durch Bonet, den preussischen Minister, am 17. April durch De Moivre, Aston und Brook Taylor neu verstärkt. Am 24. April wurde der Bericht des Ausschusses verlesen.

95. Kapitel.

Der Prioritätsstreit seit April 1712.

Es ist vor allen Dingen nothwendig, die Persönlichkeiten des Ausschusses einer kleinen Prüfung zu unterwerfen, da das Gewicht eines Gutachtens nicht zum geringsten Theil davon abhängt, wer es erstattet hat.

John Arbuthnot[1]) (1667—1735) war Schotte, Arzt der Königin Anna. Als wissenschaftliches Verdienst wird ihm ein Aufsatz von 1710 über die Ueberzahl männlicher Geburten verglichen mit den weiblichen nachgerühmt.

Abraham Hill[2]) (1635—1721) war der ehemalige Schatzmeister der Royal Society.

Eduard Halley war der berühmte Astronom und Mathematiker, der uns wiederholt begegnet ist, und dessen Arbeiten mehrfach (S. 84 bis 86 und S. 119—120) an die von Newton anknüpften.

William Jones[3]) (1675—1749) war erst Kaufmann, dann Lehrer der Mathematik und als solcher Verfasser einer Einleitung in die Mathematik unter dem Titel *Synopsis palmariorum Matheseos* (1706). In diesem Werke ist auf S. 243, 263 flgg. vermuthlich zum ersten Male der griechische Buchstabe π benutzt[4]), um die Verhältnisszahl 3,1415 . . . des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser kurz zu bezeichnen. William Jones hatte auch soeben 1711 Newton's Analysis per aequationes zum Druck befördert.

John Machin[5]) († 1751) war Professor der Astronomie am Gresham College in London. Von seiner Berechnung der Zahl π mittelst des Unterschiedes zweier Reihen wird im 97. Kapitel die Rede sein. Hier bemerken wir nur, dass sie erstmalig 1706 in der vorgenannten Synopsis von Jones ohne Erläuterung, wie sie gefunden worden sei, veröffentlicht wurde. Jedenfalls müssen also persönliche Beziehungen zwischen Machin und Jones vorhanden gewesen sein.

---

[1]) *National Biography* II, 62—65 (London 1885, edited by Leslie Stephen). [2]) Ebenda XXVI, 389—390 (London 1891, edited by Leslie Stephen and Sidney Lee). [3]) Ebenda XXX, 172—173 (London 1892, edited by Sidney Lee). [4]) W. W. Rouse Ball in Eneströms *Bibliotheca mathematica* 1894 pag. 106. [5]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 657. — Poggendorff II, 5.

William Burnet[1]) (1688—1729) gehörte einer schottischen Familie an. Der Vater, Gilbert Burnet, war Bischof von Salisbury. William war Schüler von Craig. Wenn seine Ernennung in den akademischen Ausschuss schon im Alter von 24 Jahren erfolgte, so fordert doch die Gerechtigkeit zu sagen, dass er damals der Royal Society bereits seit 4 Jahren, seit 1708 angehörte. Man muss also in England eine grosse Meinung von ihm gehabt haben. Damit stimmt überein, dass er mit Johann Bernoulli in Briefwechsel stand. Wirkliche Leistungen Burnet's sind nicht bekannt.

Das waren die zuerst ernannten Ausschussmitglieder. Sehen wir zu, aus welchen Persönlichkeiten die Verstärkung bestand.

Francis Robartes wird in einer im Jahre 1711 ihm von De Moivre gewidmeten Abhandlung[2]) als *mathematicarum scientiarum fautor summus* angeredet, aber ein Gönner der mathematischen Wissenschaften ist noch kein Mathematiker.

Bonet wird im Protokolle als preussischer Minister bezeichnet. Es ist uns nicht gelungen, in irgend einem Sammelwerke über seine Persönlichkeit die geringste Aufklärung zu finden, was nicht gerade für eine hohe Bedeutung des Mannes spricht. Daneben darf wohl darauf aufmerksam gemacht werden, dass Leibniz seit der Neueinrichtung und gewissermassen zweiten Gründung der Berliner Akademie alles eher als eine am preussischen Hofe beliebte Persönlichkeit war.

Abraham de Moivre war jener in jungen Jahren aus Frankreich eingewanderte Mathematiker (S. 86—88), welchen man fast als einen Schüler Newtons bezeichnen darf.

Aston[3]) war Secretär der Royal Society und wurde am 30. November 1685 neuerdings dazu erwählt, erklärte aber am 9. Dezember plötzlich und in leidenschaftlicher Weise, er lege das Amt nieder. Am 30. November 1699 wurde er gleichzeitig mit Flamsteed und Newton in den geschäftsleitenden Ausschuss der Royal Society gewählt. Im Jahre 1715 vermachte er der Gesellschaft Land, Bücher und Geld im Gesammtbetrage von 445 Pfund Sterling. Dass Aston etwas Wissenschaftliches geleistet hätte, wird nicht erzählt.

---

[1]) *National Biography* VII (London 1886, edited by Leslie Stephen). — De Morgan im *Philosophical Magazine*, 4. Ser., IV, 325 Nota (1852). — G. Eneström, *Sur un point de la querelle au sujet de l'invention du calcul infinitésimal* in der *Bibliotheca mathematica* 1898, S. 50—52. [2]) P. T. XXVII, 213. [3]) Ch. Rich. Weld, *History of the Royal Society with memoirs of the Presidents* (London 1848) I, 302—303 und I, 438. — Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXXVI und LXIX Note 136.

Brook Taylor endlich wird uns im 97. und im 100. Kapitel als ganz hervorragender mathematischer Schriftsteller bekannt werden.

De Moivre und Taylor wird man als zur Ausschmückung in den Ausschuss gewählt betrachten müssen, denn da acht Tage nach ihrer Zuziehung der Bericht des Ausschusses schon verlesen wurde, können sie unmöglich starken Antheil an den zur Herstellung desselben nöthigen Arbeiten genommen haben. Ausser ihnen waren nur Halley, Machin und allenfalls Jones, vielleicht auch Burnet, in der Lage, über den Infinitesimalcalcül in irgend einer Beziehung mitreden zu können, Jones namentlich in seiner Eigenschaft als erster Besitzer der von Collins seiner Zeit hinterlassenen Papiere[1]). Arbuthnot, Hill, Robartes, Bonet, Aston, also etwa die Hälfte der Ausschussmitglieder, mussten nach Lage der Dinge ihr Urtheil über von ihnen nicht Verstandenes abgeben.

Der in englischer Sprache abgefasste Bericht schloss mit den Worten[2]): Aus diesen Gründen erachten wir Herrn Newton als den ersten Erfinder, und wir sind der Meinung, dass Herr Keill, indem er das Gleiche behauptete, keineswegs Herrn Leibniz gekränkt hat. Wir unterbreiten dem Urtheile der Gesellschaft, ob die Auszüge aus Briefen und Aufsätzen, welche wir ihr jetzt vorlegen, zusammen mit den Dingen ähnlichen Inhaltes im III. Bande von Wallis' Werken nicht eine Veröffentlichung verdienen.

Darauf entschied sich die Gesellschaft[3]) dahin, den Druck der Papiere und des Sitzungsbeschlusses vollziehen zu lassen, sowie auch solcher Schriftstücke, welche in den Acta Eruditorum sich vorfinden und geeignet erscheinen, Licht über die Angelegenheit zu verbreiten. Nachdem die Gesellschaft den Druck der Papiere zum Beschlusse erhoben hatte, hat sie auch am 29. Januar 1713, wie ein weiterer Protokollauszug mittheilt, durch Stimmenmehrheit die Druckkosten übernommen[4]), welche am 11. Juni mit $22\frac{1}{8}$ Pfund Sterling ausbezahlt wurden. Sie hat dagegen über den Satz, dass Newton erster Erfinder sei und Keill folglich sich gegen Leibniz nicht ver-

[1]) De Morgan in dem *Philosophical Magazine* Ser. 4, Vol, IV (July-December 1852) pag. 322 Note *. [2]) *For which Reasons we reckon Mr. Newton the first Inventor; and are of Opinion, that Mr. Keill, in asserting the same, has been no ways injurious to Mr. Leibnitz. And we submit to the Judgment of the Society, whether the Extract of Letters and Papers now presented to you, together with what is extant to the same purpose in Dr. Wallis' III Volume may not deserve to be made Publick (Commerc. epistol.* pag. 184). [3]) *Societas Regia collectionem Epistolarum et MSStorum et Sententiam Consensus imprimi jussit; ut et quicquid amplius ad hanc Historiam elucidendam idoneum in Actis Eruditorum ocurreret.* [4]) Jan. 29: *It was ordered by balloting that the Treasurer pay the charges of printing the Commercium Epistolicum.*

gangen habe, weder bejahend noch verneinend eine Entscheidung getroffen. Noch war also das *Commercium Epistolicum*, wie man das Bändchen zu nennen pflegt, welches unter Leitung von Halley, Jones und Machin gedruckt wurde, und dessen ersten Abzüge am 8. Januar 1713 als fertiggestellt vorgelegt werden konnten, kein Urtheil. Es war nur eine Anklageschrift, wie man sie von den Mitgliedern des Untersuchungsausschusses erwarten konnte, vielleicht erwarten musste. Pflicht der Royal Society wäre es nun nach unserer Rechtsanschauung gewesen, den allerersten Abzug des Commercium Epistolicum sofort an Leibniz zu schicken und ihn aufzufordern, der Anklage zu begegnen. So handelte die Gesellschaft aber leider nicht.

Exemplare wurden an Gelehrte in den verschiedensten Ländern verschickt. Für Frankreich war ein Abbé Bignon in Paris, wie Johann Bernoulli am 7. Juni 1713 berichtete[1]), für Deutschland ein Arzt Abraham Vater der jüngere in Wittenberg, wie Christian Wolf am 1. Juli 1713 schrieb[2]), Mittelperson der Versendung. In Frankreich, Italien, Holland, Deutschland, schrieb Wolf an Leibniz in einem weiteren Briefe[3]) vom 6. Februar 1714, werden Exemplare mit der Aufschrift als Geschenk der Royal Society vertheilt. Wer der Gesellschaft irgend bekannt war, dessen Name wurde auf eines der Bücher geschrieben. In Frankreich sind unter die einzeln genannten Mitglieder der Académie des Sciences Exemplare als Geschenk der Royal Society vertheilt worden, und ich selbst erhielt eines, auf welchem mein Name steht. Ich habe auch ein Euer Hochwohlgeboren zu übergebendes Exemplar, welches ich von Herrn Vater erhielt, dem der Auftrag geworden ist, den deutschen Mathematikern die Büchelchen auszutheilen.

Und mit dieser Art der Verbreitung begnügte man sich nicht. Der oft von uns benutzte Protokollauszug beweist, dass am 17. Juni 1714, ein Datum, auf welches wir zurückkommen werden, 25 Exemplare von Gesellschafts wegen einem holländischen Buchhändler zu 3 Shilling das Stück überlassen wurden, und in der Sitzung, deren Aufzeichnung wir dieses entnehmen, führte Newton den Vorsitz.

Aber wir müssen den Inhalt des Commercium Epistolicum genauer schildern, nachdem von seiner Verbreitungsweise die Rede war. Eine Anklageschrift haben wir das kleine Buch weiter oben genannt, und wir können hinzufügen, es war eine Anklageschrift so fein, so schlau, so giftig, wie wohl kaum je eine zweite abgefasst wurde. Es kam darauf an, Newtons Verdienste in glänzendstes Licht zu setzen. Es

[1]) Leibniz III, 909. [2]) Ebenda, Supplementband zum mathematischen Briefwechsel 151. [3]) Ebenda 157.

kam aber auch darauf an, Leibniz des geistigen Diebstahls zu beschuldigen, und zu diesem Zwecke musste Dieser als Gewohnheitsdieb erscheinen.

Das Commercium Epistolicum beginnt mit Briefen Barrows, welche sich auf die Analysis per aequationes beziehen, und an welche diese Abhandlung sich anschliesst, wiewohl sie 1711 schon durch Jones im Drucke herausgegeben war. Dann kommen Briefe, welche 1671 und 1672 zwischen Collins und James Gregory gewechselt worden waren, und in welchen von den Reihen die Rede ist, welche Newton in der Analysis per aequationes angab (S. 73—74), sowie von Gregorys Arcustangensreihe (S. 75). Der erste Leibnizische Brief, welcher abgedruckt ist, ist der am 3. Februar 1673 an Oldenburg gerichtete, den Leibniz (S. 76) in London selbst an dem Tage schrieb, an welchem er mit Pell das Gespräch über die erzeugenden Differenzen geführt hatte. Hier beginnen die eigentlichen Verdächtigungen sich vorzubereiten, denn später heisst es, Leibniz habe allerdings in früher Zeit sich mit Differenzen beschäftigt, aber das seien die von Mouton entnommenen gewesen, die mit dem Infinitesimalcalcül nichts zu thun haben, und das bilde zugleich Leibnizens ersten Diebstahl. Der zweite Diebstahl soll der der Reihe für $\frac{\pi}{4}$ sein, der an Gregory begangen wurde. Als Beweisstücke dienen die von uns schon als abgedruckt bezeichneten Briefe zwischen Collins und Gregory und späte Briefe von 1675, welche Leibniz mit Oldenburg über die angeblich von Ersterem erfundene Reihe für $\frac{\pi}{4}$ wechselte, eine falsche Angabe, weil Leibniz jene Reihe aus den ihm zugeschickten Briefe Gregorys an Collins kannte.

Diese letztere Behauptung bedurfte nun des strengen Beweises, um als Thatsache gelten zu können, und das Commercium Epistolicum suchte den Beweis durch ein weiteres Schriftstück, einen Brief von Collins an Oldenburg[1]), zu liefern. Collins sagt darin, er wolle, da Leibniz und andere Mitglieder der Pariser Académie des Sciences darauf dringen, von Gregorys, seines verstorbenen Freundes, Leistungen unterrichtet zu sein, die wichtigsten Dinge zusammenstellen, die in dessen Briefen vorkamen; Oldenburg solle die Sammlung Leibniz mittheilen, der sie aber nach Kenntnissnahme zurückgeben müsse. In der Sammlung selbst, heisst es weiter, befand sich der Gregorysche Brief mit der Arcustangensreihe, befand sich auch Newtons Tangentenbrief an Collins (S. 167 und 180). Die erste hier aufzuwerfende Frage, wann Collins die Sammlung an Oldenburg schickte,

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 100.

ist nicht genau zu beantworten, da der erwähnte Begleitbrief kein Datum trägt. Dagegen ist ein datirter Brief vom 11. August 1676 von Collins an David Gregory den älteren, Bruder des verstorbenen James Gregory, vorhanden[1]). Hier sagt Collins, er habe aus des Freundes Papieren eine kleine Geschichte, historiolam, zusammengestellt, damit sie in den Schränken der Royal Society aufbewahrt werde und auch den französischen Mathematikern mitgetheilt werden könne. Damit ist offenbar jene Sammlung gemeint, welche deshalb in der Regel kurzweg die Historiola heisst, und für deren Vollendung der 11. August 1676 einen Endtermin darstellt. Die zweite Frage, welche sich aufdrängt, ist die, ob Oldenburg seinem Auftrage auch nachgekommen ist? Hat Leibniz, um uns schärfer auszudrücken, die Historiola auch wirklich zu Gesicht bekommen? Das Commercium Epistolicum von 1712 nimmt es stillschweigend an. Wir werden unsererseits der Frage am Schlusse dieses Kapitels näher treten.

Nun kommen in dem Commercium Epistolicum die 1676 und 1677 von Newton und Leibniz gewechselten Briefe, wie sie im III. Bande von Wallis' Werken zum Abdruck gekommen waren, also ohne das Wort *hodie* in der Anfangszeile des Leibnizischen Briefes vom 21. Juni 1677. Auch der Brief von Collins an Newton vom 5. März 1677 ist aufgenommen, als dessen Nachschrift die Bemerkung erscheint, Newtons zweiter Brief werde vermuthlich in der nächsten Woche nach Hannover abgehen (S. 303). Was weiter folgt, ist eine kurze Zwischenerzählung[2]), auf die wir sogleich zurückkommen, sind Briefe und Auszüge aus gedruckten Abhandlungen aus der Zeit von 1695 bis unmittelbar vor dem Drucke des Commercium Epistolicum und zum Schlusse das Urtheil des Prüfungsausschusses.

Wenn wir die wesentlichen Stücke, die im Commercium Epistolicum abgedruckt sind, nannten, so haben wir einen Bestandtheil noch nicht erwähnt, das sind die fast auf jeder Seite beigefügten Fussnoten. In ihnen ist jede erläuterte Stelle von dem Standpunkte aus besprochen, als wäre der Beweis von Leibnizens Schuld nicht erst zu führen, sondern bereits geliefert. Jede von Leibniz gebrauchte Redewendung, welche gegen das zu Beweisende zu benutzen wäre, gilt demnach nur als weitere Probe seiner Verlogenheit und Verderbtheit. Man kann deshalb getrost die Anmerkungen das Giftigste an der ganzen Veröffentlichung nennen.

Und noch Eines müssen wir hervorheben. Diejenigen Briefe, welche nur als Belege zweiten Ranges aufgenommen sind, erscheinen nicht in ihrem ganzen Wortlaute, sondern auszugsweise. Dagegen

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 101. [2]) Ebenda pag. 157.

wäre bei unparteiisch angefertigten Auszügen nichts einzuwenden, wohl aber dagegen, dass die Auszüge wiederum nur zu Gunsten der vorgefassten Meinung von Leibnizens Schuld hergestellt erscheinen, dass sie jeden Satz beseitigen, der für Leibniz und seine Unbefangenheit spräche[1]).

Wer war der Verfasser der Anmerkungen und der zwischen die abgedruckten Briefe eingestreuten Stellen fortlaufender Erzählung? Ob ein Verfasser für Alles verantwortlich zu machen ist, wissen wir nicht zu sagen, aber in Bezug auf eine Stelle der Zwischenerzählung, auf welche zurückzukommen wir oben zusagten, lässt der Beweis sich liefern, dass sie aus Newtons Feder stammt[2]). Newton hat eine Kritik der in den A. E. von 1689 gedruckten Aufsätze Leibnizens über die Mechanik des Himmels verfasst, wenn auch nicht veröffentlicht. Sie ist handschriftlich noch vorhanden. Ihre Anfangsworte sind von Newton viermal anders gefasst. In der letzten Fassung heissen dieselben wie folgt[3]): Gegen Ende des Jahres 1683 schickte Newton die wichtigsten Sätze, die in den *Principiis mathematicis philosophiae* vorkommen, nach London; sie wurden alsbald der Royal Society mitgetheilt, und im Jahre 1686 wurde jenes Buch der Gesellschaft zum Drucke zugeschickt; im folgenden Jahre erschien es. Dieselben Worte in buchstäblicher Uebereinstimmung finden sich in der Zwischenerzählung des Commercium Epistolicum. — Das kann kein Zufall sein. Sind auch die betreffenden Worte durchaus unschuldig und enthalten sie nicht den kleinsten giftigen Stachel, so zeigen sie eben doch, dass Newton Mitarbeiter am Commercium Epistolicum war. Wie weit seine Mitarbeit sich erstreckte, ob er auch sonst den Wortlaut beeinflusste, ob er nur in dem Sinne sich betheiligte, in welchem wir ihn (S. 302) als Mitarbeiter Keills kennen gelernt haben, dadurch nämlich, dass er den eigentlichen Redactoren zur Verfügung stellte, was er an verwendbaren Stücken auch aus eigener Feder besass, das wird vermuthlich ein ungelöstes Rätsel bleiben.

Wir kommen in unserer Erzählung nun wieder an den Zeitpunkt, zu welchem das Commercium Epistolicum fertig gedruckt war und zur Verbreitung gelangte. Noch bevor Leibniz, der sich vom

[1]) Herr Lefort hat dieses in seiner von uns überall angeführten kritischen Ausgabe des *Commercium Epistolicum* an zahlreichen Stellen nachgewiesen. [2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 307 bis 308. [3]) *Anno 1683 ad finem vergente Newtonus propositiones principales earum quae in Philosophiae Principiis Mathematicis habentur Londinum misit eaedemque cum Societate Regia mox communicatae sunt, annoque 1686 Liber ille ad Societatem missus est ut imprimeretur, et proximo anno lucem vidit.*

December 1712 bis zum September 1714 in Wien aufhielt[1]), auch nur von dem Erscheinen des Buches Kenntniss erhalten hatte, brachte eine im Haag erscheinende Zeitschrift, *Journal litéraire*[2]), in seiner Nummer für Mai und Juni 1713 einen Londoner Brief. Er wusste zu melden, dass das Commercium Epistolicum die Presse verlassen habe, gab eine rasche Uebersicht der Streitpunkte, dann einen Abdruck des Schlussberichtes des Prüfungsausschusses der Royal Society, eines Berichtes, den man als das Urtheil der Gesellschaft anzusehen habe[3]). Das war ungefähr die Zeit, zu welcher (S. 67) Johann Bernoulli am 29. Juli 1713 den politischen Hintergrund des Streites witterte, welcher sicherlich wenigstens so weit vorhanden war, als man in England mehr und mehr geneigt wurde, dem politischen Gegner jede Schlechtigkeit zuzutrauen und jeden Schritt gegen ihn für erlaubt zu halten. Diese Stimmung hielt auch im folgenden Jahre noch an. Am 20. April 1714 schrieb Wolf an Leibniz[4]), die Herausgeber des Journal litéraire theilten ihm mit, die Engländer behandelten die Streitfrage nicht als eine solche zwischen einem Engländer und einem Deutschen, sondern als Streit zwischen England und Deutschland.

An demselben Tage des 29. Juli 1713, an welchem Johann Bernoulli die soeben von uns wiederholt hervorgehobene Bemerkung niederschrieb, gab Leibniz die erste öffentliche Antwort auf das Commercium Epistolicum. Er schickte die unterschriftlose Erwiderung in lateinischer Sprache an Christian Wolf[5]), damit derselbe sie als Flugblatt drucken lasse, und wie die meisten Schriftstücke in dem hässlichen Streite ihren besonderen Namen erhalten haben, so führt man dieses meistens als das Flugblatt von 1713 an. Später liess Leibniz wieder ohne Unterschrift und abermals durch Wolfs Vermittelung einen französischen Brief an das Journal litéraire schicken[6]), der in der Nummer für November und December 1713 abgedruckt ist. Auch eine deutsche Fassung ist vorhanden, welche in Deutschland erschien. Sämmtlichen Entgegnungen kann man eine gewisse Grobheit nicht absprechen. Am wenigsten zeigt dies der französische Wortlaut, da die Leitung des Journal litéraire Milderungen anbrachte.

Das Flugblatt enthielt als einen wesentlichen Bestandtheil ein Bruchstück eines Briefes[7]), in welchem ein Mathematiker ersten Ranges

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie XVIII, 202. [2]) Das *Journal litéraire* erschien von 1713 bis 1737. [3]) *On doit regarder ce rapport comme le Jugement de la Société* (*Commerc. epistol.* pag. 230). [4]) Leibniz, Supplementband zu dem mathematischen Briefwechsel S. 158. [5]) Ebenda S. 57 (Wolfs Brief vom 20. April 1714). [6]) Ebenda S. 155. [7]) Leibniz V, 411—413 zu vergleichen mit III, 910—911.

unter dem 7. Juni 1713 seine Ansicht über den Streit geäussert habe. Diese Ansicht geht aber dahin, dass Newton in früher Zeit die Reihenlehre zwar ungemein gefördert habe, an die Fluxionsrechnung aber damals nicht im Traume gedacht habe und ebensowenig daran, sie auf allgemeine analytische Operationen zurückzuführen, welche ähnliche Dienste leisten wie der Algorithmus und die Regeln der Arithmetik und der Algebra[1]). Er habe dafür zwei Gründe: den ersten, dass punktirte Buchstaben weder in den Briefen, noch in den Principien Newtons je vorkommen, den zweiten, dass Newton, wie *„ein hervorragender Mathematiker“* bereits bemerkte, lange Zeit die höheren Differentiationen nicht verstanden habe. Dieser Ansicht schliesse — so erklärt das Flugblatt, welches dadurch gewissermassen eine Unterschrift erhält — Leibniz sich an. In seiner Unbefangenheit habe er lange geglaubt und deshalb auch geschrieben, Newton besitze etwas, was der Differentialrechnung ähnlich sei, eigenthümlich und durch eigene Erfindung; aber nachdem er sehe, wie man jetzt von England aus sich nicht damit begnüge, Newton als Miterfinder zu nennen, sondern ihn selbst von der Erfindung ausschliessen wolle, nachdem er sehe, dass Newton dieses Märchen unterstütze, beginne er Argwohn zu fassen, die Fluxionsrechnung sei in Nachahmung der Differentialrechnung gebildet worden[2]).

In der französischen Erwiderung[3]) kommt am Schlusse der gleiche Vorwurf, gestützt auf das Gutachten eines berühmten Mathematikers, während am Anfang Gewicht auf den Umstand gelegt wird, dass früher Newton niemals Leibniz den Ruhm selbständiger Erfindung der Differentialrechnung bestritten habe, sowie auf den weiteren Umstand, dass Leibniz der Royal Society niemals seine eigene Auffassung der Sache mitgetheilt habe; die Gesellschaft sei somit nicht in der Lage gewesen, Gründe und Gegengründe zu vergleichen und ein Urtheil zu fällen[4]).

Wir müssen noch bei dem in das Flugblatt von 1713 aufgenommenen Briefe verweilen. Seit 1745 weiss man mit aller Bestimmtheit, was man früher nur vermuthete, dass die Einschaltung ein Bruchstück eines langen Briefes Johann Bernoullis ist. Damals, also zu Lebzeiten Johann Bernoullis und mit dessen Einverständnisse, ist sein mit Leibniz geführter Briefwechsel gedruckt worden, und in

[1]) *Nec, credo tunc temporis vel somniavit adhuc de Calculo suo fluxionum et fluentium, vel de reductione ejus ad generales operationes Analyticas, ad instar Algorithmi vel Regularum Arithmeticarum et Algebraicarum inservientes.* [2]) *suspicari coepit, Calculum fluxionum ad imitationem Calculi differentialis formatum fuisse.* [3]) Leibniz V, 414—416. [4]) *Ainsi la Société n'a point pû examiner les Raisons de part et d'autre pour prononcer la dessus.*

diesem fand sich die ganze Stelle mit Einschluss eines letzten Satzes[1]): Bitte benutzen Sie, was ich hier schreibe, in richtiger Weise und ohne mich mit Newton und seinen Landsleuten zu verfeinden, denn ich möchte in diese Streitigkeiten nicht hineingemengt werden. Leibniz kümmerte sich allerdings nicht um den ausgesprochenen Wunsch. Er liess das Bruchstück als von Johann Bernoulli herrührend in den *Nouvelles litéraires*[2]) vom 28. December 1715 pag. 414 abdrucken, und auch in zwei Briefen, dem einen an die Gräfin Kielmansegge, dem anderen an Graf Bothmer, beide angesehene Persönlichkeiten am englisch-hannövrischen Hofe, hat Leibniz den Briefschreiber ausdrücklich genannt. Wie wenig aber diese das Geheimniss bewahrten, das ihnen übrigens nicht als solches anvertraut war, geht aus dem Abdrucke der Leibnizischen Briefe in einer 1720 herausgegebenen Sammlung hervor. Pierre Des Maizeaux[3]) (1672 oder 1673—1745) war der Sohn eines in Folge der Aufhebung des Edictes von Nantes nach der Schweiz ausgewanderten französischen Protestanten. Er kam 1699 in ziemlich ärmlichen Verhältnissen nach England, wurde am 10. November 1720 zum Mitgliede der Royal Society gewählt und 1722 königlicher Kammerherr. Mit der Jahreszahl 1720, aber thatsächlich etwas früher, da die Vorrede vom 27. October 1719 ist, gab Des Maizeaux eine zweibändige Sammlung damals noch nicht an die Oeffentlichkeit gelangter Briefe u. s. w. unter dem Titel *Recueil de diverses pieces sur la philosophie, la religion naturelle, l'histoire, les mathematiques etc. par Mrs. Leibniz, Clarke, Newton et autres Autheurs célèbres* heraus. Die beiden Ernennungen, von welchen wir erzählten, beweisen, dass das *Recueil Des Maizeaux*, wie die Sammlung meistens genannt wird, ihrem Herausgeber weder bei der Royal Society noch bei Hofe geschadet hat. Eher liesse sich auf das Gegentheil schliessen, und wenigstens für die Royal Society kann die Thatsache als Bestätigung dienen, dass die Sammlung Hans Sloane zugeeignet ist. In ihr sind aber die beiden genannten Briefe veröffentlicht[4]), allerdings sehr unbequem für Johann Bernoulli, der noch am 5. Juli 1719 die Versicherung gegeben hatte, man werfe ihm mit Unrecht jene Aeusserungen vor[5]).

[1]) *Rogo vos, ut quae hic scribo, iis recte utaris, neque me committas cum Newtono ejusque popularibus; nollem enim immisceri hisce litibus.* [2]) Die *Nouvelles litéraires* nicht zu verwechseln mit dem *Journal litéraire*, erschienen wie jenes im Haag 1686 bis 1720 [3]) *National Biography* XIV, 406—407 (London 1888, edited by Leslie Stephen). [4]) *Recueil Des Maizeaux* II, 36 und 44. Ebenda, Vorrede zum I. Bande pag. XLVIII und II, 37 Note ist vom Abdrucke des Bernoullischen Briefes in den *Nouvelles litéraires* die Rede. [5]) Brewster, *Memoirs of the life . . . of . . . Newton* (London 1854) II, 503. Vgl. Giesel Delitzscher Schulprogramm für 1866, S. 20 Note 76.

Johann Bernoulli also war es, der Newton nicht bloss das Erfinderrecht absprach, der ihn auch beschuldigte, die höhere Differentiation nicht verstanden zu haben, wie längst gezeigt sei. Er spielte damit auf die Abhandlungen der Pariser Académie des Sciences für 1711 an. Dort hatte Johann Bernoulli einen Aufsatz über die Bewegung schwerer Körper veröffentlicht, und sein Neffe Nicolaus I. Bernoulli hatte einen Zusatz beigefügt[1]), in welchem der Vorwurf mangelnden Verständnisses der höheren Differentiation begründet war. Newton glaube, wenn

$$(z+o)^n - z^n = nz^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}o^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^{n-3}o^3 + \cdots$$

so seien die einzelnen Glieder (abgesehen von den Factoren o) die aufeinanderfolgenden Differentiale von z^n. Das sei wahr für das erste Glied, aber nicht für die Folgeglieder. Newton habe überdies den Irrthum zweimal begangen, zuerst in den Principien, dann in der Quadratura Curvarum. Später wiederholte Johann Bernoulli in einem Aufsatze in den A. E. von 1713 den Vorwurf[2]) mit der Bemerkung, Nicolaus Bernoulli, der erst jüngst in England gewesen sei, habe Newton auf den Fehler aufmerksam gemacht, und Newton beabsichtige, wie er höre, in der grade im Drucke befindlichen zweiten Auflage der Principien die Stelle mittelst eines Cartons zu ändern. Das ist allerdings nicht geschehen. Newton hielt vielmehr in Briefen an Keill[3]), insbesondere in einem solchen vom 20. April 1714, die Richtigkeit der Darstellung in den Principien aufrecht, bei der es sich gar nicht um Fluxionen, sondern nur um Entwickelung in eine convergente Reihe handle[4]). Von dem Fehler in der Quadratura Curvarum, der wirklich ein Fehler ist (S. 285) schwieg Newton wohlweislich.

Wir sind damit bis ins Frühjahr 1714 gelangt, wo eine neue Persönlichkeit in den Streit eingriff, John Chamberlayne[4]) (1666 bis 1723), Kammerherr bei Königin Anna und ebenso bei König Georg I. Ob er, was bei seiner Hofstellung wohl möglich ist, den Auftrag des Königs hatte, die beiden grossen Männer, deren jeder die wissenschaftliche Zierde eines der beiden unter englisch-hannövrischen Scepter stehenden Länder bildete, auszusöhnen, wissen wir

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 509—510. [2]) Ebenda I, 535 und 556. [3]) Vier Briefe Newtons an Keill vom 2. April bis 15. Mai 1714 sind abgedruckt bei Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 169—177. Der Brief vom 20. April steht pag. 170—173. [4]) *But this great Mathematician is grossly mistaken in taking the method there made use of, which is a branch of the method of converging series, to be the method of fluxions.* [5]) *National Biography* X, 9—10 (London 1887, etited by Leslie Stephen).

nicht. Jedenfalls unterzog er sich dieser Sisyphosarbeit. Er schrieb an Leibniz in diesem Sinne. Leibniz antwortete[1]) von Wien aus, wo er sich noch immer befand, unter dem 28. April 1714, er sei an der Uneinigkeit zwischen ihm und Newton schuldlos. Keill habe ihn in den P. T. verunglimpft, er habe dann bei Sloane eine Genugthuung verlangt, ein Verlangen, an welchem er nach Keills die Beleidigung nur noch verschärfender Rückantwort um so mehr festgehalten habe, als er überzeugt gewesen sei, Newton lasse ihm Gerechtigkeit widerfahren. Nun sei, er wisse nicht durch welche Rabulisterei und Hinterlist, die Sache so aufgefasst worden, als wenn er vor der Royal Society als Richterin, deren Urtheil er sich zu unterwerfen bereit sei, eine Klage erhoben. Man hätte ihn doch wenigstens benachrichtigen müssen, dass die Gesellschaft die Grundlage der Angelegenheit zu untersuchen beabsichtige, man hätte ihm Gelegenheit bieten müssen, seine Beweismittel vorzubringen und diesen oder jenen der Richter zurückzuweisen. Man habe aber nur die eine Partei gehört, der Rechtsspruch sei dadurch an sich nichtig und könne nicht als Urtheil der Gesellschaft gelten. Nichts desto weniger habe Newton denselben in Buchform drucken und im Namen der Gesellschaft verbreiten lassen. Ein solches Verfahren finde nirgend Beifall. Vorhandene Briefe bezeugen das missbilligende Erstaunen in Frankreich und Italien. Er habe immer von Newton als unabhängigen Erfinder einer der seinigen ähnlichen Methode gesprochen, wenn auch jetzt Grund vorhanden sei, an der Unabhängigkeit zu zweifeln[2]). Herr Chamberlayne sehe hieraus, auf welcher Seite die Hauptsache zur Beendigung des Streites geschehen müsse.

Chamberlayne that nun zweierlei. Er gab den Brief an Newton, welcher denselben am 11. Mai, also in dem Zwischenraum seiner an Keill gerichteten Schreiben, kurz und abweisend beantwortete. Allenfalls wäre hervorzuheben, dass in Newtons Brief auch von Fatios Angriff auf Leibniz von 1699 gesprochen ist, an welchem Newton nicht den geringsten Antheil gehabt habe. Erwägt man, dass in Leibnizens Brief der Name Fatio gar nicht vorgekommen war, so möchte man sich fast an die Redensart erinnert fühlen: Wer sich entschuldigt, beschuldigt sich. Das andere, was Chamberlayne that, war, dass er der Royal Society von Leibnizens Beschwerde Kenntniss gab, und nun wurde in der Sitzung vom 20. Mai zu Protocoll erklärt[3]), man beanspruche nicht, dass der Bericht der Com-

[1]) *Recueil Des Maizeaux* II, 116—120. [2]) *quoiqu'il se trouve maintenant qu'il y a grand lieu de douter s'il a sû mon Invention avant que de l'avoir eue de moi.* [3]) *Recueil Des Maizeaux*, Vorrede zum I. Bande pag. LIII und II, 123:

mission als Gesellschaftsbeschluss gelte. Wie wenig ernst das gemeint war, oder wie wetterwendisch die Stimmung wechselte, zeigt das früher (S. 309) Erzählte, dass man am 17. Juni, genau vier Wochen nach der Sitzung vom 20. Mai, Exemplare des Commercium Epistolicum zu Gunsten der Gesellschaftscasse dem Buchhandel überliess.

Leibniz, von der Erklärung vom 20. Mai in Kenntniss gesetzt, dagegen offenbar unbekannt mit dem, was am 17. Juni geschah, dankte Chamberlayne am 25. August für die Uebermittelung des Protocollauszuges. Ausserdem kommt in dem Briefe noch vor, Leibniz werde, wenn er erst wieder in Hannover sei, vielleicht auch ein *Commercium Epistolicum* in Druck geben, damit die Leser sich ein Urtheil bilden können. Chamberlaynes Versuch war gescheitert, der Stein blieb im Rollen.

Im Juli und August 1715 brachte das Journal litéraire eine 40 Druckseiten füllende Antwort von Keill auf die Leibnizische Vertheidigung von 1713. In Keills Antwort ist die Einwirkung von Newtons an ihn gerichteten Briefen (S. 316 Anm. 3) ersichtlich, überdies hat sie Ende Juni 1714 in ihrem ganzen Wortlaute Newton vorgelegen[1]). Am 11. November machte Chamberlayne der Royal Society Mittheilung von Leibnizens erst erwähntem Briefe vom 25. August. Die Gesellschaft fühlte sich durch die in Aussicht gestellte Gegenveröffentlichung eines zweiten Commercium Epistolicum tief verletzt, weil darin eine Verdächtigung des Urtheils und der Vollständigkeit der von Gesellschaftswegen veröffentlichten und gebilligten Briefsammlung liege[2]). War denn, muss man sich bei dieser Parteinahme für das englische Commercium Epistolicum fragen, am 11. November keines von den Mitgliedern gegenwärtig, die am 20. Mai die Verantwortlichkeit für jene Schrift ausdrücklich abgelehnt hatten? Der Umschwung war vollständig.

Das Stärkste, was gegen Leibniz als gestattet galt, sollte bald folgen. Im Januar 1715 brachte Nr. 342 der P. T. einen langen Bericht über das Commercium Epistolicum[3]). Zu den Beschuldigungen, welche, theils offen theils versteckt, in jenem Buche enthalten waren, traten neue. **Der zweite Newtonsche Brief vom 24. October 1676 habe zu Ende des gleichen Monats oder am Anfang**

Elle ne prétendait point que la Rapport de ses Commissaires passât pour une Décision de la Société.

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 236 Note 1 von Lefort. [2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXV Note 165. [3]) *Commerc. epistol.* pag. 9—48 findet sich die lateinische Uebersetzung des ursprünglich englischen *Account of the Book entitled Commercium epistolicum.*

November Leibniz in London vorgelegen[1]). Er sei ihm dann am Anfange des Frühlings in Hannover zu Händen gekommen.

Letztere Meinung kann ja, wie wohl irrig, auf dem wiederholt von uns angeführten Briefe von Collins beruhen, der am 5. März 1677 den Abgang des Newtonschen zweiten Briefes für die nächste Woche in Aussicht stellte, aber die erstere Behauptung, welche hier zum ersten Male auftaucht, ist wie grundlos auch ohne jede mögliche Stütze. Newtons Brief war an Oldenburg gerichtet. Dieser hat ihn am 4. November 1676 abgeschrieben[2]), am 2. Mai 1677 mit Begleitbrief an Leibniz geschickt[3]) (S. 184) und in diesem ausgesprochen, Leibniz werde wohl zur Zeit durch den ausführlichen Brief Newtons vollauf gesättigt sein, so dass er über Mittheilungen von Collins diesmal schweige[4]). Ausserdem ist grade durch den Brief von Collins an Newton vom 5. März 1677 bestätigt, dass Leibniz im October 1676 eine Woche in London war[5]). Hätte Oldenburg ihm, wenn er bei Eintreffen des Newtonschen Briefes noch in London gewesen wäre, denselben nicht ausgehändigt?

An einer späteren Stelle des Berichtes[6]) wird erklärt, in der Klage, welche Leibniz gegen Keill wegen Verunglimpfung erhoben habe, könnten weder Newton noch Leibniz als Zeugen vernommen werden. Deshalb habe die Royal Society eine zahlreiche Commission zur Prüfung alter Briefe und Papiere eingesetzt, und deren Bericht, welcher dahin gehe, dass Newton 1669 oder früher, Leibniz aber nicht vor 1677 die Infinitesimalrechnung besessen habe, sofort veröffentlichen lassen.

Auch auf den Fehler in der Quadratura Curvarum wird ein entschuldigender Blick geworfen[7]), der Fehler verschwinde, wenn in den betreffenden Satz (S. 283 Anm. 2) das vergessene Wörtchen *ut* eingeschaltet werde. Das war wohl die Einschaltung, welche Nicolaus I. Bernoulli bei seinem Aufenthalte in England Newton angerathen hatte, und von welchem Johann Bernoulli (S. 316) vermuthete, Newton werde sich ihrer in einem Carton bedienen.

Fragen wir nun nach dem Verfasser des *Account* in den P. T., so erhalten wir die Antwort: **Newton sei es gewesen!** Das ist aus dem unbefangenen Zeugnisse englischer Zeitgenossen, welche davon als von einer allbekannten Thatsache reden, unzweifelhaft festgestellt[8]). Nur ein Einziger hat es gewagt, im Jahre 1722 den ein Jahr vorher verstorbenen Keill als den Verfasser des Account zu

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 25. [2]) Leibniz I, 122 Note. [3]) Ebenda I, 151. [4]) Ebenda I, 152: *Nihil hac vice de Collino apud te commemoro, quum Te omnino satiatum iri pro tempore prolixa hac Newtoni epistola autumem.* [5]) *Commerc. epistol.* pag. 145. [6]) Ebenda pag. 32. [7]) Ebenda pag. 35—36. [8]) De Morgan

nennen, und dieser Einzige war Newton selbst[1]). Will man ihn nicht geradezu der Lüge beschuldigen, so gibt es nur eine Erklärung: Newton hat Keill jenen Bericht so gut wie in die Feder dictirt, und das ist auch nicht viel schöner, als wenn er ihn selbst geschrieben hätte, er, der — mit dem Berichte zu reden — nicht einmal als Zeuge vernommen werden konnte.

Die Zeitfolge nöthigt uns, unsere Leser jetzt wieder nach Deutschland herüberzuführen. Wir sagten, Leibniz sei bis zum September 1714 in Wien geblieben. Er kehrte Ende dieses Monats nach Hannover zurück, von wo wenige Wochen früher der Kurfürst nach London abgereist war, um als König Georg I. den englischen Thron zu besteigen. Wir erinnern uns, dass Leibniz nun beabsichtigte, selbst nach England sich zu begeben, dass es ihm untersagt wurde (S. 33). Ob Chamberlayne, als er am 11. November 1714 von dem baldigen Eintreffen Leibnizens in London sprach[2]), die dem entgegenstehenden Hindernisse nicht kannte, oder ob Leibniz daran dachte, dem königlichen Verbote zu trotzen, wissen wir nicht. Jedenfalls hat Leibniz Hannover nicht mehr verlassen. Damals muss er, so weit andere Arbeiten, mit denen er nach wie vor überhäuft war, ihm Zeit liessen, daran gedacht haben, in entschiedener Weise seinen Widersachern entgegenzutreten. Damals fand vielleicht jene hässliche Veränderung der Jahreszahl 1675 in 1673 statt, von welcher wir (S. 183) sprechen mussten; damals enstand jedenfalls die Abhandlung *Historia et origo calculi differentialis*[3]), welche in zwei Entwürfen handschriftlich erhalten ist.

Die auch heute noch des Durchlesens in hohem Grade würdige Darstellung unterscheidet sich insbesondere dadurch auf das Vortheilhafteste von den im Prioritätsstreite entstandenen Schmähschriften, dass dem Gegner Ehrenrühriges überhaupt nicht nachgesagt ist. Auch die leiseste Andeutung, dass Newton an Leibniz einen geistigen Diebstahl begangen haben könne, deren, wie wir wissen, Leibniz sich nicht immer enthielt, fehlt. Nur seine eigene Unantastbarkeit stellt der Verfasser mit Entschiedenheit fest. Den Bericht in den P. T. vom Januar 1715 kannte er offenbar noch nicht, sonst wäre die eingehaltene Mässigung unbegreiflich, und sonst wäre gewiss darauf Gewicht gelegt worden, dass die Antwort auf den zweiten Newtonschen Brief am Empfangstage geschrieben wurde. Ist das Schweigen

in dem *Philosophical Magazine*, Januar—Juni 1852 pag. 440—444 und ebenda Juli—December 1852 pag. 321—322.

[1]) *Commerc. epistol.* pag. X. [2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXV Note 165. [3]) Leibniz V, 392—410, zuerst 1846 durch C. J. Gerhardt als besondere Broschüre herausgegeben.

über diesen Punkt doch ohnehin räthselhaft genug. Leibniz hat (S. 287) sein Concept des wichtigen Briefes offenbar damals hervorgeholt. Er hat das Datum vom 21. Juni 1677 nachgetragen, hat die Seitennummer des Abdruckes des Briefes im Commercium Epistolicum beigeschrieben, und dennoch schwieg er in seiner Erzählung über das in der englischen Veröffentlichung fehlende *hodie*? Wir wissen dafür keine andere Erklärung als die, dass wir die (S. 287) noch offen gelassene Frage, ob der entstellende Klecks in dem nach England abgegangenen Briefe ohne oder mit Absicht entstanden sei, im letzteren Sinne beantworten. Die Veranlassung mag gegeben haben, dass der Brief zwar am Empfangtage von Newtons Schreiben angefangen wurde, aber, wie es bei seiner Länge leicht begreiflich ist, nicht am gleichen Tage vollendet werden konnte, und dass Leibniz dann vorzog, das *hodie* bis zur Unkenntlichkeit zu tilgen.

Abermals traten zwei neue Persönlichkeiten in dem Streite auf. Antonio Schinella Conti[1]), (1677—1748) ist in Padua geboren und ebenda gestorben. Er gehörte dem Orden des Oratorium als Geistlicher an, legte aber dieses Amt 1708 nieder, um nicht mehr Beichte hören zu müssen. Im Jahre 1713 kam er nach Paris, wo er mit den bekanntesten Gelehrten verkehrte. Mit einem derselben, Pierre Rémond, bekannter unter dem Namen De Montmort, welchen er von einer Besitzung entliehen hatte, und unter welchem er uns schon (S. 265) begegnet ist, kam er 1715 nach London und wurde von Newton aufs Liebenswürdigste aufgenommen. Mit Leibniz war Conti schon früher in brieflicher Verbindung. Von London aus muss er ihm abermals geschrieben und dabei, wie es kaum anders möglich war, den Prioritätsstreit berührt haben. Leibniz erwiderte[2]) und fügte dem eigentlichen Briefe eine selbst einem Briefe gleichkommende Nachschrift hinzu[3]), welche offenbar zum Vorzeigen geschrieben war und, wie es scheint, nicht bloss Newton, für welchen sie bestimmt war, sondern auch anderen Personen, vielleicht dem Könige zu Gesicht kam. Jedenfalls erklärte Conti in seinem folgenden Briefe vom März 1716, König Georg I, habe sich durch ihn über den Streit zwischen Leibniz und Newton berichten lassen[4]), und der König war es auch, der durch die Frage, wann denn Newtons Antwort käme, letztere hervorrief[5]).

In Leibnizens Schreiben waren einige bissige Bemerkungen enthalten gewesen. Es scheint nicht, sagte er[6]), dass Herr Newton die

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* IX, 670—672. — Poggendorff I, 473. [2]) *Recueil Des Maizeaux*, Vorrede zu Bd. I pag. LVII und II, 337—340. [3]) Ebenda II, 3—11. [4]) Ebenda II, 14. [5]) Ebenda, Vorrede zu Bd. I pag. LX. [6]) Ebenda II, 4.

Bezeichnung und den Infinitesimalcalcül vor mir besessen hat, wie Herr Bernoulli sehr gut geurtheilt hat, wenn es ihm auch leicht gewesen wäre, dahin zu gelangen, wenn seine Blicke sich dahin gerichtet hätten[1]), wie es auch Apollonius sehr leicht gewesen wäre, zu Descartes' analytischer Methode zu gelangen, wenn seine Blicke sich dahin gerichtet hätten. Die gegen mich geschrieben haben, fuhr er fort, haben unschwerer Weise durch gezwungene und schlecht begründete Erklärungen meine Aufrichtigkeit angegriffen; sie werden nicht das Vergnügen haben, mich die kleinen Gründe von Leuten, welche so schlechte Uebungen haben, beantworten zu sehen. Zum Schlusse ging er auf Gegensätze zwischen seinen und Newtons philosophischen Ansichten ein, ein Gebiet, auf welches wir ihm nicht folgen.

Nun kam also Newtons Antwort[2]), welche ebensowenig an Leibniz unmittelbar gerichtet war, wie dessen Brief an ihn; beide schrieben der Form nach an den Abbate Conti. Newton beginnt mit der Behauptung, das Commercium Epistolicum sei durch einen eigens von der Royal Society dazu ernannten Ausschuss von angesehenen Persönlichkeiten verschiedener Nationen zusammengestellt. Dem Wortlaute nach ist das ja wahr, wenn auch Bonet und der zuletzt hinzugewählte De Moivre gewiss keine grosse Rolle in dem Prüfungsausschusse spielten (S. 308). Dann belegt Newton durch die Daten von Briefen, wie weit er frühzeitig in der Reihenlehre gewesen sei, und dass Leibniz solches immer anerkannt habe. Wo von Leibnizens Brief vom 21. Juni 1677 die Rede ist[3]), der als Antwort auf dem Brief vom 24. October 1676 bezeichnet ist (Des Maizeaux betonte dann in der Vorrede[4]) zu seinem Recueil die Länge der Zeit von acht Monaten, die zwischen dem 24. October 1676 und dem 21. Juni 1677 liege), heisst es, Herr Leibniz habe sein Einverständniss damit erklärt, dass De Sluses Tangentenmethode noch nicht vollkommen sei, dann habe er seine Differentialmethode für die Tangenten beschrieben, welche die gleiche war, die 1670 durch Barrow veröffentlicht worden war. Weil aber Herr Leibniz auf diese Methode als ihm eigenthümlich Anspruch erhob, verkleidete er sie durch eine neue Bezeichnung[5]). Das war eine Wiederholung der alten Anklage der Entlehnung, die herüber und hinüber geschleudert wurde von Fatio und Leibniz, von Keill und Johann Bernoulli, jetzt wieder von Leibniz und Newton, aber neu dadurch, dass Leibniz nicht mehr von Newton, sondern von Barrow die Auflösung der Tangentenaufgabe sich angeeignet haben

[1]) *s'il s'en étaït avisé.* [2]) *Recueil Des Maizeaux* II, 16—25. [3]) Ebenda II, 22. [4]) Ebenda, Vorrede zu Bd. I pag. XIV. [5]) *Mais comme il prétendait que cette Méthode lui appartenait, il la déguisa sous une Notation nouvelle.*

sollte. Es ist merkwürdig genug und ein Beleg dafür, wie blind die Leidenschaft den Menschen macht, dass Newton das Zweischneidige dieses Vorwurfes nicht erkannte und Leibniz gewissermassen die Antwort in den Mund legte[1]). Wenn Leibnizens Tangentenmethode die gleiche war wie die Barrows, wenn sie zugleich mit der Newtons übereinstimmte, so war auch kein Unterschied zwischen den Methoden Newtons und Barrows, und Ersterer war der anerkannte Schüler des Letzteren!

Schon am 14. April 1716 schrieb Leibniz an Conti[2]), er habe eine Abschrift von dessen Briefe vom Monate März und von dem Newtons, sowie auch seine Antwort auf beide an Herrn De Montmort in Paris zur Weiterbeförderung abgehen lassen; er ziehe diesen Weg vor, um neutrale und verständnissfähige Zeugen des Streites zu haben. Der Brief Leibnizens, welcher über Paris ging, und Newtons Bemerkungen zu demselben stehen im Recueil Des Maizeaux[3]). Leibnizens Brief ist im Frühjahr 1716 selbstverständlich von De Montmort und den Personen in Paris, welchen dieser ihn zeigte, gelesen worden, Newtons Bemerkungen aber gingen damals nur unter wenigen Londoner Freunden herum.

Da starb Leibniz am 14. November 1716. Sofort sammelte Newton alles, was durch die Vermittelung Contis hindurchgegangen war mit Einschluss seiner letzten Bemerkungen und liess es in London drucken[4]). Diese kleine Sammlung bildete alsdann einen Anhang zu einer mit dem Druckjahre 1715 in englischer Sprache und gleichzeitig in lateinischer Uebersetzung in London herausgegebenen Parteischrift: *The history of fluxions* von Joseph Raphson, der auf der Titelblatte schon als verstorben[5]) bezeichnet wird. Wir haben ihn als Schriftsteller über numerische Gleichungen (S. 119) kennen gelernt. Besonders Erwähnenswerthes steht nicht in den kurz von uns genannten Schriftstücken. Höchstens wäre zu bemerken, dass Newton als seine ältesten mit Datum versehenen Aufzeichnungen über Fluxionen solche vom 13. November 1665 nennt[6]). Das stimmt so ziemlich mit anderen Angaben (S. 199 Anm. 2) überein.

Wir erinnern uns, dass (S. 314) im Flugblatte von 1711 eine Briefstelle Johann Bernoullis eingeschaltet war, welche einen durch einen hervorragenden Mathematiker, *ab eminente quodam Mathematico*, bemerkten Fehler in Newtons Principien und Quadratura Curvarum rügte. Wir erinnern uns ferner, dass Newton in einem Briefe an

[1]) *Recueil Des Maizeaux* II, 63. [2]) Ebenda II, 26. [3]) Ebenda II, 48 bis 71 und 75—100. [4]) Ebenda, Vorrede zu Bd. I pag, LXIII. [5]) *By (the late) Mr. Joseph Raphson.* [6]) *Recueil Des Maizeaux* II, 89.

Keill (S. 316 Anm. 4) diesen grossen Mathematiker, *this great Mathematician*, etwas höhnisch abfertigte. Keill in dem Journal litéraire von 1714 und der Account in den P. T. von 1715 wiederholten Newtons Vertheidigung auch bezüglich der Quadratura Curvarum mittelst des vergessenen Wörtchen *ut* (S. 319). Gegen Ende der Zeit, innerhalb welcher die Contische Vermittelung, wenn man sie so nennen darf, spielte, erschien in dem Julihefte 1716 der A. E. ein unterschriftsloser Brief für den ausgezeichneten Mathematiker, Herrn Johann Bernoulli, gegen einen gewissen englischen Widersacher[1]), welcher gegen Keill sich richtete und insbesondere nachzuweisen suchte, dass das einmal beim Drucke versehentlich weggebliebene *ut* die angefochtene Stelle nicht rette, dass jenes Wort vielmehr verschiedenemal ausgefallen sein müsste, was die Wahrscheinlichkeit eines Druckfehlers bedeutend herabsetze. Der Briefschreiber trat also gegen Keill, zugleich gegen Newton auf und damit auf Leibnizens Seite. Dadurch wurde die Frage nach seiner Persönlichkeit wach.

Wollte man die schon oft besprochenen handschriftlichen Randbemerkungen der A. E. einzig zu Rathe ziehen, so wäre die Frage sofort entschieden, denn dort ist Christian Wolf als Verfasser des Briefes genannt. Zedlers Universallexicon bestätigt diese Meinung. In dem 1748 zu Wolfs Lebzeiten erschienenen LVIII. Bande des umfangreichen Sammelwerkes befindet sich ein langer diesem Gelehrten gewidmeter Artikel mit vollständigem, ohne seine eigene Mithilfe undenkbarem Verzeichnisse aller seiner grösseren und kleineren Arbeiten bis zu den unbedeutendsten Berichten in den A. E. In dem Verzeichnisse ist der Brief von 1716 nicht nur mit enthalten, in dem biographischen Abschnitte ist Wolf auch für das damals bewährte Eintreten für Leibniz belobt. Und dennoch ist nicht Wolf, sondern Johann Bernoulli der ungenannte Verfasser, der seine Arbeit dem befreundeten Gelehrten zur Besorgung mit der Bitte überschickt hatte, etwa nöthige Aenderungen nach Gutdünken vorzunehmen.

Da war z. B. überall die erste Person, in der Johann Bernoulli schrieb, so oft von Arbeiten desselben die Rede war, in die dritte Person umzuändern, und das besorgte Wolf aufs Pünktlichste bis auf eine Stelle[2]), wo er das Wörtchen *meam* stehen liess, welches von den Gegnern jubelnd aufgegriffen wurde, während auch die Freunde

[1]) A. E. 1716, 296—314: *Epistola pro eminente Mathematico, Dn. Johanne Bernoullio, contra quendam ex Anglia antagonistam scripta.* Das Material und die Belegstellen über diesen Brief sind bei Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 178 Note * gesammelt. [2]) Ebenda 1716, 313.

sich eines mitleidigen Lächelns nicht enthalten konnten. Johann Bernoulli schrieb zwar an Wolf, er möge baldigst den Druckfehler berichtigen lassen, statt *meam* sei *eam* zu lesen. Aber das fruchtete wenig. In den A. E. von 1718 hat Niclaus II. Bernoulli, der Sohn Johanns, in gewundener Weise zugegeben, sein Vater habe die thatsächlichen Grundlagen des Briefes von 1716 niedergeschrieben, und ein Enkel Johanns hat den vollgültigen Beweis erbracht.

Johann Bernoulli hatte ausser den beiden Söhnen Niclaus II. und Daniel noch einen dritten Sohn Johann II. Bernoulli[1]) (1710 bis 1790), dessen mehr der Physik zugewandte Thätigkeit uns von der Pflicht entband ihn zu nennen, als wir (S. 89—90) die Glieder der Familie Bernoulli, welche diesem Bande angehören müssen, schilderten. Sonst hätten wir zu erwähnen gehabt, dass er bereits 1724 die Magisterwürde erwarb. Damals veröffentlichte er eine geschichtliche Abhandlung *Utrum Galli praestant Anglis inventorum physicorum et mathematicorum laude*[2]). Johann II. hatte wieder einen Sohn Johann III. Bernoulli[3]) (1744—1807), und dieser hat in den damals in französischer Sprache erscheinenden Abhandlungen der Berliner Academie für 1799—1800 und für 1802 in der als *Histoire de l'Académie* bezeichneten ersten Abtheilung auf S. 32—50 in dem ersten, auf S. 51—65 in dem zweiten der beiden genannten Bände Beiträge zur Geschichte der Mathematik veröffentlicht[4]). Er hat insbesondere die Geschichte des Briefes von 1716 klargestellt. Er hat sogar den ursprünglichen von Johann Bernoulli an Wolf geschickten Brief neben dem in den A. E. erschienenen zum Abdrucke gebracht, wodurch man in den Stand gesetzt ist, die von Wolf vorgenommenen unbedeutenden Aenderungen zu erkennen. Bernoulli wollte eben nur den Brief nicht geschrieben haben. Er scheue es, sagte er[5]), mit Keills Galle eingerieben zu werden. Wie Wolf dazu kam, auch 1748 noch die Verantwortung für den Brief zu übernehmen und sich für dessen Anfertigung beloben zu lassen, wissen wir nicht.

Leibniz war todt. Seine englischen Gegner führten den Streit gegen ihn weiter, führten ihn nur um so heftiger weiter, als eine Erwiderung von ihm jetzt nicht mehr zu befürchten war. Der Recueil

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie II, 480—482. [2]) Suter in der Bibliotheca mathematica 1890 S. 100. [3]) Allgemeine Deutsche Biographie II, 482. [4]) Bei Poggendorff I, 162, fehlen diese Abhandlungen unter Johann III. Bernoulli. Dagegen sind I, 158 unter den Schriften Johann I. Bernoulli irrthümlicherweise *Anecdotes pour servir à l'hist. des mathématiques* (Mém. Berlin, A. 1699 et 1700) genannt. Das sind die hier erwähnten Abhandlungen. Irrige Datirung hat den Grossvater mit dem Enkel verwechseln lassen. [5]) *Ingratum mihi valde foret a Keilio bile sua perfricari.*

Des Maizeaux mit seiner sich unparteiisch gebärdenden, thatsächlich durchaus im Newtonschen Sinne gehaltenen Vorrede erschien 1720. Die dritte Ausgabe der Principien von 1726 veränderte das in den früheren Ausgaben Leibniz sein Recht gewährende Scholium zu dessen Ungunsten (S. 205). Das gerechten Tadel am stärksten herausfordernde Schriftstück war die **Neuauflage des Commercium Epistolicum vom Jahre 1722.**

Wenn damals die erste Auflage vergriffen war, wenn die buchhändlerische Nachfrage nach der Briefsammlung eher im Zunehmen als im Abnehmen sich zeigte, so war es eine einfache Geschäftssache, ob ein wiederholter Abdruck stattfinden solle. Frage des wissenschaftlichen Feingefühls war es dann, ob am Schlusse, etwa unter der Bezeichnung als Anhang, noch weitere Schrifstücke beigefügt werden sollten. Aber eine Veränderung des Commercium Epistolicum selbst, Zusätze innerhalb des 1712 Gedruckten, ohne dass sie als solche gekennzeichnet wurden, das waren ebensoviele Fälschungen, welche auf den, der sie beging, einen nicht zu tilgenden Makel werfen. Die neue Auflage von 1722 beginnt mit einer Ansprache an den Leser, *Ad Lectorem*, welche darstellt, wie Leibniz immer andere Ausflüchte gesucht habe, wenn es sich darum handelte, die in dem Commercium Epistolicum vereinigten Beweisstücke anzuerkennen oder zu widerlegen. Er sei aus dem Leben gegangen mit dem Versprechen einer Gegensammlung, aber sein Benehmen in dem durch Conti vermittelten Briefwechsel zeige, dass das leere Worte waren, dass Leibniz vielmehr nichts besass, was er in jenem Sinne verwerthen konnte. Die erste Auflage des Commercium Epistolicum sei nur sehr klein gewesen, man habe Exemplare nur an urtheilsfähige Mathematiker geschickt, und käuflich seien jetzt keine vorhanden[1]). Deshalb sei es wünschenswerth gewesen, eine zweite Auflage zu drucken, welcher man auch einen Bericht über das Buch, *Recensionem Libri*, vorausschicke, der in den P. T. für 1715 erschienen sei, etwa 7 oder 8 Monate vor Leibnizens Tod. Die *Recensio* ist folglich dasjenige Schriftstück, dessen englischen Wortlaut wir seither *Account* nannten. Die Vorrede *Ad Lectorem* rührt von Newton her. Unter dessen Nachlasse haben sich fünf oder sechs Entwürfe jener Vorrede von der Hand des damals 79 Jahre alten Verfassers gefunden[2]). Ausserdem fanden sich dort Bruchstücke der *Recensio*, welche die Abfassung auch dieser Schrift durch Newton (S. 320) bestätigen. Man wird deshalb wohl oder übel Newton für den ganzen Wortlaut der neuen Auflage mit sammt ihren Fälschungen gleichkommenden Aenderungen des

[1]) *neque prostant venalia.* [2]) *Commerc. epistol.* pag. X.

Textes verantwortlich zu machen haben. Letztere sind genau untersucht worden[1]).

Als auffallendstes Beispiel heben wir folgendes hervor. Im Commercium Epistolicum von 1712 war stillschweigend angenommen, die *Historiola* sei wirklich an Leibniz abgegangen (S. 311). Die neue Auflage sagt ausdrücklich, die Uebersendung habe am 26. Juni 1676 stattgefunden[2]), und durch eine solche Datirung, die mit voller Bestimmtheit ausgesprochen ist, wird selbstverständlich die Thatsache unbestreitbar. Ein kleiner Umstand ist freilich dabei unerlässlich: die Richtigkeit des Datums. Nun hat aber Oldenburg am 26. Juni 1676 überhaupt nicht an Leibniz geschrieben. Spitzfindigkeit, kann man sagen. Man kennt einen Brief Oldenburgs an Leibniz vom 26. Juli 1676 und daraus konnte leicht durch einen Lesefehler, einen Schreibfehler, einen Druckfehler jenes irrige Datum entstehen. Gut, aber was stand in dem Briefe vom 26. Juli? Demselben lag die Abschrift von Newtons erstem Briefe vom 13. Juni 1676 bei, und Oldenburg theilte Leibniz (S. 79) Reihen des verstorbenen Gregory mit, die Collins gesammelt habe. **Folglich ist am 26. Juli 1676 die Historiola nicht an Leibniz abgegangen.** Von Newtons Tangentenbriefe steht aber in Oldenburgs Schreiben (S. 179) sonst nichts, als was Newton behaupte, leisten zu können. Das Beispiel, das im Tangentenbriefe ausgerechnet enthalten war, schickte Oldenburg nicht, wenn wir auch wiederholen müssen, dass Leibniz nichts für ihn Neues aus demselben entnommen haben würde. Doch darauf kommt es uns hier nicht an, sondern auf die Art, in welcher die zweite Auflage des Commercium Epistolicum mit der Wahrheit umsprang. Man hatte auf irgend eine Weise Kenntniss davon erhalten, dass am 26. Juli 1676 ein Brief Oldenburgs an Leibniz abgegangen war. Man wünschte nachzuweisen, dass Leibniz damals im Besitze der Historiola war. Man behauptete kurzweg, dieselbe habe jenem Briefe beigelegen, eine kühne Behauptung, wenn Oldenburgs Briefentwurf nicht erhalten war, ein freche Lüge, wenn solches der Fall gewesen sein sollte.

Eine eigentliche Fortsetzung hat der Prioritätsstreit nicht weiter gehabt. Entgegnungen von Freunden Leibnizens blieben mehr und mehr aus. Die Auffassung der Herausgeber des Commercium Epistolicum, Leibniz habe einen Eingriff in fremdes Geisteseigenthum begangen, wurde im achtzehnten Jahrhunderte mehr und mehr die

[1]) **De Morgan**, *On the additions made to the second edition of the Commercium Epistolicum. Philosophical Magazine.* January—June 1848 pag. 446 bis 456. [2]) *Haec Collectio ad D. Leibnitium missa fuit 26. Junii 1676.*

herrschende. Dem neunzehnten Jahrhunderte war es vorbehalten, Leibniz von diesem hässlichsten Vorwurfe zu reinigen. Es ist heute anerkannt, dass schon im siebzehnten Jahrhunderte die Infinitesimalrechnung so weit vorbereitet war, dass ihr hauptsächlich eine einheitliche Sprache und eine Schrift fehlte. Beides hat Leibniz ihr selbständig gegeben, so wenig es ihm einfiel in Abrede zu stellen, dass er auf den Schultern von Vorgängern stand, dass diese sich ausgiebig und erfolgreich mit Infinitesimalaufgaben beschäftigt hatten. Dass Newton nicht minder selbständig Aehnliches besass, früher besass als Leibniz, wird ebensowenig geleugnet werden, aber sein Wort Fluxion kam erstmalig 1687 in den Principien, seine Bezeichnung, in der er lange schwankte, erstmalig 1693 durch Wallis an die Oeffentlichkeit, während Leibnizens Abhandlung von 1684 schon als Markstein in der Geschichte der Mathematik vorhanden war. Wir nennen sie einen Markstein, weil sie, das hat schon unser XVI. Abschnitt reichlich bewiesen, den Ausgangspunkt bildete, von wo aus neue Wettbewerber in die Rennbahn traten, vorwärts zu eilen nach entfernten Zielpunkten. Das Ende der Bahn ist in den mehr als zweihundert Jahren, die inzwischen verflossen sind, weiter und immer weiter hinausgeschoben worden, aber Leibnizens Abhandlung von 1684 bildet nach wie vor den Sammelpunkt, an welchem Jeder vorbei muss, der sich am Rennen betheiligen will, Leibnizens Sprache, Leibnizens Schrift sind die unerlässlichen Eintrittskarten, ohne welche Niemand zugelassen werden kann. Und Leibniz ahnte diese grosse Zukunft. Er hat frühzeitig die Bedeutung der mathematischen Form erkannt, die seine Gegner nicht sahen, oder nicht sehen wollten. Auch über den Prioritätsstreit als solchen haben die Ansichten sich geklärt, leider dahin geklärt, dass seine gründliche Durchforschung allen Betheiligten ohne irgend eine Ausnahme zum Nachtheile gereicht.

