101. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Wörterbücher.

Die Geschichte der Mathematik als Gegenstand wissenschaftlicher Forschung nahm in dem Zeitabschnitte, zu dessen Behandlung wir uns wenden, einen gewaltigen Aufschwung. Wir begegnen Schriftstellern, deren Absicht auf die Bearbeitung des ganzen Gebietes gerichtet war, wie solchen, welche an Einzeluntersuchungen sich genügen liessen, und wir werden von ihnen in dieser Reihenfolge reden.

Johann Christoph Heilbronner[1]) (1706—1747 etwa), ein Schlosserssohn aus Ulm, widmete sich nach der Theologie der Mathematik, über welche er in Leipzig mehrere Jahre lang Vorlesungen hielt. Er bezeichnet sich auf dem Titelblatte seiner ersten Schrift: *Versuch einer mathematischen Historie. Erster Theil. Darinnen eine Abhandlung von dem Nutzen der Mathematik überhaupt, und die Historie der Rechenkunst enthalten sind (Franckfurt und Leipzig verlegts Samuel Wohler, Buchhandler in Ulm 1739)* als *Theol. et Mathem. Studios.*, während er auf den Titel der 1742 bei Johann Friedrich Gleditsch in Leipzig erschienenen *Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum p. C. n. XVI praecipuorum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Accedit recensio elementorum, compendiorum et operum mathematicorum atque historia arithmetices ad nostra tempora* nur Jo. Christoph. Heilbronner schlechtweg und ohne jeden Zusatz heisst. Heilbronner ist bald über-, bald unterschätzt worden. Zur richtigen Würdigung ist eine Vergleichung mit dem etwa hundert Jahre älteren Vossius (Bd. II, S. 652—653) unerlässlich. Ihn hat Heilbronner als hauptsächliche Quelle benutzt, allerdings äusserst kritiklos benutzt, so dass der Sinn des von Vossius Behaupteten unter Umständen zur Unkenntlichkeit entstellt ist. Am deutlichsten zeigt folgendes Beispiel, wie wir das meinen. Vossius spricht[2]) von der vor 86 Jahren durch Vertranius Maurus verfassten Lebensbeschreibung des Terentius Varro. Deren Datum kommt dadurch

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XI, 313. [2]) Vossius pag. 39.

ungefähr auf das Jahr 1560. Heilbronner sagt demnach in dem deutschen Versuch u. s. w. ganz richtig[1]), das Zeugniss des Vertranius Maurus sei noch nicht 200 Jahre alt. In der lateinischen Historia u. s. w. dagegen heisst es: *haec cum ille anno 86 scripserit*[2]). Die 86 Jahre des Vossius sind also ohne Umrechnung wiederhergestellt, und kein Leser wird jetzt dem Wortlaute entnehmen können, wann eigentlich die schriftstellerische Thätigkeit des Vertranius Maurus stattfand. Wo Heilbronner anderen Gewährsmännern als Vossius folgt, ist er nicht selten unglücklich in seiner Wahl. Vossius[3]) hat Hypsikles etwas mehr als 100 Jahre vor Christi Geburt angesetzt, was der geschichtlichen Wahrheit entsprechen dürfte. Heilbronner[4]) setzt denselben mit Fabricius auf 160 nach Christi Geburt. Eudemus, der ausdrücklich als Schüler des Aristoteles bezeichnet ist[5]), soll im 4. nachchristlichen Jahrhunderte gelebt haben, Leonardo von Pisa im 15. Jahrhundert, wofür Blancanus als Quelle angeführt ist[6]). Und dennoch ist neben den grossen Mängeln und groben Fehlern eine Fülle von Gelehrsamkeit in dem deutschen wie in dem lateinischen Bande Heilbronners aufgestapelt. Es ist auch an einzelnen Stellen wenigstens versucht den mathematischen Inhalt der genannten Schriften zu schildern, so z. B. wenn der Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes aus der Aehnlichkeit der Dreiecke hergeleitet wird, welche bei Ziehung der Senkrechten von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse entstehen[7]), wenn die *Arithmetica infinitorum* von John Wallis als die Darstellung einer neuen Methode die Quadratur von Curven und schwierigere Aufgaben der Mathematik zu untersuchen bezeichnet wird, wenn hinzugesetzt ist, sie laufe darauf hinaus, dass die Summe der natürlichen Zahlenreihe, dann die Summe der Quadratzahlen, der Kubikzahlen u. s. w. erforscht werde[8]). Heibronner hat ferner das Verdienst, auf mathematische Handschriften aufmerksam gemacht zu haben. Bernhard von Montfaucon gab 1739 seine *Bibliotheca bibliothecarum* heraus, ein grossartig angelegtes Handschriftenverzeichniss. Heilbronner hat es durchgearbeitet und, was mathematischen Inhaltes schien, seinem lateinischen Geschichtswerke einverleibt. Die Angaben sind nichts weniger als stets zutreffend oder gar vollständig, wie man heute weiss, aber brauchbar sind sie immer noch, wie Heilbronners ganze *Historia matheseos* es ist, wenn man nur bei der Benutzung die nöthige Vorsicht walten lässt und ins-

[1]) Heilbronner, Versuch S. 115 am Schlusse der Anmerkung nn. [2]) Heilbronner, *Historia* pag. 291, Anmerkung m. [3]) Vossius pag. 328, § 7. [4]) Heilbronner, *Historia* pag. 342. [5]) Ebenda pag. 370: *Eudemus Rhodius, Aristotelis discipulus.* [6]) Ebenda pag. 497. [7]) Ebenda pag. 108, Anmerkung kk. [8]) Ebenda pag. 699, § 91, Nr. 5.

besondere stets auf die ersten Quellen zurückgeht, eine Vorschrift, welche man eigentlich bei geschichtlichen Untersuchungen nicht nöthig haben sollte besonders einzuschärfen.

Johann Friedrich Weidler[1]) (1691 oder 1692—1755) gehörte mit seiner Thätigkeit der Universität Wittenberg an. Wir finden ihn dort 1712 als Assessor der philosophischen Facultät, 1719 als ordentlichen Professor der höheren Mathematik, beziehungsweise der Sternkunde, 1733 (nachdem er 1727 zu Basel die juristische Doctorwürde erworben hatte) als ausserordentliches Mitglied der juristischen Facultät, 1746 als ordentlichen Professor der Rechte, ohne dass jedoch anscheinend die Verpflichtung juristische Vorlesungen zu halten von ihm gefordert oder erfüllt worden wäre. Sein geschichtliches Hauptwerk ist die *Historia astronomiae sive de ortu et progressu astronomiae* von 1741, welcher er 1755 noch eine *Bibliographia astronomica etc. Accedunt historiae astronomiae supplementa* nachfolgen liess. So wenig wir die Astronomie in den Kreis unserer Berichterstattung eingezogen haben, so wenig gehört deren Geschichte in das Bereich dieses Werkes, und wir nannten Weidlers Buch nur gelegentlich, weil wir nachher eine Sonderuntersuchung des gleichen Verfassers zu erwähnen haben, der uns alsdann keine unbekannte Persönlichkeit mehr ist.

Wir haben (S. 271) für Christian von Wolfs *Elementa matheseos universae* auf den XVIII. Abschnitt verwiesen. Wenn wir in diesem Kapitel die gegebene Zusage noch nicht vollständig erfüllen, berichten wir doch über den fünften, letzten Band des grossen Handbuchs. Er ist 1741 in erster, 1752 in zweiter Auflage erschienen[2]) und bezeichnet seinen Inhalt auf dem Titelblatte als *Tomus quintus, qui commentationem de praecipuis scriptis mathematicis, commentationem de studio mathematico recte instituendo ... continent.* Dessen zweiter, grösserer Abschnitt[3]) ist eine Gesammtübersicht aller Theile der reinen Mathematik, wie sie nacheinander erlernt werden sollen. Wolf greift dabei vielfach auf Dinge der formalen Logik über und beruft sich nicht selten auf sein Wörterbuch, von dem weiter oben (S. 271) die Rede war. Der erste Abschnitt[4]) ist eine Zusammenstellung der Literatur der reinen wie der angewandten Mathematik und besitzt insofern auch heute noch eine gewisse geschichtliche Bedeutung, als man entnehmen kann, welche Werke Wolf empfehlenswerth erschienen. Ausser dieser allgemeinen Bemerkung möchten wir noch auf zwei Stellen besonders hinweisen.

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie XLI, 453—455. Artikel von S. Günther. [2]) Uns liegt diese zweite Auflage vor, und auf sie beziehen sich unsere Anführungen. [3]) Wolf, *Elementa math.* V, 129—408. [4]) Ebenda V, 1—128.

Das mehrgenannte Wolfsche Wörterbuch war vergriffen. Der Verleger bat Wolf[1]), eine neue Auflage nach seinem, des Verlegers, Sinne, *ad mentem ipsius*, zu bearbeiten oder zu gestatten, dass der Titel wenigstens unverändert Wolfs Namen zeige, während die Umarbeitung durch einen Anderen vollzogen würde. Wolf nennt die Zumuthung abgeschmackt, *insulsum petitum*, und konnte und wollte sich nicht darauf einlassen, weil seine Feder nicht käuflich sei. Der Verleger veranstaltete nichtsdestoweniger 1732 eine neue Auflage[2]), mit welcher in Verbindung gebracht zu werden Wolf sich öffentlich verwahrt.

Wir wissen aus dem 95. Kapitel, dass Wolf in dem Prioritätsstreite zwischen Newton und Leibniz auf des Letzteren Seite stand und ihm manche Dienste leistete. In dem geschichtlichen Abschnitte, von dem wir reden, erzählt Wolf jenen Streit[3]). Er begnügt sich damit, die nackten Thatsachen zu erwähnen, d. h. zu sagen in dem und dem Jahre habe in der und der Zeitschrift der und der Aufsatz gestanden oder sei der und der Brief geschrieben worden. Er theilt mit, dass er dem damals in Wien befindlichen Leibniz das Erscheinen des *Commercium epistolicum* angezeigt und ihn gefragt habe, ob er eine Besprechung in den A. E. wünsche. Zuletzt sagt Wolf: „Dieser Streit, wer Erfinder der Differentialrechnung sei, ist nachher mit grosser Erregung der Gemüther, insbesondere zwischen Keill und Johann Bernoulli geführt worden, worüber in erster Linie die Leipziger A. E. nachzulesen sind. Unsere Aufgabe ist es nicht, den Streit zum Abschlusse zu bringen, da hier nicht Raum für eine Erörterung ist, ohne welche ein Abschluss nicht möglich, und wir uns eine solche auch nicht vorgenommen haben. Zudem ist es unnöthig, aus der erwähnten Zeitschrift abzuschreiben, was dort gelesen werden kann. Wir selbst verehren die Verdienste Newtons, wir verehren die Verdienste Leibnizens, Bernoullis und Anderer. Wir halten es für billig, dass Jedem das Seine zugewiesen werde, und dass grosse Talente

---

[1]) Wolf, *Elementa math.* V, 10, § 21. [2]) Die Heidelberger Universitätsbibliothek besitzt ein Exemplar der II. Auflage des Wörterbuchs in altem Einbande, auf dessen Rücken der Titel *Johann Hübner Lexicon mathematicum* gedruckt ist. Wir haben nicht ermitteln können, ob der dem Verleger willfährige neue Herausgeber wirklich Johann Hübner hiess. Sein Name kommt weder auf dem Titelblatte noch in einer Vorrede vor. Wolfs Name ebensowenig. G. Eneström (*Bibliotheca mathematica* 1898 S. 54) macht darauf aufmerksam, der Herausgeber der II. Auflage des Wolfschen Wörterbuchs werde bei Johann Wolfgang Müller (Auserlesene mathemathische Bibliothek, Nürnberg 1820, S. 207) Richter genannt, vermuthlich sei Georg Friedrich Richter (1691—1742 vgl. Poggendorff II, 634—635) gemeint, der 1732 ausserordentlicher Professor der Mathematik in Leipzig war. [3]) Wolf, *Elementa math.* V, 51—53, §§ 34, 35, 36.

durch den Ruhm, der die Kraft zu glänzenden Leistungen verleitet, angespornt werden. Wir sind bereit, die Verdienste Anderer zu erheben, aber wir erachten es als einen Verstoss gegen die Grundgesetze der Moral, über das Lob in Streit zu gerathen, und kein Beispiel wird uns veranlassen, einen Stein zu solchem Streite beizutragen."

Ein hierher gehörendes Werk aus dem Jahre 1750 ist die *Historica et dogmatica ad Mathesin introductio qua succincta matheseos historia cum ceteris ejusdem praecognitis, nec non systematis mathematici delineatio continentur* von Frobesius[1]). Ihr Verfasser, mit deutschem Namen Johan Nikolaus Frobes (1701—1756), studirte in Helmstädt, dann als enger Schüler Wolfs in Halle und Marburg. Seit 1726 las er in Helmstädt über Wolfsche Philosophie zuerst als Privatdocent, später als Professor. Im Jahre 1741 wurde er überdies zum Professor der Physik und Mathematik ernannt, und nun lehrte er alle diese Fächer durch 10 Jahre, bis er 1751 die philosophischen Vorlesungen abgab. Das erwähnte historisch-mathematische Werk verleugnet die Abhängigkeit seines Urhebers von Wolf keineswegs. Auch Frobesius hat zwei grosse Abschnitte unterschieden, deren zweiter die Umrisse der gesammten Mathematik zeichnet, während der erste nach einer Schilderung der Natur und des Wesens der Mathematik, also nach einer philosophischen Einleitung, sich in den §§ X—XX auf pag. 62—136 der Geschichte zuwendet[2]). Nach einer Auseinandersetzung des Nutzens der Geschichte folgt § XI eine Literatur der Biographien der Mathematiker, § XII Literatur der mathematischen Bibliographien, § XIII Literatur der Geschichte der Mathematik, alle drei recht brauchbar, wenn auch nicht ganz vollständig. Von § XIV an folgt die Geschichte selbst, welche Frobesius in fünf Perioden theilt: 1) barbarica sive orientalis (Inder, Chinesen, Chaldäer, Phönizier, Aegypter). 2) graecanica vel graeca, von Thales bis zur Stiftung der Alexandrinischen Schule. 3) Alexandrino-romana bis zum siebenten christlichen Jahrhundert. 4) arabica. 5) occidentalis. Eigene Forschungen sucht man auch hier vergebens, indess gibt der Verfasser genau seine Quellen und Gewährsmänner an. Die Geschichte selbst ist eine ziemlich compendiarische Aufzählung der einzelnen Mathematiker und ihrer Erfindungen. Die Bearbeitung der 4. Periode ist ein blosses numerirtes Namensverzeichniss, die 5. Periode fehlt ganz.

---

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie VIII, 129—130. [2]) Wir berichten von hier an wörtlich nach Nesselmann, Die Algebra der Griechen § 17, da wir selbst das Werk von Frobesius nie gesehen haben.

Johann Friedrich Stockhausen[1]) (1718—1776) war Prediger in Kirdorf in Oberhessen und verfasste verschiedene theologische Schriften. Mit mathematischen Studien hat er sich daneben aus Liebhaberei beschäftigt und Geschichtliches über diese Wissenschaft gesammelt und 1752 in Berlin bei den bekannten Verlegern Haude und Spener herausgegeben. Der Titel lautet: *Historische Anfangs-gründe der Mathematik, worinnen der Ursprung, Wachsthum, mancherley Veränderung und heutiger Zustand sowohl der Mathematik überhaupt, als auch aller und jeder Theile derselben insonderheit mit Beyfügung eines Registers der vornehmsten Sachen und Scribenten gezeiget wird.* Das Büchelchen hat dadurch ein gewisses Interesse, dass in ihm von Berühmtheiten des 17. und 18. Jahrhunderts die Rede ist, die heute kein Mensch mehr kennt, während wirklich hervorragende Mathematiker nur ganz obenhin genannt sind. Eine gelungene Verwechslung[2]) ist die des John Newton, des Verfassers der 1658 gedruckten *Trigonometria Britannica* (Bd. II, S. 747) mit Isaac Newton. Da des Letzteren Geburtsjahr 1642 ausdrücklich angegeben ist, so meinte Stockhausen offenbar, Newton habe jene Trigonometrie mit 16 Jahren veröffentlicht.

Jean Etienne Montucla[3]) (1725—1799) wurde als Sohn eines Kaufmanns in Lyon geboren. In dem dortigen Jesuitencollegium erhielt er einen ausgezeichneten Unterricht und erwarb sich ebensowohl reiche Sprachkenntnisse als er tief in die Mathematik eindrang, beides gleich unentbehrlich für das, was später seine Lebensaufgabe sein sollte. Zunächst studirte er zwar in Toulouse Rechtsgelehrsamkeit, dann aber ging er nach Paris, um seine allgemeinen Bildungsbedürfnisse zu befriedigen. Das Haus des Buchhändlers Jombert bildete dort einen Vereinigungspunkt für zahlreiche Schriftsteller, namentlich für Mathematiker, deren Schriften einen Verlagsartikel ihres Wirthes bildeten. Dort verkehrte auch Montucla, dort lernte er D'Alembert, dort De Gua de Malves, den Architekten Jacques François Blondel[4]) (1705—1774), den Astronomen Joseph Jérôme le François de Lalande[5]) (1732—1807), welcher gleichfalls ein Zögling des Lyoner Jesuitencollegiums gewesen war, Guillaume Le Blond[6]) (1704—1781), den Mathematiklehrer der königlichen Pagen, später der königlichen Prinzen kennen, und er befreundete sich mehr und mehr mit dem Gedanken, das Werden der so ver-

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXXVI, 292—293. [2]) Stockhausen l. c. S. 149. [3]) Montucla IV, 662—672 *(Sur la vie et les ouvrages de Montucla, extrait de la Notice historique lue par Auguste Savinien Le Blond à la Société de Versailles le 15 Janviér 1800 avec des additions par Jérôme De Lalande).* [4]) Poggendorff I, 213. [5]) Ebenda I, 1349—1351. [6]) Ebenda I, 1398—1399.

schiedenartigen wissenschaftlichen Richtungen, die er bei den Männern seines täglichen Verkehres vorfand, zu ergründen und es darzustellen. Eine Sonderuntersuchung, auf welche wir zurückkommen werden, bahnte 1754 den Weg und lenkte die Aufmerksamkeit auf deren Verfasser. Dann erschien 1758 die *Histoire des Mathématiques* in 2 Bänden und brachte ihm neuen Ruhm und Beförderung. Montucla begleitete 1764 Turgot als königlicher Astronom nach Cayenne, wurde 1766 Oberaufseher der königlichen Gebäude in Paris, zog sich 1792 nach Versailles zurück. Jetzt drang De Lalande in ihn, eine neue Auflage des grossen Geschichtswerkes zu veranstalten und es bis auf die Gegenwart fortzuführen. Der schon 67jährige Montucla liess sich bewegen. Am 7. August 1799 erschienen die beiden ersten Bände der neuen Auflage, aber am 18. December des gleichen Jahres starb Montucla, ohne die Fortsetzung druckfertig haben machen zu können. Dieser Aufgabe unterzog sich De Lalande, und der Abstand des 3. und 4. Bandes von dem 1. und 2. ist ein Zeugniss für die Vortrefflichkeit von Montuclas eigener Arbeit. Sein Nekrolog, welchem wir die lebensgeschichtlichen Angaben entnehmen, rührt von Auguste Savinien Le Blond[1]) (1760—1811) her, einem Grossneffen von Guillaume Le Blond. Wir entnehmen ihm auch, dass Montucla Mitglied der Akademien von Paris und Berlin war. Wir haben den hohen Werth der Geschichte der Mathematik aus Montuclas Feder nicht bloss hier durch den Vergleich mit De Lalandes Fortsetzung, sondern an den verschiedensten Stellen unseres eigenen Werkes, wo immer wir Montucla benutzen konnten, theils ausdrücklich, theils dadurch anerkannt, dass wir ihm folgten. Allerdings stand uns überall nur die zweite Auflage zu Gebot, welche gegen die erste wesentlich verbessert und fast um die Hälfte vermehrt sein soll, die zweite Auflage, welche durch das Jahr ihres Erscheinens erheblich jenseits der Grenze dieses Abschnittes liegt. Aber wenn uns die erste Auflage auch nicht bekannt ist, die Möglichkeit, dass sie sich zu der mit Recht weit und breit berühmten zweiten Auflage auswachsen konnte, schliesst ihr Lob in sich. Zweifellos ist Montucla in zahlreichen Einzelfällen heute überholt, allein man darf nicht vergessen, dass es dazu eines vollen Jahrhunderts und der Anstrengung zahlreicher Forscher bedurfte, welche Neues entdeckten, Neues herausgaben und dadurch Folgerungen ermöglichten, welche Montucla niemals hätte ziehen können, weil ihm die Vordersätze fehlten. Was Montucla geleistet hat, sein Eindringen in den Geist der zahllosen von ihm gelesenen Schriftsteller, sein Zusammenfassen der Haupt-

[1]) Poggendorff I, 1399.

gedanken der Werke, über welche er berichtet, sein besonnenes Urtheil über zahlreiche Streitfragen, an welchen er niemals scheu vorüberschleicht, erheben ihn so hoch über alle seine Vorgänger, dass seine Nachfolger sich glücklich schätzen können, wenn nur ein halb so grosser Fortschritt von Montucla zu ihnen zugestanden wird, als er etwa von Vossius zu Montucla vorhanden war. Man darf dabei nicht aus den Augen verlieren, dass Montucla sich seine Aufgabe zum Schaden seines Werkes dadurch ungeheuer erschwert hat, dass er die ganze angewandte Mathematik in den Kreis seiner Betrachtungen mit hineinzog. Es war, wie mit vollem Rechte gesagt worden ist[1]), in der That zu viel für einen Mann, eine ganz neue Bahn betretend, eine aus den unmittelbaren Quellen geschöpfte Geschichte der Geometrie, Arithmetik, Algebra, Mechanik, Astronomie, Optik, Schiffahrtskunde, Geographie, Chronologie, Gnomonik, Differential- und Integralrechnung zu schreiben. Dieses Streben nach extensiver Vollendung musste die innere ersticken.

Nächst den Schriftstellern, welche der Geschichte der Mathematik im Allgemeinen sich befleissigten, nennen wir solche, welche Einzeluntersuchungen veröffentlichten, die selbst wieder nach zwei Richtungen auseinandergehen, indem entweder die Mathematik an besonderen Orten oder einzelne Gebiete der Mathematik in Frage kommen.

Johann Gabriel Doppelmayr[2]) (1671—1750) war der Sohn eines Nürnberger Kaufmanns, der sich aus Liebhaberei mit Physik beschäftigte und in Nürnberg die erste aufrecht stehende Luftpumpe in Gestalt einer Blumenvase angefertigt haben soll. Der Sohn erbte die Neigungen seines Vaters, zu denen sich Freude an der Mathematik gesellte, und das Studium zu Altdorf als Schüler von Johann Christoph Sturm (S. 11) befestigte ihn in seinem Vorhaben, sich von der Rechtsgelehrsamkeit, welcher er eigentlich sich widmen sollte, abzuwenden. Er kehrte ihr 1700 vollständig den Rücken, machte zwei Jahre lang Reisen durch Deutschland, Holland, England und erhielt nach weiteren zwei Jahren 1704 die Professur der Mathematik am Egidischen Gymnasium zu Nürnberg. Diese Stellung behielt Doppelmayr bis zu seinem Tode, den ihm vielleicht ein physikalisches Experiment brachte. Nach Versuchen mit einer Leydner Flasche, vermuthlich infolge derselben, befiel Doppelmayr eine rechtsseitige Lähmung, welche mit seinem Tode endigte. Von seinen zahlreichen Schriften hat die *Historische Nachricht von den nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730, bleibenden Werth. Die Sprache,

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 19. [2]) Allgemeine deutsche Biographie V, 344—345.

ein Gemenge von Deutsch und Latein, ist zwar im höchsten Grade unerquicklich, auch die Uebermenge von Berufungen erleichtert das Lesen des Werkes keineswegs; dafür ist es aber im höchsten Grade zuverlässig und geeignet, sowohl auf anderweitige Quellenschriften für die Geschichte der Mathematik hinzuweisen, als auch dieselben zu ersetzen.

Wolfgang Ludwig Graefenhahn[1]) (1718—1767) veröffentlichte als Subrector des Gymnasiums zu Bayreuth 1744 und 1745 Schulschriften über die hervorragende Bedeutung deutscher Gelehrten in der Mathematik und der Optik, und Frobesius (S. 499) widmete 1751—1755 mehrere Abhandlungen den Helmstädter Mathematikern. Hierher gehört auch die Erwähnung des Grafen Maruli Giovanni Maria Mazzuchelli[2]) (1707—1765) aus Brescia, der 1737 Geschichtliches und Kritisches über Archimed veröffentlichte, später eine allgemeine italienische Schriftstellerbiographie herauszugeben beabsichtigte, aber mit sechs in den Jahren 1753—1763 gedruckten Bänden nicht über den Buchstaben B hinauskam.

Gabriel Cramer[3]) (1704—1752) gehörte einer ursprünglich holsteinischen Familie an, welche nach Strassburg übergesiedelt war, von wo aus in der Mitte des 17. Jahrhunderts ein weiterer Umzug nach Genf erfolgte. Zwei Cramer, Vater und Sohn, waren beliebte Genfer Aerzte, und auch der zweite Sohn des Letzteren, Gabriel, wurde einer Gelehrtenlaufbahn zugeführt. Er studirte an der grade damals an vorzüglichen Lehrkräften reichen Universität Genf. Der Inhalt seiner Studien kann aus dem Titel der 1722 von ihm vertheidigten Abhandlung über den Schall entnommen werden. Schon 1724 wurde Cramer mit einer abwechselnd durch ihn und einen Studienfreund zu versehenden Professur der Mathematik betraut. Im Mai 1727 erhielt er einen zweijährigen Urlaub, den er zu Reisen benutzte. Er verweilte zunächst fünf Monate in Basel in nahem Verkehre mit Johann Bernoulli. Von da aus begab er sich nach England, nach Holland, im December 1728 nach Paris, wo er bis zu seiner Heimkehr verblieb. Sein Hauptwerk über Curven von 1750 wird uns im 106. wie im 116. Kapitel ausführlich beschäftigen. Es ist bei rasch sinkender Gesundheit vollendet worden. Ein schwerer Fall mit einem Wagen trug dazu bei, den Zustand zu verschlimmern. Ende 1751 suchte Cramer Besserung auf einer Reise ins südliche Frankreich, aber schon am 4. Januar 1752 endete sein Leben in Bagnols, einem kleinen Orte bei Nismes. Dass wir ihn hier als einen

[1]) Poggendorff I, 934. [2]) Ebenda II, 97—98. [3]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz III, 203—226.

Vertreter geschichtlicher Forschung über localisirte Mathematik zu nennen haben, beruht auf einer Veröffentlichung Cramers in den Abhandlungen der Berliner Akademie 1748. Es ist eine Untersuchung[1]) über Hippokrates von Chios, in welcher der Nachweis geführt wird, dass wirklich Hippokrates und nicht, wie gelehrte Philologen damals meinten, Oinopides die Quadratur der Mondchen erfand, womit alsdann eine mathematische Erörterung der Frage sich verband, über welcherlei Kreissehnen quadrierbare Mondchen herzustellen seien.

Zu geschichtlichen Untersuchungen über einzelne mathematische Gegenstände uns wendend haben wir zuerst einer (S. 497) ankündigungsweise erwähnten Abhandlung Weidlers von 1727 zu gedenken. Sie führt den Titel: *De characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus veterum monimentorum fide illustratis Dissertatio mathematica et critica.* Wallis hatte bereits im 4. Kapitel seiner Algebra erwähnt, es gebe alte Ausgaben von Boethius, von Beda und Anderen, in welchen Zahlzeichen vorkommen, welche mit den sogenannten arabischen Zahlzeichen übereinstimmen, aber es sei nicht glaublich, dass dieselben älteren Handschriften entstammen. Weidler wurde in Altdorf mit der Handschrift der Geometrie des Boethius bekannt, welche später nach Erlangen kam, und welche in den neuesten Ausgaben der mathematischen Schriften des Boethius als die Handschrift e bezeichnet wird. Man nimmt gegenwärtig allgemein an, sie stamme aus dem 11. oder 12. Jahrhunderte. Weidler hielt sie für wesentlich älter[2]), und auf diese Ansicht sich stützend sprach er zuerst und bestimmt die seitdem oftmals wiederholte, oftmals bekämpfte Behauptung aus, die sogenannten Apices des Mittelalters seien nicht von Gerbert und seinen Schülern eingeführt worden, sondern sie seien bereits im 6. Jahrhunderte etwa den Römern bekannt gewesen. Gegen die Meinung von altem jenseits des Jahres 1200 hinaufreichendem Gebrauche von Zahlzeichen mit Stellungswerth sind verschiedene Abhandlungen von John Ward in den P. T. von 1735 bis 1748 gerichtet[3]). Mit dem von Weidler und Ward behandelten Gegenstande wird sich wohl auch Gabriel Cramers Abhandlung: *À qui est due l'invention des chiffres arabes* beschäftigt haben, welche 1739 in Genf erschien, uns aber nur durch eine Erwähnung[4]) bekannt ist,

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin. Année* 1748. pag. 482—498.
[2]) Weidler, *De characteribus numerorum* pag. 20: *Occurrunt in codice pervetusto, cujus literarum figurae monstrant, quod seculo minimum octavo vel nono scriptus sit.* [3]) P. T. 1735 pag. 120 und 136; 1744 pag. 79; 1745 pag. 283; 1748 pag. 603. [4]) Poggendorff I, 493.

und ähnlich dürfte der Inhalt von F. Giovanni, *De numeralium notarum minuscolarum origine* (enthalten im 48. Bande von Calogera, Raccolta d'opuscoli) von 1753 gewesen sein[1]).

Nicht besser kennen wir eine andere Schrift aus dem gleichen Jahre 1739: *Entwurf einer Historie der Rechenkunst*[2]) von Johann Gottfried Büchner[3]) (1695—1749), Archivrath in Greiz und Schriftsteller auf verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebieten.

Im Vorübergehen nennen wir die 1741 von De Gua de Malves veröffentlichten im Grossen und Ganzen recht zuverlässigen Untersuchungen zur Geschichte der Algebra. Sie bilden die Einleitungen zu eigenen Arbeiten über die Gleichungslehre, über welche wir im 105. Kapitel berichten werden.

Georg Wolfgang Krafft[4]) (1701—1754) aus Tuttlingen, wurde, nachdem er durch verschiedene Klosterschulen seiner Heimath hindurchgegangen und in Tübingen Magister geworden war, durch Vermittlung des gleichfalls aus Württemberg stammenden und von 1725 bis 1731 als Akademiker in Petersburg ansässigen Georg Bernhard Bilfinger[5]) (1693—1750) gleichfalls in die russische Kaiserstadt gezogen. Er folgte dem Rufe an das dortige Gymnasium, wurde 1730 Mitglied der Akademie, ging aber 1744 als Professor der Physik und der Mathematik nach Tübingen zurück. Dort verfasste er *Institutiones geometriae sublimioris*, deren erster und einziger Band 1753 kurz vor Kraffts Tode erschien. Krafft hatte ja offenbar mehr die Curvenlehre selbst als ihre Geschichte sich zum Gegenstande erwählt, aber, ihm vielleicht unbewusst, verschob sich das Hauptgewicht in seiner Behandlung und, mag das Buch für heutige Leser sonst wenig Erfreuliches bieten, die zahlreichen geschichtlichen Angaben bis auf die Zeit unmittelbar vor Krafft sind dankenswerth.

Alexandre Savérien[6]) (1720—1805), Ingenieur bei der Marine, später Literat zu Paris, veröffentlichte 1753 eine *Histoire critique des infiniments petits.* Wir haben das Buch nie gesehen, noch irgend eine Beurtheilung desselben kennen gelernt. Der geringe Werth von jenseits der Zeitgrenze unseres Bandes erschienenen Schriften Savériens machen uns indessen im höchsten Grade misstrauisch.

Einen durchaus befriedigenden Eindruck macht die letzte Einzel-

---

[1]) Favaro, *Studi italiani sulla storia della matematica* in der *Bibliotheca mathematica* 1892 S. 67—84. [2]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 15. Nach Stockhausen, Historische Anfangsgründe u. s. w. S. 114—115 wäre das Buch schon 1719 erschienen. [3]) Poggendorff I, 333. [4]) Allgemeine deutsche Biographie XVII, 9—10. Artikel von S. Günther.
[5]) Ebenda II, 634—635. Artikel von J. Hartmann. [6]) Poggendorff, II, 761.

untersuchung, bei welcher wir zu verweilen haben, ein schon (S. 501) erwähnter Vorläufer von Montuclas grossem Geschichtswerke. Wir meinen seine *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* von 1754. Allerdings kennen wir auch von diesem Buche ausschliesslich die 2. Auflage, welche Sylvestre François Lacroix (1765—1843) im Jahre 1831 veranstaltete, aber auch in diesem Falle, und vielleicht mit grösserem Rechte als bei der *Histoire des mathématiques*, können wir aus der zweiten Ausgabe einen Rückschluss auf die erste ziehen, da Lacroix in einer Vorrede erklärt, er habe sich damit begnügt, ziemlich zahlreiche Druckfehler zu verbessern, welche namentlich den Anfang des Buches verunstalteten, und eine Reihe kurzer Fussnoten beizugeben; einige wenige grössere Ergänzungen seien am Schlusse als Zusätze vereinigt. Mit Rücksicht auf diese Erklärung des späteren Herausgebers können wir die Geschichte der Versuche zur Kreisquadratur zu gelangen von Montucla auch in ihrer ursprünglichen Gestalt als ein Meisterwerk bezeichnen, welches heute noch Niemand ohne Nutzen zu Rathe ziehen wird, geschweige denn zur Zeit, als es in die Welt hinausging. Das damals erregte Aufsehen war in vollstem Maasse gerechtfertigt.

Von anderen geschichtlichen Abhandlungen nordischer Verfasser[1]) schweigen wir, da wir doch nur die Titel nennen könnten.

Abermals früherer Gewohnheit folgend wollen wir nach den eigentlich geschichtlichen Arbeiten die Ausgaben bedeutender mathematischer Werke erwähnen, durch welche die Literatur bereichert worden ist. Man kann billigerweise nicht verlangen, dass wir hierzu Voltaires *Éléments de la philosophie de Newton mis à la portée de tout le monde* von 1738 und seine *Réponse aux objections principales qui ont été faites contre la philosophie de Newton* von 1739 rechnen, welche den Nachweis liefern, mit welcher Unbefangenheit der geistsprühende Verfasser über Dinge schrieb, die er nicht verstand.

Der erste ernsthaft zu nennende Gelehrte, der sich wiederholt der oft mehr arbeitvollen als dankbaren Mühe unterzog fremde Schriften herauszugeben, war Gabriel Cramer. Seine erste derartige Thätigkeit widmete er den 5 Bänden von Christian von Wolfs *Elementa matheseos universae*. Es wird behauptet[2]), Cramer habe schon die Ausgabe von 1732—1741 besorgt. Davon ist indessen in deren Vorrede nicht die leiseste Andeutung zu finden. Die Vorrede der Ausgabe von 1743—1752 dagegen nennt zwar auch Cramers

[1]) G. Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1898 S. 54. [2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz III, 215 Note 34 mit Berufung auf Senebier, *Histoire littéraire de Genève*.

Namen nicht, allein Wolf erklärt dort wenigstens, er habe den in Genf wohnenden Verleger ermahnt, die Correctur durch eine in der Mathematik erfahrene Persönlichkeit lesen zu lassen[1]), und damit dürfte Cramers Mitwirkung bestätigt sein. Ganz sichergestellt ist, dass Cramer 1742 die 4 Bände der Werke von Johann Bernoulli mit dessen Einwilligung herausgab, und dass Johann Bernoulli ausdrücklich erklärte, keine andere etwaige Ausgabe anzuerkennen. Cramer hat alle Abhandlungen anderer Schriftsteller, auf welche die vielfach als Streitschriften zu bezeichnenden Arbeiten Johann Bernoullis sich beziehen, mit abdrucken lassen, sodass wir in unserem Geschichtswerke sehr häufig von der Vereinigung der auf den gleichen Gegenstand sich beziehenden Untersuchungen, die Cramers Verdienst ist, Gebrauch machen konnten. Auf die Werke von Johann Bernoulli folgten 1744 in 2 Bänden, deren Seitenzahlen aber ohne Unterbrechung durchgezählt sind, die Werke des seit 1705 verstorbenen Jacob Bernoulli. Cramer schickte ihnen eine Widmung an Niclaus I Bernoulli voraus, in welcher er sich G. C. G. (Gabriel Cramer aus Genf) nannte, und noch deutlicher gab ihn die Vorrede an den Leser zu erkennen, in welcher er die Herausgabe der Gesammtwerke von Johann Bernoulli für sich in Anspruch nahm. Die *Ars Conjectandi* ist nicht aufgenommen. Im Uebrigen hat Cramer bei Jacob Bernoullis Werken die gleichen Grundsätze verfolgt wie bei denen Johanns. Schriften anderer Mathematiker, welche zum Verständnisse unentbehrlich sind, sind mit abgedruckt, so dass man verschiedenen Abhandlungen der beiden gegnerischen Brüder sowohl in den Werken von Johann Bernoulli als in denen von Jacob Bernoulli, zweimal innerhalb zweier Jahre, begegnet. Jacob Bernoulli hatte auch Handschriftliches hinterlassen, theils von seiner eigenen Hand, theils von der Jacob Hermanns, dem er in die Feder dictirt hatte. Jacob Bernoulli hatte als gemeinsame Ueberschrift: *Posthuma varia* darüber gesetzt und dadurch zu erkennen gegeben, er wünsche eine nachträgliche Veröffentlichung. Cramer erfüllte diesen Wunsch und gab noch 20 weitere Nummern bei, die sich auf losen Blättern aufgefunden hatten. und zu welchen Niclaus I Bernoulli Anmerkungen verfasste. Andere Anmerkungen rühren offenbar von Cramer her. Endlich wird versichert[2]), Cramer habe 1745 den Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli in 2 Bänden herausgegeben. Dass der Verleger Bousquet, bei welchem auch Johann Bernoullis

[1]) *Editorem hortati sumus, ut correctionem typorum committeret Mathematum perito.* [2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz III, 215 Note 35.

Werke erschienen waren, sich Cramers zu bedienen wünschen musste, dass Johann Bernoulli selbst mit dieser Wahl sicherlich einverstanden war, liegt auf der Hand, und so fehlt es jener Behauptung nicht an Wahrscheinlichkeit. Anderes spricht dagegen, so z. B. dass sich in der Vorrede keinerlei Bestätigung nachweisen lässt. Dieselbe ist ohne Namensunterschrift Lausanne am 31. Januar 1745 gezeichnet, Cramer aber lebte in Genf. Lausanne war in der angegebenen Zeit der Wohnort eines anderen Gelehrten, zu welchem wir uns wenden.

Giovanni Francesco Mauro Melchior Salvemini[1]) (1708 bis 1791) aus Castiglione im oberen Arnothale, woher er den Beinamen Castillioneus annahm, der dann in der Form De Castillon der Familie verblieb, gehörte einer alten Patricierfamilie an. Er war in Pisa Student und erhielt dort 1729 die juristische Doctorwürde, nach seiner eigenen Aeusserung ohne das Geringste von der Rechtswissenschaft zu verstehen, während er von Mathematik wenigstens Etwas gewusst habe. Letztere Wissenschaft und Sprachkenntnisse, welche ihm zum Uebersetzen nützlich waren, wurden seine Erwerbsquelle, als er wegen gottesleugnender Aeusserungen landesflüchtig werden musste. Er fand 1737 eine Lehrerstellung in Vevey, von wo er zu Anfang 1745 nach Lausanne übersiedelte. Dort bemühte er sich 1748 um eine theologische Professur, eine Bewerbung, welche zeigt, wie sehr seine religiöse Gesinnung sich geändert hatte. Ende 1751 wurde er Lector, 1755 Professor der Philosophie und der Mathematik in Utrecht. Im Jahre 1763, unmittelbar nach Beendigung des siebenjährigen Krieges, folgte De Castillon einem Rufe nach Berlin als Mathematiklehrer des Artilleriecorps. Im nächstfolgenden Jahre 1764 wurde er Mitglied der Berliner Akademie, 1787 Director ihrer mathematischen Klasse. Sein Nachruf stammt aus der Feder des einzigen Sohnes, der ihn von drei Kindern überlebte, und dessen Angaben wohl Vertrauen verdienen. Er erzählt, dass sein Vater in Vevey den Plan fasste, bei welchem Gabriel Cramer ihn brieflich unterstützte, die kleineren Schriften Newtons zu sammeln. So entstanden die *Opuscula mathematica Newtoni* in 3 Bänden, 1744 bei Bousquet gedruckt, die Ausgabe, von der wir in unserem Werke fortwährend Gebrauch gemacht haben, die thatsächlich wenigstens auf dem Festlande Europas die einzelnen Originalausgaben verdrängt hat. Wir erinnern daran, dass 1745 in dem gleichen Verlage *Leibnitii et Johannis Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum* in 2 Bänden erschien (S. 507). De Castillons Sohn nennt seinen Vater

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Années 1792 et 1793 (*Histoire* p. 38 bis 60). — Allgemeine deutsche Biographie IV, 67—69.

ausdrücklich als den Herausgeber[1]) und setzt hinzu, Cramer habe ihm das Manuscript verschafft. In der, wie wir wiederholen, aus Lausanne datirten Vorrede des Herausgebers erwähnt dieser, mancherlei für die Wissenschaft gleichgiltige, persönliche Verhältnisse betreffende Stellen seien weggelassen worden; Leibnizens Geist werde darüber nicht unwillig sein, und Bernoulli werde, darauf rechne er und darum bitte er inständig, es für angemessen und gut halten[2]). De Castillon übernahm damit öffentlich die Verantwortung für die stattgehabten Kürzungen. Ob sie ihm nicht trotzdem von Bernoulli vorgeschrieben waren, mag dahingestellt sein. Noch bei einem weiteren Werke vertrat De Castillon den vom Druckorte weit entfernten Verfasser als Herausgeber. Es war bei Eulers *Introductio in analysin infinitorum* von 1748. Euler selbst ging, wie wir wieder aus dem mehrerwähnten Nachrufe wissen, von Berlin aus De Castillon an, den Druck zu überwachen.

Robert Simson[3]) (1687—1768) führt uns nach England hinüber. Er war Schotte und seit 1711 Professor der Mathematik an der Universität Glasgow. Er legte schon 1723 eine erste Probe seiner Beschäftigung mit griechischer Geometrie ab, indem er in den P. T.[4]) eine Abhandlung über die Porismen Euklids veröffentlichte. Im Jahre 1748 folgte eine Wiederherstellung der Ebenen Oerter des Apollonius, 1756 eine englische Uebersetzung von Euklids Elementen. In fast zahllosen Abdrücken und immer neuen Auflagen beherrscht dieses Buch den englischen Elementarunterricht in der Geometrie, wenn auch Augustus De Morgan 1849 einen Sturmlauf gegen den ausschliesslichen und uneingeschränkten Gebrauch der euklidischen Elemente begann, an dem sich mehr und mehr Gelehrte betheiligten, so dass allmählich der Vorschlag ein anderes Schulbuch einzuführen gewagt werden konnte[5]). Nach Simsons Tode wurden 1776 aus seinem Nachlasse noch eine Wiederherstellung von dem Bestimmten Schnitte des Apollonius und eine ausführlichere Arbeit über Porismen zum Drucke gegeben. Von beiden darf der Zeitfolge nach hier keine Rede sein.

In dem den XVII. Abschnitt eröffnenden 93. Kapitel war (S. 271) von mathematischen Wörterbüchern, darunter von Christian von Wolfs Mathematischem Wörterbuche von 1716 die Rede, und in

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin,* Années 1792 et 1793 (*Histoire* pag. 42). [2]) *Hoc non aegre laturos beatos Leibnitii Manes, et aequi bonique ducturum Optimum Bernoullium confido, atque ut id faciat oro obtestorque.* [3]) Poggendorff II, 938. [4]) P. T. Vol. 40 pag. 330. [5]) G. Loria, *Della varia fortuna di Euclide* (Roma 1893) pag. 24 sqq.

unserem gegenwärtigen Kapitel (S. 498) von der neuen Bearbeitung dieses Werkes von 1732. Auch das englische Werk von Stone ist dort genannt worden. Ihm folgte Ephraim Chambers[1]) mit seiner 1728 in 2 Foliobänden gedruckten *Cyclopaedia*, einer Art von alphabetisch geordnetem Universallexikon, in welchem, natürlich nebensächlich genug, auch die Mathematik bedacht war. Wir würden das Werk kaum zu nennen verpflichtet sein, wenn es nicht den Anstoss zu einem grossartigen französischen Unternehmen gegeben hätte. Französische Buchhändler beabsichtigten nämlich eine Uebersetzung der Cyclopaedia und übertrugen De Gua de Malves die Leitung des Unternehmens[2]). De Gua (so nennt man ihn gewöhnlich) trat zu diesem Zwecke mit zahlreichen französischen Gelehrten, unter Anderen auch mit D'Alembert in Verbindung, aber das Werk sollte nach seinem Plane eine wesentliche Veränderung erfahren. Statt einer Uebersetzung dachte De Gua eine viel umfangreichere ganz neue Bearbeitung zu liefern, und darüber kam es zum Streit mit den Verlegern. De Gua trat von dem Unternehmen zurück. D'Alembert und Diderot übernahmen die Führung ganz in De Guas Sinne, und so entstanden 1751—1780 die 32 Bände der grossen französischen *Encyclopédie*, deren mathematische und philosophische Artikel grossentheils von D'Alembert herrühren. Wir benutzen diese Gelegenheit zu lebensgeschichtlichen Angaben[3]). Jean le Rond D'Alembert (1717—1783) führt den Namen Jean le Rond wahrscheinlich von der Kirche Saint-Jean-le-Rond, auf deren Treppen er ausgesetzt gefunden worden sein soll, den Namen D'Alembert von einem Glaser Alembert, dessen Frau das Findelkind anvertraut worden sei, wenn auch von anderer Seite die ganze Aussetzungsgeschichte angezweifelt wird. Sicher ist, dass D'Alembert die Frau, welche ihn auferzog, für seine wirkliche Mutter hielt, dass er dagegen seine thatsächliche Mutter, eine Frau von Tencin, niemals kennen lernte. Sein Vater Destouches, ein Artilleriecommissär, setzte ihn in Besitz eines lebenslänglichen Einkommens von 1200 Francs, für deren Auszahlung durch Frau Destouches im Jahre 1781 der actenmässige Beleg vorhanden ist. Von der Encyclopédie werden wir in verschiedenen Kapiteln zu reden haben. Ein kurz nach dem Beginne der Encyclopédie erschienenes zweibändiges *Dictionnaire universel de mathématiques et de physiques* von Savérien aus dem Jahre 1752 kennen wir nur dem Titel nach.

---

[1]) *National Biography* X, 16—17 (London 1887, edited by Leslie Stephen). [2]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1786. (*Histoire* pag. 68—69). [3]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* VIII, 172—174.

102. Kapitel.

Rechenkunst, besonders in Deutschland.

Das Zahlenrechnen kann als die unterste Stufe der Mathematik betrachtet werden und die Geschichte der Mathematik muss deshalb wenigstens berühren, wie es geübt und wie es gelehrt wurde. Wir können uns für den Rechenunterricht in Deutschland auf vorzügliche Vorarbeiten[1]) stützen und haben es auch früher gethan, wir konnten uns überdies mit manchen Originalschriften persönlich bekannt machen. Für den Rechenunterricht in den übrigen Ländern Europas fehlt uns leider nach beiden Richtungen die nothwendige Grundlage. Wir kennen weder eine brauchbare Zusammenstellung, noch eine genügende Menge von Schulbüchern über Rechenkunst, um selbst aus ihnen zu entnehmen, wie es mit dem Zahlenrechnen in England, in Holland, in Frankreich, in Italien und anderwärts bestellt war. Wir bitten deshalb, es nicht als Ueberhebung eines deutschen Schriftstellers betrachten zu wollen, wenn wir wesentlich über Deutsches hier berichten, wie es auch an früheren Stellen des II. Bandes und in diesem III. Bande S. 38—40 geschehen ist. Wir geben uns vielmehr der Hoffnung hin, auswärtigen Fachgenossen damit einen Anstoss zu geben, dass jeder derselben uns für seine Heimath ergänze.

Die Art, wie der Rechenunterricht sich in Deutschland im zweiten Viertel des 18. Jahrhunderts gestaltete, hängt aufs Engste mit der Entwicklung des Schulwesens in jener Zeit zusammen. Die Förderer des öffentlichen Unterrichtes waren besonders die Pietisten, ein Name, unter welchem Männer von tiefster werkthätiger Frömmigkeit zu verstehen sind. Sie fassten das Erziehungswerk im Geiste der christlichen Liebe auf. Sie wussten, dass in der Jugend der Samen gelegt werden muss, der später aufgehen soll, und sie gründeten, um Kinder aller Stände ihrem Unterrichte zu gewinnen, Schulen, welche ungleich den Lateinschulen und besser geleitet als die seitherigen Rechenschulen, mit denen sie Manches gemein hatten, ihren Schwerpunkt in den Realien besassen und deshalb Realschulen genannt wurden.

Christoph Semler[2]) (1669—1740) veröffentlichte schon 1705: *Nützliche Vorschläge von Aufrichtung einer mathematischen Handwerkerschule bey der Stadt Halle.* Er bezeichnete als *der Schulen Endzweck,*

---

[1]) Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung. (Leipzig 1888.) [2]) Allgemeine deutsche Biographie XXXIII, 694—698. Artikel von F. Jonas.

dass die Kinder in denselben zum gemeinen Leben praepariret werden, und da *die wenigsten Schulkinder zum Studieren, die meisten aber zu anderen Professionen und zu Handwerkern gelangten,* so müssten schon während der Schulzeit ihnen so viel als möglich Anschauungen gegeben werden. Materialien und Instrumente seien ihnen in natura oder im Modell vorzuzeigen, denn oculare Demonstrationen gäben am besten deutliche Vorstellungen.

Ein Gutachten der Berliner Akademie pflichtete Semlers Ansichten bei, und die erste Realschule wurde 1708 in Halle eröffnet. Sie hielt sich nur drei Jahre lang. Semler liess nicht von seinem Vorhaben und brachte es dahin, dass 1739 abermals ein Versuch gemacht wurde, der wahrscheinlich in Folge von Semlers baldigem Tode nicht mehr Glück hatte als der frühere.

Semlers geistiger Nachfolger war Johann Julius Hecker[1]) (1707—1768), der, als Sohn und Enkel von Schulmännern und nachdem er als Student an der Universität Halle den Einfluss von August Herrmann Francke, dem berühmten Gründer der Waisenanstalt, der mit Philip Jacob Spener an der Spitze der Pietisten stand, auf sich hatte wirken lassen, in doppelter Beziehung geeignet war, Semlers Werk fortzusetzen. Nachdem Hecker 1735 als Prediger und Schulinspector an das Militärwaisenhaus in Potsdam, dann 1738 als Prediger an die Dreifaltigkeitskirche in Berlin berufen worden war und in seiner Pfarrei aufs Thatkräftigste für Vermehrung und Verbesserung des niederen Schulunterrichtes eingetreten war, gab er 1747 eine Schrift heraus, welche ihrem Zwecke nach eine Wiederholung von Semlers Vorschlägen von 1705 genannt werden darf. Sie führte den Titel: *Nachricht von einer öconomisch-mathematischen Realschule, welche bei den Schulanstalten der Dreifaltigkeitskirche am Anfange des Maimonates dieses Jahres eröffnet werden soll.* Sie enthielt das Programm der aus einer ganzen Reihe von Classen, unter welchen wir eine mathematische, eine geometrische, eine physikalische hervorheben, geplanten Schule. Zu mehreren Classen sollte das Zeichnen hinzukommen. Die Methode sollte durchweg eine praktische, auf vielfache Anschauung und fortwährende Anwendung gerichtete sein. Der Unterricht in den alten Sprachen fiel nicht weg, wurde aber in neuer vereinfachender Weise ertheilt und liess die Realien zu weit ausgedehnterem Rechte kommen, als es in den Gelehrtenschulen der Fall gewesen war.

Schwierigkeiten aller Art, sowohl mit Rücksicht auf Beschaffung der nöthigen Geldmittel als auch auf Auffindung tüchtiger Lehrkräfte,

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XI, 208—211. Artikel von H. Krämmel.

stellten sich der Heckerschen Realschule nicht weniger als dem Semlerschen Unternehmen entgegen, aber glücklicher als jenes fand diese die nothwendige Unterstützung bei der Bevölkerung und bei den Königen von Preussen und konnte sich erhalten und ausbreiten. Ein Umschwung in der öffentlichen Meinung gegenüber den leitenden Grundsätzen der Jugenderziehung, welcher sich erst in einer Zeit vollzog, die jenseits der Grenzen liegt, die wir uns gesteckt haben, sei nur mit wenigen Worten angedeutet.

Den Pietisten traten die Philantropen entgegen, an ihrer Spitze Johann Bernhard Basedow[1]) (1723—1790). Aber wenn ihr ausgesprochenes Bestreben auf die Aufklärung des Menschengeschlechtes gerichtet war, mit welcher nicht früh genug begonnen werden könne, so mussten sie die realen Lehrgegenstände nicht minder bevorzugen, als es die Pietisten schon vorher gethan hatten. Ihr Ringen war ein Kampf um die Leitung der Schule, nicht um das, was in der Schule gelehrt werden sollte, wenigstens so weit es sich um mathematische Dinge handelte. Sehr weit gingen ja die Anforderungen nicht, welche man an den Inhalt des mathematischen Schulunterrichtes stellte, aber die Lehrart hob sich zusehends.

In ihr machte sich ganz besonders der Einfluss von Christian von Wolf geltend, der schon in seinem deutschen *Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften* sich dahin aussprach[2]): Es ist nicht genug, dass der Lehrer die Wahrheit sagt, sondern die Schüler müssen auch begreifen, dass es Wahrheit sei. Es ist aber ohne Erinnern klar, dass man den Nutzen von der Mathematik nicht zu erwarten hat, wenn nicht die von den alten Geometris gebrauchte Lehrart in allem auf das sorgfältigste in acht genommen wird. Denn nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Ordnung, in welcher sie gründlich erkannt wird, ist das Mittel, wodurch der Verstand des Menschen geändert wird. Daher fällt der Nutzen der Mathematik weg, wenn man ihre Lehren auf gemeine Art vorträgt, nach welcher sie mehr in das Gedächtniss als in den Verstand gefasst werden. Man muss nicht allein in der Erklärung der Rechenkunst die Regeln zeigen, nach welchen man die verlangten Zahlen finden kann, sondern man muss auch deutlich begreifen, warum durch selbige Regeln die verlangten Zahlen können gefunden werden. Die Schüler müssen allezeit gefragt werden, warum sie dieses so und nicht anders machen, damit sie nicht allein den Grund der Rechnung einsehen und sie daher besser behalten, sondern auch

[1]) Allgemeine deutsche Biographie II, 113—124. Artikel von Max Müller.
[2]) Wir citiren nach Unger S. 147.

gewöhnt werden, Nichts ohne Grund von Jemand anzunehmen, ingleichen in Allem, was sie sehen und hören, um seinen Grund sich zu bekümmern.

Diesen Grundsätzen gemäss ist auch die Arithmetik in Wolfs *Elementa matheseos universae* von 1741 behandelt, doch vorher erschienen schon andere Werke, deren wir gedenken müssen.

Christian Pescheck[1]) (1676—1747), Lehrer der mathematischen Wissenschaften am Gymnasium seiner Vaterstadt Zittau, reicht mit seinen zahlreichen Schulbüchern, deren erstes, *Vorhof zur Rechenkunst*, schon 1708 erschien, in den vorigen Abschnitt zurück, zugleich aber auch über die Grenzen dieses Abschnittes hinaus, da eine neue Auflage seiner *Italiänischen Rechenstunden* noch 1762, eine ebensolche seiner *Allgemeinen deutschen Rechenstunden* gar noch 1790 gedruckt wurde. In der 1736 veröffentlichten 9. Auflage des schon genannten Vorhofes konnte Pescheck sich rühmen, dass 44 namhaft gemachte Schulmänner in allen Theilen Deutschlands sich seiner Schriften bedienten, und hat man — sagt der zuverlässige Berichterstatter, dem wir folgen — einige davon gelesen, so wundert man sich über den ungeheuern unverdienten Beifall, den sie fanden. Pescheck besass nur das besondere Geschick, dieselbe Sache ein wenig abgeändert unter neuem Titel immer wieder an den Mann zu bringen. Aber er hat die sehr bescheidenen Bedürfnisse der Schüler, des gemeinen Volkes und der ungeschickten Lehrer zugleich zu befriedigen gewusst und namentlich den letzteren durch eingestreute praktische Winke sich fast unentbehrlich gemacht.

Ganz anderen Werth besitzt die *Demonstrative Rechenkunst* von Christlieb von Clausberg[2]) (1689—1751). Er war von jüdischen Eltern geboren und ist in wahrscheinlich schon männlichem Alter in Clausthal getauft worden. Er ertheilte in verschiedenen Handelsstädten, in Danzig (vielleicht seinem Geburtsort), Hamburg, Lübeck, Leipzig, Unterricht im Hebräischen und im Rechnen und war 1733 bis 1746 in königlich dänischem Finanzdienste, zugleich auch Lehrer des dortigen Kronprinzen. Das von uns schon genannte Werk gehört dem Aufenthalte in Leipzig an, wo es 1732, kurz vor Clausbergs Berufung nach Kopenhagen, erschien. Eine zweite Auflage[3]) ist von 1748. Nach dem Titel der *Demonstrativen Rechenkunst* liess Clausberg den Zusatz folgen: *Wissenschaft gründlich und kurz zu rechnen*, und er hat erfüllt, was beide Ueberschriften in Aussicht stellen. Er hat Rechnungsvortheile, welche ein zuverlässiges und rasches Rechnen

[1]) Poggendorff II, 410. — Unger S. 160—162. [2]) Allgemeine deutsche Biographie IV, 285. — Unger S. 149—160. [3]) Wir bedienten uns dieser 2. Auflage.

sichern, zu sammeln und anzugeben gewusst, er hat nirgend dem Leser zugemuthet, die Vorschriften auf Treu und Glauben für richtig zu halten, sondern Beweise seiner Sätze und seines Verfahrens angegeben, welche im Allgemeinen befriedigen können. Nur sehr ausnahmsweise finden sich ungenügende Beweise, wie z. B. für die Vertauschbarkeit der Factoren bei der Multiplication, welche daraus gefolgert wird[1]), dass 2 mal 3 mal 4 und 2 mal 4 mal 3 beidemal das Product 24 liefern.

Von einzelnen Vorschriften erwähnen wir, dass Clausberg beim Subtrahiren die dem Minuenden zu borgende Einheit nächsthöherer Ordnung dem Subtrahenden nach links vorrückend wieder zulegt[2]), dass er das Abziehen einer mit einer einzelnen Ziffer zu vervielfachenden Zahl von einer andern Zahl in einem einheitlichen Denkacte vollziehen lässt, und dass von diesem das Anschreiben der Rechnung wesentlich vereinfachendem Verfahren bei der Division Gebrauch gemacht wird[3]). Von vielem Schreiben ist Clausberg überhaupt kein Freund. So verpönt er als eine üble Gewohnheit[4]) die Unsitte nebenbei schriftlich zu bemerken, was bei Addition einer langen Zahlenreihe oder bei Multiplicationen zu der nächst höheren Ordnung hinüber zu ziehen ist, wenn er auch andrerseits Gedächtnissanstrengung durch Erlernen eines über 9 mal 9 hinausgreifenden grossen Einmal eins für überflüssig erklärt[5]). Clausberg lehrt nach altem Muster complementare Multiplication[6]) und Division[7]). Er wendet zwar nicht die alte Neunerprobe an, empfiehlt aber dafür um so dringender die Elferprobe[8]), während er eine besondere Abhandlung über die verschiedenen Proben in Aussicht stellt[9]).

Die Regeldetri ist die Grundlage aller praktischen Auflösungen, sei es dass sie einfach geübt wird, sei es in mehrfacher Wiederholung oder in Zusammenfassung, wobei die *Regel Quinque*[10]), beziehungsweise, wenn noch mehr Proportionen vereinigt werden, die *Regel Multiplex* oder *Conjointe*[11]) erscheinen, also diejenigen Regeln, die mit deutschem Namen der Kettensatz heissen. Alles was in der Welt anzutreffen, hat seine Schranken, sagt Clausberg[12]) und zeigt, dass nicht überall die Regeldetri angebracht sei, d. h. dass nicht immer unter den in einer Aufgabe vorkommenden Grössen eine Proportion

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 85. [2]) Ebenda S. 65. [3]) Ebenda S. 109 und 146. [4]) Ebenda S. 60 und 104: Ich sehe nicht vor gut an, die Jugend in ihrer Blüthe zum Kriechen und Faullenzen anzugewöhnen, da man vielmehr ihre Sinnen, so viel als möglich, aufmuntern soll. [5]) Ebenda S. 461. [6]) Ebenda S. 466. [7]) Ebenda S. 585. [8]) Ebenda S. 678. [9]) Ebenda S. 678 und 704. [10]) Ebenda S. 722. [11]) Ebenda S. 769. [12]) Ebenda S. 198.

stattfinde. Wenn ein 3 Fuss tiefer Brunnen in 4 Stunden gegraben werde, so könne die Frage, in welcher Zeit der Brunnen bis zu 100 Fuss vertieft werde, nicht nach der Regeldetri beantwortet werden, denn je tiefer man komme, um so langsamer gehe die Arbeit von statten, weil die Erde immer höher aus der Tiefe heraufgeschafft werden müsse. Ebensowenig genüge die Regeldetri zur Beantwortung der Frage, in welcher Zeit ein Gegenstand aus einer 72000 Fuss hohen Wolke zur Erde falle, wenn in der Nähe des Erdbodens in einer Secunde ein Raum von 20 Fuss durchfallen werde, denn es zeigt die unleugbare Erfahrung, dass, wenn ein schwerer Körper herunterfällt, seine Bewegung oder Geschwindigkeit im Fallen immerfort je mehr und mehr zunehme. Aehnliche Bedenken äussert Clausberg wiederholt, so wenn er das Gewicht des Brodes aus dem Roggenpreise durch indirecte Regeldetri abgeleitet hat und dann fortfährt[1]): Jedoch ist dieses Facit in der Praxi keineswegs als eine ausgemachte Sache anzunehmen, indem die Erfahrung mich belehret, als ich in einer berühmten Stadt auf Ansuchen der Becker bei einem Hochedlen Rath daselbst ein Tarif über die Gewichte der Kaufbrode nach allerhand Preisen des Getraydes vertiget, dass mir verschiedene andere Umstände bey dieser Sache berichtet worden, welche das vorige Facit allerdings verändern. Es ist mein Vorhaben anitzo nicht, die Ausfertigung einer solchen Tarif zu beschreiben. Jedoch nur von einem Umstande zu erwehnen, so hat man zu consideriren, wenn der Roggen theurer, dass der Becker auch die Kleyen theurer anbringet, welcher Nutzen hinwiederum der Schwere des Brods einigermassen zufliesset, und solches demnach am Gewichte schwerer macht.

