89. Kapitel.

Newtons und Leibnizens erste Entdeckungen im Gebiete der Infinitesimalrechnung.

Was wir im letzten Kapitel an neuen Errungenschaften in der Curvenlehre mitzutheilen hatten, war geistreichen Benutzern längst bekannter Methoden zu verdanken. Inzwischen waren aber neue Methoden entstanden, und ihre Erfindung zu erzählen, von der wir schon am Schlusse des XV. Abschnittes als bevorstehend sprachen, um im letzten Kapitel (S. 131), die Ankündigung zu wiederholen, ist nunmehr unsere Aufgabe.

Wir haben zuerst von Newtons Analysis per aequationes, von seiner Erstlingsabhandlung von 1666 beziehungsweise 1669 (S. 68) zu reden. Wir haben als Inhalt derselben den binomischen Lehrsatz bei beliebiger Annahme des Exponenten und die näherungsweise erfolgende Auflösung von Gleichungen kennen gelernt, einen Inhalt, der vollauf genügte, dem Verfasser unsterblichen Ruhm zu sichern. Aber jener Inhalt war, möchte man sagen, eingerahmt zwischen Aeusserungen, auf welche man später noch grösseres Gewicht legte. Die Abhandlung beginnt nämlich mit einer Regel für die Quadratur einfacher Curven, welche $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ sei, falls die Gleichung der Curve $y = ax^{\frac{m}{n}}$ war, und gegen den Schluss der Abhandlung findet sich ein Beweis der Regel.

Sie war nichts weniger als neu. Wallis (Bd. II, S. 826) hatte sie 1655, wenn auch nicht in demselben Wortlaute doch dem Sinne nach, aufgestellt. Newtons Beweis ist folgender (Figur 27). Die Basis AB einer Curve $AD\delta$ möge durch x bezeichnet sein, die senkrechte Applicate BD durch y, die Fläche ABD durch z. Das kleine Stückchen $B\beta$ wird durch den Buchstaben o bezeichnet, den man ja nicht, wie es mitunter geschehen ist, mit einer Null verwechseln darf, ausserdem sei $BK = v$, und das Rechteck $BKH\beta (= ov)$ sei flächengleich mit $B\beta\delta D$. Man hat also $A\beta = x + o$, $A\delta\beta = z + ov$. Newton nimmt nun die Abhängigkeit des z von x als gegeben an und sucht daraus y; mit Ausdrücken, welche Newton

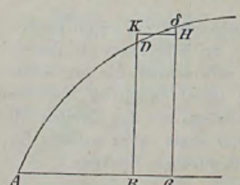

Fig. 27.

nicht kannte, würde man sagen, aus $z = \int y\,dx = F(x)$ sucht er $y = \frac{dF(x)}{dx}$. Als Beispiel wählt er $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = z$ oder, indem $\frac{na}{m+n} = c$, $m + n = p$ gesetzt ist, $cx^{\frac{p}{n}} = z$, beziehungsweise $c^n x^p = z^n$. Geht x in $x + o$ über, so nimmt z den Werth $z + ov$ oder auch den davon nicht verschiedenen Werth $z + oy$ an.[1]). Das liefert die neue Gleichung

$$c^n(x + o)^p = (z + oy)^n.$$

Wendet man links und rechts die Binomialentwicklung an, so entsteht

$$c^n x^p + c^n p x^{p-1} o + \cdots = z^n + n z^{n-1} o y + \cdots,$$

und durch Subtraktion von $c^n x^p = z^n$ und darauf folgender Division durch o findet man

$$c^n p x^{p-1} + \cdots = n z^{n-1} y + \cdots,$$

wo sämmtliche durch Punkte angedeutete Glieder links wie rechts vom Gleichheitszeichen den Faktor o noch enthalten, folglich wegfallen, wenn o verschwindet. Newton dürfte diese Benutzung des Buchstaben o für eine nachmals zum Verschwinden gebrachten Grösse aus der 1667 in Venedig gedruckten *Geometriae pars universalis* des James Gregory entlehnt haben, wenigstens findet sie sich dort im 7. Satze in genau mit Newton übereinstimmender Weise[2]). Aus der übrig bleibenden Gleichung $c^n p x^{p-1} = n z^{n-1} y$ entsteht dann

$$y = \frac{c^n p x^{p-1}}{n z^{n-1}} = \frac{c^n p x^{p-1} z}{n z^n} = \frac{c^n p x^{p-1} z}{n c^n x^p} = \frac{pz}{nx} = \frac{p c x^{\frac{p}{n}}}{nx}$$

$$= (m + n)\frac{na}{m+n}\frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{nx} = a x^{\frac{m}{n}},$$

und rückwärts hat also die Curvengleichung $y = ax^{\frac{m}{n}}$ die Fläche $z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$ zur Folge. Newton fügt hinzu, man könne auch andere Gleichungsformen für den Zusammenhang zwischen z und x wählen. Bei $z = \sqrt{a^2 + x^2}$ sei $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ und so bei den übrigen[3]).

Gestatten wir uns wieder die Ausdruckweise der heutigen Mathematik, so sind wir berechtigt aus diesen Aeusserungen die Folgerung

---

[1]) *sive, quod perinde est, $z + oy$.* [2]) Zeuthen in Oversigt overdet kgl. Danske videnskabernes selskabs forhandlinger 1897, pag. 591 Note 1. [3]) *Et sic de reliquis.*

zu ziehen, dass Newton, als er so schrieb, Potenzen von Polynomien mit positiven, vielleicht auch negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten zu differentiiren wusste, während von der Differentiation von Produkten und Quotienten sich noch keine Spur findet. Wir erkennen ferner, dass es Newton klar war, dass die Gleichung der Curve durch Differentiation der Gleichung für die Curvenfläche entstehe. Andererseits ist die Aehnlichkeit von Newtons Verfahren mit Barrows rechnender Tangentenmethode (S. 136) nicht von der Hand zu weisen. Man wird unter Berücksichtigung des Umstandes, dass Barrow jenes Verfahren auf Newtons Andrängen zum Drucke gab, zu einer von zwei Vermuthungen gedrängt: entweder hat Barrow den Anregungen Newtons, oder Newton, der Schüler Barrows, den Anregungen seines Lehrers sehr viel zu verdanken gehabt. Wir wollen nicht entscheiden, welche Vermuthung die richtigere ist; vielleicht traf beides zusammen. Das aber glauben wir behaupten zu können, bezüglich der Differentiation war von einem unbefangenen und unwissenden Leser nicht mehr aus diesem Kapitel von Newtons handschriftlicher *Analysis per aequationes* als aus Barrows gedruckten *Lectiones geometricae* zu entnehmen und umgekehrt. Nur in einer Beziehung, auf welche allerdings einige Forscher ein sehr grosses Gewicht legen[1], kann man von einem Fortschritte reden: in der *Analysis per aequationes* war deutlicher als bei irgend einem Vorgänger, Barrow (S. 137) nicht ausgeschlossen, der Gegensatz zwischen Quadratur und Tangentenproblem, mithin auch die Uebereinstimmung der Quadratur mit dem, was das umgekehrte Tangentenproblem zu ermitteln suchte, zu erkennen.

Aber Newton hat noch Anderes zwischendrein erörtert. Wir sahen früher (S. 106—107), dass Newton aus einer x und y enthaltenden Gleichung y in Gestalt einer nach Potenzen von x fortlaufenden Reihe zu entwickeln lehrte. Seine Absicht dabei war, die Quadratur der durch jene Gleichung zwischen x und y definirten Curve zu ermitteln. Wenn[2]) die Gleichung

$$y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$$

den Werth

$$y = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3} + \text{etc.}$$

nach sich zieht, so kann nach den am Anfange der Abhandlung gelehrten Regeln die Curve quadrirt werden und ihre Fläche stellt sich alsdann dar durch

---

[1]) Besonders P. Tannery und Zeuthen sind dieser Meinung. [2]) *Opuscula Newtoni* I, 15.

$$\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{a^2}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2} \text{ etc.}$$

Der sonderbar aussehende Ausdruck $\boxed{\frac{a^2}{64x}}$ wird dahin erklärt, es handle sich hier um ein hyperbolisches Flächenstück, welches der übrigen durch die anderen Reihenglieder gemessenen Fläche hinzuzufügen sei. Eine Bemerkung dagegen, welche ausspräche, jenes hyperbolische Flächenstück sei $\frac{a^2}{64}\log x$, findet sich nicht.

Curvenlängen, Körperinhalte und Körperoberflächen, auch Schwerpunkte zu bestimmen, heisst es dann später[1]), seien lauter Aufgaben, welche auf Quadraturen sich zurückführen lassen. Der Grundgedanke sei folgender (Figur 28). Das Flächenstück ABD ist durch irgend eine Curve AD und die Strecken $AB = x$, $BD = y$ begrenzt. AH oder BK soll die Längeneinheit sein, so dass das Rechteck

$$ABKH = x \cdot 1 = x$$

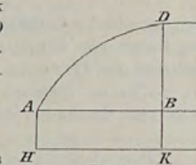

Fig. 28.

ist. Die Fläche ABD ebenso wie das Rechteck $ABKH$ kann durch gleichmässige bei AH beginnende Fortbewegung der DBK entstanden gedacht werden. Dabei ist $BK = 1$ das Moment, *momentum*, gemäss dessen $ABKH = x$, und $BD = y$ das Moment, gemäss dessen ABD sich allmälig vergrössert. Ist BD fortwährend gegeben, so kann nach den früheren Regeln die Fläche ABD bestimmt, beziehungsweise mit der Fläche $ABKH$ verglichen werden, welche gemäss des Momentes 1 entstand. Wir haben das lateinische Wort Moment einfach übernommen. Es bedeutet, wie wir sehen, eine in einem kürzesten Zeitraume sich vollziehende räumliche Veränderung und kann ganz passend durch das deutsche Wort einer Augenblicksveränderung wiedergegeben werden.

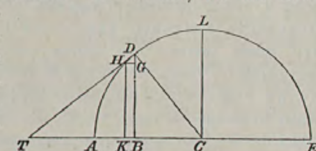

Fig. 29.

Newton macht die Anwendung seines Gedankens auf die Bestimmung der Bogenlänge AD eines Kreisbogens (Figur 29). Er zieht die Berührungslinie DHT und die Seiten des unendlich kleinen Rechtecks $HGBK$. Als Ein-

---

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 18.

heit wird der Durchmesser

$$AE = 2AC = 2DC$$

angenommen. BK oder das ihm gleiche GH ist die Augenblicksveränderung der Basis x, HD die des Bogens AD, und nun verhält sich $GH : HD = BT : TD = BD : CD = \sqrt{x - x^2} : \frac{1}{2} = 1 : \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} = 1 : \frac{\sqrt{x - x^2}}{2x - 2x^2}$. Betrachtet man, was Newton freilich zunächst nicht sagt, die Augenblicksveränderung der Basis als Einheit für die anderen Augenblicksveränderungen, so zeigt sich

$$\frac{\sqrt{x - x^2}}{2x - 2x^2} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

als Augenblicksveränderung der Bogenlänge. Von der Veränderung des Bogens zum Bogen ist der gleiche Uebergang, wie von der Veränderung der Fläche zur Fläche. Newton spricht diese Behauptung in den für die damalige Zeit dunklen Worten aus, aus jener Reihe folge nach den für die Quadraturen gegebenen Regeln die Bogenlänge

$$AD = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}} \text{ etc.}$$

Eine hinzugefügte Erläuterung ersetzt dann jene erst verschwiegene Bemerkung, dass die Augenblicksveränderung der Basis als Einheit derjenigen des Bogens gelte. „Die Einheit für die Augenblicksveränderungen, sagt er[1]), ist Oberfläche wo es um Körperinhalte, Linie wo es um Flächenräume, Punkt wo es (wie in diesem Beispiele) um Längen sich handelt, und ich scheue mich nicht von Punkten oder unendlich kleinen Linien als Einheiten zu reden."

Wir sehen in diesen Aeusserungen Newtons einmal das deutlicher werdende Bewusstsein auftreten, dass Rectification, Kubatur, Quadratur Aufgaben von wesentlich gleicher Natur sind. Wir sehen zweitens den Begriff der Augenblicksveränderung hervortreten. Diesen hat Barrow nicht besessen, so nahe im Uebrigen, wie wir wiederholen dürfen, dessen Lectiones geometricae den Newtonschen Gedanken verwandt waren. Er ist Newton eigenthümlich und bildet die der Bewegungslehre entnommene Grundlage seiner weiteren Forschungen.

Diese kamen allerdings sehr viel später an die Oeffentlichkeit,

[1]) *Sed notandum est, quod unitas ista, quae pro momento ponitur, est Superficies quum de Solidis, et Linea quum de Superficiebus, et Punctum quum de Lineis (ut in hoc exemplo) agitur. Nec vereor loqui de unitate in Punctis, sive Lineis infinite parvis.*

und wir verlassen Newton, um zum Berichte über Leibniz und seine Leistungen auf dem Gebiete der Infinitesimalgeometrie überzugehen. Leibniz war seit 1669 im Briefwechsel mit Oldenburg. Am 10. August 1670 machte dieser ihn auf Barrows *Lectiones tum Opticae tum Geometricae* als ein von urtheilsfähigen Lesern sehr geschätztes Werk[1]) aufmerksam. Im Januar 1673 nahm Leibniz seinen ersten Londoner Aufenthalt, wo er, wie (S. 30) begründet wurde, nicht mit Collins bekannt wurde, also nicht in der Lage war, die bei diesem ruhende Abhandlung Newtons, die Analysis per aequationes, lesen zu können. Dagegen brachte er Barrows Lectiones opticae käuflich an sich, von deren Besitze in einem Briefe die Rede ist[2]), welchen Leibniz, nach Paris zurückgekehrt, im April 1673 an Oldenburg schrieb. Wenn darin nur die optischen Vorlesungen genannt sind, so kann doch kein Zweifel daran obwalten, dass ein Exemplar der vereinigten optischen und geometrischen Vorlesungen gemeint war. Ein solches Exemplar mit handschriftlichen Randbemerkungen Leibnizens versehen ist nämlich in seinem Nachlasse aufgefunden worden[3]). Eine nicht unwichtige Frage ist hier aufzuwerfen: Hat Leibniz die Lectiones gleich im April 1673 studirt, oder hat er das Buch erst geraume Zeit in seinem Besitze gehabt und ist erst dann zur Aneignung seines Inhaltes geschritten, als er Barrow gegenüber selbständig schon Vieles ersonnen hatte, zu welchem er dort eine allerdings nur geringe Anregung, aber immerhin eine Anregung hätte finden können?

Zu Gunsten der Meinung, dass Leibniz das erworbene Buch sofort studirte, hat man verschiedene Gründe angeführt[4]). Erstlich spricht dafür die allgemeine Wahrscheinlichkeit. Ein Mathematiker, der wie die in der Note abgedruckte oben erwähnte Briefstelle vom April 1673 beweist, die optischen Theile des Buches las, wird nicht grade da aufhören, wo von der ihn weit mehr interessirenden Geometrie die Rede ist. Zweitens hat Barrow die unendlich kleinen Katheten des aus den Zuwächsen der Abscisse und der Ordinate und aus der Tangente gebildeten Dreieckchens durch e und a bezeichnet (S. 135), und noch im October 1675 führen die gleichen Stückchen bei Leibniz, der des gleichen unendlich kleinen Dreiecks sich

[1]) Leibniz I, 12 [2]) Ebenda I, 46: *Attuli mecum Barrovii Lectiones Opticas; sub libri calcem doctissimus autor phaenomenon exhibet, cujus rationem reddere posse negat, aliosque ut inquirant hortatur; aut ut, si possint, causam sibi communicent rogat; dubitat vero ut id facile praestari possit. Hugenius tamen et Mariottus ejus solutionem se habere dixere.* [3]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle, 1855. S. 48. [4]) F. Giesel, Die Entstehung des Newton-Leibnizischen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Osterprogramm der höheren Bürgerschule zu Delitzsch, 1866. S. 13, Note 6.

bedient, bestimmte Buchstaben als Bezeichnung, nämlich die Buchstaben a und l[1]).

Wenn wir das Gewicht dieser Gründe keineswegs verkennen, so lässt sich ihnen doch mancherlei entgegenhalten. Man kann sagen, bestimmte Buchstaben für unendlich kleine Zuwächse seien seit Fermats E allgemein angewandt worden, so dass das Neue einzig darin bestand, zwei unendlich kleine Längen durch Buchstaben zu bezeichnen. Man kann auf einen Brief Leibnizens an den Marquis de l'Hospital von Ende December 1694 sich berufen[2]). Leibniz erklärt dort, er habe bei Beginn seiner Infinitesimaluntersuchungen von den Indivisibilien Cavalieris, von dem Ductus plani in planum des Gregorius a Sto. Vincentio, von der Synopsis geometrica des Honoré Fabri von 1669 genaue Kenntniss gehabt, also von dem was aus diesen oder ähnlichen Schriftstellern geschöpft werden könne[3]). Dass Barrow nicht unter die Worte ähnliche Schriftsteller inbegriffen werden darf, ist ausdrücklich durch die jener Erklärung vorausgeschickten Worte[4]) betont: „Ich erkenne an, dass Herr Barrow sehr weit gegangen ist, aber für meine Methoden brachte er mir keinerlei Hilfe.“ Dann führt Leibniz in Anschluss an das obige auf die ähnlichen Schriftsteller Bezügliche fort: Jetzt lieh mir Herr Huygens die Briefe Dettonvilles oder Pascals. Ich prüfte dessen Beweis für die Kugeloberfläche, und mir kam ein Licht, welches der Verfasser nicht gesehen hatte“[5]). Leibniz sagt also hier ganz unzweideutig, Pascal habe ihm den Gedanken des Dreieckchen eingeflösst[6]), welches er das charakteristische Dreieck nenne[7]). Er habe darüber mit Huygens gesprochen und dieser ihn alsdann auf Descartes hingewiesen, damit er mit dessen Verfahren sich vertraut mache, Gleichungen zur Darstellung der Natur krummer Linien anzuwenden. Nach weiteren Ausführungen schliesst Leibniz seine Erzählung mit den Worten[8]): „Ich habe öffentlich anerkannt, was ich Herrn Huygens und bezüglich der unendlichen Reihen Herrn Newton schulde. Ich hätte Herrn Barrow gegenüber ebenso gehandelt, wenn ich aus ihm geschöpft hätte.“

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis. S. 123. [2]) Leibniz II, 259. [3]) *ce qui peut se tirer de ces auteurs ou leurs semblables.* [4]) *Je reconnais que M. Barrow est allé bien avant, mais je puis vous assurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes méthodes.* [5]) *J'y trouvay une lumiere que l'auteur n'avait point veue.* [6]) Ueber das Verhältniss von Leibniz zu Pascal vergl. C. J. Gerhardt, Leibniz und Pascal, in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1891, S. 1053 flgg. [7]) *que j'appelle le triangle caractéristique.* [8]) *Comme j'ay reconnu publiquement, en quoy j'estois redevable à M. Huygens et à l'egard des series infinies à M. Newton, j'en aurais fait autant à l'egard de M. Barrow, si j'y avais puisé.*

Wir müssen hier kurz einschalten, dass es leicht fällt, die Stelle Pascals nachzuweisen, auf welche Leibniz in seinem Briefe, und wie wir zeigen werden, auch anderwärts, anspielte. Sie findet sich in dessen *Traité des sinus du quart de cercle*[1]) und ist von einer Zeichnung (Figur 30) begleitet, bei welcher es auf die Aehnlichkeit der Dreiecke EKE und DIA ankommt. Wir haben (Bd. II, S. 916) darauf hingewiesen.

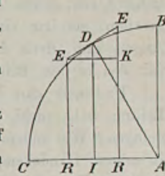

Fig. 30.

Auch anderwärts, sagen wir, hat Leibniz die Einwirkung Pascals, aber nicht Barrows, auf seinen Geist ganz ähnlich wie in dem Briefe an L'Hospital geschildert. In einer nicht abgeschickten, aber handschriftlich erhaltenen Nachschrift zu einem Briefe vom April 1703 an Jakob Bernoulli sagt Leibniz noch etwas weitergehend, er habe nachmals bei Barrow, als dessen Vorlesungen erschienen, einen grossen Theil seiner eigenen Sätze vorweggenommen gefunden[2]). An Freiherr Christian von Wolf schreibt Leibniz etwa 1716, Barrow habe für das Tangentenproblem nichts geleistet, was nicht auf Vorarbeiten von Fermat, von Roberval, von De Sluse und anderen beruhe; er habe in dessen Vorlesungen, als er, so weit er sich erinnere im Jahre 1675, Einsicht davon nahm[3]), nichts Bemerkenswerthes darin gefunden, um so weniger als er selbst damals Reiferes besessen habe. In der zwischen 1714 und 1716 verfassten Abhandlung *Historia et origo calculi differentialis* hat Leibniz wiederum Pascal als den Schriftsteller genannt, aus dessen Arbeiten er Folgerungen gezogen habe, die Pascal selbst entgangen waren[4]).

Soll Leibniz an allen diesen Stellen die Unwahrheit gesagt haben? Warum? Um sich mit fremden Federn zu schmücken? Er gibt ja fremde Anregung zu! Er beruft sich auf Pascal! Also nur um dem Engländer Barrow nichts zu verdanken zu haben? Wir wissen, wohin Parteisucht nnd Parteihass führen können, wir werden im XVII. Abschnitte traurige Geschichten davon zu erzählen haben. Aber wenn man die Ansicht hegt, Leibniz habe gegen alle mit ihm in Briefwechsel stehende Gelehrten gelogen, will man auch bedachte Lüge in dem Aufsatze *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* wittern, welchen Leibniz 1686 in den A. E. veröffent-

[1]) Pascal, Oeuvres III, 409. [2]) Leibniz III, 72—73 in der Anmerkung: *quemadmodum et Barrovio demum cum ejus Lectiones prodirent, ubi magnam partem meorum theorematum praeceptam vidi.* [3]) Leibniz Briefwechsel, Supplementband S. 186: *cum Barrovianas lectiones vidi (Anno Domini 1675 quantum recordor).* [4]) Leibniz V, 399.

lichte, also zu einer Zeit, als er zum Hasse gegen Engländer nicht die geringste Veranlassung hatte? Er nannte allerdings Pascal dort nicht, aber er sprach sich für uns doch mit hinlänglicher Deutlichkeit aus, indem er erzählte[1]), er habe plötzlich ein helles Licht gesehen, als ihm ein Beweis für die Grösse der Kugeloberfläche zu Augen kam, denn diese Redewendung deckt sich fast buchstäblich mit den in dem Briefe an L'Hospital vorkommenden Ausdrücken.

Und will man schliesslich so weit gehen, behaupten zu wollen, Leibniz habe nicht bloss alle Andere, er habe auch sich selbst angelogen? Wie anders wäre denn die Thatsache zu nennen, dass Leibniz in seinem Handexemplare der Lectiones geometricae mehrere mathematische Formeln an den Rand schrieb, in welchen Integralzeichen vorkommen[2]), von denen wir sehen werden, dass sie grade 1675 in Gebrauch genommen wurden, was also eine Bestätigung des Christian von Wolf mitgetheilten Studiendatums in sich schliesst? Oder soll man sich mit der Deutung begnügen, Leibniz werde die Barrowschen Lectiones wiederholt gelesen haben, einmal 1673, dann abermals 1675, und beim zweiten Lesen habe er jene Randbemerkungen eingeschrieben?

Wir haben unsere Ueberzeugung, dass Leibniz die Benutzung des unendlich kleinen, einem endlichen Dreiecke ähnlichen Dreieckchen Pascal und nicht Barrow schuldete, zu vertreten gesucht. Schliesslich kommt bei der ganzen Streitfrage wissenschaftlich nichts heraus, und nur die Wahrheitsliebe oder die Verlogenheit Leibnizens steht auf dem Spiel, je nachdem man sich für die eine oder für die andere Meinung entscheidet. Sicher ist unter allen Umständen, dass Leibniz von jenem Dreieckchen, das er gar nicht selbst zuerst angewandt haben will, frühzeitig Gebrauch machte.

Leibniz hatte die gute Gewohnheit, die losen Blätter, auf welchen er seine mathematischen Untersuchungen anstellte, und die in ziemlicher Anzahl in seinem Nachlasse gefunden worden sind, zu datiren. Im August 1673 versuchte er sich schon an einer allgemeinen Tangentenmethode[3]), welche also, wie hervorgehoben werden mag, seinen Ausgangspunkt bildete, während Newton von den Quadraturen her zu Infinitesimalbetrachtungen gelangte. Gleich in diesem ersten Aufsatze wird die Curve als Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet, wird die Aehnlichkeit des Dreiecks aus einer dieser unendlich kleinen Seiten und den Differenzen der Ab-

[1]) Leibniz V, 232: *Mihi contigit adhuc tironi in his studiis, ut ex uno aspectu cujusdam demonstrationis de magnitudine superficiei sphaericae subito magna lux aboriretur.* [2]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 48. [3]) Ebenda S. 55—56.

scissen und der Ordinaten ihrer Endpunkte mit dem aus der Tangente, der Subtangente und der Ordinate des Berührungspunktes gebildeten Dreiecke benutzt. Leibniz bezeichnet den unendlich kleinen Abscissenunterschied durch b. Er lässt Glieder, welche b als Faktor enthalten, weg; aber es sei nicht sicher, diese Vielfachen von b sogleich von Anfang an zu verwerfen[1]), sie könnten im weiteren Verlaufe zur Ausgleichung gegen andere Glieder sich als nothwendig erweisen und der Gleichung eine ganz andere Gestalt verleihen. Leibniz hat ferner schon hier das Bewusstsein von der Differenzennatur der unendlich kleinen Katheten des wiederholt genannten Dreieckchens. Die ganze Frage spitzt sich ihm darauf zu, aus der Differenz zweier Ordinaten die Ordinaten selbst zu finden[2]). Er weiss aber auch, dass das umgekehrte Tangentenproblem auf Quadraturen, auf Auffindung von Flächenräumen zurückführbar erscheine[3]). Von diesem Augenblicke an gewinnt auch für Leibniz die Lehre von den Quadraturen erhöhte Wichtigkeit. Zum Theil sehr umfangreiche Entwürfe vom October 1674 und Januar 1675, welche aber leider nicht gedruckt sind, scheinen diesen Umschwung über jeden Zweifel zu erheben[4]). Gedruckt ist eine längere Abhandlung, welche in den Tagen vom 25., 26., 29. October, 1. November 1675 entstanden ist[5]). Ueberraschend dürfte für die meisten Leser der Abhandlung das Vorkommen des Wortes *momentum* gleich in den ersten Zeilen und im ganzen Verlaufe der Abhandlung sein.

Das ist ja derselbe Kunstausdruck, dessen Newton sich bediente, um die Augenblicksveränderung der wachsenden Grösse zu benennen, und es war doch wiederholt behauptet worden, Leibniz habe vor seinem zweiten Londoner Aufenthalte, mithin vor October 1676, von der Analysis per aequationes keine Kenntniss gehabt? Wir halten diese Behauptung im vollen Umfange aufrecht. Nur das Wort, nicht der Sinn derselben stimmt bei Leibniz und Newton überein. Leibnizens *momentum* ist der mechanische Begriff des Wortes (Bd. II, S. 569), wie denn auch Leibniz am 25. October nur über die Beziehungen zwischen den Momenten einer Figur mit Rücksicht auf zwei gegebene Gerade, der Fläche der Figur und der Lage ihres Schwerpunktes Untersuchungen anstellte. Er blieb dabei der Hauptsache nach auf dem von Guldin eingeschlagenen Wege (Bd. II, S. 841), und wenn auch Guldin selbst im Texte nicht genannt ist, so ist die

[1]) *non est tutum ipsius infinite parvi b multipla ab initio rejicere.* [2]) *Tota quaestio est, quomodo ex differentiis duarum applicatarum ipsae inveniri queant applicatae.* [3]) *Hinc intelligi potest fere totam doctrinam de methodo tangentium inversa revocabilem videri ad quadraturas.* [4]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 57—58. [5]) Ebenda S. 117—131.

Centrobaryca, von welcher die Rede ist, gewiss als dessen so betitelte Schrift zu deuten, nicht etwa allgemein als Schwerpunktsuntersuchungen oder dergleichen.

Am 26. October treten die Cavalierischen Gesammtheiten auf. *Omnia w, omn xw* und dergleichen Ausdrücke kehren fort und fort wieder. Am 29. October 1675 erfolgt der grosse Schritt der Erfindung des neuen Algorithmus[1]). *Utile erit scribi* $\int$ *pro omn. ut* $\int l$ *pro omn. l id est summa ipsorum l*, es wird nützlich sein $\int$ statt *omnia* zu schreiben, um die Summe einer Gesammtheit zu bezeichnen. Hier zeige sich, heisst es in der an demselben Tage geschriebenen Fortsetzung weiter[2]), eine neue Gattung des Calcüls; sei dagegen $\int l = ya$ gegeben, so biete sich ein entgegengesetzter Calcül mit der Bezeichnung $l = \frac{ya}{d}$, *nempe ut* $\int$ *augebit, ita d minuet dimensiones.* $\int$ *autem significat summam, d differentiam*, das heisst auf deutsch: Wie nämlich $\int$ die Abmessungen vermehrt, so vermindert sie d. $\int$ aber bedeutet Summe, d Differenz.

Das war ein wesentlich Neues, aus Leibnizens eigenem Geiste entsprungen, und wozu er nirgend eine Anregung erhalten konnte, nicht bei Pascal, nicht bei Barrow, nicht in Newtons Analysis per aequationes, wenn Jemand allen Gegenbeweisen zum Trotz darauf beharren wollte, Leibniz habe sie im October 1675 kennen können.

Allerdings besass Newton, wie wir bald sehen werden, muthmasslich seit 1671 Aehnliches, aber es war, wiewohl zur Veröffentlichung bestimmt, für Jedermann ohne irgend eine Ausnahme tiefstes Geheimniss, und für die Wissenschaft als solche, der es gleich gilt, ob dieser, ob jener ihr neue Bahnen bricht, war es ein Glück, dass Leibniz unbeeinflusst die Zeichensprache erfinden durfte.

Sie hat mit anderen Sprachen das gemein, dass sie erst allmälig aus unvollkommenen Anfängen zu immer höherer Ausbildung sich entwickelte, zu immer grösserer Ausbreitung gelangte, ein Gebiet, ein Land nach dem andern erobernd, während der Geist der Sprache unverändert derselbe blieb, während die Begriffe Summe und Differenz stets mit gleicher Deutlichkeit sich erkennen liessen.

Wie allmälig die Sprache sich vervollkommnete, zeigt ein handschriftlich erhaltener in unserem Jahrhunderte zum Druck beförderter Aufsatz vom 11. November 1675 über inverse Tangentenaufgaben,

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 125. [2]) Ebenda S. 126.

Methodi tangentium inversae exempla[1]). Am Anfang ist das $\int$ und das als Nenner eines Bruches auftretende d ganz so wie in den früheren Aufsätzen benutzt. Auf einmal erscheint mitten im Texte dx, und eine Randnote Leibnizens sagt, dx sei das gleiche wie $\frac{x}{d}$, nämlich die Differenz zweier nächstliegender x-Werthe[2]), und noch etwas später[3]) kommt auch dy vor und $\int y dy = \frac{y^2}{2}$, also genau so geschrieben, wie es später geblieben ist, während im Aufsatze selbst Zeichen wie $\int x$, $\int \sqrt{x^2 + y^2}$ u. s. w. auch nachher neben $\int dx$, $\int dy$ u. s. w. auftreten.

Wir haben das Hauptgewicht auf die Bezeichnung legen zu müssen geglaubt. Das steht im Zusammenhang mit unserer wiederholt ausgesprochenen Ansicht, dass die Infinitesimalbetrachtungen selbst schon vor Newton und Leibniz so weit gediehen waren, dass es hauptsächlich auf die Erfindung einer zweckmässigen Bezeichnung ankam, ehe wesentliche Fortschritte möglich waren. Nunmehr war eine Bezeichnung vorhanden, in unanfechtbarer Selbständigkeit von Leibniz erfunden.

Etwas anders verhält es sich mit dem Inhalte der in neuer Form niedergeschriebenen Aufsätze Leibnizens vom October und November 1675. Man hat bezüglich desselben Anklagen gegen Leibniz erhoben, die zu erörtern sind. Im September 1675 war Tschirnhaus nach Paris gekommen (S. 113). Ein Brief Oldenburgs vom 30. September bestätigt dessen jüngst erfolgte Abreise und spricht die Vermuthung aus, er werde Leibniz ohne Zweifel schon besucht haben[4]). Leibniz nahm, wie wir gleichfalls schon wissen, den ihm Empfohlenen in seinen vertrautesten Umgang auf. Sie arbeiteten gemeinsam, und am 28. December dankte Leibniz Oldenburg dafür, dass er ihm einen so hoffnungsvollen geistreichen Jüngling zugesandt habe[5]). Nun wurde 1725, nachdem Collins, Leibniz, Tschirnhaus längst gestorben waren, behauptet[6]), Collins, der einen Brief Newtons über die Tangentenaufgabe vom 10. December 1672 besass, habe diesen Brief, den Tangentenbrief von 1672, wie er künftig kurz heissen mag, im Mai 1675 an Tschirnhaus gelangen lassen. Tschirnhaus war zwar im Mai 1675 entweder noch gar nicht in London oder erst seit sehr kurzer Zeit. Ferner steht keineswegs fest, ob Tschirnhaus mit Collins bekannt geworden ist. Gleichviel, die Behauptung wurde nun

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 132—139. [2]) Ebenda S. 134: *id est differentia inter duas x proximas.* [3]) Ebenda S. 135. [4]) Leibniz I, 82. [5]) Ebenda I, 84. [6]) Ebenda IV, 419 in der Fussnote.

einmal ausgesprochen, als Anklage gegen Leibniz ausgesprochen, und es ist Pflicht sich mit ihr auseinanderzusetzen. Wir kehren deshalb zu Newton zurück, den wir seit seiner Analysis per aequationes nicht weiter in seinen Forschungen begleitet haben.

Eine 1661 in Harlem gedruckte Algebra des holländischen Mathematikers Gerhard Kinckhuysen sollte 1671 durch Newton mit Zusätzen neu herausgegeben werden, und dieser beabsichtigte insbesondere eine grosse Abhandlung unter dem Titel *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* als Einleitung vorauszuschicken[1]) (S. 109). Wir haben erzählt, dass die neue Ausgabe Kinckhuysens unterblieb, dass nunmehr die Absicht bestand, die Methodus fluxionum — unter diesem abgekürzten Titel mag künftig die Abhandlung genannt werden — wiederum im Jahre 1671 gemeinschaftlich mit einer Lehre von der Lichtbrechung und den Farben zum Drucke zu befördern. Auch dieses Vorhaben zerschlug sich, wie wir gleichfalls schon wissen. Einwürfe gegen die neue Farbenlehre hatten sich erhoben, welchen Newton nicht begegnen wollte, um nicht in öffentlichen Streit verwickelt zu werden[2]). Noch später wollte Collins die grosse Abhandlung herausgeben. Er machte diesen Vorschlag der Royal Society am 21. Januar 1680. Sie solle 60 Exemplare fest bestellen, damit der Druck gesichert sei. Nach zweiundeinhalbjährigem Ueberlegen entschloss sich die Gesellschaft auf die Bedingung einzugehen. Warum der Druck dennoch auch damals unterblieb, ist unbekannt[3]). Endlich 1736, also erst nach Newtons Tode, erschien die nunmehr bereits 65 Jahre alte Abhandlung, sofern man berechtigt ist anzunehmen, es sei in der That seit 1671 keine Aenderung an der sorgsam aufbewahrten Handschrift vorgenommen worden. Wir wollen noch keinen Zweifel in dieser Beziehung erheben und vorläufig die *Methodus fluxionum* von 1736 für übereinstimmend mit der von 1671 halten. Die Ausgabe von 1736 erfolgte durch John Colson in englischer Uebersetzung, Buffon gab dann 1740 eine französische Uebersetzung heraus und Castillon 1744 eine Rückübersetzung ins Lateinische nach Colsons Wortlaut[4]). In der fünfbändigen Gesammtausgabe der Newtonschen Werke, welche Samuel Horsley 1779—1785 veranstaltete, führt die Methodus fluxionum die Ueberschrift *Geometria analytica*.

Newton beginnt mit der Lehre von den Reihenentwicklungen und von der Auflösung der Gleichungen mit einer, beziehungsweise

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 81. [2]) Ebenda pag. 127. [3]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes.* London, 1850, pag. XXVIII. [4]) *Opuscula Newtoni* I, 31—199. Wir bedienen uns dieser lateinischen Ausgabe.

mit zwei Unbekannten, in welchem letzteren Falle die eine insofern als gegeben angesehen wird, als die andere Unbekannte durch eine nach steigenden oder fallenden Potenzen der ersteren geordnete unendliche Reihe ihre Darstellung findet. Hier ist ziemlich genaue Uebereinstimmung mit der Analysis per aequationes. Wie jene vollzieht die Methodus fluxionum die Wurzelausziehungen nur nach den elementaren Regeln der Zahlenarithmetik ohne des binomischen Lehrsatzes sich zu bedienen (S. 71). Hinzugekommen ist das Newtonsche Parallelogramm (S. 107—108). Nach dieser Einleitung wird die doppelte Aufgabe der Fluxionsmethode gestellt[1]). Man soll erstens die Geschwindigkeit einer Bewegung zu einer bestimmten Zeit finden, wenn der durchlaufene Weg jederzeit bekannt ist. Man soll zweitens die Grösse des durchlaufenen Weges finden, wenn die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke bekannt ist. Ist x ein Raum, der in stetiger Weise — gleichsam im Flusse — sich verändert, so nennt man ihn ein Fluens, und der Name bleibt der gleiche, wenn nicht grade von einem Raume, sondern von irgend sonst Fliessendem die Rede ist, wobei ausser x auch andere Buchstaben vom Ende des Alphabetes, wie y, z, u, zur Bezeichnung dienen können. Die Buchstaben am Anfange des Alphabetes a, b, c etc. bedeuten bekannte und bestimmte Grössen. Die Geschwindigkeiten, nach welchen die einzelnen Fluenten sich verändern, heissen Fluxionen. Sie werden dadurch bezeichnet, dass man über die Fluente noch ein Pünktchen setzt. Demnach sind $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ die Geschwindigkeiten, mit welchen x, y, z, u sich ändern. Ob Newton Begriff und Name des Fliessens Neper (Bd. II, S. 730), ob er ihn Cavalieri (Bd. II, S. 849) entnahm, dürfte sehr schwer zu entscheiden sein; für Cavalieri spricht die bei diesem vorkommende Participialform *fluens*. Das Pünktchen und der Gegensatz der Wörter Fluens und Fluxio gehören Newton selbst an.

In der Methodus fluxionum gibt nun Newton erst eine Regel und Beispiele für die erste Aufgabe, dann den Beweis der Regel. Unser Bericht kehrt die Reihenfolge vielleicht besser um. Moment der Fluente nennt Newton bei Auseinandersetzung der ersten Aufgabe[2]) die unendlich kleinen Theile, um welche sie sich in unendlich kleinen Zeittheilen verändert, also wieder die Augenblicksveränderung, wie in der Analysis per aequationes. Das Moment ist der Geschwindigkeit, der Fluxion, proportional, ist gleich deren Produkt in eine unendlich kleine Grösse dargestellt durch den Buchstaben o, welcher

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 53—54. *I. Longitudine descripti spatii semper (id est quovis Temporis momento) data, invenire Velocitatem Motus tempore proposito. II. Velocitate Motus semper data, invenire Longitudinem spatii descripti Tempore proposito.* [2]) Ebenda I, 59—61.

im Druck immer von der Null 0 unterschieden ist. Von dem Ursprung jenes o haben wir (S. 157) gesprochen. Das Moment von x ist demnach $\dot{x}o$, und das von y, z, u ist $\dot{y}o, \dot{z}o, \dot{u}o$. Da die Momente unendlich kleine Incremente[1]) sind, um welche sich die Fluenten in unendlich kleinen Zeittheilchen verändern, so sind die $x, y, \ldots$ dadurch in $x + \dot{x}o, y + \dot{y}o, \cdots$ übergegangen, und da die Bewegungsgleichungen in jedem einzelnen Augenblicke Geltung haben sollen, so müssen diese durch die angedeutete Substitution richtig bleiben. Richtiges muss dann auch auftreten, wenn die ursprüngliche Bewegungsgleichung abgezogen wird, Richtiges, wenn man den Rest durch o dividirt. Aber o soll unendlich klein sein, die diesen Buchstaben enthaltenden Glieder dürfen deshalb den anderen gegenüber vernachlässigt werden[2]), und so entsteht eine Regel, welche von den mehrfach besprochenen Tangentenregeln (S. 146) sich so gut wie nicht unterscheidet und darin besteht, dass aus jedem Gliede $ax^m y^n$ der ursprünglichen Gleichung die Gliedersumme

$$max^{m-1}y^n\dot{x} + nax^m y^{n-1}\dot{y}$$

wird. Aus der Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ z. B. entsteht

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} + 3y^2\dot{y} = 0.$$

Brüche mit Veränderlichen im Nenner oder Irrationalitäten, die in der Bewegungsgleichung vorkommen, würden die ganze Regel über den Haufen werfen, wenn Newton nicht durch einen geistreichen, wenn auch vielleicht nicht ganz erlaubten Kunstgriff, der vor ihm nur von Fermat bei dem Rationalmachen von Gleichungen (Bd. II, S. 804) angewandt worden war, den aber Newton schwerlich dorther kennen gelernt haben kann, Abhilfe getroffen hätte. Sei etwa die Gleichung

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay + x^2} = 0$$

gegeben[3]), so setze man $\frac{by^3}{a+y} = z$ und $x^2\sqrt{ay+x^2} = u$. Diese beiden Annahmen lassen sich auch in der Form

$$az + yz - by^3 = 0, \quad ax^4y + x^6 - u^2 = 0$$

anschreiben, während die ursprüngliche Gleichung die Gestalt

$$x^3 - ay^2 + z - u = 0$$

annimmt. Die drei neuen Gleichungen liefern in der Reihenfolge, in

[1]) *incrementa indefinite parva.* [2]) *Termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati; eos igitur negligo.* [3]) *Opuscula Newtoni* I, 57—58.

der wir sie genannt haben, nach der nunmehr anwendbaren Regel behandelt, folgende Ergebnisse:

$$a\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} - 3by^2\dot{y} = 0, \quad 4ax^3y\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x} - 2u\dot{u} = 0,$$
$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0.$$

Eliminirt man zwischen ihnen $\dot{z}$ und $\dot{u}$, so entsteht:

$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \frac{3by^2\dot{y} - z\dot{y}}{a+y} - \frac{4ax^3y\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x}}{2u} = 0,$$

in welche Gleichung man endlich rückwärts die Werthe von z und u einsetzt, um die verlangte Gleichung zwischen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, zu erhalten.

Nun kommt die zweite Aufgabe an die Reihe, welche den Uebergang von den Fluxionen zu den Fluenten zum Ziele hat[1]). Die Regel ist die umgekehrte wie vorher. Aus $max^{m-1}y^n\dot{x}$ wird $ax^m y^n$, und wenn in der Gleichung $nax^m y^{n-1}\dot{y}$ gleichfalls vorkommt, welches wieder zu $ax^m y^n$ führt, so darf dieses Glied in der Endgleichung gleichwohl nicht mehrmals, sondern nur einmal geschrieben werden. Newton fühlte, dass die richtige Bemerkung einen Folgesatz forderte dahin gehend, dass seine Regel, die er freilich eine *Solutio peculiaris*, eine in besonderen Fällen zutreffende nennt, nur dann Geltung habe, wenn in der Fluxionsgleichung neben $max^{m-1}y^n x$ das Glied $nax^m y^{n-1}\dot{y}$ auch wirklich auftrete, und er setzte deshalb ausdrücklich hinzu, dass die gegebene Vorschrift nicht immer zur Lösung der Aufgabe ausreiche[2]). Man solle zur Sicherung des Ergebnisses von der gefundenen Fluentengleichung wieder zur Fluxionsgleichung übergehen.

Freilich ist das nur ein Nothbehelf, aber wir sind weit entfernt davon, Newton diese kleine Lücke als Verbrechen anrechnen zu wollen. Bei Leibniz hätten wir bei eingehender Prüfung des materiellen Inhaltes seiner älteren Papiere auf die gröbsten Unrichtigkeiten hinweisen müssen, kaum dadurch entschuldbar, dass es Arbeitsnotizen und nicht druckfertige Ausarbeitungen waren, welche dieselben offenbaren. Das ist nun einmal nicht anders bei den ersten Gehversuchen auf nie betretenem Boden, als dass man strauchelt.

