendlichen gebe ich nicht zu. Ich behaupte, jedes Unendliche, welches in Rechnung tritt, muss als ein Bestimmtes aufgefasst werden, und deshalb meine ich, dass die Eigenschaften abgeschlossener algebraischer Gleichungen, beispielsweise die Gleichheit des negativ genommenen Coefficienten des zweithöchsten Gliedes mit der Summe aller Wurzeln, keine richtige Anwendung auf Gleichungen mit endlos fortschreitenden Gliedern finde, deren keines als das Letzte betrachtet wird, Gleichungen also, bei welchen der Begriff der Anzahl ihrer Wurzeln wie der ihrer Summe fehlt. Bernoulli gibt nun Beispiele divergenter Reihen. Er bedient sich dabei einer Kürze der Ausdrucksweise, welche einem Euler gegenüber gerechtfertigt war, welche aber anderen Lesern im ersten Augenblick Schwierigkeiten bereiten könnte. Wir wollen deshalb nicht einfach übersetzen, sondern den Sinn der Beispiele erläutern. Nimmt man von der Reihe $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ erst 1 Glied, dann deren 2, 3, 4 u. s. w., so zeigen sich die Summen $1, -2, 3, -4 \cdots$. Die Summe der unendlichen Reihe $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ muss also das unendlich ferne Glied der Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ oder $-\infty(-1)^\infty$ sein. Andererseits ist durch Division $\frac{1-x}{1+2x+x^2} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + \cdots$ und mittels $x = 1$ entsteht $\frac{1-1}{1+2+1} = 0 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ als unlösbarer Widerspruch. Ein ähnlicher Widerspruch ist folgender: Durch Division ist $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ und $\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$. Setzt man in die erste Entwicklung $x = 2$, in die zweite $x = 1$, so erhält man

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

und

$$-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots.$$

Beide unendliche Reihen müssten also einander gleich sein, während, abgesehen vom Anfangsgliede 1, jedes Glied der ersten Reihe grösser als das ihm entsprechende Glied der zweiten Reihe ist. Ein letztes Beispiel bildet $\frac{1}{1-3x+x^2+2x^3} = 1 + 3x + 8x^2 + 19x^3 + 43x^4 + \cdots$. Setzt man $x = 1$, so entsteht $1 = 1 + 3 + 8 + 19 + 43 + \cdots$ d. h. die ganze Reihe ist gleich ihrem ersten Gliede, das Ganze gleich einem winzig kleinen Theile desselben.

Wir haben schon gesagt, dass Eulers Antworten keine Veröffentlichung gefunden haben, und ebensowenig Bernoullis weitere Briefe über den Gegenstand, der noch lange nicht abgethan war. Wir müssen uns statt ihrer mit einem Briefe Eulers an Goldbach begnügen, der die noch etwa anderthalbjährige Fortdauer jenes Briefwechsels mit Niclaus I Bernoulli bezeugt. Euler also berichtet an Goldbach[1]) aus Berlin unter dem 7. August 1745:

Ich habe seit einiger Zeit mit dem Herrn Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dargleichen diese ist $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 +$ etc. gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ haben, ich aber das Gegentheil behauptet, weilen ich glaube, dass eine jegliche series einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwierigkeiten, welche dagegen gemacht werden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Namen der Summ beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wenn die Summ durch eine würkliche Summirung herausgebracht würde: welche Idee bei den seriebus divergentibus nicht Statt findet. Da nun eine jegliche series aus der Evolution einer expressionis finitae entsteht, so habe ich diese neue Definition von der Summ einer jeglichen seriei gegeben: Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur. Der Herr Bernoulli hat diese Definition vollkommen approbirt, zweifelt aber noch, ob nicht öfters eben dieselbe series divergens aus verschiedener expressionum finitarum evolutione entstehen könne, also dass man nach dieser Definition verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein Exempel gegeben, ich glaube aber gewiss zu seyn, dass nimmer eben dieselbe series aus der Evolution zweyer wirklich verschiedener expressionum finitarum entstehen könne. Und hieraus folgt dann unstreitig, dass eine jegliche series, sowohl divergens als convergens einen determinirten Werth oder summam haben muss.

Für die am Anfange des Briefes angeführte Reihe $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \cdots$ gibt Euler als Summe den Werth 0,5963475922, welchen er mittels Verwandlung in einen Kettenbruch sich verschafft. Goldbachs Antwort[2]) (vermuthlich vom 25. September 1745) pflichtet Euler in allen Dingen bei und macht dabei einen Vorschlag, wie man eine divergente Reihe in eine convergente verwandeln könne. Wir werden im 112. Kapitel sehen, wie Euler auf Goldbachs Gedanken einging.

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 323 flgg. [2]) Ebenda I, 330–331.

Aus einem anderen Briefwechsel Eulers bemerken wir hier, dass Daniel Bernoulli ihm unter dem 20. September 1741 schrieb[1]): Ich habe Ew. meditata über die series gelesen; selbige sind freilich ingenios und profund, aber ich formire mir eine ganz andere Idee von den seriebus. Ich glaube nicht, dass man allhier den calculum differentialem und integralem ohne Limitation gebrauchen dürfe, weil es nicht erlaubt ist, eine seriem als quantitates continuas aut fluentes zu betrachten, indem es lauter quantitates discretae sind. Was Sie also de interpolatione terminorum sagen, ist, meiner Meinung nach, nicht proprie und stricte zu verstehen.

Wenn Daniel Bernoulli dann am 7. März 1742 sagte[2]): Die methodum series inveniendi summabiles per methodum integrationum et differentiationum hab ich schon gebraucht, ehe ich bin auf Petersburg kommen, so sehen wir keinen Widerspruch zwischen den beiden Stellen. Daniel Bernoulli hat, scheint uns, im September 1741 nicht etwa darüber Scrupel empfunden (wie man einen Augenblick glauben könnte), ob man eine unendliche Reihe differentiiren und integriren dürfe, das war ihm eine selbstverständliche Wahrheit, sondern nur darüber, ob von Reihengliedern mit nicht ganzzahlig positivem Stellenzeiger die Rede sein könne.

In seinem Briefe an Goldbach vom 7. August 1745 hatte Euler, wie wir oben sagten, von der Umwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch gesprochen. Diese Stelle benutzen wir als Brücke, um auf seither von uns Vernachlässigtes, auf die Lehre von den Kettenbrüchen überzugehen. Wir haben allerdings schon früher (zuletzt S. 97—98) derartige Ausdrücke von Mathematikern benutzt gesehen, aber die praktische Benutzung war dabei überall das Hervortretende, eine Theorie der Kettenbrüche war kaum, ein Name für dieselben überhaupt nicht vorhanden. Beides verdankt man Euler, der in zwei Abhandlungen im IX. und XI. Bande der Commentarii Academiae Petropolitanae zeigte, welches die Eigenschaften sind, um deren willen die *fractiones continuae* — das sind eben die Kettenbrüche — eine nähere Betrachtung lohnen.

In dem ersten Aufsatze *De fractionibus continuis*[3]) ist sogleich der unendliche Kettenbruch $a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \text{etc.}}}}$ definirt. Dabei erhalten alle durch griechische Buchstaben bezeichnete Zahlen den Namen Zähler, während die durch lateinische Buchstaben bezeichneten

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 476. [2]) Ebenda II, 487—488. [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 98—137.

Zahlen insgesammt (auch a mit eingeschlossen) Nenner heissen. Je nachdem man a oder $a+\frac{\alpha}{b}$ oder $a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}$ u. s. w. der Ausrechnung unterwirft, erhält man die Werthe $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+\alpha}{b}$, $\frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}$, $\frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$ u. s. w., welche abwechselnd einen kleineren und einen grösseren Betrag, als der des ganzen unendlichen Kettenbruches ist, bedeuten. Man kann dem genauen Werthe des Kettenbruches durch Fortsetzung des Verfahrens beliebig nahe kommen[1]). Zieht man den ersten so gefundenen Werth vom zweiten, den zweiten vom dritten, den dritten vom vierten u. s. w. ab, so erhält man die abwechselnd positiven und negativen Differenzen $\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$, $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$, $-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}$ u. s. w. Diese Differenzen zu a hinzugefügt geben dann selbst wieder den zweiten, dritten, vierten, fünften u. s. w. vorher ermittelten Näherungswerth, oder der Kettenbruch ist $= a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{a(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\cdots$. Hier kann man aber neuerdings zusammenfassen $\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}=\frac{\alpha c}{1(bc+\beta)}$ und ebenso je zwei aufeinanderfolgende Glieder, deren erstes positiv und deren zweites negativ ist, in eine regelmässig positive Summe. Man erhält dadurch die Umwandlung des Kettenbruches in eine heftig convergirende Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner einem nach dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Gesetze gehorchen[2]), nämlich $a+\frac{\alpha c}{1(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\cdots$. Die Raschheit der Convergenz hängt insbesondere davon ab, dass die Zähler $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ recht klein, die Nenner $a, b, c, d, e \cdots$ recht gross gewählt werden. Sind alle Zähler und Nenner ganze Zahlen, was durch Erweiterung immer hervorgebracht werden kann, so findet die rascheste Convergenz der Reihe, also auch des ihr gleichen Kettenbruches statt, wenn sämmtliche Zähler der Einheit gleich sind. Euler verwandelt

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 102: *Atque hoc modo fractionem continuam successive abrumpendo alternative valores iusto maiores et minores prodibunt; unde quantumvis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.* [2]) Ebenda T. IX, 105: *cuius numeratorum et denominatorum lex ex superiore sponte se prodit.*

nun gegebene Brüche in Kettenbrüche der letzteren Art und sucht aus ihnen wieder Näherungswerthe zum ursprünglichen Bruche in kleineren Zahlen. Als Vorgänger auf diesem Gebiete wird ausschliesslich Wallis genannt[1]), die Arbeiten von Huygens auf diesem Gebiete (S. 97—98) müssen Euler demnach unbekannt geblieben sein.