96. Kapitel.

Combinatorische Analysis. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wenn wir nunmehr Arbeiten, welche dem Gebiete der Combinatorik und ihren Anwendungen angehören, uns zuwenden wollen, so haben wir zuerst über einen Aufsatz zu berichten, von welchem es zweifelhaft erscheint, ob er nicht schon vor 1700 niedergeschrieben wurde, also streng genommen schon im 84. Kapitel hätte zur Sprache kommen müssen. Es ist der Aufsatz *Nova Algebrae promotio*[1]) von

[1]) Leibniz VII, 154—189.

Leibniz, den wir meinen. Er ist erst unter dem Leibnizischen Nachlasse in Hannover aufgefunden worden, mithin zu der Zeit, in welcher er einen Einfluss hätte üben können, vollständig unbekannt gewesen. Eine nahe verwandte, im Jahre 1700 vor der Oeffentlichkeit behandelte Aufgabe giebt uns die Veranlassung, die Leibnizische Abhandlung gerade hier zur Rede zu bringen. Bei ungedruckten Arbeiten ist es ohnedies immer recht schwierig, den Zeitpunkt ihres Entstehens zu errathen, wenn nicht zufällig ein Datum beigefügt ist, ausserdem meistens ziemlich gleichgiltig, wo man sie geschichtlich einreiht, es sei denn, dass man aus ihnen für den Verfasser ein geistiges Erstlingsrecht, oder mindestens die Unabhängigkeit seines Gedankenganges sichern will. Die neue Erweiterung der Algebra trägt kein Datum. Innere Gründe lassen vermuthen, der Aufsatz sei nach 1695, vielleicht nach 1697 niedergeschrieben. Analytisches Rechnen mit Grössen, sagt Leibniz, sei nichts anderes als Combinatorik[1]), und deshalb komme viel auf eine zweckmässige Bezeichnung an, welche die combinatorischen Entwickelungen unterstütze. Leibniz empfiehlt dazu die ihm seit 1693 geläufigen zweizifferig geschriebenen Coefficienten (S. 112) Mit ihrer Hilfe vollzieht er die Multiplication von Reihen von der Gestalt

$$10 + 11\nu + 12\nu^2 + \cdots, \quad 20 + 21\nu + 22\nu^2 + \cdots,$$
$$30 + 31\nu + 32\nu^2 + \cdots \text{ u. s. w.},$$

wo die erste Ziffer jedes Coefficienten angiebt, welcher Reihe er angehört, die zweite Ziffer, welcher Potenz von ν er als Coefficient dient. Im Producte besteht der Coefficient jedes Gliedes aus einer Summe, deren einzelne Glieder selbst wieder Producte je eines Coefficienten aus jeder Reihe sind, deren Auswahl nach dem Gesetze stattfindet, dass die zweiten Coefficientenziffern der Factoren die gleiche Summe liefern, nämlich den Exponenten derjenigen Potenz von ν, mit der man es gerade zu thun hat. Es kommt also auf die Zerfällung dieses Exponenten in Theile an, wofür Leibniz den Kunstausdruck *divulsiones* gebraucht[2]). Leibniz kennt also hier diejenigen Bildungen, welche man später Variationen zu bestimmten Summen genannt hat. Er bezeichnet das auftretende Gesetz als Homogeneität, welche formal und virtual auftrete[3]), formal insofern jedes Glied gleich viele Factoren besitze, virtual indem diese zu gleichem Grade sich erheben.

Wie die Multiplikation von Reihen vollzieht Leibniz auch deren

[1]) Leibniz VII, 159: *Reperietur nihil aliud esse Calculum circa magnitudines Analyticum, quam exercitium artis Combinatoriae.* [2]) Ebenda VII, 165. [3]) Ebenda VII, 168: *lex homogeneorum tum formalis ...., tum virtualis.*

Division. Bei ihr ordnet er nur Dividend, Divisor und Quotient nicht nach steigenden, sondern nach fallenden Potenzen der allgemeinen Grösse. Er vervielfacht sodann Divisor und Quotient, deren Product mit dem Dividenden in Uebereinstimmung gebracht, die Coefficienten des Quotienten der Reihe nach ermitteln lässt.

Leibniz geht weiter zur Potenzirung, zum polynomischen Lehrsatze über[1]). Darüber schrieb aber Leibniz 1695 an Johann Bernoulli (S. 86), der Aufsatz gehört also frühestens eben diesem Jahre an.

Im weiteren Verlaufe kommt eine Benennung vor, welche in ähnlichem, wenn auch nicht vollständig übereinstimmendem Sinne sich später Bürgerrecht erworben hat, die Benennung Form. Leibniz versteht darunter die Summe gleichgebildeter Ausdrücke[2]) und bezeichnet sie durch ein einzelnes Glied, unter welchem zwei Pünktchen stehen. So bedeutet ihm

$$\underset{\cdot\cdot}{a} = a + b + c + \cdots,\quad \underset{\cdot\cdot}{a}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \cdots,$$
$$a\underset{\cdot\cdot}{b} = ab + ac + bc + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Mit Hilfe dieser Formen lässt der polynomische Lehrsatz sich viel kürzer schreiben. Beispielsweise ist[3]):

$$(a + b + c + d)^4 = \underset{\cdot\cdot}{a}^4 + 4\underset{\cdot\cdot}{a}^3b + 6\underset{\cdot\cdot}{a}^2b^2 + 12\underset{\cdot\cdot}{a}^2bc + 24ab\underset{\cdot\cdot}{c}d.$$

Die dabei auftretenden Zahlencoefficienten: 4, 6, 12, 24, die man uns gestatten möge Polynomialcoefficienten zu nennen, sind die Permutationszahlen so vieler Elemente, als die Potenz, auf welche das Polynomium erhoben werden soll, aussagt, unter der Annahme, dass je so viele Elemente unter einander gleich seien, als aus den Exponenten des die Form vertretenden Gliedes zu ersehen ist. Während Leibniz, wie wir uns erinnern (S. 44), im Jahre 1691 über diese Permutationszahlen noch im Unklaren war, hatte er inzwischen ihre richtige Auffindung erkannt.

Wieder zwei Seiten später ist von dem sogenannten Exponentialcalcül[4]) die Rede. Der Aufsatz von Johann Bernoulli, in welchem diese Benennung veröffentlicht wurde, kam aber 1697 heraus (S. 232), und daher unsere Vermutung von der späteren Entstehung der *Nova Algebrae promotio*. Auf den Exponentialcalcül kommt Leibniz durch einen so merkwürdigen Gedankengang zu reden, dass wir darauf näher

[1]) Leibniz VII, 174: *Cum olim considerarem, binomii a + b potestates jam haberi per numeros combinatorios, cogitavi, quomodo res ad trinomia, quadrinomia etc., denique generaliter ad polynomia quaecunque produci posset.* [2]) Ebenda VII, 178: *Formam voco hoc loco summam omnium membrorum ex aliquot literis similiter formatorum.* [3]) Ebenda VII, 179. [4]) Ebenda VII, 181: *Calculus quem exponentialem appelavi.*

eingehen müssen. Die von uns Polynomialcoefficienten genannten Zahlen sind ganze Zahlen. Sie können, sagt Leibniz[1]), gegen den Exponenten der Potenz, auf welche das Polynom erhoben werden soll, nicht theilerfremd sein und müssen, wenn jener Exponent eine Primzahl ist, durch ihn selbst theilbar sein. Einen Beweis seiner Behauptung fügt Leibniz nicht bei, allein dass

$$\frac{1.2\ldots e}{1.2\ldots f_1 . 1.2\ldots f_2 \ldots 1.2\ldots f_k},\ \text{wenn } e \geqq f_1 + f_2 + \cdots + f_k,$$

durch e, sofern es Primzahl ist, theilbar sein muss, weil e in keinem der den Nenner bildenden Theilproducte vorkommt, ist klar. Der andere Theil des Beweises, dass die Theilbarkeit durch e aufhören kann, falls e keine Primzahl ist, müsste allerdings geliefert werden. Vielleicht entnahm Leibniz die Thatsache dem Zahlenbeispiele $e = 4$. Dort kam neben den immer noch durch 4 theilbaren Polynomialcoefficienten 4, 12, 24 auch der Polynomialcoefficient 6 vor, der zwar durch 4 nicht theilbar, aber doch zu 4 nicht theilerfremd war. Nun werde $a + b + c + \cdots = x$ gesetzt. Die Grösse x^e besteht unter Anwendung des Zeichens für die Formen aus $\underset{\cdot\cdot}{a}^e$ und zahlreichen anderen Gliedern, von denen ein jedes einen Polynomialcoefficient als Factor enthält, und $x^e - \underset{\cdot\cdot}{a}^e$ besteht nur aus mit Polynomialcoefficienten behafteten Gliedern, deren jedes einzelne, sofern e eine Primzahl ist, durch e theilbar erscheint. Das Gleiche gilt für die Summe der Glieder, d. h. $x^e - \underset{\cdot\cdot}{a}^e$ ist nicht theilerfremd gegen e und, bei e als Primzahl, durch e theilbar. Wählt man $a = b = c = \cdots = 1$, so ist $a^e = 1$, $\underset{\cdot\cdot}{a}^e = x$, und $x^e - x$ besitzt immer mit e einen Gemeintheiler, ist, sofern e Primzahl ist, durch e theilbar. Dieser zahlentheoretische Satz ist kein anderer als der bekannte Fermat'sche Lehrsatz mit dem ersten bekannt gewordenen Beweise[2]). Leibniz scheint, als er die Nova Algebrae promotio niederschrieb, nichts davon gewusst zu haben, dass Fermat ihm den Satz vorweggenommen hatte (Bd. II, S. 777), wenigstens thut er sich auf denselben zu gut, als auf einen Satz, der etwas enthalte, was den Analytikern bisher unbekannt gewesen sei, eine allgemeine Primzahlenformel[3]).

Wir bezogen uns (S. 329) auf eine verwandte Veröffentlichung Leibnizens aus dem Jahre 1700. Wir meinten den Aufsatz in den A. E., der gegen Fatios Angriffe gerichtet war. Wir haben (S. 290) über diese Abwehr berichtet. Aber Leibniz wollte nicht ausschliess-

[1]) Leibniz VII, 180. [2]) G. Vacca, *Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat* in der *Bibliotheca mathematica* 1894, pag. 46—48. [3]) Leibniz VII, 180: *Hinc tandem duci potest aliquid hactenus Analyticis incognitum, aequatio nempe generalis pro Numero primitivo.*

lich Persönliches dem Drucke übergeben, er fügte einen Satz bei[1]), welcher die Erweiterung eines De Moivre'schen Satzes sei. De Moivre hatte (S. 87) im XX. Bande der P. T. die Aufgabe gelöst, die Coefficienten $A, B, C \ldots$ der Entwicklung $z = Ay + By^2 + Cy^3 + \cdots$ zu finden, wenn als Ausgangspunkt der Untersuchung die Gleichung gegeben war:

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \cdots = gy + hy^2 + iy^3 + ky^4 + \cdots.$$

Leibniz nahm zum Ausgangspunkt die viel allgemeinere Gleichung

$$0 = (01y + 02y^2 + 03y^3 + \cdots) + (-10 + 11y + 12y^2 + 13y^3 + \cdots)z^1 \\ + (20 + 21y + 22y^2 + 23y^3 + \cdots)z^2 + \cdots,$$

welche durch das Verschwinden aller von 01, 02, 03, ... 10, 20 ... verschiedenen Coefficienten in die De Moivresche Anfangsgleichung übergeht. Das gesuchte Ergebniss schrieb Leibniz, indem er dabei dreiziffrige Coefficienten benutzte,

$$z = 101y + 102y^2 + 103y^3 + 104y^4 + 105y^5 + \cdots.$$

Selbstverständlich sind die zwei- und dreiziffrig geschriebenen Coefficienten nur symbolisch zu lesen, ohne aus ihrem Aussehen irgend einen Rückschluss auf ihren Zahlenwerth zu gestatten. Setzt man den angenommenen Werth von z in die den Ausgangspunkt bildende Gleichung ein und ordnet die so entstehenden Glieder nach y, wobei auftretende wirkliche Zahlen, z. B. die Zahl zwei eingeklammert als (2) erscheinen, um sie von den nur symbolischen Zahlen zu unterscheiden, so erhält man:

$$0 = [01 - 10 . 101]\,y + [02 + 11 . 101 + 20 . 101^2 - 10 . 102]\,y^2 \\ + [03 + 11 . 102 + 12 . 101 + (2)\,20 . 101 . 102 + 21 . 101^2 \\ + 30 . 101^3 - 10 . 103]\,y^3 + \cdots.$$

Zur Erfüllung dieser Gleichung werden die mit y, mit y^2, mit $y^3 \ldots$ vervielfachten Ausdrücke gleich Null gesetzt, und so gelangt man zu den von Leibniz ohne Erörterung der Ableitungsart gegebenen Formeln, welche 101, 102, 103, 104 als Ergebnisse der Division mit 10 in 01, in $02 + 11 . 101 + 20 . 101^2$, in

$$03 + 11 . 102 + 12 . 101 + (2)20 . 101 . 102 + 21 . 101^2 + 30 . 101^3,$$

in $$04 + 11 . 103 + 12 . 102 + 13 . 101 + 20 . 102^2 + (2)20 . 101 . 103 \\ + (2)21 . 101 . 102 + 22 . 101^2 + (3)\,30 . 101^2 . 102 + 31 . 101^3 \\ + 40 . 101^4$$

liefern. Leibniz nennt in der Anweisung zur Bildung dieser und der folgenden Coefficienten die zweiziffrig geschriebenen Symbole Minuskeln, die dreiziffrig geschriebenen Majuskeln, die eingeklammerten Zahlen wahre Zahlen. Letztere sind immer die Permutationszahlen der in den betreffenden Gliedern vorkommenden Majuskeln, jede als ein Element betrachtet, welches in der gebildeten Permutation einoder mehreremal vorkommen kann. So entsteht also (1) bei 102^2, (2) bei 101 . 103, (3) bei $101^2 . 102$ u. s. w., wovon das am häufigsten auftretende (1) selbstverständlich nicht geschrieben zu werden braucht. Die Glieder werden alsdann nach folgendem combinatorischen Gesetze gebildet: In jedem Einzelgliede darf nur eine Minuskel vorkommen, Majuskeln dagegen so viele als die linke Randziffer der Minuskel vorschreibt; so ist 04 mit 0 Majuskel, 13 mit 1 Majuskel, 30 mit 3 Majuskeln multiplicativ verbunden[1]). Die rechten Randziffern der Minuskel und der Majuskeln in jedem Gliede müssen die gleiche Summe liefern, nämlich die der rechten Randziffer der jedesmal gesuchten Majuskel; bei gesuchtem 104 ist die Summe 4, wie an jedem Gliede der oben stehenden Entwickelung bewahrheitet werden kann. Als Divisor erscheint ein für alle Mal die Minuskel 10.

[1]) Leibniz V, 348—349.

Der Fortschritt, welcher in dieser durch Leibniz gegebenen Vorschrift enthalten ist, beruht wesentlich auf seiner Bezeichnung, und er war sich dessen so sehr bewusst, dass er in gesperrter Schrift den Satz hervortreten liess[2]), die Sachkundigen würden einsehen, welcher Fortschritt der Analysis in dieser Bezeichnung durch Zahlen an Stelle der Buchstaben bei gleichbleibender Willkürlichkeit und Allgemeinheit der Annahme enthalten sei.

Leibniz hat mit dieser Erfindung die combinatorische Analysis ins Leben gerufen, eine neue Abtheilung in dem grossen Gebiete der Analysis, welche etwa 80 Jahre später wieder in Deutschland eine eigene combinatorische Schule in der Mathematik entstehen liess, der es freilich an einem Leibniz gefehlt hat, um die Hoffnungen zu erfüllen, welche an ihr Auftreten sich knüpften.

Es ist gewiss kein Zufall, dass Leibniz gerade den Aufsatz gegen Fatio für diese Veröffentlichung benutzte. Fatio hatte es Leibniz zum Vorwurfe gemacht, den Verdiensten, welche De Moivre sich erworben habe, nicht gerecht geworden zu sein, und Leibniz wollte nun zeigen, wie weit er über Jenen hinausgehe. Aber wir müssten uns

[1]) *Membra lege combinationis sequenti formata .... Notae ultimae numerorum supposititiorum membri cujusque formanto eandem summam, aequalem notae ultimae majusculi, cujus membra ingrediuntur valorem, et in membro quolibet minusculus non esto nisi unicus, majusculi autem tot, quot nota prior in minusculo habet unitates.* [2]) *Videbunt autem intelligentes novam Analyticae promotionem in hac nostra designatione per Numeros loco literarum, qui adeo fictitii seu supposititii sunt, contineri.*

täuschen, wenn sich bei Leibniz mit dieser Absicht nicht noch eine andere verbunden hätte. Leibniz hat (S. 217) im October 1690 sein Differentialzeichen gegen Huygens vertheidigen müssen, deutlich machen müssen, dass die Bezeichnung in der Mathematik keineswegs nebensächlich sei. Er wusste von den engen Beziehungen zwischen Fatio und Huygens. Es war ihm nur erwünscht, an einem der Differentialrechnung nicht angehörenden Beispiele zeigen zu können, was aus einer zweckmässig gewählten Bezeichnung sich alles folgern lässt. Er hat es gezeigt, und nicht bloss den englischen Zeitgenossen, denen, Newton mit eingeschlossen, das richtige Verständniss für die Wichtigkeit der Form durchweg abging.

Zu den Anwendungen der Combinatorik, welche einen ganz besonderen Reiz auszuüben vermögen, gehört die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Haben wir im 84. Kapitel Bearbeitungen desjenigen Theiles ihres Gebietes kennen gelernt, der mit dem Leben der Menschen, ihren Geburten und Todesfällen in Zusammenhange steht, so kehrte man jetzt zunächst zu den Aufgaben zurück, welche, wie wir aus dem 75. Kapitel wissen, jene Rechnung hatten entstehen lassen.

Ganz vergessen waren die Untersuchungen über Glücksspiele nie. Im Journal des Sçavans von 1679 hatte Josef Sauveur[1]) (1653 bis 1716) sich mit den damals häufigsten Glückspielen beschäftigt, aber seine Rechnungen waren vielfach mit Irrthümern behaftet, und deshalb durften wir sie im 84. Kapitel mit Stillschweigen übergehen. Von viel grösserem Werth war eine 1708 gedruckte besondere Schrift *Essai d'analyse sur les jeux de Hazard*, welche ohne Namen eines Verfassers erschien, aber von Pierre Rémond de Montmort (1678 bis 1719) herrührt. Dieser Schriftsteller[2]), dessen Name uns wiederholt begegnet ist, war eine Zeit lang Domherr zu Nôtre Dame in Paris, gab aber diese Stellung, welche er eigentlich nur angenommen hatte, weil sein Bruder ihrer überdrüssig war, deren Pflichten er aber dann mit gewissenhafter Strenge erfüllte, wieder auf, um sich zu verheirathen. Er zog nach einer Besitzung Monmort, von welcher er den Beinamen annahm, unter welchem er viel bekannter ist, als unter dem wirklichen Familiennamen Rémond. Er arbeitete längere Zeit mit François Nicole zusammen. Ein anderer Mitarbeiter war Niclaus I. Bernoulli, welcher 1713 drei Monate auf dem Gute Montwort verweilte[3]). Diese gemeinsam verbrachte Arbeitszeit und ein vorausgegangener Briefwechsel beeinflussten wesentlich die zweite

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences* 1716, pag. 82. [2]) Ebenda 1719, pag. 83—93. [3]) Niclaus Bernoulli schrieb unter dem 7. April 1713 an Leibniz (Leibniz III, 982), er komme gerade von Montmort nach Paris zurück.

Auflage des De Montmortschen Essai d'analyse, auf welche wir noch zurückkommen. Der ersten Ausgabe entnehmen wir nur wenige der Vorrede angehörende Bemerkungen. Die Vergangenheit, heisst es dort auf S. VI, entscheidet nichts für die Zukunft. Zufall, heisst es weiter auf S. XIV, nennen wir den Eintritt einer Thatsache aus uns unbekannten Gründen. Der Verfasser kennt an Vorarbeiten die Schrift Pascals über das arithmetische Dreieck, welche bei dessen Tod 1662 gedruckt aufgefunden worden ist, er kennt Pascals Briefwechsel mit Fermat aus des letzteren Varia Opera von 1679, er kennt auch Van Schootens Ausgabe der Schrift De ratiociniis in ludo aleae von Huygens aus dem Jahre 1657.

Niclaus I. Bernoulli (1687—1759), der Neffe von Jakob und Johann Bernoulli (S. 89), war gleichzeitig Jurist und Mathematiker. Er begann 1709 seine Thätigkeit mit einer beiden Wissensgebieten gleichermassen dienenden Schrift, den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Rechtsfragen *Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Iuris applicatae.* Einen Auszug davon hat er selbst in dem IV. Supplementbande der A. E.[1]) zum Abdrucke gebracht, wie die fortwährende Redeweise in erster Person ausser Zweifel setzt. Wenn daher eine handschriftliche Randnote Christian Wolf als Verfasser des Berichtes nennt, so ist dies irrig. Wenn der Richter, heisst es in dem Auszuge[2]), einen Abwesenden ausschliesslich nach Maassgabe der verflossenen Zeit für todt erklären darf, so halte ich seinen Tod für hinreichend wahrscheinlich, wenn sein Todtsein doppelt so wahrscheinlich ist als sein Leben, denn alsdann überschreitet die Wahrscheinlichkeit die Hälfte der Gewissheit um ein Beachtenswerthes, nämlich um den sechsten Theil der Gewissheit. Jenes ist aber doppelt so wahrscheinlich, wenn so viele Jahre verflossen sind, dass von einer Anzahl mit dem Abwesenden gleichaltrigen Menschen die Zahl der innerhalb jener Jahre Verstorbenen das Doppelte der Zahl der Ueberlebenden ausmacht. Es wirkt einigermassen erheiternd, dass diese Vorschrift nachmals, im Jahre 1744, gegen Niclaus I. Bernoulli selbst angewandt wurde[3]). Damals verlangten einige Baseler, unter denen just unser Bernoulli sich befand, dass das Vermögen der verstorbenen Tochter eines seit 23 Jahren unbekannt wo abwesenden Verganteten diesem, und damit ihnen als Gläubigern zugesprochen werde. Der Bruder der Verstorbenen beanspruchte dagegen das Vermögen derselben für sich, da der Vater sehr wahrscheinlich längst nicht mehr lebe. Er berief sich dabei auf die von Niclaus I. Bernoulli auf-

[1]) A. E. Supplem. IV, 159—170. [2]) Ebenda 162. [3]) Rudolf Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz I, 160 Note 50.

gestellten Grundsätze, denen gemäss nur noch 4 Jahre fehlten, um den Vater als todt zu erklären. Das Gericht entschied hierauf, der Bruder habe vorläufig gegen Sicherstellung die Erbschaft anzutreten und so lange zu behalten, bis die Gläubiger beweisen könnten, dass die Tochter wirklich vor dem Vater gestorben sei.

Andere Fragen, mit welchen sich Niclaus I. Bernoulli in seiner Abhandlung von 1709 beschäftigte, waren folgende: Die Aufsuchung des Werthes einer lebenslänglichen Rente, einer Ausstattungsversicherung, wie sie in Italien vorkomme[1]), einer Schiffsversicherung. Ausführlicher ist das Genueser Spiel behandelt, welches darauf beruhte, dass unter 100 Senatoren 5 Jahresbeamte nach dem Loose gewählt wurden, und festsetzte, dass wenn die Loosziehung mit einer von einem Spieler zum voraus aufgestellten Fünfmännerliste in einem oder mehreren Namen übereinstimmte, derselbe gewisse Vielfache seines Einsatzes erhalten sollte, ein Spiel, welches von dem Rathsherrn Benedetto Gentile erfunden wurde. Daraus wurde dann 1620 unter Ersetzung der Zahl 100 durch 90 das Zahlenlotto[2]). Endlich ist auch die Frage nach der Schuld oder Unschuld eines Angeklagten in Rechnung gebracht. Durch ein Schuldzeugniss lässt der Verfasser die Wahrscheinlichkeit der Unschuld des Angeklagten sich auf $\frac{2}{3}$ herabmindern. Jedes neue Schuldzeugniss fordert eine abermalige Herabminderung auf $\frac{2}{3}$. Bei 10 Zeugnissen ist folglich die Wahrscheinlichkeit der Unschuld des Angeklagten nur noch

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59049} = 0{,}017341 \cdots = \frac{1}{58}$$

oder so gering, dass seine Schuld moralisch beinahe sicher ist[3]).

Aus dem nachfolgenden Jahre 1710 haben wir eine englische Arbeit zu nennen. Arbuthnot schrieb, wie wir schon wissen (S. 306), über das Geschlechtsverhältniss bei den Geburten[4]), ein Gegenstand dem John Graunt 1662 zuerst Beachtung geschenkt hatte. Arbuthnot fand in Bestätigung von Graunts Beobachtungen, dass nach den Londoner Taufregistern, welche er für die Jahre 1629—1710 benutzte, jedes Jahr mehr männliche als weibliche Geburten auftraten, wenn er auch eine Verhältnisszahl nicht ausrechnete. Er sah darin einen

[1]) *Illa scilicet conventio, Italis hodiernum usitata, qua Pater cui recens nata est filia cum alio ita contrahit, ut ille pretio statim accepto ejus quadruplum vel quintuplum (quod deinde filiae in dotem cedit) restituat, si contigerit, filiam pervenire ad aetatem nubilem puta 16 annorum.* [2]) O. Warschauer, Die Zahlenlotterie in Preussen (Leipzig 1885) S. 6—7. [3]) *quae tam exigua est, ut moraliter fere certum sit, crimen esse commissum.* [4]) P. T. XXVII, 186—190.

Beweis der göttlichen Vorsicht[1]), welche durch diesen Ueberschuss die grösseren Gefahren, unter welchen der Mann den Unterhalt zu erwerben hat, im voraus wieder gut macht. Er sah aber ferner darin einen Grund gegen die Vielweiberei, welche den Gesetzen der Natur und der Gerechtigkeit zuwiderlaufe, denn die Mehrzahl der Männer gegen die Frauen würde noch mehr Männer zur Ehelosigkeit zwingen, wenn Einer mehr als nur eine Frau für sich in Anspruch nähme. Arbuthnot scheint schon früher (1692) die kleine Schrift von Huygens ins Englische übersetzt und mit Zusätzen von geringem Werthe versehen zu haben[2]).

Wieder ein Jahr später (1711) folgte die hervorragende Abhandlung von Abraham De Moivre über das Maass des Zufalls, *De mensura sortis*[3]). In einer an Francis Robartes, nachmaligem Earl of Radnor, gerichteten Widmung bedauert De Moivre, dass dieser Gönner der mathematischen Wissenschaften[4]) durch Staatsgeschäfte verhindert sei fortzusetzen, was er zu seinem Vergnügen begonnen habe, und dadurch bestätigt sich, was wir (S. 307) schon zu verstehen gaben, dass Robartes nur sehr nebensächlich als Mathematiker gelten kann. Eine gegentheilige Meinung wird man auch dann kaum mit Erfolg vertheidigen können, wenn Robartes die gleiche Persönlichkeit ist[5]), welche 1693 einen kleinen Aufsatz über Lotterien veröffentlicht hatte[6]), dort aber Francis Roberts genannt ist. In De Moivres Widmung an Robartes ist ferner von einem neueren französischen Schriftsteller die Rede, welcher die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung an verschiedenen Beispielen hübsch klar zu legen wusste[7]), wenn er auch eine eigentliche Methode vermissen lasse. Natürlich ist De Montmort gemeint. Die Lehre von den Combinationen sei das vorzugsweise anzuwendende Hilfsmittel: dass im Jahre 1711 Leibniz, der Schriftsteller, welcher jene Lehre hauptsächlich begründet hatte, in England nicht erwähnt wird, versteht sich von selbst.

Gewissermassen als Einleitung in die Abhandlung dient folgender Satz. Tritt ein Ereigniss in p Fällen ein, in q Fällen nicht ein, tritt ein zweites von dem ersten durchaus unabhängiges Ereigniss in r Fällen ein, in s Fällen nicht ein, vervielfacht man

$$(p+q)(r+s) = pr + qr + ps + qs,$$

so verhalten sich die einzelnen für beide Ereignisse gemeinschaftlichen

[1]) *an Argument for Divine Providence.* [2]) Todhunter, *History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace* pag. 48—53. [3]) P. T. XXVII, 213—264. [4]) *Mathematicarum scientiarum fautor.* [5]) Todhunter l. c. pag. 53—54 und 137. [6]) P. T. XVII. [7]) *quas nuperrimus autor Gallus variis exemplis pulchre illustravit.*

Möglichkeiten des Eintretens oder Nichteintretens wie die Glieder der angegebenen Entwicklung, eine Behauptung, in welcher man Halleys Einfluss (S. 52) nicht verkennen wird. In dem besonderen Falle, dass das Eintreffen der Ereignisse, welche nicht bloss 2 sondern n an der Zahl sein dürfen, stets in a Fällen, das Nichteintreffen stets in b Fällen stattfindet, geht das Product der Summen sich ausschliessender Fälle in die Potenz $(a+b)^n$ über, deren Glieder eine ähnlich zu erläuternde Bedeutung besitzen, wie vorher die Glieder des Productes aus von einander verschiedenen Factoren.

Man kann getrost den ganzen weiteren Inhalt der Abhandlung als Anwendung dieses einen Satzes kennzeichnen, die sich nur entsprechend den Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe bald einfacher, bald weniger einfach gestaltet. Die ganze Abhandlung gewinnt dadurch ein einheitliches Gepräge, welches ihren Werth erhöht. Die Bedingungen, von welchen wir reden, sind theils solche, die ausschliesslich dem Bereiche des Zufalls angehören, theils solche, bei denen die Geschicklichkeit des Spielers den Ausschlag giebt, soweit sich diese in Zahlen ausdrücken lässt. Wir geben als Probe einige wenige Beispiele.

Das erste Beispiel[1]) der Abhandlung lässt A mit B würfeln, und zwar mit einem gewöhnlichen auf seinen Flächen mit 1 bis 6 bezeichneten Würfel. A soll gewonnen haben, wenn er in 8 Würfen mindestens zweimal 1 Auge wirft. Weil 1 Fläche mit Eins, 5 Flächen mit Nichteins bezeichnet sind und 8 Würfe vorgeschrieben sind, ist hier $a=1$, $b=5$, $n=8$. Bei der Entwicklung von $(1+5)^8$ sind die Glieder, welche in allgemeinen Buchstaben b^n und nab^{n-1} heissen, dem Spieler B günstig, alle anderen lassen A gewinnen. Die Wahrscheinlichkeiten für A und B verhalten sich also wie

$$((a+b)^n - b^n - nab^{n-1}) : (b^n + nab^{n-1}),$$

d. h. wie

$$(6^8 - 5^8 - 8 . 5^7) : (5^8 + 8 . 5^7) = 663991 : 1015625,$$

oder ungefähr wir $2:3$.

Die vierte Aufgabe[2]) nimmt an, A sei so viel geschickter als B, dass er ihm auf 3 Spiele eines vorgeben kann, man wünscht ihre Geschicklichkeit in einem Zahlenverhältnisse $z:1$ ausgedrückt. Hier ist $a=z$, $b=1$, $n=4$. Diese letztere Zahl bestimmt sich dadurch, dass in Folge der Vorgabe A drei, B zwei Spiele gewinnen muss, um die Entscheidung herbeizuführen. Diese ist also jedenfalls nach $3+2-1=4$ Spielen vorhanden. Von den Gliedern der Entwick-

[1]) P. T. XXVII, 216—217. [2]) Ebenda 218—219.

lung $(z+1)^4$ sind z^4+4z^3 die für A günstigen, $6z^2+4z+1$ die für B günstigen. Nach der Vorgabe sollen aber die Aussichten beider Spieler die gleichen sein, also ist $z^4+4z^3=6z^2+4z+1$ zu setzen, woraus ungefähr $z=1{,}6$ folgt. Die Geschicklichkeiten verhalten sich demnach wie $1{,}6:1=8:5$.

In der fünften Aufgabe[1]) wird nach der Zahl x der Versuche gefragt, welche das Eingetroffensein und Nichteingetroffensein eines Ereignisses gleich wahrscheinlich machen, wenn a und b die Verhältnisszahlen bei einmaligem Versuche sind. Von der Entwicklung von $(a+b)^x$ stellt nur das Glied b^x die Fälle dar, in welchen das Ereigniss nie eintrat, alle übrigen Glieder $(a+b)^x-b^x$ setzen ein mindestens einmaliges Eintreffen voraus. Eingetroffensein und Nichteingetroffensein sollen aber gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, also muss sein $(a+b)^x-b^x=b^x$, $\left(\frac{a+b}{b}\right)^x=\left(1+\frac{a}{b}\right)^x=2$. Gesetzt es sei $\frac{b}{a}=q$, so ist

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^x=\left(1+\frac{1}{q}\right)^x=1+\frac{x}{q}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2q^2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3q^3}+\cdots=2$$

und man erkennt, dass dem $q=1$ auch $x=1$ entspricht, dem $q=\infty$ auch $x=\infty$. In letzterem Falle setze man $\frac{x}{q}=z$, so geht die letzterhaltene Reihe in $1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots$ über. Aber das ist die Zahl, deren natürlicher Logarithmus z ist[2]), und da 2 den Zahlenwerth der Reihe darstellt, so ist 2 die Zahl, deren natürlicher Logarithmus z ist, d. h. $z=\log 2$, und das ist nahezu 0,7. Da nun $z=\frac{x}{q}$ war, so ist $x=qz$. Nun hat man ermittelt, dass bei $q=1$, $x=1q$, bei $q=\infty$, $x=0{,}7q$ ist. Bei irgend sonstigem Werthe von q liegt folglich $\frac{x}{q}$ zwischen 1 und 0,7.

Wir gehen zu dem Jahre 1713 über, in welchem Niclaus I. Bernoulli die *Ars Conjectandi*, Muthmassungskunst, d. h. Wahrscheinlichkeitsrechnung seines 1705 verstorbenen Oheims Jakob Bernoulli herausgab (S. 221). Jakob Bernoulli hatte sich diesen Betrachtungen nach 1679[3]), aber mindestens 20 Jahre vor seinem Tode, also spätestens 1685[4]) zugewandt, und dennoch hinterliess er das Werk unvollendet. Die Verleger hatten erst Johann Bernoulli, dann Niclaus I. Bernoulli

[1]) P. T. XXVII, 219. [2]) *est numerus cujus Logarithmus Hyperbolicus est z.* [3]) *Ars Conjectandi* pag. 29: *referente Pascalio in literis ad Fermatium quae huius operibus Tolosae A°. 1679 impressis insertae leguntur.* [4]) Ebenda pag. 227: *postquam jam per vicennium pressi.*

angegangen, das an dem Werke noch Fehlende fertig zu stellen. Beide lehnten unter verschiedenen Vorwänden ab. Niclaus I. Bernoulli begnügte sich damit, das Druckfertige der Presse zu übergeben und in der Vorrede den Verfasser des *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, d. i. De Montmort und neben ihm De Moivre, welche beide vor noch nicht so langer Zeit auf dem gleichen Gebiete mit Auszeichnung thätig gewesen seien, öffentlich aufzufordern, im Sinne des Verstorbenen an dem von ihm Begonnenen weiter zu arbeiten. Die *Ars Conjectandi*, zu deren Schilderung wir übergehen, besteht aus vier Abschnitten.

Der I. Abschnitt enthält die Abhandlung von Huygens über das Würfelspiel[1]), von welcher in unserem 75. Kapitel (Bd. II, S. 759 bis 760) die Rede war, und Anmerkungen zu derselben. In diesen findet sich z. B. ein Beweis[2]) für den von Huygens beweislos ausgesprochenen Satz, dass es gleichbedeutend sei, ob man 1 Wurf mit n Würfeln oder n Würfe mit 1 Würfel betrachte. Darf Einer einmal mit n Würfeln werfen, so kann es doch nicht darauf ankommen, ob die Würfel gleichzeitig oder nach einander auf den Tisch rollen. Im letzteren Falle kann es aber wieder keinen Unterschied machen, ob es n verschiedene Würfel sind oder ob einer, der n mal nach einander benutzt wird. In zwei Anmerkungen[3]) sind wichtige Verallgemeinerungen vorgenommen, indem von Huygens mit bestimmten Zahlenwerthen gestellte Fragen in Buchstabenwerthen ihre Beantwortung finden, was natürlich einen ganz anderen Einblick in die Bildungsweise der Endzahlen der Untersuchung gewährt. Auch ein Anhang zum I. Abschnitte überholt bedeutend die erläuterte Schrift. Huygens hatte zum Schlusse fünf Aufgaben gestellt, zu deren 1., 3., 5. er ohne weitere Begründung die Zahlenauflösung beifügte, zur 2. und 4. nicht einmal diese. Jakob Bernoulli hat in dem genannten Anhange die 1., 2., 3., 5. Aufgabe behandelt[4]), für die 4. auf seinen III. Abschnitt verwiesen, wo sie denn auch gelöst wird[5]), ebenso wie die 3. Aufgabe dort eine abermalige Lösung findet[6]). Jakob Bernoulli zeigt, aus welchem Grunde Huygens der 2. Aufgabe keine Lösung beifügte. Sie lässt nämlich ihrem Wortlaute nach verschiedene Deutungen zu, deren jede naturgemäss zu anderen Zahlen führt, so dass in der einen Aufgabe mehrere verborgen liegen.

Der II. Abschnitt[7]) ist der Lehre von den Permutationen und Combinationen gewidmet. Der Name der Permutationen dürfte

[1]) *Ars Conjectanti* pag. 1—71. [2]) Ebenda pag. 37. [3]) Ebenda pag. 30 und 38, beidemal mit der Ueberschrift: *Ad propositionem in genere.* [4]) Ebenda pag. 49—57, 57—65, 66, 67—71. [5]) Ebenda pag. 145—146. [6]) Ebenda pag. 144—145. [7]) Ebenda pag. 72—137.

von Jakob Bernoulli erfunden sein, wenigstens sagt er[1]), er nenne Permutationen diejenigen Aenderungen, durch welche unter Beibehaltung der Anzahl der Dinge ihre Ordnung und Stellung verschiedentlich vertauscht wird, während bei den Combinationen der Wortlaut dahin geht[2]), sie seien Verbindungen von solcher Art, dass aus gegebenen Dingen welche abgesondert und mit einander vereinigt werden, ohne dass auf ihre Ordnung und Stellung irgend welche Rücksicht genommen werde. Jakob Bernoulli nennt als Vorgänger auf dem Gebiete der allen Wissenschaften gleich unentbehrlichen Combinationslehre: Schooten, Leibniz, Wallis, Prestet[3]), während er Pascals einschlagende Arbeiten, abgesehen von dem, was in den Briefen an Fermat stand, nicht gekannt zu haben scheint, trotzdem sie seit 1665 im Buchhandel waren (Bd. II, S. 749). Dieselbe Unkenntniss müssen wir auch auf die bei Pascals combinatorischen Arbeiten zuerst auftretende Methode der vollständigen Induction, d. h. des Beweisverfahrens von n auf $n+1$ ausdehnen. Jakob Bernoulli scheint demnach diese Methode, deren er sich in einem kleinen Aufsatze sehr einfachen, auf arithmetische Reihen bezüglichen Gegenstandes[4]) in den A. E. für September 1686 bedient hatte, die dann in der Ars Conjectandi wiederholt benutzt wird[5]) selbständig nacherfunden zu haben. Das Vorrecht Pascals kann dadurch nicht beeinträchtigt werden, aber es wird begreiflich, dass man lange Zeit Jakob Bernoulli für den Erfinder der Methode hielt und sie vielfach nach ihm benannte. Ging es doch mit des Methode der unbestimmten Coefficienten nicht viel anders, von welcher man durch die grosse Verbreitung der Descartes'schen Geometrie aller Orten Kenntniss haben musste, und von welcher Newton wie Leibniz bei den verschiedensten Gelegenheiten Gebrauch machten, ohne je den damals vermuthlich allgemein bekannten Urheber der Methode zu nennen, so dass spätere Schriftsteller bald Newton, bald Leibniz für den Erfinder hielten. Bei Betrachtung der Permutationen unterscheidet Jakob Bernoulli die zwei Möglichkeiten, dass alle Elemente verschieden[6]), oder dass sie zum Theil unter einander gleich[7]) sein sollen. Die Ableitung der Formel für die Permutationszahlen erfolgt, wenn alle Elemente verschieden sind, durch Betrachtung von 1, 2, 3 ... der Reihe nach

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 74: *Permutationes rerum voco Variationes, juxta quas servata eadem rerum multitudine ordo situsque inter ipsas diversimodo permutatur.* [2]) Ebenda pag. 82: *Combinationes rerum sunt Conjunctiones, juxta quas ex data rerum multitudine nonnullae eximuntur, interque se conjunguntur nullo ordinis situsve ipsarum respectu habito.* [3]) Ebenda pag. 73. [4]) Jak. Bernoulli, *Opera* I, 282—283. [5]) *Ars Conjectandi* pag. 92 und häufiger. [6]) Ebenda pag. 75. [7]) Ebenda pag. 77.

auftretenden Elementen. Von n Elementen kann jedes als erstes geschrieben werden, worauf ihm so viele Permutationsformen nachfolgen, als aus den anderen $n-1$ sich bilden lassen, die Permutationszahl für n Elemente ist also n mal so gross als die für $n-1$ Elemente. Mit einander übereinstimmende Elemente werden erst als verschieden gedacht, und ihr Gleichwerden findet nachträgliche Berücksichtigung. Bei den Combinationen muss der *Exponens*[1]), d. h. die Anzahl der in jeder Form enthaltenen Elemente oder die Klasse, zu welcher combinirt wird, beachtet werden. Er findet in den Wörtern *Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen* für Formen mit 1, 2, 3, 4 Elementen seinen Wiederklang, und sogar das Wort *Nullio* wird gebildet, um anzudeuten, dass man gar kein Element nehme. Auch bei den Combinationen wird die Verschiedenheit aller benutzten Elemente einen Hauptfall bilden, ihre theilweise Gleichheit einen zweiten. Die Elemente treten allmälig neu hinzu, werden aber dann mit den schon vorhandenen in jeder denkbaren Weise verbunden, d. h. die Combinationen von n Elementen zu allen Klassen von den Unionen bis zu den N-ionen (Formen von je n Elementen) werden gleichzeitig gebildet. Eine kleine diese Entstehung versinnlichende Tafel, deren Vorbild für Jakob Bernoulli in den *Exercitationes mathematicae* von Franciscus van Schooten (Bd. II, S. 758) gefunden sein dürfte[2]), ist folgende:

$$a$$
$$b\,.\,ab$$
$$c\,.\,ac\,.\,bc\,.\,abc$$
$$d\,.\,ad\,.\,bd\,.\,cd\,.\,abd\,.\,acd\,.\,bcd\,.\,abcd$$
$$e\,.\,ae\,.\,be\,.\,ce\,.\,de\,.\,abe\,.\,ace\,.\,bae\,.\,ade\,.\,bde\,.\,cde\,.\,abce\,.\,abde\,.\,acde\,.\,bcde\,.\,abcde.$$

In jeder Zeile steht eine Form mehr (die neu hinzutretende Union) als in sämmtlichen früheren Zeilen zusammen, mithin in der ersten Zeile 1, in der zweiten $1+1=2$, in der dritten $1+1+2=2^2$, in der vierten $1+1+2+2^2=2^3$, in der $n$ten

$$1+1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}=2^{n-1}$$

Formen. Alle Zeilen zusammen geben

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$

Formen[3]). Die Formen der einzelnen Zeilen klassenweise geordnet geben

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 82. [2]) Vergl. Franc. van Schooten, *Exercitationes mathematicae* pag. 373 mit *Ars Conjectandi* pag. 83. [3]) *Ars Conjectandi* pag. 84.

für die Unionen der Reihenfolge der Zeilen nach $1+1+1+1+1+\cdots$, für die Binionen $0+1+2+3+4+\cdots$, für die Ternionen $0+0+1+3+6+\cdots$ u. s. w., so dass die Uebereinstimmung mit den figurirten Zahlen zu Tage tritt[1]). Das ist aber ein Gegenstand, mit welchem schon die beiden Ulmer Mathematiker Faulhaber und Remmelin, mit welchem Wallis, Mercator, Prestet sich beschäftigt haben[2]). Werden die Zahlen

$$1+1+1+1+1+\cdots,\quad 0+1+1+1+1+\cdots,$$
$$0+0+1+3+6+\cdots$$

je in einer Columne unter einander, die Columne selbst neben einander geschrieben, so entsteht ein Zahlenrechteck[3])

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \ldots \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot,
\end{array}$$

in welchem die Stellen über der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonale durch Nullen eingenommen sind, nach deren Entfernung eine dreieckförmige Tafel der Binomialcoefficienten übrig bleibt, nicht übereinstimmend, aber doch nahe verwandt mit der seiner Zeit von Michael Stifel erfundenen Anordnung (Bd. II, S. 434), mit der von Tartaglia später benutzten Nachbildung (Bd. II, S. 522—524). Weder Stifel noch Tartaglia kommen aber unter den von Jakob Bernoulli erwähnten Vorgängern vor. Er dürfte beide Schriftsteller demnach nicht gekannt haben, ein ganz interessanter Beleg für die Raschheit, mit welcher mitunter auch ganz hervorragende Werke aus dem Gedächtnisse entschwinden. Die vorher von ihm genannten Mathematiker, fährt Bernoulli fort, hätten durch Induction Formeln für die figurirten Zahlen gefunden, Wallis auch die Summe von Potenzen der aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, aber von Beweisen sei nirgend die Rede gewesen. Wer allerdings glaubt, Bernoulli sei diesem seinem eigenen Vorwurfe nicht verfallen, er habe vielmehr jede Induction verschmäht, befindet sich im Irrthum. Bernoullis Gedankengang ist folgender[4]). Den Ausgangspunkt bildet ein Satz, der unter Anwendung des Zeichens $\overset{k}{C}_h$ für die Zahl der Combinationen ohne Wiederholung aus h Ele-

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 86. [2]) Ebenda pag. 95. [3]) Ebenda pag. 87. [4]) Ebenda pag. 96—98.

menten zur Klasse k, wodurch $\overset{k}{C}_h = 0$, so lange $h < k$, sich in der Formel $\overset{k}{C}_n = \overset{k-1}{C}_1 + \overset{k-1}{C}_2 + \cdots + \overset{k-1}{C}_{n-1}$ ausspricht, oder als

$$\frac{n(n-1)\ldots(n+1-k)}{1\,.\,2\ldots k} = \overset{h=n}{\underset{h=1}{S}} \frac{(h-1)(h-2)\ldots(h+1-k)}{1\,.\,2\ldots(k-1)}.$$

Bernoulli findet den Satz für $k = 2, 3, 4 \ldots$ richtig und dehnt ihn dann inductiv aus. Bei $k = 3$ ist demnach (sofern $\overset{h=n}{\underset{h=1}{S}} \frac{(h-1)(h-2)}{1\,.\,2}$ mit Jakob Bernoulli noch kürzer $S\,\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}$ geschrieben wird)

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = S\,\frac{(n-1)(n-2)}{2} = S\left(\frac{1}{2}\,n^2 - \frac{3}{2}\,n + 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,Sn^2 - \frac{3}{2}\,Sn + n.$$

Aber $Sn = \frac{n^2+n}{2}$, und setzt man diesen Werth in die Gleichung ein und löst sie dann nach Sn^2 auf, so findet sich

$$Sn^2 = 2\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + 3Sn - 2n = \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{6}\,n,$$

und diese Summe der Quadratzahlen lässt sich weiter als bekannt betrachten, zunächst bei $k = 4$. Die Annahme liefert

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = S\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3} = S\left(\frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{11\,n}{6} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{6}\,Sn^3 - Sn^2 + \frac{11}{6}\,Sn - n$$

und daraus $Sn^3 = \frac{1}{4}\,n^4 + \frac{1}{2}\,n^3 + \frac{1}{4}\,n^2$. Bernoulli hat die Rechnung, von welcher er behauptet, sie werde mit leichter Mühe[1]) vollzogen, bis zu $k = 11$, d. h. bis zur Darstellung der 10ten Potenzen durchgeführt. Ihr Ergebniss ist:

$$Sn = \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n$$
$$Sn^2 = \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{6}\,n$$
$$Sn^3 = \frac{1}{4}\,n^4 + \frac{1}{2}\,n^3 + \frac{1}{4}\,n^2$$
$$Sn^4 = \frac{1}{5}\,n^5 + \frac{1}{2}\,n^4 + \frac{1}{3}\,n^3 - \frac{1}{30}\,n$$
$$Sn^5 = \frac{1}{6}\,n^6 + \frac{1}{2}\,n^5 + \frac{5}{12}\,n^4 - \frac{1}{12}\,n^2$$

[1]) *levi negotio.*

$$Sn^6 = \frac{1}{7}\,n^7 + \frac{1}{2}\,n^6 + \frac{1}{2}\,n^5 - \frac{1}{6}\,n^3 + \frac{1}{42}\,n$$
$$Sn^7 = \frac{1}{8}\,n^8 + \frac{1}{2}\,n^7 + \frac{7}{12}\,n^6 - \frac{7}{24}\,n^4 + \frac{1}{12}\,n^2$$
$$Sn^8 = \frac{1}{9}\,n^9 + \frac{1}{2}\,n^8 + \frac{2}{3}\,n^7 - \frac{7}{15}\,n^5 + \frac{2}{9}\,n^3 - \frac{1}{30}\,n$$
$$Sn^9 = \frac{1}{10}\,n^{10} + \frac{1}{2}\,n^9 + \frac{3}{4}\,n^8 - \frac{7}{10}\,n^6 + \frac{1}{2}\,n^4 - \frac{1}{12}\,n^2$$
$$Sn^{10} = \frac{1}{11}\,n^{11} + \frac{1}{2}\,n^{10} + \frac{5}{6}\,n^9 - 1\,n^7 + 1\,n^5 - \frac{1}{2}\,n^3 + \frac{5}{66}\,n.$$

Wer aber, heisst es unmittelbar weiter, das Gesetz der Reihen genauer betrachtet, kann auch ohne die Umschweife der Rechnung die Tabelle fortsetzen. Ist c der ganzzahlige Exponent irgend einer Potenz, so wird

$$Sn^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}\,An^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\,.\,3\,.\,4}\,Bn^{c-3}$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\,Cn^{c-5} + \cdots.$$

Die Exponenten der Potenzen von n nehmen von $c-1$ anfangend regelmässig um je 2 ab, so dass das letzte Glied n^2 oder n wird, je nachdem c ungrad oder grad war. Die Buchstaben $A, B, C\ldots$ werden nach und nach bei der Bildung der Summen Sn^c mit gradem c gefunden. Es gehört also zusammen

$c = 2$ und $A = \frac{1}{2}$

$c = 4$ und $B = -\frac{1}{30}$

$c = 6$ und $C = \frac{1}{42}$

$c = 8$ und $D = -\frac{1}{30}$

$c = 10$ und $E = \frac{5}{66}$.

Diese grossen Buchstaben werden vermittelst ihrer grundlegenden Eigenschaft gefunden, dass sie die übrigen Coefficienten, welche bei Entwicklung der betreffenden Potenzsumme auftreten, zur Einheit ergänzen. Bei Sn^8 sind beispielsweise, wie aus der kleinen Tabelle entnommen werden kann, die Coefficienten der fünf ersten Glieder $\frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{15}, \frac{2}{9}$. Deren Summe $\frac{31}{30}$ wird durch D zur Einheit ergänzt, d. h. $\frac{31}{30} + D = 1$, $D = -\frac{1}{30}$. Wie Jakob Bernoulli zu diesen wichtigen Sätzen gekommen sein mag, welche geniale Induction ihn dazu führte, die Exponenten von $c-1$ an um je 2 abnehmen zu lassen und die auftretenden Coefficienten durch aus ihnen hervorgehobene Factoren so zuzustutzen, dass die Zahlen $A, B, C, D\ldots.$ immer wieder auftreten, hat man zu errathen wenigstens versucht[1]). Sei angenommen $Sn^c = x \cdot n^{c+1} + y \cdot n^c + z \cdot n^{c-1} + u \cdot n^{c-2} + \cdots$, wo $x, y, z, u\ldots$ vorläufig unbestimmte Coefficienten sind. Die Gleichung muss auch für $S(n+1)^c$ anwendbar sein und $S(n+1)^c = x \cdot (n+1)^{c+1} + y \cdot (n+1)^c + z \cdot (n+1)^{c-1} + u \cdot (n+1)^{c-2} + \cdots$ liefern. Die Binomialentwickelungen $(n+1)^{c+1}, (n+1)^c, (n+1)^{c-1}, (n+1)^{c-2}\ldots.$ sind aber bekannt, da c eine ganze positive Zahl ist, und können in die Formel für $S(n+1)^c$ eingesetzt werden. Erwägt man ferner, dass $(n+1)^c = S(n+1)^c - Sn^c$, so findet man einestheils

$$(n+1)^c = n^c + cn^{c-1} + \frac{c(c-1)}{1 \cdot 2} n^{c-2} + \cdots.$$

und anderntheils

$$\begin{aligned}(n+1)^c = x&\left[(c+1)n^c + \frac{(c+1)c}{1 \cdot 2} n^{c-1} + \frac{(c+1)c(c-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^{c-2} + \cdots\right] \\ &+ y\left[cn^{c-1} + \frac{c(c-1)}{1 \cdot 2} n^{c-2} + \cdots\right] \\ &+ z\left[(c-1)n^{c-2} + \cdots.\right] \\ &+ \cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Coefficientenvergleichung gleichhoher Potenzen von n liefert:

$$\begin{aligned} 1 &= x(c+1) \\ c &= x\frac{(c+1)c}{2} + yc \\ \frac{c(c-1)}{2} &= x\frac{(c+1)c(c-1)}{6} + y\frac{c(c-1)}{2} + z(c-1) \\ \frac{c(c-1)(c-2)}{6} &= x\frac{(c+1)c(c-1)(c-2)}{24} + y\frac{c(c-1)(c-2)}{6} \\ &\qquad + z\frac{(c-1)(c-2)}{2} + u(c-2). \end{aligned}$$

Daraus findet man aber der Reihe nach: $x = \frac{1}{c+1}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{c}{12}$, $u = 0$. Nachdem die ersten Coefficienten x, y, z und das Verschwinden von u ermittelt sind, kann neben $S(n+1)^c$ auch $S(n-1)^c$ angesetzt und die Differenz $(n+1)^c + n^c = S(n+1)^c - S(n-1)^c = x[(n+1)^{c+1} - (n-1)^{c+1}] + y[(n+1)^c - (n-1)^c] + z[(n+1)^{c-1} - (n-1)^{c-1}] + u[(n+1)^{c-2} - (n-1)^{c-2}] + \cdots$ ins Auge gefasst werden. Die Klammerausdrücke sind abwechselnd grade und ungrade Funktionen von n. Daher zerfällt die Gleichung in zwei,

[1]) Briefliche Mittheilung von H. Karl Schwering.

deren eine die Potenzen n^c, n^{c-2}, n^{c-4} u. s. w. enthält, die andere die übrigen. Sie heissen:

$$\begin{aligned} 2n^c + \frac{c(c-1)}{1 \cdot 2} n^{c-2} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} n^{c-4} + \cdots \\ = x[(n+1)^{c+1} - (n-1)^{c+1}] + z[(n+1)^{c-1} \\ - (n-1)^{c-1}] + v[(n+1)^{c-3} - (n-1)^{c-3}] + \cdots. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cn^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} n^{c-5} + \cdots \\ = y[(n+1)^c - (n-1)^c] + u[(n+1)^{c-2} - (n-1)^{c-2}] + \cdots. \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung ist die linke Seite $\frac{1}{2}[(n+1)^c - (n-1)^c]$, rechts steht $\left(\text{wegen } y = \frac{1}{2}\right)$ die Summe $\frac{1}{2}[(n+1)^c - (n-1)^c] + u[(n+1)^{c-2} - (n-1)^{c-2}] + \cdots$. Mithin müssen u und überhaupt die Coefficienten von $[(n+1)^{c-2\lambda} - (n-1)^{c-2\lambda}]$ verschwinden. Ob Bernoulli wirklich so schloss, bleibt natürlich ungewiss, doch scheinen die verwertheten Sätze alle von der Art zu sein, dass Jakob Bernoulli sich ihrer bedienen konnte.

Der letzte unter Bernoullis Sätzen ist leicht einzusehen. Ist nämlich $n = 1$, so besteht Sn^c nur aus dem einen Gliede $1^c = 1$, während rechts vom Gleichheitszeichen gleichfalls alle Potenzen von n durch Einheiten zu ersetzen sind, mithin die einzelnen Coefficienten durch den Schlusscoefficienten zur Einheit ergänzt werden müssen. Die Zahlen $A, B, C, D, \ldots$ haben bekanntlich später den Namen der Bernoullischen Zahlen erhalten. Eine Operation, auf welche Jakob Bernoulli ein berechtigt grosses Gewicht legt, ist die Bildung von Combinationen nebst deren Permutationen[1]). Er behandelt sie, beziehungsweise sucht die Anzahl ihrer Formen sowohl unter der Voraussetzung lauter von einander verschiedener, als auch wiederholt auftretender Elemente, und zwar sind in letzterem Falle sowohl Combinationen mit unbedingter als mit bedingter Wiederholbarkeit[2]) der Untersuchung unterworfen. Bei den Combinationen mit unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente erscheint der polynomische Lehrsatz[3]) als naheliegende und wichtige Anwendung.

Der III. Abschnitt[4]) wendet die combinatorischen Lehren auf Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an. Etwas bunt durcheinander gewürfelt erscheinen hier theilweise recht schwierige und mit

[1]) *Ars Conjectandi. Pars secunda. Caput VII De Combinationibus et Permutationibus mixtim spectatis* pag. 124 sqq. [2]) *Ars Conjectandi* pag. 133. [3]) Ebenda pag. 132: *ubi quantitas literalis* $a+b+c+d$ *ducenda est in se quadrate cubice* etc. [4]) Ebenda pag. 138—209.

grosser Gewandtheit angefasste Aufgaben, über welche in Kürze zu berichten nicht wohl angeht.

Der IV. Abschnitt[1]) blieb leider unvollendet. Er sollte seiner Ueberschrift nach[2]) die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihren Anwendungen auf bürgerliche, sittliche und wirthschaftliche Verhältnisse untersuchen. Er beginnt mit einem Einleitungskapitel über Gewissheit, Wahrscheinlichkeit, Nothwendigkeit und Zufälligkeit der Dinge[3]). Die Wahrscheinlichkeit wird als ein Grad der Gewissheit erklärt, von der sie sich unterscheide wie der Theil vom Ganzen[4]). In den nachfolgenden Kapiteln fährt Jakob Bernoulli fort, das zu entwickeln, was man eine von Rechnung freie Darstellung der Wahrscheinlichkeitslehre nennen könnte, mit wesentlicher Berücksichtigung der im IV. Abschnitte zu behandelnden Gegenstände. Sie sind ganz anderer Art als die gewöhnlichen Glücksspiele. Man ist bei Erscheinungen der Natur oder des menschlichen Geistes- wie Körperlebens nicht im Stande, alle möglichen oder einem Ereignisse günstigen und ungünstigen Fälle zum Voraus genau zu zählen, aber was man a priori nicht hervorlocken kann, das kann man wenigstens a posteriori, d. h. aus dem, was bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, herausscharren[5]). Neu sei weder dieses Verfahren, welches regelmässig im täglichen Gebrauche geübt werde, noch auch das Bestreben, sich auf so zahlreiche Erfahrungen als immer möglich zu stützen, weil dadurch die Gefahr, vom Ziele abzuirren, verringert wird. Dagegen sei der Beweis neu, dass solches aus den Grundgesetzen der Kunst mit Nothwendigkeit folge. Aber noch weiteres sei möglich, woran vielleicht Niemand auch nur gedacht habe. Man könne untersuchen, ob bei Häufung der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, dem eigentlichen Verhältnisse zwischen den günstigen und den ungünstigen Fällen auf die Spur zu kommen, sich so steigere, dass sie jede gegebene Wahrscheinlichkeit übertreffe, oder ob diese Aufgabe so zu sagen ihre Asymptote habe[6]), d. h. ob es einen bei beliebiger Häufung der Beobachtungen dennoch nicht überschreitbaren Grad der Wahrscheinlichkeit, das wahre Verhältniss der Fälle gefunden zu haben, gebe. Man sieht, dass Jakob Bernoulli

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 210—239. [2]) Ebenda pag. 210: *Pars quarta tradens usum et applicationem praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis.* [3]) *Caput I. Praeliminaria quaedam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate et Contingentia Rerum.* [4]) *Ars Conjectandi* pag. 211: *Probabilitas est gradus certitudinis et ab hac differt ut pars a toto.* [5]) Ebenda pag. 224: *quod a priori elicere non datur, saltem a posteriori, hoc est ex eventu in similibus exemplis multoties observato eruere licebit.* [6]) Ebenda pag. 225: *an vero Problema, ut sic dicam, suam habeat Asymptoton.*

hier das Gesetz der grossen Zahlen enthüllt hat. Das Gesetz selbst, darin hat er ganz Recht, war keineswegs neu. Wir wissen, dass Cardano (Bd. II, S. 538) es schon ziemlich deutlich aussprach, aber auch darin hat er Recht, dass noch nie versucht worden war, das Gesetz mathematisch zu beweisen. Der Bernoullische Beweis[1]), der sich auf die Binomialentwicklung und nicht grade naheliegende Eigenschaften der Binomialcoefficienten, insbesondere des mittleren, stützt, ist allzu verwickelt, als dass er in der uns gebotenen Kürze hier mitgetheilt werden könnte. Spätere Bearbeiter der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben ihn vereinfacht und dadurch die Richtigkeit des Gesetzes nur um so zweifelloser festgestellt.

Gemeinschaftlich mit der Ars Conjectandi hat Niclaus I. Bernoulli einen französisch geschriebenen Brief über das Ballspiel, das sogenannte *Jeu de paume*, veröffentlicht[2]). Auch dieser Brief rührt, wie Niclaus Bernoulli in der Vorrede versichert, von Jakob Bernoulli her. Er behandelt jenes Geschicklichkeitsspiel unter der Voraussetzung, dass die Kunstfertigkeit der einzelnen Spieler aus zahlreich durch dieselben abgelegten Proben bekannt sei. Das ist wieder eine Wahrscheinlichkeit a posteriori, und der Briefschreiber bedient sich hier wie in der Ars Conjectandi dieses Wortes, das nunmehr der Wissenschaft erworben war. Als Beispiel der Wahrscheinlichkeit a posteriori dient eine unbekannte Menge weisser und schwarzer Zettel, die in einem Säckchen vereinigt einzeln herausgezogen und sofort wieder hineingeworfen werden, worauf jedesmal aufs Neue gehörige Mischung der Zettel vorausgesetzt ist. Man könne beweisen[3]), dass das Verhältniss der so gezogenen beiderfarbigen Zettel von dem der wirklich vorhandenen schliesslich so gut wie gar nicht abweiche, so dass die Gleichheit der beiden Verhältnisszahlen zur moralischen Gewissheit werde[4]).

Auf die Ars Conjectandi, deren hohe wissenschaftliche Bedeutung schon aus unserem Auszuge erkennbar sein dürfte, folgte im gleichen Jahre 1713 die zweite Ausgabe von De Montmorts *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Auch sie stellte keinen Verfassernamen auf das Titelblatt, aber der Schleier, der schon bei der ersten Ausgabe für Fachmänner kaum vorhanden gewesen sein kann, da De Montmort sein Buch vielfach verschenkte, war dadurch einigermassen ge-

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 228—238. Ein sehr übersichtlicher Bericht bei Eggenberger, Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems etc. in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Jahrgang 1893, S. 121—129. [2]) Auf dem Titelblatte des Druckes von 1713 heisst es: *Epistola Gallice scripta de Ludo pilae reticularis.* [3]) *étant même une chose demontrée.* [4]) *qu'il sera moralement certain.*

lüftet, dass Briefe, die in dem letzten Abschnitte abgedruckt sind, von Montmort aus datirt sind[1]), und dass bei einem derselben[2]) die Unterschrift R. de M... vorkommt. Diese Briefe sind Bestandtheile eines Briefwechsels mit Johann Bernoulli und Niclaus I. Bernoulli, durch dessen Veröffentlichung De Montmort, wie er in der Ankündigung an die Leser[3]) sagt, seine Schriftstellereitelkeit der Liebe zur Wissenschaft opferte. In demselben neuen Vorworte[4]) wendet sich De Montmort gegen De Moivre und dessen (S. 337) von uns erwähnte Bemängelung der ersten Ausgabe in einer eigentlich durch die Aeusserungen in der *Mensura sortis* nicht gerechtfertigten Breite. Er fügte geschichtliche Notizen hinzu. Dahin gehört, dass De Montmort seit April 1713 den Anfang des *Commercium Epistolicum* kannte[5]), der ihm von Seiten der Royal Society zugeschickt worden war. Dahin gehört ferner eine Erwähnung von Cardanos Abhandlung *De ludo aleae* (Bd. II, S. 537—538), deren Bedeutung De Montmort aber nicht richtig würdigte, wenn er sagte, man finde dort nur Belesenheit und die Moral betreffende Gedanken[6]). Auch Caramuel wird als Verfasser einer als sehr unbedeutend geschilderten Schrift über das Würfelspiel, *Kybeia* genannt[7]), von der wir wissen (Bd. II, S. 771), dass sie nur ein einzelnes Kapitel seiner *Mathesis biceps* war. Endlich ist von einem Aufsatze Leibnizens über Spiele in den Miscellan. Berolin. I die Rede[8]). In dem eigentlichen Texte fehlt es gleichfalls nicht an geschichtlichen Erinnerungen. Von einigem Interesse dürfte es sein, dass Descartes[9]) als der Erfinder der Methode der unbestimmten Coefficienten gerühmt ist, und dass die Erscheinungszeit der *Ars Conjectandi* auf den Anfang des Monats September 1713 angegeben ist[10]). Aus diesem Datum, zusammengehalten mit dem des 9. November 1713, unter welchem die neue Auflage des Essay d'Analyse gutgeheissen ist, ergibt sich die Unabhängigkeit, mit welcher beide Drucke neben einander hergingen. Das Werk De Montmorts konnte von dem Jakob Bernoullis unmöglich mehr stark beeinflusst werden, weil es, als dieses herauskam, selbst schon nahezu im Drucke vollendet war.

Was nun die eigentlichen analytischen Ergebnisse der neuen Ausgabe betrifft, so können wir uns mit wenigen Bemerkungen begnügen. Während in der ersten Ausgabe combinatorische Betrachtungen erst späterhin auftreten, sind sie, und zwar auf den Rath von

[1]) *Essay d'Analyse* etc. pag. 303 und öfter. [2]) Ebenda pag. 370. [3]) Ebenda *Avertissement* pag. XXVI. [4]) Ebenda pag. XXVII—XXXI. [5]) Ebenda pag. XXXV. [6]) Ebenda pag. XL: *On n'y trouve que de l'érudition et des réflexions morales.* [7]) Ebenda pag. XL und 387. [8]) Ebenda pag. XLI. [9]) Ebenda pag. 321. [10]) Ebenda pag. 401.