Eine grosse Unklarheit steckt auch in der Bemerkung Newtons[3]), die gegebene Fluxionsgleichung müsse nach den auftretenden Fluxionen homogen sein, und wenn das nicht von selbst der Fall sei, müsse man Fluxionen einer weiteren Grösse als Factoren hinzudenken und diese als Einheiten betrachten. So gewinne

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 61. [2]) Ebenda I, 62 *hoc pacto problema non semper solvi potest.* [3]) Ebenda I, 63. Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis u. s. w. S. 34.

$$\dot{x} + x\dot{x}\dot{y} - ax^2 = 0$$

nur dann einen Sinn, wenn man die Umwandlung in

$$\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}\dot{y} - ax^2\dot{z}^2 = 0$$

vornehme.

Was soll, hat man ganz richtig gefragt, dieses $\dot{z}$, was soll z selbst bedeuten? Newton ging von Bewegungserscheinungen aus. Jede Fluente und jede Fluxion hatte für ihn einen bestimmten mechanischen Sinn. Durfte er schon oben bei der ersten Aufgabe z und u als blosse Abkürzungen einführen? Durfte er vollends hier bei der zweiten Aufgabe eines gar nicht definirten z sich so bedienen, wie er es that?

Newton blieb bei der *Solutio peculiaris* der zweiten Aufgabe nicht stehen. Er lehrte vielmehr jede Fluxionsgleichung auf die Gestalt zurückführen, dass die Fluxionen nur in Quotientenform — eine Fluxion durch eine andere dividirt — auftreten und unterschied sodann drei Gattungen[1]). In der ersten Gattung sollen zwei Fluxionen, aber nur eine Fluente vorkommen; wir würden heute schreiben $y' = F(x)$ oder $y' = F(y)$. In der zweiten Gattung sollen zwei Fluxionen und beide Fluenten vorkommen; wir würden heute schreiben $y' = F(x, y)$. In der dritten Gattung sollen mehr als zwei Fluxionen vorkommen; das sind die heutigen partiellen Differentialgleichungen.

Das Mittel, welches Newton ganz allgemein anwandte, um von der Fluxionsgleichung zur Gleichung zwischen den Fluenten zurückzukehren, ist das der Entwickelung der Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen in unendliche nach Potenzen der Fluenten fortlaufende Reihen. Unbequem ist ihm dabei selbstverständlich das Auftreten von Gliedern wie $\frac{a}{x}$, denn wenn beim Aufsteigen von der Fluxion zur Fluenten aus $max^{m-1}y^n$ zu ax^my^n oder aus $ax^{m-1}y^n$ zu $\frac{ax^my^n}{m}$ übergegangen werden muss, so führt dieses Verfahren von $\frac{a}{x}$ oder ax^{-1} zu $\frac{a}{0}$ d. h. zu einem unendlich Grossen. Newton schreibt vor[2]), man solle alsdann das $\frac{a}{x}$ durch ein $\frac{a}{b+x}$ oder ein $\frac{a}{b-x}$ ersetzen und diesen Ausdruck durch Division in eine Reihe verwandeln. Er nimmt also eine Veränderung der Coordinaten, eine Verlegung des Anfangspunktes vor. Das wäre an und für sich gewiss gerechtfertigt, nur musste gesagt werden, dass, wenn x in $b - x$ übergehe, gleichzeitig $\dot{x}$ durch $-\dot{x}$ zu ersetzen sei. Doch ist damit noch nicht der Gipfelpunkt willkürlichen Verfahrens erreicht. Solches ist vielmehr

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 66. [2]) Ebenda I, 70.

bei der Behandlung des dritten Falles geschehen, wo Newton bei mehr als zwei vorkommenden Fluxionen mit einer einzigen Gleichung nicht ausreicht. Bei λ Fluxionen muss er $\lambda - 1$ Gleichungen haben; gegeben ist ihm eine weitere Gleichung; weitere $\lambda - 2$ Gleichungen werden beliebig angenommen[1]). Anders ausgedrückt: Newton setzt die ihm unbequemen Grössen durch hinzugenommene Bedingungen in ein Abhängigkeitsverhältniss von einander, ein Verfahren, welches geeignet ist zur Integration zu führen, aber damit noch keineswegs Berechtigung gewinnt.

Bei der Behandlung des zweiten Falles ($y' = F(x, y)$) wird die Funktion von x und y, welche in Newtonscher Schreibweise dem Quotienten $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ gleich war, in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt, zu deren Bildung ein Verfahren angegeben ist, welches Newton nicht näher begründet, aber dessen Zusammenhang mit der Methode der unbestimmten Coefficienten sofort zu erkennen ist[2]). Sei

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y$$

vorgelegt. Man nimmt an

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \text{ u. s. w.}$$

Dann ist

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \cdots$$

und setzt man den angenommenen Werth von y in

$$2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y$$

ein, so ist andererseits auch

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3x + x^2 + (x^2 - 2)(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots)$$
$$= (2 - 2A_0) + (3 - 2A_1)x + (1 + A_0 - 2A_2)x^2 + \cdots.$$

Die beiden Reihen für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ müssen gleiche Coefficienten besitzen, d. h. es muss sein

$$A_1 = 2 - 2A_0,\quad 2A_2 = 3 - 2A_1,\quad 3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2 \text{ u. s. w.}$$

Alle A können dadurch von A_0 abhängig gemacht werden, und setzt man für A_0 irgend einen bestimmten Werth, so erhält man eine

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 83: *Si trium quantitatum fluxiones adsunt, una aequatio assumenda est, duae aequationes, si quatuor insunt fluxiones, atque ita porro, ita ut aequatio proposita tandem in aliam transformetur, in qua sint duae fluxiones tantummodo.* [2]) Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis u s. w. S. 36—39.

Reihenentwicklung von y, eine von unendlich vielen, je nach der für A_0 getroffenen Wahl. Newton war sich dieser Unbestimmtheit auch voll bewusst[1]).

Waren die beiden ersten Aufgaben, von deren Bearbeitung in der Methodus fluxionum wir bisher gesprochen haben, die Auffindung einer Fluxionsgleichung, wenn die gegenseitige Beziehung der Fluenten zu einander — das was wir oben Bewegungsgleichung nannten — gegeben war, und die Herleitung der Bewegungsgleichung aus der Fluxionsgleichung, so fordert die dritte Aufgabe die Auffindung grösster oder kleinster Werthe[2]). Eine Grösse, welche Maximum oder Minimum ist, sagt Newton, kann in dem Augenblicke, in welchem sie diesen besonders gearteten Werth annimmt, weder nach der einen noch nach der anderen Seite hin im Flusse befindlich sein, denn sonst wäre, wenn es um ein Maximum sich handelt, ein noch grösserer, wenn es um ein Minimum sich handelt, ein noch kleinerer Werth vor oder nach dem betreffenden Punkte vorhanden. Daraus ergibt sich die Nothwendigkeit die Fluxion zu suchen und gleich Null zu setzen, und daraus eine Regel, welche mit der von Hudde herrührenden (Bd. II, S. 919) übereinstimme[3]). Aus

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

folgt

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Mittels $\dot{x} = 0$ erhält man $ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$, beziehungsweise $3y^2 = ax$, und diese Gleichung in Verbindung mit der ursprünglich gegebenen lässt die gewünschten Werthe von x und y auffinden. Ein Kriterium dafür zu suchen, ob die ermittelten Werthe von x und y wirklich ein Maximum oder ein Minimum und welches von beiden sie liefern, fällt auch Newton noch nicht ein.

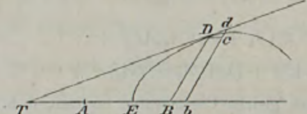

Fig. 31.

Die vierte Aufgabe ist die der Tangentenziehung[4]). Bei ihrer Betrachtung hat Newton den nur von Fermat fast verstohlenerweise angedeuteten (Bd. II, S. 817, Note 1) Fortschritt vollzogen, dass die Ordinaten der Curve (Figur 31) nicht mehr senkrecht zu den Abscissen gezeichnet sind[5]). Wird die

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 79: *Hic obiter animadvertendum est, quod inter infinitas solutiones, quibus aequatio potest enodari etc.* [2]) Ebenda I, 86—88. [3]) *Hinc deduci potest notissima regula Huddenii.* [4]) *Opuscula Newtoni* I, 89. [5]) *Ordinata faciens angulum quemvis datum cum alia recta AB quae Basis est vel Abscissa.*

Ordinate BD in die unendlich nahe Lage bewegt, so dass sie um die Augenblicksveränderung cd zunimmt, während AB um die Augenblicksveränderung $Bb = Dc$ wächst, so findet in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke dcD und DBT die Proportion statt

$$TB : BD = Dc \quad (\text{oder } Bb) : dc.$$

Die Beziehung zwischen DB und AB geht aus der Curvengleichung hervor. Aus ebenderselben erhält man nach den Vorschriften der ersten Aufgabe das Verhältniss der Fluxionen von AB und BD, und dieses Verhältniss lässt TB bei gegebenem BD finden. Alsdann berührt DT die Curve in D.

Ueber die Inflexion hatte Newton unklare Vorstellungen[1]). Er meint an einer Stelle in dem Punkte D sei ein Uebergang von einem convexen zu einem concaven Curventheile[2]), wenn AT (mithin auch BT oder die Subtangente) einen kleinsten Werth besitze. Er meint an einer zweiten Stelle, im Inflexionspunkte sei die Neigung der Tangente zur Abscisse ein Maximum oder Minimum. Letztere Betrachtung ist ziemlich richtig, sofern das Maximum oder Minimum der ersten Ableitung der Ordinate nach der Abscisse nur dann eintreten kann, wenn die zweite Ableitung Null ist.

Andere Methoden der Tangentenbestimmung, acht an der Zahl, folgen, auf welche wir nicht näher eingehen.

In der fünften Aufgabe wird die Grösse der Krümmung[3]), welche irgend eine Curve in einem bestimmten Punkte besitzt, untersucht. Kreise, heisst es, hätten an allen Stellen eine und dieselbe Krümmung, und bei verschiedenen Kreisen stehe dieselbe im reciproken Verhältnisse der Durchmesser. Eine andere Curve, d. h. eine solche, die kein Kreis ist, kann in einem Punkte durch sehr viele Kreise von der concaven Seite her berührt werden. Ist einer dieser Berührungskreise so beschaffen, dass kein anderer innerhalb dessen Contingenzwinkel mit der Curve verläuft, so könne man von ihm sagen, er habe im Berührungspunkte die gleiche Krümmung wie die Curve, sein Mittelpunkt sei dann Krümmungsmittelpunkt, sein Halbmesser Krümmungshalbmesser der Curve[4]). Dieser sei, heisst es, das zwischen dem Krümmungsmittelpunkte und der Curve gelegene Stück der zur Curve senkrecht gezogenen Geraden. Ziehe man in drei Curvenpunkten Senkrechte zur Curve, so schneidet die Senkrechte im mittleren Curvenpunkte die beiden anderen in zwei Punkten, die um so näher zusammenfallen, je näher die Curvenpunkte

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 91 und 103. [2]) *punctum quod separat partem convexam a concava.* [3]) Ebenda I, 104—125: *Quantitas curvaturae.* [4]) *Centrum curvaturae, radius curvaturae.*

bei einander liegen. Werden die drei Curvenpunkte zu einem, die drei Senkrechten mithin auch zu einer, so ist nur ein Durchschnittspunkt der Senkrechten vorhanden, und dieser ist der Krümmungsmittelpunkt, was von selbst offenbar ist[1]). Newton geht sodann zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers über. Die Curve ADd (Figur 32) ist auf die Abscisse $AB = x$ und die zu ihr senkrechte Ordinate $BD = y$ bezogen. TD ist die Berührungslinie in D, DC und dC sind unendlich nahe bei einander liegende Senkrechte zur Curve, die im Krümmungsmittelpunkte C einander schneiden.

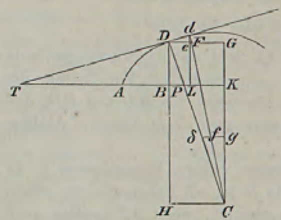

Fig. 32.

Cg ist ein auf der Ordinate von C beliebig angenommenes und als Längeneinheit gewähltes Stück. Die übrigen Stücke der Figur bedürfen keiner besonderen Erläuterung, da der Augenschein zeigt, welche Geraden der Abscisse, welche der Ordinate parallel laufen. Die Proportion ergibt sich leicht

$$Cg : g\delta = BT : BD = De : de = \dot{x} : \dot{y},$$

denn es ist De die Augenblicksveränderung $\dot{x} \cdot o$ der Abscisse, de die $\dot{y} \cdot o$ der Ordinate, und diese Augenblicksveränderungen verhalten sich wie die Fluxionen. Setzt man ausser $Cg = 1$, was schon ausgesprochen worden ist, noch $g\delta = z$, so ist aus jener Proportion $1 : z = \dot{x} : \dot{y}$, d. h. $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Der Uebergang von D zum benachbarten Punkte d lässt δf als Augenblicksveränderung von z, d. h. als $\dot{z} \cdot o$ erkennen. In dem bei d rechtwinkligen Dreiecke DdF ist $de^2 = De \cdot eF$, mithin $eF = \frac{de^2}{De} = \frac{\dot{y}^2 \cdot o^2}{\dot{x} \cdot o} = \frac{\dot{y}^2 \cdot o}{\dot{x}}$, und

$$DF = De + eF = \dot{x} \cdot o + \frac{\dot{y}^2 \cdot o}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}} \cdot o.$$

Ferner verhält sich

$$\delta f : DF = Cg : CG \quad \text{oder} \quad \dot{z} \cdot o : \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}} \cdot o = 1 : CG$$

und somit hat man $CG = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}$. Des Weiteren ist

$$GD : CG = \delta g : Cg \quad \text{oder} \quad GD = \frac{CG \cdot \delta g}{Cg} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}} \cdot z.$$

[1]) *Quod per se patet.*

Man sucht aber CD, und zu dessen Auffindung dient

$$CD^2 = CG^2 + GD^2 = \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}\right)^2 (1 + z^2).$$

Newton wählt nunmehr $\dot{x}$ als Fluxionseinheit. Dadurch wird $z = \frac{\dot{y}}{1} = \dot{y}$

$$\text{und} \quad CD^2 = \left(\frac{1 + z^2}{\dot{z}}\right)^2 (1 + z^2) \quad \text{und} \quad CD = \frac{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}}.$$

Das Interessanteste an der ganzen Entwicklung ist offenbar die Darstellung des Fluxionsquotienten $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ durch eine Strecke z, welche es möglich macht, die Fluxion des Fluxionsquotienten in Rechnung zu bringen.

Vergleicht man die Betrachtungen (S. 142—143), welche **Huygens** bei Aufsuchung des Krümmungshalbmessers anstellte, so ist anzuerkennen, dass Newtons Weg ein durchaus anderer, und zwar der gangbarere war, ganz abgesehen davon, dass Huygens an Krümmungsverhältnisse nicht dachte, sondern nur darin mit Newton übereinstimmte, dass er die Entfernung eines Curvenpunktes von dem Punkte suchte, in welchem zwei consecutive Normalen, deren eine die an den betreffenden Curvenpunkt ist, einander schneiden.

Um so auffallender ist die ungemeine Aehnlichkeit zwischen den weiteren Folgerungen beider Schriftsteller. Newton sucht als Beispiel für seine Regel den Krümmungsmittelpunkt der Hyperbel, der Cissoide, der Conchoide, der Trochoide, welche letztere auch Cycloide heisse. Bei letzterer bemerkt er plötzlich[1]) das Vorhandensein der Curve der Krümmungsmittelpunkte, welche selbst eine Cycloide sei. Er bemerkt, dass die Normalen an die eine Cycloide Berührungslinien der anderen sind. Er dreht die Figur um, so dass die Cycloiden ihre Wölbung nach unten haben. Er bildet eine cycloidale Pendelvorrichtung. Er benutzt die Pendelfigur zur Rectification der Cycloide, er spricht davon, dass der Pendelfaden um die obere Cycloide sich herumwickle[2]). Er wählt alsdann andere Curven als Beispiel. Von einer Curve der Krümmungsmittelpunkte ist bei ihnen keine Rede, aber in einem Anhange von wenigen Zeilen, welchen wir deshalb vollständig mittheilen, kommt er auf die Frage zurück.

„V. Den Ort der Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen, oder die Curve zu beschreiben, auf welcher dieser Mittelpunkt sich immer befindet. Wir haben oben gezeigt, dass der Krümmungsmittelpunkt der Trochoide immer auf einer anderen Trochoide gefunden wird. Nicht anders liegt der Krümmungsmittelpunkt der Parabel auf einer

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 112—114. [2]) *Totum filum circumvolutum fuit trochoidis perimetro.*

anderen Parabel aber zweiten Geschlechtes, welche durch die Gleichung $ax^2 = y^3$ ausgedrückt wird, wie die Rechnung leicht zeigt"[1])

Wir verweisen unsere Leser auf den Bericht über den dritten Theil des *Horologium oscillatorium* (S. 140—143) und knüpfen daran die Frage, ob es denkbar ist, dass hier lauter zufällige Uebereinstimmungen uns entgegentreten? Newton sollte ganz zufällig nur bei den beiden Curven, welche Huygens genauer behandelte, die Gleichung der Krümmungsmittelpunktscurven gesucht haben? Er sollte, während nirgend sonst in der Methodus Fluxionum von einem Pendel die Rede ist, grade auf die cycloidale Vorrichtung verfallen sein, auf das Herumwickeln des Fadens *(filum circumvolutum)*? Er sollte ganz von selbst in der zehnten Aufgabe, beliebige Curven zu finden, deren Länge in einem geschlossenen Ausdrucke darstellbar sei[2]), gleich Huygens die Evoluten bekannter Curven gesucht haben und diese als rectificirbar bezeichnen?

Uns kommt ein solcher sich fortsetzender Zufall als mehr als überraschend vor. Wir können die Vermuthung nicht unterdrücken, Newton habe diese Stellen der Methodus fluxionum erst geschrieben, nachdem er das Horologium oscillatorium gelesen hatte, und ein weiterer gewichtiger Grund für diese Annahme wird uns im 90. Kapitel bekannt werden. Nun erhielt aber Newton das Horologium oscillatorium von dessen Verfasser unmittelbar nach dem Erscheinen des Werkes. Der Dankbrief Newtons vom 23. Juni 1673 hat sich erhalten[3]), und einige darin ausgesprochene Bemerkungen über bestimmte Stellen beweisen, dass das Buch nicht ungelesen in Newtons Besitze war.

Wenn wir also auch weit entfernt davon sind, behaupten zu wollen, Newton habe die Methodus Fluxionum von 1671 nochmals ganz umgearbeitet, so kommen wir doch zu der Ueberzeugung, jene Abhandlung habe eine theilweise Umarbeitung nach 1673, als dem Jahre, in welchem das Horologium oscillatorium im Drucke erschien, erfahren. Wie viel später als 1673 die Veränderungen vorgenommen wurden, wie weit sie sich erstreckten, darüber ist uns jede Auskunft unmöglich und nur eine Folgerung bleibt bestehen: wenn die Methodus fluxionum nach 1671 Veränderungen erfuhr, so fällt damit ihre Beweiskraft für das Wissen Newtons in jener frühen Zeit.

Wir müssen suchen, andere zuverlässigere Zeugnisse uns zu verschaffen, Schriftstücke, welche mit Zeitangabe versehen, früh genug

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 123—124. [2]) Ebenda I, 178—185. [3]) Huygens, Oeuvres VII, 325.

aus Newtons Händen in die anderer Gelehrten übergingen, um die Bürgschaft zu gewähren, dass sie so geblieben sind, wie sie von Anfang an geschrieben waren.

90. Kapitel.

Newton und Leibniz bis 1687.

Mit dem Vorbehalte gleich wieder auf frühere Zeiten zurückzugreifen, beginnen wir mit einem Bruchstücke eines Briefes, den Leibniz am 12. Mai 1676 von Paris aus an Oldenburg schrieb[1]). Von Infinitesimalrechnung ist zwar darin nicht die Rede, aber Leibniz erkundigte sich hier zum ersten Male nach den von den Engländern benutzten Methoden.

Ein in Geometrie und Analysis wohl bewanderter Däne, Georg Mohr, war über England nach Paris gekommen und hatte Leibniz mitgetheilt, Collins sei in Besitz der Reihenentwicklungen

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \text{etc.}$$

und

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \text{etc.}$$

Leibniz fragt nach dem Beweise dieser Sätze. Er selbst habe, wie aus seinen früheren Briefen an Oldenburg erhelle, Aehnliches gleichfalls ohne Beweis schon längere Zeit in Erwägung gezogen. Er schreibe gegenwärtig seine Beweise auf und werde sie gegen Einsendung der englischen Beweise an Oldenburg gelangen lassen.

Oldenburg antwortete[2]) am 26. Juli 1676. Zunächst gab er Auskunft über die Coefficienten der Arcussinusreihe, dann über einige andere Reihen. Er erzählte weiter als vorläufig wissenswürdig, dass Newton ihm und Collins unter dem 10. December 1672 eine Methode der Tangentenziehung an geometrische Curven mitgetheilt habe, welche ihren Ausgang von der Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate der Curve nehme. Eigentlich sei es nur ein Zusatz zu einer allgemeinen Methode, welche ohne beschwerliche Rechnung nicht nur das Tangentenproblem in grösster Allgemeinheit erledige, sondern auch andere verborgene Probleme über die Art wie Curven gebogen sind[3]), über Flächeninhalte, Längen, Schwerpunkte u. s. w. Die Methode, so fahre Newton fort, sei nicht gleich Huddes Methode der grössten und kleinsten Werthe oder De Sluses Tangentenmethode auf Gleichungen beschränkt, in welchen Irrationalitäten nicht vorkommen.

[1]) Leibniz I, 88. [2]) Ebenda I, 88—89. [3]) *De curvarum flexu.*

Das ist Alles, was Oldenburg an Leibniz über jenen Newtonschen Brief vom 10. December 1672 schrieb. Von einem bestimmten Beispiele vollends ist durchaus nicht die Rede.

Gehen wir nun zu Newtons Brief selbst zurück, zu dem Tangentenbrief von 1672, wie wir ihn (S. 167) genannt haben. Er ist seit 1712 dem Drucke übergeben[1]), und wir werden ihn namentlich in der Richtung zu durchmustern haben, ob und was er allenfalls mehr enthielt, als was schon in der *Analysis per aequationes* gestanden hatte, ob er etwa den Inhalt der *Methodus fluxionum* andeutete? Was finden wir nun? Versprechungen, was mittels der neuen Methode geleistet werden könne, welche Oldenburg zum Zwecke seiner Mittheilung an Leibniz fast wörtlich abschrieb! Oldenburg veränderte nur ein Wort, wo es um die Krümmungsverhältnisse sich handelte. Er schrieb *de curvarum flexu*, während Newton *de curvitatibus* gesagt hatte. Ausserdem findet sich im Tangentenbriefe ein einziges Beispiel. Es lautet folgendermassen. Sei

$$x^3 - 2x^2y + bx^2 - b^2x + by^2 - y^3 = 0$$

die vorgelegte Curvengleichung. Man soll ihre Glieder mit irgend einer arithmetischen den Abmessungen von y gemäss verlaufenden Zahlenreihe multipliciren[2]), etwa mit 0, 1, 0, 0, 2, 3, dann mit einer anderen den Abmessungen von x sich anschliessenden, etwa mit 3, 2, 2, 1, 0, 0. Das erste Produkt werde der Zähler, das zweite, nachdem man es zuvor durch x dividirt habe, der Nenner eines Bruches sein, der die Subtangente darstelle. Diese sei also $\frac{-2x^2y + 2by^2 - 3y^3}{3x^2 - 4xy + 2bx - b^2}$. Das Ergebniss unserer Durchmusterung ist also: kein Kunstausdruck, keine Bezeichnung, keine Curvengleichung mit Irrationalitäten oder mit in einem Nenner auftretenden Unbekannten, überhaupt ein kaum nennenswerther Fortschritt über das hinaus, was die von Newton erwähnten Schriftsteller längst geleistet hatten; insbesondere Hudde hatte bei seinem Verfahren zur Bestimmung grösster und kleinster Werthe nahezu Uebereinstimmendes gelehrt.

Wir haben (S. 167) bemerkt, es sei nichts weniger als ausgemacht, dass Tschirnhaus, als er im Spätjahr 1675 zu Leibniz kam, den Tangentenbrief kannte, aber möge er sogar eine Abschrift davon besessen und diese Leibniz zur Verfügung gestellt haben, lernen konnte Leibniz daraus so gut wie nichts, lernen auch nicht aus dem Briefe Oldenburgs vom 26. Juli 1676. Er konnte höchstens die Anregung finden, nun auch seinerseits nach einem Verfahren zu forschen,

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 83—84. Vgl. auch *Opuscula Newtoni* I, 297—298.
[2]) *Multiplica aequationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y.*

welches durch Irrationalitäten in der Curvengleichung nicht in seiner Ausführbarkeit behindert werde.

Nun lag allerdings dem Briefe Oldenburgs vom 26. Juli 1676 ein langer für Leibniz bestimmter Brief Newtons bei[1]). In diesem Briefe, von welchem schon (S. 79) die Rede war, und den man nicht mit demjenigen vom 24. October 1676 (S. 67) verwechseln darf, gab Newton das Gesetz seiner Binomialreihe an, gab er seine numerische Gleichungsauflösung, seine Darstellung der einen Unbekannten einer zwei Unbekannte enthaltenden Gleichung in Gestalt einer nach Potenzen der anderen fortschreitenden Reihe. Er gab auch einige durch Reihen vollzogene Rectificationen und Quadraturen, aber überall wurden nur Ergebnisse mitgetheilt. Von Ableitungen oder Beweisen ist nichts zu finden. Das Wie der Ermittelung zu beschreiben, meint Newton, wäre allzu weitläufig[2]). Leibniz beantwortete die Briefe Oldenburgs und Newtons am 27. August 1676 und auch von diesem Antwortschreiben[3]) war (S. 79) die Rede. Wir erörterten damals, dass in Leibnizens Briefe die Transmutation eine Rolle spielte, d. h. eine Quadratur, welche Flächenelemente von einer gewissen Gestalt durch solche von anderer Art ersetzte, aber dass Leibniz sehr deutlich gesprochen hätte, kann kein Mensch behaupten, und wenn mit unendlich kleinen Strecken β gerechnet wurde, so lag darin nichts irgend Neues.

Nur eine Stelle des Briefes mochte Newton auffallen. Dort hiess es[4]): „Wenn Ihr sagt, die meisten Schwierigkeiten liessen sich durch unendliche Reihen erledigen, so will mir das nicht recht scheinen. Vieles Wunderbare und Verwickelte hängt weder von Gleichungen noch von Quadraturen ab. So z. B. die Aufgaben der umgekehrten Tangentenmethode, von welchen auch Descartes eingestand dass er sie nicht in seiner Gewalt habe.“ Leibniz nannte als besonderes Beispiel die Beaune'sche Aufgabe (Bd. II, S. 856). Was Descartes und Beaune nicht hätten leisten können, das habe er, Leibniz, mit Hilfe einer gewissen Analysis innerhalb einer Stunde vollendet. „Ich gestehe jedoch, fuhr er dann fort, dass ich noch nicht erreicht habe, was auf diesem Gebiete wünschenswerth ist, wiewohl ich weiss, dass es von höchstem Gewichte wäre.“

Vielleicht grade mit Rücksicht auf diese Aeusserung sprach Newton am 26. October 1676 an Oldenburg von Leibnizens trefflichem Briefe[5]), suchte er am 8. November Collins zu überzeugen,

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 307—322 und Leibniz I, 100—113. [2]) *Quomodo determinantur nimis longum foret describere* (Leibniz I, 106, *Opuscula Newtoni* I, 314). [3]) Leibniz I, 114—122. [4]) Ebenda I, 121—122. [5]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes*, pag. 257: *excellent letter.*

dass Leibnizens Methode weder allgemeiner noch leichter sei, als seine eigene[1]).

Aber inzwischen war Leibniz in London gewesen, wo dieser sein zweiter Aufenthalt etwa acht Tage währte. Leibniz hat damals Collins kennen gelernt, und es ist zu vermuthen, dass es bei dieser Gelegenheit war, dass er die Analysis per aequationes las und die Aufzeichnungen sich machte, welche unter der Ueberschrift „Auszüge aus einer handschriftlichen Abhandlung Newtons"[2]) in Leibnizens Nachlasse gefunden worden sind. In diesen Aufzeichnungen ist namentlich der Abschnitt *De resolutione aequationum affectarum*, also die Darstellung von y in einer nach Potenzen von x geordneten Reihe unter Zugrundelegung einer Gleichung zwischen x und y in einem Maasse berücksichtigt, dass man fast von einer Abschrift sprechen kann. In denselben Aufzeichnungen kommt das am 29. October 1675 erfundene Integralzeichen (S. 166) vor. Es ist nicht ersichtlich, wann anders als während des zweiten Londoner Aufenthaltes Leibniz den handschriftlichen Aufsatz Newtons zur Verfügung gehabt haben sollte.

Eines dürfen wir dabei hervorheben: dass Collins die Sache jedenfalls sehr unverfänglich fand, denn in einem Briefe an Newton vom März 1677, in welchem Einzelheiten über Leibnizens Besuch mitgetheilt sind[3]), steht nichts davon, dass er sich die Analysis per aequationes genau angesehen habe. Ebenso war gewiss Leibniz selbst sich keines Unterschleifes oder Unrechtes irgend einer Art bewusst, welches er mit Anfertigung des Auszuges begangen haben könnte, denn sonst hätte er ihn sicherlich nicht aufbewahrt, nachdem ein heftiger Streit grade über die Erfinderrechte am neuen Algorithmus sich erhoben hatte.

Leibniz war nämlich so ganz heikel nicht bei Anwendung von Mitteln, welche in einem Streite gute Dienste leisten können. Der XVII. Abschnitt wird uns nöthigen, von beiden grossen Männern, von Leibniz wie von Newton, Dinge zu erzählen, welche der blosse Bewunderer, wenn er nicht die Pflichten des Geschichtsschreibers zu erfüllen hätte, am liebsten verschwiege und jetzt schon müssen wir auf Eines aufmerksam machen. Wir haben (S. 167) von einem Aufsatze vom 11. November 1675 gesprochen, in welchem Leibniz $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ geschrieben hat, mithin derjenigen Bezeichnung sich bediente, welche seitdem die mathematische Welt erobert hat. Mit der Datirung dieses Aufsatzes ist ein Fälschungsversuch

[1]) Edleston pag. XXVIII. [2]) Leibniz I, 7: *Excerpta ex tractatu Newtoni Msco.* [3]) Ebenda I, 147 flg.

vorgenommen worden[1]). Man hat sie in 1673 umändern wollen. Der obere Zug der 5 ist wegradirt und dafür mit schwärzerer Tinte der obere Zug von 3 gesetzt worden. Man wird schwerlich gegen einen Anderen als gegen Leibniz selbst den Vorwurf dieser versuchten Rückdatirung erheben können.

Aber dass man die Veränderung erkannte, zieht noch zwei Folgerungen nach, welche wir auszusprechen nicht unterlassen. Erstens wird, nachdem die einmal versuchte Aenderung beobachtet war, sicherlich auch den übrigen vorhandenen Jahreszahlen nochmalige Beachtung gewidmet worden sein, und der Mangel jeder Bemerkung über sie beweist ihre volle Unanfechtbarkeit. Zweitens bestätigt die Aenderung von 5 in 3 die nicht mehr zu bezweifelnde Echtheit der ersteren Zahl. Am 11. November 1675, das steht nunmehr fester als je, war Leibniz im Besitze seiner Bezeichnung.

Eine der Aufgaben, welche er damals löste, und zwar deren erste, war die Auffindung der Curve, deren Subnormale, wie wir heute sagen, der Ordinate umgekehrt proportional sei. Die Subnormale nennt Leibniz w, die Subtangente t, die Differenz zweier nächster Abscissen z (anstatt des späteren dx). Er weiss aus früheren Versuchen[2]), dass $\int wz = \frac{y^2}{2}$, was seine Richtigkeit hat. Die Subnormale ist ja $y \cdot y'$, also $\int wz = \int yy'dx = \int ydy = \frac{y^2}{2}$. Nun, schliesst Leibniz weiter, müsse $wz = d\left(\frac{y^2}{2}\right) = y$ sein, indem er den Faktor dy entweder einfach vergass, was keinesfalls unmöglich ist, oder aber ihn als Einheit betrachtete. Der Voraussetzung gemäss solle $w = \frac{b}{y}$ sein, folglich erhalte man

$$y = wz = \frac{bz}{y} \text{ und } z = \frac{y^2}{b} \text{ sowie } \int z = \int \frac{y^2}{b},$$

die links stehende Summe sei x $\left(\text{d. h.} \int dx = x\right)$, die rechtsstehende $\frac{y^3}{3ba}$, folglich sei $x = \frac{y^3}{3ba}$ die Gleichung der gesuchten Curve. Leibniz macht sofort die Probe auf seine Rechnung. Er ermittelt von der Curvengleichung $y^3 = 3abx$ ausgehend die Subtangente $t = \frac{y^3}{ab}$, wozu er der Methode von De Sluse sich bedient. Allgemein ist aber

$$t : y = y : w \quad \left(\text{d. h. } \frac{y}{y'} : y = y : yy'\right).$$

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis. S. 132 Fussnote. [2]) *Constat ex alibi a me demonstratis.*

Für die untersuchte Curve ist daher $\frac{y^3}{ab} : y = y : w$, $w = \frac{ab}{y}$ wie verlangt war[1]). Dieses eine Beispiel möge erkennen lassen, wie Leibniz damals, Ende 1675, inverse Tangentenaufgaben behandelte.

Wir kehren zu dem Ende des zweiten Londoner Aufenthaltes von Leibniz zurück. Auf der Heimreise nach Hannover hielt er sich bei Hudde in Amsterdam auf und schrieb über die mit diesem gepflogenen Unterredungen einen an Oldenburg gerichteten, mittelbar auch für Collins und Newton bestimmten Brief. Letzterer insbesondere erhielt ihn in Gestalt einer durch Collins besorgten Abschrift[2]). Leibniz erzählte hier, Hudde besitze eine bessere Tangentenmethode als De Sluse. Er zeigte auch, wie zwischen der Subtangente und der Abscisse eine Gleichung ermittelt werden könne, welche die Ordinate nicht mehr enthalte, mit anderen Worten er lehrte die Elimination einer Unbekannten zwischen zwei Gleichungen, in deren einer mindestens sie als Potenz höheren als des ersten Grades vorkommt.

Newton schuldete Leibniz noch immer eine Antwort auf dessen Brief vom 27. August 1676. Er schrieb sie am 24. October, und gemeiniglich bezeichnet man diese Antwort als **zweiten Brief Newtons an Leibniz**, während unter dem ersten Briefe der vom 26. Juli (S. 180) verstanden wird. Auch für den zweiten Brief diente Oldenburg als Mittelperson, aber dieser konnte ihn nicht mehr persönlich übergeben, denn Leibniz war schon wieder abgereist, als der Brief in London ankam. Man muss damalige Postverhältnisse weder der Schnelligkeit noch der Sicherheit der Beförderung nach mit heutigem Maassstabe messen. Oldenburg fühlte sich berechtigt, den Brief nicht sofort nachzuschicken. Er hob ihn sorgfältig auf, fertigte eine Abschrift und liess auch diese erst am 2. Mai 1677 abgehen, nachdem sich, wie er in dem Begleitbriefe sagte[3]), eine sichere Gelegenheit zur Uebersendung gefunden hatte. In dem zweiten Briefe[4]) äusserte sich Newton, wie wir wissen (S. 69—71 u. S. 107), über die Art und Weise, wie er zum Binomialtheorem gelangt war, und über sein Parallelogramm. Ueber andere Theile des ausserordentlich langen Briefes haben wir jetzt zu berichten.

Die Absicht Newtons war offenbar die, sich jetzt die Priorität der Fluxionsrechung zu sichern, und er führte sie aus, indem er sagte, seine Tangentenmethode stosse sich nicht an Irrationalitäten; ebenso wenig störe ihn deren Vorkommen bei Aufgaben über grösste und kleinste Werthe, ebenso wenig bei einigen anderen von denen

[1]) C. J. **Gerhardt**, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 132—133. [2]) **Leibniz** I, 147—149. [3]) Ebenda I, 151. [4]) Ebenda I, 122—146. *Opuscula Newtoni* I, 328—357.

er nicht rede. Die Grundlage des Verfahrens verberge sich in folgenden Buchstaben:

$6a, 2c, d, a, e, 13e, 2f, 7i, 3l, 9n, 4o, 4q, 2r, 4s, 8t, 12v, x.$

In späterer Zeit hat man erfahren, dieses Anagramm bedeute: *Data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa,* aus einer beliebig viele Fluenten enthaltenden Gleichung die Fluxionen zu finden und umgekehrt. Ein zweites Anagramm fand sich gegen Ende des Briefes. Dort behauptete Newton die inversen Tangentenprobleme zu beherrschen. Er bediene sich dazu zweier Methoden, welche aus folgenden Buchstaben bestehen. Und nun kamen abermals zahlreiche Buchstaben, deren Vereinigung zu Worten später bekannt geworden ist. Sie lautet: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus; altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possint, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae seriei.* Die eine Methode besteht in der Herausziehung der Fluente aus einer Gleichung, welche daneben auch ihre Fluxion enthält, die andere in der Annahme einer Reihe für jede Unbekannte, woraus das Uebrige leicht abzuleiten ist, und in der Vergleichung der einander entsprechenden Glieder des Ergebnisses, um daraus die, Glieder der angenommenen Reihe zu ermitteln.

Zieht man in Erwägung, dass *Fluens* und *Fluxio*, ersteres selten, letzteres überhaupt noch nie in einer mathematischen Schrift gebraucht worden waren, und dass, was man mit ihnen machen sollte, mit einziger Ausnahme der zuletzt angerathenen Methode der unbestimmten Coefficienten, auch aus dem voll und unzerlegt angegebenen Wortlaute beider Anagramme kaum zu verstehen gewesen wäre, so gewinnen beide nur die Bedeutung, welche wir ihnen beilegten. Während sie für Leibniz ohne jeglichen Nutzen waren, sollten sie künftig die Selbständigkeit von Newtons Erfindungen mit sichernder Zeitangabe versehen. Wir machen dabei besonders darauf aufmerksam, dass in den Anagrammen von einer Bezeichnung, einem eigentlichen Algorithmus, nicht die Rede war. Das lässt sich nicht anders deuten, als dass Newton diese Dinge nicht für wichtig genug hielt, um auch ihren Besitz sich zu sichern.

Gehen wir noch auf Eines ein, was hochwichtig für die Geschichte der Infinitesimalrechnung in dem nicht in Anagrammen geschriebenen Texte des Briefes vorkommt. Ist z die Abscisse, y die senkrecht zu z angenommene Ordinate einer Curve, und heisst die Gleichung der Curve $y = dz^{\vartheta}(e + fz^{\eta})^{\lambda}$, und ist $\frac{\vartheta + 1}{\eta} = r$, so stelle behauptet Newton unmittelbar nach dem ersten Anagramme[1]), die Fläche der Curve sich durch eine Reihe dar, deren Anfangsglieder er angibt, und welche als geschlossener Ausdruck erscheine, sofern r eine ganze positive Zahl sei; anderenfalls sei die Reihenentwickelung eine unendliche. Wir wollen unseren Lesern das Verständniss des Satzes dadurch erleichtern, dass wir ihn in Zeichen der Integralrechnung schreiben und dabei den Buchstaben d, welchen wir für das Differential von z nicht entbehren können, mit a vertauschen.

Newton sagt alsdann: $\int az^{\vartheta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}dz$ lasse sich in eine Reihe entwickeln, welche abbreche, mithin einen geschlossenen Ausdruck liefere, sofern $\frac{\vartheta+1}{\eta}$ eine ganze positive Zahl sei. Nach einigen Beispielen fährt Newton fort[2]), wenn die Entwicklung, welche er soeben kennen gelehrt habe, nicht zum Ziele führe, versuche er die Umwandlung der Curvengleichung in $y = az^{\vartheta+\lambda\eta}(ez^{-\eta}+f)^{\lambda}$. Das kann aber keinen anderen Sinn haben als den, dass Newton das Bewusstsein der Möglichkeit einer Integration in geschlossener Form auch dann besass, wenn $\frac{\vartheta+1}{\eta}+\lambda$ eine ganze Zahl ist. Er kannte also bereits die beiden Hauptfälle, in welchen das sogenannte binomische Integral in geschlossener Form gefunden werden kann, eine Thatsache, welche ihm zur höchsten Ehre gereicht.

Im weiteren Verlaufe des Briefes zeigte dann Newton, wie unter Benutzung dieser Regel die Curve $y=\sqrt{a^2-ax+\frac{x^3}{a}}$ quadrirt werden könne. Setze man nämlich $a^2-ax=z^2$, so sei

$$y=\sqrt{z^2+\frac{x^3}{a}}=z+\frac{x^3}{2az}-\frac{x^6}{8a^2z^3}\text{ etc.,}$$

und jedes Glied dieser Reihe sei für sich quadrirbar. Auch diese Behauptung ist wahr. Nennt man nämlich den auftretenden Zahlencoefficienten k, so ist jedes Glied von der Form

$$\frac{kx^{3\mu}}{z^{2\mu-1}}=kx^{3\mu}(z^2)^{\frac{1}{2}-\mu}=kx^{3\mu}(a^2-ax)^{\frac{1}{2}-\mu},$$

und $\frac{\vartheta+1}{\eta}=\frac{3\mu+1}{1}$ ist eine ganz positive Zahl, da μ selbst ganz und positiv ist. Wäre, fährt Newton sogleich fort, die Reihe nicht einfach genug, so könne man sich dadurch helfen, dass man eine geometrische Curve beschriebe, welche durch beliebig viele gegebene Punkte hindurchginge[3]). Er äussert dabei die Bemerkung, Euklid habe

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 335. [2]) Ebenda I, 338. [3]) Ebenda I, 340: *Curvam geometricam describere quae per data quotcuncta puncta transibit.*

gelehrt einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu legen, ein Kegelschnitt könne mit Hilfe von fünf gegebenen Punkten gezeichnet werden, eine Curve dritten Grades mittels sieben gegebener Punkte; dieses geschehe geometrisch und ohne Dazwischentreten irgend welcher Rechnung. Offenbar dachte Newton hier an eine näherungsweise Quadratur von der Art der Simpsonschen Regel. Diese Sätze dürften die wichtigsten Errungenschaften Newtons auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung darstellen, für welche der zweite Brief vom 24. October 1676 als Zeugniss angerufen werden kann.

Ob Leibniz durch diesen zweiten Brief auf die Spur von Dingen gebracht werden konnte, die er nicht vorher schon kannte? Durch die Anagramme gewiss nicht, ob durch den nicht in Räthselform gehüllten, aber immer noch dunkel und räthselhaft klingenden Text der zuletzt von uns besprochenen Sätze bleibe dahingestellt.