Periodische Kettenbrüche, für welche allerdings ein besonderer Name nicht angegeben ist, werden dann ausgewerthet. Aus $x = a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cdots}}$ wird geschlossen[2]), dass $x-a=\frac{1}{b+x-a}$ und $x=a-\frac{b}{2}+\sqrt{1+\frac{b^2}{4}}$, also z. B. $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=\sqrt{2}$, und ähnlich erkennt man den Werth eines Kettenbruches, dessen Periodicität sich über mehr als nur je einen Nenner ausdehnt, z. B. $x = a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots}}}} = a-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{c}{b}}$. Als wahrscheinlich erwähnt Euler bei dieser Gelegenheit[3]) die Kettenbruchentwicklungen $e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}$, $\frac{e^2-1}{2}=3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cdots}}}$, $\frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cdots}}}$ und manche andere.

Eine Aufgabe, bei welcher gleichfalls verweilt wird, ist die der Umwandlung von Kettenbrüchen, wie der für e angegebene, bei welchem die eine arithmetische Progression bildenden Nenner 2, 4 6, 8 $\cdots$ durch andere periodisch auftretende 1, 1 unterbrochen werden, in Kettenbrüche ohne periodische Unterbrechung des Gesetzes der Nenner, z. B. in[4]) $e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cdots}}}}}}$. Endlich kommt Euler zu Be-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 112. Vgl. auch T. XI, 39. [2]) Ebenda T. IX, 117. [3]) Ebenda T. IX, 120—122. [4]) Ebenda T. IX, 126.

ziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und gewissen Differentialgleichungen[1]), in welchen man eine ziemlich bestimmte Vorahnung des Beweises der Irrationalität von e und von e^2 erkannt hat[2]).

Eulers zweiter Abhandlung über Kettenbrüche hat derselbe Verfasser eine solche über unendliche Factorenfolgen: *De productis ex infinitis factoribus ortis*[3]) vorausgeschickt, auf die er sich alsdann bezieht. Auch der in dieser Abhandlung untersuchte Gegenstand schliesst sich der Reihenlehre eng genug an, dass wir in diesem Kapitel kurz darüber berichten dürfen, wie wir es ähnlich im vorigen Kapitel gehalten haben. Wir erinnern an Eulers Summirung reciproker Potenzreihen mit Hilfe von Factorenzerlegung (S. 658), wir erinnern insbesondere an die Untersuchungen über eine transcendente Reihe (S. 652). Wie Euler in der Abhandlung von 1730 Beziehungen zwischen Factorenfolgen und bestimmten Integralen aufdeckte, damals noch nicht alles enthüllend, was ihm bekannt war, indem er schon unter dem 13. October 1729 die Definition der Gammafunction als unendliche Factorenfolge in einem Briefe an Goldbach ausgesprochen hatte[4]), bilden solche Beziehungen auch den wesentlichen Inhalt des Aufsatzes von 1739. Euler entnimmt[5]) hier der älteren Veröffentlichung die Formeln $(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)$

$$= \frac{g^{n+1}\int_0^1 (-\log x)^n dx}{(f+(n+1)g)\int_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n dx} \text{ und } \int_0^1 \sqrt{-\log x}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

aus welchen er dann weitere Folgerungen zieht. Wir erwähnen von letzteren[6]) die Formeln $\frac{\pi}{2ag} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{a+g-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$, $\frac{\pi}{2g} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^g dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$, so wie mancherlei Factorenfolge als Auswerthung bestimmter Integrale von der Gestalt $\int_0^1 \frac{x^a dx}{\sqrt[c]{1-x^b}}$.

Wir haben gesagt, dass Euler in seiner zweiten Abhandlung

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 129 sqq.
[2]) Pringsheim, Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. (Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissensch. Mathem.-physik. Classe XXVIII, 325 bis 337. 1. August 1898). [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 3—31. [4]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 3—4. [5]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 5 und 7. [6]) Ebenda T. XI, 10, 11, 27.

über Kettenbrüche: *De fractionibus continuis observationes*[1]) sich auf diese Ergebnisse beziehe. Zu Anfang ist allerdings von bestimmten Integralen keine Rede, sondern der Kettenbruch

$$A + \cfrac{B}{C + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{G + \cfrac{H}{I + \cdots}}}}$$

wird als identisch mit der Reihe $A = \frac{B}{1 \cdot P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \cdots$ erklärt, welche, so oft die $A, B, C, D \cdots$ alle positiv, im Uebrigen aber beliebig abnehmend oder wachsend sind, da $P = C$, $Q = EP + D$, $R = GQ + FP$, $S = IR + HQ \cdots$ ist, als convergent sich erweise, weil jedes folgende Glied kleiner als das ihm vorhergehende werde. Wir bemerken beiläufig, dass die Behauptung der Abnahme der Glieder an sich richtig ist, da z. B. $\frac{BDFH}{RS} : \frac{BDF}{QR} = \frac{HQ}{S} = \frac{HQ}{IR + HQ} < 1$, dass aber sie allein für die Convergenz der betreffenden Reihe trotz des von Glied zu Glied wechselnden Vorzeichens nicht ausreicht. Dazu wäre nothwendig, dass die Glieder beim Abnehmen unter jeden angebbaren Werth sinken, was bei der Allgemeinheit, in welcher $A, B, C, D \cdots$ gewählt werden dürfen, keineswegs sicher ist. Euler kümmert sich darum nicht, sondern zeigt nun rückwärts die Verwandlung der Reihe $\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS}$ in den Kettenbruch

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \cdots}}}}$$

und der Reihe $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} - \cdots$ in den Kettenbruch

$$\cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq - bp + \cfrac{acq^2}{br - cq + \cfrac{bdr^2}{cs - dr + \cdots}}}}$$

von welcher Beispiele gerechnet werden. Eine eben solche Reihe ist aber nicht selten das Ergebniss einer bestimmten Integration, und auf diesem Umwege kommt Euler dazu, ein bestimmtes Integral durch einen unendlichen Kettenbruch auszudrücken. Beispielsweise[2]) ist

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}} = \cfrac{1}{m + \cfrac{\mu n^2}{\nu m + (\nu-\mu)n + \cfrac{\nu(\mu+\nu)(m+n)^2}{(3\nu-\mu) + (\nu-\mu)n + \cfrac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+n)^2}{(5\nu-2\mu) + (\nu-\mu)n + \cdots}}}}$$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 32—80.
[2]) Ebenda T. XI, 36.

Eine andere Gedankenreihe führt zu folgenden Betrachtungen. Wallis hatte, wo er Brounckers Kettenbruch für π (Bd. II, S. 766) mittheilte, den Satz ausgesprochen, dass a^2 das Product der beiden unendlichen Kettenbrüche $(a-1)+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\cdots}}}$ und $(a+1)+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)+\cdots}}}$ sei, und Euler hatte schon in der ersten Kettenbruchabhandlung an dieses Ergebniss erinnert[1]). Jetzt kam er neuerdings auf den gleichen Satz zurück[2]). Gestatten wir uns (was Euler nicht thut) die abgekürzte Bezeichnung $K_\lambda = (a+\lambda)+\cfrac{1}{2(a+\lambda)+\cfrac{9}{2(a+\lambda)+\cfrac{25}{2(a+\lambda)+\cdots}}}$, so heisst der von Wallis ausgesprochene Satz $K_{-1}\cdot K_1 = a^2$, und ihm stehen augenscheinlich beliebig viele ähnliche Sätze zur Seite, welche man erhält, indem man a durch $a+2$, durch $a+4$, durch $a+6\cdots$ ersetzt. So ist demnach

$$
\begin{aligned}
K_{-1}\cdot K_1 &= a^2\\
(a+2)^2 &= K_1\cdot K_3\\
K_3\cdot K_5 &= (a+4)^2\\
(a+6)^2 &= K_5\cdot K_7
\end{aligned}
$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen, wie sie unter einander stehen und Weglassung der auf beiden Seiten vorhandenen Factoren K_1, K_3, K_5 findet man $(a+2)^2\cdot(a+6)^2 K_{-1} = a^2\cdot(a+4)^2 K_7$, also auch $K_{-1} = a\cdot\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+6}\cdot\frac{K_7}{a+6}$.

Euler nimmt nun an, ohne diese Annahme ausdrücklich in Worte zu kleiden, dass man die Schlüsse fortsetze, bis rechts als letzter Factor $\frac{K_{4\mu+3}}{a+4\mu+2}$ erscheint, und dass dieser letzte Ausdruck sich bei wachsendem μ nicht mehr von der Einheit unterscheidet. So erhält er $K_{-1} = a+1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\cdots}}} = a\cdot\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+2}\cdot$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 101.
[2]) Ebenda 1739. T. XI, 40.

$\frac{a+4}{a+6}\cdot\frac{a+8}{a+6}\cdots$. Den in der Abhandlung über unendliche Factorenfolgen gewonnenen Ergebnissen entnimmt nunmehr Euler, dass

$$\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+2}\cdot\frac{a+4}{a+6}\cdot\frac{a+8}{a+6}\cdots = \frac{\int_0^1 x^{a+1}dx : \sqrt{1-x^4}}{\int_0^1 x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^4}}$$

und somit ist der wiederholt von uns definirte Kettenbruch K_{-1} das a-fache des eben angegebenen Quotienten zweier bestimmter Integrale.

Auch an verwandten Kettenbrüchen werden ähnliche Kunstgriffe geübt, so dass der Kettenbruch zunächst in eine Factorenfolge, dann in einen Quotienten zweier bestimmter Integrale umgewandelt erscheint. Durch Einsetzung besonderer Werthe zeigt sich[1])

$$\frac{\pi}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cdots}}}},$$

Als weitere Aufgabe stellt sich dann vor die Augen, derartige bestimmte Integrale $\int_0^1 P dx$ und $\int_0^1 PR dx$ zu finden, dass ihr Quotient sich als unendlicher Kettenbruch darstellen lasse, eine Aufgabe, welche Euler gleichfalls in ziemlicher Allgemeinheit löst[2]), um alsdann wieder besondere Beispiele der Rechnung zu unterwerfen.