Niclaus I. Bernoulli[1]), in der zweiten Ausgabe als erster Abschnitt an die Spitze gestellt. Grade diesem ersten Abschnitte gehören drei Sätze an, die wir hervorheben. De Montmort macht[2]) auf die zwischen Wahrscheinlichkeitszahlen und Polynomialcoefficienten vorhandenen Beziehungen aufmerksam. Er spricht aus[3]), dass die 1 als Divisor mitgerechnet und $a_1, a_2, \ldots a_\mu$ als Primzahlen gedacht, die Divisorenzahl von $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_\mu^{e_\mu}$ sich durch das Product

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_\mu + 1)$$

darstelle. Er lässt[4]) figurirte Zahlen mit in jeder neuen Zeile neu hinzutretenden Erzeugungszahlen, *generateurs*, bilden. Der Name generateur und die Bildungsweise von

$$\begin{array}{cccccc}
a & a & a & a & a & a \\
 & b & a+b & 2a+b & 3a+b & 4a+b \\
 & & c & a+b+c & 3a+2b+c & 6a+3b+c \\
 & & & d & a+b+c+d & 4a+3b+2c+d
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
a & a \\
5a+b & 6a+b \\
10a+4b+c & 15a+5b+c \\
10a+6b+3c+d & 20a+10b+4c+d
\end{array}$$

erinnern zu sehr an das, was Leibniz seiner Zeit (S. 77) als *differentiae generatrices* bekannt war, und was De Montmort in dem Commercium Epistolicum aufgefallen sein mochte, als dass wir nicht darauf hinweisen sollten. Der zweite, dritte und vierte Abschnitt handeln von Spielen, deren Gewinnwahrscheinlichkeiten combinatorisch untersucht werden. Den fünften Abschnitt bilden Briefe.

Wir haben von demselben schon oben reden müssen. Der erste Brief rührt von Johann Bernoulli her[5]), welcher an De Montmort kritische Bemerkungen zur ersten Ausgabe des Essay d'Analyse gerichtet hatte, und ähnlichen Inhaltes ist auch ein erster Brief von Niclaus I. Bernoulli[6]). An letzteren knüpfte sich dann ein ganzer Briefwechsel, in welchem neben mancherlei Spielen auch Integralrechnung und höhere Curvenlehre der Gegenstand gelehrter Unterhaltung bildeten. Der Zeit nach erstrecken sich die Briefe vom 17. März 1710 bis zum 15. November 1713, der letzte muss folglich nach der Gutheissung des Druckes vom 9. November Aufnahme ge-

[1]) *Essay d'Analyse* etc. pag. 334—335. [2]) Ebenda pag. 34. [3]) Ebenda pag. 55. [4]) Ebenda pag. 63. [5]) Ebenda pag. 283—298. Der Brief steht auch in Joh. Bernoulli *Opera* I, 453—468. [6]) *Essay d'Analyse* etc. pag. 299—303.

funden haben. Am bekanntesten ist ein Brief von Niclaus I. Bernoulli vom 9. September 1713 geworden. Der Briefschreiber stellt in ihm folgende Aufgabe[1]): *A* verspricht dem *B* einen Thaler, wenn er mit einem gewöhnlichen Würfel gleich beim ersten Wurfe 6 Augen werfe, 2 Thaler, wenn er die 6 im 2. Wurfe wirft, 3, 4 Thaler, wenn er erst im 3., 4. Wurfe die gewünschte Augenzahl erreicht u. s. w. In einem zweiten Falle zahlt *A* dem *B* in geometrischer Reihe wachsende Belohnungen. Man fragt nach *B*'s moralischer Erwartung, *quelle est l'esperance de B.* De Montmort meint in seiner Antwort[2]), die Aufgabe biete keinerlei Schwierigkeit. Es handle sich nur um die Auffindung von Reihensummen, bei welchen Zähler als arithmetische oder als geometrische Progression, als 2., 3. Potenzen u. s. w., Nenner aber in geometrischer Progression auftreten. Wir werden im nachfolgenden letzten Abschnitte unseres Bandes die Arbeiten von Daniel Bernoulli aus den Jahren 1730 und 1731 kennen lernen, welche unter Abänderung der Bedingungen der Aufgabe ihre Schwierigkeit, aber auch ihre theoretische Bedeutung wesentlich steigerten.

Unter den von De Montmort genannten Arbeiten war auch eine Abhandlung von Leibniz. Dass es dem Manne, von dem wir (S. 333) sagen durften, er habe die combinatorische Analysis in das Leben gerufen, nicht an Interesse für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen fehlte, ist nur naturgemäss. Schon 1687 äusserte sich Leibniz in einem Briefe an Vincent Plakke oder Placcius[3]), der seit 1675 Professor am akademischen Gymnasium in Hamburg war, über das thörichte Beginnen der Rechtsgelehrten und der Aerzte, welche den Mund vollnehmen mit Ausdrücken von der Art, dass Gründe nicht nach der Zahl, sondern nach dem Gewichte zu schätzen seien, und die doch von einer Waage nichts wissen, auf welcher die Gründe gewogen werden können[4]). Mit den Mathematikern müsse man die Gewissheit als Ganzes, die Wahrscheinlichkeiten als dessen Theile betrachten. Wahrscheinliches verhalte sich zum Wahren wie ein spitzer Winkel zu einem rechten. Rechtsentscheidungen, Theilungen u. s. w. sollten nach den Gesetzen dieser Wahrscheinlichkeit stattfinden, so dass, wenn zwei Leute *L* und *M* an eine Summe Anspruch erheben, und es doppelt so wahrscheinlich sei, dass *L* als dass *M* im Recht sei, eine Theilung der Summe im Verhältnisse 2 : 1 zwischen beiden stattzufinden habe. Bei den Gerichten sei freilich eine derartige Theilung nicht im Gebrauch.

[1]) *Essay d'Analyse* etc. pag. 402. [2]) Ebenda pag. 407. [3]) Allgemeine deutsche Biographie XXVI, 220 Artikel von R. Hoche. [4]) Der Brief ist abgedruckt in der 1768 durch Dutens veranstalteten Genfer Gesammtausgabe der Leibnizischen Werke Bd. VI S. 36—37.

Es kann ferner nicht Wunder nehmen, dass im Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli die Wahrscheinlichkeitsrechnung berührt wurde. Im April 1703 schrieb Leibniz[1]) zuerst, er habe davon gehört, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche er sehr hoch schätze, von Jenem bedeutend ausgebildet worden sei; er seinerseits wünschte, dass Jemand verschiedene Spiele rechnungsmässig behandelte, das sei eine angenehme und nützliche Aufgabe und auch eines schwerwiegenden Mathematikers nicht unwürdig. Jakob Bernoulli antwortete im October[2]), es sei wahr, dass er schon seit Jahren an einem Werke über Wahrscheinlichkeitsrechnung sitze und nur den letzten Abschnitt der Anwendung auf bürgerliche, sittliche und wirthschaftliche Gegenstände nicht vollendet habe. Er erklärt nun, was er Wahrscheinlichkeit a posteriori nenne und fährt fort, es sei merkwürdig, dass auch der Dümmste durch einen natürlichen Trieb das Gefühl habe, bei Mehrung der Beobachtungen komme man der Wahrheit immer näher. Diesen Satz könne man aber genau und mathematisch beweisen. Man könne noch weiter gehen, und er sei im Stande, die Zahl der Beobachtungen anzugeben, welche dazu führen, dass es 100mal, 1000mal, 10000mal wahrscheinlicher, mithin moralisch gewiss werde, dass ein aufgestelltes Zahlenverhältniss der vorkommenden Fälle das richtige sei, und dieses genüge, um unseren Vermuthungen im bürgerlichen Leben eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Sein Bruder Johann, erzählt Jakob Bernoulli in dem gleichem Briefe, wisse schon seit 12 Jahren von dem Satze, habe aber aus Verkleinerungssucht sich unwissend gestellt, als De l'Hôpital ihn einmal darüber befragte. Leibniz[3]) wollte auf diese Erfahrungswahrscheinlichkeit nicht viel geben. Ein Brief vom 3. December enthält seinen Einwurf, eine folgende Erfahrung könne vorhergehende über den Haufen werfen. Neue Krankheiten könnten z. B. entstehen, welche frühere Annahmen über die Dauer des menschlichen Lebens umstossen. Am 20. April 1704 bleibt Bernoulli[4]) bei seinen Behauptungen. Es handle sich um einen mathematisch streng bewiesenen Satz, dessen Beweis, wie er wiederholt, Johann vor 12 Jahren sah und richtig fand. Neue Krankheiten könnten allerdings entstehen, aber daraus folge nur, dass immer neue Beobachtungen angestellt werden müssen, und dass es gewiss sei, dass Derjenige ungeheuer von der Wahrheit abweichen würde, der versuchen wollte, aus heutigen Londoner und Pariser Beobachtungen Schlüsse auf die Lebensdauer der Patriarchen vor der Sintfluth zu ziehen. Am 2. August fügte er

[1]) Leibniz III, 71. [2]) Ebenda III, 77—78. [3]) Ebenda III, 83—84. [4]) Ebenda III, 87—89.

hinzu[1]), wenn die Erfahrung auch nur näherungsweise Sterblichkeitszahlen liefere, so sei das selbst in der Geometrie nicht unerhört. Das Verhältniss des Kreisdurchmessers zur Peripherie könne genau nur durch unendlich viele Decimalstellen der Ludolphischen Zahl angegeben werden, und doch habe Archimed es genügend erklärt, indem er es zwischen die Grenzen 7 : 22 und 71 : 223 einschloss. Leibniz[2]) liess am 28. November das Beispiel mit der Ludolphischen Zahl nicht gelten. Bei dieser bringe jede neue Decimalstelle eine vermehrte Annäherung. Ob aber jede neue Erfahrung die bisherigen Annahmen stets verstärke, wisse man nicht. Jakob Bernoulli antwortete nicht mehr. Am 28. Februar 1705 fragte er zwar wiederholt[3]), ob Leibniz ihm nicht die Schrift De Witts über Sterblichkeit, welche schon vorher in dem Briefwechsel mehrfach erwähnt wurde, leihweise zuschicken wollte, aber auf eine weitere Vertheidigung seiner Erfahrungswahrscheinlichkeit liess er sich nicht ein. Im April etwa erwiderte Leibniz[4]), er könne De Witts Schrift zunächst nicht auffinden, Bernoulli würde aber in ihr kaum Neues entdecken. Sie beruhe auf denselben Grundlagen des zwischen gleich Ungewissen zu nehmenden arithmetischen Mittels wie Pascals Triangle arithmétique und Huygens' Würfelabhandlung. Man wird in dieser Hinweisung Leibnizens keinen Widerspruch gegen unsere Bemerkung (S. 341), Jakob Bernoulli habe Pascals *Triangle arithmétique* nicht gekannt, finden wollen. Jakob Bernoulli starb im August 1705. In den vier Monaten, welche höchstens zwischen seinem Tode und dem Empfang des Leibnizischen Briefes lagen, war er meistens krank. Er hat deshalb wahrscheinlich von jenem Hinweis keinen Gebrauch mehr machen können.

Im December 1705 äusserte sich Leibniz[5]) gegen den schottischen Edelmann Thomas Burnett de Kemney, er billige es sehr, wenn man über Verstandesspiele schreibe, nicht gerade um ihrer selbst willen, aber weil derartige Untersuchungen in der Kunst des Denkens weiterbringen.

Der erste Band der Veröffentlichungen der Berliner Akademie, der 1710 unter dem Titel der *Miscellanea Berolinensia* im Drucke erschien, enthielt einen kurzen Aufsatz von Leibniz über einige Spiele. Das war derjenige Aufsatz, von welchem De Montmort in der zweiten Ausgabe seines Essay d'Analyse des jeux de Hazard sprach (S. 350). Leibniz erzählt darin, dass De Méré seiner Zeit durch Spielaufgaben Pascal die erste Anregung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben

[1]) Leibniz III, 91. [2]) Ebenda III, 94. [3]) Ebenda III, 95. [4]) Ebenda III, 99. [5]) Leibniz, Philosophische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) III, 304.

habe (Bd. II, S. 754), dass dann Fermat, nach diesem Huygens tiefer eingedrungen seien. Er erwähnt, er selbst habe wiederholt zu Untersuchungen über Spiele aufgefordert, nicht der Spiele halber, sondern wegen der bei der Untersuchung anzuwendenden Kunst der Erfindung. Unter den Spielen, die er als Beispiel nennt, ist das Solitärspiel, und Leibniz meint, aus demselben lasse sich durch Umkehrung ein noch eleganteres Spiel bilden, wenn man, anstatt die Steine allmälig vom Solitärbrett zu entfernen, solche vielmehr allmälig, unter Umkehrung der für ihre Entfernung giltigen Regeln, auf das Brett zu bringen und dadurch eine vorgeschriebene Figur zu erzeugen sich bestrebe. Auch von einem chinesischen, von einem altrömischen Verstandesspiele ist gelegentlich die Rede, aber nirgend geht Leibniz über allgemeine Redensarten hinaus. Wie er insbesondere die Behandlung des Solitärspiels und dessen Umkehrung aufgefasst wissen will, sagt er nirgend.

An den geistreichen und gelehrten Louis Bourguet aus Neufchatel, der sich damals in Venedig aufhielt, schrieb Leibniz im März 1714 zur Empfehlung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen. Er nannte hier neben De Méré und Pascal, neben Fermat und Huygens noch De Witt und Hudde und endlich Jakob Bernoulli, den er auf jenes Gebiet hingewiesen habe[1]), was allerdings, wie wir wissen, nicht zutrifft. Leibniz war mit seinen Hinweisungen erst gekommen, als die Ars Cogitandi längst in Arbeit war. In dem Briefe an Bourguet ist auch der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeit *a priori* und *a posteriori* erwähnt.

Ein weiterer Correspondent Leibnizens war Nicolas Rémond in Paris, der Bruder von Pierre Rémond De Montmort. Auch ihm gegenüber rühmte Leibniz im Februar 1715 die mathematische Beschäftigung mit Spielen und erkundigte sich, ob der Bruder nach seinem Wunsche fortfahre Solches zu üben[2]).

Rémond De Montmort war gleichfalls einmal in brieflichem Verkehre mit Leibniz. Er hatte ihm seinen Essay d'Analyse des jeux de Hazard in erster wie in zweiter Auflage zugeschickt, aber beide Sendungen gingen verloren, wie wir einem Briefe De Montmorts vom Februar 1714 entnehmen[3]). Erst zwei Jahre später, im Januar 1716, antwortete Leibniz[4]), und hier finden sich immer wieder die gleichen Anpreisungen einer mathematischen, die Erfindungsgabe schärfenden Bearbeitung der Spiele, sowie die Erwähnung der in den Miscellanea

[1]) Leibniz, Philosophische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) III, 570: *Feu Monsieur Bernoulli a cultivé cette matière sur mes exhortations.* [2]) Ebenda III, 638—639. [3]) Ebenda III, 666. [4]) Ebenda III, 667—669.

Berolinensia von 1710 abgedruckten Bemerkungen über das Solitärspiel. Die Benutzung De Montmorts als Mittelperson im Prioritätsstreite (S. 323) fiel kurze Zeit später.

Fassen wir, was in diesem Kapitel von Leibniz zu erwähnen war, und was wir erwähnten, weil es eben um Leibniz sich handelte, zusammen, so ist das äusserst dürftige Ergebniss, dass Leibniz bei oft ausgesprochenem Interesse für die Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts in ihr leistete.

Recht geringfügig sind ferner zwei Aufsätze in den P. T. für 1715 von Niclaus I. Bernoulli[1]) und von De Moivre[2]). Sie betreffen nur anderweitige Auflösungen einer Aufgabe, welche schon in De Moivres Mensura sortis von 1711 vorkam.

Von hoher Bedeutung war dagegen ein neues Werk von De Moivre, seine *Doctrine of Chances*, welche erstmalig 1718, dann in zweiter veränderter und vielfach erweiterter Ausgabe 1738, zum dritten Male 1756 gedruckt ist. In die zweite Ausgabe ist neben anderen Zusätzen der Inhalt einer 1724 besonders veröffentlichten kleinen Schrift De Moivres *Annuities upon Lives*, welche selbst mehrere Auflagen erlebte, hineingearbeitet[3]) und nicht minder Theile seiner *Miscellanea analytica* von 1730. Die späten Dinge übergehen wir hier selbstverständlich in unserem Berichte, um sie erst im folgenden Abschnitte, wohin sie ihrer Entstehungszeit nach gehören, zur Sprache zu bringen. Die *Doctrine of Chances* ist aus der *Mensura sortis* von 1711 herausgewachsen, und sie verleugnet diesen ihren Ursprung keineswegs. Grundlegend ist und bleibt die Binomialentwicklung (S. 338), deren einzelnen Gliedern bestimmte Deutungen als Wahrscheinlichkeitszahlen beigelegt werden. Und noch Eines ist De Moivres Entwicklungen in noch höherem Grade als denen seiner Vorgänger eigenthümlich. Er benutzt regelmässig frühere Aufgaben in den späteren, die er auf jene zurückführt, und in jeder einzelnen Aufgabe übt er nicht minder Zurückführung in dem Sinne, dass er auftretende Zahlenergebnisse durch bestimmte Buchstaben ausdrückt, welche im weiteren Verlaufe der Rechnung mitgeführt werden. Neben diesen allgemeinen Erscheinungen sollen noch sehr wenige Einzelheiten erwähnt werden. Die eine besteht darin, dass, während andere Schriftsteller combinatorische Sätze voranstellten, aus welchen sie Folgerungen für die Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten zogen, De Moivre es grade entgegengesetzt machte[4]). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, fragte er, für die

[1]) P. T. XXIX, 133—144. [2]) Ebenda XXIX, 145—158. [3]) Uns lagen die *Doctrine of Chances* von 1738 und die dritte Auflage der *Annuities upon Lives* von 1750 vor, nach welcher wir citiren. [4]) *Doctrine of Chances*. Problem XVI, XVII, XVIII pag. 72—74.

Elemente $aabbbcccc$ grade in dieser Reihenfolge zu erscheinen? Das eine a zuerst zu greifen, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$, alsdann das zweite a zu wählen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$. Nun sind noch 7 Elemente vorhanden. Unter ihnen das erste, zweite, dritte b zu erfassen, geschieht mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{7}, \frac{2}{6}, \frac{1}{5}$. Die 4 zuletzt allein übrigen c müssen gewiss, also mit der Wahrscheinlichkeit 1, nachfolgen. Das Product aller Wahrscheinlichkeiten ist demnach $\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{1260}$, und 1260 ist die Anzahl der aus den gegebenen Elementen zu bildenden Permutationsformen, eine Rechnung, die in einem Zusatze mit allgemeinen Buchstaben statt der Zahlen 2, 3, 4 wiederholt wird. Wie gross, frägt De Moivre weiter, ist die Wahrscheinlichkeit, aus den Elementen a, b, c, d, e, f grade die zwei a, b oder die drei a, b, c blindlings zu ergreifen? Zuerst a oder b zu ergreifen, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6}$. Alsdann den von beiden Buchstaben zu greifen, der des erste Mal verfehlt wurde, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Das Product beider Wahrscheinlichkeiten ist $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}$. Im anderen Beispiele sind, wie leicht ersichtlich, die mit einander zu vervielfachenden Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{6}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}$. Auch hier erweitert ein Zusatz die Aufgabe auf das Ziehen von p bestimmten Buchstaben unter n, die alle von einander verschieden sind, und die Anzahl der entsprechenden Combinationsformen erweist sich als $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}$. Eine andere nicht uninteressante Einzelheit[1]) besteht in der wieder von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ausgehenden Beantwortung der Frage, wie viele Permutationsformen aus n von einander verschiedenen oder zum Theil unter einander gleichen Elementen es gebe, in welchen eine gegebene Anzahl von Elementen, nicht mehr noch weniger, grade an der Stelle sich befinde, welche ihrer eigenen Rangordnung entspricht.

Wir erwähnten oben, dass De Moivre 1724 ein Büchelchen unter dem Titel *Annuities upon Lives* dem Drucke übergeben habe. De Moivre ging bei diesen Untersuchungen, wie er in der Vorrede erklärt, von Halleys Tafeln aus und fand, dass die Abnahme der Lebenden innerhalb beträchtlicher Zeiträume in arithmetischer Progression erfolge[2]). Rechnung lehrte ihn dann, dass man nicht einmal

[1]) *Doctrine of Chances*. Problem XXXIV, XXXV pag. 95—103. [2]) *Annuities upon Lives* pag. VIII: *Two or three Years after the Publication of the*

verschiedene arithmetische Progressionen aneinanderzureihen brauche, sondern dass man vom 12. bis zum 86. Lebensjahre eine einzige mit gleichen Unterschieden von Jahr zu Jahr abnehmende Zahl der Lebenden voraussetzen dürfe. Die nach oben und unten vorkommenden Abweichungen höben sich in ihren Ergebnissen auf. Diese Annahme bildet demnach eine Grundlage der Sätze und Tafeln, welche den Hauptbestandtheil der kleinen Schrift ausmachen. Erst einem Anhange ist es vorbehalten, die Beweise für die vorher ausgesprochenen Behauptungen zu bringen. Als Beispiel möge die erste der bewiesenen Formeln dienen[1]).

Lebensergänzung[2]) nennt De Moivre die Anzahl n der Jahre, welche zwischen dem Alter des Rentennehmers und dem höchsten Lebensalter, als welches das Alter von 86 Jahren gilt, liegen. Als Zinsverhältniss[3]) wird unter Annahme von p-procentiger Verzinsung der Ausdruck $r = 1 + \frac{p}{100}$ benannt. Die Rente selbst soll 1 betragen. Der Baarwerth einer unter allen Umständen, also gleichgiltig ob der Rentennehmer am Leben bleibe oder inzwischen sterbe, n Jahre lang einzuzahlenden Rente 1 sei P, so wird der Baarwerth der auf Lebensdauer des $86 - n$-jährigen Rentennehmers vereinbarten Einheitsrente sich auf $\frac{1 - \frac{r}{n} \cdot P}{r - 1}$ belaufen. Wenn das Absterben der Altersgenossen des Rentennehmers innerhalb n Jahren so stattfindet, dass die Anzahl der Lebenden sich jährlich um Gleiches vermindert, so beträgt diese Durchschnittszahl der Todesfälle jährlich $\frac{1}{n}$ der zu Anfang Lebenden, oder die Wahrscheinlichkeit das nächste, das nachfolgende, ... das $n$te Jahr zu erreichen ist $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \ldots \frac{1}{n}$. Mit ihr wird die Rente 1 vervielfacht und der Baarwerth durch Division mit entsprechenden Potenzen von r gefunden. Die Baarwerthe sämmtlicher Jahresbeträge vereinigen sich also zu

$$\frac{n-1}{nr} + \frac{n-2}{nr^2} + \cdots + \frac{1}{nr^{n-1}},$$

welche $n - 1$-gliedrige Reihe zu summiren ist. Dazu bedürfe es, erklärt De Moivre[4]), einer etwas mehr als gewöhnlichen Fertigkeit in der Reihenlehre, und deshalb wolle er die Formel nicht ableiten.

---

first Edition of my Doctrine of Chances I took the Subject into consideration; and consulting Dr. Halley's Table of Observations, I found that the Decrements of Life, for considerable Intervals of Time, were in Arithmetic Progression.

[1]) *Annuities upon Lives* pag. 83—86. [2]) *Complement of Life.* [3]) *Rate of Interest.* [4]) *As the Reasonings that led me to that general Expression, re-*

Er begnügt sich damit, sie nachträglich zu beweisen. Die von ihm als P bezeichnete Grösse sei bekannt. Sie sei

$$P = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}.$$

Daraus folge

$$1 - \frac{r}{n} \cdot P = \frac{n-1}{n} - \frac{1}{nr} - \frac{1}{nr^2} - \cdots - \frac{1}{nr^{n-1}}.$$

Dann sei ferner

$$\frac{1}{r-1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots.$$

Multiplicire man beide Reihen mit einander, so entstehen die Theilproducte

$$\begin{array}{r}
\frac{n-1}{nr} - \frac{1}{nr^2} - \frac{1}{nr^3} - \frac{1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\
\frac{n-1}{nr^2} - \frac{1}{nr^3} - \frac{1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\
\frac{n-1}{nr^3} - \frac{1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\
\frac{n-1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\
\frac{n-1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\
\frac{n-1}{nr^6} \text{ etc.,}
\end{array}$$

deren Addition

$$\frac{n-1}{nr} + \frac{n-2}{nr^2} + \frac{n-3}{nr^3} + \frac{n-4}{nr^4} + \frac{n-5}{nr^5} + \frac{n-6}{nr^6} \text{ etc.}$$

liefere, das heisst die Reihe, als deren Summe $\frac{1 - \frac{r}{n} \cdot P}{r - 1}$ genannt worden sei.

Bei Untersuchung des Werthes verbundener Lebensrenten[1]) nimmt De Moivre seine Zuflucht zu einer künstlich erfundenen Lebensdauer[2]), bei welcher angenommen wird, die Wahrscheinlichkeit im folgenden Jahre bei Leben zu bleiben, beziehungsweise zu sterben, sei stets gleichbleibend $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{b}{a+b}$, oder, mittels $a + b = s$, die Lebenswahrscheinlichkeit für das je nächste Jahr sei $\frac{a}{s}$. Die Wahrscheinlichkeit ein 2., 3., 4. ... Jahr zu erreichen ist demnach $\frac{a}{s}, \frac{a^2}{s^2}, \frac{a^3}{s^3} \cdots$, und der Baarwerth einer Einheitsrente besteht in der Summe der

---

quires something more, that an ordinary Skill in the Doctrine of Series, I shall forbear to mention them in this Place.

[1]) *Annuities upon Lives* pag. 87—92. [2]) *a fictitious Live.*

geometrischen Progression $\frac{a}{rs} + \frac{a^2}{r^2 s^2} + \frac{a^3}{r^3 s^3} + \cdots = \frac{a}{rs - a}$. Hatte man nun vorher den Werth der Einheitsrente als M kennen gelernt, so folgt $M = \frac{a}{rs - a}$, $\frac{a}{s} = \frac{Mr}{M+1}$ oder die Lebenswahrscheinlichkeit für jedes nächste Jahr unter Annahme der künstlichen Sterblichkeitsordnung ist nachträglich rechnungsmässig gefunden.

Ein späterer Schriftsteller, dessen Leistungen auf allen Gebieten der Mathematik im XVIII. Abschnitte unsere Bewunderung in Anspruch nehmen werden, aber auch dort nicht sämmtlich zur Rede kommen können, weil wir genöthigt sind eine Zeitgrenze einzuhalten, Leonhard Euler, hat in den Abhandlungen der Berliner Academie für 1760 De Moivres künstliche Sterblichkeitsordnung als die thatsächlich vorhandene betrachtet[1]).

Wenn ein Ergebniss der Wahrscheinlichkeitsrechnung statt der Wirklichkeit genommen wird, so ist damit ein Fehler verbunden. Noch weniger vermeidet man Fehler, wenn das Ergebniss einer Beobachtung als unbedingt wahr betrachtet wird. Diesen Fehler einer Schätzung zu unterbreiten ist nach und nach eine der wichtigsten Aufgaben geworden. Schon Jakob Bernoulli hat ihr in seiner Fassung des Gesetzes der grossen Zahlen bis zu einem gewissen Grade seine Aufmerksamkeit zugewandt. Eine Fehlerschätzung bei astronomischen und geodätischen Aufgaben hat zuerst Roger Cotes in seinem nachgelassenen 1722 gedruckten Aufsatze *Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici* versucht, indem er zugleich den Begriff eines von einander verschiedenen Gewichtes der Beobachtungen einführte. Wir werden darüber im 99. Kapitel berichten, wenn wir die gleiche Abhandlung in anderem Zusammenhange besprechen. Wir verweisen einstweilen nur mit dieser leisen Andeutung auf eine spätere Stelle.

97. Kapitel.

Reihenlehre. Differenzenrechnung.

Wir sahen im 85. und 86. Kapitel die Lehre von den unendlichen Reihen entstehen und sogleich ein gewaltiges Wachsthum annehmen. Wenn auch etwas geringer, ist der Zusatz, den diese Lehre in dem ersten Viertel des achtzehnten Jahrhunderts erhielt, und den wir jetzt zu schildern haben, keineswegs unbedeutend. Wir werden uns gestatten, bei dieser Gelegenheit auch einige Untersuchungen zu erwähnen, von denen es zweifelhaft sein könnte, ob sie mit Recht hier zur Behandlung kommen, welche wir aber anderwärts noch weniger gut unterzubringen wissen.

[1]) *Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.*

So z. B. gehören die 1703 in den Abhandlungen der Pariser Académie des Sciences von Leibniz[1]) veröffentlichten Gedanken über ein Zahlensystem mit der Grundzahl 2 nur sehr bedingter Weise zur Reihenlehre. Leibniz hat schon 1698 die Grundzüge seiner Dyadik in einem Briefe an Joh. Ch. Schulenburg[2]) auseinandergesetzt und dort behauptet, sich schon seit zwanzig und mehr Jahren damit beschäftigt zu haben[3]). Im Drucke aber sprach er, wie bemerkt, erst 1703 es aus, dass die beiden Zahlzeichen 0 und 1 genügen, jede beliebige Zahl darzustellen, oder anders ausgedrückt, dass jede Zahl in eine nach Potenzen der Grundzahl 2 fortschreitende Reihe entwickelt werden könne, deren Coefficienten nur 0 oder 1 seien. Zum praktischen Gebrauche empfiehlt Leibniz dieses Zweiersystem allerdings nicht. Die Reihen werden für nur mässig grosse Zahlen viel zu lang, jedenfalls weit länger als sie in dem Systeme von der gewohnten Grundzahl 10 ausfallen, oder gar in einem solchen von der Grundzahl 12 oder 16 ausfallen würden, wenn man ein solches in Uebung hätte. Nur das theoretische Interesse wird hervorgehoben, und ferner glaubte Leibniz irrigerweise die chinesischen Kuas als dyadisch geschriebene Zahlen erklären zu können (Bd. I, S. 10).

Eine mit der Reihenlehre nahe verwandte Aufgabe ist die Auffindung des Zusammenhangs zwischen trigonometrischen Functionen eines einfachen und eines vielfachen Winkels. Vieta (Bd. II, S. 606 bis 608) hat sich 1594 dieser Aufgabe zugewandt, rund ein Jahrhundert später erschien sie neuerdings auf der Tagesordnung. Johann Bernoulli[4]) wies im Juniheft 1700 der A. E. darauf hin. Im Decemberhefte äusserte sich Jakob Bernoulli[5]) darüber. Die Aufgabe der Winkeltheilung, sagte er, sei algebraisch, wenn die Theilung in ganzzahligen Verhältnissen ausgeführt werden solle, transcendent, wenn eine unbestimmte Theilung in ganz beliebigem Verhältnisse verlangt werde. Wir wissen, dass die beiden Brüder Bernoulli jede Gelegenheit, ob passend oder unpassend, ergriffen, um sich Unannehmlichkeiten zu sagen, und dass die Wissenschaft aus ihrem gehässigen Verfahren Nutzen zu ziehen pflegte. Johann Bernoulli[6]) gab im Aprilhefte 1701 eine Reihe, welche die Sehne des $n$fachen Bogens auf die des einfachen zurückführte, und welche nur bei ganz-

[1]) Leibniz VII, 223—227. [2]) Ebenda VII, 240—242. [3]) *Etsi haec jam a viginti ac amplius annis in mente habuerim.* [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 331—332. [5]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 892. [6]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 386—389.

zahlig positivem n abbrechend, in anderen Fällen unendlich verlaufend, das Algebraische mit dem Transcendenten in eine Formel vereinigte; ein Beweis wurde nicht gegeben. Dafür erbrachte ihn Jakob Hermann[1]) im Augustheft 1703 derselben Zeitschrift. Der Beweis stützte sich auf den sogenannten ptolemäischen Lehrsatz vom Sehnenviereck.

Hermann befand sich fortwährend in engster Fühlung mit seinem Lehrer Jakob Bernoulli, und dieser kannte Hermanns Aufsatz, Hermann einen solchen von ihm, bevor beide im Druck erschienen. Der Bernoullische Aufsatz kam in dem Jahrgange 1702 der Abhandlungen der Académie des Sciences heraus[2]). Auch Jakob Bernoulli begründete die Formel der Winkelvervielfachung geometrisch und zwar in doppelter Weise. Einmal machte er den Uebergang von einem Bogen zum doppelten, von diesem zum vierfachen u. s. w. und zeigte nun inductiv, wie die Coefficienten der einzelnen Glieder gebildet seien, um das Gesetz dieser Bildung auch bei anderen Vervielfachungen als fortgesetzten Verdoppelungen anzuwenden. Das andere Mal liess er die Bögen, deren Sehnen ermittelt werden sollten, in arithmetischer Reihe wachsen, so dass der Reihe nach der doppelte, der dreifache, der vierfache, ... der $n$fache Bogen untersucht wurde.

Nun nahm Johann Bernoulli[3]) wieder das Wort. Er veröffentlichte in ebendemselben Jahrgange 1702 der Abhandlungen der Académie des Sciences einen Aufsatz, der zunächst mit Winkelvervielfachung nicht im Geringsten zusammenzuhängen schien. Es handelte sich um die jüngst durch Leibniz und ziemlich gleichzeitig durch Johann Bernoulli mittels Zerlegung in Partialbrüche bewerkstelligte Integration rationalgebrochener Ausdrücke, von der im 93. Kapitel die Rede war, wobei wir auf die Wortverbindung eines imaginären Logarithmen aufmerksam machen mussten (S. 274), deren Leibniz sich brieflich bedient hatte. In dem Aufsatze lehrte Johann Bernoulli die Umformung $\frac{a}{b^2-z^2}\,dz = \frac{a}{2bt}\,dt$ mittels $z = \frac{(t-1)b}{t+1}$ und die Umformung $\frac{a}{b^2+z^2}\,dz = -\frac{a}{2bt\sqrt{-1}}\,dt$ mittels $z = \frac{(t-1)b}{t+1}\sqrt{-1}$. Der Uebergang von einem Arcustangens zum Logarithmen einer imaginären Zahl war damit vollzogen.

Es mag wohl als auffallend bezeichnet werden, dass dieser *Logarithme imaginaire*, wie Johann Bernoulli sich ausdrückte, keinerlei Anstoss erregte und von Niemand in Zweifel gezogen wurde, auch dann nicht, als er ihn im Junihefte 1712 der A. E. mit der Bogen-

[1]) A. E. 1703 pag. 345—351. [2]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 921—929. [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 393—400.

vervielfachung in Verbindung brachte[1]). Johann Bernoulli nahm irgend einen Bogen A, einen zweiten $B = nA$. Als Einheit war der Halbmesser gewählt und tang $A = x$, tang $B = y$ gesetzt. Daraus folgt einestheils $dA = \frac{dx}{x^2+1}$ und $dB = \frac{dy}{y^2+1}$, anderntheils $dB = n\,dA$, also $\frac{dy}{y^2+1} = \frac{n\,dx}{x^2+1}$, beziehungsweise $\frac{2\sqrt{-1}}{y^2+1}\,dy = \frac{2n\sqrt{-1}}{x^2+1}\,dx$, oder $\frac{dy}{y-\sqrt{-1}} - \frac{dy}{y+\sqrt{-1}} = \frac{n\,dx}{x-\sqrt{-1}} - \frac{n\,dx}{x+\sqrt{-1}}$. Die Integration dieser Differentialgleichung liefert

$$\log(y-\sqrt{-1}) - \log(y+\sqrt{-1}) = n\log(x-\sqrt{-1}) - n\log(x+\sqrt{-1}),$$

und der Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen lässt

$$\frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}} = \left(\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}\right)^n$$

erkennen, woraus $(x-\sqrt{-1})^n.(y+\sqrt{-1}) = (x+\sqrt{-1})^n.(y-\sqrt{-1})$ entsteht. Die auftretende unmögliche Grösse $\sqrt{-1}$ bildet kein Hinderniss, weil sie sich weghebt[2]). Das Gesetz, nach welchem y aus x sich bildet, werde bei genauem Zusehen als das nachfolgende erkannt: Man habe $(x+1)^n$ nach dem Binomialtheoreme in fallender Ordnung zu entwickeln; von den so entstehenden Gliedern nehme man, und zwar mit alternirendem Vorzeichen, die ungeraden Glieder als Zähler, die graden als Nenner eines Bruches; der so entstehende Werth sei bei ungradem n Tangente, bei gradem n Cotangente von nA. In einer Fortsetzung, welche das Juliheft 1712 der A. E. brachte[3]), schrieb Johann vor, die Entwicklung von $(1+x)^n$ nach steigenden Potenzen von x vorzunehmen und hierauf als Werth von y den Bruch anzuschreiben, der im Zähler die ungraden, im Nenner die graden Glieder jener Entwicklung unter Einführung alternirender Vorzeichen besitze. Die so aufgestellte Regel habe einen doppelten Vorzug vor der früheren Fassung, sie vermeide die Unterscheidung grader oder ungrader n, und sie bleibe auch dann noch anwendbar, wenn n nicht ganzzahlig gewählt worden sei.

Der Uebergang zwischen trigonometrischen Functionen einfacher und vielfacher Bögen war vollzogen. Ein verwandtes Gebiet bildete die Aufsuchung eines Bogens, wenn eine trigonometrische Function desselben gegeben war, und auch hier haben wir einen nicht unbe-

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 511—514. [2]) *nec obstat quod* $\sqrt{-1}$ *quantitas impossibilis in illa reperiatur: ea enim in applicatione ad speciale quodlibet exemplum reperietur in singulis aequationis terminis, ed ideo per divisionem tolletur.* [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 514.

trächtlichen Fortschritt zu bemerken. Gregory hatte (S. 75) die Reihe $x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tg} x^5 - \frac{1}{7} \operatorname{tg} x^7 + \cdots$ gefunden, und einen besonderen Fall dieser allgemeinen Formel stellte

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

vor Augen. Ihn hat Leibniz (S. 76) selbständig nachentdeckt, und auch De Lagny hat ihn 1682 aufgefunden, wie er später gelegentlich sich äusserte[1]). Zur thatsächlichen Ausrechnung der Zahl π war freilich diese Reihe nicht zu empfehlen. De Lagny berichtet im Zusammenhang mit der eben erwähnten Aeusserung, Ozanam habe bemerkt, man müsse, um auch nur die Genauigkeit $\pi = 3{,}14$ zu erreichen, mehr als 300 Stellen jener Reihe in Rechnung ziehen. Eine zweckmässige Umformung der Gregory'schen Reihe gab dagegen John Machin, ein Astronom, der zur Untersuchungscommission im Prioritätsstreite gehörte, und von dessen Berechnung der Zahl π wir (S. 306), als wir die Mitglieder jenes Ausschusses musterten, sagten, sie sei 1706 in Jones' Synopsis palmariorum matheseos der Oeffentlichkeit übergeben worden. Machins Umformung beruht auf dem Kunstgriffe[2]), einen Bogen zu finden, der selbst eine in die Berechnung sich leicht einfügende Tangente habe, und von welchem ein Vielfaches sich nur um einen geringen Betrag von $\frac{\pi}{4}$ unterscheide. Sei z. B. $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, so ist

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - (\operatorname{tg} a)^2} = \frac{5}{12} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} 4a = \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1 - (\operatorname{tg} 2a)^2} = \frac{120}{119}.$$

Nun ist $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ von $\operatorname{tg} 4a$ nur um $\frac{1}{119}$ unterschieden, folglich liegt auch $4a = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ nahe bei $\frac{\pi}{4}$. Um dann $\frac{\pi}{4}$ selbst zu erhalten, wird von der Formel $\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$ Gebrauch gemacht. Setzt man $A = 4a$, $B = \frac{\pi}{4}$, so wird $\operatorname{tg}\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119} \cdot 1} = \frac{1}{239}$, also $4a - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ und

$$\frac{\pi}{4} = 4a - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Die zweimal in Anwendung gebrachte Gregorysche Formel liefert also

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1719, pag. 144. [2]) Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature de cercle 2e édition.* Paris 1831. pag. 156 Note 1 und pag. 279—282.

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \cdots\right)$$

und mit Hilfe dieser Reihen hat Machin $\frac{\pi}{4}$ auf 100 Decimalstellen genau ausgerechnet.

De Lagny[1]) hat in dem wiederholt erwähnten der Pariser Académie des Sciences am 23. Juni 1717 vorgelegten Aufsatze nun gar π bis auf 127 Decimalstellen genau ausgerechnet, indem er von $\operatorname{tg} 30^0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ausging.

In die eigentliche Reihenlehre gehören Untersuchungen, welche in Italien zuerst veröffentlicht wurden, dann in Deutschland und Frankreich Gelegenheit zu wenig fruchtbaren Streitigkeiten[2]) gaben, welche gleichwohl besprochen werden müssen, weil sie kennzeichnend für die Auffassung sind, mit welcher man damals in den genannten Ländern an diese Dinge herantrat. Guido Grandi[3]) (1671—1742), ein in Cremona geborener Camaldulensermönch, war seit 1700 Professor der Philosophie an der Universität Pisa, welcher er von 1714 an als Professor der Mathematik angehörte. Er gab 1703 eine Schrift unter dem Titel: Geometrisch dargelegte Quadratur des Kreises und der Hyperbel mit Hilfe unendlich vieler Hyperbeln und Parabeln[4]) heraus, in welcher die Division $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ als Ausgangspunkt diente, von welchem aus die Einsetzung von $x = 1$ zu der Gleichung $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ führte. Allerdings hatte Jakob Bernoulli bereits in seiner Abhandlung von 1696 auf dieses Paradoxon hingewiesen (S. 96), aber er hatte die Erklärung beigefügt, die auffallende Form entstehe, weil bei fortgesetzter Division der Rest jedesmal der gleiche nur mit anderem Vorzeichen versehene sei, und hatte anderweitige Folgerungen nicht gezogen. Grandi dagegen vereinigte je zwei aufeinander folgende Reihenglieder $1 - 1$ zu 0 und schrieb nun $0 + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}$ als Symbol der Schöpfung der Welt aus dem Nichts. Ihm trat Marchetti[5]), der gleichfalls in Pisa lehrte, entgegen. Grandi liess 1710 ein zweites Buch folgen: Untersuchung über die unendlich vielen Ordnungen des Unendlichgrossen und Unendlichkleinen[6]), in welchem die gleiche Behauptung wieder-

[1]) *Historie de l'Académie des Sciences.* Année 1719 pag. 135—144. [2]) Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 65—70. [3]) Poggendorff I, 940. [4]) *Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas et parabolas geometrice exhibita.* [5]) Poggendorff II, 44. [6]) *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus disquisitio.*

holt war. Ueberdies beschäftigte sich Grandi jetzt auch mit Leibniz, dessen Differentialien und dessen philosophischer Auffassung des Unendlichkleinen[1]). Es mag wohl sein, dass diese Einbeziehung des berühmten Gelehrten wesentlich dazu beitrug, Grandis Buch ausserhalb Italien Leser und Gegner zu verschaffen. Leibniz trat in den A. E. von 1712[2]) und ausserdem in dem V. Supplementbande der A. E. in Gestalt eines an Wolf gerichteten offenen Briefes[3]) in den Streit ein, der besonders von Varignon[4]) geführt wurde. Ausserdem wurden über den gleichen Gegenstand noch zahlreiche Briefe zwischen Leibniz und Wolf[5]), zwischen Leibniz und Varignon[6]), zwischen Leibniz und Grandi[7]), zwischen Leibniz und Niclaus I. Bernoulli[8]) gewechselt. Grandi berief sich, um den Satz $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ zu erläutern, auf ein dem Rechtsleben entnommenes Beispiel. Ein Vater hinterlässt zwei Söhnen einen werthvollen Edelstein, der abwechselnd je ein Jahr in dem Besitze eines jeden von beiden bleiben solle, ohne veräussert werden zu dürfen; dann gehöre er thatsächlich jedem zur Hälfte, während dessen Besitzrecht durch die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ dargestellt werde. Leibniz liess das Beispiel in seinem offenen Briefe an Wolf[9]) nicht gelten. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem angenommenen Falle und der unendlichen Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ liege darin, dass die gleiche Erbberechtigung der beiden Brüder unangetastet bleibe, wenn sie auch nicht für ewige Zeiten, sondern nur etwa für 100 Jahre den Edelstein umschichtig besitzen sollen, während die Reihe auf 100 Glieder beschränkt den Werth 0 habe und erst bei unendlich vielen Gliedern zu $\frac{1}{2}$ werde. Die Unendlichkeit sei also der wesentlichste Umstand bei der Zusammenfassung der Reihe in eine Summe, und zwar verhalte sich die Sache so: Die unendliche Anzahl der Reihenglieder könne nur grad oder ungrad sein. Sei sie grad, so entstehe 0 als Reihensumme, 1 dagegen, wenn die Gliederzahl ungrad ist. Da aber kein Vernunftsgrund für das vorzugsweise Gradsein oder das vorzugsweise Ungradsein der Gliederzahl geltend gemacht werden könne, so geschehe es durch wunderbare Eigenart der Natur[10]), dass beim Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zugleich ein Uebergang von

[1]) Vivanti, *Il concetto d'infinitesimo* an den im Register unter dem Worte *Grandi* angegebenen Stellen. [2]) Leibniz V, 387—389. [3]) Ebenda V, 382 bis 387. [4]) A. E. 1712 pag. 154—166 und *Histoire de l'Academie des Sciences.* Année 1715 pag. 203—225. [5]) Leibniz, Supplementband zum mathematischen Briefwechsel 143—149. [6]) Ebenda IV, 187—190. [7]) Ebenda IV, 215 bis 220. [8]) Ebenda III, 979—992. [9]) Ebenda V, 386. [10]) *admirabili naturae ingenio.*

dem Disjunctiven, welches aufhöre, zu dem Bleibenden, welches in der Mitte zwischen dem Disjunctiven liege, stattfinde. Wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorschreibe, man habe das arithmetische Mittel, d. h. die Hälfte der Summe gleich leicht erreichbarer Grössen in Rechnung zu ziehen, so beobachte hier die Natur der Dinge das gleiche Gesetz der Gerechtigkeit. Diese Art zu schliessen sei freilich mehr metaphysisch als mathematisch, aber dennoch sicher, wie denn überhaupt die Anwendung der Vorschriften der wahren Metaphysik in der Mathematik, in der Analysis, in der Geometrie sogar weit häufiger von Nutzen sei, als man gemeinhin glaube. Die Natur, so sagt Leibniz in einem an Grandi gerichteten Briefe[1]), schreibe den Dingen das Gesetz der Continuität vor, und dessen Anwendung führe niemals irre, wenn es auch hier nicht auf strenger Beweisführung, sondern auf Gründen des Uebereinkommens[2]) beruhe, dass man sagen dürfe, Gott selbst habe auf das Stetigkeitsgesetz Rücksicht genommen. Hier greift Leibniz auf Dinge, welche er, wie wir uns erinnern (S. 277), am Anfange des Jahrhunderts öffentlich zu vertheidigen gehabt hatte.

In Grandis Schrift war noch ein misslicher Punkt, an welchen seine Gegner sich stiessen. Wallis hatte (Bd. II, S. 902) das Negative mehr als unendlich genannt. Leibniz hatte in den höheren Differentialen Unendlichkleines von verschiedener Ordnung in die Mathematik eingeführt, und dem Unendlichkleinen entsprach auch Unendlichgrosses verschiedener Ordnung. Grandi hat beide Auffassungen des mehr als Unendlichen in unklarer Weise vermengt. Dagegen wandte sich Leibniz in dem oben erwähnten Aufsatze[3]) in den A. E. von 1712. Schon Antoine Arnauld[4]) habe seiner Zeit in Paris ihm seine Verwunderung darüber ausgesprochen, dass die Mathematiker die Proportion $1 : -1 = -1 : 1$ für richtig halten könnten. Unter allen Umständen sei -1 kleiner als $+1$, und so besage jene Proportion: ein Grösseres verhalte sich zu einem Kleineren wie ein Kleineres zu einem Grösseren, und das sei unmöglich. Dieser Ansicht schliesst sich Leibniz der Sache nach vollständig an, der Form nach könne man sich aber solcher Proportionen bei der Rechnung mit gleicher Sicherheit und demselben Nutzen wie anderer nur eingebildeter Grössen bedienen[5]). Imaginär könne man ein Verhältniss nennen, dem kein Logarithmus entspreche, und das sei hier der Fall.

[1]) Leibniz IV, 219. [2]) *convenientiae rationibus.* [3]) Leibniz V, 387 bis 389. [4]) Einer der Führer der sogenannten Partei von Port-Royal und naher Freund von Blaise Pascal. [5]) *etsi in calculo haec, ut alia imaginaria, tuto et utiliter adhibeatur.*

Da $\log 1 = 0$ sei, so würde $\log\left(\frac{-1}{1}\right) = \log(-1) - \log 1 = \log(-1)$ sein, und einen Logarithmus von -1 gebe es nicht. Er könne nämlich nicht positiv sein, denn einem positiven Logarithmen entspreche eine die Einheit übersteigende positive Zahl. Er könne ebensowenig negativ sein, denn einem negativen Logarithmen entspreche eine unterhalb der Einheit befindliche abermals positive Zahl. Da mithin der Logarithmus von -1 weder positiv noch negativ sein könne, so bleibe nichts Anderes übrig, als dass er überhaupt nicht wahrhaft vorhanden, sondern imaginär sei [1]). Man könne den Beweis dieser Behauptung auch dadurch führen, dass, wenn es in Wahrheit einen Logarithmus von -1 gäbe, dessen Hälfte der Logarithmus von $\sqrt{-1}$, also von einer imaginären Zahl sein müsste, was widersinnig sei. Aus allen diesen Erwägungen folge, dass Wallis etwas Menschliches begegnet sei, als er sagte, das Verhältniss von 1 zu -1 sei mehr als unendlich [2]). Damit wolle keineswegs in Abrede gestellt werden, dass -1 kleiner als Null sei, nur müsse man diesem Ausdrucke den richtigen Sinn beilegen, wie es überhaupt in der Mathematik manche Benennungen gebe, deren Sinn besondere Erörterung bedürfe. Mittels dieses Ausspruches war für Leibniz der Uebergang zum Unendlichgrossen und Unendlichkleinen gewonnen und er erörtert jene Begriffe wieder in ganz ähnlicher Weise wie im Journal de Trévoux von 1701 (S. 275). Ein unendlich kleiner Irrthum sei ein solcher, der kleiner als jeder gegebene, also in Wahrheit nicht vorhanden sei, und wenn man Gewöhnliches, Unendlichgrosses und Unendlichmalunendlichgrosses vergleiche, so sei das wie wenn man die Durchmesser eines Staubkornes, der Erde und des Fixsternhimmels vergleiche. Solche Erörterungen seien wohl im Stande, Streitigkeiten wie die zwischen Grandi und Varignon beizulegen, beziehungsweise zu verhüten.

Varignons Bemängelungen von Grandis Buch, deren Abdruck im Aprilheft 1712 der A. E. oben gleichfalls Erwähnung fand, zielten auf die irrige Vermengung Leibnizischer und Wallis'scher Auffassung des Mehralsunendlichen, deren Grandi sich schuldig gemacht hatte, und welche uns heute von Seiten eines Mannes, dem man bei alledem den Namen eines ganz tüchtigen Mathematikers nicht absprechen kann, gradezu verblüffend erscheint. In dem Aufsatze vom 16. Februar 1715, welcher in den Veröffentlichungen der Académie des Sciences gedruckt ist, hat Varignon den Satz ausgesprochen, eine aus der Division durch ein Binomium hervorgegangene unendliche Reihe sei:

1. immer richtig, wenn die beiden das Binomium bildenden Glieder unter einander ungleich seien, und das Grössere derselben an erster Stelle stehe;

2. immer falsch, wenn unter der gleichen Voraussetzung das kleinere der beiden das Binomium bildenden Glieder an erster Stelle stehe;

3. liefere die Division, sofern beide Glieder des Divisors einander gleich seien, einen vorher bekannten unendlich grossen Quotienten, wenn die Glieder des Binomiums von einander abzuziehen, und Falsches, wenn jene zu addiren seien.

Varignon fügte dann ähnliche Regeln für die Potenzentwicklung eines Binomiums bei negativ ganzzahligem Exponenten hinzu. Bezüglich der Entwicklung bei gebrochenem Exponenten gesteht er ein, noch kein abschliessendes Ergebniss gefunden zu haben. Am Anfang des für die Lehre von der Reihenconvergenz hochwichtigen Aufsatzes erklärt Varignon, dessen Inhalt sei eigentlich schon seit October 1712 druckfertig und nur äussere Hindernisse hätten die Veröffentlichung verzögert. Damit stimmt ein an Leibniz gerichteter Brief vom 19. November 1712 überein [1]) in welchem der Hauptsatz, wann die Division eine richtige Reihe ergebe, sich bereits vorfindet.

Wir haben (S. 366) mit Beziehung auf Grandis Reihe auch einen Briefwechsel zwischen Leibniz und Niclaus I. Bernoulli erwähnt. Dieser Briefwechsel betraf freilich nicht einzig die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

die Giltigkeit von Reihen im Allgemeinen trat in Untersuchung. Niclaus I. Bernoulli warf am 25. October 1712 die Frage auf, wann wohl die Summe einer Reihe unmöglich werde, und beantwortete sie sogleich dahin [2]), das sei der Fall, wenn die Reihe

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

heisse, oder aus dieser Reihe durch Addition, durch Multiplication, durch Differentiation entstehe, während x einen negativen, die Einheit überschreitenden Werth besitze und n eine echt oder unecht gebrochene Zahl mit gradem Nenner sei. Divergenz der Reihe, heisst es in einem späteren Briefe [3]) vom 7. April 1713, genüge nicht für sich allein, um die Unmöglichkeit ihres Werthes darzuthun. So sei

[1]) *superest ut sit non verus, sed imaginarius.* [2]) *Et proinde nonnihil humani passus est insignis in paucis Geometra Iohannes Wallisius, cum dixisset rationem 1 ad -1 esse plus quam infinitam.*

[1]) Leibniz IV, 189. [2]) Ebenda III, 980. [3]) Ebenda III. 982—984.

$$(1-x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 + \cdots$$

und

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \cdots$$

Beide Reihen seien divergent, wenn $x > 1$, aber dabei habe die erste Reihe einen möglichen, die zweite einen imaginären Werth. Der Grund der vorhandenen Ungewissheit liege in dem Reste R[1]), welcher eigentlich der Reihe noch fehle. Dieser könne trotz der Rationalität aller eigentlichen Reihenglieder unmöglich sein, und dann mache er die Reihe selbst unmöglich. Das Restglied sei es auch auf welchem der Wortstreit[2]) zwischen Varignon und Grandi beruhe. Niclaus I. Bernoulli hat hier ganz unbefangen des Ausdruckes einer divergenten Reihe sich bedient, ohne eine Begriffsbestimmung zu geben, ohne zu sagen, was für ihn divergent heisse, wenn es auch nahe liegt zu vermuthen, er habe das Wachsen der Reihenglieder darunter verstanden. Leibniz bediente sich in seiner Antwort vom 28. Juni 1713 des Wortes advergente Reihe und erläuterte es auch[3]). Eine advergente Reihe muss nach Leibniz sich so weit fortsetzen lassen, dass sie sich von einem endlichen möglichen Werthe um weniger als eine angebbare Grösse unterscheide und kann daher nicht unmöglich sein. Von einer nicht advergenten Reihe kann man dagegen nicht als gewiss behaupten, sie stelle eine endliche unmögliche Grösse dar, denn sie kann auch ein Unendlichgrosses darstellen. Von einem unmittelbaren Erkennungszeichen advergenter wie divergenter Reihen ist freilich bei Leibniz so wenig wie bei Niclaus I. Bernoulli die Rede. Bemerkenswerth erscheint Leibnizens Vorschlag[4]), die zu untersuchenden Reihen nicht auf die Form der binomischen Reihe zurückzuführen, sondern zu versuchen, ob man nicht alternirende Theile, deren jeder aus einem oder mehreren Gliedern bestehen könne, hervorzubringen im Stande sei. Nahezu gleichzeitig schrieb Leibniz unter dem 25. October 1713 an Johann Bernoulli[5]), jede Reihe, welche aus alternirenden ins Unendliche abnehmenden Theilen bestehe, sei advergent, und eine Methode scheine erdacht werden zu können, jede advergente Reihe in eine solche von

[1]) *residuum R.* [2]) *logamachia.* [3]) Leibniz III, 985: *Illud certum est, quoties quantitas est impossibilis, seriem non posse esse advergentem, seu talem, quae tamdiu continuari possit, ut a quantitate aliqua finita possibili differat quantitate minore quam sit data: alioquin enim utique possibili illi finitae aequabitur. Etsi autem non possit pro certo dici, vice versa seriem non advergentem exprimere quantitatem finitam impossibilem, cum fortasse infinitam exprimere possit.* [4]) Ebenda III, 990. [5]) Ebenda III, 923.

der erwähnten Art umzuformen. Unsere Leser erinnern sich aus dem 86. Kapitel (S. 82), dass ähnliche Gedanken schon in dem Entwurfe *Compendium quadraturae arithmeticae* geäussert waren, dass sie in dem am 10. Januar 1714 an Johann Bernoulli gerichteten Briefe[1]) bis zur Einschliessung alternirender Reihen mit unendlich abnehmenden Gliedern zwischen zwei Grenzen sich klärten.

Wir haben im Laufe dieses Kapitels zweimal einen Gegenstand gestreift, dem wir uns nunmehr zuwenden müssen. Wir sagten (S. 362), Johann Bernoulli habe imaginäre Logarithmen eingeführt, und (S. 368) Leibniz habe das Vorhandensein des Logarithmus von -1 geleugnet. Beide Aeusserungen waren der Oeffentlichkeit übergeben, waren gewiss von zahllosen Lesern bemerkt worden, ohne dass von irgend einem Dritten bekannt geworden wäre, dass er durch die Anregung zu eigenen Forschungen veranlasst wurde. Johann Bernoulli und Leibniz waren zunächst und noch für geraume Zeit die Einzigen, für welche eine Frage der Logarithmen negativer Zahlen bestand. Sie kamen darüber in einen durchweg freundschaftlich geführten brieflichen Streit der sich vom März 1712 bis zum Juli 1713 hinzog[2]). Leibniz machte nämlich am 16. März 1712 Johann Bernoulli zum Voraus auf den Aufsatz Varignons und auf seinen eigenen im Aprilhefte jenes Jahres der A. E. und auf die darin behauptete Unmöglichkeit der Logarithmen negativer Zahlen aufmerksam. Johann Bernoulli widersprach dieser Behauptung in seiner Antwort vom 25. Mai. Bekanntlich sei $d \log x = \frac{dx}{x}\cdot$ Nun sei genau ebenso $d \log(-x) = \frac{-dx}{-x}\cdot$ Aber $\frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$, und folglich müsse $\log(-x) = \log x$ sein. Geometrisch zeige sich die Wahrheit dieser Gleichung daran, dass (Fig. 48) der logarithmischen Curve ABC eine symmetrische Gefährtin $\alpha\beta\gamma$ zuzugesellen sei. Während fünfviertel Jahre gingen Briefe herüber und hinüber, ohne dass einer der beiden Briefschreiber den anderen zu überzeugen vermocht hätte, und erst als 1745 der Briefwechsel im Drucke erschien, wurde, wie wir im XVIII. Abschnitte sehen werden, die Frage durch Einmischung eines neuen Forschers spruchreif.

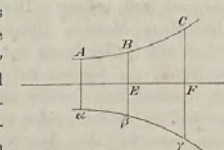

Fig. 48.

Aus demselben Briefwechsel haben wir (S. 230) die von Leibniz

[1]) Leibniz III, 926. [2]) Ebenda III, 881, 886, 888, 891—892, 895—896, 898—900, 901, 902, 905—906, 907—909, 912—913, 915.

erkannte Verwandtschaft zwischen der **höheren Differenzirung eines Productes** und der Potenzirung einer Summe hervorgehoben. Wir haben damals angegeben, Leibniz habe das in jener Zeit Gefundene erst später in den Veröffentlichungen der Berliner Academie zum Drucke gegeben. Wir müssen hier, wo wir innerhalb der Zeit jener Drucklegung uns bewegen, die Angabe wiederholen. Ein näheres Eingehen auf die Abhandlung[1]) dürfte nur insofern erforderlich sein, als wir zu bemerken haben, Leibniz sei bei dem Producte zweier Factoren nicht stehen geblieben, sondern habe allgemein die Beziehungen zwischen $d^n(xyz\ldots)$ und $(dx + dy + dz + \cdots)^n$ aufgezeigt.

Wir haben aus der gleichen Zeit, in welcher die Mathematiker des europäischen Festlandes im Streite mit und über Grandi die grundlegenden Begriffe der Reihenlehre erörterten, wenn auch nicht wesentlich förderten, eine kleine durchaus practischen Zwecken dienende Abhandlung Newtons zu erwähnen. Schon in seinem zweiten Briefe an Leibniz vom 24. October 1676 hat Newton den Gedanken ausgesprochen, man könne zur bequemeren Quadratur einer krummlinig begrenzten Figur sich einer Hilfscurve bedienen, welche durch beliebig viele gegebene Punkte der ursprünglichen Begrenzung hindurchgehe (S. 187). In den Principien, und zwar im V. Lemma ihres dritten Buches, sprach er die Aufgabe abermals in der Form aus, man solle eine **durch beliebig viele gegebene Punkte hindurchgehende parabolische Curve** sich verschaffen[2]), und gab als Mittel zur Erreichung des beabsichtigten Zweckes an, man solle die aufeinander folgenden Differenzen der Ordinaten der gegebenen Curvenpunkte bilden. Er erörterte alsdann diesen ziemlich dunkeln Ausspruch mit grösserer Deutlichkeit in einer besonderen kürzeren Abhandlung *Methodus differentialis*[3]), welche 1711 durch William Jones mit Genehmigung des Verfassers herausgegeben wurde, und sie ist es, von der wir zu reden haben. Wir bedienen uns dabei, um heutiger Schreibweise näher zu kommen und dadurch leichter verständlich zu sein, einer von Newton sehr abweichenden Bezeichnung, bemerken aber, dass Newton doch bereits indicirte Buchstaben mit rechts vom Buchstaben befindlichen Stellenzeiger gebrauchte, dass also diese Sitte nunmehr auch nach England herübergekommen war. Eine parabolische Curve soll also durch die Punkte x_0y_0, x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, ... hindurchgelegt werden, wobei angenommen ist, die x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 ... seien in arithmetischer Reihe wachsende Ab-

[1]) Leibniz V, 377—382. [2]) *Invenire lineam curvam generis Parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit.* [3]) *Opuscula Newtoni* I, 271—282.

scissen, so dass $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = h$. Als Gleichung der Curve wird versuchsweise

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

gesetzt. Der Annahme zufolge finden die Gleichungen statt:

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + a_0x_0^4 + \cdots \\
y_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4 + \cdots \\
y_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + a_4x_2^4 + \cdots \\
y^3 &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + a_4x_3^4 + \cdots \\
y_4 &= a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 + a_3x_4^3 + a_4x_4^4 + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

deren Anzahl gleich der Anzahl der rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Glieder, gleich der der gegebenen Punkte sein muss. Zieht man jede Gleichung von der nächstfolgenden ab und nennt $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, so entsteht:

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1^2 - x_0^2) + a_3(x_1^3 - x_0^3) + a_4(x_1^4 - x_0^4) + \cdots \\
\Delta y_1 &= a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_2^2 - x_1^2) + a_3(x_2^3 - x_1^3) + a_4(x_2^4 - x_1^4) + \cdots \\
\Delta y_2 &= a_1(x_3 - x_2) + a_2(x_3^2 - x_2^2) + a_3(x_3^3 - x_2^3) + a_4(x_3^4 - x_2^4) + \cdots \\
\Delta y_3 &= a_1(x_4 - x_3) + a_3(x_4^2 - x_3^2) + a_3(x_4^3 - x_3^3) + a_4(x_4^4 - x_3^4) + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und jedes der Glieder rechts vom Gleichheitszeichen, also auch die links angedeutete Summe dieser Glieder, ist durch den regelmässig gleichbleibenden Unterschied h der auf einander folgenden x, den man auch Δx nennen könnte, theilbar, ein Satz, den unter Anderen auch De Sluse (S. 138) ausgesprochen hatte. Die Vollziehung der Division durch Δx liefert, wenn $\frac{\Delta x_k}{\Delta x} = z_k$ gesetzt wird, die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned}
z_0 = a_1 + a_2(x_1 + x_0) &+ a_3(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) \\
&+ a_4(x_1^3 + x_1^2x_0 + x_1x_0^2 + x_0^3) + \cdots \\
z_1 = a_1 + a_2(x_2 + x_1) &+ a_3(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \\
&+ a_4(x_2^3 + x_2^2x_1 + x_2x_1^2 + x_1^3) + \cdots \\
z_2 = a_1 + a_2(x_3 + x_2) &+ a_3(x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2) \\
&+ a_4(x_3^3 + x_3^2x_2 + x_3x_2^2 + x_2^3) + \cdots \\
z_3 = a_1 + a_2(x_4 + x_3) &+ a_3(x_4^2 + x_4x_3 + x_3^2) \\
&+ a_4(x_4^3 + x_4^2x_3 + x_4x_3^2 + x_3^3) + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diese werden abermals jede von der nächstfolgenden abgezogen, und Werthe Δz_0, Δz_1, Δz_2 ... werden dadurch ermittelt, deren jeder sich durch $x_{k+2} - x_k = 2\Delta x$ theilbar erweist. Man vollzieht die Division und setzt $\frac{\Delta z_k}{2\Delta x} = u_k$. Die Anzahl der Gleichungen, welche alsdann der Untersuchung noch unterbreitet sind, ist naturgemäss wieder um die Einheit vermindert. Die Gleichungen selbst heissen:

$$u_0 = a_2 + a_3(x_2 + x_1 + x_0) + a_4(x_2^2 + x_2x_1 + x_2x_0 + x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) + \cdots$$
$$u_1 = a_2 + a_3(x_3 + x_2 + x_1) + a_4(x_3^2 + x_3x_2 + x_3x_1 + x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \cdots$$
$$u_2 = a_2 + a_3(x_4 + x_3 + x_2) + a_4(x_4^2 + x_4x_3 + x_4x_2 + x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2) + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Der nächste Schritt führt zur Ermittelung von $\Delta u_0, \Delta u_1 \ldots$ und deren Division durch $x_{k+3} - x_k = 3\Delta x$. Dabei mag $\frac{\Delta u_k}{3\Delta x} = v_k$ heissen. So bekommt man

$$v_0 = a_3 + a_4(x_3 + x_2 + x_1 + x_0) + \cdots$$
$$v_1 = a_3 + a_4(x_4 + x_3 + x_2 + x_1) + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

woraus $\Delta v_0 = a_4(x_4 - x_0) = 4a_4\Delta x + \cdots$ folgt, beziehungsweise $w_0 = \frac{\Delta v_0}{4\Delta x} = a_4 + \cdots$.