Aber Leibniz liess sich gar nicht die Zeit, den Brief zum Ausgangspunkte neuer Untersuchungen zu nehmen, er beantwortete ihn an dem Tage, an welchem er ihn erhielt[1]). Er beantwortete ihn durch eine klare, offene, vollständige Darlegung der Auflösung des Tangentenproblems mit Hilfe der Differentialrechnung Augenscheinlich finde (Figur 33) die Proportion statt:

$$T_1B : {}_1B_1C = {}_1CD : D_2C$$

d. h. der auf der Axe gemessene Abstand der Tangente von der Ordinate verhalte sich zur Ordinate, wie die Differenz zweier Abscissen zur Differenz zweier Ordinaten. Betrachte man die Abscissendifferenz immer als die gleiche, so komme es also nur auf die Ordinatendifferenz an. Er bezeichne durch dy die Differenz zweier nächstliegender Ordinaten, durch dx die Differenz zweier nächstliegender Abscissen. Soll die Differenz etwa von y^2 gesucht werden, so schreibe er dafür $d\overline{y^2}$. Wir bemerken, dass wir, in dieser letzteren Beziehung von unserer Vorlage abweichend, den Horizontalstrich über dem zu differentiirenden Ausdruck durch Klammern ersetzen werden, zwischen denen er stehen soll. Nun sei, sagt Leibniz, $d(y^2)=2y\,dy$, wie leicht zu beweisen sei. Es sei nämlich $d(y^2)$ die Differenz der Quadrate zweier nächstliegender Ordinaten oder

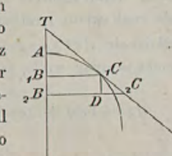

Fig. 33.

$$(y+dy)^2-y^2=2y\,dy+(dy)^2.$$

Das Quadrat der unendlich kleinen Grösse dy oder $(dy)^2$ könne weg-

[1]) Leibniz I, 154—162.

gelassen werden und so sei $d(y^2) = 2y\,dy$. Aehnlicherweise sei $d(y^3) = 3y^2dy$ u. s. w. Auch die Differenzen von Produkten seien erhältlich nach der Formel

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy.$$

So sei z. B.

$$d(y^2x) = 2xy\,dy + y^2dx.$$

Leibniz zeigt dann weiter, dass wenn in

$$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 + \cdots = 0$$

die Grössen x, y durch $x + dx$, $y + dy$ ersetzt werden, man dann die ursprüngliche Gleichung abziehe und die Glieder weglasse, welche höhere Abmessungen von dx und dy als die erste enthalten, das Ergebniss sich zeige

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy + \cdots}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 + \cdots}.$$

Aber es sei auch

$$-\frac{dy}{dx} = -\frac{{}_1B_2B}{D_2C} = -\frac{{}_1CD}{D_2C} = -\frac{T_1B}{{}_1B_1C}$$

und folglich

$$-\frac{T_1B}{{}_1B_1C} = \frac{c + dy + \cdots}{b + dx + \cdots}$$

in Uebereinstimmung mit der Regel von De Sluse. Nur sei die Leibnizische Regel viel umfassender, weil sie Anwendung finde sowohl wenn mehrere unbestimmte Grössen als x und y vorkommen, als auch wenn Irrationaliäten vorhanden seien. Es sei nämlich ganz allgemein $d(x^z) = zx^{z-1}dx$, und wenn etwa $d(\sqrt[3]{a + by + cy^2})$ gesucht werden wolle, setze man $a + by + cy^2 = x$; dann sei

$$dx = bdy + 2cydy, \quad d(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}dx = \frac{bdy + 2cydy}{3\sqrt[3]{(a + by + cy^2)^2}}.$$

Bei der letzten hier niedergeschriebenen Formel haben wir allerdings die Treue der Berichterstattung zu Gunsten der Richtigkeit des Ergebnisses verletzt. Bei Leibniz fehlt die Quadraterhebung der im Nenner auftretenden Wurzelgrösse, und der gleiche Fehler kehrt im Verlaufe des Briefes wieder, so dass die Vermuthung eines einmaligen Schreib- oder Druckfehlers ausgeschlossen ist. Leibniz glaubte augenscheinlich, es sei $d(\sqrt[n]{x}) = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x}}$, ohne um den Widerspruch gegen die von ihm erkannte Regel $d(x^z) = zx^{z-1}dx$ sich zu kümmern.

Kehren wir nach dieser nothwendigen Zwischenbemerkung zu

Leibnizens weiteren Auseinandersetzungen zurück. Die von ihm angewandte Substitution neuer Buchstaben für zusammengesetzte Ausdrücke genüge auch bei noch viel verwickelteren Irrationalitäten, so z. B. wenn die gegebene Gleichung

$$a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{1 + y}} + hyx^2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1 - y}} = 0$$

heisse. Ich glaube, fährt Leibniz fort, dass was Newton im Betreff der Tangentenziehung verbergen wollte, hiervon nicht abweichen dürfte[1]), und darin bestätigt mich, was er hinzufügt, dass nämlich von der gleichen Grundlage aus die Quadraturen sich leichter gestalten, denn jede Figur ist quadrirbar, die auf eine Differentialgleichung sich zurückführt[2]). Dieses hier zum ersten Male in der Mathematik vorkommende Wort wird sofort erklärt und dabei ein zweites Wort erstmalig benutzt, welches nicht minder Eingang fand, das Wort ableiten, *derivare*. Eine Differentialgleichung sei nämlich eine solche, durch welche der Werth von dx sich ausdrücke, und welche die Derivirte einer anderen sei[3]), durch die der Werth von x sich ausdrücke. Leibniz glaubte z. B., wie unsere oben eingeschobene Bemerkung es auspricht, es sei

$$d\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots} = \frac{b + cy + dy + \cdots}{z\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}}\,dy$$

und setzt in Folge dessen

$$\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}$$

als die Fläche der Curve, deren Gleichung

$$x = \frac{b + cy + dy^2 + \cdots}{z\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}}$$

sei, beziehungsweise sieht er in der Curve

$$x = \sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}$$

die quadrirende Curve der vorher genannten. Leibniz bedient sich zur Erläuterung dieser Betrachtungsweise einer Figur, welche genau mit Figur 23 übereinstimmt, die wir (S. 151) Tschirnhausens Veröffentlichung von 1683 entnahmen, und so erkennen wir aus dem

[1]) *Arbitror quae celare voluit Neutonus de tangentibus ducendis ab his non abludere.* [2]) *Quae sunt ad aequationem differentialem.* [3]) *Quaeque ex alia derivata est.*

Briefe Leibnizens an Newton, wie unbefangen Tschirnhaus etwa 6 bis 7 Jahre später über Gedanken verfügte, die er Leibniz schuldete. Die Wissenschaft freilich hat aus ähnlichem Vertrauensmissbrauche nicht selten Nutzen ziehen können, und wie sehr dieses 1683 der Fall gewesen ist, werden wir bald sehen.

Leibniz kommt in seinem Briefe noch auf die inverse Tangentenaufgabe zu reden. Wenn Newton behaupte, sie in seiner Macht zu haben, so ist das offenbar mittels unendlicher Reihen gemeint, er aber habe die Sache anders verstanden. Er wünsche die geometrische Herstellung der betreffenden Curve. **Huygens** habe z. B. entdeckt, dass die Cycloide durch ihre eigene Evolution entstehe[1]), wie nun, wenn man die Frage stelle: welche Curven werden durch ihre eigene Evolution erzeugt? Das sei eine inverse Tangentenaufgabe und nach seiner Meinung eine sehr schwierige. Andere inverse Tangentenaufgaben entstehen, wenn (Figur 34) in dem Dreiecke TBC, welches er das **charakteristische** nenne, und von dessen Seiten er $BC = x$ setze, während $AB = y$ sei, eine Beziehung zwischen zwei Seiten gegeben werde. In diesen Fällen sei die Curve auffindbar unter der Voraussetzung, dass man jede analytische Curve zu quadriren verstehe. Ob ausser Newton irgend Jemand die Auffindung zu vollbringen im Stande sei, wisse er nicht, aber durch seine Methode werde die Sache mit einer Zeile Rechnung erledigt. Wenn z. B.

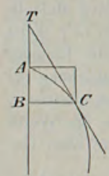

Fig. 34.

$$TB = bx + cx^2 + dx^3 + \cdots - y,$$

so sei die Curve $yx = bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} + \cdots$. Führen wir mit unseren heutigen Bezeichnungen die Rechnung aus, so ist (da x und y bei Leibniz in jenem Briefe die Rollen gegen die meistgebräuchliche Schreibweise vertauschen) $TB = x \cdot \frac{dy}{dx}$. Die gegebene Beziehung lautet daher $y + x\frac{dy}{dx} = bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ oder

$$d(yx) = (bx + cx^2 + dx^3 + \cdot\cdot)dx,$$

woraus die Integration $yx = \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4} + \cdots$ hervorbringen würde. Leibnizens Ergebniss ist mithin falsch und würde voraussetzen

$$TB = b + cx + dx^2 \cdots - y.$$

[1]) Sollte in dieser Stelle des Leibnizischen Briefes für Newton die Anregung gefunden werden müssen, die Huygensschen Evolutenuntersuchungen nachträglich in die *Methodus fluxionum* aufzunehmen?

Fassen wir den Inhalt des Briefes nochmals zusammen, so sehen wir, dass unsere Behauptung, Leibniz habe eine ebenso klare als ausführliche Schilderung der Auflösung der Tangentenaufgabe mittels Differentialrechnung gegeben, durchaus berechtigt ist, und wenn auch einige Fehler einschlüpften, auf welche hinzuweisen wir nicht unterlassen haben, für welche vielleicht die Eiligkeit des Briefes verantwortlich zu machen wäre, so war doch genug gesagt, um Newton zu überzeugen, hier erwachse ihm ein ebenbürtiger Nebenbuhler. Warum Leibniz, während er das Zeichen der Differentiation preisgab, das der Integration zurückbehielt? Auf diese Frage fehlt uns die Antwort. Vielleicht dachte Leibniz, die Differentiation sei in erhöhtem Grade neu und sein Eigenthum, während die seit **Cavalieri** vorhandenen Gesammtheiten dem Summenbegriffe vorgearbeitet hatten.

Aber ein Anderes ist hier zu rügen. Leibniz sprach in seinem Briefe die Vermuthung aus, Newtons Tangentenmethode dürfe von der seinigen nicht abweichen. Das war fast mehr als Vermuthung, das konnte mit Rücksicht auf den Inhalt der Analysis per aequationes (S. 158) nahezu als gewiss gelten. Aber warum sagt Leibniz nicht offen, dass er in London jene Abhandlung gelesen habe? In dem Drama des späteren Streites ist hier die erste Schuld Leibnizens erkennbar, die deshalb nicht minder zu verurtheilen ist, dass sie in die Vorgeschichte fällt.

Freilich können wir Leibnizens Schweigen, wenn nicht entschuldigen, doch erklären. Leibniz hatte jene Abhandlung gelesen. In dem, was dort über die Rectification von Curven gesagt war (S. 159), in Verbindung mit den sehr lakonischen brieflichen Aeusserungen Newtons glaubte er seine eigenen Gedanken bis zu einem gewissen Grade wiederzuerkennen, aber er glaubte es nur. Er wusste, selbst mit allen Anlagen zu einem Geschichtsforscher ersten Ranges versehen, dass es für einen solchen keine gefährlichere Klippe gebe als die seiner eigenen Kenntnisse, dass man nur zu geneigt ist, das, was man selbst weiss, in ältere Schriftsteller hineinzulesen. Konnte es ihm nicht ähnlich beim Lesen der Analysis per aequationes und des Newtonschen Briefes gegangen sein? Er wollte, er musste sich Sicherheit verschaffen. Das war sein erster Gedanke, und unter seinem Einflusse schrieb er die Antwort an dem Tage, an welchem Newtons Brief in seine Hände gekommen war. Sein Forschungsgang war mit grösster Wahrscheinlichkeit ein ganz anderer gewesen als der Newtons, aber sie konnten doch auf verschiedenen Wegen zum gleichen Ziele gelangt sein! Deshalb erörterte er jetzt sein Verfahren und die eine, wie wir vorher gesagt haben, durchaus neue

Hälfte seiner Bezeichnungen. Weiteres behielt er vielleicht sich vor, wenn Newton sich entsprechend offen geäussert haben würde.

Dazu kam es allerdings nicht. Leibnizens Brief traf nach dem 12. Juli 1677 in London ein. Am 9. August bestätigte Oldenburg dessen Empfang[1]) und bemerkte, auf eine baldige Antwort von Newton oder Collins dürfe Leibniz sich keine Rechnung machen, beide seien von der Stadt abwesend und sehr beschäftigt. Noch im gleichen Monate oder in dem darauf folgenden September starb Oldenburg. Aber konnte Newton, wenn er antworten wollte, nicht später eine andere Mittelsperson suchen, konnte er nicht einen Brief unmittelbar an Leibniz richten? Dass er es nicht that, liegt doch wohl in der gekränkten Eitelkeit Newtons begründet. Er konnte es Leibniz nicht verzeihen, auf eigene Hand gefunden zu haben und offen zu beschreiben was noch Geheimniss bleiben und nicht über Englands Grenzen hinaus sich verbreiten sollte.

Was Wunder, wenn jetzt Leibniz theils durch die Nichtbeantwortung sich beleidigt fühlte, theils daraus die Muthmassung schöpfen mochte, er habe wirklich Newton mehr, als Recht war, zugetraut? Newton sei in der That in seinen Forschungen lange nicht so weit als er vorgedrungen und scheue sich nur solches einzugestehen? Dass Leibniz so dachte, geht aus seinem ganzen späteren Benehmen hervor.

Die nächsten Jahre waren für Leibniz mit Geschäften so überfüllt, dass er an mathematische Arbeit, geschweige denn an Veröffentlichungen nicht denken konnte. Erst 1682 boten die neu entstandenen A. E. ihm den Anlass, manches zum Drucke zu geben. Dahin gehört 1683 die Abhandlung über Zinseszins (S. 53), dahin schon 1682 eine solche über Optik[2]). Das Gesetz, dass das Licht immer den Weg einschlage, der in der kürzesten Zeit zu durchlaufen sei, gibt Veranlassung die Bedingung zu erörtern, unter welcher ein Ausdruck $mp + nq$, in welchem

$$p = \sqrt{c^2 + y^2}, \quad q = \sqrt{g^2 + (h - y)^2}$$

ist, seinen kleinsten Werth erhalte. Nach meiner Methode für die grössten und kleinsten Werthe[3]), sagt Leibniz, welche über die bisher bekannten hinaus die Rechnung wunderbar zusammenzieht, wird sofort beim ersten Anblick, fast ohne jede Rechnung, offenbar, dass np

[1]) Leibniz I, 167. [2]) A. E. 1682 pag. 185—190: *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium Autore G. G. L.* Diese Abhandlung fehlt in der Gerhardtschen Gesammtausgabe. [3]) *Ex mea methodo de maximis et minimis.*

sich zu mq verhalten muss wie y zu $h - y$. Das ist die erste öffentliche Berufung Leibnizens auf eine in seinem Besitze befindliche Methode. Rechnet man nach, so zeigt sich, dass die von Leibniz ausgesprochene Proportion in der That den Mindestwerth von $mp + nq$ liefert.

Der folgende Jahrgang 1683 der A. E. brachte im Octoberhefte jene Abhandlung Tschirnhausens über Quadratur einer Curve mit Hilfe einer anderen Curve, welche die quadrirende genannt werden kann, in der Tschirnhausen Leibnizens Gedanken in kaum gestatteter Weise ausbeutete (S. 190). Leibniz empfand darüber den empfindlichsten Aerger, und dessen Folge war es, dass er nun mit seinen Entdeckungen nicht länger zurückzuhalten sich entschloss. Im Mai 1684 erschien in den A. E. der Aufsatz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*[1]).

Leibniz begann diesen Aufsatz damit, dass er die Grösse dx als eine beliebige, nicht etwa als eine unendlich kleine Strecke erklärte, zu welcher alsdann eine andere dadurch in ihrer Grösse bestimmte Strecke dv oder dw, dy, dz u. s. w. in demselben Verhältnisse stehe, welches zwischen zwei Seiten des Dreiecks obwalte, das aus einer Berührungslinie an eine Curve, aus der Ordinate des Berührungspunktes und aus der Abscisse zwischen den Fusspunkten der Berührungslinie und der Ordinate gebildet ist. Ist a eine Constante, so sei $da = 0$, $d(ax) = adx$. Ist $v = z - y + w$, so sei $dv = dz - dy + dw$. Ist $y = xv$, so sei $dy = xdv + vdx$. Ist $z = \frac{v}{y}$, so sei $dz = \frac{ydv - vdy}{y^2}$; letzterer Ausdruck sei noch mit ± 1 vervielfacht zu denken, weil je nach der Gestaltung der Curve, welche der Betrachtung unterworfen ist, die einzelnen Strecken bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung zu nehmen sind. Im Allgemeinen sei zu bemerken, dass z und dz gleichen Zeichens sein werden, weil sonst die vorhergehende Regel für dv bei $v = z - y + w$ nicht stattfände, dass aber die positive oder negative Bedeutung von dz nur aus der Figur ersichtlich sei. Die Berührungslinie steigt, beziehungsweise fällt, wenn $\frac{dv}{dx}$ positiv, beziehungsweise negativ ist. Sie ist der Axe parallel, und weder ein Steigen noch ein Fallen findet statt, wenn $\frac{dv}{dx} = 0$. Dabei ist die Ordinate v ein Maximum, wenn die Curve gegen die Axe concav, sie ist ein Minimum, wenn die Curve gegen die Axe convex ist. Hier ist zum ersten Male der

[1]) Leibniz V, 220—226.

Unterschied zwischen einem Maximum und einem Minimum erkannt und ausgesprochen! Aber Leibniz ist weiter als das gegangen. Er hat der sinnlich sichtbaren Unterscheidung eine analytische an die Seite gestellt. Er hat auf die Differenzen der Differenzen, *differentiae differentiarum*, auf ddv verwiesen, dessen Positiv- oder Negativsein die beiden Krümmungsarten kennzeichne. Das Verschwinden von ddv, ohne dass allgemein $v = 0$ oder $dv = 0$ wäre, lässt den Wechsel von Concavität und Convexität erkennen, einen *punctum flexus contrarii*. Hier finden nicht wie beim Maximalprobleme, zwei, sondern drei gleiche Gleichungswurzeln sich zusammen, was heute in die Worte gekleidet zu werden pflegt, die Inflexionstangente habe drei consecutive Punkte mit der Curve gemeinschaftlich. Leibniz hatte in dieser seiner Behauptung einen Vorgänger an Franciscus van Schooten, welcher das Gleiche schon in seinen Erläuterungen zu der Geometrie von Descartes ausgesprochen hat[1]) (Bd. II, S. 820). Andrerseits dürfte Newton die zweite Erklärung des Inflexionspunktes in der Methodus fluxionum (S. 175) den *Varia Opera* Fermats entnommen haben[2]). Ist diese Vermuthung richtig, so haben Aenderungen an der Methodus fluxionum nicht bloss nach 1673, sondern auch nach 1679 noch stattgefunden.

Weiter gibt Leibniz als Algorithmus des Differentialcalculs, wie er die Methode nenne, $d(x^a) = ax^{a-1}dx$ mit Ausdehnung auch auf negative und gebrochene Exponenten a und zeigt an einer sehr verwickelten Gleichung, wie die Einführung neuer Veränderlichen nothwendig falle. Es ist genau das gleiche Verfahren wie in Newtons Methodus fluxionum (S. 170—171), auf welches auch Leibniz verfallen ist, denn dass er die Methodus fluxionum zu Gesicht bekommen haben könnte ist durchaus unmöglich, ist auch niemals nur vermuthet worden. Bei solchen Substitutionen erscheint zum ersten Male der Doppelpunkt als Divisionszeichen[3]).

Als Beispiel einer Minimalaufgabe ist das optische Gesetz benutzt, über welches der Aufsatz in den A. E. von 1682 sich verbreitet hatte (S. 192), und das damals beweislos ausgesprochene Ergebniss wird abgeleitet. Zum Schlusse kommt Leibniz auf die Beaunesche Aufgabe. Sie führe zur Gleichung $\frac{w}{a} = \frac{dw}{dx}$. Nehme man dx als eine Constante, etwa $= b$, so sei $w = \frac{a}{b} dw$, d. h. die

[1]) Descartes, Geom. I, 258. [2]) Fermat, *Varia Opera* 73, *Oeuvres* I, 166. [3]) Leibniz V, 223: $x : y$ *quod idem est ac x divis. per y seu* $\frac{x}{y}$.

Ordinaten w seien ihren Incrementen oder Differenzen proportional, und wenn die x um Constantes wachsen, in arithmetischer Progression stehen, so seien die entsprechenden w die Glieder einer geometrischen Progression. Wenn also die w Zahlen darstellen, so seien die x deren Logarithmen, die Curve eine logarithmische.

Leibniz hatte also jetzt der Oeffentlichkeit übergeben, was, wie er befürchten musste, sonst durch Tschirnhausens schrankenlose Veröffentlichungswuth in weniger zutreffender Gestalt der Presse übergeben zu werden drohte, vielleicht gar ohne dass der Name des Erfinders genannt worden wäre. Von der Integralrechnung und dem für ihre Zwecke erfundenen Zeichen war 1684 kaum, wenn man die kurze Erörterung der Beauneschen Aufgabe ausschliesst, gar nicht die Rede.

Wie rasch der Aufsatz bekannt wurde, dafür könnten wir vielleicht auf den Aufsatz über den Contingenzwinkel hinweisen, welchen Wallis 1685 zum Drucke gab, und in welchem (S. 26) man Leibnizische Gedanken wiederfinden kann. Sei aber auch dieser Hinweis anzuzweifeln, so erschien gleichfalls 1685 und gleichfalls in England ein Buch, dem der Leibnizische Aufsatz von 1684 als Grundlage diente. Der Schotte John Craig, den wir (S. 56) als Schriftsteller über die Zuverlässigkeit menschlicher Ueberlieferung kennen gelernt haben, gab als erste Schrift 1685 die *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi* heraus, die sich vollständig auf die Leibnizische Differentialrechnung gründete. Ihre Zeichen sind benutzt, ihre Tangentenmethode wird als diejenige gepriesen, welche Irrationalitäten am besten bewältigte.

Craig lebte, wie wir uns erinnern, in Cambridge gleichzeitig mit Newton. Ist es denkbar, dass Newton den Aufsatz nicht gekannt haben sollte, der Craig als Ausgangspunkt diente? Ist es denkbar, dass Craigs Buch von 1685 ihm unbekannt blieb, dessen Titel schon seine Neugier reizen musste? Zu diesen allgemeinen Erwägungen tritt noch der Umstand, dass in Craig's Methodus das Newton'sche Binomialtheorem erstmalig gedruckt erschien. Es tritt sogar ein bestimmtes Zeugnis hinzu. Craig gab 1718 ein zweites Werk, *De calculo fluentium*, heraus, und in dessen Vorrede erzählte er ausdrücklich, er habe 1685 in Cambridge gewohnt, und Newton habe auf seine Bitte sein damaliges Buch vor der Drucklegung gelesen! So ist also unter Ausschluss jeden Zweifels bewiesen: Newton kannte Craigs Methodus, und was that er, um sich seine eigenen mathematischen Entdeckungen zu sichern? Nichts!

Es ist ja richtig, Newton war damals mit der Abfassung seines grossen Werkes der Principien beschäftigt. Im August 1684 war

Halley bei ihm auf Besuch[1]) und erfuhr, der Beweis des Gesetzes der Himmelsbewegungen sei vollendet. Im November schickte Newton vier Lehrsätze und die Auflösung von sieben Aufgaben an Halley nach London. Der Empfang dieses Schriftstückes, welches Newtons Anrecht an die Entdeckung der allgemeinen Anziehungslehre wahren sollte, wurde in das Registerbuch der Royal Society eingetragen. Es wäre zu viel verlangt, wenn man beanspruchte, dass ein mit so umfassenden und schwierigen Arbeiten Beschäftigter, aus welchem Grunde es auch sei, sich herausreisse und ganz andere Dinge rasch zu Papier bringe. Gewiss, aber die Methodus fluxionum lag doch seit 13 Jahren druckfertig in Newtons Pulte! Warum schickte er sie auch jetzt nicht ein? Wir persönlich können diese Lässigkeit nur auf eine Weise erklären, nur damit, dass Newton den Werth seiner mathematischen Leistung als solcher nicht so sehr hoch anschlug, dass er sich darein fügte, dass Leibniz ihm hier den Rang abgelaufen hatte.

Wir sprachen von der Raschheit, mit der Leibnizens Aufsatz sich bekannt machte. Die Raschheit des wissenschaftlichen Verkehrs nahm überhaupt mehr und mehr zu. Von dem Buche Craigs, welches hervorgerufen durch eine Abhandlung vom Mai 1684 im Jahre 1685 erschien, ist bereits im Jahrgange 1686 der A. E. eine Anzeige vorhanden[2]), welche der Randbemerkung des Heidelberger Exemplars zufolge von Christoph Pfautz verfasst war.

Derselbe Jahrgang 1686 der A. E. brachte zwei neue Aufsätze von Leibniz: *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi etc.*[3]) und unmittelbar daran anschliessend: *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*[4]). Der erstere Aufsatz bringt eine neue Frage an die Tagesordnung, von welcher noch nirgend die Rede gewesen war, denn wir dürfen nie vergessen, dass die Methodus fluxionum, selbst wenn sie damals den vollen später bekannt gewordenen Inhalt besass, für die mathematische Welt nicht vorhanden war. In einem Curvenpunkte könne man, sagt Leibniz, ausser der Richtung auch die Krümmung messen. Jene werde durch die grade Berührungslinie, diese am einfachsten durch denjenigen Kreis versinnlicht, der den kleinsten Contingenzwinkel mit der Curve bilde, der im Kusse sich ihr anschmiege, sie osculire. Ein solcher Kreis müsse mit der Curve zwei Berührungen, also vier gleiche Wurzeln gemein haben, und man könne auch Osculationen zweiter, dritter und noch höherer Ordnung sich denken, wo drei, vier und mehr Berührungen stattfinden.

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXIX und LV. [2]) A. E. 1686 pag. 169. [3]) Leibniz VII, 326—329. [4]) Ebenda V, 226—233.

Hier hat Leibniz, vielleicht weil er bei dem allgemeinen Gedanken sich beruhigte, statt ihn in Rechnung umzusetzen, bekanntlich geirrt. Der Osculationskreis beruht auf der Gemeinschaft von drei, nicht von vier consecutiven Punkten, und Newton sah hier viel richtiger (S. 176), wenn jene Stelle dem alten Manuscripte angehörte und Newton nicht etwa, wie nach 1673 und 1679, auch nach 1686 und noch später Zusätze in seine Handschrift einschaltete.

Der zweite Aufsatz von 1686, die *Geometria recondita*, wie er gewöhnlich genannt wird, ist ungleich wichtiger. In ihm erscheint zum ersten Male das Integralzeichen im Drucke. Das ist aber durchaus nicht das einzige Bemerkenswerthe. Leibniz geht aus von dem Buche Craigs, welches ihm zugesandt worden sei. Dann kommt eine freundschaftlich gehaltene Polemik gegen Tschirnhaus, in welcher Leibniz sich darauf beruft, dass er seine Methoden schon vor zehn Jahren und länger besessen und sie im Gespräche mit Tschirnhaus, der sich damals in Paris bei ihm befand, frei geäussert habe. Diese Behauptung fand keinen Widerspruch, ist also abermals geeignet, die Datirungen der handschriftlichen Notizen von 1676 zu stützen. Schon in einem Aufsatze *De dimensionibus figurarum inveniendis* in den A. E. von 1684 hatte Leibniz die algebraischen Curven als solche bezeichnet, deren Natur durch eine Gleichung bestimmten Grades ausgedrückt werden könne[1]). Noch früher hatte er in der handschriftlich erhaltenen Abhandlung *Compendium quadraturae arithmeticae* die gleichen Curven analytische genannt und das Wort Parameter für jede in der Gleichung vorkommende Constante eingeführt[2]). In der Geometria recondita öffnet er den Weg zu den Transcendenten. Wir haben gelegentlich (S. 112) auf die Anwendung dieses Wortes bei Gleichungen wie $x^x + x = a$ aufmerksam gemacht, in der Geometria recondita ist es erläutert: Transcendente sind solche Grössen, die durch keinerlei Gleichung bestimmten Grades erklärt werden, vielmehr über jede algebraische Gleichung hinausgehen[3]). Die Tangentenmethode von 1684, behauptet nun Leibniz, mache auch vor transcendenten Curven nicht halt. Dem Differentialcalcul aber stehe ein anderer gegenüber, zu welchem er hier den Zugang eröffnen wolle. Aus einer Differentialgleichung entstehe nämlich eine summirende[4]). So sei $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ eine Folge davon, dass

[1]) Leibniz V, 127: *cujus natura per aequationem certi gradus exprimi potest.* [2]) Ebenda V, 103: *Curva analytica est, cujus natura aequatione certi gradus exhiberi potest. Parameter est recta constans aequationem ingrediens.* [3]) Ebenda V, 228: *omnem aequationem algebraicam transcendant.* [4]) *Aequatione differentiali versa in summatricem.*

$d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\,dx$, und die Gleichung der Cycloide sei

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Bei der Prüfung der letzteren Gleichung ist zu beachten, was schon (S. 190) angemerkt wurde, dass x und y bei Leibniz nicht den gleichen geometrischen Sinn haben, den man diesen Buchstaben heute beizulegen pflegt. Die y sind auf der Grundlinie gemessen, über welche der Erzeugungskreis hinrollt, die x dazu senkrecht, und der Halbmesser des Kreises ist überdies als Einheit gewählt. Warum dx gewählt wurde statt der einfachen Buchstaben älterer Schriftsteller ist ausdrücklich gesagt: weil in dx die Aenderung von x zu erkennen ist[1]). Leibniz führte in diesem Aufsatze auch den Namen des charakteristischen Dreiecks in die Oeffentlichkeit ein, allerdings in anderer Bedeutung als in seinem Briefe an Newton. Damals (S. 190) war das Dreieck gemeint, dessen Hypotenuse die Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zur Abscissenaxe ist, während die Ordinate des Berührungspunktes und ein Stück Abscissenaxe die Katheten bildeten. Jetzt verstand Leibniz darunter das jenem grossen Dreiecke ähnliche unendlich kleine Dreieck, dessen Hypotenuse ein mit der Curve zusammenfallendes Element der Berührungslinie ist. Wir erinnern uns, dass Leibniz hiermit nur den Rückweg zu seinen anfänglichen Gedanken nahm, denn bei Pascal war ihm grade das unendlich kleine Dreieckchen begegnet und aufgefallen (S. 163). In den A. E. von 1693 hat Leibniz später beide Auffassungen vereinigt. Es gebe zwei einander ähnliche charakteristische Dreiecke, ein angebbares und ein nicht angebbares[2]).

Zwischen den mathematisch so hochbedeutsamen Mittheilungen der Geometria recondita ist auch eine geschichtliche Uebersicht bisheriger Leistungen eingeschlossen. Wie Pascal dort zwar nicht genannt, aber mit für uns ausreichender Deutlichkeit als Leibnizens Vorgänger bezeichnet war, haben wir (S. 164) besprochen. An Mercators erste Quadratur mit Hilfe einer unendlichen Reihe wird erinnert, und dann heisst es weiter[3]): „Ein Geometer von tiefstem Geiste, Isaac Newton, hat dieselbe Entdeckung nicht nur selbstständig gemacht, sondern hat sie in ganz allgemeiner Weise zu Ende geführt; würde er die Ueberlegungen, von denen ich vernehme, dass er sie noch verhehlt, herausgeben, so ist kein Zweifel, dass er uns den Zugang zu grossen Vermehrungen der Wissenschaft und zu grossen Abkürzungen eröffnen würde."

[1]) *Quia istud dx est modificatio quaedam ipsius x.* [2]) Leibniz V, 298: *assignabile et inassignabile.* [3]) Ebenda V, 132.

Und nun kam in der Zeit vom April 1686 bis etwa zum Juli 1687 die Drucklegung von Newtons *Philosophiae naturalis principia mathematica*, meistens kurzweg die Principien genannt[1]). Unsere Leser erwarten wohl, dass namentlich Leibnizens nicht misszuverstehender Aufforderung von 1686 gegenüber Newton die Gelegenheit gern ergriffen haben werde, bei Veröffentlichung eines mit Spannung erwarteten, von der Royal Society in London schon vor seinem Erscheinen aufs Wohlwollendste befürworteten Werkes nun auch die mathematischen Hilfsmittel zu enthüllen, deren er bei der Ausarbeitung sich bedient hatte.

Keineswegs! Einige Andeutungen über das Werden der Grössen, von welchen gleich die Rede sein soll, finden sich zwar, die Wörter Augenblicksveränderung, Fliessen sind gebraucht, aber das, was bei Leibniz das eigentlich Neue gegen alle früheren Infinitesimalbetrachtungen war, die einheitliche Bezeichnung, also bei Newton das Pünktchen, ist nirgends benutzt, nirgends angedeutet, während es doch nach vorhandenen, wenn auch nicht gedruckten Aufzeichnungen seit 1665 in Newtons Besitze war[2]).

Warum dieses Schweigen? Eine einzige Erklärung scheint dafür möglich, welche auch wiederholt gegeben worden ist. Die Gesetze der allgemeinen Anziehung, deren Darstellung die Principien geben, waren so neu, so überraschend, dass Newton eine um so schroffere Ablehnung derselben befürchten musste, wenn er in der Beweisführung sich im Geringsten von den altgeometrischen Methoden entfernt hätte, welche alle Mathematiker anerkannten. Heisst es doch in einem fast 30 Jahre später geschriebenen Aufsatze[3]): „Newton fand die meisten Sätze der Principien mittels der neuen Analysis, aber er bewies sie synthetisch, damit die Gesetze des Himmels auf guter geometrischer Grundlage ruhten."

Wir haben zugesagt einige leise Andeutungen zu erwähnen. Newton schickte gleich dem ersten Buche eine Reihe von 11 Lemmen oder Lehnsätzen voraus, welche bestimmt waren, die Grundlage des Nachfolgenden zu bilden, und welche wir mittheilen[4]).

1. Grössen wie auch Verhältnisse von Grössen, welche in einer

[1]) Eine sehr ausführliche Berichterstattung über die Principien bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* VI, 6—92. [2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* XXI, bemerkt zu dem Datum des 20. Mai 1665: *Paper on fluxions, in which the notation of points is used* und zu dem 16. Mai 1666: *Another paper on fluxions.* [3]) P. T. 1715 pag. 206. Vgl. F. Giesel, Entstehung des Leibniz-Newtonschen Prioritätsstreites. Delitzsch 1866. S. 14, Anmerkung 13. [4]) Wir bedienen uns meistens des Wortlautes der Uebersetzung der Principien von J. Ph. Wolfers. Berlin 1872.

gegebenen Zeit sich beständig der Gleichheit nähern, und einander vor dem Ende jener Zeit näher kommen können, als um jede gegebene Grösse, werden endlich einander gleich.

2. Werden (Figur 35) in der beliebigen Figur $AacE$, welche durch die geraden Linien Aa, AE und die Curve acE begrenzt ist, beliebig viele Parallelogramme Ab, Bc, Cd etc. auf gleichen Grundlinien AB, BC, CD etc. und mit den Seiten Bb, Cc, Dd etc. beschrieben; fügt man hierauf die Parallelogramme $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$ etc. hinzu; vermindert man ferner die Breite $AB = BC = CD = \cdots$ dieser Parallelogramme und vermehrt man zugleich ihre Anzahl bis ins Unendliche, so wird zuletzt die eingeschriebene Figur gleich der umschriebenen, gleich der krummlinigen.

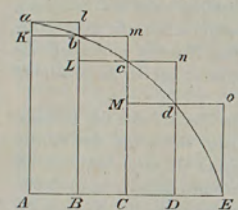

Fig. 35.

Der Beweis besteht darin, dass der Unterschied der eingeschriebenen und der umschriebenen Figur aus kleinen Parallelogrammen besteht, welche zu $ABla$ sich summiren. Die Höhe dieses Summenparallelogrammes ist endlich, die Breite nimmt unendlich ab, die Fläche verschwindet alsdann. Sind aber die eingeschriebene und die umschriebene Figur als gleich zu erachten, so fällt mit ihnen auch die zwischen beiden liegende krummlinig begrenzte Figur zusammen.

3. Die Folgerungen des zweiten Lehnsatzes bleiben bestehen, wenn die Stücke AB, BC, CD etc. auch nicht einander gleich sind, falls sie nur alle unendlich klein werden.

4. Wenn in zwei Figuren wie vorhin zwei Reihen Parallelogramme, deren Anzahl in beiden gleich, eingeschrieben und ihre Breiten ins Unendliche vermindert werden, wenn ferner die letzten Verhältnisse[1]) der einzelnen Parallelogramme in der einen Figur zu den einzelnen in der anderen dieselben sind, so stehen beide Figuren zu einander in demselben Verhältnisse.

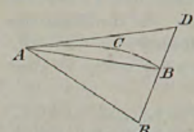

Fig. 36.

5. Alle einander correspondirenden Seiten ähnlicher Figuren sind proportional, sowohl die krumm- als die gradlinigen, und ihre Flächeninhalte verhalten sich wie die Quadrate der Seiten.

6. Wird (Figur 36) ein der Lage nach gegebener Bogen ACB durch die Sehne AB unterspannt und in irgend einem Punkte A,

[1]) *rationes ultimae.*

wo die Krümmung ihre Art nicht ändert[1]), durch die grade Linie AD berührt, nähern sich hierauf die Punkte A und B einander und treffen sie endlich zusammen, so wird der Winkel BAD, welchen Sehne und Tangente mit einander bilden, ins Unendliche vermindert und verschwindet zuletzt.

7. Bei denselben Voraussetzungen ist das letzte Verhältniss des Bogens, der Sehne und der Tangente das der Gleichheit.

8. Bilden gegebene grade Linien AR und BR mit dem Bogen ACB, der Sehne AB und der Tangente AD die Dreiecke $ACBR$, ABR, ADR, und nähern sich die Punkte A und B einander gegenseitig, so wird die letzte Form der verschwindenden Dreiecke einander ähnlich[2]), und ihr letztes Verhältniss das der Gleichheit.

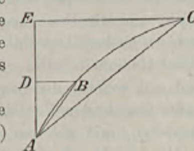

Fig. 37.

9. Die ihrer Lage nach gegebene Curve ABC und die grade Linie AE (Figur 37) schneiden sich im Punkte A, und auf jene Gerade stützen sich unter gegebenem Winkel die DB, EC, welche der Curve in B, C begegnen; lässt man B und C dem A sich nähern, so stehen die Dreiecke ADB, AEC zuletzt im quadratischen Verhältnisse der Seiten.

10. Die Wege, welche ein Körper in Folge der Wirkung irgend einer endlichen, regelmässigen Kraft beschreibt, mag diese bestimmt und unveränderlich sein, oder mag sie beständig zu- oder abnehmen, stehen beim Anfange der Bewegung im quadratischen Verhältnisse der Zeiten.

11. Die Linie AD sei eine Tangente an der Curve ABC und BD beliebig von B nach D gezogen, alsdann steht BD beim Verschwinden zuletzt im quadratischen Verhältnisse der zugehörigen Sehne AB (d. h. es wird lim. $\frac{BD}{AB^2}$ gleich einer Constanten, und die Curve kann beim Verschwinden als Kegelschnitt gedacht werden).

Man wird, nachdem wir alle 11 Lehnsätze mitgetheilt haben, unsere Kennzeichnung derselben als leise Andeutungen der Infinitesimalbetrachtungen, mittels deren Newton zu seinen Ergebnissen gelangt war, vielleicht als zuvielsagend, keinenfalls als zu eng zurückweisen. Am deutlichsten sprach sich Newton noch in einem längeren Scholium, einer Anmerkung aus, mit welcher er nach Aufstellung der 11 Lehnsätze den ersten Abschnitt beschloss. Die wichtigste Stelle hat folgenden Wortlaut:

[1]) *in medio curvaturae continuae.* [2]) *Ultima forma triangulorum evanescentium est similitudo.*

„Man kann den Einwurf machen, dass es kein letztes Verhältniss verschwindender Grössen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältniss mehr stattfinde. Aus demselben Grunde könnte man aber auch behaupten, dass ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe; diese sei, bevor er den bestimmten Ort erreicht hat, nicht die letzte, nachdem er ihn erreicht hat, existire sie gar nicht mehr. Die Antwort ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man diejenige, mit welcher der Körper sich weder bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblicke, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst, mit welcher der Körper den Ort berührt, und mit welcher die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältnisse verschwindender Grössen dasjenige zu verstehen, mit welchem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden stattfindende. Ebenso ist das erste Verhältniss entstehender Grössen dasjenige, mit welchem sie entstehen, die erste und letzte Summe diejenige, mit welcher sie anfangen oder aufhören zu sein (entweder grösser oder kleiner zu werden). Es existirt eine Grenze, welche die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung erreichen, nicht aber überschreiten kann; dies ist die letzte Geschwindigkeit. Dasselbe gilt von der Grenze aller anfangenden und aufhörenden Grössen und Proportionen. Da diese Grenze fest und bestimmbar ist, so ist es eine wahrhaft geometrische Aufgabe sie aufzusuchen.“

Man sieht, mit welchen gewundenen Ausdrücken Newton um den Begriff der in einem Augenblicke vorhandenen Geschwindigkeit herumgeht, anstatt grade ihn zu benutzen, um das Wort Fluxion den Lesern klar zu machen. Er wollte damals, am 28. April 1686, als das erste Buch der Principien der Royal Society druckfertig vorgelegt wurde[1]), jenes Wort nicht in die Oeffentlichkeit bringen. Seine Meinung in dieser Beziehung änderte sich bis zum 20. Juni, als dem Tage, an welchem das zweite Buch bis aufs Abschreiben fertig war[2]). Im zweiten Abschnitte des zweiten Buches taucht unvermittelt das zweite Lemma auf: *Momentum Genitae aequatur Momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coefficientia continue ductis*, oder: die Augenblicksveränderung einer Function ist gleich dem Producte der Augenblicksveränderungen der

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXX. [2]) Ebenda pag. LVII, Anmerkung 86.

sie bildenden Veränderlichen in ihre Exponenten und in ihre Coefficienten.

Dass wir nicht allzufrei übersetzt haben, geht aus der Fortsetzung hervor, in welcher Newton noch Einzelnes erläutert. *Genita* sei jede Grösse, welche aus anderen arithmetisch oder geometrisch hervorgehe; *Momentum* sei das augenblickliche positive oder negative Increment der in einem Flusse befindlichen Grössen. „Die Momente“, sagt Newton, „hören auf Momente zu sein, sobald sie eine endliche Grösse erhalten. Man hat unter ihnen die eben entstehenden Anfänge endlicher Grössen zu verstehen und betrachtet in diesem Lehnsatze nicht die Grösse der Momente, sondern ihr Verhältniss, wenn sie eben entstehen. Es kommt auf dasselbe heraus, ob man statt der Momente entweder die Geschwindigkeiten der Zu- und Abnahme (welche man auch Bewegungen, Veränderungen und Fluxionen der Grössen nennen kann) oder beliebige endliche Grössen versteht, welche jenen Geschwindigkeiten proportional sind.“

Darnach bedeutet in der That der (S. 202) im lateinischen Wortlaute und in freier Uebersetzung abgedruckte Satz nichts anderes als die Regel, nach welcher A mal B differentiirt werden soll, wenn A und B irgend Potenzen der Veränderlichen sind, und sechs Beispiele zeigen die Richtigkeit dieser Auffassung.

Man würde irren, wenn man glaubte, Newton habe, nachdem dieser Lehrsatz ausgesprochen war, von nun an fortwährend Fluxionen angewandt. Dazu wäre im ersten Buche Gelegenheit gewesen, das zweite Buch hat es wesentlich mit Fluenten d. h. mit Integralrechnung zu thun, und ihr Name ist in dem Lehnsatze nicht enthalten. Man sieht daraus deutlich, was Newtons Absicht beim Abdrucke eines Lehnsatzes, von dem er keinen Gebrauch zu machen gewillt war, gewesen sein muss.

Er wollte eine gedruckte Aeusserung schaffen, auf die er sich später einmal zur Datirung beziehen könne, wenn er je daran denken sollte seine Fluxionsrechnung herauszugeben. Das geht noch deutlicher aus einem Scholium hervor, welches hinter dem Lehnsatze und den ihn erläuternden Beispielen steht: „In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G. G. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, dass ich mich im Besitze einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lasse sich dieselbe eben so gut auf irrationale wie rationale Grössen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte (wenn eine Gleichung mit beliebig vielen Fluenten gegeben ist, die Fluxionen zu finden und umgekehrt), welche meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg[1]) ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mittheilte[2]), und welche von meiner kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen“[3]). Damit war, schon durch den Gegensatz der beiden Wörter „verbergen“ und „mittheilen“, die Unabhängigkeit der Erfindung bei dem offen Mittheilenden jedenfalls zugestanden, für den, der seine Methode verbarg, mindestens beansprucht.

Dieses Scholium hat aber seine Geschichte, die wir vorgreifend gleich hier erzählen wollen. Im Jahre 1709 war das dringende Bedürfniss nach einer neuen Auflage der Principien vorhanden. Die Besorgung derselben übernahm Roger Cotes, der begabteste unter den damaligen jüngeren Mathematikern Englands, und der Briefwechsel zwischen dem jungen Herausgeber und dem wirklichen Verfasser gibt über manche nicht unwichtige Aenderung Aufschluss, durch welche die zweite Ausgabe von der ersten abweicht. Meistens war es Cotes, der mit der erstmaligen Fassung sich nicht einverstanden erklärte und seine Ausstellungen und Verbesserungsvorschläge mit grosser Zähigkeit festhielt, bis Newton in der Regel nachgab, oder doch eine Vermittelung zwischen beiden Ansichten erzielt war. Die neue Ausgabe erschien 1713, aber noch vor dem 15. April 1710 war der Druck bis jenseits des erwähnten Scholium vorgerückt, und dasselbe hatte die vollständig gerechtfertigte Aenderung erlitten, dass als unterscheidend zwischen beiden Methoden, der von Newton und der von Leibniz, noch die Art der Entstehung der Grössen[4]) hervorgehoben wurde. Alles Andere, sogar die „vor etwa 10 Jahren gewechselten Briefe“ blieb unverändert, wenn auch inzwischen schon mehr als 20 weitere Jahre dahingegangen waren.