Grössten Fleiss hat Clausberg auf die Zinsrechnung verwandt, und bei ihm dürfte zuerst die Vereinfachung der Rechnung vorkommen, dass wenn Kapitalien $K_1, K_2, \ldots K_n$ während $t_1, t_2, \ldots t_n$ Tagen sämmtlich zum gleichen Procentsatze p zinstragend angelegt sind, die Summe $K_1 t_1 + K_2 t_2 + \cdots + K_n t_n$ gebildet werden soll, bevor man den Zinsfuss berücksichtigt[2]). Das sind diejenigen Zahlen, welche man, nachdem sie durch 100 getheilt sind, in späterer Zeit die Zinszahlen genannt hat, und Clausbergs Rechnung weicht der Hauptsache nach nur darin von der späteren ab, dass das Jahr zu 365 Tagen, nicht zu 360 Tagen gerechnet wird, dass also der grosse Vortheil eines bequemen Factors $\frac{p}{36000}$, mit welchem jene Summe $K_1 t_1 + K_2 t_2 + \cdots + K_n t_n$ schliesslich zu vervielfachen ist, mangelt.

Zu den mathematisch interessanten Fragen gehört die der

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 717. [2]) Ebenda S 1139.

Summirung der unendlichen Reihe $\frac{1}{a} + \frac{2}{ba} + \frac{3}{b^2 a} + \frac{4}{b^3 a} + \cdots$. Clausberg[1]) zerlegte dieselbe in folgende Unterreihen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{ba} + \frac{1}{b^2 a} + \frac{1}{b^3 a} &+ \cdots \\ + \frac{1}{ba} + \frac{1}{b^2 a} + \frac{1}{b^3 a} &+ \cdots \\ + \frac{1}{b^2 a} + \frac{1}{b^3 a} &+ \cdots \\ + \frac{1}{b^3 a} &+ \cdots \\ &+ \cdots. \end{aligned}$$

Die Summen der in den einzelnen Zeilen vorhandenen geometrischen Reihen sind $\frac{b}{(b-1)a}$, $\frac{1}{(b-1)a}$, $\frac{1}{(b-1)ba}$, $\frac{1}{(b-1)b^2 a}$, $\ldots$, und sie bilden selbst wieder die geometrische Reihe

$$\frac{b}{(b-1)a} + \frac{1}{(b-1)a} + \frac{1}{(b-1)ba} + \frac{1}{(b-1)b^2 a} + \cdots = \frac{b^2}{(b-1)^2 a}.$$

Von letzterer Summenformel ausgehend findet dann Clausberg[2]) durch weitere Zerlegung die Summen der unendlichen Reihen von Brüchen, deren Nenner in geometrischer Progression ansteigen, während die Zähler die von 1 anfangenden Dreieckszahlen, sowie die gleichfalls mit 1 beginnenden Quadratzahlen sind.

Gleichungen als solche kommen bei Clausberg, der überhaupt nur sehr ausnahmsweise sich allgemeiner Buchstabenausdrücke bedient, nicht vor, wohl aber die Regel *Coeci* für unbestimmte Aufgaben[3]) und die *Regel falsi simplicis* sowie *duplicis positionis*[4]). Setzen wir hinzu, dass Clausberg eine durch ihn selbst auf 32 Decimalstellen berechnete Tabelle der Briggischen Logarithmen der Zahlen 1 bis 100 zum Abdruck bringen liess[5]), so sind schon zahlreiche Vorzüge der *Demonstrativen Rechenkunst* erwähnt, und dennoch haben wir zwei Gegenstände bisher vernachlässigt, deren erster die grosse Verbreitung des Werkes wesentlich veranlasste, deren zweiter uns zur Erwähnung anderer Schriftsteller hinüberführt.

Wir meinen in erster Linie die sehr ausführliche Behandlung der Wechselrechnung, welche Clausbergs dickes Buch für den Kaufmann geradezu unentbehrlich machte. Gab es doch damals eine Fülle von verschiedenen Maassen, Gewichten, Münzen, zum Theil sogar Rechnungsmünzen, die gar nie geprägt eine darum nicht minder

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 1419. [2]) Ebenda S. 1422 bis 1426. [3]) Ebenda S. 1331 flg. [4]) Ebenda S. 1350 flg. [5]) Ebenda S. 1431—1434.

wichtige kaufmännische Bedeutung besassen, dass unsere Gegenwart kaum mehr im Stande ist, sich hineinzudenken. Das gegenseitige Verhältniss aller dieser verschiedenen Einheiten, welches bald ein bleibendes, bald ein mit dem Curs wechselndes war, kam in Betracht, so oft in Folge von Handelsgeschäften Zahlungen von einem Orte nach dem anderen vorgenommen werden sollten. Gerade die Verschiedenheit der Münzsorten vermehrte die Anzahl der Möglichkeiten, die in Betracht gezogen werden mussten. Ein Leipziger konnte beispielsweise seine Schuld in Hamburg durch unmittelbaren Wechselverkehr ausgleichen, aber auch so, dass ein Umweg über Augsburg, über Amsterdam, über London gewählt wurde, und nun galt es, sich darüber Rechenschaft zu geben, welcher Zahlungsweg der vortheilhaftere sei. Wechselarbitrage[1]) wurde eine solche Aufgabe genannt, und der Name hat sich wie der Sinn desselben erhalten, wenn auch die Gattung der Werthpapiere, auf welche die Arbitrage sich bezieht, sich im Laufe der Zeit vielfach verschoben hat.

Der zweite Gegenstand, von welchem wir noch zu reden haben, ist die Berechnung des Interusurium. Wir haben (S. 53—54) erörtert, wie Carpzow sich mit der Aufgabe abfand, wie Leibniz in den A. E. von 1682 als Baarwerth der nach a Jahren zu zahlenden Schuld 1, unter der Voraussetzung, dass sie mit $\frac{1}{\nu}$ im Jahre sich verzinsen solle, den Ausdruck $\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^a$ ermittelte, beziehungsweise $\left(\frac{20}{21}\right)^a$, sofern ein Zinsfuss von 5 Procent angenommen wurde. So klar und jeden Zweifel ausschliessend Leibnizens Darstellung gewesen war, blieb sie dennoch den Rechtsgelehrten unverständlich. Zwei derselben, Barth und Caspar Heinrich Horn, suchten das Abzuziehende, das eigentliche Interusurium, anstatt des Baarwerthes der später fälligen Forderung, und sie fassten, da Leibniz bei 5 Procent die Ermässigung der nach 1 Jahre fälligen Forderung um $\frac{1}{21}$ verlangte, seine Meinung so auf, als solle das Interusurium weiter im Verhältnisse der Zeit wachsen, also für 2 Jahre $\frac{2}{21}$, für 3 Jahre $\frac{3}{21}$ der Forderung betragen.

Ein Rechtslicentiat Gottfried August Hoffmann[2]) (1700 bis 1775) gab sich, wie es scheint, gar nicht die Mühe, Leibnizens Aufsatz zu lesen, sondern fand die Berichte von Barth und Horn genügend, um 1731 in einer Schrift *Klugheit hauszuhalten oder Prudentia oeconomica nebst einem Anhange vom Interusurio* gegen Leibniz

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 968 flg. [2]) Poggendorff I, 1127. Die Schreibart Hofmann scheint irrig zu sein.

und zugleich auch gegen Carpzow aufzutreten. Carpzow rechne den Baarwerth der nach n Jahren fälligen Forderung K bei 5 Procent als $K - \frac{nK}{20}$, Leibniz habe statt dessen $K - \frac{nK}{21}$ empfohlen, das richtige von ihm (Hoffmann) entdeckte Ergebniss sei $\frac{100\,K}{100+5n}$.

Gegen diesen Schriftsteller wandte sich Clausberg[1]) mit aller Entschiedenheit. Er hatte schon vorher[2]) Leibnizens Rechnung, welche bei einem Jahre die Rabattirung auf hundert, d. h. $\frac{100\,K}{105}$ fordert, genau erörtert, hatte erörtert, dass bei der Rabattirung in hundert, d. h. nach Carpzows Vorschrift, der 20jährige 5procentige Rabatt die Forderung vernichten würde, hatte gefragt: „wie würde es alsdann erst aussehen, wenn es eine Schuld wäre, die länger als 20 Jahre noch zu laufen hätte; da man nach solcher Rechnung von jedem 100 mehr als 100 abziehen sollte?“ Er hatte hinzugefügt, dass trotz der theoretischen Unrichtigkeit der Rabattirung in 100 dieselbe in Leipzig und in Italien kaufmännische Uebung sei, die keine Uebervortheilung in sich schliesse, weil es „eine recipirte Sache ist, wornach jeder Verkäufer beim Accord des Preises sich reguliret“. Er war dann zum *Interesse auf Interesse* übergegangen und hatte Zinseszins bei Rabattirung über Zeiträume von mehreren Jahren in Anwendung gebracht. So war er bei Hoffmanns Angriffen auf Leibniz angelangt, und Clausberg unterliess es nicht zu zeigen, dass Hoffmann den Aufsatz von 1682 gar nicht verstand, ihm vielmehr einen ihm ganz fremden Inhalt unterschob. Wir kommen auf den Streit zwischen Clausberg und Hoffmann noch zurück. Vorher wollen wir von einigen anderen Rechenbüchern reden.

Unter den Schriften, von welchen man vielleicht sagen kann, sie seien durch den Wunsch des Wettbewerbs mit der rasch ungemein beliebt gewordenen Demonstrativen Rechenkunst hervorgerufen worden, nennen wir die *Allgemeine Regel der Rechenkunst* von Caspar Franz de Rees[3]) (geboren 1690). Das Buch kam in holländischer Sprache heraus, wurde aber 1737 ins Französische, 1739 aus dem Französischen ins Deutsche übersetzt und in dieser letzteren Gestalt mehrfach neu aufgelegt. Was ihm solchen Beifall erwarb, war die Rees'sche Regel zur Auflösung von Aufgaben, bei denen Clausberg sich des Kettensatzes bediente, das Unterscheidende beider Regeln bestand in der Anordnung. Im Kettensatze war die kettenartige Verbindung der Glieder vorgeschrieben. Die Benennung jedes Gliedes in der

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 1237 flg. [2]) Ebenda S. 1164 flg. [3]) Klügel V, 749—750 (s. v. Verhältniss). — Unger S. 170—171.

Columne rechts musste der des nächsten Gliedes in der Columne links gleich sein, die Benennung des letzten Gliedes rechts mit der des Fragegliedes, welches die Columne links eröffnete, übereinstimmen. Dadurch übte der Aufbau der Glieder eine Selbstkritik, welche für Sicherheit der Rechnung werthvoll war, wenn sie auch gewisse Schwierigkeiten in sich schloss, sofern die Zeit bei Zinsrechnungen in den Kettensatz eintreten sollte, wovon uns allerdings bei Clausbergs Kettensätzen kein Beispiel begegnet ist. Bei der Rees'schen Regel ist dagegen der Aufbau der Glieder so, dass je zwei auf gleicher Zeile stehende Zahlen gleiche Benennung führen mussten und es in dem Belieben des Rechners lag, wie er die Zahlen aufeinander folgen lassen wollte. Denken wir uns beispielsweise die Aufgabe: Wieviel Mark Zins geben 800 Mark in $^3/_4$ Jahren, wenn 2800 Mark in 2 Jahren 280 Mark Zins gaben? Der Kettensatz ist

$$\begin{array}{cc} ? & 800 \\ 1 & ^3/_4 \\ 2 & 1 \\ 2800 & 280 \end{array}$$

und wird folgendermassen gelesen: Wie viele Mark Zins geben 800 Mark Kapital, 1 Mark Kapital steht $^3/_4$ Jahre, 2 Jahre stand 1 Mark Kapital, damit 2800 Mark Kapital 280 Mark Zins ergaben. Die Rechnung liefert $\frac{800 \cdot {}^3/_4 \cdot 1 \cdot 280}{1 \cdot 2 \cdot 2800} = 30$. Die Rees'sche Regel dagegen zeigt die Gestalt:

$$\begin{array}{cl} ? & 280 \text{ Zins} \\ 2800 & 800 \text{ Kapital} \\ 2 & ^3/_4 \text{ Jahre} \end{array}$$

Johann Christian Nelkenbrecher[1]), gestorben 1760, gab im Jahre 1752 in Leipzig und zwar im Selbstverlage *Logarithmische Tabellen zur Berechnung derer Wechselarbitragen* heraus. Ungleich bekannter wurde das nach des Verfassers Tode erstmalig 1762 und in 20. Auflage 1877 gedruckte *Taschenbuch eines Bankiers und Kaufmannes*, ein Nachschlagebuch allerersten Ranges insbesondere für Münz- und Maassvergleichungen.

In diesem Zusammenhange nennen wir auch den 1753 gedruckten *Traité des changes et des arbitrages* von Pierre Senebier[2]) (1715 bis 1778), Rechenmeister in Genf.

Martin Knutzen[3]) (1713—1751), Professor in Königsberg, scheint in seiner *Arithmetica mechanica oder Beschreibung eines compendiösen Rechenkästchens* von 1744 eine Erleichterung des Rechnens durch äussere Hilfsmittel beabsichtigt zu haben.

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXIII, 417—418. [2]) Poggendorff II, 903. [3]) Ebenda I, 1285—1286.

An der Spitze der lateinischen Schulen in Deutschland stand die Fürstenschule zu Pforta, und an ihr wirkte Johann Georg Gotthold Hübsch[1]), dessen *Arithmetica portensis* von 1748 den Plan und zugleich das Muster dessen darstellt, was in seiner Anstalt gelehrt wurde und wie es gelehrt wurde. Drei Abtheilungen von Schülern waren unterschieden. In der unteren wurden die ganzen Zahlen und die Brüche nach dem langen Wege gelehrt, in der mittleren die Praktik in Ganzen und Brüchen nebst der Regeldetri, in der oberen die Decimalrechnung und Regeldetri. Offenbar versteht Hübsch unter den „Brüchen nach dem langen Wege", man solle mit den Brüchen als solchen rechnen, ohne sie in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen, während die „Praktik" diese Zerlegung vorschrieb. Nach dem langen Wege war beispielsweise $^7/_8 \cdot 3824 = \frac{7 \cdot 3824}{8} = \frac{26768}{8} = 3346$, nach der Praktik war

$$^7/_8 \cdot 3824 = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\right) \cdot 3824 = 1912 + 956 + 478 = 3346.$$

Der Ausdruck langer Weg, der uns bei Hübsch begegnet, der aber auch bei anderen Schriftstellern der gleichen Zeit vorkommt, erinnert täuschend an das *ad majorem guisam* des Leonardo von Pisa (Bd. II, S. 14), und da dieser Schriftsteller die Zerlegung in Stammbrüche trefflich zu handhaben wusste, so ist nicht ausgeschlossen, dass sie es war, welche er *minoris guise* nannte, die spätere wälsche Praktik der deutschen Rechenmeister. Eigenthümlich genug, dass ein Schriftsteller des 18. Jahrhunderts uns einen bisher unverstandenen Ausdruck des 13. Jahrhunderts deutlicher machen musste, ein neuer Beleg für die erhaltende Kraft der Gewohnheit.

Die Rechenkunst war für Hübsch *wie ein Schleif- oder Wetzstein, und man lernt distinct, ordentlich und vorsichtig denken.* Diesem Zwecke gemäss ist weit mehr Gewicht auf den Sinn der Methoden als auf ihre Einübung gelegt, das Uebungsmaterial iss beschränkt, die Erklärungen werden auf ihre Richtigkeit, die Rechnungsvortheile auf ihre Anwendbarkeit, die Rechnungsproben auf ihre Zuverlässigkeit untersucht.

Hübsch empfiehlt das Kopfrechnen, welches allerdings nach und nach von selbst entstehe, wenn man viel mit der Feder gerechnet habe und fest darin sei. Man hat diesem Ausspruche entnommen, dass Hübsch das Kopfrechnen der Zeit nach erst später und nicht gleich zu Anfang des Unterrichtes eingeübt wünschte. Aber seine

[1]) Unger S. 140, 148, 162, 168.

Hochschätzung desselben spricht sich deutlich in der Verwunderung aus, dass seines Wissens in keiner Practic ex professo davon gehandelt sei, ungeachtet es bei den meisten concurrire; es sei das allergeschwindeste und bequemste Rechnen, da es ohne allen Apparat, allerwegen und zu allen Zeiten, sogar im Finstern geschehen könne. Die hierin enthaltene Anklage gegen andere Werke ist allerdings Clausberg gegenüber, wie wir uns erinnern (S. 515), nicht gerechtfertigt.

Hübsch war der Erste, der beim schriftlichen Rechnen auf Sorgfalt in der äusseren Darstellung sah, der auf Reinlichkeit, Deutlichkeit und Ordnung Gewicht legte, welche letztere besonders bei dem Untereinanderschreiben von Zahlen die genaueste Beachtung zu finden habe.

Wir kehren jetzt endlich zu Christian von Wolf und seinen *Elementa matheseos universae* von 1714 zurück (S. 514). Die in dem I. Bande enthaltenen *Elementa arithmeticae* stellen sich als ein wissenschaftliches Buch dar, aus welchem wohl Niemand das Rechnen gelernt haben wird, der es nicht schon konnte, welches aber die Begründung und den Beweis der Vorschriften sich angelegen sein liess.

Wir heben nur ganz Weniges hervor. Wolf steht in der Division zwischen der alten und der neuen Zeit, indem er sowohl die Division über sich als die unter sich lehrt[1]). Er beweist die Vertauschbarkeit der Factoren bei der Multiplication und zwar folgendermassen[2]). Zwischen der Einheit und dem Multiplicator findet das gleiche Verhältniss statt wie zwischen dem Multiplicandus und dem Producte, d. h. es ist $1:A=B:AB$ und $1:B=A:BA$. Ferner bleibt ein Verhältniss, etwa das von 1 zu A, ungeändert, wenn jedes seiner Glieder mit dem Gleichen, etwa mit B multiplicirt wird, folglich ist $1:A=B:BA$. Die erste und dritte der hier angeschriebenen Proportionen stimmen in den drei ersten Gliedern überein, also müssen auch die vierten Glieder übereinstimmen, d. h. $AB=BA$ sein. Auch die Regel der Multiplication von Brüchen versieht Wolf mit einem Beweise[3]). Es sei $\frac{A}{B}=A:B=F$ und $\frac{C}{D}=C:D=G$, dann ist auch $B:A=1:F$ und $D:C=1:G$. Proportionen dürfen Glied für Glied mit einander vervielfacht werden, somit wird $BD:AC=1:FG$, beziehungsweise $\frac{AC}{BD}=\frac{FG}{1}=FG$ und damit das gesuchte Product gefunden sein. Wir wollen diese Beweisführungen keineswegs als tadelfrei bezeichnen, aber es waren immerhin Beweise

[1]) Wolf, *Elementa matheseos* I, 37—38, § 117. [2]) Ebenda I, 55—56, § 207. [3]) Ebenda I, 62, § 239.

und so der höhere Standpunkt der Rechenkunst gewonnen, auf welchen wir oben hingewiesen haben.

Am Anfange der Arithmetik ist eine mindestens auffallende Erklärung der Aehnlichkeit gegeben[1]): Dinge seien ähnlich, bei welchen das dasselbe ist, wodurch sie sich unterscheiden sollen. Wolf will seine Erklärung Leibniz nachgebildet haben. Dieser sage nämlich[2]): ähnlich sei, was nicht zu unterscheiden sei, wenn es nicht gleichzeitig vorhanden sei. Wir haben (S. 35) ungefähr diesen Wortlaut kennen gelernt.

In einem anderen Abschnitte des I. Bandes der Elemente, in den *Elementa Analyseos mathematicae* spricht sich Wolf über negative Zahlen aus[3]). Sie sind, sagt er, das Nichtvorhandensein der wahren Grössen, durch welche sie verstanden werden, sind also selbst keine wahren Grössen.

Es ist von Interesse, dieser Aeusserung die Meinung D'Alemberts gegenüber zu halten. Wir haben (S. 510) von seiner Mitwirkung an der Encyclopédie gesprochen. Unter dem Worte négatif sagt er, es sei nicht leicht den Begriff der negativen Grössen festzustellen, und einige geschickte Leute hätten sogar dazu beigetragen ihn durch die darüber gegebenen ungenauen Mittheilungen vollends zu verwirren. Von der negativen Grösse sagen, sie sei weniger als Nichts, heisse etwas Unbegreifliches aussprechen. Weiter unten fährt er fort, es sei ziemlich natürlich zu folgern, dass die negativen Grössen, denen man bei Rechnungsverfahren begegne, thatsächlich reelle Grössen seien, mit denen man einen anderen Begriff zu verknüpfen habe, als der war, den man vorausgesetzt hatte. In den *Opuscules mathématiques*, welche D'Alembert 8 Bände stark von 1761—1768 herausgab, über welche wir aber nicht mehr berichten dürfen, hat er sich dann noch viel bestimmter ausgesprochen.

Vielleicht hing es mit dem wissenschaftlich gesteigerten Ansehen der Rechenkunst und der Mathematik im Allgemeinen zusammen, vielleicht mit ihrer nachgerade dem Widerwilligsten sich aufdrängenden Unentbehrlichkeit, dass in Deutschland Bücher über die mathematischen Aufgaben anderer Wissenschaften, der Theologie und der Jurisprudenz, enstandeu.

Johann Bernhard Wiedeburg[4]) (1687—1766), seit 1718 ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Jena, an

[1]) Wolf, *Elementa matheseos* I, 18, § 24: *Similia sunt, in quibus ea eadem sunt, per quae a se invicem discerni debebant.* [2]) Ebenda I, 19, § 27: *Similia quae non possunt distingui nisi per compraesentiam.* [3]) Ebenda I, 237, § 17. [4]) Poggendorff II, 1316—1317. Allgemeine deutsche Biographie XLII, 379 bis 380. Artikel von S. Günther.

welcher er seit 1739 auch theologische Vorlesungen hielt, gab 1730 eine *Mathesis biblica septem speciminibus comprehensa* heraus, Johann Jacob Schmidt, Prediger zu Peest und Balow, 1736 einen *Biblischen Mathematicus oder Erläuterung der Heiligen Schrift aus den Mathematischen Wissenschaften*, nachdem allerdings Samuel Reyher[1]) (1635—1714), Professor der Mathematik in Kiel, den wir im XVI. Abschnitte hätten erwähnen können, 1679 mit einer *Mathesis mosaica sive Loca Pentateuchi mathematica mathematice explicata, cum appendice aliorum S. Script. Locorum Mathematicorum* vorausgegangen war. Wiedeburg folgt in der Anordnung der erklärungsbedürftigen Bibelstellen der Reihenfolge der biblischen Schriften, Schmidt dem mathematischen Inhalte, so dass er zuerst von der biblischen Arithmetik, dann von der biblischen Geometrie, von der biblischen Statik, Architektur, Astronomie, Horographie, Optik handelt. Einen anderen Unterschied konnten wir zwischen beiden Werken, welche wir von Augenschein kennen, nicht entdecken, auch nichts Erwähnenswerthes in ihnen finden, es sei denn, dass wir bei Spitzfindigkeiten verweilen wollten, welche vielleicht dem Theologen, aber keinesfalls dem Mathematiker von Interesse sein können.

Johann Friedrich Polack[2]) (1700—1772), Professor an der Universität zu Frankfurt an der Oder, wo er abwechselnd Jurisprudenz, Mathematik, dann wieder Jurisprudenz, zuletzt Oekonomie, Polizei und Cameralwissenschaften lehrte, gab 1734 eine *Mathesis forensis* heraus, von welcher 1739, 1756, 1770 neue Auflagen nöthig wurden[3]). Auch Johann Friedrich Unger gab 1743 und 1744 Beiträge zur Mathesis forensis heraus, wodurch sich gleichfalls bestätigt, dass die Juristen das Bedürfniss nach derartigen Schriften besassen, was andrerseits wieder ihre Anspruchslosigkeit beweist. Polack hatte aber seine mathematischen Kenntnisse in den Vorlesungen Jacob Hermanns in Frankfurt erworben, und man gewinnt einen traurigen Einblick in das, was damals der Mathematiker an einer deutschen Hochschule lehrte und lehren durfte, wenn man erfährt, dass Hermann durch abstracte Darstellung der Regeln seine Zuhörer entmuthigte, die sich bis auf zwei, unter welchen Polack war, in den ersten sechs Wochen verliefen, ehe Hermann noch die Hälfte der Geometrie abgehandelt hatte. Die Mathesis forensis lässt vollends nicht erkennen, dass Polack

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVIII, 354—358. Artikel von K. [2]) Ebenda XXVI, 381, wo in Folge eines Druckfehlers das Erscheinungsjahr der *Mathesis forensis* 1743 statt 1734 heisst. [3]) Wir bedienten uns der 3. Auflage von 1756, deren Vorrede wir entnahmen, was im Text über Unger gesagt ist. In der Vorrede zur 2. Auflage von 1739 steht das, was wir über Jacob Hermanns Vorlesungen mittheilen.

aus seiner Ausdauer grossen Nutzen gezogen hätte. Mathematisch interessant ist nur der Abschnitt von der Berechnung des Interusuriums, in welchem sich Polack in der ersten Auflage von 1734 vollständig auf die Seite von Gottfried August Hoffmann gegen Carpzow sowohl als gegen Leibniz stellte (S. 518—519). Es bedurfte des Eingriffes einer einflussreichen Persönlichkeit, um Polack wenigstens einigermassen anders zu stimmen. Georg Bernhard Bilfinger war, wie wir wissen (S. 505), 1725—1731 in Petersburg, von wo er als Professor der Theologie nach Tübingen zurückkehrte. Seit 1735 war er in Regierungsgeschäften in Stuttgart thätig. Bilfinger also schickte Polack eine Abhandlung zu, in welcher er Leibnizens Rechnung vertheidigte und aufdeckte, wie sehr man sie missverstanden hatte. Polack nahm die Abhandlung wörtlich in seine 2. Auflage auf und gestand zu, mathematisch sei gegen Leibniz nichts einzuwenden, als Jurist dagegen müsse man sich für Hoffmann entscheiden. Dieser hatte nämlich auch eine Abhandlung eingesandt, welche gleichfalls zum Abdrucke kam: *Gottfried August Hoffmanns*[1]) *J. V. L. Demonstrationen von richtiger Berechnung des Interusurii, worinnen zugleich das, was von dieser Materie in dem Anhange ermeldten Autoris seiner Prudentiae Oeconomicae befindlich ist, wider die von Herrn C. von Clausberg in dessen demonstrativer Rechenkunst gemachte Einwürfe vertheidigt wird.* Hoffmann setzt sich auf das hohe Pferd, indem er erklärt, es sei ihm ziemlich gleichgiltig, ob Leibniz wirklich empfohlen habe oder nicht, $\frac{nK}{21}$ als Interusurium von einem in n Jahren fälligen zu 5 Procent verzinslichen Kapitale K in Abzug zu bringen. Bei den Juristen heisse dieses Verfahren nun einmal Leibnizische Rechnung, und somit sei er berechtigt gewesen, es unter diesem Namen anzugreifen. Aber auch Leibnizens wirkliches Verfahren, die herabgeminderte Forderung in der Höhe von $K \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^n$ anzusetzen sei falsch, weil ungesetzlich. Er verlange Zins von den Zinsen, und dieses sei verboten, man möge sich winden, wie man wolle. Die 3. Auflage der Mathesis forensis unterscheidet sich in diesem Abschnitte in nichts von der ihr vorhergehenden.

[1]) sic!

103. Kapitel.

Lehrbücher der Elementargeometrie. Parallelenlehre. Saccheri.

Wenden wir uns den elementargeometrischen Leistungen zu, so wollen wir den Stoff in der Reihenfolge anordnen, dass wir zuerst einige Werke besprechen, welche den ganzen Umfang der niederen Geometrie betreffen, sodann solche Werke, welche nur einzelnen Theilen der Geometrie gewidmet sind, endlich Abhandlungen ganz besonderen Inhaltes.

Pierre Varignon war 1722 gestorben (S. 222). In seinem Nachlasse fanden sich *Élémens de mathématique* vor, welche 1731 im Druck herausgegeben wurden. Sie beginnen mit *Élémens d'algèbre et d'arithmétique* auf 66 Seiten, die wir keine Veranlassung gehabt haben im vorigen Kapitel zu erwähnen. Sie enthalten nichts von besonders bemerkenswerther Natur. Dann aber folgen *Élémens de géométrie* auf 156 Seiten in neuer Seitenzählung, eine Geometrie von überall durchblickender Eigenart, die philosophische Geistesrichtung ihres Verfassers dadurch zu erkennen gebend, dass sie den Definitionen und Axiomen ein grosses Gewicht beilegt und gerade in dieser Beziehung sich manche Neuerung gestattet. Ein Axiom ist es z. B. für Varignon, dass es zwischen den Umrandungen zweier Gebilde nur eine kürzeste Entfernung gebe[1]), und an dieses Axiom schliesst sich im I. Buche von den Linien die Definition der Geraden als kürzeste Entfernung zweier Punkte. Die Ebene wird alsdann als diejenige Fläche bezeichnet, welche eine Gerade mit allen ihren Punkten berühren kann[2]). Varignon kommt dann bald zum Begriffe des rechten Winkels und der Senkrechten[3]). Den wichtigen Satz, dass jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke gleichweit von deren Endpunkten entfernt sei, beweist er durch Umklappen der Figur um jene Senkrechte[4]). Parallel heissen zwei derselben Ebene angehörende Gerade, welche gegen eine dritte Gerade gleich geneigt sind[5]). Bekanntlich ist diese bei Varignon erstmalig auftretende Erklärung später häufig angewandt worden.

Auf die Definition der Ebene kommt das II. Buch von den Oberflächen zurück und spricht dabei als Zusatz aus[6]), wie die gerade

[1]) Varignon, *Élémens de géométrie* pag. 4: *Entre les extrémités de deux grandeurs il n'y a qu'une mesure qui soit la plus courte.* [2]) Ebenda pag. 5: *On appelle plan une surface que tous les points d'une ligne droite peuvent toucher.* [3]) Ebenda pag. 6. [4]) Ebenda pag. 10. [5]) Ebenda pag. 17: *Deux lignes droites AC et BD dans le même plan également inclinées sur la ligne EH ... sont appellées parallèles.* [6]) Ebenda pag. 38.

Linie die kürzeste von allen sei, die man zwischen zwei Punkten ziehen könne, so sei die Ebene die kleinste aller Oberflächen von übereinstimmender Begrenzung. Schon im I. Buche war bewiesen worden[1]), dass der Peripheriewinkel durch die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Kreisbogens gemessen werde. Im II. Buche dient dieser Satz zur Bestimmung der Winkelsumme des Dreiecks[2]). Beschreibt man um das Dreieck einen Kreis, wovon die Möglichkeit auch bereits im I. Buche nachgewiesen worden war[3]), so haben die drei Dreieckswinkel als Peripheriewinkel auf Bögen, welche sich aneinander anschliessen, zusammen den halben Umkreis oder zwei Rechte als Maass. Aus der nunmehr bekannten Winkelsumme des Dreiecks folgt der Satz vom Aussenwinkel des Dreiecks[4]). Ferner folgt aus der Betrachtung des umschriebenen Kreises die Gleichheit von Winkeln im gleichschenkligen Dreiecke als Peripheriewinkel auf Bögen mit gleichen Sehnen[5]). Die Betrachtung von Parallelogrammen führt zu dem Satze von der Gleichheit paralleler Strecken zwischen Parallelen und als Sonderfall zu der Gleichheit der Senkrechten zwischen zwei Parallelen. Aus ihr aber folgt der Zusatz, dass zwei Parallele ins Unendliche verlängert einander niemals treffen[6]).

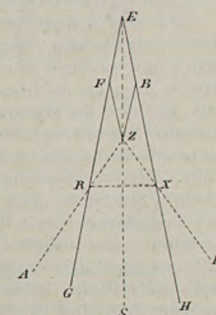

Fig. 75.

Das III. Buch enthält eine Proportionenlehre, das IV. Buch Anwendungen auf Verhältnisse von Strecken und durch sie gebildete Figuren. Hier erscheint erst der pythagoräische Lehrsatz[7]) als eine der drei Möglichkeiten in den gegenseitigen Beziehungen von Dreiecksseiten $BC^2 \lesseqgtr AB^2 + AC^2$. Mit dem V. Buche von den Körpern schliesst die *speculative Geometrie* ab.

Eine *praktische Geometrie* bildet mit drei Kapiteln von der Grösse und Lage gerader Linien, von Flächenmessungen, von Körpermessungen eine besondere Abtheilung des Werkes. Wir erwähnen aus dem 1. Kapitel eine auf Bewegung gestützte Dreitheilung des Winkels[8]). Man sucht (Fig. 75) den dritten Theil des Winkels AZD. An einen Zirkel GEH wird ein zweiter FZB derart befestigt, dass $EBZF$ ein in allen Eck-

[1]) Varignon, *Élémens de géométrie* pag. 35. [2]) Ebenda pag. 43. [3]) Ebenda pag. 22. [4]) Ebenda pag. 43. [5]) Ebenda pag. 44. [6]) Ebenda pag. 50. [7]) Ebenda pag. 65. [8]) Ebenda pag. 101.

punkten bewegliches gleichseitiges Viereck ist. Auf den Schenkeln ZD, ZA des zu theilenden Winkels werden die Stücke ZX, ZR von der Länge EB abgeschnitten, und dann wird der Doppelzirkel so an den Punkt Z angelegt, dass EBH durch X, EFG durch R geht. Nun ist sowohl $\triangle EBZ$ als $\triangle BZX$ gleichschenklig. Als Aussenwinkel von $\triangle EBZ$ ist $\angle ZBX = ZXB = 2ZEX$, und als Aussenwinkel von $\triangle EZX$ ist $\angle XZS = ZEX + ZXE = 3ZEX$. Genau ebenso erkennt man $\angle RZS = 3ZER$, mithin $\angle AZD = 3GEH$ oder $\angle GEH = \frac{1}{3}AZD$. Bei Vermessungsarbeiten auf dem Felde soll man sich einer Vorrichtung bedienen, welche kurzweg das Instrument genannt ist[1]). Es besteht aus einem massiven in Grade eingetheilten Halbkreise mit einem festen Durchmesser und einem um dessen Mittelpunkt drehbaren Diopterlineale, welches die Winkel zu messen gestattet.

Mittels dieses Instrumentes werden im 2. Kapitel die verschiedensten topographischen Aufnahmen vorgenommen[2]); dann kehrt Varignon zu theoretisch Interessanterem zurück, zu Theilungen von geradlinig begrenzten Figuren mittels gerader Linien[3]).

Aus dem 3. Kapitel erwähnen wir nur die letzte Aufgabe der Ausmessung beliebig umgrenzter ganz unregelmässiger Körper[4]). Man bringt den Körper in ein parallelepipedisches Gefäss und schüttet Wasser dazu, bis der Körper vollständig überdeckt ist, worauf man sich die Höhe des Wassers durch einen Strich bemerkt. Bei der alsdann vorgenommenen Entfernung des Körpers sinkt das Wasser im Gefässe bis zu einer neuerdings durch einen Strich zu bemerkenden Höhe. Das Parallelepipedon zwischen den beiden am Gefässe angebrachten Strichen ist genau das Maass des Körpers.

Diese letztere Vorschrift dürfte eine althergebrachte Methode von Praktikern sein. Jedenfalls findet sie sich genau ebenso in einem fast gleichzeitig mit Varignons nachgelassenem Bande erschienenen recht unbedeutenden deutschen Buche, in der *Praxis Geometriae* von Johann Friedrich Penther[5]) (1693—1749). Der Verfasser war seit 1720 in gräflich Stollbergischem Bergdienste und wurde 1736, vielleicht in Folge der beifälligen Aufnahme des genannten Buches von 1732, Professor der Mathematik und der Oekonomie an der Universität Göttingen. Die sehr genügsamen Praktiker waren eben durch den mehr als dürftigen Inhalt, der sich auf die theils zeichnende theils rechnende Auflösung der leichtesten geometrischen Auf-

[1]) Varignon, *Élémens de géométrie* pag. 121. [2]) Ebenda pag. 133—139. [3]) Ebenda pag. 139—148. [4]) Ebenda pag. 155. [5]) Poggendorff II, 399—400.

gaben und auf Anweisungen zum Feldmessen beschränkt, so hoch befriedigt, dass das Buch es bis zu einer 8. Auflage brachte, welche 1776 in Augsburg erschien.

Etwas länger müssen wir bei dem geometrischen Theile der *Elementa matheseos* von Christian von Wolf verweilen. Ziehen doch seine Definitionen durch den Vergleich mit denen Varignons unwillkürlich unsere Aufmerksamkeit auf sich. Wir nennen einige derselben. Diejenige Linie ist gerade, bei welcher jeder Theil dem Ganzen ähnlich ist[1]). Wir dürfen in Erinnerung bringen, dass Wolf den Begriff der Aehnlichkeit schon in der Arithmetik (S. 523) erörtert hatte. Eine Oberfläche ist eine Ebene, wenn von jedem Punkte des Umfanges nach jedem anderen Punkte ebendesselben eine Gerade ganz in der Oberfläche gezogen werden kann[2]). Linien sind parallel, wenn sie überall die gleiche Entfernung von einander bewahren, und demgemäss können auch ins Unendliche verlängerte Parallele nicht zusammentreffen[3]). Eine Figur ist regelmässig, wenn ihre Seiten und ihre Winkel alle unter einander gleich sind[4]).

Der angedeutete Vergleich zeigt einen wesentlichen Gegensatz: Varignon bemüht sich erst zu zeigen, dass gewisse geometrische Eigenschaften an sich möglich sind, und erst dann gibt er mit jenen Eigenschaften behafteten Gebilden diesen oder jenen Namen. Wolf kümmert sich nicht um die Möglichkeit dessen, was er in seinen Definitionen von dem erklärten Raumgebilde verlangt.

Alle erwähnten Definitionen gehören noch dem I. Kapitel der Principien der Geometrie an. Das II. Kapitel ist einigen grundlegenden Sätzen gewidmet. Wolf versteht darunter Vorschriften über das Zeichnen von Figuren auf dem Papiere, über das Abmessen von Geraden und von Winkeln auf dem Papiere und auf dem Felde, über das Uebertragen einer Figur von dem Felde auf das Papier. Dabei wird erwähnt, welcher Messschnüre und Messketten, welcher Lineale, welcherlei Federn beim Zeichnen, welcher Winkelmesswerkzeuge man sich bedienen solle. Ein kleinerer Halbkreis zum Auftragen von Winkeln auf dem Papiere heisst allgemein *Instrumentum transportatorium*[5]).

Im III. Kapitel von den Eigenschaften der geraden Linien und

[1]) Wolf, *Elementa matheseos* I, 98, § 17: *Linea recta est cujus pars quaecumque est toti similis.* [2]) Ebenda I, 100, § 36: *Planum est, si e qnovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.* [3]) Ebenda I, 103, § 81—82: *Linea parallela est alteri, si ubique eandem ab ea distantiam servat. Lineae ergo parallelae in infinitum continuatae non concurrunt.* [4]) Ebenda I, 104, § 106: *Figura regularis est figura aequilatera et aequiangula.* [5]) Ebenda I, 111, § 153.

der Dreiecke beginnen die eigentlichen Sätze der Geometrie. Einige im engsten Zusammenhange stehende sind folgende. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse grösser als jede Kathete[1]), folglich ist die Senkrechte die kürzeste Gerade, welche von einem Punkte nach einer Geraden gezogen werden kann[2]), und die Entfernung eines Punktes von einer Geraden wird durch die Senkrechte gemessen[3]). Da Parallele überall gleiche Entfernungen haben, müssen demnächst alle Senkrechten aus Punkten einer Geraden auf die parallele Gerade von gleicher Länge sein[4]). Hieraus folgert aber Wolf den Satz, dass die Senkrechte auf eine Gerade auch auf der parallelen Geraden senkrecht stehen muss[5]). Sei (Fig. 76) $HI \parallel KL$ und $AB \perp KL$, so muss auch $AB \perp HI$ sein.

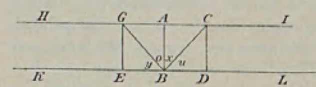

Fig. 76.

Man mache $BD = BE$ und errichte in D und E die beiden Senkrechten DC, EG bis zum Durchschnitte mit der HI, so muss $DC = EG$ sein. Ueberdies ist $\angle D = E$, also sind die Dreiecke BCD, BGE congruent und $BC = BG$ sowie $\angle u = y$. Weil $x + u = o + y =$ einem Rechten, muss $x = o$ sein. Aber AB ist sich selbst gleich, also sind die Dreiecke BAC, BAG congruent und $\angle BAC = BAG =$ einem Rechten.

Wir übergehen die noch folgenden planimetrischen Kapitel. In der stereometrischen Abtheilung machen wir auf den in Gestalt eines Scholium auftretenden Ausspruch aufmerksam, eine Ebene heisse einer anderen parallel, wenn beide überall gleiche Entfernung von einander haben[6]).

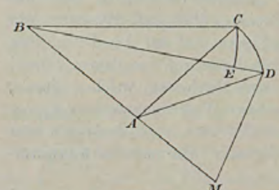

Fig. 77.

Nach der Geometrie folgt eine Trigonometrie, aus welcher uns namentlich ein Satz[7]) hervorhebenswerth erscheint, weil er in die Klasse derjenigen Betrachtungen fällt, welche uns erst einmal bei Cotes (S. 414) vorgekommen sind, und welche sich auf beim Messen unterlaufene Irrthümer beziehen. Seien (Fig. 77) die beiden Strecken AB, AC genau gemessen, die Messung des

[1]) Wolf, *Elementa matheseos* I, 123, § 220. [2]) Ebenda I, 123, § 224. [3]) Ebenda I, 124, § 225. [4]) Ebenda I, 124, § 226. [5]) Ebenda I, 124, § 230. [6]) Ebenda I, 184, § 498. [7]) Ebenda I, 228, § 58—60.

Winkels bei A aber mit einem Fehler behaftet, so dass statt der richtigen Lage AC die AD in die Zeichnung eingetragen wurde, wodurch auch BC in die unrichtige Lage BD mit dem Fehler in der Längenausmessung $BD - BC = ED$ gelangte, indem CD ein Kreisbogen ist, welcher um A mit dem Halbmesser AC, CE ein eben solcher, welcher um B mit dem Halbmesser BC beschrieben ist. Bei der Kleinheit beider Bögen können sie als gerade Linien betrachtet werden, welche die rechten Winkel ACD, BCE, CED hervorbringen. Zieht man von $\angle BCE = ACD$ den $\angle ACE$ ab, so bleibt $\angle BCA = DCE$. Nun ist der $\sin DCE = \sin BCA = \frac{DE}{CD}$. Dabei ist CD das Maass des Fehlers von $\angle A$, und bleibt dieses unverändert, so wachsen gleichzeitig DE (der Fehler von BC) und $\sin BCA$, sowie $\angle BCA$ selbst. Jener Fehler DE wird daher um so geringer, je kleiner $\angle BCA$ ist. Daraus folgt, dass man den Standpunkt A so wählen soll, dass er erheblich näher bei einem der Punkte B, C, deren unzugängliche Entfernung durch Rechnung ermittelt weeden soll, als bei dem anderen liege, damit $\angle BAC$ stumpf und $\angle BCA$ recht spitz ausfalle.

Ein in Frankreich sehr beliebtes Lehrbuch der Geometrie jener Zeit waren die *Institutions de géométrie* von 1746 des Abbé De la Chapelle[1]) (etwa 1710—1792), welcher königlicher Censor in Paris und Mitglied gelehrter Gesellschaften in Lyon und Rouen war. Wir selbst kennen das Werk nicht, aber wenn wir nach des gleichen Verfassers *Traité des sections coniques et autres courbes anciennes* von 1750 urtheilen dürfen, welches nicht geringerer Beliebtheit sich erfreute und noch 1791 in deutscher Uebersetzung durch den bekannten Technologen Böckmann herausgegeben wurde, so muss es sich ebenso durch Vollständigkeit wie durch Fasslichkeit empfohlen haben und mehr durch zahlreiche geschichtliche Bemerkungen als durch irgend neue Beweisführungen oder Auffassungen sich auszeichnen. Einem Schriftsteller, welcher die *Institutions de géométrie* wiederholt anführt[2]), entnehmen wir, dass De la Chapelle unter den Neueren sich am Ausführlichsten mit den Bienenzellen beschäftigt habe[3]), denen bereits Pappus in der Einleitung zum V. Buche seiner Sammlung nachrühmte, dass sie in ihrer sechseckigen Gestalt keinerlei Raum verloren gehen lassen, und dass er geometrische Grundsätze bewies[4]) wie z. B. den, dass zwei Grössen, welche die Grenze einer und der-

[1]) Poggendorff I, 1338. [2]) Van Swinden, Elemente der Geometrie (deutsch von C. F. A. Jacobi. Jena 1834) S. XI, 139, 202, 206, 208. [3]) De la Chapelle, *Institutions de géométrie* II, 217—233 (der 4. Ausgabe von 1765). [4]) Ebenda II, § 433 sqq.

selben dritten sind, einander gleich sein müssen, und den, dass die Grenze eines zusammengesetzten Verhältnisses aus den Grenzen der einzelnen Verhältnisse zusammengesetzt sei.

In England war, wie wir wissen (S. 509), die ausschliessliche Benutzung der Euklidischen Elemente die Regel. Um so lauter spricht es für die Bedeutung eines Schriftstellers, wenn er es wagte, dort als Neuerer aufzutreten. Thomas Simpson[1]) (1710—1761) begann als Seidenweber, wozu sein Vater ihn bestimmte. Ein Astrolog benutzte ihn als Rechner, und bald überflügelte er seinen Lehrer und Meister. Von der Astrologie kam Simpson zur Astronomie und Mathematik. Er siedelte 1732 nach London über, wo er seine theils durch eigene, theils durch angeheirathete Kinder schon zahlreiche Familie wieder durch Seidenweberei ernährte. Nebenbei arbeitete er an *A new treatise of fluxions*, welches Werk 1737 erschien und durch Klarheit und Fasslichkeit grossen Anklang fand. Jetzt drängten sich Schüler in Menge zu Simpson. Die Royal Society nahm ihn unter Erlassung des Eintrittsgeldes als Mitglied auf. Schon vorher wurde er 1743 bald nach Erscheinen von *The doctrine of annuities and reversions* (1742) und von *Mathematical dissertations* (1743) Professor an der Kriegsschule in Woolwich. Seinem dortigen Aufenthalte entstammen *Elements of plane Geometry* (1747), *Trigonometry plane and spherical* (1748), *Doctrine and applications of fluxions* (1750 in 2 Bänden). Simpson verwahrte sich ausdrücklich dagegen, dass man die reife Arbeit von 1750 als 2. Auflage seines 13 Jahre älteren Jugendversuches betrachte. Dann kamen noch *Select exercises in mathematics* (1752). Im Januar 1761 zog sich Simpson gemüthskrank nach seinem Geburtsort Market-Bosworth in Leicestershire zurück, im Mai 1761 starb er. Seine Geometrie, welche uns die Veranlassung bot, Simpsons Lebensgeschichte hier einzuschalten, ist ausdrücklich für den Gebrauch durch Anfänger geschrieben. Es komme ihm, sagt Simpson in der Vorrede, nicht in den Sinn, ein Werk wie das Euklidische tadeln zu wollen, aber doch könne neben jenem auch ein anderes bestehen, und der Leser werde bei ihm manches Eigenthümliche finden.

Wir erwähnen, dass Simpson den Congruenzsatz für zwei stückweise gleiche Seiten und gleichem von ihnen gebildetem Winkel als Axiom ausspricht, welches allenfalls durch Aufeinanderlegen der beiden Dreiecke gestützt werden könne[2]). Seine ersten Lehrsätze[3]) zeigen, dass unter Annahme des Euklidischen Parallelenaxioms eine Gerade,

[1]) *Connaissance des temps pour* 1767 von De la Lande pag. 197—204.
[2]) Simpson, *Elements of plane geometry* pag. 8. [3]) Ebenda pag. 10—11.

welche auf einer anderen senkrecht steht, auch auf deren Parallelen senkrecht stehe, dass zwei derselben dritten Geraden parallele Linien unter einander parallel seien, dass von einem Punkte aus nur eine Senkrechte zu einer gegebenen Geraden gezogen werden könne. Der 26. Satz[1]) spricht aus, dass wenn (Fig. 78) auf den Seiten eines Quadrates $ABCD$ von den Eckpunkten aus gleiche Stücke $AE = DF = CG = BH$ abgeschnitten werden, das Viereck $EFGH$ ein Quadrat sei, und der 7. Satz des II. Buches[2]) beweist darauf gestützt den pythagoräischen Lehrsatz. Das III. Buch beschäftigt sich mit dem Kreise. Dort ist der Satz über die Producte der Abschnitte einander schneidender Sehnen ganz wie bei Euklid bewiesen, aber daran knüpft Simpson Sätze über winkelgleiche Dreiecke[3]), welche (Fig. 79) so aneinander gelegt werden, dass die Schenkel einander gleicher Winkel einander als Fortsetzung dienen. Simpson beweist, dass die durch B, C, F gelegte Kreisperipherie auch durch E gehen müsse, als leichte Folgerung aus den Sätzen über Peripheriewinkel, und nun sind BF, CE einander schneidende Sehnen, mithin $AB : AE = AE : AF$. Mit dem ptolemäischen Lehrsatze[4]) schliesst das III. Buch. Das IV. Buch handelt von den Proportionen, das V. und VI. ist Aufgaben gewidmet, und zwar das V. solchen über Zeichnung und Theilung von Seiten und Winkeln, das VI. solchen über Verwandlung von Figuren bei gleichbleibendem Flächeninhalte. Ein besonderer Abschnitt[5]) lehrt Aufgaben über grösste und kleinste Werthe elementargeometrisch lösen. Simpson zeigt 1) dass das Quadrat das dem Inhalte nach grösste Rechteck von gleichem Umfange sei, 2) dass das grösste einem beliebigen Dreiecke unter Benutzung von dessen Grundlinie als Seite einbeschriebene Rechteck dasjenige sei, welches die halbe Dreieckshöhe als Höhe besitze. Als 17. Satz erscheint endlich, dass das regelmässige Vieleck das flächengrösste aller isoperimetrischen Vielecke von gleicher Seitenzahl sei. Die noch folgenden Abschnitte begnügen wir uns einfach zu nennen: Von

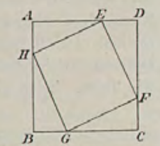

Fig. 78.

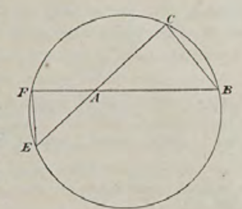

Fig. 79.

[1]) Simpson, *Elements of plane geometry* pag. 27. [2]) Ebenda pag. 36.
[3]) Ebenda pag. 57. [4]) Ebenda pag. 59. [5]) Ebenda pag. 106—118.

regelmässigen Körpern[1]), Ausmessung von Flächeninhalten[2]), Körperinhalte[3]), Vermischte Aufgaben[4]).

Die Trigonometrie Simpsons von 1748 ist ungemein kurz gehalten. Auf nur 77 Seiten lehrt sie die ebene Trigonometrie, die Herstellung einer Tafel von Sinussen, Tangenten und Secanten, die sphärische Trigonometrie, die Herstellung von Logarithmentafeln, deren Anwendung, Eigenschaften der Sinusse, Tangenten u. s. w. Eigenschaften ebener und sphärischer Dreiecke. Aber auch bei dieser Kürze fand Simpson Gelegenheit, Eigenes von Wichtigkeit mitzutheilen. Der 5. Satz[5]) ist der vom Verhältnisse der Summe und der Differenz zweier Seiten eines ebenen Dreiecks. Simpson beweist ihn wie folgt. Seien (Fig. 80) im Dreiecke ABC die Seiten AB, AC gegeben, deren kleinere AB ist. Mit ihr als Halbmesser wird um den Mittelpunkt A ein Kreis beschrieben, welcher die verlängerte AC in D und in F schneidet. Man verbindet B mit D und F und zieht $DE \parallel BF$; ausserdem zieht man $Ab \perp CF$ und verbindet b mit C und F. Wegen $AB = AD = AF$ ist die Summe $AC + AB = CF$, die Differenz $AC - AB = CD$. Anwendung der Sätze vom Centriwinkel und Peripheriewinkel auf gleichem Bogen und vom Aussenwinkel eines Dreiecks führt ferner dazu $\angle FDB = \frac{1}{2}(ABC + BCA)$, $\angle DBE = \frac{1}{2}(ABC - BCA)$ erkennen zu lassen. Weil $\triangle CFB \sim CDE$ hat man

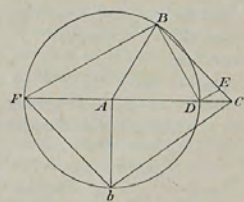

Fig. 80.

$$\frac{CF}{CD} = \frac{FB}{DE} = \frac{FB}{BD} : \frac{DE}{BD} = \text{tang}\, FDB : \text{tang}\, DBE$$

oder

$$(AC + AB) : (AC - AB) = \text{tang}\, \frac{ABC + BCA}{2} : \text{tang}\, \frac{ABC - BCA}{2}.$$

An diesem Beweise eines schon bekannten Satzes lässt es aber Simpson nicht genügen. Er entwickelt vom $\triangle AbC$ ausgehend die den vorhergehenden ganz ähnlich gebaute Proportion

$$(AC + Ab) : (AC - Ab) = \text{tang}\, \frac{AbC + bCA}{2} : \text{tang}\, \frac{AbC - bCA}{2}$$

[1]) Simpson, *Elements of plane geometry* pag. 119—133. [2]) Ebenda pag. 134—142. [3]) Ebenda pag. 143—145. [4]) Ebenda pag. 146—193. [5]) Simpson *Trigonometry* pag. 6—7.

und weil $Ab = AB$, die Vorderglieder beider Proportionen also die gleichen sind, verbinden sich beide zu einer einzigen, in welcher nur trigonometrische Tangenten von Winkeln vorkommen. Simpson bezeichnet die Tangente durch Tang und schreibt demnach

$$\text{Tang}\, \frac{AbC + bCA}{2} : \text{Tang}\, \frac{AbC - bCA}{2} = \text{Tang}\, \frac{ABC + ACB}{2} : \text{Tang}\, \frac{ABC - ACB}{2}.$$

Aber $AbC + ACb = 90^0$, $AbC - ACb = AbC - (AbC + ACb) = 2AbC - 90^0$ und folglich

$$\text{Tang}\, 45^0 : \text{Tang}\, (AbC - 45^0) = \text{Tang}\, \frac{ABC + ACB}{2} : \text{Tang}\, \frac{ABC - ACB}{2}.$$

Man hat, sagt Simpson, hier zwei Proportionen statt einer, aber man findet doch mitunter in der Astronomie einen Vortheil in deren Anwendung wegen ihrer bequemen logarithmischen Anwendung. Bedienen wir uns, um Simpsons Meinung besser zu verstehen, einfacher Buchstaben. Sei $BC = a$, $AB = Ab = c$, $AC = b$, $\angle BAC = A$, $\angle ABC = B$, $\angle ACB = C$, $\angle AbC = \varphi$. Zunächst ist $\text{tang}\, \varphi = \frac{b}{c}$ und φ dadurch gegeben. Dann aber ist weiter $1 : \text{tang}\, (\varphi - 45^0) = \text{cotang}\, \frac{A}{2} : \text{tang}\, \frac{B - C}{2}$ und dadurch auch $B - C$ gefunden. Simpson hat sich also hier eines **Hilfswinkels** bedient und den gleichen Kunstgriff im weiteren Verlaufe der Trigonometrie[1]) wiederholt angewandt. Ganz neu war derselbe ja nicht, Ibn Jûnus scheint ihn im Oriente gekannt zu haben[2]), aber dessen Tafeln waren 1748 in Europa noch unbekannt, so dass Simpsons Unabhängigkeit gegen jeden Zweifel gesichert ist. Dass Simpson von der Anwendung des gleichen Gedankens durch Bürgi hätte Kenntniss haben sollen, scheint nämlich ebenfalls ausgeschlossen (Bd. II, S. 643).

Welcherlei Lehrbücher der elementaren Geometrie damals in Italien benutzt wurden, wissen wir persönlich nicht genau anzugeben und wären für eine Ergänzung von kundiger Seite dankbar. Wir vermuthen jedoch, dass namentlich in den von Geistlichen geleiteten Anstalten die Euklidausgabe des Clavius, der *Euclides restitutus* des Borelli, der italienisch geschriebene *Euclide restituto* des Giordani, von welchem wir (S. 14) gesprochen haben, den Unterricht beherrschten.

Unter den Schriften weniger allgemeinen Inhaltes, zu denen wir uns wenden, ist gerade die älteste und hervorragendste in Italien erschienen. Girolamo Saccheri[3]) (1667—1733) war Jesuit und

[1]) Simpson, *Trigonometry* pag. 64—68. [2]) Delambre, *Histoire de l'astronomie au moyen age* pag. 165. [3]) Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss (Leipzig 1895) S. 31—135.

lehrte zuerst Grammatik an dem von seinem Orden geleiteten Collegium der Brera in Mailand. Gleichzeitig mit ihm wirkte Tommaso Ceva (1648—1737), der Bruder des ungleich bekannteren Giovanni Ceva (S. 20—21) als Lehrer der Mathematik an jener Anstalt, und Saccheri trat mit beiden Ceva in wissenschaftlichen Verkehr. In der Brera in Mailand pflegte Saccheri seine Herbstferien zuzubringen, auch nachdem er von Mailand nach Turin, von Turin nach Pavia geschickt worden war, in der Brera starb er. In Pavia war er ausser in dem Jesuitencollegium auch an der Universität thätig und hielt dort Vorlesungen über Arithmetik, Algebra, Geometrie u. s. w. Bereits 1701 (nach Anderen sogar schon 1692) gab Saccheri in Turin eine *Logica demonstrativa* heraus. An mathematischen Schriften sind drei bekannt. *Quaesita geometrica* von 1693 und 1694 und *Neostatica* von 1708 sind unter dem deutlichen Einfluss von Giovanni Ceva verfasst, dessen Methoden Anwendung finden. Durchaus selbständig ist dagegen das Hauptwerk von 1733, welchem Saccheri seine allerdings erst anderthalb Jahrhundert später durchgedrungene Berühmtheit verdankt, der *Euclides ab omni naevo vindicatus*, gedruckt während der langandauernden letzten Krankheit seines Verfassers. Es ist zweifelhaft, ob er noch ein fertig gestelltes Exemplar zu Gesicht bekommen hat.

Henry Savile (Bd. II, S. 664), wenn wir von älteren Schriftstellern absehen wollen, hatte 1621 von zwei hässlichen Flecken am schönen Körper der Geometrie gesprochen. Er meinte damit die Lehre von den Parallellinien und die von den Proportionen. In letzterer war durch falsche Uebersetzung der fünften Definition des V. Buches von Euklids Elementen Verkehrtes geschaffen, welches schon Campanus (Bd. II, S. 105) aufgefallen war, und welches beseitigt werden konnte und musste, sobald der richtige Text hergestellt war[1]). Saccheri hat das 2. Buch seines Buches von 1733 der Proportionslehre in diesem Sinne gewidmet. Die Lehre von den Parallellinien zu bereinigen, bedurfte es mehr als einer sprachlichen Verbesserung, und wir haben an verschiedenen Stellen darauf aufmerksam gemacht, dass in den verschiedensten Zeiträumen Versuche einer Sicherstellung auch dieser Lehre unternommen worden waren. So sahen wir (Bd. II, S. 556), dass Clavius die Parallelentheorie auf folgende beide Sätze zu stützen suchte: 1) Eine Linie, deren einzelne Punkte gleichweit von einer, derselben Ebene mit ihr

[1]) Ausführlich ist der Gegenstand behandelt bei Joh. Wilh. Camerer, *Euclidis Elementorum libri sex priores graece et latine* (Berlin 1824—25) II, 320 bis 366.

angehörenden Geraden abstehen', ist gerade. 2) Wenn eine Gerade von unveränderlicher Länge längs einer zweiten Geraden so hingeschoben wird, dass beide fortwährend einen rechten Winkel mit einander bilden, so beschreibt der freie Endpunkt der verschobenen Strecke eine Gerade. Wir erwähnten (Bd. II, S. 661), dass Borelli den zweiten Satz des Clavius als Grundlage der Parallelenlehre wählte. Wir haben in diesem Bande (S. 14 und 27) die Versuche von Giordani, von Malézieu, von Wallis besprochen.

Das Buch von Malézieu kann Saccheri, zu welchem wir zurückkehren, kaum gekannt haben, anders aber mag es sich mit dem Euclide restituto des Giordano verhalten. Es war italienisch geschrieben, was seiner Verbreitung nur förderlich sein konnte, und die Anstellung des Verfassers an der Sapienza musste ihn dem Jesuiten ohnehin empfehlen. Sichergestellt ist indessen die Bekanntschaft Saccheris mit dem Euclide restituto nicht, während er in den Anmerkungen zum 21. Lehrsatze des I. Buches des *Euclides ab omni naevo vindicatus* ausdrücklich auf Clavius, Borelli, Wallis als seine Vorgänger, mit deren Ansichten er sich auseinandersetzt, hinweist.