111. Kapitel.

Eulers Introductio. Band I.

Zahlreiche Abhandlungen hatten Euler schon allbekannt gemacht, auch seine als besondere Bände gedruckten *Mechanica* von 1736 und *Methodus inveniendi* von 1744, von welch letzterer im 117. Kapitel die Rede sein wird, waren in den Händen derjenigen Mathematiker, welche im Stande waren, den damals höchsten Gebieten ihrer Wissenschaft Geschmack abzugewinnen. Da erschien

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 48.
[2]) Ebenda T. XI, 59 sqq.

1748 Eulers *Introductio in analysin infinitorum*[1]), von De Castillon während des in Lausanne stattfindenden Druckes beaufsichtigt (S. 509), und dieses Werk gab erst dem Namen Leonhard Eulers den volksthümlichen Klang, der ihm vermuthlich für alle Zeiten anhaftet.

Ein umfangreiches Vorwort, allzuumfangreich, um es hier abzudrucken, was sein Wortlaut eigentlich verdiente, erörtert die Absicht, welche der Veröffentlichung zu Grunde lag. Euler will zusammenstellen, was zu wissen bei Erlernung der Infinitesimalrechnung nothwendig oder wenigstens wünschenswerth sei, man könnte vielleicht sagen, was überhaupt ohne Infinitesimalrechnung erworben werden kann, und er geht darin viel weiter, als man es gewohnt war. Er schuf, um eine moderne Benennung anzuwenden, ein Lehrbuch der algebraischen Analysis sowie ein eben solches der analytischen Geometrie.

Der I. Band der Introductio oder die algebraische Analysis zerfällt in 13 Kapitel, über welche wir in denkbarer Kürze berichten wollen. Wir bemerken dabei ein für alle Mal, dass Euler es liebt, den Gang seiner Untersuchungen durch geschickt gewählte, lehrreiche Beispiele zu unterbrechen.

Das 1. Kapitel, Von den Functionen überhaupt, erklärt die Function einer veränderlichen Zahlengrösse als einen analytischen Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlengrösse, d. h. einer unbestimmten, allgemeinen Zahlengrösse, welche alle bestimmten Werthe ohne Ausnahme in sich begreift, und aus constanten Zahlengrössen zusammengesetzt ist. Die Function einer Veränderlichen ist wieder eine Veränderliche. Sie zerfällt in verschiedene Unterarten. Algebraische Functionen stehen im Gegensatz zu Transcendenten, unter den algebraischen Functionen werden rationale von irrationalen, unter den rationalen ganze von gebrochenen unterschieden. Eine sich anknüpfende Sonderung betrifft eindeutige und mehrdeutige Functionen[2]). Zur Bezeichnung einzelner eindeutiger Functionen dienen grosse Buchstaben wie P, Q, R, S, T. Des weiteren wird von graden und ungraden Functionen gesprochen. Jene behalten ihren Werth, mag man ihre Veränderliche $= +k$ oder $= -k$ setzen, diese nehmen durch die beiden erwähnten Substitutionen entgegengesetzte Werthe an. Aehnliche Functionen von y und z nennt man Y und Z, wenn Y auf eben

[1]) Eine deutsche Uebersetzung von Johann Andreas Christian Michelsen (Berlin 1788) hat den ursprünglichen 2 Bänden noch einen 3. Band Anmerkungen und Zusätze beigefügt, beziehungsweise 1791 folgen lassen. Eine deutsche Uebersetzung von H. Maser (Berlin 1885) enthält nur den 1. Band der Introductio. [2]) *Functiones uniformes, multiformes.*

die Art durch y und constante Zahlengrössen bestimmt wird, wie Z durch z und constante Zahlengrössen.

Das 2. Kapitel, Von der Umformung der Functionen, unterscheidet zunächst zwei Gattungen von Umformungen, je nachdem dieselbe Veränderliche beibehalten oder eine andere Veränderliche an Stelle der ersten eingeführt wird. Bleibt die Veränderliche, so bleibt auch die Art der Abhängigkeit ihrer Function von derselben, nur können vielleicht in der neuen Gestalt manche Eigenschaften deutlicher hervortreten. In dieser Beziehung ist die Zerlegung einer ganzen algebraischen Function in einfache Factoren von besonderer Wichtigkeit. Eine ganze Function Z von z, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von z gleich n ist, wird n einfache Factoren enthalten, was ohne Weiteres daraus gefolgert wird, dass $f + gz + hz^2$ in zwei, $f + gz + hz^2 + iz^3$ in drei einfache Factoren, d. h. in solche zerlegbar sei, in welchen z nur in erster Potenz vorkomme. Man findet die einfachen Factoren von Z, indem man die Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ aufsucht. Aus jedem Wurzelwerthe entspringt ein einfacher Factor der Function Z. Die einfachen Factoren des reellen Productes Z sind theils reell, theils imaginär. Letztere treten immer in grader Anzahl auf, und zwei imaginäre einfache Factoren vereinigen sich dann zu einem reellen Factor 2ten Grades, den man auch einen reellen zweifachen Factor nennt. Die ganze Function Z von z ist eindeutig. Wird $Z = A$ bei $z = a$ und $Z = B$ bei $z = b$, d. h. geht Z von A in B über, während z von a in b übergeht, so kann ersterer Uebergang nicht anders als durch alle zwischen A und B gelegene Zwischenwerthe hindurch erfolgen, d. h. es muss einen zwischen $z = a$ und $z = b$ gelegenen Werth $z = c$ geben, der $Z = C$ hervorbringt, wenn C zwischen A und B liegt. Mit anderen Worten, wenn $Z - A = 0$ und $Z - B = 0$ je eine reelle Wurzel besitzt, so muss, wenn $A < C < B$ oder $A > C > B$ ist, auch $Z - C = 0$ eine reelle Wurzel besitzen. Ist beispielsweise Z von ungrader Höhe, d. h. $Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \cdots$, so bewirkt $z = \infty$, dass $Z = \infty$ und $z = -\infty$, dass $Z = -\infty$ wird, mithin haben $Z - \infty$ und $Z + \infty$ je einen bekannten reellen einfachen Factor $z - \infty$ und $z + \infty$. Alsdann muss auch $Z - 0 = Z$ einen reellen einfachen Factor besitzen oder $z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \cdots = 0$ hat mindestens eine reelle Wurzel. Die Gleichung $Z = z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \cdots \pm \nu z - A = 0$ mit positivem A hat mindestens zwei reelle Wurzeln. Die Annahmen $z = -\infty$ und $z = 0$ liefern nämlich $Z = \infty$ und $Z = -A$, zwischen welchen $Z = 0$ liegt, welches durch irgend ein negatives $z = -c$ erzeugt werden muss. Andererseits liefern $z = 0$ und $z = \infty$ die Werthe $Z = -A$ und $Z = \infty$, zwischen welchen abermals $Z = 0$ liegt, welches durch irgend ein positives $z = d$ erzeugt werden muss. Das sind lauter Sätze, auf welche Euler 1749 zurückkam (S. 602). Nun kommt die Zerfällung einer echtgebrochenen Function in Partialbrüche an die Reihe. Der einfachste Fall $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)S}$, wo S den einfachen Factor $p - qz$ nicht weiter erhält, wird erledigt durch die Annahme $\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qz} + \frac{P}{S}$ oder $M = AS + (p - qz)P$, woraus $A = \frac{M-(p-qz)P}{S}$ folgt. Hierein setzt man (weil A eine Constante ist, darf man das) $p - qz = 0$ und erhält $A = \frac{M}{S}_{(p-qz=0)}$. Der verwickeltere Fall, dass $p - qz$ mehr als einmal als Factor in N vorkomme, und dass also Partialbrüche mit den Nennern $p - qz$, $(p-qz)^2$, $(p-qz)^3 \ldots$ zu ermitteln sind, beschliesst das Kapitel.

Das 3. Kapitel, Von der Umformung der Functionen durch Substitution, hat die Rationalisirung irrationaler Ausdrücke zum Zweck. So wird $y = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$ durch $(a + bz)^{\frac{1}{n}} = x$ in rationale Gestalt übergeführt. Ebenso wird $\left(\frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}\right)^n = \left(\frac{a + bz}{c + dz}\right)^m$ durch rationale Werthe von z und y erfüllt, indem man den beiden Ausdrücken gemeinsamen Werth in die Gestalt x^{mn} kleidet. Bei $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)}$ setzt Euler $\frac{c + dz}{a + bz} = x^2$, $z = \frac{c - ax^2}{bx^2 - d}$, worauf $y = (a + bz)x = \frac{(bc - ad)x}{bx^2 - d}$ wird. Eine andere Methode der Rationalisirung von $y = \sqrt{p + qz + rz^2}$ besteht darin, dass $y = xz + \sqrt{p}$ oder auch $y = x + \sqrt{r}\,z$ gesetzt wird, je nachdem p oder r positiv ist. Sind beide Constanten p und r negativ, und ist zugleich $q^2 \leqq 4pr$, so ist y wesentlich imaginär. Ist dagegen p und r negativ, aber $q^2 > 4pr$, so ist man im Stande $p + qz + rz^2 = (a + bz)(c + dz)$ zu setzen, wie vorher gelehrt wurde. Neben dieser ersten Anwendung von Substitutionen lehrt alsdann Euler eine zweite, welche darin besteht, dass er, wenn eine Gleichung zwischen y und z vorliegt, eine dritte Hilfsveränderliche x wählt und Beziehungen zwischen y und x sowie zwischen z und x aufsucht, vermöge deren die ursprüngliche Gleichung erfüllt wird. Sei z. B. $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$, so setzt Euler zunächst $y = x^m z^n$ und erhält $ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^\beta + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0$ und es kommt darauf an, n so zu wählen, dass aus der neuen Gleichung z in x gefunden werden kann. Dazu liegen drei Wege vor. Erstens kann $\alpha n = \beta$, $n = \frac{\beta}{\alpha}$ gesetzt werden, dann ist nach Division durch z^β die weitere Behandlung

augenscheinlich. Zweitens kann $\gamma n + \delta = \beta$, $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$ gesetzt und abermals durch z^β dividirt werden. Drittens kann $\alpha n = \gamma n + \delta$, $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$ gesetzt und durch $z^{\alpha n}$ dividirt werden. Andere Beispiele erfordern und gestatten andere Kunstgriffe.