Die Bedeutsamkeit des erwähnten Zusatzes, welcher der beiderseitigen Unabhängigkeit der Gedanken ein unzweideutiges Zeugniss spricht, da ja grade die Art der Entstehung der Grössen durch fliessende Bewegung oder aus in Ruhelage vorhandenen unendlich kleinen Elementartheilen den Kern der Fluxionsrechnung wie der Differentialrechnung bildet, liegt auf der Hand. Von wem ist aber dieser Zusatz? Auch wie gewöhnlich von Cotes, oder von Newton? Darüber wird wohl nie Licht verbreitet werden. Der Briefwechsel zwischen Newton und Cotes zeigt eine Lücke vom 11. October 1709 bis zum 15. April 1710, und grade innerhalb dieser Zeit fand der Druck des Scholium statt[5]). Hier fehlen die, wie aus dem Zusammenhange zu entnehmen ist, sicherlich vorhanden gewesenen Briefe, von

[1]) *celavi.* [2]) *communicavit.* [3]) *in verborum et formarum formulis* [4]) *Idea generationis quantitatum.* [5]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 6—7.

deren Abhandenkommen wir im XVII. Abschnitte zu reden haben werden.

Aber wir gehen in der Geschichte des Scholium weiter. Eine dritte Ausgabe der Principien erschien 1726 unter der Leitung von Henry Pemberton (1694—1771), und diesesmal, 10 Jahre nach Leibnizens Tode, wurde das ganze Scholium nicht bloss gestrichen, sondern durch folgendes neue ersetzt: „In einem an unseren Landsmann Collins gerichteten Brief[1]) vom 11. December 1672 beschrieb ich eine Methode der Tangenten, welche meiner Vermuthung nach mit der, damals noch nicht veröffentlichten Methode von De Sluse identisch sei. Ich fügte folgende Bemerkung hinzu: Dies ist ein besonderer Fall, oder vielmehr ein Zusatz zur allgemeinen Methode welche sich auf jeden mühevollen Calcul erstreckt, nicht nur auf die Construction von Tangenten an alle geometrische oder mechanische Curven, oder von auf andere Curven sich beziehenden graden Linien, sondern auch auf die Lösung anderer, schwieriger Aufgaben über die Krümmung, Quadratur, Rectification, die Schwerpunkte der Curven u. s. w., und sie beschränkt sich nicht (wie die Methode von Hudde für Maxima und Minima) auf diejenigen Gleichungen, welche frei von irrationalen Grössen sind. Diese Methode habe ich jener anderen eingefügt, nach welcher ich die Gleichungen behandle, indem ich sie auf unendliche Reihen zurückführte. So weit jener Brief. Die letzten Worte beziehen sich auf eine Abhandlung, welche ich im Jahre 1671 über diesen Gegenstand geschrieben habe. Die Grundlage dieser allgemeinen Methode ist im vorhergehenden Lehnsatze enthalten.“

Hier war also der Name Leibnizens in Wegfall gebracht. Dafür war dem Tangentenbriefe (S. 167) und der ersten Niederschrift der Methodus fluxionum eine Bedeutung beigelegt, welche Newton ihnen offenbar weder 1687 noch 1710, weder bei der ersten noch bei der zweiten Auflage der Principien beizulegen wagte. Wir dürfen die ganze Umänderung wohl als Beweis dafür ansehen, dass man jetzt 1726 fühlte, wie das alte Scholium gemeint war, wie es allein verstanden werden konnte. Jetzt sollte man es nicht mehr so verstehen, und deshalb wurde es beseitigt.

Wir möchten noch auf eine weitere Stelle der Principien aufmerksam machen, welche, wie uns scheint, ein geschichtlich wichtiges Eingeständniss enthält. Im 10. Abschnitte des ersten Buches ist die Pendelbewegung genau erörtert. Die 34. Aufgabe verlangt

[1]) Das hier wiederholte Bruchstück des Briefes ist abgedruckt in *Opuscula Newtoni* I, 297—298.

die Geschwindigkeit des Pendels in jedem einzelnen Punkte, durch welchen er bei seinen Schwingungen hindurchgeht, und die Zeiten zu bestimmen, in welchen sowohl die ganzen Schwingungen als einzelne Theile derselben zurückgelegt werden. Der zweite Zusatz zu dieser Aufgabe erwähnt das Cycloidenpendel, seinen Tautochronismus u. s. w. mit der Bemerkung, Huygens habe es bewiesen[1]). Kein Wort gibt zu verstehen, dass Newton zu dem gleichen Ergebnisse selbständig gekommen sei. Wir finden darin die Bestätigung unserer früher ausgesprochenen Ansicht (S. 178), dass Newton die Methodus fluxionum nicht durchaus in dem Zustande der ersten Niederschrift von 1671 liess, sondern wenn auch nicht eine vollkommene Umarbeitung, doch spätere Einschaltungen, jedenfalls eine solche nach 1673, vornahm.

Der Hauptinhalt der Principien kann nur in einer Geschichte der Physik oder der Astronomie genau gewürdigt werden. Hier haben wir uns mit der Andeutung zu begnügen, dass es Newton darauf ankam zu beweisen, dass die Kepler'schen Gesetze, deren wirkliche Geltung erfahrungsmässig feststand, sich mathematisch als Folge einer allgemeinen Anziehung ergeben, vorausgesetzt dass diese Anziehung im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernungen wirke. Anziehung nannte Newton, wie er in der letzten Anmerkung des 11. Abschnittes des ersten Buches ausdrücklich sagt, jeden Versuch der Körper sich einander zu nähern. Ob eine thatsächliche Fernwirkung, ob fortgesetzte Nahewirkungen diesen Versuch beeinflussen, liess er unbestimmt. Das Gesetz, nach welchem die Anziehung stattfindet, war ihm am wichtigsten, und an den verschiedensten Stellen der Principien sind Einwirkungsannahmen der verschiedensten Natur gemacht und ihre Folgen in Erwägung gezogen.

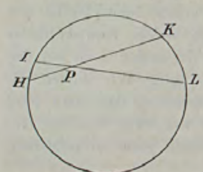

Fig. 38.

Einer der wichtigsten Sätze der im umgekehrten Quadrate der Entfernung sich ändernden Anziehung ist der von der sich aufhebenden Beeinflussung eines inneren Punktes einer Kugel, welcher den 12. Abschnitt des ersten Buches eröffnet (Figur 38). P sei der im Inneren der Kugel liegende Punkt. Sind HI und KL unendlich kleine Bögen, so ist $\triangle HIP \sim LKP$, und ein beliebig kleines Oberflächentheilchen um HI verhält sich zu einem um KL gelegenen wie $HI^2 : KL^2 = PI^2 : PK^2$. Die Entfernungen jener Flächen von P sind aber PI und PK, die

[1]) *ut demonstravit Hugenius.*

Anziehung nimmt also ab im Verhältnisse von $\frac{1}{PI^2} : \frac{1}{PK^2}$, und beide Verhältnisse verbinden sich zu $\frac{PI^2}{PI^2} : \frac{PK^2}{PK^2} = 1 : 1$, d. h. entgegengesetzte Anziehung von genau gleicher Grösse treibt den Punkt nach beiden Seiten, d. h. nicht stärker nach der einen als nach der entgegengesetzten Seite, und er verbleibt in Ruhe.

Von mancherlei geometrisch fesselnden Sätzen erwähnen wir den 1. Satz des 5. Abschnittes des ersten Buches dass, wenn von irgend einem Punkte eines Kegelschnittes nach den vier Seiten eines Sehnenvierecks Gerade unter gegebenen Winkeln gezogen werden, die Producte der nach je zwei Gegenseiten gezogenen Strecken in constantem Verhältniss stehen. Ueberhaupt beschäftigt sich der ganze 5. Abschnitt mit merkwürdigen Eigenschaften der Kegelschnitte, mit deren Bestimmtheit durch fünf Punkte, während durch vier Punkte mehr als nur ein Kegelschnitt gelegt werden kann u. s. w., Fragen, mit welchen sich einst auch Pascal beschäftig hatte (Bd. II, S. 681), wenn auch ohne dass wir wissen, wie weit er gelangte. Eine Erinnerung an Desargues (Bd. II, S. 676) darf wohl in dem 22. Lemma des ersten Buches vermuthet werden, wo es heisst: Parallellinien seien solche, welche nach einem unendlich entfernten Punkte gerichtet sind[1]).

91. Kapitel.

Leibniz 1687—1699. Jakob und Johann Bernoulli bis zu ihrem Streite.

Mit den Principien war Newtons schriftstellerische Thätigkeit, wenigstens soweit sie an die Oeffentlichkeit trat, für einige Zeit beendigt. Der Mathematiker hat von seinen Leistungen, so weit sie uns bisher gegenüber traten, hauptsächlich diejenigen zu schätzen, welche in der Analysis per aequationes niedergelegt waren, von denen aber brieflich auch Leibniz Kenntniss hatte. Das war vor allen Dingen die Binomialreihe, das war die Anwendung von sowohl numerischen als nach steigenden oder fallenden Potenzen einer allgemeinen, kleiner oder grösser als die Einheit angenommenen Grösse verlaufenden Reihen zur Auflösung von Gleichungen. In den Prin-

[1]) *Lineae parallelae sunt, quae ad punctum infinite distans tendunt.* Weniger deutlich ist das Gleiche auch schon in dem an das 18. Lemma sich anschliessenden Scholium ausgesprochen: *E punctis quatuor A, B, C D possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figurae, quae ad puncta illa convergunt, evadere parallela.*

cipien war es die Mechanik der Kräfte, welche im umgekehrten Quadrate der Entfernungen ihre Wirksamkeit ausüben. Anderes hatte Newton da und dort versprochen, hatte er als in seinem Besitze zu verstehen gegeben und die Glaubwürdigkeit seiner Aussage durch Beispiele unantastbar gemacht, aber bekannt gemacht hatte er es nicht, weder im grossen noch im kleinen Kreise, und dass er nun gar über einen Algorithmus der Infinitesimalrechnung verfüge, konnte kein Mensch ahnen. Erst 1693 änderte sich dieses, wie wir im 92. Kapitel sehen werden.

Leibnizens Veröffentlichungen dagegen nahmen einen nur immerfort beschleunigten Gang an, und es ist noch Eines, was zu betonen ist. Leibniz hat eine Schule hervorgebracht. In England können wir ihr Craig (S. 195) beirechnen. In Deutschland und in Frankreich jubelte man den neuen Entdeckungen zu, drängte man sich heran, das neue Arbeitsmittel der Differential- und Integralrechnung gebrauchen zu lernen, gab man demselben durch diesen vielseitigen Gebrauch immer grössere Vollkommenheit.

Machen wir uns mit den Leibnizischen Veröffentlichungen bekannt. Sie liessen zunächst etwas auf sich warten. Wir wissen (S. 31), dass Leibniz im October 1687 jene grosse Studienreise nach Italien antrat, welche ihn bis 1690 von Hannover fernhielt, und welche jeder Arbeit auf einem anderen Gebiete als dasjenige war, dem zu Liebe er seine Reise von Bibliothek zu Bibliothek, von Archiv zu Archiv machte, sich mindestens nicht förderlich erweisen konnte. Ob Leibniz auf dieser Reise das Exemplar der Principien erhielt, welches Newton ihm sofort nach dem Erscheinen zuschicken liess[1]), wissen wir ebensowenig als wir den Grund kennen, warum Newton fortgesetzt Vermittler für solche Sendungen in Anspruch nahm. Möglicherweise war es das vom Verfasser ihm geschenkte Exemplar, welches Leibniz in Rom erhielt, wo er 1688 sich aufhielt[2]). Vorher kannte er nur eine Besprechung der Principien in den A. E. vom Juni 1688. Die kurzgefasste Sprache dieses Berichtes[3]), welcher, ohne ein lobendes oder tadelndes Urtheil beizufügen, die Hauptpunkte deutlich hervorhebt, hat zur Vermuthung geführt, es sei hier eine Selbstanzeige aus Newtons Feder zum Abdrucke gebracht. Eine Randnote des Heidelberger Exemplars der A. E. nennt

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 309: *Quam primum Liber Newtoni lucem vidit, exemplar ejus D. Nicolao Fatio datum est, ut ad Leibnitium mitteretur* (aus einem von Newton herrührenden Aufsatze). [2]) Leibniz VI, 189: *Après avoir bien considéré le livre de M. Newton, que j'ai vu à Rome pour la première fois, j'ai admiré comme de raison quantité de belles choses qu'il y donne.* [3]) A. E. 1688 pag. 303.

freilich Christoph Pfautz als den Berichterstatter, aber eine Vereinigung beider Ansichten ist nicht unmöglich. Pfautz gehörte zu dem engsten Redactionskreise der A. E. Er war 1680 mit Mencke in England und Holland gewesen, um Mitarbeiter für die Zeitschrift zu werben, zu deren Herausgabe damals die ersten Vorbereitungen getroffen wurden. Vielleicht waren damals unmittelbare oder mittelbare Beziehungen zu Newton angeknüpft worden, vielleicht fügte dieser deshalb dem Buche, welches er zur Besprechung einsandte, schriftliche Bemerkungen bei, was er für neu und wichtig halte, und Pfautz dachte dem Verfasser des Werkes wie den Lesern der Zeitschrift sich gleichmässig gefällig zu erweisen, indem er von jenen Bemerkungen umfassenden Gebrauch machte.

Aber gleichviel! Jedenfalls las Leibniz auf der Reise jenen Bericht, den er also früher als das Werk selbst erhalten haben muss. Das geht aus einem Aufsatze *De lineis opticis et alia*[1]) hervor, den Leibniz im Januarhefte 1689 der A. E. veröffentlichte, und der mit der Erklärung anfängt, er sei schon lange auf der Reise und mit Durchstöbern von Archiven beschäftigt, da habe ihm ein Freund einige Monatshefte der A. E. geschickt. Im Juniheft 1688 sei ihm der Bericht über die Principien Newtons aufgefallen, den er heisshungrig verschlungen habe. Eine weitere Bestätigung ist in dem Aufsatze *Tentamen de motuum coelestium causis*[2]), der im Februarhefte 1689 der A. E. Abdruck fand, zu finden. In ihm gelangte Leibniz zur Behauptung, die Planeten würden von der Sonne in verschiedenem Maasse, aber jedesmal im quadratischen Verhältnisse ihrer Sonnennähe angezogen[3]), eine Wahrheit, welche, wie er aus dem Berichte in der Zeitschrift ersehe, auch von Newton erkannt worden sei, wenn der Bericht auch darauf die Auskunft schuldig bleibe, wie Newton zu jenem Satze gelangte[4]).

Leibniz bediente sich zur Ableitung seiner Sätze hier der Differentialrechnung und benutzte die Gelegenheit, sich über deren Grundgedanken zu äussern[5]): „Ich nahm beim Beweise unvergleichbar kleine Grössen an, z. B. den Unterschied zweier nahezu übereinstimmender Grössen[6]), der mit den Grössen selbst unvergleichbar ist. So kann nämlich solches, wenn ich nicht irre, am deutlichsten auseinandergesetzt werden. Will also Jemand Unendlichkleines nicht

[1]) Leibniz VII, 329—331. [2]) Ebenda VI, 144—161. [3]) *Planeta idem attrahitur a Sole diversimode, et quidem in duplicata ratione viciniarum.* [4]) Ebenda V, 157: *Vides hanc propositionem jam tum innotuisse viro celeberrimo Isaaco Newtono, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non possum judicare quomodo ad eam pervenerit.* [5]) Ebenda VI, 151. [6]) *duarum quantitatum communium.*

anwenden, so kann er so Kleines annehmen, als ihm genügend scheint, damit es unvergleichbar werde, und einen Fehler hervorbringe, der nicht ins Gewicht falle, oder kleiner sei als ein gegebener. Wie die Erde für einen Punkt, der Erddurchmesser für eine unendlich kleine Linie gehalten wird, sofern man den ganzen Himmel betrachtet, so kann bewiesen werden, dass ein Winkel, dessen Schenkel eine Basis zwischen sich haben, die gegen sie selbst unvergleichbar klein ist, ein unvergleichbar kleiner sein muss, und dass der Unterschied der beiden Schenkel mit den Schenkeln, die den Unterschied aufweisen, nicht vergleichbar ist." Etwas später nennt er einander entsprechende Sehnen, Bogen, Tangenten als Grössen mit ihnen selbst nicht vergleichbaren Unterschieden. „Sind sie selbst unendlich klein, so sind ihre Unterschiede unendlich mal unendlich klein[1]) ... Es gibt unendlich viele Grade sowohl des Unendlichen als des Unendlichkleinen."

Das Aprilheft 1689 der A. E. brachte abermals einen Aufsatz des nun, nachdem er wieder angefangen hatte mathematisch zu arbeiten, unermüdlichen Reisenden. Es war der vierte seit vier Monaten, denn im Januarhefte hatte sich an den schon erwähnten über optische Linien ein solcher über das widerstehende Mittel angeschlossen. Der Aufsatz im Aprilhefte beschäftigte sich mit der Isochrone. Wir wissen (S. 139), dass dieser Name durch Pardies der Cycloide beigelegt worden war, weil ein Körper, von welchem Punkte der nach unten gewölbt gezeichneten Cycloide aus er längs derselben in fallende Bewegung geräth, genau in der gleichen Zeitdauer den Weg bis zum Tiefpunkte durchmisst. Das ist nicht die Bedeutung, in welcher Leibniz sich des gleichen Wortes bediente. Er wollte unter Isochrone diejenige Curve verstanden wissen[2]), in welcher ein schwerer Körper in dem Sinne gleichförmig fällt, dass er in gleichen Zeiträumen dem Erdboden um einen gleichen senkrechten Abstand sich nähert. Er hatte die Aufgabe, die Curve zu finden, welche die genannte Eigenschaft besitze, im Septemberhefte 1687 einer anderen Zeitschrift, der *Nouvelles de la Republique des Lettres*, gestellt, und Huygens hatte sofort im Octoberhefte die Auflösung nachfolgen lassen, die gesuchte Curve sei die semicubische Parabel[3]). Auch Leibniz gab nun in den A. E. die damit übereinstimmende eigene Auflösung sammt deren Beweis[4]), was Huygens unterlassen hatte. Infinitesimalbetrachtungen kommen hier nicht vor. Schon im Januar 1688 hatte übrigens Leibniz die Nummer mit der von Huygens ein-

[1]) *infinities infinite parvae.* [2]) Leibniz V, 234. [3]) Ebenda V, 237. [4]) Ebenda V, 234—237.

gerückten Auflösung erhalten und sofort von Pilsen aus, wo er sich grade befand, einen Beweis an die Nouvelles de la Republique des Lettres abgehen lassen, der nicht aufgenommen wurde, vielleicht nicht angekommen ist[1]).

Wir überspringen die in den Jahrgängen 1690 und 1691 der A. E. enthaltenen Aufsätze Leibnizens, um unter den acht Veröffentlichungen von 1692 bei nur dreien zu verweilen.

Der Aufsatz von der Curve, welche aus den Durchschnittspunkten unendlich vieler, nach einem bestimmten Gesetze gezogener Curven entsteht und sie alle berührt, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente*[2]) führte zwei neue folgewichtige Begriffe in die Geometrie ein, den der krummlinigen Coordinaten und den der Einhüllenden. Die ersteren sind allerdings nur beiläufig erwähnt, aber deshalb nicht mit geringerer Deutlichkeit. „Unter Coordinaten"[3]), sagt Leibniz, „verstehe ich nicht nur Gerade, sondern beliebige Curven, wenn nur ein Gesetz vorhanden ist, nach welchem, sofern ein bestimmter Punkt einer als Coordinate gegebenen Linie gleichfalls gegeben ist, diesem Punkte entsprechend eine Linie gezogen werden kann, welche dem anderen Systeme der als Coordinaten gewählen angehört." Hauptgegenstand ist aber die Einhüllende[4]), als Ort der Durchschnittspunkte für je zwei nächste Linien[5]). Sei die Gleichung einer Curve gegeben, welche nicht blos x und y als Ordinate und Abscisse, die man gemeinschaftlich Coordinaten nennen könne, sondern auch Parameter a, b enthalte, so müsse man, um zur Berührungslinie zu gelangen, diese Gleichung differentiiren[6]) und die Parameter dabei als constant[7]) betrachten. Beim Uebergang von einer Curve zu einer anderen müsse man aber einen Parameter, a oder b, als differentiirbar[8]) betrachten, und zwar immer nur je einen, wenn auch in der Curvengleichung mehrere Parameter vorkommen. So finde sich die Linie, welche alle Curven, jede in dem ihr entsprechenden Punkte berühre[9]). Deutlicher, sollten wir meinen, spreche kein modernes Lehrbuch der Differentialrechnung sich aus.

Aus einem zweiten Aufsatze, der über Krümmungsverhältnisse,

[1]) Leibniz V, 238—240. [2]) Ebenda V, 266—269. [3]) *Ego sub ordinatim ductis non tantum rectas, sed et curvas lineas qualescunque accipio, modo lex habeatur, secundum quam dato lineae cuiusdam datae (tanquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis seu ordinatim positione datis.* [4]) *linea concursuum.* [5]) *lineae proximae.* [6]) *opus est aequationem ejus curvae differentiare.* [7]) *magnitudine constantes.* [8]) *differentiabilis.* [9]) *tangens unica infinitarum curvarum ordinatim ductarum unicuique in suo puncto respondenti occurrens.*

Osculation und dergleichen handelt, erwähnen wir nur einen Satz, nämlich den[1]), dass von einer Evoluten andere und andere Curven sich abwickeln, je nachdem der Faden, dessen Endpunkt die Curve beschreibt, von verschiedener Länge ist. Alle diese Curven seien parallel, d. h. der Abstand je zweier sei überall derselbe, und die Gerade, welche zu der einen Curve senkrecht stehe, verhalte sich ebenso zu den anderen, was als allgemeinste Definition des Parallelismus zu gelten habe[2]).

Drittens gehört dem Jahre 1692 die Auflösung einer Aufgabe an, welche viel von sich reden machte. Vincenso Viviani (Bd. II, S. 660) hatte unter angenommenem Namen von Florenz aus diese Aufgabe in die Welt geschickt, welche nach dem Orte ihrer Herkunft als Florentiner Aufgabe bezeichnet zu werden pflegt. Der Name, unter welchem ihr Urheber sich verbarg, lautete *autore D. Pio Lisci Pusillo geometra*, ein Anagramm von *autore postremo Galilei discipulo*, und als letzten Schüler Galilei's liebte Viviani sich zu bezeichnen. Die Aufgabe selbst bestand darin, aus einer Halbkugel (Figur 39) rings an der Grundfläche herum vier gleiche Oeffnungen herauszubrechen, so dass die noch übrige krumme Oberfläche genau quadrirbar sei[3]). Das Flugblatt, welches die gedruckte Aufgabe in alle Länder hinaustrug, war vom 4. April 1692 datirt, Leibnizens gleichfalls gedrucktes Antwortschreiben trägt das Datum des 28. Mai 1692. Rascher kann man die Erledigung sich kaum denken, und wirklich war Leibnizens Auflösung die erste, welche zur Veröffentlichung kam, und dass er so schnell damit fertig wurde, verdankte er seiner Infinitesimalrechnung, die hier erstmalig zur Flächenbestimmung einer gekrümmten Oberfläche verwerthet wurde. Viviani's eigene Auflösung, welche aber die Allgemeinheit der Leibnizischen Untersuchung[4]) nicht erreicht, ist folgende.

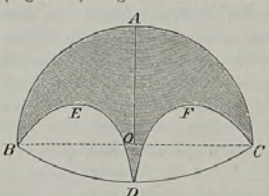

Fig. 39.

Durch den Kugelmittelpunkt O ist der Durchmesser BC gezogen, ebenso der Halbmesser OA senkrecht zur Grundebene $BDCO$. In der Ebene $BACO$ wird über BO und CO als Durchmesser je ein Halbkreis beschrieben, und durch jeden derselben ein grader Halbcylinder bestimmt. Diese Halbcylinder schneiden auf der vorderen

[1]) Leibniz V, 280. [2]) *quae dudum mihi fuit definitio parallelismi in genere sumti.* [3]) *ut his destructis superstes curva superficies tetragonismi vere geometrici sit capax.* [4]) Leibniz V, 270—278.

Ansicht der Halbkugel die Oeffnungen BDE, CDF heraus, und ganz ähnliche Oeffnungen entstehen selbstverständlich auf der Rückseite. Der übrig bleibende Theil der Halbkugloberfläche ist quadrirbar.

War diese Aufgabe als geistreiche geometrische Spielerei zu betrachten, so brachte Leibniz im nächstfolgenden Jahre, 1693, die Wissenschaft wieder um einen gewaltigen Schritt vorwärts, indem er das wirklich ausführte, was bisher sowohl durch ihn selbst als durch Newton brieflich nur als ausführbar bezeichnet zu werden pflegte: die Integration von Differentialgleichungen in Reihenform[1]). Leibniz bedient sich dazu der Methode der unbestimmten Coefficienten. Ein Beispiel bietet die Entwickelung der Sinusreihe. Sei y ein Kreisbogen vom Halbmesser a und x dessen Sinus, so nimmt Leibniz an, die Reihenentwicklung heisse $x = by + cy^3 + ey^5 + \cdots$. Warum in der Reihe nur Potenzen von y mit ungraden Exponenten angenommen werden sollen, begründet Leibniz nicht weiter. Vermuthlich stand er dabei unter dem Einflusse der Thatsache, dass er die Reihe schon kannte, zu welcher er gelangen wollte, denn dass er gewusst hätte, er sei $\sin(-y) = -\sin y$ und daraus geschlossen hätte, nur Glieder mit Potenzen von ungradem Exponenten dürften vorkommen, weil nur dann die ganze Reihe das entgegengesetzte Vorzeichen annehme, wenn y in $-y$ übergehe, daran ist nicht zu denken. Nun finde, sagt Leibniz, die Differentialgleichung statt:

$$a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2.$$

Auch ihre Ableitung schenkt sich Leibniz. Von ihrer Richtigkeit kann man sich durch Differentiation der Gleichung $\frac{x}{a} = \sin\frac{y}{a}$ überzeugen, in welcher x, y, a Längen bedeuten, als deren Einheit a gewählt wird. Die gleichviel woher bekannte Differentialgleichung differentiirt Leibniz abermals, indem er bei dieser neuen Differentiation dy als constant annimmt. So erhält er $0 = 2a^2 dx ddx + 2x dx dy^2$ und $a^2 ddx + x dy^2 = 0$, beziehungsweise $x + a^2 \frac{ddx}{dy^2} = 0$. Aber die Differentiation der für x angenommenen Reihe liefert

$$\frac{dx}{dy} = b + 3cy^2 + 5ey^4 + \cdots \quad \text{und} \quad \frac{ddx}{dy^2} = 2\cdot 3cy + 4\cdot 5ey^3 + \cdots.$$

Folglich muss stattfinden

$$[by + cy^3 + \cdots] + a^2[2\cdot 3cy + 4\cdot 5ey^3 + \cdots] = 0.$$

Für b fehlt es an Mittel zur Bestimmung, und Leibniz hilft sich mit einem: man nehme an[2]) $b = 1$. Dann ist aber

[1]) Leibniz V, 285—288. [2]) *assumatur.*

$$c = \frac{-b}{2 \cdot 3 \cdot a^2} = -\frac{1}{2 \cdot 3a^2}, \quad e = \frac{-c}{4 \cdot 5 \cdot a^2} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^4} \text{ u. s. w.},$$

also

$$x = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3a^2} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^4} - \cdots.$$

Das Wichtigste an diesem Aufsatze ist neben der schon hervorgehobenen thatsächlichen Ausführung des vorher nur theoretisch für ausführbar Gehaltenen die hier vorgenommene abermalige Differentiation einer gegebenen Differentialgleichung. Daneben machen wir aufmerksam darauf, dass Leibniz trigonometrische Functionen differentiiren konnte, und in der Bezeichnung, in welcher Leibniz stets Meister war, auf das Ueberspringen der Coefficienten von c nach e, offenbar weil d ausschliesslich als Differentiationszeichen in Anwendung kommen sollte. In einer geometrisch ausgesprochenen Aufgabe, deren Differentialgleichung $a\frac{dz}{dy} + z - y = 0$ heisst, welche alsdann wieder integrirt wird, indem die Annahme $z = by + cy^2 + ey^3 + fy^4 + \cdots$ als Ausgangspunkt dient, kommt das Wort Subtangente[1]) vor, welches als Huygens eigenthümlich bezeichnet wird und in der That vor Kurzem von diesem eingeführt worden war (S. 147).

Ein anderer Aufsatz von 1693 brachte wieder eine neue geometrische Aufgabe auf die wissenschaftliche Tagesordnung[2]). Claude Perrault (1613—1688), ein vielseitig gebildeter Pariser Arzt, der als Musiker, als Mechaniker, als Architekt, als Herausgeber des Vitruvius (S. 9) bekannt ist, stellte vielen Mathematikern, zuletzt auch Leibniz, die von ihm selbst, wie er eingestand, nicht bewältigte Aufgabe, die Curve zu finden, welche ein an dem Ende B eines Fadens AB befestigtes Gewicht beschreibt, während das andere Fadenende A längs einer geraden Linie hingeführt wird. Als Beispiel benutzte Perrault dabei seine silberne an einer Kette befestigte Taschenuhr, welche er in der vorgeschriebenen Art über den Tisch zog. Leibniz erkannte im Septemberhefte 1693 der A. E. die geometrische Definition der Curve in der Eigenschaft, dass die Berührungslinie von der Curve bis zum Durchschnitte mit einer gegebenen Geraden gemessen, einen unveränderlichen Werth habe, und er sah darin eine inverse Tangentenaufgabe. Er erkannte auch die logarithmische Natur der Curve, versagte sich aber ein weiteres Eingehen auf die Aufgabe, weil Huygens, wie aus einem Briefe desselben hervorgehe, mit Aehnlichem sich beschäftige. Es war auch an dem.

[1]) *subtangentialis.* [2]) Leibniz V, 294—301. Vgl. Klügel, Mathematisches Wörterbuch V, 90—91.

Huygens fasste die Aufgabe allgemeiner und gab der erzeugten Curve den Namen *Tractoria*, weil sie als Weg eines gezogenen Punktes auftritt, während der Endpunkt des den Zug vermittelnden Fadens einen selbst vorgeschriebenen Weg durchläuft. Wir werden noch Gelegenheit haben, von den Tractorien zu reden.

Wir kommen zu einem Aufsatze von 1694: *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione*[1]). Er ist die Fortsetzung jenes Aufsatzes von 1692, in welchem (S. 211) die Einhüllenden erklärt waren. Leibniz ging jetzt über die damals allein gegebene theoretische Erklärung hinaus, indem er das erste wirkliche Beispiel berechnete. Die Kreisgleichung $(x-b)^2 + y^2 = ab$ enthält den als veränderlich angesehenen Parameter b. Differentiirt man sie nach b, so wird $2b = 2x + a$ und setzt man $b = x + \frac{a}{2}$ in die Kreisgleichung ein, so verwandelt sie sich in $y^2 = a\left(x + \frac{a}{4}\right)$ d. h. in eine Parabelgleichung. Die Parabel ist also die Einhüllende jener Schaar von Kreisen. Am Schlusse des Aufsatzes, in einer Art von Nachschrift, hat Leibniz zum ersten Mal ein Wort benutzt, welches nachmals eines der von Mathematikern am häufigsten gebrauchten geworden ist, das Wort Function. Allerdings hatte es bei Leibniz eine andere Bedeutung als die man später damit verband. Leibniz nannte Function dasjenige Stück einer Geraden, welches abgeschnitten wird, indem man Gerade zieht, zu deren Herstellung nur ein fester Punkt und ein Curvenpunkt nebst der dort stattfindenden Krümmung in Gebrauch treten[2]).

Soll die fernere Geschichte des Wortes Function im XVII. Jahrhunderte gleich beigefügt werden, so berichten wir, dass Jakob Bernoulli im Octoberheft 1694 der A. E. auf den Leibnizischen Aufsatz im Julihefte Bezug nehmend sich des gleichen Wortes im gleichen Sinne bediente[3]). Die Zeitfolge führt sodann zu dem zwischen Johann Bernoulli und Leibniz geführten Briefwechsel. Schon im Juni 1698 spricht Johann Bernoulli von irgend welchen Functionen der Ordinaten beim isoperimetrischen Probleme[4]). Leibniz antwortet Ende Juli, er sei entzückt, dass Bernoulli das Wort Function grade so gebrauche wie er selbst[5]). Im August schlägt Bernoulli vor eine Function von x durch X oder durch ξ zu bezeichnen[6]). Leibniz

[1]) Leibniz V, 301—306. [2]) Ebenda V, 306: *Functionem voco portionem rectae, quae, ductis ope sola puncti fixi et puncti curvae cum curvedine sua dati rectis, abscinditur.* [3]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 618. [4]) Leibniz III, 507. [5]) Ebenda III, 525. [6]) Ebenda III, 531.

billigt diesen Vorschlag[1]), meint aber zugleich, man könne Verschiedenheiten der vorkommenden Functionen dadurch andeuten, dass man den Buchstaben ξ mit einem Zahlenindex versehe; er selbst bediene sich, und zwar hauptsächlich mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Functionen anderer Zeichen. Ihm seien $\overline{x}\underline{|1|}$ und $\overline{x}\underline{|2|}$ Functionen von x, $\overline{x;y}\underline{|1|}$ und $\overline{x;y}\underline{|2|}$ Functionen von x und y, $\overline{x}\underline{|r1|}$ und $\overline{x}\underline{|r2|}$ rationale, endlich $\overline{x}\underline{|ri1|}$ und $\overline{x}\underline{|ri2|}$ ganze rationale Functionen von x. Auf eine Redewendung, deren Jacob Bernoulli sich im Maiheft 1698 der A. E. bediente, kommen wir im nächsten Kapitel zu reden.

Die hier genannten Aufsätze sind bei weitem nicht alle, welche Leibniz in der Zeit bis zum Jahre 1700 dem Drucke übergab. Es sind vielmehr nur diejenigen ausgewählt, in welchen er den Anstoss zu Betrachtungen gab, die sich als folgewichtig erwiesen.

Wir haben (S. 208) auf den Schule machenden Einfluss der Leibnizischen Arbeiten zum Voraus hingewiesen. Wir müssen diesem Einflusse nachgehen. Da bietet zuerst und von selbst die Frage sich dar: wie stellte sich Huygens zu der neuen Lehre? Er war in Paris Leibnizens Ermunterer, sein erster Berather in mathematischen Dingen gewesen. Als die Ereignisse sie körperlich trennten, blieben beide grossen Männer geistig zusammen. Nicht weniger als 61 zwischen ihnen gewechselte Briefe sind bekannt[2]), und sie reichen bis zu Huygens' Tode. Nur eine grosse Lücke von dem Jahre 1680 bis zu 1688 ist ohne solchen veröffentlichten Brief. Gerade in die Mitte dieser Zeit fällt Leibnizens Aufsatz von 1684. Zwar hatte Leibniz schon in dem letzten Briefe vom Januar 1680 dem Freunde an einem Beispiele den Nutzen seiner Methode der Tangenten oder der grössten und kleinsten Werthe zu beweisen gesucht[3]), aber eine Antwort ist nicht erfolgt, uns wenigstens nicht bekannt.

Hat Huygens nicht antworten mögen, und hat Leibniz dieses Schweigen übel genommen, oder ist irgend Anderes Schuld an dem zeitweisen Abbruche des Briefwechsels, jedenfalls fand er statt, und erst nach acht Jahren, im Januar 1688, schrieb Leibniz neuerdings, um seinen Dank auszusprechen, dass Huygens es der Mühe werth gefunden hatte, sich mit der Aufgabe der Isochronen (S. 210) zu beschäftigen. Huygens unterliess — er sagt selbst, er wisse nicht weshalb — auch dieses Mal zu antworten, bis zum 8. Februar 1690. Dann dauerte es etwa ein halbes Jahr, bis Leibniz wieder schrieb, und in diesem Briefe stellte er geradezu die Anfrage, was Huygens von seiner Differential- und Integralrechnung denke?

Binnen Monatsfrist erfolgte diesmal die Antwort. Huygens ge-

[1]) Leibniz III, 537. [2]) Ebenda II, 11—208. [3]) Ebenda II, 38.

steht zu[1]), er habe bisher die Aufsätze in der Leipziger Zeitschrift nicht so genau studirt, dass er in ihr Verständniss eingedrungen sei; er habe immer geglaubt, mit seinen eigenen Methoden ebensoweit zu kommen. Jetzt habe aber Leibniz durch seine Schilderung dessen, was er zu leisten im Stande sei, ihm Lust gemacht, sich mehr dem neuen Calcul zuzuwenden.

Im October hat er es gethan[2]). Er gibt zu, die Differentialrechnung sei gut und nützlich, aber er beharrt dabei, sie sei nicht unentbehrlich. Habe er doch ohne dieselbe vielfach die gleichen Ergebnisse erzielt wie Leibniz. Gewiss, antwortet nun Leibniz im October 1690, die Zeichen dx oder dy seien nicht unentbehrlich. Huygens sei voll berechtigt, sie durch irgend welche Buchstaben zu ersetzen. Aber auf Eines wolle er doch aufmerksam machen[3]). Würde man wohl, wenn man statt x^2 und x^3 etwa m und n schriebe, ebenso durchsichtig mit diesen letzteren Buchstaben als mit dem, wofür sie gesetzt sind, rechnen? Genau in derselben Weise verhalte es sich mit dx, mit ddx.

Diese feine Bemerkung blieb wirkungslos. Im Mai 1691 verwahrt sich Huygens[4]) gegen den Calculus differentialis und wünscht, Leibniz solle ihm nicht wie an einen darin Eingeweihten schreiben. Am 1. September 1691 bezeugt er Neigung, ihn nun wirklich kennen zu lernen[5]). Am 17. September 1693 nennt er sich mässig eingeweiht[6]), mit Ausnahme der ddx, die er noch nicht verstehe. „Ja, am 27. December 1694, in dem letzten Briefe, den Huygens überhaupt an Leibniz richtete, erklärt er noch einmal[7]), die ganze Methode bleibe ihm nie gegenwärtig, wenn er eine Zeit lang aufgehört habe, sich mit ihr zu beschäftigen. Wir werden den fremden Einfluss noch kennen lernen, unter welchem sich Huygens im Ganzen so abweisend verhielt. Jedenfalls hat er an der Fortbildung der Leibnizischen Lehre nicht theilgenommen.

Ganz anders stellten sich dazu die Brüder Jakob und Johann Bernoulli (S. 89). Der Leibnizische Aufsatz von 1684 hatte deren Wissbegier geradezu auf die Folter gespannt. Es ist nicht an dem, was Johann in einem nachgelassenen Abrisse des eigenen Lebens erzählt hat[8]), dass beide Brüder erst 1687 durch einen Zufall mit jener Abhandlung bekannt geworden seien und binnen weniger Tage das ganze Geheimniss ergründet hätten. Es dauerte im Gegentheil Jahre, bis Jakob zuerst, dann unter dessen Leitung Johann jenes

[1]) Leibniz II, 45. [2]) Ebenda II, 47. [3]) Ebenda II, 49. [4]) Ebenda II, 93. [5]) Ebenda II, 100. [6]) Ebenda II, 162. [7]) Ebenda II, 203—204. [8]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 71—94. Die hier beigezogene Stelle S. 72.

mit orakelhafter Kürze verfasste Schriftstück verstehen lernten. Hat doch Leibniz 1696 in einem Briefe an Johann[1]) es Jakob zum Ruhme angerechnet, diesen seinen Bruder der Mathematik zugeführt zu haben, und Johann verwahrte sich mit keinem Worte gegen diese Bemerkung, so ihre Wahrheit anerkennend.

Im December 1687 wandte Jakob sich brieflich an Leibniz und bat um Auskunft über eine andere Abhandlung von 1684 über den Widerstand fester Körper, bat zugleich um Einführung in jene höhere Geometrie, welche er besitze[2]). Aber Leibniz war damals schon von Hannover abgereist, und der lange Zeit verlegte Brief kam ihm erst spät in die Hände, so dass die Antwort bis zum September 1690 auf sich warten liess. Grade diese lange mangelnde Unterweisung gereichte zum Glück der neuen Rechnungsarten. In der Zwischenzeit war es Jakob Bernoulli gelungen, von sich aus zum Verständniss zu gelangen, und diese Anstrengung befähigte ihn sowie den Bruder auch weiter auf selbstgebahnten Wegen fortzuschreiten.

Schon im Maiheft 1690, mithin vier Monate vor Leibnizens Antwortschreiben, brachten die A. E. Jakob Bernoullis Beantwortung der Aufgabe von den Isochronen[3]). Sie ergänzte das, was Leibniz selbst 1689 in seinem Beweise verschwiegen hatte, die eigentliche analytische Herleitung des Ergebnisses. Jakob Bernoulli stellte die Differentialgleichung der Isochrone in der Form

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$$

her, welche er mittels folgenden ganz im Leibnizischen Geiste sich bewegenden Gedankenganges sich verschaffte. Ist (Figur 40) BFG die gesuchte Curve, und sind FH und DG zwei zu gleichen unendlich kleinen Zeiten durchlaufene Bögen, so muss nach der Definition der Isochrone $LH = IG = dy$ sein, während $LF = dx$,

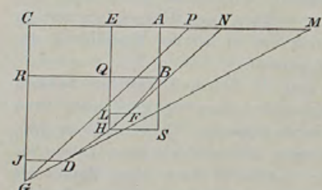

Fig. 40.

$$FH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist. Nach den Fallgesetzen verhalten sich die Fallhöhen, wie die Quadrate der erreichten Geschwindigkeiten, d. h.

$$CG : EH = DG^2 : FH^2 = DG^2 \times LH^2 : FH^2 \times IG^2.$$

---

[1]) Leibniz II, 276. [2]) Ebenda III, 13. [3]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 421—424.

Nun verhält sich

$$DG^2 : IG^2 = MG^2 : CG^2, \quad LH^2 : FH^2 = CG^2 : GP^2,$$
$$DG^2 \times LH^2 : IG^2 \times FH^2 = MG^2 : GP^2,$$

also

$$CG : EH = MG^2 : GP^2.$$

Bei

$$CG = a, \quad MG = b, \quad EH = y, \quad AE = x$$

ist

$$a : y = b^2 : GP^2.$$

mithin

$$GP^2 = \frac{b^2y}{a}.$$

Daneben ist

$$LH : FH = CG : GP,$$

also

$$GP = \frac{CG \times FH}{LH} = \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} \text{ und } GP^2 = a^2\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}.$$

Die beiden Werthe von GP^2 liefern einander gleichgesetzt eben jene Differentialgleichung

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

Mithin, schloss Bernoulli dann weiter, sind auch die Integrale jener Ausdrücke einander gleich[1]):

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

Das ist das erste Vorkommen des Wortes Integral. Johann hat zwar in der erwähnten Selbstbiographie den Anspruch auf die Erfindung des Wortes erhoben, aber es fällt schwer ihm zu glauben. Jakob hat in Veröffentlichungen von 1689, von 1691, von 1692 den jüngeren Bruder bei jeder thunlichen Gelegenheit genannt, er hätte es auch damals gethan, wenn der damals neue Name Integral, in welchem man schliesslich keine Erfindung von irgend welcher Tragweite erkennen kann, von Jenem hergerührt hätte.

Jakobs Aufsatz schloss mit einer Gegenaufgabe: die Gestalt eines biegsamen an zwei Punkten frei aufgehängten Seiles zu finden. Die neue, oder auch nicht neue Aufgabe, denn Galilei hatte sich ihr schon wenn auch ohne Erfolg zugewandt (Bd. II, S. 698), fand verschiedene Bearbeiter. Leibniz, Huygens, Johann Bernoulli lösten sie. Johann Bernoulli, der inzwischen Basel verlassen hatte, machte mit dieser Auflösung[2]) im Junihefte 1691 der A. E. den ersten ganz selbständigen Schritt in die Oeffentlichkeit, welche von nun an von beiden Brüdern durch mit bewundernswerther

---

[1]) *Ergo et horum Integralia aequantur.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 48.

Schnelligkeit auf einander folgenden Untersuchungen von grösster Tragweite überrascht wurde. Der Name *catenaria*, französisch *chainette*, für die von Jakob Bernoulli verlangte Curve scheint von Leibniz herzurühren.