Wir beabsichtigen keineswegs Saccheris Untersuchungen vollständig zu erörtern, aber das wesentlich Unterscheidende zwischen ihm und seinen Vorgängern müssen wir hervortreten lassen und schicken eine Bemerkung voraus. In Euklids Elementen kommen Parallellinien erstmalig im 27. Satze des I. Buches in Anwendung. Alles, was vor diesem Satze liegt, war niemals angezweifelt worden und durfte von Saccheri unbedenklich benutzt werden. Dazu gehört auch der Satz I, 16, dass der Aussenwinkel eines Dreiecks grösser sei als jeder der beiden inneren gegenüberliegenden Winkel, und wenn in unseren Tagen dieser Satz bemängelt worden ist[1]), weil sein Beweis stillschweigend voraussetze, dass jede Gerade von unendlicher Verlängerbarkeit sei, so war für Saccheri dieser Einwurf noch nicht vorhanden, und man wird nicht zu hart mit ihm ins Gericht gehen dürfen, dass seine Kritik sich nicht auch darauf bezog.

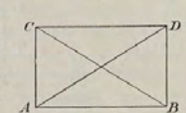

Fig. 81.

Sei (Fig. 81) AB, so beginnt Saccheri seine Untersuchung[2]), eine Gerade, auf welcher zwei gleiche Strecken AC, BD unter gleichen Winkeln A, B aufstehen; verbindet man C mit D geradlinig, so müssen auch die Winkel C, D einander gleich sein. Die Diagonalen AD, BC werden gezogen, dann sind die Drei-

[1]) Stäckel und Engel l. c. S. 11 Note *, S. 52 Note ** und häufiger.
[2]) Ebenda S. 50.

ecke CAB, DBA wegen gleicher von gleichen Schenkeln gebildeter Winkel A und B congruent und $CB = DA$. Da überdies $DB = CA$, $CD = DC$, so müssen auch die Dreiecke BDC, ACD congruent und $\angle D = C$ sein. Wird sodann (Fig. 82) in einem derartigen Viereck $ABDC$, welches $AC = BD$, $\angle A = B$, $\angle C = D$ enthält, die Verbindungsgerade MH der Mitten der beiden Seiten AB, CD gezogen, so sind die vier von MH mit AB und CD gebildeten Winkel sämmtlich rechte Winkel[1]). Zieht man nämlich AH, BH, CM, DM, so ist ebensowohl $\triangle ACM \cong BDM$ als $\triangle ACH \cong BDH$ wegen gleicher von gleichen Schenkeln gebildeter Winkel. Dann folgt aber $CM = DM$ und $AH = BH$. Weiter ist jetzt wegen stückweiser Gleichheit der drei Seiten $\triangle CHM \cong DHM$ und $\triangle AHM \cong BHM$, folglich $\angle CHM = DHM$ und $\angle AMH = BMH$; einander gleiche Nebenwinkel heissen rechte Winkel, mithin ist die Behauptung bewiesen. Sind die im ersten Satze als gleich angenommenen Winkel A und B überdies rechte Winkel, so unterscheidet Saccheri im 3. Satze die von vornherein vorhandenen drei Möglichkeiten für die als gleich bewiesenen Winkel C und D. Sie können beide rechte oder stumpfe oder spitze Winkel sein, und diese drei Annahmen heissen nun bald[2]) die **Hypothese des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels.** Der 3. Satz[3]) selbst behauptet, die Verbindungsgerade CD der Endpunkte von AC und BD sei unter den drei nach einander genannten Annahmen gleich AB oder kleiner oder grösser. Wäre (Fig. 83) im ersten Falle DC nicht $= BA$, also eine der beiden Strecken grösser als die andere, so schneide man von der grösseren, welche etwa DC sein möge, $DK = BA$ ab, wo K von D aus gesehen diesseits C liegen muss. Jedenfalls ist nach der Annahme $\angle B = D$ als rechte Winkel und $BA = DK$, also nach dem ersten Satze $\angle BAK = DKA$. Das ist aber unmöglich, denn nach der Annahme ist $\angle BAC = DCA$ ein rechter Winkel und nach dem Satze vom Aussenwinkel des Dreiecks $\angle DKA > DCA$, während gleichzeitig $\angle BAK < BAC$. In der Hypothese des stumpfen Winkels halbirt man AB in M, CD in H und zieht die MH, welche nach dem 2. Satze auf BA wie auf DC

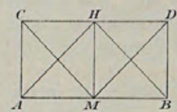

Fig. 82.

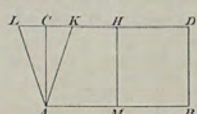

Fig. 82.

[1]) Stäckel und Engel l. c. S. 50—51. [2]) Ebenda S. 54. [3]) Ebenda S. 51—53.

senkrecht steht. Man kann statt dessen auch sagen MA und HC stehen auf MH senkrecht, bilden aber mit der AC bei A einen rechten, bei C einen stumpfen Winkel, dann kann nicht $CH = AM$ sein, weil sonst die Winkel bei C und A einander gleich sein müssten. Ebensowenig kann $CH > AM$ sein. In diesem Falle wäre es ausführbar HK (mit K zwischen H und C) $= MA$ abzuschneiden, und man hätte $\angle HKA = MAK$, während $\angle MAK < MAC$, $\angle MAC < ACK$, $\angle ACK < HKA$ dieser Voraussetzung widerspricht. So bleibt nur $CH < AM$ übrig, und die gleiche Beziehung gilt für die doppelten Strecken, d. h. $CD < AB$. Nun ist noch die Hypothese des spitzen Winkels zu erledigen. Man zieht wieder HM durch die Mitten von CD und AB und senkrecht zu beiden. Wie in der Hypothese des stumpfen Winkels kann wegen der Ungleichheit der Winkel bei C und A keine Gleichheit der Strecken HC und MA stattfinden. Wäre $HC < MA$, so müsste es einen Punkt L jenseits C geben, so dass $HL = MA$. Dann wäre aber $\angle HLA = MAL$, während nach den Voraussetzungen $\angle HLA < HCA < MAC < MAL$ sein muss. Also bleibt nur $HC > MA$ und $2HC > 2MA$ oder $DC > BA$. Nachdem aus den drei Hypothesen Folgerungen gezogen worden waren, welche zu weiteren Untersuchungen aufforderten, zeigte Saccheri[1]), dass ein Nebeneinanderbestehen der drei Hypothesen ausgeschlossen ist. Findet die Hypothese des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels nur in einem einzigen Falle statt, so ist sie die in allen Fällen allein zutreffende.

Einer späteren Zeit war es überlassen, von diesem Punkte aus eine Gabelung der Geometrie eintreten zu lassen und neben der **euklidischen Geometrie**, welche die Hypothese des rechten Winkels verwirklicht, eine **nichteuklidische Geometrie** durchzuführen, welche jene Hypothese leugnet. Saccheri glaubte fest an die ausschliessliche Möglichkeit der euklidischen Geometrie, und sein Bestreben konnte mithin nur dahin gerichtet sein, weil ein directer Beweis der Hypothese des rechten Winkels für ihn nicht auffindbar war, diesen Beweis indirect zu führen, d. h. zu zeigen, dass die beiden anderen Hypothesen, die des stumpfen wie die des spitzen Winkels, zu Widersprüchen führen.

Für die Hypothese des stumpfen Winkels gelingt dieses verhältnissmässig leicht. Im 13. Lehrsatze[2]) beweist Saccheri, dass zwei Gerade, welche von einer Transversalen so geschnitten werden, dass sie mit ihr auf derselben Seite innere Winkel bilden, welche zusammen kleiner als zwei Rechte sind, in einem in endlicher Ent-

[1]) Stäckel und Engel l. c. S. 54—58. [2]) Ebenda S. 63—64.

fernung befindlichen Punkte auf der Seite jener Winkel zusammentreffen, wenn nur eine der beiden Hypothesen des rechten oder des stumpfen Winkels stattfindet. Nun weist aber Euclid nach, dass jenes Zusammentreffen, als Axiom betrachtet, die Hypothese des rechten Winkels zur Folge hat, also ist allen Geometern klar, dass allein die Hypothese des rechten Winkels richtig ist, und dass für die Hypothese des stumpfen Winkels kein Platz übrig bleibt[1]. Wenn nur wenig später der 15. Lehrsatz[2] nachweist, dass die drei Hypothesen des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels nur eine andere Ausspruchsweise dafür bieten, ob in irgend einem Dreiecke die Winkelsumme gleich zwei Rechten, oder grösser, oder kleiner ist, wenn im 16. Lehrsatze[3] noch eine andere Umformung erscheint, indem von der Winkelsumme des Vierecks ausgesagt ist, sie sei gleich vier Rechten, oder grösser, oder kleiner, so fällt die mittlere Möglichkeit hier schon weg, und nur die beiden äusseren Fälle sind näher zu betrachten.

Wir würden allzuweitläufig werden müssen, wenn wir sämmtliche Folgerungen hier mittheilen wollten, welche Saccheri zieht, bis er zu seinem 33. Lehrsatze[4] gelangt, der klipp und klar behauptet, dass die Hypothese des spitzen Winkels durch und durch falsch sei, weil sie der Natur der geraden Linie widerspreche. Freilich ist Saccheri mit der blossen Aeusserung des Satzes nicht zufrieden, und auf die im Vorhergegangenen bewiesenen Thatsachen allein kann er den Beweis auch nicht stützen. Er bedarf dazu noch einer ganzen Anzahl von Hilfssätzen[5], und nachdem ihm der Beweis seiner Meinung nach geglückt ist, lässt er noch einen zweiten Theil des ersten Buches folgen[6], in welchem er der Hypothese des spitzen Winkels abermals mit neuen Gründen zu Leibe geht. Ich will — sagt er mit einer Art von Selbstentschuldigung, die einer Selbstanklage täuschend ähnlich sieht — Nichts unversucht lassen, um die widerspenstige Hypothese des spitzen Winkels, die ich schon mit der Wurzel ausgerissen habe, als sich selbst widersprechend nachzuweisen.

Die zweite Betrachtungsreihe beschäftigt sich der Hauptsache nach mit dem geometrischen Orte der Endpunkte gleichlanger Senkrechten auf eine gegebene Gerade, welcher unter der Hypothese des spitzen Winkels eine Curve sein müsste, deren Hohlseite der gegebenen Geraden gegenüberläge, und zu deren Unmöglichkeit Saccheri gelangt. Er nennt bei dieser Gelegenheit die häufig benutzte Er-

---

[1]) Stäckel und Engel l. c. S. 67. [2]) Ebenda S. 67—69. [3]) Ebenda S. 69—70. [4]) Ebenda S. 109. [5]) Ebenda S. 109—122. [6]) Ebenda S. 123—135.

klärung der Parallelen als überall gleichweit von einander abstehender Geraden einen groben Verstoss gegen die strenge Logik, denn was heisst zwei gleichweit entfernte gerade Linien als gegeben annehmen anders, als entweder verlangen, dass jede Linie, die in derselben Ebene von einer angenommenen Geraden gleichweit entfernt ist, wieder eine gerade Linie sei, oder wenigstens annehmen, dass eine gewisse gleichweit entfernte Linie eine gerade Linie sein kann, so dass man also eine solche entweder auf Grund einer Hypothese oder auf Grund einer Forderung in der betreffenden Entfernung von der anderen annehmen darf[1].

So die hervorragende Schrift von 1733, welche allzusehr von den bis dahin üblichen Untersuchungsweisen abwich, als dass sie sofort auf Anerkennung hätte stossen können. Sie mag wohl von einem oder dem anderen Gelehrten gelesen worden sein, aber eine Nachwirkung ist Jahrzehnte lang nicht nachzuweisen.

104. Kapitel.

Elementargeometrische Einzeluntersuchungen.

Eine geometrische Schrift von grossem Werthe, welche 1746 in Edinburgh erschien, führt den Titel *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*. Ihr Verfasser Matthew Stewart[2] (1717—1785), seinem Fache nach Theologe, beschäftigte sich an den Universitäten zu Glasgow und Edinburgh, wo er studirte, auch mit Mathematik. An der ersten Anstalt hatte er Robert Simson, an der zweiten Colin Maclaurin zum Lehrer. Auch nach Vollendung seiner Studien blieb er als Geistlicher zu Roseneath im westlichen Schottland seinen geometrischen Bestrebungen getreu, wie das von uns genannte Werk bezeugt. Es kam in Maclaurins Todesjahr heraus und lenkte die Aufmerksamkeit alsbald auf Stewart, so dass er zu Maclaurins Nachfolger in der Edinburgher mathematischen Professur ernannt wurde, in welcher Stellung er verblieb, bis er sich 1775 nach Ayrshire zurückzog. Die *General Theorems* füllen 163 Seiten und werden durch 24 auf einer Tafel gedruckte Figuren verdeutlicht. Die 38 ersten Seiten enthalten Lehrsätze mit ihren Beweisen, dann folgen 120 Seiten unbewiesener Lehrsätze, endlich sind auf den 5 letzten Seiten Sätze über den Kreis abermals unbewiesen ausgesprochen. In einer kurzeu Vorrede ent-

---

[1]) Stäckel und Engel l. c. S. 134. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* 173 bis 186 (deutsch 170—182).; Poggendorff II, 1008—1009.

schuldigt Stewart diese Art der Veröffentlichung mit dem in seinen Verhältnissen unerschwinglichen Aufwand an Zeit und Arbeit, den es verursacht haben würde, wenn er überall den Sätzen ihre Beweise hätte beigeben wollen. Er hoffe, die Sätze, welche mit Ausnahme von höchstens zweien durchaus neu seien, würden auch so Beifall finden. Wer sie zu beweisen den Versuch mache, werde gewiss genügende Entschädigung für die anzuwendende Mühe in der Entdeckung neuer und merkwürdiger Eigenschaften finden, welche sonst der Aufmerksamkeit leicht entgangen sein möchten.

Die zwei von Stewart als nicht neu zugestandenen Sätze sind neuerdings[1]) als Bestandtheile der von Robert Simson ausgeführten Wiederherstellung der ebenen Oerter des Apollonius (S. 509) erkannt worden.

Unsere Leser erwarten vielleicht, dass wir bei dieser Gelegenheit auch eines anderen Satzes von Robert Simson gedenken, von welchem oft Anwendung gemacht wird. Werden (Fig. 84) von irgend einem Punkte M der Peripherie des einem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises die drei Senkrechten MA_1, MB_1, MC_1 auf die wenn nöthig verlängerten Seiten BC, CA, AB gefällt, so liegen die Fusspunkte A_1, B_1, C_1 dieser Senkrechten auf einer Geraden RS, welche den Namen der Simsonschen Geraden erhalten hat. Wir können allerdings nicht umhin, den Satz zu erwähnen, aber nur um den ihm beigelegten Namen als unrichtig zurückzuweisen. Simson hat nirgend von der betreffenden Geraden gesprochen. Sie kommt zuerst in einem Aufsatze von William Wallace (1768—1843) vor und mag den Jahren 1799 oder 1800 angehören[2]). Die Entstehung des falschen Namens war aber folgende. F. J. Servois erwähnte den Satz und fügte bei[3]), er glaube, derselbe rühre von Simson her. Poncelet bemerkte dann[4]), Servois habe den Ursprung des Satzes auf Simson zurückgeführt, und nun schrieb ein Geometer den anderen ruhig ab, bis Herr Mackay der Legende ein Ende bereitete.

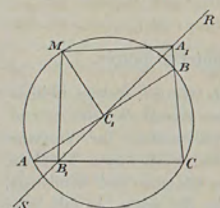

Fig. 84.

Der wirklich auf Simson zurückführende Satz ist dieser. Im

[1]) John S. Mackay, *Matthew Stewarts Theorems* in den *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* Vol. X (1891—1892). [2]) John S. Mackay, *The Wallace line and Wallace point* in den *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* Vol. IX (1890—1891). [3]) Gergonne, *Annales de Mathématiques* IV, 250. [4]) Poncelet, *Propriétés projectives* § 468 (1822).

II. Buche der Ebenen Oerter behauptete Simson pag. 156 als X. Lemma, dass (Fig. 85) in jedem Dreiecke ABC bei Annahme eines beliebigen Punktes D der Grundlinie BC die Gleichung stattfinde:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = BD^2 \cdot CD + CD^2 \cdot BD + AD^2 \cdot BC.$$

Er setzte hinzu, dass im besonderen Falle $BD = DC$ der Satz schon von Pappus in dessen VII. Buch als Satz 122 bemerkt worden sei. In der That geht, wenn $BD = CD = \frac{BC}{2}$, Simsons Gleichung durch leichte Umwandlung in $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$ über, und so lautet der angeführte Satz des Pappus[1]). In dem Anhange zu den Ebenen Oertern pag. 221 kam Simson auf seinen Satz zurück, indem er ihm auch für den Fall bewies, dass A nach A' falle, d. h. dass es sich um Beziehungen zwischen den Entfernungen von vier derselben Geraden angehörenden Punkten von einander handelte. Hier sagt dann Simson weiter, er habe diesen besonderen Fall früher als das X. Lemma entdeckt und habe seine Schüler James Moor und Matthew Stewart veranlasst Beweise dazu zu suchen, was diessen auch gelungen sei; Stewart habe überdies einen anderen Beweis des X. Lemmas in den zwei ersten Sätzen seiner *General Theorems* veröffentlicht. So Simson in seinen Ebenen Oertern von 1748, deren Herausgabe aber bereits 1741 beschlossen gewesen zu sein scheint. An der Richtigkeit von Simsons Angabe ist nicht zu zweifeln, da sie mit dem Eingeständnisse Stewarts in dessen Vorrede von 1746, etwa zwei seiner Sätze seien nicht neu, sich deckt, und da sie überdies niemals von Stewart in Abrede gestellt worden ist, wiewohl dieser auch noch 1763 ein weiteres rein geometrisches Werk herausgab, von dem ausführlicher zu reden die gesteckte Zeitgrenze uns freilich nicht gestattet.

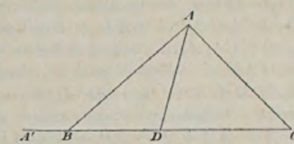

Fig. 85.

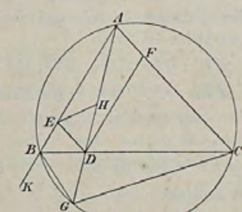

Fig. 86.

Sehen wir nun zu, wie Stewart in den ersten Sätzen seiner *General Theorems* das Simsonsche Lemma beweist. Sei (Fig. 86) um

[1]) Pappus (ed. Hultsch) III, 856.

das Dreieck ABC ein Kreis beschrieben und durch irgend einen Punkt D der Seite BC die AD gezogen und bis zum Durchschnitte G mit dem Kreise verlängert. Sei G mit B und C verbunden, $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$ gezogen, AB nach K verlängert, endlich von E aus die EH so gezogen, dass $\angle AEH = AGB$, beziehungsweise $\angle AHE = ABG$. Alsdann ist $\triangle AEH \sim AGB$ und folglich $BA \cdot AE = GA \cdot AH$ eine Gleichung, welche Stewart in die Worte kleidet, die Rechtecke BAE, GAH seien einander gleich[1]). Ferner ist $2R = EHD + EHA = EHD + ABG$ sowie $2R = GCA + ABG$, also $\angle EHD = GCA$. Da überdies $\angle EDH = GAC$ als Wechselwinkel an den Parallelen DE, AC, so ist $\triangle EDH \sim GAC$ und $AC \cdot DE (= AC \cdot AF) = AG \cdot DH$. Die beiden Productengleichungen addirt geben $BA \cdot AE + AC \cdot AF = AG \cdot AH + AG \cdot DH = AG \cdot AD = AD^2 + AD \cdot DG = AD^2 + BD \cdot DC$. In dem Wortlaute

$$BA \cdot AE + CA \cdot AF = AD^2 + BD \cdot DC$$

des 1. Lehrsatzes kommen also nur noch der beliebige Punkt D der Grundlinie des beliebigen Dreiecks ABC und die Punkte E, F der Seiten AB, AC vor, in welche $DE \parallel AC$ und $DF \parallel AB$ eintreffen. Im 2. Satze sind die drei beliebig in gerader Linie liegenden Punkte A, B, C mit dem ausserhalb der Geraden liegenden Punkte D (Fig. 87) verbunden. Die Geraden $AE \parallel CD$ bis zum Durchschnitte mit der verlängerten BD und $DF \parallel AB$ vollenden die Figur. Leicht ersichtlich ist

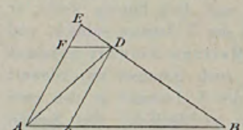

Fig. 87.

$$BD^2 : BD \cdot DE = BD : DE = BC : CA,$$

$$AF^2 (= CD^2) : EA \cdot AF = AF : EA = BD : BE = BC : BA.$$

Aus Satz 1 folgt aber $AD^2 + BD \cdot DE = BA \cdot AC + EA \cdot AF$. Setzt man aus den beiden erhaltenen Proportionen $BD \cdot DE = BD^2 \cdot \frac{AC}{BC}$ und $EA \cdot AF = CD^2 \cdot \frac{AB}{BC}$, multiplicirt dann mit BC, so entsteht

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB.$$

Um die Vergleichung mit Simsons Ergebniss vornehmen zu können, ist zu erwägen, dass Stewarts Punkte A, B, C, D bei Simson B, C, D, A heissen. Stewarts Gleichung übersetzt sich daher in $BA^2 \cdot CD$

[1]) Stewart, *General theorems* pag. 1—2: *Therefore the rectangle BAE is equal to the rectangle GAH.*

$+ CA^2 \cdot BD = BC \cdot BD \cdot CD + DA^2 \cdot BC$, und da im ersten Gliede rechts vom Gleichheitszeichen $BC = BD + CD$ benutzt werden kann, so geht $BC \cdot BD \cdot CD$ in $BD^2 \cdot CD + CD^2 \cdot BD$ über, wie Simson geschrieben hatte.

Endlich wendet sich Stewart zu dem Falle, dass A, B, C, D derselben Geraden angehören (Fig. 88). Er errichtet in C, D, B senkrecht zu AB die CE, DG, BF, macht $CE = CA$ und zieht die Gerade $AEGF$, so dass auch $DG = DA$, $BF = BA$ wird. So ist CG, BE und durch letztere CH bestimmt. Im Folgenden möge nun ADG den Flächeninhalt des Dreiecks ADG bezeichnen, und ähnliche Bedeutung haben alle Vereinigungen von drei Buchstaben, bei welchen nie an einen Winkel zu denken ist. Offenbar ist

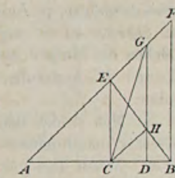

Fig. 88.

1. $AD^2 = 2ADG$.

Ferner ist $BD^2 : BD \cdot DH = BD : DH = BC : CE = BC : AC$ und $BD \cdot DH = 2BDH$, also

2. $\frac{AC}{BC} \cdot BD^2 = 2BDH$.

Weiter ist $ABE = \frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ und

3. $AB \cdot AC = 2ABE$.

Endlich ist $EG : EF = CD : CB$, aber auch $EG : EF = GH : FB = GH : AB$, also $CD : CB = GH : AB$, beziehungsweise $CD : GH = CB : AB = CD^2 : CD \cdot GH = CD^2 : 2CGH = CD^2 : 2EGH$, woraus

4. $\frac{AB}{BC} \cdot CD^2 = 2EGH$.

Addition von 1. und 2. einerseits, von 3. und 4. andererseits liefert:

5. $AD^2 + \frac{AC}{BC} \cdot BD^2 = 2(ADG + BDH) = 2AGHB$,

6. $AB \cdot AC + \frac{AB}{BC} \cdot CD^2 = 2(ABE + EGH) = 2AGHB$.

Die linken Seiten der Gleichungen 5., 6. müssen wie ihre rechten Seiten identisch sein, und vervielfacht man sie mit BC, so erscheint genau dieselbe Beziehung

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB,$$

welche stattfand, als D ausserhalb der Geraden ACB lag.

Eine gleich ausführliche Berichterstattung auch nur über die von Stewart mit Beweisen versehenen Sätze würde unverhältnissmässiges Verweilen bei dem Buche bedingen, welches, wenn auch von der Erfindungsgabe seines Verfassers zeugend, doch zunächst, wie nachher erörtert werden wird, einen nur sehr geringfügigen Einfluss auf die Entwicklung der Geometrie geübt hat. Wir müssen uns damit begnügen, in Anlehnung an denjenigen neueren Schriftsteller[1]), der Stewart so zu sagen entdeckt hat, vier Sätze anzuführen, in welchen die übrigen mehr oder weniger enthalten sind, den 40., 42., 44. und 49. beziehungsweise 53. Satz nach Stewarts Zählung. Sie lauten:

I. Man denke sich ein regelmässiges einem Kreise vom Halbmesser r umschriebenes m-eck, und es sei n irgend eine Zahl kleiner als m. Wenn man nun von irgend einem Punkte, der innerhalb des Vielecks liegt, wenn n ungerade ist, und beliebig angenommen werden darf, wenn n gerade ist, Senkrechte auf die m-ecks-Seiten fällt, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen dieser Senkrechten $= m(r^n + Av^2r^{n-2} + Bv^4r^{n-4} + Cv^6v^{n-6} + \cdots)$, wo v die Entfernung des gewählten Punktes vom Mittelpunkte des Kreises bedeutet und A den 2^{ten} Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz multiplicirt mit $\frac{1}{2}$, B den 4^{ten} multiplicirt mit $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$, C den 6^{ten} multiplicirt mit $\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$ u. s. w., so dass[2])

$$A = \frac{n(n-1)}{2^2},\quad B = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 4^2},\quad C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}$$

u. s. w.

II. Ist ein regelmässiges dem Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenes m-eck gegeben, ist $n < m$, v die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Kreismittelpunkte, und bedeuten $a, b, c \cdots$ den 1., 2., 3. $\cdots$ Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz, so wird die Summe der $2n^{\text{ten}}$ Potenzen der Entfernungen des gewählten Punktes von den Eckpunkten des m-ecks[3]) $= m(r^{2n} + a^2v^2r^{2n-2} + b^2v^4r^{2n-4} + c^2v^6r^{2n-6} + \cdots)$.

III. Wenn m beliebige Punkte gegeben sind und ebensoviele Zahlengrössen $a, b, c \cdots$ und hat man $n < m$, so kann man $n+1$ andere Punkte finden, so dass die Summe der $2n^{\text{ten}}$ Potenzen der Entfernungen eines beliebigen Punktes von den m gegebenen Punkten jeweils mit $\frac{a}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \cdots$ vervielfacht zu der Summe der $2n^{\text{ten}}$ Potenzen der Entfernungen der $n+1$ gefundenen Punkte von ebendemselben beliebigen Punkte in dem Verhältnisse von $(a+b+c+\cdots)$ zu $(n+1)a$ stehe[4]).

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 177—178 (deutsch 173—175). [2]) Stewart, *General theorems* pag. 105—106. [3]) Ebenda pag. 110—111. [4]) Ebenda pag. 115.

IV. Wenn m beliebige Gerade gegeben sind und ebensoviele Zahlengrössen $a, b, c \cdots$ und man hat $n < m$, so kann man $n+1$ andere Gerade finden, so dass die Summe der n^{ten} Potenzen der Entfernungen eines beliebigen Punktes von den m gegebenen Geraden jeweils mit $\frac{a}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \cdots$ vervielfacht zu der Summe der n^{ten} Potenzen der Entfernungen ebendesselben Punktes von den $n+1$ gefundenen Geraden in dem Verhältnisse von $(a+b+c+\cdots)$ zu $(n+1)a$ stehe[1]).

Man begreift, dass diese ohne Beweis ausgesprochenen Sätze, als sie in unserem Jahrhunderte die Aufmerksamkeit eines Geometers auf sich zogen, welcher dem kurz zuvor neu eingeführten Begriffe geometrischer Dualität einen Theil seiner Erfolge verdankte, und als er in ihnen denselben Gedanken wiedererkannte, dass es kaum eine Eigenschaft von Punkten gebe, der man nicht eine solche von Geraden an die Seite stellen könnte, einen aussergewöhnlichen, fast verblüffenden Eindruck machen mussten. Man begreift aber auch, und das ist oben von uns angedeutet worden, dass das 18. Jahrhundert jenen mit keinem Worte hervorgehobenen Dualitätsgedanken nicht sofort zu würdigen oder nur zu erkennen verstand.

Nur die bewiesenen Anfangssätze Stewarts gewannen Beachtung, und wie Robert Simson den einen derselben ausgesprochen hatte, so dass man ihm statt des Namens des Stewartschen Satzes richtiger dem des Simson-Stewartschen Satzes beilegen sollte, so hat noch ein zweiter Engländer zu eben diesem Satze $A{\cdot}D^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB$ (S. 545) einen neuen Beweis gesucht und gefunden. Thomas Simpson (S. 532) war dieser Geometer, und er hat seinen Beweis in seinen *Select exercises in mathematics* mitgetheilt[2]).

Die von uns (S. 526) angekündigte Reihenfolge führt uns zu einzelnen Abhandlungen, unter welchen wir abermals zu trennen beabsichtigen, so dass wir zuerst die eigentlich geometrischen Aufsätze, dann wenige trigonometrische nennen.

Zuerst nennen wir eine französische Abhandlung. Charles François de Cisterney Dufay[3]) (1698—1739), gewöhnlich kurzweg Dufay genannt, verliess die Armee, welcher er mit dem Grade eines Hauptmanns angehörte, um als Chemiker in die Akademie der Wissenschaften einzutreten. Später war er auch Intendant des bota-

[1]) Stewart, *General theorems* pag. 128—129 und pag. 139—140.
[2]) Chasles, *Aperçu hist.* 175 (deutsch 172) [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1739 (*Histoire* pag. 73—83). — Heller, Geschichte der Physik II, 472.

nischen Gartens in Paris. Die Geschichte der Elektricitätslehre rühmt Dufay als denjenigen, der zuerst zwischen Glaselektricität und Harzelektricität unterschied, und dieser sowie ähnlicher hervorragender Leistungen wegen hat man auch einer vereinzelten geometrischen Abhandlung Dufays Beachtung geschenkt, welche sich mit regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecken beschäftigte und neue Eigenschaften derselben enthüllte, die ganz hübsch, wenn auch von geringer Tragweite sind. Der erste Satz sagt aus, dass wenn (Fig. 89) zu einem und demselben Kreise ein regelmässiges Sehnenvieleck und ein ebensolches Tangentenvieleck von der gleichen Seitenzahl construirt werden, der Flächenunterschied beider Vielecke einem dritten regelmässigen Vielecke von abermals gleicher Seitenzahl gleich ist, dessen umschriebener (beziehungsweise eingeschriebener) Kreis die Seite des zuerst gegebenen Tangentenvielecks (Sehnenvielecks) zum Durchmesser hat. Man braucht die Figur nur etwas genauer anzusehen, um sich von der Wahrheit des Satzes zu überzeugen. Der

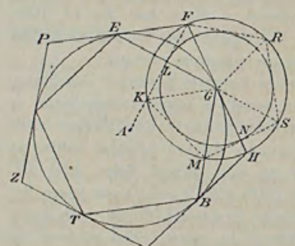

Fig. 89.

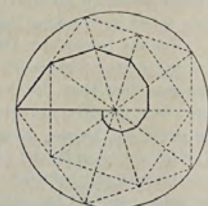

Fig. 90.

zweite nicht ganz so auf den ersten Anblick einleuchtende, aber auch nicht grade schwer zu beweisende Satz lässt (Fig. 90) aus einem regelmässigen Sehnenvieleck von n Seiten ein spiralförmiges Vieleck[2]) von $2n+1$ Seiten dadurch entstehen, dass alle Ecken und Seitenmitten des Sehnenvielecks mit dem Mittelpunkte gradlinig verbunden werden, dass man von einer Seitenmitte eine Senkrechte auf die nächste nach dem Mittelpunkte führende Hilfslinie fällt und stets von dem so gewonnenen Durchschnittspunkte aus das gleiche Verfahren fortsetzt. Dufay drückt alsdann den Inhalt des spiralförmigen Vielecks durch eine allgemeine Formel aus.

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1727 pag. 297—340.
[2]) *polygone spiral.*

Philipp Naudé[1]) (1684—1747) ist gleich seinem Vater Philipp Naudé dem Aelteren (1654—1729) in Metz geboren. Als im October 1685 die protestantische Kirche in Metz geschlossen wurde, wanderte die Familie aus. Sie zog erst nach Saarbrücken, dann nach Hanau, zuletzt nach Berlin. Vater und Sohn waren nach einander Lehrer der Mathematik am Joachimsthaler Gymnasium in Berlin, Vater und Sohn gehörten der Berliner Akademie an. Der Sohn veröffentlichte in den Denkschriften dieser Akademie von 1737 und von 1743 zwei unter einander zusammenhängende Abhandlungen über *Trigonoscopie*[2]). Er verstand darunter die Herstellung eines Dreiecks auf geometrischem Wege aus drei Bestimmungsstücken, wenn zu solchen Anderes gewählt wurde als Seiten und Winkel des Dreiecks. Wir führen als Muster einen der einfachsten Sätze an. Seien (Fig. 91) in dem Dreiecke DEF die Höhen DC, EB, FA gezogen und A, B, C gradlinig mit einander verbunden. Wegen der bei A, B, C gebildeten rechten Winkel liegen A und C auf dem Halbkreise über dem Durchmesser DF, A und B auf dem Halbkreise über dem Durchmesser EF. Mithin sind $ACFD$ und $ABFE$ Sehnenvierecke, d. h. $\angle DFC + DAC = 180^0$ und $BFE + BAE = 180^0$, beziehungsweise $\angle DAC = BAE$ und auch $\angle DAB = EAC$. Da ferner $\angle DAF = EAF$, so ist $\angle BAF = CAF$, d. h. AF halbirt den Winkel BAC. Genau ebenso folgt, dass $BE(CD)$ Winkelhalbirende von $\angle ABC(ACB)$ sind. Sind also die Fusspunkte A, B, C der drei Höhen eines zu zeichnenden Dreiecks gegeben, so zeichnet man zunächst das Dreieck ABC und in demselben die drei Winkelhalbirenden AO, BO, CO. Senkrecht zu diesen in A, B, C erhält man die Seiten des gesuchten Dreiecks.

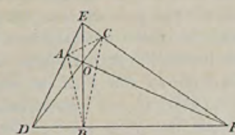

Fig. 91.

Der nächste Schriftsteller, von welchem wir zu reden haben, ist ein Mathematiker allerersten Ranges. Schon ab und zu (z. B. S. 360, 371) hatten wir seinen Namen zu nennen; im ganzen gegenwärtigen Abschnitte wird er die hervorragendste Rolle spielen, und das veranlasst uns, etwas ausführlicher bei seinen persönlichen Verhältnissen zu verweilen. Leonhard Euler[3]) (1707—1783) war der Sohn eines Geistlichen, Paul Euler, der selbst solche Neigung zu den mathe-

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746 pag. 465—468.
[2]) *Miscellanea Berolinensia* V, 10—32 und VII, 243—270. [3]) Allgemeine deutsche Biographie VI, 422—430.

matischen Wissenschaften besass, dass er dem Unterrichte des grossen Jakob Bernoulli zu folgen vermochte. Von dem Vater vorgebildet bezog Leonhard Euler in so jungen Jahren die Universität, dass er im Stande war, schon 1723 die Magisterwürde zu erwerben. Sein Lehrer war Johann Bernoulli, seine Studiengenossen waren dessen beiden Söhne Niclaus II. und Daniel, von denen jener 12, dieser 7 Jahre älter als Euler war, ein Altersunterschied, der Eulers Frühreife, mit solchen Gefährten annähernd gleichen Schritt halten zu können, in das glänzendste Licht setzt. Die Petersburger Akademie entstand 1724 nach einem Entwurfe Peter des Grossen durch Kaiserin Katharina I. ins Leben gerufen. Niclaus II und Daniel Bernoulli gehörten zu den dorthin berufenen Gelehrten, und sie folgten dem Rufe 1725. In Petersburg trafen sie den schon etwas früher berufenen Jakob Hermann. Niclaus II Bernoulli unterlag bald den ungewohnten Witterungsverhältnissen. Nur um so mehr bemühten sich Daniel Bernoulli und Hermann, in Euler einen weiteren hervorragenden Basler heranzuziehen. Dessen Berufung als Adjunct für das mathematische Fach erfolgte. Aber Katharina I. starb an demselben Tage des 17. Mai 1727, an welchem Euler den russischen Boden betrat. Peter II. war wissenschaftlichen Bestrebungen ungünstig. Euler musste froh sein, als Schiffslieutenant in der russischen Flotte Verwendung zu finden, bis ein abermaliger Regierungswechsel 1730 Kaiserin Anna auf den Thron brachte. Jetzt wurde der Wissenschaft neue Sorgfalt zugewandt, und während Hermann, Bilfinger, Daniel Bernoulli der Reihe nach Petersburg verlassen hatten, wurde Euler als Mitglied der Akademie erhalten. Eine Reihe erfolgreicher Arbeitsjahre wurde 1740 durch den Tod Anna I. unterbrochen, denn nun begannen in Petersburg wieder Palastrevolutionen, welchen erst nach Jahresfrist im December 1741 die Thronbesteigung von Kaiserin Elisabeth ein Ende machte, und inzwischen war Euler der Aufenthalt verleidet, hatte er im Juni 1741 einen Ruf an die Berliner Akademie angenommen, deren Erneuerung und Erhebung zu immer grösserer Höhe ein Lieblingsgedanke Friedrich des Grossen war. Euler wurde 1744 Director der neugestalteten mathematischen Classe der Berliner Akademie und blieb dort bis über jene Zeit hinaus, mit welcher wir unseren Band abschliessen. Wir vollenden deshalb in aller Kürze Eulers Lebensgeschichte. Euler hatte Petersburg im Unmuthe verlassen, aber nie vergessen. Als Katharina II. im Juni 1762 den russischen Kaiserthron bestieg und eine neue Blüthezeit der Wissenschaften eintrat, regte sich wohl zuerst in Euler die Sehnsucht nach einer Rückkehr, und im October 1763 sprach er sich brieflich gegen Goldbach darüber aus. Die Unterhandlungen zogen sich in die

Länge, da König Friedrich II. der Entlassung Eulers immer neue Schwierigkeiten in den Weg legte. Endlich erfolgte Eulers Abreise von Berlin im Juni 1766. Kaum in Petersburg angekommen, hatte Euler im Herbste 1766 das Unglück zu erblinden. Um das rechte Auge war er schon 1735 bei seinem ersten Petersburger Aufenthalte in Folge von Ueberanstrengung gekommen. Jetzt verlor er auch das linke Auge. Trotzdem hörte die wissenschaftliche Thätigkeit Eulers erst mit seinem Tode auf. Ein unübertreffliches Gedächtniss und aufopfernde Schüler und Freunde, besonders Nicolaus Fuss (1755—1826) aus Basel, der 1773 eigens zu dem Zwecke, um Euler als Hilfsarbeiter zu dienen, nach Petersburg berufen worden war, ersetzten ihm das Augenlicht, soweit es einen Ersatz dafür geben konnte. Man wird kaum ein Gebiet der reinen und angewandten Mathematik nennen können, in welchem Euler nicht thätig war, und Thätigkeit hiess bei ihm bahnbrechender Erfolg. Seine Schriften bestehen aus 32 Quartbänden und 13 Octavbänden selbständiger Werke nebst mehr als 700 zum Theil sehr umfangreichen Abhandlungen, deren letzterschienenen erst 1862 in Petersburg zum Drucke gelangten[1]). Eine Gesammtausgabe in Quart alles dessen, was Euler geschrieben, würde mindestens 2000 Druckbogen stark werden, und dieser Umstand erklärt, ohne das Versäumniss zu entschuldigen, warum bisher die beiden Akademien von Petersburg und Berlin die Ehrenpflicht noch nicht erfüllten, eine solche Gesammtausgabe zu veranstalten, welche man von ihnen gemeinschaftlich, wenn nicht von einer derselben, zu verlangen berechtigt ist. Der Gesammtcharakter der Eulerschen Schreibweise, um auch diesen gleich hier zu schildern, besitzt als wesentliches Merkmal die Neigung, auch noch nicht vollständig geglückte Versuche der Oeffentlichkeit nicht vorzuenthalten. Redseligkeit wird der Eine sie schelten, während der Andere von der liebenswürdigen Offenheit entzückt sein wird, welche den Einblick in die geistige Werkstätte ohne jede Heimlichthuerei gestattete. Wir persönlich gehören zu diesen Letzteren, und wir lieben Euler wegen seiner neidlosen, fremdes Eingreifen herausfordernden Enthüllungen fast eben so sehr, als wir seine allseitige Erfindungsgabe oder seine unübertroffen klare Darstellungsweise bewundern.

Eulers erster elementargeometrischer Aufsatz erschien 1741 im Drucke[2]). Er führt den Titel *Solutio problematis ad geometriam situs*

[1]) Unter den verschiedenen Verzeichnissen von Eulers Schriften, welche veröffentlicht sind, ist das letzte und vollständigste: *Index operum Leonardi Euleri confectus a Joh. G. Hagen.* Berlin 1896. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 128—140.

pertinentis. Seit Leibniz den Gedanken einer Geometrie der Lage (S. 36) geäussert hatte, war seine Anregung unfruchtbar geblieben, und Euler war der erste, welcher eine Aufgabe dieser Art stellte und löste. Königsberg ist von dem Pregel in mehreren Armen durchflossen, und zwei solche Arme schliessen eine grössere Insel, den Kneiphof, ein, so dass mit Einschluss des Kneiphofs vier Stadttheile unterschieden werden können. Ueber den Pregel führten zu Eulers Zeiten sieben Brücken, welche den Verkehr zwischen jenen vier Stadttheilen vermittelten. Kann man die sieben Brücken nach einander überschreiten, ohne eine derselben wiederholt zu benutzen? Diese Frage war in Königsberg als Scherzfrage entstanden und hatte Anlass zu zahlreichen erfahrungsmässigen Lösungsversuchen gegeben. Euler erkannte die wissenschaftliche Bedeutung der Scherzfrage. Auf seine Beantwortung derselben können wir erst im 108. Kapitel eingehen, wenn wir von der Combinationslehre reden.

Ebendahin verweisen wir vorläufig unsere Leser für eine andere elementargeometrische Aufgabe, über welche Euler sich in einem an Goldbach gerichteten Briefe aus Berlin vom 4. September 1751 folgendermassen äusserte[1]): Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam. Dieselbe betrifft auf wie vielerlei Arten ein gegebenes polygonum durch Diagonallinien in triangula zerschnitten werden könne.

In England gab es ausser den P. T., als den Veröffentlichungen der Royal Society, noch Zeitschriften sehr gemischten Inhaltes, in welchen zwischen Reimfragen, Räthseln, Bilderräthseln auch Wissenschaftliches vorkam[2]). Da war *Ladies' Diary,* welches von 1704 bis 1840, *Gentleman's Diary,* welches von 1741—1840 erschien; da waren *Miscellanea Curiosa Mathematica* seit 1745, *Mathematician* 1745—1754, *Palladium* 1748—1779, *Mathematical Exercises* 1750 bis 1753 u. s. w. In ihnen mögen manche elementargeometrische Wahrheiten erstmalig ausgesprochen sein, welche dem Erfinder verloren gingen, weil es dem Organe, dessen er sich bediente, an Verbreitung fehlte. Weniges ist nachträglich wiedererkannt worden. In den *Miscellanea Curiosa Mathematica* erschien (vermuthlich im Jahre 1746) ein Aufsatz von William Chapple, *An essay on the properties of triangles inscribed in and circumscribed about two given circles*[3]), muthmasslich der erste Versuch die Eigenschaften eines

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 551—552. [2]) John S. Mackay, *Notice sur le journalisme mathématique en Angleterre* in den Berichten der *Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Besançon.* 1893. [3]) John S. Mackay, *Historical notes on a geometrical theorem and its developments* in den *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,* Vol. V (1886—1887).

Dreiecks zu entdecken, welches zugleich Sehnendreieck eines und Tangentendreieck eines anderen Kreises ist. Ist (Fig. 92) R der Halbmesser des dem $\triangle ABC$ umschriebenen, r der des ihm eingeschriebenen Kreises, sind a, b, c die Seiten der Dreiecks, und ist $\triangle$ dessen Inhalt, so ist $\triangle = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ und $\triangle = \frac{abc}{4R}$, folglich $2rR = \frac{2abc}{a+b+c}$. Chapple bewies ferner, dass, damit die beiden Mittelpunkte O_1 (des umschriebenen) und O_2 (des eingeschriebenen Kreises) zusammenfallen, nothwendig $R = 2r$ sein müsse. Bei excentrischen Kreisen muss $R > 2r$ sein. Die Entfernung $O_1 O_2$ fand Chapple $= \sqrt{R(R-2r)}$, was wieder mit der Bedingung $R = 2r$ für die Concentricität der beiden Kreise übereinstimmt. Der Satz wird zuverlässig nicht über die Grenzen Englands hinaus bekannt geworden sein, wenn er innerhalb jener Grenzen auch einige Beachtung fand, und so ward Euler unabhängiger Nacherfinder in einem Aufsatze[1]), den wir hier kaum nennen dürfen, weil er die Jahreszahl 1765 trägt.

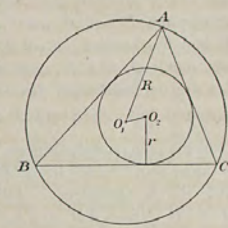

Fig. 92.

Schon vorher, am 23. Februar 1748, hatte Euler[2]) einen anderen elementargeometrischen Satz Goldbach mitgetheilt. Man vereinige (Fig. 93) in einem Vierecke $ABCD$ die Mitten M und N der beiden Diagonalen BD und AC geradlinig, so wird sein:

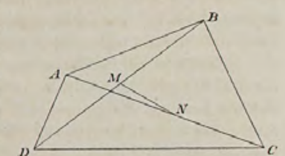

Fig. 93.

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Er bewies den Satz alsdann in einem mehrfach bemerkenswerthen Aufsatze: *Variae demonstrationes geometricae*[3]). Euler beginnt mit dem geometrisch geführten Beweise eines einst von Fermat ausgesprochenen Satzes. Analytisch könne derselbe ohne jede Schwierigkeit als wahr erkannt werden, aber er habe gerade den analytischen Beischmack vermeiden wollen. Der Satz selbst ist folgender. Sei

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1765. T. XI, 103—123. Vergl. dazu *Proceedings Edinb. Mag.* Vol. IV. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 446. [3]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae an annum* 1747 *et* 1748. T. I, 49—66.

(Fig. 94) über AB als Durchmesser ein Halbkreis und nach der anderen Seite über demselben AB ein Rechteck $ABFE$ gezeichnet, dessen Seite $AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Sei ein beliebiger Punkt M des Halbkreises mit E und F durch Gerade verbunden, welche die AB in R und S schneiden, so ist $AS^2 + BR^2 = AB^2$. Euler zieht von M aus durch A und B auch noch MP und MQ. Die Aehnlichkeit der drei rechtwinkligen Dreiecke PEA, AMP, BFQ lässt erkennen, dass $PE \cdot FQ = EA \cdot BF = \frac{1}{2} EF^2$. Aehnliche Beziehungen müssen zwischen den entsprechenden Abschnitten von AB stattfinden, d. h. es muss sein: $2AR \cdot BS = RS^2$. Nun ist $AS + BR = AB + RS$ und durch Quadrirung $AS^2 + BR^2 + 2AS \cdot BR = AB^2 + RS^2 + 2AB \cdot RS = AB^2 + 2AR \cdot BS + 2AB \cdot RS$. Durch Zerlegung

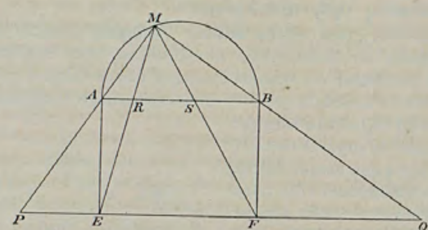

Fig. 94.

zusammengesetzter Stücke in ihre Theile ist aber leicht ersichtlich, dass $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$, wo auch R und S auf der AB liegen. Mithin kann oben $2AS \cdot BR$ gegen $2AR \cdot BS + 2AB \cdot RS$ gestrichen werden, und es bleibt $AS^2 + BR^2 = AB^2$. Auf diesen Satz, dessen Beweis wir wegen seiner ungemeinen Einfachheit wiedergegeben haben, lässt Euler einige andere folgen: den elementargeometrischen Beweis der Heronischen Dreiecksformel, einen eben solchen der Brahmaguptaschen Formel für den Flächeninhalt des Sehnenvierecks, endlich den seines eigenen Vierecksatzes. Wir haben kaum nothwendig besonders zu betonen, dass Eulers Beweis der Heronischen Formel keine weitere Verwandtschaft mit dem von Heron selbst herrührenden zeigt, als dass bei beiden der dem auf seinen Flächeninhalt zu bestimmenden Dreiecke einbeschriebene Kreis vorkommt, dessen Halbmesser Euler sodann ermittelt, was Heron unterliess.

In dem gleichen Bande der Petersburger neuen Abhandlungen ist ein trigonometrischer Beweis des Eulerschen Vierecksatzes von Georg Wolfgang Krafft enthalten[1]). Erinnern wir uns, dass Krafft seit mehreren Jahren in Tübingen, wie Euler in Berlin war, so sehen wir, dass die Mitglieder der Petersburger Akademie ihr in der Ferne treu blieben und Manuscripte zum Druck einschickten. Kraffts Beweis, von dem wir hier reden, besteht in wiederholter Anwendung des Satzes, dass das Quadrat einer Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten weniger dem doppelten Producte jener Seiten in den Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels ist. Im Anschluss an den Eulerschen Vierecksatz bewies Krafft auch den Lehrsatz von Cotes (S. 410—411) für die Sonderfälle $2\lambda = 4$, $2\lambda = 6$, $2\lambda = 8$, eigentlich ein recht überflüssiges Bemühen, nachdem (wie Krafft selbst erklärt) Johann Bernoulli in dem vierten Bande[2]) seiner Werke einen Beweis des allgemeinen Satzes gegeben hatte, der sich allerdings auf Reihenentwicklungen stützte.

Im Jahre 1754 kam im II. Bande der *Mémoires présentés par des Savants étrangers* der Pariser Akademie der Wissenschaften eine Abhandlung von Estève aus Montpellier heraus, in welcher die Aufgabe behandelt und für einen besonderen Fall auch gelöst war, eine dreieckige Pyramide aus ihrer Grundfläche und den drei ebenen Winkeln, die an der Spitze zusammentreffen, zu bestimmen. Ist ABC die Grundfläche, D die Spitze, sind also ADB, BDC, CDA die gegebenen Winkel, so wählte Estève die Winkel DAB, DAC, DBC als Unbekannte und brachte eine Gleichung zwischen ihnen zu Stande, welche für den Fall, dass $\angle DAC = DBC$ ist, zu einer Gleichung vierten Grades nach $\sin DAC$ wird[3]).

Das Jahr 1757 förderte einige Untersuchungen über Theilung von Figuren zu Tage[4]). Es scheint, als ob Johann Tobias Mayer[5]) (1723—1762) den Anstoss dazu gegeben hätte. Aus einem gewöhnlichen Handwerker entwickelte sich Mayer ohne fremde Unterweisung durch Selbstthätigkeit und eine seine Heimath bestätigende echt württembergische Zähigkeit zu einem hervorragenden Astronomen und Physiker und tüchtigen Mathematiker. Er wurde 1751 als ordentlicher Professor der Mathematik und Oeconomie nach Göttingen berufen, und seine Vorlesungen über practische Geometrie waren berühmt. War doch Mayer der Erfinder des Multiplicationsverfahrens

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1747 *et* 1748. T. I, 131—136. [2]) Joh. Bernoulli *Opera* IV, 67—76. [3]) *Mathesis*, Série 2, VI, 18. [4]) Klügel II, 231—233. [5]) Allgemeine deutsche Biographie XXI, 109—116. Artikel von S. Günther.

bei Winkelmessungen[1]), welches in der practischen Geometrie nicht minder hervorragende Dienste als in der Astronomie leistet, und hat er sich doch auch mit der Frage nach der Benutzung überbestimmter Gleichungssysteme beschäftigt. Aus dem Inhalte der Vorlesungen über practische Geometrie ging ein Aufsatz *De transmutatione figurarum rectilinearum in triangula* hervor, welcher seit dem 1. März 1755 zur Veröffentlichung durch die Göttinger Akademie bestimmt war[2]), aber aus nicht bekannten Gründen ungedruckt blieb. Mayer lehrte darin eine geradlinige Figur von beliebiger Seitenzahl ohne Anwendung eines Zirkels, sondern unter alleiniger Benutzung eines Parallellineals in ein Dreieck zu verwandeln und sie durch gerade Linien, welche sämmtlich auf der Grundlinie aufstehen, in gegebenem Verhältnisse zu theilen. Nun erschien 1757 von Christian Heinrich Wilke[3]) (1722—1776), damals Docent der practischen Geometrie in Halle, später in Leipzig privatisirend, wo er auch Secretär der öconomischen Gesellschaft war, ein Buch unter dem Titel: *Neue und erleichterte Methode, den Inhalt geradliniger Flächen zu finden und dieselben ohne Rechnung einzutheilen.* Die Göttinger Gelehrten Nachrichten[4]) brachten eine sehr anerkennende Besprechung, aber noch in demselben Bande verwahrte sich Tobias Mayer[5]) gegen jenes Lob, welches an die unrichtige Adresse gehe, da Alles, was in Wilkes Buch gut sei, von ihm entnommen sei, ohne dass Wilke der Verpflichtung nachgekommen wäre, seine Quelle in ehrlicher Weise zu nennen. Wilke vertheidigte sich dann wieder, so gut er konnte, in einem 1758 gedruckten Anhange zu einer anderen Schrift: *Neue Grundsätze der practischen Geometrie.*

Im Jahre 1758 wurden ferner zwei Aufsätze Eulers gedruckt, welche sechs Jahre früher[6]) der Petersburger Akademie vorgelegt worden waren: *Elementa doctrinae solidorum*[7]) und *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hederis planis inclusa sunt praedita*[8]). Der erste dieser beiden Aufsätze enthält neben zahlreichen anderen meistens leicht zu beweisenden Sätzen über die Anzahl der Elemente von einer gewissen räumlichen Natur bei Vielflächnern hauptsächlich den Satz, welcher den Namen des Eulerschen

[1]) *Haec vera methodus in multiplicatione anguli consistit*, sagt Mayer in einer Abhandlung, welche 1752 im II. Bande der Veröffentlichungen der Göttinger Akademie gedruckt ist. [2]) Göttinger Gelehrte Nachrichten 1755, S. 266. [3]) Poggendorff II, 1328. [4]) Göttinger Gelehrte Nachrichten 1757, S. 1252 flg. [5]) Ebenda 1757, S. 1329 flg. [6]) Brieflich äusserte Euler ihren Inhalt schon 1750 an Goldbach. *Corresp. math.* (Fuss) I, 536—539. [7]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1752 *et* 1753. T. IV, 109—140. [8]) Ebenda T. IV, 140—160.

Polyedersatzes sich bewahrt hat. Bekanntlich hat Descartes bereits den Satz entdeckt, und hat Leibniz eine Abschrift von Descartes bezüglichen Aufzeichnungen nehmen können (Bd. II, S. 683 bis 684). Aber dass Euler davon irgend Kenntniss erhalten haben sollte, ist an sich kaum anzunehmen und bei der über jeden Zweifel erhabenen Wahrheitsliebe Eulers durch seine Erklärung, es handle sich um einen durchaus neuen Satz, vollständig ausgeschlossen. Euler spricht den Satz in der Form

$$S + H = A + 2$$

aus[1]). Dabei ist $S =$ *numerus angulorum solidorum* (die Zahl der Ecken), $A =$ *numerus acierum* (die Zahl der Kanten), $H =$ *numerus hedrarum* (die Zahl der Flächen). Einen zuverlässigen Beweis des Satzes, gesteht Euler zu, besitze er nicht; er könne nur dessen Wahrheit für alle Gattungen von Vielflächnern, an welchen er ihn der Prüfung unterziehen werde, erkennen lassen, so dass diese Induction an Stelle eines Beweises dienen möge. Im zweiten Aufsatze holte Euler nach, was er im ersten vermissen lassen musste. Die Winkelsumme eines ebenen Vielecks, sagt er, wird gefunden, indem man durch Ziehung einer Hilfslinie ein Dreieck abschneidet, beziehungsweise ein neues Vieleck sich verschafft, dessen Winkelzahl um die Einheit, dessen Winkelsumme um zwei rechte Winkel abgenommen hat. Heisst im n-eck die Anzahl der Winkel A, ihre Summe in rechten Winkeln ausgedrückt R, so sind im $(n-1)$-eck die entsprechenden Zahlen $A-1$ und $R-1\cdot 2$; im $(n-2)$-eck sind sie $A-2$ und $R-2\cdot 2$; im Dreieck sind sie $A-(n-3)$ und $R-(n-3)\cdot 2$, zugleich aber auch 3 und 2. Folglich ist $A-(n-3)=3$ und $R-(n-3)\cdot 2=2$ d. h. $A=n$, $R=2n-4$. Nun wird Aehnliches im Raume versucht. Durch Einlegung einer Hilfsebene wird eine Ecke des Vielflächners abgespaltet und zu ermitteln gesucht, wie sich dabei die Zahlen ändern, welche im ersten Aufsatze S, H, A hiessen. Sie gehen in $S-1$, $H-2-\mu+\nu$, $A-3-\mu+\nu$ über, und nennt man diese Zahlen S_1, H_1, A_1, so ist $S_1+H_1-A_1=S+H-A$, d. h. die algebraische Summe $S+H-A$ muss trotz aller Abspaltung von Ecken constant bleiben. Beim Tetraeder mit $S=4$ Ecken, $H=4$ Flächen, $A=6$ Kanten ist aber $4+4-6=2$, also allgemein $S+H-A=2$.

An diese Entwicklung schliesst sich die Lösung einer Aufgabe[2]) an, welche eigentlich ganz anderer Natur ist und nur dadurch in einem sehr lockeren Zusammenhange mit dem Vorhergehenden steht,

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1752 *et* 1753. T. IV, 119. [2]) Ebenda T. IV, 158—160.

dass es sich um ein Tetraeder handelt. Euler fragt nämlich nach dem Körperinhalte des Tetraeders dargestellt durch dessen sechs Kanten. Stossen a, b, d in der Ecke A, a, c, e in der Ecke B, b, c, f in der Ecke C zusammen, so dass die drei Kanten a, b, c das Dreieck ABC bilden, so findet Euler für das 144-fache Quadrat jenes Körperinhaltes die Formel

$$\begin{aligned} &a^2f^2(b^2+c^2+d^2+e^2)-a^2f^2(a^2+f^2)-a^2b^2c^2\\ &+b^2e^2(a^2+c^2+d^2+f^2)-b^2e^2(b^2+e^2)-a^2d^2e^2-c^2e^2f^2\\ &+c^2d^2(a^2+b^2+e^2+f^2)-c^2d^2(c^2+d^2)-b^2d^2f^2, \end{aligned}$$

welche er aber unter Beiziehung von Winkelfunctionen in eine viel geschmeidigere Gestalt zu bringen weiss. Sind die drei in der Ecke A zusammenstossenden ebenen Winkel $BAC = p$, $BAD = q$, $CAD = r$, so ist der Körperinhalt des Tetraeders =

$$\frac{1}{3}abd\sqrt{\sin\frac{p+q+r}{2}\cdot\sin\frac{p+q-r}{2}\cdot\sin\frac{p+r-q}{2}\cdot\sin\frac{q+r-p}{2}}.$$

Diese letztere Formel ebenso wie das oben über Aufsätze von Krafft und von Estève Bemerkte greift allerdings in das trigonometrische Gebiet über, dem vollends zwei Abhandlungen angehören, welche wir noch nennen. Die erste derselben, schon 1727 der Petersburger Akademie vorgelegt[1], führt die Ueberschrift *Trigonometrica* und rührt von F. C. Maier her. Er erklärt in den einleitenden Worten, er wolle eine Zusammenstellung von Sätzen geben, welche er zu verschiedenen Zeiten in der Petersburger Akademie, der er angehörte, mitgetheilt habe. Allerdings flösst gleich der erste Satz der Zusammenstellung nicht allzugrosses Vertrauen ein, denn derselbe behauptet, bei spitzen Winkeln seien Sinus und Cosinus, Tangente und Cotangente positiv, beim stumpfen Winkel blieben Tangente und Sinus positiv, Cotangente und Cosinus dagegen würden negativ![2] Auf die Ergebnisse der ganzen Abhandlung übt dieser grobe Fehler, den man als kennzeichnend dafür beachten möge, wie wenig bekannt der eigentliche Verlauf von Winkelfunctionen damals noch war, keinerlei schädigenden Einfluss. Maier handhabt wesentlich spitze Winkel und Summen oder Differenzen von spitzen Winkeln. Er bedient sich der Formeln für die Functionen solcher Winkelsummen, indem er regelmässig die Functionen der einzelnen Winkel durch besondere Buchstaben bezeichnet. Heisst S der Sinus, C der Cosinus des grösseren

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727. T. II, 12—30.
[2]) *obtusi anguli tangens et sinus positivi quidem manent, sed cotangens ipsius et cosinus privativi fiunt.*

spitzen Winkels, s und c dasselbe für den kleineren spitzen Winkel, so behauptet Maier, der Sinus der Summe beider Winkel sei $\frac{Sc+Cs}{r}$ der Sinus ihrer Differenz $\frac{Sc-Cs}{r}$, wo r den Kreishalbmesser bezeichnet. In ähnlicher Abkürzung sind T und t, M und m die Tangenten und Secanten der beiden spitzen Winkel. Maier legte Werth auf die logarithmische Benutzbarkeit der Formeln und bediente sich deshalb, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben waren, gern der Gleichung, welche heutigen Tages $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}$ geschrieben zu werden pflegt, bei Maier aber $\frac{r+c}{r-c} = \frac{t}{y}$ heisst, und von deren Benutzung durch Thomas Simpson etwa 20 Jahre später (1748) wir uns (S. 535) überzeugt haben.