Das 4. Kapitel, Von der Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen, ist schon durch den einleitenden Paragraphen, welcher zeigt, wie Euler über Reihenentwicklungen dachte, von höchster Bedeutung. Die Natur transcendenter Functionen, sagt Euler, dürfte sogar besser zu erkennen sein, sobald dieselben in einer solchen, wenn auch ins Unendliche fortlaufenden Form ausgedrückt sind. Denn ebenso wie die Natur einer ganzen Function am besten dann erkennbar ist, wenn sie nach Potenzen von z entwickelt, also auf die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ gebracht ist, so ist auch diese Form, selbst wenn die Anzahl der Glieder unendlich gross ist, am geeignetsten, um sich von der wesentlichen Beschaffenheit aller anderen Functionen eine klare Vorstellung zu bilden. Wir dürfen bei dieser Gelegenheit an die Bemerkung erinnern, welche wir (S. 465) an Newtons Integration durch unendliche Reihen knüpften. Wenn wir dort eine nur unbewusste Verwandtschaft mit heutigem Denken zu erkennen vermochten, so ist Eulers Aeusserung von ganz anderer Natur. Mag ihm, wie wir mehr als nur einmal gesagt haben und künftig zu wiederholen haben werden, das Gefühl für die Anforderungen, welche die Mathematik an die von ihr zu benutzenden unendlichen Reihen zu stellen hat, mehr abgegangen sein, als dieses bei Newton der Fall war, den analytischen Nutzwerth der Reihen, wenn wir so sagen dürfen, klar ausgesprochen zu haben, ist Eulers Verdienst. Die einfachste Art der Reihenentwicklung ist die der Division bei Umwandlung eines Bruches, und sie erzeugt die recurrente Reihe, deren Namen und erste Untersuchung nach Eulers Aussage De Moivre angehöre. Jene Umwandlung selbst braucht nicht durch Division vollzogen zu werden. Sie erfolgt besser durch Multiplication des Bruchnenners mit einer versuchsweise unter Benutzung unbestimmter Coefficienten aufgestellten unendlichen Reihe. Euler setzt z. B. $\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und erhält $a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots) = \alpha A + (\alpha B + \beta A)z + (\alpha C + \beta B)z^2 + (\alpha D + \beta C)z^3 + \cdots$, woraus neben $A = \frac{a}{\alpha}$ die einander vollständig ähnlich gebauten, die Recursion vermittelnden Gleichungen $0 = \alpha B + \beta A$, $0 = \alpha C + \beta B$, $0 = \alpha D + \beta C \cdots$ hervorgehen. In wesentlich übereinstimmendem Verfahren wird sodann

$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und $a + bz = (\alpha + \beta z + \gamma z^2)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots) = \alpha A + (\alpha B + \beta A)z + (\alpha C + \beta B + \gamma A)z^2 + (\alpha D + \beta C + \gamma B)z^3 + \cdots$ gesetzt, woraus erstlich die zwei Coefficienten $A = \frac{a}{\alpha}$, $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$ und ferner die unmittelbar nur α, β, γ aber nicht a, b enthaltenden Recursionsgleichungen $0 = \alpha C + \beta B + \gamma A$, $0 = \alpha D + \beta C + \gamma B \cdots$ entstehen. Je mehr Glieder der Nenner $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots$ besitzt, um so zahlreicher sind die Glieder der einzelnen Recursionsgleichungen, und die von den Coefficienten des Zählers $a + bz + \cdots$ abhängenden Zahlen $A, B \cdots$ mehren sich in gleicher Weise. Voraussetzung des Verfahrens ist ein von Null verschiedenes α, da sonst die Entwicklung mit $A = \frac{a}{\alpha} = \infty$ beginnen müsste. Unter der gleichen erfüllten Voraussetzung einer von Null verschiedenen Anfangsconstante des Nenners wird auch der Bruch in eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende recurrente Reihe verwandelt, dessen Nenner die n^{te} Potenz von $1 - \alpha z$ ist, während im Zähler Glieder bis zur Höhe von z^{n-1} vorkommen. Setzt man nach vollzogener Entwicklung $\alpha = z = 1$, so geht die Reihe in eine arithmetische Progression $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung über, welche somit auch eine recurrente Reihe ist. Euler geht alsdann zur Entwicklung von Ausdrücken über, deren Nenner eine Potenz des Polynoms $1 - \alpha z - \beta z^2 - \cdots$ ist, ferner zu dem bis dahin ausgeschlossenen Falle, dass die Anfangsconstante des Nenners Null wird, und den er dadurch erledigt, dass er z, oder welche Potenz z^μ von z dem wirklich vorhandenen Anfangsgliede des Nenners angehört, als Factor heraussetzt. Dann ist die ohne Berücksichtigung dieses Factors entwickelte Reihe noch durch z^μ zu dividiren. Sie behält dabei ihren Charakter als eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Entwicklung, beginnt aber mit $\frac{A}{z^\mu}$. Nun folgen die Reihen für $(P + Q)^{\frac{m}{n}}$ und allgemeiner für die $\frac{m}{n}^{\text{te}}$ Potenz von Polynomen. Von einem Beweise ihrer Richtigkeit ist keine Rede. Der Binomialsatz und Polynomialsatz tritt bei gebrochenem Exponenten in Anwendung, als wenn es sich von selbst verstände.

Im 5. Kapitel, Von den Functionen zweier oder mehrerer Veränderlichen, fällt das Hauptgewicht auf die homogenen Functionen, deren Name 1726 von Johann Bernoulli[1]) eingeführt worden war. Ist V eine homogene Function n^{ter} Dimension von y und z, so wird die Substitution $y = uz$ zu dem Producte von z^n in eine Function von u führen. Ist $n = 0$, d. h. ist V eine Function nullter Dimension von y und z, so wird, wegen $z^0 = 1$, die Substitution $y = uz$ dahin führen, dass V als Function von u allein erscheint.

Das 6. Kapitel, Von den Exponentialgrössen und den Logarithmen, schildert das Wesen der genannten Functionen, wobei die Behauptung auftritt, ausser den Potenzen der Basis a gebe es keine Zahl b mit rationalem Logarithmus, nebst dem unbewiesenen Zusatze, der Logarithmus von b könne auch keine irrationale Zahl sein und müsse deshalb zu den Transcendenten gerechnet werden. Von den zur Anwendung der Logarithmen eingeschalteten Beispielen nennen wir zwei. Einmal fragt Euler, wie gross nach 100 Jahren die Bevölkerung eines Landes sein werde, welche jetzt aus 100000 Menschen bestehe und sich jährlich um ihren dreissigsten Theil vermehre. Wir erkennen hier einen Vorläufer der schon (S. 360) erwähnten Untersuchungen Eulers von 1760 über Bevölkerungsverhältnisse. Ein andermal fragt Euler nach der Anzahl x der Jahre, welche zur Tilgung einer mit p Procent verzinslichen Schuld a erforderlich sei, wenn jährlich für Zins und Rückzahlung die Summe b verwandt werde. Unter Benutzung der Abkürzung $\frac{100+p}{100} = n$ findet Euler die Gleichung $n^x a = \frac{n^x b - b}{n-1}$, welche man neuerdings die Amortisationsgleichung zu nennen liebt, und folgert aus ihr $x = \frac{\log b - \log(b - (n-1)a)}{\log n}$.

Das 7. Kapitel, Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen, gibt seinen Inhalt durch die Ueberschrift aufs Deutlichste an. Der Gedankengang ähnelt sehr dem, welchen Halley 1695 eingeschlagen hatte (S. 85), ohne dass auf diesen Schriftsteller verwiesen wäre. Wir haben dieses Schweigen wohl weniger daraus zu erklären, dass Euler Halleys Abhandlung nicht gekannt hätte, als wahrscheinlicher daraus, dass er Dinge, welche seit mehr als fünfzig Jahren der Oeffentlichkeit angehörten, als wissenschaftliches Gemeingut betrachtete, von welchem Jeder ohne Quellenangabe Gebrauch machen dürfe. Sei a, die Basis

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae* T. I, abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* III, 108—124: *De integrationibus aequationum differentialium.* In § IX dieser Abhandlung heisst es: . . . *p et q designant functiones rationales et homogeneas indeterminatarum x et y utcumque inter se complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatae in singulis terminis eandem habeant exponentium summam propter quod functiones, quae ita sunt comparatae, . . . voco homogeneas.*

des zu wählenden Logarithmensystems, grösser als 1, sei ferner ω eine unendlich kleine positive Zahl, so wird $a^\omega = 1 + \psi$, wo ψ gleichfalls positiv unendlich klein ist und etwa $= k\omega$ gesetzt werden darf. Ist $a^\omega = 1 + k\omega$, so ist $\omega = \log(1 + k\omega)$ in dem Logarithmensysteme von der Basis a. Erhebt man $a^\omega = 1 + k\omega$ auf die i^{te} Potenz mit vorläufig beliebigem i, so wird $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i = 1 + ik\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} k^2\omega^2 + \cdots$. Ist aber $i = \frac{z}{\omega}$ und z endlich, so wird $i = \infty$, zugleich aber auch $\omega i = z$ und $\omega = \frac{z}{i}$. Diese Substitutionen liefern $a^z = 1 + kz + \frac{i-1}{1 \cdot 2 \cdot i} k^2 z^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i^2} k^3 z^3 + \cdots$. Bei $i = \infty$ streichen sich die in den Zählern und Nennern auftretenden i enthaltenden Factoren gegen einander, und man erhält $a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ mit endlichen a, k, z. Wird vollends $z = 1$, so zeigt sich der zwischen a und k obwaltende Zusammenhang $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots$. Der Ausdruck $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i$, welcher, wie wir sahen, den Werth 1 übersteigt, kann als $1 + x$ bezeichnet werden. Alsdann ist einerseits $\omega i = \log(1 + x)$, andererseits $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$, $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$, $\omega i = \frac{i}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right] = \frac{i}{k}\left[\frac{1}{i}x - \frac{i-1}{1 \cdot 2 \cdot i^2}x^2 + \frac{(i-1)(2i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i^3}x^3 - \cdots\right] = \frac{1}{k}\left[x - \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{i-1}{i} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{(i-1)(2i-1)}{i^2} - \cdots\right]$. Bei $i = \infty$ vereinfachen sich wieder die i im Zähler und im Nenner mit sich führenden gebrochenen Coefficienten, und mit Benutzung von $\omega i = \log(1 + x)$ erhält man $\log(1 + x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$. Diese Reihe verhilft alsdann zur Ermittelung von k aus a, was aus $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ nicht zu erreichen war. Sei nämlich $1 + x = a$, $x = a - 1$, $\log(1 + x) = \log a = 1$, so geht die Reihe über in $1 = \frac{1}{k}\left[\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots\right]$, beziehungsweise in $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots$. Bei $a = 10$ wird $k = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \cdots$ eine Reihe, von welcher Euler in fast naiver Weise sagt, es sei schwer einzusehen, wie sie den Werth 2,30258 haben könne[1]). Dazu gelangt er durch folgende Schlüsse. Neben $k \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ wird bei negativ gewähltem x auch