Denken wir uns, um festen Boden zu gewinnen, es seien genau 5 Punkte, durch welche die parabolische Curve hindurchgehen soll, so schliesst die Rechnung mit $a_4 = w_0$ ab. Allmähliche Einsetzung in die entwicklungsmässig vorausgehenden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} a_3 &= v_0 - (x_3 + x_2 + x_1 + x_0)w_0 \\ a_2 &= u_0 - (x_2 + x_1 + x_0)v_0 \\ &\qquad + (x_3x_2 + x_3x_1 + x_3x_0 + x_2x_1 + x_2x_0 + x_1x_0)w_0 \\ a_1 &= z_0 - (x_1 + x_0)u_0 + (x_2x_1 + x_2x_0 + x_1x_0)v_0 \\ &\qquad - (x_3x_2x_1 + x_3x_2x_0 + x_3x_1x_0 + x_2x_1x_0)w_0 \\ a_0 &= y_0 - x_0z_0 + x_1x_0u_0 - x_2x_1x_0v_0 + x_3x_2x_1x_0w_0. \end{aligned}$$

Somit sind die Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 gewonnen, welche in die angenommene Curvengleichung $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ eingesetzt werden können. Es ist bei dieser Einsetzung vortheilhafter, die Ordnung nach Potenzen von x fallen zu lassen und vielmehr die Theile zusammenzufassen, welche je mit y_0, z_0, u_0, v_0, w_0 vervielfacht sind. Alsdann entsteht:

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ (x - x_0)z_0 + (x^2 - (x_1 + x_0)x + x_1x_0)u_0 \\ &+ (x^3 - (x_2 + x_1 + x_0)x^2 + (x_2x_1 + x_2x_0 + x_1x_0)x - x_2x_1x_0)v_0 \\ &+ (x^4 - (x_3 + x_2 + x_1 + x_0)x^3 + (x_3x_2 + x_3x_1 + x_3x_0 + x_2x_1 + x_2x_0 + x_1x_0)x^2 \\ &- (x_3x_2x_1 + x_3x_2x_0 + x_3x_1x_0 + x_2x_1x_0)x + x_3x_2x_1x_0)w_0. \end{aligned}$$

Hier lassen aber die Coefficienten von u_0, von v_0, von w_0 sich leicht als Producte aus einfachen Factoren schreiben, und die Curvengleichung nimmt die Gestalt an:

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ (x - x_0)z_0 + (x - x_1)(x - x_0)u_0 + (x - x_2)(x - x_1)(x - x_0)v_0 \\ &+ (x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0)w_0. \end{aligned}$$

Endlich sei noch eine Umformung angedeutet, welche Newton, da er kein Differenzenzeichen besass, nicht vornehmen konnte. Uns war $z_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x}$, $u_0 = \frac{\Delta z_0}{2\Delta x}$, $v_0 = \frac{\Delta u_0}{3\Delta x}$, $w_0 = \frac{\Delta v_0}{4\Delta x}$. Fortgesetzte Differenzenbildung der Ordinaten liegt also dem Sinne dieser Buchstaben zu Grunde, und ein Mathematiker unserer Zeit würde in der letzten Gleichung für y noch

$$z_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x},\quad u_0 = \frac{1}{1.2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2},\quad v_0 = \frac{1}{1.2.3}\frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x^3},\quad w_0 = \frac{1}{1.2.3.4}\frac{\Delta^4 y_0}{\Delta x^4}$$

schreiben. Eine Durchsichtigkeit der Form würde dadurch erzielt, welche die Tragweite des in der Methodus differentialis gelehrten Verfahrens deutlich erkennen liesse.

Was Newton mit seinem Verfahren bezweckte, hat er wie in dem Briefe vom 24. October 1676, wie in den Principien (S. 372) auch in der Methodus differentialis selbst ausgesprochen. Die 6. und letzte Aufgabe verlangt, irgend eine krummlinige Figur so genau als möglich zu quadriren, wenn eine Anzahl von Ordinaten gefunden werden könne[1]), und als Vorschrift zur Auflösung der Aufgabe ist kurzweg gesagt, man solle nach den gegebenen Regeln eine parabolische Curve durch die Endpunkte jener bekannten Ordinaten legen; diese lasse sich dann immer quadriren. Aber Newton bemerkt ferner in einem an die 6. Aufgabe sich anschliessenden Scholium, die erörterten Sätze seien nützlich zur Herstellung von Tabellen mittelst Reiheninterpolation[2]), und von dieser Aeusserung hat die oben mitgetheilte Formel den Namen der Newtonschen Interpolationsformel erhalten, unter welchem sie bekannt ist.

Als Beispiel einer Curvenquadratur nimmt das eben erwähnte Scholium an, es sollen 4 Ordinaten in gleichen Zwischenräumen, deren jeder auf der Abscissenaxe gemessen $\frac{R}{3}$ heisse, gegeben sein; die Summe der beiden äussersten Ordinaten soll A, die der beiden mittleren Ordinaten B sein. Eine neue in der Mitte errichtete Ordi-

[1]) *Figuram quamcunque curvilineam qnadrare quamproxime, cujus Ordinatae aliquot inveniri possunt.* [2]) *Utiles sunt hae propositiones ad tabulos construendas per interpolationem serierum.*

nate, wird behauptet, werde alsdann die Länge $\frac{9B-A}{16}$ besitzen, und die Fläche betrage $\frac{A+3B}{8}\cdot R$. Newton sagt nicht, wie er die Rechnung vollzogen habe, aber der 3. und 4. Satz der Methodus differentialis, welche wir in unserem Berichte mit Stillschweigen übergangen haben, gestattet Newtons Gedankenfolge mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit herzustellen. Denken wir uns (Fig. 49) $M_0P_0 = y_0$, $M_1P_1 = y_1$, $M_2P_2 = y_2$, $M_3P_3 = y_3$ als die vier genannten Ordinaten, $P_0P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \frac{R}{3}$. Wir wählen O, den Mittelpunkt der P_0P_3, zum Coordinatenanfangspunkt, messen die positiven Abscissen nach links, die negativen nach rechts, also $OP_0 = \frac{R}{2}$, $OP_1 = \frac{R}{6}$, $OP_2 = -\frac{R}{6}$, $OP_3 = -\frac{R}{2}$. Die Curvengleichung setzen wir als $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ voraus und erhalten

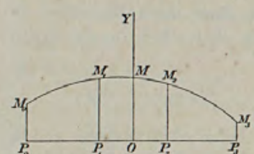

Fig. 49.

$$y_0 = a_0 + \frac{R}{2}a_1 + \frac{R^2}{4}a_2, \quad y_1 = a_0 + \frac{R}{6}a_1 + \frac{R^2}{36}a_2,$$
$$y_2 = a_0 - \frac{R}{6}a_1 + \frac{R^2}{36}a_2, \quad y_3 = a_0 - \frac{R}{2}a_1 + \frac{R^2}{4}a_2.$$

Man sieht hieraus

$$y_0 + y_3 = A = 2a_0 + \frac{R^2}{2}a_2, \quad y_1 + y_2 = B = 2a_0 + \frac{R^2}{18}a_2.$$

Diese Gleichungen liefern weiter $A - B = \frac{4R^2}{9}a_2$ und $a_2 = \frac{9A-9B}{4R^2}$. Dann ist aber $a_0 = \frac{A}{2} - \frac{R^2}{4}a_2 = \frac{9B-A}{16}$. Die Curvengleichung hat mithin die Gestalt $y = \frac{9B-A}{16} + a_1x + \frac{9A-9B}{4R^2}x^2$, und bei $x = 0$ ist $OM = \frac{9B-A}{16}$ in Uebereinstimmung mit Newtons Behauptung. Die Unbestimmtheit des Buchstabens a_1 stört nicht bei der Quadratur vermöge der geschickten Wahl des Coordinatenanfangspunktes O. Die gesuchte Fläche ist nämlich

$$\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}}(a_0 + a_1x + a_2x^2)dx = \left\{a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3}\right\}_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}}$$
$$= R\left(a_0 + \frac{a_2R^2}{12}\right) = \frac{A+3B}{8}\cdot R$$

in abermaliger Uebereinstimmung mit Newtons Angabe.

Auf Grundlage der ersten in den Principien veröffentlichten

Bemerkungen Newtons hat auch Cotes sich mit der Interpolationsaufgabe beschäftigt. Roger Cotes[1]) (1682—1716) war Sohn eines Geistlichen. Sein Oheim John Smith erkannte frühzeitig die mathematische Begabung des Knaben und nahm ihn zu sich, um grade diese Geistesrichtung zu fördern. Cotes bezog 1699 die Universität Cambridge, und als 1706 ebendort durch eine Stiftung von Plume eine neue Professur der Astronomie und Physik ins Leben gerufen wurde, traf die einstimmige Wahl auf Cotes als ersten Inhaber. Einer der Wähler, Professor Whiston, äusserte bei dieser Gelegenheit, er fühle sich wie ein Kind neben Cotes, und noch schmeichelhafter ist der Ausdruck, dessen Newton sich bei dem Tode von Cotes bediente, man würde, wenn er am Leben geblieben wäre, reicher an Kenntnissen geworden sein[2]). Cotes also behandelte seit 1707 die Aufgabe, eine parabolische Curve durch gegebene Punkte zu legen und trug seine Untersuchungen 1709 in seinen Vorlesungen vor. Gedruckt sind dieselben in einem Bande nachgelassener Schriften[3]), welche Robert Smith, der Vetter des Verstorbenen und sein Nachfolger in der astronomischen Professur, 1722 herausgab.

Die erste Arbeit, durch welche Cotes auch in weiteren Kreisen bekannt wurde, war eine Abhandlung über Logarithmenberechnung unter dem Titel *Logometria*, welche in den P. T. für das erste Vierteljahr 1714 erschien[4]). Nachmals bildete sie den ersten Abschnitt der *Harmonia Mensurarum*, welche selbst den Hauptinhalt des erwähnten Bandes nachgelassener Schriften ausmacht. Als wesentlich ist daraus der Begriff des Modulus hervorzuheben, mit welchem der Logarithmus einer Zahl in einem Systeme vervielfacht werden muss, wenn man den Logarithmus derselben Zahl in einem anderen Systeme zu erhalten wünscht. Cotes hatte diesen neuen Namen schon am 25. Mai 1712 in einem Briefe an Newton benutzt und Letzteren um seine Meinung gebeten, ob er den Ausdruck für gut gewählt halte[5]). Die Sache an sich war allerdings nicht neu, denn wir wissen (S. 86), dass Halley den Modulus des Briggischen Logarithmensystems ebenso wie dessen reciproke Zahl bereits auf 60 Decimalstellen ausgerechnet und im XIX. Bande der P. T. veröffentlicht hatte, eine Arbeitsübereinstimmung, welche Halley kaum aus dem Gedächtniss gekommen sein kann, aber

[1]) *National Biography* XII, 282—284 (London 1887, edited by Leslie Stephen). [2]) *Had Cotes lived, we might have known something.* [3]) *Harmonia Mensurarum sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae: accedunt alia opuscula mathematica per Rogerum Cotesium.* Cantabrigiae 1722. Im Anhange pag. 32 ist über den Ursprung der hier erwähnten Schrift berichtet. [4]) P. T. XXIX, 5—45. [5]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes*, pag. 117.

auch Cotes um so weniger unbekannt geblieben sein wird, als er auf Veranlassung Newtons, des Vorsitzenden der Royal Society, seine Logometria grade an Halley, den damaligen Secretär der Gesellschaft, einschickte, um den Abdruck zu veranlassen.

Der nächste Schriftsteller, mit welchem wir uns zu beschäftigen haben, ist Brook Taylor[1]) (1685—1731). Er ist in Kent geboren und bezog 1701 die Universität Cambridge, wo er 1709 das Baccalaureat, 1714 den Doctorhut der Rechtsgelehrsamkeit erwarb, daneben aber auch unter Machin und Keill mathematische Studien trieb. Seiner Vielseitigkeit genügten auch diese beiden Wissensgebiete noch nicht. Er besass mehr als gewöhnliche Geschicklichkeit in Musik und Malerei. Er hatte viel Familienunglück, und der Kummer darüber beschleunigte seinen Tod. Seine erste 1708 verfasste mathematische Abhandlung über Schwingungsmittelpunkte erschien 1714 in den P. T.[2]). Wir haben es mit seiner *Methodus incrementorum directa et inversa* zu thun, einem nur 118 Quartseiten starken Bändchen, welches 1715 in London die Presse verliess[3]). Der Drucker hat viel durch undeutliche Zeichen, der Verfasser noch mehr durch undeutliche Schreibart an dem kleinen Buche gesündigt, so dass man fast darüber staunen kann, dass es trotz dieser Mängel frühzeitig zur verdienten Berühmtheit gelangte. Vielleicht trugen auf dem europäischen Festlande Bemängelungen des Buches, auf die wir bald zu reden kommen, das ihrige dazu bei, es bekannt zu machen, und in England hatte es eine mächtige Empfehlung in der Stellung des Verfassers zu Newton. Newton wird auch in der Methodus incrementorum bei jeder thunlichen Gelegenheit genannt und gerühmt. Andere Namen kommen überhaupt nicht vor, es sei denn in der Vorrede, in welcher Newtons Fluxionsmethode im Gegensatze zu der Exhaustionsmethode der Alten, zu den Summationsmethoden von Cavalieri und Wallis, zu jener Auffassung von Cavalieri und den Neueren, welche Theile als unendlich abnehmend betrachteten[4]), als allein vorwurfsfrei gepriesen wird. Diese durchaus einseitige Parteistellung hängt natürlich mit dem Prioritätsstreite zusammen, an welchem, wie wir wissen, Taylor als spät ernanntes Mitglied des Untersuchungsausschusses (S. 306) betheiligt war. Mit der gleichen Parteistellung dürfte es zusammenhängen, dass Taylor den Leibnizischen Brief vom Februar 1673 (S. 77

[1]) *Encyclopaedia Britannica* XXIII, 92 (Edition IX, 1888). [2]) P. T. XXVIII, 11. [3]) Das Exemplar der Heidelberger Universitätsbibliothek trägt die Bezeichnung: Londini MDCCXVII. Damals wurde ein neues Titelblatt gedruckt, also eine sogenannte neue Titelausgabe veranstaltet, was auf einen wenig befriedigenden Absatz des Buches schliessen lässt. [4]) *Cavallerius et Recentiores contemplarunt partes istas ut in infinitum diminutas.*

bis 78), in welchem werthvolle Anfänge der Differenzenrechnung sich finden, mit keiner Silbe erwähnt, trotzdem er ihn kennen musste, da er im Commercium Epistolicum von 1713 abgedruckt war, und da doch anzunehmen ist, dass Taylor wenigstens nachträglich eine Briefsammlung genauer gelesen haben werde, für deren Inhalt er mitverantwortlich war.

Taylor lässt, um nun in unserem Berichte zu dem eigentlichen Buche überzugehen, unbestimmte Grössen z, x, v u. s. w. durch Incremente wachsen, durch Decremente abnehmen. Als Zeichen des Incrementes, der Veränderung wollen wir lieber anstatt des Zuwachses sagen, um auch die Abminderung einzubegreifen, benutzt Taylor ein Pünktchen unter dem Buchstaben, welches verdoppelt u. s. w. auftritt, wenn Veränderungen der Veränderungen u. s. w. vorkommen. Die durch eine Ziffer angedeutete Anzahl der Pünktchen kann auch die Pünktchen selbst ersetzen, $\underset{3}{x}$ wird anstatt $\underset{\therefore}{x}$, $\underset{n}{x}$ anstatt x mit n darunter befindlichen Pünktchen geschrieben. Wird $n=0$ oder $n=-1$, so bedeutet $\underset{0}{x}$ die unveränderte Grösse x selbst, $\underset{-1}{x}$ die Grösse, deren erste Veränderung x sein soll. Das waren Gedanken, welche auch Leibniz seit etwa 20 Jahren besass (S. 230), aber öffentlich geäussert hat dieser sie nicht, so dass Taylors Unabhängigkeit feststeht, und ihm das Verdienst anheimfällt zuerst negative Indicirung eingeführt zu haben. Anstatt der negativen Zahlen unter den Buchstaben benutzt Taylor auch über denselben angebrachte, von links oben nach rechts unten gerichtete Strichelchen, ähnlich dem Gravis der griechischen Schrift, während der von rechts oben nach links unten geneigte Acutus die Fluente bedeutet. So ist also $\grave{x}$ eine Grösse, deren endliche Veränderung x wird, $\acute{x}$ eine solche, deren Fluxion x ist. Man sieht leicht, welche Schwierigkeiten solche verschieden geneigte Accente neben Fluxionspünktchen über und Incrementpünktchen unter den Buchstaben dem Drucker bereiten mussten. Die Regel für die Bildung einer Incrementgleichung ist die gleiche wie diejenige für die Bildung einer Fluxionsgleichung und wird einfach mit Anführungszeichen aus der Quadratura Curvarum[1]) in unabgeändertem Newtonschen Wortlaute übernommen.

Im dritten Satze stellt sich Taylor die Aufgabe der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen, indem er verlangt, eine Fluxionsgleichung, welche nur zwei Variable z, x enthalte, von denen z gleichförmig veränderlich sei, solle so umgeformt werden, dass x als die gleichförmig Veränderliche gelte[2]). Ersetzen wir die

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 209. [2]) *Methodus Incrementorum* pag. 8—9:

Fluxionspünktchen zur besseren Uebersicht durch indicirte d, lassen aber im Uebrigen Taylors Gedankengang unverändert, so schliesst derselbe folgendermassen: Ist z eine Function von x und als solche durch A bezeichnet, so hat man $dz = dA = Bdx$. Ueberdies soll $dB = Cdx$, $dC = Ddx$, $dD = Edx$ sein, wo also auch B, C, D, E Functionen von x sind. Fortgesetzte Differentiation gibt:

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned} d^2z &= d(Bdx) = B \,.\, d^2x + dB \,.\, dx = B \,.\, d^2x + C(dx)^2, \\ d^3z &= B \,.\, d^3x + dB \,.\, d^2x + 2C \,.\, dx \,.\, d^2x + dC \,.\, (dx)^2 \\ &= Bd^3x + 3Cdxd^2x + D(dx)^3, \\ d^4z &= Bd^4x + dB \,.\, d^3x + 3Cdx \,.\, d^3x + 3C(d^2x)^2 + 3dCdxd^2x \\ &\quad + 3D(dx)^2d^2x + dD(dx)^3 = Bd^4x + 4Cdxd^3x + 3C(d^2x)^2 \\ &\quad + 6D(dx)^2d^2x + E(dx)^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ist hierbei z gleichmässig veränderlich, mithin dz constant, so ist $d^2z = d^3z = d^4z = \cdots = 0$. Andererseits ergibt sich, falls x als die gleichmässig Veränderliche gilt, aus den Definitionsgleichungen von $dz, dB, dC, dD, \ldots$, dass

$$B = \frac{dz}{dx},\ C = \frac{dB}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2},\ D = \frac{dC}{dx} = \frac{d^3z}{dx^3},\ E = \frac{dD}{dx} = \frac{d^4z}{dx^4} \cdots$$

Setzt man diese Werthe in das Gleichungssystem I ein, während die links vom Gleichheitszeichen befindlichen höheren Differentiale von z aus dem erläuterten Grunde verschwinden, so entsteht ein neues Gleichungssystem:

$$\text{II.}\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{dz}{dx}d^2x + \frac{d^2z}{dx^2}(dx)^2, \\ 0 &= \frac{dz}{dx}d^3x + 3\,\frac{d^2z}{dx^2}dx \,.\, d^2x + \frac{d^3z}{dx^3}(dx)^3, \\ 0 &= \frac{dz}{dx}d^4x + 4\,\frac{d^3z}{dx^3}dx \,.\, d^3x + 3\,\frac{d^2z}{dx^2}(d^2x)^2 + 6\,\frac{d^3z}{dx^3}(dx)^2d^2x \\ &\qquad + \frac{d^4z}{dx^4}(dx)^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Dieses Gleichungssystem II führt zu $d^2x, d^3x, d^4x, \ldots$, indem man die aus benutzten Gleichungen des Systems gefundenen höheren Differentiale von x in die nächstfolgende Gleichung jeweils einsetzt. Taylor überlässt dem Leser die umständliche Rechnung und begnügt sich damit, die Ergebnisse auszusprechen:

Aequationem fluxionalem, in qua sunt fluentes tantum duae z et x, quorum z fluit uniformiter, ita transformare, ut fluat x uniformiter.

$$\text{III.}\left\{\begin{aligned} d^2x &= -\frac{d^2z \,.\, dx}{dz}, \\ d^3x &= \frac{-d^3z \,.\, dz \,.\, dx + 3(d^2z)^2dx}{(dz)^2} \\ d^4x &= \frac{-d^4z\,(dz)^2dx + 10\,d^3z \,.\, d^2z \,.\, dz \,.\, dx - 15\,(d^2z)^3dx}{dz^3} \end{aligned}\right.$$

Zur Controle dividiren wir die drei Gleichungen des Systems III der Reihe nach durch $(dz)^2, (dz)^3, (dz)^4$ und formen alsdann die rechts entstehenden Brüche dadurch um, dass wir, wieder der Reihe nach, Zähler und Nenner durch $(dx)^3, (dx)^5, (dx)^7$ theilen. Wir erhalten so die heute allgemein bekannten Formeln:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^3},\quad \frac{d^3x}{dz^3} = \frac{-\frac{d^3z}{dx^3}\cdot\frac{dz}{dx} + 3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^5},$$

$$\frac{d^4x}{dz^4} = \frac{-\frac{d^4z}{dx^4}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 10\,\frac{d^3z}{dx^3}\,\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dz}{dx} - 15\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^7}.$$

Von einer bei Taylor an zwei Stellen seines Buches[1]) behandelten Differentialgleichung wird im 100. Kapitel die Rede sein.

Einen wichtigen Abschnitt der Methodus Incrementorum, um dessenwillen wir eigentlich die ganze Schrift grade in diesem 97. Kapitel behandeln, bildet der siebente Satz von der Taylorschen Reihe[2]). Auch hier sei uns gestattet, durch eine Taylor nicht angehörende Bezeichnung, insbesondere durch Benutzung von mit Index versehenen Δ für die auf einander folgenden Differenzen, die Taylorschen Erörterungen durchsichtiger zu machen. Sei z die gleichmässig Veränderliche und Δz ihre jedesmalige Veränderung. In Abhängigkeit von z ist eine andere Veränderliche x, deren auf einander folgende Differenzen $\Delta x, \Delta^2x, \Delta^3x \ldots$ die Veränderungen von x, von Δx, von $\Delta^2x \ldots$ bezeichnen, welchen diese unterworfen sind, während z um Δz zunimmt. Folgende Werthe gehören mithin zusammen: z und x, $z + \Delta z$ und $x + \Delta x$, $z + 2\Delta z$ und $x + 2\Delta x + \Delta^2x$, $z + 3\Delta z$ und $x + 3\Delta x + 3\Delta^2x + \Delta^3x$. Die auftretenden Zahlencoefficienten sind die der Binomialentwicklung, das sonstige Bildungsgesetz ist nicht minder einleuchtend, und so erkennt man, dass zu $z + n \,.\, \Delta z$ der Werth gehört:

$$x + n \,.\, \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}\Delta^2x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\Delta^3x + \cdots + \Delta^nx.$$

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 17 und 26—27. [2]) Ebenda pag. 21—23.

Nennt man $n \Delta z = v$ und $(n-1)\Delta z = v'$, ferner $(n-2)\Delta z = v''$ u. s. w., also auch $n = \frac{v}{\Delta z}$, $n - 1 = \frac{v'}{\Delta z}$, $n - 2 = \frac{v''}{\Delta z}$ u. s. w., so wird der zu $z + v$ zugehörige Werth von x in der Gestalt

$$x + \frac{v}{1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{vv'}{1.2} \frac{\Delta^2 x}{\Delta z^2} + \frac{vv'v''}{1.2.3} \frac{\Delta^3 x}{\Delta z^3} + \cdots$$

erscheinen. Ist v ein endlicher Werth, während gleichzeitig Δz in das unendlichkleine dz übergeht, womit naturgemäss auch der Uebergang der Differenzquotienten von x in Differentialquotienten verbunden ist und n sich als unendlich gross erweist, so sind die $v, v', v'' \ldots$ nicht mehr zu unterscheiden. Dann geht also vv' in v^2, $vv'v''$ in v^3 über u. s. w. Man erhält alsdann als Werth von x, während z in $z + v$ überging, die Reihe:

$$x + \frac{v}{1} \frac{dx}{dz} + \frac{v^2}{1.2} \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{v^3}{1.2.3} \frac{d^3 x}{dz^3} + \cdots,$$

und das ist die Taylorsche Reihe, wie sie benannt zu werden pflegt, seit ihr Simon Lhuilier 1786 in einer von der Berliner Academie gekrönten und auf ihre Kosten gedruckten Preisschrift[1]) diesen Namen beigelegt hat. Wir bemerken, dass Taylor auch den Fall eines negativen v in Erwägung gezogen hat[2]), und dass er fand, dass die Reihe für den zu $z - v$ gehörigen Werth von x im Vorzeichen alternirend wurde, während der absolute Werth der Glieder keine Veränderung erlitt. In wie weit Taylor sich bei Verfassung der Methodus Incrementorum über die Möglichkeit der Anwendung seines Satzes zur Reihenentwicklung einer Function einer zweitheiligen Grösse klar gewesen sein mag, ist kaum zu sagen. Wirkliche Reihenentwicklungen von der genannten Art hat er dort jedenfalls nicht vorgenommen.

Eine andere immer wieder durch die Bezeichnung sehr schwer verständliche Reihenentwicklung ist im elften Satze[3]) gelehrt. Sei $\int s \, . \, dr$ in der Form $rs + p$ angenommen. Differentiation bringt $s \, . \, dr = s \, . \, dr + r \, . \, ds + dp$ hervor. Daraus folgt $dp = -rds$ und $p = -\int rds = -\int r \frac{ds}{dr} dr$. Man hat also gefunden

$$\int s \, . \, dr = rs - \int r \, . \, \frac{ds}{dr} \cdot dr.$$

---

[1]) *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des sciences et belles lettres pour l'année 1786.* Berlin 4°. [2]) *Methodus Incrementorum* pag. 23: *mutato signo ipius v, quo tempore z decrescendo fit z — v.* [3]) Ebenda pag. 38—39.

Taylor geht weiter zur Annahme $\int r \cdot \frac{ds}{dr} \cdot dr = \frac{r^2}{2} \frac{ds}{dr} + q$ über. Differentiation liefert $r \frac{ds}{dr} = r \frac{ds}{dr} + \frac{r^2}{2} \frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{dq}{dr}$. Daraus folgt

$$\frac{dq}{dr} = -\frac{r^2}{2} \frac{d^2 s}{dr^2}, \quad q = -\int \frac{r^2}{2} \frac{d^2 s}{dr^2} dr$$

und

$$\int s dr = rs - \frac{r^2}{2} \frac{ds}{dr} + \int \frac{r^2}{2} \frac{d^2 s}{dr^2} dr.$$

Das gleiche Verfahren, welches auf nichts anderes hinausläuft als auf eine fortgesetzte Anwendung des factorenweisen Integrationsverfahrens, kann in beliebiger Wiederholung angewandt werden und liefert

$$\int s dr = rs - \frac{r^2}{1.2} \frac{ds}{dr} + \frac{r^3}{1.2.3} \frac{d^2 s}{dr^2} - \cdots.$$

Man erkennt sofort in der von Taylor gegebenen Reihe die schon 1694 durch Johann Bernoulli in den A. E. veröffentlichte Entwicklung (S. 229). Taylor bediente sich allerdings einer anderen und, man darf hinzusetzen, weniger anfechtbaren Herleitung als der Erfinder der Reihe selbst, aber dennoch ist ihm der Vorwurf nicht wohl zu ersparen, Jenen nicht genannt zu haben, und als ihm dieser Vorwurf im Maihefte 1721 der A. E. wirklich gemacht wurde, musste er die Antwort schuldig bleiben.

Der zweite Abschnitt der Methodus Incrementorum, welcher den ersten wenig an Länge übertrifft, enthält Anwendungen der in jenem auseinandergesetzten Lehren. Er beginnt mit dem Interpolationsprobleme[1]), an welches das der Summirung einer gegebenen Anzahl von Gliedern einer Reihe von bekanntem Bildungsgesetze[2]) sich anschliesst. Die bei letzterer Aufgabe gegebene Anweisung besteht darin, man solle von einem Anfangsgliede an zuerst die Summe aller Glieder bis zu dem ersten der zu summirenden Glieder ausschliesslich und dann die bis zum letzten einschliesslich bilden und erstere von letzterer abziehen. Das ist auf Glieder von endlichen Differenzen angewandt die gleiche Methode, welche bei den Quadraturen, d. h. bei Summirung stetig sich aneinander anschliessender Grössen zur Auswerthung von bestimmten Integralen führt, wie überhaupt die Summirungsaufgabe von Gliedern mit endlichen Unterschieden und die Integrationsaufgabe zu vielfach ganz ähnlichen Ergebnissen führen, worauf aufmerksam gemacht wird[3]).

Spätere Aufgaben gehören den Anwendungen der Fluxions-

---

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 53—56. [2]) Ebenda pag. 56—58. [3]) Ebenda pag. 65.

rechnung auf Aufgaben der Geometrie und Mechanik an, und von Unterschieden von endlicher Grösse ist nur noch einmal, am Ende auf S. 112—114, die Rede, wo bei Gelegenheit der Aufgabe der atmosphärischen Lichtbrechung eine Differenzengleichung integrirt wird. Vorher behandelt Taylor das isoperimetrische Problem[1]), die Kettenlinie[2]), die Aufgabe der gespannten Saite[3]), welche hier die erste mathematische Behandlung erhielt, nachdem Mersenne in seiner *Harmonica* von 1663 Versuche über Saitenschwingungen beschrieben und Erfahrungsgesetze ermittelt hatte[4]).

Auch die Auffindung des Schwingungsmittelpunktes senkrecht herabhängender Körper ist von Taylor behandelt[5]) und hat Anlass zu Streitigkeiten gegeben. Johann Bernoulli hatte die gleiche Aufgabe im Junihefte 1714 der A. E. gelöst, wo sie also jedenfalls früher als in dem Taylorschen Buche von 1715 dem mathematischen Leserkreise bekannt wurde. Taylor vertheidigte[6]) seine Unabhängigkeit von Johann Bernoulli in den P. T. von 1719. Er habe schon am Anfange des Jahres 1712 den Schwingungsmittelpunkt genau so gefunden, wie er später habe drucken lassen, und könne diese Thatsache durch Briefe von Keill beweisen, ausserdem sei die Reinschrift dieses Buches seit April 1714 im Besitze der Royal Society gewesen[7]), mithin vor der Versendung des Juniheftes der A. E.

Kommen wir in einem Gesammturtheile auf die Methodus Incrementorum zurück, so ist deren ungemein hohe Bedeutung nicht zu verkennen; es ist zugleich zu bemerken, dass die Lehre von den endlichen Differenzen eigentlich am stiefmütterlichsten, mindestens am undeutlichsten behandelt ist, wiewohl sie dem Buche den Titel verlieh und das Buch wieder anderen Mathematikern den Anstoss gab, tiefer in den Gegenstand einzudringen.

Wir nennen hier zuerst Pierre Remond De Montmort mit einer Abhandlung[8]) in den P. T. von 1717. Ihr klar und deutlich ausgesprochener Grundgedanke besteht darin, dass, wenn eine Reihe von Gliedern $a, b, c, d \ldots$ zu summiren ist, das Bestreben dahin gerichtet werden solle, jedes dieser Glieder als eine Differenz von der Art darzustellen, dass der Subtrahend jeder früheren Differenz Minuend der nächstfolgenden werde. Ist $a = A - B$, $b = B - C$, $c = C - D$,

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 68. [2]) Ebenda pag. 75. [3]) Ebenda pag. 89. [4]) Heller, Geschichte der Physik II, 75—76. [5]) *Methodus Incrementorum* pag. 95. [6]) Taylors Vertheidigung und mit ihr sämmtliche Streitschriften findet man vereinigt in Joh. Bernoulli *Opera* II, die hier angeführten Daten II, 480. [7]) In einem anderen Schriftstück (Joh. Bernoulli *Opera* II, 474) ist sogar behauptet, die *Methodus Incrementorum* sei seit April 1713 im Besitze der Royal Society gewesen. [8]) P. T. XXX, 633—675.

$d = D - E$, so wird ersichtlich $a + b + c + d = A - E$ und ganz ähnlich bei grösserer Anzahl der Reihenglieder. Vielfältige Beispiele bringen den Gedanken in Anwendung. Man erinnert sich unwillkürlich an Dinge, welche in zu jener Zeit noch nicht veröffentlichten und De Montmort mithin unbekannten Briefen von Leibniz (S. 370) vorkamen.

In dem gleichen Jahre 1717 legte ein anderer französischer Mathematiker François Nicole[1]) (1683—1758), der von seinem 16. Jahre an als Schüler De Montmorts zu bezeichnen ist, ohne dass mit dieser Bezeichnung seine oder De Montmorts Selbständigkeit in der Differenzenrechnung irgend angezweifelt werden will, der Pariser Académie des Sciences eine Abhandlung[2]) vor, welche ausgesprochenermassen die Absicht verfolgte, klarer darzustellen, was in Taylors Methodus Incrementorum nicht mit genügender Deutlichkeit ausgeführt sei. Nicole hat diese seine Absicht durchaus erfüllt. Mit musterhafter Klarheit setzt er auseinander, die Differenz von $x(x+n)\ldots(x+(p-1)n)$ sei $pn(x+n)(x+2n)\ldots((x+(p-1)n)$ als Werth von

$$(x+n)(x+2n)\ldots(x+pn) - x(x+n)\ldots(x+(p-1)n).$$

Umgekehrt ist $\frac{x(x+n)(x+2n)\ldots(x+(p-1)n)}{pn}$ das Integral der endlichen Differenz $(x+n)(x+2n)\ldots(x+(p-1)n)$. Das Integral wird gefunden, indem der Differenz der Factor beigegeben wird, der um n kleiner als der niederste in ihr vorhandene Factor ist, und hierauf noch die Division durch p, als Anzahl der jetzt vorhandenen Factoren, und durch n, als Betrag der jeweiligen Zunahme der Factoren, vollzogen wird. Will man die Summe

$$1(1+n)\ldots(1+(p-1)n) + (1+n)(1+2n)\ldots(1+pn) + \ldots \\ + x(x+n)\ldots(x+(p-1)n)$$

haben, so betrachtet man das nachfolgende Glied

$$(x+n)(x+2n)\ldots(x+pn)$$

als Differenz und bildet deren Integral $\frac{x(x+n)(x+2n)\ldots(x+pn)}{(p+1)n}$, welches die gesuchte Summe sein wird. Die Differenz des Bruches

$$\frac{1}{x(x+n)\ldots(x+(p-1)n)}$$

oder

$$\frac{1}{x(x+n)\ldots(x+(p-1)n)} - \frac{1}{(x+n)(x+2n)\ldots(x+pn)}$$

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences.* Année 1758 (Histoire pag. 107—114). [2]) Ebenda Année 1717 pag. 7—21.

ist $\frac{pn}{x(x+n)\ldots(x+pn)}$ und umgekehrt ist $\frac{1}{x(x+n)\ldots(x+(p-1)n)}$ das Integral der endlichen Differenz $\frac{pn}{x(x+n)\ldots(x+pn)}$, welches also gefunden wird, indem man in der Differenz den höchsten Factor $(x+pn)$ des Nenners weglässt und alsdann noch durch die Anzahl p der übrig bleibenden Factoren und durch den Betrag n, um welchen die Nennerfactoren jeweils steigen, dividirt. Will man nun die Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen finden, deren jeder die Form

$$\frac{1}{x(x+n)(x+2n)\ldots(x+pn)}$$

besitzt, so ist dieses allgemeine Glied selbst die Differenz zwischen der Reihensumme der vor ihm auftretenden Glieder und der Reihensumme der bis zu ihm einschliesslich genommenen Glieder. Das Integral dieser endlichen Differenz ist nach der ausgesprochenen Regel $\frac{1}{p\,.\,n\,.\,x(x+n)\ldots(x+(p-1)n)}$, und das ist also die Summe der mit $\frac{1}{x(x+n)\ldots(x+pn)}$ beginnenden unendlichen Reihe. In diesem Aufsatze ist also zweierlei geleistet. Die Summe beliebig vieler Glieder einer steigenden und die der unendlich vielen Glieder einer fallenden Reihe wird ermittelt, steigend und fallend in dem Sinne verstanden, dass die einzelnen Glieder der Reihe einen immer grösseren, beziehungsweise immer kleineren Werth annehmen. Im ersteren Falle sind die Glieder ganzzahlig, im zweiten Falle gebrochen, beidemal bestehen dieselben aus Factoren von gegebener Anzahl, beidemal ist der veränderliche Theil der Factoren eine arithmetische Folge von Vielfachen einer gegebenen Zahl.

Dieser Grundaufgabe ist Nicole treu geblieben. Er hat in zwei Aufsätzen des Jahres 1723[1]), in einem Aufsatze des Jahres 1724[2]), endlich in einem Aufsatze des Jahres 1727[3]) immer verwickeltere Formen solcher Reihen behandelt. Er hat z. B. Reihen summirt von der Gestalt

$$\frac{1}{x(x+n)(x+2n)\ldots(x+(p-1)n)}$$
$$+\frac{1}{(x+m)(x+m+n)(x+m+2n)\ldots(x+m+(p-1)n)}+\cdots,$$

er hat auch von Glied zu Glied sich verändernde Zähler beigegeben, aber nirgend ist eine Abweichung in dem Sinne, dass jene Factoren der Nenner anderer Art als linear wären, nirgend ist von höheren

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences.* Année 1723 pag. 20—37 und 181 bis 198. [2]) Ebenda. Année 1724 pag. 138—158. [3]) Ebenda. Année 1727 pag. 257—268.

als ersten Differenzen die Rede, und deshalb dürfen wir die fünf Aufsätze Nicoles mit Einschluss dessen von 1727, der seiner Datirung nach eigentlich dem folgenden Abschnitte angehören müsste, in diesem kurzen Bericht zusammenfassen.

Hier ist vielleicht die Stelle, im Vorübergehen ein Wort von den ersten Reihenuntersuchungen eines Schriftstellers zu sagen, der im 100. Kapitel, dann aber besonders im XVIII. Abschnitte uns wiederholt beschäftigen wird. Christian Goldbach[1]) (1690—1764) ist in Königsberg in Preussen geboren. Er machte 1718 eine Reise nach Schweden, 1720 eine solche nach Italien. In Schweden verkehrte er viel mit dem dortigen Mathematiker Anders Gabriel Duhre, und als Goldbach einen Aufsatz *Specimen methodi ad summas serierum* verfasst hatte, war es wahrscheinlich Duhre, der diesen an die Redaction der A. E. in Leipzig schickte. Die Arbeit wurde auch wirklich im Jahrgange 1720 jener Zeitschrift gedruckt, ist aber herzlich unbedeutend.

Wir kommen wieder zu einem englischen oder vielmehr schottischen Schriftsteller James Stirling[2]) (1692—1770). Er kam 1710 nach Oxford, wo er eine Freistelle erhielt, von der ihm aber 1715 wegen entdeckten Briefwechsels mit bekannten Jacobiten Ausstossung drohte. Er floh nach Venedig, wo er sich durch Unterricht in der Mathematik ernährte. Von Venedig aus veröffentlichte er 1717 eine geometrische Schrift, die wir im 99. Kapitel besprechen werden, und die ihn Newton nahe brachte. In Venedig ist dann auch eine Abhandlung geschrieben, welche durch Newtons Vermittelung in den P. T. von 1719 gedruckt wurde[3]). Wieder Newton brachte es zuwege, dass Stirling 1725 nach England zurückkehren durfte. Seit 1735 war er dann Director einer schottischen Bergwerksgesellschaft. Die Abhandlung von 1719 trägt die Ueberschrift *Methodus differentialis Newtoniana illustrata Authore*[4]) *Jacobo Stirling e Coll. Balliol. Oxon.*, der Verfasser gehörte mithin damals dem Namen nach noch der Hochschule Oxford an. Der Ueberschrift kann man auch entnehmen, dass Stirling von Newtons Interpolationsverfahren ausging, dessen Erläuterung insofern sein wesentlicher Zweck war, als er die auf das Auffinden zu interpolirender Glieder gerichteten Rechnungen bequemer darstellte. Es sollen etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ sieben aufeinander folgende, so nahe bei einander liegende Glieder einer Reihe (beziehungsweise Ordinaten einer Curve) sein, dass sie als Glieder

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie IX, 330—331. — Eneström in der Bibliotheca mathematica 1884 S. 15—16 und 1887 S. 23—24. [2]) *Encyclopaedia Britannica* XXII, 555—556 (Edition IX, 1887). [3]) P. T. XXX, 1050 bis 1070. [4]) sic!

einer arithmetischen Reihe von irgend einer Ordnung gedacht werden können, d. h. dass ihre aufeinander folgenden Differenzen um so weniger von Null abweichen, je höherer Ordnung sie sind. Nun ist $\alpha - \beta$ eine erste Differenz, $(\alpha - \beta) - (\beta - \gamma) = \alpha - 2\beta + \gamma$ eine zweite Differenz. Ebenso erkennt man $\alpha - 3\beta + 3\gamma - \delta$ als eine dritte, $\alpha - 4\beta + 6\gamma - 4\delta + \varepsilon$ als eine vierte, $\alpha - 5\beta + 10\gamma - 10\delta + 5\varepsilon - \zeta$ als eine fünfte, $\alpha - 6\beta + 15\gamma - 20\delta + 15\varepsilon - 6\zeta + \eta$ als eine sechste Differenz. Mit immer mehr der Wahrheit sich nähernder Zuverlässigkeit gelten folglich diese Differenzen als nicht mehr vorhanden, d. h. ihr Nullsetzen gestattet α in immer genaueren Näherungswerthen zu finden. Diese Näherungswerthe sind $\alpha = \beta$, $\alpha = 2\beta - \gamma$, $\alpha = 3\beta - 3\gamma + \delta$, $\alpha = 4\beta - 6\gamma + 4\delta - \varepsilon$, $\alpha = 5\beta - 10\gamma + 10\delta - 5\varepsilon + \zeta$, $\alpha = 6\beta - 15\gamma + 20\delta - 15\varepsilon + 6\zeta - \eta$ u. s. w. Stirling sucht z. B. mittels dieser Formeln $\alpha = \frac{1}{100}$ zu erhalten, indem er es als vorausgehendes Glied zu den Gliedern $\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \frac{1}{104}, \frac{1}{105}, \frac{1}{106}$ betrachtet. Er findet die sechs Näherungswerthe

$$\alpha = 0{,}0099009900990,\ \alpha = 0{,}0099980586293,\ \alpha = 0{,}0099999434550,$$
$$\alpha = 0{,}0099999978248,\ \alpha = 0{,}0099999998958,\ \alpha = 0{,}0099999999931.$$

Im weiteren Verlaufe der Abhandlung bedient sich Stirling gewisser Umformungen, deren Zweck es ist, die Convergenz von Reihen zu beschleunigen. Ist beispielsweise[1] $\frac{Q}{1+Q} = R$, so folgt

$$1 - R = (1 + Q)^{-1}$$

und hieraus wieder $(1 + Q)^n = (1 - R)^{-n}$. Man kann aber beide Ausdrücke nach dem binomischen Satze entwickeln und erhält so zwei Reihen, die den gleichen Werth besitzen

$$(1 + Q)^n = 1 + Q\frac{n}{1} + Q^2\frac{n(n-1)}{1.2} + Q^3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \cdots$$

und

$$(1 - R)^{-n} = 1 + R\frac{n}{1} + R^2\frac{n(n+1)}{1.2} + R^3\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \cdots.$$

De Lagny legte 1705 und 1722 der Académie des Sciences Abhandlungen vor[2], in welchen die höheren Differenzen bei der Auf-

---

[1]) P. T. XXX, 1065 steht zwar $R = \frac{1+Q}{Q}$, aber das ist offenbar ein Druckfehler, da diese Substitution die Reihe, welche nachher angegeben ist, überhaupt nicht hervorbringt, abgesehen davon, dass diese, wenn sie so entstünde, bei $R > 1$ divergiren würde. [2]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1705 pag. 277—300. Année 1722 pag. 264—320.

lösung von Gleichungen Verwerthung finden. Um dieses Zweckes willen wird über die beiden Abhandlungen der Hauptsache nach erst im folgenden 98. Kapitel zu berichten sein, aber Einiges sei gleich hier hervorgehoben. De Lagny bildet die aufeinander folgenden Differenzen bei arithmetischen Reihen höherer Ordnung. Er nennt 1722 die erste Zahl jeder Differenzenreihe ihren Erzeuger, *generateur*. Dieser Name erinnert zu deutlich an das von Leibniz in dem (zuletzt S. 378) erwähnten Briefe an Oldenburg vom Februar 1673 in gleichem Sinne gebrauchte *generatrices*, als dass wir nicht an eine vielleicht nicht ganz bewusste Einwirkung denken sollten. Im Jahre 1722 kannte De Lagny sicherlich das seit 1713 unter den Mathematikern freigebigst verbreitete Commercium Epistolicum und folglich jene Leibnizische Untersuchung. Aber wie war es 1705, als De Lagny zwar ohne jene Namen, aber immerhin höhere Differenzen in Rechnung zog? Hat er damals schon unter der Hand in Paris gehört, was Leibniz am gleichen Orte 32 Jahre früher in Erwägung zog? Hat er Moutons Druckschrift von 1670 (S. 76) gekannt oder gar Faulhabers Summirung arithmetischer Reihen höherer Ordnung (Bd. II, S. 748—749)? Wir sind nicht im Stande, diese Fragen zu beantworten. In De Lagnys Abhandlung von 1722 treten zwei wichtige Sätze auf, welche als unbestreitbare Grundsätze bezeichnet[1]) und dem entsprechend nicht bewiesen sind. Der eine Satz, der vielleicht De Lagny angehört, ist der, dass Potenzen von hinreichend hohem Exponenten jeder Zahl, die irgend grösser als die Einheit ist, über alle Grenzen hinaus wachsen. Der zweite Satz, den allerdings, wie wir im 99. Kapitel erfahren werden, Stirling schon 1717 ausgesprochen hatte, ist der, dass in der Reihe

$$a_\lambda x^\lambda + a_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

der Werth von x so gross angenommen werden kann, dass $a_\lambda x^\lambda$ für das Vorzeichen der Reihensumme den Ausschlag gibt. Endlich rühmt De Lagny selbst[2]), er sei der Erste, der darauf aufmerksam mache, dass nicht bloss, wie man schon lange wisse, die 2., 3. u. s. w. Potenzen der Zahlen der natürlichen Zahlenfolge arithmetische Progressionen 2., 3., ... Ordnung bilden, sondern dass das Gleiche auch für die Summen $a_\lambda x^\lambda + a_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + \cdots + a_1 x$ Geltung habe, welche entstehen, indem man der Veränderlichen x der Reihe nach alle ganzzahligen Werthe der natürlichen Zahlenfolge beilegt.

Der letzte Schriftsteller, von welchem wir in diesem Kapitel kurz zu reden haben, ist Abraham de Moivre, als Verfasser einer

---

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1722 pag. 275: *Ce sont deux axiomes incontestables.* [2]) Ebenda pag. 281—282.

Abhandlung, die im Mai 1720 der Royal Society vorlag und 1722 in den P. T. gedruckt wurde[1]). Die Abhandlung beschäftigt sich der Hauptsache nach mit dem Zerfällen eines Bruches in Partialbrüche, also mit einem Gegenstande, der schon längst durch Leibniz und Johann Bernoulli seine Erledigung gefunden hatte. De Moivre erkennt das Vorrecht Leibnizens gegen den Schluss der Abhandlung voll und unumwunden an, aber die A. E. von 1702 und 1703, sagt er, seien ihm erst nachträglich zu Gesicht gekommen. In De Moivres Darstellung findet sich ein Begriff und ein dafür erfundenes Wort, welche von nun an der Mathematik angehören. Er nennt recurrente Reihen[2]) solche, bei welchen die einzelnen Coefficienten mit einer bestimmten Anzahl ihnen vorausgehender Coefficienten in einem von Glied zu Glied unverändert bleibenden Zusammenhange stehen. So ist z. B. $1 + 3x + 7x^2 + 17x^3 + 41x^4 + 99x^5 + \cdots$ eine recurrente Reihe, und der Zusammenhang ihrer Coefficienten liegt in der von $n = 0$ an giltigen Beziehung $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Dem Zusammenhange $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + 5a_n$ entspricht die gleichfalls recurrente Reihe $1 + 2x + 3x^2 + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5 + \cdots$ u. s. w.

98. Kapitel.

Algebra.

Wenn wir uns nunmehr den Leistungen auf algebraischem Gebiete zuwenden, so stellt uns die Abhandlung De Lagnys[3]) von 1705, wie sie die älteste von uns zu erwähnende ist, auch dadurch einen erwünschten Uebergang in Aussicht, als sie, wie (S. 389) bemerkt wurde, an Begriffe der Differenzenrechnung anknüpft. De Lagny bildet die $n$ten Potenzen von $n + 1$ selbst in arithmetischer Progression stehenden Zahlen, also a^n, $(a + b)^n$, $(a + 2b)^n \ldots (a + nb)^n$. Die ersten, zweiten, ... $n$ten Differenzen dieser Potenzwerthe werden genommen, und dabei zeigt sich, dass die $n$ten Differenzen constant ausfallen und zwar $1. 2. 3. \ldots nb^n$ heissen. De Lagny sagt[4]), dieser Satz sei seines Wissens in seiner Allgemeinheit neu, wenn auch die beiden besonderen Fälle längst bekannt seien, dass 2 die zweite Differenz der natürlichen Quadratzahlen und 6 die dritte Differenz der natürlichen Kubikzahlen darstelle. Die Constanz der höheren Differenzen lässt Tabellen hoher Potenzen der aufeinander folgenden

[1]) P. T. XXXII, 162—178. [2]) Ebenda XXXII, 176. [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1705 pag. 277—300. [4]) Ebenda pag. 288 Remarque II.

Zahlen der natürlichen Zahlenreihe durch fortgesetzte Additionen entstehen, sie leistet auch bei der Auflösung von Zahlengleichungen Hilfe, und das ist De Lagnys eigentlicher Zielpunkt. Jeder Ausdruck $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x$ gestattet nämlich, sofern x in arithmetischer Progression wächst, d. h. die Werthe $x = a$, $x = a + b$, $\ldots x = a + nb$ annimmt, seine höheren Differenzen zu bilden, deren $n$te constant wird. Man erhält also auch $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x$ durch einzige Anwendung fortgesetzter Additionen, und diese von einander verschiedenen Gleichungsconstanten — De Lagny nennt sie im Anschlusse an Vieta die *homogènes de comparaison* — sind bald kleiner, bald grösser als die Gleichungsconstante c der vorgelegten Gleichung $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x = c$, bald ihr genau gleich. Im letzteren Falle ist der ganzzahlige Wurzelwerth x gefunden, der die Gleichung erfüllt, andernfalls hat man wenigstens zwei ganze Zahlen ermittelt, zwischen welchen x liegt, und sind es zwei nur um die Einheit verschiedene Werthe, d. h. hat man $b = 1$ gewählt, so ist zugleich die Gewissheit der Irrationalität von x gewonnen[1]). Nun hat De Lagny am Anfang der Abhandlung zwei Gleichungen arithmetisch ähnlich[2]) genannt, wenn sie nur durch die Gleichungsconstante sich von einander unterscheiden, dagegen geometrisch ähnlich[3]), wenn der Coefficient α_n von x^n übereinstimmt, die übrigen Coefficienten aber in der zweiten Gleichung $\alpha_{n-1}\beta$, $\alpha_{n-2}\beta^2, \ldots \alpha_1\beta^{n-1}$ heissen und die Gleichungsconstante $c\beta^n$ ist. Die Wurzel der geometrisch ähnlichen Gleichung ist alsdann das βfache der Wurzel der erstgegebenen. Auch die Wurzel der geometrisch ähnlichen Gleichung vermag man in Grenzen einzuschliessen, welche nur um eine Einheit von einander liegen, und damit ist die Wurzel der ursprünglichen Gleichung auf $\frac{1}{\beta}$ genau gefunden[4]). Im folgenden Jahre 1706 kam De Lagny in einer als zweite Abtheilung der früheren Abhandlung bezeichneten Fortsetzung[5]) auf den Gegenstand zurück, aber nur um gewisse Abkürzungen des Verfahrens bei der Behandlung cubischer Gleichungen zu lehren. Die theoretische Bedeutung dieser Fortsetzung liegt einzig darin, dass versucht wird die Meinung zu begründen, man thue Unrecht, wenn man das näherungsweise Tastverfahren zur Ausmittelung der Gleichungswurzeln an das nur zufällige System dekadischer Zahlen knüpfe. Jede Gleichung gebe vielmehr durch die in ihr vorkommenden Zahlencoefficienten zu erkennen, in welcher Weise man am vortheilhaftesten ihrem Wurzel-

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1705 pag. 294, Remarque I. [2]) Ebenda pag. 278: *semblables arithmétiquement.* [3]) *semblables géometriquement.* [4]) Ebenda pag. 296. [5]) Ebenda. Année 1706 pag. 296—319.

werthe beikomme. Ueber die im vorigen Kapitel erwähnte dritte Abhandlung[1]) De Lagnys von 1722 sollten wir streng genommen erst berichten, wenn wir gesehen haben würden, was inzwischen von anderen Mathematikern geleistet worden war, doch bietet sie überhaupt wenig Neues für die Lehre von den Gleichungen und gestattet uns dadurch überhaupt von ihrer Erörterung Abstand zu nehmen.

Auf geometrische Methoden zur Gleichungsauflösung hatte Descartes (Bd. II, S. 815—816) in der Form hingewiesen, man solle diese Aufgabe nicht durch beliebige zweckdienliche Curven lösen, sondern durch die einfachsten, welche man anwenden könne. Das war so verstanden worden, man solle, um $F(x) = 0$ aufzulösen, diese Gleichung als durch Elimination von y zwischen $\Phi(x, y) = 0$ und $\Psi(x, y) = 0$ entstanden denken; beide letztere Gleichungen können alsdann durch Curven abgebildet werden, und die Abscissen ihrer reellen Durchschnittspunkte müssen alsdann die reellen Wurzeln von $F(x) = 0$ liefern. Gegen die Richtigkeit der letzteren Behauptung erhob sich Rolle[2]) in den Veröffentlichungen der Pariser Academie für 1708 und 1709. Er zeigt an Beispielen, dass nicht immer Wurzeln der Gleichung und Durchschnittspunkte der beiden Curven einander entsprechen. Die Gleichung

$$x^6 + 63a^5x + 62a^6 = 0$$

wird durch $x = -a$ und durch $x = -2a$ erfüllt. Rolle ersetzt sie durch das Gleichungspaar $x^3 - ay^2 = 0$ und $63a^3x + y^4 + 62a^4 = 0$ aus welchem sie entsteht, indem $y^4 = \frac{x^6}{a^2}$ aus der ersten Gleichung in die zweite eingeführt wird. Aber weder bei $x = -a$ noch bei $x = -2a$ ist ein Durchschnittspunkt der beiden Curven vorhanden. Diese schneiden einander überhaupt nicht in reellen Punkten. Die erste setzt nämlich $ax > 0$, die zweite $ax < 0$ voraus, die eine liegt also rechts, die andere links von der Ordinatenaxe. Ein anderes Beispiel ist

$$x^5 + a^4x - 2a^5 = 0$$

mit $x = a$ als reeller Wurzel. Das Gleichungspaar $y^2x^2 + 2a^4 - a^3x = 0$, $y^4 + a^2x^2 - 2a^3x = 0$ liefert zwar durch Elimination von y die genannte Gleichung, aber bei $x = a$ geht deren erste Gleichung in $y^2 = -a^2$, deren zweite in $y^4 = a^4$ über, d. h. bei $x = a$ hat nur die zweite Curve einen reellen Punkt. Rolle bedient sich in diesen Aufsätzen des Ausdruckes fremder Wurzeln, *racines étrangères*, von

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1722 pag. 264—320.
[2]) Ebenda. Année 1708 pag. 339—365 und Année 1709 pag. 320—350 sowie pag. 419—450.

welchen er befürchtet, sie könnten eingeführt werden. Man müsse, meint er, um den durch ihn nachgewiesenen Irrthümern zu entgehen, eine ganz neue geometrische Gleichungslehre ersinnen, wenn er auch nicht wisse, worin sie bestehen werde. Im folgenden Jahre 1710 kam De la Hire[1]) auf den gleichen Gegenstand zu reden. Er suchte Descartes zu rechtfertigen, der ja ausdrücklich von der Benutzung zweckdienlicher Curven gesprochen habe. Die von Rolle hervorgehobenen Widersprüche vermochte De la Hire allerdings nicht zu leugnen. Er machte vielmehr selbst auf Aehnliches aufmerksam, z. B. auf den Unterschied zwischen den beiden Gleichungen $y^2 = ax$ und $y^4 = a^2x^2$, deren erste eine Parabel bedeute, die zweite zwei zur Ordinatenaxe symmetrisch liegende Parabeln.

Auf englischem Boden begegnen uns zunächst zwei Abhandlungen in den P. T. von 1707. John Colson[2]) (1680—1760) war damals ein noch gänzlich unbekannter Schulmeister. Sein Aufsatz in den P. T. lenkte die Aufmerksamkeit auf ihn, und da man überdies erfuhr, er sei ein guter Lehrer, veranlasste man ihn nach Cambridge zu kommen. Er wurde dort sogar 1739 bei der Besetzung einer Professur keinem Geringeren als De Moivre vorgezogen, der allerdings damals sein 72. Lebensjahr vollendete, was gegen ihn angeführt wurde. Nach vollzogener Wahl sah man ein, welchen Fehler man begangen hatte. John Colson also veröffentlichte 1707 Untersuchungen über Gleichungen 3. und 4. Grades[3]). Es war ein damals schon recht breitgeschlagener Gegenstand, den Colson behandelte, aber er wusste zwei Sätze klar und deutlich darin auszusprechen, welche wahrscheinlich schon vielen Mathematikern bekannt waren, von denen wir uns jedoch nicht erinnern können, sie jemals in einer älteren Druckschrift gelesen zu haben. Der eine Satz ist der[4]), dass jede Zahl drei Kubikwurzeln habe, und dass die Kubikwurzel der Einheit ebensowohl 1 als $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ als $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ heisse. Das war ja viel weniger allgemein, als was Rolle behauptet hatte (S. 124), aber für den Anfänger war es greifbarer. Im Uebrigen ist nicht gut anzunehmen, dass Colson damals Rolle's Buch gekannt haben sollte. Der zweite Satz besagt, dass jede kubische Gleichung drei

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1710 pag. 7—45.
[2]) W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge* pag. 100—101. [3]) P. T. XXV, 2353—2368. [4]) *Cujusvis enim quantitatis radix cubica triplex erit, et ipsius unitatis radix cubica vel est* 1, *vel* $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, *vel* $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

reelle Wurzeln habe, sofern $r^2 - q^3$ einen negativen Werth besitze, dass dagegen bei positivem $r^2 - q^3$ nur eine Wurzel reell sei und zwei imaginär ausfallen. Die Bedeutung der Buchstaben q, r ergibt sich daraus, dass die kubische Gleichung in der Gestalt

$$x^3 = 3px^2 + (3q - 3p^2)x + (2r + p^3 - 3pq)$$

auftritt. Um die aufgestellte Behauptung zu prüfen, schaffen wir mittels $x = y + p$ das quadratische Glied fort und erhalten

$$y^3 = 3qy + 2r = q_1 y + r_1 .$$

Demnach ist $r^2 - q^3 = \frac{r_1^2}{4} - \frac{q_1^3}{27}$.

Hinter Colsons Aufsatze steht in den P. T. von 1707 ein solcher seines späteren Wettbewerbers um die Professur, Abraham de Moivre[1]). Er behandelt gewisse Gleichungen von ungradem Grade, welche nach Regeln aufgelöst werden können, die der Cardanischen Formel verwandt sind[2]). Es sind also nur ganz besondere Fälle, in welchen die betreffende Regel anwendungsfähig ist.

Das gleiche Jahr 1707 sah die Veröffentlichung eines Buches von ganz anderer Bedeutung, als jene Aufsätze sie besassen, der *Arithmetica universalis* von Newton. Newton, seit 1669 Professor in Cambridge (S. 64), hielt dort Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, und Niederschriften dieser Vorträge blieben dort im Umlauf. William Whiston[3]) (1667—1752) scheint dieselben im Jahre 1685 noch selbst gehört zu haben, und als er 1699 den Auftrag erhielt, als Stellvertreter für Newton Vorlesungen zu halten und 1703 gar sein wenig ebenbürtiger Nachfolger in der Professur wurde, kam ihm allmählich der Gedanke, jenes alte Vorlesungsheft durch den Druck vervielfältigen zu lassen. Ob Newton seine Einwilligung zur Veröffentlichung gab, wissen wir nicht genau. Jedenfalls hat Whiston es in seiner Vorrede zu dem Drucke von 1707 behauptet, während diese Vorrede selbst bei einer 1722 herausgekommenen zweiten Auflage, in welcher Newton mannigfache Verbesserungen anbrachte, wegblieb. Eine dritte Auflage[4]) veranstaltete G. J. s'Gravesande 1732 in Leiden. Er benutzte dazu den Text von 1722, setzte aber auch die Vorrede von 1707 wieder in ihre Rechte ein und vereinigte endlich noch in einem Anhange eine Anzahl von Abhandlungen anderer Schriftsteller über Gleichungen aus den P. T. Dort finden sich bei-

[1]) P. T. XXV, 2368—2371. [2]) *ad instar Regularum pro Cubicis quae vocantur Cardani.* [3]) W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics ad Cambridge* pag. 83—85. [4]) Wir bedienten uns dieser III. Auflage, auf die sich folglich auch unsere Citate beziehen.

spielsweise die drei Abhandlungen Halleys (S. 119—120) und die vorhin erwähnten Versuche von Colson und De Moivre.

Die *Arithmetica universalis* bietet zuerst einen Abriss der Buchstabenrechnung, dann die Auflösung von Gleichungen mit einer sowie mit mehreren Unbekannten, 77 eingekleidete Textaufgaben, darunter 61 geometrische, welche mittels Gleichungen gelöst werden, Untersuchungen über die Form der Gleichungswurzeln, constructive Auflösung von Gleichungen. Eine äusserliche Scheidung der hier angedeuteten Abschnitte findet nicht statt. Wir folgen der Anordnung, indem wir Bemerkenswerthes erwähnen, wie es der Reihe nach uns begegnet.

Wir schicken Eines voraus: dass nämlich von Schriftstellern, welche vorher das Gleiche oder doch Aehnliches gelehrt haben, so gut wie nie die Rede ist. Descartes z. B. ist nur an einer einzigen Stelle genannt. Dieses grundsätzliche Verschweigen von Vorgängern, mag es der Entstehung des Buches aus Vorlesungsheften, mag es einer Eigenthümlichkeit Newtons entspringen, erschwert ungemein die Prüfung, was wirklich neu war, was als von Vorgängern entnommen anzusehen sein muss, wobei wir uns auch der Unterscheidung zu entschlagen haben, ob Newton die Schriften jener Vorgänger selbst las, oder ob er sein Wissen der nicht ganz reinen, wenn auch überaus reichen Quelle von Wallis' englischer Algebra von 1685 entnahm, die er zur Zeit, als Whiston die Vorlesung hörte, grade studiren mochte.

Die Grössen, sagt Newton[1]), sind entweder affirmativ, d. h. grösser als Nichts, oder negativ, d. h. kleiner als Nichts. Das Wort Multipliciren wird in Ermangelung eines passenderen Ausdruckes auch bei Brüchen oder Irrationalzahlen angewandt, wo eine neue Grösse gesucht wird, welche zum Multiplicandus in demselben Verhältnisse, welcher Art es auch sei, stehen soll, wie der Multiplicator zur Einheit[2]). Beim Dividiren von Buchstabengrössen sind Divisor und Dividendus nach den Dimensionen eines und desselben Buchstaben, der dazu besonders geeignet erscheint, zu ordnen[3]), und zwar kann man die Division sowohl bei den Gliedern höchster Ordnung, als bei denen niederster Ordnung beginnen[4]).

Längere Zeit wird bei der Aufsuchung der Theiler eines Buchstabenausdruckes verweilt[5]). Man soll versuchen, ob der betreffende Ausdruck lineare Factoren besitze, und zwar solle man sich dazu eines Verfahrens bedienen, welches wir an einem Beispiele

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 5. [2]) Ebenda pag. 6. [3]) Ebenda pag. 25. [4]) Ebenda pag. 27. [5]) Ebenda pag. 37—44: *De inventione divisorum.*

zu erläutern suchen wollen. Sei $P = 6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20$ zu prüfen. Man nehme eine aus drei oder mehr jeweils um die Einheit abnehmenden Gliedern bestehende arithmetische Progression, unter deren Gliedern die 0 vorkommt, und setze diese Zahlenwerthe nach einander für y ein, wie etwa $y = 2, 1, 0, -1, -2$. Das gegebene Polynom erhält durch diese Annahmen die Werthe 30, 7, 20, 3, 34. Man sucht die ganzzahligen Theiler dieser Werthe, welche man neben dieselben schreibt. Neben 30 steht also 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; neben 7 steht 1, 7 u. s. w. Nun sucht man unter den Theilern abwärts gehend eine fallende arithmetische Progression, wobei zu beachten ist, dass jeder Theiler sowohl positiv als negativ genommen werden darf. Findet sich eine solche arithmetische Progression, und ist ihre Differenz δ in dem Coefficienten der höchsten Potenz von y in P (in unserem Beispiele in 6, weil P mit $6y^4$ anfängt) enthalten, und entspricht dem $y = 0$ das Glied α der ausfindig gemachten Progression von Theilern (im gegebenen Falle $+4$), so hat man zu probiren, ob $\delta y + \alpha$, beziehungsweise $y + \frac{\alpha}{\delta}$ ein Theiler des Polynoms P ist. Sind die in ähnlicher Weise ermittelten Ausdrücke $y + \frac{\alpha_1}{\delta_1}$ u. s. w. sämmtlich keine Theiler von P, so besitzt dieses Polynom überhaupt keinen linearen Theiler[1]), worunter naturgemäss zu verstehen ist keinen reellen rationalen Theiler. In dem erwähnten Beispiele sieht der Ansatz so aus:

y	P		
2	30	1 . 2 . 3 . 5 . 6 . 10 . 15 . 30	10
1	7	1 . 7	7
0	20	1 . 2 . 4 . 5 . 10 . 20	4
-1	3	1 . 3	1
-2	34	1 . 2 . 17 . 34	-2

Die in der letzten Columne stehenden Zahlen 10, 7, 4, 1, -2 bilden eine fallende arithmetische Progression mit der in 6 enthaltenen Differenz $\delta = 3$. Neben $y = 0$ steht, wie schon erwähnt, $\alpha = 4$. Der zu probirende Theiler ist also $3y + 4$, und wirklich findet sich $P = (3y + 4)(2y^3 - 3y^2 - 3y + 5)$. Wollte man (was Newton unterlässt) $P = 2y^3 - 3y^2 - 2y + 5$ weiter zerlegen, so sähe die Rechnung so aus:

[1]) *concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis.*

y	P		
2	3	1 . 3	3
1	1	1	1
0	5	1 . 5	-1
-1	3	1 . 3	-3

Die gesuchte arithmetische Progression kann nur 3, 1, -1, -3 sein. Ihre Differenz $\delta = 2$ ist in dem Coefficienten 2 von $2y^3$ enthalten. Neben $y = 0$ steht $\alpha = -1$. Man hat zu probiren, ob $2y - 1$ ein Factor des Polynoms ist. Aber

$$2y^3 - 3y^2 - 2y + 5 = (2y - 1)\left(y^2 - y - \frac{3}{2}\right) + \frac{7}{2},$$

d. h. die Division geht nicht auf, und das Polynom hat keinen reellen rationalen linearen Factor mehr. Ist kein linearer Factor, in dem erläuterten Sinne des Wortes, vorhanden, so könnte noch immer ein quadratischer Factor vorhanden sein, auf welchen aber nur dann zu fahnden ist, wenn das zu zerlegende Polynom mindestens bis zum 4. Grade ansteigt, denn ein Polynom 3. Grades kann keinen Factor 2. Grades besitzen, ohne dass neben ihm ein Factor 1. Grades vorhanden wäre. Newton lehrt nun auch solche quadratische Factoren insofern suchen, als er ermittelt, welche Factoren überhaupt in Vorschlag zu bringen sind. Er bedient sich dazu eines wieder von Einsetzungen gewisser in arithmetisch abnehmender Reihenfolge gewählter Werthe der allgemeinen Grösse, aber in ungleich verwickelterem Verfahren. Man könnte, meint Newton[1]), auch nach Factoren noch höheren Grades forschen, doch sei es nicht erwünscht, den Anfänger mit solchen Dingen aufzuhalten.