Uebersichtlichkeit mögen die gewonnenen Formeln immerhin besessen haben, so lange sie in Uebung waren; man gewöhnt sich verhältnissmässig leicht an Bezeichnungen, so dass sie unersetzlich scheinen; aber Durchsichtigkeit fehlte den Formeln insofern, als der Zusammenhang der Winkel, deren Functionen in Rechnung traten, ihre Addition, ihre Subtraction nicht aus der Bezeichnung selbst sofort zu entnehmen war. Zudem ist nicht zu vergessen, dass Maiers Bezeichnungen keineswegs einen Fortschritt, sondern vielmehr einen nicht unbedeutenden Rückschritt gegen seit einem Jahrhunderte bekannte Schreibweisen bildeten. Wir wissen, dass Albert Girard (Bd. II, S. 709) schon 1626 die Silben tan und sec benutzte, um Tangente und Secante eines Winkels anzugeben, der selbst durch einen einfachen Buchstaben bezeichnet jenen Silben nachgesetzt wurde, dass er aber freilich folgewidrig genug den Sinus nicht durch sin andeutete, sondern durch den gleichen Buchstaben, der vorher für den Winkel selbst gebraucht worden war, so dass man unter A oder a bald einen Winkel, bald dessen Sinus zu verstehen hatte. William Oughtred ging in letzterer Beziehung über Girard hinaus[1]. In seiner *Trigonometry* von 1657 bediente er sich, wie es scheint, regelmässig der Abkürzungen *s*, *sco*, *t*, *tco*, *se*, *seco* für sinus, sinus complementi, tangens, tangens complementi, secans, secans complementi. Aber weder Girard noch Oughtred fanden die Nachahmung, deren sie würdig waren. Wohl hat bald dieser, bald jener Schrift-

[1]) Briefliche Mittheilung von Herrn John S. Mackay, der sich dabei auf De Morgan, *Budget of Paradoxes* pag. 451 bezieht.

steller einmal von sin A, von tan B und dergleichen gesprochen, aber immer nur beiläufig.

Erst in Simpsons *Trigonometry* von 1748 ist fast durchweg mit den Wörtern *Sine*, *Co-sine*, mit den Silben *Tang*, *Co-tang* gerechnet. Das Einzige, allerdings ziemlich Unbedeutende, was man bei ihm vermissen kann, ist eine ausdrückliche Erklärung, er werde fortan diese Bezeichnungen anwenden.

Euler hat in verschiedenen Aufsätzen das Seine zur Einführung der kurzen Bezeichnung gethan. In den Petersburger Akademieschriften von 1737 findet sich zunächst ein Aufsatz[1]) von ihm über eine geometrische Aufgabe, die nicht ohne Interesse ist, aber doch nicht von solcher Wichtigkeit, dass wir bei ihr selbst zu verweilen haben. Dort ist gelegentlich[2]) von $A \sin \frac{b}{c}$ die Rede mit dem Zusatze, er verstehe darunter den Arcus im Einheitskreise, dessen sinus $\frac{b}{c}$ sei. In einer Abhandlung des Jahrgangs 1744 der Nova Acta Eruditorum[3]), der Fortsetzung der früheren A. E., spricht Euler bei Gelegenheit der Integration einer Differentialgleichung von dem *arcus, cujus tangens* $= t$, *seu* $A\,\overline{tag}\,t$,[4]) und zwei Seiten später heisst es: *Ponatur* $A\,\overline{tag}\,t = 90^0 - \varphi$, *ut exprimat* φ *angulum* ADM, *erit* $t = cot\,\varphi = \frac{cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$ & $1 + t^2 = \frac{1}{sin\,\varphi^2}$[5]) und damit war auch der Arcustangens wie früher der Arcussinus erklärt. Von durchschlagendem Erfolge war jedoch erst eine Abhandlung Eulers von 1753, welche wir deshalb als die zweite in diesem Kapitel zu nennende trigonometrische Abhandlung bezeichnen, die *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits*[6]).

Eulers Grundgedanke ist folgender. Auf der Kugeloberfläche sind die Bögen grösster Kreise die kürzesten Linien, welche von einem Punkte nach einem anderen gezogen werden können, oder ein von einem Punkte der Kugeloberfläche nach einem anderen gespannter Faden nimmt die Gestalt eines Bogens eines grössten Kreises an. Ein sphärisches Dreieck besteht aber aus Bögen grösster Kreise, und es kann daher als die Figur mit drei Eckpunkten auf der Kugeloberfläche definirt werden, welche aus den kürzesten auf der gleichen

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX. 207—221.
[2]) Ebenda T. IX, 209: *A sin* $\frac{b}{c}$ *denotat arcum cujus sinus est* $\frac{b}{c}$ *in circulo radii* 1. [3]) *Nova A. E.* 1744 pag. 315—336. [4]) Ebenda pag. 325. [5]) Ebenda pag. 327. [6]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753 pag. 223—257. Eine deutsche Uebersetzung von E. Hammer erschien als Heft Nr. 73 von Ostwalds Klassikern der exacten Wissenschaften.

Oberfläche möglichen Verbindungslinien jener Eckpunkte besteht. Gewinnt man aus dieser Definition, welche zur Anwendung der Methode grösster und kleinster Werthe herausfordert, Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Dreiecks, so wird man damit die allgemeinste Trigonometrie schaffen, welche man überhaupt denken kann. Sie wird zur ebenen Trigonometrie, wenn die Kugeloberfläche mit einem unendlich grossen Halbmesser beschrieben zur Ebene entartet, zur sphäroidischen Trigonometrie, wenn statt der Kugeloberfläche die Oberfläche eines Sphäroids gewählt wird, und in der That hat Euler dem Aufsatze, von welchem hier die Rede ist, unmittelbar einen zweiten: *Élémens de la trigonométrie sphéroïdique*[1]) nachfolgen lassen. Euler setzt also die Lehre von den kürzesten Linien voraus, um trigonometrische Ergebnisse abzuleiten, eine zum mindesten eigenartige Reihenfolge der Entwicklungen, welche uns nöthigen wird, im 117. Kapitel des Aufsatzes von 1753 abermals zu gedenken.

Jetzt dürfen wir nur auf eine Zwischenbemerkung des Aufsatzes eingehen. Euler sagt nämlich[2]), er wolle die Winkel eines sphärischen Dreiecks durch A, B, C, die ihnen gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c bezeichnen. Das war eine an und für sich unbedeutende Neuerung, die jeder, auch der unbedeutendste Mathematiker hätte einführen können, aber thatsächlich ist es nicht geschehen. Deshalb erscheint es berechtigt, Eulers Aufsatz von 1753 als den Ursprung der Form der späteren Trigonometrie anzuerkennen, um so mehr, als in ihm fortwährend von den Abkürzungssilben *sin*, *cos* (oder *cs*), *tang* (oder *tag* oder *tg* oder *tng*) Gebrauch gemacht ist.

105. Kapitel.

Algebra bis 1745.

Wir haben (S. 406) angekündigt, dass die von Newton zuerst aufgeworfene Frage nach der Anzahl der complexen Gleichungswurzeln einer gegebenen Gleichung von anderen englischen Schriftstellern weiter gefördert worden sei. Wir haben unter ihnen in erster Linie Colin Maclaurin zu nennen. Dieser hat seine Untersuchungen in zwei Briefen an Martin Folkes[3]) (1690—1754), einen vermögenden Privatmann, der lange Zeit Vorsitzender der Royal Society in London war, niedergelegt. Der erste Brief[4]) geht von folgendem

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753 pag. 258—293. [2]) Ebenda pag. 231. [3]) Poggendorff I, 766. [4]) P. T. XXXIV, 104—112.

Lemma aus. Sind m positive Zahlen $a, b, c, d \cdots$ gegeben, so lassen sich aus ihnen $\frac{m(m-1)}{2}$ Paare bilden, deren jedes sich zu einem Producte, sowie zu einer Differenz verbinden lässt. Die Summe aller zweifactorigen Producte heisse $B = ab + ac + \cdots + bc + \cdots$. Die Summe der Quadrate der m Zahlen heisse $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \cdots$. Die Summe der Quadrate der $\frac{m(m-1)}{2}$ Differenzen ist positiv oder $(a-b)^2 + (a-c)^2 + \cdots + (b-c)^2 + \cdots > 0$. Entwickelt nimmt sie die Gestalt $(m-1)A - 2B$ an, folglich ist $\frac{m-1}{2}A > B$. Sind einzelne der vorgelegten Zahlen negativ, so findet das Lemma in gleicher Weise statt, da A unverändert bleibt, während B abnimmt, wenn einzelne der zu addirenden Producte negativ ausfallen. Sind alle $a, b, c, d \cdots$ einander gleich, so werden sämmtliche gebildeten Differenzen, also auch die Summe ihrer Quadrate, zu Null, d. h. es ist alsdann $(m-1)A - 2B = 0$, und will man diese Möglichkeit mitberücksichtigen, so lautet das nun ganz allgemeine nur an das Reellsein von $a, b, c, d \cdots$ geknüpfte Lemma $\frac{m-1}{2}A \geqq B$. Man kann ihm umgekehrte Giltigkeit beilegen, d. h. $B > \frac{m-1}{2}A$ kann nur stattfinden, wenn nicht alle Zahlen $a, b, c, d \cdots$ reell, sondern einzelne derselben complex sind. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass wir nur neuerem Sprachgebrauche zu Liebe *complex* sagen, die Schriftsteller dieses Kapitels gebrauchten ausschliesslich das Wort *imaginär*. Das Complexsein von a oder b u. s. w. können wir auch so aussprechen, dass die Gleichung

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots = 0$$

auch complexe Wurzeln besitzen muss, damit $B > \frac{m-1}{2}A$ stattfinden kann, wobei man weiter zu beachten hat, dass solche complexe Wurzeln stets paarweise auftreten, sofern die Gleichungscoefficienten reell sind. Maclaurin führte das nun im Einzelnen aus.

Damit $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ zwei complexe Wurzeln besitze, muss $ab > \frac{a^2+b^2}{2}$ oder $abx^2 > \frac{1}{4}((a+b)x)^2$ sein. Die Newtonsche Bruchreihe (S. 404) ist $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$. Ihr Quotient $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{4}$ ist über $-(a+b)x$ zu setzen. Man hat also zu vergleichen $\frac{1}{4}(-(a+b)x)^2$ mit $ab \cdot x^2$. Letztere Zahl ist voraussetzungsmässig die grössere, und das fordert ein Minuszeichen. Das erste und letzte

Glied haben immer $+$, folglich erscheint $+-+$ mit zwei Zeichenwechseln den zwei complexen Wurzeln entsprechend.

In der cubischen Gleichung $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$ besteht das Kennzeichen complexer Wurzeln in $ab+ac+bc > a^2+b^2+c^2$ oder in $3(ab+ac+bc) > (a+b+c)^2$. Die Newtonsche Bruchreihe $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$ liefert die Quotienten $\frac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{3}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{3}$, welche über $-(a+b+c)x^2$ und über $(ab+ac+bc)$ zu setzen sind. Nun ist zu vergleichen $\frac{1}{3}(-(a+b+c)x^2)^2$ mit $x^3 \cdot (ab+ac+bc)x$ und $\frac{1}{3}((ab+ac+bc)x)^2$ mit $-abc \cdot (a+b+c)x^2$. Der erste Vergleich zeigt, dass die zweite Zahl grösser ist als die erste, also $-$ erfordert, den zweiten Vergleich schenken wir uns und schreiben $+-?+$. Mag nun das ? durch $+$ oder durch $-$ ersetzt werden, jedenfalls erscheinen zwei Zeichenwechsel und zwei complexe Wurzeln.

In der biquadratischen Gleichung $x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd = 0$ ist als Kriterium complexer Wurzeln erkannt $(ab+ac+ad+bc+bd+cd) > \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$ oder $(ab+ac+ad+bc+bd+cd) > \frac{3}{8}(a+b+c+d)^2$, welches, wenn die Gleichung kürzer $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ geschrieben wird, die Form $q > \frac{3}{8}p^2$ annimmt. Man kann aber auch q, r, s zu dem Kriterium verwenden. Sind nämlich nicht alle Grössen a, b, c, d reell, so gilt das Gleiche für die vier Grössen abc, abd, acd, bcd, auf welche man alsdann das Lemma $B > \frac{m-1}{2}A$ anwenden kann, d. h. man hat $abc \cdot abd + abc \cdot acd + abc \cdot bcd + abd \cdot acd + abd \cdot bcd + acd \cdot bcd > \frac{3}{2}(a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2)$. Die sechs Glieder links sind nichts anderes als $abcd(ab+ac+bc+ad+bd+cd) = sq$, und die Klammergrösse rechts ist $(abc+abd+acd+bcd)^2 - 2(abc \cdot abd + abc \cdot acd + abc \cdot bcd + abd \cdot acd + abd \cdot bcd + acd \cdot bcd) = r^2 - 2sq$. Die Ungleichung wird demnach zu $sq > \frac{3}{2}(r^2 - 2sq)$ oder $sq > \frac{3}{8}r^2$.

Ein letzter Satz, dessen Beweis genau nach dem Muster der mehrfach gezogenen Folgerungen geführt wird, heisst endlich: Wenn $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots \pm Cx^2 \mp Dx \pm E = 0$ eine Gleichung mit ausschliesslich reellen Wurzeln ist, so muss $(m-1)A^2 > 2mB$ und $(m-1)D^2 > 2mCE$ sein. Wir bemerken zum Ueberflusse, dass die in der ersten Ungleichung vorkommenden Gleichungscoefficienten A, B nicht mit den Wurzelfunctionen A, B des anfänglichen Lemma verwechselt werden dürfen.

Nun erschien nach einiger Frist im Jahre 1728 ein inhaltlich verwandter Aufsatz[1]). Der Verfasser hiess George Campbell, aber über seine Persönlichkeit Näheres festzustellen ist nicht gelungen, wenn er auch im 114. Kapitel uns abermals begegnen wird. Die englische *National Biography* z. B. kennt zwar einen Theologen George Campbell, aber derselbe lebte 1719—1796, kann also unmöglich 1728 einen mathematischen Aufsatz von Bedeutung veröffentlicht haben. Campbell schickt einige Lemmata voraus. Damit die Wurzeln von $ax^2 - Bx + A = 0$ reell seien, müsse $\frac{B^2}{4} > aA$ sein. Aus der Gleichung $x^n - Bx^{n-1} + \cdots \pm bx \mp A = 0$ folge mittels $x = \frac{1}{y}$ die neue Gleichung $Ay^n - by^{n-1} + \cdots \pm By \mp 1 = 0$, und jeder Wurzel $x = a$ der ersten entspreche eine Wurzel $y = \frac{1}{a}$ der zweiten Gleichung[2]). Die beiden Grössen a und $\frac{1}{a}$ seien gleichzeitig reell und gleichzeitig complex, demnach haben beide genannte Gleichungen genau gleich viele complexe Wurzeln. Bilde man aus $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - - \cdots \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$, wofür wir abweichend von Campbell kürzer $\Phi(x) = 0$ schreiben wollen, eine neue Gleichung, deren Entstehung auf die Differentiation von $\Phi(x)$ hinausläuft, die also $\Phi'(x) = 0$ wird geschrieben werden dürfen, und habe $\Phi(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln, so sei das Gleiche für $\Phi'(x) = 0$ der Fall, wenn auch nicht umgekehrt, vielmehr könne $\Phi'(x) = 0$ ausschliesslich reelle Wurzeln besitzen, während $\Phi(x) = 0$ complexe Wurzeln habe. Dagegen lasse der Satz die Erweiterung zu, dass $\Phi(x) = 0$ mindestens ebensoviele complexe Wurzeln besitze als $\Phi'(x) = 0$. Alle diese Lemmata, sagt Campbell, seien bekannt und aus der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen leicht herzuleiten, Reyneau z. B. habe sie in seiner *Analyse démontrée* bewiesen.

Wir müssen hier einige Worte über diesen letzteren Schriftsteller einschalten. Charles Reyneau[3]) (1656—1728) war in Brissac un-

[1]) P. T. XXXV, 515—531. [2]) Campbell nimmt an der zweimaligen Verwendung von a als Gleichungscoefficient und als Gleichungswurzel keinerlei Anstoss. Ferner schreibt er auch in der zweiten Gleichung nicht y, sondern x für die Unbekannte. [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1728 (*Histoire* pag. 112—116).

weit Angers geboren. Er trat 1676 dem Orden des Oratoriums in Paris bei, und vielleicht schon aus jener Zeit stammte eine enge Freundschaft mit Mallebranche. Reyneau fand als Professor der Philosophie nach einander in Toulon und in Pezenas, dann 1683 als Professor der Mathematik in Angers Verwendung. Seit 1716 war er *Associé libre* der Pariser Akademie. Seiner *Analyse démontrée* von 1708 wird nachgerühmt, sie habe die wesentlichen Entdeckungen der Descartes, Leibniz, Newton und Anderer in ein Werk vereinigt. Zu den Anderen dürfte auch Rolle gezählt werden müssen, an dessen bahnbrechende algebraische Arbeiten (S. 120—124) die Abhandlung Campbells ebenso erinnert, wie unser Bericht über Newtons *Arithmetica universalis* (S. 407) ihrer gedenken musste. Es ist vielleicht nicht ganz überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, dass die Arithmetica universalis von 1707 der Analyse démontrée von 1708 vorausging. Newton wird also Rolles Arbeiten im Originalwerke kennen gelernt haben, während Campbell eingestandenermassen aus Reyneaus zweiter Quelle schöpfte.

Wir kehren zu Campbell zurück. Er geht, wie von $\Phi(x)$ zu $\Phi'(x)$, auch zu den höheren Ableitungen über, indem er deren Gestalt erörtert, und kommt schliesslich zur quadratischen Gleichung $\Phi^{(n-2)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3x^2 - (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2Bx + (n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1C = 0$ oder zu $\frac{n(n-1)}{2}x^2 - (n-1)Bx + C = 0$, von welcher aus behauptet wird, $\Phi(x) = 0$ habe mindestens ebensoviele complexe Wurzeln als sie. Das Kennzeichen des Reellseins der Wurzeln von $\frac{n(n-1)}{2}x^2 - (n-1)Bx + C = 0$ ist aber $\frac{n-1}{2n}B^2 > C$, und diese Ungleichung muss stattfinden, wenn $\Phi(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln besitzt. In diesem Falle sind ferner nach Campbells zweitem Lemma auch die Wurzeln von $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - \cdots = 0$, beziehungsweise von $x^n - \frac{b}{A}x^{n-1} + \frac{c}{A}x^{n-2} - \cdots = 0$ und von $\frac{n(n-1)}{2}x^2 - \frac{(n-1)b}{A}x + \frac{c}{A} = 0$ reell, und es muss sein $\frac{n-1}{2n}\frac{b^2}{A^2} > \frac{c}{A}$ oder $\frac{n-1}{2n}b^2 > cA$. Campbell zieht aus letzterer Ungleichung die Folgerung $\frac{n-1}{2}b^2 > cA$, die an sich ganz richtig ist, die er aber nicht weiter verwerthet. Das Reellsein der Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades $\Phi(x) = x^n - Bx^{n-1} + \cdots \pm (cx^2 - bx + A) = 0$ mit den drei letzten Coefficienten $\pm c$, $\mp b$, $\pm A$ zieht also, da $(\mp b)^2 = b^2$ und $(\pm c)\cdot(\pm A) = cA$ ist, nothwendig die Folge nach sich, dass $\frac{n-1}{2n}$ mal dem ins Quadrat erhobenen Coefficienten von x grösser sein muss, als das Product des

Coefficienten von x^2 in die absolute Zahl[1]), d. h. in die Gleichungsconstante.

Wie durch aufeinanderfolgende Ableitungen aus $\Phi(x) = 0$ eine quadratische Gleichung hervorgebracht werden kann, kann die Reihe der Ableitungen auch früher unterbrochen werden, so dass etwa N die Gleichungsconstante derjenigen Gleichung wird, bei welcher man stehen blieb, während die Coefficienten von x und von x^2 aus M und aus L hervorgehen. Campbell nimmt m als *Exponenten des Coefficienten* M an, d. h. er lässt in $\Phi(x)$ den Coefficienten M als Bestandtheil des Gliedes $\pm Mx^{n-m}$ erscheinen. Die benachbarten Glieder daselbst sind $\mp Lx^{n-m+1}$ und $\mp Nx^{n-m-1}$. Nach $n-m-1$ maliger Differentiation entsteht $\Phi^{(n-m-1)}(x)$ vom Grade $n-(n-m-1) = m+1$ und die Schlussglieder sind $\mp\left(\frac{(n-m+1)(n-m)}{2}Lx^2 - (n-m)Mx + N\right)$. Sie lassen die Ungleichung $\frac{(m+1)-1}{2(m+1)}(n-m)^2M^2 > \frac{(n-m+1)(n-m)}{2}LN$ oder $\frac{m}{m+1}\cdot\frac{n-m}{n-m+1}M^2 > LN$ stattfinden, sofern $\Phi(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln besitzt. Dabei ist $\frac{m}{m+1}\cdot\frac{n-m}{n-m+1} = \frac{\frac{n-m}{m+1}}{\frac{n-m+1}{m}}$, d. h. der Quotient, welcher entsteht, wenn in der Bruchreihe $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \cdots \frac{n-m+1}{m}, \frac{n-m}{m+1}, \cdots \frac{1}{n}$ der $(m+1)^{\text{te}}$ Bruch durch den m^{ten} dividirt wird, und das ist ja das Bildungsgesetz der von Newton aufgestellten Zahlenfactoren. So oft die als nothwendig erkannte Ungleichung nicht stattfindet, kann man auf das Vorhandensein eines Paares complexer Wurzeln schliessen, und daraus, behauptet Campbell, könne man unmittelbar Newtons Regel für die Auffindung der Anzahl complexer Wurzeln herleiten[2]). Campbell berechnet nunmehr die bei Gleichungen mit ausschliesslich reellen Wurzeln positive Differenz $\frac{m}{m+1}\cdot\frac{n-m}{n-m+1}M^2 - LN$ und findet sie $= \frac{(n+1)Z}{(m+1)(n-m+1)} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{4} - \cdots$ unter Annahme folgender Abkürzungen. Als Coefficient von $\pm x^{n-m}$ in $\Phi(x)$ ist M die Summe der als Producte aufgefassten Combinationen zu je m aus den n Gleichungswurzeln $a, b, c, d \cdots$; bildet man aus diesen $\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}$ Gliedern von M alle Differenzen von je 2,

[1]) *numerus absolutus.* [2]) *Ex dictis immediate deducitur demonstratio Regulae quam dedit illustrissimus Newtonus, qua determinatur Numerus Radicum impossibilium in quavis data Aequatione.*

deren es also $\frac{1}{2}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m} - 1\right)$ gibt, und nimmt die Summe ihrer Quadrate, so soll dieselbe Z heissen. Unter den gebildeten Differenzen kann man solche unterscheiden, deren Glieder bis auf einen Factor erster Dimension übereinstimmen, solche, bei denen die Glieder der Uebereinstimmung in Bezug auf Factoren 2^{ter}, 3^{ter} Dimension entbehren u. s. w. Die Summen der Quadrate der so in Gruppen geordneten Differenzen heissen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$. Das Negativsein von $\frac{(n+1)Z}{(m+1)(n-m+1)} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{4} - \cdots$ bildet alsdann eine andere Form der Bedingung für das Vorhandensein complexer Gleichungswurzeln.

Wollten wir rein chronologisch in unserer Erzählung von der Entwicklung der Algebra fortschreiten, so wäre an dieser Stelle über eine Abhandlung Daniel Bernoullis von 1728 zu berichten. Wir freuen uns diesen Bericht aus bestimmten Gründen bis zum 109. Kapitel hinausschieben zu können und dadurch in der Lage zu sein, ohne von dem begonnenen Gegenstande abzulenken, weiter fortzufahren.

Maclaurins zweiter Brief an Folkes fordert nämlich unsere Aufmerksamkeit, den er 1729 dem ersten Briefe folgen liess[1]), offenbar in einiger Verstimmung darüber, dass Campbell ihm Manches von seinen seit Veröffentlichung des ersten Briefes neu gewonnenen Ergebnissen vorweg genommen hatte. So ist wohl Maclaurins Einleitungssatz zu verstehen, er habe die Absicht gehegt eine Algebra herauszugeben und habe dieser seine weiteren Forschungen einverleiben wollen, er ziehe jedoch aus gewissen Gründen vor, nun doch eine neue Abhandlung zu veröffentlichen. Die Gleichung, von deren Wurzeln der Brief handelt, und die wir wieder mitunter durch $\Phi(x) = 0$ bezeichnen werden, hat die Gestalt

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - Gx^{n-7} + Hx^{n-8} - Ix^{n-9} + Kx^{n-10} - \cdots = 0.$$

Die Wurzeln sollen $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l \cdots$ sein, so dass $A = a + b + c + d + e + \cdots$. Maclaurin nennt $a, b, c \cdots$ Theile oder Glieder des Coefficienten A, ebenso $ab, ac, ad \cdots$ Theile oder Glieder des Coefficienten B u. s. w. Dimension eines Gliedes oder eines Coefficienten nennt er die Anzahl der in jedem Gliede als Factoren enthaltenen Wurzeln. Mithin ist A ein Coefficient von der Dimension 1, B, C sind solche von der Dimension 2, 3 u. s. w.

[1]) P. T. XXXVI, 59—96.

Theile verschiedener Coefficienten sind unter einander ähnlich, wenn alle Factoren des Theiles des Coefficienten niedriger Dimension in dem Theile dessen von höherer Dimension vorkommen. Ist umgekehrt kein Factor des Theiles des niedrigeren Coefficienten in dem Theile des höheren vorhanden, so heissen die Theile unähnlich. So sind abc und $abcde$ ähnliche Theile von C und E, ab und $cdefgh$ unähnliche Theile von B und F. Mit Hilfe dieser Benennungen erläutert Maclaurin alsdann auch eine Bezeichnung: er schreibt $C'D'$ für die Summe der Producte, welche entstehen, wenn alle Theile von C mit den ihnen ähnlichen Theilen von D vervielfacht werden. $C'C'$ ist folglich die Summe der Quadrate aller Theile von C. Dagegen bedeutet ihm $C'C$ die Summe der Producte von je zwei ungleichen Theilen von C miteinander. Demnach ist $CC = C'C' + 2C'C$. Bei Vervielfachung ähnlicher Theile von unter einander verschiedenen Coefficienten macht Maclaurin darauf aufmerksam, dass deren Productentheile bei der Vervielfachung ganzer Coefficienten bald nur einmal, bald wiederholt auftreten. Wenn z. B. in $C'G'$ das Glied $a^2b^2c^2defg$ vorkommt, so ist in CG ebendasselbe Glied einmal enthalten. Anders verhält es sich, wenn das Product DF gebildet wird. Da nämlich $a^2b^2c^2defg = abcd \cdot abcefg = abce \cdot abcdfg = abcf \cdot abcdeg = abcg \cdot abcdef$, so wird dieses Glied 4mal in DF vorkommen, d. h. ebenso oft als die Differenz der Dimensionszahlen von C und G, $7 - 3 = 4$, vorschreibt. Wird ferner E^2 gebildet, so erscheint $a^2b^2c^2defg = abcde \cdot abcfg = abcdf \cdot abceg = abcdg \cdot abcef$ oder 3mal, d. h. halb so oft als $7 - 3 = 4$ Elemente zu je zwei zusammengefasst werden können. Mit Hilfe dieser Betrachtung, beziehungsweise Bezeichnung, und gestützt auf die Ergebnisse des ersten Briefes stellt Maclaurin folgende Sätze auf. Sei in der oben kurz mit $\Phi(x) = 0$ bezeichneten Gleichung m der Unterschied der Dimensionen von C und G, so ist $CG = C'G' + (m+2)B'H' + \frac{m+3}{1} \cdot \frac{m+4}{2} A'I' + \frac{m+4}{1} \cdot \frac{m+5}{2} \cdot \frac{m+6}{3} \cdot 1 \cdot K$, d. h. wegen $m = 7 - 3 = 4$ ist $CG = C'G' + 6B'H' + 28A'I' + 120K$. Aehnlicher Weise ist auch $DF = D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K$ und $E^2 = E'E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 256K$. Ist ferner $l = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots$, wo die Anzahl der mit einander vervielfachten Brüche der Dimension von E gleichkommt, wodurch l die Bedeutung der Anzahl der den Coefficienten E bildenden Glieder erhält, so ist unter Annahme lauter reeller Gleichungswurzeln $\frac{l-1}{2l} E^2 > DF - CG + BH - AI + K$. Hat $\Phi(x) = 0$ nicht bloss lauter reelle Wurzeln, sondern diese auch alle

gleichen Vorzeichens, ist ferner C von der Dimension r, B von der Dimension $r-1$, G und H von den Dimensionen $r+s$ und $r+s+1$, so ist $(n-r-s)rC'G' > (s+1)(s+2)B'H'$. Wird $s = 0$, d. h. geht sowohl C als G in E über, so nimmt der Satz die Gestalt an $(n-r)rE'E' > 2D'F'$ oder $mE'E' > 2D'F'$, wenn von jetzt an m eine Abkürzung für $(n-r)r$ ist, während s dem früheren m entspricht. Dieselbe Abkürzung gestattet $(n-r-q)(r-q) = m - qn + q^2$ zu schreiben und mit Anwendung dieser Zeichen heisst $(q-r-1)(r-1)D'F' > 3 \cdot 4C'G'$ auch $(m-n+1)D'F' > 12C'G'$. Ebenso ist $(m-2n+4)C'G' > 30B'H'$, $(m-3n+9)B'H' > 56A'I'$, $(m-4n+16)A'I' > 90K$. Die unter der erwähnten Voraussetzung, dass alle Gleichungswurzeln reell und gleichen Vorzeichens sind, stets positiven Differenzen zwischen je zwei mit einander verglichenen Grössen hat nun Maclaurin durch bestrichelte kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, d. h. er setzt:

$$\begin{aligned} mE'E' - 2D'F' &= a' \\ (m-n+1)D'F' - 12C'G' &= b' \\ (m-2n+4)C'G' - 30B'H' &= c' \\ (m-3n+9)B'H' - 56A'I' &= d' \\ (m-4n+16)A'I' - 90K &= e' \end{aligned}$$

und macht darauf aufmerksam, dass die Zahlen 2, 12, 30, 56, 90 in stets um 8 zunehmenden Differenzen anwachsen. Maclaurin vervielfacht nunmehr die oben angeführten Werthe von E^2 und DF mit m, beziehungsweise mit $m+n+1$, so dass er erhält:

$$\begin{aligned} mE^2 &= mE'E' + 2mD'F' + 6mC'G' + 20mB'H' \\ &\quad + 70mA'I' + 256mK, \\ (m+n+1)DF &= (m+n+1)D'F' + 4(m+n+1)C'G' \\ &\quad + 15(m+n+1)B'H' + 56(m+n+1)A'I' \\ &\quad + 210(m+n+1)K \end{aligned}$$

und zieht beide Werthe von einander ab. Er erhält:

$$mE^2 - (m+n+1)DF = mE'E' + (m-n-1)D'F' + (2m-4n-4)C'G' + (5m-15n-15)B'H' + (14m-56n-56)A'I' + (46m-210n-210)K = a' + (m-n+1)D'F' + (2m-4n-4)C'G' + (5m-15n-15)B'H' + (14m-56n-56)A'I' + (46m-210n-210)K.$$

Man sieht, wie weitere Einführungen kleiner bestrichelter Buchstaben rechts vom Gleichheitszeichen erfolgen. Man setzt $(m-n+1)D'F' = b' + 12C'G'$, dann $(2m-4n+8)C'G' = 2c' + 60B'H'$ u. s. w. Man erhält endlich: $mE^2 - (m+n+1)DF = a' + b' + 2c' + 5d' + 14e'$ und die Zahlen 1, 1, 2, 5, 14, welche dabei auftreten, sind nichts anderes als $1-0$, $2-1$, $6-4$, $20-15$, $70-56$, d. h. die Differenzen der Zahlen, welche vorher bei der Entwicklung von E^2 und DF nach Summen von Producten grosser bestrichelter Buchstaben auftraten. Die gefundene Gleichung gestattet aber auch die Umformung in $\frac{m}{m+n+1}E^2 = DF + \frac{a'+b'+c'+5d'+14e'}{m+n+1}$. Nun war $m=(n-r)r$ positiv, ebenso muss $m+n+1 = nr-r^2+n+1 = (n-r+1)(r+1)$ positiv sein. Ferner ist $\frac{m}{m+n+1} = \frac{(n-r)r}{(n-r+1)(r+1)} = \frac{\frac{n-r}{r+1}}{\frac{n-r+1}{r}}$. Die genannte Gleichung hat also auch eine Ungleichung $\frac{\frac{n-r}{r+1}}{\frac{n-r+1}{r}}E^2 > DF$ zur Folge, sobald alle Wurzeln von $\Phi(x)=0$ reell sind; die Bedingung gleichen Vorzeichens für die Wurzeln lässt Maclaurin hier plötzlich fallen, ohne eine Begründung dafür zu geben. Dagegen macht er darauf aufmerksam, dass $\frac{\frac{n-r}{r+1}}{\frac{n-r+1}{r}}$ der Quotient zweier Brüche sei, welchen Newton dem Coefficienten E zuordnete. Maclaurin fügt dann noch einige andere Ungleichungen zwischen Producten von Coefficienten hinzu, welche theils stattfinden, wenn alle Wurzeln von $\Phi(x)=0$ reell, theils wenn sie reell und gleichen Vorzeichens sind. Das Nichtstattfinden der betreffenden Ungleichungen zieht die Folgerung auf das Vorhandensein complexer Wurzeln nach sich, und der Verfasser fügt hinzu, er sei auch im Stande die Anzahl der complexen Wurzeln zu bestimmen, nur sei der Beweis sehr umständlich. Er verzichtet darauf und gibt ein anderes, von ganz anderen Gesichtspunkten aus gefundenes Merkmal dafür, dass $\Phi(x)=0$ lauter reelle Wurzeln gleichen Vorzeichens besitze.

Wird, sagt er, eine Summe in beliebig viele Theile zerlegt, so ist das Product dieser Theile am grössten, wenn alle Theile gleich sind, und unter derselben Annahme gleicher Theile wird auch die Summe von Producten solcher Theile unter einander am grössten, die Summe gleicher Potenzen der einzelnen Theile dagegen am kleinsten. In Zeichen geschrieben wird, sofern $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ ist, $\sum x_{h_1}x_{h_2}\cdots x_{h_k}$ bei $h_1<h_2<\cdot\cdot\cdot<h_k$ ein Maximum und $\sum x_h^k$ ein Minimum bei $x_1=x_2=\cdots x_n=\frac{a}{n}$.

Da wir Reyneaus *Analyse démontrée* nie zu Gesicht bekommen haben, so wissen wir nicht, ob nicht dort Aehnliches sich findet, was uns nach Campbells Benutzung dieses Werkes (S. 564) nicht ausgeschlossen erscheint. Täuschen wir uns darin, so erkennen wir hier bei Maclaurin das erste Beispiel eines Maximum und eines Minimum einer Function von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen.

Die Aufgabe würde einen ungemeinen theoretischen Fortschritt darstellen, wenn Maclaurin sie in dieser Bedeutung aufgefasst und ihr mittels der Infinitesimalrechnung zu Leibe gegangen wäre. Daran dachte er freilich nicht. Er nahm als bekannt an, dass das Quadrat das grösste Rechteck gleichen Umfanges sei und schloss von da aus weiter.

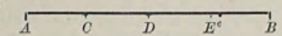

Fig. 95.

Man zerlege (Fig. 95) die AB in beliebig viele Stücke AC, CD, DE, EB und bilde ein Product $AC\cdot CD\cdot DE\cdot EB$, welches ein Maximum sein soll. Jedenfalls wird E in der Mitte zwischen D und B liegen müssen, weil dann $DE\cdot EB > De\cdot eB$, wo auch e ausserhalb dieser Mitte zwischen D und B liegen mag. Aehnlicherweise muss D in der Mitte von CE, C in der Mitte von AD angenommen werden, d. h. es muss $AC=CD=DE=EB$ sein.

Der von den so begründeten Sätzen gemachte Gebrauch ist folgender. Sei wieder $\Phi(x)=x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\cdots=0$ und D der Coefficient von der Dimension r, sei überdies $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-r+1}{r}=l$. Gesetzt $\Phi(x)=0$ hätte lauter gleiche Wurzeln, so müsste, weil A die Summe der n Gleichungswurzeln ist, jede derselbe $\frac{A}{n}$ sein, und die Gleichung hiesse alsdann $\left(x-\frac{A}{n}\right)^n=0$ oder $x^n-Ax^{n-1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{A^2}{n^2}x^{n-2}+\cdots+l\frac{A^r}{n^r}x^{n-r}+\cdots=0$. Die Coefficienten von x^{n-2}, von x^{n-r} sind zugleich die Summen der Producte zu je zwei, zu je r der unter einander gleichen Gleichungswurzeln, während in dem wirklichen $\Phi(x)$ der Coefficient B und der Coefficient von der Dimension r die gleichen Beziehungen zu den im Allgemeinen wenigstens theilweise von einander verschiedenen Gleichungswurzeln besitzen, deren Gesammtsumme jedoch wieder A ist. Jene hypothetischen Wurzeln machen die aus ihnen gebildeten Coefficienten unter einer bestimmten Voraussetzung, welche der Figur sich entnehmen lässt, zu einem Maximum, nämlich dann und nur dann, wenn sämmtliche Veränderliche, d. h. sämmtliche Gleichungswurzeln reell sind. Unter dieser Voraussetzung muss z. B. $l\frac{A^r}{n^r}>D$

sein, wenn D der Coefficient von der Dimension r ist. Aehnlich gebaute Ungleichungen lassen sich auch mittels $B, C \cdots$ herstellen, die nothwendig stattfinden müssen, wenn alle Gleichungswurzeln von $\Phi(x) = 0$ reell und gleichen Vorzeichens sind. Das Nichtstatthaben einer solchen Ungleichung schliesst also die ausgesprochene Bedingung für die Gleichungswurzeln aus.

Maclaurin schlägt noch einen dritten Weg zum Nachweise complexer Gleichungswurzeln ein, indem er von der Herstellung von Grenzen für die Wurzelwerthe ausgeht. Die Gleichung $\Phi(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \cdots = 0$ wird durch die Substitution $x = y + e$, wo e irgend eine reelle Zahl bedeutet, in eine Gleichung $\Psi(y) = 0$ umgewandelt, deren Wurzeln um e kleiner sind als die Wurzeln von $\Phi(x) = 0$. Ordnet man $\Psi(y)$ nach steigenden Potenzen von y und betrachtet die e enthaltenden Ausdrücke, mit welchen $y^0, y^1, y^2 \cdots$ vervielfacht erscheinen, so ist, sagt Maclaurin, deren Bildungsweise offenbar, *patet*. Er beschreibt diese Bildungsweise, ohne sich der Differentialquotienten zu bedienen. Ahmen wir ihm darin nicht nach, sondern schreiben wir so, wie es gegenwärtig gebräuchlich ist, und wie es Maclaurin mit Fluxionspünktchen auch hätte thun können, so ist:

$$\Psi(y) = \Phi(e) + \Phi'(e) \cdot y + \frac{\Phi''(e)}{1 \cdot 2} \cdot y^2 + \cdots + \frac{\Phi^{(r)}(e)}{1 \cdot 2 \cdots r} \cdot y^r + \cdots.$$

Nun sei $\Phi(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \cdots$ und werde, während $K < L$ und beide reell sind, negativ durch $x = K$, positiv durch $x = L$. Das kann nur so erfolgt sein, dass von den Factoren $K-a$, $L-a$ oder $K-b$, $L-b$ oder $K-c$, $L-c$ u. s. w. mindestens einer das entgegengesetzte Zeichen besitzt als der ihm entsprechende, dass also z. B. $K-b$ negativ, $L-b$ positiv ausfällt, d. h. $K<b<L$ ist. Man besitzt also K und L als Wurzelgrenzen, zwischen welchen mindestens eine Wurzel $x = b$ liegt, und dieses b muss, fährt Maclaurin fort, reell sein. Complexe Wurzeln kommen, sagt er, paarweise vor; neben $x - m - \sqrt{-n^2}$ muss auch $x - m + \sqrt{-n^2}$ ein Factor von $\Phi(x)$ sein, also auch deren Product $(x-m)^2 + n^2$, und dieses ändert sein Zeichen nicht, mag $x = K$ oder $x = L$ gesetzt werden.

Maclaurin kehrt jetzt zu $\Phi(x) = \Psi(y) = \Phi(e) + \Phi'(e) \cdot y + \frac{\Phi''(e)}{1 \cdot 2} \cdot y^2 + \cdots = 0$ zurück unter Berücksichtigung einer Grössenordnung unter den Wurzeln von $\Phi(x) = 0$, sodass etwa $a<b<c<d<\cdots$. Setzt man das an sich beliebige $e = a$, so wird $\Phi(a) = 0$, und $\Psi(y) = 0$, deren Wurzeln $a-e, b-e, c-e, d-e \cdots$ jetzt $a-a=0$, $b-a$, $c-a$, $d-a \cdots$ sein werden, geht nach Weglassung des

gemeinsamen Factors y in $\Phi'(a) + \frac{1}{2}\Phi''(a)y \cdots = 0$ über, welche nach y nur noch vom Grade $n-1$ ist und erfüllt werden muss, wenn $y = b-a$, $y = c-a$, $y = d-a \cdots$. Dabei ist (wenn etwa als bestimmtes Beispiel $n = 4$ gewählt wird) in der nach y noch kubischen Gleichung $\Phi'(a) + \frac{1}{2}\Phi''(a)y + \frac{1}{6}\Phi'''(a)y^2 + y^3 = 0$ der y nicht mehr enthaltende Gleichungstheil $\Phi'(a)$ das negative Product der noch übrigen Wurzelwerthe $b-a$, $c-a$, $d-a$. Man hat also $\Phi'(a) = -(b-a)(c-a)(d-a)$ negativ wegen $a<b<c<d$.

Wird in $\Psi(y) = 0$ ferner $e = b$, $e = c$, $e = d$ eingesetzt, so entstehen noch drei weitere nach y kubische Gleichungen mit von y freien Gliedern, deren Vorzeichen bekannt sind:

$$\Phi'(b) + \frac{1}{2}\Phi''(b)y + \frac{1}{6}\Phi'''(b)y^2 + y^3 = 0$$

$$\Phi'(c) + \frac{1}{2}\Phi''(c)y + \frac{1}{6}\Phi'''(c)y^2 + y^3 = 0$$

$$\Phi'(d) + \frac{1}{2}\Phi''(d)y + \frac{1}{6}\Phi'''(d)y^2 + y^3 = 0$$

mit

$$\Phi'(b) = -(a-b)(c-b)(d-b) > 0$$

$$\Phi'(c) = -(a-c)(b-c)(d-c) < 0$$

$$\Phi'(d) = -(a-d)(b-d)(c-d) > 0.$$

Der Reihe nach ist $\Phi'(a)$, $\Phi'(b)$, $\Phi'(c)$, $\Phi'(d)$ negativ, positiv, negativ, positiv oder a und b, b und c, c und d sind die Grenzwerthe der drei reellen Wurzeln von $\Phi'(e) = 0$. Man kann daraus rückwärts schliessen, dass, wenn a', b', c' reelle Wurzeln von $\Phi'(e) = 0$ sind, ebenso reelle a, b, c, d vorhanden sein müssen, zwischen denen die a', b', c' liegen, und dass diese a, b, c, d reelle Wurzeln der um einen Grad höheren Gleichung $\Phi(x) = 0$ sind. Hat dagegen $\Phi'(e) = 0$ eine complexe Wurzel, so kann diese, wie oben gezeigt wurde, nicht zwischen zwei reellen Wurzelgrenzen liegen, d. h. auch $\Phi(x) = 0$ hat dann complexe Wurzeln. Man kann diese Schlüsse wiederholen und erhält das Ergebniss, dass wenn $\Phi^{(n-2)}(x) = 0$, welches eine quadratische leicht aufzulösende Gleichung ist, complexe Wurzeln besitzt, das Gleiche auch für $\Phi(x) = 0$ der Fall sein muss.

Fassen wir den Eindruck der beiden Abhandlungen Maclaurins, der zwischen beide fallenden Abhandlung Campbells, welche, wenn man auch an der Unabhängigkeit des Entstehens der Ergebnisse in Maclaurins zweiter Veröffentlichung nicht den geringsten Zweifel hegen kann, sicherlich ihr rasches Erscheinen hervorrief (S. 567) zusammen, so muss man sagen: diese Abhandlungen brachten Erläuterungen zu

Newtons Regel für die Auffindung der Anzahl complexer Wurzeln einer gegebenen Gleichung, behaupteten auch seine Regel beweisen zu können, blieben aber thatsächlich den Beweis schuldig und berührten nicht einmal die Schwierigkeit der Ausnahmefälle (S. 405). Ein grosser Fortschritt lag aber immerhin darin, dass ein Blick in die Entstehung der Newtonschen Regel eröffnet war.

Euler hat sich 1732 erstmalig mit algebraischen Fragen beschäftigt und die Abhandlung *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio*[1]) dem Druck übergeben. Er zeigt darin, wie die allgemeine Gleichung 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten} Grades jeweil auf eine Gleichung 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} Grades zurückgeführt werden kann, deren Wurzeln zur Bestimmung der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung Verwendung finden. Auflösende Gleichung, *aequatio resolvens*[2]) heisst bei Euler die Gleichung niedrigeren Grades, welche bei der Auflösung der Gleichung höheren Grades Unterstützung bringt, und der Name Resolvente ist allseitig angenommen worden. Für die Gleichungen 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten} Grades ist der Gedankengang folgender. Für $x^2 = a$ ist $z = a$ die Resolvente, und $x_1 = +\sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ sind die Gleichungswurzeln. Ein Glied ersten Grades nach x kann als weggeschafft gedacht werden, da man jede Gleichung von ihrem zweithöchsten Gliede befreien kann.

Deshalb heisst auch die allgemeine kubische Gleichung $x^3 = ax + b$. Zum Zwecke ihrer Lösung nimmt Euler als Wurzel $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ an. Durch Erhebung auf die 3. Potenz entsteht $x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3\sqrt[3]{AB} \cdot x + (A + B)$. Uebereinstimmung mit $x^3 = ax + b$ findet statt, wenn $3\sqrt[3]{AB} = a$ und $A + B = b$, oder wenn A und B die beiden Wurzeln der quadratischen Resolvente $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$ sind. Euler gibt dann neben der Wurzel $x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ die beiden anderen Wurzeln $x_2 = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$ und $x_3 = \nu\sqrt[3]{A} + \mu\sqrt[3]{B}$ an, wo $\mu \cdot \nu = 1$ und μ, ν die von 1 verschiedenen dritten Einheitswurzeln sind.

Bei $x^4 = ax^2 + bx + c$ setzt Euler $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ mit der Annahme A, B, C seien die Wurzeln der kubischen Resolvente $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, wo also $\alpha = A + B + C$, $\beta = AB + AC + BC$, $\gamma = ABC$ sein muss. Quadrirung von $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ liefert $x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC} = \alpha + 2(\sqrt{AB} + \sqrt{AC} + \sqrt{BC})$. Quadrirung von $x^2 - \alpha = 2(\sqrt{AB} + \sqrt{AC}$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 216—231. [2]) Ebenda pag. 220.

$+ \sqrt{BC})$ liefert sodann $x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4(AB + AC + BC) + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) = 4\beta + 8x\sqrt{\gamma}$ oder $x^4 = 2\alpha \cdot x^2 + 8\sqrt{\gamma} \cdot x + (4\beta - \alpha^2)$. Das ist die vorgelegte Gleichung, wenn $2\alpha = a$, $8\sqrt{\gamma} = b$, $4\beta - \alpha^2 = c$ oder $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$, $\gamma = \frac{b^2}{64}$ ist. Die Resolvente heisst also $z^3 = \frac{a}{2}z^2 - \frac{4c + a^2}{16}z + \frac{b^2}{64}$, und ihre drei Wurzeln A, B, C geben die vier Werthe: $x_1 = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$, $x_2 = \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $x_3 = -\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $x_4 = -\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}$. Daneben zeigt Euler, dass man auch eine kubische Resolvente mit den Wurzeln E, F, G zu bilden im Stande sei, sodass $x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$ die vorgelegte Gleichung befriedige.

Das gibt ihm die Vermuthung, es müsse zu jeder vom zweithöchsten Gliede befreiten Gleichung $x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \cdots$ eine Resolvente $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} - \cdots$ geben, zu welcher man mittels einer Substitution $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \cdots$ gelange, welche x als Summe von $n - 1$ Wurzelgrössen n^{ter} Ordnung auffasst. Freilich sei die Schwierigkeit, die Resolvente wirklich zu ermitteln, schon bei $n = 5$ eine für ihn noch unüberwindliche, er glaube indessen, die Aufgabe werde lösbar sein. Euler hat also hier nicht so richtig wie Leibniz (S. 117) in die Zukunft zu schauen gewusst, während sein Auflösungsversuch mit einem Tschirnhausschen Gedanken zusammentraf. Bei Versuchen solche Gleichungen aufzufinden, für welche es gelingt eine Resolvente niedrigeren Grades zu bilden, kommt Euler auf die reciproke Gleichung[1]) zu reden, d. h. auf eine solche, welche ihre Form nicht ändert, wenn ihre Unbekannte y mit $\frac{1}{y}$ vertauscht wird.

Die innerhalb jedes Kapitels im Allgemeinen von uns festgehaltene chronologische Anordnung nöthigt uns von Land zu Land hin und her und führt uns gegenwärtig nach Italien. Graf Fagnano, dessen Verdienste um die Integralrechnung uns (S. 485—492) bekannt geworden sind, hat sich in den Jahren 1735—1738 auch mit Algebra beschäftigt und Aufsätze darüber in dem 12., 13., 14., 15. 18. Bande der *Raccolta Calogerà* veröffentlicht[2]). Er gab damals unter Anderem zwei sehr eigenthümliche Vorschriften zur Auflösung dreigliedriger quadratischer Gleichungen. Erstens folgerte er aus $x^2 + b^2 = ax$, dass $\frac{2b}{a} = \frac{2bx}{x^2 + b^2}$, $\frac{4b^2}{a^2} = \frac{4b^2x^2}{(x^2 + b^2)^2}$, $1 - \frac{4b^2}{a^2} = \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right)^2$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 223. [2]) Loria in Histor. Festschr. 1899. S. 260—264.

sein müsse, mithin $\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{4b^2}{a^2}}$. Daraus folgt aber $\frac{x^2}{b^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a^2}}}{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a^2}}}$ u. s. w. Zweitens folgerte er, abermals von $x^2 + b^2 = ax$ ausgehend, dass $(x + b)^2 = (a + 2b)x$, $\frac{4b}{a + 2b} = \frac{4bx}{(x + b)^2}$, $1 - \frac{4b}{a + 2b} = 1 - \frac{4bx}{(x + b)^2}$ oder $\frac{a - 2b}{a + 2b} = \left(\frac{x - b}{x + b}\right)^2$. Nun hat man $\frac{x - b}{x + b} = \pm\sqrt{\frac{a - 2b}{a + 2b}}$ und $x = b \cdot \frac{\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}}{\sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}}$.

Wir gehen mit unseren Untersuchungen nach Deutschland. Abraham Gotthelf Kästner[1]) (1719—1800) sollte nach dem Wunsche seines Vaters, der Professor der Jurisprudenz in Leipzig war, sich der gleichen Wissenschaft widmen, verliess sie aber, um sich der Mathematik zuzuwenden und wurde 1739 Privatdocent in Leipzig, wo er neben der Mathematik auch Logik und Naturrecht vortrug. Im Jahre 1753 folgte er einer Berufung nach Göttingen, wo er bis zu seinem Tode blieb. Kästners grosse, nicht ganz unverdiente, aber doch im Verhältnisse zu seinen Entdeckungen in der Mathematik übertriebene Berühmtheit verdankt er wesentlich seinen Lehrerfolgen in Göttingen und denjenigen seiner Schriften, welche erst zu einer Zeit erschienen, die jenseits der Grenze unseres Bandes liegt. Seine vom 13. Mai 1739 datirte mathematische Dissertation, *Theoria radicum in aequationibus*, soll von Kästners Lehrer, Christian August Hausen[2]) (1693—1743) nicht sehr günstig beurtheilt worden sein, wohl aber sprach Euler, dem der junge Schriftsteller ein Exemplar zu übersenden wagte, seine Billigung der Arbeit aus. Wir möchten von der 31 Seiten starken Abhandlung nichts anderes sagen, als dass sie den Beweis liefert, dass Kästner die Engländer genau studirt hat, und dass er bestrebt war etwas einleuchtender darzustellen, was bei Maclaurin und Campbell über Grenzen der Gleichungswurzeln und über die Anzahl complexer Wurzeln ausgesprochen war. Auffallend erscheint gegenüber von Kästners späterer peinlicher Gewissenhaftigkeit in der Angabe von Quellen, dass weder Maclaurin noch Campbell genannt ist.

In Frankreich gehörte Jean Paul de Gua de Malves[3]) (etwa 1712—1785), den wir schon einigemal zu nennen hatten, einer alten, aber durch unglückliche Speculationen in der Zeit, während welcher

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XV, 439—446. [2]) Poggendorff I, 1034. [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris pour* 1786 (*Histoire* pag. 63—76).

der Finanzminister Law ganz Frankreich in eine Spielhölle verwandelt hatte, verarmten Adelsfamilie des Languedoc an. De Gua war Geistlicher dem Berufe nach und Mathematiker aus Neigung. Schon 1740 gab er ein Bändchen *Usages de l'Analyse de Descartes* heraus, über welches der Hauptsache nach im 114. Kapitel zu berichten sein wird. Auch für die Algebra ist etwas darin vorhanden, wovon wir im nächsten Kapitel bei Gelegenheit von Cramers Arbeiten von 1750 reden wollen, die Ersetzung von Newtons Parallelogramm durch ein Dreieck, und ausserdem eine gleich hier zu erwähnende Eliminationsmethode. Sie gehört dem zweiten Abschnitte des kleinen Werkes an[1]). Man solle, schreibt er vor, um zwischen drei gegebenen Gleichungen eine Unbekannte fortzuschaffen, die beiden ersten Gleichungspolynome durch das dritte dividiren und sich die bei diesen Divisionen bleibenden Reste merken. Mit diesen Resten hat man wieder in das dritte Gleichungspolynom zu dividiren und die abermaligen Reste zu merken u. s. w., bis Gleichungen erscheinen, welche die wegzuschaffende Unbekannte nicht mehr enthalten. Dieses Verfahren, dem Aufsuchen des grössten Gemeintheilers zweier Zahlen nachgebildet, wendet De Gua gleich in der ersten Aufgabe seines dritten Abschnittes[2]) an, um zu ermitteln, ob und unter welchen Bedingungen $x^2 - ax + b^2 = 0$ und $3x^2 - 2ax + b^2 = 0$ gemeinsame Wurzeln besitzen. Theilt man $3x^2 - 2ax + b^2$ durch $x^2 - ax + b^2$, so bleibt $ax - 2b^2$ als Rest. Theilt man dann $x^2 - ax + b^2$ durch $ax - 2b^2$, so bleibt $-b^2 + \frac{4b^4}{a^2}$, und dieser Rest $= 0$ gesetzt d. h. $b^2\left(\frac{2b}{a} + 1\right)\left(\frac{2b}{a} - 1\right) = 0$ ist die gesuchte Bedingung, welche mit $ax - 2b^2 = 0$ vereinigt die gestellte Frage beantwortet. Entweder ist $b = 0$ und $x = 0$, oder $b = \pm\frac{a}{2}$ und $x = \frac{a}{2}$.

Vermuthlich war es die Veröffentlichung des genannten in kleinstem Formate erschienenen, mehr inhaltsreichen als leicht oder angenehm lesbaren Buches, welches De Gua 1741 den Zutritt zur Pariser Akademie der Wissenschaften gewähren liess, und im gleichen Jahre 1741 legte er der Körperschaft, deren Mitglied er nunmehr war, zwei algebraische Abhandlungen vor. Sie bilden zugleich seine letzte hervorragende mathematische Leistung. Was er in den 44 späteren Lebensjahren hervorbrachte, hat keinen Platz in der Geschichte der Wissenschaften gefunden.

[1]) De Gua, *Usage de l'Analyse de Descartes* pag. 60. [2]) Ebenda pag. 351—352.

Der erste Aufsatz von 1741 *Démonstration de la Règle de Descartes*[1]) stellt sich die Aufgabe, die von Descartes angegebene Beziehung zwischen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in einem Gleichungspolynome und der möglichen Zahl positiver und negativer Gleichungswurzeln zu beweisen. Descartes (Bd. II, S. 796) hatte sich damit begnügt den Satz auszusprechen. Wallis (S. 4), mit sich selbst in Widerspruch tretend, hatte den Satz an einer Stelle für Thomas Harriot in Anspruch genommen, hatte an einer anderen Stelle Descartes den nicht minder ungerechten Vorwurf gemacht, sein Satz sei falsch, weil er die complexen Wurzeln ausser Acht lasse. Aber ob der Satz in der Beschränkung, in welcher Descartes, in welcher später Newton (S. 403) ihn aussprach, wahr sei, darum hatte fast kein Mathematiker in der Oeffentlichkeit sich gekümmert. De Gua beginnt mit einer geschichtlichen Einleitung, in welcher er Descartes gegen Wallis, aber auch gegen Fermat, gegen Rolle, gegen Saunderson[2]) (1682—1739), den seit seinem ersten Lebensjahre blinden Professor der Mathematik in Cambridge, in Schutz nimmt, von denen die Einen die Unrichtigkeit des Satzes in dem angegebenen Sinne der Unvollständigkeit behauptet, die Anderen die Urheberschaft Harriots, als von den Meisten anerkannt, vertreten hatten. Wir entnehmen De Gua[3]) auch, dass Prestet einen, wie er nachmals selbst zugestand, missglückten Versuch eines Inductionsbeweises des Descartesschen Satzes gemacht hatte. Einen Beweisversuch Segners von 1725, dessen wir am Schlusse des nächsten Kapitels gedenken wollen, kannte De Gua offenbar nicht. Nach der Einleitung geht De Gua zum eigentlichen Gegenstande über. Sind, sagt er in einem vorausgeschickten Lemma, F, G, H die Coefficienten lückenlos aufeinanderfolgender Glieder eines Gleichungspolynoms, welches wir wieder durch $\Phi(x)$ bezeichnen wollen, so ist immer $G^2 > FH$. Einen ähnlichen Satz hätten Maclaurin und Campbell auch schon bewiesen, aber er benutze ihn anders und habe sich deshalb nicht damit begnügen wollen, sich auf jene beiden Schriftsteller zu berufen. Ein Zusatz lässt die Ungleichung mit irgend einer Zahl p vervielfachen, natürlich nur unter der Voraussetzung, dass stets die absoluten Werthe in Rechnung treten[4]). Man hat also $pG^2 > pFH$, $\frac{pG}{H} > \frac{pF}{G}$. Setzt man nun $pF > G$ voraus, so geht die letzte Ungleichung in $\frac{pG}{H} > 1$ oder $pG > H$ über. De Gua führt alsdann einige Kunstausdrücke

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1741, pag. 72—96.
[2]) Poggendorff II, 754. [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1741, pag. 77. [4]) *n'ayant aucun égard aux signes + et —.*

ein. Zwei aufeinanderfolgende Zeichen, *Antécédant* und *Conséquent*, bilden eine Zeichencombination und zwar eine Permanenz oder eine Variation, d. h. eine Zeichenfolge oder einen Zeichenwechsel. Das Gleichungspolynom einer lauter reelle Wurzeln besitzenden Gleichung wird nun mit $x + p$ vervielfacht, wo $p > 0$. Das Product wird alsdann genau dieselbe Anzahl von Variationen besitzen wie $\Phi(x)$. Sei etwa in dem mit x^n links beginnenden $\Phi(x)$ beim Fortschreiten nach rechts $Fx^{n-m} - Gx^{n-m-1}$ die erste Variation, d. h. alle Glieder $x^n + \cdots + Fx^{n-m}$ sollen positiv sein. Nach Multiplication mit $x + p$ ist das x^{n-m+1} enthaltende Glied unbedingt positiv. Dann kommt $(pF - G)x^{n-m}$, auf welches $(-pG \pm H)x^{n-m-1}$ folgt, wenn in $\Phi(x)$ hinter $-Gx^{n-m-1}$ das Glied $\pm Hx^{n-m-2}$ stand. Erstens sei $pF - G < 0$, so findet gegen das Glied mit x^{n-m+1} eine Variation statt, der Zustand des ursprünglichen Gleichungspolynoms ist also hier unverändert. Zweitens sei $pF - G > 0$ und rufe eine vorher nicht vorhandene Permanenz hervor. War H in $\Phi(x)$ mit dem $-$ Zeichen behaftet als $-Hx^{n-m-2}$, und war demnach zwischen $-Gx^{n-m-1}$ und $-Hx^{n-m-2}$ eine Permanenz, so ist $-pG - H < 0$, also zwischen $pF - G$ und $-pG - H$ eine Variation entstanden, welche die vorher verloren gegangene ersetzt. War aber H mit dem in $\Phi(x)$ eine zweite Variation hervorrufenden $+$ Zeichen verbunden, so muss zwischen $pF - G$ und $-pG + H$ eine Variation stattfinden, weil nach dem oben erörterten Zusatze $pF > G$ nothwendig $pG > H$ zur Folge hat. Zwischen Gliedern in $\Phi(x)$ mit F, G, H als Coefficienten kann also höchstens eine Variation verloren gehen, nämlich die erste. Schreibt man $\Phi(x)$ und $(x + p)\Phi(x)$ in zwei Zeilen unter einander, so dass die höchsten Glieder x^n und x^{n+1} einander in ihrer Stellung entsprechen, so hat man:

$$\Phi(x) = x^n \quad + \cdots + Fx^{n-m} \quad - Gx^{n-m-1} + Hx^{n-m-2} \cdots,$$
$$(x+p)\Phi(x) = x^{n+1} + \cdots + F_1 x^{n-m+1} + G_1 x^{n-m} \quad - H_1 x^{n-m-1} \cdots,$$

als die Anfänge der beiden Zeilen. In der unteren Zeile steht hinter F_1 das entgegengesetzte Zeichen als in der oberen Zeile hinter F. So weit man die Glieder von $\Phi(x)$ verfolgt, werden, wenn fortlaufend Variationen vorhanden sind, ebensolche in $(x + p)\Phi(x)$ auftreten, bis einmal in $\Phi(x)$ eine Permanenz kommt. Diese verwandelt sich nach dem Bewiesenen in eine Variation, und die Gleichheit der Anzahl der Variationen in $\Phi(x)$ und $(x + p)\Phi(x)$ ist hergestellt. Hinter der Permanenz wird alsdann irgend eine neue Variation in $\Phi(x)$ gestatten, die gleichen Schlüsse neuerdings zu ziehen. Folgt überhaupt keine Permanenz mehr in $\Phi(x)$, wechseln die Glieder hinter

Hx^{n-m-2} fortwährend mit den Zeichen, so sieht der Schluss der beiden Zeilen so aus:

$$\Phi(x) = \cdots - Ix^{n-m-3} + Kx^{n-m-4} \cdots \pm Z,$$
$$(x+p)\Phi(x) = \cdots + I_1 x^{n-m-2} - K_1 x^{n-m-3} \cdots \mp Z_1 x \pm pZ,$$

d. h. am Ende der unteren Zeile tritt eine neue Variation ein, und die Gleichheit der Anzahlen von Variationen ist abermals hergestellt. Wird dagegen $\Phi(x)$ bei $p > 0$ mit $x - p$ vervielfacht, so bleibt die Anzahl der Permanenzen unverändert. Der Beweis wird mittelbar geführt. Aus $\Phi(x) = 0$ entsteht $\Phi(-y) = 0$ mit Wurzeln, welche den entgegengesetzten Werth wie die von $\Phi(x) = 0$ haben, indem x durch y ersetzt und jedem Gliede von ungrader Potenz das entgegengesetzte Vorzeichen beigelegt wird. Jede Permanenz wird dadurch in eine Variation, jede Variation in eine Permanenz übergeführt, und die neuen Variationen verändern ihre Anzahl nicht, wenn $\Phi(-y)$ mit $y + p$ vervielfacht wird. Rückeinsendung von $y = -x$ verwandelt abermals jede Variation in eine Permanenz und umgekehrt, und somit besitzen $\Phi(x)$ und $(x-p)\Phi(x)$ gleichviele Permanenzen. Aus den beiden Sätzen folgt aber von selbst die Descartessche Zeichenregel mit ausschliesslich reellen Wurzeln.