Unter denen, welche die Curve ermittelten, haben wir Huygens zu nennen gehabt, ein Beweis, dass hier auch mit anderen Hilfsmitteln als denen der Differentialrechnung auszukommen war. Das war bei den Segelcurven nicht mehr der Fall, mit welchen sich Jakob und Johann Bernoulli befassten, und über welche fast ein Streit zwischen beiden Brüdern hätte entstehen können. Jakob hatte, das wissen wir durch Johann, mit Letzterem Briefe über die Segelcurve gewechselt. Im April 1692 veröffentlichte Johann im Journal des Sçavans von Paris (wo er sich gerade aufhielt) eine Notiz[1]) über die Identität der Segelcurve mit der Kettenlinie. Johann machte dabei nicht gerade einen Ausfall gegen Jakob, aber er gab doch zu verstehen, dass dieser daran verzweifelte, mit der Differentialgleichung der Segelcurve $a \cdot ds \cdot ddx = dy^3$, wo s wie später immer die Bogenlänge bedeutete, etwas anfangen zu können, während aus seiner Arbeit über die Kettenlinie jene Gleichung unschwer herauszulesen gewesen sei. Jakob gab auf diese Aeusserung fürs erste keine Antwort, und als Johann Ende 1692 nach Basel zurückkehrte, fand er bei dem Bruder das liebevollste Entgegenkommen. Wir erwähnen die Sache nur, um die wachsende Selbstschätzung Johanns dem älteren Bruder und früheren Lehrer gegenüber schon jetzt zu kennzeichnen, eine Selbstschätzung, welche fast als Ueberhebung zu bezeichnen wäre, da Jakobs grosse wissenschaftliche Verdienste Johann nicht unbekannt sein konnten.

Sie waren von mannigfaltiger Natur. Ein Aufsatz im Junihefte 1691 der A. E. beschäftigte sich mit der logarithmischen Spirale[2]), und im Maihefte 1692 kam Jakob auf eben diese Curve zurück[3]), welche er die wunderbare Spirale, *spira mirabilis*, nannte. Er erkannte ihre Eigenschaft, durch verschiedene optische und geometrische Entstehungsarten Curven derselben Gattung hervorzubringen, und er wünschte deshalb, man solle sie dereinst auf seinem Grabsteine anbringen und ihr die Umschrift geben *Eadem mutata resurgo*, als dieselbe stehe ich verwandelt wieder auf. Dieser letztere Wunsch wurde buchstäblich erfüllt[4]). Auf den Inhalt des Aufsatzes von 1691, der berufen war den Eingang zu der Lehre von den elliptischen Integralen zu eröffnen und auf daran anknüpfende Leistungen von

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 59. [2]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 442 sqq. [3]) Ebenda I, 491. [4]) A. E. 1706, pag. 43.

Johann Bernoulli kommen wir im 100. Kapitel zurück. Eine andere Untersuchung, mit welcher Jakob Bernoulli sich beschäftigte, war die der elastischen Curve[1]). Kurz darauf erfand er die Lemniscate[2]). Eine andere Arbeit galt der Complanation conoidischer und sphäroidischer Oberflächen[3]), und in ihr scheint der Kunstausdruck Complanation zum ersten Male gebraucht worden zu sein.

Ueber die Reihenlehre hat, wie wir uns erinnern (S. 90—96), Jakob Bernoulli sich mehrfach verbreitet. Die wichtigeren Ergebnisse, zu welchen er gelangte, sind diejenigen, zu welchen er keiner Differentialrechnung bedurfte, aber er hat auch von dieser letzteren Gebrauch gemacht und in den Endabschnitten jener Untersuchungen Quadraturen und Rectificationen mittels Reihen vollzogen.

Zu Leibniz trat Jakob Bernoulli zweimal in einen Gegensatz. Im Januarhefte 1691 der A. E. sprach er die Meinung aus[4]), Leibniz dürfte wohl seine grundlegenden Gedanken aus Barrow haben, aber schon im Junihefte des gleichen Jahrganges[5]) nahm er den Ausspruch wieder so weit zurück, dass er neben der Aehnlichkeit beider Auffassungen auch deren Verschiedenheit hervortreten liess und Leibniz dabei hoch über Barrow stellte.

Der zweite Gegensatz war sachlicher Natur. Leibniz hatte (S. 196) 1686 die irrige Meinung ausgesprochen, Osculation bestehe aus zwei Berührungen. Dagegen wandte sich Jakob Bernoulli im Märzheft 1692 der A. E. und widerlegte Leibniz[6]). Zu dessen Ehre dürfen wir weiter berichten, dass er im Septemberhefte seinen Irrthum unumwunden eingestand und seine Dankbarkeit für die Belehrung aussprach[7]). Im Juni 1694 gab dann Jakob Bernoulli[8]) wieder in den A. E. die Formel für den Krümmungshalbmesser $z = ds^3 : dy \cdot ddx$, wo also im Anschlusse an Leibniz y die Abscisse und x die Ordinate bezeichnet.

Aber noch bleiben zwei grosse Arbeitsgebiete zu erwähnen, auf welchen Jakob Bernoulli seine bestverdienten Lorbeeren sich erwarb. Wir haben (S. 91) das eine beiläufig genannt, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jakob Bernoulli hat ein Lehrbuch derselben, *Ars conjectandi*, in nahezu druckfertigem Zustande hinterlassen, dessen Herausgabe sein Neffe Niclaus I Bernoulli 1713 besorgte. Aber gerade deshalb dürfen wir noch nicht darüber reden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat am Anfange des achtzehnten Jahrhunderts, bevor die Ars conjectandi bekannt wurde, Bearbeiter gefunden, deren Leistungen nicht im richtigen Lichte erscheinen würden, wenn wir

[1]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 576 sqq. und 639 sqq. [2]) Ebenda I, 609. [3]) Ebenda II, 739 sqq. [4]) Ebenda I, 431. [5]) Ebenda I, 453. [6]) Ebenda I, 473 sqq. [7]) Leibniz V, 279—285. [8]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 578.

den Bericht über das mustergültige Werk von Jakob Bernoulli vorausschickten. Dieser muss daher für den 17. Abschnitt aufgespart bleiben.

Das zweite Arbeitsgebiet, welches mir meinen, ist das der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen in einem erweiterteren Sinne, als sie bisher behandelt worden war. Hier ist aber zugleich den einschlagenden Arbeiten von Johann Bernoulli Rechnung zu tragen, und deshalb wenden wir uns diesem, dem jüngeren, vielleicht nicht eben so gründlichen, aber rascher fassenden, mit unglaublicher Leichtigkeit schaffenden Bruder zu.

Allerdings sind in den Jahren, mit welchen wir uns grade hier beschäftigen, die Veröffentlichungen Johanns nicht sehr zahlreich gewesen. Rufen wir uns ins Gedächtniss zurück, dass Johann Bernoulli im Juli 1667 geboren am Ende des Jahrhunderts erst $32\frac{1}{2}$ Jahre alt war, dass er die ersten 23 Jahre bis zum September 1690 in unmittelbarer Nähe und geistiger Abhängigkeit von Jakob Bernoulli zubrachte, und dass, wenn dieser auch nie versäumte, wo es anging, des jüngeren Bruders lobend zu gedenken, doch erst nach 1691 in Paris ein Feld freier, uneingeschränkter Arbeit für den jungen Gelehrten sich öffnete. Dort aber war er durch mannigfaltige Thätigkeit in Anspruch genommen. Förderte der Verkehr mit Pierre Varignon (1654—1722), der an der Redaction des Journal des Sçavans betheiligt war, die Anfertigung wissenschaftlicher Aufzeichnungen für den Druck, so war ein anderer Verkehr von entgegengesetzter Wirkung, der mit dem Marquis de l'Hospital (S. 110) Wir wissen, dass dieser seit 1692 in Briefwechsel mit Leibniz stand. In einem Schreiben vom letzten November 1694 hat er ihm seinen mathematischen Bildungsgang auseinandergesetzt[1]).

Vor etwa 6 Jahren, das wäre also 1688 gewesen, sei ihm die Abhandlung von 1684 in die Hände gekommen und habe ihm so ungemein gefallen, dass er sofort sich daran machte Einiges niederzuschreiben, um jene Lehren ausführlicher darzustellen und zu beweisen. Freunde, unter Anderem Pater Malebranche, hätten die Entwürfe gesehen und zur Veröffentlichung gedrängt. Eben diese Freunde hätten dem Abbé Catelan davon erzählt, der nun, um zuvorzukommen, in aller Eile ein Büchelchen verfasste: *Science generale des lignes courbes*, in welchem Leibniz gar nicht genannt war, die ganze Methode vielmehr als eine Fortsetzung Descartes'scher Gedanken sich darstellte. Aber Catelan hatte die ganze Sache gar nicht verstanden und Schnitzer begangen, welche nun de l'Hospital in

[1]) Leibniz II, 250—252.

einem Briefe im Journal des Sçavans ihm vorwarf. Darüber entspann sich ein öffentlicher Streit in jener Zeitschrift, den de l'Hospital unter dem von ihm angenommenen Buchstaben G. führte, seinen wahren Namen zurückhaltend.

Wir unterbrechen hier einen Augenblick den Gang der Erzählung, um ein Wort über Catelan und dessen Benehmen bei wissenschaftlichen Streitigkeiten einzuschalten. Auch 1682 war er in einen Streit verwickelt und zwar mit Huygens. Es handelte sich um den Schwingungsmittelpunkt, mithin einem unserer Behandlung nicht selbst unterworfenen Gegenstand. Von den beiden Gegnern lebte Catelan in Paris, Huygens war im September 1681 krank aus Paris nach Holland zurückgekehrt. Er bezog das Journal des Sçavans aus Paris, mithin in der dort gedruckten Ausgabe. Daneben erschien aber auch ein Nachdruck bei einem gewissen Pierre Legrand in Amsterdam, und diesen benutzte Catelan, wie es allerdings nachweislich noch einige andere gewissenlose Schriftsteller thaten, um Dinge einzuschmuggeln, die niemals in der Pariser Ausgabe gestanden hatten, von denen aber der ungewarnte Leser des Nachdruckes annehmen musste, sie seien dem Originaldrucke entnommen. In Folge einer derartigen Fälschung, denn anders lässt das Verfahren sich nicht bezeichnen, erhielt Huygens erst verhältnissmässig späte Kenntniss von gegen ihn in Amsterdam gedruckten Angriffen und konnte sie deshalb nicht so rasch zurückweisen als er es sonst gethan hätte[1]).

Nach dieser Zwischenbemerkung zur Kennzeichnung Catelans kehren wir zu de l'Hospitals Erzählung zurück. Malebranche, fährt dieser fort, habe seit lange ein kurzes von ihm verfasstes Lehrbuch der Kegelschnitte in Händen, welches er jetzt herauszugeben wünsche. Malebranche habe dazu seine, de l'Hospitals, Erlaubniss erbeten, wie nicht minder auch dazu, am Schlusse beifügen zu dürfen, was er über Differentialrechnung niedergeschrieben habe. Ist dieser Bericht vollständig wahrheitsgetreu, so war demnach de l'Hospital im Herbste 1691, als er mit Johann Bernoulli bekannt wurde, bereits im Besitze der Differentialrechnung, und sein Lehrbuch, von welchem weiter unten die Rede sein wird, war das Ergebniss eigenen Nachdenkens, wenn auch eigenen Nachdenkens über fremde Erfindungen.

Ganz anders erzählt Johann Bernoulli den Lehrgang de l'Hospitals in dem schon einmal von uns erwähnten Abrisse seines Lebens[2]). Johann Bernoulli will 1691 durch Pater Malebranche in Beziehung zu de l'Hospital gekommen sein. Er will ihm den Zugang zu den

[1]) Huygens Oeuvres VIII, 359, 363, 364, 395. [2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 74—76.

neuen Methoden geöffnet haben, will ihm schriftliche Aufzeichnungen darüber gegeben haben, ohne vorauszusehen, dass jener beabsichtigen könne sie eines Tages herauszugeben[1]).

Nun ist unzweifelhaft wahr, dass in der Basler Bibliothek eine Handschrift einer Integralrechnung von Johann Bernoulli aufbewahrt wird, welche die Bemerkung trägt[2]), sie sei in Paris zum Gebrauche durch den Marquis de l'Hospital zusammengestellt worden; es ist ferner wahr, dass de l'Hospital ein Lehrbuch der Analysis der unendlich kleinen Grössen, wie der Titel lautete, verfasste; es steht fest, dass Johann Bernoulli sich im Februar 1698 über das Erscheinen dieses Buches als eines an ihm begangenen Plagiates brieflich gegen Leibniz beschwerte[3]); dass er 1704 die Auswerthung von Quotienten, deren Divisor und Dividend zugleich verschwinden, und welche in de l'Hospitals Lehrbuche vorgetragen ist, für sich in Anspruch nahm[4]), dass er endlich 1742, als er die erwähnten Vorlesungen über Integralrechnung im Drucke herausgab, in einer Fussnote[5]) erklärte, die vorausgehenden Vorlesungen über Differentialrechnung unterdrückt zu haben, weil de l'Hospital sie in seine in allen Händen befindliche *Analyse des infiniments petits* aufgenommen habe.

Wenn diese lauten Beschuldigungen geeignet sind de l'Hospital in üblen Ruf zu bringen, so fehlt es doch auch nicht an Vertheidigungsgründen für denselben. Leibniz, der sonst gewohnt war, die Briefe, welche er erhielt, Punkt für Punkt zu beantworten, ging über die Anklage von 1698 stillschweigend hinweg. Er wollte, kann man sagen, in einen Streit zwischen zwei wissenschaftlichen Freunden nicht hineingezogen werden. Das ist ja möglich, aber jedenfalls nahm er nicht Partei für Johann Bernoulli. Als der Artikel in den A. E. von 1704 erschien, war de l'Hospital soeben gestorben, überdies handelte es sich dabei um eine Einzelheit, welche Johann Bernoulli ganz gut de l'Hospital und anderen Franzosen um 1694, wie er es behauptet, mitgetheilt haben kann. Als die schärfste Form öffentlicher Beschuldigung liegt die Fussnote von 1742 vor. Aber damals war de l'Hospital bereits 38 Jahre, Malebranche, der ihn am ersten hätte vertheidigen können, 27 Jahre todt und begraben, wer konnte die Widerlegung übernehmen?

War es ausserdem unmöglich, dass die Analyse des infiniments petits auf die Abhandlung von 1684 als erste Grundlage sich stützte? Auch Jakob Bernoulli war es gelungen, ihr ohne weitere Anleitung so viel von der Differentialrechnung zu entnehmen, dass er selb-

[1]) *ne prévoyant pas le dessein qu'il aurait de les publier un jour.* [2]) Rud. Wolf l. c. II, 76 Fussnote 8. [3]) Leibniz III, 480. [4]) A. E. August 1704 und Joh. Bernoulli *Opera* I, 401. [5]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 387.

ständig weiter gelangen konnte, und de l'Hospital hatte zu seiner Belehrung doch auch die Arbeiten, welche nach 1684 in den A. E. erschienen waren.

Wir bemerken weiter, dass de l'Hospital ausschliesslich eine Differentialrechnung schrieb. Auf eine Integralrechnung verzichtete er, weil, wie er in seiner Vorrede sagte, er Leibniz nicht vorgreifen wolle, der brieflicher Mittheilung zufolge eine Integralrechnung vorbereite. Wir stellen nicht in Abrede, dass Johanns Lehren bei dem Verzichte auf eine Integralrechnung auch von Einfluss gewesen sein können, dass sie der Differentialrechnung ebenfalls zu gut kamen, aber de l'Hospital äussert sich in dem gleichen Sinne. Wieder in seiner Vorrede sagte er ausdrücklich, dass er Vieles den Brüdern Bernoulli zumal dem jüngeren verdanke; er habe ihre Entdeckungen ebenso wie die Leibnizens ohne Umstände benutzt[1]). Wir müssten uns sehr täuschen, wenn das die Sprache eines Räubers geistigen Eigenthums wäre.

Aber bei blossen Wahrscheinlichkeitserwägungen brauchen wir nicht stehen zu bleiben. Briefe, welche zwischen de l'Hospital und Johann Bernoulli gewechselt wurden, sind im Besitze der Stockholmer Akademie der Wissenschaften. Sie sind veröffentlicht worden[2]). Aus ihnen geht Dreierlei hervor: erstens dass de l'Hospital selbst Johann Bernoulli wiederholt mitgetheilt hat, er beabsichtige eine Differentialrechnung zu schreiben; zweitens dass Johann Bernoulli diese Absicht billigte; drittens dass Johann Bernoulli, nachdem er die gedruckte *Analyse des infiniment petits* gelesen hatte, ihrem Verfasser nur einen Vorwurf machte, nämlich den der allzuhöflichen Erwähnung Jakob Bernoullis. Damit ist festgestellt, dass die Bernoullische Anklage gegen de l'Hospital von 1742 viel zu weit geht, und dass die Schroffheit seiner Behauptungen umsomehr zunahm, je sicherer er sich fühlte nicht widerlegt werden zu können. Wir haben eine der zahlreichen Unwahrheiten, welche man Johann Bernoulli nachweisen kann, vor uns, ein Beispiel dessen, was seiner Ruhmredigkeit und seinem nur allzuweiten Gewissen zuzutrauen war.

Wir betonen, jetzt eigentlich überflüssiger Weise, noch einen letzten Umstand. Wo ist die Handschrift von Bernoullis unterdrückten Vorlesungen[3]) über Differentialrechnung? Hat er Sorge dafür getragen, dass die Handschrift der Integralrechnung erhalten blieb,

[1]) *Je me suis servi sans façon de leurs découvertes et de celles de Mr. Leibnis* (sic!). [2]) Eneström, Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'Analyse des infiniment petits. Bibliotheca mathematica 1894 pag. 65 bis 72. [3]) *Lectiones in calculum differentialem quae praecesserunt, quasque (autor) supprimendas duxit.*

trotzdem sie unter seinem Namen gedruckt ist, so hätte er doppelt für die Erhaltung der ihm entwendeten Differentialrechnung sorgen müssen, wenn sie wirklich vorhanden war.

Gesichert bleibt für uns als einziges Ergebniss unserer Untersuchung, dass im Verkehre mit de l'Hospital in Paris jene Vorlesungen über Integralrechnung, oder wie man sie nun nennen will, entstanden, welche 1742 noch zu Lebzeiten Johann Bernoullis gedruckt wurden[1]), und deren Niederschrift einen guten Theil der Zeit des jungen Lehrers in Anspruch genommen haben muss. *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque*, mathematische Vorlesungen über die Methode der Integrale und Anderes ist die Ueberschrift. Eine Integralrechnung in dem Sinne, welcher heute mit dem Worte verbunden zu werden pflegt, ist es nicht. Von Integrationen selbst sind nur wenige vorhanden, welche ihren Ursprung in der Formel

$$ax^p dx = d\left(\frac{a}{p+1} x^{p+1}\right)$$

besitzen. Ihr entnimmt Johann Bernoulli[2]) auch das Integral von

$$\frac{dx}{x} \quad \text{als} \quad \frac{1}{0} x^0 = \infty \cdot 1 = \infty .$$

Das Integral von $\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$ kannte er so wenig wie das von $\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$, keines von beiden Integralen besitzt man[3]). Das Integral ihrer Summe $\frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$ kennt man dagegen, es ist $\sqrt{2ax + x^2}$. Manchmal helfen Substitutionen, zu deren Auffindung ähnliche Methoden führen, wie sie bei der Auflösung von Diophantischen Gleichungen im Gebrauch seien. Will man z. B. das Integral von $\frac{a^3 dx}{x\sqrt{ax - x^2}}$ sich verschaffen[4]), so befreit man sich von der Irrationalität des Ausdruckes durch $ax - x^2 = \frac{a^2 x^2}{m^2}$. Dann ist nämlich

$$x = \frac{am^2}{a^2 + m^2}, \quad \sqrt{ax - x^2} = \frac{ax}{m} = \frac{a^2 m}{a^2 + m^2},$$

$$dx = \frac{2a^3 m\,dm}{(a^2 + m^2)^2}, \quad \frac{a^3 dx}{x\sqrt{ax - a^2}} = \frac{2a^3 dm}{m^2},$$

und dessen Integral ist $-\frac{2a^3}{m}$ oder $2a^2\sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Das Minuszeichen ist bei der Rückeinsetzung der Quadratwurzel verloren gegangen.

Bei der Integration von Differentialgleichungen ist Johann Bernoulli, dadurch, dass er über das Integral von $\frac{dx}{x}$ irriger Meinung war, zu sehr unbequemen Umwegen gezwungen. Er will z. B.

$$axdy - ydx = 0$$

integriren[1]). Er multiplizirt die Gleichung mit $\frac{y^{a-1}}{x^2}$ und erhält so

$$\frac{ay^{a-1}}{x} dy - \frac{y^a}{x^2} dx = 0,$$

welches das Differential von $\frac{y^a}{x} = b$ ist, wo b irgend eine Constante[2]) bedeutet. Das war wohl die erste Anwendung eines **integrirenden Factors**. Noch umständlicher wird die Integration[3]) von

$$dx : dy = \frac{3x^3 - 2axy}{3x^2 - ay} : y$$

oder

$$3x^3 dy - 2axydy = 3x^2 ydx - ay^2 dx .$$

Bernoulli setzt

$$y = mx, \quad dy = mdx + xdm$$

und erhält:

$$3x^2 dm - 2amxdm = am^2 dx .$$

Er setzt weiter

$$x = mn, \quad dx = mdn + ndm$$

und erhält

$$3n^2 dm - 3andm = amdn .$$

Aber noch immer kann er die Trennung der Veränderlichen nicht vollziehen, denn $\frac{3dm}{am} = \frac{dn}{n^2 - an}$ wäre für ihn genau ebenso räthselhaft wie die ursprüngliche Differentialgleichung. Erst muss er oben $n = \frac{a^2}{r}$, $dn = -\frac{a^2 dr}{r^2}$ einsetzen, um $3adm - 3rdm = -mdr$ zu erhalten, dann $r - a = t$ mit $dr = dt$, damit die Gleichung in $3tdm = mdt$ übergehe, und jetzt erst liefert die Multiplikation mit $\frac{m^2}{t^2}$ ihm die Gleichung

$$\frac{3m^2 dm}{t} - \frac{m^3 dt}{t^2} = 0 \qquad \text{oder } d\left(\frac{m^3}{t}\right) = 0,$$

welche er zu $m^3 = bt$ integriren kann. Setzt er rückwärts die Werthe

$$t = r - a, \quad r = \frac{a^2}{n}, \quad n = \frac{x}{m}, \quad m = \frac{y}{x}$$

ein, so kommt endlich $y^3 + bax^3 = a^2 byx$ heraus. Er wünscht aber eine in allen Gliedern gleiche Dimension[4]) und wählt deshalb die willkürliche Constante $b = \frac{1}{a}$. Dann ist die Gleichung $y^3 + x^3 = axy$

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 385—558. [2]) Ebenda III, 388 lin. 12 v. u. [3]) Ebenda III, 389: *neutrius habetur integrale.* [4]) Ebenda III, 393.

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 416. [2]) = *quantitati constanti b.* [3]) Ebenda III, 422—423. [4]) *ut aequatio ubique aequales dimensiones habeat.*

gefunden. Wir haben den ganzen Gang der Rechnung wiedergegeben, damit der Leser um so bereitwilliger uns die Ausführung anderer Beispiele erlasse, um so mehr solcher, in welchen auch zweite Differentiale vorkommen.

Johann Bernoulli geht dann auf die Lehre vom Krümmungshalbmesser und von den Evoluten ein und zeigt den engen Zusammenhang dieser Lehre mit der von der Rectification[1]), der daraus hervorgehe, dass $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, welches nichts anderes als ds sei, in der Gleichung für den Krümmungshalbmesser erscheine. Auch alle die halb der Geometrie halb der Physik angehörenden Aufgaben der damaligen Zeit: die Brennlinien, die Segelcurve, die Kettenlinie, letztere auch unter der Annahme, dass die Kette an verschiedenen Stellen verschieden dick sei u. s. w., finden die ausführlichste Behandlung und machen die Zusammenstellung noch heute lesenswerth, wenn wir auch wiederholen dürfen, eine Integralrechnung ist sie nicht.

Am Schlusse des Jahres 1692 kehrte Johann Bernoulli nach Basel zurück, um dort seine medizinischen Studien zu beendigen, aber der Mathematik war er deshalb doch nicht ungetreu. Im Journal des Sçavans wie in den A. E. erschienen kleinere und grössere Aufsätze, die Doctordissertation über die Muskelbewegung[2]) brachte Anwendungen der Differentialrechnung auf anatomisch-physiologische Fragen, seit December 1693 eröffnete sich ein Briefwechsel mit Leibniz, der voll der bedeutsamsten Mittheilungen beider Gelehrten ist. Johann Bernoulli war noch selbst dafür besorgt, dass dieser Briefwechsel 1745 gedruckt wurde, und nur persönliche Bemerkungen, vertraulich ausgesprochene, unbewiesene, mitunter wohl auch unbeweisbare Anklagen gegen Diesen und Jenen blieben weg[3]).

Von den Veröffentlichungen erwähnen wir einen kurzen Aufsatz über die Construction der Differentialgleichungen ersten Grades[4]) — *primi gradus*, gemeint sind aber die Differentialgleichungen erster Ordnung — im Novemberhefte 1694 der A. E. Dort kommt der Ausdruck der Trennung der Veränderlichen[5]) vor, welcher der Wissenschaft verblieben ist, den Johann Bernoulli auch schon am 9. Mai 1694 in einem Briefe an Leibniz gebraucht hatte[6]). In demselben Jahrgange der A. E. findet sich *Additamentum effectionis quadraturarum et rectificationum per seriem quandam generalissimam*[7]), welche anschliessend an die Leibnizische Integration mittels Reihen von 1693 (S. 213) eine Reihenentwicklung ganz anderer Art und

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 444. [2]) Ebenda I, 93—118. [3]) Der volle Inhalt wurde aus Leibnizens brieflichem Nachlasse durch C. J. Gerhardt 1855 wiederhergestellt. [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 123—125. [5]) *separatio indeterminatarum.* [6]) Leibniz III, 139. [7]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 125—128.

durchaus neuer Entstehungsweise liefert. Sei ndz das Differential einer Fläche, wobei n irgendwie aus Veränderlichen und Constanten zusammengesetzt ist. Die Identität

$$ndz = ndz + zdn - zdn - \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 \cdot dz} + \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 \cdot dz}$$
$$+ \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^2} - \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^2}$$

liegt auf der Hand und ebenso deren Fortsetzbarkeit durch beliebig viele Paare von gleichlautenden positiven und negativen Gliedern, in welchen bald das positive bald das negative Glied voraussteht. Bernoulli bedient sich allerdings noch nicht der Zahlenzeiger für die höheren Differentialien, sondern des wiederholt geschriebenen Buchstaben d, der bis zu viermaliger Schreibung (in $ddddz$) in dem Aufsatze vorkommt. Sind die Gliederpaare so geordnet, wie wir es erklärten, so finden sich in der den Ausgangspunkt bildenden Identität rechts vom Gleichheitszeichen erst zwei positive, dann zwei negative Glieder, dann wieder zwei positive u. s. w. in gleichmässiger Wiederkehr des Zeichenwechsels. Jedes dieser Gliederpaare, die aber augenscheinlich von dem, was oben Gliederpaar genannt wurde, verschieden sind, bildet ein vollständiges Differential

$$\frac{z^\lambda d^\lambda n}{1 \cdot 2 \cdots \lambda dz^{\lambda - 1}} + \frac{z^{\lambda+1} d^{\lambda+1} n}{1 \cdot 2 \cdots \lambda(\lambda + 1) dz^\lambda} = d\left(\frac{z^{\lambda+1} d^\lambda n}{1 \cdot 2 \cdots \lambda(\lambda + 1) dz^\lambda}\right).$$

Man kann daher die unendlich gedachte Reihe integriren und erhält:

$$\text{Integr. } ndz = nz - \frac{z^2}{1 \cdot 2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^2 n}{dz^2} - \cdots.$$

Es ist fast überflüssig darauf hinzuweisen, dass Johann Bernoulli hier gleichwie in den früheren Aufsätzen ein eigentliches Integralzeichen noch entbehrt, und, was allerdings von ungleich höherer Wichtigkeit ist, dass er die Reihe ohne jedes Bedenken ins Unendliche fortsetzte. Ob sie gegen einen bestimmten Werth convergire, macht ihm genau so wenig Sorgen als der Umstand, dass wegen der vorerwähnten Verschiedenheit der die Identität fortsetzenden und der bei der Integration zusammengefassten Gliederpaare stets ein unpaares Glied überschiesst, das bei der Integration unberücksichtigt blieb. Etwas hat aber Johann Bernoulli seit seiner Pariser Zeit hinzugelernt, vielleicht durch einen Brief von Leibniz[1]) vom Juni 1694, das Differential eines Logarithmus. Ist, sagt er, um ein Beispiel seiner Methode zu bilden, $y = a \log(a + z) = a \log r$, so ist $dy = \frac{adr}{r}$ oder wegen $dr = dz$ auch $dy = \frac{adz}{a + z}$. Hier ist demnach

[1]) Leibniz III, 141.

$$n = \frac{a}{a+z} \text{ und } a \log(a+z) = \frac{az}{a+z} + \frac{az^2}{2(a+z)^2} + \frac{az^3}{3(a+z)^3} + \cdots$$

eine ganz andere Entwicklung als diejenige logarithmische Reihe, welche man bis dahin kannte. Daran wird nicht das Mindeste durch den Umstand geändert, dass die Entwicklung

$$a \log(a+z) = \frac{az}{a+z} + \frac{az^2}{2(a+z)^2} + \frac{az^3}{3(a+z)^3} + \cdots$$

mittels Einsetzung von $\frac{z}{a+z} = u$ in die Gestalt

$$\log a - \log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots$$

übergeht. Am Ende des XVII. Jahrhunderts war man an solche Umformungen noch nicht gewohnt.

Die Mängel in der Bezeichnung, welche wir erwähnten, verschwanden 1695 und 1696. Im letzteren Jahre einigte sich Leibniz und Johann Bernoulli brieflich[1]) über die Benutzung des Zeichens $\int$. Der Brief Leibnizens vom October 1695 aber, in welchem die Zahlenzeiger höherer Differentiation vorkommen[2]), ist allzuwichtig, als dass wir nicht einen Augenblick bei ihm verweilten.

Die Differenzen, sagt dort Leibniz, sind den Potenzen vergleichbar[3]). Wie

$$(x+y)^m = x^m y^0 + \frac{m}{1} x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^2 + \cdots,$$

so, kann man schliessen, wird auch

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot d^1 y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \cdots$$

sein. Man kann auch das Differentiationszeichen in das der Integration verwandeln und die Gleichung $d^m = \int^n$ aufstellen, wenn $n = -m$ ist. So entsteht

$$\int^n d(zy) = \int^{n-1} z d^0 y - \frac{n}{1} \int^n z d^1 y + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \int^{n+1} z d^2 y - \cdots.$$

Die Uebereinstimmung zwischen der Potenzirung einer Summe und der Differenzirung eines Produktes hat Leibniz erst mehrere Jahre später in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie[4]) dem Drucke übergeben, den Vergleich der Integration mit einer negativ indicirten Differentiation liess er aber weg. In dem Briefwechsel allein blieben auch Gedanken über Differentiation mit gebrochenem Index erhalten, welche Leibniz hegte[5]).

[1]) Leibniz III, 262 und 272. [2]) Ebenda III, 221. [3]) *Potentiis analogae sunt differentiae.* [4]) Leibniz V, 377—382. [5]) Ebenda III, 228.

Und wieder in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli wurde von ersterem der Keim eines Verfahrens niedergelegt, welches eines der bedeutsamsten der ganzen Analysis geworden ist. Leibniz hatte 1692 die Möglichkeit eingesehen, eine Curvengleichung nach einem in ihr auftretenden Parameter zu differenziren (S. 211). Er hatte 1694 an einem bestimmten Beispiele die Ausführung des Verfahrens gezeigt (S. 215). Im August 1697 ging er den grossen Schritt weiter, auch dann nach einem Parameter zu differenziren[1]), wenn derselbe innerhalb eines Integrals vorkommt. *Differentiare de curva in curvam*, Differentialübergang von einer Curve zur anderen nannten das die beiden Freunde, und Johann Bernoulli weiss seiner Bewunderung keinen besseren Ausdruck zu geben, als indem er sich entrüstet, dass der Geist Leibnizens ihn höher geführt habe, als er vorzudringen im Stande gewesen sei.

Was die Darstellung einzelner Integrale betrifft, so war Leibniz seit December 1696 im Besitze der Formel[2])

$$\frac{1+x}{x}(\log(1+x))^2 = 2\int \frac{\log(1+x)}{x} dx - \int \frac{(\log(1+x))^2}{x^2} dx,$$

welche zwar schon aus der Regel für die Differentiation eines Produktes hervorgeht, aber immerhin hergeleitet werden musste.

Man glaube indessen ja nicht, in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli sei ersterer immer der Geber gewesen. Im Juni 1695 erwähnt Johann Bernoulli[3]) einen Gegenstand, über den er jüngst[4]) mit de l'Hospital Briefe gewechselt habe. Curven mit Rückkehrpunkten[5]) seien vorhanden, wie die semicubische Parabel, wo ein grösster oder kleinster Werth eintrete, während das Differential unendlich gross werde. In jenem Briefwechsel seien sie auch zur Ueberzeugung gekommen, dass es Wendepunkte von Curven gebe, in welchen der Krümmungshalbmesser nicht ∞ sondern 0 sei; einen dritten endlichen Werth für den Krümmungshalbmesser in einem Wendepunkte gebe es allerdings nicht. Wir kommen hierauf im nächsten Kapitel zurück.

Im August 1697 spricht Johann Bernoulli von der Aufgabe[6]), eine Curve zu finden, welche gegebene Curven unter gegebenem, unveränderlichem oder nach einem bestimmten Gesetze veränderlichem Winkel schneide. Ein Jahr später[7]) gibt er der gesuchten Curve den Namen der Trajectorie, und damit ist der Infinitesimalgeometrie ein neues schwieriges Kapitel eingefügt, an dessen Bearbeitung zahlreiche Kräfte ersten Ranges sich versuchten.

[1]) Leibniz III, 453 und 462. [2]) Ebenda III, 351. [3]) Ebenda III, 185. [4]) *non ita pridem.* [5]) *points de rebroussement.* [6]) Leibniz III, 464. [7]) Ebenda III, 539 und Joh. Bernoulli *Opera* I, 266.

Noch bedeutsamer ist ein Gegenstand, den Johann Bernoulli bereits 1694 in den Briefwechsel warf[1]). Er meinte, man könne von percurrenten Curven sprechen. Der Gipfel der Geometrie, sagt er, wäre es, wenn die transcendenten Curven auf percurrente zurückgeführt werden könnten, d. h. auf solche, deren Gleichungen Glieder in sich schliessen, welche zu unbestimmten Abmessungen aufsteigen[2]). Der Name der percurrenten Grössen ist freilich aus der Mathematik verschwunden; Johann Bernoulli selbst hat ihn gegen den von Leibniz vorgeschlagenen Namen der Exponentialgrössen vertauscht, aber er hat im Märzheft 1697 der A. E. die Grundzüge der Rechnung mit den Exponentialgrössen für alle Zeiten festgestellt[3]). In der dort mitgetheilten Formel

$$d(m^n) = m^n \log m\, dn + n m^{n-1} dm$$

besass Bernoulli allerdings einen Vorgänger in Leibniz, der dieselbe schon im Jahrgange 1695 der A. E. abgeleitet hatte[4]). Ein wesentliches Versinnlichungsmittel bildet bei allen diesen Untersuchungen die logarithmische Curve von der Gleichung $y = \log x$. Wer diese zuerst betrachtete, wissen wir nicht zu sagen. Huygens gab ihr in seiner Abhandlung *De la cause de la pésanteur* den Namen, fügte aber hinzu, die Curve sei schon von Anderen beachtet worden. Neuere Untersuchungen[5]) lassen in Torricelli den Entdecker der Curve vermuthen.

Wir würden nicht einen Theil eines Kapitels, wir würden mehrere Kapitel verwenden müssen, wollten wir Alles angeben, was in Johann Bernoullis frühen Aufsätzen oder in seinem Briefwechsel mit Leibniz an Wissenswürdigem enthalten ist. Wir erwähnen aus der Fülle hier nur noch einen einzigen im Märzhefte 1697 der A. E. mitenthaltenen Aufsatz[6]), in welchem unter anderem eine Differentialgleichung integrirt ist, welche nicht selten die Bernoullische Differentialgleichung genannt wird. Jakob Bernoulli hat sie im Decemberhefte 1695 der A. E. in der Gestalt

$$a\,dy = ypdx + by^n qdx$$

zur Bearbeitung vorgelegt und dabei bestimmt, a und b sollten Constante bedeuten, p und q irgendwie von x abhängen ohne y zu enthalten. Johann Bernoulli trat an die Aufgabe so heran, dass er y als Produkt zweier Variabeln auffasste, d. h.

[1]) Leibniz III, 139, 201, 323 und öfter. [2]) *terminis ad dimensiones indeterminatas ascendentibus.* [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 179—187. [4]) Leibniz V, 325. [5]) G. Loria, *Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logarithmica* in der Bibliotheca Mathematica 1900, S. 75—89. [6]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 175—176.

$$y = mz, \quad dy = mdz + zdm$$

setzte. So erhielt er

$$amdz + azdm = mzpdx + bm^n z^n qdx.$$

Nun waren aber m und z beide unbekannt, und es schien gestattet zur Bestimmung einer dieser Grössen eine Bedingungsgleichung einzuführen. Johann Bernoulli wählte dazu $amdz = mzpdx$, welche auch $\frac{adz}{z} = pdx$ geschrieben werden konnte, und aus ihr ergibt sich z in seiner Abhängigkeit von x, etwa $z = \xi$. Nun blieb von der früher viergliedrigen Differentialgleichung nur noch

$$azdm = bm^n z^n qdx \quad \text{oder} \quad \frac{adm}{m^n} = bz^{n-1} qdx,$$

und hieraus ergibt sich m in seiner Abhängigkeit von x, etwa $m = X$, worauf $y = \xi X$ sich anschliesst. Es ist sehr gleichgiltig, ob Johann Bernoulli diese Integration wirklich, wie er behauptet, in einer halben Viertelstunde gefunden hat oder nicht. Jedenfalls hat er die Methode dabei erfunden, eine Variable durch das Produkt zweier Variablen zu ersetzen, welche bei der Behandlung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung beibehalten worden ist.

Wir verlassen hiermit die Arbeiten, durch welche noch im XVII. Jahrh. die beiden Brüder Bernoulli sich auszeichneten ohne in Zwiespalt mit einander zu gerathen. Die Geschichte ihres grossen Streites fordert ein besonderes Verweilen.

92. Kapitel.

Streit der Brüder Bernoulli. De l'Hospital. Newtons Briefe von 1693. Leibnizens Gegner.

Wir erinnern uns (S. 89), dass Johann Bernoulli 1695 einem Rufe nach Groeningen Folge leistete. Es war, als wenn diese Berufung eine Feindschaft entfesselt hätte, deren wahre Gründe kaum zu ermitteln sein dürften, deren Folge aber eine Reihe von öffentlich ausgetragenen Streitigkeiten bildete, deren Erzählung man am liebsten auswiche, wenn nicht neben der hässlichen Form ein hochbedeutender Inhalt ausführlichen Bericht forderte[1]).

Die Eröffnung der Feindseligkeiten verschuldete Jakob Bernoulli durch einen Aufsatz im Decemberhefte 1695 der A. E., in welchem sich Johann an mehreren Stellen zum mindesten gereizt fühlen

[1]) Giesel, Geschichte der Variationsrechnung I. Theil (Torgauer Gymnasialprogramm für 1857).

konnte[1]), denselben Aufsatz, in welchem am Schlusse die Bernoullische Differentialgleichung aufgegeben war, von deren Integration wir gesprochen haben. Zunächst ist die Rede vom Krümmungshalbmesser, von welchem ausser Jakob Bernoulli fast ausschliesslich solche Leute etwas wüssten, denen der Bruder dieses mitgetheilt habe[2]). Nach diesem ersten Stiche kommt ein zweiter empfindlicherer, es war die Antwort auf Johanns 1692 an den Tag gelegte Ueberhebung (S. 220). Er selbst habe Johann die Differentialgleichung der Segelcurve zugeschickt, er sei so wenig an der Integration derselben verzweifelt, wie Johann im April 1692 im Journal des Sçavans sich ausdrückte, dass er vielmehr einen Monat vorher im März die volle Auflösung nach Leipzig habe abgehen lassen. Später habe Johann die eigene Auflösung verbessern und eine andere von de l'Hospital beifügen wollen, aber es seien noch immer Irrthümer darin geblieben. Der giftigste Stich war ein dritter. Johann habe im Octoberhefte 1694 der A. E. über die Isochrone geschrieben. Darüber sei nicht viel zu bemerken. Er habe, wie man zu sagen pflege, nach dem Frühstück Eier aufgetragen[3]) und nichts mitgetheilt, was nicht einfacher in Jakobs Aufsatze im vorangehenden Septemberhefte gestanden habe.

Man kann ja, wie wir es andeuteten, diese verschiedenen kleinen Bosheiten als die Antwort auf die vierthalb Jahre früher begangene Taktlosigkeit Johanns betrachten; allein unter Brüdern, welche inzwischen in persönlichem Umgange sich auszusprechen volle Gelegenheit gehabt hatten, war es gehässig, jetzt erst und so zu antworten. Es müssen hier Dinge gespielt haben, von welchen wir nichts wissen.

Johann schwieg öffentlich und äusserte nur gegen Leibniz seine Empfindungen über die ihm widerfahrene Kränkung mit der allerdings erfolglosen Bitte, Leibniz möge doch gelegentlich erklären, was er von jedem der beiden Brüder halte[4]). Im Juni 1696 brachten dann die A. E. eine von Johann gestellte Aufgabe, zu deren Auflösung innerhalb des laufenden Jahres die Mathematiker aufgefordert wurden. Man solle den Weg bestimmen, auf welchem ein bewegter Punkt von einem Orte A zu einem in derselben Vertikalebene tiefer liegenden Orte B in der kürzesten Zeit gelange; die grade Linie AB sei es nicht, vielmehr eine den Geometern wohlbekannte Curve. Das Decemberheft der A. E. verlängerte die gestellte Frist bis Ostern 1697, und das Maiheft 1697 brachte die Auflösung durch Jakob[5]), ihr vorausgedruckt aber die Auflösung durch Johann[6]) selbst, der

[1]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 639—663. [2]) *quibuscum frater nostra communicaverat.* [3]) *Nobis hic ova, quod aiunt, post prandium apponit.* [4]) Leibniz III, 269. [5]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 768—778. [6]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 187—193.

hier zum ersten Male den Namen der Brachistochrone für die gesuchte Curve einführte.

Auch von Leibniz erschien damals eine Notiz[1]). Er hatte allerdings bereits viel früher, nämlich sofort im Juni 1696, die Aufgabe gelöst und seine Auseinandersetzung brieflich an Johann eingesandt, wogegen ihm dieser gleichfalls brieflich seine Methode zuschickte[2]). Schon in diesem Briefe war von einem Namen für die Curve die Rede. Leibniz schlug Tachystoptota vor, fand aber selbst alsdann den Gegenvorschlag Brachistochrone besser. In dem gedruckten Aufsatze der A. E. begnügte sich Leibniz mit der Bemerkung, das Brachistochronenproblem, welches er ganz ähnlich wie die Brüder Bernoulli behandelt habe, weshalb seine Auflösung hier wegbleibe, sei so recht geeignet, die Vorzüge der Differentialrechnung erkennen zu lassen. In ihr seien die drei Mathematiker bewandert, von welchen jetzt Auflösungen vorhanden seien. Ausser diesen seien es aber nur wenige, denen zuzutrauen gewesen, dass sie dem Gegenstande gewachsen sein würden. Er habe an den Marquis de l'Hospital gedacht, ausserdem an Huygens, wenn er noch lebte, Hudde, wenn er von solchen Untersuchungen sich nicht längst zurückgezogen hätte, Newton, wenn er sich die Mühe gegeben hätte[3]); das seien die Männer dazu gewesen.

Von Newton ist auch in der That ein Brief im Januarhefte der P. T., dann in den A. E. veröffentlicht[4]), der aber nur die beweislos ausgesprochene Behauptung enthält, die gesuchte Curve sei eine Cycloide. Aehnlich war es mit einer Auflösung von de l'Hospital, in Bezug auf welche nur zu bemerken ist, dass er die Aufgabe in einen eigenthümlichen Zusammenhang mit der der Kettenlinie zu bringen wusste[5]).