Einen Beweis für die Richtigkeit seines Verfahrens zur Aufsuchung von Factoren eines Polynoms hat Newton nicht gegeben. An einer späteren Stelle[2]) sagt er einmal, er habe die Beweisführungen mitunter aus doppelten Gründen unterlassen, bald weil sie ihm sehr leicht schienen, bald weil sie ohne lange Umschweife nicht mitgetheilt werden konnten. Wir wissen nicht, welcher der beiden Gründe ihm grade hier massgebend war. Jedenfalls hat Niclaus I. Bernoulli das Fehlende ergänzt und einen besonderen Aufsatz darüber seinem Oheime Johann Bernoulli eingereicht, der denselben im Mai 1708 Leibniz mittheilte[3]). Leibniz versprach für die Einrückung

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 41. [2]) Ebenda pag. 212: *Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi visae sunt, et nonnumquam absque nimiis ambagibus tradi non possunt.* [3]) Leibniz III, 827—835.

in die Abhandlungen der Berliner Academie Sorge tragen zu wollen[1]), aber diese unterblieb, wir wissen nicht weshalb. Erst 1745 kam der Aufsatz in dem Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli und Leibniz zur Veröffentlichung. Mit Rücksicht darauf, dass der Aufsatz doch schon im Mai 1708 jenen beiden grossen Mathematikern bekannt war, berichten wir gleich hier über ihn.

Niclaus I. Bernoullis Beweis für Newtons Regel ist etwa folgender. Ist $P = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ das gegebene Polynom und $F = p + qx + \cdots$ ein Factor desselben, d. h. ist $\frac{P}{F}$ eine ganze reelle Function von x, so muss die Theilbarkeit der Buchstabenausdrücke in eine solche ganzer Zahlen durch einander übergehen, sofern x durch eine ganze positive oder negative Zahl ersetzt wird. Schreiben wir P und F, in welchen x etwa durch ξ ersetzt ist, $P(\xi)$ und $F(\xi)$, so muss also $\frac{P(\xi)}{F(\xi)}$ eine ganze Zahl sein. Beispielsweise sind daher $\frac{P(2)}{F(2)}, \frac{P(1)}{F(1)}, \frac{P(0)}{F(0)}, \frac{P(-1)}{F(-1)}, \frac{P(-2)}{F(-2)}$ lauter ganze Zahlen. Da P gegeben ist, so kann man sofort $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$, $P(-1)$, $P(-2)$ ausrechnen und die einzelnen ganzzahligen Theiler dieser Zahlen anschreiben. Unter letzeren müssen die $F(2)$, $F(1)$, $F(0)$, $F(-1)$, $F(-2)$ sich finden, und insbesondere ist $P(0) = a$, $F(0) = p$, also p ein Theiler von a. Ist F linear, d. h. $F = p + qx$, und die Division $\frac{P}{F}$ soll aufgehen, so muss andererseits q ein Theiler des Coefficienten der höchsten in P vorkommenden Potenz von x sein, also z. B. von d, wenn P nur vom 3. Grade sein sollte. Man weiss aber noch mehr. Offenbar ist $F(2) = p + 2q$, $F(1) = p + q$, $F(0) = p$, $F(-1) = p - q$, $F(-2) = p - 2q$, und diese Zahlen bilden eine fallende arithmetische Progression von der Differenz q (das frühere δ), welche nach dem unmittelbar Vorhergegangenen in d enthalten sein muss. Und nun ist das Verfahren augenscheinlich: aus den Theilern von $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$ u. s. w. werden solche gewählt, die eine fallende arithmetische Progression bilden. Deren Differenz ist q, und neben $P(0)$ steht $F(0) = p$, folglich ist $F = p + qx$ bekannt. Nicht als ob dieses $p + qx$ immer Theiler von F sein müsste, aber wenn es ein lineares F gibt, so kann es nur $p + qx$ heissen. Ergibt sich die Möglichkeit mehrerer fallender arithmetischer Progressionen unter den Theilern von $P(2)$, $P(1)$. $P(0)$ u. s. w., so hat man auch mehrere p, beziehungsweise mehrere q, und mit jedem $p + qx$ muss der Versuch gemacht werden, ob es ein Factor F von P ist oder nicht. Sucht man einen quadratischen Factor

[1]) Leibniz III, 835.

$$F = p + qx + rx^2,$$

so ist ersichtlich, dass $F(2) = p + 2q + 4r$, $F(1) = p + q + r$, $F(0) = p$, $F(-1) = p - q + r$, $F(-2) = p - 2q + 4r$ eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung darstellen, während immer wieder $\frac{P(\xi)}{F(\xi)}$ ganzzahlig sein muss. Es kommt folglich darauf an, unter den Theilern von $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$ u. s. w. diejenigen herauszusuchen, welche eine fallende arithmetische Reihe zweiter Ordnung darstellen, und dahin ist auch Newtons Verlangen gerichtet, wenn gleich kaum ein Leser seine Ausdrucksweise verstehen dürfte, der nicht zum Voraus weiss, was sie bedeuten soll.

Nach dem Aufsuchen der Theiler eines Ausdruckes kommt in der Arithmetica universalis die Erforschung des Gemeintheilers zweier Ausdrücke[1]). Sie erfolgt bei Buchstabenausdrücken ähnlich wie bei Zahlen durch fortgesetzte Division des Ausdruckes niedrigerer Ordnung in den höherer Ordnung, wobei der jedesmalige Rest den neuen Divisor, der ehemalige Divisor den neuen Dividenden liefert. Als abkürzend wird gelehrt, man solle, wo ein Ausdruck, sei es ein Divisor oder ein Dividend, einen Theiler leicht erkennen lässt, diesen vor der Fortsetzung des Verfahrens entfernen. Ist z. B. der Bruch $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3}$ durch Aufsuchung des grössten Gemeintheilers von Zähler und Nenner zu kürzen, so lässt man zunächst aus dem Zähler den Factor a^2, aus dem Nenner den Factor $3b$ weg und hat dadurch die neue Gestalt $\frac{a^2}{3b} \cdot \frac{6a^3 + 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2}{3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3}$. Das verdoppelte $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$ von $6a^3 + 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2$ abgezogen, lässt $(15b + 18c)a^2 - (10b + 12c)c^2$ zum Rest, der leicht ersichtlich den Factor $5b + 6c$ besitzt. Diesen entfernt man und behält nur noch $3a^2 - 2c^2$, welches jetzt Divisor ist bei

$$3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$$

als Dividend, und diese Division geht auf. Folglich ist $3a^2 - 2c^2$ der gesuchte Gemeintheiler, durch welchen man den Bruch zu kürzen hat und man erhält $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3} = \frac{2a^3 + 5a^2b}{3ab - 9bc}$.

Zur Ausziehung der Quadratwurzel[2]) aus selbst schon mit Irrationalitäten behafteten Binomien führt die Formel

$$\sqrt{A + B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}.$$

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 44—46. [2]) Ebenda pag. 49.

Bei der Elimination einer Unbekannten zwischen zwei Gleichungen mag zuerst auf den Kunstausdruck *Exterminatio* für die Wegschaffung einer Grösse aufmerksam gemacht werden. Sie erfolgt durch Gleichsetzung der aus jeder der beiden Gleichungen gefundenen Werthe dieser Unbekannten[1]), oder durch ihre Ersetzung durch ihren Werth[2]), mithin durch die beiden Verfahren, welchen eine spätere Zeit die Namen der Combinationsmethode und der Substitutionsmethode beigelegt hat. Nachdem auch noch auf die Elimination solcher Unbekannten aufmerksam gemacht ist, welche in den vorgelegten Gleichungen in höherer als der ersten Potenz auftreten[3]), und wobei mehrfache Endgleichungen ohne Erwähnung der Art ihrer Herstellung angegeben sind, wie z. B.

$$(ah - bg - 2cf)ah + (bh - cg)bf + (ag^2 + cf^2)c = 0$$

als Ergebniss von $ax^2 + bx + c = 0$ und $fx^2 + gx + h = 0$, geht Newton zum Wegschaffen der Irrationalitäten über[4]). In der Ueberschrift der 8 Zeilen, welche Alles in Allem dieser wichtigen Aufgabe gewidmet sind, heissen die Irrationalitäten *Quantitates surdae*, im Texte *Asymmetriae*, welcher letztere Name für Vieta und Fermat der gebräuchliche war. Das mehr angedeutete als gelehrte Verfahren ist genau das von Fermat (Bd. II, S. 804). Statt jedes irrationalen Ausdruckes wird ein neuer Buchstabe gesetzt und so die Aufgabe auf die der Elimination von in höherer als der ersten Potenz auftretenden Unbekannten zurückgeführt.

Bei Gelegenheit dieser Erwähnung müssen wir auf zwei Stellen unseres vorigen Abschnittes zurückgreifen. Wo wir (S. 170) die Differentiation von Irrationalgrössen in Newtons *Methodus fluxionum* schilderten, haben wir die Gedankenähnlichkeit mit Fermats Rationalmachen von Gleichungen hervorgehoben, ohne dessen Bekanntschaft für Newton in Anspruch zu nehmen. Dann nannten wir (S. 194) die zweite Erklärung des Inflexionspunktes wieder in der Methodus fluxionum eine vielleicht durch Fermat beeinflusste, und jetzt wieder behaupten wir für die Wegschaffung der Asymmetrien Fermatsche Einwirkung. Das klingt widerspruchsvoll, ist es aber nicht. Dass Newton die Stelle der Arithmetica universalis nicht schrieb, ohne von Fermats Arbeiten Kenntniss zu haben, dürfte unabweisbar sein. Im Verfahren und in der Benennung (Asymmetrie) treffen zwei

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 58: *Exterminatio quantitatis incognitae per aequalitatem valorum ejus.* [2]) Ebenda pag. 59: *Exterminatio quantitatis incognitae substituendo pro ea valorem suum.* [3]) Ebenda pag. 60: *Exterminatio quantitatis incognitae quae plurium in utraque aequatione dimensionum existit.* [4]) Ebenda pag. 64.

Schriftsteller nicht zufällig überein. Dass ferner die Beseitigung der Irrationalität in der Methodus fluxionum mit der Fermatschen Substitution neuer Buchstaben für eine Irrationalzahl nahe verwandt ist, springt in die Augen, aber dennoch scheint uns die Vermuthung, die betreffende Stelle der Methodus fluxionum müsse nach der Drucklegung von Fermats Werken, also nach 1679 verfasst sein, zum Mindesten nicht bewiesen. Newton kann von selbst auf diesen Gedanken der Ersetzung von Irrationalitäten, die in der Methodus fluxionum nur *Quantitates surdae*[1]) und nicht *Asymmetriae* heissen, durch neue Buchstaben gekommen sein. Hat er doch schon im Tangentenbriefe von 1672 sich geäussert, dass Irrationalitäten ihn nicht störten, und wenn dieser Behauptung auch mit grosser Wahrscheinlichkeit die Deutung gegeben werden kann, Newton habe dabei an Reihenentwicklung der Irrationalitäten als das unfehlbare von ihm überall in Anwendung gebrachte Hilfsmittel gedacht, so muss diese Deutung doch nicht grade die richtige sein. Ob man trotzdem festhalten will, Newtons zweite Erklärung des Inflexionspunktes stehe unter Fermatschem Einflusse und die sicherlich später umgearbeitete Methodus fluxionum habe nach 1679 Veränderungen erlitten, ist selbstverständlich ganz unabhängig zu beurtheilen.

Die von Newton zusammengestellten Textgleichungen würden vielleicht auch ein Verweilen gestatten. Wir wollen wenigstens die 11. Aufgabe[2]) erwähnen, die von Newton an in den Lehrbüchern heimisch geworden ist. Die Frage geht dahin, wie viele Kühe in der Zeit h eine Wiese von der Grösse g nebst dem immer nachwachsenden Grase kahl weiden werden, wenn der Nachwuchs der Wiesen sowohl als die Fresslust der weidenden Thiere als unveränderlich gelten und a Kühe, b Wiesen in c Zeit, sowie d Kühe, e Wiesen in f Zeit abweiden,

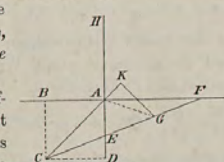

Fig. 50.

Bei der 24. geometrischen Textaufgabe nimmt Newton die Gelegenheit wahr, sich darüber zu äussern[3]), welches von den einer Aufgabe angehörenden Stücken man am vortheilhaftesten als Unbekannte wähle, nämlich ein solches, dem kein anderes gleichberechtigtes zur Seite stehe. Sei z. B. die Aufgabe gestellt (Fig. 50) in einen rechten Winkel FAD eine gegebene Länge FE der Art einzuzeichnen, dass die verlängerte FE durch den gegebenen,

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 56 letzte Zeile. [2]) *Arithmetica universalis* pag. 75. [3]) Ebenda pag. 119.

von AB und AD gleich weit abstehenden Punkt C hindurchgehe. Man könnte die Entfernung DE als Unbekannte wählen, oder AE, oder CE. Aber diesen Stücken sind andere, nämlich BF, beziehungsweise AF, beziehungsweise CF gleichberechtigt, und es liegt nicht der geringste Grund vor, von jenen Paaren das eine Stück dem anderen vorzuziehen. Unpaar dagegen tritt der zwischen E und F in der Mitte liegende Punkt G auf, und man wird daher am zweckmässigsten ihn zu bestimmen suchen, und zwar auch mittels eines nur einmal auftretenden Stückes. Als Mittelpunkt der Hypotenuse EF des rechtwinkligen Dreiecks AEF liegt G auf dem mit $\frac{EF}{2}$ als Halbmesser um A als Mittelpunkt beschriebenen Kreise, braucht also nur auf diesem Kreise festgelegt zu werden. Es gibt ferner keine der CA ähnlich geartete Gerade in der Figur, und auf sie ist der Punkt G durch die nur einmal mögliche Senkrechte GK zu beziehen, wie umgekehrt eine in K senkrecht zu CA gezogene KG den vorerwähnten Kreis in G schneidet. Deshalb suche man endgiltig den Punkt K, sei es, indem man AK oder CK als Unbekannte der Aufgabe betrachtet. Newton nimmt $AK = y$, $AC = e$, $EG = b$ und behauptet, man finde alsdann $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$, während andere Annahmen zu einer Gleichung 4. Grades führen. Die von Newton angegebene Gleichung lässt sich folgendermassen herleiten. Wegen $CD \parallel BF$ ist $\angle ECD = EFA$ und $45^0 + ECD = 45^0 + EFA$. Aber

$$45^0 + ECD = BCA + ECD = 90^0 - ACE = 90^0 - KCG = KGC.$$

Andererseits ist

$$45^0 + EFA = 45^0 + GFA = 45^0 + GAF = KAF + GAF = KAG.$$

In den beiden rechtwinkligen Dreiecken KGC und KAG sind also auch die grösseren spitzen Winkel einander gleich, und die Dreiecke sind ähnlich. Folglich ist

$$\frac{CK}{GK} = \frac{GK}{AK},\ CK.AK = GK^2 = AG^2 - AK^2 \text{ oder } (e+y)y = b^2 - y^2,$$

und das stimmt überein mit $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$.

Die 57. Aufgabe[1]) lässt zwei gegebene Winkel sich so um ihre Scheitelpunkte drehen, dass der Durchschnittspunkt zweier ihrer Schenkel eine grade Linie beschreibt, und frägt alsdann nach dem Orte des Durchschnittspunktes der beiden anderen Schenkel. Wir werden im 99. Kapitel auf diese und auch auf die vier zunächst auf sie folgenden Aufgaben zurückkommen.

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 169—170.

Diese vier, zugleich die letzten eingekleideten Aufgaben[1]) sind ganz besonderen Inhaltes und auch räumlich von den anderen getrennt. Etwa eine halbe Seite ist frei gelassen, bevor die 58. bis 61. Aufgabe im Drucke unmittelbar an einander schliessend nachfolgen. Die vier Aufgaben verlangen: durch 4 gegebene Punkte eine Parabel zu legen; durch 5 gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen; durch 4 Punkte einen Kegelschnitt zu legen, welcher in dem einen gegebenen Punkte eine gegebene Gerade berühre; durch 3 gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, der zwei von den gegebenen Punkten als Berührungspunkte mit zwei ebenfalls gegebenen Geraden besitze. Das sind Aufgaben, welche Newton (S. 207) schon im 5. Abschnitte des II. Buches seiner Principien aufgelöst hatte, für welche aber in der Arithmetica universalis andere Constructionen angegeben sind. Der Gedanke beruht natürlich immer darauf, mit Hilfe der gegebenen Elemente z. B. der 5 Punkte einen weiteren Kegelschnittspunkt zu ermitteln; was man alsdann unter Benutzung von irgend 5 unter den schon bekannten Punkten beliebig wiederholen kann.

Nach den 61 Aufgaben, sagten wir (S. 395), gelangten die Formen der Gleichungswurzeln zur Untersuchung. Eine Gleichung kann mehrere Wurzeln haben[2]), und man darf darüber sich nicht wundern, weil auch die in Gleichungen gebrachten Aufgaben auf mehrere Arten zu lösen sind, zwei Kreise z. B. nicht bloss einen Durchschnittspunkt, sondern deren zwei haben. Eine Gleichung kann so viele Wurzeln haben, als der Exponent ihres Grades angibt, jedenfalls nicht mehr[3]). Die Wurzeln selbst sind entweder affirmativ oder negativ und einige darunter nicht selten unmöglich[4]). Hat eine Gleichung keine unmögliche Wurzel, so ist die Anzahl der affirmativen Wurzeln der der Zeichenwechsel gleich, alle übrigen Wurzeln sind negativ[5]). Man beachte den Unterschied dieser Ausdrucksweise von der bei Descartes (Bd. II, S. 796). Dort Zeichenwechsel und Zeichenfolgen als Maassstab für die mögliche Anzahl positiver und negativer Wurzeln, hier die Anzahl negativer Wurzeln durch den Ausdruck die übrigen bestimmt, offenbar mit Rücksicht darauf, dass weiter oben der Gleichung $n$ten Grades nicht wirklich n Wurzeln, sondern höchstens n Wurzeln zugesprochen waren. Das Vorhandensein unmöglicher Wurzeln macht das Abzählen von Zeichen-

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 171—178. [2]) Ebenda pag. 180. [3]) Ebenda pag. 181: *Potest vero aequatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, et non plures.* [4]) Ebenda pag. 182. [5]) Ebenda pag. 184: *Tot enim sunt radices affirmativae quot signorum in continua serie mutationes de + in — et — in +; caeterae negativae sunt.*

wechseln und Zeichenfolgen allerdings unfruchtbar, und deshalb fragt Newton[1]), in welcher Anzahl unmögliche Wurzeln vorkommen?

Auch hier kommt es auf ein Abzählen von Zeichenwechseln an, jedoch nicht bei den wirklich der Gleichung angehörenden Zeichen, sondern bei künstlich errechneten. Sei die Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

vorgelegt, deren Coefficienten zwar reell sind, aber beliebig positiv oder negativ sein können. Man bildet, dem Gleichungsgrade n entsprechend, n Brüche mit von 1 bis n ansteigenden Nennern, während die Zähler in umgekehrter Reihenfolge von n bis 1 abnehmen. Die Brüche heissen daher $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \cdots \frac{n-k+1}{k}, \frac{n-k}{k+1}, \cdots \frac{1}{n}$. Aus diesen n Brüchen werden $n-1$ Quotienten gebildet, indem jeder folgende Bruch durch den ihm vorhergehenden dividirt wird. Diese Quotienten $\frac{1.(n-1)}{2.n}, \frac{2.(n-2)}{3.(n-1)}, \cdots \frac{k.(n-k)}{(k+1)(n-k+1)}, \cdots \frac{(n-1).1}{n.2}$ werden den $n-1$ Mittelgliedern der Gleichung, von $a_{n-1}x^{n-1}$ anfangend bis zu $a_1 x$, zugeordnet, so dass also $\frac{k.(n-k)}{(k+1)(n-k+1)}$ zu $a_{n-k}x^{n-k}$ gehört. Jeder solche Zahlenquotient wird mit dem Quadrate des zugehörigen Gleichungsgliedes vervielfacht, d. h. es wird $\frac{k.(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} a_{n-k}^2 x^{2n-2k}$ gebildet und mit dem Producte der beiden Nachbarglieder innerhalb der Gleichung, d. h. mit

$$a_{n-k+1}x^{n-k+1} \cdot a_{n-k-1}x^{n-k-1} = a_{n-k+1} \cdot a_{n-k-1} \cdot x^{2n-2k}$$

verglichen. Je nachdem $\frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} a_{n-k}^2 \gtrless a_{n-k+1} \cdot a_{n-k-1}$ ausfällt, schreibt man unter $a_{n-k}x^{n-k}$ das Zeichen $+$ oder $-$. Dem ersten Gliede $a_n x^n$ und dem letzten a_0 werden immer $+$ beigegeben. In dieser Zeichenreihe zählt Newton die Zeichenwechsel und behauptet, ihre Anzahl stimme mit der der unmöglichen Wurzeln überein.

Ist z. B. $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$ zu untersuchen, so ist $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$ die zuerst zu bildende Bruchreihe und $\frac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{3}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{3}$ die Quotientenreihe, und diese liefert, über die entsprechenden Gleichungsglieder gesetzt, folgende Gestalt: $x^3 + \overset{\frac{1}{3}}{px^2} + \overset{\frac{1}{3}}{3p^2x} - q = 0$. Nun ist $\frac{1}{3}p^2 < 1 . 3p^2$ und das gibt $-$. Ferner $\frac{1}{3} \cdot 9p^4 > p \cdot (-q)$ und das gibt $+$. Mit Hinzuziehung der beiden $+$ für die äussersten

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 184—187.

Glieder hat man also die Zeichenreihe $+ - + +$ mit zwei Zeichenwechseln und folglich zwei unmögliche Wurzeln.

Fehlt in der zu untersuchenden Gleichung ein einzelnes Glied zwischen zwei vorhandenen Gliedern, so wird es als mit dem Coefficienten 0 behaftet angeschrieben, und die Regel ändert sich im Uebrigen nicht. Bei $x^4 + 0x^3 - 6x^2 - 3x - 2 = 0$ z. B. ist $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ die Bruchreihe und $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{3}{8}$ die Quotientenreihe. Der Ansatz $x^4 + \overset{\frac{3}{8}}{0x^3} - \overset{\frac{4}{9}}{6x^2} - \overset{\frac{3}{8}}{3x} - 2 = 0$ liefert $\frac{3}{8} \cdot 0 > 1 \cdot (-6)$ mit $+$; $\frac{4}{9} \cdot 36 > 0 \cdot (-3)$ mit $+$; $\frac{3}{8} \cdot 9 < (-6) \cdot (-2)$ mit $-$. Man gewinnt die Zeichenreihe $+ + + - +$ mit zwei Zeichenwechseln und folglich zwei unmögliche Werthe.

Eine Schwierigkeit tritt auf, wo zwei oder mehr Glieder in der Gleichung fehlen. Bei $x^5 + ax^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - a^5 = 0$ erscheint die Bruchreihe $\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$, die Quotientenreihe $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$. Der Ansatz wird $x^5 + \overset{\frac{2}{5}}{ax^4} + \overset{\frac{1}{2}}{0x^3} + \overset{\frac{1}{2}}{0x^2} + \overset{\frac{2}{5}}{0x} - a^5 = 0$ mit $\frac{2}{5}a^2 > 1 \cdot 0$ mit $+$, aber dann $\frac{1}{2} \cdot 0 = a \cdot 0$, $\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \cdot 0$, $\frac{2}{5} \cdot 0 = 0 \cdot (-1)$ mit lauter ungewissen Zeichen. Newton schreibt vor, man solle die ungewissen Zeichen abwechselnd $- + - +$ u. s. w. schreiben. Nur in dem Falle, dass die Gleichungsglieder, zwischen welchen Glieder fehlen, entgegengesetzten Vorzeichens sind (wie in dem gegebenen Falle ax^4 und $-a^5$) müsse man ohne Rücksicht auf die vorgeschriebene Abwechslung dem letzten Lückengliede das Zeichen $+$ zuertheilen. Hier entsteht also die Zeichenreihe $+ + - + + +$ mit zwei Zeichenwechseln und zwei unmöglichen Wurzeln. Die Gleichung $x^5 + ax^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + a^5 = 0$ dagegen würde die Zeichenreihe $+ + - + - +$ mit vier Zeichenwechseln und vier unmöglichen Wurzeln liefern.

Wie endlich hat man zu verfahren, wenn eine Gleichheit der das Zeichen bedingenden Ausdrücke ausserhalb einer Lücke eintritt? Ein derartiges Beispiel ist $x^3 + px^2 + \frac{1}{3}p^2x - q = 0$, wo der Ansatz ähnlich dem des ersten Beispieles $x^3 + \overset{\frac{1}{3}}{px^2} + \overset{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}p^2x} - q = 0$ wird. Die Kriterien $\frac{1}{3} \cdot p^2 = 1 \cdot \frac{1}{3}p^2$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}p^4 > p \cdot (-q)$ bringen eine Zeichenreihe $+ ? + +$ hervor, welche, je nachdem das ? durch $+$

oder durch — ersetzt wird, gar keinen Zeichenwechsel oder deren zwei besitzt. Man hat in dem gegebenen Falle zwei unmögliche Wurzeln, denn die Wurzeln von

$$x^3 + px^2 + \frac{1}{3}px - q = 0$$

sind

$$x_1 = -\frac{p}{3} + \sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q},$$

$$x_3 = -\frac{p}{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q}.$$

Newton schweigt über diese Schwierigkeit.

Wir werden im XVIII. Abschnitte englische Schriftsteller kennen lernen, welche Newtons Untersuchung aufnahmen. Hier müssen wir uns damit begnügen, nur das festzustellen, dass Newton der Erste war, der die Frage nach der wirklich vorhandenen Anzahl complexer Gleichungswurzeln überhaupt aufwarf und an einer Beantwortung derselben sich versuchte.

Im weiteren Verlaufe[1]) kommt Newton zu den Formeln, welche die Summen der 1., der 2., der 3., der 4. Potenzen der Gleichungswurzeln mit Hilfe der Gleichungscoefficienten berechnen lassen. Es sind genau die gleichen Ergebnisse, zu welchen Albert Girard (Bd. II, S. 789) gelangt war, nur dass sie bei Newton etwas weniger durchsichtig geschrieben sind. In zwei Beziehungen geht aber Newton über Girard hinaus. Er gibt zu verstehen, man könne Formeln für die Summen höherer Wurzelpotenzen, so für die Summe der 6. Potenzen, finden, wenn auch ohne dieselben anzugeben. Er benutzt ferner die gegebenen Formeln zur Auffindung einer Grenze, unterhalb deren die Wurzelwerthe liegen müssen[2]). Quadrate, 4. Potenzen, 6. Potenzen u. s. w. sind immer positiv. Die Summe solcher mit geradem Exponenten versehenen Potenzen von Gleichungswurzeln ist folglich immer grösser als die gleichhohe Potenz einer einzelnen, wenn auch der grössten Gleichungswurzel. Heisst x_μ diese grösste Gleichungswurzel und Σx^{2m} die Summe der $2m$ten Potenzen aller Gleichungswurzeln, so schreibt sich der ausgesprochene Satz als $x_\mu^{2m} < \Sigma x^{2m}$, und folglich muss $x_\mu < \sqrt[2m]{\Sigma x^{2m}}$ sein. Der Unterschied $\sqrt[2m]{\Sigma x^{2m}} - x_\mu$ wird um so geringfügiger, je grösser m gewählt wird.

---

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 192 [2]) Ebenda pag. 193—196, *De limitibus aequationum*.

Andere Grenzbestimmungen für die Gleichungswurzeln schliessen sich an Rolles Lehrsatz (S. 123) an.

Wir hoben (S. 395) hervor, der Name Descartes sei einmal genannt. Dieses ist der Fall[1]), wo Newton von der Auflösung biquadratischer Gleichungen mittels Zerlegung in zwei quadratische Factoren handelt, welche unter Voraussetzung der Lösbarkeit kubischer Gleichungen möglich sei (Bd. II, S. 797). Die Methode, sagt er, rühre von Descartes her, empfehlenswerth findet er sie nicht.

Nachdem die algebraische Auflösung von Gleichungen nach den verschiedensten Richtungen durchgesprochen ist, wendet Newton sich geometrischen Methoden zu, zuerst unter Anwendung der Conchoide[2]), für deren Berechtigung er eintritt. Gleichwie Archimed in seinen Wahlsätzen die Conchoide zum Zwecke der Winkeldreitheilung als bekannt voraussetze und Pappus das Gleiche thue, dürfe man jene Curve zu jeder Zeit anwenden. Der Zweck der Benutzung geometrischer Hilfsmittel bei Gleichungsauflösungen sei die Auffindung erster Näherungswerthe, von denen aus man dann rechnend den wahren Wurzeln so nahe zu kommen vermöge, als man immer wolle. Die Benutzung der Conchoide insbesondere zur Auflösung der von ihrem quadratischen Gliede befreiten kubischen Gleichung $x^3 + qx = r$, wo q und r positiv sein sollen, ist folgende (Fig. 51). Eine beliebige Strecke KA werde $= n$ gesetzt und auf ihr $KB = \frac{q}{n}$ abgemessen. BA wird in C halbirt und von K aus mit KC als Halbmesser ein Kreisbogen beschrieben, in welchen eine Sehne $CX = \frac{r}{n^2}$ eingezeichnet wird, dann wird AX gradlinig verbunden. Mittels der Conchoide ist es möglich, von K aus die Gerade KEY so zu zeichnen, dass das zwischen den verlängerten AX und CX enthaltene Stück $EY = AC$ sei, so ist XY die Wurzel der Gleichung. Zum Beweise wird $KF \parallel CX$ gezogen. Zunächst ist $\triangle ACX \sim AKF$ und $\triangle EYX \sim EKF$. Daraus folgt

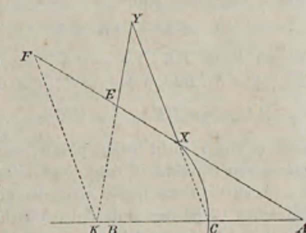

Fig. 51.

$$\frac{AC}{AK} = \frac{CX}{KF} \text{ und } \frac{YX}{YE}\left(= \frac{YX}{AC}\right) = \frac{KF}{KE}.$$

Multiplication beider Gleichungen mit einander gibt

---

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 210—211. [2]) Ebenda pag. 213—215.

$$1.\quad \frac{YX}{AK} = \frac{CX}{KE}.$$

Daraus folgt weiter $\frac{YX}{CX} + 1 = \frac{AK}{KE} + 1$, $\frac{YX + CX}{AK + KE} = \frac{CX}{KE}$ oder

$$2.\quad \frac{YX}{AK} = \frac{YX + CX}{AK + KE} = \frac{CY}{AK + KE}.$$

Nach bekannten Sätzen der Planimetrie ist ferner

$$YK^2 = CY^2 + CK^2 - CY \,.\, CX,$$

also auch

$$(YK + CK)(YK - CK) = CY(CY - CX) = CY \,.\, YX$$

und

$$\frac{YK - CK}{YX} = \frac{CY}{YK + CK}.$$

Aber

$$YK + CK = YK - YE + CA + CK = EK + AK$$

und

$$YK - CK = YK - YE + CA - CK = EK - BK,$$

also auch $\frac{EK - BK}{YX} = \frac{CY}{EK + AK}$, beziehungsweise wegen 2. auch

$$3.\quad \frac{EK - BK}{YX} = \frac{YX}{AK}.$$

Aus 3. folgt aber sofort

$$4.\quad YX^3 + AK \,.\, BK \,.\, YX = AK \,.\, EK \,.\, YX.$$

Wegen 1. ist $EK \,.\, YX = AK \,.\, CX$, und somit geht 4. über in $YX^3 + AK \,.\, BK \,.\, YX = AK^2 \,.\, CX$ oder, wegen

$$AK = n,\ BK = \frac{q}{n},\ CX = \frac{r}{n^2},\ \text{in } YX^3 + q \,.\, YX = r.$$

Sind q und r nicht beide positiv, so sind einzelne von den aufgetragenen Strecken in entgegengesetzter Richtung zu nehmen.

Auch die Construction einer das quadratische Glied enthaltenden kubischen Gleichung mittels der Conchoide wird in Angriff genommen[1]), sofern die 3 Gleichungswurzeln nicht insgesammt positiv oder insgesammt negativ sind. Wir brauchen kaum darauf aufmerksam zu machen, dass durch diesen Zusatz der sogenannte irreductible Fall als ausgeschlossen erklärt ist. Ausser der gewöhnlichen Conchoide benutzt Newton zur Ermittelung der Wurzel einer kubischen Gleichung auch eine Art von Kreisconchoide[2]), d. h. er legt eine constante nach einem festen Punkte gerichtete Strecke zwischen einen Kreis und eine gegebene Gerade. Wieder etwas später[3]) zeigt Newton die

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 218—220. [2]) Ebenda pag. 220. [3]) Ebenda pag. 231.

den Alten, wie er ausdrücklich sagt, schon bekannte Auflösung kubischer Aufgaben, wie die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen zwischen gegebenen Strecken mit Hilfe der Cissoide und noch später[1]) mit Hilfe einer festen Ellipse und eines Kreises.

Wir haben diejenigen Bestandtheile der Arithmetica universalis erwähnt, von denen wir glauben, dass sie eine gewisse geschichtliche Bedeutung besitzen. Wollten wir alles hervorheben, was überhaupt zu fesseln vermag, so müssten wir den ganzen Band übersetzen. Eines geht hoffentlich schon aus unserem Berichte hervor: dass Newton eine ganz besondere algebraische Begabung besass, und dass er in der Gleichungslehre auch da mindestens erweiternd und verallgemeinernd auftrat, wo Andere, die er freilich nie nannte, aber mit grösster Wahrscheinlichkeit gekannt hat, ihm den Zutritt bahnten.

Wollen wir einen weiteren theoretischen Fortschritt in der Lehre von den Zahlengleichungen aufzuzeichnen finden, so müssen wir die P. T. von 1717 zur Hand nehmen. Dort[2]) hat Brook Taylor die erste wirkliche Anwendung seiner Reihe gemacht, indem er an Halleys Aufsatz von 1694 (S. 120) anknüpfte. Wir berichten in aller Kürze darüber, indem wir, wie jedesmal, wenn es um Taylorsche Arbeiten sich handelt, unseren Lesern nicht zumuthen, sich an seine Bezeichnungen zu gewöhnen, die Gedankenfolge aber unverändert lassen. Die vorgelegte Gleichung möge y als Unbekannte enthalten, also etwa $F(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ heissen. Auf irgend eine Weise, z. B. mittels Curvendurchschnitt, sei ein Näherungswerth z von y gefunden, indem $F(z)$ allerdings nicht 0, sondern x zum Werthe hat, aber x doch schon ziemlich klein ist. Der genaue Werth von y kann als $z + v$ betrachtet werden, wo die Ergänzung v noch zu suchen ist. Zweierlei weiss man, wovon man bei diesem Aufsuchen von v Gebrauch zu machen hat, erstens dass $F(z) = x$, zweitens dass $F(z + v) = 0$. Nach Taylors Satze ist

$$F(z+v) = F(z) + F'(z) \,.\, v + \frac{F''(z)}{1 \,.\, 2} v^2 + \frac{F'''(z)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot v^3 + \frac{F^{\mathrm{IV}}(z)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} v^4 + \cdots.$$

Ersetzt man hier $F(z + v)$ durch 0 und lässt, in Würdigung des Umstandes, dass v klein sein wird, die Glieder fort, welche höhere Potenzen von v als die zweite enthalten, so bleibt zur Bestimmung von v noch $F(z) + F'(z) \,.\, v + \frac{F''(z)}{2} v^2 = 0$, oder anders geschrieben: $x + x' \,.\, v + \frac{x''}{2} v^2 = 0$, woraus man gewinnt

$$v = -\frac{x'}{x''} + \sqrt{\frac{x'^2}{x''^2} - \frac{2x}{x''}}.$$

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 232 flg. [2]) P. T. XXX, 610—622.

Dann kann $z + v = z_1$ gesetzt werden, $F(z_1) = x_1$, $y = z_1 + v_1$, um nach dem von vorher bekannten Verfahren v_1 zu finden u. s. w. Taylor setzt hinzu, man könne bei Aufsuchung der Ergänzungen v die Quadratwurzelausziehung vermeiden. Die Gleichung

$$x + x'v + \frac{x''}{2}v^2 = 0$$

lässt sich in der Form $v\left(x' + \frac{x''v}{2}\right) = -x$ schreiben. Daraus folgt $v = -\frac{x}{x' + \frac{x''v}{2}}$, und ersetzt man das v im Nenner des Bruches rechts vom Gleichheitszeichen in kettenbruchartigem Verfahren durch das ihm nahezu gleiche $-\frac{x}{x'}$, so entsteht $v = -\frac{x}{x' - \frac{xx''}{2x'}}$. Taylor behauptet weiter, allerdings ohne diese Behauptung irgendwie zu begründen, sowohl der erstere irrationale, als der zweite rationale Werth von v liefere die doppelte Anzahl von Decimalstellen genau, als deren schon in z genau waren, $y = z + v$ sei daher auf dreimal so viele Decimalstellen richtig als z.

Einen Aufsatz De Lagnys aus dem Jahre 1722, der der Zeitfolge nach hier zu erwähnen wäre, haben wir (S. 392) in dem Sinne vorweggenommen, dass wir erklärten, ein genauerer Bericht über ihn sei überflüssig.

Ganz anders verhält es sich mit einem Abschnitte eines 1722 in England gedruckten Buches. Cotes hat die drei ersten Abschnitte seiner *Harmonia Mensurarum*, den ersten, welchen wir (S. 377) besprachen, den zweiten und dritten, welche sich mit Integrationen beschäftigen, bis 1716 so ziemlich druckfertig gestellt. Anderes war nur auf fliegenden Zetteln entworfen, und ihnen wusste Robert Smith, der Herausgeber des Cotes'schen Nachlasses einen sehr schönen Satz zu entnehmen[1]), der so vom Untergange gerettet wurde. Er bildet die Grundlage der Lehre von den sogenannten binären Gleichungen, indem er den Ausdruck $x^\lambda \pm a^\lambda$ in λ einfache Factoren zerlegt, deren jeder einzeln gleich 0 gesetzt eine Wurzel von $x^\lambda \pm a^\lambda = 0$ erkennen lässt. Cotes, oder vielleicht sagen wir richtiger Smith, hat den Satz, welcher nachmals den Namen des Cotes'schen Lehrsatzes erhalten hat, allerdings nur geometrisch ausgesprochen, ihn auch weder hergeleitet noch bewiesen. Durch den Mittelpunkt eines Kreises (Fig. 52) vom Halbmesser a wird ein

[1]) *Harmonia Mensurarum* pag. 113: *Revocavi tandem ab interitu Theorema pulcherrimum.*

Durchmesser hindurchgelegt und auf ihm etwa links von dem Mittelpunkte O in der Entfernung $OP = x$ ein Punkt P bemerkt. Dann wird von dem Endpunkte A des durch P hindurchgehenden Durchmessers aus der Kreisumfang in 2λ gleiche Theile getheilt und P mit allen Theilpunkten gradlinig verbunden. Die Verbindungsgeraden nach den Theilpunkten sind nach den Punkten grader Ordnung ganz ausgezogen, nach denen ungrader Ordnung nur punktirt gezeichnet. Je nachdem λ ungrad (etwa $\lambda = 5$) oder grad (etwa $\lambda = 6$) gewählt ist, gehört die von P aus nach rechts gezogene Durchmesserstrecke zu den punktirten, beziehungsweise zu den ausgezogenen Geraden. In beiden Fällen ist das Product der λ ausgezogenen Strecken $= a^\lambda - x^\lambda$, und das Product der λ punktirten Strecken $= a^\lambda + x^\lambda$.

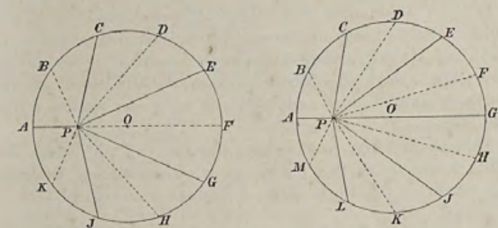

Fig. 52.

Fällt P ausserhalb des Kreises, so dass $x > a$, so ist das Product der ausgezogenen Strecken $x^\lambda - a^\lambda$, während die Werthform des Productes der punktirten Strecken sich nicht verändert.

Nur französische und hauptsächlich englische Veröffentlichungen haben in diesem Kapitel unsere Aufmerksamkeit in Anspruch genommen. In Italien hat Graf Jacopo Riccati, von welchem im 100. Kapitel ausführlicher die Rede sein wird, die transcendente Gleichung $y^{f(\log y)} = b$ durch Einsetzung von $\log y = x$ und $\log b = c$ in die algebraische Gleichung $xf(x) = c$ umgewandelt. Ausserdem hat er die Aufgabe behandelt, 6 in geometrischer Progression stehende Grössen: $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$ zu finden, wenn $x + \frac{x^5}{a^4} = b$ gegeben sei. Riccati setzt $\frac{x^2}{a} = y$ oder $x^2 = ay$. Daraus findet er $\frac{x^3}{a^2} = \frac{y^2}{x}$, wofür z gesetzt wird, d. h. er schreibt $y^2 = xz$. Des Weiteren ist $z^2 = \frac{x^6}{a^4}$, $\frac{z^2}{x} = \frac{x^5}{a^4}$. Nunmehr ist $b = x + \frac{z^2}{x}$ oder $x^2 + z^2 = bx$. Somit sind die Unbekannten x, y, z durch die drei Gleichungen

$$x^2 = ay$$
$$y^2 = xz$$
$$x^2 + z^2 = bx$$

zu finden[1]), was practisch allerdings keine sonderliche Erleichterung zu verschaffen scheint. In Deutschland war, wie aus den vorhergehenden Kapiteln sich schon zeigte, wie in den nachfolgenden sich bestätigen wird, die Mathematik als Ganzes keineswegs zurückgegangen, aber die wirklich bedeutenden deutschen Mathematiker waren am wenigsten Algebraiker. Fast nur um einen deutschen Namen als Stellvertreter einer an Zahl mehr als an Leistung ins Gewicht fallenden Klasse von Schriftstellern hier zu nennen, erwähnen wir Paul Halcke[2]) († 1731), den reimgewandten Rechenmeister zu Buxtehude, der 1719 ein Buch unter dem Namen *Mathematisches Sinnenconfect* herausgab, welches dem von seinem Lehrer Heinrich tho Aspern (S. 38) und anderen niedersächsischen Fachgenossen gegebenen Beispiele folgend, zahlreiche Textgleichungen theils wörtlich von Tho Aspern entlehnte, theils sie selbständig in mehr oder weniger witzige Verse kleidete.

Zahlentheoretische Untersuchungen haben wir in diesem Abschnitte kaum andere zu erwähnen als nur Beschäftigung mit magischen Quadraten von De la Hire, Poignard, Sauveur.[3])

99. Kapitel.

Differentiiren. Integriren. Analytische und projective Geometrie.

Zwei Abschnitte der von Roger Cotes 1722 herausgegebenen *Harmonia Mensurarum*, so sagten wir (S. 410), waren Integrationen gewidmet. In der That fanden auch die Methoden des Differentiirens und Integrirens in dem Zeitraume, dem dieser Abschnitt gewidmet ist, noch mancherlei Förderung. Für das Differentiiren war es zwar kaum mehr nöthig. Hier hatte Leibniz, hatte L'Hôpital schon veröffentlicht, was erforderlich war, um jedes Differential sofort hinschreiben oder doch herleiten zu können. Die Differentiation trigonometrischer Functionen mochte indessen immerhin, in besondere Regeln gefasst, sich bequemer ausführen lassen, und diese Regeln stellte, wenn auch mit zunächst anderer Absicht, Cotes auf.

---

[1]) Briefliche Mittheilung von Gino Loria. [2]) Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. I, 30—32 und 91. [3]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876) S. 239—246.

Wir haben (S. 360) seine *Aestimatio errorum etc.* genannt. Fehler, sagt er in dieser Abhandlung, seien unvermeidlich, wo und wie man Beobachtungen anstellte, aber man müsse suchen sie in engstmögliche Grenzen einzuschliessen[1]). Zu diesem Zwecke werden die kleinsten Veränderungen der trigonometrischen Functionen eines Bogens zu den kleinsten Veränderungen des Bogens selbst in Beziehung gesetzt, oder, wie ein Mathematiker des europäischen Festlandes auch damals schon gesagt haben würde, die trigonometrischen Functionen des Bogens werden nach dem Bogen differentiirt. So giebt Cotes als ersten Hilfssatz[2]) $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$, als zweiten $\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \sec x^2$, als dritten $\frac{d \sec x}{dx} = \operatorname{tang} x \,.\, \sec x$. Im ersten der auf die Hilfssätze folgenden Sätze bleibt (Fig. 53) im Dreieck ABC die Seite AB und der Winkel B unverändert, während BC in BD, AC in AD übergeht. Nennen wir (was Cotes natürlich nicht thut) $BC = x$, $CD = dx$, $AC = y$, $AD = y + dy$ und schneiden auf AD die Strecke $AE = y$ ab, so dass $ED = dy$ übrig bleibt, so ist im Dreieck CDE der Quotient $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin DCE}{\sin DEC}$. Bei kleinstmöglichen

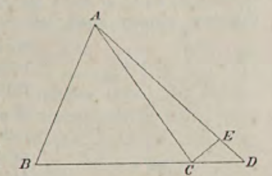

Fig. 53.

Veränderungen[3]) ist aber $\angle DEC = CEA = ECA = 90^0$ und $\angle DCE = 90^0 - ACB$, mithin $\frac{dy}{dx} = \cos ACB$. Im dritten Satze wird der Winkel A nach x differentiirt. Wird CE, wie in dem soeben erörterten ersten Satze, als mit dem Halbmesser y beschriebener minimaler Kreisbogen betrachtet, so ist $CE = y \,.\, dA$, $CD = dx$ und $\frac{dA}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{\cos ECD}{y} = \frac{\sin ACB}{y}$. Cotes spricht das so aus: Der Quotient der Winkelveränderung durch die Veränderung der gegenüberliegenden Seite sei gleich dem Quotienten des Sinus des Winkels, welcher der constanten Dreiecksseite gegenüberliegt, durch die Seite, welche sich gegenüber von dem constanten Dreieckswinkel befindet. Er macht dazu die Bemerkung, es müsse $dA = dC$ sein, was, abgesehen vom Vorzeichen, offenbar richtig ist, weil

---

[1]) *Magni momenti fuerit ad Scientiae nobilissimae perfectionem, errores istos intra terminos quam maxime fieri potest angustos concludere et coarctare, quos omnino tollere merito desperemus.* [2]) *Variatio minima cujusvis arcus circularis est ad Variationem minimam Sinus ejusdem arcus ut Radius ad Sinum complementi.* [3]) *ubi Variationes istae minimae sunt.*

$$\angle BAD + ADB = BAC + ACB,$$

also

$$\angle BAD - BAC = ACB - ADB.$$

Eine ganze Reihenfolge ähnlicher Sätze wird für das ebene wie für das sphärische Dreieck abgeleitet.

Nun kommt Cotes erst zu seiner am Anfange der Abhandlung ausgesprochenen Aufgabe. Eine Beobachtungsgrösse A, sagt er, möge dadurch fehlerhaft sein, dass andere Beobachtungsgrössen B, C, D fehlerhaft gegeben wurden. Man müsse alsdann eine Gleichung zwischen A einerseits und B, C, D andererseits bilden und nach der Newtonschen Methode aus ihr die Fluxion von A ermitteln. Die Fehler werden im Verhältnisse der Fluxionen stehen. Seien, wie es bei trigonometrischen Aufgaben in der Regel sich ergebe, die betreffenden Grössen A, B, C, D nicht als solche unmittelbar in der Gleichung enthalten, sondern durch ihre Sinus, ihre Tangenten, ihre Secanten, so bediene man sich bei der Fluxionsbildung der drei an die Spitze gestellten Hilfssätze. Eine Aufgabe verlangt z. B. (Fig. 54) die zur Standlinie AC senkrechte Höhe AB mit Hilfe des in C zu messenden $\angle C$ zu berechnen. Nach dem 3. Satze, über welchen wir eben berichtet haben, ist $\frac{dC}{dAB} = \frac{\sin B}{BC}$. In dem bei A rechtwinkligen Dreiecke ABC ist $\frac{1}{BC} = \frac{\cos B}{AB}$, also auch $\frac{dC}{dAB} = \frac{\sin B \,.\, \cos B}{AB} = \frac{\sin 2B}{2AB}$ und $\frac{dAB}{AB} = \frac{2\,dC}{\sin 2B} = \frac{2\,dC}{\sin 2C}$ wegen $B + C = 90^0$, $2B + 2C = 180^0$. Das Verhältniss des Irrthums in der Höhe AB zu dieser Höhe selbst ist mithin um so kleiner, je grösser $\sin 2C$ ist. Der grösste Sinus ist 1, und $\sin 2C$ hat diesen Werth, wenn $2C = 90^0$, $C = 45^0$ ist. Man erhält folglich die Höhe AB am richtigsten, wenn man auf der Standlinie AC so weit fortgeht, bis $\angle C$ sich nicht mehr von 45^0 unterscheidet.

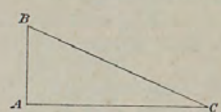

Fig. 54.

Will man den wahren Ort z eines Gegenstandes aus vier beobachteten Orten p, q, r, s ableiten (so schliesst Cotes seine Abhandlung), so muss man diesen Orten Gewichte P, Q, R, S beilegen, die den Beobachtungsfehlern umgekehrt proportional sind. Der gesuchte Punkt z ist alsdann der Schwerpunkt jener in p, q, r, s angebrachten Gewichte.

Zur Fertigstellung der Lehre von dem Differentiiren gehört auch Leibnizens höhere Differentiirung eines Productes (S. 372) und Taylors Vertauschung der Veränderlichen (S. 379), an welche wir erinnern.

Mehr als das Differentiiren war das Integriren der Vervollkommnung fähig. Wir wissen, dass Leibniz und Johann Bernoulli (S. 272—275) das Zerlegen einer gebrochenen algebraischen Function in Partialbrüche gelehrt haben und dadurch der Integration solcher Functionen grossen Vorschub leisteten. Ein besonderes Werk über die umgekehrte Fluxionsmethode, welches ein Schotte, George Cheyne[1]) (1671—1743), im Jahre 1703 herausgab, bietet weniger, als man von einem Werke dieses Titels erwarten mochte. Hat doch De Moivre 1704 ein eigenes Buch gegen jenes veröffentlicht, und wenn Cheyne 1705 neuerdings in grobem, von ihm selbst später missbilligten Tone antwortete, so erhöht das den Werth seiner *Fluxionum methodus inversa* ebensowenig, als es die darin vorkommenden Irrthümer aufhebt. Wir nennen das Werk überhaupt nur, weil es Johann Bernoulli Anlass zu Bemerkungen gab, welche von Wichtigkeit sind, aber, da sie erst 1742 an die Oeffentlichkeit gelangten, hier noch nicht wiedergegeben werden dürfen. Cheyne war ursprünglich zur Theologie bestimmt, wurde dann Arzt und gab 1705 und 1715 zwei Bände *Philosophical Principles of Religion* heraus, in welchen er Theologie, Naturwissenschaften und Mathematik in toller Weise verquickte, wenn er auch früher im Aerger über den Streit mit De Moivre die Mathematik unfruchtbar und luftig[2]) genannt hatte.

Cotes hat dagegen Namhaftes für die Integralrechnung geleistet. Der 2. und 3. Abschnitt seiner *Harmonia Mensurarum* enthält Integrale, welche nach heutiger Schreibart besondere Fälle von

$$\int (a_1 + b_1 x^n)^{p_1} (a_2 + b_2 x^n)^{p_2} dx$$

oder von ähnlich gebauten Ausdrücken sind, und Anwendungen dieser Integrale. Die Herleitung der verschiedenen Formeln hat Cotes unterdrückt. Das letzte Integral, welches bei ihm vorkommt, ist

$$\int \frac{x^{tn-1} dx}{(k + lx^n)\sqrt{e + fx^n + gx^{2n}}}$$

mit ganzahligem t und beliebigem n.

Wir kommen zu den Fortschritten, welche die Geometrie seit 1700 gemacht hat. An der Spitze der zu erwähnenden Persönlichkeiten steht Antoine Parent[3]) (1666—1716). In Paris geboren wurde er, noch bevor er 3 Jahre alt war, einem Landpfarrer, dem Oheime seiner Mutter, anvertraut, der ihm die erste nothdürftige Erziehung gab, so gut er selbst dazu im Stande war. Wo sein Wissen

[1]) *National Biography* X, 217—219 (London 1887, edited by Leslie Stephen). [2]) *these barren and airy studies.* [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1716 (Histoire pag. 88—93).

nicht ausreichte, z. B. beim Rechenunterrichte, gab er dem Knaben ein Lehrbuch in die Hand, dessen Rand bald mit Bemerkungen angefüllt war. Aehnlicherweise erfand sich der Knabe später eine eigene Geometrie, und so wuchs seine Neigung zur Mathematik, der er sich mehr und mehr zuwandte, auch nachdem er nach Paris zurückgekehrt dort das Rechtsstudium begonnen hatte. Er gab bald selbst mathematischen Unterricht und erhielt 1699 Zutritt zur Académie des Sciences unter dem damals noch vorhandenen Titel eines Eleven des wirklichen Mitgliedes Herrn von Billettes. Diese Academiker zweiten Grades wurden erst bei einer Umgestaltung der Satzungen 1716 beseitigt, so dass Parent in seinem Todesjahre wirklicher Academiker wurde. Er schrieb eine grosse Anzahl von Abhandlungen über die verschiedensten Gegenstände, die zum Theil in Sitzungen der Académie des Sciences vorgelesen wurden und als *Essais et Recherches de mathématique et physique* erst 1705, dann stark vermehrt 1713 in drei Duodezbänden im Drucke erschienen. Das Format stiess die Gelehrten, der Inhalt und die ziemlich schwierige Darstellungsweise die Ungelehrten ab. Parents Leistungen wurden weit weniger bekannt und hatten geringere Wirkung, als sie beanspruchen durften. Dazu trug noch ein anderer Umstand bei, den uns der Verfasser seines academischen Nachrufes, welchem wir alle diese Einzelheiten entnehmen, nicht verschwiegen hat. Parent war in den Verhandlungen, welche sich an einzelne Vorträge anschlossen, mit scharfen, den Gewohnheiten guter Gesellschaft nicht Rechnung tragenden Worten schnell bereit. Man erkannte das Verdienstvolle des so von ihm Gesagten allerdings an, aber, meint der Lobredner, es gehöre dazu etwas Anstrengung des Billigkeitsgefühls, und die erspare man besser den Menschen[1]). Die für die Geschichte der Mathematik wichtigste Abhandlung Parents ist die über die Eigenschaften der Oberflächen, *des affections des superficies*[2]), welche er am 24. Juli und 23. August 1700 in der Académie des Sciences vorlas. Er beginnt mit der Untersuchung der Tangentialebene an die Kugel. Er bezieht (Fig. 55) die durch die Punkte A, D, C, E hindurchgehende Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt sich in O befindet, auf die Ebene IQS, auf welcher die in Q beginnende Gerade QI gegeben ist. O projicirt sich auf die genannte Ebene mittels $OH = a$, H auf die Gerade QI durch $HI = c$, während $QI = b$ ist. Kugelhalbmesser ist $OB = r$. Dabei ist B ein an sich beliebiger Punkt der Kugeloberfläche, welcher durch

[1]) *Il fallait quelque petit effort d'équité, qu'il vaut toujours mieux épargner aux hommes.* [2]) *Essais et Recherches de mathématique et de physique* II, 181 bis 200.

die Strecken $BL = z$, $LM = y$, $MQ = x$ bestimmt wird. Eine durch den Mittelpunkt O der Grundebene IQS parallel gelegte Ebene OFG trifft die verlängerte LB in G. Zieht man in dieser neuen Ebene $OF \parallel HI$ und $GF \parallel IQ$, welche in F zusammenstossen, so ist $BG = a - z$, $FG = b - x$, $OF = c - y$. Weil aber OFG und FGB rechte Winkel sind, muss das Quadrat von OB der Summe der Quadrate von OF, FG, GB gleich sein, und man erhält die Oberflächengleichung[1]):

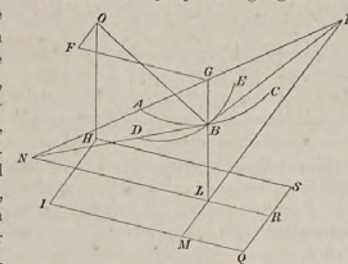

Fig. 55.

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2.$$

Diese Gleichung differentiirt Parent unter der Annahme, dass y constant sei[2]), und findet $\frac{a-z}{b-x} dz = dx$, ein allerdings dem Vorzeichen nach unrichtiges Ergebniss. Das Constantsein von y gibt aber, fährt Parent fort, der Kugelgleichung die Bedeutung des Kreises ABC, der sich auf die Grundebene als die Gerade $RLN \parallel QI$ projicirt, oder, mit Parent zu reden, der auf der Axe RLN aufsitzt[3]). Dessen Berührungslinie in B ist die BN, welche auf RN die Subtangente $LN = z\frac{dx}{dz}$ abgrenzt. Unter Einsetzung des gefundenen Werthes von $\frac{dx}{dz}$ ist also $LN = \frac{a-z}{b-x} \cdot z$. Aehnliches folgt unter der Annahme, dass x constant sei. Erstlich entsteht die Gleichung $\frac{a-z}{c-y} dz = dy$; zweitens erhält die Kugelgleichung dabei die Bedeutung des Kreises DBE, der sich als $MLP \parallel HI$ projicirt; drittens ist BP die Berührungslinie dieses Kreises in B, und die Subtangente ist

$$LP = z\frac{dy}{dz} = \frac{a-z}{c-y} \cdot z.$$

Die Berührungsebene an die Kugel in B dehnt sich aber ersichtlich längs der BN und BP aus und trifft folglich die Ebene IQS in der NP[4]). So die von uns nahezu wörtlich übernommene Darstellung Parents.

[1]) *on aura l'équation superficielle.* [2]) *Si on prend maintenant la différentielle de cette égalité, en laissant y constante.* [3]) *un cercle ABC assis sur l'axe RLN.* [4]) *Il est évident que le plan tangent à la surface de la Sphère en B*

Parent bleibt aber bei der Kugeloberfläche nicht stehen. Er geht in unmittelbar sich anschliessenden Aufsätzen auch zur Betrachtung der Oberflächen $\frac{y}{b+x} = \sqrt{\frac{z-x}{z}}$ und $y = \frac{z^3}{x^2+az}$ über, deren Schnitte parallel den einzelnen Coordinatenebenen untersucht werden, wobei die Erhöhungen und Vertiefungen der Oberflächen erkannt werden. Selbst gegenwärtig, wo die analytische Geometrie des Raumes zu den elementaren Kenntnissen zu zählen ist, bieten diese Aufsätze dem Verständnisse manche Schwierigkeit und machen es, ganz abgesehen von den vorerwähnten persönlichen Verhältnissen, leicht begreiflich, dass sie so lange Jahre ziemlich unbeachtet bleiben konnten.

Parent hat sich 1702 der drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten auch bedient, um den Satz zu beweisen, dass das Cylindroid, wie er das Umdrehungshyperboloid mit einer Mantelfläche nennt, durch Umdrehung einer Geraden erzeugt werden kann[1]), während er in einem Zusatze[2]) den gleichen Satz geometrisch erläuterte. Neu war übrigens der Satz auch 1702 nicht, denn Wren hatte ihn 1669 in den P. T. ausgesprochen[3]).

Ferner verdient noch eine andere Arbeit Parents von 1702 erwähnt zu werden[4]), in welcher die Schraubenlinie mit Hilfe von drei Coordinaten untersucht ist.

Jedenfalls hat also Parent die ersten Gleichungen von Oberflächen in drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten x, y, z im Drucke herausgegeben, mag die (S. 244) angedeutete Möglichkeit, dass Johann Bernoulli schon 1698 Aehnliches insgeheim besass, oder gar mündlich bekannt gegeben hatte, Grund haben oder nicht. Wir persönlich zweifeln daran und stützen unsere Zweifel auf Folgendes. Parent hat an den Pendeluntersuchungen von Huygens Ausstellungen gemacht, und Johann Bernoulli unternahm in den A. E. vom Juni 1715 Huygens' Vertheidigung[5]). Er geht dabei mit Parent nichts weniger als glimpflich um. Er nennt ihn einen Menschen, dessen Lebenszweck zu sein scheine Andere zu rupfen[6]). Wir glauben kaum, dass Johann Bernoulli, der über sein geistiges Eigenthum mit peinlicher Sorgfalt Wachende, die Gelegenheit hätte vorbeigehen lassen, Parent auch als Sünder an seinen Raumcoordinaten hinzustellen, wenn er irgend Veranlassung dazu ge-

s'étend le long des tangentes BN, BP et qu'il coupe par conséquent le plan IQS dans la ligne de rencontre NP.

[1]) *Essais et Recherches de mathématique et de physique* II, 645 flgg., besonders 653. [2]) Ebenda III, 473. [3]) P. T. III, 961—962. [4]) *Essais et Recherches de mathématique et de physique* II, 684. [5]) Joh. Bernoulli *Opera* II, 187—204. [6]) *homo ad carpendum, uti videtur, natus.*

habt hätte. Wir geben allerdings zu, dass dieser Beweis hinfällig würde, wenn Johann Bernoulli jenes Sammelwerk der Essais et Recherches nicht gekannt hätte, als er so beleidigend über Parent sich äusserte. Ist das aber anzunehmen? Am 11. September 1715 hat Bernoulli die Essais et Recherches jedenfalls gekannt, denn unter diesem Datum schrieb er an Leibniz[1]), Parent suche Streit mit berühmten Gegnern und habe in den Essais et Recherches auch ihn (Leibniz) angegriffen. Dazu kommt noch Eins. Wieder 1715 und zwar am 6. Februar schrieb Johann Bernoulli an Leibniz[2]): Ich verstehe unter einer gegebenen krummen Oberfläche eine solche, deren einzelne Punkte, wie die Punkte einer gegebenen Curve, durch drei Coordinaten x, y, z bestimmt sind, zwischen welchen durch eine Gleichung ausgedrückte Beziehungen bestehen. Jene drei Coordinaten sind aber nichts Anderes, als senkrechte Gerade aus irgend einem Oberflächenpunkte auf drei der Lage nach gegebene und unter einander senkrechte Ebenen. Als Beispiel wird $xyz = a^3$ genannt. Das klingt nicht, als wenn von allgemein bekannten Dingen die Rede wäre. Wenn dann Leibniz antwortete[3]), er habe ehemals angefangen, an die Lehre von Ortsgleichungen mit drei Coordinaten heranzutreten; wer darauf Mühe verwende, werde leisten, was der Arbeit lohne, so sehen wir auch in dieser Antwort nur so viel, dass der Gegenstand damals in der Luft lag. Parents Erstlingsrechte erscheinen uns davon nicht berührt.

Der nächste Schriftsteller, mit welchem wir es zu thun haben, Jacob Le Poivre[4]), ist wahrscheinlich in Mons in Belgien geboren, jedenfalls im December 1710 dort gestorben, wo er als städtischer Bauaufseher seit 1706 angestellt war. Im Jahre 1704 erschien von ihm in Paris ein wenige Bogen starkes Büchelchen *Traité de sections du cylindre et du cône considérées dans le solide et dans le plan avec des demonstrations simples et nouvelles.* Eine zweite Auflage erschien 1708 in Mons, welche dem Titel der ersten Ausgabe noch die Worte hinzufügte *plus simples et plus générales que celles de l'édition de Paris*, also gewissermassen eine verbesserte und gekürzte Auflage sein will[5]). Schon die erste Auflage hat genügendes Aufsehen erregt, um einen ausführlichen, etwas nörgelnden Bericht in dem Journal des Sçavans von 1704, eine kurze, aber sehr anerkennende Besprechung in den A. E. von 1707 hervorzurufen. Als Verfasser der letzteren nennt eine handschriftliche Randbemerkung Christian Wolf.

[1]) Leibniz III, 946. [2]) Ebenda III, 938. [3]) Ebenda III, 939. [4]) Chasles, *Aperçu hist.* 130—134 (deutsch 126—130). — Quételet, *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges* pag. 271—273. [5]) H. C. Wins hat 1854 einen Neudruck besorgt.

Le Poivre nahm in der Vorrede den Mund etwas voll. Er habe die Absicht gehegt und, wie er glaube, auch durchgeführt, ebenso für Gelehrte wie für Nichtgelehrte zu schreiben. Den Ersten habe er sich bemüht gerecht zu werden, indem er sie eine neue Projection, neue Eigenschaften der Kegelschnitte und neue Beweise dafür kennen lehrte, den Letzteren, indem er die Dinge so leicht machte, dass zu deren Verständniss einige wenige Sätze aus den Anfangsgründen der Geometrie ausreichen müssten. Ihm selbst als Verfasser seien dadurch allerdings erhebliche Schwierigkeiten erwachsen, so dass die wenigen Druckbogen eine Arbeitszeit von drei Jahren beanspruchten. Den Marquis De l'Hôpital nannte er als seinen Gönner, ohne dessen Anregung das Büchelchen möglicherweise gar nicht entstanden wäre. Der Kritiker des Journal des Sçavans ist der Ansicht, Le Poivre habe, ohne dass man ihm jedes Verdienst absprechen wolle, doch der Hauptsache nach nur wiederholt, was De la Hire in seinem Planiconiques (S. 125—126) schon gelehrt habe. Ganz so schlimm scheint es nun nicht gewesen zu sein, wenn auch De la Hire Einfluss auf Le Poivre geübt haben mag. Der Kegelschnitt erfolgt durch eine Ebene, deren Lage im Raume gegeben sein muss. Sie ist theilweise bestimmt, wenn man den Durchschnitt der Ebene mit der kreisförmigen Grundfläche des Kegels kennt, aber doch nur theilweise, denn die Neigung gegen die Grundfläche ist mit jener Durchschnittsgeraden nicht gegeben. Diese wird bekannt, sobald durch die Spitze des Kegels eine zweite Ebene der Schnittebene parallel gelegt wird, deren Spur in der Grundfläche ebenfalls gegeben ist. Die beiden genannten Parallelen in der Grundfläche nebst der Spitze des Kegels müssen folglich genügen, um den Kegelschnitt selbst zeichnen zu können[1]).