Eine Lücke hat De Guas Beweis, wie wir ihn wiedergaben, allerdings. Wir haben nur $pF \gtrless G$ und nicht $pF = G$ berücksichtigt. De Gua hat diese Möglichkeit keineswegs übersehen. Er sagt $pF = G$ lasse in $(x+p)\Phi(x)$ ein Glied zum Wegfall kommen, dessen Coefficient verschwinde. Ist nun die Anzahl der Variationen in $(x+p)\Phi(x)$ dieselbe wie in $\Phi(x)$, so lange der verschwundene Coefficient wegen $pF \gtrless G$ vorhanden war, beliebig wie klein positiv oder negativ er sein mochte, so kann kein Unterschied entstehen, mag das Verschwinden als $+0$ oder als -0 aufgefasst werden.

De Gua lässt dann seiner ersten Entwicklung sofort eine zweite folgen, welche einen geometrischen Gedankengang einschlägt, doch sind auch rein algebraische Sätze in diesem Anhange vorhanden wie der, dass eine Gleichung, deren Glieder sämmtlich gleiche Vorzeichen haben, unmöglich positive Wurzeln besitzen kann, dass das Fehlen von mehreren Gliedern nach einander das Vorhandensein complexer Wurzeln in sich schliesst u. s. w.

De Gua hat, wie wir (S. 577) sagten, 1741 noch einen zweiten Aufsatz in den Veröffentlichungen der Pariser Akademie zum Druck gegeben: *Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires*[1]). Auch in ihm steht ein umfangreicher geschichtlicher Ueberblick an

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1741, pag. 435—494.

der Spitze[1]) und rechtfertigt in noch höherem Grade als die Einleitung zum ersten Aufsatze unsere Erwähnung De Guas (S. 505) unter den Schriftstellern über Geschichte der Mathematik. Man darf getrost sagen, dass De Gua die meisten damals im Drucke vorhandenen Schriften über Algebra kannte, und dass er ungleich Wallis, gegen welchen er ziemlich scharf vorgeht, bemüht war, jedem Verfasser seinen ihm gebührenden Antheil an den Fortschritten der Algebra zuzuschreiben, ohne sich durch nationale Zuneigung oder Abneigung blenden zu lassen. Das Dogmatische des Aufsatzes[2]) ist ähnlich wie der Anhang des ersten Aufsatzes von 1741, nämlich geometrisch behandelt. Ist die Gleichung $\Phi(x) = 0$ zu untersuchen, so betrachtet De Gua die parabolische Curve $y = \Phi(x)$, deren Durchschnitte mit der Abscissenaxe in allen den Punkten stattfinden, deren Entfernungen von dem Coordinatenanfangspunkte reelle positive oder negative Wurzeln von $\Phi(x) = 0$ sind. Zwischen je zwei Durchschnittspunkten gibt es **mindestens ein reelles Maximum**[3]), und De Gua versteht darunter offenbar einen Curvenpunkt, dessen Ordinate ihrer absoluten Länge nach grösser ist als die gleichfalls absoluten Längen der Ordinaten der Nachbarpunkte. De Gua sagt dieses zwar

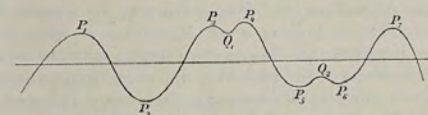

Fig. 96.

nicht ausdrücklich, aber dass er (Fig. 96) alle Punkte P als reelle Maxima betrachtet, geht daraus hervor, dass er bemerkt, im Maximum wie im Minimum sei $dy = 0$, aber im Maximum sei y mit ddy von entgegengesetztem Zeichen, beziehungsweise sei das Product $y \cdot ddy$ negativ[4]). Im Minimum findet sich dann $y \cdot ddy$ positiv, und das ist in den Punkten Q der Fall. Unter allen Umständen gibt es mindestens ein Maximum zwischen je zwei Durchschnitten der Curve mit der Abscissenaxe, und die Anzahl der reellen Wurzeln, d. h. der Durchschnitte, ist höchstens um die Einheit grösser, als die der reellen

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1741, pag. 435—458. [2]) Ebenda pag. 458—494. [3]) *il est impossible qu'entre deux intersections il n'y ait au moins un maximum réel.* [4]) *dans le maximum y et ddy doivent être de signe différent, ou, ce qui est la même chose, le produit yddy doit y être négatif.*

Maxima, welche man folglich zu ermitteln hat. Man hat zu diesem Zwecke $y' = \Phi'(x)$ zu bilden und die Wurzeln von $\Phi'(x) = 0$ zu suchen, d. h. von einer Gleichung, deren Grad um die Einheit niedriger ist, als der von $\Phi(x) = 0$. Complexe Wurzeln von $\Phi'(x) = 0$ fallen weg; ebenso fallen diejenigen reellen Wurzeln weg, welche $\Phi(x) \cdot \Phi''(x)$ positiv werden lassen, und kommt dann eine Zahl von weniger als $n - 1$ Maximalstellen heraus, so hat $\Phi(x) = 0$ sicherlich complexe Wurzeln. Das ist der Grundgedanke von De Guas weiteren Untersuchungen, welche dem entsprechend nicht zu algebraischen Entscheidungsgründen nach Art der Descartesschen Regel führen, wie Newton, wie Maclaurin, wie Campbell sie aufzustellen bestrebt waren, sondern zu geometrischen.

Wir haben (S. 576) von einer ersten algebraischen Veröffentlichung Kästners gesprochen. Eine zweite: *Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series* folgte ihr 1743. Sie beschäftigte sich mit dem Newtonschen Parallelogramme. Kästner hat sie später in seine Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, deren erste Ausgabe 1759 erschien, aufgenommen, und wer besondere Neigung dazu fühlt, mag Kästners fast unerträglich breite Darstellung in jenem Werke nachlesen[1]), welches ungleich verbreiteter als der Urtext der Abhandlung ist. Wir ziehen vor, im nächsten Kapitel über einen 1748 in England durch Maclaurin in seiner Algebra gegebenen Beweis für das Newtonsche Parallelogramm zu berichten, welcher bei grösster Uebersichtlichkeit in seinem Grundgedanken mit dem Kästners sehr nahe übereinstimmt. Dass daraus aber geschlossen werden wollte, Maclaurin habe vorher die Kästnersche Abhandlung kennen gelernt, dagegen verwahren wir uns aufs Höchste. Wir sind im Gegentheil von Maclaurins Unabhängigkeit durchaus überzeugt.

Eine dritte algebraische Abhandlung Kästners von 1745, gleich den vorerwähnten als besondere Druckschrift erschienen, führt den Titel: *Demonstratio theorematis Harrioti.* Im Eingang bemerkt Kästner, es gebe schon zwei Beweise in Deutschland für den Satz von der möglichen Anzahl positiver und negativer Wurzeln einer Gleichung, sie rührten von Segner und Stübner her. Für Segner und seine Abhandlung von 1725 haben wir schon (S. 578) auf den Schluss des nächsten Kapitels verwiesen. Wir wiederholen diese Verweisung. Friedrich Wilhelm Stübner[2]) (1710—1736) aus Bayreuth wurde

[1]) Kästner, Analysis endlicher Grössen. 3. Ausgabe. 1794. S. 419 bis 476. [2]) Allgemeine deutsche Biographie XXXVI, 712—713. Artikel von S. Günther.

mit 20 Jahren auf Grund der von Kästner genannten Arbeit Privatdocent in Leipzig. Seine Thätigkeit war eine ungemein grosse trotz Kränklichkeit aller Art. Er betheiligte sich insbesondere lebhaft an dem Streite über die Schätzung des Kraftmasses. Die Abhandlung von 1730 kennen wir nur dem Namen nach. Dieser aber zeigt, wie Segners Schrift von 1725, wie die Kästners von 1745, dass die deutschen Gelehrten damals unter dem Banne des durch Wallis verbreiteten Irrthums standen und Harriot ein Verdienst beimassen, welches er nie besessen hat. Kästner betrachtet neben der Curve $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \cdots + tx + u = y$ auch deren Differentialcurve, *curva differentialis*, $nx^{n-1} + (n-1)px^{n-2} + (n-2)qx^{n-3} + \cdots + t = z$ und bemerkt $z = 0$ finde statt, wenn y einen Grenzwerth, *limes*, erhalte, d. h. Maximum oder Minimum sei. Es könne y bei n reellen Werthen von x zu Null werden, z bei $n - 1$ reellen Werthen von x, und seien $y = 0$ und $z = 0$ Gleichungen in x mit lauter reellen Wurzeln, so müssen die Werthe von x, welche $z = 0$ machen, einen abwechselnd positiven und negativen Werth von y hervorbringen. Man sieht, dass Kästner sich ganz ähnlicher Betrachtungen bedient, wie De Gua sie anstellte, als er die Anzahl reeller Gleichungswurzeln untersuchte. Kästner geht nun weiter, indem er annimmt, in $z = 0$ seien m Zeichenwechsel, *permutationes*, vorhanden und genau ebensoviele positive Wurzeln. Er behauptet, auch y müsse alsdann genau ebensoviele positive Wurzeln als Zeichenwechsel besitzen. Der Beweis beruht auf zwei Voraussetzungen. Erstens ist in jeder vollständigen Gleichung, deren höchstes Glied immer als positiv angenommen wird, die Zahl der Zeichenwechsel grad, wenn die Schlussconstante positiv, ungrad, wenn letztere negativ ist. Zweitens bedingt die positive, beziehungsweise negative Schlussconstante, dass die Curve bei $x = 0$ über, beziehungsweise unter der Abscissenaxe liegen muss. Hat nun $z = 0$, wie angenommen, m positive Wurzeln, so besitzt die Curve $y = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \cdots$ auf der positiven Abscissenseite m Limesstellen, um mit Kästner zu reden, durch welche die Anzahl der Durchschnittspunkte mit der Absissenaxe bestimmt wird. Bei $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gradem}}{\text{ungradem}}$ m und positiver Constante hat $y = 0$ genau $\genfrac{}{}{0pt}{}{m}{m+1}$ positive Wurzeln, bei $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gradem}}{\text{ungradem}}$ m und negativer Constante ist die Zahl der positiven Wurzeln $\genfrac{}{}{0pt}{}{m+1}{m}$. Nun schliesst dass Gleichungspolynom z mit $\pm t$. Ist $+t$ vorhanden, so muss m grad, bei $-t$ dagegen m ungrad sein. Das Gleichungspolynom y schliesst mit $\pm tx \pm u$, so dass vier Fälle zu unterscheiden sind. Sie liefern Folgendes:

Bei $\begin{array}{l} +tx+u \\ +tx-u \\ -tx+u \\ -tx-u \end{array}$ ist m $\begin{array}{l} \text{grad} \\ \text{grad} \\ \text{ungrad} \\ \text{ungrad} \end{array}$ und die Anzahl der positiven Wurzeln von $y=0$ ist $\begin{array}{l} m \\ m+1 \\ m+1 \\ m \end{array}$, während die Anzahl der Zeichenwechsel $\begin{array}{l} m \\ m+1 \\ m+1 \\ m \end{array}$ ist. Die Gleichung ersten Grades $x-a=0$ hat aber einen Zeichenwechsel und eine positive Wurzel, und nun schliesst Kästner auf die Wahrheit des Satzes bei immer höherem Gleichungsgrade.

106. Kapitel.

Algebra seit 1746.

War nunmehr seit 1741 der Beweis der Descartesschen Zeichenregel gegeben und damit die theoretische Algebra wesentlich gefördert, so war doch die eigentliche Grundlage der Lehre von den Gleichungen noch nicht gesichert. Albert Girard hatte zwar 1629 ausgesprochen, dass jede Gleichung so viele Wurzeln besitze als ihr Grad anzeige (Bd. II, S. 788). Descartes hatte 1737 den Satz einschränkend gesagt, jede Gleichung könne so viele unterschiedene Wurzeln oder Werthe besitzen, als ihr Grad zu erkennen gebe (Bd. II, S. 794 bis 795). Newton hatte nicht minder vorsichtig in seiner *Arithmetica universalis* behauptet, eine Gleichung könne so viele Wurzeln haben, als der Exponent ihres Grades besage, jedenfalls nicht mehr (S. 403). Bewiesen hatte Niemand, wie es sich mit der Anzahl der Gleichungswurzeln verhalte, wenn man alle Wurzeln, positive, negative und complexe, als gleichberechtigt ansehe, und in welcher Beziehung jedes Gleichungspolynom zu einfacheren Factoren stehe.

Euler dürfte der Erste sein, von dem wir bestätigen können dass er der Frage näher trat. Im December 1742 schrieb er[1]) von Berlin aus an den in Petersburg befindlichen Goldbach, er sei mit Niclaus I Bernoulli in einem Briefwechsel über die Integration von Ausdrücken von der Gestalt $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots}dx$ begriffen. Es komme auf die Zerlegung des Ausdruckes in Partialbrüche an, und zu diesem Zwecke auf die Zerlegung des Nenners in Factoren.

[1]) *Correspondance mathématique* (Fuss) I, 170—171.

Er fährt dann fort: Weil aber öfters einige von diesen factoribus imaginarii werden, so hatte ich angemerkt, dass, da alle factores imaginarii immer numero pares sein müssen, dieselben auch so beschaffen sind, dass je zween mit einander multiplicirt ein productum reale geben. An diesem Satze zweifelte nun letztens der H. Bernoulli und glaubte, dass es solche formulas gebe, deren factores imaginarii nicht diese Eigenschaft hätten. Euler verweilt dann noch bei einem einzelnen Beispiele und fasst dann seine Meinung in dem Lehrsatz zusammen:

Omnem expressionem algebraicam $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\cdots$ *in factores reales simplices* $p+qx$, *vel saltem in factores reales quadratos* $p+qx+rx^2$ *resolvi posse.*

Er könne, meint er, ihn ungefähr beweisen, aber nicht mit aller Strenge. Ein Brief von Niclaus I. Bernoulli an Euler[1]) vom Ende November 1743 geht etwas auf die betreffende Zerlegung ein. Im gleichen Jahre 1743 erschien Eulers Abhandlung *De integratione aequationum diefferentialium altiorum graduum*[2]), in welcher wiederholt von den binomen Factoren ersten Grades und von den trinomen Factoren zweiten Grades eines Gleichungspolynoms mit reellen Coefficienten, während auch in den Factoren nur reelle Coefficienten vorkommen, die Rede ist. D'Alembert fasste das so auf, als kündige Euler damit an, seine Bemühungen die Zerlegbarkeit zu beweisen seien mit Erfolg gekrönt, und er wandte sich nun selbst dem zu, was man sich in späterer Zeit gewöhnt hat, das Fundamentaltheorem der Algebra zu nennen. Die Frucht davon war ein Abschnitt einer 1746 in den Berliner Veröffentlichungen gedruckten Abhandlung über die Integration rationaler Brüche[3]). Auch für D'Alembert war, wie für Euler, die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche die wichtigere Aufgabe, um derenwillen der Nenner in einfachste reelle Factoren zerlegt werden sollte.

D'Alembert, ein Mathematiker, der an Tiefe des Geistes keinem der Zeitgenossen nachsteht, dessen Darstellungsgabe dagegen, insbesondere wenn man in der Lage ist, inhaltlich verwandte Arbeiten von D'Alembert und Euler zu vergleichen, das Lob grosser Klarheit und Verständlichkeit kaum erwerben dürfte, hat den Anfang seiner Untersuchung in ein geometrisches Gewand gekleidet und spricht infolge dessen von imaginären Ordinaten und imaginären Curvenpunkten mit einer Unbefangenheit, welche beim Erscheinen der

[1]) *Correspondance mathématique* (Fuss) II, 711—713. [2]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 193—242. [3]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746, pag. 182—191.

Abhandlung und noch mehr als ein halbes Jahrhundert später Anstoss erregen musste, so dass beispielsweise Gauss in seiner berühmten Doctordissertation von 1799, welche gleichfalls dem Beweise des erwähnten Fundamentaltheorems der Algebra gewidmet war und als Einleitung alle entsprechenden Versuche früherer Schriftsteller einer strengen Prüfung unterzog, D'Alemberts geometrische Sprache, wenn man so sagen darf, ins Analytische zu übersetzen für nothwendig hielt. D'Alembert nimmt ein rechtwinkliges Coordinatensystem der z und y an, welches in T seinen Anfangspunkt besitzt, und auf welches er eine Curve bezieht, welche durch T hindurchgeht, d. h. also, deren Gleichung durch $y=0$, $z=0$ erfüllt wird. D'Alembert erwähnt zwar[1]) auch die Möglichkeit eines Zusammentreffens von $z=0$ mit $y=\infty$, welches TZ als Asymptote der Curve erkennen lasse, kommt aber im Verlaufe der Abhandlung nicht mehr darauf zurück. In jener Voraussetzung, dass die Curve durch T gehe, müsse es thunlich sein eine, so lange z sehr klein ist, sehr convergente Reihenentwicklung $y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{t}{u}} + \cdots$ anzusetzen, in welcher die Exponenten wachsen, $\frac{m}{n} < \frac{r}{s} < \frac{t}{u} < \cdots$ ist. Die andere nur einmal angedeutete Möglichkeit von $y=\infty$ bei $z=0$ würde bedungen haben, dass m und vielleicht auch noch Zähler anderer Exponenten negativ gewählt worden wären. Mittels jener Reihe macht jedes z, wenn es nur positiv ist, y zu einer reellen Grösse. Ein negatives z entspricht entweder auch einem reellen y, wenn alle Nenner $n, s, u\cdots$ der gebrochenen Exponenten ungrad sind, oder einem imaginären y, wenn mindestens einer der Nenner $n, s, u \cdots$ grad und der zugehörige Zähler $m, r, t\cdots$ ungrad ist. Neben der reellen Curve in der positiven Ausdehnung der z-Axe gibt es also einen reellen oder imaginären Curvenarm bei negativer z-Axe. Da, wie schon bemerkt, die Reihe für y bei sehr kleinem z sehr rasch convergirt, so genügt es, statt der unendlichen Reihe nur ein Glied oder wenige Glieder derselben zu berücksichtigen. Bei negativem z wird dann $y = p + q\sqrt{-1}$, und zwar verändert sich y nur unendlich wenig, wenn das Gleiche für z statt hat. Unendlich geringe Veränderung von $p+q\sqrt{-1}$ heisst aber unendlich geringe Veränderung von p und von q. Bezüglich der für y angesetzten Form $p+q\sqrt{-1}$ erörtert D'Alembert in einem anderen Abschnitte der Abhandlung von 1746 den Satz, dass **jede Function von beliebig vielen imaginären Grössen immer als $p+q\sqrt{-1}$ mit reellem p und q gedacht werden kann.** Er gelangt sogar zur Behauptung,

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746, pag. 183.

das Differential $f(x+y\sqrt{-1})d(x+y\sqrt{-1})$ lasse sich stets in der Form $dp+\sqrt{-1}dq$ darstellen[1]). Die Möglichkeit jede Function von $a+b\sqrt{-1}$ als $A+B\sqrt{-1}$ auszudrücken hatte D'Alembert auch in einer Berliner Preisschrift von 1746 *Réflexions sur la cause générale des vents*[2]) ausgesprochen. Nach Erledigung der vorher angegebenen Vorbemerkungen nimmt D'Alembert ein Polynomium $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx + g$ als gegeben an. Gibt es kein reelles x, welches $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx = -g$ also das Polynomium zu 0 macht, so wird doch die reelle Substitution $x=h$ den Werth $h^m + ah^{m-1} + bh^{m-2} + \cdots + fh = A$ hervorbringen und $h^m + ah^{m-1} + bh^{m-2} + \cdots + fh - A = 0$ erscheinen lassen. Ein imaginärer Werth für x eingesetzt wird $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx$ mit einem bald reellen, bald complexen, jedenfalls von A verschiedenen Werthe hervortreten lassen, und dieser muss bei allmählicher Aenderung irgend einmal $-g$ heissen. Dann wird aber bei Einsetzung dieses $p+q\sqrt{-1}$ statt x der Ausdruck $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx + g = 0$. Ist $p+q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung, so muss auch $x=p-q\sqrt{-1}$ eine solche sein, d. h. das Gleichungspolynom muss sich sowohl durch $x-p-q\sqrt{-1}$ als durch $x-p+q\sqrt{-1}$ theilen lassen[3]).

Gauss hat dazu bemerkt, dass, wenn alle anderen Schlüsse D'Alemberts zugegeben werden könnten, was unter gewissen Voraussetzungen der Fall sei, die Behauptung doch nicht gerechtfertigt sei, dass wenn eine Function $\Phi(x)$ einen Werth S erhalte, einen Werth U nicht erhalte, es einen Werth T zwischen S und U geben müsse, den $\Phi(x)$ erreiche, aber nicht übersteige. Es sei vielmehr möglich, dass $\Phi(x)$ dem T zustrebe, ohne es zu erreichen.

Ein anderer französischer Mathematiker war **Alexis Fontaine**[4]) (gegen 1705—1771). Zu Clavaison in dem Dauphiné geboren und in der Provinz erzogen, kam Fontaine gegen 1729 nach Paris, wo erstmalig eine Geometrie in seine Hände fiel, die er unter nur geringer Beihilfe des Jesuitenpaters **Louis Bertrand Castel**[5]) (1688 bis 1757) durchstudirte. So war Fontaine in der Hauptsache sein eigener Lehrer und ohne genauere Kenntnisse dessen, was die Wissenschaft schon geleistet hatte. Er ward verschiedentlich Nacherfinder, ohne es zu wissen, nannte etwaige Vorgänge nur ausnahmsweise und

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746, pag. 195. [2]) Darauf hat R. **Baltzer** in Crelle's Journal XCIV, 87 hingewiesen. [3]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746, pag. 190. [4]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1771 (*Histoire* pag. 105—116 und pag. 125—129). [5]) **Poggendorff** I, 393—394.

war in Streitigkeiten von rücksichtsloser Derbheit. Im Jahre 1765 verkaufte er seine Bibliothek, welche er vermöge seines geschilderten Bildungsganges und seiner Natur nur selten benutzte, und zog sich im gleichen Jahre nach Cuiseaux in Burgund zurück, nachdem 1764 seine wichtigsten, theilweise bis 1739 zurückgehenden Arbeiten über Differentialgleichungen u. s. w. in einem Sammelbande gedruckt worden waren. Er veröffentlichte 1747 eine Abhandlung über die Auflösung von Gleichungen[1]). Zuerst ist der ihren Zweck verfehlenden Regeln zur Auffindung der Anzahl reeller und complexer Gleichungswurzeln gedacht, welche Newton, Maclaurin, Campbell, De Gua aufgestellt hätten. Allen diesen Schrifstellern sei es misslungen den richtigen Weg einzuschlagen, der einzig in der Anfertigung einer Tabelle bestehe. Seien $m, n, p, q, r \cdots$ reelle positive Grössen und $a > b > c \cdots$ ebensolche. Jede quadratische Gleichung mit positivem, den Coefficienten 1 besitzenden quadratischen Gliede muss in einer der sechs Formen enthalten sein: $x^2 + mx + n = 0$, $x^2 + mx - n = 0$, $x^2 - mx + n = 0$, $x^2 - mx - n = 0$, $x^2 + n = 0$, $x^2 - n = 0$. Sie kann auf neun Arten aus Factoren ersten Grades entstanden sein: $(x + a)(x + b) = 0$, $(x + a)(x - b) = 0$, $(x - a)(x + b) = 0$, $(x - a)(x - b) = 0$, $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1}) = 0$, $(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1}) = 0$, $(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1}) = 0$, $(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1}) = 0$, $(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1}) = 0$. Alle diese Multiplicationen werden ausgeführt, und das Product wird auf das Vorzeichen sowie auf die vergleichsweise Grösse der Coefficienten der Glieder ersten und nullten Grades geprüft. Dadurch ergeben sich Bedingungen für $\pm m$ und $\pm n$, aus deren Erfüllung die Form der Wurzeln jeder vorgelegten quadratischen Gleichung hervorgeht. Bei der cubischen Gleichung zählt Fontaine 36 mögliche Fälle von Factorenvereinigungen auf. Wie viele solcher Fälle es bei Gleichungen 4^{ten}, 5^{ten} u. s. w. Grades gebe, führt er nicht mehr aus. Nun sind aber auch die aufgezählten Fälle nicht erschöpfend, da sie von der Voraussetzung $a > b > c > \cdots$ ausgehen, während $a \geqq b \geqq c \geqq \cdots$ erwogen werden müsste. Fontaines Vorschlag setzt unter allen Umständen eine Summe von Vorarbeiten, welche erledigt sein müssen, bevor eine Gleichung n^{ten} Grades, bei $n > 3$, auf die Form ihrer Wurzeln geprüft werden kann, voraus, die so ungeheuerlich anwächst, dass man sich einen praktischen Vortheil kaum versprechen darf.

Maclaurin sprach 1729 von seiner Absicht eine Algebra herauszugeben (S. 567). Er starb 1746, ohne seine Absicht ausgeführt zu haben. Sein Nachlass wurde von einer durch ihn selbst eingesetzten Commission, in welcher auch Martin Folkes sich befand, gesichtet und daraus 1748 die Algebra[1]) zum Drucke befördert. Sie füllt 366 Seiten in 8°, und ein mit neuer Seitenbezeichnung versehener Anhang von 65 Seiten über algebraische Curven schliesst sich ihr an. Von diesem Anhange reden wir im 115. Kapitel. Die eigentliche Algebra wollte Maclaurin, wie die Herausgeber erklären, als einen Commentar zu Newtons Arithmetica universalis betrachtet wissen, und somit dürfte unseren Lesern empfohlen werden, unseren hier folgenden Bericht mit dem über das Newtonsche Werk (S. 395 bis 409) zu vergleichen.

Eine negative Grösse, sagt Maclaurin, wird kleiner als Nichts genannt (S. 395), weil sie der positiven Grösse entgegengesetzt ist und dieselbe bei der Vereinigung beider vermindert, während die Addition von 0 keinerlei Wirkung ausübt, aber ein Negatives ist deshalb nicht weniger eine wirkliche Grösse als ein Positives[2]).

Maclaurin beweist die Zeichenregel bei der Multiplication und die Multiplications- und Divisionsregeln bei Brüchen. In ersterer Beziehung[3]) geht er aus von $a - a = 0$. Weil $n \cdot 0 = 0 = na - na$ ist, muss auch $n(a - a) = na + n(-a) = 0$ sein, d. h. $n(-a) = -na$. Ebenso ist jedenfalls $(-n)a = -na$. Ferner muss $-n(a - a) = -n \cdot 0 = 0 = -na + na$ sein, neben $-n(a - a) = -na + (-n)(-a)$, d. h. $(-n)(-a) = na$. Der Beweis für die Bruchrechnungsregeln ist folgender[4]): Sei $\frac{a}{b} = m$ (folglich $bm = a$) und $\frac{c}{d} = n$ (folglich $dn = c$). Multiplication der beiden gefolgerten Gleichungen gibt $ac = bm \cdot dn = bd \cdot mn$ und $\frac{ac}{bd} = mn = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$. Ferner $mbd = ad$, $nbd = bc$, $\frac{ad}{bc} = \frac{mbd}{nbd} = \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Potenziren mit ganzzahlig positivem Exponenten heisst *Involution*[5]). Sie wird nach dem binomischen Lehrsatze gelehrt[6]). Wurzelausziehung heisst *Evolution*[7]), und über den Nachweis der Berechtigung, auch hier den binomischen Lehrsatz anzuwenden, setzt

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1747, pag. 665—677.

[1]) *A treatise of algebra in three parts containing I. the fundamental rules and operations, II. the composition and resolution of equations of all degrees and the different affections of their roots, III. the application of algebra and geometry to each other. To which is added an appendix concerning the general properties of geometrical lines.* [2]) Maclaurin, Algebra pag. 7: *But a Negative is to be considered not less as a Real Quantity than the Positive.* [3]) Ebenda pag. 13. [4]) Ebenda pag. 29. [5]) Ebenda pag. 34. [6]) Ebenda pag. 38—41. [7]) Ebenda pag. 42.

sich Maclaurin mit den kurzen Worten hinweg, der vorher für die Involution angegebene allgemeine Lehrsatz diene auch für die Evolution[1].

Für die Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten werden Regeln und Beispiele gegeben. Die *Extermination* von Unbekannten vollzieht sich nach der Combinationsmethode (S. 400), neben welcher auch andere Kunstgriffe, z. B. Addition von Gleichungen in Anwendung treten. Maclaurin sieht sich aber auch in einem besonderen Kapitel[2] die Form der Werthe solcher Unbekannten an, welche aus zwei, aus drei und aus vier Gleichungen ersten Grades ermittelt wurden, und erkennt, dass sie alle in Gestalt von Brüchen erscheinen, deren Nenner identisch sind[3]. Er ist sogar dem Bildungsgesetze der Zähler mit Einschluss des Vorzeichens der einzelnen Glieder in Zähler und Nenner fast mehr als nur auf der Spur, und wäre er nicht einer zweckmässigen Bezeichnung, wie Leibniz sie in einem Briefe an De L'Hospital (S. 111) einzuführen wusste, wie er sie aber auch im Jahre 1700 in einem grade in England unzweifelhaft bekannt gewordenen Aufsatze dringend empfahl (S. 329), man möchte fast sagen geflissentlich aus dem Wege gegangen, so hätte er die Erfindung der Determinantenlösung von Gleichungen zu seinen übrigen zahlreichen Verdiensten hinzufügen können.

Maclaurin geht zu den Wurzelgrössen über, bespricht die Eigenschaften, welche aus der Gemeinschaft oder Nichtgemeinschaft von Theilern für zwei Zahlen hervorgehen, und beweist den Satz[4], dass die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl wieder eine ganze Zahl oder irrational sein muss. Dann kommt er zur Wurzelausziehung aus selbst mit Irrationalitäten behafteten Binomien[5] (S. 399). Sei $A > B$ und die c^{te} Wurzel aus $A \pm B$ zu ziehen, welche in der Form $x \pm y$ angenommen wird. Dann ist $(x \pm y)^c = x^c \pm cx^{c-1}y + dx^{c-2}y^2 \pm ex^{c-3}y^3 + \cdots$. Eine zweite Annahme setzt $x^c + dx^{c-2}y^2 + \cdots = A$, $cx^{c-1}y + ex^{c-3}y^3 + \cdots = B$, wodurch in der That $(x+y)^c = A+B$, $(x-y)^c = A - B$ wird. Vervielfachung der beiden Gleichungen mit einander liefert $(x^2 - y^2)^c = A^2 - B^2$, $x^2 - y^2 = \sqrt[c]{A^2 - B^2} = n$. Ein angenäherter Werth von $\sqrt[c]{A+B}$ (oder von $x + y$) sei r, so wird $\frac{n}{r} = \frac{x^2 - y^2}{x+y} = x - y = 2x - (x+y) = 2x - r$ und $2x = r + \frac{n}{r}$, ein Werth, den man zu berechnen im Stande ist und der

[1] Maclaurin, Algebra pag. 51. [2] Ebenda pag. 81—85. [3] Ebenda pag. 84. [4] Ebenda pag. 103. [5] Ebenda pag. 120—124.

$2t$ genannt wird, so dass $x = t = \frac{r + \frac{n}{r}}{2}$. Man entnimmt daraus $x^2 = t^2 = \left(\frac{r + \frac{n}{r}}{2}\right)^2$, $y^2 = x^2 - (x^2 - y^2) = t^2 - n$, $y = \sqrt{t^2 - n}$, $x \pm y = \sqrt[c]{A \pm B} = t \pm \sqrt{t^2 - n}$. Voraussetzung dieser Entwicklung war freilich, dass sich $A^2 - B^2$ als eine c^{te} Potenz enthüllte, welche $\sqrt[c]{A^2 - B^2} = n$ zu finden gestattete. Ist dieses nicht der Fall, so sei Q eine ganze Zahl, welche $Q(A^2 - B^2)$ zu einer c^{ten} Potenz macht, z. B. $A^2 - B^2 = a^m b^p df$ und $Q = a^{c-m} b^{c-p} d^{c-1} f^{c-1}$. Wäre $c < m$, so könnte man allerdings mittels dieser Annahme zu keinem ganzzahligen Q gelangen, wohl aber mittels der Annahme $Q(A^2 - B^2) = (a^\mu)^c b^c d^c f^c$, welche $Q = a^{\mu c - m} b^{c-p} d^{c-1} f^{c-1}$ liefert und eine derartige Wahl von μ zulässt, dass $\mu c > m$ wird. Hat man Q gefunden, so setzt man $\sqrt[c]{(A^2 - B^2)Q} = n$. Man würde dann weiter nach der vorigen Regel verfahren, um $\sqrt[c]{(A \pm B)\sqrt{Q}} = t \pm \sqrt{t^2 - n}$ zu finden und endlich $\sqrt[c]{A \pm B} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ erhalten. Ist A oder B imaginär, so verweist Maclaurin auf De Moivre. Wir kommen im 109. Kapitel auf den Gegenstand zurück.

Alle diese Dinge gehören noch dem I. Abschnitte der Algebra von den Grundregeln und Operationen an. Der II. Abschnitt handelt von der Zusammensetzung und Auflösung von Gleichungen jedes Grades und von Eigenschaften ihrer Wurzeln.

Jede Gleichung kann als das Product so vieler Gleichungen ersten Grades angesehen werden als ihr Grad anzeigt, oder als das Product irgend anderer Gleichungen, wenn nur die Summe ihrer Dimensionen mit der Dimension der vorgelegten Gleichung übereinstimmt[1]. Keine Gleichung kann eine ihren Grad übersteigende Anzahl von Wurzeln besitzen[2] (S. 403). Sind in einer Gleichung n^{ten} Grades $-p$, q, $-r$, s, $-t$, $u \cdots$ die Coefficienten der auf x^n folgenden Glieder, so ist p die Summe der Wurzeln, q die Summe der aus ihnen zu je zweien gebildeten Producte[3] u. s. w. Sind weiter B, C, D, E die Summen der 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten}, 5^{ten} Potenzen der Wurzeln, so können diese mittels p, q, r, s, t berechnet werden[4] (S. 406). Zunächst ist $p^2 = B + 2q$, also $B = p^2 - 2q$. Dann ist $(B - q)p = C - 3r$, also $C = Bp - pq + 3r = p^3 - 3pq + 3r$. Aehnlicher Weise können $D = pC - qB + pr - 4s$, $E = pD - qC + rB - ps + 5t$

[1] Maclaurin, Algebra pag. 132. [2] Ebenda pag. 135. [3] Ebenda pag. 140—141. [4] Ebenda pag. 142—143.

und auf dieselbe Art die Summen irgend welcher Potenzen der Wurzeln gefunden werden, da das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke auf der Hand liegt[1]). Maclaurin kommt zum Schlusse des II. Abschnittes in einem besonderen Kapitel auf den Gegenstand zurück[2]). Nennen wir das Gleichungspolynom immer wieder $\Phi(x)$ und sei $\Phi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots - Lx + M$ und $r \geq n$. Multiplicirt man $\Phi(x) = 0$ mit x^{r-n}, so entsteht $x^r - Ax^{r-1} + \cdots + Mx^{r-n} = 0$, welche Gleichung ebenso wie die $\Phi(x) = 0$, durch $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d \cdots$ erfüllt werden muss, d. h. es muss sein:

$$\begin{array}{lcl} a^r - Aa^{r-1} + \cdots + Ma^{r-n} = 0 & & a^r = Aa^{r-1} - \cdots - Ma^{r-n} \\ b^r - Ab^{r-1} + \cdots + Mb^{r-n} = 0 & \text{und} & b^r = Ab^{r-1} - \cdots - Mb^{r-n} \\ c^r - Ac^{r-1} + \cdots + Mc^{r-n} = 0 & & c^r = Ac^{r-1} - \cdots - Mc^{r-n} \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Werden die Gleichungen addirt und ersetzen wir, was Maclaurin nicht thut, jede Summe der k^{ten} Potenzen aller Gleichungswurzeln durch ein einfaches Zeichen, etwa durch S_k, so entsteht $S_r = AS_{r-1} - BS_{r-2} + \cdots - MS_{r-n}$. Dann bedarf es freilich noch eines längeren Beweises dafür, dass ein ähnlicher Satz auch gilt, wenn $r < n$ und Maclaurin führt ihn. Doch wir kehren zu der früheren Stelle des II. Abschnittes zurück.

Der Satz von den Zeichenfolgen und Zeichenwechseln ist zwar nicht bewiesen, aber doch erläutert[3]), und bei dieser Gelegenheit sind für die quadratische und kubische Gleichung Unterfälle erörtert, welche einigermassen mit der von Fontaine geforderten Tabelle sich decken. Aus irgend einer Gleichung n^{ten} Grades kann mittels einer Substitution, welche selbst auf einer Gleichung ersten Grades beruht, das Glied vom Grade $n-1$ und mittels einer Gleichung μ^{ten} Grades das Glied vom Grade $n-\mu$ entfernt werden[4]). Das Fehlen des Gliedes vom Grade $n-1$ lässt die Folgerung ziehen[5]), dass die Gleichung positive und negative Wurzeln besitze, welche bei der Addition einander gegenseitig aufheben.

Die Lehre von den vielfachen Wurzeln geht davon aus, dass eine Gleichung $F(x) = x^n + \cdots + bx^2 + ax + k = 0$ unter der Voraussetzung $k = 0$ eine Wurzel $x = 0$, unter der Voraussetzung $a = k = 0$ zwei Wurzeln $x = 0$ besitzen muss u. s. w. Nun setzt man $x = y + e$ in $F(x) = 0$ ein, so dass $F(y+e) = 0$ entsteht, deren Wurzeln

[1]) *And after the same Manner the Sum of any Powers of the Roots may be found; the Progression of these Expressions of the Sum of the Powers being obvious.* [2]) Maclaurin, Algebra pag. 286—296. [3]) Ebenda pag. 143 bis 147. [4]) Ebenda pag. 153 und 157. [5]) Ebenda pag. 155.

$y = x - e$ sein müssen. Das neue Gleichungspolynom schliesst mit den beiden Gliedern $F'(e)y + F(e)$. Ist $x = e$ eine Wurzel von $F(x) = 0$, so muss $y = 0$ eine Wurzel von $F(y+e) = 0$ sein, und dazu ist wiederum $F(e) = 0$ erforderlich. Ist $x = e$ zweifache Wurzel von $F(x) = 0$, so muss $y = 0$ zweifache Wurzel von $F(y+e) = 0$ sein. Dieses bedingt neben $F(e) = 0$ auch $F'(e) = 0$ oder e ist alsdann gemeinsame Wurzel für $F(x) = 0$ und $F'(x) = 0$, und das ist die Huddesche Regel, deren Erfinder allerdings bei Maclaurin ebensowenig genannt ist als Rolle in dem Kapitel über Wurzelgrenzen, während dieses eine unmittelbare oder mittelbare Abhängigkeit von Rolle (S. 407) vermuthen lässt.

Eine Regel[1]) scheint Maclaurin selbst anzugehören. Er setzt $x = y + e$ in $\Phi(x) = 0$ ein, so dass $\Phi(y+e) = f(y) = 0$ entsteht. Kann man e so wählen, dass $f(y)$ aus lauter positiven Gliedern besteht, so kann kein positives y die Gleichung $f(y) = 0$ erfüllen, d. h. es zeigt sich $x = y + e < e$, und e ist eine obere Grenze für x. Der Vortheil einer solchen oberen Grenze ist besonders offenkundig, wenn man Gleichungswurzeln mit Hilfe der Factoren der Gleichungsconstante zu ermitteln beabsichtigt[2]), weil so unter Umständen gewisse Factoren von vorn herein von der Prüfung ausgeschlossen sind.

Newtons Methode, einen Factor von $\Phi(x)$ zu ermitteln (S. 395 bis 399), ist ziemlich genau in der gleichen Art bewiesen, wie es von Niclaus I Bernoulli geschah[3]). Letzterer Beweis ist (S. 398) 1745 in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoull veröffentlicht worden, kann also sehr wohl zur Kenntniss Maclaurins, welcher 1746 starb, gekommen sein.

y^7	y^7x	y^7x^2	y^7x^3	y^7x^4	y^7x^5	y^7x^6	y^7x^7
y^6	y^6x	y^6x^2	y^6x^3	y^6x^4	y^6x^5	y^6x^6	y^6x^7
y^5	y^5x	y^5x^2	y^5x^3	y^5x^4	y^5x^5	y^5x^6	y^5x^7
y^4	y^4x	y^4x^2	y^4x^3	y^4x^4	y^4x^5	y^4x^6	y^4x^7
y^3	y^3x	y^3x^2	y^3x^3	y^3x^4	y^3x^5	y^3x^6	y^3x^7
y^2	y^2x	y^2x^2	y^2x^3	y^2x^4	y^2x^5	y^2x^6	y^2x^7
y	yx	yx^2	yx^3	yx^4	yx^5	yx^6	yx^7
0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7

Fig. 97.

In den II. Abschnitt seiner Algebra hat Maclaurin ferner einen Gegenstand mit hineingezogen[4]), von welchem in Newtons Arithmetica universalis keine Rede ist, die Entwicklung einer Grösse in eine nach Potenzen einer anderen Grösse fortschreitenden Reihe, ausgehend von einer zwischen beiden Grössen stattfindenden Gleichung, und als Mittel zum Zwecke das Newtonsche Parallelogramm (S. 107—108). Der Grundgedanke dieser (Fig. 97)

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 170—171. [2]) Ebenda pag. 191—192. [3]) Ebenda pag. 198. [4]) Ebenda pag. 244—274.

Anordnung von Producten von Potenzen von x und y ist der, dass die Glieder einer Horizontalreihe, die einer Verticalcolumne, aber auch die irgend einer Schrägreihe eine geometrische Progression bilden. Eine solche Schrägreihe, dadurch gekennzeichnet, dass eine gerade Linie die linken unteren Eckpunkte der die Reihe bildenden Felder vereinigt, ist z. B. y^7, y^5x, y^3x^2, yx^3, in der jedes Folgeglied durch Vervielfachung des vorhergehenden Gliedes mit $\frac{x}{y^2}$ entsteht. Irgend ein späteres Glied einer solchen horizontalen oder verticalen oder schrägen Reihe entsteht aus einem anderen Gliede derselben Reihe durch Vervielfachung mit $\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right)^\nu$, wo α, β, ν ganze positive Zahlen sind, α oder β auch Null sein können. Ist der Werth irgend zweier Reihenglieder derselbe, so wird $\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right)^\nu = 1$ sein, also auch $\frac{x^\alpha}{y^\beta} = 1$, $x^\alpha = y^\beta$, d. h. durch die Annahme $x^\alpha = y^\beta$ werden alle Glieder der betreffenden Reihe einander gleich. Ihr Grad wird alsdann durch den Grad des Gliedes bestimmt, an dessen linken unterem Eckpunkte die erwähnte grade Linie beginnt. Ist beispielsweise $\frac{x}{y^2} = 1$, so nehmen alle Felder der in der Figur bezeichneten Schrägreihe den Werth y^7 an. Die gleiche Annahme bringt aber jedes Glied oberhalb der Schrägreihe auf höheren, jedes Glied unterhalb der Schrägreihe auf niedrigeren Grad als die Glieder der Reihe selbst. So macht $\frac{x}{y^2} = 1$ wieder beispielsweise y^3x^4 zu y^{11} und y^2x zu y^4 mit $11 > 7 > 4$. Dieses Gesetz, dessen Wahrheit aus der Bildungsweise der einzelnen Reihen hervorgeht, hat die Folge, dass wenn das Lineal, dessen Benutzung Newton wünscht, in der von ihm vorgeschriebenen Art angelegt wird, eine solche Hilfsgleichung zwischen x und y entsteht, welche den niedrigsten Grad nach y hervorbringt, also als massgebend für eine erste Annäherung der Entwicklung von x in eine nach steigenden Potenzen von y fortschreitenden Reihe unter der Voraussetzung, dass y sehr klein ist, gelten darf.

Wegen der Bestimmung der Anzahl der einer Gleichung genügenden complexen Wurzeln ist ausser auf Newton auch auf die Abhandlungen von Maclaurin und von Campbell in den P. T. verwiesen[1]). Von De Gua ist keine Rede.

Wir gelangen zu dem kürzesten III. Abschnitte von den gegen-

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 279.

seitigen Anwendungen von Algebra und Geometrie auf einander, aus welchem wir uns begnügen zwei Dinge hervorzuheben. Die gewöhnliche Parabel $ay = x^2$ und die cubische Parabel $a^2y = x^3$ unterscheiden sich (Fig. 98) wesentlich in ihrer Gestalt[1]). Zwar haben beide je zwei unendliche Zweige, aber bei der ersteren Curve erstrecken sich dieselben auf der positiven, bei der zweiten auf der positiven und negativen Seite in die Unendlichkeit. Dieselbe Verschiedenheit findet zwischen $a^{2\nu-1}y = x^{2\nu}$ und $a^{2\nu}y = x^{2\nu+1}$ statt, und die grade Linie $y = x$ ist unter die Parabeln der zweiten Gattung zu rechnen, die sich auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe nach entgegengesetzter Richtung in die Unendlichkeit erstrecken.

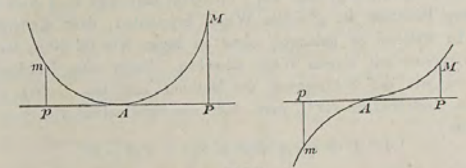

Fig. 98.

Alle Kegelschnitte haben Gleichungen zweiten Grades[2]) und lassen sich nach der Form der Glieder zweiten Grades unterscheiden. Diese heissen bei der Parabel $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$, bei der Ellipse $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{pc^2}{2ta^2}x^2$, bei der Hyperbel $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{pc^2}{2ta^2}x^2$, wovon es nur eine Abweichung gibt, welche eintritt, wenn die Hyperbel auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogen ist, in welchem Falle in der Gleichung mindestens eine der beiden Grössen x^2, y^2 fehlt.

Wir haben (S. 509) des 1748 durch De Castillon überwachten Druckes von Eulers zweibändigem Meisterwerke der *Introductio in Analysin infinitorum* gedacht. Der I. Band der *Introductio* (mit diesem abgekürzten Titel pflegt man sich zu begnügen) enthält eine algebraische Analysis, und wir verwenden das 111. Kapitel zum Berichte darüber mit Einschluss dessen, was eigentlich der Algebra angehören würde, was wir aber nicht aus seinem Zusammenhange reissen wollen. Der II. Band der Introductio ist eine analytische Geometrie und wird uns im 115. Kapitel beschäftigen. Aber auch im II. Band

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 317—318. [2]) Ebenda pag. 329—336.

ist ein Kapitel, und zwar das 19. von den **Durchschnittspunkten der Curven**, der Hauptsache nach algebraischen Inhaltes, und wir wollen ihm gleich hier unsere Aufmerksamkeit schenken. Sind zwei Curven durch ihre auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichungen gegeben, so verlangt die Auffindung der Durchschnittspunkte das gemeinsame Stattfinden beider Gleichungen, also das Auffinden von Wurzelpaaren x, y aus zwei diese Unbekannten enthaltenden Gleichungen höheren Grades. Euler benutzt dazu zwei Wege.

Der eine ist derjenige, von welchem wir (S. 114) die Vermuthung aussprachen, Tschirnhaus möge sich seiner bedient haben, weil wir auf ihm uns bewegend genau das Eliminationsergebniss erhielten, zu welchem Tschirnhaus gelangt war. Vielleicht darf man auch Newton als einen Benutzer des gleichen Weges betrachten, denn Endergebnisse, zu welchen er gelangte, ohne zu sagen wie (S. 400), lassen sich wiederum auf diesem Wege erreichen. Unter allen Umständen begegnen wir der Schilderung der Methode erst bei Euler. Er schreibt ausdrücklich vor[1]), man solle die Elimination von y z. B. zwischen

$$\text{I.}\quad P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0$$

und

$$\text{II.}\quad p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0$$

so vollziehen, dass man die erste Gleichung mit p, die zweite mit P vervielfache und deren Differenz durch y theile, dass man ferner die Differenz der mit t vervielfachten ersten und der mit T vervielfachten zweiten Gleichung bilde, wodurch zwei Gleichungen dritten Grades in y erscheinen, welche Euler abgekürzt

$$\text{III.}\quad A + By + Cy^2 + Dy^3 = 0$$
$$\text{IV.}\quad a + by + cy^2 + dy^3 = 0$$

schreibt. Die Fortsetzung des ähnlichen Verfahrens führt zum Gleichungspaare

$$\text{V.}\quad E + Fy + Gy^2 = 0$$
$$\text{VI.}\quad e + fy + gy^2 = 0$$

dann zu

$$\text{VII.}\quad H + Iy = 0$$
$$\text{VIII.}\quad h + iy = 0,$$

endlich zu

$$\text{IX.}\quad Hi - Ih = 0.$$

Euler fügt hinzu, dass, wenn man in die Gleichung IX. die vorher abgekürzten Werthe wieder in ihrer unabgekürzten Form einsetze, eine Gleichung entstehe, in welcher nur noch die Functionen P, p,

[1]) Euler, *Introductio* II, § 482.

Q, q u. s. w. aus I. und II. enthalten seien. Bei der allmählichen Wiedereinsetzung zeigten sich der ganzen Gleichung gemeinschaftliche Factoren, welche weggelassen werden könnten, und es enthalte dann in der Endgleichung jedes Glied nicht mehr als acht Buchstaben, vier grosse und vier kleine.

Der zweite von Euler gezeigte Weg ist folgender[1]). Die Gleichungen, zwischen denen y eliminirt werden soll, heissen

$$\text{I.}\quad Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \cdots = 0$$
$$\text{II.}\quad py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \cdots = 0.$$

Nun wird eine positive ganze Zahl k gewählt, von der man zunächst nur verlangt, dass sie sowohl $> m$ als auch $> n$ sei. Dann hat man I. mit $py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + \cdots$ sowie II. mit $Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + \cdots$ zu vervielfachen, wo A, a, B, b u. s. w. vorläufig noch unbestimmte Functionen von x bedeuten. Man erhält so zwei neue Gleichungen, welche beide vom k^{ten} Grade nach y sind, und in denen $k - m + k - n = 2k - m - n$ Buchstaben A, a, B, $b \cdots$ vorkommen. Die Gleichungen selbst heissen:

$$\text{Ia.}\quad Ppy^k + (Pa + Qp)y^{k-1} + (Pb + Qa + Rp)y^{k-2} + \cdots = 0$$
$$\text{IIa.}\quad Ppy^k + (Pq + Ap)y^{k-1} + (Pr + Rq + Sp)y^{k-2} + \cdots = 0.$$

Bildet man ihre Differenz:

$$(Pa + Qp - Pq - Ap)y^{k-1} + (Pb + Qa + Rp - Pr - Rq - Sp)y^{k-2} + \cdots = 0,$$

so hat diese neue Gleichung $k - 1$ Glieder, in welchen y vorkommt, und eines, welches von y frei ist. Sind die Coefficienten jener $k - 1$ ersten Glieder $= 0$, so bleibt nur das von y freie Glied $= 0$ zu setzen, um das Eliminationsergebniss zu besitzen. Allerdings setzt das voraus, dass das Verschwindenlassen von $k - 1$ Coefficienten genüge, um $2k - m - n$ Grössen zu bestimmen, d. h. es muss sein $k - 1 = 2k - m - n$, $k = m + n - 1$, so dass die multiplicirenden Gleichungen $py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + \cdots = 0$ und $Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} \cdots = 0$ heissen. Eine weitere Voraussetzung, welche Euler aber unerwähnt lässt, ist die, dass das Verfahren nicht etwa Identitäten oder sonstige Unbestimmtheiten hervorbringe.

Noch im Erscheinungsjahre 1748 der Introductio beschäftigte sich Euler in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie[2]) abermals mit der Eliminationsaufgabe, indem er den Nachweis zu führen suchte, dass eine Curve m^{ten} und eine Curve n^{ten} Grades

[1]) Euler, *Introductio* II, § 483—484. [2]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748, pag. 234—248.

mn Durchschnittspunkte besitzen, wenn man imaginäre und im Unendlichen gelegene Durchschnittspunkte mit einrechne. Er will also zeigen, dass die Elimination von x zwischen den Gleichungen

$$ay^m + (b + cx)y^{m-1} + (d + ex + fx^2)y^{m-2} + \cdots = 0$$

und $$\alpha y^n + (\beta + \gamma x)y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^2)y^{n-2} + \cdots = 0,$$

wo a, α, b, β u. s. w. Constante bedeuten, eine Gleichung mn^{ten} Grades in y hervorbringe. Meistens, sagt er[1]), gelangt man unter Anwendung der gewöhnlichen Eliminationsmethoden zu einer Gleichung, deren Grad mn übersteigt, und man könnte dadurch an der Richtigkeit des zu beweisenden Satzes irre werden. Wenn auch Theiler der Gleichung, zu welcher man auf diesem Wege gelangt, vorhanden sind, so darf man zunächst zweifeln, ob man jene Theiler zu vernachlässigen berechtigt sei, ob sie nicht Wurzeln enthalten, denen Durchschnittspunkte entsprechen. In dieser Bemerkung Eulers dringt, wie bei Rolle (S. 393), durch den ausgesprochenen Zweifel das Bewusstsein von einer Aufgabe fremden, nur durch ein Verfahren mit den Gleichungen in dieselbe hineingetragenen Wurzeln. Euler macht nun einen neuen Vorschlag[2]) zur Elimination. Die beiden Gleichungen, zwischen welchen diesmal y eliminirt werden soll, seien $y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - \cdots = 0$ und $y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - \cdots = 0$. Die erstere Gleichung hat m Wurzelwerthe für y, welche $A, B, C, D \cdots$, die letztere n Wurzelwerthe für y, welche $a, b, c, d \cdots$ heissen mögen und selbstverständlich x enthalten, ebenso selbstverständlich reell oder imaginär sein können. Die beiden Gleichungen können demgemäss auch $(y - A)(y - B)(y - C)(y - D) \cdots = 0$ und $(y - a)(y - b)(y - c)(y - d) \cdots = 0$ geschrieben werden. Das gleichzeitige Stattfinden beider Gleichungen fordert, dass ein Werth von y, der der ersten genügt, auch die zweite befriedige, dass also z. B. $A = a$ oder $A = b$ oder $A = c$ oder $A = d \cdots$ sei, oder $B = a$ oder $B = b$ oder $B = c$ oder $B = d \cdots$ u. s. w., wofür auch geschrieben werden kann $A - a = 0$, $A - b = 0$, $A - c = 0 \cdots$, $B - a = 0$, $B - b = 0$ u. s. w. und Nullsetzung des aus mn Factoren bestehenden Productes $(A - a)(A - b)(A - c) \cdots (B - a)(B - b) \cdots (C - a)(C - b) \cdots$ würde die von y freie Endgleichung sein, wenn $A, B, C \cdots, a, b, c \cdots$ bekannt wären. Letzteres ist zwar nicht der Fall, aber man kann entweder die grossen oder die kleinen Buchstaben sofort und die anderen hinterdrein wieder aus der Endgleichung herausschaffen. Es

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748, pag. 239. [2]) Ebenda pag. 243—246.

war $(y - a)(y - b)(y - c) \cdots = y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - \cdots$. Ersetzt man y durch A, durch B, durch $C \cdots$, so wird $(A - a)(A - b)(A - c) \cdots = A^n - pA^{n-1} + qA^{n-2} - \cdots$, $B - a)(B - b)(B - c) \cdots = B^n - pB^{n-1} + qB^{n-2} - \cdots$, $(C - a)(C - b)(C - c) \cdots = C^n - pC^{n-1} + qC^{n-2} - \cdots$ und die Endgleichung heisst folglich

$$(A^n - pA^{n-1} + qA^{n-2} - \cdots)(B^n - pB^{n-1} + qB^{n-2} - \cdots)$$
$$(C^n - pC^{n-1} + qC^{n-2} - \cdots) \cdots = 0.$$

Führt man die angedeuteten Multiplicationen aus, so entsteht ein Ausdruck, in welchem neben Bekanntem auch Vereinigungen der grossen Buchstaben $A, B, C \cdots$ unter einander auftreten. Diese sind aber mittels der Girardschen Formeln für die Summen der Wurzelpotenzen in Verbindung mit den Formeln für Bildung der Gleichungscoefficienten aus den Wurzeln durch die $P, Q, R \cdots$ darzustellen. Euler erläutert dann die sehr allgemein gehaltene Vorschrift an einem bestimmten Beispiele, indem er dazu bemerkt[1]), wenn in dem Beweise noch Einiges dunkel sei, so rühre solches von der grossen Allgemeinheit der Betrachtungen her, und alle Zweifel schwänden bei der Anwendung auf besondere Fälle. Es ist klar, dass diese Bemerkung die Lücken eines Beweises nicht auszufüllen im Stande ist und nur dazu dienen kann, als Eingeständniss eines noch nicht ganz einwandfreien Beweises zu gelten.

Der nächste Band der Veröffentlichungen der Berliner Akademie für 1749 empfiehlt sich unserer Aufmerksamkeit durch zwei Abhandlungen, deren erste von einer uns noch fremden Persönlichkeit herrührt. Johann Samuel König[2]) (1712—1757) war der Sohn eines Berner Theologen gleichen Namens, der wegen religiöser Streitigkeiten aus der Heimath verbannt als Hofprediger in Büdingen eine Zuflucht gefunden hatte. Dort wurde der Sohn geboren, der aber dann in Bern erzogen wurde und durch seine dortige Beliebtheit wesentlich mitbewirkte, dass dem Vater die Rückkehr gestattet wurde. Seine mathematischen Studien machte König seit 1730 in Basel unter Johann und Daniel Bernoulli und Jacob Hermann, dann 1735 in Marburg unter Christian Wolf. In Basel waren Alexis Claude

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748, pag. 246. [2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 147—182. J. H. Graf, Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in Bernischen Landen. III. Heft, 1. Abtheilung. S. 23—62. Ueber den Streit Königs mit Maupertuis vergl. die Festrede von Diels zur Feier des 27. Januar 1898 in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie und C. J. Gerhardt: Ueber die vier Briefe von Leibniz, die Samuel König 1753 veröffentlicht hat (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1898, I, 419).

Clairault und Pierre Louis Moreau de Maupertuis seine Studiengenossen. Von 1738 an war König einige Jahre in Paris Hauslehrer der Marquise De Châtelet (1706—1749), an deren Arbeiten er nicht ohne Antheil gewesen ist. Eine feste Anstellung zu finden gelang König weder im Auslande noch in der Schweiz. In der Schweiz traf ihn sogar 1744 das Verbannungsurtheil aus Gründen der Politik. Nun bemühten sich Daniel Bernoulli und Euler für König. Stellungen in Berlin, in Petersburg wurden ihm angeboten, er entschied sich für Franecker und verblieb nun bis zu seinem frühen Lebensende in Holland in verschiedenen Stellungen. Dort begann 1751 der heftige Streit mit Maupertuis über das Princip der kleinsten Action, welcher ein Seitenstück zu dem Prioritätsstreite zwischen Newton und Leibniz genannt werden kann, und in welchem die Berliner Akademie dem gleichen Fehler einseitiger Parteinahme für ihren Präsidenten verfiel, den 50 Jahre früher die Royal Society begangen hatte. Wir freuen uns, nicht genöthigt zu sein, unseren Lesern auch diesen hässlichen Zwist ausführlich zu erzählen, diese Pflicht fällt nur dem Geschichtsschreiber der Mechanik zu. Gleichwohl durfte der Streit, der so viel garstigen Staub aufgewirbelt hat, nicht ganz unerwähnt gelassen werden, wo der Name Königs uns begegnet. Er begegnet uns, wie schon gesagt, als Verfasser eines Aufsatzes von 1749 über den wirklichen Grund der Unzulänglichkeit der Del Ferroschen Formel im irreductiblen Falle der kubischen Gleichung[1]).