[1]) Euler, *Introductio* I, § 120 am Schlusse.

$k \log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$ sein, und Subtraction führt zu $\frac{k}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$. Jetzt setzt Euler $\frac{1+x}{1-x} = a$, wodurch $\log\frac{1+x}{1-x} = 1$ und $x = \frac{a-1}{a+1}$ wird. Dann zeigt sich $\frac{k}{2} = \frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots$ und bei $a = 10$ die rasch zur Ermittelung des entsprechenden k führende Reihe $\frac{k}{2} = \frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \cdots$. Wird aber k als bekannt angenommen, z. B. $k = 1$, so geht $1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ in $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ über, einen Werth, der durch e bezeichnet die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen heisst, und den Euler auf 23 Decimalstellen berechnet angibt. Durch $a = e$, $k = 1$ geht $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i$ über in $e^{\omega i} = (1 + \omega)^i$, und da bei $\omega i = z$, $\omega = \frac{z}{i}$ war, so hat man $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i_{(i=\infty)}$. Wir bemerken dabei beiläufig, dass der Sonderfall $\left(1 + \frac{1}{A}\right)^A_{(A=\infty)} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ schon am 30. Januar 1728 im Besitze von Daniel Bernoulli war, der ihn damals brieflich Goldbach mittheilte[1]).

Das 8. Kapitel, Von den transcendenten Zahlengrössen, welche aus dem Kreise entspringen, nimmt die auf 127 Decimalstellen angegebene Zahl π und die trigonometrischen Functionen in Untersuchung. Mittels der bekannten Formeln für den Sinus und den Cosinus zusammengesetzter Winkel kommt Euler leicht zu den Gleichungen

$$\sin(2y + z) = 2\cos y \sin(y + z) - \sin z$$
$$\cos(2y + z) = 2\cos y \cos(y + z) - \cos z,$$

welche Recursionen darstellen, deren Fortgang einleuchtet, wenn z durch $y + z$ ersetzt wird, was beliebig oft geschehen kann. Auch bei Ausführung der Multiplication $(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y + z) + \sqrt{-1}\sin(y + z)$ bedient sich Euler der Formeln $\cos y \cdot \cos z - \sin y \cdot \sin z = \cos(y + z)$; $\cos y \cdot \sin z + \sin y \cdot \cos z = \sin(y + z)$. Die fortgesetzte Multiplication führt allmählich zu $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$, mit n als ganzer positiver Zahl, was Euler allerdings zu betonen unterlässt, und dann weiter zu $2\cos nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 246.

貴重書

und zu $2\sqrt{-1}\sin nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$. Die Binomialentwicklung der hier vorkommenden n^{ten} Potenzen liefert Werthe von $\cos nx$ und von $\sin nx$ ausgedrückt durch Producte von Potenzen von $\cos z$ und von $\sin z$

$$\cos nz = \cos z^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos z^{n-2}\sin z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos z^{n-4}\sin z^4 - \cdots$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos z^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos z^{n-3}\sin z^3 + \frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{1\cdot 2\cdots 5}\cos z^{n-5}\sin z^5 - \cdots.$$

Ist $nz = v$ und dabei n unendlich gross, z unendlich klein, so kann $\cos z = 1$, $\sin z = z = \frac{v}{n}$ gesetzt werden nebst denjenigen Veränderungen der auftretenden Brüche in Bezug auf n, welche im vorhergehenden Kapitel benutzt waren. Man erhält die Reihen $\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$, $\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$. Werden diese Reihen benutzt, um die Sinus und Cosinus von Bögen unterhalb $\frac{\pi}{6}$ $(= 30^0)$ zu berechnen, so findet man, da $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und somit $\sin(30^0 + z) = \cos z - \sin(30^0 - z)$ nebst $\cos(30^0 + z) = \cos(30^0 - z) - \sin z$, von den Functionen der kleineren Winkel aus mit Leichtigkeit die der grösseren. Die gleiche Substitution $nz = v$ mit $n = i$ (*infinitum*, unendlichgross), $z = \frac{v}{i}$ lässt die für $2\cos nz$ und für $2\sqrt{-1}\sin nz$ gefundenen Formeln in folgende übergehen: $2\cos v = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ und $2\sqrt{-1}\sin v = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$. Nun war aber $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, mithin ist auch $e^{v\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$, $e^{-v\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ und $\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$, $\sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $e^{\pm v\sqrt{-1}} = \cos v \pm \sin v\sqrt{-1}$. Ferner war im natürlichen Logarithmensysteme $\log(1 + x) = i\left((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$. Ersetzt man $1 + x$ zuerst durch $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, dann durch $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$ und zieht beide Ergebnisse von einander ab, so entsteht $\log(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) - \log(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z} = i\Big[(\cos z +$

$\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}\Big]$. Wiewohl vorhin die Herleitung der Formel $2\sqrt{-1}\sin nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$ die Nothwendigkeit eines positiven ganzzahligen n mit sich führte, welche wir deshalb besonders hervorhoben, nimmt Euler nicht den geringsten Anstand $n = \frac{1}{i}$ zu setzen, und er gelangt damit zu $2\sqrt{-1}\sin\frac{z}{i} = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}$ beziehungsweise zu $\log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z} = 2\sqrt{-1}\cdot i\cdot\sin\frac{z}{i}$. Wird $i = \infty$, so geht $i\sin\frac{z}{i}$ in $i\cdot\frac{z}{i} = z$ über, und man erhält $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}$ oder eine Gleichung, welche den Logarithmen einer imaginären Zahl auf einen Kreisbogen zurückführt. Der logarithmirte Bruch kann auch durch $\cos z$ gekürzt werden, worauf $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tng} z}{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tng} z}$ entsteht. Im 7. Kapitel war $\frac{1}{2}\log\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ gefunden worden. Einsetzung von $x = \sqrt{-1}\operatorname{tng} z$ liefert $\frac{1}{2}\log\frac{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tng} z}{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tng} z} = \sqrt{-1}\left(\frac{\operatorname{tng} z}{1} - \frac{\operatorname{tng} z^3}{3} + \frac{\operatorname{tng} z^5}{5} - \cdots\right)$, also auch $z = \frac{\operatorname{tng} z}{1} - \frac{\operatorname{tng} z^3}{3} + \frac{\operatorname{tng} z^5}{5} - \cdots$ beziehungsweise mittels $\operatorname{tng} z = t$, $z = \operatorname{arctg} t$ auch $\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots$. Diese zahlreichen Ergebnisse des 8. Kapitels sind, wie kaum hervorgehoben zu werden braucht, weder in einwandfreier Weise erworben, noch einzeln genommen neu. Johann Bernoulli hatte 1702 den Zusammenhang zwischen einem Arcustangens und dem Logarithmen einer imaginären Zahl erkannt (S. 362), James Gregory besass 1671 die Reihe für $\operatorname{arctg} t$ (S. 75), Leibniz hat deren besonderen Fall $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ gefunden (S. 79). Machin hat 1706 eine zur praktischen Anwendung vortheilhaftere Reihe für $\frac{\pi}{4}$ veröffentlicht (S. 364). Euler selbst hat 1737 eine Anzahl von Reihen zur Berechnung von π in den Druck gegeben (S. 668). Jetzt kam er in der Introductio auf die Umformung der Arcustangensreihe zurück. Ausgehend von $\operatorname{tng}(a + b) = \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} b}{1 - \operatorname{tng} a\cdot\operatorname{tng} b}$ und von $\operatorname{tng}\frac{\pi}{4} = 1$ findet er, dass, wenn $a + b = \frac{\pi}{4}$ ist, $1 = \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} b}{1 - \operatorname{tng} a\cdot\operatorname{tng} b}$ sein muss und $\operatorname{tng} b = \frac{1 - \operatorname{tng} a}{1 + \operatorname{tng} a}$.

Mithin ergibt sich aus $\operatorname{tng} a = \frac{1}{2}$ ein $\operatorname{tng} b = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ und $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, worauf zweimalige Anwendung der Arcustangensreihe eintritt.