„Es ist leicht zu sehen, dass man nur durch einen Punkt M des Kreises, der die Basis des Kegels bildet und erzeugender Kreis (*cercle générateur*) genannt wird, irgend eine Transversale ziehen darf, welche die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und ihre Parallele in zwei Punkten schneiden wird; darauf den zweiten dieser Punkte mit dem Scheitel S des Kegels durch eine Gerade verbinden und durch den anderen Punkt eine Parallele mit dieser Geraden ziehen. Diese Parallele wird offenbar in der schneidenden Ebene liegen und die Seitenlinie SM des Kegels in einem Punkte M' treffen, welcher der gesuchten Curve angehört. Für einen anderen Punkt des erzeugenden Kreises wird man einen anderen Punkt des Schnittes erhalten. Diese

[1]) Wir folgen der Darstellung von Chasles, welcher wir die nun folgenden zwischen Gänsefüsschen stehenden Sätze wörtlich entnehmen.

Construction ist allgemein, welches auch die Lage des Punktes S im Raume sein mag, und sie besteht selbst dann noch, wenn dieser Punkt in der Ebene des Kreises liegt. In diesem letzteren Falle hat man zwar keinen Kegel, aber die durch den Punkt gebildete Curve ist doch noch ein Kegelschnitt."

Jedenfalls hat Le Poivres Büchelchen, wenn auch von Fachmännern gelesen und, wie wir gesehen haben, öffentlicher Besprechung gewürdigt, nicht entfernt die fruchtbare Wirkung ausgeübt, welche man einer ebensowenig umfangreichen, aber von überraschenden neuen Wahrheiten erfüllten Schrift aus dem Jahre 1704 nachrühmen muss. Wir reden von Newtons *Enumeratio linearum tertii ordinis*[1]). Curven 3. Grades waren auch vor Newton schon oft untersucht. Auch auf Durchschnittspunkte von Curven mit anderen Curven war oft genug die Aufmerksamkeit gelenkt worden, und Jakob Bernoulli hatte (S. 124) den Grad der Curve ins Quadrat erhebend gefunden, dass Curven $n$ten Grades ausreichen, um Wurzeln einer Gleichung vom Grade n^2 zu finden. Aber den Grad der Curve durch die Anzahl von Durchschnittspunkten mit einer Geraden zu bestimmen und dann die so definirten Curven dritten Grades in Gruppen zusammenzufassen, das hatte unseres Wissens vor Newton Niemand versucht. Wir wollen und müssen demnach Newtons *Enumeratio*, mit welchem abkürzenden Namen wir die Abhandlung hinfort bezeichnen, genauer besprechen.

Wir beginnen mit der wortgetreuen Uebersetzung des I. Kapitels von der Ordnung der Linien[2]). „Geometrische Linien werden am besten nach der Dimensionszahl der Gleichung, durch welche die Beziehung zwischen Ordinaten und Abscissen bestimmt ist, oder (was das Gleiche ist[3]) nach der Anzahl von Punkten, in welchen sie von einer geraden Linie geschnitten werden können, in Ordnungen unterschieden. Eine Linie erster Ordnung ist solcher Weise die einzige Gerade; Linien zweiter oder quadratischer Ordnung werden die Kegelschnitte und der Kreis sein, und dritter oder kubischer Ordnung sind die kubische Parabel, die Neilsche Parabel, die Cissoide der Alten und die übrigen, deren Aufzählung wir zu unserer Aufgabe gemacht haben. Eine Curve ersten Geschlechtes wird das Gleiche sein wie eine Linie zweiter Ordnung (da die Gerade nicht zu den Curven zu zählen ist), eine Curve zweiten Geschlechtes das Gleiche wie eine Curve dritter Ordnung. Eine Linie von der Ordnung unendlich ist eine solche, welche eine Gerade in unendlich vielen Punkten schneiden

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 245—270. [2]) *Linearum ordines.* [3]) *quod perinde est.*

kann, wie die Spirale, die Cycloide, die Quadratrix und jede Linie, welche durch unendlich viele Umdrehungen eines Strahles oder eines Rades erzeugt wird."

Die Curven der verschiedensten Grade haben, behauptet Newton, Eigenschaften, welche denen der Curven zweiten Grades ungemein ähnlich sind. Bei den Kegelschnitten — das sind die Curven zweiten Grades oder ersten Geschlechtes — stösst man auf Durchmesser, d. h. auf grade Linien, welche einander parallele Sehnen halbiren, auf einen Mittelpunkt, in welchem alle Durchmesser zusammentreffen, auf zwei Asymptoten der Hyperbel, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede Secante zwischen einem Curvendurchschnittspunkte und der einen Asymptote die gleiche Länge besitzt wie zwischen dem zweiten Curvendurchschnittspunkte und der anderen Asymptote. Bei der Curve dritten Grades oder zweiten Geschlechtes treffen zwei parallele Sehnen die Curve in je drei Punkten. Mögen dieselben zur Verdeutlichung, welche sich Newton wenig angelegen sein lässt, auf der einen Sehne $M_1 M_2 M_3$, auf der anderen $M_1' M_2' M_3'$ heissen. Nun existirt auf der ersten Sehne ein Punkt M_0, auf der anderen ein solcher M_0', von der Eigenschaft, dass $M_0 M_1 = M_0 M_2 + M_0 M_3$ und $M_0' M_1' = M_0' M_2' + M_0' M_3'$. Alsdann ist die Gerade $M_0 M_0'$ ein Durchmesser der Curve, d. h. sie schneidet auch jede andere Sehne $M_1'' M_2'' M_3''$ in einem Punkte M_0'' von der in der Gleichung $M_0'' M_1'' = M_0'' M_2'' + M_0'' M_3''$ ausgesprochenen Eigenschaft[1]). Treffen alle Durchmesser einer Curve zweiten Geschlechtes in einem Punkte zusammen, so ist dieser der Mittelpunkt der Curve im Allgemeinen. Die Zahl der Asymptoten überschreitet den Grad der Curve nicht, deshalb kann die Curve ersten Geschlechtes nur 2, die zweiten, dritten Geschlechtes nur 3, 4 Asymptoten besitzen und nicht mehr u. s. w. Ueber die Zwischenräume, welche auf einer Secante zwischen der Curve und den Asymptoten abgegrenzt sind, gelten Sätze, die denen von den Abschnitten einer Sehne, die durch den Durchmesser hervorgebracht sind, entsprechen[2]). Ein weiterer Satz, den Newton von den Curven zweiten Geschlechtes ausspricht[3]), heisst folgendermassen, indem wir wieder Buchstaben zur Verdeutlichung einführen: Werden zwei parallele Sehnen $L_1 L_2 L_3$, $L_1' L_2' L_3'$ durch zwei andere parallele Sehnen $M_1 M_2 M_3$, $M_1' M_2' M_3'$ in den Punkten O, O' geschnitten, wo

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 248. Ueber diesen auf Curven jeden Grades ausdehnbaren Satz vergl. z. B. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven. II. Auflage. Leipzig 1882 Nr. 128, S. 142. [2]) *Opuscula Newtoni* I, 249. — Salmon-Fiedler l. c. Nr. 129, S. 143. [3]) *Opuscula Newtoni* I, 250: *De Ratione contentorum sub Parallelorum segmentis.* — Salmon-Fiedler l. c. Nr. 124, S. 137.

O den Durchschnittspunkt der beiden unbestrichelten, O' den der beiden bestrichelten Sehnen bezeichnet, so ist

$$\frac{OL_1 \,.\, OL_2 \,.\, OL_3}{OM_1 \,.\, OM_2 \,.\, OM_3} = \frac{O'L_1' \,.\, O'L_2' \,.\, O'L_3'}{O'M_1' \,.\, O'M_2' \,.\, O'M_3'}.$$

In die Unendlichkeit sich erstreckende Curvenzweige sind entweder hyperbolisch oder parabolisch. Sie heissen hyperbolisch, wenn sie eine Asymptote besitzen, parabolisch, wenn sie eine solche entbehren, und das zeige sich bei Aufsuchung der Berührungslinie an den unendlich entfernten Punkt des betreffenden Curvenzweiges. Die Berührungslinie an den unendlich fernen Punkt eines hyperbolischen Zweiges falle nämlich mit der Asymptote zusammen, während die Berührungslinie an den unendlich fernen Punkt eines parabolischen Zweiges in die Unendlichkeit zurückweicht, verschwindet, nirgend zu finden ist[1]).

Hierauf werden vier Hauptfälle der Gleichung 3. Grades hervorgehoben: $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; deren erster wieder 11 Unterfälle unterscheiden lässt. Die Unterfälle zerfallen ihrerseits wieder in Formen, von welchen im Ganzen 72 angegeben sind. Bei den Benennungen, deren sich Newton zur Schilderung der einzelnen Formen bediente, kommen die Ausdrücke einer mit Spitzen versehenen Curve (*cuspidata*), eines conjugirten Punktes (*quae conjugatam habet ovalem infinite parvam, id est punctum*) vor[2]).

So vielfältig die Curven sein mögen, können sie nach Newtons Behauptung[3]) stets durch optische Benutzung einfachster Gebilde hervorgebracht werden. Fallen auf eine unbegrenzte von einem Lichtpunkte aus beleuchtete Ebene die Schatten von Figuren, so sind die Schatten von Kegelschnitten stets wieder Kegelschnitte, die von Curven zweiten, dritten Geschlechtes sind immer wieder Curven zweiten, dritten Geschlechtes und so fort ins Unendliche. Wie aber der Kreis beim Schattenwerfen jeden Kegelschnitt zu erzeugen vermag, so werden alle Curven zweiten Geschlechtes von den fünf diesem Geschlechte angehörenden divergirenden Parabeln als Schatten erzeugt, und auch bei höherem Curvengeschlechte können einfache Formen ermittelt werden, deren Schatten alle Curven ihres Geschlechtes erzeugen. Es ist ersichtlich, dass man den neueren Anschauungen sich näher anbequemt, wenn man das Newtonsche Wort Schatten stets durch Centralprojection ersetzt.

Auch Curvenerzeugungen, welche man gegenwärtig projectivische

[1]) *in infinitum recedet, evanescet et nullibi reperietur.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 253. [3]) Ebenda I, 264: *Genesis Curvarum per Umbras.*

nennt, lehrt Newton[1]) unter dem Namen organischer Zeichnung kennen. Seien (Figur 56) zwei Winkel PAD, PBD von gegebener Grösse um ihre Scheitelpunkte A, B, welche Pole heissen sollen, in Drehung versetzt, und zwar so, dass der Durchschnittspunkt P ihrer Schenkel AP, BP eine Gerade beschreibt, alsdann beschreibt der Durchschnittspunkt D der beiden anderen Schenkel AD, BD einen durch die Pole A, B hindurchgehenden Kegelschnitt, der aber in eine Gerade ausartet, wenn jene von P beschriebene Gerade durch einen der Pole A, B hindurchgeht, oder wenn die Winkel BAD, ABD gleichzeitig verschwinden. Der gleiche Satz ist schon in Newtons Principien als XXI. Lemma des ersten Buches ausgesprochen und hätte daher (S. 207) erwähnt werden können.

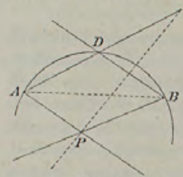

Fig. 56.

Ein zweiter Satz lässt (Figur 57) den Durchschnittspunkt P der beiden Schenkel AP, BP einen Kegelschnitt durchlaufen, dem einer der beiden Pole, etwa A, angehört. Alsdann beschreibe der Durchschnittspunkt D der beiden anderen Schenkel AD, BD eine Curve zweiten Geschlechtes, auf welcher der andere Pol B liegt, während der erste Pol A ihr sogar als Doppelpunkt angehört. Eine Ausnahme liefert das gleichzeitige Verschwinden der beiden Winkel BAD, ABD, indem alsdann D einen anderen durch den Pol A hindurchgehenden Kegelschnitt beschreibt.

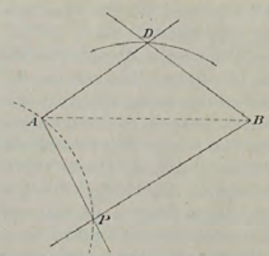

Fig. 57.

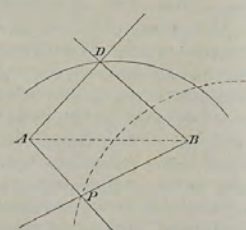

Fig. 58.

Ein dritter Satz verlangt (Figur 58), dass der von dem Durchschnittspunkte P der Schenkel AP, BP durchlaufene Kegelschnitt

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 265 flg.: *De curvarum descriptione organica.*

keinen der beiden Pole A, B enthalte. Der Punkt D durchlaufe alsdann eine Curve zweiten oder dritten Geschlechtes mit Doppelpunkt. Die Curve ist zweiten Geschlechtes in dem Ausnahmefall gleichzeitigen Verschwindens der Winkel BAD, ABD, in allen anderen Fällen ist sie dritten Geschlechtes und hat drei Doppelpunkte, zu welchen die beiden Pole A, B gehören.

Die drei Sätze führen zu einer punktweisen Darstellung eines Kegelschnittes, von welchem 5, einer Curve zweiten Geschlechtes mit Doppelpunkt, von welcher 7 Punkte gegeben sind, Aufgaben, von welchen ein Theil auch Aufnahme in die Arithmetica universalis (S. 403) gefunden hat. Die in der Enumeratio gelehrte Zeichnung des Kegelschnittes ist folgende. Newton nennt die fünf Punkte, welche dem Kegelschnitte angehören sollen, A, B, C, D, E. Nun seien A, B Pole der Figur und CAB, CBA die zur Drehung bestimmten Winkel, wobei C denjenigen Durchschnittspunkt zweier Schenkel vorstellt, der in Figur 56 mit D bezeichnet war. Auch die Punkte D, E werden als ähnlich mit C hervorgebrachte Punkte des Kegelschnittes betrachtet, und ihnen entsprechen Durchschnittspunkte P, Q der beiden anderen Winkelschenkel, Punkte P der Figur 56 hervorbringend. Die Punkte P, Q gradlinig verbunden liefern nun diejenige Gerade, welche in der wiederholt genannten Figur 56 deren Punkt P durchläuft, und dadurch werden noch beliebig viele Punkte D des zu zeichnenden Kegelschnittes ermittelt.

Eine kubische Curve durch 7 Punkte A, B, C, D, E, F, G zu legen geht man ähnlicherweise von dem Dreiecke ABC aus, lässt CA und CB sich drehen, bis sie in D, E, F, G einander schneiden, Punkte, denen die Durchschnittspunkte P, Q, R, S der gedrehten BA und AB entsprechen. Der durch A, P, Q, R, S hindurchgelegte Kegelschnitt erzeugt die verlangte Curve zweiten Geschlechtes. Wir erinnern hier daran, dass Newton schon 1676 wusste, dass man ohne Rechnung eine Curve dritten Grades durch 7 gegebene Punkte legen könne (S. 187). Daraus aber schliessen zu wollen, die ganze Enumeratio gehe bis 1676 zurück, scheint doch allzukühn.

Man kann, fährt Newton fort[1]), nach gleicher Methode Curven 3., 4. und noch höheren Geschlechtes beschreiben, allerdings nicht alle, aber doch die, so viele es sein mögen, welche bequemer Weise mittels einer Bewegung erzeugt werden können. Eine doppelpunkt-

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 267: *Eadem methodo Curvas tertii, quarti et superiorum Generum describere licet, non omnes quidem, sed quotquot ratione aliqua commoda per motum localem describi possunt. Nam Curvam aliquam secundi vel superioris generis Punctum duplex non habentem commode describere Problema est inter difficiliora numerandum.*

lose Curve zweiten oder höheren Geschlechtes bequem zu beschreiben, gehört unter die schwierigeren Aufgaben.

Zum Schlusse der Abhandlung bespricht Newton die Möglichkeit, Gleichungen höheren Grades durch Curvendurchschnitte zur Auflöung zu bringen[1]) und benutzt dabei den Ausdruck Hyperbolismus, den er schon früher dahin erklärt hat[2]), er verstehe unter Hyperbolismus das Ersetzen der Ordinate einer gegebenen Curve durch das Product eben dieser Ordinate in die Abscisse. Ist also beispielsweise $xy = 1$ die Gleichung einer Hyperbel, so ist $x . xy = 1$ oder $y = \frac{1}{x^2}$ deren Hyperbolismus. Nun sei etwa die Gleichung

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + (g + m)x^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0$$

gegeben[3]). Division durch x^6 verwandelt sie in

$$\frac{a}{x^6} + \frac{c}{x^4} + \frac{dx}{x^4} + \frac{e}{x^2} + \frac{fx}{x^2} + g + m + hx + kx^2 + lx^3 = 0,$$

und ersetzt man $\frac{1}{x^2}$ durch y, so erscheint die Curve

$$ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + g + m + hx + kx^2 + lx^3 = 0$$

neben der Curve $x^2y = 1$. Das sind zwei Curven zweiten Geschlechtes, und die Abscissen ihrer Durchschnittspunkte müssen Wurzeln der vorgelegten Gleichung sein. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese letzten Paragraphen unter dem Einflusse von durch Fermat veröffentlichten Untersuchungen (Bd. II, S. 819) entstanden, aber das Meiste, was wir aus der Enumeratio mittheilten, war wesentlich neu und überraschend, wurde auch in der (S. 292) erwähnten von Leibniz herrührenden Besprechung[4]) unter Anführung von einzelnen als neu gerühmten Sätzen höchst anerkennend beurtheilt. Bemängelt wurde nur, dass keine Theorie von Brennpunkten höherer Curven vorkomme, deren Wichtigkeit aus den Arbeiten Tschirnhausens hervorgehe; vielleicht entschliesse sich dieser die Lücke selbst auszufüllen.

Newton gab die neuen Sätze, ohne auch nur einen Beweis anzudeuten. Er überliess es Anderen, die Wahrheit der von ihm ausgesprochenen Gesetze zu prüfen und zu sichern. Doch bevor wir zu solchen, Newtons Enumeratio ergänzenden Schriften gelangen, nöthigt uns die Zeitfolge von anderen Arbeiten zu reden, welche theils vor dem Erscheinen der Enumeratio schon fertig gestellt waren, theils zeigen, dass die wunderbare Abhandlung auf dem Festlande Europas zunächst noch keine Wirkung ausübte.

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 267—270. [2]) Ebenda I, 261. [3]) Ebenda I, 269. [4]) A. E. 1705 pag. 30—34.

Der Marquis De L'Hospital war 1704 gestorben (S. 110). In seinem Nachlasse fand sich ein *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez* in druckfertigem Zustande vor. Nur eine Vorrede fehlte noch, und da eine solche, wie der Verleger in einer Vorerinnerung bemerkt, nicht wohl von Jemand anderem als dem Verfasser eines Werkes geschrieben werden kann, so wurde das Vorhandene unergänzt 1707 der Oeffentlichkeit übergeben und zwar mit solchem Erfolge, dass 1720 ein zweiter unveränderter Abdruck sich als nothwendig erwies. Das Werk besitzt die gleichen Eigenschaften, welche auch De L'Hospitals Analyse des infiniments petits (S. 245 flgg.) nachzurühmen sind, eine ungemeine Fasslichkeit bei grosser Sorgfalt zahlreiche Einzelsätze zu geben. Bahnbrechende Neuerungen sind freilich nicht gar viele zu erwähnen. Wir dürfen vielleicht im III. Buche von der Hyperbel auf den Namen der entgegengesetzten Hyperbeln[1]) aufmerksam machen, der den beiden Zweigen dieser Curve beigelegt ist. Wir dürfen auf das VII. Buch hinweisen, welches die Ueberschrift: Geometrische Oerter[2]) trägt, in welchem eine Art von Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades durchgeführt ist. Wir dürfen im VIII. Buche von den unbestimmten Aufgaben des 11. Beispiels gedenken[3]). Dort ist folgende Aufgabe gestellt: Zwei unveränderliche Winkel KAM, KBM sind um die festen Punkte A, B drehbar, der Durchschnitt K der Schenkel AK, BK durchläuft eine gerade Linie; welche Linie beschreibt der Durchschnitt M der beiden anderen Schenkel AM, BM? De L'Hospital zeigt nicht bloss, dass ein Kegelschnitt entsteht, sondern auch welche besondere Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Kegelschnitt eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel sei. Er geht mithin über das hinaus, was Newton (S. 424) in seinen Principien ausgesprochen hatte.

Die Kegelschnitte De L'Hospitals gehören der ersten oben erwähnten Klasse an. Fertiggestellt vor, gedruckt nach dem Erscheinen der Enumeratio konnten sie ebensowenig von Newton benutzt werden, als die Ergebnisse seiner Forschungen in sich aufnehmen; beide Verfasser können nur wesentlich unabhängig von einander sein. Anders verhielt es sich mit Josef Saurin, dem Freunde De L'Hospitals (S. 250). Als dieser am 29. Juli und am 1. August 1716 der Pariser Académie des Sciences zwei geometrische Abhandlungen vorlegte[4]),

[1]) De L'Hospital, *Sections coniques* Livre III, pag. 47: *Hyperboles opposées.* [2]) *Des lieux géométriques.* [3]) Ebenda pag. 281 flgg. [4]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1716 pag. 59—79 und pag. 275—289: *Remarques sur un cas singulier du Problème général des Tangentes.*

hätte er Newtons Untersuchungen kennen und berücksichtigen müssen, und deshalb verdient hervorgehoben zu werden, dass sich davon keine Spur entdecken lässt. Eine leise Entschuldigung dafür kann vielleicht in dem Umstande gefunden werden, dass Saurins Abhandlungen sich selbst nur als Ergänzungen und Erweiterungen von bereits am 3. August 1702 und am 15. Januar 1703 im Journal des Sçavans veröffentlichte Bemerkungen bezeichnen, und 1702 sowie 1703 war die Enumeratio noch nicht im Drucke vorhanden. Saurin erklärt sich auch in den Abhandlungen von 1716 als bewundernden Freund De L'Hospitals. Seine Absicht sei, die Schwierigkeit aus dem Wege zu räumen, welche entstehe, wenn man die auf der y-Axe auftretende Subtangente $x \cdot \frac{dy}{dx}$ für einen vielfachen Punkt einer Curve suche, eine Schwierigkeit, welche darin sich zeige, dass jene Subtangente unter die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ sich verberge.

Das erste Beispiel Saurins in seiner Abhandlung gehört der Curve

$$y^4 - 8y^3 + (16 - 12x)y^2 + 48xy + (4x^2 - 64x) = 0$$

mit dem Doppelpunkte bei $x = 2$, $y = 2$ an. Die Curvengleichung kann auch

$$\left(y^2 - 4y + 2y\sqrt{4+2x} - 4\sqrt{4+2x} - 2x + 8\right) \times$$
$$\left(y^2 - 4y - 2y\sqrt{4+2x} + 4\sqrt{4+2x} - 2x + 8\right) = 0$$

geschrieben werden und zerfällt in dieser Gestalt von selbst in zwei Factoren, die einzeln gleich Null gesetzt zwei Curven bedeuten, welche beide durch den Punkt $x = 2$, $y = 2$ hindurchgehen, und in deren jeder die Auffindung der Subtangente keiner Schwierigkeit mehr unterworfen ist, während bei der ursprünglichen Curvengleichung

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-3xy^2 + 12xy + 2x^2 - 16x}{y^3 - 6y^2 + 8y - 6xy + 12x}$$

durch $x = 2$, $y = 2$ in $\frac{0}{0}$ übergeht.

Ein allgemein giltiges Mittel, diese Schwierigkeit aus dem Wege zu räumen, ohne eine Zerlegung der Curvengleichung in Factoren zu versuchen, welche, wenn sie überhaupt gelingt, jedenfalls grosse Mühe verursacht und nicht als Methode gelten kann, hat Saurin in der zweiten Abhandlung angegeben. Er benutzt dabei die schon erwähnte Curve 4. Grades mit dem Doppelpunkte bei $x = 2$, $y = 2$. Der dem Punkte $x \mid y$ benachbarte Punkt der Curve hat, so drückt er sich ungefähr aus, die Coordinaten $x + dx \mid y + dy$, und setzt man diese Werthe statt x und y in die Curvengleichung ein, so muss wieder

eine richtige Gleichung erscheinen. Nach Gruppen geordnet, deren Unterscheidungsmerkmal die Dimensionszahl der auftretenden Differentiale ist, wird die neue Gleichung $I + II + III + IV + V = 0$ heissen, und die Bedeutung der einzelnen Gruppenzeichen ist:

$$I = y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x,$$
$$II = 4y^3dy - 24y^2dy - 12y^2dx - 24xydy + 32ydy$$
$$+ 48ydx + 48xdy + 8xdx - 64dx,$$
$$III = 6y^2dy^2 - 24ydy^2 - 24ydxdy - 12xdy^2 + 16dy^2$$
$$+ 48dxdy + 4dx^2,$$
$$IV = 4ydy^3 - 8dy^3 - 12dxdy^2,$$
$$V = dy^4.$$

Die einzelnen Gruppen entstehen, ausser durch jene Einsetzung von $x + dx$ und $y + dy$ in die ursprüngliche Curvengleichung, auch durch fortgesetzte Differentiation aus einander, wenn dx und dy als Constante betrachtet werden und Division einer ganzen Gruppe durch eine Zahl gestattet wird. Saurin erklärt weiter, die gewöhnliche Art die Berührungslinie zu finden sei folgende. Die Gruppe I, als das ursprüngliche Gleichungspolynom werde gestrichen, dann bleiben die Gruppen II bis V übrig, von welchen $III + IV + V$ abermals weggelassen werden können, weil höhere Potenzen unendlich kleiner Differentiale gegen niedrigere verschwinden. So bleibe nur $II = 0$ übrig, woraus $\frac{dy}{dx}$ sich ermitteln lasse u. s. w. Dieses Verfahren höre aber auf statthaft zu sein, wenn II identisch verschwinde, was äusserlich dadurch ersichtlich werde, dass der aus $II = 0$ hervorgehende Werth von $\frac{dy}{dx}$ die Form $\frac{0}{0}$ besitze. Dann bleibe aber von der durch Einsetzung von $x + dx$ und $y + dy$ statt x und y entstandenen Gleichung nur $III + IV + V = 0$ übrig. In ihr fallen IV und V weg, weil sie höhere Potenzen der Differentiale als III enthalten, und $III = 0$ liefert eine nach $\frac{dy}{dx}$ quadratische Gleichung, welche zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ermitteln lasse, d. h. man habe einen Doppelpunkt der Curve $I = 0$ untersucht. Lässt das gleiche Werthepaar für x und y, welches $I = 0$ und $II = 0$ identisch erfüllte, ebenso auch III identisch verschwinden, so liefert die nach $\frac{dy}{dx}$ kubische Gleichung $IV = 0$ drei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ als Merkmal dafür, dass man es mit einem dreifachen Punkte zu thun hatte u. s. w. Damit war die Lehre von den vielfachen

Curvenpunkten endgiltig abgeschlossen, hatte sie die Gestalt angenommen, welche sie in den Lehrbüchern behalten sollte.

Wir kehren nach England zurück, wo 1717 eine eigene Schrift zur Erläuterung der Newtonschen Enumeratio die Presse verliess. James Stirling war ihr Verfasser (S. 387), der Titel *Lineae tertii ordinis Neutonianae, sive illustratio tractatus D. Neutoni de enumeratione linearum tertii ordinis, cui subjungitur solutio trium problematum.* Das nur 8 Druckbogen starke Büchlein ist seinem ganzen Inhalte nach ein beredtes Zeugniss für die Fähigkeit seines Verfassers, sich in Newtons Denkweise hineinzuversetzen. Wüsste man nicht, dass Stirling in Venedig und unabhängig von Newton gearbeitet hat, so wäre man geneigt anzunehmen, er habe seine Erläuterungen im täglichen Verkehre selbst empfangen und nur niedergeschrieben, nicht ersonnen. Es ist ja naturgemäss nicht möglich, geradezu zu behaupten, die von Stirling ergänzten Beweise seien diejenigen, welche der Erfinder der Sätze im Sinne hatte, aber sie können es sehr wohl sein. Sie machen durchgängig von Methoden der Reihenentwicklung Gebrauch, welche, wie wir wissen, Newton in für die damalige Zeit unerreichter Weise beherrschte, vielleicht in etwas übertriebener Weise bevorzugte. Da Stirlings *Lineae tertii ordinis*, wie das Büchlein mit abgekürztem Titel heissen mag, eine fast unentbehrliche Ergänzung zur Enumeratio bilden, so haben wir näher darauf einzugehen.

Stirling beginnt mit der Erklärung einer rationalen Curve als einer solchen, zwischen deren Abscisse und Ordinate eine algebraische Gleichung stattfinde, und mit der Feststellung des Begriffes der Asymptote, die gradlinig oder krummlinig sein könne[1]). Die rationalen Curven zerfallen in Ordnungen, und die Gleichung der Curve $n$ter Ordnung heisst $y^n + (ax + b)y^{n-1} + \cdots = 0$ mit Coefficienten $a, b, \ldots$, deren Anzahl $\frac{n(n+3)}{2}$ ist[2]). Eine durch ununterbrochene Bewegung eines Punktes erzeugte Curve kehrt in sich zurück oder erstreckt sich ins Unendliche. Wegen der ununterbrochenen Bewegung des erzeugenden Punktes muss er von einem unendlichen Curvenzweige unmittelbar zu einem anderen gleichfalls unendlichen Curvenzweige gelangen. Folglich können unendliche Curvenzweige nur in grader Zahl vorhanden sein. Alle gradlinigen Parallelen schneiden eine Curve in gleich vielen reellen oder ima-

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 1. [2]) Ebenda pag. 3—4 und wiederholt pag. 69, wo der Schluss gezogen ist, dass $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte die Curve $n$ter Ordnung bestimmen.

ginären Punkten[1]). Aus der die Veränderlichen x und y gemischt enthaltenden Curvengleichung kann nach Methoden, welche dem Newtonschen Parallelogramme (S. 107—108) nahe verwandt sind, die Ordinate in eine Reihe entwickelt werden, die nach Potenzen der Abscisse mit abnehmenden Exponenten fortschreitet, also eine Entwicklung von der Gestalt $y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + \cdots$. Je grösser x wird, um so genauer stimmt die Curve mit der von der einfacheren Gestalt $y = Ax^n$ überein. Eine gradlinige Asymptote hat mit der Curve $n$ten Grades, zu der sie als Asymptote gehört, zwei in der Unendlichkeit liegende Punkte gemein, kann sie mithin im Endlichen nur noch in $n - 2$ Punkten schneiden[2]). Da eine Berührung überdies aus dem Zusammenfallen mehrerer Durchschnittspunkte hervorgeht, so kann keine Curve 2. oder 3. Grades, wohl aber eine solche 4. oder 5. Grades von ihrer Asymptote auch noch im Endlichen berührt werden[3]).

Von hervorragender Wichtigkeit ist der Satz[4]), dass die Wahl eines Coordinatensystems, dessen Ordinatenaxe einer Asymptote parallel läuft, den Vortheil mit sich bringt, dass alsdann kein Glied y^n in der Gleichung der Curve $n$ten Grades vorkommt. Sei der Punkt H (Figur 59) ein unendlich ferner Punkt der Curve HLA und KHD die die Curve in H berührende Asymptote. Ihr parallel sei von dem endlichen Punkte L aus die LB gezogen, welche v heissen soll, während die zugehörige Abscisse AB

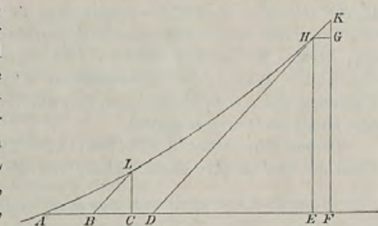

Fig. 59.

durch den Buchstaben z bezeichnet wird. Die ursprünglichen Coordinaten von L sind $LC = y$, $AC = x$. Aehnlich heissen auch im unendlich fernen Punkte $AE = x$, $EH = y$, $AD = z$, $DH = v$. Ebendort ist $HG = EF = dx$, $KG = dy$, wie wir zu schreiben vorziehen, während Stirling unter Anwendung der Fluxionspunkte $HG = \dot{x}$, $KG = \dot{y}$ schreibt. Aus der Curvengleichung ermittle man y als Reihe von der Gestalt

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 5: *Omnes rectae parallelae secant curvam aliquam in iisdem numero punctis realibus et imaginariis.* [2]) Ebenda pag. 41. [3]) Ebenda pag. 43. [4]) Ebenda pag. 44—45.

$$y = Ax + Bx^{1-n} + Cx^{1-2n} + Dx^{1-3n} + \cdots,$$

welche um so rascher convergirt, je grösser x ist. Das Anfangsglied wird die erste Potenz von x enthalten, damit die Ordinate HD mit der ihrer Richtung nach bekannten Asymptote KHD zusammenfalle. Wird die Entwicklung von y differentiirt, oder mit Stirling zu reden, benutzt, um zur Fluxion überzugehen, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = A + (1-n)Bx^{-n} + (1-2n)Cx^{-2n} + \cdots$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke KHG und HDE ist zugleich auch $\frac{dy}{dx} = \frac{HE}{DE}$. Mithin ist $DE = HE : \frac{dy}{dx}$ oder

$$DE = \frac{Ax + Bx^{1-n} + \cdots}{A + (1-n)Bx^{-n} + \cdots} = x + \frac{nB}{A}x^{1-n} + \cdots.$$

Aber

$$AD = z = AE - DE = x - \left[x + \frac{nB}{A}x^{1-n} + \cdots\right] = -\frac{nB}{A}x^{1-n} - \cdots$$

und für $x = \infty$ wird genau $z = -\frac{nB}{A}x^{1-n}$. Nun ist n nach der Natur der Curvengleichung positiv, also AD unendlich viel kleiner als AE oder auch als EH, beziehungsweise als DH, welches zu EH in einem durch den Asymptotenwinkel gegebenen endlichen Verhältnisse steht. Mit anderen Worten: z ist unendlich klein gegen v, und folglich kann in der Curvengleichung v nicht von gleich hoher Dimension mit z sein, beziehungsweise nicht von der Dimension, die dem Grade der Curve entspricht.

Daraus folgt weiter[1]), dass jede Curve 3. Grades bei richtiger Wahl der Ordinatenaxe eine Gleichung von der Gestalt

$$(x+a)y^2 = (bx^2 + cx + d)y + ex^3 + fx^2 + gx + h.$$

besitzen muss, d. h. die von Newton angenommenen Gleichungsformen (S. 423) sind im Allgemeinen gerechtfertigt. Unendlich ferne Punkte aber müssen immer angenommen werden, auch bei Ovalen. Bei diesen hat man sich imaginäre in der Unendlichkeit liegende Doppelpunkte[2]) vorzustellen.

Wie es bei Aufsuchung der Asymptote auf die Gleichungsglieder höchsten Grades ankam, so ist ganz allgemein das der Dimension der Veränderlichen nach höchste Glied einer Reihe ausschlaggebend für das Vorzeichen der Reihensumme[3]), ein Satz, den, wie wir uns er-

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 46. [2]) Ebenda pag. 46—47: *imo hoc in ipsis Ovalibus obtinet; nam concipiendum est eas habere puncta duplicia imaginaria ad distantiam infinitam.* [3]) Ebenda pag. 59.

innern (S. 389), De Lagny im Jahre 1722 abermals aussprach. Aus ihm folgt eine wesentliche Verschiedenheit[1]) der Curven

$$y = a + bx + \cdots + kx^{2m} \quad \text{und} \quad y = a + bx + \cdots + lx^{2m+1}.$$

Bei der ersten Gleichung findet, sofern x gross genug gewählt wird, Zeichengleichheit zwischen y und k statt, bei der zweiten unter gleicher Voraussetzung zwischen y und lx, bei der ersten Gleichung ist daher das Vorzeichen von y unabhängig, bei der zweiten abhängig von dem von x. Geometrisch ausgedrückt heisst das, die erste Curve habe zwei unendliche Zweige, welche beide über oder beide unter der Abscissenaxe in die Unendlichkeit sich erstrecken, während bei der zweiten Curve ein Unendlichkeitszweig über und einer unter der Abscissenaxe sich befinde.

Stirling beweist den von Newton (S. 422) ausgesprochenen Satz über Durchmesser[2]). Sei eine Curvengleichung

$$y^n + (ax+b)y^{n-1} + \cdots = 0,$$

wobei (Figur 60) $AB = x$, $CB = y$. Man verlängere AB nach rückwärts um $AF = -\frac{b}{a}$, ziehe von A nach unten (aber parallel zu CB) die $AE = -\frac{b}{n}$ und verbinde F mit E. Nunmehr soll $ED = z$, $CD = v$ heissen, oder es hat eine derartige Veränderung des Coordinatensystems stattgefunden, dass bei Verlegung des Anfangspunktes die Abscissenaxe einer Drehung unterworfen wurde, die Ordinatenaxe ihre Richtung beibehielt. Vermöge der bekannten Lage von BF gegen FD, welche der ebenerwähnten

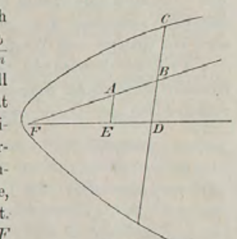

Fig. 60.

Drehung der Abscissenaxe entspricht, ist $\frac{BA}{ED}$ d. h. $\frac{x}{z}$ eine gegebene Constante A, oder es ist $x = Az$. Ferner ist

$$AF : AE = -\frac{b}{a} : -\frac{b}{n} = n : a = BF : BD = \left(Az + \frac{b}{a}\right) : BD,$$

also

$$BD = \frac{a}{n}\left(Az + \frac{b}{a}\right) = \frac{aAz + b}{n}.$$

Aber $BC = y = CD - BD = v - \frac{aAz+b}{n}$ und unter Anwendung der Binomialentwicklung

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 58—59. [2]) Ebenda pag. 71—72.

$$y^n = \left(v - \frac{aAz+b}{n}\right)^n = v^n - (aAz+b)v^{n-1} + \cdots.$$

Daneben ist $y^{n-1} = v^{n-1} + \cdots$ und

$$(ax+b)y^{n-1} = (aAz+b)y^{n-1} = (aAz+b)v^{n-1} + \cdots.$$

Demnach verwandelt sich die Curvengleichung

$$y^n + (ax+b)y^{n-1} + \cdots = 0$$

in die neue Form $v^n + Zv^{n-2} + \cdots = 0$, wo Z eine ganze rationale Function von z bezeichnet. In der neuen Gleichung fehlt das Glied v^{n-1}, dessen Coefficient 0 daher nach der Gleichungslehre die Summe sämmtlicher Gleichungswurzeln $v_1, v_2, \ldots v_n$ sein muss, d. h. die v heben einander auf, oder die von D aus nach oben und nach unten bis zum Durchschnitt mit der Curve gezeichneten Ordinaten heben einander auf. Bei den Curven zweiten Grades muss, wenn das Glied v fehlt, $v^2 = az^2 + bz + c$ übrig bleiben[1]), und es hängt von a ab, ob diese Gleichung eine Hyperbel, eine Ellipse, eine Parabel bedeutet[2]); die Hyperbel erfordert $a > 0$, die Ellipse $a < 0$, die Parabel $a = 0$. Man kann auch algebraische Folgerungen und geometrische Deutungen derselben versuchen, wenn nicht das Glied v^{n-1}, sondern v^{n-2} oder noch ein späteres zum Wegfalle gebracht wurde[3]).

Auch der Newtonsche Satz von den Producten der Abschnitte einander schneidender Sehnen (S. 423) findet seinen Beweis, und zwar zunächst bei der Curve zweiten Grades[4]). Sei (Figur 61) AB als Abscissenaxe gewählt mit A als auf der Curve selbst liegendem Anfangspunkt, so dass in der Curvengleichung ein constantes Glied nicht vorkommt, dieselbe vielmehr

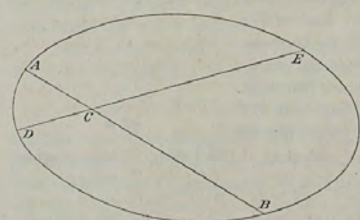

Fig. 61.

$$y^2 + (ax+b)y + cx^2 - dx = 0$$

heissen muss, während die Ordinaten irgend eine Richtung gegen die AB besitzen, z. B. der DE parallel laufen. Die Längen CE, CD, welche von C aus bis zur Curve erscheinen, sind die Werthe von y, welche aus der Gleichung $y^2 + (ax+b)y + cx^2 - dx = 0$ unter der Annahme $x = AC$ her-

[1]) *Liaeae tertii ordinis* pag. 73. [2]) Ebenda pag. 79. [3]) Ebenda pag. 75. [4]) Ebenda pag. 76—77.

vorgehen, und ihr Product muss folglich $= cx^2 - dx$ sein, d. h. $CD.CE = c.AC^2 - d.AC$. Die Länge AB erhält man aus der mehrbenutzten Curvengleichung mittels $y = 0$, dann wird diese nämlich $cx^2 - dx = 0$, beziehungsweise

$$x = AB = \frac{d}{c} = AC + CB \quad \text{und} \quad CB = \frac{d}{c} - AC,$$

$$AC \cdot CB = \frac{d}{c} \cdot AC - AC^2 = -\frac{1}{c}[c \cdot AC^2 - d \cdot AC] = -\frac{1}{c} \cdot CD \cdot CE.$$

Folglich ist der Bruch $\frac{DC \cdot CE}{AC \cdot CB}$ seiner absoluten Grösse nach constant und zwar $= c$. In ähnlicher Weise erläutert Stirling auch den Productensatz bei Curven dritten Grades[1]).

Eine Erörterung der verschiedenen Formen der Curven dritten Grades bildet etwa ein Drittel des kleinen Buches[2]). Statt Newtons 72 Arten (S. 423) gelangt Stirling zu deren 76.

Vielleicht darf noch auf eine gelegentliche Aeusserung Stirlings hingewiesen werden[3]), in welcher eine Spitze als unendlich kleine Schleife erklärt wird.

Der nächste Schriftsteller, dem wir uns zuzuwenden haben, ist Colin Maclaurin[4]) (1698—1746), Sohn eines Geistlichen in Kilmodan in Schottland; vaterlos seit er 6 Wochen alt war, ganz verwaist in seinem 10. Lebensjahre, kam er in die Fürsorge eines gleich seinem Vater dem geistlichen Stande angehörenden Oheims, der ihn wiederum zu derselben Laufbahn bestimmte. Er bezog schon 1709 die Hochschule zu Glasgow und entwickelte dort ein so hervorragendes mathematisches Talent, dass er mit 15 Jahren bereits viele der Sätze entdeckt hatte, welche nachmals in einem Werke erschienen, von dem wir bald zu reden haben. Schon im September 1717 im Alter von noch nicht 20 Jahren bewarb er sich um eine in Aberdeen frei gewordene mathematische Professur und erhielt sie. Fünf Jahre später verliess er Aberdeen ohne Urlaub, um einen jungen Edelmann nach Frankreich zu begleiten. Nach dessen Tode entschuldigte er sich zwar im April 1725 vor der ihm vorgesetzten Schulbehörde wegen seiner eigenwilligen Abwesenheit, aber nach Ablauf des Jahres erhielt er im Januar 1726 und nahm er ziemlich gleichzeitig im Februar seine Entlassung. Thatsächlich war er schon seit November 1725 in Edinburg als Ersatzmann für den dortigen altersschwach gewordenen Mathematiker eingetreten, eine Stellung, welche er dem Einflusse

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 78—79. [2]) Ebenda pag. 83—120. [3]) Ebenda pag. 89: *ut enim punctum est ovalis infinite parva, sic cuspis est nodus infinite parvus.* [4]) *National Biography* XXXV, 196—198 (London 1893, edited by Sidney Lee).

Newtons verdankte. Nun verblieb er, ein hochbeliebter Lehrer und Rathgeber auf zahlreichen Gebieten, in Edinburg bis 1745. Er stand in letzterem Jahre an der Spitze der Vertheidiger Edinburgs gegen Aufständige, und als die Stadt in deren Hände fiel, floh Maclaurin nach York zu dem ihm befreundeten Erzbischof. Dort starb er im folgenden Jahre. In den ersten Jahren seines Aufenthaltes in Aberdeen, 1718 und 1719, veröffentlichte Maclaurin zwei Abhandlungen in den P. T. In der ersten Abhandlung[1]) ist von folgender Entstehung der Curven die Rede. An eine gegebene Curve werden in allen ihren Punkten Berührungslinien gezogen, und auf jede Berührungslinie wird von einem gegebenen Punkte aus eine Senkrechte gefällt, deren Durchschnittspunkt mit der Berührungslinie die neue Curve zum geometrischen Orte hat, worauf durch die Berührungslinien an diese und die auf sie von dem wiederholt in Anwendung tretenden festen Punkte aus gefällten Senkrechten eine abermalige Curve hervorgebracht wird u. s. w. Maclaurin hat damit die Fusspunktcurven verschiedener Ordnung erfunden, hat zugleich die ihrer Länge nach in Rechnung tretenden Entfernungen eines festen Punktes von den Curvenpunkten, also das, was man bei Anwendung von Polarcoordinaten Leitstrahlen genannt hat, einer Benutzung unterzogen. Die zweite Abhandlung[2]) lehrt Curvenzeichnungen kennen, bei welchen nichts anderes in Anwendung tritt, als ausschliesslich Drehungen gegebener Winkel um feste Scheitelpunkte. Diese Abhandlung ist in so weit eine Ergänzung von Newtons Enumeratio, als nicht wie dort vorausgesetzt wird, dass die den zweiten Grad übersteigenden Curven Doppelpunkte besitzen müssen. Irgend einen Beweis theilte Maclaurin in dieser Abhandlung ebensowenig mit, als es Newton in seiner Enumeratio that. Die beiden Abhandlungen mögen schon auf ihren jugendlichen Verfasser aufmerksam gemacht haben, und als Maclaurin sich 1719 nach London begab und dort Newton besuchte, wurde er als Mitglied in die Royal Society aufgenommen. Im folgenden Jahre 1720 erschien Maclaurins *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis*, welche ihm mit einem Male einen Platz unter den Geometern allerersten Ranges sicherte. In dem ersten Abschnitte[3]) handelt es sich um die Newtonsche Construction von Kegelschnitten mittels zweier um ihre Scheitelpunkte drehbarer Winkel, deren eines Schenkelpaar sich auf einer Geraden schneidet. Maclaurin beweist die Richtigkeit dieser Construction[4]) (Figur 62). Die Winkel FCO, KSH seien die um C und S drehbaren Winkel.

[1]) P. T. XXX, 803—812. [2]) Ebenda XXX, 939—945. [3]) *Geometria organica* pag. 1—11. [4]) Ebenda pag. 1—2.

Der Durchschnittspunkt Q von CF und SK bleibt auf der Geraden AE, alsdann soll P, als Durchschnittspunkt von CO und SH einen Kegelschnitt beschreiben. Von Q und P aus werden die Senkrechten QN, PM auf die Verbindungsgerade CS der beiden Scheitel C und S gefällt, ausserdem werden QS, QU und PR, PT so gezeichnet, dass $\angle CUQ = CRP = FCG$ und $SLQ = STP = KSD$. Ersichtlich ist

$$\angle FCG + QCU + RCP = 180^0 = CUQ + QCU + CQU,$$

also $\angle RCP = CQU$, und unter Berücksichtigung von $\angle CRP = CUQ$ erkennt man die Aehnlichkeit der Dreiecke CRP, QUC. Mittels ganz ähnlicher Schlüsse folgert man die Aehnlichkeit der Dreiecke

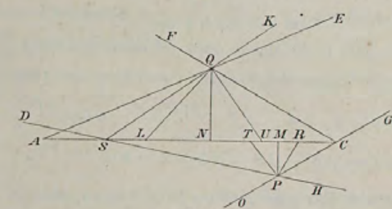

Fig. 62.

SLQ, PTS, und so gelangt man in den Besitz der beiden Gleichungen $\frac{CR}{PR} = \frac{QU}{CU}$ und $\frac{ST}{PT} = \frac{QL}{SL}$. Nun sei $CS = a$, $CA = b$. Die Winkel FCO, KSH, CAE seien durch ihre trigonometrischen Tangenten gegeben[1]): $\operatorname{tg} FCO = \frac{d}{a}$, $\operatorname{tg} KSH = \frac{e}{a}$, $\operatorname{tg} CAE = \frac{c}{a}$. Weiter sei $CM = x$, $PM = y$, $QN = z$. Weil

$$\angle FCO = QCU + RCP = RPC + RCP = MRP,$$

muss auch $\frac{d}{a} = \operatorname{tg} MRP = \frac{MP}{MR}$ sein oder $MR = \frac{ay}{d}$. Ferner

$$CR = CM - MR = x - \frac{ay}{d} = \frac{dx - ay}{d};$$

$$PR = \sqrt{PM^2 + MR^2} = \sqrt{y^2 + \frac{a^2y^2}{d^2}} = \frac{y\sqrt{d^2 + a^2}}{d}.$$

Wegen

$\angle CUQ = CRP$ ist auch $\angle QUN = PRM$ und $\angle QNU = 90^0 = PMR$,

[1]) Bei Maclaurin ist die Ausdrucksweise etwas anders. Er sagt, der Sinus des betreffenden Winkels, z. B. FCO, verhalte sich zu seinem Cosinus wie d zu a.

also $\triangle QUN \sim PRM$, also $\frac{QU}{QN} = \frac{PR}{PM}$, $QU = \frac{QN \cdot PR}{PM} = \frac{z\sqrt{d^2+a^2}}{d}$ neben $NU = \frac{az}{d}$. Da überdies $\frac{QN}{AN} = \operatorname{tg} CAE = \frac{c}{a}$ uns mit $AN = \frac{az}{c}$ bekannt macht, so besitzt man jetzt den Werth von

$$CU = CA - AN - NU = b - \frac{az}{c} - \frac{az}{d} = b - \frac{a(c+d)z}{cd}.$$

Die Werthe von CR, PR, QU, CU, welche erhalten wurden, geben der früheren Gleichung $\frac{CR}{PR} = \frac{QU}{CU}$ die neue Gestalt

$$\frac{dx - ay}{d} : \frac{y\sqrt{d^2+a^2}}{d} = \frac{z\sqrt{d^2+a^2}}{d} : \frac{bcd - a(c+d)z}{cd},$$

und aus ihr folgt $z = \frac{bc(dx - ay)}{(cd - a^2)y + (c+d)ax}$. Aehnliche Betrachtungen gestatten es, auch in die andere oben gefundene Gleichung $\frac{ST}{PT} = \frac{QL}{SL}$ Werthe der vorkommenden Strecken einzusetzen, und zwar

$$ST = a - x - \frac{ay}{e}, \quad PT = \frac{y\sqrt{a^2+e^2}}{e}, \quad QL = \frac{z\sqrt{a^2+e^2}}{e},$$

$$SL = AN - AS - NL = a - b + \frac{a(e-c)z}{ce}.$$

Dann findet man aber einen zweiten Werth von z, nämlich

$$z = \frac{(a-b)c(ae - ex - ay)}{(a^2+ce)y + (e-c)ax + a^2(c-e)}.$$

Gleichsetzung beider Werthe von z führt endlich zu einer Gleichung, welche ausser constanten Grössen nur noch x und y enthält und nach Wegschaffung der Brüche die Form besitzt:

$$\begin{aligned}&[(a-b)ce + d(ae - bc)]x^2 + [a^2(c+d-e) + cde]xy \\ &+ [a(cd - a^2) - bc(d+e)]y^2 + [abc(d+e) - a^2e(c+d)]x \\ &- [bc(a^2 - de) + ae(dc - a^2)]y = 0,\end{aligned}$$

und das ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Die Durchschnittspunkte des Kegelschnittes mit der CS finden sich mittels $y = 0$. Die Gleichung wird dadurch

$$[(a-b)ce + d(ae - bc)]x^2 + [abc(d+e) - a^2e(c+d)]x = 0$$

oder $[ae(c+d) - bc(d+e)](x-a)x = 0$, und ist augenscheinlich bei $x = 0$ und $x = a$ in den Punkten C und S erfüllt, welche somit der Curve angehören, und zwar, setzt Maclaurin hinzu, als einfache Punkte, denn keine Linie von niedrigerem als dem dritten Grade besitzt einen Doppelpunkt[1]).

[1]) *nec Linea quaevis Ordinis tertio inferioris punctum habet duplex.*

Der zweite Abschnitt[1]) lehrt die Construction von Linien dritten Grades mit einem Doppelpunkte. Auch hier war Newton Maclaurins Vorgänger, aber Maclaurin hat sich nicht damit begnügt, Newtons Vorschriften zu beweisen, er hat ganz neue Vorschriften gegeben[2]). Freilich sind es auch wieder, wie bei Newton, zwei bewegliche Winkel, deren Schenkel durch ihren Durchschnittspunkt die Linie dritten Grades hervorbringen, aber (Figur 63), während der eine Winkel FCO um seinen Scheitelpunkt C als Pol gedreht wird, beschreibt der Scheitelpunkt N des anderen Winkels LNQ eine Gerade AE, und sein einer Schenkel NQ geht dabei fortwährend durch den festen Punkt S. Bleibt bei diesen Bewegungen der den Schenkeln CF und SN gemeinsame Durchschnittspunkt Q auf der Geraden BQ,

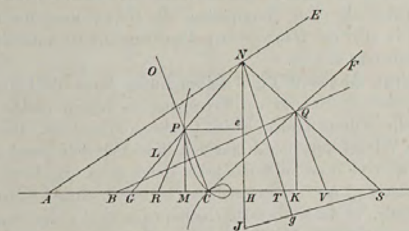

Fig. 63.

so beschreibt der Durchschnittspunkt P der anderen Schenkel CO und NL eine Linie dritten Grades. Zur Beweisführung wird der feste Punkt S mit dem Scheitelpunkte C des nur um diesen Scheitel drehbaren Winkels gradlinig verbunden und werden die Durchschnittspunkte A und B dieser Geraden mit den der Lage nach gegebenen AE und BQ bemerkt. Es sei $SC = a$, $BC = b$, $SA = e$. Ausserdem werden PM, NH, QK senkrecht zu SA gezogen und $PM = y$, $CM = x$ genannt. Ferner werden die Winkel

$$\angle PRC = QVC = FCO \quad \text{und} \quad \angle STN = SNP$$

gemacht. Auf NT wird die Senkrechte Sg errichtet, welche verlängert die NH in J schneidet; endlich ist $Pe \parallel CS$. Was die vorkommenden constanten Winkel betrifft, so sind sie durch ihre Tangenten gegeben:

$$\operatorname{tg} FCO = \frac{d}{a}, \quad \operatorname{tg} QBC = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg} EAS = \frac{f}{a}, \quad \operatorname{tg} SNL = \frac{g}{a}.$$

[1]) *Geometria organica* pag. 11—45. [2]) Ebenda pag. 11—13.

Nun werden Dreieckähnlichkeiten nachgewiesen und aus ihnen Proportionen gebildet ganz in der Art, wie wir bei der Beweisführung für die Erzeugung des Kegelschnittes mittels zweier Winkel berichtet haben. Es ist eine umständliche, um nicht zu sagen langweilige Rechnerei, welche schliesslich zu einer Gleichung von der Form

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 = 0$$

führt. Diese Form lässt nicht bloss erkennen, dass man es mit einer Linie dritten Grades zu thun hat, sondern auch, dass C ein Doppelpunkt der Curve ist. Setzt man nämlich $y = 0$, so geht die Gleichung in $(Dx + G)x^2 = 0$ über, welche zwei gleiche Wurzeln $x = 0$ besitzt. Die weiteren dem zweiten Abschnitte angehörenden Sätze berücksichtigen zum Theil besondere Fälle der erzeugten Curve, zum Theil betreffen sie deren Asymptoten, die Umwandlung der Curvengleichung in eine der Newtonschen Gleichungsformen mittels Coordinatenveränderung u. s. w.

Der dritte Abschnitt[1]) gibt seinen Inhalt durch die Ueberschrift dahin zu erkennen, dass er der Erzeugung der Linien vierten Grades und doppelpunktloser Linien dritten Grades gewidmet sei. Die beiden gegebenen Winkel durchlaufen hier mit ihren Scheiteln gerade Linien, während der eine Schenkel eines jeden durch einen gegebenen Punkt geht. Schneiden die beiden anderen Schenkel einander auf einer geraden Linie, so bildet der Durchschnittspunkt der der erwähnten Bedingung unterworfenen Schenkel eine Linie vierten Grades. Die Gleichung wird wieder nach ähnlichen Grundgedanken, wie wir sie wiederholt in Wirksamkeit treten sahen, abgeleitet. Sind die beiden festen Punkte um a von einander entfernt, wird ihre Verbindungsgerade zur Abscissenaxe, einer der Punkte selbst zum Coordinatenanfangspunkt gewählt, so heisst die Gleichung[2]):

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 \\ + Jy^3 + Kx^2 + Lxy + My^2 = 0,$$

und setzt man $y = 0$, so bleiben nur die Glieder $Ax^4 + Fx^3 + Kx^2 = 0$ übrig, welche, wenn man die Constanten A, F, K ausrechnet und eine neue Constante N einführt, sich in die Gestalt $Nx^2(x - a)^2 = 0$ bringen lässt. Die Punkte $x = 0$, $x = a$, d. h. die beiden festen Punkte, sind folglich Doppelpunkte der Curve. Fallen die beiden Winkelschenkel, deren Durchschnittspunkt die Curve erzeugt, zu gleicher Zeit auf die als Abscissenaxe gewählte Gerade, so verlieren die mehrgenannten festen Punkte ihre Eigenschaft als Doppelpunkte und werden einfache Punkte der Curve, deren Gleichung aber auch

[1]) *Geometria organica* pag. 46—60. [2]) Ebenda pag. 47.

die Glieder vierten Grades einbüsst, so dass eine Linie dritten Grades ohne Doppelpunkt entsteht[1]). Auch schon früher war gelegentlich[2]) eine Curve dieser letzteren Art als Ausnahmefall erwähnt worden. Eine Linie vierten Grades mit dreifachem Punkte wird ebenfalls erörtert[3]) und zugleich bemerkt, es gebe auch Linien vierten Grades mit drei Doppelpunkten. Maclaurin knüpft daran Untersuchungen[4]) über die Anzahl und Lage vielfacher Punkte, welche wir uns nicht enthalten können in Uebersetzung wiederzugeben: „Ich habe gesagt, eine Linie 4. Grades könne 3 Doppelpunkte besitzen, aber dieselben können nicht auf einer Geraden liegen, weil diese Gerade sonst die Linie 4. Grades in 6 Punkten schnitte, was unmöglich ist. Die Anzahl von 5 Doppelpunkten kann eine Linie 4. Grades nicht besitzen, denn hätte sie deren 5, so liesse sich ein Kegelschnitt durch diese hindurchlegen, und der Kegelschnitt hätte 10 Durchschnittspunkte mit der Linie 4. Grades, während nach der Natur dieser Linien nur 8 Durchschnittspunkte möglich sind. Die Linie 4. Grades kann sogar nicht mehr als 3 Doppelpunkte besitzen. Wären deren 4 vorhanden, so würde ein durch sie hindurchgelegter Kegelschnitt in 8 Punkten geschnitten werden, weil jeder Doppelpunkt als zwei einfache Punkte gilt. Aber ein Kegelschnitt kann durch 5 Punkte hindurchgelegt werden. Man wähle also noch einen beliebigen einfachen Punkt der Linie 4. Grades, dann könnte ein Kegelschnitt durch die 4 Doppelpunkte und den 5. einfachen Punkt hindurchgehen, und der Kegelschnitt hätte unter dieser Voraussetzung 9 Punkte mit der Linie 4. Grades gemeinschaftlich, was unmöglich ist. Folglich kann eine Linie 4. Grades keine 4 Doppelpunkte besitzen.“

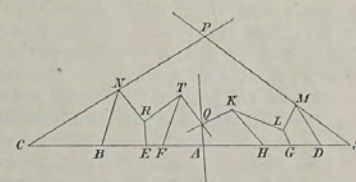

Fig. 64.

Der vierte Abschnitt[5]) geht in allgemeinerer Weise zu Linien höherer Grade über, welche mittels gegebener Geraden und gegebener Winkel erzeugt werden. Der Hauptsatz ist der[6]), dass, wenn (Figur 64) n Gerade $BN, ER, FT \ldots$ einerseits und m Gerade $DM, GL, HK \ldots$ andererseits gegeben sind, wenn ferner die der Grösse nach unveränderlichen Winkel CNR, NRT, $RTQ \ldots$, sowie SML, MLK,

[1]) *Geometria organica* pag. 49. [2]) Ebenda pag. 36. [3]) Ebenda pag. 59. [4]) Ebenda pag. 60. [5]) Ebenda pag. 61—78. [6]) Ebenda pag. 72.

$LKQ \ldots$ mit ihren Scheitelpunkten die genannten Geraden durchlaufen, wenn endlich Q auf der Geraden QA verbleibt, der Schnittpunkt P der CN und SM eine Linie vom Grade $n + m + 2$ beschreibt.

Diese vier Abschnitte bilden gemeinschaftlich den ersten Theil der Geometria organica, in welchem seiner allgemeinen Ueberschrift[1]) zufolge Linien jeden Grades unter ausschliesslicher Benutzung von Winkeln und Geraden beschrieben werden sollten. Im zweiten Theile[2]) sollen irgend Linien niedrigeren Grades bei der Erzeugung von solchen höheren Grades in Anwendung kommen.

Sein erster Abschnitt[3]) behandelt Newtons Erzeugung einer Linie dritten Grades mit Doppelpunkt als Ort des Durchschnittes von Schenkeln zweier um ihre Scheitelpunkte sich drehenden Winkel, während das andere Schenkelpaar sich auf einem Kegelschnitte trifft. Seien S und C die Scheitelpunkte der sich drehenden Winkel HSK, FCO. Die Schenkel CF und SK schneiden sich in Q, und der Ort von Q ist ein durch S hindurchgehender Kegelschnitt, den man uns gestatten möge $\mathfrak{K}_1$ zu nennen, um das Nachfolgende leichter aussprechen zu können. Um den Ort von P, dem Durchschnittspunkte der Schenkel CO und SH, zu bestimmen, untersucht Maclaurin, wie oft eine durch P hindurchgehende Gerade DE diesen Ort schneiden kann? Würde P eine Gerade DE stetig durchlaufen, und man unter dieser Voraussetzung nach dem Orte von Q fragen, so wäre derselbe, wie im ersten Satze des ersten Abschnittes ersten Theiles der Geometria organica (S. 436) bewiesen ist, ein durch S hindurchgehender Kegelschnitt, der $\mathfrak{K}_2$ heissen mag. Nun schneiden einander $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als Kegelschnitte in 4 Punkten, also ausser in S etwa noch in M, N, T. Gelangt folglich Q bei der wirklich von diesem Punkte durchlaufenen Bahn $\mathfrak{K}_1$ nach M, N, T, dann und nur dann bekommt P eine Lage, welche der Geraden DE angehört. Das besagt uns aber, dass DE den Ort von P in 3 Punkten und niemals in mehr als 3 Punkten schneidet. Der gesuchte Ort muss also vom dritten Grade sein.

Der zweite Abschnitt[4]) ist eine Erweiterung des zweiten Abschnittes des ersten Theiles. Dort (S. 439—440) wurde ein Winkel um seinen Scheitelpunkt gedreht, ein anderer verschob sich mit seinem Scheitelpunkte auf einer gegebenen Geraden und sein einer Schenkel ging dabei fortwährend durch einen festen Punkt und traf den einen Schenkel des gedrehten Winkels auf einem vorgeschriebenen Raumgebilde. Das Alles bleibt genau ebenso, nur wird, was wir eben ein

[1]) *Geometria organica* pag. 1. [2]) Ebenda pag. 79—139. [3]) Ebenda pag. 79—86. [4]) Ebenda pag. 87—94.

vorgeschriebenes Raumgebilde nannten, und was im ersten Theile eine Gerade war, jetzt eine Linie $n$ten Grades. Sie mag C_n heissen, wenn auch Maclaurin diese Bezeichnung nicht kennt. Der geometrische Ort des Durchschnittspunktes P der anderen Winkelschenkel ist dann vom Grade $3n$. Das traf ja auch in dem Sonderfalle des ersten Theils zu, wo $n = 1$ war und P eine Linie 3. Grades beschrieb. Der Beweis ist dem vorher aus dem ersten Abschnitte des zweiten Theiles berichteten durchaus ähnlich. Würde P eine Gerade DE stetig durchlaufen, so müsste Q eine Linie 3. Grades C_3 beschreiben. C_3 und C_n schneiden einander in $3n$ Punkten $M_1, M_2, \ldots M_{3n}$. Sowie also Q bei dem Durchlaufen von C_n zu den Punkten $M_1, M_2, \ldots M_{3n}$ gelangt, und nur dann, liegt P auf der DE, welche folglich den Ort von P in $3n$ Punkten schneidet, d. h. dieser Ort ist eine Linie $3n$ten Grades. Verfolgt der Scheitel des sich verschiebenden Winkels auch keine Gerade, sondern eine Linie $m$ten Grades[1]), so steigt die Gleichung des Ortes von P auf die $3mn$te Potenz. Auch die Entstehung der Linie 4. Grades, wenn die Scheitel der beiden erzeugenden Winkel und ebenso der Durchschnitt eines Schenkelpaares je eine Gerade beschreiben, die (S. 440) im dritten Abschnitte des ersten Theils gelehrt worden war, findet Verallgemeinerung[2]). Sobald Linien vom Grade m, n, r an die Stelle der drei genannten Geraden treten, wird die durch den Durchschnittspunkt des zweiten Schenkelpaares erzeugte Linie vom Grade $4mnr$. Die Beweisführung dieser und noch einiger ähnlicher Sätze beruht stets auf der gleichen Grundlage. Maclaurin fragt regelmässig nach dem Orte von Q, wenn P eine Gerade beschriebe. Jener Ort sei eine C_g, so gibt g vervielfacht mit m, mit n, mit r u. s. w. die Anzahl der Punkte auf der von Q thatsächlich durchlaufenen Curve, bei deren Erreichen durch Q der Punkt P auf der Geraden sich befindet, und die Anzahl $gmnr \ldots$ dieser Durchschnittspunkte bestimmt den Grad der von P erzeugten Curve.

Der dritte Abschnitt[3]) von den unendlichen Reihen von Curven, welche aus einer gegebenen Curve mit Hilfe von Berührungslinien abgeleitet werden, behandelt die Fusspunktcurven, steht also zur ersten Abhandlung Maclaurins von 1718 (S. 436) in ähnlicher Beziehung, wie die vorhergehenden Abschnitte der Geometria organica zu seiner zweiten Abhandlung von 1719.

Der vierte Abschnitt[4]) hat es mit Curven zu thun, deren Entstehung auf Anziehungskräfte zurückzuführen ist, welche reciprok zu gewissen Potenzen der Entfernung wirken.