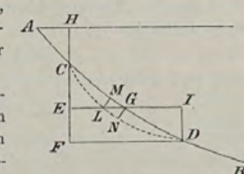

Fig. 41.

Jakob hat allein den Grundgedanken deutlich ausgesprochen, von welchem die Auffindung der Curve des kürzesten Falles und so mancher anderen abhängt, und deshalb verdient sein Aufsatz mehr als die anderen, dass man darüber berichte. Jener Grundgedanke besteht darin, dass eine Curve, welche als Ganzes ein Maximum oder Minimum darstellt, auch in ihren noch so kleinen Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen muss. Auf die Aufgabe der Brachistochrone an-

[1]) Leibniz V, 331—336. [2]) Ebenda III, 288, 290—295, 298, 302—309. [3]) *si operam hanc in se reciperet.* [4]) *Opuscula Newtoni* I, 289. [5]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 199—200.

gewandt, heisst dieses, dass, wenn (Figur 41) $ACMGDB$ die Brachistochrone ist, ein unendlich kleines Stück $CMGD$ derselben in kürzerer Zeit durchfallen werden muss, als das Curvenstückchen einer anderen Curve, welche in endlicher Entfernung von der ersteren gleichfalls von C nach D verläuft. Die übrigen Bestandtheile der Figur sind die Horizontale AH mit ihren Parallelen EI und FD, senkrecht dazu HF und ID; E liegt in der Mitte zwischen C und F. Die LM und NG sind Kreisbögen, welche von C und D als Mittelpunkten aus mit CL und DG als Halbmesser beschrieben sind. Wenn die Curve $CLND$ der $CMGD$ unendlich nahe gedacht ist, so muss LG gegen EG unendlich klein sein. Nennt man nun die auf einen Weg verwandte Zeit t, mit nachfolgender Angabe des Weges, also beispielweise tCG, so wird wegen der unendlichen Nähe der beiden von C nach D führenden Wege, und nur unter dieser Bedingung, $tCG + tGD = tCL + tLD$ sein und

$$1.\quad tCG - tCL = tLD - tGD.$$

Während so unendlich kleiner Zeiträume als diejenigen sind, um die es sich handelt, ist jede Bewegung gleichförmig, und dann verhalten sich die Räume wie die Zeiten, in welchen sie durchlaufen werden, also $CE:CG = tCE:tCG$, $CE:CL = tCE:tCL$ und

$$CE:(CG - CL) = tCE:(tCG - tCL)$$

oder wegen $CL = CM$ und $CG - CL = CG - CM = MG$ auch

$$2.\quad CE:MG = tCE:(tCG - tCL).$$

Weil das bei E rechtwinklige Dreieck CEG dem bei M rechtwinkligen LMG ähnlich ist, muss

$$3.\quad MG:GL = EG:CG$$

sein, und Multiplikation von 2. und 3. liefert

$$4.\quad CE:GL = EG \cdot tCE : CG(tCG - tCL).$$

Eine abermalige Anwendung des Satzes von der gleichmässigen Bewegung liefert $EF:LD = tEF:tLD$,
$EF:GD = tEF:tGD$, $EF:(LD - DG) = tEF:(tLD - tGD)$
oder wegen $GD = ND$, $LD - GD = LD - ND = LN$ und $EF = EC$ auch

$$5.\quad EC:LN = tEF:(tLD - tGD).$$

Auch die Dreiecke LNG, GID sind einander ähnlich und deshalb

$$6.\quad LN:LG = GI:GD.$$

Die Multiplikation von 5. und 6. liefert:

$$7.\quad CE:GL = GI \cdot tEF : GD(tLD - tGD).$$

Die Proportionen 4. und 7. führen zur Folgerung

$$EG \cdot tCE : GC(tCG - tCL) = GI \cdot tEF : GD(tLD - tGD)$$

beziehungsweise zu

$$EG \cdot tCE : GI \cdot tEF = GC(tCG - tCL) : GD(tLD - tGD)$$

und unter Berücksichtigung von 1. zu

$$8.\quad EG \cdot tCE : GI \cdot tEF = GC : GD.$$

Weiter verhalten sich beim freien Fall die Zeiten, in welchen gleiche Räume zurückgelegt werden, umgekehrt wie die Quadratwurzeln der überhaupt schon zurückgelegten Räume, also

$$tCE : tEF = \frac{1}{\sqrt{HC}} : \frac{1}{\sqrt{HE}}$$

und deshalb ist

$$9.\quad EG \cdot tCE : GI \cdot tEF = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}}.$$

Jetzt zieht endlich 8. und 9. die Folgerung nach sich:

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD$$

oder die Curvenelemente stehen in einem Verhältnisse, welches zusammengesetzt ist aus dem der Abscissenelemente und dem der reciproken Quadratwurzel der Ordinate: $\frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{ds}{\sqrt{2r}}$, wobei $\sqrt{2r}$ den Proportionalitätsfactor darstellt. Diese Differentialgleichung geht aber leicht in $dx = dy\sqrt{\frac{y}{2r - y}}$ über, und das ist die Differentialgleichung der Cycloide, deren erzeugender Kreis den Halbmesser r besitzt.

Der Beantwortung der gestellten Frage fügte Jakob Bernoulli sofort seinerseits eine neue Frage hinzu, welche in der Geschichte der Mathematik den Namen der isoperimetrischen Aufgabe erhalten hat, weil es sich darum handelte, gemäss bestimmter Bedingungen eine Curve auszuwählen, deren Umfang zwischen zwei festen Punkten gegeben sei, welches letztere Verlangen naturgemäss durch unendlich viele Curven erfüllt werden kann. Die Aufgabe selbst hatte in deutscher Uebersetzung folgenden Wortlaut[1]): „Unter allen zwischen zwei festen Punkten gelegenen isoperimetrischen Curven diejenige zu finden, welche bewirkt, dass der von einer anderen Curve, deren jede Ordinate ein gewisses Vielfache oder Untervielfache der derselben Abscisse entsprechenden Ordinate oder des entsprechenden Bogens der zu suchenden Curve ist, ferner den Ordinaten ihrer Endpunkte und dem zwischen diesen gelegenen Theile der Abscissenaxe

[1]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 775.

eingeschlossene Flächenraum ein Maximum oder ein Minimum sei." Eine zweite Aufgabe verlangte diejenige Cycloide zu finden, deren Basis gegeben und längs deren ein fallender Körper in der kürzesten Zeit an eine gegebene Verticale gelangte.

Die Aufgaben sollten eine Herausforderung für Johann Bernoulli sein, und damit Niemand diese Absicht missverstehen könne, sagte Jakob ausdrücklich, es sei Jemand, für den er selbst bürge[1]), bereit dem Bruder, falls er die Aufgaben löse, 50 Imperialen auszuzahlen; nur müsse er innerhalb dreier Monate die Erklärung abgeben, dass er sich an die Aufgaben machen wolle, und vor Ende des Jahres 1697 die Auflösung auf Quadraturen zurückgeführt erreichen.

Da die Herausforderung im Mai 1697 gedruckt erschien, so war, wenn man die Verzögerungen der Versendung in Anrechnung bringt, ein volles halbes Jahr Zeit gegeben. Statt dessen nahm Johann, wie er in einem Briefe[2]) sagte, der, wiewohl er von einer Figur begleitet war, die doch erst der Herstellung bedurfte, schon im Junihefte der *Histoire des ouvrages des Savans* gedruckt erschien, nur drei Minuten in Anspruch, um die Aufgaben anzusehen, sich daran zu machen und das ganze Geheimniss zu ergründen. Er habe seine Erörterungen bereits schriftlich an Leibniz gelangen lassen, und er schlage vor, diesem grossen Mathematiker die Entscheidung zu überlassen, ob die Aufgaben durch ihn richtig gelöst seien, dann könne der Herr, welcher die 50 Imperialen als Preis ausgesetzt habe, damit herausrücken; sie sollten den Armen zu Gute kommen; würde man also Ausflüchte suchen, um der Aushändigung des Preises zu entgehen, so sei damit den Armen ein Unrecht zugefügt.

Jakob blieb diesem Briefe gegenüber stumm. Johann stellte nun auch Aufgaben, welche dem Gebiete der grössten und kleinsten Werthe angehören, im Journal des Sçavans vom 26. August 1697. Um nicht die Gegenstände allzusehr zu vermengen, gehen wir auf diese Aufgaben[3]) später ein. Am 15. October ergriff Johann abermals das Wort in einem Briefe an Varignon, der im December 1697 im Journal des Sçavans erschien[4]). Johann wiederholte hier, was er im Monate Juni gesagt hatte, fügte aber die eigentliche Auflösung bei, da er befürchten müsse, man werde ihm sonst den Einwurf machen, seine Auflösung sei nicht rechtzeitig erschienen. Die zweite Aufgabe werde durch diejenige Cycloide gelöst, welche die betreffende Verticale unter rechtem Winkel erreiche. Ihr erzeugender Kreis müsse also die doppelte Entfernung des Anfangspunktes der allen

[1]) *prodit nonnemo, pro quo caveo.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 202. [3]) Ebenda I, 204—205. [4]) Ebenda I, 206—213.

Cycloiden gemeinschaftlichen Basis vom Anfangspunkte der Verticalen zum Umfange haben. Wir schalten hier ein, dass an diese Auflösung niemals eine tadelnde Kritik angelegt wurde, sie also als durchaus zutreffend stillschweigend anerkannt worden ist. Die erste isoperimetrische Aufgabe beantwortete Johann dahin, dass wenn (Figur 42) $PF = y$ die Ordinate der gesuchten Curve BFN ist, welche zur Abscisse x gehört, wenn $PZ = y^n$ die zu der gleichen Abscisse gehörende Ordinate derjenigen Curve ist, welche das Flächenmaximum oder Minimum hervorbringen soll, wenn a eine als Einheit gewählte beliebige Strecke ist, aldann die Gleichung der BFN als

$$y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$$

gefunden werde. Man könne, fuhr er fort, die Aufgabe viel allgemeiner fassen, so dass PZ nicht die $n$te Potenz von PF sei, sondern in irgend einem Abhängigkeitsverhältnisse dazu stehe. Dann werde die gesuchte Gleichung $y = \int \frac{b\,dx}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, wobei $b = \int \frac{PZ \cdot dx}{x}$ bedeute. Er ging dann mit wenigen Worten auch auf den Fall ein, dass PZ nicht von PF, sondern von dem Bogen BF abhänge.

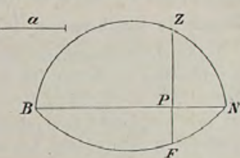

Fig. 42.

Jakob rückte hierauf eine kurze Bemerkung[1]) in das Journal des Sçavans vom 17. Februar 1698 ein. Die gegebene Auflösung der Hauptaufgabe, nämlich der von den isoperimetrischen Curven, sei der Wahrheit nicht ganz entsprechend[2]). Er verpflichte sich dem gegenüber zu drei Leistungen: 1. die Analysis, welche seinen Bruder zu seiner Lösung geführt habe, zu errathen; 2. die sich in ihr vorfindenden Widersprüche aufzudecken, falls sie veröffentlicht würde; 3. die wahre, vollständige Lösung der Aufgabe zu liefern. Wolle jemand eine Wette darauf eingehen und auf jede dieser drei Leistungen einen Einsatz wagen, so sei er bereit, die gleiche, beziehungsweise doppelte, beziehungsweise dreifache Summe zu zahlen, je nach den der Reihe nach genannten Punkten, auf welche die Wette sich beziehe.

Das Journal des Sçavans vom 21. April 1698 brachte Johanns Erwiderung[3]). Er fragt, warum denn der unbekannte Herr Jemand[4]) die ursprünglich zugesagten 50 Imperialen nicht an Leibniz gelangen lasse und diesen als Richter anerkenne, wie er — Johann — es vorgeschlagen habe? Im Uebrigen sei bei der Eile seiner ersten Ver-

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 214. [2]) *pas entièrement conforme à la vérité.* [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 215—220. [4]) *Nonnemo.*

öffentlichung ein unbedeutender Fehler vorgekommen, nicht bei der eigentlich gestellten Aufgabe mit $PZ = PF^n$, sondern bei der aus freien Stücken hinzugefügten Verallgemeinerung, zu welcher er keineswegs verpflichtet gewesen sei. Dort sei statt $b = \int \frac{PZdx}{x}$ einfach $b = PZ$ zu setzen, es sei also $PF = \int \frac{PZdx}{\sqrt{a^2 - PZ^2}}$. Solle PZ von dem Bogen BF, der t heissen möge, abhängig gemacht werden, und sei v irgendwie von t abhängig, so habe sich ihm bei weiterem Nachdenken die Gleichung $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ ergeben.

Die Zeitungsnummern des Journal des Sçavans fuhren fort, Schriftstücke der beiden Brüder zu bringen. Am 26. Mai 1698 fragt Jakob[1]), ob die Erklärung vom 21. April genau so gemeint sei, wie sie sich abgedruckt finde, damit später keine Uebereilung mehr vorgeschützt werden könne. Am 23. Juni behauptet Johann[2]), die beiden ursprünglich gestellten Aufgaben, die isoperimetrische unter der Bedingung, $PZ = PF^n$ ebensowohl als die von dem Falle durch die Cycloiden, richtig gelöst zu haben, und zu mehr sei er nicht verpflichtet gewesen. Am 4. August sagt Jakob[3]), in der ursprünglichen Fassung der isoperimetrischen Aufgabe sei die Abhängigkeit der Ordinate PZ von dem Bogen BF mit enthalten gewesen, dieser Theil der Aufgabe müsse also mit erledigt werden, und deshalb frage er genauer, ob die Gleichung $dv = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ nicht etwa mit einem Druckfehler behaftet sei. Zugleich gibt er sein Einverständniss zu erkennen, dass Leibniz oder auch de l'Hospital und Newton als Richter dienen sollten, vorausgesetzt, dass sie ihr Urtheil erst zu fällen hätten, nachdem er seine Gründe sämmtlich auseinandergesetzt haben werde. In ebenderselben Nummer unmittelbar vor Jakobs Anfrage ist ein Brief[4]) desselben an Varignon abgedruckt, der gleichfalls mit dem Streite zusammenhängt. Jakob spricht nämlich hier Vermuthungen über Fehlschlüsse aus, welche sich Johann bei seiner Behandlung der isoperimetrischen Aufgabe wahrscheinlich habe zu Schulden kommen lassen, und die ihn durch Wiederholung derselben zu einem theilweise richtigen Ergebnisse führen konnten; so sei z. B. in dem Schlusse „Jeder Mensch ist von Stein, jeder Kiesel ist ein Mensch, also ist jeder Kiesel ein Stein" der Schlusssatz wahr, weil die Falschheit des Vordersatzes durch die des Nachsatzes aufgehoben werde. Die Nummer vom 8. December bringt wieder eine

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 220. [2]) Ebenda I, 221—222. [3]) Ebenda I, 230. [4]) Ebenda I, 222—229.

Zuschrift von Johann[1]) mit immer verletzenderen Aeusserungen gegen Jakob. Von Thatsächlichem ist nur hervorzuheben, dass Johann die Gleichung $dv = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ ausdrücklich wiederholt, wenn auch ohne besonders zu betonen, dass sie richtig sei, dass er sich freut, dass Jakob nunmehr Richter anerkenne, und dass er folgenden Vorschlag macht: in erster Linie solle Leibniz sein Urtheil abgeben; falle es gegen ihn, Johann, aus, so werde er sich dabei beruhigen; gegen ein Urtheil zu seinen Gunsten aber gestatte er Jakob die Berufung an den Marquis de l'Hospital und Newton.

Nun war endlich der Augenblick gekommen, dass Jakob Bernoulli seine eigene Auflösung der isoperimetrischen Aufgabe enthüllte; aber zugleich ist damit für uns der Augenblick gekommen, unsere Darstellung zu unterbrechen. Jakobs Abhandlungen erschienen in den A. E. von 1700 und 1701. Johanns Gegenlösung ist in den Veröffentlichungen der Pariser Academie der Wissenschaften von 1706 enthalten. Sein Eingeständniss eines begangenen Irrthum hat er ebendort erst 1718 gegeben. Das sind lauter Dinge, die gemeinsam berichtet werden müssen, lauter Jahreszahlen, die auf unseren XVII. Abschnitt verweisen. Dort werden wir zu Beginn des 100. Kapitels an das jetzt Unterbrochene anzuknüpfen haben.

Wir haben (S. 238) versprochen, auf die Aufgaben zurückzukommen, welche Johann Bernoulli im Journal des Sçavans vom 26. August 1697 den Mathematikern stellte. Es waren deren sechs, welche alle[2]) gewisse Minima aufzufinden verlangten oder an Minimalaufgaben anknüpften. Die wichtigste derselben war als erste an die Spitze gestellt, die Aufgabe: die kürzeste Linie auf einer nach aussen gewölbten Oberfläche zu finden[3]), und zwar wird die Auffindung in geometrischer Weise verlangt. Für Kugel, Kegel und Cylinder sei dieses sehr leicht, schwierig dagegen für Conoide und Sphäroide, d. h. also in unserer heutigen Sprache für Umdrehungsflächen zweiten Grades. Johann schlug als Beispiel das Umdrehungsparaboloid vor, bei welchem aber die beiden durch eine kürzeste Linie zu verbindenden Punkte nicht derselben Meridiancurve angehören dürfen, weil diese sonst selbst die gesuchte kürzeste Linie sei. Johann hatte mit seiner Aufgabe offenbar Jakob in Verlegenheit bringen wollen, denn er stellte sie den Mathematikern, welche da glauben Methoden zu besitzen, welche für alle dergleichen

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 231—239. [2]) Ebenda I, 204—205. [3]) P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. Berichte der mathem.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Sitzung vom 3. Juli 1893.

Aufgaben ausreichen[1]). Jakob nahm den hingeworfenen Handschuh auf. Im Maihefte 1698 der A. E. veröffentlichte er drei zusammenhängende Aufsätze[2]), deren Inhalt in grösster Kürze angedeutet werden mag. Der erste Aufsatz behandelt den Fall längs einer Cycloide bis zum Treffen einer Verticalen, der von Johann bereits (S. 238) erledigt worden war. Eine Stelle kommt hier vor, welche bemerkt zu werden verdient[3]): „Ich habe bei allen solchen Aufgaben, wo es darauf ankommt, von unendlich vielen Curven der ähnlichen Natur eine herauszufinden, welche irgend eine Function am besten erfülle, bemerkt, dass von zwei Curven, deren Durchschnitt einen der gesuchten Punkte darstellt, die eine immer die Functionslinie ist, wie ich sie nenne, welche bald transcendent, bald algebraisch sein kann, während die andere stets algebraisch ist.“ Das ist die Stelle, auf welche wir (S. 216) zum Voraus hingewiesen haben, als wir von der Einführung des Kunstausdruckes Function sprachen. Der dritte Aufsatz behandelt die von Johann, dem Erfinder des Gedankens der Trajectorien (S. 231), gestellte Aufgabe, diejenige Curve zu finden, welche eine unendliche Schaar von logarithmischen Linien rechtwinklig schneide. Der mittlere Aufsatz wendet sich zur Aufgabe der kürzesten Linien und löst sie für jeden Umdrehungskörper durch synthetische Betrachtungen, deren Grundgedanke darin besteht, dass jeder Punkt der kürzesten Linie zugleich auch Punkt einer Meridiancurve sei. Das Integral der Bogenlänge der kürzesten Linie ist beigefügt, aber nicht eigentlich abgeleitet. Die Aufgabe, meint Jakob, führe meistens auf Transcendente, und daher könne von einer geometrischen Ausführung, wie Johann sie verlangt habe, eigentlich nicht die Rede sein, wenn man nicht, der sonstigen Uebung widersprechend, schon solche Auflösungen geometrisch nennen wolle, welche eine Aufgabe bis auf Quadraturen zurückführen. Das war eine kleine Bosheit, wie sie im Charakter der wegen der isoperimetrischen Aufgabe zu derselben Zeit gewechselten Schriftstücke lag, und kleine Bosheiten, allerdings feiner ausgesprochen, finden sich auch in einer Erwiderung Johanns[4]) im Octoberhefte 1698 der A. E. Die Auflösungen, welche Jakob gegeben hatte, werden gebilligt, sie seien in Uebereinstimmung mit denjenigen, welche der Aufgabesteller selbst besitze, nur liessen

[1]) *aux Géomètres qui croyent avoir des méthodes pour toutes les questions de cette nature.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 253—266. [3]) Ebenda I, 255: *Observabam in omnibus ejusmodi quaestionibus, ubi ex infinitis Curvis similibus aliqua invenienda est, quae functionem quampiam optime praestet, quod duarum Curvarum, quarum intersectione quaesitum determinatur, altera semper possit esse* **Linea**, *quam voco,* **Functionis**, *adeoque nunc mechanica, nunc algebraica, um alte draperpetuo est algebraica.* [4]) Ebenda I, 262—271.

sie durchweg Allgemeinheit vermissen. Es seien eben besondere Auflösungen besonderer Fälle, über welche nie hinausgegangen sei. Das Wort geometrisch verstehe er natürlich in dem erweiterten Leibnizischen Sinne, dass schon die Zurückführung auf Quadraturen als genügende Auflösung erachtet werde. Er habe es bei der Aufgabestellung überhaupt nur deshalb gebraucht, um die rein mechanische Auflösung auszuschliessen, die darin bestehe, dass man auf der Oberfläche einen Faden durch die beiden mit einander zu verbindenden Punkte lege und fest anziehe, wodurch er von selbst die Gestalt der kürzestmöglichen Linie annehme.

War, wird man fragen, Johann Bernoulli im October 1698 berechtigt, die mangelnde Allgemeinheit in Jakobs Behandlung der Aufgabe der kürzesten Linien zu rügen? War er selbst, der doch die Aufgabe in der engen auf Conoide und Sphäroide beschränkten Form gestellt hatte, in Besitz einer allgemeinen Behandlung? Sein Briefwechsel mit Leibniz gibt darüber Auskunft.

Am 4. December 1697 schickte Johann Bernoulli an Leibniz einen Ausschnitt des Journal des Sçavans mit der dort gestellten Aufgabe der kürzesten Linien. De l'Hospital sei mit derselben nicht fertig geworden, er aber habe sie auf eine Differentialgleichung zurückgeführt, und sofern die Veränderlichen in ihr getrennt werden könnten, sei die Sache erledigt[1]). Leibniz antwortete am 17. December, er habe schon früher über die kürzesten Linien auf gegebenen Oberflächen nachgedacht, aber ohne Befriedigung. Bei Gelegenheit der Brachistochrone habe er die Verwandtschaft beider Aufgaben erkannt, und eine Methode erfunden, die er aber nie erprobt habe[2]). Als im Maiheft 1698 der A. E. die Arbeit Jakobs, über die wir (S. 242) berichtet haben, erschienen war, machte Leibniz am 29. Juli Johann darauf aufmerksam[3]) und bemerkte zugleich, wie er selbst früher die Behandlung der Frage sich vorgestellt habe. In der Ebene seien Gerade, auf der Kugel Kreisbögen die kürzesten Linien. Nun denke man sich die gegebene Oberfläche aus ebenen oder auch aus kugelförmigen Elementen zusammengesetzt. In zwei sehr benachbarten Oberflächepunkten R, S seien solche Elemente vorhanden, welche einander schneiden. Ihrer Durchschnittslinie müsse ein Punkt T angehören, der $RT + TS$ zu einem Minimum mache. Könne man die Lage von T durch eine Gleichung bestimmen, so sei diese die Gleichung der kürzesten Linie. Gegen Ende August antwortete Johann[4]).

[1]) Leibniz III, 470: *Hospitalius de eo desperavit; Ego vero illud reduxi ad aequationem differentialem, quae, si separentur indeterminatae, construi poterit.* [2]) Ebenda III, 475: *Sed ad praxin methodi non accessi.* [3]) Ebenda III, 526. [4]) Ebenda III, 532.

Was Leibniz als Grundlage einer Methode vorschlage, sei ja ganz richtig und habe ihm selbst sich auch zunächst dargeboten, aber es führe nicht zur Erzielung der kürzesten Linien auf der Oberfläche. Er habe dagegen eine andere Methode gefunden, welche sich darauf gründe, dass die Ebene durch drei consecutive Punkte einer kürzesten Linie senkrecht zur Berührungsebene an die Oberfläche in einem jener drei Punkte stehe[1]). Mit Hilfe dieses Satzes habe er die Gleichung der kürzesten Linie für alle Oberflächen ganz allgemein dargestellt, welche in besonderen Fällen, wie bei Conoiden und Sphäroiden, leicht zur Construction führen. Leibniz lobte in seiner sofortigen Antwort[2]) den Gedanken, der zur allgemeinen Gleichung, wenigstens zur allgemeinen Differentialgleichung führen werde. Damit hört der Briefwechsel über die kürzesten Linien auf, abgesehen von einer kurzen Bemerkung Johanns in einem im September geschriebenen Briefe, er habe eine Antwort auf Jakobs Auflösung an die A. E. abgehen lassen, womit jedenfalls der Aufsatz im Octoberhefte 1698 der A. E. gemeint war.

Es steht also fest, dass Johann Bernoulli damals wirklich die Haupteigenschaft der kürzesten Linien kannte. Wie die allgemeine Gleichung hiess, zu welcher er gelangt war, ob sie der Hauptsache nach mit den Ergebnissen der Abhandlung übereinstimmte, welche Johann Ende 1728 an Professor Klingenstierna von Upsala mitgetheilt haben will, welche er aber erst 1742 in der Gesammtausgabe seiner Werke zum Drucke gab[3]), dürfte kaum zu entscheiden sein. Wäre es der Fall, so wäre damit allerdings der Beweis erbracht[4]), dass Johann Bernoulli schon 1698 Oberflächengleichungen mit Hilfe von drei Raumcoordinaten aufzustellen und zu behandeln wusste. Wir kommen auch hierauf im XVII. Abschnitte wieder zurück.

Wir haben (S. 222—225) von dem persönlichen Verkehre, der zwischen Johann Bernoulli und dem Marquis de l'Hospital 1692 in Paris stattfand, und von einem Buche des letzteren gesprochen, welches, wenn es auch nicht als geistiger Diebstahl an dem ersteren aufzufassen ist (eine Meinung, welche heute widerlegt erscheint), jedenfalls unter seinem Einflusse entstanden ist. Die *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des Lignes courbes* ist zuerst 1696, dann (nach des Verfassers 1704 erfolgtem Tode) in wiederholten Auflagen 1716, 1720, 1768 gedruckt worden. Der Erfolg des Buches

[1]) *quod planum transiens per tria quaelibet puncta proxima lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum.* [2]) Leibniz III, 555. [3]) Joh. Bernoulli *Opera* IV, 108—128. [4]) Stäckel, l. c. S. 448.

ist um so begreiflicher, als es das erste, lange Zeit das einzige, fast noch längere Zeit das am leichtesten lesbare Lehrbuch der Differentialrechnung war. Die Differenzen — denn nur dieses Wort wird angewandt — sind als unendlich kleine Grössen erklärt, welche ebenso gegen Endliches verschwinden, wie ihre höheren Potenzen gegen sie selbst. Sie entstehen, indem ein früherer Zustand von einem nachfolgenden abgezogen wird, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass bei Constanten, welche durch einen der ersten Buchstaben des Alphabetes bezeichnet werden, während die letzten für die Variablen aufbewahrt bleiben[1]), der frühere Zustand mit dem nachfolgenden genau übereinstimmt. Die Differenz von $a+x+y-z$ ist also

$$(a+x+dx+y+dy-z-dz)-(a+x+y-z)=dx+dy-dz.$$

Die Differenz von xy ist

$$(x+dx)(y+dy)-xy=xdy+ydx+dxdy=xdy+ydx$$

wegen des Verschwinden von $dxdy$ neben ersten Potenzen von dx und dy. Die Differenz von xyz findet man als

$$xydz+xzdy+yzdx,$$

indem man zunächst xy als einfache Variable betrachtet u. s. w. Ist $z=y=x$, so erhält man die Differenz von x^3, nämlich

$$xxdx+xxdx+xxdx=3x^2dx$$

und ähnlich die Differenz von x^n als $nx^{n-1}dx$, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Um die Differenz von $\frac{x}{y}=z$ zu finden, geht man zur Gleichung

$$x=yz,\quad dx=zdy+ydz$$

über, woraus

$$dz=\frac{dx-zdy}{y}=\frac{ydx-xdy}{y^2}.$$

Ganz ähnlich ist die Ableitung der Differenz von $x^n=z$, wenn n keine ganze positive Zahl ist. Multiplikation oder Potenzirung führt zu einer neuen Gleichung, in welcher nur ganze positive Exponenten vorkommen, und diese zu differentiiren hat man schon gelernt. Das Differentiiren algebraischer Functionen ist damit vollständig erledigt, aber das Differentiiren irgend welcher Transcendenten wird nicht gelehrt. De l'Hospital kümmert sich weder um Logarithmen noch um Exponentialgrössen, weder um trigonometrische noch um cyclometrische Functionen, welche hier in Frage kommen könnten.

[1]) *Quantités constantes, quantités variables.*

Der ganze weitere Inhalt des Lehrbuches besteht vielmehr aus Anwendungen des Differentiirens auf Curven, die theils algebraisch sind, theils so behandelt werden, dass man wenigstens nur mit algebraischen Gleichungen zu thun hat. Der Punkt der Curve, an welchen eine Berührungslinie gelegt wird, heisst regelmässig M, der Fusspunkt seiner durch y bezeichneten Ordinate [1]) heisst P, der Fusspunkt der Berührungslinie T. Die Abscisse x wird mit ins Französische übersetztem Namen *la coupée* genannt [2]). Heute klingt uns allerdings diese Uebersetzung ebenso fremdartig wie die von *cercle baisant* für den Osculationskreis [3]). Im Laufe der Untersuchungen kommen sehr verschiedene Curvengattungen vor: solche, welche mit Benutzung mehrerer Brennpunkte entstanden sind [4]), Brennlinien durch Zurückwerfung [5]), ebensolche durch Brechung [6]), einhüllende Linien [7]), Parallelcurven [8]) u. s. w., lauter Entstehungsweisen, welche theils an Tschirnhaus, theils an Leibniz uns erinnern, und an den letzteren denken wir auch sofort, wenn die Abscissen nicht auf einer geraden Linie sondern auf einer Curve abgenommen werden [9]). Bei der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen, welche einen ganzen Abschnitt [10]) einnimmt, ist besonders hervorgehoben [11]), die Differenz der Ordinate müsse vor und nach dem Punkte, in welchem das Maximum oder Minimum eintritt, verschiedenen Zeichens sein, aber die Veränderung des Zeichens müsse nicht grade den Durchgang durch Null voraussetzen, sie könne auch bei dem Durchgang durch das Unendlichgrosse entstehen, was nicht so zu verstehen ist, als wolle de l'Hospital behaupten, die definitionsgemäss unendlich kleinen Differenzen könnten plötzlich unendlich gross werden, sondern Differenz bedeutet hier so viel als Differentialquotient, wenn etwa dx als constant, d. h. als Einheit betrachtet wird. Das ist einer jener Gegenstände, über welche, wie wir wissen (S. 231), de l'Hospital 1695 mit Johann Bernoulli in Briefwechsel stand. War er damals, wie nicht bezweifelt werden kann, für beide Briefschreiber neu, so kann er unmöglich 1692 in den Lehrvorträgen Johann Bernoullis vorgekommen sein, und wir haben hier eine Stelle, die unbedingt später hinzugearbeitet, den erhobenen Vorwurf einfachen Abdruckes des alten Heftes vernichten hilft. Noch Anderes entstammt ersichtlich dem erwähnten Briefwechsel von 1695, wenn wir auch, da jener Briefwechsel leider nicht veröffentlicht ist, nicht immer im Stande sind zu sagen, was jedem der beiden

[1]) *appliquée.* [2]) *Analyse des infiniment petits* Nr. 9, pag. 11. [3]) Ebenda Nr. 203, pag. 174. [4]) Ebenda Nr. 32, pag. 27. [5]) Ebenda Nr. 110, pag. 104. [6]) Ebenda Nr. 132, pag. 120. [7]) Ebenda Nr. 146, pag. 131. [8]) Ebenda Nr. 167, pag. 147. [9]) Ebenda Nr. 15, pag. 16. [10]) Ebenda Nr. 41—54. [11]) Ebenda Nr. 46, pag. 42.

sich wissenschaftlich Unterhaltenden angehörte. Die Benennung *point de rebroussement* [1]) für den Rückkehrpunkt hat Bernoulli Leibniz gegenüber für sich in Anspruch genommen. Wir haben keinen Grund diesen Ausspruch zu verdächtigen. Dann war zwischen beiden von dem Krümmungshalbmesser in einem Wendepunkte die Rede, und dass dieser bald ∞, bald 0 sei. Dieser Gegenstand ist in der Analyse des infiniment petits des Weiteren erörtert [2]), und zwar im Zusammenhange mit der Evolute. Die Curve BAC (Figur 43) habe in A einen Wendepunkt, dessen Berührungslinie in der Figur gezeichnet ist, und ebendort den Krümmungshalbmesser von unendlicher Grösse. Nun denke man zur Curve BAC als Evolute die DAE als Evolvente derart gezeichnet, dass A mit A zusammenfallend einander so entsprechen, dass der Punkt A, sofern er der DE angehört, seinen Krümmungsmittelpunkt in A, als einem Punkte der BC, besitzt. Dann hat die DE in A den Krümmungshalbmesser $AA = 0$. Zugleich hat sie aber in A einen Wendepunkt. Der CA als Evolute gehört die EA mit der gegen C gekehrten Hohlseite als Evolvente an, der BA als Evolute die mit der Hohlseite gegen B gekehrte Evolvente DA. In A müssen also

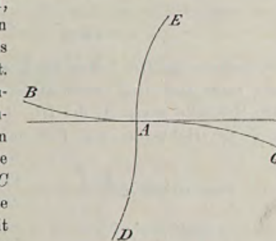

Fig. 43.

die zwei entgegengesetzten Wölbungsarten der EA und DA in einander übergehen, d. h. A ist Wendepunkt von DE. Es wird dabei bemerkt, auch der Zeichenwechsel des zweiten Differentials könne durch ∞ anstatt durch 0 vermittelt werden. Als Beispiele von Curven mit Wendepunkten, in welchen das zweite Differential der Ordinate durch ∞ hindurch das Vorzeichen ändert, werden $a^2x = y^3$ und $a^2x^3 = y^5$ genannt. Für beide Curven sei der Coordinatenanfangspunkt Wendepunkt. In der erstgenannten Curve sei dort der Krümmungshalbmesser ∞, in der zweiten sei er 0. Die Rechnung selbst ist bei de l'Hospital nicht geführt, allein es ist nicht schwer, sich von der Richtigkeit seiner Behauptung zu überzeugen. Jakob Bernoulli hat im Septemberhefte 1697 der A. E. den gleichen Gegenstand in Erörterung genommen [3]) und dadurch zu erklären gesucht, dass er statt der Curve $a^2x^3 = y^5$ zunächst $a^2x^3 = y^5 - b^2y^3$ be-

[1]) *Analyse des infiniment petits* Nr. 65, pag. 59. [2]) Ebenda Nr. 82, pag. 80 und Nr. 88, pag. 86. [3]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 779—782.

trachtete und dann die Constante b zum Verschwinden brachte. Durch Inanspruchnahme der Evolution gelangte de l'Hospital aber auch zu einer weiteren Bemerkung, die, wie er sagt, bisher noch nicht gemacht worden sei[1]). Die Curve BAC (Figur 44) habe wieder in A einen Wendepunkt und werde als Evolute behandelt. Zum Curvenstücke BA gehört die Evolvente EF, zum Stücke AD die ED, zum Stücke DC endlich die DG.

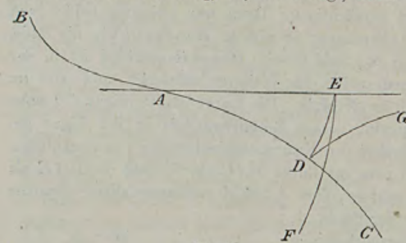

Fig. 44.

Nun ist E ebenso wie D ein Rückkehrpunkt, aber beide sind doch verschiedener Natur. Während in D die DE ihre Hohlseite gegen A, die DG ihre Hohlseite gegen C kehrt, sind in E die Hohlseiten von ED und von EF gegen A (beziehungsweise B) gekehrt. Sollten wir de l'Hospital noch immer vom Verdachte vollständigen Diebstahles reinigen müssen, so ist grade dieser Rückkehrpunkt zweiter Art, der Schnabel, wie man ihn wohl im Gegensatze zur Spitze genannt hat, geeignet, seine wenigstens zeitweilige Selbständigkeit zu erweisen.

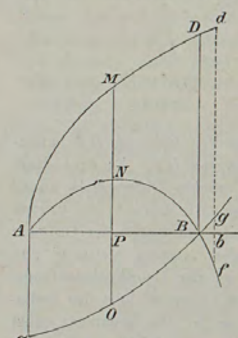

Fig. 45.

Wir haben bei noch einer Aufgabe zu verweilen, welche in der Analyse des infiniment petits zuerst an die Oeffentlichkeit trat[2]), bei der Auswerthung unbestimmter Formen, genauer gesagt bei der Auswerthung von Brüchen, deren Zähler und Nenner durch die Annahme $x = a$ in Null übergehen. Jener Bruch $= y$ gesetzt, mag (Figur 45) die Gleichung einer Curve AMD sein, während ANB, COB die Curven sind, deren Ordinaten der Zähler und der Nenner

---

[1]) *Analyse des infiniment petits* Nr. 109, pag. 102: *que personne, que je sçache, n'a encore considéré.* [2]) Ebenda Nr. 163, pag. 145.

jenes Bruches sind. Als Einheit der Zeichnung diene $AB = a$, so dass z. B. $\frac{MP}{AB} = \frac{NP}{OP}$. Man sucht also DB unter der in der Figur zur Anschauung gebrachten Annahme, dass die beiden Curven ANB, COB sich in B auf der Abscissenaxe bei

$$x = a = AB$$

schneiden. De l'Hospital schreibt vor, man solle zu dem benachbarten Punkte b der Abscissenaxe übergehen. In ihm sind die Ordinaten bf, bg die Differenzen der Ordinaten der Zähler- und der Nennercurve, und deren Quotient liefert db, welches von DB sich nicht angebbar unterscheidet. Dadurch ist aber die Regel begründet, welche darin besteht, den Zähler und den Nenner des in unbestimmter Form erscheinenden Bruches jeden für sich zu differenziren und dann erst $x = a$ einzusetzen. Ist etwa

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{a^3x}},$$

so findet man

$$\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2dx}{3\sqrt[3]{a^2x}}$$

als Differenz des Zählers, $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ als Differenz des Nenners, und diese dividirt man durcheinander unter Einsetzung von $x = a$. Das gibt

$$-\frac{4a}{3}dx : -\frac{3}{4}dx = \frac{16}{9}a.$$

In einem zweiten Beispiele $y = \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}$ findet man $y = 2a$, wenn $x = a$. Hier sei, setzt de l'Hospital hinzu, die Differentialrechnung zu umgehen. Aus der für y gegebenen Gleichung folge unter Rationalisirung derselben:

$$a^2x^2 + 2a^2xy - axy^2 - 2a^3x + a^4 + a^2y^2 - 2a^3y = 0.$$

Diese Gleichung durch $x - a$ dividirt, liefere

$$a^2x - a^3 + 2a^2y - ay^2 = 0,$$

und hier $x = a$ eingesetzt, bringe $y = 2a$ hervor.

Kaum war de l'Hospital im Jahre 1704 gestorben, so veröffentlichte Johann Bernoulli[1]) im Augusthefte 1704 der A. E. einen Aufsatz, in welchem er die Methode jener Auswerthung ebenso wie

---

[1]) Joh. Bernoulli, *Opera* I, 401—405. Darin die Worte: *Marchioni Hospitalio cujus nunc suprema fata lugemus.*

das bestimmte Beispiel für sich in Anspruch nahm. Letzteres habe er vor etwa zehn Jahren[1]) de l'Hospital und anderen französischen Mathematikern vorgelegt, welche nichts damit anzufangen wussten, bevor er ihnen den Weg gezeigt habe. Dann habe de l'Hospital die Regel neben Anderem, was Bernoulli angehörte[2]), in der Analyse des infiniment petits veröffentlicht. Ganz vollkommen, setzte Bernoulli hinzu, sei die Regel jedoch nicht, denn sie führe unter Umständen zu einem neuen Bruche, den $x = a$ abermals in $\frac{0}{0}$ übergehen lasse; dann müsse man eben die schon benutzte Methode zum zweiten Male anwenden. So werde

$$y = \frac{a\sqrt[3]{4a^3 + 4x^3} - ax - a^2}{\sqrt{2a^2 + 2x^2} - x - a}$$

erst nach wiederholter Differentiation des Zählers und des Nenners zu $2a$.

Erinnern wir uns an das, was (S. 225) über die zwischen Johann Bernoulli und de l'Hospital gewechselten Briefe berichtet wurde, so kann man nicht sagen, dass die Ausdrucksweise, deren Ersterer sich jetzt mit Bezug auf einen Verstorbenen bediente, während er, so lange de l'Hospital lebte, acht Jahre lang geschwiegen hatte, sehr hübsch gewesen sei, und in Frankreich verübelte man ihm sein Benehmen in hohem Grade. Besonders erzürnt war Josef Saurin (1659—1737), ein Freund des Verstorbenen, und Varignon schrieb dieses auch an Johann Bernoulli, der seinerseits unter dem 11. Juli 1705 Leibniz davon Mittheilung machte[3]). Aber, sagte er, an der nachträglichen Abfertigung trage Saurin selbst die Schuld, der die angeblich de l'Hospitalsche Methode über alle Gebühr gepriesen habe. Das habe er erst ganz neuerdings erfahren und sich selbstverständlich nicht gefallen lassen.

Diese wenigen Bemerkungen knüpften sich allzunatürlich an den Bericht über die Analyse des infiniment petits an, als dass wir sie nicht hätten anschliessen sollen. Nun kehren wir aber bis vor die Zeit der Herausgabe dieses Lehrbuches, bis in das Jahr 1693 zurück, in welchem Auszüge von Briefen Newtons an Wallis durch diesen in der Ausgabe seiner eigenen Werke zum Drucke gegeben wurden[4]), in denen die erste Enthüllung über die Fluxionsrechnung stattfand.

Das Datum der Briefe[5]) ist vom 27. August und 17. September

[1]) *ante hos decem circiter annos.* [2]) *juxta alia mea.* [3]) Leibniz III, 765. [4]) Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge* pag. 62. [5]) *Opuscula Newtoni* I, 359—370.

1692. Sie sind also geschrieben, nachdem Leibniz den Algorithmus der Differentialrechnung 1684, den der Integralrechnung 1686 herausgegeben hatte, nachdem Craig 1685 der bewundernde Dolmetscher Leibnizischer Ideen in England geworden war, nachdem Jakob Bernoulli in einer grossen Reihe von Aufsätzen in den A. E. von 1691 und den ersten Monaten 1692 seine Gewandtheit in der neuen Methode und dadurch zugleich deren grosse Verwendbarkeit offenbart hatte.