Die von ihrem quadratischen Gliede befreite kubische Gleichung kann als $x^3 \pm qx - r = 0$ mit positivem q und r dargestellt werden, denn $x^3 \pm qx + r = 0$ geht durch $x = -y$ in die vorige Form über und hat also die gleichen nur mit -1 vervielfachten Wurzeln. Von den allein zu unterscheidenden Formen:

$$\text{A.}\quad x^3 + qx - r = 0$$

$$\text{B.}\quad x^3 - qx - r = 0$$

lässt A. immer auf zwei complexe Wurzeln schliessen und B., vorausgesetzt dass alle Wurzeln reell seien, auf eine positive und zwei negative Wurzeln, wofür sich König auf den Satz von den Zeichenwechseln beruft. Das Fehlen des quadratischen Gliedes bedeutet, dass die eine positive Wurzel so gross ist wie die zwei negativen Wurzeln zusammen, dass sie mithin den absolut grössten Werth unter den drei Wurzeln besitzt. Der irreductible Fall kann sonach unter alleiniger Beachtung von B., wofür man auch

$$\text{C.}\quad x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$$

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749, pag. 180—192.

schreiben darf, untersucht werden und nun folgt eine ausführliche Erörterung der Grössebeziehungen zwischen a und c, welche stattfinden müssen, damit C. die erwähnten drei reellen Wurzeln besitze, auf die wir aber nicht eingehen.

Der gleiche Band der Berliner Veröffentlichungen schliesst eine Arbeit Eulers[1]) über die imaginären Gleichungswurzeln in sich. Euler stellt sich hier die gleiche Aufgabe, mit welcher sich D'Alembert (S. 585—586) im Jahre 1746 beschäftigt hatte. Er nennt diesen Vorgänger auch einmal[2]), indem er erklärt, D'Alembert habe in seiner vortrefflichen Abhandlung von 1746 über die Integralrechnung über allen Zweifel erhoben, dass jede imaginäre Gleichungswurzel, von wie verwickelter Zusammensetzung sie sein möge, sich stets auf die Form $M + N\sqrt{-1}$ mit reellen M und N zurückführen lasse. Er tadelt nur, dass D'Alembert das Unendlichkleine in seine Darstellung mit aufgenommen habe und liefert Beweise des gleichen Satzes, die von dem durch ihn gerügten Mangel frei seien. Er zeigt also erst, dass algebraische Operationen, dann aber auch[3]), dass alle bekannten transcendenten Operationen die durch sie hervorgebrachten imaginären Grössen in dem Rahmen jener Form belassen. Was dagegen D'Alemberts Nachweis der Existenz von Gleichungswurzeln betrifft, so spricht Euler davon mit keiner Silbe. Wir möchten glauben, er habe D'Alemberts Schlüsse nicht für zwingend gehalten und doch den schwachen Punkt in ihnen nicht aufzudecken vermocht, deshalb habe er, ohne ein Wort des Lobes noch des Tadels für diesen Theil der Arbeit von 1746, versucht, eine andere seiner Meinung nach einwandfreie Beweisführung an deren Stelle zu setzen.

Drei Sätze[4]) sind in geometrischer Gestalt vorgetragen. Eine Curve $y = x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \cdots + N$ mit ganzzahlig positivem Exponenten m und reellen Coefficienten $A, B, C \cdots N$ hat bei jedem reellen Werthe der Abscisse x einen und nur einen reellen Werth von y. Bei $x = \infty$ wird $y = \infty$, bei $x = -\infty$ wird $y = -\infty$. Die Curve liegt also auf der positiven Abscissenseite im Unendlichen oberhalb, auf der negativen Abscissenseite im Unendlichen unterhalb der Abscissenaxe. Die rechts und links in die Unendlichkeit sich erstreckenden Curvenzweige stehen aber in stetiger Verbindung[5]), die Curve muss also die Abscissenaxe einmal oder mehrere Mal schneiden, und wenn mehrere Mal, so muss die Zahl

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749, pag. 222—288. [2]) Ebenda pag. 257. [3]) Ebenda pag. 265 sqq. [4]) Ebenda pag. 232—235. [5]) *Cette branche [de la courbe audessous de l'axe] étant continue avec l'autre située audessus de l'axe.*

der Schnittpunkte, in welchem $y = 0$ ist, ungrad sein. Folglich hat erstens die Gleichung $x^{2m+1} + Ax^{2m} + \cdots + N = 0$ jedenfalls eine reelle Wurzel, vielleicht eine grössere, dann aber ungrade Anzahl von solchen. Die Curve $y = x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \cdots + N$ dagegen liefert $y = \infty$ sowohl wenn $x = \infty$ als wenn $x = -\infty$. Ihre unendlichen Zweige liegen rechts wie links oberhalb der Abscissenaxe und die Curve schneidet die Abscissenaxe in einer graden Anzahl von Punkten oder gar nicht. Mithin hat zweitens die Gleichung $x^{2m} + Ax^{2m-1} + \cdots + N = 0$ eine grade Anzahl von reellen Wurzeln oder gar keine. Ist die Constante N wesentlich negativ, etwa $N = -O^2$, und fragt man nach der Gestalt der Curve, $y = x^{2m} + Ax^{2m-1} + \cdots - O^2$, so ist, wie wir soeben zeigten, $y = \infty$, sowohl wenn $x = \infty$ als wenn $x = -\infty$. Bei $x = 0$ ist $y = -O^2$, d. h. die Curve befindet sich unter dem Coordinatenanfangspunkte, dann aber im Unendlichen sowohl rechts als links oberhalb der Abscissenaxe, die Curve muss daher die Abscissenaxe sowohl rechts als links vom Coordinatenanfangspunkte mindestens einmal schneiden, d. h. drittens die Gleichung $x^{2m} + Ax^{2m-1} + \cdots - O^2 = 0$ hat mindestens eine positive und eine negative Wurzel.

Gegen diese Sätze, welche Euler selbst im I. Bande seiner Introductio in dessen 2. Kapitel schon in analytischer Erörterung ausgesprochen hatte, ist niemals der geringste Einwand erhoben worden. Wohl aber ist Eulers weitere Beweisführung von Gauss in der gleichen Abhandlung, in welcher D'Alemberts Untersuchungen bemängelt wurden (S. 586—587), als nicht widerspruchslos erkannt worden, und wir können nicht besser thun als den Bericht über Eulers Gedankengang nebst dem, was darin zweifelhaft erscheint, Gauss zu entnehmen. Auch in der Bezeichnung folgen wir Gauss, während die Eulers selbst etwas davon verschieden ist.

Euler will das vom zweithöchsten Gliede befreite Gleichungspolynom grader Ordnung in zwei Factoren halb so hoher Ordnung zerfällen, also $X = x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \cdots + M$ als Product von $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} + \cdots$ und $x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} + \cdots$ darstellen. Die beiden Factoren enthalten $2m - 1$ unbekannte Coefficienten, und genau ebensoviele Coefficienten kommen in X vor. Vervielfacht man die beiden Factoren mit einander und vergleicht ihr Product gliedweise mit X, so entstehen $2m - 1$ Gleichungen, und nun will bewiesen werden, es sei möglich, aus ihnen reelle Werthe von $u, \alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu, \cdots$ zu entnehmen. Wäre u als bekannt angenommen, so könnte man, behauptet Euler, alle anderen Coefficienten $\alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu, \cdots$ rational in u ausdrücken und so wegschaffen, wodurch eine Gleichung $U = 0$ entstehe, welche neben

u als Unbekannter nur die bekannten Coefficienten von X enthalte. Wenn es auch praktisch nahezu unausführbar sei[1]), bei einigermassen grossem m die Elimination auszuführen, so genüge es, wenn nur der Beweis geliefert werden könne, dass die Gleichungsconstante von $U = 0$ wesentlich negativ sei, denn dann gebe es vermöge des ersten und dritten Einleitungssatzes ein reelles u, welches $U = 0$ erfülle, und folglich lassen sich alle $u, \alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu, \cdots$ reell bestimmen. Bei Euler ist der Beweis für den Fall $m = 2$ erbracht, den Gauss dann verallgemeinerte. Sei also mit Euler $X = x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x - \mathfrak{a})(x - \mathfrak{b})(x - \mathfrak{c})(x - \mathfrak{d})$ und sei $x^2 - ux + \beta$ einer der trinomen quadratischen Factoren von X. Nun muss jede Wurzel von $x^2 - ux + \beta = 0$ auch eine Wurzel von $X = 0$ sein, und da u die Summe der zwei Wurzeln von $x^2 - ux + \beta = 0$ ist, kann u die Summe von irgend zweien der Werthe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ sein, also $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{c} + \mathfrak{d}$, im Ganzen $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Combinationen, woraus man zu schliessen berechtigt ist, die Gleichung in u, nämlich $U = 0$, werde genau vom 6^ten Grade sein. Weil ferner in $X = 0$ das zweithöchste Glied fehlt, muss $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$ sein, d. h. die sechs Werthe von u sind paarweise geordnet $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = p$, $u = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = -p$, $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = q$, $u = \mathfrak{b} + \mathfrak{d} = -q$, $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{d} = r$, $u = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = -r$, und so zeigt sich $U = (u - p)(u + p)(u - q)(u + q)(u - r)(u + r) = u^6 - \cdots - p^2q^2r^2$ mit negativem constanten Gliede, weil $\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 3$ ungrad ist. Ist nun $2m$ eine Potenz von 2, etwa $2m = 2^\mu$, so kann X in zwei Factoren vom Grade $2^{\mu-1}$ zerfällt werden, jeder dieser Factoren in zwei neue vom Grade $2^{\mu-2}$ u. s. w., bis schliesslich lauter trinome quadratische Factoren mit reellen Coefficienten ermittelt sind. Ist n der Grad der vorgelegten Gleichung nicht ein 2^μ, so gibt es doch jedenfalls ein $2^\mu > n$ mit $2^\mu - n = \nu$, und es genügt, die gegebene Gleichung mit x^ν zu vervielfachen, um ein in lauter reelle trinome quadratische Factoren zerlegbares Gleichungspolynom entstehen zu sehen[2]).

Gauss hat vier Einwendungen gegen diesen Beweis erhoben. Erstens sei nicht allgemein wahr, dass $\alpha, \beta \cdots, \lambda, \mu \cdots$ rational in u ausdrückbar seien. Zweitens können selbst unter der Voraussetzung rationaler Ausdrückbarkeit die Formeln für $\alpha, \beta \cdots, \lambda, \mu \cdots$ unbestimmt und damit unbrauchbar werden. Drittens sei in der Annahme, in der vom zweithöchsten Gliede befreiten Gleichung sei die Wurzelsumme Null, eine Annahme von unzweifelhafter Richtigkeit, wenn

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749, pag. 239. [2]) Ebenda pag. 243.

die Gleichung Wurzeln besitze, diese Thatsache doch vorausgesetzt, auf deren Beweis es gerade ankomme. Viertens brauche $-p^2q^2r^2$ nicht negativ zu sein, da imaginäre Werthe von p, q, r das Gegentheil bewirken können. Wenn Euler den letzterwähnten Einwurf auch vorausgesehen[1]) hat, so ist es doch ungenügend, was er zur Hebung des Zweifels beibrachte.

Euler hat noch einen anderen Beweis[2]) angegeben, welcher darauf hinausläuft, die Wurzeln von $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots = 0$ müssten sicherlich mittels Wurzelgrössen dargestellt werden können[3]). Wir wissen, dass Euler hier nur seine irrige Vermuthung von 1732 (S. 575) wiederholt, ohne sie zu begründen.

Euler, dessen von keinem anderen Mathematiker auch nur annähernd jemals erreichte Erfindungskraft so viele Früchte zeitigte, dass die bestehenden Akademieschriften sich als ungenügend erwiesen sie aufzubewahren, gab 1746—1751 in Berlin drei Bändchen *Opuscula varii argumenti* heraus. In dem II. Bändchen von 1750 findet sich eine algebraische Untersuchung[4]), zwei Beweise des Satzes von den Summen der Wurzelpotenzen. Sei $Z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \cdots \pm N = 0$ eine Gleichung, deren n Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \nu$ heissen, so dass also $Z = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\cdots(x-\nu)$ und $\log Z = \log(x-\alpha) + \log(x-\beta) + \log(x-\gamma) + \log(x-\delta) + \cdots + \log(x-\nu)$ ist. Differentiation nach x liefert $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \cdots + \frac{1}{x-\nu} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x} + \frac{\nu}{x^2} + \frac{\nu^2}{x^3} + \cdots = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}\int\alpha + \frac{1}{x^3}\int\alpha^2 + \cdots$ in leicht verständlicher Abkürzung. Andererseits ist $\frac{dZ}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \cdots$ und $\frac{1}{Z} = \frac{1}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \cdots}$. Multiplicirt man die für $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx}$ gefundene Reihe mit Z und setzt das Product der für $\frac{dZ}{dx}$ gefundenen Reihe gleich, so entsteht:

$$\begin{aligned} x^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \cdots &= [x^n - Ax^{n-1} \\ + Bx^{n-2} - \cdots]\cdot\left[\frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}\int\alpha + \frac{1}{x^3}\int\alpha^2 + \cdots\right] &= nx^{n-1} \\ + \left(\int\alpha - nA\right)x^{n-2} + \left(\int\alpha^2 - A\int\alpha + nB\right)x^{n-3} + \cdots. \end{aligned}$$

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749, pag. 240. [2]) Ebenda pag. 263—264. [3]) *Il est certain que cette formule sera composée de plusieurs signes radicaux, dont les quantités A, B ⋯ seront compliquées.* [4]) Euler, *Opuscula varii argumenti* II, 108—120.

Jetzt werden die Reihen rechts und links vom Gleichheitszeichen als gliedweise übereinstimmend gedacht, und so entstehen die Formeln

$$\begin{aligned} -(n-1)A &= \int\alpha - nA \\ (n-2)B &= \int\alpha^2 - A\int\alpha + nB \\ -(n-3)C &= \int\alpha^3 - A\int\alpha^2 + B\int\alpha - nC \\ (n-4)D &= \int\alpha^4 - A\int\alpha^3 + B\int\alpha^2 - C\int\alpha + nD, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

deren Gesetz sofort ersichtlich ist, und aus welchen $\int\alpha, \int\alpha^2, \int\alpha^3 \cdots$ sich der Reihe nach leicht ergeben. Eulers zweiter Beweis ähnelt sehr demjenigen, welchen wir bei unserer Besprechung von Maclaurins Algebra (S. 591—592) zu erwähnen hatten. Wir lassen dahingestellt, ob Euler von jenem Werke Kenntniss besass.

Gabriel Cramers ungemein reichhaltige *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* von 1750 gehört gleich Eulers Introductio nur nebensächlich, aber mit wichtigen Gegenständen in dieses Kapitel. Der erste Gegenstand ist das Newtonsche Parallelogramm, welches Cramer mit den den betreffenden Feldern zugehörenden Gliedern einer Gleichung zwischen x und y mit Einschluss ihrer Zahlencoefficienten ausfüllt[1]), welches er aber auch nach dem Vorgange des ausdrücklich dafür genannten De Gua (S. 577) durch ein Dreieck, *Triangle algébrique* oder *analytique*, ersetzt[2]). Jedes Feld, *case*, heisst nach den Potenzen von x und von y, welche ihm eingeschrieben sind oder ihm eingeschrieben gedacht werden, also das Feld x, das Feld x^2y^2, das Feld x^4y u. s. w. Das Feld an der unteren Ecke des Dreiecks heisst die Spitze, *pointe du triangle*, und ist für die Constante bestimmt. Im Uebrigen ist die Anordnung so getroffen, dass die Glieder jeder Horizontalzeile von gleicher Dimension sind, und man hat dem Dreiecke eine solche Ausdehnung zu geben, dass die oberste Zeile dem Grade der Gleichung, mit der man es zu thun hat, entspricht. Von unten nach oben und von links nach rechts heisst also das unterste Feld a, die Felder der folgenden Zeile y, x, dann y^2, xy, x^2, ferner y^3, xy^2, x^2y, x^3 u. s. w. Das gezeichnete Dreieck lässt sich auch durch ein aus Holz oder Elfenbein hergestelltes[3]) vertreten, in welchem alle Felder durchlöchert sind. In die Löcher eingesteckte Stifte machen kenntlich, welche Felder her-

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 55. [2]) Ebenda pag. 56. [3]) Ebenda pag. 165.

vorzuheben sind, z. B. (Fig. 99) die Felder A, B, C, D, E nebst den beiden durch Sternchen ausgezeichneten Feldern, und zwar hebt man alle Felder hervor, deren namengebende Ausdrücke in der zu untersuchenden Gleichung als Glieder vorkommen. Unsere Figur entspricht also der Gleichung $x^2y^2 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + d^2xy + e^2x^2 + f^3y = 0$, weil $A = y$, $B = xy^2$, $C = x^2y^2$, $D = x^3$, $E = x^2$ und von den beiden Sternchen das untere $= xy$, das obere x^2y ist. Man bildet sodann ein nach aussen gewölbtes Vieleck $ABCDE$, welches die Eigenschaft besitzt, dass die markirten Felder, soweit ihre Marken nicht auf den Vielecksseiten selbst liegen, in das Innere des Vielecks fallen. Jede Vielecksseite gibt zu einer Gleichung Anlass, indem die Summe der ihr angehörenden Gleichungsglieder gleich Null gesetzt wird.

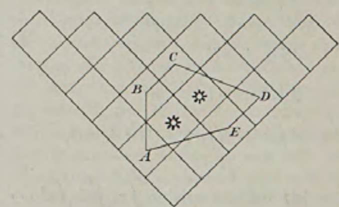

Fig. 99.

$$
\begin{array}{ll}
AB. & f^3y \quad + axy^2 = 0 \\
BC. & axy^2 + x^2y^2 \ = 0 \\
CD. & x^2y^2 \ + cx^3 \quad = 0 \\
DE. & cx^3 \quad + e^2x^2 \ = 0 \\
EA. & e^2x^2 \ + f^3y \quad = 0
\end{array}
$$

und aus diesen Gleichungen entspringen Anfänge von Reihenentwicklungen:

$$y = -\frac{f^3}{ax}$$

$$x = -a$$

$$x = -\frac{y^2}{c}$$

$$x = -\frac{e^2}{c}$$

$$y = -\frac{e^2}{f^3}x,$$

welche man als Ausgangspunkt zu wählen hat, je nachdem x gegen y gross oder klein gedacht wird, damit die entstehenden Reihen convergiren. Wir bemerken dabei ausdrücklich, dass bei allen Schriftstellern, welche von dem Newtonschen Parallelogramme oder von dem De Guaschen Dreiecke handeln, das Verlangen nach Convergenz

der entstehenden Reihen ausgesprochen ist, aber dass keiner ein eigentliches Merkmal der Convergenz angibt.

Der zweite Gegenstand aus der Lehre von den Gleichungen, mit welchem Cramer es zu thun hat, ist die Eliminationsaufgabe. Schon in der Vorrede[1]) sagt er, die bekannten Methoden hätten ihre Unzulänglichkeit an den Tag gelegt, und so sei eine neue aufzusuchen gewesen, welche die Sache dadurch zu einer leichten mache, dass Zahlzeichen in einer eigenthümlichen Weise zur Darstellung unbestimmt gelassener Grössen in Anwendung kommen, eine Bezeichnung, welche auch bei anderen Untersuchungen sich nützlich erweisen könne. Die Bezeichnung ist aber keine andere als die Leibnizsche, von der wir (S. 590) sagten, dass Maclaurin sie vielleicht geflissentlich vermieden habe. Es ist auffallend, dass Cramer den Aufsatz der A. E., in welchem er die Anregung zu seiner Bezeichnung gefunden haben dürfte, nicht erwähnt. Sollte er ihn wirklich nicht gekannt und die Nacherfindung ganz selbständig gemacht haben? Doch gleichviel. Dem Cramerschen Bande, über welchen wir ausführlich im 116. Kapitel handeln, ist ein dreitheiliger Anhang beigefügt: über die Elimination von $n-1$ Unbekannten zwischen n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten, über die Elimination einer von zwei Unbekannten zwischen zwei Gleichungen höheren Grades nach eben jenen Unbekannten, über die Huddesche Regel zur Auffindung mehrfacher Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten.

In der ersten Aufgabe[2]) ist Cramers Bezeichnung unter der Annahme von vier oder mehreren Unbekannten folgende:

$$
\begin{array}{c}
A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{etc.} \\
A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{etc.} \\
A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{etc.} \\
A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{etc.} \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

Die Exponenten erklärt er als Stellenzeiger. Man habe keine Potenzgrössen vor sich, sondern constante Coefficienten der Unbekannten $z, y, x, v \cdots$ in der 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, $4^{\text{ten}} \cdots$ Gleichung. Cramer gibt die Regel der Bildung des Nenners sowohl als des Zählers in dem Bruche, welcher den Werth irgend einer Unbekannten darstellt. Um den Nenner zu erhalten, schreibe man bei n (etwa drei) Unbekannten

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes. Préface*, pag. XIV.
[2]) Ebenda pag. 657—659.

40*

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n (1 \cdot 2 \cdot 3 = 6)$ mal die Coefficientenbuchstaben (Z, Y, X) neben einander. In jeder einzelnen Anschreibung lege man den Elementen die Indices (1, 2, 3) stets anders geordnet, im Ganzen also in allen Permutationen, deren sie fähig sind, bei und betrachte jeden so gebildeten Einzelausdruck als ein Product. Das Vorzeichen der entstandenen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ Producte richte sich nach der Zahl der *dérangements*, der Abweichungen von der Ordnung. Ein *dérangement* findet statt, so oft einem höheren Index ein niedrigerer unmittelbar oder mittelbar nachfolgt. Bei grader Anzahl der dérangements soll das Product das Zeichen $+$, bei ungrader das Zeichen $-$ erhalten. Der Zähler entstehe aus dem Nenner, indem man den Coefficientenbuchstaben der ihrem Werthe nach zu bestimmenden Unbekannten durch den für die Gleichungsconstante eingeführten Buchstaben A ersetze, Indices und Vorzeichen bleiben ungeändert. Hier ist also die Gleichungsauflösung mittels Determinanten ganz genau beschrieben, und nur Namen und schriftliche Anordnung waren noch nicht so, wie unsere Zeit sie benutzt.

Bezüglich der Elimination einer Unbekannten zwischen zwei Gleichungen höheren Grades[1]) schickt Cramer schon vor Beginn des ersten Anhangs die Bemerkung voraus[2]), die gewöhnlichen Methoden führten neben ihrer Umständlichkeit das Bedenken herbei, dass Gleichungen von höherem als nothwendigen Grade entstehen, welche überflüssige Wurzeln enthalten, die es nicht immer leicht ist, aus ihrer Mischung mit der wahren Auflösung der Aufgabe herauszufinden[3]). Das ist in etwas deutlicherer Weise bejahend ausgesprochen, was Euler in seiner Abhandlung von 1748 verneinend zu verstehen gegeben hatte (S. 598). Auch die von Cramer gegebene Vorschrift deckt sich genau mit der in Eulers Abhandlung, mit welcher Cramers Bekanntschaft wird angenommen werden müssen. Nur in einer Beziehung geht Cramer über Euler hinaus. Während Euler die Thatsache, dass aus einer Gleichung m^{ten} und einer solchen n^{ten} Grades eine Endgleichung mn^{ten} Grades hervorgeht, doch nur aus einzelnen Beispielen mit Sicherheit erkennen lässt, sucht Cramer dafür einen umständlichen Beweis zu führen, aus welchem die Zeitgenossen schwerlich den Kern herauszuschälen vermocht haben dürften, während man in unseren Zeiten[4]) eine Benutzung von symmetrischen Functionen und eine Andeutung dessen, was man später deren Gewicht genannt

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 660—676. [2]) Ebenda pag. 656. [3]) *qui renferment des racines superflues, qu'il n'est pas toujours aisé de démêler de celles qui donnent la vraye Solution du Problême.* [4]) Brill und Nöther, Die Entwicklung der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. I. Abschnitt, § 25, S. 137.

hat, darin zu erkennen vermochte. Was endlich die Huddesche Regel[1]) betrifft, so beruht Cramers Beweis auf dem ohne Anwendung von Differentialzeichen aus der Multiplication der Einzelglieder der Entwicklung von $(x+y)^l$ mit der arithmetischen Reihe 0, 1, 2, 3 $\cdots$ sich ergebenden Satze $\frac{d}{dy}[(v+y)^l] = l(v+y)^{l-1}$.

Ein Schriftsteller bleibt uns noch zu erwähnen. Johann Andreas von Segner[2]) (1704—1777), aus Pressburg in Ungarn, studirte in seiner Heimath und in Jena Medicin, Physik und Mathematik, war kurze Zeit Arzt in Pressburg, dann in Debreczin, wandte sich aber 1732 dem Lehrberufe der Mathematik in Jena zu, der ihn 1735 nach Göttingen, 1755 nach Halle führte. Seine physikalischen Leistungen übertreffen seine mathematischen. Von letzteren erwähnen wir eine 1725 in Jena verfasste Abhandlung, *Dissertatio epistolica ad G. E. Hambergerum, qua regulam Harriotti, de modo ex aequationum signis numerum radicum eas componentium cognoscendi demonstrare conatur.* Damals glaubte Segner mithin, wie jedenfalls auch sein Lehrer Georg Erhard Hamberger[3]) (1697—1755), der Sohn von Georg Albrecht Hamberger (S. 4), dass Harriot der Erfinder der Descartesschen Zeichenregel sei, worauf wir (S. 583) schon aufmerksam gemacht haben. Ob Segners Beweis, den wir uns nicht verschaffen konnten, stichhaltig war, ist uns unbekannt, jedenfalls war er der erste, der in die Oeffentlichkeit drang. Wir haben indessen einigen Grund, an der zwingenden Kraft jener Erstlingsschrift zu zweifeln. Von Halle aus schickte nämlich Segner 1756 eine Abhandlung zum Abdrucke in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie[4]) unter dem Titel: *Démonstration de la règle de Descartes pour connaître le nombre des racines affirmatives et négatives qui peuvent se trouver dans les équations.* Er wusste also jetzt, wer der Erfinder der Regel war. Wir dächten, der frühere Irrthum in dieser einen Beziehung hätte ihn doch schwerlich verhindert, seine Jugendarbeit zu nennen, wenn er sonst keine Bedenken gegen sie gehabt hätte. Aber er erwähnt sie mit keinem Worte, und das hat man wohl mit Recht als ein beredtes Schweigen zu deuten. Was nun die Abhandlung von 1756 betrifft, so ähnelt sie dem Beweise von De Gua (S. 579) so weit, dass sie ein vorhandenes Gleichungspolynom mit $x \pm a$ vervielfältigt und dann untersucht, welche Wirkung dieses Verfahren auf die Vorzeichen ausübt. Die Ungleichungen,

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 677—680. [2]) Poggendorff II, 892—894. — Allgemeine Deutsche Biographie XXXIII, 609—610, Artikel von K. [3]) Poggendorff I, 1007—1008. [4]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1756, pag. 292—299.

von welchen De Gua einen umfassenden Gebrauch machte, kommen nicht in Betracht. Man kann der Abhandlung nicht grade übergrosse Klarheit nachrühmen.

107. Kapitel.

Zahlentheorie.

Nur sehr wenige Männer beschäftigten sich mit Zahlentheorie. War sie doch und sollte sie doch noch lange Zeit bleiben eine Sammlung von geistreichen, für die Wissenschaft kaum nutzbar zu machenden Spielereien. In Briefwechseln zwischen Goldbach und Daniel Bernoulli, zwischen Goldbach und Euler kamen diese Dinge häufig zur Rede, aber Euler war fast der Einzige, der damit an die Oeffentlichkeit trat.

Um nur zwei Dinge aus jenen Briefwechseln zu erwähnen, so schrieb Daniel Bernoulli unter dem 29. Juni 1728 an Goldbach[1], er habe die Gleichung $x^y = y^x$ unter der Annahme ungleicher Werthe für x und y gelöst; von ganzen Zahlen genügten der Gleichung nur 2 und 4, d. h. $2^4 = 4^2$, dagegen gebe es unendlich viele gebrochene Lösungen. Auch andere Gattungen von Grössen, so schliesst die Mittheilung, gibt es, von denen ich nichts sage[2]. Man wird nach diesem Schlussworte wohl oder übel annehmen müssen, dass Bernoulli an complexe Auflösungen dachte.

Goldbach schrieb unter dem 7. Juni 1742 an Euler[3], er halte es nicht für undienlich, dass man auch diejenigen propositiones anmerke, welche sehr probabiles sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration fehlet. In einer Fussnote bemerkte er dazu, es scheine, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 1, ein *aggregatum trium numerorum primorum* sey. In Eulers Antwort vom 30. Juni heisst es alsdann[4]: Dass ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann. Eben dieser Satz hat, seit jener Briefwechsel durch den Druck bekannt geworden ist, den Namen des Goldbachschen Erfahrungssatzes erhalten[5].

Unter den zahlentheoretischen Aufsätzen, welche fast insgesammt in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie zu finden sind und, wie wir oben sagten, mit sehr geringen Ausnahmen von Euler

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 262. [2]) *Il y a aussi d'autres espèces de quantités dont je ne dirai rien.* [3]) *Coresp. math.* (Fuss) I, 127. [4]) Ebenda I, 135. [5]) Eneström scheint im *Bulletino Boncompagni* XVIII, 468 zuerst auf die Stelle aufmerksam gemacht zu haben.

herrühren, haben wir zuerst einen zu nennen, der unserer letzteren Bemerkung nach eine Ausnahme bildet: Goldbach, *Criteria quaedam aequationum, quarum nulla radix rationalis est*[1]. Goldbach benutzt die Potenzreste eines Gleichungspolynoms, um zu entscheiden, ob rationale Wurzeln möglich sind und bedient sich dabei eines Zeichens und eines Wortes, um derenwillen vorzugsweise der kleine Aufsatz geschichtlich denkwürdig erscheint. Das Zeichen ist das der Unmöglichkeit ⌶, von welchem Goldbach seit 1730 in seinem Briefwechsel mit Euler Gebrauch machte[2], das Wort ist das der Congruenz, welches den gleichen Sinn besitzt, mit welchem es später durch Gauss Bürgerrecht in der Zahlentheorie gewann. Ist nämlich eine Zahl $= dp + r$, d. h. lässt sie durch d dividirt einen Rest r, so nennt Goldbach diese Restzahl, *numerum residuum r*, der Kürze wegen ein *congruum*. Sein Schlussergebniss ist folgendes: x^e ⌶ $p^m X + p$, wenn p eine Primzahl, e und m ganze positive Zahlen grösser als 1 und $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ mit lauter ganzzahligen Coefficienten bedeutet. Weil $p^m X + p$ durch p theilbar ist, müsste, wenn die Unmöglichkeit nicht stattfände, x^e gleichfalls durch p theilbar, also $x = ap$, $x^e = a^e p^e$ sein. Dann würde aber die Gleichung $a^e p^{e-1} = p^{m-1} X + 1$ folgen, welche unmöglich ist, weil die linke Seite durch p theilbar ist, die rechte nicht.

Unmittelbar hinter Goldbachs Aufsatz folgt ein solcher von Euler, *Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus*[3]. Fermat hatte (Bd. II, S. 778) behauptet, die Zahl $2^{2^k} + 1$ sei immer Primzahl und hatte an $k = 1, 2, 3, 4$ die Prüfung vollzogen. Euler, im December 1729 durch Goldbach auf den Satz aufmerksam gemacht[4], war zunächst ganz von demselben eingenommen, bis er zufällig $k = 5$ versuchte und $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$ fand, wodurch der Satz hinfällig wurde. Darin besteht der wesentliche Inhalt des Aufsatzes, denn wenn Euler auch im weiteren Verlaufe von dem sogenannten Fermatschen Lehrsatze in der Form, dass $a^n - b^n$ jedesmal durch $n + 1$ theilbar sei, redet, wenn $n + 1$ als Primzahl und a und b als durch $n + 1$ untheilbar angenommen werden, so gesteht er doch ein, den Satz nicht beweisen zu können.

In einem späteren Aufsatze des gleichen Bandes, *De solutione problematum Diophantaeorum per numeros integros*[5], zeigt Euler, wie

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 98—102. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 25. [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 103—107. [4]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 10. [5]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 175—188.

aus einer ganzzahligen Auflösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = y^2$ beliebig viele andere abermals ganzzahlige Auflösungen gefunden werden können.

Im nächsten Bande wandte sich Euler mit dem Aufsatze *De inveniendo numero qui per datos numeros divisus relinquat data residua*[1]) zu der Aufgabe, mehreren unbestimmten Gleichungen ersten Grades gleichzeitig gerecht zu werden. Soll eine Zahl z durch a getheilt den Rest p, durch b getheilt den Rest q lassen und $a > b$ sein, so ist $z = ma + p$ neben $z = nb + q$, und $n = \frac{ma + p - q}{b} = \frac{ma + v}{b}$ soll ganzzahlig sein, wo $p - q = v$ gesetzt wurde. Wegen $a > b$ muss nothwendig $a = \alpha b + c$ mit $c < b$ gesetzt werden können, und man erhält $n = m\alpha + \frac{mc + v}{b}$, wo der letzte Bruch ganzzahlig zu machen ist, etwa $= A$. Daraus folgt $m = \frac{bA - v}{c}$ wiederum als ganze Zahl. Man weiss $c < b$, folglich ist $b = \beta c + d$ mit $d < c$ und $\frac{bA - v}{c} = A\beta + \frac{Ad - v}{c} = m$, und es gilt $\frac{Ad - v}{c} = B$ ganzzahlig zu machen. Fortsetzung des Verfahrens muss endlich zu einem ganzzahlig zu machenden $G = \frac{Hi \pm v}{k}$ führen mit $a > b > c > d > \cdots > k$ und k als Theiler von v erkennen lassen. Aldann genügt es $H = 0$ zu setzen, um ganzzahlige $G, \cdots B, A, m, n, z$ zu finden, neben welchem z auch jedes $z + mab$ der Aufgabe genügt. Soll zwischen den Divisoren a und b eine gewisse Beziehung obwalten, so vereinfacht sich häufig die Rechnung. Euler macht darauf aufmerksam, dass $a = b + 1$ schon bei Michael Stifel (Bd. II, S. 437—438) Berücksichtigung gefunden habe.

Im folgenden Bande kam Euler auf den Fermatschen Lehrsatz zurück[2]). Sei die Primzahl $p > 2$. Man hat $2^p = (1 + 1)^p = 1 + p + \frac{p(p-1)}{2} + \cdots + 1 = mp + 2$, mithin ist $2^p - 2$ durch p theilbar und ebenso $2^{p-1} - 1$. Wird $p > 3$ angenommen, so zeigt die Entwicklung $3^p = (1 + 2)^p = 1 + p \cdot 2 + \frac{p(p-1)}{2} \cdot 2^2 + \cdots + 2^p = mp + 1 + 2^p = mp + 3 + (2^p - 2)$, dass $3^p - 3$ durch p getheilt denselben Rest wie $2^p - 2$ d. h. den Rest 0 lässt, mithin ist $3^p - 3$ und ebenso $3^{p-1} - 1$ durch p theilbar. Der Satz wird durch jeweilige Erhöhung der potenzirten Zahl um die Einheit erweitert, und demnach ist die Theilbarkeit von $a^{p-1} - 1$ durch p erwiesen, wenn nur $p > a$. Der schon bei der Entwicklung von

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1734 *et* 1735. T. VII, 46—66. [2]) Ebenda 1736. T. VIII, 141—146.

$(1 + 1)^p$ zu Tage tretende Kern des Beweises besteht in der Theilbarkeit jedes zur p^{ten} Potenz gehörenden Binomialcoefficienten durch p, und insofern ist es ganz richtig, dass Eulers Beweis mit dem der Oeffentlichkeit vorenthalten gebliebenen von Leibniz (S. 331) übereinstimmt, eine Uebereinstimmung, welche indessen Euler nicht zum Vorwurf gemacht werden darf, da er keinesfalls Kenntniss von Leibnizens Aufsatz hatte.

Die *Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes*[1]) Eulers von 1738 betreffen einen besonderen Fall des berühmten Fermatschen Unmöglichkeitssatzes (Bd. II, S. 774), nämlich den, wo $n = 4$ ist, und behandeln ihn nach einer Methode, in welcher die Aehnlichkeit mit dem, was Fermat Methode der unendlichen Abnahme (Bd. II, S. 778) nannte, sofort einleuchtet. Ist $a^2 + b^2$ wieder ein Quadrat, und sollen a, b theilerfremd sein, so muss eine dieser Zahlen, z. B. a ungrad sein, während b grad ist. Diese Bedingung wird durch $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ mit theilerfremden p und q, deren eines grad, das andere ungrad ist, erfüllt. Nun mögen a und b Zahlen der gedachten Art, d. h. theilerfremd und a ungrad, b grad sein, und zugleich $a^4 + b^4$ ein Quadrat, ohne dass $b = 0$ wäre. Aber $a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2$, und damit daraus eine Quadrat entstehe, muss $a^2 = p^2 - q^2$, $b^2 = 2pq$ und von p, q das eine grad, das andere ungrad sein. Wegen $p^2 - q^2 = a^2$ kann nur p ungrad und q grad sein. Das Quadratischsein von $p^2 - q^2$ erfordert mit Einschluss der für p und q schon gewonnenen Bedingungen, dass $p^2 = m^2 + n^2$, $q = 2mn$ und m, n theilerfremd und eines grad, eines ungrad sei. Nun war $2pq = b^2$, q grad, $2q$ durch 4 theilbar und ebenso wie p ein Quadrat, weil sonst bei theilerfremden p, q die Gleichung $2pq = b^2$ nicht erfüllt werden könnte. Daher ist $2q = 4mn$ nur dann ein Quadrat, wenn m und n jedes für sich ein solches ist: $m = x^2$, $n = y^2$, $p = m^2 + n^2 = x^4 + y^4$. Aber p war als ein Quadrat erkannt, folglich bilden $x^4 + y^4$ eine quadratische Summe, während x, y wesentlich kleiner als a, b sind. Eine solche beliebig oft fortzusetzende Verkleinerung der Zahlen, welche die Aufgabe erfüllen, $a^4 + b^4$ zu einem Quadrate zu machen, ist aber nicht möglich, folglich gibt es keine Anfangswerthe a, b. Ist $a^4 + b^4$ schon kein Quadrat, so ist es um so weniger ein Biquadrat, also die Unmöglichkeit von $a^4 + b^4 = c^4$ in ganzen Zahlen ist bewiesen. Auf wesentlich gleichartiger Grundlage beruhen die Beweise einiger anderen durch Euler beigefügten Sätze, z. B. dass auch $a^4 - b^4$ kein Quadrat sein kann, wenn nicht $b = 0$ oder $b = a$,

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1738. T. X, 125—146.

dass Aehnliches für $2(a^4+b^4)$ gilt, dass keine Zahl mit Ausnahme der Einheit zugleich Dreieckszahl und Biquadrat sein kann u. s. w. Der letztgenannte Satz wird als *Fermatianum*, d. h. als Fermat bereits bekannt, bezeichnet.

Erst nach mehreren weiteren Jahren veröffentlichte Euler neuerdings eine zahlentheoretische Abhandlung[1]), genauer gesagt eine grosse Anzahl beweislos ausgesprochener Sätze über die Divisoren von Zahlen von der Form $pa^2 \pm qb^2$. Darunter befindet sich die Behauptung der Zerlegbarkeit in zwei Quadrate für alle Primzahlen von der Form $4n+1$, der Nichtzerlegbarkeit in zwei Quadrate für die Primzahlen von der Form $4n+3$, Sätze, welche Fermat bereits kannte.

Der XIV. Band der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie, welcher die genannten Lehrsätze enthält, war der letzte, welcher den Titel *Commentarii Academiae Petropolitanae* führte. Eine zweite Reihenfolge von 20 Bänden schloss sich ihnen an als *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*. Gleich im I. Bande veröffentlichte Euler *Theoremata circa divisores numerorum*[2]), d. h. Beweise zu einer Anzahl der vorher schon gedruckten Sätze. Er beginnt ähnlich wie seiner Zeit beim Beweise des Fermatschen Lehrsatzes (S. 613). Seien fortwährend unter allen vorkommenden Buchstaben ganze Zahlen verstanden, unter p eine Primzahl. Nun ist $(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \cdots + pab^{p-1} + b^p$. Alle Binomialcoefficienten welche bei Euler *unciae* mit einem 1631 durch Oughtred eingeführten Namen heissen, müssen ihrer Bedeutung als figurirte Zahlen entsprechend ganze Zahlen sein. Der Factor p eines jeden kann als Primzahl durch die in dem Nenner vorkommenden kleineren Zahlen nicht weggehoben werden, er macht also alle Binomialcoefficienten durch p theilbar, und folglich ist $(a+b)^p - a^p - b^p$ durch p theilbar. Ein Zusatz lässt $a = b = 1$ annehmen, wodurch $2^p - 2 = 2(2^{p-1}-1)$ durch p theilbar erscheint, beziehungsweise auch $2^{p-1}-1$, wenn p eine von 2 verschiedene Primzahl ist. Ist neben $(a+b)^p - a^p - b^p$ auch $a^p - a$ und $b^p - b$ durch p theilbar, so folgt durch Addition das Gleiche für $(a+b)^p - (a+b)$. Aber $1^p - 1 = 0$ ist durch p theilbar, demnach bedarf es bei $b=1$ nur der Theilbarkeit von $a^p - a$ durch p, um die von $(a+1)^p - (a+1)$, von $(a+2)^p - (2+2), \cdots$ von $c^p - c$ festzustellen, und weil bei $a=1$ sicherlich $a^p - a$ durch p theilbar sich zeigt, so ist allgemein p in $c^p - c = c(c^{p-1}-1)$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1744—1746. T. XIV. 151—181. [2]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1747 *et* 1748. T. I, 20—48.

enthalten, also auch in $c^{p-1}-1$, es sei denn, dass c ein Vielfaches von p wäre. Offenbar ist auch $(a^{p-1}-1)-(b^{p-1}-1) = a^{p-1}-b^{p-1}$ durch p theilbar, wenn weder a noch b für sich diese Theilbarkeit an den Tag legt. Unter der gleichen Voraussetzung kann die ungrade Primzahl $p = 2m+1$ gesetzt und der Satz ausgesprochen werden, $a^{2m} - b^{2m} = (a^m + b^m)(a^m - b^m)$ müsse durch $2m+1$ theilbar sein, folglich auch einer der beiden Factoren $a^m + b^m$ oder $a^m - b^m$, keinesfalls aber beide, weil sowohl a als b als durch $p = 2m+1$ untheilbar gewählt wurden. Die Annahme $p = 2m+1$ zerfällt abermals in zwei Möglichkeiten $p = 4n-1$ und $p = 4n+1$. Bei $p = 4n-1$ wissen wir (immer unter der Voraussetzung der Untheilbarkeit von a und b durch p), dass $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ durch p theilbar ist, $a^{4n-2} + b^{4n-2} = (a^2)^{2n-1} + (b^2)^{2n-1}$ demnach untheilbar und ebenso jeder Factor von $(a^2)^{2n-1} + (b^2)^{2n-1}$, mithin auch $a^2 + b^2$, welches in $(a^2)^{2n-1} + (b^2)^{2n-1}$ enthalten ist. Dadurch ist der Beweis erbracht, dass keine Summe $a^2 + b^2$ zweier Quadrate durch eine Primzahl von der Form $4n-1$ theilbar ist. beziehungsweise überhaupt durch eine Zahl von der Form $4n-1$, weil es keine solche gibt, die nicht mindestens eine Primzahl gleicher Form als Factor enthielte. Ist folglich die Summe $a^2 + b^2$ zweier Quadrate überhaupt theilbar, so müssen die ungraden in ihr enthaltenen Primzahlen sämmtlich von der Form $4n+1$ sein. Euler geht noch etwas weiter. Er zeigt, dass wenn a und b theilerfremd sind, die Factoren von $a^4 + b^3$ nur 2 oder Zahlen von der Form $8n+1$ sein können. Wird die Theilerfremdheit von a und b festgehalten, so sind die ungraden Factoren von $a^{2^m} + b^{2^m}$ ausschliesslich von der Form $2^{m+1}n + 1$. Auch noch einige weitere Sätze beweist er, aber bis zur Sicherung der Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate gelangt er nicht.

Euler wandte sich ab von der zunächst undankbaren Aufgabe. Wir meinen nicht, als ob er jetzt erst begonnen hätte sich mit Gegenständen aus anderen mathematischen Gebieten zu beschäftigen, das ging bei Euler alles neben einander her, aber innerhalb seines zahlentheoretischen Denkens wechselte er mit dem Stoffe. Er warf sich auf eine wiederum von Fermat in seinen Anmerkungen zu Diophant gestellte Aufgabe: ein rationales, wenn auch nicht ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dass jede der beiden Katheten um den Dreiecksinhalt vermindert eine Quadratzahl gebe[1]). Eulers Auflösung ist geistreich, entbehrt

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1749. T. II, 49—67.

aber allgemeiner Gesichtspunkte, so dass wir nicht nöthig haben, dabei zu verweilen.

Ein zweiter zahlentheoretischer Gegenstand, mit welchem Euler, mit welchem aber auch durch Euler veranlasst Georg Wolfgang Krafft sich beschäftigte, waren die befreundeten Zahlen. Beide Abhandlungen dürften ziemlich gleichzeitig, etwa 1749, aus den Händen ihrer Verfasser gekommen sein. In den Buchhandel gelangte vermuthlich Eulers Abhandlung zuerst, da sie die Erscheinungszeit 1750 aufweist, während der Band der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie, der Kraffts Abhandlung enthält, das Druckjahr 1751 trägt. Trotzdem lassen wir den kurzen Bericht über Kraffts Abhandlung[1]) vorausgehen, weil sie die weniger vollkommene ist. Wir heben aus ihr den hier wahrscheinlich zum ersten Male dem Druck übergebenen Satz hervor, dass, wenn P, Q, R Primzahlen bedeuten, die Summe aller Divisoren von P (1 und P mit eingeschlossen) sich auf $P+1$ beläuft, die der Divisoren von Q^m auf $1+Q+Q^2+\cdots+Q^m=\frac{Q^{m+1}-1}{Q-1}$, die der Divisoren von R^n auf $\frac{R^{n+1}-1}{R-1}$, die der Divisoren von PQ^mR^n auf das Product der gewonnenen Zahlen: $(P+1)\cdot\frac{Q^{m+1}-1}{Q-1}\cdot\frac{R^{n+1}-1}{R-1}$ u. s. w. Kraft stellt mit Hilfe dieses Satzes eine Tabelle der Zahlen 1 bis 150 und der jedesmaligen Divisorensumme her, von welcher er dann weiter Gebrauch macht. Eulers Abhandlung[2]) geht auch von der Angabe der Divisoren, beziehungsweise der Divisorensumme einer Zahl n aus, welche Summe er durch das einem Integralzeichen verwandte, aber nicht damit zu verwechselnde bequeme Symbol $\int n$ bezeichnet, das die Angabe von Beziehungen erleichtert, während bei Krafft ein Symbol fehlt. Euler setzt z. B. $N=m^\alpha\cdot n^\beta\cdot p^\gamma\cdot q^\delta$ mit m, n, p, q als von einander verschiedene Primzahlen und folgert daraus $\int N=\int m^\alpha\cdot\int n^\beta\cdot\int p^\gamma\cdot\int q^\delta$. Er weist auf Beziehungen hin wie $\int n=1+n$, $\int n^2=\int n+n^2$. und $\int n^2=1+n\int n$ oder $\int n^4=\int n^3+n^4$ und $\int n^4=1+n\int n^3$. Er weist ferner hin auf $\int n^7=(1+n^2+n^4+n^6)\int n=(1+n^4)(1+n^2)\int n$ und ähnliche Beziehungen, welche es gestatten, die Divisorensummen in Form von Producten zu erhalten, z. B. $\int 2^7=3\cdot 5\cdot 17$, was die Uebersichtlichkeit ungemein erhöht. Euler gibt dann auch eine Tabelle der Divisorensummen, aber von ganz anderem Umfange

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1749. T. II, 100—118. [2]) Euler, *Opuscula varii argumenti* II, 23—107 (Berlin 1750).

als Krafft. Euler stellt die Divisorensumme für Primzahlen unterhalb 1000 und für deren 2te und 3te Potenzen zusammen. Bei den kleineren Primzahlen erstrecken sich die Potenzen, für welche die Divisorensummen berechnet sind, ungemein viel höher, nämlich bis zu 2^{36}, 3^{15}, 5^9, 7^{10}, 11^9, 13^7, 17^5, 19^5, 23^4. Befreundete Zahlen sind bekanntlich solche, welche gegenseitig die Summe der Theiler der anderen Zahl sind. Will man diese Forderung in Zeichen ausdrücken, so darf man nicht übersehen, dass Krafft und Euler beide unter die Divisoren einer Zahl die Zahl selbst einrechnen, die bei den Theilern ausgeschlossen ist. Die Theilersumme von n ist also $\int n-n$ und die Doppelbedingung dafür, dass m und n befreundete Zahlen seien, lautet $m=\int n-n$, $n=\int m-m$ oder $\int m=\int n=m+n$. Auch diesen Satz kennt Krafft, aber seine mangelhafte Bezeichnung gestattet ihm nicht, denselben so einfach hinzuschreiben. Bei $m=n$ wird $\int m-m=m$, d. h. m ist alsdann eine vollkommene Zahl, oder mit anderen Worten, jede vollkommene Zahl ist sich selbst befreundet. Bei $m>n$ ist $\int m-m=n<m$, $\int n-n=m>n$, d. h. von zwei befreundeten Zahlen ist die grössere eine mangelhafte, die kleinere eine überschiessende Zahl. Was die eigentliche Aufgabe der Auffindung befreundeter Zahlen betrifft, so hat auch Euler nicht vermocht sie zu lösen. Er muss es beispielsweise dahingestellt sein lassen, ob es untereinander theilerfremde befreundete Zahlen geben könne. Er begnügt sich mit der Behandlung ganz besonderer Fälle. Seien p, q, r, s, t, u lauter unter einander verschiedene Primzahlen, von denen keine in der zusammengesetzten Zahl a enthalten sein darf, so sucht Euler befreundete Zahlenpaare von der Form apq und ar, oder apq und ars, oder $apqr$ und as, oder $apqr$ und ast, oder $apqr$ und $astu$, ohne irgend behaupten zu wollen, mit diesen Annahmen sei der Kreis der Möglichkeiten erschöpft. Es gelingt ihm auf diese Weise 61 Paare befreundeter Zahlen aufzufinden, und zwar 34 Paare grader und 27 Paare ungrader befreundeter Zahlen; der Fall eines Paares aus einer graden und einer ungraden Zahl kommt nicht vor.

Ein weiterer zahlentheoretischer Gegenstand, über welchen Euler Untersuchungen anstellte, wurde ihm von Philip Naudé dem Jüngeren jedenfalls vor 1743 unterbreitet, denn in einem Aufsatze, der zwischen 1742 und 1743 bei der Petersburger Akademie einlief, ist davon die Rede[1]). Es handelt sich um die Zerlegung einer ganzen

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1741—1743. T. XIII, 79 und 89.

Zahl in additive selbst ganzzahlige Theile, welche entweder alle von einander verschieden sein müssen, oder auch unter einander gleich sein dürfen. In der Introductio von 1748 hat Euler die doppelte Aufgabe in einem besonderen Kapitel behandelt, über welches wir in unserem 111. Kapitel berichten. Dann hat Euler noch eine Abhandlung *De partitione numerorum*[1]) veröffentlicht, aber sie enthält nicht wesentlich mehr, als schon in der Introductio stand, und somit gehen wir an ihr vorüber, ohne ihr Anderes als die Bemerkung über den Urheber der Aufgabe zu entnehmen.

Im folgenden Bande der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie[2]) kehrte Euler zu seinem wiederholt in Angriff genommenen Gegenstande *De numeris qui sunt agregata duorum quadratorum* zurück. War doch, wenn man wollte, die Zerlegung in Quadrate, ob in zwei oder in mehrere, nur ein besonderer Fall der Zerlegung überhaupt, und mit dieser Andeutung hatte Euler im Aufsatze des vorhergegangenen Bandes zu verstehen gegeben, er denke noch an die scheinbar verlassene Aufgabe. Zur Lösung brachte er sie auch dieses Mal noch nicht. Man gestatte uns, um uns kürzer fassen zu können, das Nennwort Primzahl mitunter durch das Eigenschaftswort theilerlos zu ersetzen und ferner eine Zahl, welche die Summe zweier ganzzahliger Quadrate ist, eine Quadratensumme, eine Zahl, welche nicht die Summe zweier ganzzahliger Quadrate ist, eine Nichtquadratensumme zu nennen. Euler zeigt, dass wenn p Quadratensumme ist, das Gleiche für $2p$ gilt, und dass dieser Satz umkehrungsfähig ist. Er zeigt, das das Product zweier Quadratensummen wieder eine solche gibt. Er beweist, dass, wenn pq Quadratensumme und p theilerlose Quadratensumme ist, q Quadratensumme sein muss, eine Folgerung, welche sich leicht auf den Fall ausdehnt, dass die Quadratensumme p ein Product aus beliebig vielen theilerlosen Quadratensummen ist. Ist dagegen pq Quadratensumme und q Nichtquadratensumme, so ist p entweder theilerlose Nichtquadratensumme, oder p besitzt eine theilerlose Nichtquadratensumme als Factor, während man in dem letzteren Falle nicht so weit gehen kann zu behaupten, p sei selbst Nichtquadratensumme. Sind a und b theilerfremd, und ist $a^2 + b^2$ durch p theilbar, so kann man immer eine andere durch p theilbare Quadratensumme $c^2 + d^2$ finden, welche höchstens $= \frac{p^2}{2}$ ist. Mit diesem Satze gewinnt Euler wieder die Möglichkeit, die Methode der unendlichen Abnahme anzuwenden, welche folgern lässt, dass eine Summe zweier theilerfremden Quadrate nur durch eine

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1750 *et* 1751. T. III, 125—169. [2]) Ebenda 1752 *et* 1753. T. IV, 3—40.

Quadratensumme theilbar sein kann, und da jede Primzahl von der Form $4n - 1$ Nichtquadratensumme ist, so können die theilerlosen Quadratensummen, welche in Summen zweier theilerfremden Quadrate als Factoren stecken, nur von der Form $4n + 1$ sein. Ob aber jede Primzahl von der Form $4n + 1$ Quadratensumme sei, ist damit keineswegs festgestellt. Euler führt allerdings die Untersuchung noch etwas weiter. Ist $4n + 1$ Primzahl, und sind a und b nicht durch $4n + 1$ theilbar, so muss $a^{4n} - b^{4n} = [(a^n)^2 + (b^n)^2][(a^n)^2 - (b^n)^2]$ ein Vielfaches von $4n + 1$ sein. Ist dabei $a^{2n} - b^{2n}$ nicht Vielfaches von $4n + 1$, so ist damit erwiesen, dass die Quadratensumme $(a^n)^2 + (b^n)^2$, oder, wenn $a^n = mr$, $b^n = ms$ und r, s theilerfremd sind, dass $m^2(r^2 + s^2)$ und folglich auch $r^2 + s^2$ durch $4n + 1$ theilbar sein muss, womit nach dem Vorhergehenden die Sache erledigt wäre. Es bedarf also des Nachweises, dass, wenn $4n + 1$ Primzahl ist, immer zwei durch $4n + 1$ nicht theilbare Zahlen a, b von der Beschaffenheit gefunden werden können, dass $a^{2n} - b^{2n}$ nicht durch $4n + 1$ theilbar ist. An dieser Forderung stockt die Untersuchung, welche nur noch zwei weitere Sätze feststellt: dass eine Zahl $4n + 1$ sicherlich Primzahl ist, wenn sie nur auf eine einzige Art die Summe zweier theilerfremden Quadrate ist, und ebenso sicher nicht Primzahl, wenn sie auf mehr als eine Art Quadratensumme ist.

Im nächsten Bande gelang es Euler endlich die letzte Hand anzulegen[1]) und den lange umworbenen Satz von der Darstellbarkeit jeder Primzahl von der Form $4n + 1$ als Quadratensumme endgiltig und lückenlos zu beweisen. Da a und b durch die Primzal $4n + 1$ nicht theilbar sein dürfen, so wird dieser Bedingung bereits genügt, wenn a und b aus den Zahlen 1 bis $4n$ ausgewählt werden. Euler bildet nun die $2n^{\text{ten}}$ Potenzen aller dieser Zahlen und behauptet, dass, wenn man irgend eine von ihnen als a^{2n}, die nächstkleinere als b^{2n} betrachte, nicht alle Differenzen $2^{2n} - 1^{2n}$, $3^{2n} - 2^{2n}$, $4^{2n} - 3^{2n}, \cdots (4n)^{2n} - (4n - 1)^{2n}$ durch $4n + 1$ theilbar sein können. Wären sie nämlich sämmtlich durch $4n + 1$ theilbar, so müsste die gleiche Theilbarkeit sich auch auf die Differenzen jener Differenzenreihe, d. h. auf die zweiten Differenzen von 1^{2n}, 2^{2n}, 3^{2n}, $\cdots (4n)^{2n}$ erstrecken u. s. w. Die $2n^{\text{ten}}$ Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen bilden aber eine arithmetische Reihe $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, deren $2n^{\text{te}}$ Differenzen alle unter einander gleich sind und zwar $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)$ heissen. Das ist ein Satz, der schon lange bekannt war und dessen Erfindung De Lagny 1705 für sich in Anspruch

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 3—58.

nahm (S. 390). Nun ist aber das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)$ durch die Primzahl $4n + 1$ nicht theilbar, folglich kann unmöglich jede der genannten ersten Differenzen mit jener Theilbarkeit behaftet sein.

Euler war bei dieser Beweisführung von der Division von Differenzen $(a + 1)^n - a^n$ durch eine Zahl p ausgegangen. Welche Reste stellen sich aber bei der Division der einzelnen Zahlen a^n durch p heraus, welche insbesondere bei $n = 2$? Diese Frage knüpfte sich für ihn an jene Untersuchung an. Hier, sagt er[1]), kommen viele ausgezeichnete Erscheinungen vor, durch deren Betrachtung nicht geringes Licht auf die Natur der Zahlen fällt. Damit war also die Lehre von den Potenzresten im Allgemeinen, von den quadratischen Resten insbesondere den Fachgenossen zur Beachtung empfohlen, und wenige Seiten später wurden die Kunstausdrücke Reste, *residua*, und Nichtreste, *nonresidua*, gebildet[2]), welche fortan Bürgerrecht in der Zahlentheorie haben sollten. Euler zeigt, dass, wenn $a < p$, jedes $(kp + a)^2$ durch p getheilt denselben Rest lässt wie a^2, ferner auch $(p - a)^2$ ebendenselben Rest, dass also höchstens nur die Reste von $1^2, 2^2, \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, beziehungsweise von $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, wenn p grad ist, unter einander verschieden sein können. Er zeigt, dass also unter den Zahlen $0, 1, 2, \cdots (p - 1)$ höchstens $\frac{p-1}{2}$ oder $\frac{p}{2}$, je nachdem p ungrad oder grad ist, Reste für p sein können, dass, wenn unter den Resten die Zahl r sich findet, auch r^2, r^3, kurz jedes r^m unter den Resten vorkommt, vorausgesetzt dass man übereinkommt, r^m statt derjenigen Zahl zu schreiben, welche bei der Division von r^m durch p übrig bleibt. Ist ferner r ein gegen p theilerfremder Rest, ist $m > n$, und ist $r^m - r^n = r^n(r^{m-n} - 1)$ durch p theilbar, so muss diese Theilbarkeit von $r^{m-n} - 1$ oder von $r^\lambda - 1$ herrühren, wo λ nicht grösser als $\frac{p}{2}$ sein kann[3]). Sind r und s Reste, so ist auch rs Rest. Sind r und rs gegen p theilerfremde Reste, so ist auch s Rest. Ist von nun an p eine ungrade Primzahl $2q + 1$, so lassen sich folgende Sätze behaupten: Unter den Zahlen $1, 2, 3, \cdots (2q)$ gibt es genau q Reste[4]) und q Nichtreste[5]). Ein Rest mit einem Nichtrest vervielfacht gibt einen Nichtrest. Das Product zweier Nichtreste ist ein Rest. Ergänzung eines Restes r, *complementum residui*, nennt Euler die Zahl $p - r$ oder

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 14 Scholium. [2]) Ebenda T. V, 19 Corollarium 4. [3]) Ebenda T. V, 23—24. [4]) Ebenda T. V, 30 Theorema 8. [5]) Ebenda T. V, 31 Corollarium 2.

$-r$, da ja $np + a$ durch a vertreten werden kann[1]), und ähnlicherweise gilt der mit -1 vervielfachte Nichtrest als eine Ergänzung. Ist sowohl r als $-r$ Rest, so haben alle Reste die Eigenschaft, dass ihre Ergänzungen wieder Reste sind, d. h. die q Reste zerfallen in 2mal $\frac{q}{2}$ Reste, deren jeder positiv und negativ auftritt. Das kann aber nur dann stattfinden, wenn $q = 2n$, also $p = 4n + 1$ ist, während bei $p = 4n + 3$ keine Zahl gleichzeitig mit ihrer Ergänzung Rest sein kann. Die Primzahlen zerfallen also auch in Ansehung dieser Untersuchung in die zwei Klassen von der Form $4n + 1$ und $4n + 3$, wie sich diese Klassen bei der Frage der Quadratensummen aufdrängten. Damals war bewiesen worden, jede Primzahl $4n + 1$ sei Summe von zwei Quadraten. Eine andere Behauptung Fermats ging dahin, jede Primzahl $4n + 3$ sei die Summe von mindestens drei, höchstens vier Quadraten, und nun sollen Schritte auf dem Wege auch diesen Satz zu beweisen erfolgen[2]).