Das 9. Kapitel, Untersuchung der trinomischen Factoren, kehrt zu dem Gegenstande des 2. Kapitels zurück. Dort war von den reellen einfachen Factoren und von den paarweise auftretenden imaginären Factoren einer ganzen reellen algebraischen Function die Rede, welche letztere einander zu einem reellen trinomischen Factor vervielfachen, und auf sie wendet Euler nunmehr sein Augenmerk. Das Trinom $p - qz + rz^2$ besteht aus zwei imaginären einfachen Factoren, wenn $4pr > q^2$ oder $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$ ist. Jede Zahl, welche kleiner als 1 ist, kann als ein Cosinus gedacht werden, z. B. $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos\varphi$ als Merkmal, dass $p - qz + rz^2$ aus imaginären einfachen Factoren entstand. Das Trinom heisst alsdann $p - 2\cos\varphi\sqrt{pr}\,z + rz^2$ oder wenn p durch p^2 und r durch q^2 ersetzt wird, $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2 = [qz - p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)] \cdot [qz - p(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)]$, und die ganze algebraische Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \cdots$, auf deren Zerlegung es ankommt, muss verschwinden, sowohl wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ als auch wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$ eingesetzt wird, was unter Benutzung von $(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi$ zu geschehen hat. Diese allgemeinen Vorbemerkungen leiten über zur Zerlegung von $a^n + z^n$, bei welcher die beiden Fälle eines ungraden und eines graden n unterschieden werden. Ist n ungrad, so hat $a^n + z^n$ ausser dem Factor $a + z$ noch $\frac{n-1}{2}$ trinome Factoren, ist n grad, so sind ausschliesslich trinome Factoren $\frac{n}{2}$ an der Zahl vorhanden. Aehnliches gilt für die Zerlegung von $a^n - z^n$. Bei ungradem n ist der Factor $a - z$ neben $\frac{n-1}{2}$ trinomen Factoren vorhanden, bei gradem n vereinigen sich die beiden einfachen Factoren $a - z$ und $a + z$ mit $\frac{n-2}{2}$ trinomen Factoren. Sodann sind die einzelnen Factoren von $a^n + z^n$ und von $a^n - z^n$ wirklich gebildet. Letztere heissen $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2$, wo k alle positiven ganzen Zahlenwerthe von 0 anfangend erhält, bis das Product der Factoren die nöthige Dimension erreicht. Es war

$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ und ebenso $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i_{(i=\infty)}$. Folglich muss, unter der Voraussetzung $i = \infty$, auch sein $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 2} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1$. Der Ausdruck rechts ist aber von der Form $a^n - z^n$, wenn $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1$, $n = i$, und die Factoren desselben werden $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i} + 1$. Bei $k = 0$ erscheint $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos 0 + 1 = \left(1 + \frac{x}{i} - 1\right)^2 = \left(\frac{x}{i}\right)^2$, welches aber durch $\frac{x}{i}$ ersetzt werden muss, weil $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ sich nur durch x $\left(\text{beziehungsweise } \frac{x}{i}\right)$, aber nicht durch x^2 $\left(\text{beziehungsweise } \frac{x^2}{i^2}\right)$ als theilbar erweist. Bei $k > 0$ tritt für $\cos\frac{2k\pi}{i}$ seine Reihenentwicklung $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{i}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{2k\pi}{i}\right)^4 - \cdots$, welche aber wegen $i = \infty$ auf die beiden Anfangsglieder $1 - \frac{2k^2\pi^2}{i^2}$ beschränkt werden darf. So wird das Trinom $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i} + 1 = \frac{x^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2 x}{i^3} = \frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)$, wobei der constante Factor $\frac{4k^2\pi^2}{i^2}$ unberücksichtigt bleiben darf. Somit zerfällt $e^x - 1$ in unendlich viele jetzt bekannte Factoren, d. h. man erhält $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = x\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{36\pi^2}\right)\cdots$. Euler setzt ausdrücklich die Bemerkung hinzu[1]): Obwohl hierin die einzelnen Factoren den unendlich kleinen Theil $\frac{x}{i}$ enthalten, so darf derselbe doch nicht weggelassen werden, weil sich aus ihm nach ausgeführter Multiplication aller $\frac{i}{2}$ trinomen Factoren das Glied $\frac{x}{2}$ ergeben wird; Euler nennt das eine Unbequemlichkeit, der er aus dem Wege gehen will, und dazu bedient er sich einer anderen Factorenzerlegung. Neben $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ ist $e^{-x} = \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ und $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right]$. Nun setzt Euler

[1]) Euler, *Introductio* I, § 156 am Anfang.

$\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-\left(1-\frac{x}{i}\right)^i=a^n-z^n$, d. h. $a=1+\frac{x}{i}$, $z=1-\frac{x}{i}$, $n=i$. Hierdurch wird $a^2-2az\cos\frac{2k\pi}{n}+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{i}$. Man kann wieder $\cos\frac{2k\pi}{i}=1-\frac{2k^2\pi^2}{i^2}$ schreiben und erhält dann $a^2-2az\cos\frac{2k\pi}{n}+z^2=\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4k^2\pi^2}{i^2}-\frac{4k^2\pi^2x^2}{i^4}=\frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}\right)$, oder $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{6}+\cdots$ ist durch $1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}$ theilbar. Hiervon aber, fährt Euler fort, kann man sicher den Theil $\frac{x^2}{i^2}$ weglassen, weil derselbe auch mit i multiplicirt immer noch unendlich klein bleibt. Somit ist also ermittelt: $\frac{x}{1}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}+\cdots=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$. Diese Gleichung dient selbst wieder als Ausgangspunkt neuer Zerlegungen. So lässt $x=z\sqrt{-1}$ links die Sinusreihe entstehen, rechts Factoren $1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}=\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)$, und daher hat man die Zerlegung $\sin z=z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots$ Wieder eine neue Betrachtung beginnt mit $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots=\frac{\left(1+\frac{x}{i}\right)^i+\left(1-\frac{x}{i}\right)^i}{2}$ mit $a=1+\frac{x}{i}$, $z=1-\frac{x}{i}$, $n=i$. Man erhält eine Factorenzerlegung von $1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$, welche mittels $x=z\sqrt{-1}$ in $\cos z=\left(1-\frac{2z}{\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi}\right)\cdots$ übergeht. Auch die Ausdrücke $\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i\pm\left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i$ besitzen die Gestalt $a^n\pm z^n$ und führen Factorenzerlegungen herbei. Die trinomen Factoren sind, nachdem der auftretende Cosinus durch die beiden ersten Glieder der ihm gleichen Reihe ersetzt und ein constanter Factor unberücksichtigt geblieben ist, von der Form $1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{m^2\pi^2+(b-c)^2}$ mit ungradem, beziehungsweise gradem m, je nachdem die Summe oder die Differenz der beiden Potenzgrössen zu zerlegen war. Auch bei $e^{b+x}\pm e^{c-x}$ muss, damit eine wirkliche Gleichung entstehe, ein Divisor hinzutreten, und zwar $e^b\pm e^c$, weil $\frac{e^{b+x}\pm e^{c-x}}{e^b\pm e^c}$ durch $x=0$ in 1 übergeht, wie alle Factoren der Zerlegung durch $x=0$ zu 1 werden. Besondere Annahmen wie $b=0$, $c=-c$, $x=\frac{y}{2}$ werden gemacht und mittels $c=g\sqrt{-1}$, $y=v\sqrt{-1}$

noch weiter ausgebeutet. Schliesslich entstehen Factorenzerlegungen für $\cos z+\operatorname{tng}\frac{g}{2}\sin z$ und für $\cos z-\operatorname{cotg}\frac{g}{2}\sin z$. Es lohnt, die frühere Herleitung von Factorenfolgen (S. 658) zu vergleichen, um den Fortschritt zu erkennen, so ungenügend uns vom gegenwärtigen Zustande der Mathematik aus auch die Schlüsse in der Introductio noch vorkommen mögen.

Das 10. Kapitel, Von dem Gebrauche der gefundenen Producte bei der Bestimmung der Summen unendlicher Reihen, erinnert gleichfalls an Eulers Abhandlung von 1734. Genau nach denselben Grundsätzen wie damals folgert Euler aus $1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\frac{x^6}{5040}+\cdots=\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$, welche Gleichung mittels $x^2=\pi^2 z$ in $1+\frac{\pi^2}{6}\cdot z+\frac{\pi^4}{120}\cdot z^2+\frac{\pi^6}{5040}\cdot z^3+\cdots=\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\left(1+\frac{z}{9}\right)\cdots$ übergeht, dass $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^4}{120}, \frac{\pi^6}{5040}\cdots$ die Summe der in den einzelnen zweigliedrigen Factoren auftretenden Coefficienten von z, ihrer Producte zu je zweien, zu je dreien $\cdots$ sein muss, und nennt man $P, Q, R, S, T\cdots$ die Summe der 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten}, 5^{ten} $\ldots$ Potenzen jener Coefficienten, welche mittels des Girardschen Satzes aus $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^4}{120}, \frac{\pi^6}{5040}$ hergeleitet werden, so entsteht $P=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$, $Q=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$, $R=\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}$, und allgemein zeigt sich $\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots$ als summirbar. Die Summe ist $\frac{2^{2n-2}\pi^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+1)}$ vervielfacht mit Constanten, welche, wie Euler bei dieser Gelegenheit sagt[1]), eine beim ersten Anblick ziemlich unregelmässige Reihe von Brüchen $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1}\cdots$ bilden, die bei sehr vielen Gelegenheiten gebraucht werden. Jakob Bernoulli ist nicht erwähnt und ebenso wenig wird der Beziehungen gedacht, welche zwischen den von Jenem beobachteten Zahlen (S. 347) und den hier genannten obwalten. Euler leitet dann aus der Factorenzerlegung von $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\cdots$ ähnliche Reihensummirungen ab, bei welchen wir uns nicht aufhalten wollen, und ebenso gehen wir über die Herleitung von Reihen für die Tangente hinweg[2]).

---

[1]) Euler, *Introductio* I, § 168 am Ende. [2]) Ebenda I, § 181.