In jenen Briefaufzügen also, welche Wallis angefertigt hat, und in denen Newton immer in der dritten Person redend vorkommt, so dass man nicht einmal mit aller Bestimmtheit sagen kann, Newtons Meinung sei überall genau richtig ausgesprochen, heisst es, der Kern der Newtonschen Lehre sei der Satz: Data aequatione fluentes quotcunque quantitates involvente fluxiones invenire et viceversa, jener Satz also, der im zweiten Briefe an Leibniz (S. 185) als Anagramm enthalten war. Unter Fluenten verstehe Newton unbestimmte Grössen, d. h. solche, welche bei der Erzeugung von Curven durch eine Ortsbewegung beständig vermehrt oder vermindert werden, und unter deren Fluxion verstehe er die Geschwindigkeit der Zu- oder Abnahme[1]). Das sei, wie alles Neue, beim ersten Anblick etwas schwierig zu verstehen, aber doch halte Newton dafür, ihr Begreifen sei immer noch leichter als das von Augenblicksveränderungen[2]) oder kleinsten Theilen oder unendlich kleinen Differenzen, weil Entstehung von Figuren und Grössen durch stetige Bewegung naturgemässer sei als die aus Theilen, doch vernachlässige er auch die Theorie solcher Theile keineswegs, sofern sie zur Abkürzung des Geschäftes diene, oder es durchsichtiger mache, oder zur Erforschung der Verhältnisse der Fluxionen unter einander führe. Für eine Fluente, z. B. für die Abscisse einer Curve nehme er gleichmässige Vermehrung in Anspruch und setze deren Fluxion der Einheit gleich, die Fluxionen anderer Fluenten v, x, y, z bezeichne er durch punktirte Buchstaben $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Die Fluxionen selbst verändern sich aber auch, und die Geschwindigkeit ihrer Veränderungen können als ihre Fluxionen betrachtet und durch abermalige Punktirung bezeichnet werden. So entstehe $\ddot{v}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, und nun sei ersichtlich, was unter $\dddot{v}$, unter $\ddddot{v}$ u. s. w. zu verstehen sei. Die erste Aufgabe, die Fluxion einer Fluente zu finden, wird nun gelöst und als Grundlage genommen, dass die Fluxion von x^n als $nx^{n-1}\dot{x}$ sich darstelle, wenn n ganz und positiv sei. Der Beweis wird geführt, indem eine unendlich kleine Grösse o gewählt

[1]) *Per fluentes quantitates intelligit indeterminatas, id est, quae in generatione curvarum per motum localem perpetuo augentur vel diminuuntur; et per earum fluxionem intelligit celeritatem incrementi vel decrementi.* [2]) *momenta.*

wird, welche mit den Fluxionen $\dot z, \dot y, \dot x$ vervielfacht die Augenblicksveränderungen[1]) der Fluenten x, y, z darstellen. Dann geht x^n über in

$$(x + o\dot x)^n = x^n + nx^{n-1}o\dot x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}o^2\dot x^2 + \cdots$$

und die Fluxion der x^n wird nach Division durch o als

$$nx^{n-1}\dot x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}o\dot x^2 + \cdots$$

erkannt oder als $nx^{n-1}\dot x$, indem die Glieder, welche das unendlich kleine o noch enthalten, wegfallen. Ist n nicht ganz und positiv, so werden die Substitutionen gelehrt, von welchen schon an zu vielen Stellen dieses Bandes die Rede war, als dass wir vielfach Gesagtes nochmals wiederholten.

Wallis berichtet dann weiter über die zweite in jenem Newtonschen Briefe von 1676 anagrammatisch enthalten gewesene Stelle (S. 185), welche eine doppelte Art der Auflösung der Aufgabe, von der Fluxion zur Fluente aufzusteigen, in Aussicht stelle. Die eine Art bestehe in einer Anwendung von Reihen mit unbestimmten Coefficienten für die Unbekannten, deren Fluxionen alsdann gebildet werden und zu einer Gleichung führen, in welcher die homologen Glieder einander aufheben, so dass die vorher unbekannten Coefficienten dadurch erkannt werden. Diese Methode sei aus den sie schildernden Worten deutlich zu verstehen. Die andere Art sei von der Gattung, welche man bei der Reihenentwicklung der einen Unbekannten einer Gleichung nach Potenzen der zweiten in der Gleichung auftretenden Unbekannten kennen gelernt habe. Die Aehnlichkeit der beiden Aufgaben leuchte ein, wenn man bedenke, dass man von einer Gleichung ausgehe, welche $y, z, \dot y, \dot z$ enthalten solle. Nun betrachte man z als einförmig veränderlich, so dass dessen Fluxion $\dot z$ als Einheit gewählt werden könne. Dann sei die Absicht, y in Gestalt einer nur z enthaltenden convergenten unendlichen Reihe[2]) kennen zu lernen. Manchmal sei dieses allerdings unmöglich, manchmal sei ein Zurechtstutzen der gegebenen Gleichung erforderlich. Wie Newton diese Methode, welche von der anderen sich eigentlich nur durch einmalige statt durch zweimalige Anwendung von Reihen mit vorläufig unbekannten Coefficienten unterscheidet, verstanden haben will, geht aus dem Beispiele

$$y^2\dot z^2 - z^2\dot z\dot y - d^2\dot z^2 + dz\dot z^2 = 0$$

hervor. Durch $\dot z = 1$ geht sie in

$$y^2 - z^2\dot y - d^2 + dz = 0$$

[1]) *incrementa momentanea.* [2]) *in serie infinita convergente quae solum z involvet.*

über, und nun nimmt man an, es sei

$$y = kz^\lambda + \cdots, \qquad \dot y = \lambda k z^{\lambda-1} + \cdots.$$

Diese Werthe in die vorher gewonnene, von $\dot z$ schon freie Gleichung eingesetzt geben

$$-d^2 + dz + k^2z^{2\lambda} + \cdots - \lambda k z^{\lambda+1} - \cdots = 0,$$

und ist $\lambda = 0$, so findet man $k = d$, d. h. man findet $y = d + p$, wo p neuerdings unbekannt ist, und $\dot y = \dot p$. Die Fluxionsgleichung geht dadurch über in

$$2dp + p^2 - z^2\dot p + dz = 0.$$

Sie setzt voraus, dass dz gegen $2dp$ sich aufhebe, d. h. dass

$$p = -\frac{z}{2} + q$$

sei, nebst

$$\dot p = -\frac{1}{2} + \dot q,$$

weil ja $\dot z = 1$ angenommen wurde. Fahre man so fort, so gelange man zu

$$y = d - \frac{z}{2} - \frac{3z^2}{8d} - \frac{9z^3}{16d^2} - \text{etc.}$$

Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass Newton im Stande gewesen wäre, diese beiden Briefe, beziehungsweise deren Auszüge, spätestens 1676 bekannt zu machen, und dass sie damals ein Aufsehen der Bewunderung erregt haben müssten. Ganz anders 1693. Wenn die Briefe jetzt Aufsehen machten, so konnte es nur ein solches der Verwunderung sein, und wenn diese nicht laut wurde, so geschah es darum, weil die hohe Achtung, die man dem Verfasser von Abhandlungen über die Farbenlehre in den P. T. von 1672, dem Verfasser der Principien von 1687 auf dem europäischen Festlande nicht minder als in Grossbritannien verdientermassen zollte, den Spöttern den Mund schloss.

Mussten die Leser sich nicht sagen, was Johann Bernoulli im August 1696 darüber an Leibniz schrieb[1]), das Newtons Methode der Sache nach sich ganz und gar nicht von der Differentialrechnung unterscheide, wie dieser selbst in seinem Werke der Principien eingestehe, dass er nur ein, beziehungsweise mehrere Pünktchen statt d, dd u. s. w. schreibe? Klingt es so ungerecht, wenn Bernoulli fortfährt[2]): Ich weiss nicht, ob nicht Newton seine Methode erst bildete, nachdem er Dein Rechnungsverfahren gesehen hatte? Woher sollte

[1]) Leibniz III, 316—317. [2]) *Nescio annon Newtonus, Tuo calculo viso, suam demum Methodum fabricaverit.*

Bernoulli anderer Meinung gewesen sein? Leibniz freilich wusste es besser und antwortete[1]), Newton habe schon vor zwanzig Jahren — das war 1676 — ihm Andeutungen gemacht, denen zufolge er damals schon Bedeutendes besessen haben müsse.

Und betrachtet man nicht das Datum der Briefe, sondern das ihrer Drucklegung, so musste letztere nun gar unbegreiflich erscheinen, denn inzwischen hatte das Aprilheft 1693 der A. E. Leibnizens Integration von Differentialgleichungen in Reihengestalt gebracht, von welcher — auch das sagt Johann Bernoulli in dem erst angeführten Briefe — die Newtonsche sich nur durch grössere Mühseligkeit unterschied.

Nicht eben lange nachdem durch Wallis jene Auszüge aus Newtonschen Briefen veröffentlicht waren, trat 1695 in den A. E. ein grundsätzlicher Gegner der Leibnizischen Differentialrechnung auf: Bernhard Nieuwentijt[2]) (1654—1718), praktischer Arzt und gleichzeitig Bürgermeister in Purmerend in Nordholland. Er war nicht Gegner der Person, sondern der Sache, und er richtete deshalb seine Angriffe in gleicher Weise wie gegen Leibniz auch gegen die Brüder Bernoulli und den Marquis de l'Hospital[3]). Er hat auch besondere Schriften in der gleichen Absicht verfasst: *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia* (1694) und *Analysis infinitorum* (1695).

Die Angriffe, welche Nieuwentijt gegen die logische Grundlage der Differentialrechnung gerichtet hat, sind scharfsinniger als die Versuche, welche er veranstaltete, jene Grundlagen fester zu sichern. Er hat dreierlei an der Differentialrechnung auszusetzen. Erstens sei sie der mit anderen Methoden gemeinsamen Schwierigkeit unterworfen, dass Grössen als Nichts bei Seite gelassen werden, welche nur unendlich klein seien. Zweitens fehle eine Anwendung der Differentialrechnung auf Exponentialgrössen. Drittens sei, selbst wenn man mit den ersten Differentialen sich befreunden könnte, den folgenden Differentialen d^2x, d^3x u. s. w. ein Sinn nicht abzugewinnen. Der erste Einwurf insbesondere ist immer und immer wiedergekehrt bis tief in das XIX. Jahrhundert, und damit ist dessen zum mindesten theilweise Berechtigung nachgewiesen. Aber wie findet sich denn Nieuwentijt mit der unleugbar vorhandenen Schwierigkeit ab? Er nimmt ein Unendlichgrosses[4]), welches er durch m bezeichnet, und nennt den $m$ten Theil eines Endlichen ein Unendlichstel[5]). Dieses

[1]) Leibniz III, 320. [2]) Poggendorff II, 289. [3]) Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange S. 123—138. [4]) *quantitas infinita.* [5]) *infinitesima.*

ist noch nicht Nichts, aber sein Unendlichstel oder $\frac{b}{m^2}$ ist Nichts, denn dieses liefert mit dem unendlichgrossen m vervielfacht noch nicht Endliches, sondern erst ein Unendlichstel. Aber ist das nicht Wortspielerei? Besagt es nicht im Grunde das Gleiche, was Leibniz und die Seinen in die Worte kleideten, höhere Potenzen eines Unendlichkleinen verschwänden neben dessen niedrigeren Potenzen und das Unendlichkleine selbst neben Endlichem und das Endliche neben Unendlichgrossem?

Leibniz beantwortete[1]) die Nieuwentijtschen Angriffe in den A. E. von 1695. Er gab dort, wenn auch in gewundener Weise zu, dass indirekte Beweisführungen von der Art, wie die griechischen Geometer, insbesondere Archimed, sie anwandten, am geeignetsten seien, die Wahrheit der Sätze festzustellen, bei welchen man auch des Unendlichkleinen sich bedienen könne, aber schliesslich sei es nicht mehr als ein Wortstreit, wenn Jemand die Gleichheit von Grössen, welche um ihnen selbst gegenüber Unendlichkleines sich von einander unterscheiden, verwerfe[2]). Dazu komme noch Eines: dass solchen Figuren, welche aus Linienelementen bestehen, immer andere endliche Figuren ähnlich seien, so dass man Verhältnisse von nicht Angebbarem durch Verhältnisse angebbarer Grössen zu ersetzen im Stande sei.

Der zweite Einwand hatte der Differentiation von Exponentialgrössen gegolten. Auch hier begann Leibniz mit einem Zugeständnisse. Wenn $y^x = z$, so sei

$$dz = (y + dy)^{x+dx} - y^x = y^{x+dx} + xy^{x+dx-1}dy - y^x,$$

sofern alle Glieder wegbleiben, welche Produkte von Differentialen einschliessen. Diese Gleichung leide aber an dem Fehler, dass in ihr die Homogeneität der Differentiale nicht gewahrt sei[3]) und dass sie vermöge dessen untauglich sei, das wirklich Gesuchte, nämlich das Verhältniss von dx zu dy[4]), zu liefern. Nach den Principien der Differentialrechnung müsse man, wenn Differentiale mit endlichen Grössen gemischt vorkommen, erstere als Null betrachten. Dadurch gehe die erhaltene Gleichung über in

$$0 = y^{x+0} + xy^{x+0-1}0 - y^x \quad \text{oder in } 0 = y^x - y^x,$$

und das sei zwar wahr, führe aber nicht weiter. Dagegen könne man folgenden Weg einschlagen. Es sei $\int \frac{dx}{x} = \log x$. (Das wusste Leibniz durch die Quadratur der Hyperbel.) Ferner gehe aus $x^e = y$

[1]) Leibniz V, 320—328. [2]) *Et si quis talem aequalitatis definitionem rejicit, de nomine disputat.* [3]) *Non servat leges homogeneorum calculi differentialis.* [4]) *Non exhibet quaesitum, nempe rationem dx ad dy.*

die Gleichung $v \cdot \log x = \log y$ hervor oder unter Anwendung der Integralform für die vorkommenden Logarithmen $v \cdot \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$. Differentiire man diese Gleichung, so entstehe

$$v \cdot \frac{dx}{x} + dv \cdot \log x = \frac{dy}{y}.$$

Daraus aber wird[1])

$$d(x^v) = x^v \cdot \frac{v}{x}\, dx + x^v dv \log x.$$

An diese Stelle erinnerten wir, als wir (S. 232) Leibniz einen Vorgänger von Johann Bernoulli in der Differentiation der Exponentialgrössen nannten.

Nun wendet sich Leibniz drittens zu den höheren Differentialen. Er nimmt an, die x verlaufen in geometrischer, die y in arithmetischer Progression. Alsdann findet das Verhältniss $dx : dy = x : a$ statt, wo a eine Constante bedeutet und auch dy als constant gilt. Hieraus folgt $dx = \frac{x dy}{a}$ und durch Differentiation

$$ddx = \frac{dx \cdot dy}{a} = \frac{dx \cdot dx}{x}, \quad \text{beziehungsweise } \frac{ddx}{dx} = \frac{dx}{x},$$

d. h. ddx verhält sich zu dx wie dx zu x, das höhere Differential ist dem niedrigeren gegenüber ebenso ein Unendlichkleines, wie das erste Differential der endlichen Grösse gegenüber. So die Antwort Leibnizens. Dass in dem über die zweiten und höheren Differentiale Gesagten sehr viel unstatthafte Willkür mit einlief, wird man gegenwärtig nicht in Abrede stellen.

Auf Nieuwentijts Zweifel wegen der Differentiation von Exponentialgrössen kam Johann Bernoulli, der dieses mathematische Gebiet fast mit Eifersucht als sein eigenstes vertheidigte, im Märzheft 1697 der A. E. zurück[2]), in jenem Aufsatze, der, wie wir (S. 232) sagten, die Grundzüge der Rechnung mit den Exponentialgrössen für alle Zeiten festsetzte. Wir haben ebendort bemerkt, dass Bernoulli als wesentliches geometrisches Hilfsmittel von der logarithmischen Linie Gebrauch machte. Von einer selbständigen Gegenschrift gegen Nieuwentijt aus der Feder eines jungen Mathematikers, Jakob Hermann, den wir nur ganz im Vorbeigehen (S. 90) einmal zu nennen Gelegenheit hatten, wird im XVII. Abschnitte die Rede sein.

Vor Abschluss des Jahrhunderts trat noch ein persönlicher Feind

[1]) Da Leibniz die Rechnung bis hierher richtig geführt hat, so kann es nur ein Druckfehler sein, wenn bei ihm die Schlussgleichung anders lautet als es sein muss, und deshalb weichen wir hier im Texte von ihm ab. [2]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 179 sqq.

Leibnizens in die Schranken der Oeffentlichkeit, mit welchem wir uns zum Schlusse dieses Abschnittes beschäftigen müssen. Es war Nicolas Fatio de Duillier[1]) (1664—1753). Die Familie hatte sich 1635 in Basel eingebürgert, und dort ist Fatio geboren, aber als er wenige Jahre alt war, kaufte der Vater die Herrschaft Duillier bei Genf an und wurde 1678 Genfer Bürger. Schon mit 18 Jahren war Fatio 1682 in Paris, um an der dortigen Sternwarte unter Cassini sich als praktischen Astronomen auszubilden. Von 1684 bis 1686 lebte er in Duillier, dort die in Paris begonnenen Beobachtungen fortsetzend. Ende 1686 ging er nach Holland, wo er zu Huygens in persönliche Beziehungen trat. Im Jahre 1687 wandte er sich nach England und wurde 1688 Mitglied der Royal Society in London. Ein neuer kurzer Abstecher nach Holland zu Huygens fällt in den Anfang des Jahres 1691, ein vielleicht etwas längerer Aufenthalt in Duillier in die Jahre 1700 und 1701, aber Fatios eigentlicher Wohnsitz blieb in England. Dort betheiligte er sich 1707 an Umtrieben religiöser Fanatiker, welche ihm eine Verurtheilung zum Pranger und zu einer Freiheitsstrafe zuzogen, dort starb er in einem Alter von fast 90 Jahren, ohne von seiner Begeisterung für die Propheten zurückgekommen zu sein. Wir können uns der Auffassung nur anschliessen, man habe Fatio etwa von 1706 an als geisteskrank zu betrachten, und in der That sind von da an keine wissenschaftlichen Arbeiten von ihm bekannt. Er scheint nach seiner Verurtheilung den Studien für immer Lebewohl gesagt zu haben.

Wir haben Fatios Lebensgeschichte aus mehreren Gründen ausführlicher erzählt. Einmal können wir nun an der Hand der Jahreszahlen feststellen, dass, als Johann Bernoulli in den Jahren 1691 bis 1693 erst in Genf, dann in Paris lebte und am ersteren Orte den älteren Bruder Fatios unterrichtete, er selbst, ein schon geschätzter Gelehrter, in England sich aufhielt, also gewiss nicht durch Johann Bernoulli in die neuen Methoden eingeführt werden konnte und ebensowenig von 1700 an durch seinen eigenen Bruder. Zweitens wird begreiflich, dass Fatio, Engländer von Neigung — und Neigung thut in solchen Fällen mehr als die Geburt — allen Gemüthsstimmungen der neuen Landsleute in Hass und Liebe sich anschloss. Drittens möchten wir das frühe Erwachen, den vorzeitigen Todesschlaf seines Geisteslebens nachträglich in einen gewissen Zusammenhang gebracht wissen.

Fatio war unzweifelhaft eine hochbegabte Natur. Das Urtheil von Huygens, das von Jakob sowohl als von Johann Bernoulli,

[1]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz IV, 67—86.

das von Leibniz, die ihn alle theils persönlich, theils aus Briefen, theils aus den Aussagen Anderer kannten, stimmt vollgiltig überein und wird dadurch nicht zurückgenommen, dass von 1700 an wenigstens Leibniz und Johann Bernoulli sich ganz anders äusserten. Aber immerhin dürfen wir Fatio doch nur denjenigen begabten Menschen zurechnen, welche mehr versprachen als sie geleistet haben. Er fasste, wie es scheint, rasch, war schnell bereit undeutlich Geahntes für mehr als zur Hälfte Vollendetes anzusehen und anzugeben, und auch bedächtigere Gelehrte glaubten an diese Aeusserungen auf blosse Hoffnung gegründeter Zuversicht. Wir möchten Fatio am liebsten mit Tschirnhaus vergleichen, wenn dieser nicht einestheils bewusster geflunkert, anderntheils doch entschieden mehr geleistet hätte.

Einmal freilich war grade Fatio in der Lage, einen Irrthum Tschirnhausens zu bemerken und zu verbessern. Es handelte sich um die Berührungslinien an die mehrbrennpunktigen Curven, deren von Tschirnhaus 1686 in der Medicina mentis angegebene Construction mit einem Mangel behaftet war. Wir erinnern uns (S. 153—155), das Fatio zunächst ein geistreiches, rein geometrisches Verfahren einschlug, welches auf der Zurückführung auf Widersprüche beruhte und daher von den Tangentenmethoden der Infinitesimalrechnung durchaus verschieden war.

Fatio will diese überhaupt, und insbesondere Leibnizens beide Abhandlungen von 1684 und 1686 damals nicht gekannt haben, denn das ist doch der Sinn einer im December 1691 an Huygens gerichteten Briefstelle[1]), er habe Leibnizens Schriften über den Differentialcalcul erst gelesen, nachdem er die gleichen Dinge anderswoher kannte. Bei Huygens fand Fatio mit seinen Herabsetzungen der Differentialrechnung ein geneigtes Ohr. Wir wissen (S. 216—217), wie sehr dieser sich sträubte in Leibnizens Gedankenfolge einzutreten, wie er fest bis zu seinem Tode dabei beharrte, man könne zu den gleichen Ergebnissen auch anders gelangen. Wir haben, als wir damals von einem fremden Einflusse sprachen, der bei Huygens sich geltend machte, an Fatio gedacht. Ursache und Wirkung ergänzten einander hier gegenseitig. Huygens' Voreingenommenheit hatte zur Folge, dass er Fatio hörte und ihm bereitwillig Glauben schenkte. Fatios Einflüsterungen hatten zur Folge, dass Huygens sich mehr und mehr in der Ueberzeugung von der Ueberflüssigkeit der Differentialrechnung befestigte.

[1]) Der Brief ist abgedruckt in Uylenbroek, *Chr. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum celebrium Exercitationes Mathematicae et Philosophicae.* Haag, 1833. Die Stelle heisst: *c'est que je n'ai étudié ce qu'il en a écrit que depuis que j'ai eu d'ailleurs les memes choses.*

Als Fatio in Holland war, theilte er im März 1687 Huygens mit, dass er bei Tschirnhaus den erwähnten Fehler gefunden habe und besprach mit ihm die Verbesserung, welche er vorhabe. Als er im Juni 1687 von England aus schrieb, kam er auf seine eigene Methode zurück, es sei eine wahre Methode, bequem und von einer sehr einfachen und leicht im Gedächtnisse zu behaltenden Erwägung ausgehend. Er habe sie deshalb ins Reine geschrieben und Anwendungen davon gemacht. Nun geht er aber weiter und behauptet, er habe auch die umgekehrte Tangentenaufgabe behandelt, und er habe gewissermassen das Mittel gefunden, sie zu lösen, wenn es überhaupt möglich sei[1]).

Von jetzt an trat diese so kühn und zuversichtlich angekündigte Auflösung der umgekehrten Tangentenaufgabe einigermassen in den Vordergrund, und als Huygens gegen Leibniz Einiges darüber laut werden liess, fragte dieser im Januar 1691, in welcherlei Fällen Fatios Verfahren sich als durchführbar zeige, damit er aus dieser Angabe entnehmen könne, ob Aehnlichkeit mit seinen eigenen Untersuchungen vorhanden sei[2]). Inzwischen war Fatio nach Holland gereist, und Huygens konnte am 23. Februar 1691 Leibnizens Frage dahin beantworten[3]), Fatio finde allerdings in den Fällen einen Anstoss, in welchen der Werth der Subtangente Wurzelgrössen aus mehrgliedrigen Ausdrücken enthalte, z. B. wenn die Subtangente $\frac{y^2\sqrt{a^2-x^2}}{ax}$ sein solle, wo x die Abscisse, y die zu ihr senkrechte Ordinate bedeute. Eine Woche später schickt Leibniz[4]) die Auflösung der ihm mitgetheilten Aufgabe: $a^2x^2 = a^4 - \frac{y^4}{4}$ oder auch $4a^2x^2 = 4a^2y^2 - y^4$ seien Curven, welche jene Subtangente besitzen. Er schlägt vor, er wolle Fatio diese Auflösungen erklären, wenn jener ihm die Wege offenbare, auf welchen er zur Behandlung von zwei inversen Tangentenaufgaben gelangt sei.

Fatio weicht zurück[5]). Er verzweifle nicht daran, selbst mit den Wurzelgrössen fertig zu werden. Ueberdies sei, was er über jene Aufgaben niedergeschrieben habe, so lang und ausführlich und so schwer zu lesen, dass er sich nicht entschliessen könne, es zu schicken. So am 26. März, aber am 5. Mai scheint Fatio doch nachgrade zur Ueberzeugung gekommen zu sein, er werde nicht allein mit den Wurzelgrössen fertig, denn nun schlug er selbst den Tausch vor[6]).

[1]) *J'ai trouvé en quelque sorte le moyen de le resoudre toutes les fois qu'il est possible.* [2]) Leibniz II, 77. [3]) Ebenda II, 81—82. [4]) Ebenda II, 83—84 und 90, wo ein Schreibfehler des früheren Briefes verbessert wird. [5]) Ebenda II, 86. [6]) Ebenda II, 93.

Mag sein, dass Leibniz, nachdem Fatio auch mit der durch ihn erhaltenen Kenntniss des zu erwartenden Ergebnisses in zwei Monaten nicht vom Flecke gelangt war, von seiner früheren guten Meinung über dessen Methode zurückgekommen war, was nicht unbegreiflich erscheint, jedenfalls zog er jetzt die Sache unter Angabe von Gründen, welche blossen Ausflüchten sehr ähnlich sehen, so lange hinaus, bis sie sich ganz zerschlug.

Fatio war inzwischen nach England zurückgekehrt. Er hatte jetzt Leibnizens gedruckte Abhandlungen studirt und äusserte sich über dieselben im December 1691 in einem Briefe, dessen grade hierauf bezügliche Stelle wir oben (S. 258) angeführt haben. Ja, er ging noch viel weiter. Er behauptete, Newton sei der erste Erfinder der Differentialrechnung. Derselbe habe so viel und mehr als Leibniz gegenwärtig wisse zu einer so weit zurückliegenden Zeit besessen, dass Leibniz damals noch nicht an diese Rechnung dachte. Der Gedanke scheine vielmehr bei Leibniz erst durch Newtons briefliche Mittheilungen erzeugt worden zu sein. In einem Briefe vom Februar 1692 an Huygens ist noch weiter von den Newtonschen Briefen von 1676 die Rede, deren Abdruck Leibniz sicherlich sehr unangenehm wäre. Newtons Leistungen verhielten sich zu denen Leibnizens wie ein vollendetes Original zu einer verkrüppelten und sehr unvollkommenen Copie[1]).

Huygens theilte allerdings diese beleidigenden Ausdrücke Leibniz nicht mit, unterrichtete ihn aber doch im März 1692 davon, dass Fatio glaube, Newton wisse von dem umgekehrten Tangentenprobleme mehr, als er selbst und Leibniz zusammen, und dass eine Abhandlung darüber werde geschrieben werden[2]). Zugleich bot er in Fatios Auftrage abermals dessen Methode zum Tausche an.

Leibniz lehnte im April 1692 endgiltig ab[3]). Dass Newton recht weit vorgedrungen sei, glaube er ohne Mühe, aber Jedermann besitze seine ihm eigenen Wege, und so sei er vielleicht auf Bahnen, die jenem noch unbekannt seien, fortzuschreiten begriffen.

Die Gemüther fingen an sich gegen einander zu erhitzen. Wusste Newton von diesen Briefen, welche Fatio und Huygens wechselten? Es ist kaum denkbar, dass er gar nichts davon erfahren haben sollte. Und grade in dieser Zeit, im Sommer und Herbst 1692, schrieb er seine zwei Briefe an Wallis, deren früher (S. 253) betonter geringfügiger Inhalt uns jetzt nur um so dürftiger erscheint, als wir in den zuletzt erzählten Ereignissen eine Veranlassung erkennen dürfen, welche zum Schreiben jener Briefe führte.

[1]) *comme d'un original achevé et d'une copie estropiée et trez imparfaite*
[2]) Leibniz II, 133. [3]) Ebenda II, 135.

Fatio selbst schwieg Jahre hindurch, bis er 1699 in einer kleinen Schrift mit dem Titel: Zwei geometrische Untersuchungen über die Brachistochrone[1]) Leibniz öffentlich die Anklage ins Gesicht schleuderte, welche er bis dahin nur brieflich ausgesprochen hatte. Wir wissen (S. 235), dass Leibniz im Mai 1697 die Lösung der Aufgabe der Brachistochrone als einen Probestein für die Vortrefflichkeit der Differentialrechnung gerühmt hatte. Nur Kenner dieses Rechnungsverfahrens seien zur Lösung fähig gewesen, und ausser diesen einige ganz wenige Persönlichkeiten. Unter letzteren nannte er Newton, aber Fatio nannte er nicht! Das bot diesem den Anlass, nun plötzlich das Sprachrohr des Aergers zu werden, den Newton und seine Freunde über ihre Ueberflügelung durch die Leibnizische Schule empfanden. Der Prioritätsstreit war begonnen. Der XVII. Abschnitt wird uns dessen Verlauf kennen lehren.

[1]) *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex.*

XVII. Die Zeit von 1700—1726.

93. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Infinitesimalrechnung bis 1704.

Seit wir, mit dem XIV. Abschnitte beginnend, die Gegenstände innerhalb eines bestimmten Zeitraumes nach dem Inhalte der Schriften, über welche wir berichteten, zu ordnen uns gewöhnt haben, stellten wir stets solche Leistungen an die Spitze der Abschnitte, welche der Geschichte der mathematischen Wissenschaften gewidmet waren. Wir wollen auch jetzt dieser Gewohnheit treu bleiben, eine so geringe Ausbeute wir unseren Lesern dabei in Aussicht zu stellen vermögen.

Dass die *Cronica de' Matematici* des Bernardino Baldi 1707 im Drucke erschien (Bd. II, S. 547), können wir kaum eine Thätigkeit nennen, und mit einer Notiz[1]), welche besagt, Pierre Rémond de Montmort habe begonnen eine Geschichte der Geometrie zu schreiben, ist nichts anzufangen. Ihre Quelle ist eine in den A. E. für 1721 pag. 214 abgedruckte Stelle eines Briefes De Montmort's an Johann Bernoulli vom 17. Juni 1717: *J'ai dessin de donner quelque jour une Histoire de la Géométrie qui est déjà assez avancée.* Von Adam Andreas Cnollen[2]) (1674—1714) wird einerseits angegeben, er habe *De geometria talmudica* und *De algebra Hebraeorum* geschrieben, während andrerseits der genaueste Kenner hebräischer Literatur nur weiss, dass Cnollen eine *Mathesis Biblico-Talmudica* versprochen habe, ohne Gewissheit darüber zu besitzen, ob er jenes Versprechen auch eingelöst. Ein nordischer Gelehrter Johannes Vallerius, Sohn des (S. 6) genannten Harald Vallerius, liess 1716 in Upsala eine wesentlich geschichtliche Abhandlung *Problema Deliacum de duplicatione cubi* erscheinen[3]), aber über deren Werth ist nicht berichtet. Nicht besser sind wir über eine 1706 in Kopenhagen gedruckte Abhandlung *De origine geometriae apud Aegyptios* unterrichtet, deren

---

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences, année* 1719, pag. 92. [2]) Poggendorff I, 458. — M. Steinschneider in der *Bibliotheca mathematica* 1893 S. 106 bis 107. [3]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1889 S. 3.

Verfasser Johannes Gram[1]) (1685—1748) erst Conrector an der lateinischen Schule in Kopenhagen, dann Professor des Griechischen an der dortigen Universität war, daneben auch königlicher Historiograph, Bibliothekar und geheimer Archivar.

Wir kennen aus eigener Anschauung nur eine zweifellos hierher gehörende Arbeit. De Lagny hat 1723 versucht[2]), den Weg ausfindig zu machen, auf welchem Archimed in seiner Kreismessung die beiden Näherungswerthe gefunden haben mochte, zwischen welche er $\sqrt{3}$ einschloss, indem er behauptete $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. De Lagny ging dabei von der Theonischen Formel zur Auffindung von $\sqrt{2}$ aus, wenn er auch Theon so wenig als dessen Kunstausdruck *Diametralzahl* nannte, sondern sich damit begnügte, einen unechten Bruch $\frac{a}{b}$ als erste, den zweiten Bruch $\frac{a+2b}{a+b}$ als engere Annäherung anzugeben. Ganz ähnliche Formeln müsse es, meint De Lagny, auch für andere Quadratwurzeln als die aus 2 gegeben haben, und deren Ermittelung müsse gelingen, sobald man versuchsweise einige Näherungswerthe fände, die zu klein, andere, die zu gross wären. Grösser als $\sqrt{3}$ seien z. B. $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}$ d. h. Brüche von der Form $\frac{a}{b}$, wo $a^2 = 3b^2 + 1$. Kleiner als $\sqrt{3}$ seien $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}$ d. h. Brüche von der Form $\frac{A}{B}$, wo $A^2 = 3B^2 - 2$. Die sich näher anschliessenden Brüche seien $\frac{2a+3b}{a+2b}$, beziehungsweise $\frac{2A+3B}{A+2B}$, wie sich durch Erhebung zum Quadrate leicht nachweisen lasse. So entstehen die Fortsetzungen beider Reihen von Näherungswerthen: $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209}, \frac{1351}{780}$ und $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}, \frac{265}{153}, \frac{989}{571}, \frac{3691}{2631}$. Das sechste Glied der einen, das vierte Glied der anderen Reihe sind die von Archimed benutzten Werthe. Unser Urtheil über De Lagny's Versuch brauchen wir kaum auszusprechen. Er hat in dieser Abhandlung einen Beweis seiner Gewandtheit mit Zahlen umzugehen und Beziehungen zwischen ihnen aufzudecken geliefert, aber seine Gedankenfolge ist so ungriechisch als möglich.

Nächst den eigentlich geschichtlichen Arbeiten pflegen wir mit den Männern uns zu beschäftigen, welche es sich angelegen sein liessen, Werke alter Mathematiker herauszugeben. Ein solches Unternehmen grossartigster Anlage ist hier zu nennen. Edward

[1]) Poggendorff I, 938. — Christensen und Heiberg in der Bibliotheca mathematica 1889, S. 76. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences, année* 1723, pag. 55—69.

Bernard[1]) (1638—1696) war ursprünglich Theologe und im Besitze geistlicher Stellen von grosser Einträglichkeit. Seine Neigungen gingen aber vornehmlich auf Mathematik und auf orientalische Sprachwissenschaft, und als ihm 1673 eine Savilische Professur in Oxford (Bd. II, S. 738) angeboten wurde, deren Inhaber satzungsgemäss keine geistliche Nebenstellung verwalten durfte, verzichtete er auf letztere. Von jetzt an lebte er in Oxford ausschliesslich seinen beiden Wissenschaften und fasste einen Plan, an dessen Verwirklichung seit Regiomontan (Bd. II, S. 259) Niemand gedacht hatte, den Plan, alle Klassiker der Mathematik neu herauszugeben. Zu diesem Zwecke hatte Bernard bereits früher 1668 in Leiden eine der dortigen Bibliothek angehörende arabische Uebersetzung der sieben ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius abgeschrieben, hatte er gleichfalls schon vor seiner Niederlassung in Oxford 1671 und 1672 einen Anlauf genommen, diese Kegelschnitte in Gemeinschaft mit Isaac Barrow herauszugeben. Jetzt erweiterten sich nur seine Pläne. Aber Bernard war der Mann grosser Entwürfe, zögernder Ausführung. Auch eine Ausgabe des Josephus, die er daneben im Sinne führte, blieb stecken, und der Spottvers lief auf ihn um:

Savilian Bernard is a right learned man,
Josephus he will finish when he can.

Weder eine Ausgabe des Josephus noch eines Mathematikers kam zu Stande, und das ist der Grund, aus welchem Bernard im 82. Kapitel unerwähnt bleiben durfte. Sein Biograph Smith konnte 1704 nur die Titel jener Schriften nennen, welche Bernard in 14 Bänden herauszugeben beabsichtigte[2]). Der grosse Plan war aber keineswegs mit Bernard zu Grabe getragen worden. David Gregory[3]) (1661—1708), ein Neffe von James Gregory als Sohn dessen ältesten Bruders, war Professor an der Universität in Edinburg gewesen und hatte dort die ersten astronomischen Vorlesungen über den Inhalt von Newtons Principien gehalten. Dass Newton ihm dafür sein Wohlwollen zuwandte, ist begreiflich, und auf dessen Vermittelung, verbunden mit der nicht minder warmen Fürsprache des Greenwicher Astronomen John Flamsteed, wurde Gregory 1691 zu der Savile'schen Professur der Astronomie nach Oxford berufen. Hier war er also Bernards unmittelbarer Amtsbruder und wurde der Vertraute seiner Absichten.

David Gregory trat nach Bernards Ableben in dessen Fussstapfen und die grosse Euklidausgabe (Oxford 1703) kam zu Stande.

[1]) *National Biography* IV, 378—380 (London 1883, edited by Leslie Stephen). [2]) Smith, *Vita Bernardi* und als Anhang dazu: *Veterum Mathematicorum Graecorum, Latinorum et Arabum Synopsis.* [3]) *National Biography* XXIII, 93—94 (London 1890, edited by Leslie Stephen and Sidney Lee).

Eine Vorrede von wissenschaftlichem Werthe eröffnete sie, und nach dieser waren zum ersten Male nicht bloss die Elemente, sondern sämmtliche Euklidische Schriften, so weit sie damals bekannt waren und für echt galten, in griechischem Text und lateinischer Uebersetzung vereinigt.

Ein anderer Nachfolger Bernards war Edmund Halley. Das nächste Anrecht nach Euklid — so äussert sich Halley in der Vorrede zu einem sogleich zu nennenden Werke — auf eine neue schöne Ausgabe hätte eigentlich Archimed besessen; aber schliesslich gebe es doch schon ganz gute Archimedausgaben, während Apollonius, der Verfasser der Kegelschnitte, nur sehr ungenügende Verbreitung durch den Druck erlangt habe. Das hing freilich mit der Schwierigkeit der Aufgabe zusammen, aber was jeden Anderen abgeschreckt hätte, bildete für Halley nur einen Reiz mehr, sich an eine Apolloniusausgabe zu wagen. In griechischer Sprache sind bekanntlich nur die vier ersten Bücher der Kegelschnitte erhalten. Vom 5., 6. und 7. Buche ist eine arabische Uebersetzung auf die Neuzeit gekommen. Das 8. Buch ist ganz verloren und dessen Inhalt aus leisen Andeutungen bei Pappus kaum zu errathen. Ganz ähnlich verhält es sich mit den sogenannten kleineren Schriften des Apollonius. Für die meisten stehen nur kurze Andeutungen bei Pappus zu Gebote, die zwei Bücher vom Verhältnissschnitt sind in einer arabischen Uebersetzung in einer Handschrift der Bodlejanischen Bibliothek in Oxford vorhanden und waren als solche von Bernard erkannt worden. Für eine Herausgabe des Apollonius oder auch nur von dessen Kegelschnitten war somit die Kenntniss der arabischen Sprache erstes und unerlässliches Erforderniss, Halley aber war diese Sprache durchaus fremd. Edward Bernard hatte, wie wir sagten, in einem Bodlejanischen Codex die arabische Uebersetzung der beiden Bücher vom Verhältnissschnitte erkannt und hatte etwa den zehnten Theil in's Lateinische übertragen, als der Tod ihn wegraffte. Die begonnene Arbeit Bernards bildete für Halley zugleich Wörterbuch und Sprachlehre des Arabischen. Er bediente sich ihrer mit solchem Erfolge, dass es ihm nachmals gelang, Verbesserungsvorschläge zu sehr verdorbenen arabischen Texten zu wagen, welche die Bewunderung von geschulten Orientalisten erregten. Schon 1706 erschien in Oxford gewissermassen als Fühler Halleys lateinische Uebersetzung des Verhältnissschnittes, *De sectione rationis*, nebst einer kurzen Wiederherstellung der verloren gegangenen Schrift vom Raumschnitte, *De sectione spatii*. Im Jahre 1710 liess Halley alsdann ebendort die Kegelschnitte des Apollonius nachfolgen. So weit ein griechischer Text vorhanden war, ist er mit gegenüberstehender lateinischer Uebersetzung abge-

druckt. Für das 5., 6., 7. Buch ist die lateinische Uebersetzung aus dem Arabischen mitgetheilt. Das 8. Buch hat Halley versucht selbständig in lateinischer Sprache wiederherzustellen. Ueberdies ist der Ausgabe der Commentar des Eutokius zu den Kegelschnitten in griechischer und lateinischer Sprache beigegeben, sowie auch die Bücher des Serenus über die Schnitte des Cylinders und des Kegels. Halley hegte ursprünglich den Wunsch, sich zur Besorgung dieser Ausgabe mit David Gregory zu vereinigen, welcher die Durchsicht der griechischen Texte nebst deren Uebersetzung übernehmen sollte. Nach Gregorys Tod fiel die ganze Last auf Halleys Schultern.

Ein Herausgeber ausserordentlich viel späterer Schriften war Michael Gottlieb Hansch[1]) (1683—1749). Ein Pfarrerssohn aus der unmittelbaren Nähe von Danzig begann er seine Studien auf dem dortigen akademischen Gymnasium. In Danzig hatte auch der Astronom Johann Höwelcke (bekannter unter dem Namen Hevelius) gelebt, in dessen Eigenthum 22 Bände Kepler'scher Handschriften durch Ankauf von Keplers eigenem Sohne übergegangen waren. Höwelckes Schwiegersohn bot Hansch den genannten Bestandtheil der Erbschaft um ein Geringes an, und dieser erwarb ihn mit Freuden. Hansch war inzwischen nach Leipzig übergesiedelt, hatte dort seine Studien vollendet und war insbesondere dem Mathematiker und Philosophen Christian Wolf, der 1703—1707 in Leipzig lehrte, näher getreten. Die Herausgabe des Keplerschen Nachlasses bildete jetzt eine Lebensaufgabe für den neuen Besitzer. Die Ausgabe war nicht bloss vorzubereiten, die mit dem Drucke verbundenen Kosten waren zu bestreiten, und Letzteres erwies sich als das bei weitem Schwierigere. Der kaiserliche Hof in Wien gab zwar ein Geschenk von 4000 Gulden und versprach weitere Unterstützung für die Zukunft, aber jenes Geld reichte kaum für die Herstellung eines ersten Bandes, welcher Keplers Briefwechsel und eine Lebensbeschreibung des grossen Astronomen aus Hanschs Feder umfassend 1717 in Leipzig erschien. Die zugesagten späteren Zuwendungen vollends blieben aus. Hansch war genöthigt auf das unterstützungslos gebliebene Unternehmen zu verzichten und 1721 den grössten Theil der Handschriften in Frankfurt am Main als Pfand für eine Schuld von 828 Gulden niederzulegen. An eine Einlösung war nicht zu denken. Erst 1770 wurde durch einen Zufall das Vorhandensein des Keplerschen Nachlasses bekannt, und Kaiserin Katharina II. von Russland erwarb ihn 1774 für die Petersburger Akademie, wodurch er der Wissenschaft erhalten wurde und endlich doch noch wenn auch zur späten Ausgabe gelangte.

[1]) Allgemeine deutsche Biographie X, 527—528. Artikel von Th. Hirsch.

Um einen noch neueren Schriftsteller machte sich Wilhelm Jacob s'Gravesande[1]) (1688—1742) verdient. Er wurde unter Aufgabe der juristischen Laufbahn, in welche er als Advokat im Haag eingetreten war, Professor der Mathematik in ebenderselben Stadt, später in Leiden und gab 1724 *Opera varia* von Huygens heraus, einen dicken Band, in welchem vier Theile unterschieden sind, während die Seitenzahlen gleichwohl durch den ganzen Band fortlaufen.

Der mehr oder weniger geschichtlichen Literatur ist auch eine Gattung von Werken verwandt, von denen bisher noch keine Rede war, die mathematischen Wörterbücher.

Ein solches wurde von einem italienischen Theatinermönche Geronimo Vitale[2]) verfasst und als *Lexicon mathematicum, astronomicum et geometricum* 1668 in Paris herausgegeben. Joseph Moxon veröffentlichte 1680 in London ein mathematisches Lexicon, dessen zweite Ausgabe 1692 durch Coley bearbeitet wurde. Weiter folgte Jaques Ozanam (S. 102) mit seinem *Dictionnaire mathématique*, welches 1690 in Paris gedruckt, 1691 in Amsterdam nachgedruckt wurde. Die Werke von Moxon und Ozanam sind uns nur aus Beschreibungen[3]), das von Vitale gar nur dem Titel nach bekannt, und aus diesem Grunde haben wir sie im 82. Kapitel übergangen. Moxon scheint mathematische Ausdrücke und Redewendungen erklärt zu haben und Ozanam nicht viel weiter gegangen zu sein. Zudem ist Ozanams Buch nicht alphabetisch, sondern den Gegenständen nach geordnet gewesen, wenn auch ein angefügtes alphabetisches Inhaltsverzeichniss das Aufsuchen dessen, worüber man Aufklärung wünschte, zu erleichtern bestimmt war.