Wenn sich gezeigt hatte, r und $-r$ könnten nur bei $p = 4n + 1$ gleichzeitig Reste sein, so wird dieses bei jedem $p = 4n + 1$ eintreffen, denn da jedes solches $p = a^2 + b^2$, so wird sowohl a^2 als b^2 kleiner als p sein. Beide Zahlen kommen unter den q quadratischen Resten von p vor, und ist $a^2 = r$, so ist $b^2 = p - r$. Allerdings ist dieser Beweis kein unmittelbarer[3]). Ein weiterer Satz ist der, dass das Product zweier Summen von je vier ganzzahligen Quadraten eine ähnliche Summe liefert:

$$
\begin{aligned}
(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot (p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 & \\
+ (aq - bp \pm cs \mp dr)^2 + (ar \mp bs - cp \pm dq)^2 & \\
+ (as \pm br \mp cq - dp)^2, &
\end{aligned}
$$

wo einzelne der Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s auch Null sein können. Daraus folgt aber, dass der Quotient zweier Summen von je vier Quadraten $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}$, wenn man ihn im Zähler und im Nenner mit $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ vervielfacht, als Summe von vier Quadraten dargestellt werden kann, sofern man die Bedingung der Ganzzahligkeit fallen lässt. Aus diesem Satze folgt dann endlich mittels einiger Zwischensätze, welche wir überspringen, dass jede ganze oder gebrochene Zahl sich als Summe von höchstens vier ganzen oder gebrochenen Quadraten darstellen lässt.

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 36 Definitio und Corollarium 1. [2]) Ebenda T. V, 39—40 Scholium. [3]) Ebenda T. V, 44 Scholium.

Euler hat sich noch in demselben Bande in zwei sich unmittelbar an einander anschliessenden Aufsätzen[1]) mit den Divisorensummen, welche zu den in der natürlichen Zahlenreihe aufeinander folgenden Zahlen gehören, beschäftigt. Der Gegenstand hatte schon bei der Arbeit über befreundete Zahlen (S. 617) seine Aufmerksamkeit so weit auf sich gezogen, dass er eine Tabelle der Divisorensummen von Primzahlen und deren ersten Potenzen zusammenstellte. Jetzt ergänzte Euler diese Tabelle zu einer solchen der Divisorensummen der Zahlen von 1 bis 100 und warf die Frage auf, ob die in der Tabelle später erscheinenden Zahlen aus den ihnen vorhergehenden hergeleitet werden könnten. Dass $\int mn = \int m \cdot \int n$, so oft m und n theilerfremd sind, war ja bekannt, aber Euler wünschte auch einem additiven oder subtractiven Zusammenhange der Divisorensummen auf die Spur zu kommen. Er bediente sich dabei folgender nichts weniger als einwandsfreien Betrachtung. Er bildete das endlose Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ und fand dasselbe als $x^0 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots$, wo die Exponenten in der Form $\frac{3m^2-m}{2}$ enthalten sind, indem man m nach einander die Werthe $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$ beilegt. Die Vorzeichen der Glieder folgen dem Gesetze, dass nach dem positiven Anfangsgliede je ein Paar — mit einem Paare + abwechselt. Im zweiten Aufsatze sucht er die ganz empirisch aufgestellte Bildungsweise durch eine Induction zu stützen. Dann geht er zu den Logarithmen der als gleich geltenden Ausdrücke über, d. h. er setzt:

$$\log(1-x) + \log(1-x^2) + \log(1-x^3) + \cdots$$
$$= \log(x^0 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots).$$

Differentiation nach x und nachfolgende Multiplication mit $-x$ liefert:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \cdots = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + \cdots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \cdots}$$

Die linksseitigen Brüche werden in unendliche Reihen verwandelt, deren Addition die neue Reihe $x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + \cdots$ hervorbringt. Diese Reihe wird mit dem Nenner des Bruches rechts vervielfacht und das Product dem Zähler des Bruches rechts gliedweise gleichgesetzt. So gelangt Euler zu Gleichungen von der Gestalt

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 59—74 (*Observatio de summis divisorum*) und 75—83 (*Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum*).

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7)$$
$$+ \int(n-12) + \int(n-15) - \cdots.$$

Die Vorzeichen geben die regelmässige Wiederkehr von $++--$ zu erkennen. Die Reihe bricht ab, sobald hinter dem $\int$ eine negative Zahl erscheinen würde. Kommt $\int(n-n) = \int 0$ vor, so ist für dieses an sich unbestimmte Symbol der Werth n zu setzen. Die von n jedesmal abzuziehenden Zahlen sind wieder die $\frac{3m^2-m}{2}$ mit $m = +1, -1, +2, -2, +3, -3$ etc. Die Prüfung der Formel an $n = 1, 2, \cdots 12$ und an $n = 101$ gibt Richtiges.

Ueber drei Abhandlungen, welche Euler in den Jahren 1756 und 1757 der Petersburger Akademie zum Drucke übergab[1]), können wir sehr rasch hinweggehen. Sie gehören insgesammt der Lehre an, welche man später als die von den Formen bezeichnet hat, und zwar sowohl der quadratischen als der cubischen Formen. Zahlreiche Einzelsätze sind erkannt, aber ein einheitlicher Gesichtspunkt ist nicht gewonnen, so dass man Euler wenigstens bis zu der Zeitgrenze, welche wir uns gesetzt haben, nicht als Schöpfer der Lehre von den Formen in dem Masse bezeichnen darf, wie er es für die Lehre von den quadratischen Resten und den Potenzresten überhaupt war.

Der Name Potenzrest kommt in einem Aufsatze Eulers vor, mit dessen Erwähnung wir unseren Bericht schliessen müssen. *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta*[2]) enthält von besonders bemerkenswerthen Ergebnissen, dass, wenn p Primzahl und a nicht durch p theilbar ist, es eine kleinste Zahl λ geben müsse, welche hervorbringt, dass a^λ bei Division durch p den Rest 1 lässt; dass alsdann auch $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$ u. s. w. denselben Rest 1 lassen muss; dass die Zahlen $1, a, a^2, \cdots a^{\lambda-1}$ bei der Division durch p lauter verschiedene Reste entstehen lassen; dass λ ein Divisor von $p-1$ sein muss. Der Beweis dieses letzteren Satzes ist in sehr eigenthümlicher Weise geführt. Ist a^λ um 1 grösser als ein Vielfaches von p und a^μ um r grösser als ein ebensolches, so muss auch $a^{\lambda+\mu}$ bei Division durch p den Rest r lassen, und alle überhaupt bei der Division irgend eines a^ν durch p sich ergebenden Reste kommen bei der Division der Zahlen $1, a, a^2, \cdots a^{\lambda-1}$ vor. Nun gibt es bei der Division durch p im Ganzen $p-1$ mögliche Reste, folglich ist

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1756 *et* 1757. T. VI, 85—114, 155—184, 185—230. [2]) Ebenda 1758 *et* 1759. T. VII, 49—82.

$\lambda \leq p-1$. Ist $\lambda < p-1$, so wird gezeigt, dass $\lambda \leq \frac{p-1}{2}$ sein muss. Falls $\lambda < \frac{p-1}{2}$, so ist die Folgerung gestattet, es werde $\lambda \leq \frac{p-1}{3}$ sein, und so geht es immer weiter. Endlich muss einmal $\lambda = \frac{p-1}{m}$ werden, d. h. λ ist als Divisor in $p-1$ enthalten. Weil aber $a^{m\lambda}$, wie vorher gezeigt war, denselben Rest wie a liefert, nämlich den Rest 1, so ist $a^{m\lambda} = a^{p-1}$ um 1 grösser als ein Vielfaches von p, und damit ist ein neuer Beweis des Fermatschen Lehrsatzes entdeckt, der, nach Eulers Ausspruch, natürlicher sei als derjenige, den er früher veröffentlichte, und der sich (S. 612) auf die Binomialentwicklung stützte.

Da wir in früheren Abschnitten auch die Herstellung magischer Quadrate in den zahlentheoretischen Kapiteln erwähnten, so sei hier D'Ons en Bray mit einer eben dahin zielenden Abhandlung[1]) von 1750 genannt.

108. Kapitel.

Combinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir haben (S. 552) von zwei durch Euler gelösten geometrischen Aufgaben gesprochen, welche vermöge der von ihm benutzten Methoden mehr der Combinatorik als der Geometrie angehören. Wir kommen gegenwärtig auf sie zurück. In der ersten Aufgabe von

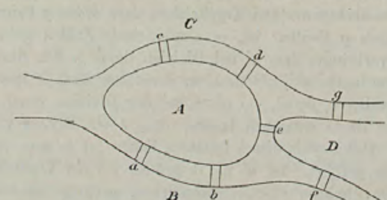

Fig. 100.

1736 handelt es sich darum[2]), ob es möglich sei (Fig. 100), in fortgesetztem Laufe die sieben Brücken a, b, c, d, e, f, g derart zu über-

[1]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876) S. 246—248. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 128—140.

schreiten, dass man über keine Brücke mehr als einmal gehe. Euler drückt ein Hinübergehen von einem der Gebiete A, B, C, D nach einem anderen symbolisch durch Aneinanderfügung der beiden Buchstaben aus, welche jenen Gebieten zur Bezeichnung dienen. Demnach bedeutet AB, dass man über irgend eine Brücke von A nach B gegangen sei, BD dass man sich von B nach D begeben habe, und ABD soll bei nur einmaliger Schreibung des Zwischenbuchstabens B anzeigen, dass man von A nach B, dann weiter nach D gegangen sei u. s. w. Der Uebergang über eine Brücke wird also durch 2 Buchstaben, der über 2 durch 3 Buchstaben, der über n Brücken durch $(n+1)$ Buchstaben angedeutet, und wir wissen als erstes Ergebniss, dass der Weg über die 7 in Frage stehenden Brücken durch 8 Buchstaben zu bezeichnen sein wird. Zu einem zweiten Ergebnisse gelangen wir folgendermassen. Führt eine Brücke von A nach einem anderen Gebiete, so muss der Buchstabe A einmal in der Wegangabe vorkommen. Er muss 2mal, 3mal, $(m+1)$-mal vorkommen, wenn 3, 5, $(2m+1)$ Brücken in das Gebiet A einmünden, und genau ebenso verhält es sich mit dem Buchstaben jedes anderen Gebietes. Nun führen nach A, B, C, D der Reihe nach 5, 3, 3, 3 Brücken. In dem Wege müssen also vorkommen $3A$, $2B$, $2C$, $2D$ oder 9 Buchstaben, während nur 8 Buchstaben zur Wegbezeichnung dienen dürfen, und die Aufgabe ist unmöglich. Euler blieb bei dem Falle, der die Veranlassung zur Untersuchung bot, nicht stehen. Er legte sich die weitere Frage vor, wie die Sache sich gestalte, wenn etwa 2, 4, $2m$ Brücken in das Gebiet A einmünden. Während es bei der vorher betrachteten ungraden Brückenzahl keinen Unterschied machte, ob man von A ausging, oder erst aus einem anderen Gebiete über eine Brücke nach A gelangte, ist jetzt zwischen diesen Möglichkeiten zu unterscheiden. Sind nur zwei Gebiete A und B vorhanden, und kommt man von B nach A über eine erste Brücke, von A nach B über eine zweite Brücke zurück, endlich über die $(2m-1)^{\text{te}}$ Brücke nach A, über die $2m^{\text{te}}$ nach B, so heisst der Weg $BAB \cdots B$, d. h. A kommt $m$mal, B aber $m+1$mal vor. Allgemein ausgedrückt: wenn ein Gebiet durch $2m$ Brücken mit einem anderen verbunden ist, so kommt dessen Buchstabe $\frac{2m}{2}+1$mal oder $\frac{2m}{2}$mal in der Wegangabe vor, je nachdem es den Ausgangspunkt enthält oder nicht. Durch Zusammenfassung dieser Regeln kommt Euler zu folgender Anweisung. Man schreibe die Namen aller Gebiete unter einander und neben jedes Gebiet die Zahl der Brücken, welche dort einmünden, so dass die Summe dieser Zahlen, weil jede Brücke zwei Endpunkte besitzt, doppelt so gross als die Zahl der überhaupt vorhandenen

Brücken wird. Neben jede der angemerkten Zahlen schreibt man deren Hälfte, wenn sie grad, die Hälfte der um 1 vermehrten Zahl, wenn sie ungrad war. Addirt man diese neue Reihe von Zahlen und erhält die Anzahl der Gebiete oder 1 mehr, so ist die gestellte Aufgabe erfüllbar, und zwar unter der ersten Annahme, wenn man in einem ungraden, unter der zweiten, wenn man in einem graden Gebiete den Ausgangspunkt wählt, grad oder ungrad heisst aber ein Gebiet nach der graden oder ungraden Zahl der dort einmündenden Brücken.

Die zweite Aufgabe von 1751 hat Euler damals in einem Briefe an Goldbach gestellt[1]). Sie lautet: Auf wie vielerlei Arten kann ein Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden? Ein Viereck $ABCD$ wird entweder durch AC oder durch BD, durch die eine oder durch die andere Diagonale, zusammen auf zwei Arten, in zwei Dreiecke zerlegt. Die Zerlegung eines Fünfecks $ABCDE$ in drei Dreiecke mittels zweier Diagonalen findet auf fünf Arten statt, nämlich mittels AC und AD, mittels BD und BE, mittels CA und CE, mittels DB und DA, mittels EC und EB. Bei einem mittels dreier Diagonalen in vier Dreiecke zu zerlegenden Sechsecke gibt es vierzehn verschiedene Arten. Um die Arten zu zählen, nach welchen ein n-eck mittels $n-3$ Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegt wird, hat man, wenn z ihre Anzahl heisst, folgende Zusammenstellung:

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$
$$z = 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430$$

und allgemein

$$z = \frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdots\frac{4n-10}{n-1}.$$

Die Induction, sagt Euler, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sache nicht sollte weit leichter entwickelt werden können.

Auch an Segner muss Euler die sieben ersten Zerlegungszahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429 aber ohne die zu ihrer Berechnung führende Formel haben gelangen lassen, und nun entwickelte dieser in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie eine Recursionsformel zur Lösung der Aufgabe[2]). Sei $ACDEFGB$ (Fig. 101) das zur Zerlegung gegebene Vieleck und AB irgend eine der $n+2$ Seiten desselben. Die Diagonalen von A und von B nach C, deren erstere

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 551—552 [2]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae pro annis* 1758 *et* 1759. T. VII, 283—310.

eine Vielecksseite selbst ist, lassen links nur die Seite AC, rechts das $(n+1)$-Eck $BCDEFG$ erscheinen. Das Dreieck ist das erste überhaupt mögliche Vieleck und kann mit dem *Index* 1 versehen werden, das Viereck mit dem Index 2, das $(n+1)$-Eck mit dem Index $n-1$. Eine Seite ist eigentlich keine Figur und hat den Index 0 zu führen. Die Indices der durch Ziehung von AC und BC links und rechts erscheinenden Gebilde sind dieser Erläuterung zufolge 0 und $n-1$, die Indexsumme $0+(n-1)=n-1$. Kann die

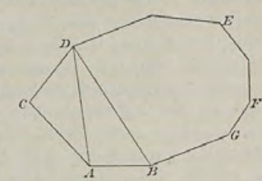

Fig. 101.

Figur vom Index $n-1$ auf q Arten in Dreiecke zerlegt werden, so sind, weil links eine weitere Zerlegung nicht stattfindet, für das ganze $(n+2)$-Eck q Zerlegungen vorhanden, so oft ABC eines der gebildeten Dreiecke ist. Nun ziehe man AD und BD, betrachte also ABD als eines der gebildeten Dreiecke. Links bleibt von der ganzen Figur das Dreieck ACD mit dem Index 1 übrig, rechts ein n-Eck mit dem Index $n-2$, die Indexsumme ist $1+(n-2)=n-1$. Kann die Figur vom Index $n-2$ auf p Arten in Dreiecke zerlegt werden, so sind, weil abermals links eine Zerlegung nicht stattfindet, für das ganze $(n+2)$-Eck p Zerlegungsarten vorhanden, so oft ABD eines der gebildeten Dreiecke ist. Schiebt sich die Spitze des durch zwei Diagonalen über AB gebildeten Dreiecks abermals weiter nach rechts, so bleibt links ein Viereck vom Index 2 mit 2 Zerlegungsarten, rechts ein $(n-1)$-Eck vom Index $n-3$ mit etwa o Zerlegungsarten, und da die Zerlegungen links und rechts von einander unabhängig sind, so gibt es $2o$ Zerlegungsarten mit dem hier beschriebenen Dreiecke. Die Thatsache, dass hier ein Product $2o$ auftritt, macht es wünschenswerth, auch den Zahlen q und p die Productenform $1\cdot q$ und $1\cdot p$ zu geben, oder mit $a=1$, $b=1$, $c=2$ die drei Producte aq, bp, co erscheinen zu lassen, wo die einander vervielfachenden Factoren die Zerlegungszahlen der links und rechts von dem über AB gezeichneten Dreieck übrigbleibenden Figuren sind und 1 als die Zerlegungszahl der überhaupt unzerlegbaren mit dem Index 0 behafteten Seite gilt, um die Gleichmässigkeit der Formelglieder herzustellen. Welcher Punkt des Vielecks daher als Spitze des mit AB als Grundlinie hergestellten Dreiecks gewählt wird, immer erscheint die Anzahl der alsdann möglichen Zerlegungsarten in Gestalt eines Productes wie aq, bp, co d. h. in Gestalt des Productes der Zerlegungsarten solcher Figuren, deren Indices sich zu

$n-1$ ergänzen, und die Summe aller Producte $aq + bp + co + \cdots$ liefert die Anzahl der Zerlegungsarten, welche voraussetzen, dass ein Dreieck die AB zur Grundlinie habe. Bei jeder überhaupt denkbaren Zerlegung muss aber ein Dreieck mit AB als Grundlinie vorkommen, also ist $aq + bp + co + \cdots$ die gesuchte Anzahl. Ihre Bildung vereinfacht sich durch die Erwägung, dass einer Figur mit dem Index k eine andere mit dem Index $n-1-k$ gegenüberliegt, mag sich die erstere links, die zweite rechts von dem Dreiecke über AB befinden oder umgekehrt, dass also Producte wie aq, bp, co je zweimal symmetrisch am Anfang und am Ende der Entwicklung vorkommen. Alle diese Producte paaren sich ab, d. h. sie erhalten den Factor 2 und treten in nur halber Gliederzahl auf, so oft $n-1$ eine ungrade Zahl ist. Bei gradem $n-1$ erscheint ein Product d^2 zweier gleicher Anzahlen von Zerlegungen einer Figur mit dem Index $\frac{n-1}{2}$, weil eine derartige Figur links und eine zweite rechts von dem über AB beschriebenen Dreiecke erscheint. Segner knüpft an diese Auseinandersetzung eine Tabelle der ausgerechneten Zerlegungsarten bis zum Zwanzigeck.

In den Veröffentlichungen der Pariser Akademie ging den eigentlichen Abhandlungen eine vom Secretär der Gesellschaft herrührende geschichtliche Einleitung, *histoire*, voraus, welche meistens den Inhalt der eingereichten Schriftstücke in gedrängter Kürze und ausserdem Nekrologe verstorbener Akademiker enthielt. Später entstandene Akademien befolgten dieses Beispiel. Auch dem Bande der *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*, welche Segners Abhandlung einschloss, war eine aus Goldbachs Feder stammende Einleitung vorgedruckt. In ihr meldet Goldbach, dass Euler ihm seiner Zeit die oben angeführte independente Formel mitgetheilt habe, welche eine Ausrechnung noch leichter als Segners Recursionsverfahren zulasse, und welche einige Irrthümer in Segners Zahlen nachweise. An diese Bemerkung schliesst sich eine Tabelle der richtig gestellten Zerlegungszahlen bis zum Fünfundzwanzigeck einschliesslich, bei welchem eine zwölfziffrige Zahl erscheint.

An den Bericht über die beiden geometrisch-combinatorischen Aufgaben knüpfen wir den über Wahrscheinlichkeitsrechnung an, also über Dinge, von welchem zuletzt im 96. Kapitel die Rede war.

Jean Jaques d'Ortous de Mairan[1]) (1678—1771), gewöhnlich kurzweg De Mairan genannt, Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften seit 1718 und Secretär derselben seit 1741, legte

[1]) Poggendorff II, 17—18.

dieser Gesellschaft 1728 eine Untersuchung über das Spiel „Grad oder Ungrad" vor, welche aber nicht gedruckt worden ist. Nur in dem einleitenden Vorberichte finden wir eine Erwähnung[1]), welche so umfangreich ist, dass wir ihr De Mairans Gedanken entnehmen können. Hält Jemand in einer festgeschlossenen Faust Rechenpfennige verborgen und fragt, ob deren Anzahl grad oder ungrad sei, so ist die allgemeine Annahme die, es spreche ebensoviele Wahrscheinlichkeit für die eine wie für die andere Antwort. De Mairan behauptet, es sei vortheilhaft auf ungrad zu wetten und begründet diese Behauptung wie folgt: Die in der Faust enthaltenen Rechenpfennige sind einem vorher vorhandenen Haufen von Rechenpfennigen entnommen. Enthielt dieser $2n$ Rechenpfennige, so konnten $1, 3, 5, \cdots (2n-1)$ oder $2, 4, 6, \cdots (2n)$ erfasst werden, also genau ebenso leicht eine ungrade als eine grade Anzahl. Enthielt der Haufen aber $2n+1$ Rechenpfennige, so kommt zu den vorigen Fällen noch die der Erfassung aller $(2n+1)$ Rechenpfennige hinzu, die ungrade Wahl hat also eine Möglichkeit mehr für sich. De Mairan beutete diesen Grundgedanken dann noch weiter aus, indem er annahm, dass mehrere Haufen Rechenpfennige vorhanden waren, von deren einem die in der Faust enthaltenen entnommen wurden, dass das Maximum der Rechenpfennige, die in jedem Haufen sich befinden können, aber nicht thatsächlich befinden müssen, gegeben sei, und dergleichen mehr.

Nicole hat im Februar und im März 1730 der Pariser Akademie der Wissenschaften zwei Abhandlungen[2]) vorgelegt, in deren ersterer es sich darum handelte, wer von zwei Spielern, deren Geschicklichkeiten sich wie p zu q verhalten, unter einer vorbestimmten Anzahl von Spielen mindestens eines mehr als der Gegner zu gewinnen hoffen dürfe, und als wie gross sein Vortheil sich berechne. In der zweiten Abhandlung war die Aufgabe auf mehr als zwei Spieler ausgedehnt und zum Gewinne als nothwendig erachtet, dass ein Spieler mindestens ein Spiel mehr als irgend einer der anderen Spieler gewinne. Das Meiste, was Nicole hier vorbrachte, war nicht durchaus neu, sondern schon von De Montmort und De Moivre in Angriff genommen, wenn nicht gelöst. Eine Bemerkung ist allenfalls hervorzuheben, nämlich die[3]), dass, wenn die in der ersten Abhandlung vorausgesetzten beiden Spieler $2n$ Spiele mit einander machen, die Gewinnhoffnung des geschickteren Spielers die gleiche bleibe, als wenn die Verabredung auf $2n-1$ Spiele getroffen worden wäre,

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1728. *Histoire* pag. 53—57. [2]) Ebenda 1730, pag. 45—56 und 331—344. [3]) Ebenda pag. 54—55.

während im Allgemeinen die Gewinnhoffnung des geschickteren Spielers mit der Zahl der zu machenden Spiele wachse. Den Grund des scheinbaren Widerspruchs erkennt Nicole darin, dass bei $2n-1$ Spielen der Gewinn von n, bei $2n$ Spielen dagegen der Gewinn von $n+1$ Spielen erforderlich ist, um eine Entscheidung hervorzubringen, d. h. bei $2n$ Spielen muss der Gewinner dem Verlierenden um zwei Spiele voraus sein, bei $2n-1$ Spielen nur um ein Spiel.

Das Jahr 1730 war es auch, welches in London ein Buch herauskommen sah: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Accessere variae considerationes de methodis comparationum, combinationum et differentiarum, solutiones difficiliorum aliquot problematum ad sortem spectantium, itemque constructiones faciles orbium planetarum, una cum determinatione maximarum et minimarum mutationum quae in motibus corporum coelestium occurrunt.* Auf dem Titelblatte war kein Verfasser angegeben, aber an der Spitze des Widmungsschreibens an Martin Folkes nannte sich De Moivre als Urheber der *Miscellanea analytica*, wie man das Werk zu nennen pflegt. Wir haben schon (S. 356) erwähnt, dass die Miscellanea analytica Dinge enthalten, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung angehören. De Moivre vertheidigt sich dort gegen De Montmort, der, wie wir gleichfalls schon wissen (S. 350), in der zweiten Ausgabe seines *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* eine im Grunde sehr unschuldige Bemerkung De Moivres zum Anlass für eine breite Polemik gewählt hatte. Jetzt nahm De Moivre das Wort. Er widmete einen ganzen Abschnitt[1]) der Wahrscheinlichkeitsrechnung, beziehungsweise der Antwort auf einige Anschuldigungen. Es wird darin erzählt, dass De Montmort 1715, also nach dessen Aeusserungen von 1715, in London gewesen sei, dass De Moivre ihn damals in freundschaftlichster Weise herumgeführt habe, dass De Montmort bei der Rückkehr nach Paris geschrieben habe, er werde der ihm erwiesenen Liebenswürdigkeiten stets eingedenk bleiben. Die Spannung hatte demnach nur kurz gedauert, und De Moivres Ton gegen den überdies jetzt schon seit elf Jahren Verstorbenen war ein höchst anerkennender, nur die ihm selbst gemachten Vorwürfe zurückweisender. Was an Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, hat aber nur für eine ausführliche Geschichte[2]) dieses besonderen Zweiges der mathematischen Wissenschaften genügende Wichtigkeit, um dabei zu verweilen.

Daniel Bernoulli hat in den Abhandlungen der Petersburger

[1]) De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 146—229, Liber VII. *Responsio ad quasdam Criminationes.* [2]) Todhunter, *History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace* pag. 187—190.

Akademie für 1730 und 1731 eine Arbeit[1]) veröffentlicht, mit welcher er eine Reihe von Untersuchungen begann, welche wir nicht zu erwähnen berechtigt sind, weil sie jenseits der Zeitgrenze fallen, die wir uns gesteckt haben. Nur über den einleitenden Aufsatz dürfen wir berichten. Er führt den Titel eines Versuches einer neuen Theorie eines Masses für den Zufall und bringt in der That Gedanken zum Vorschein, welche vorher niemals gedruckt worden waren, und welche dann im Laufe der Zeiten zur Lehre von der im Gegensatze zur mathematischen Erwartung vorhandenen moralischen Erwartung sich ausgebildet haben. Alle Schriftsteller — das ist etwa der Sinn von Daniel Bernoullis Entwicklungen — setzten den Werth einer Erwartung gleich der Summe der Producte der zu erzielenden Gewinne in den Bruch, der jedesmal zum Zähler die Anzahl der der Erringung des Gewinnes günstigen Fälle, zum Nenner die Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle besitze. Dabei komme der Werth, *valor*, des Gewinnes, aber nicht das in Betracht, was man seinen wirthschaftlichen Nutzen, seinen Vortheil, *emolumentum*, nennen könne. Dieser hänge von dem wirthschaftlichen Zustande der Person, *ex conditione personae*, welche den Gewinn erziele, ab. Mittlerer Vortheil, *emolumentum medium*, sei alsdann die Summe der Producte der einzelnen Vortheile in die vorher erklärten Brüche. Der Vortheil selbst setzt sich aus Elementen zusammen, welche im graden Verhältnisse der Elemente des Gewinnes und im umgekehrten Verhältnisse des Vermögens, *summa bonorum*, stehen, eine Hypothese, welche unter unzähligen gewählt wird, und deren Begründung auf Folgendes hinausläuft: Die meisten Menschen verzehren ihre Einkünfte, dieser 5000 Dukaten, jener halb so viel. Dem Ersten erwächst durch 1 Dukaten nicht mehr Vortheil als dem Zweiten durch $\frac{1}{2}$ Dukaten, was in der Gleichung $\frac{1}{5000}=\frac{\frac{1}{2}}{2500}$ sich spiegelt, und diese Gleichung ist das erwähnte Gesetz für die Ermittelung des Vortheils. Ist also x das Vermögen, dx das Element der Vermögenszunahme, dy das Element des Vortheils, b ein Proportionalitätsfactor, so muss $dy=\frac{b\,dx}{x}$, $y=b\cdot\log x+C$ sein, oder bei $C=-b\log a$, wo a das Anfangsvermögen bezeichnet, auch $y=b\cdot\log\frac{x}{a}\cdot$ Denkt man

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1730 *et* 1731. T. V, 175—192. Eine deutsche Uebersetzung mit mathematischen Anmerkungen von A. Pringsheim und mit einer mehr den nationalökonomischen Werthbegriff und dessen Entwicklung betreffenden Einleitung von L. Fick ist (Leipzig 1896) in der „Sammlung älterer und neuerer staatswissenschaftlicher Schriften des In- und Auslandes“ erschienen.

sich das Vermögen x aus a und dem hinzugekommenen Gewinne, *lucrum*, x_1 gebildet, so ist $y = b \cdot \log \frac{a + x_1}{a}$. Auch hier lässt sich ein *emolumentum medium* bilden, wenn man die verschiedenen Einzelemolumente[1]) $y_1, y_2, y_3, \cdots$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, p_3, \cdots$ sie zu erzielen vervielfacht und die Producte addirt. Das mittlere Emolument ist also

$$Y = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + \cdots = p_1 b \log \frac{a + x_1}{a} + p_2 b \log \frac{a + x_2}{a} + p_3 b \log \frac{a + x_3}{a}$$
$$+ \cdots = p_1 b \log (a + x_1) + p_2 b \log (a + x_2) + p_3 b \log (a + x_3)$$
$$+ \cdots - (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots) b \log a,$$

ein Ausdruck, der noch einfacher wird, wenn die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \cdots$ alle Möglichkeiten erschöpfen, d. h. wenn $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$ ist. Dann ist nämlich

$$Y = b \log X - b \log a \text{ mit } X = (a + x_1)^{p_1} \cdot (a + x_2)^{p_2} \cdot (a + x_3)^{p_3} \cdots.$$

Eine solche Erschöpfung der Möglichkeiten, wie sie hier vorausgesetzt wurde, muss, da bei ehrlichem Spiele doch nicht in allen Fällen gewonnen werden kann, einige der x negativ auftreten lassen, so oft der Gewinn ein Verlust ist.

Bernoulli zeigt dann, dass jedes Spiel unvortheilhaft ist. Haben zwei Personen je 100 Dukaten und spielen um 50 Dukaten in einem Spiele, welches genau gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit für Jeden bietet, so ist

$$X = (100 + 50)^{\frac{1}{2}} \cdot (100 - 50)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7500} < 87,$$

also jeder der beiden Spieler verschlechtert sein Vermögen um mehr als 13 Dukaten dadurch, dass er sich überhaupt auf das Spiel einlässt.

Je grösser das Vermögen im Verhältnisse zum Einsatze ist, um so geringer wird der der Spielgefahr gleichkommende Verlust, und somit bestätige sich, was im bürgerlichen Leben allgemeine Annahme zu sein scheine, dass der Eine ein zweifelhaftes Unternehmen wagen dürfe, ein Anderer nicht. Nachdem eine Nutzanwendung der gleichen Grundgedanken auf die Frage, ob man schwimmende Güter versichern solle, gemacht ist, wobei es wesentlich auf das Verhältniss des Betrages der schwimmenden Güter zum Gesammtvermögen ankommt, wendet sich Daniel Bernoulli einem anderen Gegenstande zu.

[1]) Unsere Bezeichnung weicht hier im Anschlusse an Todhunter l. c. pag. 214 von der Bernoullis ab.

Es ist die 1713 von Niclaus I Bernoulli gestellte Aufgabe (S. 352), welche in folgender Form ausgesprochen wird: Paul soll dem Peter 1 geben, wenn dieser bei einem 1^ten Wurfe mit einem Geldstücke Schrift werfe, dagegen 2, 4, 8 ⋯, wenn Schrift erst beim 2^ten, 3^ten, 4^ten ⋯ Wurfe erscheine; Pauls Verlusthöhe wird gesucht. Wenn auch unendlich viele Fälle denkbar sind, könne man doch deren Anzahl durch den Buchstaben N bezeichnen. Beim 1^ten Wurfe entscheidet sich das Spiel zu Peters Gunsten in $\frac{N}{2}$ Fällen, beim 2^ten, 3^ten, 4^ten ⋯ Wurfe in $\frac{N}{2^2}, \frac{N}{2^3}, \frac{N}{2^4} \cdots$ Fällen, so dass die Zahlen $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2^2}, p_3 = \frac{1}{2^3} \cdots$ erscheinen und, was früher X hiess, den Werth $(a + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (a + 2)^{\frac{1}{4}} \cdot (a + 4)^{\frac{1}{8}} \cdot (a + 8)^{\frac{1}{16}} \cdots$ erhält, falls a das ursprüngliche Vermögen von Paul war. Seine Verlusthöhe ist demnach $(a + 2^0)^{\frac{1}{2^1}} \cdot (a + 2^1)^{\frac{1}{2^2}} \cdot (a + 2^2)^{\frac{1}{2^3}} \cdots - a$, mithin wechselnd je nach dem Werthe von a. Das war der erste Versuch eine Auflösung der Aufgabe herzuleiten, welchem andere, wie schon bemerkt, folgten, und weil dieser Versuch in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie erschien, erhielt die Aufgabe selbst den Namen der Petersburger Aufgabe, wie wir schon früher (Bd. II, S. 502) gelegentlich berichtet haben.

Daniel Bernoulli gab als Nachschrift zu seiner Abhandlung einen Brief Cramers an Niclaus I Bernoulli von 1728, welcher die gleiche Aufgabe betrifft, und welchen Daniel Bernoulli zu lesen bekam, nachdem sein eigener Aufsatz schon druckfertig war. Auch Cramer war es nicht entgangen, dass zwischen dem *calcul mathématique* und der *estime vulgaire*, Ausdrücke, welche etwa der mathematischen und der moralischen Erwartung entsprechen, ein Gegensatz stattfinde, und dieses Verdienst Cramers erkennt Daniel Bernoulli an. Dagegen verhält er sich ablehnend gegen Cramers Versuch, den Widerspruch zu heben, welcher darin besteht, dass alle Potenzen der Zahl 2 von 2^{24} an als einander gleichwerthig betrachtet werden, weil schon $2^{24} = 16777216$ als praktisch unendlich gross gelten dürfe. Nicht minder willkürlich ist ein anderer von Cramer in dem an Niclaus I Bernoulli gerichteten Briefe gemachter Vorschlag, die Freude, welche man an dem Besitze einer Summe habe, und die er *la valeur morale des biens*, ihren moralischen Werth nennt, ihrer Quadratwurzel proportional zu setzen.

George Louis Leclerc Graf von Buffon[1]) (1707—1788)

[1]) Poggendorff I, 338.

hat nur nebensächlich seinen reichen Geist auf mathematische Dinge gerichtet, dabei aber den Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ein ganz neues Gebiet eröffnet, das vorher nie beachtet worden war, das geometrische. Ein kurzgefasster, aber sehr klarer Bericht[1]) aus dem Jahre 1733 lässt Buffons Gedanken erkennen. Soll (Fig. 102) eine kreisrunde Scheibe vom Durchmesser d auf ein in quadratische Felder von der Quadratseite a eingetheiltes Brett derart geworfen werden, dass sie genau in ein Feld zu liegen komme, ohne über den Rand desselben hinauszureichen, so kann dieses nur dann erzielt werden, wenn der Mittelpunkt der Wurfscheibe innerhalb des kleineren inneren Quadrates oder auf dessen Umrandung zu liegen kommt, wobei die Seitenlänge des inneren Quadrates $a - d$ ist. Das Feld a^2 zerfällt durch diese Unterscheidung in zwei Abtheilungen, in das innere Quadrat $a^2 - 2ad + d^2$ und die umgebende Figur $2ad - d^2$. Soll gleich wahrscheinlich sein, dass der Mittelpunkt der Wurfscheibe in die eine oder in die andere Abtheilung falle, so müssen deren Flächen gleich sein, d. h. $a^2 - 2ad + d^2 = 2ad - d^2$, $a = 2d + d\sqrt{2}$, $\frac{a}{d} = 2 + \sqrt{2} = 3{,}4142136 \cdots$ oder die Quadratseite muss zwischen 6 und 7mal so gross als der Halbmesser der Wurfscheibe sein. Dieser einfachsten Aufgabe stehen verwickeltere zur Seite. Zu diesen gehört es schon, wenn das Wurfstück nicht kreisrund, sondern quadratisch ist, weil es dann Stellen gibt, die der Mittelpunkt des Wurfstückes einnehmen darf, wenn die Seiten des Wurfstückes denen des Feldes parallel zu liegen kommen, und bei schrägem Auffallen nicht einnehmen darf. Noch verwickelter ist das sogenannte Nadelproblem, bei welchem das Wurfstück als Länge ohne Breite gedacht ist. Buffon, so erzählt der Bericht, welchem wir folgten, habe die Frage, bei welchen Abmessungen der Felder und der Nadel man mit gleicher Wahrscheinlichkeit erwarten könne, dass die Nadel auf ein einziges Feld zu liegen komme oder nicht, mittels der Quadratur einer Cycloide beantwortet. Buffons Arbeit selbst erschien erst 1777.

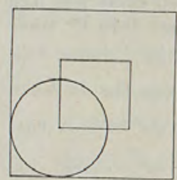

Fig. 102.

Abermals ein neuer Gedanke von weittragender Bedeutung war es, mit welchem Daniel Bernoulli 1734 an die Oeffentlichkeit trat[2]). Die Pariser Akademie hatte eine Preisfrage gestellt, in welcher eine Erklärung der verschiedenen Neigungen der Ebenen, in welchen die Planetenbahnen verlaufen, verlangt war, und Bernoulli begann seine Abhandlung, durch die er die Hälfte des Preises erwarb, mit Untersuchung der Frage, ob jene Verschiedenheit der Neigungen auf eine bestimmte Ursache zurückzuführen sei. Hier war also zum ersten Male die Grösse der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gewisse Reihe von Thatsachen eine gesetzliche sei, als Gegenstand der Erforschung gewählt.

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris.* Année 1733. *Histoire* pag. 43—45. [2]) *Recueil des pièces qui ont remportée le prix à l'Académie des Sciences.* T. III (1734) — Gouraud, *Histoire du calcul des probabilités* (Paris 1848) pag. 50. — Todhunter l. c. p. 222—223.

Wir erwähnen in grösster Kürze einen Aufsatz des Grafen Fagnano im 12. Bande der *Raccolta Calogerà* von 1735, der das Lottospiel betraf[1]) und zwar die Wahrscheinlichkeit, dass von einer Gruppe von g Nummern deren f in vorausbestimmter Reihenfolge gezogen werden.

Wir haben uns nun abermals zu De Moivre zu wenden, dessen *Doctrine of chances* 1738 in zweiter Auflage erschien (S. 356). Sie hatte sich gegen die erste Auflage bedeutend vermehrt. Wahrscheinlichkeitsfragen, welche sich auf verschiedene Spiele, wie z. B. auf Whist und Piquet, bezogen, waren in weit grösserer Anzahl als früher vorhanden. Wir begnügen uns mit der Angabe zweier Zusätze.

A und B spielen[2]) um einen Einsatz s; A hat zwei Möglichkeiten zu gewinnen, B nur eine, in einem vierten Falle zieht jeder der beiden Spieler seinen Einsatz zurück. Wie gross ist der Vortheil des Spielers A? Da vier Möglichkeiten vorhanden sind, so ist A im Vortheil mit $\frac{2s}{4} - \frac{s}{4} = \frac{s}{4}$, und B ist mit ebensoviel im Nachtheil. Hätte man den Fall, der das Spiel nichtig macht, nicht berücksichtigt, so wären nur drei Möglichkeiten vorhanden gewesen, und der Vortheil von A, beziehungsweise der Nachtheil von B, hätte sich auf $\frac{2s}{3} - \frac{s}{3} = \frac{s}{3}$ belaufen. De Moivre sagt ausdrücklich, er habe die an sich sehr leichte Aufgabe aufgenommen, um dem Leser bemerklich zu machen, dass keine Bedingung einer Aufgabe, so unbedeutend sie auf den ersten Blick scheinen könnte, unberücksichtigt bleiben dürfe.

Der zweite Zusatz[3]) stellt sich dar als eine Erweiterung der schon von Fermat auf mehr als zwei Spieler ausgedehnte Frage nach der Theilung vor eingetretener Entscheidung (Bd. II, S. 757)

[1]) Loria in Hist. Festschr. 1899 S. 266. [2]) De Moivre, *Doctrine of chances*, 2. edition, pag. 159—161. [3]) Ebenda pag. 191—192.

auf den Fall beliebig vieler Spieler, deren Geschicklichkeiten durch entsprechende Masszahlen ausgedrückt sind, und bei deren Jedem die Anzahl der Gewinnspiele bekannt ist, die ihm zum endgiltigen Siege noch fehlen. De Moivre lehrt hier ein Verfahren, welches auf der Bildung von Combinationsformen zu allen möglichen Klassen bis zu der der Anzahl der Spieler gleichen und darauf folgenden Weglassung einzelner dieser Formen beruht.

Als eine Abkürzung von De Moivres Werk lässt sich *The Nature and Laws of Chance* von Thomas Simpson (1740) betrachten[1]. Fast alle darin enthaltenen Aufgaben sind von De Moivre entlehnt und nach ähnlichen Methoden wie die, deren er sich bediente, behandelt. Nur an wenigen Stellen ist Originelles zu bemerken, und davon sei ein Beispiel gegeben. Wir wissen (S. 337), dass Arbuthnot 1692 eine Uebersetzung von Huygens' Abhandlung über Wahrscheinlichkeitsrechnung mit geringen Zusätzen veröffentlichte. Einer dieser Zusätze stellte die Aufgabe[2], deren Lösung Liebhabern überlassen blieb, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein geworfener parallelepipedischer Körper von den Seiten a, b, c so falle, dass eine bestimmte Fläche, z. B. die von den Seiten a und b gebildete, oben zu liegen komme. Simpson war der Erste, der eine Auflösung veröffentlichte, und zwar folgende[3]. Er beschreibt eine Kugel um den genannten Körper und lässt den Halbmesser der Kugel eine Bewegung vollziehen, bei welcher er längs des Umfangs der bestimmten Ebene hingleitet und auf der Kugeloberfläche eine Figur hervortreten lässt, deren Fläche untersucht wird. Ihr Verhältniss zur ganzen Kugeloberfläche ist die Wahrscheinlichkeit für das Obenliegen der betreffenden Ebene. Die Aehnlichkeit des Gedankens mit dem von Buffon (S. 634), das Verhältniss von Flächenstücken als Wahrscheinlichkeitsmass zu benutzen, liegt auf der Hand. Wir wollen damit allerdings keineswegs behaupten, Simpson müsse Buffons Arbeit gekannt haben.

Johann Bernoullis 1742 erschienene Gesammtwerke enthalten einen nur kurzen Beitrag zur Wahrscheinlichkeitslehre[4]. Die letzte auf die Ausübung des Wahlrechts bezügliche Aufgabe könnte die Aufmerksamkeit einigermassen fesseln, wenn ihr Sinn nur deutlicher wäre. Es scheint fast, als nehme Bernoulli an, alle Wähler, deren Anzahl durch 3 theilbar sein solle, würden durch das Loos in Dreiergruppen eingetheilt, und die Wahl eines gewissen Candidaten, für

[1]) So lautet wenigstens Todhunters Urtheil l. c. pag. 206. Wir selbst kennen Simpsons Schrift nicht. [2]) Todhunter l. c. pag. 53. [3]) Ebenda pag. 209—210. [4]) Joh. Bernoulli *Opera* IV, 28—33.

welchen die Wähler A und B sich bereits ausgesprochen haben, sei gesichert, wenn diese beiden A und B der gleichen Gruppe angehören. Wir wollen indessen nicht als zweifellos hinstellen, dass wir Bernoullis Meinung richtig verstanden haben.

Schon dem vorhergehenden Jahre 1741 gehört ein Werk an, welches, ohne der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre gewidmet zu sein, doch wohl hier genannt werden muss. Johann Peter Süssmilch[1]) (1707—1767) hat abwechselnd Medicin, Theologie, Mathematik studirt, hat als Hauslehrer, als Feldprediger, als Geistlicher einer kleinen Ortschaft, zuletzt als Consistorialrath in Berlin gewirkt. Sein Hauptwerk von 1741 führt den Titel: *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen.* Die Vorrede schrieb er „auf dem Marsche zu Schweidnitz", also im Getümmel des Kriegslebens. Die göttliche Ordnung wurde 1761 zum zweiten, 1765 zum dritten Male aufgelegt. Eine vierte Auflage besorgte nach Süssmilchs Tode dessen Schwiegersohn Baumann 1775. Seit der zweiten durchaus umgearbeiteten Auflage ist die göttliche Ordnung ein für Gelehrte aller Länder unentbehrliches Musterwerk geworden, welchem zahlreiche Nachahmungen folgten, eine statistische Socialwissenschaft begründend. Aber auch schon die erste Auflage fand in Deutschland und Holland, in England und in der Schweiz, in Dänemark und Schweden laute Anerkennung. Was Halley (S. 49), was Graunt und Arbuthnoth (S. 336), was andere Schriftsteller zumeist in England an einzelnen Tabellen sich verschafft und herausgegeben hatten, war hier vereinigt und vermehrt. Das 7. Kapitel der ersten Auflage führt beispielsweise bereits die Ueberschrift: „Von denen Krankheiten und ihrem Verhältniss". Als sodann eine heftige Seuche 1757 viele Menschen dahinraffte, widmete Süssmilch ihr eine besondere Schrift: *Gedanken von den epidemischen Krankheiten und dem grösseren Sterben des 1757sten Jahres,* deren Inhalt wieder in die späteren Auflagen der göttlichen Ordnung eindrang. Süssmilch hatte sich die Aufgabe nicht so gestellt, wie seine Vorgänger und manche seiner Nachfolger sie stellten. Es kam ihm nicht darauf an, der Berechnung von Leibrenten eine feste Grundlage zu geben, er wollte, was der von ihm gewählte Titel deutlich ausspricht. Der göttlichen Ordnung auf die Spur zu kommen war seine Absicht, sie zu erkennen, welche die Lebensverhältnisse des Menschengeschlechtes

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXXVII, 188—195. Artikel von V. John. — Ludwig Moser, Die Gesetze der Lebensdauer (Berlin 1839), Vorrede S. V bis VII.

regelt, mochte der tägliche Verkehr von den gefundenen Gesetzen Anwendung machen können oder nicht.

Wir sprachen von Nachfolgern Süssmilchs. Der Holländer Wilhelm Kerseboom[1]) (1691—1771) kann kaum als solcher bezeichnet werden, denn wenn auch seine bedeutendsten Schriften über die Schätzung der Bevölkerung eines Landes erst 1742 und noch später, also nach der Göttlichen Ordnung erschienen, so reicht seine erste durchaus unabhängig entstandene Veröffentlichung aufwärts bis 1737. In dem Buche von 1742 erscheint erstmalig der Begriff der mittleren Lebensdauer eines Neugeborenen, der alsdann näher erörtert wurde durch den Franzosen Antoine Deparcieux[2]) (1703 bis 1768) in seinem *Essai sur les probabilités de la vie humaine* von 1746. Als mittlere Lebensdauer benennt Deparcieux den Bruch

$$\frac{\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{5}{2}a_2 + \frac{7}{2}a_3 + \cdots}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots},$$

in welchem $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ die Anzahl der gleichzeitig Geborenen angibt, von welchem a_0 im Verlaufe des ersten, a_1 im Verlaufe des zweiten, a_2 und a_3 im Verlaufe des dritten, des vierten Lebensjahres sterben u. s. w.

Maclaurin scheint mit seinen in den letzten Jahren seines Lebens sich äussernden Bestrebungen, eine Wittwenversorgungsanstalt zu begründen, hierher zu gehören. Wenigstens erschienen dahin zielende Rechnungen von ihm 1748 nach seinem Tode im Druck[3]). Zu den Schriftstellern über Sterblichkeitsverhältnisse gehört ferner Per Vilhelm Wargentin[4]) (1717—1783), zuerst Adjunct der Philosophie an der Universität Upsala, dann seit 1749 beständiger Secretär der Akademie der Wissenschaften zu Stockholm. In Abhandlungen aus den Jahren 1754 und 1755 hat er sich so ausgedrückt, als ob man von Halleys Gedanken der stationären Bevölkerung (S. 49) Gebrauch machen solle, wenn auch vielleicht ohne diese Meinung in Wirklichkeit zu hegen. In einer Abhandlung von 1766 dagegen bemerkte Wargentin ausdrücklich, der kürzeste Weg, um die Absterbeordnung zu finden, bestehe in der Vergleichung der Zahl der Verstorbenen mit der der Lebenden, und mit dieser Bemerkung war

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XXVII, 637—639. Statt der dort gebrauchten Schreibweise Kersseboom benutzen wir die mit nur einem s, welche die weitaus häufigere ist. [2]) *Histoire de l'Académie des Sciences des Paris.* Année 1768. *Histoire* pag. 155—166. — Moser l. c. S. 66. — Knapp, Theorie des Bevölkerungswechsels (1874) S. 65 und 135. [3]) Gouraud, l. c. pag. 70—71. [4]) Poggendorff II, 1261—1262.

die heutige, von allen theoretischen Voraussetzungen absehende Herstellung von Sterblichkeitstafeln empfohlen[1]). Auch Euler hat Arbeiten über Wahrscheinlichkeitsrechnung verfasst, von denen wir aber nur die erste aus dem Jahre 1751 kurz erwähnen dürfen. Sie behandelt[2]) das schon von früheren Schriftstellern erörterte Spiel, bei welchem es darauf ankommt, dass bei gleichzeitigem, von einander unabhängigem Ziehen von Karten aus zwei ursprünglich vollständigen Kartenspielen von beiden Spielern die gleich bezeichnete Karte umgeschlagen werde.

D'Alembert musste in verschiedenen Bänden der Encyclopädie zu Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen sich herbeilassen. Der 1754 gedruckte Band enthielt einen Artikel *Croix ou pile*. Das ist das Spiel, welches englisch *Head or Tail*, deutsch *Bild oder Schrift* genannt wird. Man wettet, ob eine in die Höhe geworfene Münze beim Niederfallen die eine oder die andere Seite nach oben kehren werde. D'Alembert griff in diesem Artikel die gewöhnliche Abschätzung der Wahrscheinlichkeit an. Frage man nach der Wahrscheinlichkeit in zwei Würfen Bild zu erzielen, so gäben alle Schriftsteller die gleiche Antwort. Sie sagten: von den vier Combinationen der beiden Würfe (Bild Bild, Bild Schrift, Schrift Bild, Schrift Schrift) bringe nur die letzte dem Spieler Verlust, der in den drei ersten Fällen gewinne, also sei 3 gegen 1 für ihn zu wetten. Sei diese Ueberlegung richtig? D'Alembert zweifelt daran. Wenn im ersten Wurfe schon Bild falle, so sei damit das Spiel beendigt, und ein zweiter Wurf erfolge nicht. Also gebe es nur drei Combinationen (Bild, Schrift Bild, Schrift Schrift), von denen die letzte allein Verlust bringe, und man habe 2 gegen 1 zu wetten. Derjenige Band der Encyclopädie, welcher dann 1757 die Presse verliess, enthielt den Artikel *Gageure*, Wette. Hier kam D'Alembert auf die Frage zurück, um einige, wie er selbst sagt, sehr gute Einwendungen gegen die von ihm erhobenen Zweifel mitzutheilen, welche Necker, Professor der Mathematik in Genf, ihm brieflich gemacht habe. Necker leugnete die Berechtigung, die Möglichkeit Bild den beiden anderen, Schrift Bild und Schrift Schrift, als gleichartig zur Seite zu stellen, und D'Alembert gibt zu, dass dieser Einwand beachtenswerth erscheine, ohne sich allerdings als nunmehr von der Richtigkeit der gewöhnlichen Schlüsse überzeugt zu bekennen.

In dem Artikel *Croix ou pile* ist als zweiter Gegenstand des

[1]) Eneström, P. W. Wargentin und die sogenannte Halleysche Methode. Hist. Festschr. 1899, S. 83—95. [2]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1751, pag. 255—270.

Zweifels die Petersburger Aufgabe erwähnt. Ob Daniel Bernoullis Auseinandersetzung genügend befunden werden könne, wisse er nicht, sagt D'Alembert. Es liege da ein Aergerniss vor, welches wohl verdiene, die Algebraiker zu beschäftigen[1]). Am wenigsten Sorge macht ihm die unendlich hohe Erwartung dessen, dem ein in geometrischer Progression wachsender um so grösserer Gewinn zufällt, je später der ihm denselben verschaffende Wurf gelingt. Seine Erwartung müsse der Furcht des anderen Spielers, dem unendlicher Verlust drohe, entsprechen. Jeder andere Spieler würde aber durch den Vorschlag eines Spieles, in welchem er in einem Augenblicke unermessliche Summen verlieren könnte, nur beweisen, dass er ein Narr ist, und um mit einem Narren gleichauf zu spielen, muss man nicht minder närrisch sein als er.

Die letzte Veröffentlichung, welche in diesem Kapitel zu nennen ist, hat Thomas Simpson in den P. T. von 1755 zum Drucke gegeben. Es ist ein Brief über den Nutzen, welcher der praktischen Astronomie daraus erwächst, wenn man einen Mittelwerth verschiedener Beobachtungen in Betracht zieht[2]). Dass es überhaupt vortheilhafter sei, zahlreiche Beobachtungen zu vereinigen, als sich auf eine einzelne mit genügender Sorgfalt ausgeführte Beobachtung zu beschränken, galt damals keineswegs als ausgemacht, und Simpson erzählt in den einleitenden Sätzen, es gebe namhafte Persönlichkeiten, welche der entgegengesetzten Ansicht huldigten. Behufs mathematischer Untersuchung, fährt Simpson fort, müsse man irgend eine Voraussetzung über die Grösse der Beobachtungsfehler und über die Häufigkeit ihres Vorkommens sich gestatten. Man könne beispielsweise die Fehler $-v, \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots v$ annehmen und die Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens durch $r^{-v}, \cdots r^{-3}, r^{-2}, r^{-1}, r^0, r^1, r^2, r^3, \cdots r^v$ ausdrücken, eine Annahme, welche bei $r = 1$ darauf hinauslaufe, dass jeder irgend mögliche Fehler die gleiche Wahrscheinlichkeit besitze. Eine zweite Annahme wäre etwa die, dass die Wahrscheinlichkeiten der genannten Beobachtungsfehler sich als $r^{-v}, 2r^{1-v}, \cdots vr^{-1}, (v+1)r^0, vr^1, \cdots 2r^{v-1}, r^v$ darstellen, was vielleicht der Wahrheit näher käme, weil bei dieser Voraussetzung, sofern $r = 1$ wäre, immerhin so viel sich ergäbe, dass die Fehler je gröber um so seltener auftreten. Die Summe der hier angegebenen Glieder enthält in der ersten und entsprechender in der zweiten Voraussetzung alle Möglichkeiten, welche dem Beobachter sich bieten, und, wenn sie auf die n^{te} Potenz erhoben wird,

[1]) *Il y a ici quelque scandale qui mérite bien d'occuper les algébristes.*
[2]) P. T. XLIX, 82—93.

alle Möglichkeiten, welche bei n-maliger Beobachtung auftreten. Eine gewisse Anzahl von Gliedern dieser entwickelten n^{ten} Potenz dividirt durch ihre Gesammtheit, bezeichnet Simpson als die Wahrscheinlichkeit, dass der mittlere Fehler von t Beobachtungen eine gewisse Grösse nicht überschreite, und eine an einem bestimmten Beispiele angestellte Zahlenrechnung gibt zu erkennen, dass bei sich häufenden Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, das arithmetische Mittel der Beobachtungen mit einem irgend erheblichen Fehler behaftet zu sehen, überaus rasch abnimmt. Das war der erste Schritt über Cotes' Gedanken, Beobachtungsfehler mit Gewichten zu vergleichen (S. 414), hinaus, und wieder war eine neue Gattung von Untersuchungen den Liebhabern der Wahrscheinlichkeitsrechnung erschlossen.

109. Kapitel.

Reihen bis 1736.

Die Geschichte der Lehre von den Reihen, zu welcher wir gelangen, zeigt eine stattliche Entwicklung, so weit es sich um die Beschaffung immer neuen Reihenmaterials handelt, aber über die Benutzbarkeit der gebildeten unendlichen Reihen herrschen fast ausnahmslos Meinungen, welche eher einen Rückschritt gegen das im 97. Kapitel Berichtete, als einen Fortschritt darstellen.

Wir haben dort (S. 387) einen unbedeutenden Aufsatz Christian Goldbachs von 1720 genannt. Kaum höheren Werth besitzt eine Abhandlung Goldbachs von 1727, *De transformatione serierum*[1]). Eine Reihe B kann, wie Goldbach erörtert, sehr wohl den gleichen Werth wie die Reihe C besitzen, und aus $B = C$ folgt $B - C = 0$, $A \pm (B - C) = A$, d. h. die Reihe A wird ohne Werthveränderung umgeformt, wenn man zu ihr gliedweise B addirt und C subtrahirt, oder C addirt und B subtrahirt. Eine andere Umformung ist die folgende. Seien $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ beliebige der Null näher und näher kommende Grössen, so ist unzweifelhaft $D = 1 + \alpha - \alpha + \beta - \beta + \gamma - \gamma + \cdots = 1$. Nimmt man nun eine unendliche Reihe $A = a + b + c + \cdots$ und vervielfacht sie gliedweise mit D, so bleibt der Werth von A unverändert, während die Form eine andere wurde, d. h. die Summe einer formell neuen Reihe ist gefunden. Die neue Gestalt ergibt sich als:

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727. T. II, 30—34. Einige sinnentstellende Druckfehler sind in unserem Berichte verbessert.

$$\begin{aligned}[(a+b)+(c+d)+(e+f)+(g+h)+\cdots]\cdot[1+\alpha-\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma+\cdots]\\ =(a+b)+(c+d)\quad+(e+f)\quad+(g+h)\quad+\cdots\\ +a\alpha\qquad+(c-a)\alpha+(e-c)\alpha+(g-e)\alpha+\cdots\\ +a\beta\qquad+(c-a)\beta+(e-c)\beta+\cdots\\ +a\gamma\qquad+(c-a)\gamma+\cdots\\ +a\delta\qquad+\cdots\\ +\cdots\end{aligned}$$

In einem Beispiele zu dieser allgemein und ohne jegliches Bedenken angegebenen Umformung setzt Goldbach $\alpha=\frac{m^2+m-1}{m+2}$, $\beta=\frac{\alpha}{m+2}=\frac{m^2+m-1}{(m+2)^2}$, $\gamma=\frac{\beta}{m+2}=\frac{m^2+m-1}{(m+2)^3}$ u. s. w., $a=1$, $b=-m$, $c=m^2$, $d=-m^3$ u. s. w. Er wählt also $A=1-m+m^2-m^3+\cdots$. Bildet man die einzelnen Kolumnen der neuen Reihe, so erkennt man sofort $(a+b)+a\alpha=\frac{1}{m+2}$, $(c+d)+(c-a)\alpha+a\beta=\frac{1}{(m+2)^2}$ u. s. w. Die umgeformte Reihe heisst also $A=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\frac{1}{(m+2)^3}+\cdots$. Die erste Form von A entspricht der Reihenentwicklung von $\frac{1}{1+m}$, die zweite der von $\frac{1}{(m+2)-1}=\frac{1}{m+1}$. Heute würde man hinzusetzen müssen, die erste Reihe convergire bei $-1<m<1$, die zweite bei $m>-1$, mithin auch in dem Convergenzbereiche der ersten Reihe, innerhalb dessen also eine wirkliche Gleichung zwischen beiden unendlichen Reihen stattfindet. Goldbach hat nur eine leise Ahnung von der Nothwendigkeit einer etwaigen Einengung des Gleichungsbegriffes, welche aber durch eine Schlussbemerkung bei Seite geschoben wird. Ich weiss wohl, sagt er, dass die Meisten behaupten, die erste Reihe A entstehe durch fortgesetzte Division aus $\frac{1}{1+m}$, sei aber diesem Werthe nicht gleich, wenn $m>1$; aber wenn auch diese Art, endliche Grössen durch unendliche Reihen auszudrücken, etwas Ungewohntes hat, so sehe ich doch nicht ein, warum sie überhaupt zu verwerfen sein soll, da doch das eben angeführte Beispiel zeigt, dass man solche Reihen in andere verwandeln kann, deren Glieder fortwährend abnahmen.

Seit 1720 war der von De Moivre eingeführte Begriff und Name der recurrenten Reihe (S. 390) vorhanden. Ohne von diesen und verwandten Untersuchungen zu wissen, beschäftigte sich Daniel Bernoulli mit dem gleichen Gegenstande, den er allerdings zeitweilig bei Seite legte, als er erfuhr, dass ihm zuvorgekommen sei. Bald griff er ihn wieder auf, und die Frucht dieser Untersuchungen waren *Observationes de seriebus recurrentibus*[1]) vom September 1728, deren Hauptinhalt die (S. 567) angekündigte Anwendung recurrenter Reihen auf Gleichungsauflösungen ausmacht. Einen Beweis oder eine eigentliche Herleitung des Verfahrens gibt Bernoulli nicht. Diesen Mangel ergänzte Euler in seiner Introductio, und wir werden daher im 111. Kapitel bei unserer Berichterstattung über letzteres Werk auf den Gegenstand zurückzukommen haben. Das Verfahren selbst ist folgendes.