[1]) *Geometria organica* pag. 89. [2]) Ebenda pag. 90. [3]) Ebenda pag. 94 bis 120. [4]) Ebenda pag. 120—135.

Der fünfte Abschnitt[1]) endlich von der Beschreibung geometrischer Linien, von welchen eine Anzahl von Punkten gegeben ist, begründet zuerst mittels eines Eliminationsverfahrens den Satz, dass Curven vom Grade n und vom Grade 2 (beziehungsweise 3) einander höchstens in $2n$ (beziehungsweise $3n$) Punkten schneiden. Sind die Curven vom Grade m und vom Grade n, so scheint, sagt Maclaurin, mn die Zahl der Durchschnittspunkte zu sein, aber[2]) einen allgemeinen Beweis dafür habe er vergeblich gesucht, weil es schwierig sei, bei hoch ansteigenden Gleichungen die Divisoren zu finden. Aus dem als wahr angenommenen Satze werden alsdann wichtige Folgerungen gezogen[3]). Eine Curvengleichung $n$ten Grades enthält $\frac{n(n+3)}{2}$ Coefficienten (S. 430), welche durch Angabe von ebensovielen Punkten, durch welche die Curve hindurchgehen soll, berechnet werden können, und folglich machen diese $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte die Curve zu einer ganz bestimmten. Andererseits schneiden sich zwei Curven $n$ten Grades in n^2 Punkten, folglich bestimmen n^2 Punkte die Curve nicht, da zwei Curven gleichen Grades jene n^2 Punkte enthalten. Wird $n = 3$ angenommen, so ist $\frac{n(n+3)}{2} = 9$ und $n^2 = 9$, also bestimmen neun Punkte eine Curve 3. Grades und bestimmen sie auch nicht. Maclaurin beruhigt sich bei dem Ausspruche dieser Schwierigkeit, ohne eine Lösung derselben auch nur zu versuchen. Eine andere Folgerung gilt der Anzahl möglicher Doppelpunkte. Die Gleichung $n-2$ten Grades enthält $\frac{(n-2)(n+1)}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2} + n - 2$ Coefficienten, und daraus ergibt sich, dass die Curve $n$ten Grades nicht mehr als $\frac{n^2-3n+2}{2}$ Doppelpunkte besitzen kann. Besässe sie nämlich $\frac{n^2-3n+2}{2} + 1$ Doppelpunkte, so könnte man durch sie und noch $n-3$ einfache Punkte eine Curve $(n-2)$ten Grades hindurchlegen und diese hätte mit der Curve $n$ten Grades

$$2\left(\frac{n^2-3n+2}{2} + 1\right) + n - 3 = n^2 - 2n + 1$$

Punkte gemeinsam, während doch nur $n(n-2) = n^2 - 2n$ gemeinsame Punkte möglich sind. Daran knüpfen sich noch einige weitere Bemerkungen über Punkte von noch höherer Vielfachheit als Doppelpunkte.

[1]) *Geometria organica* pag. 135—139. [2]) Ebenda pag. 136: *Universalem vero cujus rei demonstrationem adhuc frustra quaesivimus propterea quod difficile sit divisores in arduis aequationibus invenire.* [3]) Ebenda pag. 137.

Wir hoffen in diesem Berichte über die Geometria organica nicht Allzubedeutendes weggelassen zu haben, wenn auch selbstverständlich Kürzungen unerlässlich waren. Man wird das von uns (S. 436) zum voraus ausgesprochene Urtheil, dass Maclaurin sich mit diesem Werke in die Reihe der allerersten Geometer stellte, wohl nicht ungerecht finden. Maclaurin musste von da ab Grosses leisten, wenn seine späteren Schriften den ersten Veröffentlichungen ebenbürtig bleiben sollten, und er hat es gethan. Wir dürfen diesen Wechsel auf seine Zukunft hin schon ausstellen, wenn wir ihn auch im nächsten Abschnitte erst einlösen können.

Wir haben in diesem Kapitel nur noch Weniges hinzuzufügen. Guido Grandi veröffentlichte 1723 in den P. T. einen Aufsatz, von welchem am Anfange des 114. Kapitels die Rede sein wird. Von einem anderen Schriftsteller handeln wir jetzt schon. Henri Pitot[1]) (1695—1771), im südlichen Frankreich geboren und in seinen späteren Lebensjahren seit 1740 ebendort mit grossem Erfolge als Wasserbaumeister thätig, verbrachte einen Theil seines Mannesalters in Paris, wo er mit wissenschaftlichen Untersuchungen sich beschäftigte. Er gehörte seit 1724 der Académie des Sciences an. Seine wichtigsten Arbeiten gehören der Hydraulik an, einige auch der Geometrie. Mit einer von letzteren haben wir es zu thun, welche der Académie des Sciences am 12. Juli 1724 vorlag. Ein Nachtrag folgte am 17. Februar 1725. Beide Beiträge vereinigt sind in dem Bande der Academieveröffentlichungen abgedruckt, der für die Arbeiten von 1724 bestimmt bezeichnet ist, aber erst 1726 erschien[2]). Es handelt sich um Robervals *Compagne de la cycloïde* (Bd. II, S. 878) und deren von Pitot in mehrfacher Weise abgeleiteten Quadratur. Die eine Ableitung lässt die Sinuslinie, denn eine solche ist bekanntlich jene Gefährtin der Cycloide, als Abwicklung der Ellipse entstehen, welche auf einem graden Kreiscylinder durch eine schneidende Ebene gebildet wird, die gegen die Grundfläche unter einem Winkel von 45° geneigt ist und diese in einem Durchmesser schneidet (Fig. 65). In der Nachschrift zeigte Pitot, dass ebendieselbe Gefährtin der Cycloide auch durch Projection von

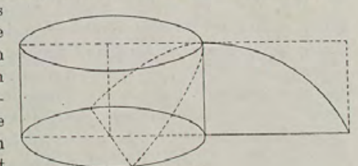

Fig. 65.

[1]) Poggendorff II, 459. — Chasles, *Aperçu hist.* 139 (deutsch 136).
[2]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1724, pag. 107—113.

auf dem gleichen Cylinder gezeichneten Schraubenwindungen auf eine mit der Axe des Cylinders parallelen Ebene entstehe. Bei dieser Gelegenheit bediente er sich eines Ausdruckes, um dessenwillen wir eigentlich den ganzen Aufsatz erwähnt haben. Die Alten, sagt Pitot, haben diese Curve Spirale oder Schneckenlinie genannt, weil ihre Gestaltung auf dem Cylinder eine Aehnlichkeit mit der gemeinen Spirale in der Ebene erkennen lässt, aber sie ist sehr verschieden von der gemeinen Spirale, indem sie eine Curve doppelter Krümmung ist[1]), oder eine Linie, welche man sich auf der krummen Oberfläche eines Körpers gezeichnet denkt. Vielleicht werden diese Arten von Curven doppelter Krümmung oder auf Oberflächen befindlich eines Tages den Gegenstand von Untersuchungen der Geometer bilden.

Das ist das erste gedruckte Vorkommen des Ausdruckes Curven doppelter Krümmung, welches nachgewiesen ist, und wenn auf der einen Seite die weder begründende noch besonders betonende Art, in welcher Pitot sich seiner bedient, an ein Bekanntsein glauben machen könnte, so ist auf der anderen Seite die ahnungsvolle Schlussäusserung dazu angethan, in Pitot den vermuthen zu lassen, der zuerst über Curven auf krummen Oberflächen als solche nachdachte und ihnen vielleicht insofern doppelte Krümmung zusprach, als sie erstens Curven sind und zweitens an der Krümmung der Oberfläche theilnehmen; so glauben wir wenigstens die oben wiedergegebenen Worte Pitots verstehen zu müssen.

100. Kapitel.

Differentialgleichungen.

Wir haben im vorigen Kapitel mancherlei geometrische Aufgaben an unseren Blicken vorübergehen lassen, solche, deren Auflösung streng genommen auch vor Erfindung der Infinitesimalrechnung möglich gewesen wäre, sowie solche, die erst nach dieser Erweiterung des mathematischen Gebietes eine Inangriffnahme gestatteten. Aber unter letzteren haben wir eine eigene Gattung von Untersuchungen bisher ausgeschlossen: solche, welche zunächst auf eine Differentialgleichung führen, deren Integration alsdann eine neue Aufgabe für sich darstellt. Indem wir diesen Untersuchungen uns zuwenden, lösen wir zugleich eine (S. 241) gegebene Zusage ein, auf das isoperimetrische Problem zurückzukommen, dessen Geschichte mit dem

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1724 pag. 113: *étant une des courbes à double courbure.*

Jahre 1699 keineswegs abgeschlossen war und daher im XVI. Abschnitte nicht zu Ende erzählt werden konnte.

Wir erinnern daran, dass Jakob Bernoulli den Mathematikern die isoperimetrische Aufgabe gestellt hatte, dass insbesondere Johann Bernoulli zur Lösung der Aufgabe aufgefordert war, dass dieser der Aufforderung so weit entsprach, als er die Differentialgleichung $dv = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ veröffentlichte. Er bemerkte dazu, er fasse dt, oder das Curvenelement, als constant auf[1]), er hätte also eigentlich schreiben müssen $\frac{dv}{dt} = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$; doch legte man damals auf solche formale Richtigkeit kein sehr grosses Gewicht. Jene Differentialgleichung, sagte Johann Bernoulli also, ohne seine Behauptung genauer zu begründen, gehöre der gesuchten Curve an. Wir erinnern weiter daran, dass Leibniz den Streit der Brüder entscheiden sollte, nachdem er erst von der Lösung Jakobs, dann von der Johanns, die selbstverständlich mit Beweisen zu versehen seien, genaue Kenntniss genommen haben würde.

Jakob Bernoulli veröffentlichte zuerst in Basel im Jahre 1700 eine kleine Schrift *Jacobi Bernoullii ad fratrem suum Johannem Bernoulli epistola cum annexa solutione propria problematis isoperimetrici*, von welcher ein Theil, im Wesentlichen eine Anzahl von Beispielen, in den A. E. vom Juni 1700 abgedruckt wurde[2]). Der in den A. E. fehlende, auch später in die Gesammtausgabe von Jakob Bernoullis Schriften nicht übergegangene Theil des Briefes von 1700 ist 1792 durch Charles Bossut in der von dem Abbé Rozier geleiteten Zeitschrift: *Observations sur la physique, sur l'histoire naturelle et sur les arts* T. XLI pag. 161—173 erneut zum Abdruck gebracht worden. Dann folgte in den A. E. vom Mai 1701 die *Analysis magni problematis isoperimetrici*[3]). Diese Analyse des isoperimetrischen Problems war allerdings schon im März 1701 bei Gelegenheit der Disputation von Johann Jakob Bischof[4]) als Sonderschrift erschienen. Sie war gewidmet dem unvergleichlichen Viergespanne von Männern: De L'Hospital, Leibniz, Newton, Fatio de Duillier, den Fürsten unter den Mathematikern, eine Zusammenstellung von Namen, welche uns heute geradezu unmöglich erscheint, welche aber im Jahre 1701 bei Niemand Verwunderung erregen konnte. Die Abhandlung beginnt mit ganz allgemeinen Betrachtungen, welche dahin gerichtet sind, die Ordnung der Differentialgleichungen, zu welchen man gelangen müsse,

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 219: *en prenant dt ou l'élément de la courbe pour constant.* [2]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 874—887. [3]) Ebenda II, 895 bis 920. [4]) Episcopius heisst der lateinische Name.

zu ermitteln. Die Ziehung einer Tangente bedürfe eines Bogenelementes, also 2 consecutiver Punkte, beziehungsweise 1. Differentiale von Abscisse und Ordinate. Die Auffindung des Krümmungskreises bedürfe des von zwei Bogenelementen gebildeten Winkels, also 3 consecutiver Punkte, beziehungsweise 2. Differentiale von Abscisse und Ordinate. Damit von Isoperimetrie die Rede sein könne, müsse ein drittes Bogenelement in das Bereich der Untersuchung gezogen werden, die alsdann auf 4 consecutive Punkte sich beziehend die 3. Differentiale von Abscisse und Ordinate einschliessen werde. Das ist der eine Grundgedanke, während als zweiter der Satz erscheint, von welchem Jakob Bernoulli auch 1697 in seiner Abhandlung über die Brachistochrone schon Gebrauch gemacht hatte (S. 235), dass eine Curve, welche als Ganzes ein Maximum oder Minimum darstelle, auch in ihren noch so kleinen Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen müsse. Wir wollen nunmehr über die entwickelten Lehrsätze ihrer Reihenfolge nach berichten[1]), wobei wir uns die einzige wesentliche Abweichung gestatten, dass wir das Differentialzeichen mit Zahlenindex versehen statt der Wiederholung des d, also nicht ddx, $dddx$, sondern d^2x, d^3x schreiben.

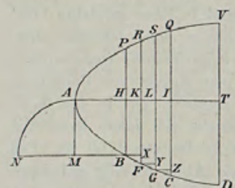

Fig. 66.

Der I. Satz lautet, dass, wenn x' (oder kürzer bezeichnet x), x'', x''', x'''' vier auf einander folgende Ordinaten, y' (oder y), y'', y''', y'''' die entsprechenden Abscissen, z' (oder z), z'', z''', die zwischen der x und den anderen genannten Ordinaten abgegrenzten Curvenstückchen bezeichnen, diese Grössen, je nachdem fortwährendes Anwachsen oder fortwährendes Abnehmen vorausgesetzt wird, den Gleichungen gehorchen müssen:

$$x'' = x \pm dx,\quad x''' = x'' \pm dx'' = x \pm 2dx + d^2x,$$
$$x'''' = x''' + dx''' = x \pm 3dx + 3d^2x \pm d^3x,$$

ebenso

$$y'' = y \pm dy,\ y''' = y \pm 2dy + d^2y,\ y'''' = y \pm 3dy + 3d^2y \pm d^3y,$$

ebenso

$$z'' = z \pm dz,\quad z''' = z \pm 2dz + d^2z.$$

Der II. Satz behauptet (Figur 66) die Proportion

$$df : -dg = (rst - qsu) : (qsu - ptu).$$

[1]) Vergleiche ausser der Originalabhandlung selbst auch F. Giesel, Geschichte der Variationsrechnung. Erster (einziger) Theil. Programm des Gymnasiums zu Torgau für Ostern 1857. S. 8—10.

Die Bedeutung der vorkommenden Buchstaben ist folgende: $p = FX$, $q = GY$, $r = CZ$, $s = BF$, $t = FG$, $u = GC$, $f = KF = HB + p$, $g = LG = KF + q = HB + p + q$. Fernere Abkürzungen sind $b = HB$, $l = BX$, $m = FY$, $n = GZ$. Betrachtet man nun b, d. h. HB als constant, so zeigt sich

$$df = dp,\quad dg = dp + dq.$$

Nun mögen die Punkte B und C festgehalten sein. Die Punkte F und G werden als auf KF und LG verschiebbar gedacht, während die Bogenlänge zwischen B und C, also

$$BF + FG + GC = s + t + u,$$

unverändert bleiben soll. In den rechtwinkligen Dreieckchen BXF, FYG, GZC ist $l^2 + p^2 = s^2$, $m^2 + q^2 = t^2$, $n^2 + r^2 = u^2$. Zugleich ist, da F und G ihre Lage nur in der Weise veränderten, dass die Entfernungen ihrer Ordinaten unter einander und von denen der festgehaltenen B und C die gleichen blieben, durch diese Bedingungen festgestellt, dass neben $s + t + u$ auch $l + m + n$ und $p + q + r$ constante Summen sind[1]). Durch Differentiation der aus rechtwinkligen Dreiecken gefolgerten Gleichungen und der constanten Summen, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass l, m, n auch einzeln constant sind, erhält man:

$$\begin{aligned} &1.\ \ p \cdot dp = s \cdot ds,\\ &2.\ \ q \cdot dq = t \cdot dt,\\ &3.\ \ r \cdot dr = u \cdot du,\\ &4.\ \ dp + dq + dr = 0,\\ &5.\ \ ds + dt + du = 0. \end{aligned}$$

Aus 4. und 5. werden dr und du entnommen und in 3. eingesetzt. Man erhält so $dt = \frac{r \cdot dp + r \cdot dq - u \cdot ds}{u}$, welches in 2. eingesetzt $ds = \frac{rtdp + rtdq - qudq}{tu}$ liefert. Diesen Werth führt man wieder in 1. ein, so entsteht $(ptu - rst)dp = (rst - qsu)dq$ oder

$$dp : dq = (rst - qsu) : (ptu - rst),$$

beziehungsweise $dp : (dp + dq) = (rst - qsu) : (ptu - qsu)$. Oben war aber $dp = df$, $dp + dq = dg$, und somit verwandelt sich die gefundene Proportion in die vorher aufgestellte.

Ein III. Satz macht die Annahme, die Bewegung von F und G finde auf kleinen Kreisbögen statt, deren Mittelpunkte B und C sind.

[1]) Jac. Bernoulli schreibt geradezu $l + m + n = \text{const.}$, $p + q + r = \text{const.}$, $s + t + u = \text{const.}$

Bei dieser Annahme nehmen die Ordinaten FK, GL an der Bewegung Theil, d. h. l, m, n sind einzeln veränderlich, während s, t, u constant erscheinen. Differentiation derselben Gleichungen wie oben führt hier zu den fünf Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &1.\quad ldl + pdp = 0,\\ &2.\quad mdm + qdq = 0,\\ &3.\quad ndn + rdr = 0,\\ &4.\quad dl + dm + dn = 0,\\ &5.\quad dp + dq + dr = 0. \end{aligned}$$

Hier werden dn und dr aus 4. und 5. in 3., dm aus dem veränderten 3. in 2., dl aus dem veränderten 2. in 1. eingeführt. Dann wird wieder $dp = df$, $dp + dq = dg$ gesetzt. Das Ergebniss dieser Rechnung ist: $df : -dg = (lmr - lnq) : (lnq - mnp)$.

Der IV. und V. Satz sind nur andere Schreibarten des II. und III. Die aufeinander folgenden Ordinaten, Abscissen und Curvenstücke sollen nämlich $HB = x$, $KF = x''$, $LG = x'''$, $AH = y$, $AK = y''$, $AL = y'''$, $AB = z$, $AF = z''$, $AG = z'''$ heissen. Alsdann ist

$$BX = l = y'' - y = dy,\ FY = m = y''' - y'' = dy'' = dy + d^2y,$$
$$GZ = n = AI - y''' = dy''' = dy + 2d^2y + d^3y$$

und entsprechend

$$p = dx,\ q = dx + d^2x,\ r = dx + 2d^2x + d^3x,$$

sowie

$$s = dz,\ t = dz + d^2z,\ u = dz + 2d^2z + d^3z.$$

Es kommt auf die Berechnung der Werthe $rst - qsu$ und $qsu - ptu$ einerseits, auf die der Werthe $lmr - lnq$ und $lnq - mnp$ andererseits an. Zunächst würde erscheinen:

$$\begin{aligned} rst - qsu = dz(dzd^2x - dxd^2z) &+ dz(dzd^3x - dxd^3z)\\ &+ dz(d^2zd^3x - d^2xd^3z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} qsu - ptu = dz(dzd^2x - dxd^2z) &+ 2d^2z(dzd^2x - dxd^2z)\\ &+ d^3z(dzd^2x - dxd^2z). \end{aligned}$$

Die Glieder 6. Ordnung werden gegen die 4. und 5. Ordnung weggelassen. Dann heisst es nur noch

$$rst - qsu = dz[(dzd^2x - dxd^2z) + (dzd^3x - dxd^3z)]$$

und

$$qsu - ptu = dz(dzd^2x - dxd^2z) + 2d^2z(dzd^2x - dxd^2z).$$

Es erscheint wünschenswerth d^2z und d^3z wegzuschaffen. Das geschieht mittels $dz^2 = dx^2 + dy^2$ unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Wahl von $HK = KL = LI$, welche vorherging, dy zu einer Constanten gemacht hat. Dann liefert die wiederholte Differentiation jener Gleichung

$$dzd^2z = dxd^2x \quad\text{und}\quad dzd^3z + d^2z^2 = dxd^3x + d^2x^2.$$

Durch Benutzung dieser Gleichungen sowie von $dz^2 - dx^2 = dy^2$ erhält man

$$rst - qsu = dy^2d^2x + dy^2d^3x - \frac{dxdy^2d^2x^2}{dz^2}$$

und

$$qsu - ptu = dy^2d^2x + \frac{2dxdy^2d^2x^2}{dz^2}.$$

Jetzt rufen wir die Proportion des II. Satzes ins Gedächtniss zurück und unterwerfen sie folgender Umformung:

$$\begin{aligned} df : -dg &= (rst - qsu) : (qsu - ptu)\\ &= \frac{dz^2}{dy^2}(rst - qsu) : \frac{dz^2}{dy^2}(qsu - ptu)\\ &= (dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2) : (dz^2d^2x + 2dxd^2x^2). \end{aligned}$$

Das aber ist der IV. Satz. Der aus dem III. Satze entstehende V. Satz, dessen Ableitung wir übergehen dürfen, da sie der eben geführten Rechnung mit dem einzigen Unterschiede, dass jetzt bei der wiederholten Differentitaion von $dx^2 + dy^2 = dz^2$ das Bogenelement dz als constant gilt, durchaus nachzubilden ist, kleidet sich in die Proportion

$$df : -dg = (dy^2d^2x + dy^2d^3x + dxd^2x^2) : (dy^2d^2x - 2dxd^2x^2).$$

Ein VI. allgemeiner Satz folgt. Seien zwei Grössen f und g gedacht, deren zweite g die erste f um unendlich wenig übertrifft; sei ausserdem F genau so aus f gebildet wie G aus g[1]), sei ferner $adF = hdf$, $adG = idg$, so wird behauptet $i = h + dh$. Jakob Bernoulli führt den Beweis an einem besonders gewählten Beispiele $F = \sqrt{a^2 + f^2}$, $G = \sqrt{a^2 + g^2}$. Mithin ist

$$dF = \frac{fdf}{\sqrt{a^2 + f^2}},\quad dG = \frac{gdg}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$$

Die Annahmen $adF = hdf$, $adG = idg$ liefern

$$h = \frac{af}{\sqrt{a^2 + f^2}},\quad i = \frac{ag}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$$

Denkt man sich eine Curve, deren Abscisse f einer Ordinate h entspricht, so wird der von f unendlich wenig verschiedenen Abscisse g die Ordinate i entsprechen, und diese kann, weil sie der Ordinate h

[1]) *rursumque aliae duae per has similiter expressae vel datae F et G.*

unendlich nahe liegt[1]), von ihr nur unendlich wenig verschieden sein. Man würde heute sagen: wenn die Gleichung $y = \varphi(x)$ die einer Curve ist, auf welcher zwei nächstliegende Punkte M_1 und M_2 heissen, so ist die Richtung der Berührungslinien M_1T_1 und M_2T_2 nur unendlich wenig verschieden, ein Ausspruch, der allerdings den stetigen Verlauf der Curve an der fraglichen Stelle voraussetzt.

Der VII. Satz ist der, den wir (S. 448) in Erinnerung gebracht haben, dass eine Curve, welche als Ganzes ein Maximum oder Minimum darstelle, auch in ihren noch so kleinen Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen müsse.

An diese Einleitung schliesst sich die eigentliche Auflösung der gestellten Aufgaben. Deren erste lautet: Seien AT und AM zwei aufeinander senkrechte Axen, AN eine ganz beliebige Curve. Es soll von allen zwischen A und D gelegenen isoperimetrischen Curven diejenige ABD gesucht werden, welche bewirkt, dass, wenn von den einzelnen Punkten B derselben auf jene Axen Lothe BHP und BMN gefällt werden, wo N der Durchschnittspunkt der BM mit der Curve AN ist, und wo HP stets $= MN$ angenommen wird, die von der so entstehenden Curve APV, der Abscisse AT und der Ordinate TV eingeschlossene Fläche ein Maximum oder Minimum werde. Die Abscissenstückchen HK, KL, LI werden als unter einander gleich gedacht und durch b bezeichnet. Die in den Punkten H, K, L, I fussenden Ordinaten heissen $HB = b$, $KF = f$, $LG = g$, $IC = c$. Aus ihnen leiten sich stets auf die gleiche Weise die Ordinaten $HP = B$, $KR = F$, $LS = G$, $IQ = C$ ab. Dem VII. Satze gemäss muss, wie der ganze Flächenraum ATV, auch der sehr kleine Flächenraum $PHIQ$ der Eigenschaft eines Maximums oder Minimums theilhaftig sein, analytisch ausgedrückt, sein Differential muss verschwinden. Aber

$$PHIQ = lB + lF + lG.$$

Sind also l, B, C constant, F, G veränderlich, so ist

$$dPHIQ = ldF + ldG,$$

und dieses verschwindet, wenn $dF + dG = 0$. Nimmt man nun an, es sei $dF = \frac{hdf}{a}$, $dG = \frac{idg}{a}$, wodurch die Bedingung in $hdf + idg = 0$ oder in $df : -dg = i : h$ übergeht, so ist vermöge des VI. Satzes $i = h + dh$, mithin $df : -dg = (h + dh) : h$. Ausserdem ist wegen der gedachten Verschiebung der Punkte F und G auf ihren Ordinaten der im IV. Satz vorgeschriebene Fall vorhanden, also

$$df : -dg = (dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2) : (dz^2d^2x + 2dxd^2x^2)$$

[1]) *contigua et proxima.*

und sonach

$$\frac{h + dh}{h} = \frac{dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2}{dz^2d^2x + 2dxd^2x^2},$$

beziehungsweise

$$\frac{dh}{h} = \frac{dz^2d^3x - 3dxd^2x^2}{dz^2d^2x + 2dxd^2x^2},$$

also auch

$$hdz^2d^3x - 3hdxd^2x^2 = dhdz^2d^2x + 2dhdxd^2x^2.$$

In dieser Gleichung sind die beiden Glieder links vom Gleichheitszeichen sowie das erste Glied rechts von 5., das zweite Glied rechts von 6. Ordnung der Kleinheit. Letzteres fällt daher fort, und die Aufgabe ist auf die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$hdz^2d^3x - 3hdxd^2x^2 = dhdz^2d^2x$$

zurückgeführt, deren Integration noch zu vollziehen ist. Zu diesem Zwecke nimmt Jakob Bernoulli zunächst noch eine Umformung vor. Er wendet die bei Ableitung des Satzes IV (S. 451) begründete Gleichung $dxd^2x = dzd^2z$ an, welche das zweite Glied links in $-3hdzd^2xd^2z$ überführt, dividirt dann durch dz, bringt alle Glieder nach links und erhält

$$hdzd^3x - 3hd^2xd^2z - dhdzd^2x = 0.$$

Die Form der einzelnen Glieder mag für Jakob Bernoulli Veranlassung gewesen sein, das Integral versuchsweise in der Gestalt $h^m dz^n d^2x^r =$ const. anzusetzen, indem er sich die nachträgliche Bestimmung von m, n, r vorbehält. Die Differentiation der Versuchsgleichung ergibt ihm

$$rh^m dz^n d^2x^{r-1} d^3x + nh^m dz^{n-1} d^2z d^2x^r + mh^{m-1} dh dz^n d^2x^r = 0.$$

Er dividirt durch $h^{m-1} dz^{n-1} d^2x^{r-1}$ und erhält dadurch

$$rhdzd^3x + nhd^2xd^2z + mdhdzd^2x = 0,$$

also eine Gleichung, welche mit der vorgelegten identisch wird, wenn $r = 1$, $n = -3$, $m = -1$ ist. D. h. die erste Integration liefert $\frac{d^2x}{hdz^3} =$ const. Als Constante wählt Jakob Bernoulli $\pm \frac{1}{a^2dy}$. Dazu ist die Berechtigung vorhanden, denn dy ist eine constante Länge (früher l genannt), a^2 eine willkürliche Constante, und das Doppelzeichen $\pm$ liefert die erforderliche Allgemeinheit des Vorzeichens. Eine erste Integration hat mithin die Differentialgleichung zweiter Ordnung hervorgebracht:

$$\frac{d^2x}{hdz^3} = \pm \frac{1}{a^2dy}.$$

Eine zweite Integration unternimmt Jakob Bernoulli durch einen abermaligen Versuch, zu welchem er $adx = tdy$ wählt. Da, wie schon bemerkt, dy constant ist, so folgt durch Differentiation

$$d^2x = \frac{dt \cdot dy}{a}.$$

Daneben ist $a^2dx^2 = t^2dy^2$, $a^2dx^2 + a^2dy^2 = (a^2 + t^2)dy^2$ und zugleich $dx^2 + dy^2 = dz^2$, also $a^2dz^2 = (a^2 + t^2)dy^2$, $dz = \frac{dy}{a}\sqrt{a^2 + t^2}$. Die Werthe von d^2x und dz werden nun in die zu integrirende Differentialgleichung $\frac{d^2x}{hdz^3} = \pm \frac{1}{a^2dy}$ eingeführt und liefern nach leichter Umformung $\frac{a^2dt}{(a^2+t^2)\sqrt{a^2+t^2}} = \pm \frac{hdy}{a^2} = \pm \frac{hdx}{at}$, indem man von der Annahme $adx = tdy$ erneuten Gebrauch macht. Das gibt

$$\pm \frac{a^2tdt}{(a^2+t^2)\sqrt{a^2+t^2}} = \frac{hdx}{a}.$$

Nun war aber $dx = df$ und $\frac{hdf}{a} = dF$. Andererseits ist

$$\pm \frac{a^2tdt}{(a^2+t^2)\sqrt{a^2+t^2}} = d\left(\mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\right),$$

und die Integration der zur Bestimmung von t führenden Differentialgleichung erster Ordnung liefert $F = \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$. Statt F, worunter die Ordinate KR verstanden war, kann auch die benachbarte Ordinate HP oder das ihr gleiche Stück MN gesetzt werden, für welches von nun an der Buchstabe p zur Bezeichnung dient. Mithin ist nach Jakob Bernoulli entweder $p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$ oder $p = a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$, indem er, allerdings ohne dass eine bestimmte Veranlassung dazu vorläge, die Integrationsconstante in dem einen Falle $= 0$, in dem anderen $= a$ wählt. Die den beiden Annahmen entsprechenden Werthe von t sind $t = \frac{a\sqrt{a^2-p^2}}{p}$ und $t = \frac{a\sqrt{2ap-p^2}}{a-p}$. Nun war aber $adx = tdy$ als Differentialgleichung der Curve angenommen, welche die Fläche $ATV = \int pdy$ als ein Maximum oder als ein Minimum erscheinen lässt. Setzt man die beiden vorher gefundenen Werthe von t ein, so gewinnt man die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$dy = \frac{pdx}{\sqrt{a^2-p^2}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{(a-p)dx}{\sqrt{2ap-p^2}},$$

von welchen die erste dem Falle des Maximums, die zweite dem des Minimums entsprechen muss, wie noch auseinander gesetzt wird.

Die zweite Aufgabe, welcher Jakob Bernoulli sich alsdann zuwendet, unterscheidet sich in ihren Bedingungen dadurch von der

ersten Aufgabe, dass die Ordinaten HP, KR, LS nicht aus den Ordinaten HB, KF, LG, sondern aus den Bogenstücken AB, AF, AG in gleicher Weise entstehen. Die Auflösung verfolgt einen ganz ähnlichen Gang, wie die soeben ausführlich geschilderte Auflösung der ersten Aufgabe. Sie stützt sich auf die Sätze VII, VI, II, I und führt zu einer Differentialgleichung dritter Ordnung. Aber diesmal begnügt sich Jakob Bernoulli damit, das Ergebniss zweimaliger Integration in Gestalt einer Differentialgleichung erster Ordnung sofort hinzuzuschreiben. Er ersetzt die Herleitung durch nachmaligen Beweis der Richtigkeit, welchen er mittels wiederholter Differentiation liefert.

Als dritte Aufgabe, die ebenfalls wieder auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung führt, ist endlich die allgemeinste Kettenlinie behandelt, d. h. die Curve, welche eine an beiden Enden aufgehängte biegsame Linie unter der Voraussetzung bildet, dass die einzelnen Theile mit beliebigen Gewichten belastet sind.

So der grundlegende Aufsatz im Maihefte 1701 der A. E., dem wie wir schon erzählt haben (S. 447), Jakob Bernoulli im Junihefte 1700 einzelne Beispiele vorausgeschickt hatte. Durch letztere aufgerüttelt gab Johann Bernoulli seine lateinisch geschriebene Behandlung des isoperimetrischen Problems am 1. Februar 1701 in versiegeltem Umschlage an Varignon zur Einreichung bei der Académie des Sciences, beziehungsweise zur Eröffnung, nachdem die Abhandlung der Bruders mit dessen theoretischer Auseinandersetzung werde veröffentlicht worden sein. Nun trug sich ein Zwischenfall zu[1]), über welchen wir durch einen Brief Varignons an Johann Bernoulli vom 27. Februar 1701, welcher sich in den Sammlungen der Stockholmer Academie befindet, unterrichtet sind. Jakob Bernoulli richtete nämlich an Varignon ein überaus grobes Schreiben über seine Parteilichkeit für Johann und verlangte bei der Eröffnung des von diesem niedergelegten Packetes anwesend zu sein. Darauf sagte Varignon nach Rücksprache mit De l'Hospital Jakob zu, Johanns Abhandlung werde zurückgezogen werden und bat demgemäss Johann die entsprechende Anordnung treffen zu wollen. Johann muss das wohl gethan haben, denn am 23. März 1701 schickte Fontenelle, der Secretär der Pariser Academie der Wissenschaften, das Packet an Johann Bernoulli zurück, der es uneröffnet aufbewahrte, und der es nach dem am 16. August 1705 erfolgten Tode des Jakob Bernoulli neuerdings nach Paris schickte. Es trug damals das erste noch un-

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 424 in der Fussnote heisst es nur: *Comme il y eut des difficultés sur cette publication.* — Das Genauere bei Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1896, S. 23.

verletzte Siegel der Pariser Academie, welches erst in der Sitzung vom 17. April 1706 in öffentlicher Sitzung erbrochen wurde. Dann wurde der Inhalt ins Französische übersetzt und in den Abhandlungen der Académie des Sciences für 1706 gedruckt[1]). Johann Bernoulli bedient sich des schon 1697 durch Jakob Bernoulli kundgegebenen Principes (S. 235), welches als VII. Einleitungssatz in die Abhandlung von 1701 übergegangen war, ohne freilich den Urheber desselben zu nennen. Er nennt $FO\varphi$ ein Bogenelement der gesuchten Curve, welche zur Entstehung der einen Maximal- oder Minimalraum begrenzenden zweiten Curve Anlass gibt, $F\omega\varphi$ ein Bogenelement der zwischen den Punkten F und φ isoperimetrisch verlaufenden Curve, so liegt, da wegen der Isoperimetrie $FO + O\varphi = F\omega + \omega\varphi$ sein muss, und da wegen der Kleinheit der Abmessungen FO, $O\varphi$, $F\omega$, $\omega\varphi$ sämmtlich als gradlinig betrachtet werden können, in der erwähnten Gleichung die Aufforderung, O und ω als Punkte einer Ellipse zu betrachten, während $FO + O\varphi$ die Länge der grossen Axe angibt. So geistreich dieser Grundgedanke ist, leidet er an dem wesentlichen Mangel, dass nur zwei consecutive Bogenelemente statt deren drei in Erwägung gezogen werden, und daher stammen die Unrichtigkeiten, zu welchen Johann Bernoulli gelangte. Nur in der ersten Aufgabe, deren Auflösung er kannte, fand er das Ergebniss, zu welchem er gelangen wollte, und er liess sich dadurch über die Zuverlässigkeit des eingeschlagenen Weges täuschen.

Zwei formal wichtige Dinge möchten wir aus dem das eigentliche Ziel verfehlenden Aufsatze hervorheben. Wir erinnern uns (S. 215), dass Leibniz und Jakob Bernoulli 1694 in Aufsätzen, dann Leibniz und Johann Bernoulli 1698 in Briefen von Functionen sprachen. Wir erinnern uns ferner (S. 242), dass Jakob Bernoulli sich 1698 des Wortes Functionslinie bedient hatte, ein Ausdruck, von welchem er 1701 in der Abhandlung, über welche oben ausführlich berichtet wurde, keinerlei Gebrauch machte, wiewohl er dort sehr passende Verwendung hätte finden können. In den Abhandlungen der Académie des Sciences von 1706 trat jetzt Johann Bernoulli mit dem Worte Function neuerdings an die Oeffentlichkeit. Gleich im Wortlaute der ersten Aufgabe sprach er[2]) von den *fonctions quelconques de ces appliquées*, während Jakob Bernoulli (S. 451, Anm. 1) denselben Sinn durch die Wortverbindung *aliae duae per has similiter expressae* ausgedrückt hatte. Eine Definition des Wortes gab Johann Bernoulli freilich erst in den Abhandlungen der Aca-

[1]) Joh. Bernoulli, *Opera* I, 424—435. [2]) Ebenda I, 424 und wiederholt im ganzen Aufsatze.

démie des Sciences von 1718. Dort heisst es[1]), er verstehe unter Function einer veränderlichen Grösse einen Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Grösse und Constanten zusammengesetzt sei. Erst von da an war der neue Kunstausdruck der Wissenschaft erworben, und noch 12 Jahre später, in den Abhandlungen der Académie des Sciences für 1730, unterschied wieder Johann Bernoulli zwischen algebraischen und transcendenten Functionen[2]), wenn er auch mit letzterem Namen nicht den weiten Sinn verband, der ihm nachmals beigelegt wurde, sondern ihn nur auf Integrale algebraischer Functionen bezog.

Noch eine zweite Bemerkung haben wir an die 1706 gedruckte Abhandlung zu knüpfen. In ihr erscheint[3]) das Zeichen $\triangle$, welches aber keineswegs wie in späterer Zeit einen endlichen Unterschied, sondern einen Differentialquotienten bedeutet.

Die Abhandlungen der beiden Brüder waren nunmehr der Oeffentlichkeit übergeben. Jakob Bernoulli war todt und konnte nichts mehr sagen. Johann Bernoulli hatte die Drucklegung seiner Abhandlung sich verzögern lassen; er wünschte jedenfalls nicht, ihr eine Selbstberichtigung auf dem Fusse nachzuschicken, mochte das Studium der brüderlichen Auflösung ihn auch misstrauisch gemacht oder gar überzeugt haben. Da kam 1715 die Methodus Incrementorum von Brook Taylor und in ihr, wie (S. 384) im Vorübergehen bemerkt worden ist, eine Behandlung der isoperimetrischen Aufgabe[4]). In Hilfssätzen, welche der eigentlichen Auflösung vorangehen[5]), ist das Princip des Statthabens in kleinsten Curventheilchen, was von der ganzen Curve verlangt wurde, und die Berücksichtigung von vier gleich weit von einander abstehenden Punkten der Abscissenaxe und den zugehörigen Ordinaten beim Uebergang zu unendlich kleinen Abmessungen erörtert. Sodann ist die Aufgabe auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung zurückgeführt. Keiner der beiden Brüder Bernoulli ist mit Namen erwähnt, aber man kann wohl sagen, Taylor wiederhole die Auflösung Jakobs in zusammengezogener, wenn auch kaum weniger durchsichtiger Form und widerlege dadurch Johann. Das war eines von den Dingen, durch welche Taylor den Aerger von Johann Bernoulli erregte, und welche, wie wir wissen (S. 384), einen

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* II, 241: *On appelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.* [2]) Ebenda III, 174. [3]) Ebenda I, 426: *en prenant Δ pour le signe ou la caractéristique des différences des fonctions.* Vergl. Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1896 S. 21. [4]) *Methodus Incrementorum* Propositio XVII, Problema XII, pag. 68—70. [5]) Ebenda Lemma III und Lemma IV pag. 67—68.

leidenschaftlich geführten Streit zwischen beiden entfachte. Bezüglich der Bernoullischen Reihe war ja, wie wir damals hervorhoben, der, nach welchem sie nachmals benannt wurde, im Recht, nicht so bezüglich der isoperimetrischen Aufgabe, und das wurmte den überaus empfindlichen Gelehrten auf's Schmerzlichste.

Jetzt gab er in den Abhandlungen der Académie des Sciences von 1718 eine neue Arbeit über den Gegenstand in die Oeffentlichkeit[1]), dieselbe Arbeit, aus welcher wir oben die Definition des Wortes Function erwähnt haben, dieselbe Arbeit, von welcher schon (S. 241) ankündigend die Rede war. Johann Bernoulli erklärte hier, er habe, durch einen Freund darauf aufmerksam gemacht, dass seine erst nach des Bruders Ableben erfolgte Veröffentlichung seiner eigenen Auflösung der isoperimetrischen Aufgabe missdeutet werden könne, als habe er sie nur aus Angst vor sachgemässer Beurtheilung zurückgehalten, diese Auflösung noch einmal gründlich geprüft. Bei genauer Ueberlegung habe er einen Fehler darin entdeckt. Diesen einzugestehen sei Ehrensache für ihn und somit übergebe er jetzt die verbesserte Methode der Oeffentlichkeit. Man werde seine Darstellung kürzer und klarer als die Jakob Bernoullis von 1701 finden, sicherlich auch klarer als die Taylors, der im Bestreben zu kürzen und deutlich zu sein, so viel Dunkelheit über den Gegenstand verbreitet habe, dass man glauben sollte, diese mache ihm Vergnügen.

Hier schliesst sich sehr naturgemäss der Bericht über einen anderen von Taylor behandelten Gegenstand an, dessen wir (S. 381) vorgreifend mit kurzer Ankündigung gedachten. In einem Lemma[2]) macht Taylor die Bemerkung, der Differentialgleichung, die in heutiger Schreibweise $4x^3 - 4x^2 = (1+z^2)^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2$ heisst, entspreche das Integral $x = \frac{1+z^2}{(az+\sqrt{1-a^2})^2}$. Eine Begründung dieser Behauptung gibt er an der betreffenden Stelle nicht.

Heute würde man die Integration etwa folgendermassen vollziehen. Man würde zunächst $\frac{\pm dx}{2x\sqrt{x-1}} = \frac{dz}{1+z^2}$ folgern und daraus

$$\operatorname{arctg}(\pm\sqrt{x-1}) = \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} C.$$

Geht man dann unter Benutzung der Formel

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zur Tangente über, so ent-

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* II, 235—269. [2]) *Methodus Incrementorum* pag. 17 Lemma I.

steht $\pm\sqrt{x-1} = \frac{C+z}{1-Cz}$ und durch Quadrirung

$$x = 1 + \left(\frac{C+z}{1-Cz}\right)^2 = \frac{(1+C^2)(1+z^2)}{(1-Cz)^2}.$$

Gibt man aber der Constanten die neue Gestalt $C = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$, so geht die Gleichung in die von Taylor angegebene über.

Taylor selbst integrirt an einer späteren Stelle[1]) mittels eines Kunstgriffes, der einigermassen an den erinnert, dessen sich Johann Bernoulli 1697 bei der Bernoullischen Differentialgleichung (S. 232), dessen sich auch Jakob Bernoulli 1701 (S. 453) bediente. Er setzt nämlich $x = v^\vartheta \cdot y^\lambda$ und hält die beiden Constanten ϑ und λ, sowie die Veränderliche v zu freier Verfügung. Benutzen wir zur Abkürzung bestrichelte Buchstaben, um die Differentiirung nach z anzudeuten, so ergibt sich

$$\frac{dx}{dz} = x' = \vartheta v^{\vartheta-1}y^\lambda v' + \lambda v^\vartheta y^{\lambda-1}y' = v^{\vartheta-1}y^{\lambda-1}(\vartheta y v' + \lambda v y')$$

und in Folge davon auch $x'^2 = v^{2\vartheta-2}y^{2\lambda-2}(\vartheta y v' + \lambda v y')^2$. Setzt man diesen Werth ebenso wie $4x^3 = 4v^{3\vartheta}y^{3\lambda}$ und $4x^2 = 4v^{2\vartheta}y^{2\lambda}$ in die ursprüngliche Differentialgleichung $4x^3 - 4x^2 = (1+z^2)^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2$ ein, so entsteht

$$4v^{3\vartheta}y^{3\lambda} - 4v^{2\vartheta}y^{2\lambda} = (1+z^2)^2 v^{2\vartheta-2}y^{2\lambda-2}(\vartheta y v' + \lambda v y')^2.$$

Division durch $v^{2\vartheta-2}v^{2\lambda-2}$ bringt dann

$$(1+z^2)^2(\vartheta y v' + \lambda v y')^2 = 4v^{\vartheta+2}y^{\lambda+2} - 4v^2y^2$$

hervor. Taylor macht nunmehr drei Annahmen. Er setzt erstens $v = 1+z^2$. Diese Annahme gestattet ihm rechts vom Gleichheitszeichen durch v^2, links durch $(1+z^2)^2$ zu dividiren und ausserdem das links auftretende v' durch $2z$ zu ersetzen. Er gelangt also zu $(2\vartheta yz + \lambda v y')^2 = 4v^\vartheta y^{\lambda+2} - 4y^2$. Die zweite Annahme ist $\lambda = -2$. Diese verwandelt die Gleichung weiter in $v^\vartheta - y^2 = (\vartheta yz - vy')^2$ oder in $v^\vartheta = y^2 + \vartheta^2 z^2 y^2 - 2\vartheta yzvy' + v^2y'^2$. Endlich drittens wird $\vartheta = 1$ gesetzt. Die ursprüngliche Substitution $x = v^\vartheta y^\lambda$ heisst also eigentlich $x = \frac{1+z^2}{y^2}$ und ihr Ergebniss ist

$$v = (1+z^2)y^2 - 2yzvy' + v^2y'^2 = vy^2 - 2yzvy' + v^2y'^2.$$

Hier wird wieder durch v dividirt, so dass endlich

$$1 = y^2 - 2yzy' + vy'^2$$

entsteht, mit der einmaligen Abkürzung $v = 1+z^2$. Die ganze Rechnung hat mithin keine Integration der vorgelegten Differential-

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 26—27.

gleichung, sondern nur eine Umformung derselben bewirkt. Jetzt kommt Taylor, man begreift nicht wieso, auf den Gedanken, die umgeformte Differentialgleichung neuerdings nach z zu differentiiren, wobei er wiederholt, wie schon oben, $v' = 2z$ setzt. Er erhält

$$2y''(vy' - zy) = 0$$

und diese Gleichung erfüllt sich unter zwei Voraussetzungen. Die erste ist $vy' - zy = 0$, $y' = \frac{zy}{v}$. Einsetzung dieses Werthes in

$$1 = y^2 - 2yzy' + vy'^2$$

bringt

$$1 = y^2 - \frac{2y^2z^2}{v} + v \cdot \frac{y^2z^2}{v^2} \quad \text{oder} \quad v = vy^2 - z^2y^2 = (v - z^2)y^2 = y^2,$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{v} \quad \text{und} \quad x = \frac{v}{y^2} = 1,$$

eine singuläre Lösung, wie Taylor sich ausdrückt[1]). Die zweite Voraussetzung ist $y'' = 0$, $y' = a$. Die Einsetzung dieses Werthes in die vorgelegte Differentialgleichung bringt $1 = y^2 - 2yza + va^2$ hervor, oder, da $v = 1 + z^2$, auch

$$1 - a^2 = y^2 - 2azy + a^2z^2 = (y - az)^2.$$

Mithin ist

$$y = az + \sqrt{1 - a^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{v}{y^2} = \frac{1 + z^2}{y^2} = \frac{1 + z^2}{(az + \sqrt{1 - a^2})^2}$$

in Uebereinstimmung mit dem früher Behaupteten. Bei Taylor heisst es allerdings an beiden Stellen, wo das Integral genannt ist,

$$x = \frac{1 + z^2}{(a + \sqrt{1 - a^2} \cdot z)^2},$$

eine Form, welche aus der durch uns angegebenen hervorgeht, wenn man a durch $\sqrt{1 - a^2}$ ersetzt. Wichtiger als dieses erste von Taylor angegebene Integral ist das andere $x = 1$. Wenn auch Taylor sich über die ganze Tragweite dieser seiner Bemerkung kaum klar gewesen sein wird, da er sie sonst stärker betont hätte, so hat er doch das unzweifelhafte Verdienst sich erworben, die singulären Lösungen und deren Ermittelung durch abermalige Differentiation einer Differentialgleichung entdeckt zu haben.

Wir schalten hier Weniges über einen italienischen Mathematiker ein. Gabriello Manfredi[2]) (1681—1761) war seit 1720 Professor der Mathematik an der Universität Bologna. Er veröffentlichte schon

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 27: *quae est singularis quaedam solutio Problematis.* [2]) Montucla III, 135 und 155. — Poggendorff II, 32. — Loria in Hist. Festschr. 1899, S. 249—252.

vorher 1714 im XVIII. Bande des Giornale de'Letterati d'Italia einen Aufsatz: *Breve schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte dell'equazioni differenziali del primo grado*, welcher die Substitution $y = tx$ lehrt, mittels deren homogene Differentialgleichungen erster Ordnung zur Integration gebracht werden. Manfredi hat dann weiter im Jahre 1722 im zweiten Supplementbande der genannten Zeitschrift die Integration $\int \frac{x^{\frac{r}{p}}}{\left(x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}\right)^u} dx$ gelehrt, so oft p, q, r, t, u ganze Zahlen sind. Der eingeschlagene Weg besteht in der Rationalisirung des Integranden mittels der Substitution $x = y^{pq}$ und der Zerlegung des Ausdruckes $y^m \pm a^m$ in reelle Factoren ersten und zweiten Grades.

Das nächste Problem, mit dessen Geschichte wir uns zu beschäftigen haben, ist das der Trajectorien. Die Aufgabe stand (S. 231) seit 1697 auf der Tagesordnung der Veröffentlichungen Johann Bernoullis. Im darauf folgenden Jahre gab er ihr zwar erst in den A. E. ihren Namen, aber 1697 hat er schon ausgesprochen, was er 1698 wiederholte, diese Aufgabe finde eine wichtige Anwendung bei der Bestimmung der Bahn des Lichtes in einem ungleich dichten Mittel, wenn man mit Huygens voraussetze, der Lichtstrahl sei nichts anderes als eine Linie, welche Wellen rechtwinklig durchschneide[1]). Wir rufen weiter ins Gedächtniss zurück (S. 242), dass Jakob Bernoulli 1698 die Aufgabe der rechtwinkligen Trajectorie für logarithmische Curven löste[2]), aber er liess sich daran genügen, eine Construction der gesuchten Curve kennen zu lehren, ohne die Aufgabe auf eine Differentialgleichung zurückzuführen. Das that Johann Bernoulli in dem erwähnten Aufsatze von 1698. Er berief sich dabei auf Briefe an und von Leibniz. Letzterer habe die Auffindung der Trajectorie eine Eliminationsaufgabe zwischen zwei Gleichungen genannt. Die eine Gleichung sei die der geschnittenen Curvenschaar und enthalte eine Grösse b, welche in jeder einzelnen Curve constant, von einer Curve der Schaar zur anderen veränderlich sei. Die andere Gleichung gebe $\frac{dy}{dx}$ für die Trajectorie mittels der Bedingung, dass diese auf irgend einer der geschnittenen Curve senkrecht stehe. Eliminire man b zwischen beiden Gleichungen, so erhalte man die Differentialgleichung erster Ordnung der Trajectorie. Aus $y^2 = 2bx$ z. B. finde er, dass $b = -y\frac{dx}{dy}$ der Bedingung der Per-

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 193 und 267. [2]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 806—813.

pendicularität entspreche, und dieser Werth von b in die Parabelgleichung eingesetzt gebe $y^2 = -2xy\frac{dx}{dy}$ als Differentialgleichung der Trajectorie. Deren Integral sei $a^2 - x^2 = \frac{1}{2}y^2$, folglich genügen unendlich viele Ellipsen der Aufgabe[1]). Johann Bernoulli erweiterte dann im weiteren Verlaufe seines Aufsatzes[2]) die Aufgabe dahin, dass er verlangte die Trajectorie zu finden, welche irgend eine Curve, die in ihrer Ebene um einen gegebenen Punkt in Drehung versetzt sei, stets unter irgend einem gegebenen Winkel schneide. Von da an trat die Aufgabe bis 1715 in den Hintergrund.

Wir erinnern uns (S. 321) des Briefes, welchen Leibniz damals im Eifer des Prioritätsstreites an Conti richtete. In der Nachschrift[3]) bat Leibniz jenen eigenthümlichen Vermittler, er möge den englischen Analysten, um ihnen einmal an den Puls zu fühlen, die Aufgabe vorlegen, eine Curve zu finden, welche eine bestimmte Schaar anderer Curven, z. B. alle Hyperbeln von gleichem Mittelpunkte und gleichem Scheitel, rechtwinklig schneide, und zwar solle dabei ein allgemein genügender Weg eingeschlagen werden.

Die englischen Analysten überhaupt waren von Leibniz genannt, aber Newton war unzweifelhaft gemeint, und diesem stellte Conti die ganze Nachschrift mit der in ihr enthaltenen Aufgabe zu. Man erzählte sich in England, und Fontenelle hat die Erzählung 1727 in seine Lobrede auf den Verstorbenen aufgenommen[4]), dass Newton die Aufgabe um 4 Uhr erhielt, als er ermüdet aus der Münze nach Hause kam, und dass er sie noch vor Schlafengehen gelöst habe. Jedenfalls ist Newtons Auflösung ohne Verfassernamen bereits in den P. T. von 1716 gedruckt[5]).

Auf Leibnizens briefliche Aufforderung geht Newton dabei mit keiner Silbe ein. Es ist, als wenn sie für ihn nicht vorhanden wäre. Dagegen spricht er in der Einleitung des kurzen Aufsatzes von Johann Bernoullis Veröffentlichung in den A. E. vom October 1698, von welcher Kenntniss genommen zu haben er damit eingesteht. Er kannte also auch das, was dort aus einem Leibnizischen Briefe abgedruckt war. Diesen Umstand im Auge behaltend übersetzen wir, was Newton als seine Auflösung der Aufgabe veröffentlichte, ein allgemeines Verfahren anzugeben, nach welchem eine Reihe von Curven gefunden werden könne, welche eine andere Reihe von Curven in einem entweder constanten und gegebenen oder nach

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 268. [2]) Ebenda I, 272. [3]) *Recueil Des Maizeaux* II, 11. [4]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1727 (Histoire pag. 168). [5]) Sie ist auch abgedruckt in *Opuscula Newtoni* I, 293—294.

einem gegebenen Gesetze veränderlichen Winkel schneide. Wir erlauben uns bei der Uebersetzung die einzige Veränderung, dass wir die zu schneidenden Curven kurzweg als Curven, die durch sie hindurchgehenden als Trajectorien benennen. Wir glauben dadurch an Kürze und Deutlichkeit zu gewinnen.

Die Natur der Curven, sagt also Newton, gibt ihre Tangenten in den Schnittpunkten. Die Winkel beim Durchschnitte geben die Normalen zu den Trajectorien. Das Zusammentreffen zweier nächsten Normalen gibt den Krümmungsmittelpunkt der Trajectorie in jedem Schnittpunkte. Man ziehe nun eine passend gewählte Abscissenaxe und wähle ihre Fluxion als Einheit. Die Lage der Normalen an die Curve gibt die erste Fluxion der Ordinate der Trajectorie. Deren Krümmungshalbmesser gibt die zweite Fluxion derselben Ordinate, und so wird die Aufgabe immer auf eine Gleichung zurückgeführt.

Wenn zwischen dieser Schilderung des einzuschlagenden Verfahrens und dem, was Johann Bernoulli aus Leibnizens Brief abdrucken liess, verglichen wird, so finden wir zwischen beiden Verfassern erstens den Unterschied, dass Newton, ohne ein bestimmtes Beispiel zu erörtern, sich in allgemeinen Redensarten ergeht, während Leibniz wenigstens das eine Beispiel der Ellipsen angab, welche alle Parabeln deren Scheitel im gemeinsamen Mittelpunkte der Ellipsen liegen, und deren Axe mit der grossen Axe der Ellipsen zusammenfällt, senkrecht schneiden, beigefügt hat. Ein zweiter Unterschied besteht darin, dass Leibniz die für den Fall, dass die Gleichung der zu schneidenden Curven in endlicher Form gegeben ist, unzweifelhaft richtige Behauptung aussprach, die Aufgabe der Trajectorie führe zu einer Differentialgleichung erster Ordnung, während Newton an eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gedacht zu haben scheint, wenn nicht der Krümmungsmittelpunkt und die zweite Fluxion ausschliesslich zu dem Zwecke erwähnt wurden, um nicht gar zu wörtlich mit Leibniz zusammenzutreffen.

Die Meinung, Newton habe an eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gedacht, ist indessen nicht ganz von der Hand zu weisen. Fatio de Duillier hat (S. 291) auf Krümmungshalbmesser, d. h. auf zweite Fluxionen, zurückgeführt, was mit ersten Fluxionen zu bewältigen war. Fatio war vielleicht, wie wir im 94. Kapitel sahen, damals nicht unbeeinflusst durch Newton. Sollte Newton überhaupt die Neigung besessen und in ihm nahe stehenden Gelehrten die gleiche Neigung angeregt haben, zum Krümmungshalbmesser seine Zuflucht zu nehmen, auch wo die Aufgabe nicht von selbst darauf hinwies? Sollte Taylor unter diesem Einflusse gestanden haben, als er (S. 460) die Differentiation einer Differentialgleichung versuchte und fast zufällig die singulären Lösungen entdeckte? Wir halten diese Fragen für gestattet, wenn auch deren Beantwortung nicht in unserer Absicht liegt, und wenn wir auch eine andere Erklärung für Newtons Ausdrucksweise noch vermuthen, auf die wir später zurückkommen.

Newton hat noch einen kleinen Zusatz bei seiner Veröffentlichung, dem zu Liebe wir abermals zu dem Aufsatze von Johann Bernoulli von 1698 zurückkehren müssen. Nachdem dieser die schon von uns berücksichtigte allgemeine Auffassung Leibnizens nebst dessen Beispiel von den durch Ellipsen geschnittenen Parabeln mitgetheilt hat, fügt er hinzu, er selbst habe die Aufgabe erweitert und sei zu deren allgemeinen Differentialgleichung gelangt. Ob in dieser die Veränderlichen sich trennen lassen oder nicht, sei eine andere Aufgabe und nicht in dem Rahmen dieser, sondern einer anderen Untersuchung zu besprechen[1]). Fast in wörtlicher Uebereinstimmung damit sagt Newton in einem den Schluss bildenden Scholium: „Die Umformung der Gleichungen und die Trennung der Veränderlichen womöglich in geschlossener Gestalt[2]), wo nicht durch unendliche Reihen, bildet eine andere Untersuchung. Die hier behandelte Aufgabe blieb, da sie kaum irgend welchen Nutzen besitzt, mehrere Jahre unbeachtet und ungelöst in den A. E. Aus dem gleichen Grunde verfolge ich ihre Auflösung nicht weiter."

Hier ist die letzte Gelegenheit, bei welcher wir die Namen der beiden grossen Nebenbuhler Leibniz und Newton gemeinschaftlich in Beziehung auf eine und dieselbe wissenschaftliche Leistung in nennen haben, und hier werden wir deshalb vielleicht am zweckmässigsten unser Urtheil über beide einschalten. Wir beabsichtigen selbstverständlich keine Abschätzung von massgebender Giltigkeit. Wir erheben nicht den Anspruch, unsere Leser zu dem genau gleichen Urtheil bestimmen zu wollen, welches wir fällen, wir wollen nur nicht den Anschein haben, ein vergleichendes Urtheil vermieden zu haben. Vielleicht wäre zwar ein solches Vermeiden das Klügste. Newton und Leibniz sind so hoch über den gewöhnlichen Menschenschlag sich erhebende Geister gewesen, dass man sich die Freude darüber, dass sie beide lebten, nicht durch ängstliches Gegeneinanderhalten dessen, was jeder von ihnen leistete, verkümmern sollte. Beide haben so viel in die Wagschalen menschlicher Fortschritte eingeworfen, dass es kaum darauf ankommt, welche Seite die schwerer belastete erscheint. Und dann wieder sind ihre Leistungen so ungemein verschiedenartig gewesen, dass auch daran das Urtheil zu scheitern droht.

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 269: *non enim hujus, sed alius est methodi indeterminatas separare.* [2]) *absolute.*

Wer wagt es zu entscheiden, ob Michel Angelo oder Beethoven der titanischere Künstler gewesen ist? Weit getrennt, wenn auch nicht ganz so weit wie bildende Kunst und Musik, liegen die Gebiete, auf welchen Leibniz und Newton ihre Lorbeeren pflückten. Wir haben hier nicht von dem Physiker, dem Astronomen Newton zu reden, nicht von dem Philosophen, dem Geschichtsforscher, dem Diplomaten, dem alles menschliche Wissen gierig und nie erfolgslos in sich aufnehmenden Leibniz, wiewohl auch die Grösse der bearbeiteten Felder neben der Tiefe, bis zu welcher eingedrungen wurde, in Betracht gezogen werden darf, wir reden nur von den mathematischen Leistungen des Einen wie des Anderen, und wir müssen suchen, uns dabei von einem Einflusse frei zu halten, der geschichtlich für die Höherschätzung Newtons unzweifelhaft gewirkt hat, von dem Einflusse der Zeitfolge. Newtons bahnbrechende Arbeiten erschienen später als die Leibnizens. Sie wirkten begeisternd, als man jenen gegenüber schon zu vergessen anfing, dass es eine Zeit gab, wo man ohne sie sich behelfen musste, und auch unsere Leser haben sich vielleicht diesem Eindrucke nicht zu entziehen vermocht. Ferner war Newton mathematisch vielseitiger als Leibniz. In der Reihenlehre steht er kaum von diesem erreicht, in der Lehre von den Gleichungen und der Geometrie überhaupt unerreicht über allen seinen Zeitgenossen. Leibnizens Grösse ist die analytische Form, beginnend mit der Combinatorik, gipfelnd in der Erfindung des Differential- und Integralzeichens, ohne welche keine Differential- und Integralrechnung entstanden wären. Newton hat diese Bedeutung der Form nie verstanden. Man möchte sich dafür grade auf seine Versuche, das inverse Tangentenproblem zu lösen, berufen. Integration durch Reihen war für Newton der Stein der Weisen, das allgemeine Lösungsmittel, während Leibniz als höchstes Ziel die Integration in geschlossener Form vor sich sah. Es ist ja wahr, dass unsere Zeit die Gewohnheit annahm, sich mehr auf Newtons Seite zu stellen, aber die heutigen und die damaligen Forschungswege sind so grundsätzlich verschieden, dass man es einem damals betretenen Pfade nicht als Verdienst anrechnen kann, dass er den heutigen Weg kreuzt. Die Integration in geschlossener Form musste geschichtlich vorausgehen, und Leibniz hat den Zugang dazu geebnet. Newton hat Schriften hinterlassen, an welche da und dort nach fünf Vierteljahrhunderten wieder angeknüpft werden konnte. Leibniz hat es möglich gemacht, dass überhaupt Mathematiker da waren, welche diese Anknüpfung versuchten.

Wir kehren zu den Trajectorien zurück. Leibniz hat (S. 462) jene Aufgabe für Newton nicht ganz ohne befreundeten Rath gestellt. Ende December 1714 schrieb Leibniz an Johann Bernoulli, er denke daran, mit etwas herauszurücken, wobei Newtons Quelle verstopft sein werde[1]). Bernoulli billigte dieses Vorhaben am 6. Februar 1715 und schlug vor[2]), etwa solche Curven zu wählen, bei welchen die *Differentiatio de curva in curvam* (S. 231) in Betracht komme; auch die Complanation krummer Oberflächen liefere Brauchbares, und hier ist die Stelle, auf welche (S. 419) hingewiesen wurde, um das Vorkommen der rechtwinkligen Raumcoordinaten bei Johann Bernoulli mit einem Beispiele zu belegen. In einem anderen Briefe vom 23. November 1715 schlug Bernoulli die Trajectorienaufgabe als geeignet vor[3]), und im December 1715 theilte Leibniz dem Freunde endlich mit, in welcher Form er die Trajectorienaufgabe an Conti schicke[4]). Kaum war der Brief in Johann Bernoullis Händen, so beantwortete er ihn am 15. Januar 1716 unter Einsendung einer Auflösung des besonderen Beispiels von den Hyperbeln[5]), welche von seinem damals 21jährigen Sohne Niclaus II. Bernoulli herrührte. Er machte zugleich auf die Nothwendigkeit aufmerksam, ein schwierigeres Einzelbeispiel auszuwählen als das der Hyperbeln, wozu er alsdann am 11. März Vorschläge machte[6]). Der Aufsatz von Niclaus II. Bernoulli erschien[7]) im Maihefte 1716 der A. E. und kommt auf Folgendes hinaus.

Sei (Figur 67) O der Mittelpunkt, A der Scheitel der Hyperbeln AC, AD, AG, welche durch die Trajectorie CDG senkrecht geschnitten werden, d. h. das Trajectorienelement CD steht senkrecht auf der Hyperbeltangente CF, und das unendlich kleine Dreieckchen CSD mit den Katheten $CS = -dy$, $SD = dx$ ist ähnlich dem Dreieck FEC mit den Katheten $FE = x$ und $EC = y$. Dabei wurde $CS = -dy$ gesetzt, weil die Ordinate der Trajectorie abnimmt, während ihre Abscisse wächst. Daher muss $\frac{FE}{y} = -\frac{dy}{dx}$ sein, $FE = -y\frac{dy}{dx}$.

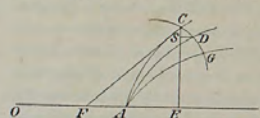

Fig. 67.

$$OF = OE - FE = x + y\frac{dy}{dx} = \frac{xdx + xydy}{dx}$$

und

$$OF \cdot OE = \frac{x^2dx + xydy}{dx}.$$

Bei der Hyperbel findet aber die Proportion statt $OF : OA = OA : OE$.

---

[1]) Leibniz III, 934: *Dabo etiam operam, ut quaedam edam, in quibus Newtono aquam haerere scio.* [2]) Ebenda III, 937—938. [3]) Ebenda III, 949. [4]) Ebenda III, 952. [5]) Ebenda III, 954. [6]) Ebenda III, 958. [7]) Er ist auch abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 270—272.

Demnach ist $OF \cdot OE = OA^2 = a^2$ und die Differentialgleichung der Trajectorie ist $\frac{x^2dx + xydy}{dx} = a^2$, beziehungsweise

$$ydy = \frac{a^2 - x^2}{x}dx = a^2\frac{dx}{x} - xdx.$$

Die Integration liefert

$$y^2 \pm b^2 = 2a^2 \log x - x^2 \quad \text{oder auch} \quad x^2 + y^2 \pm b^2 = \log (x^{2a^2})$$

und mit n als Grundzahl des Logarithmensystems $n^{x^2+y^2\pm b^2} = x^{2a^2}$.