Das 11. Kapitel, Von anderen unendlichen Ausdrücken für die Bögen und die Sinus, setzt den Gegenstand fort. Euler hat den Wallisschen Ausdruck (Bd. II, S. 904) $\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$ selbständig hergeleitet. Er hat ihn durch Zusammenfassung von je zwei Factoren des Zählers und des Nenners $\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)(2n+1)} = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}$ in die Gestalt $\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{49}\right)\cdots$ gebracht und hat auch mittels $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ unter Anwendung der Factorenzerlegung der Sinusreihe $\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdots}$ gefunden. Logarithmirung gibt ihm $\log\frac{\pi}{4} = \log\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{25}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{49}\right) + \cdots$, wo jeder der rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Logarithmen sich vermöge $\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$ in Reihengestalt anschreiben lässt. So wird, wenn man die mit den Coefficienten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots$ vervielfachten Glieder sämmtlicher Reihen vereinigt, $\log\pi = \log 4 - 1\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots\right) - \cdots$ und alle in Klammern befindlichen Summen sind dem Leser des 10. Kapitels bekannt, wenn auch unser Bericht, um nicht über Gebühr sich auszudehnen, sie übergehen musste. Euler berechnet mit deren Hilfe $\log\pi$ im natürlichen Logarithmensysteme auf 23 Decimalstellen[1]). Dass auch die Logarithmen eines Sinus, eines Cosinus von der Factorenzerlegung der Sinus-, der Cosinusreihe aus ermittelt werden, liegt in der Natur der Untersuchung. Den Schluss des Kapitels bilden weitere Reihen für die Tangente, welche aus denen im 10. Kapitel dadurch gewonnen werden, dass in ihnen auftretende Brüche abermals in Reihenform gebracht werden.

Das 12. Kapitel, Von der Entwicklung der gebrochenen Functionen in reeller Form, kehrt zu der im 2. Kapitel begonnenen Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche zurück. Dort war auf das Reell- oder Imaginärsein der in den Nennern der Partialbrüche auftretenden Factoren des ursprünglichen Nenners keinerlei Gewicht gelegt; jetzt vereinigt Euler wieder je zwei Partialbrüche imaginären Nenners zu einem einzigen, in dessen Nenner ein reelles Trinom zweiten Grades erscheint, d. h. es handelt sich um die Er-

[1]) Euler, *Introductio* I, § 190 am Ende.

mittlung der Brüche von der Gestalt $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k}$. Heisst der zu zerlegende Bruch $\frac{M}{N}$, ist zunächst $N = (p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)Z$, wo Z durch das erwähnte Trinom nicht weiter theilbar sein soll, und setzt man $\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2} + \frac{Y}{Z}$, so zeigt sich $Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}$, welches aber eine ganze Function sein muss. Mithin muss der Ausdruck $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ durch den trinomen Nenner theilbar sein oder gleichzeitig mit $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ verschwinden, beziehungsweise verschwinden, wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)$ ist. Die Vollziehung der beiden Substitutionen für z in $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ unter Anwendung von $z^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$ liefert zwei Gleichungen, denen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ zu entnehmen sind. Im weiteren Verlaufe des Kapitels wird alsdann der allgemeinere Fall erörtert, dass N das Trinom k-mal als Factor enthält und die ganze positive Zahl $k > 1$ ist.

Das 13. Kapitel, Von den recurrenten Reihen, kehrt zu dem Gegenstande des 4. Kapitels zurück. Dort war die recurrente Reihe aus einem ihr gleichen Bruche unter Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten hergestellt, während die Division als Entwicklungsmittel verschmäht wurde. Jetzt tritt grade die Division in ihre Rechte. Zugleich kann aber der erzeugende Bruch in seine Partialbrüche zerlegt werden. Jeder Partialbruch gibt für sich eine recurrente Reihe, und die Summe dieser Reihen muss gleich der aus dem unzerlegten Bruche hervorgegangenen Reihe sein, wobei der Satz in Anwendung kommt, der die eigentliche Grundlage der Methode der unbestimmten Coefficienten bildet, dass aus der Gleichheit der Reihen $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \cdots$ mit Nothwendigkeit die Gleichheit der Coefficienten gleich hoher Potenzen von z in beiden Reihen folge. Euler war der Erste gewesen, der diesen Satz unmittelbar aussprach (S. 677), er war auch der Erste, der die Empfindung der Nothwendigkeit einer Rechtfertigung des Satzes besass. Sein Beweis[1]) besteht darin, dass er mittels $z = 0$ zeigt, dass $A = \mathfrak{A}$ sein müsse, dass er alsdann durch Weglassung dieser einander gleichen Grössen aus der anfänglichen Gleichung und darauf folgende Division durch z sich die neue Gleichung $B + Cz + Dz^2 + \cdots = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 + \cdots$ verschafft, aus welcher er mittels $z = 0$ auf $B = \mathfrak{B}$ schliessen kann u. s. w. Der

[1]) Euler, *Introductio* I, § 214.

貴重書

Nutzen der von uns als Grundgedanke des Kapitels bezeichneten Betrachtung liegt darin, dass die vorhergegangene Zerlegung in Partialbrüche es vielfach ermöglicht, das an sich undurchsichtige allgemeine Glied einer recurrenten Reihe deutlich zu erkennen. Eine solche Undurchsichtigkeit herrscht z. B. bei den Coefficienten von $\frac{1-z}{1-5z+6z^2} = 1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + 454z^5 + \cdots$, während $\frac{1-z}{1-5z+6z^2} = \frac{-1}{1-2z} + \frac{2}{1-3z} = (-1 - 2z - 2^2z^2 - \cdots) + (2 + 2\cdot 3z + 2\cdot 3^2z^2 + \cdots)$ zeigt, dass das allgemeine Glied $(2\cdot 3^n - 2^n)z^n$ heisst. Verwickelter, aber keineswegs unlösbar wird die Aufgabe, das allgemeine Glied der einer Division entstammenden recurrenten Reihe zu finden, wenn die reellen Nenner der gebildeten Partialbrüche Trinome zweiten Grades oder deren Potenzen sind.

Das 14. Kapitel, Von der Vervielfachung und Theilung der Winkel, ist die Fortbildung der dem 8. Kapitel angehörenden Recursionsformeln

$$\sin(2y+z) = 2\cos y\cdot\sin(y+z) - \sin z$$
$$\cos(2y+z) = 2\cos y\cdot\cos(y+z) - \cos z.$$

Wie im 8. Kapitel wird der Sinus und der Cosinus des n-fachen Winkels aus den Functionen des einfachen Winkels gefunden, aber auch umgekehrt ist der Sinus oder Cosinus des einfachen Winkels als Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades aufzufassen, welcher eine Function des n-fachen Winkels als Gleichungsconstante dient. Dem algebraischen Nachweise, dass eine solche Gleichung n Wurzeln besitze, steht die Thatsache zur Seite, dass $\sin s = \sin(\pi - s) = \sin(2\pi + s) = \sin(3\pi - s) = \cdots$ und dass, wenn $z = \frac{s}{n}$ ist, auch $z = \frac{\pi - s}{n}$, $z = \frac{2\pi + s}{n}$, $z = \frac{3\pi - s}{n} \cdots$ gewählt werden darf, wodurch $\sin z$ und $\cos z$ jedes so viele verschiedene Werthe erhält, als die Zahl n angibt. Jede zum voraus zu erkennende Gleichungswurzel entspricht einem Factor des Gleichungspolynoms, und nun ergibt sich die Zerfällung des Gleichungspolynoms in Factoren, ergibt sich die Vergleichung der Gleichungscoefficienten mit den Coefficienten des Productes aus den erkannten Factoren, ein Verfahren, welches im 9. Kapitel nicht angewandt worden war. Die erwähnten Recursionsformeln für Sinus und Cosinus von in arithmetischer Progression fortschreitenden Kreisbögen führen[1]) zu $\sin a + z\cdot\sin(a+b) + z^2\cdot\sin(a+2b) + \cdots = \frac{\sin a + z(\sin(a+b) - 2\sin a\cdot\cos b)}{1 - 2z\cos b + z^2}$ und mittels

[1]) Euler, *Introductio* I, § 258.

$z = 1$ zur Summirung der unendlichen Reihe $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots = \frac{\sin a + \sin(a+b) - 2\sin a\cdot\cos b}{2 - 2\cos b} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{2(1-\cos b)} = \frac{2\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2}}{4\sin\frac{b^2}{2}} = \frac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$. Ganz ähnlich muss die unendliche Reihe $\sin(a+(n+1)b) + \sin(a+(n+2)b) + \sin(a+(n+3)b) + \cdots = \frac{\cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{2\cdot\sin\frac{b}{2}}$ sein, und durch Subtraction der beiden unendlichen Reihen von einander entsteht die endliche Reihe $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots + \sin(a+nb) = \frac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right) - \cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{2\cdot\sin\frac{b}{2}} = \frac{\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$. Es ist geradezu merkwürdig, wie Euler hier auf dem Umwege über zwei ganz unzulässige Summirungen divergenter Reihen zu einer durchaus richtigen Summe einer endlichen Reihe gelangte. Wie für den Sinus verfuhr Euler auch für den Cosinus. Er gelangte[1]) zu dem unrichtigen $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots = -\frac{\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$ und von da aus zu dem richtigen $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos(a+nb) = \frac{\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$.