Man bringt die aufzulösende Gleichung in die Gestalt $1=ax+bx^2+cx^3+ex^4+\cdots$, wo rechts etwa x^ν mit ν als ganzer positiver Zahl die höchste Potenz von x sein mag, beispielsweise sei $\nu=4$. Man wählt nun vier (d. h. eigentlich ν) willkürliche Zahlen A, B, C, D und setzt eine fünfte $E=aD+bC+cB+eA$. Die genau gleiche Recursionsformel $F=aE+bD+cC+eA$ lässt eine sechste Zahl F finden u. s. w. Setzt man das Verfahren der Auffindung immer neuer Zahlen mittels der gewählten Recursionsformel bis zu zwei beliebig weit vom Anfang entfernten, unmittelbar auf einander folgenden Zahlen M und N fort, so ist $x=\frac{M}{N}$ ein Näherungswerth einer Gleichungswurzel. Sei z. B. $1=-2x+5x^2-4x^3+x^4$ die vorgelegte Gleichung. Man wählt etwa $A=B=C=D=1$. Man findet

$$\begin{aligned}E&=-2\cdot\ 1+5\cdot\ 1-4\cdot\ 1+1\cdot\ 1=0\\ F&=-2\cdot\ 0+5\cdot\ 1-4\cdot\ 1+1\cdot\ 1=2\\ G&=-2\cdot\ 2+5\cdot\ 0-4\cdot\ 1+1\cdot\ 1=-7\\ H&=-2\cdot -7+5\cdot\ 2-4\cdot\ 0+1\cdot\ 1=25\\ I&=-2\cdot\ 25+5\cdot -7-4\cdot\ 2+1\cdot\ 0=-93\\ K&=-2\cdot -93+5\cdot\ 25-4\cdot -7+1\cdot\ 2=341\\ L&=-2\cdot\ 341+5\cdot -93-4\cdot\ 25+1\cdot -7=-1254.\end{aligned}$$

Näherungswerthe einer Gleichungswurzel sind $\frac{0}{2}$, $-\frac{2}{7}$, $-\frac{7}{25}$, $-\frac{25}{93}$, $-\frac{93}{341}$, $-\frac{341}{1254}$, welcher letztere Werth schon ziemlich genau ist, da er zu $1=\frac{2471540310459}{2472806570256}=0{,}999487\cdots$ führt. Bernoulli erkennt an, dass sein Verfahren die Voraussetzung einschliesse, dass die Brüche $\frac{E}{F}, \frac{F}{G}, \frac{G}{H}, \cdots \frac{M}{N}$ einer gemeinsamen Grenze zustreben, was nicht immer der Fall sei, dann z. B. nicht, wenn die Gleichung zwei dem Zahlenwerthe nach gleiche Wurzeln von verschiedenem

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1728. T. III, 85—100.

Vorzeichen, oder auch wenn sie complexe Wurzeln besitze. In solchen Ausnahmefällen habe man $x = y \pm \alpha$ einzusetzen und die Gleichung in y enthülle die Wurzel unter Anwendung des vorgeschilderten Verfahrens.

Auch **Goldbach** hat sich in dem gleichen Bande der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie[1]) mit recurrenten Reihen und der Form ihres allgemeinen Gliedes beschäftigt.

Wichtiger ist, was **De Moivre** in seinen *Miscellanea analytica* von 1730 über den Gegenstand veröffentlichte. Als Definition der recurrenten Reihe[2]) gilt die Bedingung, dass eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern willkürlich angenommen werde, von welchen alsdann das nächstfolgende Reihenglied in einer gegebenen Weise abhängen muss, und dass die gleiche Beziehung jedes folgenden Gliedes zu derselben Anzahl vorhergehender Glieder andauere. Sei z. B. in $A + B + C + D + E + F + \cdots$, nachdem A, B, C willkürlich angenommen (etwa $A = 1, B = 2x, C = 3x^2$), der Zusammenhang $D = 3Cx - 2Bx^2 + 5Ax^3 = 10x^3$, ebenso $E = 3Dx - 2Cx^2 + 5Bx^3 = 34x^4$, $F = 3Ex - 2Dx^2 + 5Cx^3 = 97x^5$ u. s. w., so ist die so gebildete Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5 + \cdots$$

eine recurrente und

$$3x - 2x^2 + 5x^3$$

oder kürzer: $3 - 2 + 5$ heisst der **Index** oder die **Scala** der Beziehung. Der 1. Lehrsatz[3]) kennzeichnet die geometrische Reihe, in welcher jedes folgende Glied das m-fache der vorhergehenden ist, auch als recurrente Reihe mit Abhängigkeit jedes Gliedes von den beiden ihm vorhergehenden. Ist nämlich $C = mB$, $B = mA$ oder $B - mA = 0$, beziehungsweise $pB - mpA = 0$, so kann man letzteren Ausdruck auch der rechten Gleichungsseite von $C = mB$ hinzufügen und erhält $C = (m + p)B - mpA$, wobei p zu beliebiger Auswahl freisteht. Eine zweite geometrische Reihe $H + K + L + \cdots$ mit $K = pH$, $L = pK$ u. s. w. liefert ähnlicherweise $L = (m + p)K - mpH$, und durch Addition zu der für C erhaltenen Gleichung entsteht[4]) $C + L = (m + p)(B + K) - mp(A + H)$. Die Werthe $m + p$ und $-mp$, welche die Scala der geometrischen Reihe darstellen, sind aus $(x - m)(x - p) = x^2 - (m + p)x + mp$ zu entnehmen[5]), d. h. sie sind gefunden, wenn man aus diesem Producte das Glied x^2 weglässt und die beiden anderen Glieder durch $-x$ und -1 dividirt. Die geometrische Reihe lässt sich ferner auch als

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1728. T. III, 164—173.
[2]) De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 27. [3]) Ebenda pag. 27, Theorema 1.
[4]) Ebenda pag. 27, Corollarium 1. [5]) Ebenda pag. 27, Corollarium 2.

recurrente Reihe mit dreigliedriger Scala auffassen[1]) u. s. w. Aus dem oben gefundenen $C = (m + p)B - mpA$ braucht man nur zu folgern $qC = mqB + pqB - mpqA$ und $qC - mqB - pqB + mpqA = 0$ und dieses mit $D = (m + p)C - mpB$ zu verbinden. Man hat alsdann $D = (m + p + q)C - (mp + mq + pq)B + mpqA$ mit willkürlichem p und q. Im Fortgange der Erörterungen zeigt De Moivre, dass jeder Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Function ist, sich in eine recurrente Reihe entwickelt und kommt damit weiter auf Partialbruchzerlegungen.

Die im IV. Buche der Miscellanea analytica gelehrte Summirung recurrenter Reihen geht von folgenden, den Fall einer zweigliedrigen Scala voraussetzenden Erwägungen aus. Sei $P + Q + R + S + T + \cdots$ eine derartige Reihe mit der Summe z, so ist einerseits $P + Q + R + \cdots = z$, beziehungsweise $Q + R + \cdots = z - P$ und andererseits vermöge der stattfindenden Scala:

$$\begin{aligned} P &= P \\ Q &= Q \\ R &= fxQ - gx^2P \\ S &= fxR - gx^2Q \\ T &= fxS - gx^2R \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Addition aller dieser Gleichungen bringt

$$z = P + Q + fx(z - P) - gx^2 z$$

hervor, woraus $z = \frac{P + Q - fxP}{1 - fx + gx^2}$ folgt, oder unter der Annahme $P = a$, $Q = bx$ endlich $z = \frac{a + bx - fax}{1 - fx + gx^2}$. Dass die ganze Rechnung nur dann einen Sinn hat, wenn die Reihe eine unendliche und zugleich convergent ist, weil nur dann die rechts stehenden $Q + R + S + \cdots$ und $P + Q + R + \cdots$ ebenso $z - P$ und z zur Grenze haben, wie das links stehende $P + Q + R + S + T + \cdots$ sich als z summirt, bildet für De Moivre keine Schwierigkeit.

Noch Einiges aus dem in der That mannigfachen Inhalte der Miscellanea analytica fordert unseren Bericht. Im 3. Kapitel des V. Buches hat De Moivre eine Aufgabe behandelt[2]), welche schon von **Jakob Bernoulli** in der *Ars conjectandi* gestreift worden war, die Aufgabe, das Glied grössten Zahlenwerthes in der n als ganze positive Zahl voraussetzenden Binomialentwicklung $(a + b)^n$ ausfindig

[1]) De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 27, Theorema 2. [2]) Ebenda pag. 107—108.

zu machen. Einige Druckfehler stören beim Lesen, nach deren Verbesserung De Moivres Gedankengang folgender ist. Sei etwa $M = \frac{n(n-1)\cdots(n-l+2)}{1\cdot 2\cdots(l-1)} a^{n-l+1} b^{l-1}$ das grösste Glied. Die beiden Nachbarglieder links und rechts sind $\frac{n(n-1)\cdots(n-l+3)}{1\cdot 2\cdots(l-2)} a^{n-l+2} b^{l-2} = \frac{l-1}{n-l+2}\frac{a}{b} M$ und $\frac{n(n-1)\cdots(n-l+1)}{1\cdot 2\cdots l} a^{n-l} b^{l} = \frac{n-l+1}{l}\frac{b}{a} M$. Da M grösser als jedes von beiden sein soll, so muss $1 > \frac{l-1}{n-l+2}\frac{a}{b}$ und $1 > \frac{n-l+1}{l}\frac{b}{a}$ sein, oder $\frac{bn+2b+a}{b+a} > l > \frac{bn+b}{b+a}$. Sind die beiden um die Einheit verschiedenen Grenzwerthe Brüche, so ist l die zwischen beiden liegende ganze Zahl; sind die beiden Grenzwerthe ganze Zahlen, so gibt es überhaupt kein Glied M grössten Werthes, sondern zwei gleich grosse, in der Entwicklung unmittelbar auf einander folgende Glieder.

Gleich auf der ersten Seite der Miscellanea analytica steht der Satz[1]), der den Namen De Moivres vorzugsweise berühmt machen sollte. Wenn l und x, sagt De Moivre, die Cosinusse zweier mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbögen A und B sind und $A = nB$, dann ist $x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}}$. Der Sinn wird durch andere Schreibweise deutlicher werden. Da $l = \cos A$, so ist $l^2 - 1$ $\cos A^2 - 1 = -\sin A^2$ und $l + \sqrt{l^2-1} = \cos A + \sin A\sqrt{-1} = \cos nB + \sin nB\sqrt{-1}$. Andererseits ist $x = \cos B$, und die Formel lautet:

$$\cos B = \frac{1}{2}(\cos nB + \sqrt{-1}\sin nB)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\cos nB + \sqrt{-1}\sin nB)^{-\frac{1}{n}}.$$

Man sieht, sie ist auch in dieser dem heutigen Brauche angepassten Schreibart nicht ganz übereinstimmend mit dem sogenannten Moivreschen Binomialtheoreme

$$\cos B + \sqrt{-1}\sin B = (\cos nB + \sqrt{-1}\sin nB)^{\frac{1}{n}},$$

aber letzteres hängt doch eng mit ersterer zusammen.

Den Miscellanea analytica ist ein *Complementum* angehängt, in welchem De Moivre beiläufig auch einen Fortschritt in der Lehre von den Bernoullischen Zahlen (S. 347) vollzog[2]). Jakob Bernoulli hatte für die Summe der c^{ten} Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis n die Formel gefunden:

[1]) De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 1. [2]) Ebenda Complementum pag. 6 sqq.

$$Sn^c = \frac{n^{c-1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5} + \cdots.$$

De Moivre setzte darin $n = 1$ und erhielt dadurch die erste Recursionsformel zwischen jenen Zahlen:

$$1 = \frac{1}{c+1} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2}A + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}C + \cdots.$$

Dem gleichen Jahrgange 1730 wie De Moivres Miscellanea analytica entstammt ein zweites in England verfasstes und gedrucktes Werk: *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitorum* von James Stirling. So sehr auch Stirling in Newtons Fusstapfen zu treten liebte, an eine geistige Verwandtschaft mit dessen Methodus differentialis (S. 372—376) ist nicht zu denken, und ebensowenig darf die bei Stirling vorkommende Ueberschrift *De aequationibus differentialibus quae definiunt series*[1]) uns veranlassen, dort nach die Reihen definirenden Differentialgleichungen im heutigen Sinne des Wortes zu suchen. Stirling bedient sich folgender Bezeichnung. Seien T, T', T'' $\cdots$ aufeinander folgende Glieder einer Reihe, deren Stellenzeiger z, $z+1$, $z+2$ $\cdots$ heissen. Kennt man die Gleichung, welche T' in seiner Abhängigkeit von T und z darstellt, so kennt man auch die Abhängigkeit des Gliedes T'' von T' und $z+1$ und überhaupt die sämmtlichen Reihenglieder, und diese Gleichung nennt Stirling die Differentialgleichung der Reihe. Sie kann auch durch den Zusammenhang zwischen T und z ersetzt werden, und Stirling wählt letzteren vorzugsweise in zwei Gestalten:

1. $T = A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2)$
$+ Ez(z-1)(z-2)(z-3 + \cdots$

2. $T = \frac{A}{z} + \frac{B}{z(z+1)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)} + \frac{D}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$
$+ \frac{E}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \cdots.$

Auf ähnliche Formen können auch die Folgeglieder T', T'', $\cdots$ zurückgeführt werden. Von der Gleichung 1. aus gelangt man, indem man $(z+1)z(z-1)\cdots(z-m+1) = (z-m+m+1)z(z-1)$

[1]) Stirling, *Methodus differentialis* pag. 3.

$\cdots(z-m+1) = (m+1)z(z-1)\cdots(z-m+1) + z(z-1)\cdots(z-m)$ setzt, zu

$$\begin{aligned} T' &= A + B(z+1) + C(z+1)z + D(z+1)z(z-1) \\ &\quad + E(z+1)z(z-1)(z-2) + \cdots \\ &= (A+B) + (B+2C)z + (C+3D)z(z-1) \\ &\quad + (D+4E)z(z-1)(z-2) + \cdots. \end{aligned}$$

Beim Ausgang von Gleichung 2. hat man $\frac{1}{(z+1)(z+2)\cdots(z+m)} = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+m-1)} - \frac{m}{z(z+1)\cdots(z+m)}$ zu setzen, um

$$T' = \frac{A}{z} + \frac{B-A}{z(z+1)} + \frac{C-2B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{D-3C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \cdots$$

zu ermitteln. Dass im ersten Falle T auch als Summe $a + bz + cz^2 + \cdots$ dargestellt werden kann, ergibt sich durch Ausführung der in 1. angedeuteten Multiplicationen. Umgekehrt ist auch die Umwandlung $z^2 = z + z(z-1)$, $z^3 = z + 3z(z-1) + z(z-1)(z-2)$ u.s.w. leicht ersichtlich. Im zweiten Falle kann man wünschen T in $\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} + \cdots$ umzuwandeln und kann auch dieses erzielen, indem man bei jedem einzelnen Theilausdruck eine Division vornimmt, z. B. $\frac{B}{z(z+1)} = \frac{B}{z^2+z} = \frac{B}{z^2} - \frac{B}{z^3} + \frac{B}{z^4} - \cdots$.

Nun sei S die Summe der mit T abschliessenden z ersten Reihenglieder und S' die der $z-1$ ersten Glieder oder $S' = S - T$, während S' auch dadurch aus S hervorgeht, dass z durch $z-1$ ersetzt wird. Zieht man dann S' von S ab, so bleibt T, das allgemeine Glied der durch S summirten Reihe, übrig. Stirling geht nun freilich nicht auf diesem Wege vor. Er setzt ein gewisses T voraus und behauptet, dass ein gewisses S ihm entspreche. Sein Beweis der behaupteten Thatsache ist dagegen genau so, wie wir andeuteten; er zieht S' von S ab und zeigt, dass T übrig bleibt. Darnach ist keineswegs unmöglich, dass Stirling in dem Beweise seinen Erfindungsgang enthüllt hat. Zu $T = A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \cdots$ gehöre, behauptet Stirling, $S = Az + (z+1)\left[\frac{1}{2}Bz + \frac{1}{3}Cz(z-1) + \frac{1}{4}Dz(z-1)(z-2) + \cdots\right] = Az + \frac{1}{2}B(z+1)z + \frac{1}{3}C(z+1)z(z-1) + \frac{1}{4}D(z+1)z(z-1)(z-2) + \cdots$. Dann ist, fährt er fort, $S' = A(z-1) + \frac{1}{2}Bz(z-1) + \frac{1}{3}Cz(z-1)(z-2) + \frac{1}{4}Dz(z-1)(z-2)(z-3) + \cdots$ und $S - S' = T = A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \cdots$,

wie behauptet war. Ein Beispiel ist die Summe der Quadratzahlen $1 + 4 + 9 + \cdots + z^2$. Hier ist $T = z^2 = z + z(z-1)$, mithin $A = 0$, $B = C = 1$ und $S = (z+1)\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z(z-1)\right) = \frac{z(z+1)(z+2)}{6}$.

Andererseits stellt Stirling der zweiten Gestalt angehörende ins Unendliche summirbare Reihen her. Hier bedeute S die vom Gliede T mit dem Stellenzeiger z ins Unendliche sich erstreckende Reihe und $S' = S - T$ oder was S wird, wenn z in $z+1$ übergeht. Er behauptet, zu $T = \frac{A}{z(z+1)} + \frac{B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \cdots$ gehöre $S = \frac{A}{z} + \frac{B}{2z(z+1)} + \frac{C}{3z(z+1)(z+2)} + \cdots$. Wir dürfen den Beweis, der abermals dem Gedanken $S - S' = T$ entspricht, übergehen. Ist $T = \frac{1}{z(z+3)}$, so muss man zur Anwendung der entsprechenden Formel die Umwandlung in $T = \frac{1}{z(z+1)} - \frac{2}{z(z+1)(z+2)} + \frac{2}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$ mit $A = 1$, $B = -2$, $C = 2$ vornehmen, alsdann ist $S = \frac{1}{z} - \frac{1}{z(z+1)} + \frac{2}{3z(z+1)(z+2)} = \frac{3z^2+6z-2}{3z(z+1)(z+2)}$, und setzt man $z = 1$, so findet man $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots = \frac{11}{18}$.

Mitunter geht die Umwandlung von T, welche in dem angeführten Beispiele drei Glieder in Anspruch nahm, nur mittels einer unendlichen Anzahl von Gliedern. Alsdann ist auch S mittels einer unendlichen Anzahl von Gliedern gegeben, oder die vorgelegte Reihe ist nicht eigentlich summirt, sondern nur in eine andere unendliche Reihe von meistens rascherer Convergenz umgewandelt. Ein Beispiel bietet die Reihe der reciproken Quadratzahlen mit $T = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1\cdot 2}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \cdots$ und folglich $S = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z(z+1)} + \frac{1\cdot 2}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \cdots$. Setzt man $z = 13$, so ist $\frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2} + \cdots = \frac{1}{13} + \frac{1}{364} + \frac{1}{4095} + \frac{1}{29120} + \cdots$. Nimmt man 13 Glieder dieser neuen Reihe, so ist deren Summe 0,079957427. Daneben sind die 12 Anfangsglieder $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{12^2} = 1{,}564976638$. Die Summe der ganzen unendlichen Reihe[1]) ist folglich $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = 1{,}644934065$. Dass dieser Zahlenwerth kürzer durch $\frac{\pi^2}{6}$ dargestellt wird, hat Stirling

[1]) Stirling, *Methodus differentialis* pag. 29.

nicht erkannt, auch nicht, wo er später[1]) auf die gleiche Reihe zurückkommt. Die zur Auffindung der Gleichung zwischen S und T angewandte Mathode führt auch leicht zu einer Gleichung zwischen S und S', beziehungsweise zwischen T und T', und umgekehrt kann man aus Gleichungen zwischen S und S' oder zwischen T und T' auf den Zusammenhang zwischen S und T schliessen.

Bei Besprechung einer zwischen S und S' aufgestellten Gleichung kommt Stirling[2]) auf den Gedanken, den Stellenzeiger z auch anders als ganzzahlig positiv zu wählen, d. h. also die Reihe zu interpoliren, auch wohl sie nach rückwärts fortzusetzen, und von dem letzteren Verfahren ist ihm $\cdots \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots$ ein Beispiel[3]). In dieser Reihe ist $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots = \frac{1}{x-1}$, und bei $x = 1$ werden beide Abhandlungen unendlich gross, während von deren Werthe bei $x \gtrless 1$ nichts gesagt ist.

Die Lehre von De Moivres recurrenten Reihen, welche aber bei Stirling durch Division entstandene Reihen heissen, gründet er auf das Gesetz[3]), dass, von welchem Gliede an man die Reihe beginne, ihre Summe stets ein Bruch gleichen Nenners ist, z. B. $\frac{1}{1-3x+x^2} = 1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{3x-x^2}{1-3x+x^2} = 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{8x^2-3x^3}{1-3x+x^2} = 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{21x^3-8x^4}{1-3x+x^2} = 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{55x^4-21x^5}{1-3x+x^2} = 55x^4 + 144x^5 + \cdots$.

Bei anderen Reihen kommt es darauf an, ihrem Gesetze durch Bildung von Fluxionen auf die Spur zu kommen, also ihre Differentialgleichung im heutigen Sinne des Wortes zu ermitteln. Wenn wir die Fluxionspünktchen Stirlings durch Differentialzeichen ersetzen, so ist sein Gang[5]) folgender. Sei $y = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$, so ist $x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$. Abermalige Differentiation liefert $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}$ und die Differentialgleichung lautet $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x}$.

Eine zweite Hauptabtheilung der *Methodus differentialis* ist durch ihre Ueberschrift der Interpolation der Reihen[6]) zugewiesen. In

[1]) Stirling, *Methodus differentialis* pag. 55. [2]) Ebenda pag. 35. [3]) Ebenda pag. 36—37. [4]) Ebenda pag. 69 sqq. [5]) Ebenda pag. 78. [6]) Ebenda pag. 85—153: *Pars secunda de interpolatione serierum.*

zahlreichen Fällen vollzieht Stirling die Interpolation, indem er die aufeinander folgenden Glieder der Reihe als Ordinaten einer parabolischen Curve auffasst, welche zu um Gleiches zunehmenden Abscissen gehören, aber immer geht dieses nicht an, z. B. nicht bei der Reihe $1,\ 1\cdot 2,\ 1\cdot 2\cdot 3,\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ etc., welche zu rasch zunimmt[1]). In diesem Falle schlägt Stirling vor, zu den Logarithmen der Glieder überzugehen, aus ihnen eine nach der Methode parabolischer Ordinaten interpolirbare Reihe zu bilden, und zu dem so interpolirten Logarithmus die Zahl zu suchen, welche alsdann das interpolirte Glied der eigentlich vorgelegten Reihe sein werde.

Im weiteren Verlaufe kommt Stirling dann zu der Aufgabe[2]), die Summe beliebig vieler Logarithmen zu finden, deren Zahlen eine arithmetische Progression bilden, modern ausgedrückt, den Logarithmen einer Gammafunction zu ermitteln. Seien $x+n,\ x+3n,\ x+5n, \cdots z-n$ die aufeinander folgenden Glieder einer arithmetischen Progression mit der Differenz $2n$. Ferner seien l, z und l, x die briggischen Logarithmen von z und x, endlich sei $a = 0{,}434294481903252$ der reciproke natürliche Logarithmus von 10. Alsdann ist die Summe der briggischen Logarithmen: $l, (x+n) + l, (x+3n) + l, (x+5n) + \cdots + l, (z-n)$

$$= \left\{\frac{zl, z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} - \frac{511an^9}{1188z^9} + \cdots\right\}$$
$$- \left\{\frac{xl, x}{2n} - \frac{ax}{2n} - \frac{an}{12x} + \frac{7an^3}{360x^3} - \frac{31an^5}{1260x^5} + \frac{127an^7}{1680x^7} - \frac{511an^9}{1188x^9} + \cdots\right\}.$$

Das Bildungsgesetz der auftretenden Zahlencoefficienten ist folgendes. Nennt man $-\frac{1}{12} = \alpha_1$, $\frac{7}{360} = \alpha_2$, $-\frac{31}{1260} = \alpha_3$, $\frac{127}{1680} = \alpha_4$, $-\frac{511}{1188} = \alpha_5 \cdots$, wofür Stirling $A, B, C, D, E \cdots$ schreibt, bezeichnet man ferner die Binomialcoefficienten durch die heute gebräuchliche Abkürzung $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$, welche Stirling nicht kennt und dadurch die Möglichkeit einbüsst, eine allgemeine Formel anzuschreiben, so ist $\frac{-1}{(2\cdot 1+1)4\cdot 1} = \binom{1}{0}\alpha_1$, ferner $\frac{1}{(2\cdot 2+1)\cdot 4\cdot 2} = \binom{3}{0}\alpha_1 + \binom{3}{2}\alpha_2$ und allgemein

$$\frac{-1}{(2k+1)4k} = \binom{2k-1}{0}\alpha_1 + \binom{2k-1}{2}\alpha_2 + \cdots + \binom{2k-1}{2k-2}\alpha_k.$$

Der Beweis wird wieder nach jener bei Stirling immer wiederkehrenden Methode geführt, dass der Veränderlichen einer Reihe ein neuer Werth beigelegt und dann die Differenz der beiden Reihen er-

[1]) Stirling, *Methodus differentialis* pag. 110. [2]) Ebenda pag. 135.

mittelt wird, welche letztere Aufgabe auszuführen Stirling dem Leser überlässt, während er sich damit begnügt, das Ergebniss auszusprechen. In der Reihe $\frac{z l, z}{2n} - \frac{a z}{2n} + \frac{\alpha_1 a n}{z} + \frac{\alpha_2 a n^3}{z^3} + \frac{\alpha_3 a n^5}{z^5} + \cdots + \frac{\alpha_k a n^{2k-1}}{z^{2k-1}} + \cdots$, welche wir $F(z)$ nennen wollen, soll z durch $z - 2n$ ersetzt werden. So entsteht $F(z-2n) = \frac{(z-2n) l, (z-2n)}{2n} - \frac{a(z-2n)}{2n} + \frac{\alpha_1 a n}{z-2n} + \frac{\alpha_2 a n^3}{(z-2n)^3} + \frac{\alpha_3 a n^5}{(z-2n)^5} + \cdots + \frac{\alpha_k a n^{2k-1}}{(z-2n)^{2k-1}} + \cdots$. In dieser zweiten Reihe soll jeder einzelne Bruch durch Division in eine nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitende Reihe verwandelt und dann die Subtraction $F(z) - F(z-2n)$ vollzogen werden. Stirling behauptet, der Unterschied trete als $l, z - \frac{an}{z} - \frac{an^2}{2z^2} - \frac{an^3}{3z^3} - \cdots = l, z + a \log\left(1 - \frac{n}{z}\right) = l, z + l, \left(1 - \frac{n}{z}\right) = l, (z-n)$ hervor, wenn die Silbe log den natürlichen Logarithmus bedeutet. Weiss man aber, dass $F(z) - F(z-2n) = l, (z-n)$, so kann man, indem z jedesmal durch $z - 2n$ ersetzt wird, beliebig viele ähnliche Gleichungen bilden, beginnend mit $F(z-2n) - F(z-4n) = l, (z-3n)$ und schliessend mit $F(x+2n) - F(x) = l, (x+n)$. Addirt man dann alle diese Gleichungen, so entsteht in der That $F(z) - F(x) = l, (z-n) + l, (z-3n) + \cdots + l, (x+n)$.

Die Thätigkeit Eulers auf dem Gebiete der Reihenlehre beginnt 1730. Er benutzte bei seinen Untersuchungen die Integralrechnung, welcher er bei eben dieser Gelegenheit Neuentdeckungen von grösster Bedeutung hinzufügte. Wir sind nicht im Stande zu entscheiden, ob Euler damals schon Kenntniss von Stirlings ebenfalls von 1730 datirten Methodus differentialis besessen haben kann. Thatsache ist, dass er sich mit einigen dort behandelten Aufgaben ebenfalls beschäftigt hat. Euler ist dabei noch weit mehr als Stirling sorglos bis zum Uebermasse in der Anwendung unendlicher Reihen. Eulers Aufsatz *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*[1]), d. h. über transcendente Reihen, deren allgemeines Glied sich als in algebraischer Gestalt nicht darstellbar erweist, geht aus von der Reihe $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots$. Diese Reihe stimme mit derjenigen überein, deren allgemeines Glied die Gestalt der unendlichen Factorenfolge

$$\frac{1^{1-n} \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n} \cdot 5^n}{4+n} \cdots$$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1730 *et* 1731. T. V, 36—57.

besitze. Setzt man nämlich in dem neuen Ausdruck $n = 1$, so wird er zu $\frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4}{4} \cdots = 1$. Setzt man $n = 2$, so entsteht $\frac{1 \cdot 2^2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^2}{4} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot 4^2}{5} \cdots = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots = 2$. Desgleichen bringt $n = 3$ den Werth $\frac{1 \cdot 2^3}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2^2} \cdot 3^3}{5} \cdot \frac{\frac{1}{3^2} \cdot 4^3}{6} \cdots = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 6} \cdots = 1 \cdot 2 \cdot 3$ hervor u. s. w. Die neue Form habe vor der ursprünglichen den ganz wesentlichen Vorzug, sich als zur Interpolation geeignet zu erweisen, indem man in ihr dem n auch nichtganzzahlige Werthe beizulegen vermöge, was in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ unthunlich sei. Bei $n = \frac{1}{2}$ gehe die neue Form über in $\sqrt{\left[\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots\right]}$, und vergleiche man die von Wallis seiner Zeit gefundene Factorenfolge (Bd. II, S. 904), so sei der Werth dieses Gliedes vom Stellenzeiger $\frac{1}{2}$ gleich der Quadratwurzel aus der Kreisfläche, deren Durchmesser die Einheit ist, wofür man heute $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ schreibt. Da demzufolge $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ einen Ausdruck bedeute, der bald ganzzahlig erscheine, bald von der Quadratur des Kreises abhänge, so habe ihn das, sagt Euler, auf den Gedanken gebracht, eine abermalige Umformung zu versuchen, und zwar in ein Integral, weil es ja Integrale gebe, welche derart von einem in ihnen vorkommenden n abhängen, dass sie, je nachdem n ganzzahlig ist oder nicht, algebraische Auswerthung oder nur eine solche mittels der Quadratur von Curven gestatten. Beispiel eines solchen Integrals sei $\int x^e dx (1-x)^n$, wenn bei der Integration beachtet werde, dass das Integral zugleich mit x zu Null werden solle; dann werde es unter Einsetzung von $x = 1$ das n^{te} Glied einer unendlichen Reihe bilden[1]). Euler meint also das bestimmte Integral, welches heute $\int_0^1 x^e (1-x)^n dx$ geschrieben wird, in welchem e eine beliebige Constante bedeutet, das sogenannte erste Eulersche Integral oder die Betafunction, welche seit Binet durch $B(e+1, n+1)$ bezeichnet wird. Die Auswerthung des angegebenen Integrals erfolgt durch Binomialentwicklung von $(1-x)^n$, ein in diesem Falle wegen $0 < x < 1$ durchaus gerechtfertigtes Verfahren, wenn auch Euler sich

[1]) *Sit proposita haec formula* $\int x^e dx (1-x)^n$ *vicem termini generalis subiens, quae integrata ita, ut fiat* $= 0$, *si sit* $x = 0$, *et tum posito* $x = 1$, *dat terminum ordine* n *progressionis inde ortae.*

dessen weder bewusst ist, noch bewusst sein kann. Er setzt also $x^e(1-x)^n = x^e - \frac{n}{1}x^{e+1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{e+2} - \cdots$. Bei der Integration wird $\int x^e(1-x)^n dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{nx^{e+2}}{1(e+2)} + \frac{n(n-1)x^{e+3}}{1\cdot 2(e+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{e+4}}{1\cdot 2\cdot 3(e+4)} + \cdots$ und $\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{1}{e+1} - \frac{n}{1(e+2)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2(e+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3(e+4)} + \cdots$. In diese selbst unendliche Reihe werden für n die mit 0 beginnenden aufeinander folgenden ganzen Zahlen eingesetzt. Man findet, dass $\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n dx$

bei $n = 0$ $\quad n - 1 \quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$

den Werth $\frac{1}{e+1}$ $\quad \frac{1}{(e+1)(e+2)}$ $\quad \frac{1\cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$ $\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$

annimmt, oder mit anderen Worten: Euler hat gefunden, dass $\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n dx$ das n^{te} Glied der Reihe $\frac{1}{e+1} + \frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1\cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)} + \cdots$ ist und sich als Product schreiben lässt:

$$\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{1\cdot 2\cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)}.$$

Diese Productenform gibt, so oft n eine positive ganze Zahl ist, den Werth des bestimmten Integrals übersichtlicher, als die zuvor erhaltene unendliche Reihe es that; dagegen muss jene benutzt werden, wenn n keine positive ganze Zahl ist.

Ist $e = \frac{f}{g}$, so wird $\int\limits_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n dx = \frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g}\cdot \frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+1\cdot g)(f+2\cdot g)\cdots(f+n\cdot g)}$ und $\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+1\cdot g)(f+2\cdot g)\cdots(f+n\cdot g)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int\limits_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n dx$. Durch $f = 1$ und $g = 0$ geht der Bruch links vom Gleichheitszeichen in $1\cdot 2\cdots n$ über, d. h. in den Ausdruck, dessen Umwandlung in ein Integral eigentlich beabsichtigt war, rechts aber bedarf es wegen des im Nenner auftretenden g zur Einsetzung jener Werthe noch einiger Vorbereitung. Euler ersetzt in dem Integrale x durch $x^{\frac{g}{f+g}}$.

Er erhält $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int\limits_0^1 x^{\frac{g}{f+g}\cdot\frac{f}{g}}\left(1-x^{\frac{g}{f+g}}\right)^n \frac{g}{f+g}x^{-\frac{f}{f+g}}dx$

$= \frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x^{\frac{g}{f+g}}}{\frac{g}{f+g}}\right)^n dx$ und nun besteht die Schwierigkeit, bei Annahme von $f = 1$, $g = 0$ nicht mehr in dem Factor vor dem Integrale, welcher $= 1$ wird, sondern nur noch unter dem Integrale, wo $\frac{1-x^z}{z}$ auftritt, dessen Werth bei $z = 0$ zu ermitteln bleibt und nach bekannter Regel[1]) ermittelt wird. Zähler und Nenner von $\frac{1-x^z}{z}$ werden nach z differentiirt und geben $\frac{-x^z\cdot dz\cdot \log x}{dz}$, welches durch $z = 0$ in $-\log x$ übergeht. Folglich ist endgiltig:

$$1\cdot 2\cdots n = \int\limits_0^1 dx(-\log x)^n.$$

Damit war das **zweite Eulersche Integral**, die **Gammafunction** $\Gamma(n+1)$, wie man seit **Legendre** sagt und schreibt, in die Wissenschaft eingeführt.

Wir erwähnen noch ein Letztes aus dem reichhaltigen Aufsatze, der, dem Titel und den Anfangsäusserungen nach der Reihenlehre gewidmet, nach und nach die Lehre von den bestimmten Integralen in den Mittelpunkt der Betrachtungen rückte, sodass unser 118. Kapitel auf ihn wird zurückweisen müssen. Was wir noch anführen wollen, ist die **Differentiation mit gebrochenem Index**. Wohl hatte **Leibniz** (S. 230) in Briefen an **Johann Bernoulli** die Frage nach der Bedeutung einer solchen Differentiation aufgeworfen, aber dieser Briefwechsel, erst 1745 gedruckt, war für die Oeffentlichkeit noch nicht vorhanden, und wenn auch die Möglichkeit nicht geleugnet werden will, dass Euler durch Johann Bernoulli mündlich in Basel oder später schriftlich in nicht bekannt gewordenen Briefen auf die Frage aufmerksam gemacht worden sein kann, so steht diese Möglichkeit doch auf sehr schwachen Füssen. Eulers Auffassung ist folgende. Sei zunächst n eine ganze positive Zahl, so ist $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots e}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(e-n)}z^{e-n}$. Nun war aber $1\cdot 2\cdot 3\cdots e = \int\limits_0^1 dx(-\log x)^e$, sowie $1\cdot 2\cdot 3\cdots(e-n) = \int\limits_0^1 dx(-\log x)^{e-n}$ und demzufolge

[1]) *per regulam cognitam.*

$$\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n} \cdot \frac{\int_0^1 dx(-\log x)^e}{\int_0^1 dx(-\log x)^{e-n}},$$

ein Ausdruck, der an und für sich keineswegs an die Ganzzahligkeit von n gebunden erscheint. Ihn wählt Euler als Definition des n^{ten} Differentialquotienten und indem er beispielsweise $e = 1$, $n = \frac{1}{2}$ setzt, gelangt er zu $\frac{d^{\frac{1}{2}} z}{\sqrt{dz}} = \sqrt{z}\,\frac{\int_0^1 dx(-\log x)}{\int_0^1 dx\sqrt{-\log x}}$. Der Zähler, fährt Euler fort, ist $\int_0^1 dx(-\log x) = 1$, wie sich leicht als richtig erweist, da $\int dx(-\log x) = x - x \cdot \log x$ bei $x = 0$ in 0, bei $x = 1$ in 1 übergeht. Für den Nenner hat Euler im Vorverlaufe des Aufsatzes den Werth $\int_0^1 dx\sqrt{-\log x} = \sqrt{A}$ erkannt, wo A die Fläche der Kreises vom Durchmesser 1 ist, also nach heutiger Schreibweise $A = \frac{\pi}{4}$ und $\int_0^1 dx\sqrt{-\log x} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, mithin $\frac{d^{\frac{1}{2}} z}{\sqrt{dz}} = 2\sqrt{\frac{z}{\pi}}$.

In dem gleichen Bande der Petersburger akademischen Veröffentlichungen steht ein zweiter Aufsatz Eulers: *De summatione innumerabilium progressionum*[1]), der sich die Aufgabe stellt, Reihen unter Anwendung bestimmter Integrale zu summiren. Wie der Bruch $\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$, so oft n eine ganze positive Zahl, so ist unter der gleichen Voraussetzung für n auch $\frac{1-P^n}{1-P} = 1 + P + \cdots + P^{n-1}$, welche Function von x auch durch P angedeutet werde, und integrirt man auf beiden Seiten nach x zwischen den Grenzen 0 und k, so entsteht $k + \int_0^k P\,dx + \int_0^k P^2 dx + \cdots + \int_0^k P^{n-1} dx = \int_0^k \frac{1-P^n}{1-P}\,dx$. In einem besonderen Falle sei $P = \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha$, so ist $k + \frac{k^{\alpha+1}}{(1+\alpha)a^\alpha} + \frac{k^{2\alpha+1}}{(1+2\alpha)a^{2\alpha}} + \cdots + \frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{n\alpha-\alpha}} =$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1730 *et* 1731. T. V, 91–105.

$\int_0^k \frac{a^{n\alpha} - x^{n\alpha}}{(a^\alpha - x^\alpha)a^{n\alpha-\alpha}}\,dx$. Die Reihe, welche hier summirt ist, kann mit $\frac{b}{c} + \frac{b^{i+1}}{c+e} + \frac{b^{2i+1}}{c+2e} + \cdots + \frac{b^{(n-1)i+1}}{c+(n-1)e}$ verglichen werden, d. h. mit einer Reihe von Brüchen, deren Zähler eine geometrische, und deren Nenner eine arithmetische Progression bilden. Dazu ist nur zu setzen $k = \frac{b}{c}$, $\alpha = \frac{e}{c}$, $a = \frac{b^{\frac{e-ci}{e}}}{c}$ und das summatorische Glied[1]) nimmt dadurch den Werth an $\int_0^{\frac{b}{c}} \frac{b^{\frac{ne-nci}{e}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e-ci)}{e}}\left(b^{\frac{e-ci}{e}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}\right)}\,dx$. Weitere Betrachtungen, auf welche genauer einzugehen wir unterlassen, führen zu Doppelintegralen als summatorisches Glied, noch andere zur Auswerthung und Umwandlung besonderer unendlicher Reihen.

In einem Aufsatze des nächstfolgenden Jahres: *Methodus generalis summandi progressiones*[2]) hat Euler abermalige Reihenuntersuchungen niedergelegt. Gleich zu Anfang ist beweislos eine sehr allgemeine Doppelformel ausgesprochen. Ist s die Summe der n Glieder einer Reihe und t das letzte Glied, welches naturgemäss ebenso wie s von n abhängig sein muss, so sei, behauptet Euler,

$$t = \frac{ds}{1 \cdot dn} - \frac{d^2 s}{1 \cdot 2 dn^2} + \frac{d^3 s}{1 \cdot 2 \cdot 3 dn^3} - \frac{d^4 s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dn^4} + \cdots$$

und

$$s = \int t\,dn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12 dn} - \frac{d^3 t}{720 dn^3} + \frac{d^5 t}{30240 dn^5} \text{ etc.}$$

Später wird die Summation von geometrischen Progressionen und von solchen Reihen gezeigt, deren Glieder durch einen Factor eine geometrische, durch einen zweiten eine arithmetische Progression aufzeigen, Reihen mit welchen De Moivre (S. 358—359) es seiner Zeit zu thun hatte. Ist $s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + \cdots + x^{a+(n-1)b}$, so folgert Euler $s - x^a + x^{a+nb} = x^{a+b} + x^{a+2b} + \cdots + x^{a+nb} = x^b(x^a + x^{a+b} + \cdots + x^{a+(n-1)b}) = x^b s$ und daraus $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$. Ist ferner $s = x^a + 2x^{a+b} + 3x^{a+2b} + \cdots + nx^{a+(n-1)b}$, so wird gefolgert $s - x^a + (n+1)x^{a+nb} = 2x^{a+b} + 3x^{a+2b} + \cdots + (n+1)x^{a+nb} = x^b(2x^a + 3x^{a+b} + \cdots + (n+1)x^{a+(n-1)b}) =$

[1]) *t·rminus summatorius.* [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 68—97.

$x^b(s + x^a + x^{a+b} + \cdots + x^{a+(n-1)b}) = x^b\left(s + \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}\right)$ und daraus $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{(1-x^b)^2} - \frac{nx^{a+nb}}{1-x^b}$. Bei $a = b = 1$ wird $x + 2x^2 + \cdots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1+x)^2}$. Euler zeigt, dass der letztere Ausdruck auch durch Integration und darauf folgende Differentiation gefunden werden kann. Aus $s = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$ folge nämlich $\int \frac{s}{x} dx = \int dx + \int 2x dx + \cdots + \int nx^{n-1} dx = x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$ und daraus $\frac{s}{x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ nebst $s = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$. Der hier angewandte Kunstgriff gewinnt alsbald für Euler den Charakter einer auch bei verwickelteren Reihen nützliche Methode.

Wir kommen zu Eulers Aufsatz *De summis serierum reciprocarum*[1]), in welchem er als Erster die Summation der reciproken Quadratzahlen veröffentlichte und dadurch eine durch Johann Bernoulli (S. 96) auf die Tagesordnung gesetzte Aufgabe löste. Eulers Gedankengang ist folgender. Sei s ein Bogen und y dessen Sinus oder $y = s - \frac{s^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \cdots$, so ist auch $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot2\cdot3y} - \frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5y} + \cdots = 0$. Diese aus unendlich vielen Gliedern bestehende Gleichung ist unendlich hohen Grades in s und besitzt deshalb unendlich viele Wurzeln, wie es in der That unendlich viele Bögen gibt, welchen allen derselbe Sinus zukommt. Ist p der Umfang des Halbkreises, A der kleinste $\arcsin y$, so kann $\arcsin y$ ausserdem auch noch die Werthe $\begin{matrix} p - A, & 2p + A, & 3p - A, & 4p + A, \cdots \\ -p - A, & -2p + A, & -3p - A, & -4p + A, \cdots \end{matrix}$ besitzen, und da jedes Gleichungspolynom in so viele Factoren zerfällt als der Grad der Gleichung verlangt, da aus jedem Factor, indem man ihn $= 0$ setzt, eine Wurzel, beziehungsweise aus jeder Wurzel ein Factor ermittelt werden kann, so ist $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot2\cdot3y} - \frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5y} + \cdots = \left(1 - \frac{s}{A}\right)\left(1 - \frac{s}{p-A}\right)\left(1 - \frac{s}{-p-A}\right)\left(1 - \frac{s}{2p+A}\right)\left(1 - \frac{s}{-2p+A}\right)\cdots$. Nach einem bekannten Satze findet zwischen den Coefficienten der Gleichung und ihren Wurzeln der Zusammenhang statt, dass der Coefficient der

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1734 *et* 1735. T. VII, 123—134.

ersten, zweiten, dritten $\cdots$ Potenz der Unbekannten sich als negative Summe der Wurzeln, als Summe der Wurzelproducte zu je zweien, als negative Summe der Wurzelproducte zu je dreien $\cdots$ erweist. Heissen die Wurzeln einer Gleichung $a, b, c \cdots$, ist α ihre Summe, β die Summe ihrer Producte zu je zweien, γ die Summe ihrer Producte zu je dreien $\cdots$, ist ferner $a + b + c + \cdots = P$, $a^2 + b^2 + c^2 + \cdots = Q$, $a^3 + b^2 + c^3 + \cdots = R$ u. s. w., so ist nach einem nicht weniger bekannten Satze $P = \alpha$, $Q = P\alpha - 2\beta$, $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma$, $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta$ u. s. w. Im gegenwärtigen Falle ist $\alpha = \frac{1}{y}$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{-1}{1\cdot2\cdot3y}$, $\delta = 0 \cdots$, ferner $a = \frac{1}{A}$, $b = \frac{1}{p-A}$, $c = \frac{1}{-p-A} \cdots$. Demnach ist $P = \frac{1}{y}$, $Q = \frac{1}{y^2}$, $R = \frac{1}{y^3} - \frac{1}{1\cdot2y}$, $S = \frac{1}{y^4} - \frac{1}{1\cdot2y^2} - \frac{1}{1\cdot2\cdot3}$ u. s. w. In diese allgemeinen Formeln setzt Euler $y = 1$, wodurch A der kleinste $\arcsin 1 = \frac{p}{2} = q$ wird, wenn q die Länge des Quadranten bezeichnet. Die einzelnen Wurzeln A, $p - A$, $-p - A$, $2p + A$, $-2p + A \cdots$ sind dann $q, q, -3q, 5q, -3q, 5q \cdots$, wo jeder Werth paarweise auftritt. Somit wird $1 = \frac{2}{q}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$ und $\frac{q}{2} = \frac{p}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ oder die Leibnizische Reihe ist gefunden. Die Summe Q der Wurzelquadrate wird als $\frac{1}{y^2}$ gleichfalls $= 1$, ferner $R = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{3}$, und die Summen der 5ten, 6ten, 7ten Wurzelpotenzen finden sich als $T = \frac{5}{24}$, $V = \frac{2}{15}$, $W = \frac{61}{720}$. Man erhält daher die Gleichungen

$$1 = \frac{2}{q^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{q^2}{2} = \frac{p^2}{8}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{q^3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{q^3}{4} = \frac{p^3}{32}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{q^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{q^4}{6} = \frac{p^4}{96}$$
$$\frac{5}{24} = \frac{2}{q^5}\left(\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots = \frac{5q^5}{48} = \frac{5p^5}{1536}$$
$$\frac{2}{15} = \frac{2}{q^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960},$$

wo p überall die Zahl bedeutet, die heute π heisst.

Aus diesen Reihen leitet Euler dann andere ab. Sei $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = s_2$, $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = s_4$ u. s. w. Er erhält $\frac{s_2}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots = s_2 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$ und $s_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{p^2}{8} = \frac{p^2}{6}$. Aehnlicherweise ist $\frac{s_4}{16} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \cdots = s_4 - \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right)$ und $s_4 = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) = \frac{16}{15} \cdot \frac{p^4}{96} = \frac{p^4}{90}$. Euler zeigt alsdann, wie ausser dem besonderen Werthe $y = 1$ auch andere Werthe von y eingeführt werden könnten, die wieder zu Reihensummirungen führen.

Euler war der Erfinder dieser Reihensummen[1]). Er hat 1736 und 1737 Briefe über dieselben mit Johann Bernoulli gewechselt. Als im Jahre 1742 Johann Bernoullis Werke in 4 Bänden erschienen, deren vierter wesentlich noch Ungedrucktes brachte, wurden vom Verfasser selbst an dessen Spitze drei Aufsätze über Reihen gestellt, deren dritter die Summirung der reciproken Quadratzahlen von der Sinusreihe ausgehend vollzieht[2]), also ganz ähnlich wie Euler es gemacht hatte. Die einzige Erklärung dieser auffallenden Nachveröffentlichung kann darin gefunden werden, dass Bernoulli durch Euler nur von dem Ergebnisse der Summirung Kenntniss erhalten haben dürfte. Das geistige Zusammentreffen in der jedenfalls nicht ganz nahe liegenden Herleitung bleibt immerhin erstaunlich.

Wir kehren zu Eulers Abhandlungen über Reihen zurück, und zwar zu seinen Bemerkungen über harmonische Reihen, *De progressionibus harmonicis observationes*[3]). Die Reihe $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} + \cdots + \frac{c}{a+(i-1)b} + \cdots$ ist eine harmonische, weil je drei auf einander folgende Glieder derselben eine stetige harmonische Proportion bilden. Ihre Glieder nehmen fortwährend ab. Trotzdem ist die Summe der unendlichen harmonischen Reihe unendlich gross, was mittels des Princips einleuchtet, dass, wenn eine unendliche Reihe eine endliche Summe besitzen soll, die Summe von $2i$ Gliedern sich von der von i Gliedern nicht unterscheiden darf, d. h. in diesem Falle muss die Summe der Glieder, um welche die weiter fortgesetzte Reihe die kürzere übertrifft, unendlich klein sein; ist dieselbe dagegen von endlicher Grösse, so kann die Summe der unendlichen Reihe nicht endlich sein, sondern muss unendlich gross werden. Nun betrachte man die $(n-1)i$ Glieder $\frac{c}{a+ib} + \frac{c}{a+(i+1)b} + \cdots + \frac{c}{a+(ni-1)b}$.

[1]) Das hat Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1890 pag. 22—24 ausser allen Zweifel gestellt. [2]) Joh. Bernoulli *Opera* IV, 20—25. [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1734 *et* 1735. T. VII, 150—161.

Ihre Summe ist $> \frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$ und $< \frac{(n-1)ic}{a+ib}$, d. h. bei sehr grossem i, dem gegenüber a wie b nicht in Betracht kommen, liegt diese Summe zwischen $\frac{(n-1)c}{nb}$ und $\frac{(n-1)c}{b}$; sie ist somit von endlicher Grösse, und die harmonische Reihe selbst unendlich gross. Es ist nicht zu verkennen, dass hier Jakob Bernoullis Divergenzbeweis (S. 93) als Muster diente, aber ebensowenig, dass Eulers Fassung des Beweises noch klarer war und das Wesen der Reihendivergenz noch mehr enthüllte. Nun setzt Euler weiter s als die Summe der i ersten Glieder, d. h. $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \cdots + \frac{c}{a+(i-1)b} = s$. Das nächste Glied $\frac{c}{a+ib}$ ist die Veränderung von s, welche der Veränderung von i um 1 entspricht, und da bei sehr grossem i diese Veränderungen als Differentiale zu betrachten sind, von welchen di als constant gilt, so ist $\frac{ds}{di} = \frac{c}{a+ib}$, $s = \int \frac{c\,di}{a+ib} = C + \frac{c}{b}\log(a+ib)$. Setzt man aber die Reihe bis zum Gliede $\frac{c}{a+(ni-1)b}$ fort, so muss als Summe $C + \frac{c}{b}\log(a+nib)$ herauskommen. Die überschüssigen Glieder $\frac{c}{a+ib} + \frac{c}{a+(i+1)b} + \cdots + \frac{c}{a+(ni-1)b}$ haben mithin die Summe $\left[C + \frac{c}{b}\log(a+nib)\right] - \left[C + \frac{c}{b}\log(a+ib)\right] = \frac{c}{b}\log\frac{a+nib}{a+ib}$, welches bei sehr grossem i in $\frac{c}{b}\log n$ übergeht. Bei $a = b = c = 1$ ist also nahezu $\log n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{ni}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i}\right)$. Die Gliederzahl der abzuziehenden Reihe ist nur der n^{te} Theil der Gliederzahl der anderen, d. h. man hat je n Glieder der positiven und eines der negativen Reihe in eine Gruppe zu vereinigen. Man erhält $\log n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)i+1} + \frac{1}{(n-1)i+2} + \cdots + \frac{1}{ni} - \frac{1}{i}\right)$. Wenn auf diese Weise Reihen zur Logarithmenberechnung hervorgebracht werden, so dienen umgekehrt Logarithmen zur Summirung der harmonischen Reihe. Aus der logarithmischen Reihe $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots$ folgt $\frac{1}{x} = \log\frac{x+1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} - \cdots$, und setzt man für x die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von 1 bis i, so erhält man

$$\frac{1}{1} = \log\ 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$
$$\frac{1}{2} = \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} - \frac{1}{5 \cdot 32} + \cdots$$
$$\frac{1}{3} = \log \frac{4}{3} + \frac{1}{2 \cdot 9} - \frac{3}{3 \cdot 27} + \frac{1}{4 \cdot 81} - \frac{1}{5 \cdot 243} + \cdots$$
$$\frac{1}{4} = \log \frac{5}{4} + \frac{1}{2 \cdot 16} - \frac{1}{3 \cdot 64} + \frac{1}{4 \cdot 256} - \frac{1}{5 \cdot 1024} + \cdots$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{i} = \log \frac{i+1}{i} + \frac{1}{2i^2} - \frac{1}{3i^3} + \frac{1}{4i^4} - \frac{1}{5i^5} + \cdots.$$

Die Addition dieser Gleichungen führt zu folgender Formel: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} = \log(i+1) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{i^2}\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{i^3}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{i^4}\right] - \cdots$. Die zu $\log(i+1)$ noch additiv und subtractiv in Rechnung zu bringenden Ausdrücke sind convergent. Ihre angenäherte Auswerthung liefert 0,577218, eine Zahl, welche man sich später gewöhnt hat die Eulersche Constante zu nennen und sie durch C zu bezeichnen. Dann ist also

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} = \log(i+1) + C.$$

Den Gedanken, das $i + 1^{\text{te}}$ Glied einer Reihe als Unterschied zwischen den Summen der i und der $i+1$ Anfangsglieder zu betrachten, der dem Unterschiede 1 der Stellenzeiger entspricht, und

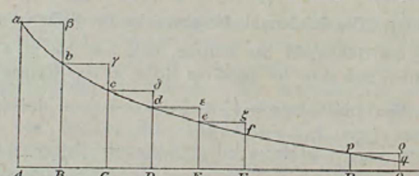

Fig. 103.

somit den Differentialquotienten der Summe nach der Gliederzahl darzustellen (S. 661), hat Euler auch in geometrische Form gekleidet. In der *Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi*[1]) nimmt er (Fig. 103) auf einer Abscissen-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 3—9.

axe AQ lauter der Einheit gleiche Stücke $AB = BC = CD = DE = EF = \cdots = PQ$ und errichtet in allen so bezeichneten Punkten der Abscissenaxe Ordinaten Aa, $Bb\beta$, $Cc\gamma$, $\cdots$ Pp, $Qq\varrho$ so, dass in der angenommenen Längeneinheit gemessen Aa das erste Reihenglied einer gegebenen Reihe darstellt, Bb das zweite, $\cdots$ Pp das $n - 1^{\text{te}}$, Qq das n^{te}. Die Rechtecke $A\beta + B\gamma + C\delta + \cdots + P\varrho$ besitzen als Flächeninhalt die Summe der $n-1$ ersten Reihenglieder und sind grösser als die von den Ordinaten Aa, Qq, der Abscisse AQ und der Curve $ab \cdots q$ eingeschlossene Fläche, welche durch ein bestimmtes Integral darzustellen in dem früheren Aufsatze gelehrt wurde. In einer zweiten Figur (Fig. 104) ist die Summe der Recht-

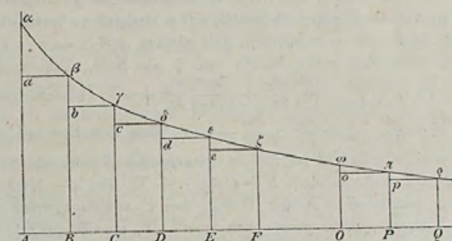

Fig. 104.

ecke $A\beta + B\gamma + C\delta + \cdots + P\varrho$ oder die Summe der $n-1$ ersten Reihenglieder kleiner als die durch ein bestimmtes Integral dargestellte Fläche, welche von den Ordinaten $A\alpha$, $Q\varrho$, der Abscisse AQ und der Curve $\alpha\beta \cdots \varrho$ eingeschlossen ist. Letztere Curvenfläche ist also zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, welche Newton (S. 200) bereits gekannt hatte, und die Reihensumme zwischen zwei Integralen. Eine dritte Figur endlich (Fig. 105) bringt noch enger die Reihensumme einschliessende Grenzen hervor als die genannten Integrale, indem die dort vernachlässigten gemischtlinigen Dreiecke insofern Berücksichtigung finden, als man statt ihrer um weniges grössere oder kleinere gradlinige Dreiecke in Rechnung bringt.

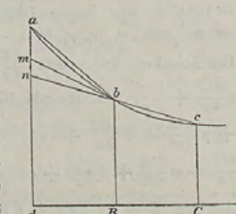

Fig. 105.

Wir haben (S. 657) gewisse Formeln auftreten sehen, in welchen Differentialquotienten aufeinander folgender Ordnung die hervorragendste Rolle spielten. Auf die Herleitung dieser Formel kam Euler zurück unter der Ueberschrift: *Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali*[1]). Die Bezeichnung ist eine andere als in dem früheren Aufsatze. Euler schreibt jetzt x statt n, X statt t, S statt s. Er setzt ferner den Taylorschen Satz voraus, für welchen er dessen Entdecker angibt, und der in der Form auftritt, eine Function y von x nehme, wenn x in $x + a$ übergehe, den Werth an $y + \frac{a}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$, eine unendliche Reihe, an deren Benutzbarkeit kein Zweifel laut wird. Ist beispielsweise y eine Function von x, welche die Eigenschaft besitzt, mit x zugleich zu verschwinden, so lasse man $a = -x$ werden, weil alsdann $x + a = x - x = 0$ ist, und setze den neuen Werth von y als Null, d. h. man erhält $0 = y + \frac{x}{1}\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$, beziehungsweise $y = \frac{x}{1}\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} - \cdots$. Eine derartige mit x zugleich verschwindende Function ist naturgemäss S oder die Summe der x-gliedrigen Reihe $A + B + C + \cdots + X$. Bei $x - 1$ Gliedern ist deren Summe $S - X$ der Werth, den S annimmt, wenn x in $x - 1$ übergeht, d. h. wenn oben $a = -1$, $y = S$ gesetzt wird, oder man hat $S - X = S - \frac{dS}{dx} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2S}{dx^2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3} + \cdots$. Daraus folgt die erste der früheren Formeln: $X = \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2S}{dx^2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3} - \cdots$.

Soll eine Umkehrung der Reihe[2]) in dem Sinne erfolgen, dass S nach X und dessen Differentialquotienten entwickelt werde, so nehme man $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \cdots$ als vorläufig unbekannte constante Coefficienten und setze $\frac{dS}{dx} = \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{d^2X}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$. Fortgesetzte Differentiation gibt $\frac{d^2S}{dx^2} = \alpha\frac{dX}{dx} + \beta\frac{d^2X}{dx^2} + \gamma\frac{d^3X}{dx^3} + \delta\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, $\frac{d^3S}{dx^3} = \alpha\frac{d^2X}{dx^2} + \beta\frac{d^3X}{dx^3} + \gamma\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, $\frac{d^4S}{dx^4} = \alpha\frac{d^3X}{dx^3} + \beta\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, $\frac{d^5S}{dx^5} = \alpha\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, während Integration zu $S = \alpha\int X dx + \beta X + \gamma\frac{dX}{dx} + \delta\frac{d^2X}{dx^2} + \cdots$ führt. Die Differentialquotienten von S nach x setzt Euler alsdann in obige

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 9—22.
[2]) Ebenda T. VIII, 14—16.

erste Formel ein und erhält $0 = (1 - \alpha)X + \left(\frac{\alpha}{1\cdot 2} - \beta\right)\frac{dX}{dx} - \left(\frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma\right)\frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\gamma}{1\cdot 3} - \delta\right)\frac{d^3X}{dx^3} - \cdots$. Alle Einzelglieder dieser Entwicklung verschwinden, und die Entwicklung selbst ist unabhängig von der Art des Zusammenhanges zwischen X und x, wenn die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ so gewählt werden, dass $0 = 1 - \alpha = \frac{\alpha}{1\cdot 2} - \beta = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\gamma}{1\cdot 2} - \delta = \cdots$. So erhält man $\alpha = 1$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6}$, $\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24}$, $\cdots$. Jeder folgende Coefficient hängt von allen ihm vorhergehenden ab. Eine unabhängige Darstellung der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$, hält Euler für unmöglich[1]), und nur empirisch fortschreitend findet er $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{1\cdot 2}$, $\gamma = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$, $\zeta = 0$ u. s. w. In der Reihe für S fallen von δ an die Coefficienten der Differentialquotienten von X nach x von grader Differentiationsordnung weg, und man erhält die frühere zweite Formel: $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{1}{12}\frac{dX}{dx} - \frac{1}{720}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{1}{30240}\frac{d^5X}{dd^5}$ etc Die bei der Integration hinzuzufügende Constante muss der schon erwähnten Nothwendigkeit, dass $x = 0$ auch $X = 0$ und $S = 0$ hervorbringe, Rechnung tragend gewählt werden. Das hat naturgemäss Schwierigkeiten, wenn X eine solche Function von x ist, dass x im Nenner vorkommt, wie bei der harmonischen Reihe mit $X = \frac{1}{x}$, $\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$ u. s. w. Die Summirung gestaltet sich hier mittels $\int X dx = \int\frac{dx}{x} = \log x$ zu $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} = C + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \cdots$. Um nun C zu gewinnen, setzt Euler $x = 10$ und findet näherungsweise seine Constante

$$C = 0{,}5772156649015329$$

auf 16 Decimalstellen, während er sie früher (S. 662) nur auf 6 Decimalstellen berechnet hatte.

Andere Anwendungen der gleichen Summenformel machte Euler in einem wenig späteren Aufsatze: *Methodus universalis series summandi ulterius promota*[2]).

[1]) *Ipsa autem series coefficientum $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ ita est comparata, ut vix credam pro ea terminum generalem posse exhiberi.* [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 147—158.