Nach dem jungen Niclaus II. Bernoulli trat Jakob Hermann im August 1717 in den A. E. mit einem Aufsatze über rechtwinklige Trajectorien hervor, und schickte 1718 und 1719 noch Nachträge nach[1]). Er stellte eine Regel auf, welche er zwar nicht ableitete, deren Begründung aber sehr nahe liegt. Sei $F(x, y, c) = 0$ die Schaar der zu schneidenden Curven, welche durch die von einer Curve zur anderen ihren Werth ändernde Constante c sich kennzeichnen. Hermann nannte dieses c den Modulus der Curven, während Leibniz es einst (S. 211) als Parameter der Curven benannt hatte. Die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie an eine geschnittene Curve mit der Abscissenaxe einschliesst, ist die entgegengesetzt genommene Cotangente des Winkels, den die Berührungslinie an die Trajectorie im Schnittpunkte mit der Abscissenaxe bildet. Ist daher $y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ die ersterwähnte trigonometrische Tangente, so hat der zweitgenannte Winkel $\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ als seine Tangente. Anders ausgesprochen besagt dieses: aus der Differentialgleichung der geschnittenen Curve $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$ folge die Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial y}dx = \frac{\partial F}{\partial x}dy$ der Trajectorie, sofern die Gleichung $F(x, y, c) = 0$ der geschnittenen Curven noch Beachtung findet, um c zu eliminiren. Hermann drückte nun diese Vorschrift folgendermassen aus. Man solle die Differentialgleichung der geschnittenen Curven

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0\right)$$

bilden: man solle in ihr dx durch dy und dy durch $-dx$ ersetzen $\left(\frac{\partial F}{\partial x}dy - \frac{\partial F}{\partial y}dx = 0\right)$; man solle aus der letzteren Gleichung c er-

---

[1]) Hermanns Aufsätze sind abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 275—279; 279—281; 299—305.

mitteln und in die Curvengleichung ($F(x, y, c) = 0$) einführen, alsdann habe man die Differentialgleichung erster Ordnung der Trajectorie. In dem Hyperbelbeispiele ist die Ausführung folgende: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ oder $a^2 y^2 = c^2(x^2 - a^2)$; $a^2 y dy = c^2 x dx$; $-a^2 y dx = c^2 x dy$;

$$c^2 = -\frac{a^2 y dx}{x dy}; \quad a^2 y^2 = -\frac{a^2 y dx}{x dy}(x^2 - a^2)$$

oder $y dy = a^2 \frac{dx}{x} - x dx$, beziehungweise durch Integration

$$x^2 + y^2 \pm b^2 = 2a^2 \log x,$$

wie Niclaus II. Bernoulli gefunden hatte.

Die Regel drückt unzweifelhaft viel klarer Leibnizens Meinung aus, als dessen eigene Worte (S. 461) es thaten, aber es blieb und bleibt die Leibnizische Regel. Daher hat es geschichtlich keine grosse Bedeutung, dass neben Hermann, wahrscheinlich sogar vor Hermann, auch Niclaus I. Bernoulli zu derselben Formulirung gelangte, die er zwar nicht sogleich veröffentlichte, aber doch seinem Oheim Johann Bernoulli mittheilte. So erzählt Niclaus II. Bernoulli in einem die Geschichte der Trajectorienuntersuchungen ausführlich erörternden Aufsatze im Junihefte 1718 der A. E.[1])

Hermann rechnete noch drei weitere Beispiele, auf deren letztes er durch De Montmort hingewiesen worden war. Es stammte aber nicht von diesem selbst her, sondern hatte, was Hermann nicht wusste, einen anderen Ursprung. Johann Bernoulli hatte (S. 466) unter dem 11. März 1716 Leibniz eine schwierigere Trajectorienaufgabe zur Verfügung gestellt, um die Engländer sich daran ihre Zähne ausbeissen zu lassen, und diese Aufgabe war in der That nach London abgegangen, wenn wir auch nicht wissen durch wessen Vermittelung, war nicht minder Niclaus I. Bernoulli, damals Professor in Padua, mitgetheilt worden, und durch diesen an De Montmort gelangt.

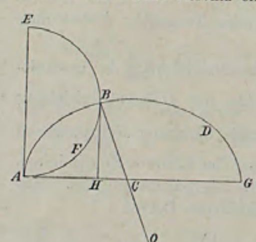

Fig. 68.

Die Aufgabe selbst ist folgende (Figur 68). Ueber AG als Abscissenaxe sind Curven ABD gezeichnet, welche alle durch Punkt A hindurchgehen und die Eigenschaft besitzen, dass ihre Krümmungs-

[1]) Der Aufsatz ist abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 286—298. Die hier angeführte Stelle auf II, 297.

halbmesser, z. B. BO, durch die Axe in constantem Verhältnisse geschnitten werden, d. h. so, dass $BO : BC = 1 : n$. Man sucht die Trajectorie EBF jener Curven. Sollte Newton auch diese Aufgabe gekannt haben, als er 1716 seine kurze Notiz in die P. T. gab? Das ist die Vermuthung, auf welche wir (S. 464) anspielten, und welche das Betonen von Krümmungshalbmessern in seiner Notiz rechtfertigen würde, ohne freilich den Vorwurf zu entkräften, er sei über allgemeine Redensarten nicht hinausgegangen.

Wohl aber that dieses Brook Taylor, der ungefähr gleichzeitig mit Hermann sich mit der Aufgabe beschäftigte, und da in seiner Veröffentlichung in den P. T. von 1717[1]) die Gleichung der Curven ABD, deren Trajectorie nachher gesucht werden muss, hergeleitet ist, während Hermann sich damit begnügte, sie einfach hinzuschreiben, so folgen wir hier Taylor mit dem wiederholt ausgesprochenen Vorbehalte, von seiner Bezeichnung der Fluxionen keinen Gebrauch zu machen. Die einzelnen Stücke der Figur heissen $AH = z$, $HB = x$, Bogen $AB = v$. Dann ist, sagt Taylor, $BC = \frac{x dv}{dz}$ und $BO = \frac{dx \cdot dv}{d^2 z}$ unter der Voraussetzung gleichförmiger Veränderung von v, oder, wie wir heute sagen, wenn v die unabhängige Veränderliche ist. Das waren damals allbekannte Formeln, und die für den Krümmungshalbmesser z. B. konnte Jeder aus De L'Hospitals in allen Händen befindlichen Analyse des infiniment petits entnehmen[2]). Um unseren Lesern die Prüfung zu erleichtern, leiten wir den heute wenig üblichen Werth in Kürze ab. Die gewöhnliche Formel $\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ kann man doch auch schreiben $\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{dy'}{dx}}$. Aber $y' = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}$ und $\frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{ds}}{\frac{dx}{ds}}$.

Nun ist

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}, \quad \text{folglich} \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^3}$$

und

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}\right)^3}{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{1}{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2}}.$$

Ferner folgt aus der bekannten Gleichung $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$, dass

[1]) Taylors Aufsatz ist abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 281 bis 285. [2]) *Analyse des infiniment petits* pag. 78 vorletzte Zeile.

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}}\frac{d^2x}{ds^2}$$

und

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\frac{dy}{ds}}\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}.$$

Mithin ist $\varrho=-\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}}$ oder unter Anwendung von Differentialen statt der Differentialquotienten $\varrho=-\frac{dy\cdot ds}{d^2x}$. Schreibt man z, x, v an Stelle von x, y, s und zieht einzig den absoluten Werth des Krümmungshalbmessers in Betracht, so erscheint das von Taylor benutzte $BO=\frac{dx\cdot dv}{d^2z}$. Die gegebene Bedingung $n\cdot BO=BC$ nimmt dadurch die Gestalt an $ndxdz=xd^2z$, und das Integral dieser Gleichung ist (immer unter der Voraussetzung von v als der unabhängigen Veränderlichen) $x^{-n}dz=\alpha^{-n}dv$ mit $\alpha^{-n}dv$ als Integrationsconstante, wovon man sich durch Differentiation überzeugen kann. Taylor wünscht dv aus der Gleichung zu entfernen. Er quadrirt diese deshalb und ersetzt alsdann dv^2 durch dx^2+dz^2. So gelangt er zur Differentialgleichung $x^{-2n}dz^2=\alpha^{-2n}(dx^2+dz^2)$ der geschnittenen Curven, welche sich leicht umformt in $dz=\frac{x^n dx}{\sqrt{\alpha^{2n}-x^{2n}}}$. Der zweite Theil der Aufgabe sucht die Trajectorie zu den Curven, deren Differentialgleichung im ersten Theile ermittelt worden war. Aus der noch nicht von dv befreiten Gleichung $x^{-n}dz=\alpha^{-n}dv$ folgt die Proportion $dv:dz=\alpha^n:x^n$. Nun war $BC=\frac{xdv}{dz}$, $BH=x$, mithin ist auch $dv:dz=BC:BH$ und $BC:BH=\alpha^n:x^n$. Betrachtet man $AH=z$, $BH=x$ als Coordinaten der Curve EBF, deren Bogen $EB=r$ heissen mag, und welche die BC als Berührungslinie besitzt, so verhält sich $dr:-dx=BC:BH$, und $\frac{x^n}{\alpha^n}=-\frac{dx}{dr}$ ist eine Differentialgleichung der Trajectorie mit r als unabhängiger Veränderlichen. Oben war $dz=\frac{x^n dx}{\sqrt{\alpha^{2n}-x^{2n}}}$, und eine Reihenentwicklung (so behauptet Taylor, ohne der Art der Entwicklung ein weiteres Wort zu widmen) führt zu $\frac{dz}{dx}=A\frac{x^n}{\alpha^n}+B\frac{x^{3n}}{\alpha^{3n}}+\cdots$. Durch Integration entsteht daraus $z=\frac{Ax}{n+1}\frac{x^n}{\alpha^n}+\frac{Bx}{3n+1}\frac{x^{3n}}{\alpha^{3n}}+\cdots$. Eine Integrationsconstante erscheint

nicht, weil die Voraussetzung gemacht wurde, dass sämmtliche Curven durch A hindurchgehen, dass also zugleich mit $x=0$ auch $z=0$ sein muss. In die durch Integration gewonnene Gleichung wird der vorher gefundene Werth $\frac{x^n}{\alpha^n}=-\frac{dx}{dr}$ eingeführt, so dass

$$z=-\frac{Ax}{n+1}\frac{dx}{dr}-\frac{Bx}{3n+1}\frac{dx^3}{dr^3}-\cdots$$

entsteht. Ohne dem r seine Stellung als unabhängige Veränderliche zu verkümmern, führt Taylor eine weitere Veränderliche s mittels der Annahme $-\frac{dx}{dr}=\frac{s^n}{a^n}$ ein, wobei a constant ist. Diese Substitution bringt zunächst $z=\frac{Ax}{n+1}\frac{s^n}{a^n}+\frac{Bx}{3n+1}\frac{s^{3n}}{a^{3n}}+\cdots$ hervor, dann durch Multiplication mit $\frac{s}{x}$ die zweite Gleichung

$$\frac{sz}{x}=\frac{As^{n+1}}{(n+1)a^n}+\frac{Bs^{3n+1}}{(3n+1)a^{3n}}+\cdots.$$

Diese letztere differentiirt Taylor und gelangt zu

$$\frac{xzds+xsdz-szdx}{x^2}=\left(A\frac{s^n}{a^n}+B\frac{s^{3n}}{a^{3n}}+\cdots\right)ds.$$

Die hier auftretende Reihe sieht der vorher benutzten Entwicklung Glied für Glied ähnlich, muss daher $\frac{s^n}{\sqrt{a^{2n}-s^{2n}}}$ als Summe haben, oder es muss sein

$$\frac{xzds+xsdz-szdx}{x^2}=\frac{s^n ds}{\sqrt{a^{2n}-s^{2n}}}.$$

Um das mittels $-\frac{dx}{dr}=\frac{s^n}{a^n}$ eingeführte s wieder wegzuschaffen, muss ebendieselbe Definitionsgleichung Anwendung finden. Sie liefert zunächst

$$\frac{s^n}{\sqrt{a^{2n}-s^{2n}}}=\frac{-\frac{dx}{dr}}{\sqrt{1-\frac{dx^2}{dr^2}}}=-\frac{dx}{\sqrt{dr^2-dx^2}}=-\frac{dx}{dz},$$

also

$$\frac{xzds+xsdz-szdx}{x^2}=-\frac{dxds}{dz},$$

beziehungsweise $(xdx+zdz)xds+(xdz-zdx)sdz=0$ und

$$\frac{ds}{s}=\frac{zdx-xdz}{xdx+zdz}\cdot\frac{dz}{x}.$$

Eine fernere Anwendung der Gleichung $-\frac{dx}{dr} = \frac{s^n}{a^n}$ besteht in deren Differentiation nach r. Man erhält dadurch

$$-\frac{d^2x}{dr^2} = \frac{ns^{n-1}}{a^n}\frac{ds}{dr} = \frac{n}{s}\frac{s^n}{a^n}\frac{ds}{dr} = -\frac{ndxds}{sdr^2} \text{ und } \frac{ds}{s} = \frac{d^2x}{ndx}.$$

So hat man zwei Werthe von $\frac{ds}{s}$ erhalten, deren Gleichsetzung zu

$$nzdzdx^2 - xzdzd^2x - nxdxdz^2 - x^2dxd^2x = 0$$

führt. Die unabhängige Veränderliche war r. Nach ihr darf man daher $dx^2 + dz^2 = dr^2$ differentiiren und erhält $dxd^2x + dzd^2z = 0$, beziehungsweise $-x^2dxd^2x = x^2dzd^2z$, welcher Werth in der gefundenen Differentialgleichung zweiter Ordnung an Stelle des letzten Gliedes links vom Gleichheitszeichen eingesetzt wird. Dividirt man dann durch $x^{n+1}dz$, so entsteht als neue Form

$$\frac{nz}{x^{n+1}}dx^2 - \frac{z}{x^n}d^2x - \frac{n}{x^n}dxdz + \frac{d^2z}{x^{n-1}} = d\left[-\frac{z}{x^n}dx + \frac{dz}{x^{n-1}}\right] = 0.$$

Integrirt man und wählt unter fortwährender Berücksichtigung des Umstandes, dass dr als constant gilt, $\frac{dr}{a^{n-1}}$ als Integrationsconstante, so gewinnt man

$$-\frac{z}{x^n}dx + \frac{dz}{x^{n-1}} = \frac{dr}{a^{n-1}}, \text{ beziehungsweise } (xdz - zdx)a^{n-1} = x^n dr$$

als Differentialgleichung erster Ordnung der Trajectorie, deren Integration, meint Taylor, ohne bestimmte Annahmen für n zu machen eine keineswegs leichte Aufgabe sei[1]).

Im gleichen Jahre 1717 hat auch Stirling in dem Anhange zu seinem Bändchen *Lineae tertii ordinis* (S. 430) die Hyperbeltrajectorie besprochen[2]). Er gelangte unter Anwendung der Fluxionszeichen, welche wir wieder durch Differentialzeichen ersetzen, zur Gleichung $ydy = \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}dx$, von der er behauptet, sie könne nicht integrirt werden, weil offenbar der Ausdruck rechts die Fläche einer Hyperbel von der Gleichung $y = \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ darstelle. Er will damit offenbar nur sagen, eine Integration durch algebraische Functionen sei unmöglich und lässt $y^2 + (a - x)^2 + k = 2c^2 \log(a - x)$ nicht als ein wirklich ermitteltes Integral gelten.

[1]) *Haud proclive est aequationem, manente n in terminis generalibus, revocare ad aequationem Fluentes tantum involventem.* [2]) Stirling, *Lineae tertii ordinis.* Appendix pag. 15—19.

Wir würden der Trajectorienaufgabe eine unverhältnissmässig grosse Bedeutung verleihen, wenn wir in gleicher Ausführlichkeit weiter berichten wollten, wie Niclaus I. Bernoulli und Niclaus II. Bernoulli in den A. E., Taylor in den P. T. sich fortgesetzt herumstritten. Sämmtlichen Abhandlungen ist Scharfsinn nachzurühmen, insbesondere kommen da und dort geistreiche Versuche vor, eine erste Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu vollziehen, aber methodisches Vorgehen ist grade in letzterer Beziehung am wenigsten zu erwähnen.

Johann Bernoulli hat sich ebenfalls mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung abgequält und z. B. in einem unter dem 20. Mai 1716 an Leibniz gerichteten Briefe[1]) von dem Integrale einer besonderen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer Weise gesprochen, welche sicherstellt, dass er es gekannt haben muss, aber wie er dazu gelangt war, sagt er nicht. Es handelt sich um $z^2d^2x = 2xdz^2$. Die heutige Integralrechnung lehrt ihr Integral als $x = \frac{z^2}{a} + \frac{b^2}{3z}$ kennen, mit a und b als Integrationsconstanten. Mittels $b = 0$ entsteht $ax = z^2$, d. h. eine Parabel; mittels $a = \infty$ entsteht $xz = \frac{b^2}{3}$, d. h. eine Hyperbel; ist b von 0 und a von ∞ verschieden, so ist eine Curve dritten Grades vorhanden. Dem entspricht vollständig, was Johann Bernoulli behauptet, wenn er sagt, drei Gattungen von Curven steckten in der Gleichung $z^2d^2x = 2xdz^2$, Parabeln, Hyperbeln und gewisse Curven dritten Grades.

Eine Abart der Trajectorienaufgabe ist die der reciproken Trajectorien[2]), d. h. solcher Curven, die mit ihren Trajectorien von derselben Art sind. Niclaus II. Bernoulli stellte die Aufgabe am Schlusse einer langen Abhandlung über Trajectorien, welche theils in den A. E. von 1720, theils im VII. Supplementbande der A. E. erschien[3]), und bemerkte dabei, sein Vater, Johann Bernoulli, habe die Aufgabe bereits bewältigt. Eine lange Polemik knüpfte sich auch an dieses Problem, welche von einem englischen Anonymus eröffnet wurde. Johann Bernoulli scheint unter diesem seinen alten Gegner Taylor vermuthet zu haben, was ihn wohl anregte, den Streit in noch bissigerer Weise zu führen, als es ohnedies in seiner Gewohnheit lag. Später erst erfuhr er, dass Pemberton, der Mitarbeiter Newtons an der dritten Ausgabe der Principien (S. 205), jener Anonymus gewesen war. Der abschliessende Aufsatz von Johann Bernoulli[4]) von 1727 erschien erst im IX. Supplementbande der A. E.

[1]) Leibniz III, 961. [2]) Klügel V, 113—136. [3]) Der Aufsatz ist abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 423—472. [4]) Ebenda II, 600—616.

und würde hier nicht mehr genannt werden dürfen, wenn wir nicht beabsichtigten, die Bemühungen Johann Bernoullis um die Trajectorien nicht in den folgenden Abschnitt mit hinüber zu nehmen. Als einfachste algebraische reciproke Trajectorie hat Johann Bernoulli die semicubische Parabel $y^3 = ax^2$ erkannt.

Ein italienischer Mathematiker förderte mächtig die Lehre von den Differentialgleichungen sowohl erster als zweiter Ordnung. Es war Graf Jacopo Riccati[1]) (1676—1754). In Venedig geboren wurde der mit zehn Jahren vaterlose Knabe dem Jesuitencollegium in Brescia anvertraut, wo er überraschende Fortschritte machte. Von 1693—1696 studirte er in Padua und kehrte dann nach Venedig zurück, von wo ihn weder eine Berufung nach Padua, noch eine solche nach Wien, auch nicht eine dritte an die Spitze der Petersburger Akademie einem glücklichen und dem Studium geweihten Familienleben entreissen konnte. Ziemlich spät, 1747, siedelte er nach Treviso über, wo er starb. Er führte mit zahlreichen Gelehrten aller Länder Europas einen so ausgedehnten Briefwechsel, dass er ihn nicht allein bewältigen konnte, vielmehr auf die Mithilfe seiner beiden Söhne, Vincenzo Riccati (1707—1775) und Giordano Riccati (1709—1790) sich verlassen musste. Von 1720 bis 1722 befand sich Niclaus II. Bernoulli als Hauslehrer in einer italienischen Adelsfamilie in Venedig[2]). Dort erneuerte er die Bekanntschaft mit Riccati, welche er schon bei einem früheren Aufenthalte 1716 gemacht hatte, dort trat er auch bei fünftägigem Zusammensein in nähere Beziehung zu Christian Goldbach, wovon nachher noch die Rede sein muss. Jacopo Riccati hatte 1712 im XI. Bande des Giornale de' Letterati d'Italia sich mit der Aufgabe beschäftigt, die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser Function der Ordinate sein soll. Das kam auf die Integration einer Gleichung von einer Gestalt heraus, welche man gegenwärtig durch

$$F(y, y', y'') = 0$$

bezeichnen würde. Riccatis Verfahren stimmt in den letzten Gedanken mit der noch heute üblichen Ersetzung von y'' durch $y'\frac{dy'}{dy}$ überein,

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XLII, 131—132 (Paris 1863). Die in 4 Bänden (Lucca 1761—1765) erschienenen Gesammtwerke Riccatis waren uns ebensowenig zu Händen wie die italienischen Zeitschriften, in welchen die Arbeiten zuerst veröffentlicht wurden. Dagegen hatte H. Loria die grosse Güte, uns Notizen darüber zur Verfügung zu stellen. [2]) Vergl. den von Daniel Bernoulli verfassten Nekrolog von Niclaus II. Bernoulli *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres Géomètres du XVIII. Siècle éditée par* P. H. Fuss II, 268—269 (Petersburg 1843). Wir citiren dieses wichtige Quellenwerk als *Corresp. math.* (Fuss).

welche die Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine solche erster Ordnung zurückführt.

In den Jahren 1722 und 1723 verfasste Riccati einen langen Aufsatz[1]) über die Trennung der Veränderlichen in Differentialgleichungen erster Ordnung und über die Erniedrigung von Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. Dessen erstem Abschnitte entnehmen wir die von Riccati erfundene hälftige Trennung, *separazione dimeziata*. Man soll die Differentialgleichung so schreiben, dass rechts vom Gleichheitszeichen das Differential einer bekannten Function von x oder von y erscheine. Auf der linken Seite soll dann ein Factor herausgegriffen werden, der aus der Summe von Producten von dx mit einer Function von x und von dy mit einer Function von y bestehend für sich integrabel ist. Man soll dessen Integral durch einen neuen Buchstaben darstellen und mit dessen Hilfe entweder x oder y aus der ursprünglichen Differentialgleichung wegschaffen. Die neu entstehende Differentialgleichung hat man, wenn nothwendig, einem ähnlichen Verfahren zu unterwerfen u. s. w., bis schliesslich die volle Trennung der Veränderlichen erzielt ist. Sei z. B.

$$\frac{x^3 dy + y^3 dx}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-x^2y^2}} = dz$$

zur Integration vorgelegt. Riccati gibt dem Ausdrucke links die Gestalt:

$$\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-x^2y^2}}\left(\frac{dx}{x^3}+\frac{dy}{y^3}\right)$$

und setzt

$$\frac{dx}{x^3}+\frac{dy}{y^3} = d\left(-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2y^2}\right) = -dp, \text{ d. h. } p = \frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2+y^2}{2y^2x^2}.$$

Nun ist

$$\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-x^2y^2}} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}-1}} = \frac{1}{2p\sqrt{2p-1}}.$$

Die Differentialgleichung ist folglich in

$$-\frac{dp}{2p\sqrt{2p-1}} = dz$$

umgewandelt, in welcher die Veränderlichen getrennt sind. Die Methode hälftiger Trennung kam durch einen mit Leibniz in Briefwechsel stehenden Italiener zu dessen Kenntniss, und er zollte ihr uneingeschränkten Beifall.

[1]) *Opere di Riccati* I, 432—598.

Einen anderen Aufsatz, in welchem wieder Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt werden, übergab Riccati in Venedig an Niclaus II. Bernoulli, damit dieser ihn seinem Vater Johann Bernoulli zur Begutachtung einsende. Von letzterem sollte es dann abhängen, ob er den Aufsatz zum Drucke geben wolle. Die A. E. brachten den Aufsatz ziemlich bald[1]). Wie schon bemerkt, nimmt Jacopo Riccati seinen Ausgangspunkt von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zu deren Integration er es für nothwendig erklärt, dass ein erstes Differential als constant gegeben sei, oder dass man ein solches annehme. Er versteht darunter, man müsse eine unabhängige Variable annehmen, wenn sie nicht schon im Wortlaute der Aufgabe selbst enthalten sei.

Riccatis Verfahren an der Gleichung $x^m d^2x = d^2y + dy^2$ geprüft ist folgendes, wobei wir uns nur gestatten, zur grösseren Deutlichkeit Differentialquotienten zu benutzen, wo Riccati sich nur der Differentiale bedient. Er denkt sich irgend ein p als unabhängige Veränderliche, wodurch die vorgelegte Gleichung die Gestalt

$$x^m \frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2$$

annimmt. Wie freilich x und y von p abhängen, ist unbekannt. Man setze ferner $\frac{dx}{dp} = q$, $\frac{dy}{dp} = u$, wo q und u irgendwie aus x, y und Constanten bestehen. Um unseren Lesern Riccatis Ausdrucksweise einmal vorzuführen, bemerken wir, dass die hier erörterten Annahmen so ausgesprochen sind: Riccati sagt, er wolle $\frac{dx}{q}$ als constant betrachten, ferner $\frac{dx}{q} = dp$ setzen, welches hiernach auch constant sei, ausserdem nehme er $dy = udp$ an, wo dp fortwährend constant bleibe. Fortsetzung der Differentiation nach p bringt $\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{dq}{dp}$, $\frac{d^2y}{dp^2} = \frac{du}{dp}$ hervor, und die gegebene Differentialgleichung nimmt die Gestalt an $x^m \frac{dq}{dp} = \frac{du}{dp} + u^2$. Setzt man

$$\frac{dq}{dp} = \frac{dq}{dx} : \frac{dp}{dx}, \quad \frac{du}{dp} = \frac{du}{dx} : \frac{dp}{dx}$$

und vervielfacht die dadurch neuerdings umgeformte Gleichung mit $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{q}$, so entsteht $x^m \frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q}$, eine Differentialgleichung, welche zwar erster Ordnung ist, bei welcher aber die Trennung der

[1]) A. E. Supplementa VIII, 66—73. Dieser Supplementband ist von 1724 datirt, aber Riccatis Aufsatz ist jedenfalls früher in die Oeffentlichkeit gelangt, da im Novemberhefte 1723 der A. E. schon von ihm die Rede ist.

Veränderlichen unter den ganz allgemeinen Voraussetzungen, welche für q und u gemacht werden mussten, nicht gelingt. Riccati versucht es nun mit der weitaus engeren Annahme, dass q nur von x allein abhänge und zwar eine Potenz x^n sei. Unter dieser Voraussetzung schliesst er seinen Aufsatz mit der Aufgabe: Werthe von n zu ermitteln, welche die Trennung der Veränderlichen gelingen lasse, während der Werth des Exponenten m keiner Beschränkung unterworfen sein soll.

Unmittelbar hinter Riccatis Aufsatz sind Bemerkungen des damals etwa 22jährigen Daniel Bernoulli (S. 90) abgedruckt, aus welchen hervorgeht, dass Niclaus I., Niclaus II., aber auch Johann und Daniel Bernoulli sich mit der Riccatischen Gleichung, welche in etwas anderer Schreibart

$$x^n \frac{du}{dx} + u^2 = nx^{m+2n-1}$$

heisst, beschäftigt haben, und dass sie alle unabhängig von einander arbeitend zu dem gleichen Werthe von n gelangten, welcher die Trennung der Veränderlichen gestattet[1]). Daniel gab seine Auflösung in der damals so beliebten undurchsichtigen anagrammatischen Form.

Im Novemberhefte 1723 der A. E. kam Riccati wiederholt auf seinen Aufsatz zurück[2]). Er gab seiner Gleichung jetzt die einfacher aussehende Gestalt

$$x^m dx = du + \frac{u^2 dx}{x^n},$$

fügte aber die von ihm selbst ermittelten, die Trennung der Veränderlichen ermöglichenden Bedingungen für n nicht bei, während er sich laut dagegen verwahrte, als habe er eine Herausforderung oder gar eine Verletzung der von ihm hochgeschätzten Familie Bernoulli beabsichtigt.

Daniel Bernoulli wartete noch zwei Jahre mit der Veröffentlichung seiner Methode. Als aber kein anderer Mathematiker in den A. E. die Riccatische Gleichung, wie sie nun schon genannt wurde, um einen Schritt weiter führte, gab er im Novemberhefte 1725 heraus, was er der Hauptsache nach seit 1722 besass[3]) und auch schon 1724 in Venedig in seinem Buche *Danielis Bernoullii exercitationes quaedam mathematicae* pag. 77—80 veröffentlicht hatte. Die Form der fraglichen Gleichung, von welcher er ausgeht, ist

[1]) A. E. Supplementa VIII, 74: *Praescribit frater meus, se illud solvisse; sed praeter ipsum alii quoque existunt solutores, solutionem enim eruerunt Pater et Patruelis Nicolaus Bernoulli pariter ac egomet; eorum vero analyses nondum vidi, excepta illa a Parente excogitata, quae Ratione operationis et in procedendi modo a me diversa est.* [2]) A. E. 1723 pag. 502—510. [3]) Ebenda 1725 pag. 473—475.

$$\text{I.}\quad ax^n dx + u^2 dx = b\,du,$$

und nun behauptet er, wenn irgend ein Werth $n = m$ die Trennung der Veränderlichen gestatte, so sei diese noch möglich erstens bei $n = -\frac{m}{m+1}$ und zweitens bei $n = -m - 4$.

Setzt man erstens $u = \frac{1}{y}$, $du = -\frac{dy}{y^2}$, so geht I. in

$$ax^n dx + \frac{dx}{y^2} = -\frac{b\,dy}{y^2}$$

über, oder in $dx + ax^n y^2 dx = -b\,dy$. Nun sei

$$x = s^{\frac{1}{n+1}}, \quad dx = \frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{n+1} ds.$$

Durch Einführung des Werthes entsteht

$$\frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{n+1} ds + a s^{\frac{n}{n+1}} y^2 \frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{n+1} ds = -b\,dy$$

oder

$$\text{II.}\quad \frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{a} ds + y^2 ds = -\frac{(n+1)b}{a} dy,$$

eine Form, welche mit I. die grösste Aehnlichkeit besitzt. Ist also I. in seinen Veränderlichen trennbar bei $n = m$, so muss Gleiches für II. stattfinden bei $-\frac{n}{n+1} = m$, d. h. bei $n = -\frac{m}{m+1}$. Zweitens kann man

$$u = -\frac{b}{x} + \frac{y}{x^2}, \quad u^2 = \frac{b^2}{x^2} - \frac{2by}{x^3} + \frac{y^2}{x^4},$$
$$du = \frac{b}{x^2} dx - \frac{2y}{x^3} dx + \frac{1}{x^2} dy$$

setzen. Dadurch geht I. über in

$$ax^n dx + \frac{b^2}{x^2} dx - \frac{2by}{x^3} dx + \frac{y^2}{x^4} dx = \frac{b^2}{x^2} dx - \frac{2by}{x^3} dx + \frac{b}{x^2} dy.$$

Das 2. und 3. Glied links streichen sich gegen das 1. und 2. Glied rechts, und wird die noch aus drei erhalten bleibenden Gliedern bestehende Gleichung, mit x^2 vervielfacht, so entsteht

$$ax^{n+2} dx + \frac{y^2}{x^2} dx = b\,dy.$$

Eine abermalige Veränderung bringt $x = \frac{1}{s}$, $dx = -\frac{ds}{s^2}$ hervor. Diese Substitution liefert nämlich

$$\text{III.}\quad -as^{-n-4} ds - y^2 ds = b\,dy$$

mit wieder in die Augen fallender Aehnlichkeit mit I. Hilft also bei I. der Werth $n = m$ die Trennung der Veränderlichen zu voll-

ziehen, so muss bei III. genügen, wenn $-n - 4 = m$, d. h. $n = -m - 4$.

So sind die beiden Hilfssätze bewiesen, und es bedarf zu deren Anwendung nur eines besonderen m. Aber augenscheinlich ist 0 ein solches m, denn bei $n = 0$ verwandelt einfache Division durch $a + u^2$ die Gleichung I. in $dx = \frac{b\,du}{a + u^2}$ mit getrennten Veränderlichen. In Folge abwechselnder Anwendung erst des zweiten, dann des ersten Hilfssatzes, dann wieder des zweiten, des ersten u. s. w. ist also die Trennung der Veränderlichen ferner möglich bei $n = -0 - 4 = -4$, bei $n = -\frac{-4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$, bei $n = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$ u. s. w., allgemein bei $n = \frac{-4c}{2c \pm 1}$, wo c irgend eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Die Verallgemeinerung bewies Daniel Bernoulli allerdings nicht. Er überliess es vielleicht dem Leser, sich durch Anwendung vollständiger Induction zu überzeugen, dass von $n = \frac{-4c}{2c+1}$ die Veränderung des ersten Hilfssatzes zu

$$n = -\frac{\frac{-4c}{2c+1}}{\frac{-4c}{2c+1} + 1} = \frac{-4c}{2c-1}$$

führt, und von diesem $n = \frac{-4c}{2c-1}$ die Veränderung des zweiten Hilfssatzes zu $n = \frac{-4c}{2c-1} - 4 = \frac{-4(c-1)}{2(c-1)+1}$.

Dagegen fügte Daniel Bernoulli noch einige Bemerkungen hinzu. Alle ermittelten Werthe von n, sagt er, seien innerhalb der Grenzen $n = 0$, $n = -4$ gelegen. Bei $c = \infty$ entstehe $n = -2$, ein Fall, der besonderer Betrachtung werth sei. Die Differentialgleichung I. hiesse nämlich alsdann $\frac{a\,dx}{x^2} + u^2 dx = b\,du$ und verwandle sich mittels $u = \frac{1}{y}$ in $\frac{a\,dx}{x^2} + \frac{dx}{y^2} = -\frac{b\,dy}{y^2}$, bei welcher die Trennung der Veränderlichen möglich sei, wie daraus hervorgehe[1]), dass die Veränderlichen in den einzelnen Gliedern gleiche Exponentensumme besitzen. Diese Bemerkung lässt erkennen, dass damals schon Daniel Bernoulli von der Integrabilität homogener Differentialgleichungen in einer Weise spricht, als wenn es sich um eine ganz allgemein bekannte Thatsache handelte. Manfredis Aufsatz von 1714 (S. 461) wird ihm also vermuthlich bekannt gewesen sein. Der Name der homogenen Differentialgleichungen erschien freilich erst 1726 in den

[1]) *in qua constat indeterminatas separationem admittere eo, quod in singulis terminis indeterminatae eandem habent exponentium summam.*

Veröffentlichungen der Petersburger Akademie. Das ist grade das Grenzjahr, welches von diesem Abschnitte zum folgenden führt. Wir beabsichtigen erst in jenem von dem Gegenstande weiter zu reden.

Die Riccatische Gleichung war ein Gegenstand steigenden Interesses geworden und wurde auch in dem Briefwechsel zwischen Niclaus II. Bernoulli und Christian Goldbach viel besprochen. Wir wissen (S. 387), dass Christian Goldbach 1720 eine Reise nach Italien machte, und auf dieser wurde er (S. 477) in Venedig mit Niclaus II. Bernoulli bekannt. Die angeknüpften Beziehungen führten zu einem über die Jahre 1721—1725 sich erstreckenden Briefwechsel, der allerdings erst 1843 in die Oeffentlichkeit trat, vorher also ebensowenig eine allgemeine Wirksamkeit ausüben konnte, als ein anderer gleichfalls 1843 gedruckter in den Jahren 1723 bis 1730 zwischen Goldbach und Daniel Bernoulli geführter Briefwechsel[2]). Aus dem erstgenannten Briefwechsel geht hervor, dass Jacopo Riccati die Einzelfälle, welche die Trennung der Veränderlichen in seiner Differentialgleichung gestatten, sehr gut kannte. Goldbach suchte solche durch Reihenentwicklung[3]). Um nämlich $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$ zu behandeln, setzte er

$$y = cx^e + fx^{e+k} + gx^{e+2k} + hx^{e+3k} + \cdots,$$

entwickelte daraus

$$y^n = \alpha x^{en} + \beta x^{en+k} + \gamma x^{en+2k} + \delta x^{en+3k} + \cdots,$$

sowie

$$dy = [cex^{e-1} + f(e+k)x^{e+k-1} + \cdots]dx$$

und erhielt nach Division durch dx auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Reihen, deren Glieder er der Ordnung ihres Auftretens nach mit einander verglich. Er setzte also

$$ax^m = cex^{e-1},\ b\alpha x^{en+p} = f(e+k)x^{e+k-1} \text{ u. s. w.}$$

Aus der ersten Gleichsetzung fand er $e = m + 1$, $c = \frac{a}{e}$. Aus der zweiten ergab sich $en + p = e + k - 1$, sowie $b\alpha = f(e+k)$, und $en + p = e + k - 1$ liess sich auch $mn + n + p = m + 1 + k - 1$ schreiben, woraus $k = (m+1)n + p - m$ folgte, nebst andererseits $f = \frac{b\alpha}{e+k}$ als Folgerung aus $b\alpha = f(e+k)$ u. s. w. Die vorher will-

[1]) *in qua constat indeterminatas separationem admittere eo, quod in singulis terminis indeterminatae eandem habent exponentium summam.* [2]) Der Briefwechsel zwischen Goldbach und Niclaus II. Bernoulli findet sich *Correspond. math.* (Fuss) II, 97—170, der zwischen Goldbach und Daniel Bernoulli ebenda II, 173—406. [3]) *Correspond. math.* (Fuss) II, 106 flgg.

kürlich angesetzte Reihe für y wurde dadurch zu einer ganz bestimmten. Niclaus II. Bernoulli dagegen brachte die Riccatische Gleichung auf andere Formen zurück[1]), welche, abgesehen von der Gestalt gewisser in ihr auftretender Exponenten, der ursprünglichen Riccatischen Gleichung durchaus ähnlich waren, so dass, wenn nicht die (S. 477) erwähnte Aeusserung Daniel Bernoullis schnurstracks entgegenstände, man sich fragen müsste, ob letzterer bei dem oben erörterten Aufsatze von 1725 ganz unabhängig verfuhr und nicht Anregung von seinem Bruder erhielt, der ihn schon als Kind in die Mathematik eingeführt hatte, und mit dem er, so lange Niclaus II. Bernoulli lebte, in engster Bruderliebe vereint blieb, eine grade in dieser Familie auf's Angenehmste berührende Erscheinung.

Zum Schlusse des Kapitels sparten wir uns die Erwähnung einer Arbeit wieder eines italienischen Adligen auf, welche uns zugleich Gelegenheit gibt etwas nachzutragen, was im XVI. Abschnitte, wo es eigentlich hingehört, aufgespart wurde. Wir können das Gebiet, über welches wir zu berichten haben, mit einem freilich ganz der Neuzeit angehörenden Namen als das der Additionstheoreme bezeichnen. Tschirnhaus hat im November 1695 einen solchen Satz, wenn auch unbewiesen und unbeweisbar, ausgesprochen, indem er (S. 155) behauptete, er sei im Besitze eines Verfahrens, welches ihm ermögliche, bei jeder Curve ein Bogenstück zu ermitteln, welches zu einem anderen auf ihr gegebenen Bogenstücke in gegebenem Verhältnisse stehe. Tschirnhaus wollte vielleicht damit übertrumpfen, was die Brüder Bernoulli wirklich schon geleistet hatten.

Jakob Bernoulli brach die neue Bahn mit einem Aufsatze im Januarhefte 1691 der A. E., von welchem (S. 220) nur Weniges angedeutet wurde, eingehendere Besprechung bis hierher verschiebend[2]). Jakob Bernoulli will (Figur 69), man solle die Axe einer gewöhnlichen Parabel in Gestalt eines Kreises $BCDM$ zusammenbiegen. Die Ordinaten sollen senkrecht zur Axe gerichtet sein, wie z. B. $DG = y$, während $BD = x$. Die Endpunkte G der Ordinaten, welche mit Hilfe der Gleichung $y^2 = lx$ bestimmt sind, bilden die Curve, welche *parabola helicoidis* oder auch *spiralis*

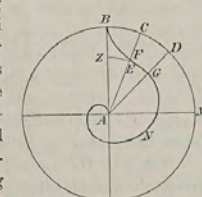

Fig. 69.

[1]) *Correspond. math.* (Fuss) II, 140—143. [2]) Ueber den in Jac. Bernoullis *Opera* I, 431—442 abgedruckten Aufsatz: *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis* vergl. G. D. E. Weyer, Ueber die parabolische Spirale. Kiel und Leipzig 1894.

parabolica genannt werden könne. Der Name der parabolischen Spirale ist der Curve geblieben. Schon hier kann Zweierlei bemerkt werden. Erstens hat Jakob Bernoulli hier an einem besonderen Beispiele das benutzt, was Leibniz ein Jahr später (S. 211) krummlinige Coordinaten nannte, und zweitens sind hier wahre Polarcoordinaten vorhanden. Jede auf die Kreisperipherie $BCDM$ in irgend einem Punkte D senkrecht gezogene DG muss verlängert durch den Kreismittelpunkt A hindurchgehen, kann mithin auch als von dort ausgehender Polarleitstrahl gedacht werden, und der Kreisbogen BCD ist dem Drehungswinkel des Leitstrahls aus seiner Anfangslage proportional. Würde man $AB = r$, $AG = \varrho$, $DG = r - \varrho$, $\angle BAD = \vartheta$, arc. $BCD = r\vartheta$ nennen, so würde als Gleichung der parabolischen Spirale $(r-\varrho)^2 = lr\vartheta$ entstehen, während Bernoulli allerdings es bei $lx = y^2$ bewenden lässt. Die Bogenlänge wird vermöge des bei E rechtwinkligen Dreieckchens FEG gefunden. In diesem Dreieckchen ist $FG^2 = FE^2 + EG^2$. Aber $FE = dy$; $EG : CD = AG : AD$, also $EG = \frac{CD \,.\, AG}{AD} = \frac{dx(r-y)}{r}$ und $FG^2 = dy^2 + \frac{(r-y)^2}{r^2}dx^2$. Aber die Gleichung $lx = y^2$ liefert $dx = \frac{2y}{l}dy$, mithin

$$FG^2 = dy^2 \cdot \frac{r^2l^2 + 4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4}{r^2l^2}$$

und

$$FG = \frac{dy}{rl}\sqrt{r^2l^2 + 4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4}.$$

Könnte man, sagt Jakob Bernoulli[1]), das Integral dieses Ausdruckes finden, so hätte man die Länge der Curve BFG. Hier tritt also, so weit uns bekannt ist, das erste Integral auf, in welchem eine Quadratwurzel aus einem Ausdrucke 4. Grades vorkommt, mit anderen Worten ein elliptisches Integral. Das wäre schon von Wichtigkeit, wenn wir darin auch nur ein zufälliges, durchaus unbewusstes Verdienst Jakob Bernoullis erkennen dürften, einem Integrale begegnet zu sein, das dazu bestimmt war, später eine Rolle zu spielen. Aber Jakob Bernoulli ging weiter als das.

Seit Van Heuraet (Bd. II, S. 920—921) wurde die Aufgabe der Rectification nicht selten auf eine solche der Quadratur zurückgeführt, d. h. man zeichnete, wenn $\int X dx$ eine Curvenlänge darstellte, eine Hilfscurve $y = X$, deren Fläche jener Länge als Maass diente. Für

[1]) *cujus quantitatis integrale, si dari posset, exhiberet longitudinem curvae BFG.*

die Integration als solche war damit natürlich gar nichts gewonnen, denn das Integral behielt seine Form, während es die Bedeutung wechselte. Ein sehr grosser Vortheil ergab sich aber durch Zeichnung der Hilfscurve in dem besonderen Falle der parabolischen Spirale. Hier zeigte nämlich die Hilfscurve einen vollkommen symmetrischen Verlauf, wodurch sich beim blossen Augenschein die Gleichheit gewisser Flächenstücke, beziehungsweise verschiedener Curvenlängen, welchen jene Flächenstücke als Maass dienten, ergab, und Jakob Bernoulli durfte den Satz aussprechen[1]), es offenbare sich dadurch auch für Curven, deren Länge nicht bestimmt werden könne, eine Gleichheit von einander unähnlichen Bögen. In Zeichen moderner Integralrechnung lautet der Satz für die parabolische Spirale

$$\int_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}+c} \sqrt{1 + \frac{4y^2(r-y)^2}{r^2l^2}}\, dy = \int_{\frac{r}{2}-c}^{\frac{r}{2}} \sqrt{1 + \frac{4y^2(r-y)^2}{r^2l^2}}\, dy.$$

Setzt man nämlich in dem links vom Gleichheitszeichen befindlichen Integrale $y = \frac{r}{2} + z$, in dem rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen $y = \frac{r}{2} - z$, so nehmen beide die gleiche Gestalt

$$\int_0^c \sqrt{1 + \frac{4\left(\frac{r}{2} - z\right)^2\left(\frac{r}{2} + z\right)^2}{r^2l^2}}\, dz \text{ an}^{2}).$$

Johann Bernoulli, damals noch auf dem besten Fusse mit seinem Bruder stehend, warf im Augustheft 1695 der A. E. die Frage auf[3]), ob man nicht im Stande sei, Curven zu finden, deren Summe oder Differenz sich durch einen Kreisbogen darstellen lasse, und beantwortete sie bejahend. Sei (Figur 70) eine Curve ABC gegeben mit DE als Berührungslinie im Punkte A. Diese DE wird als Berührende in Bewegung

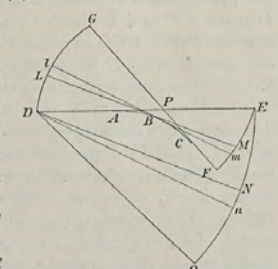

Fig. 70.

[1]) *unde patet, quod in curvis etiam illis, quae rectificationem nondum acceperunt, nonnumquam partes aequales dissimilares assignari possunt.* [2]) Diese Form der Beweisführung benutzte Enneper in Note VII seines Werkes: Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte. [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 142—144.

gesetzt, so dass sie nach und nach die Lagen LBM, lBm, zuletzt GCF (als Berührende an die ABC im Punkte C) annimmt. Die Endpunkte der DE beschreiben bei dieser Bewegung die Curven $DLlG$ und $EMmF$. Um D als Mittelpunkt wird mit DE als Halbmesser ein Kreisbogen $ENnO$ beschrieben, dessen Endpunkt O durch die Gleichheit der Winkel $EDO = EPF$ bestimmt ist. Dann wird behauptet, die Curvenlängen DG und EF glichen zusammen dem Kreisbogen EO. Zum Beweis werden zwei zunächst auf einander folgende Lagen der bewegten DE, nämlich LBM und lBm ins Auge gefasst und $DN \parallel LM$, $Dn \parallel lm$ gezogen. Die doppeltrechtwinkligen Dreiecke LBl, MBm, NDn sind der Construction nach einander ähnlich. Folglich ist

$$\frac{BM}{BL} = \frac{Mm}{Ll}, \quad \frac{BL + BM}{BL} = \frac{Ll + Mm}{Ll},$$

oder wegen $BL + BM = LM$ auch

$$\frac{LM}{BL} = \frac{Ll + Mm}{Ll}, \text{ und daraus } \frac{LM}{Ll + Mm} = \frac{BL}{Ll},$$

oder, wegen $LM = DN$, auch $\frac{BL}{Ll} = \frac{DN}{Ll + Mm}$. Wegen der hervorgehobenen Dreiecksähnlichkeiten ist aber auch $\frac{BL}{Ll} = \frac{DN}{Nn}$ und folglich $Nn = Ll + Mm$. Dasselbe Gleichheitsverhältniss findet über den ganzen Bogen EO statt, d. h. es ist $EO = DG + EF$, während DG und EF zwei Evolventen von ABC sind. Voraussetzung war, dass der Punkt A sich zwischen D und E befand. Liegt dagegen E zwischen D und A, so findet ein ganz ähnlicher Satz statt, bei welchem nur statt der Summe zweier Curven deren Differenz auftritt.

Im Octoberhefte 1698 der A. E. kam Johann Bernoulli in dem Aufsatze *Theorema universale rectificationi Linearum Curvarum inserviens*[1]) auf den Gegenstand zurück und fragte nunmehr, ob nicht der Kreisbogen der früheren Untersuchung durch eine Gerade ersetzt werden könne, ob es also nicht Curven gebe, deren Summe oder Differenz eine geradlinig herstellbare Länge besitzen? Er beantwortete die Frage dahin, jede parabolische Curve $a^m y^p = b^n x^q$, wo $m + p = n + q$, sei entweder für sich oder mit einer anderen parabolischen Curve vereinigt rectificirbar. Die erste cubische Parabel mit der Gleichung $3a^2 y = x^3$ habe die Eigenschaft, sich selbst in der Art zugeordnet zu sein, dass auf ihr zwei Curvenstücke angegeben

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 249—253.

werden können, deren Unterschied rectificirbar sei[1]). Einen Beweis des so Ausgesprochenen gab Johann Bernoulli nicht.

Nun trat eine 17jährige Pause ein, bis ein italienischer Gelehrter sich an den Gegenstand wagte. Graf Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano[2]) (1682—1766), gewöhnlich kürzer als Graf Fagnano bezeichnet, gehörte einem alten Adelsgeschlechte in Sinigaglia an. Im Collegio Clementino in Rom, wo er erzogen wurde, zeichnete er sich in allen Fächern aus mit alleiniger Ausnahme der Mathematik. Erst später beim Lesen der *Recherche de la verité* von Malebranche erkannte er die Nothwendigkeit mathematischer Bildung und warf sich voll Eifer und ohne Lehrer auf die früher vernachlässigten Studien, die er bald beherrschte. Er war Consul der Könige von Spanien und Sicilien in seiner Vaterstadt und pflegte die Wissenschaft nur so nebenbei. Hatte er seinen Schreibtisch verlassen, so hörte er ohnedies mit jedem Nachdenken auf. Dieser eigenthümliche Geist hat nun zahlreiche mathematische Arbeiten hervorgebracht, welche meistens zuerst in dem *Giornale de' letterati d'Italia* erschienen, dann in zwei Bänden *Produzioni matematiche* (Pesaro 1750) gesammelt wurden. Auf dem Titelblatte eines jeden der beiden Bände findet sich eine Lemniscate mit der Ueberschrift *Deo veritatis gloria*, und Figur wie Ueberschrift wurden Fagnanos ausdrücklicher Anordnung gemäss auf seinem Grabsteine wiederholt[3]). Wir erkennen daraus, dass Fagnano das grösste Gewicht auf seine Untersuchungen über die Lemniscate legte. Die Zeitfolge wie die Gedankenfolge, welche uns zu Fagnano geführt hat, verlangen indessen, dass vorher über andere Arbeiten berichtet werde[4]).

Im XIX. Bande des *Giornale de' letterati d'Italia*, welches abgekürzt G. L. I. heissen mag, stellte Fagnano 1714 unter ausdrücklicher Berufung auf Johann Bernoulli und dessen Aufsatz in den A. E. von 1698 die Aufgabe, man solle, wenn auf einer biquadratischen Parabel erster Art von der Gleichung $x^4 = y$ ein Curvenstück abgegrenzt sei, auf derselben Parabel ein anderes Stück abgrenzen, so dass beide Curvenstücke einen gradlinig darzustellenden Unter-

[1]) *adeoque est Parabola cubicalis primaria, quae cum se ipsa comparata rectificari potest, seu in qua assignari possunt duo arcus quorum differentia est rectificabilis.* [2]) *Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano fino al Mese di Febbraio dell' anno 1752 inviate dal Padre Don Angelo Calogera abate Benedettino Camaldolese al Conte Giovanni Maria Mazzuchelli* abgedruckt in *Bulletino Boncompagni* III, 37—46. [3]) Bald. Boncompagni im *Bulletino Boncompagni* III, 31. [4]) F. Siacci, *Sul teorema del Conte di Fagnano* im *Bulletino Boncompagni* III, 1—26. — Enneper, Elliptische Functionen, Note VI und VII.

schied besitzen. Im folgenden Jahre 1715 gab Fagnano im G. L. I. XXII die Auflösung seiner Aufgabe unter Verallgemeinerung derselben auf Parabeln verschiedener Art, sofern dieselben nur der Gleichung $y = \frac{2}{m+2}\frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$ genügen, wo m beliebig positiv oder negativ, ganz oder gebrochen gewählt werden darf. Wird s für die Länge des Bogens, t für die Länge der Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zur Abscissenaxe gesetzt, und bedeutet Bestrichelung die Differentiation nach x, so ist $s = \int \sqrt{1+y'^2}\,dx$ und $t = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$. Die gegebene Parabelgleichung liefert $y' = \frac{x^{\frac{m}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$ und $t = \frac{2x}{m+2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}$ nebst

$$s = \int \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}\,dx = \frac{2x}{m+2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m} + \frac{m}{m+2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}$$

$$= t + \frac{m}{m+2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}},$$

wie sich durch nachträgliche Differentiation leicht als wahr erkennen lässt. Demzufolge ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} = \frac{m+2}{m}(s-t).$$

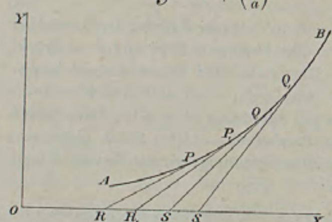

Fig. 71.

Die Einsetzung der Grenzen, um von dem unbestimmten Integrale zu dem bestimmten überzugehen, erfolgt in der Weise, dass, wenn (Figur 71) P, P_1, Q, Q_1 Curvenpunkte bedeuten, denen die Abscissen x_0, x_1, z_0, z_1 angehören, und bei welchen die entsprechenden Längen der Berührungslinien PR, P_1R_1, QS, Q_1S_1 sind, die beiden Gleichungen stattfinden

$$\frac{m}{m+2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} = (\operatorname{arc} AP_1 - \operatorname{arc} AP) - (P_1R_1 - PR)$$

$$= \operatorname{arc} PP_1 - (P_1R_1 - PR)$$

und

$$\frac{m}{m+2}\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}} = \operatorname{arc} QQ_1 - (Q_1S_1 - QS).$$

Kann man die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} = \pm \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}}$$

integriren, so dass die aus ihrer Integralgleichung folgende Transformation von z nach x das Integral

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}} \quad \text{in} \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}$$

übergehen lässt, so müssen auch die diesen beiden bestimmten Integralen gleichen Werthe einander selbst gleich sein, d. h. es muss sein $\operatorname{arc} PP_1 - \operatorname{arc} QQ_1 = (P_1R_1 - PR) - (Q_1S_1 - QS)$. Bei $m = 4$ integrirt sich z. B.

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^4}} + \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^4}} = 0$$

mittels $\frac{x}{a}\cdot\frac{z}{a} = 1$. Die Ausgangsgleichung $y = \frac{2}{m+2}\frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$ heisst alsdann $3a^2y = x^3$. Bei $m = 6$ heisst die Ausgangsgleichung $4a^3y = x^4$, stellt also den Fall der Aufgabe von 1714 her, ebenso wie $m = 4$ der Behauptung Johann Bernoullis von 1698 (S. 484) entspricht. Die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^6}} = \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^6}}$$

wird alsdann durch $2\left(\frac{xz}{a^2}\right)^2 + 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}$ integrirt. Auch der Fall $m = 3$, d. h. die Curve $25a^3y^2 = 4x^5$ wird von Fagnano behandelt und $\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{z}{a}\right) = 3$ als Integral von

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^3}} = \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^3}}$$

erkannt. Andere Einzelfälle übergehen wir und erörtern auch nicht genauer, wie die Gleichungen, welche wir Integralgleichungen genannt haben, dazu dienen z aus x, beziehungsweise z_1 aus x_1 zu finden.

Wieder ein Jahr später, 1716 im G. L. I. XXVI, erschien das *Teorema da cui si deduce una nuova misura degli Archi Elittici, Iperbolici e Cicloidali.* Mit Fagnanos eigener Bezeichnung, in welcher h, l, f, g beliebige Constanten bedeuten und

$$X = \frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}, \quad Z = \frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}$$

ist, heisst der Fagnanosche Satz, dass unter der Voraussetzung

$$\text{F)} \quad (fhx^2z^2)^s + (flx^2)^s + (flz^2)^s + (gl)^s = 0$$

und $s = \pm 1$ das Integral von $X + Z = 0$ im ersten Falle $(s = 1)$ durch $\frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$, im zweiten Falle $(s = -1)$ durch $\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$ dargestellt werde.

Bei $s = 1$ ist

$$\text{F)} \quad fhx^2z^2 + flx^2 + flz^2 + gl = 0$$

und daraus

$$z^2 = \frac{-flx^2 - gl}{fhx^2 + fl}, \quad x^2 = \frac{-flz^2 - gl}{fhz^2 + fl}.$$

Mithin ist

$$\frac{hx^2+l}{fx^2+g} = \frac{-l}{fz^2} \text{ und } \frac{hz^2+l}{fz^2+g} = \frac{-l}{fx^2},$$

und daraus

$$X = \frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}}, \quad Z = \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}, \quad \text{d. h. } X + Z = \left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right)\frac{\sqrt{-l}}{\sqrt{f}}.$$

Differentiation von F) gibt nach Division durch $2fxz\sqrt{-fl}$ die Gleichung

$$\frac{\sqrt{-l}}{\sqrt{f}}\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right) + \frac{h}{\sqrt{-fl}}(zdx + xdz) = 0,$$

beziehungsweise

$$\frac{\sqrt{-l}}{\sqrt{f}}\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right) = \frac{-h}{\sqrt{-fl}}(zdx + xdz) = \frac{-h}{\sqrt{-fl}}\,d(xz)$$

und folglich $X + Z = \frac{-h}{\sqrt{-fl}}\,d(xz)$. Integration bringt daher

$$\int X + \int Z = \frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$$

hervor.

Bei $s = -1$ ist

$$\text{F)} \quad \frac{1}{fhx^2z^2} + \frac{1}{flx^2} + \frac{1}{flz^2} + \frac{1}{gl} = 0.$$

Daraus erhält man

$$x^2 = \frac{-ghz^2 - gl}{fhz^2 + gh}, \quad z^2 = \frac{-ghx^2 - gl}{fhx^2 + gh}.$$

Mithin ist

$$\frac{hx^2+l}{fx^2+g} = \frac{-hz^2}{g} \text{ und } \frac{hz^2+l}{fz^2+g} = \frac{-hx^2}{g},$$

und daraus

$$X = \frac{zdx\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}, \quad Z = \frac{xdz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}},$$

$$X + Z = (zdx + xdz)\frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{g}} = d\left(\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}\right).$$

Hier bringt die Integration $\int X + \int Z = \frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$ hervor.

Der so in seiner allgemeinen Form bewiesene Lehrsatz entwickelt seine eigentliche Wirksamkeit bei der Anwendung auf die Ellipse und die Hyperbel.

Sei (Figur 72) die Ellipse $AIHG$ gegeben, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sein soll. Ihr Bogenelement ist $dx\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}}$.

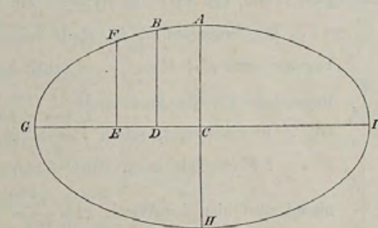

Fig. 72.

Fagnano setzt, um die von ihm gewünschte Form zu erhalten, $a^2 - b^2 = -\frac{ah}{2}$, so dass das Bogenelement $dx\sqrt{\frac{hx^2 + 2a^3}{-2ax^2 + 2a^3}}$ wird, oder X, sofern $l = 2a^3$, $f = -2a$, $g = 2a^3$ gewählt wird. Die Vermittlungsgleichung $z^2 = \frac{-flx^2 - gl}{fhx^2 + fl}$ zwischen z^2 und x^2 heisst alsdann $z^2 = \frac{2a^5 - 2a^3x^2}{2a^3 + hx^2}$ und gestattet, wie im allgemeinen Falle, z zu finden, wenn x gegeben ist. Aus $x = 0$ zum Beispiel folgt $z = a$, und $\frac{-h}{\sqrt{-fl}}$ wird $-\frac{h}{2a^2}$, was auch für x angenommen werden mag. Sind $CD = x$, $CE = z$ zwei zu einander gehörende Abscissen, so stellt $\int X$ den Ellipsenbogen AB, $\int Z$ den Ellipsenbogen AF vor, und der Fagnanosche Lehrsatz spricht aus: $\text{arc } AB + \text{arc } AF = \frac{-hxz}{2a^2} + K$, wo K eine Integrationsconstante ist. Zu deren Bestimmung dient, dass, wie wir hervorgehoben haben, $x=0$ mit $z=a$ zusammen stattfindet. Zugleich fällt aber bei $x=0$ der Punkt B auf A und bei $z=a$ der Punkt F auf G, d. h. es ist $0+\text{arc}\, AG = 0+K$. Setzt man den Werth $K=\text{arc}\, AG$ in die als Ausdruck des Fagnanoschen Lehrsatzes angegebene Gleichung ein, so entsteht

$$\text{arc}\, AB + \text{arc}\, AF - \text{arc}\, AG = -\frac{hxz}{2a^2},$$

oder endlich $\text{arc}\, AB - \text{arc}\, GF = -\frac{hxz}{2a^2}$.

Die Hyperbel dient Fagnano als Beispiel des zweiten Falles, in welchem $\frac{1}{fhx^2z^2} = \frac{1}{flx^2} + \frac{1}{flz^2} + \frac{1}{gl} = 0$ ist, und

$$\int X + \int Z = \frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$$

nach sich zieht. Sei (Figur 73) ABF die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ihr Bogenelement ist $dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2x^2-a^4}}$.

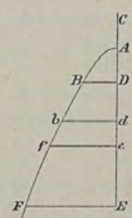

Fig. 73.

Fagnano setzt $a^2+b^2 = \frac{ah}{2}$ und erhält dadurch das Bogenelement in der Form $dx\sqrt{\frac{hx^2-2a^3}{2ax^2-2a^3}}$, welche mit X übereinstimmt, sofern $l=-2a^3$, $f=2a$, $g=-2a^3$ gewählt wird. Das Integral $\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$ nimmt also hier den Werth $xz\sqrt{\frac{h}{2a^3}} = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}$ an, und rechnet man die Hyperbelbögen von A an, nimmt $CD=x$, $CE=z$, wo x und z mittels

$$z^2 = \frac{-ghx^2-gl}{fhx^2+gh} \text{ d. h. mittels } z^2 = \frac{a^2hx^2+2a^5}{hx^2-a^2h}$$

zusammenhängen, so wird $\text{arc}\, AB + \text{arc}\, AF = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K$. Zur Ermittelung der Integrationsconstante K wählt Fagnano diesmal zwei andere Abscissen $Cd=t$, $Ce=u$, wo $u^2 = \frac{a^2ht^2+2a^5}{ht^2-a^2h}$ und erhält so eine zweite Gleichung $\text{arc}\, Ab + \text{arc}\, Af = \frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K$. Durch Abziehen der zweiten Gleichung von der ersten fällt K weg, und es bleibt $\text{arc}\, Ff - \text{arc}\, Bb = (xz - tu)\frac{\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}$. Er fügt die Bemerkung hinzu, der eine der beiden Hyperbelbögen, etwa Ff, könne ganz beliebig angenommen werden, worauf der andere bestimmt sei.

In späteren Aufsätzen von 1717 G. L. I. XXIX und 1720 G. L. I. XXXIII hat Fagnano noch weitere Differentialgleichungen mit Quadratwurzeln behandelt und gezeigt, dass $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = 0$ mittels $x^2+z^2+x^2z^2=1$ und $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \pm \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = 0$ mittels

$$x^2+z^2-x^2z^2 \pm 2xz\sqrt{2} = 1$$

integrirt werde, dadurch eine Bahn zu neuen Entdeckungen eröffnend.

Wir haben (S. 485) von Fagnanos Untersuchungen über die Lemniscate gesprochen. Dieselben ziehen sich durch mehrere Abhandlungen, deren älteste aus dem Jahre 1718 zu stammen scheint[1]). Die gewöhnliche Gleichung der Lemniscate $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(a^2-y^2)$ kann durch das Gleichungspaar $\frac{x}{a} = \sqrt{u+u^2}$, $\frac{y}{a} = \sqrt{u-u^2}$ ersetzt werden. Dann ist $dx^2 = \frac{a^2}{4}\frac{(1+2u)^2}{u+u^2}du^2$, $dy^2 = \frac{a^2}{4}\frac{(1-2u)^2}{u-u^2}du^2$,

$$ds^2 = dx^2+dy^2 = \frac{a^2}{2u(1-u^2)}du^2 \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}}.$$

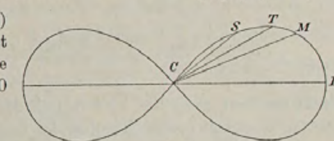

Fig. 74.

Der Bogen CS (Figur 74) soll von C an gerechnet werden, wo $x=0$ sowie $y=0$, mithin auch $u=0$ ist. Im Punkte L ist

$$x = a\sqrt{2}, \quad y = 0$$

mithin $u=1$. Im Punkte S mag $x = a\sqrt{m+m^2}$, $u=m$ sein. Man hat alsdann

$$\text{arc}\, CS = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^m \frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}}.$$

Nun wird eine neue Veränderliche v mittels $u = \frac{1-v}{1+v}$ eingeführt. Diese Substitution macht, dass bei $u=0$, $v=1$ und bei $u=m$, $v=\frac{1-m}{1+m}$ wird. Ausserdem wird

$$du = -\frac{2dv}{(1+v)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{u(1-u^2)}} = \frac{1+v}{2}\sqrt{\frac{1+v}{v(1-v)}}.$$

[1]) Poggendorff I, 715. — Wir geben unseren Auszug nach Enneper, Elliptische Functionen, Note VII, da uns Fagnanos Werke und ebenso das G. L. I. nicht zur Verfügung standen. Dass allerdings Enneper sich nicht genau an Fagnano angeschlossen haben kann, geht aus der geführten Rechnung hervor.

Man erhält so

$$\operatorname{arc} CS = -\frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{1}^{\frac{1-m}{1+m}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{1-m}{1+m}}^{1}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{1}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\frac{1-m}{1+m}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}}.$$

In den beiden rechts stehenden Integralausdrücken kann man ohne Weiteres den Integrationsbuchstaben v wieder durch u ersetzen. Sie bedeuten augenscheinlich wieder Lemniscatenbögen, und zwar beginnen beide bei C, wo $u = 0$ war. Der erste derselben endet bei L, wo, wie wir bemerkten, $u = 1$ ist, der zweite etwa in M, wenn dort $u = \frac{1-m}{1+m}$, beziehungsweise $x = \frac{a}{1+m}\sqrt{2-2m}$ ist. Die gefundene Gleichung heisst demnach $\operatorname{arc} CS = \operatorname{arc} CL - \operatorname{arc} CM = \operatorname{arc} ML$. Zwei Lemniscatenbögen von gleicher Länge sind gefunden, deren einer in C, der andere in L beginnt, während die anderen Endpunkte durch $u = m$ und $u = \frac{1-m}{1+m}$ bestimmt sind. S und M fallen beide in einen Punkt T zusammen, wenn $m = \frac{1-m}{1+m}$, d. h. $m = \sqrt{2} - 1$ ist. Dazu gehört der Wert $x = a\sqrt{2-\sqrt{2}}$ und der über diesem Abscissenpunkt liegende Lemniscatenpunkt T halbirt den Lemniscatenquadranten CTL.

Fagnano wusste aber ausser der Halbirung des Lemniscatenquadranten auch dessen Dritttheilung und Fünftheilung zu vollziehen, worauf wir nicht näher eingehen, und er zog die Folgerung, der Lemniscatenquadrant lasse sich algebraisch n-theilen, wenn n in einer der Formen $2 \cdot 2^m$, $3 \cdot 2^m$, $5 \cdot 2^m$ enthalten sei, wo m eine ganze positive Zahl bezeichnet. Dieses ist, ruft er aus, eine neue und eigenthümliche Eigenschaft meiner Curve[1]).

[1]) *Questa è una nuova e singolare proprietà della mia curva.*

XVIII. Die Zeit von 1727—1758.