Das 15. Kapitel, Von den Reihen, welche aus der Entwicklung von Producten entspringen, enthält Untersuchungen, welche man Anwendungen der Reihenlehre auf die Zahlentheorie zu nennen versucht wäre, indem, wo seither alle ganzen Zahlen der Reihe nach gewählt wurden, um das Gesetz einer Reihe zu verwirklichen, jetzt ausschliesslich Primzahlen an deren Stelle treten. Schon im Briefwechsel Eulers mit Goldbach von 1739 traten solche Dinge auf[2]). Bei Annahme gleichen Werthes für die beiden unendlichen Ausdrücke $(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\cdots = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ zeigt sich A als Summe der einzelnen Zahlen $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$, $B, C, D\cdots$ als Summe ihrer Producte

[1]) Euler, *Introductio* I, § 260. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 82 sqq.

zu je 2, 3, 4 $\cdots$. Ist nun $\alpha = \frac{1}{2^n}$, $\beta = \frac{1}{3^n}$, $\gamma = \frac{1}{5^n}$, $\delta = \frac{1}{7^n} \cdots$, d. h. hat man die reciproken n^{ten} Potenzen der Primzahlen gewählt, so ist A deren Summe u. s. w., und das ganze Product wird bei $z = 1$ zu $P = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\left(1 + \frac{1}{5^n}\right)\left(1 + \frac{1}{7^n}\right) \cdots = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \cdots$ und die Nenner der addirten Brüche sind die n^{ten} Potenzen aller Zahlen, welche weder Potenzen, noch durch irgend eine Potenz theilbar sind. Wird $z = -1$ angenommen, so sind die Glieder der aus dem Producte entstandenen Reihe absolut betrachtet die gleichen wie vorher, nur mit derart wechselnden Vorzeichen, dass bei ungrader, beziehungsweise bei grader Factorenzahl derjenigen Zahl, deren n^{te} Potenz im Nenner steht, das Minuszeichen, beziehungsweise das Pluszeichen auftritt. $P = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \cdots = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \cdots$. Dann kommt $\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\cdots} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ an die Reihe. Hier sind offenbar, sagt Euler[1]), die $A, B, C, D \cdots$ aus den $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ so zusammengesetzt, dass A die Summe dieser Zahlen einzeln genommen, $B, C, D \cdots$ die Summe der Producte aus je 2, 3, 4 $\cdots$ ist, jedoch so, dass bei der Bildung dieser Summen diejenigen Producte, welche zwei oder mehrere gleiche Factoren enthalten, nicht ausgeschlossen werden dürfen. Euler dachte sich muthmasslich die Herleitung mittels auf einander folgender Division durch die einzelnen Nennerfactoren. So bekam er $\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots$, dann $\frac{1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots}{1 - \beta z} = 1 + (\alpha + \beta) z + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) z^2 + (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) z^3 + \cdots$, ferner $\frac{1 + (\alpha+\beta)z + (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)z^2 + (\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)z^3 + \cdots}{1 - \gamma z} = 1 + (\alpha + \beta + \gamma) z + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2) z^2 + (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \gamma^3) z^3 + \cdots$, und ähnlich muss jede folgende Division wirken, wenn man sich mit der rein formalen Bildung der Quotienten in Gestalt unendlicher Reihen begnügt. Auch hier setzt Euler $z = 1$ und wählt für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ der reciproken Primzahlen mit Ausschluss der 1. Die Reihenentwicklung muss sämmtliche Stammbrüche liefern, deren Nenner Primzahlen oder aus solchen durch Multiplicationen entstanden sind, d. h. überhaupt

[1]) Euler, *Introductio* I, § 270.

alle Stammbrüche, und es muss daher sein $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdots} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$. Nach dem gleichen Verfahren gelangt man zu $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\cdots} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$. Kenntniss des Werthes des im Nenner links vom Gleichheitszeichen auftretenden Productes führt also zur Kenntniss der Reihensumme rechts und umgekehrt. Ferner kann auch rechts und links die Logarithmirung vorgenommen werden. Links entstehen Summen von Logarithmen, deren jeder durch eine unendliche Reihe ersetzt werden kann, und so kommen wieder neue Reihen mit neu bekannt werdenden Summen, beziehungsweise neue Producte zu Stande. Eine Reihe, welche in diesem Zusammenhange zum ersten Male auftritt, ist

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \cdots = 0.$$

Das Gesetz der Reihe besteht darin, dass in ihr alle Stammbrüche fehlen, deren Nenner einen quadratischen Theiler besitzen, und dass die vorhandenen Glieder positiv oder negativ sind, je nachdem ihr Nenner das Product aus einer geraden oder ungraden Anzahl von einander verschiedener Factoren ist. Nur das positive Anfangsglied $\frac{1}{1}$ weicht von dieser Regel ab[1]).

Das 16. Kapitel, Von der Zerlegung der Zahlen in Theile, setzt die zahlentheoretischen Betrachtungen fort und zwar an einer Aufgabe, welche, wie wir wissen (S. 617), vor 1743 von Philip Naudé dem Jüngeren gestellt worden war. Euler bringt sie in Verbindung mit Productenbildungen, wie das 15. Kapitel sie gelehrt hatte. Wird $(1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z) \cdots = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ gesetzt, so ist $P = x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \cdots$. Die nachfolgenden Coefficienten sind: Q die Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summen je zweier verschiedener Zahlen aus der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ sind, R die Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summe je dreier verschiedener unter den genannten Zahlen sind u. s. w. Kann ein Exponent auf mehrere verschiedene Arten durch Addition hervorgebracht werden, so erhält das betreffende Glied einen Zahlencoefficienten. Das Auftreten von $Nx^n z^m$ in dem gebil-

[1]) Euler, *Introductio* I, § 277. Ein Beweis von H. von Mangoldt in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1897[2] S. 835.

deten Producte bedeutet also, dass n in N verschiedenen Arten aus m unter einander verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ additiv hergestellt wurde, oder N ist die Zerlegungszahl von n in m verschiedene Theile. Die Bedingung der Verschiedenheit der Theile fällt weg, sobald der Quotient $\frac{1}{(1-x^\alpha z)(1-x^\beta z)(1-x^\gamma z)\ldots}$ in die Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ verwandelt wird. Die Aufgabe der Zahlenzerlegung ist damit auf eine andere Aufgabe zurückgeführt. Zu ihrer Lösung genügt die Möglichkeit, in den beiden vorerwähnten Hauptfällen die Coefficienten $P, Q, R \cdots$ leicht ermitteln zu können. Ist $Z = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$, so ist $\frac{Z}{1+xz} = (1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$. Das ist aber das gleiche Product, welches entsteht, wenn in $(1+xz)(1+x^2z)\cdots$ der Buchstabe z durch xz ersetzt wird. Das Z genannte Product heisst als Reihe $1 + Pz + Qz^2 \cdots$. Ersetzt man in ihr z durch xz, so entsteht $1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots$ und man erhält die Gleichung $\frac{Z}{1+xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots$, woraus $Z = (1+xz)(1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots) = 1 + (1+P)xz + (P+Q)x^2z^2 + \cdots$ folgt. Durch Gleichsetzung der gleiche Potenzen von z in sich schliessenden Glieder der beiden Reihenformen für Z entsteht $P = (1+P)x$, $Q = (P+Q)x^2$, $R = (Q+R)x^3 \cdots$ und $P = \frac{x}{1-x}$, $Q = \frac{Px^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$, $R = \frac{Qx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ u. s. w. Der allgemeine Ausdruck für den m^{ten} Coefficienten heisst $\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$. Da nun der Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ in eine Reihe entwickelt genau dieselben Reihenglieder liefert wie derjenige, welcher $x^{\frac{m(m+1)}{2}}$ im Zähler besitzt, wenn man auf die Coefficienten allein achtet, während freilich der Unterschied der Exponenten von x in einander der Rangordnung und den Coefficienten nach entsprechenden Gliedern stets $\frac{m(m+1)}{2}$ ist, da ferner die Coefficienten die Zerlegungszahlen sind, so folgt der Satz: Die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{2}$ lässt sich auf ebensoviele Arten in m ungleiche Theile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, \cdots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann. Wird das dem Sinne nach gleiche Verfahren auf den anderen Fall angewandt, wo $Z = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\cdots} = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ war, so findet sich als allgemeiner Ausdruck für $P, Q, R \cdots$ der Bruch $\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ und

daraus der Satz: Die Zahl $n + m$ lässt sich auf ebensoviele Arten in m gleiche oder ungleiche Theile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, \cdots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Das 17. Kapitel, Von dem Gebrauch der recurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen, hat uns schon (S. 643) den Anlass zu einer Verweisung gegeben. Euler verspricht nämlich in den Einleitungsworten des Kapitels eine sorgfältigere Auseinandersetzung der von Daniel Bernoulli im IV. Bande der Petersburger Commentarien über denselben Gegenstand enthaltenen Untersuchungen. Unser Bericht wird sich auf die ersten Paragraphen des Kapitels beschränken dürfen, welche den grundlegenden Gedanken erörtern. Sei in dem Bruche $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots}$ der Nenner das Product lauter von einander verschiedener reeller einfacher Factoren $(1-pz)(1-qz)(1-rz)\cdots$, und sei der Bruch ebensowohl in Gestalt einer recurrenten Reihe $A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots$, als in seiner Zerlegung in Partialbrüche $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1-qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1-rz} + \cdots$ bekannt. Jeder Partialbruch gibt selbst wieder eine recurrente Reihe wie $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}pz + \mathfrak{A}p^2z^2 + \cdots + \mathfrak{A}p^nz^n + \cdots$, und setzt man die Summe dieser partiellen recurrenten Reihe gliedweise gleich der aus dem ursprünglichen Bruche hervorgegangenen Reihe, so zeigt sich $P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \cdots$ und $Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1} + \mathfrak{C}r^{n+1} + \cdots$. Ist nun p am grössten, oder $\frac{1}{p}$ die kleinste Wurzel der Gleichung $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots = 0$ und n eine grosse Zahl, so dass p^n über $q^n, r^n \cdots$ und p^{n+1} über $q^{n+1}, r^{n+1} \ldots$ weit überwiegt, so ist annähernd $P = \mathfrak{A}p^n$, $Q = \mathfrak{A}p^{n+1}$ und demzufolge $p = \frac{Q}{P}$ ein Werth, der um so richtiger ist, je grösser n gewählt wurde. Zugleich ist aber p die grösste Wurzel derjenigen Gleichung, welche aus $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots = 0$ mittels der Substitution $z = \frac{1}{x}$ entsteht. Die Zählercoefficienten $a, b, c, d \cdots$ sind dabei vollkommen willkürlich, können somit so gewählt werden, dass die Rechnung so wenig Mühe als möglich macht.

Das 18. Kapitel, Von den Kettenbrüchen, endlich beruht auf den beiden Abhandlungen im IX. und XI. Bande der Petersburger Commentarien (S. 693—699). Neues ist so gut wie nicht hinzugetreten, vielmehr ist nur der Inhalt jener Abhandlungen, soweit er elementarer Natur ist, klar und einfach dargestellt.