Wir haben (S. 163) Freiherr Christian von Wolf genannt. Dann war (S. 269) von Christian Wolf die Rede. Es ist eine und dieselbe Persönlichkeit, von der wir sprachen. Christian Wolf[4]) (1679—1754) war der Sohn eines einfachen, wenn auch gebildeten Breslauer Handwerkers. Er widmete sich der Philosophie und der Mathematik. Letzterer hatte er grosse Lehrerfolge, ersterer sehr wechselnde Lebensschicksale zu verdanken. Seit 1703 lehrte er in Leipzig, von 1707—1723 in Halle. Religionswidriger Bestrebungen angeklagt wurde er 1723 bei Androhung des Stranges aus den preussischen Landen verwiesen. Der Vertriebene fand an der Universität Marburg bereitwillige Aufnahme, bis Friedrich der Grosse ihn beim

[1]) Poggendorff I, 943—944. [2]) Ebenda II, 1211. [3]) Heilbronner, *Historia matheseos universae* pag. 689 und 694—698. [4]) Gerhard, Math. Deutschl. 191—192. Arnsperger, Christian Wolffs Verhältniss zu Leibniz (Weimar 1897).

Regierungsantritte 1740 nach Halle zurückberief. Dort blieb Wolf bis zu seinem Tode, dort traf ihn 1745 die Verleihung der Reichsfreiherrnwürde. Während des ersten Aufenthaltes in Halle verfasste Christian Wolf 1710 *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* in 4 Bänden, welche wiederholt aufgelegt wurden. Auch ein Auszug daraus fand 1717 bis 1772 in nicht weniger als zehn Auflagen Verbreitung. Andererseits wuchs sich das Werk zu den fünf Bänden der *Elementa matheseos universae* (1713—1741) aus, über welche wir den Bericht dem XVIII. Abschnitte vorbehalten. Hier reden wir dagegen von einem anderen Werke, welches 1716 erschien. Es hiess: *Mathematisches Lexicon, darinnen die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunst-Wörter erkläret und zur Historie der mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten ertheilet, auch die Schriften, wo jede Materie ausgeführet zu finden, angeführt werden: auff Begehren herausgegeben von Christian Wolffen.* Das Werk leistet annähernd dasjenige, was in dem weitschweifigen Titel versprochen wird. Die Kunstausdrücke sind erklärt. Verweisungen auf Nachschlagebücher, unter welchen Wolf seine eigenen bevorzugt, weil sie viel verbreitet, daher leicht zugänglich und, wie er glaube, auch leicht verständlich seien, werden überall gegeben. Wo es um die neuen Theile der Mathematik, insbesondere um die Infinitesimalrechnung sich handelt, tritt die entschiedenste Parteinahme für Leibniz zu Tage. Eine auch nur dürftige Anführung der wichtigsten Sätze der Mathematik bei Gelegenheit der Erklärung der Kunstausdrücke darf man dagegen in diesem mathematischen Wörterbuch nicht suchen wollen. Man würde sich sehr enttäuscht fühlen.

In England folgte noch Edmund Stone[1]) (S. 69) mit *A new mathematical dictionary* von 1726. Der Verfasser war ein 1768 verstorbener Gärtnersohn, der 1725 zum Mitgliede der Royal Society erwählt, 1742 oder 1743 aus unbekannten Gründen wieder gestrichen wurde.

Unsere Leser nimmt es vielleicht Wunder, dass wir einen geschichtlich ebenso bedeutsamen als der eigentlichen Geschichte angehörenden Gegenstand, auf welchen wir (S. 261) am Schlusse des vorigen Abschnittes vorbereitend hingewiesen haben, dass wir den Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz noch nicht erzählten. Wir sind unseres Versprechens keineswegs uneingedenk. Bevor wir es halten, müssen wir jedoch, um uns nachher nicht zu unterbrechen, über einige Arbeiten berichten, welche in den ersten Jahren des neuen Jahrhunderts veröffentlicht Erweiterungen des Gebietes der

[1]) Poggendorff II, 1018.

Differential- und Integralrechnung betrafen. Eine dieser Arbeiten spielt nämlich in jenem Streite eine wichtige Rolle, darf aber nicht ohne die anderen erwähnt werden.

In den A. E. von 1702 erschien ein Aufsatz von **Leibniz**: Neues Beispiel der Analyse für die Wissenschaft des Unendlichen, das sich auf Summirungen und Quadraturen bezieht[1]). Er behandelt die **Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche**, wenn auch letzterer Kunstausdruck noch nicht vorkommt. Leibnizens Gang ist folgender.

Sei $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{\pi x^3 + \xi x^2 + \mu x + \lambda}$ zu zerlegen, wobei ausdrücklich hervorgehoben wird, der Verlauf sei nicht wesentlich verschieden, wenn der Nenner und mit ihm der Zähler höheren Grades sei. Wird der Bruch durch π, den Coefficienten des höchsten Nennergliedes, gekürzt, so erscheint er in der Form $\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} x + \frac{\gamma}{\pi} x^2 + \frac{\delta}{\pi} x^3}{x^3 + \frac{\xi}{\pi} x^2 + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}}$ oder, unter der Annahme $x^3 + \frac{\xi}{\pi} x^2 + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi} = lmn$, wo $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$ ist, in der Gestalt $\frac{\alpha : \pi}{lmn} + \frac{\beta x : \pi}{lmn} + \frac{\gamma x^2 : \pi}{lmn} + \frac{\delta x^3 : \pi}{lmn}$. Brüche von der Form $\frac{1}{lmn\ldots.}$ lassen sich aber zerlegen. Leicht zu versuchende Nachrechnung[2]) zeigt

$$\frac{1}{lm} = \frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m};$$

$$\frac{1}{lmn} = \frac{1}{(c-b)(d-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)n};$$

$$\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)m}$$
$$+ \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)n} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)p} \text{ u. s. w.,}$$

wo das einförmige Bildungsgesetz beim Anblick deutlich ist[3]). Brüche von der Form $\frac{x}{l\ldots.}$, $\frac{x^2}{lm\ldots}$, $\frac{x^3}{lmn..}$, $\frac{x^4}{lmnp.}$ lassen sich ferner leicht in solche von constantem Zähler und ähnlich aus Factoren ersten Grades zusammengesetzten Nennern zerlegen. Es ist

$$\frac{x}{l\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b}{l\ldots}; \quad \frac{x^2}{lm..} = \frac{1}{..} - \frac{b+c}{m..} + \frac{b^2}{lm..};$$

$$\frac{x^3}{lmn.} = \frac{1}{.} - \frac{b+c+d}{n.} + \frac{b^2+c^2+bc}{mn.} - \frac{b^3}{lmn.}, \text{ u. s. w.}$$

[1]) Leibniz V, 350—361 *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas.* [2]) *quod quisque jam experiundo facile demonstrare poterit.* [3]) *ex aspectu patet progressus in infinitum uniformis et regularis.*

Durch fortgesetzte Benutzung beider Regeln wird folglich der ursprünglich gegebene Bruch durch eine aus einfachen Brüchen zusammengesetzte Summe dargestellt[1]). Sind von den Factoren $l, m, n, p \ldots.$ des Nenners welche imaginär, so bildet dieses Vorkommen eine elegante und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, eine Missgeburt der Ideenwelt, fast ein Doppellebewesen zwischen Sein und Nichtsein[2]). Jede imaginäre Wurzel hat ihres Gleichen neben sich[3]). Man kann diese zu einem reellen Producte vereinigen, so dass Brüche mit reellen Nennern entstehen und die Integration des zerlegten Bruches auf Ausdrücke von der Form $\int \frac{dx}{x-1}$, $\int \frac{dx}{x+1}$, deren Werth von der Quadratur der Hyperbel abhängt, und von der Form $\int \frac{dx}{x^2+1}$, welche auf die Quadratur des Kreises hinausläuft, zurückgeführt erscheint.

Schwierigkeiten bereitet Leibniz ein Bruch, in dessen Nenner $x^4 + a^4$ steht. Die Zerlegung

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2\sqrt{-1})(x^2 - a^2\sqrt{-1})$$
$$= \left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)$$

sieht er ein, aber an die Zerlegung

$$x^4 + a^4 = (x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)$$

scheint er nicht gedacht zu haben.

In den Abhandlungen der Pariser Akademie für 1702, welche aber erst 1704 ausgegeben wurden, erschien ein Aufsatz ähnlichen Inhaltes von **Johann Bernoulli**, und ein Auszug davon wurde schon in den A. E. von 1703 veröffentlicht[4]). Die rasche Aufeinanderfolge der beiden Aufsätze war nichts weniger als zufällig. Johann Bernoulli schrieb an Leibniz[5]) unter dem 10. Juni 1702, er habe die Aufgabe gelöst $\int \frac{p}{q} dx$ zu finden, wenn p und q aus x und Constanten irgend rational zusammengesetzt seien, beziehungsweise jenes Integral, wenn es nicht angegeben werden könne — er versteht darunter, wenn es keine algebraische Function von x sei — auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel zurückzuführen, denn eine dieser Möglichkeiten bestehe immer. Leibniz antwortete am 24. Juni, er habe schon in den ersten Jahren seiner Untersuchungen über

[1]) *aggregatum ex simplicibus fractionibus conflatum.* [2]) *Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non — Ens Amphibio quod radicem imaginariam appellamus.* [3]) *Quaevis Radices imaginariae suas compares habent.* [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 393—400. [5]) Leibniz III, 702.

höhere Geometrie sich mit der gleichen Aufgabe beschäftigt, und nun theilt er dem Freunde mit[1]), was er zum Zwecke der Veröffentlichung an die Leitung der A. E. eingesandt hatte. Ja er ging in dem Briefe noch über den Inhalt des Aufsatzes hinaus, indem er von imaginären Logarithmen sprach[2]), was er dort unterlassen hatte. Bernoullis Verfahren war von dem Leibnizens etwas verschieden, wenn es auch naturgemäss zum gleichen Ergebnisse führte, Grund genug für ihn, gleichfalls so rasch als möglich an die Oeffentlichkeit zu treten. Johann Bernoulli setzte entweder den Bruch $\frac{r}{q}$, wo, wie wir heute sagen würden, r und q ganze algebraische Functionen von x bedeuten, von welchen r mindestens um einen Grad niedriger in x als q ist, der Summe von Brüchen $\frac{a}{x+f} + \frac{b}{x+g} + \dots$ gleich, addirte dann diese auf ihren Gemeinnenner gebrachten Brüche, worauf die Coefficienten im Zähler sowohl als im Nenner denen in $\frac{r}{q}$ in gleicher Weise proportional sein müssen und aus dieser Eigenschaft gefunden werden können, oder aber er nahm die Zerlegung von $\frac{r}{q}$ in mehreren Stufenfolgen vor. Er setzte zu diesem Zwecke $\frac{r}{q} = \frac{s}{t} + \frac{a}{x+f}$, wo s um einen Grad niedriger als r und t um einen Grad niedriger als q angenommen wird. Die Vereinigung von $\frac{s}{t} + \frac{a}{x+f}$ muss rückwärts mit $\frac{r}{q}$ übereinstimmen und so die vorkommenden Coefficienten bestimmen lassen. Dann ist $\frac{s}{t}$ weiter zu zerlegen u. s. w.

Weder Leibniz noch Johann Bernoulli haben in diesen ersten Veröffentlichungen den Fall erwogen, dass der Nenner q auch Factoren von der Form einer Potenz von $x + f$ enthalten könne. Ihn betrachtete Leibniz 1703 in den A. E. in einem Aufsatze, den er als Fortsetzung dessen von 1702 bezeichnete[3]). Er zeigte dort, dass wenn der Nenner des zu zerlegenden Bruches, der etwa wieder $\frac{r}{q}$ heissen mag, von der Form $q = h^4 lmnp$ mit $h = x + a$ sein sollte, der Bruch nach den alten Regeln in solche mit den Nennern $h^4 l, h^4 m, h^4 n, h^4 p$ zerlegt werden könne. Dann aber zerfalle der Bruch mit dem Nenner $h^4 l$ neuerdings in solche mit den Nennern h^4, h^3, h^2, h, l u. s. w.

[1]) Leibniz III, 703—705. [2]) *quadraturas rationales reduxi ad Logarithmos, vel veros, vel imaginarios.* Vgl. Stäckel, Integration durch imaginäres Gebiet in Bibliotheca mathematica 1900 S. 109—128. [3]) Leibniz V, 361 bis 366 *Continuatio analyseos quadraturarum rationalium.* Darin pag. 364: *Nunc supplendi sunt casus, quando radices aequales caeteris admiscentur.*

Um nicht genöthigt zu sein, später auf die Arbeiten von Leibniz und Johann Bernoulli über Zerlegung in Partialbrüche zurückzukommen, bemerken wir, dass des Ersteren Versehen in Bezug auf die reellen Factoren von $x^4 + a^4$ nach seinem Tode von Brook Taylor in hämischem Tone verspottet wurde, dass alsdann Johann Bernoulli[1]) in den A. E. von 1719 die Integration von rationalen Brüchen mit trinomen zu irgend welchen Potenzen mit ganzen positiven Exponenten erhobenen Factoren im Nenner erschöpfend lehrte.

Aus dem Anfange des Jahrhunderts nennen wir einen ganz kurzen Aufsatz über einen durchaus verschiedenen Gegenstand, den Leibniz 1701 in dem *Journal de Trevoux* veröffentlichte[2]). Er handelt von der logischen Grundlage der Infinitesimalrechnung. Man habe, sagt Leibniz, das Unendliche als Gegenstand mathematischer Betrachtung bemängelt. Aber das Unendliche sei nicht nach dem strengen Sinne des Wortes aufzufassen, sondern nur etwa so, wie man von den Sonnenstrahlen sage, sie kämen von einem unendlich fernen Punkte her und seien deshalb parallel. Was ferner die verschiedenen Grade der Unendlichkeit betreffe, so sei dafür ein Beispiel, dass der Halbmesser der Erdkugel gegen ihre Entfernung von den Fixsternen als blosser Punkt zu betrachten sei, und der Durchmesser eines Spielballs gegen den Erdhalbmesser wieder als Punkt, so dass die Fixsternentfernung verglichen mit dem Durchmesser des Spielballs unendlich mal unendlich gross sei.

Dieser Aufsatz bildet nur ein Glied in einer ganzen Kette von meistens philosophisch-mathematischen Streitschriften. Wir wissen, dass Abbé Catelan (S. 222) als Gegner der Differentialrechnung aufgetreten war und von De l'Hospital zur Ruhe verwiesen wurde, dass Nieuwentijt (S. 254—255) die Vernachlässigung von Grössen, die doch nicht Nichts seien, angriff und dass er von Leibniz selbst eine Antwort in den A. E. erhielt. Nieuwentijt beruhigte sich nicht. Er erwiderte 1696 durch seine *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia et Responsio ad virum nobiliss. G. G. Leibnitium.* Gegen diese Schrift wandte sich (S. 256) Jakob Hermann[3]) (1678 bis 1733 mit der *Responsio ad cl. Nieuwentijt considerationes secundas circa calculi differentialis principia* von 1700. Es war die Erstlingsschrift eines jungen Basler Theologen, der neben seinem Brodstudium auch Mathematik getrieben, insbesondere bei Jakob Bernoulli Vorlesungen gehört hatte, und dessen Name als Vertheidiger auf der Abhandlung seines Lehrers über unendliche Reihen von 1696 erschien

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* II, 402—418. [2]) Leibniz V, 350. [3]) Allgemeine deutsche Biographie XII, 181—182.

(S. 90). Die Veröffentlichung von 1700 schlug dermassen ein, dass der erst 23jährige Verfasser auf Leibnizens Empfehlung 1701 zum Mitglied der Berliner Akademie gewählt wurde. Leibniz blieb Hermann stets gewogen und verschaffte ihm 1707 einen Ruf als Professor der Mathematik nach Padua, 1713 einen ebensolchen nach Frankfurt an der Oder. An letzterem Orte schrieb Hermann sein Hauptwerk, die *Phoronomia*, eine höhere Mechanik, wie man heute sagen würde. Auf seinem wissenschaftlichen Wanderleben siedelte Hermann 1724 als Akademiker nach Petersburg über, endlich 1731 wieder nach seiner Heimath Basel. Die Vertheidigung der Differentialrechnung gegen Nieuwentijt von 1700 wurde in den A. E. von 1701 in aussergewöhnlich anerkennender Weise besprochen, einer schriftlichen Randbemerkung des Heidelberger Exemplars zufolge von Jakob Bernoulli.

Ein neuer Gegner der Differentialrechnung erwuchs ihr in Michel Rolle, und wenn wir an die hervorragenden Leistungen dieses Mannes in der Algebra denken, von denen im 87. Kapitel die Rede war, so sind wir geneigt, seinen Widerspruch zum voraus als einen höchst gefährlichen zu bezeichnen und es begreiflich zu finden, dass Leibniz in jenem obenerwähnten kurzen Aufsatze im Journal de Trevoux den grossen Leserkreis der Allgemeingebildeten für sich und seine Lehre zu gewinnen suchte. In Wirklichkeit war Rolle nichts weniger als ein zu fürchtender Gegner. Es ging ihm ähnlich wie Huygens, der unbeschadet der Schärfe seines Geistes niemals so recht eigentlich in die Differentialrechnung einzudringen vermochte (S. 216—217). Was Rolle gegen die logische Grundlage der Differentialrechnung einwandte blieb eindrucklos, weil er zugleich die Ergebnisse der Differentialrechnung angriff und dabei Schnitzer über Schnitzer machte[1]). Pierre Varignon zuerst, später Josef Saurin enthüllten die von Rolle begangenen Fehler, ohne diesen zum Schweigen bringen zu können, da er in De la Hire (S. 125) und dem Pater Gouye Stützen innerhalb der Pariser Akademie selbst fand. De la Hire missachtete die Differentialrechnung, weil er auf seine Gewandtheit in der synthetischen Geometrie sich verliess und verlassen konnte, Gouye theilte die Abneigung ohne überhaupt Mathematiker zu sein. Erst im Jahre 1707 erklärte Rolle selbst seinen Widerstand als gebrochen und gab zu, er habe ihn nur deshalb so lange aufrecht gehalten, weil ihn gewisse Persönlichkeiten dazu veranlasst hätten. Briefe zwischen Johann Bernoulli und Leibniz aus der entsprechenden Zeit[2]) geben über diese letzte Wendung alle wünschenswerthe Klarheit.

Wenn Varignon gegenüber von Rolle die Vertheidigung der

[1]) Montucla III, 110—116. [2]) Leibniz III, 810, 811, 814, 836.

Differentialrechnung führte, so zeigt sein Briefwechsel mit Leibniz[1]), dass er Letzterem nicht ersparte, sich deutlicher über das Unendlichkleine auszusprechen. In einem Briefe vom 2. Februar 1702 beruft sich Leibniz auf sein Stetigkeitsgesetz, welches er vormals in den von Pierre Bayle (1647—1706) seit 1684 herausgegebenen *Nouvelles de la Republique des Lettres* aufgestellt habe[2]). Es war dieses im Mai 1687 in einem philosophischen Streite mit Mallebranche, und der Wortlaut, dessen Leibniz sich damals bediente, ist folgendermassen zu übersetzen: „Wenn das zwei Aufgaben von einander Unterscheidende *in datis*, d. h. in dem, was als bekannt angenommen ist, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden kann, so kann es auch *in quaesitis*, d. h. in dem, was herauskommt, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden. Oder um einfacher zu reden, wenn die Voraussetzungen (oder das Gegebene) sich einander beständig nähern und sich schliesslich in einander verlieren, so müssen die Folgen, das was herauskommt (oder das Gesuchte) das Gleiche thun." Im Juni 1697 äusserte sich Johann Bernoulli beifällig in einem an Leibniz gerichteten Briefe[3]) Seine *lex continuitatis*, sagt er, gefalle ihm sehr. Es sei ersichtlich und gleichsam durch die Natur uns eingegeben, dass wenn die Ungleichheit der Voraussetzungen schwinde, auch die Ungleichheit der Ergebnisse schwinden müsse.

Im Mai 1702 kam Leibniz in einem im *Journal des Sçavans* veröffentlichten kurzen Aufsatze[4]), *Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebre ordinaire*, auf das Stetigkeitsgesetz zurück. Er beginnt mit der Betrachtung einer Figur (Figur 46). Zu AX ist in X eine Senkrechte XY, in A eine Senkrechte AE gezogen, dann ferner die YE, welche mit XY einen von 45^0 verschiedenen Winkel bildet, so dass $AE = e$ und $AC = c$ verschieden lang sind. Heisst $AX = x$, mithin $CX = x - c$ und $XY = y$, so ist $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$.

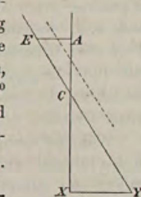

Fig. 46.

Diese Gleichung bleibt bei jeder Parallelverschiebung von YE bestehen, wenn auch dadurch, dass diese Verschiebung in Gestalt einer Annäherung an A stattfindet, die Längen c und e kleiner und kleiner werden, während sie dabei

[1]) Leibniz IV, 89—204. [2]) Ebenda IV, 93. Vgl. auch Chasles, *Aperçu hist.* pag. 357 (deutsch S. 379), wo die Stelle aus den *Nouvelles de la Republique des Lettres* abgedruckt ist. Ueber die Geschichte der logischen Grundlage des Infinitesimalcalcüls verbreitet sich die Monographie von Giulio Vivanti, *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione allamatematica.* Mantova 1894.
[3]) Leibniz III, 432. [4]) Ebenda IV, 104—106.

fortwährend ungleich bleiben. Geht die verschobene YE endlich durch A selbst, so wird $c = 0$ und $e = 0$. Dabei nimmt $\frac{x-c}{y}$ die Form $\frac{x}{y}$ an, und diesem Bruche ist alsdann der Bruch $\frac{c}{e}$ gleich, dessen Zähler und Nenner von einander verschieden sind, trotzdem sie beide den Werth Null haben. Diese Betrachtung sei nicht Infinitesimalcalcül, benutze aber dessen Grundgedanken, das sogenannte Stetigkeitsgesetz[1]). Nach diesem Gesetze sei Gleichheit ein Sonderfall der Ungleichheit, Ruhe ein Sonderfall der Bewegung, Parallelismus ein Sonderfall des Zusammentreffens. Nicht als ob man annähme, der Unterschied der einander gleich werdenden Grössen sei schon Nichts, sondern er sei im Begriffe zu verschwinden, und ebenso bei der Bewegung. Man nehme nicht an, sie sei durchaus nicht vorhanden, sondern sie sei im Begriffe dazu. Gebe sich Jemand damit nicht zufrieden, so könne man ihm in archimedischer Weise zeigen, dass der Irrthum, der begangen werde, nicht angebbar und durch keine Zeichnung ausfindig zu machen sei. Auch der Kreis, heisst es weiter, sei kein regelmässiges Vieleck, aber Ruhe, Gleichheit, Kreis seien die Endgrenzen von Bewegung, Ungleichheit, regelmässigem Vieleck, welche bei fortwährender Veränderung im Verschwinden dahin gelangen[2]).

Das war unzweifelhaft klarer ausgedrückt, als Leibniz im Mai 1687 geschrieben hatte, aber es war doch derselbe Gedanke wie damals, und in jener früheren Veröffentlichung kann von einer etwaigen Beeinflussung durch Aeusserungen Newtons unter keinen Umständen die Rede sein. Newtons Briefe an Leibniz kennt man, sie enthalten kein Wort über Grenzbetrachtungen. Newtons Principien aber wurden im Juli 1687 ausgegeben (S. 199) mehrere Monate nach dem Maihefte des Journal des Scavans, und Leibniz lernte auch nur den allgemeinsten Inhalt derselben erst durch die A. E. vom Juni 1688 kennen (S. 208).

Während Leibniz in den ersten Jahren des neuen Jahrhunderts an der Integralrechnung kräftig weiter baute und zugleich die Grundmauern des ganzen Gebäudes zu festigen wusste, war Newton in ganz anderer Weise beschäftigt. Einestheils nahm seine Thätigkeit an der Münze (S. 66) ihn sehr in Anspruch, auch nachdem in den Jahren 1696 bis 1699 die Neuprägung des Silbergeldes vollendet war[3]), anderntheils wurde er am 26. November 1701 abermals zum Parlamentsmitgliede für Cambridge gewählt[4]), und bald nach dem Zusammentritt der Versammlung starb Wilhelm III., bestieg Königin Anna den Thron und änderte das Ministerium zu Gunsten der Tories, lauter Ereignisse, die für einen ausgesprochenen Parteimann wie Newton aufregend und zeitraubend sein mussten.

[1]) *Ce que j'appelle la loy de la Continuité.* [2]) *Le repos, l'égalité et le cercle terminent les mouvements, les inégalités et les polygones réguliers, qui par un changement continuel y arrivent en évanouissant.* [3]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXXVI unter 1699 Nov. 30. [4]) Ebenda pag. XXXVI unter 1701 Nov. 26.

Hat Newton während dieser ganzen Zeit und bis gegen 1704 sich von wissenschaftlichem Schaffen ganz abgewandt? Sind damals oder etwa schon früher geometrische Entdeckungen von ihm gemacht worden, von welchen im 99. Kapitel ausführlich die Rede sein muss und welche zu den bedeutendsten Leistungen gehören, denen er seine Unsterblichkeit verdankt? Wir wissen es nicht. Jedenfalls erschien erst im Februar 1704 ein Bändchen aus Newtons Feder. Es enthielt seine Optik[1]), eine geometrische Abhandlung über Curven dritten Grades (eben jene Untersuchungen, für welche wir auf unser 99. Kapitel vertröstet haben), eine der Infinitesimalrechnung gewidmete Abhandlung. Die Optik wurde für sich in mehrfachen Auflagen neu gedruckt. Die beiden mathematischen Abhandlungen gab William Jones 1711 gemeinschaftlich mit der Analysis per aequationes abermals heraus. Die Abhandlung über die Infinitesimalrechnung führt die Ueberschrift *De Quadratura Curvarum*[2]), und über sie haben wir jetzt zu berichten.

Eine Einleitung geht voraus. „Ich betrachte hier, sagt Newton[3]), die mathematischen Grössen nicht als aus kleinsten Theilen bestehend, sondern als durch eine stetige Bewegung beschrieben. Linien werden beschrieben und im Beschreiben erzeugt nicht etwa durch Aneinanderfügen von Theilen, sondern durch stetige Bewegung von Punkten, Oberflächen desgleichen durch Bewegung von Linien, Körper durch Bewegung von Oberflächen, Winkel durch Bewegung von Seiten, Zeiten durch ihren stetigen Fluss u. s. w. Diese Erzeugungsweisen finden in der Natur der Dinge wirklich statt und sind bei der Bewegung der Körper alltäglich zu sehen. Auf diese Weise lehrten auch die Alten die Erzeugung der Rechtecke, indem sie bewegliche Gerade längs unbeweglicher Geraden hinführten[4]). Indem ich also in Betrachtung zog, dass in gleichen Zeiten wachsende und im Wachsen erzeugte Grössen je nach der grösseren und kleineren Geschwindigkeit, mit welcher sie wachsen und erzeugt werden, grösser oder kleiner ausfallen, suchte ich eine Methode, die Grössen aus den Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse, mittels deren sie entstehen, zu bestimmen, und indem ich diese Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse Fluxionen nannte und die erzeugten Grössen Fluenten, verfiel ich allmählich in den Jahren 1665 und 1666

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXXVI unter 1704 Februar. [2]) *Opuscula Newtoni* I, 201—244. [3]) Ebenda I, 203—204. [4]) *ducendo Rectas mobiles in longitudinem Rectarum immobilium.*

auf die Fluxionsmethode, deren ich mich hier zur Quadratur der Curven bediene. Fluxionen verhalten sich so nahezu als möglich wie die in gleichen kleinsten Zeittheilchen erzeugten Vermehrungen der Fluenten, oder, um genau zu reden, sie befinden sich im ersten Verhältnisse der eben entstehenden Vermehrungen, sie können aber durch irgend welche ihnen proportionale Linien vor Augen gelegt werden“[1]). Etwas später heisst es, es komme auf das Gleiche hinaus, wenn man die Fluxionen als im letzten Verhältnisse der verschwindenden Theile stehend annehme, und noch weiter unten: auch kleinstmögliche Fehler seien bei mathematischen Dingen nicht verachtbar[2]).

Newton lässt geometrische Beispiele folgen. Zu dem ersten Beispiele benutzt er eine Figur von grosser Verwandtschaft mit unserer Figur 28 (S. 159), welche wir der Analysis per aequationes entnommen haben, und erörtert an ihr das Verhältniss der Fluxionen des Flächenraums ABD und des Rechteckes $ABKH$, welches dem Verhältnisse von DB zu BK gleich sei, wo die beiden Flächen einen Zuwachs zu erlangen beginnen.

Bei einem anderen Beispiele dient ihm Figur 47. Die um den Pol P drehbare Gerade BP schneidet die beiden anderen feste Gerade AB und AE in B und E; man sucht das Verhältniss der Fluxionen von AB und AE. Geht PB durch Drehung in die Lage Pb über, so wächst AB um Bb, AE um Ee, und das Verhältniss dieser Stücke im Augenblicke des Entstehens wird gesucht. Zieht man $BC \parallel AE$, so ist wegen Aehnlichkeit von Dreiecken

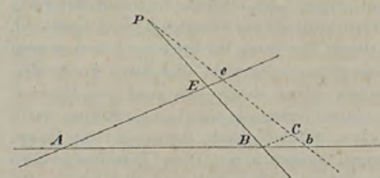

Fig. 47.

$$Bb : BC = Ab : Ae$$
$$BC : Ee = PB : PE.$$

Multiplication dieser Proportionen liefert $Bb : Ee = Ab \times PB : Ae \times PE$, deren rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theile beim Verschwinden von Bb und Ee in $AB \times PB : AE \times PE$ als dem Fluxionsverhältnisse übergehen.

---

[1]) *Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium Augmenta aequalibus Temporis particulis quam minimis genita, et, ut accurate loquar, sunt in prima Ratione Augmentorum nascentium; exponi autem possunt per Lineas quascunque, quae sunt ipsis proportionales.* [2]) *Errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi.*

Als analytisches Beispiel wird die Fluxion von x^n abgeleitet. Wenn x in $x + o$ übergeht, so wird behauptet, gehe x^n in

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$$

über, wobei als selbstverständlich betrachtet wird, dass die Giltigkeit der Reihenentwicklung sich nicht auf den Fall eines positiven ganzzahligen n beschränkt. Die beiderseitigen Veränderungen sind o und $nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$, welche sich zu einander verhalten wie $1 : nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o x^{n-2} + \cdots$. Das letzte Verhältniss der Veränderungen beim Verschwinden ist $1 : nx^{n-1}$.

„Mittels ähnlicher Erörterungen (fährt Newton fort) lassen sich durch die Methode der ersten und letzten Verhältnisse die Fluxionen grader oder krummer Linien in allen Fällen ermitteln, ebenso die Fluxionen von Oberflächen, Winkeln und anderen Grössen. Es ist im Einklang mit der Geometrie der Alten, die Analyse bei endlichen Grössen anzustellen und die ersten oder letzten Verhältnisse endlicher Grössen bei ihrem Entstehen oder Verschwinden aufzusuchen, und ich wollte zeigen, dass man bei der Fluxionsmethode keine unendlich kleinen Figuren in die Geometrie einzuführen braucht. Man kann allerdings die Analyse an beliebigen Figuren, an endlichen wie an unendlich kleinen, welche den verschwindenden Figuren ähnlich sind, durchführen und auch an solchen Figuren, welche gemäss der Methode der Indivisibilien für unendlich klein gehalten werden, wenn man nur Vorsicht anwendet.“

Zum Schlusse der Einleitung heisst es dann: „Aus den Fluxionen die Fluenten zu finden ist ein schwieriges Problem, und der erste Schritt zu dessen Auflösung kommt der Quadratur der Curven gleich. Ueber diese habe ich vor langer Zeit[1]) das Folgende geschrieben.“

Die eigentliche Abhandlung, welche jetzt erst folgt, lehrt die Bezeichnung der auf einander folgenden Fluxionen durch Pünktchen, welche in einer Anzahl bis zu vier in Anwendung kommen, wie es in den Briefen von 1693 der Fall gewesen war (S. 251), daneben sind aber Accente benutzt, welche senkrecht über einen Buchstaben gesetzt bedeuten, der accentlose Buchstabe sei die Fluxion des accentuirten[2]). Mit anderen Worten Newton definirt:

$$\overset{|}{x} = \int x\,dz, \quad \overset{||}{x} = \int \overset{|}{x}\,dz = \int dz \int x\,dz \text{ u. s. w.,}$$

---

[1]) *olim.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 208: *hae quantitates* (z, y, x, u) *considerari possunt ut Fluxiones aliarum, quas sic designabo* $\overset{|}{z}$, $\overset{|}{y}$, $\overset{|}{x}$, $\overset{|}{u}$; *et hae ut Fluxiones aliarum* $\overset{||}{z}$, $\overset{||}{y}$, $\overset{||}{x}$, $\overset{||}{u}$; *et hae ut Fluxiones aliarum* $\overset{|||}{z}$, $\overset{|||}{y}$, $\overset{|||}{x}$, $\overset{|||}{u}$.

wenn z als die unabhängig Veränderliche aufgefasst wird. Allerdings kommt dann im ganzen Verlauf der Abhandlung nicht ein einziger accentuirter Buchstabe mehr vor. Algebraische Functionen werden differentiirt und die Differentiationsregeln bewiesen, wenn es uns gestattet ist, diese von Newton selbstredend nicht verwandten Wörter zu gebrauchen. Irrationalitäten werden dabei durch neue Buchstaben ersetzt, und die dazu dienenden Hilfsgleichungen werden durch Potenzirung rational gemacht, worauf die Differentiation erfolgt, welche die Differentiale der Hilfsgrössen ermitteln lässt. Die nächste Aufgabe verlangt quadrirbare Curven aufzufinden[1]). Als Quadratur u der Curven, deren Abscisse z heisst, wird $z^\vartheta R^\lambda$ angenommen, wo

$$R = e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} + \cdots.$$

Alsdann ist

$$\dot u = \vartheta \dot z z^{\vartheta - 1} R^\lambda + \lambda z^\vartheta \dot R R^{\lambda - 1} = z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}[\vartheta \dot z R + \lambda z \dot R].$$

Aber $\dot R = nf\dot z z^{n-1} + 2ng\dot z z^{2n-1} + 3nh\dot z z^{3n-1} + \cdots$ und folglich

$$\dot u = z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1} \dot z \left[\vartheta e \substack{+\vartheta \\ +\lambda n} fz^n \substack{+\vartheta \\ +2\lambda n} gz^{2n} \substack{+\vartheta \\ +3\lambda n} hz^{3n} \substack{+\text{etc.} \\ +\text{etc.}}\right].$$

Durch $\dot z = 1$ ergiebt sich alsdann die Ordinate der quadrirbaren Curve. Ist noch $S = k + lz^n + mz^{2n} + \cdots$, so kann auch $u = z^\vartheta R^\lambda S^\mu$ als Fläche angenommen und die zur Abscisse z gehörige Curvenordinate ermittelt werden. Sie stellt sich dar als Product von $z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$ in eine nach Potenzen von z^n fortschreitende Reihe. Die Regeln ändern sich nicht im mindesten, wenn von den Exponenten ϑ, λ, μ einer oder der andere aufhört ganzzahlig positiv zu sein, und dann ist die Quadratur einer Curve gewonnen, deren Ordinate eine im Zähler oder im Nenner auftretende Irrationalität enthält. Hierauf geht Newton zur Umkehrung der Aufgabe in dem Sinne über, dass die Ordinate einer Curve in der Gestalt $z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}[a + bz^n + cz^{2n} + \cdots]$ gegeben sein soll, woraus die Quadratur

$$z^\vartheta R^\lambda [A + Bz^n + Cz^{2n} + Dz^{3n} + \cdots]$$

gefunden werden muss. Der eingeschlagene Weg ist der, dass zu den Quadraturen $Az^\vartheta R^\lambda$, $Bz^{\vartheta+n} R^\lambda$, $Cz^{\vartheta+2n} R^\lambda$, $Dz^{\vartheta+3n} R^\lambda$ etc. entsprechende Curvenordinaten gesucht werden, deren Summe alsdann mit dem gegebenen Ausdrucke $z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}[a + bz^n + cz^{2n} + \cdots]$ in Uebereinstimmung gesetzt wird. So entstehen Gleichungen zwischen $e, f, g, h \ldots$ (den in R vorkommenden Coefficienten) $a, b, c \ldots$ und $A, B, C \ldots$, mittels deren $A, B, C \ldots$ gefunden werden. Das Verfahren erfährt keine wesentliche Aenderung, wenn die Curvenordinate noch einen weiteren Factor $S^{\mu-1}$ einschliesst. Im weiteren Verlaufe wird R binomisch gedacht $= e + fz^n$, indem die Coefficienten $g, h \ldots$ den

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 212 sq.

Werth Null annehmen; ferner werden auch die Coefficienten $b, c \ldots$ als verschwunden gedacht; mithin wird die Quadratur der Curve von der Ordinate $az^{\vartheta-1}(e + fz^n)^{\lambda-1}$ unter gewissen Voraussetzungen ermittelt, welche darauf hinauskommen, dass ϑ ein Vielfaches von n ist, $\vartheta = n$, $\vartheta = 2n$, $\vartheta = 3n$, $\vartheta = 4n$ etc.

Gegen Ende der Abhandlung findet sich ein Scholium, von welchem eine Stelle[1]) eine geschichtliche Bedeutung gewonnen hat. Wir übersetzen sie deshalb wörtlich: „Wir haben oben gesagt, es gebe erste, zweite, dritte, vierte ... Fluxionen der im Flusse befindlichen Grössen. Diese Fluxionen verhalten sich wie die Glieder convergenter unendlicher Reihen. Ist etwa z^n eine Fluente, welche in ihrem Flusse zu $(z + o)^n$ wird, so verwandelt man diesen Ausdruck in die convergente Reihe

$$z^n + noz^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 z^{n-2} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} o^3 z^{n-3} + \cdots.$$

Das erste Glied dieser Reihe z^n ist die Fluente selbst; das zweite noz^{n-1} ist ihr erster Zuwachs, ihre erste Differenz, welcher, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die erste Fluxion proportional ist[2]); das dritte Glied $\frac{n^2 - n}{2} o^2 z^{n-2}$ wird der zweite Zuwachs oder die zweite Differenz sein, und ihr ist, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die zweite Fluxion proportional; das vierte Glied $\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} o^3 z^{n-3}$ wird der dritte Zuwachs oder die dritte Differenz sein, und ihr ist, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die dritte Fluxion proportional und so fort ins Unendliche."

Wir haben an diesen Bericht über die Quadratura Curvarum einige Bemerkungen anzuknüpfen. Eine wichtige Frage geht dahin, wann die Abhandlung entstanden sei? Newton selbst hat sich darüber in einem Briefe an John Keill, eine Persönlichkeit, welche wir noch genau genug kennen lernen werden, ausgesprochen. Unter dem 15. Mai 1714 schrieb er diesem[3]), das Buch der Quadraturen sei alt, Vieles daraus sei schon in dem Briefe vom 24. October 1676 benutzt. Mit dieser Aussage stimmt überein, was wir (S. 186) von dem Vorkommen des Integrals $\int az^\vartheta (e + fz^\eta)^\lambda dz$ in jenem Briefe sagten, eine Integration, in welcher die Quadratura Curvarum gipfelt. Ob die ganze Ab-

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 241—242. [2]) *Terminus primus hujus seriei* z^n *erit Quantitas illa fluens; secundus* noz^{n-1} *erit ejus Incrementum primum seu Differentia prima, cui nascenti proportionalis et ejus Fluxio prima.* [3]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 176: *The book of Quadratures is ancient, many things being cited out of it by me in my Letter of 25. Octob. 1676.*

handlung vor langer Zeit niedergeschrieben war, ob Newton sie nach alten Aufzeichnungen neu stylisirte, ist ziemlich gleichgiltig. Wir persönlich halten das letztere für nahezu selbstverständlich, möchten aber unsere Meinung Niemandem aufdrängen.

Die Einleitung der Quadratura Curvarum dagegen ist ganz gewiss neu hinzugekommen. Das erkennt man aus dem ganzen Wortlaute, erkennt man besonders daraus, dass, wie in unserem abkürzenden Berichte (S. 281) mitgetheilt ist, Newton selbst erklärt, die Abhandlung vor langer Zeit, *olim*, niedergeschrieben zu haben. Gehört aber demnach die Einleitung den Jahren unmittelbar vor 1704 an, dann ist sie eine Bekämpfung Leibnizischer Gedanken in der geringschätzendsten Form. Wollte Newton in bestimmter Weise gegen den Gebrauch des Unendlichkleinen Front machen, so musste er doch wenigstens den Mann oder die Schule nennen, welche diese Auffassung als die ihrige besassen.

Oder sollte er, der spätere Newton, gegen den früheren Newton eine Art von Selbstanklage erhoben haben? Man hat darauf aufmerksam gemacht[1]), dass Newton selbst einst von dem Unendlichkleinen einen Gebrauch machte, der von der Leibnizischen Betrachtungsweise sich kaum unterschied. In der Methodus fluxionum sagte er von dem vorkommenden o, es sei unendlich klein, die diesen Buchstaben enthaltenden Glieder dürften deshalb den anderen gegenüber vernachlässigt werden (S. 170). In den Principien hiess es: Die Momente hören auf Momente zu sein, sobald sie eine endliche Grösse erhalten (S. 203), und daran schloss sich in der ersten Ausgabe von 1687 der Satz, dem beständigen Zunehmen oder Abnehmen der Momente widerstrebe es, wollte man ihm ein Ende geben[2]). In der zweiten Auflage von 1713 blieb freilich dieser Zusatz weg, und man kann in dessen Entfernung einen Einklang mit der Veränderung des bekannten Scholiums erkennen, welches jetzt die Art der Entstehung der Grössen als ein Unterscheidendes zwischen den Methoden von Newton und Leibniz hervorhob (S. 204). Aber war Newton gewillt, 1704 seine eigenen früheren Gedanken zu verleugnen, so musste er erst recht sagen, wogegen die abwehrenden Worte sich richteten, damit Leibniz und seine Anhänger sich nicht getroffen glaubten.

Neu scheint wie die Einleitung auch das von uns (S. 283) theilweise übersetzte Scholium gegen Schluss der Quadratura Curvarum gewesen zu sein. Das Wort *Differenz*, welches dort wiederholt als

[1]) De Morgan, *On the early history of Infinitesimals in England. Philosophical Magazine* für November 1852 pag. 321—330, besonders pag. 323—325.
[2]) *Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento.*

gleichbedeutend mit *Increment* auftritt, hat vor den Leibnizischen Veröffentlichungen keinen Erklärungsgrund.

Sachlich leuchtet ein, dass in dem Scholium Unrichtiges behauptet ist. Das Glied $\frac{n^2-n}{2}z^{n-1}$ ist nicht der zweite, $\frac{n^3-3n^2+2n}{6}z^{n-2}$ nicht der dritte Differentialquotient von z^n. Die Nenner 2, 6 müssten weggedacht werden, wenn die Behauptung richtig sein sollte. Nicht als ob man Newton darum den Vorwurf zu machen berechtigt wäre, er habe von höheren Differentialquotienten nichts verstanden. Am Anfang der Abhandlung sind vielmehr die späteren Fluxionen in ihren Beziehungen zu den früheren genau erklärt. Aber dem Vorwurfe unterliegt Newton allerdings, in der Uebereilung nicht gesehen zu haben, dass die Uebereinstimmung der von o befreiten Glieder der Binomialentwicklung $(z+o)^n$ mit den Fluxionen von z^n nach dem zweiten Gliede noz^{n-1} aufhört, ein Vorwurf, der Newton noch schwerer für den zweiten Abdruck der Quadratura Curvarum vom Jahre 1711 (S. 279) trifft, wo der Fehler einfach abgedruckt wurde.

Was den Inhalt der eigentlichen Abhandlung betrifft, so gilt von ihm etwa das Gleiche, was wir (S. 253) von den Briefen von 1693 sagten. Die Veröffentlichung der Quadratura Curvarum konnte nur Verwunderung erregen. Jetzt noch die Integration ganzer algebraischer Functionen, zu deren Herstellung ausschliesslich die Methode der unbestimmten Coefficienten Verwendung fand, für druckberechtigt zu halten, das war im Jahre 1704 eine starke Zumuthung für die Mathematiker des europäischen Festlandes, und ein Widerspruch war fast unausbleiblich.

94. Kapitel.

Der Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz bis April 1712.

Der Prioritätsstreit sei durch Fatios Schrift von 1699 *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex etc.* begonnen gewesen, sagten wir (S. 261) am Schlusse des XVI. Abschnittes. Jetzt, wo es uns obliegt, die Geschichte des Streites selbst eingehend zu erzählen, beginnen wir damit, die beleidigenden Worte Fatios genauer anzugeben[1]). Fatio will den zur Bewältigung der Aufgabe der Brachistochrone nöthigen Calcül im April 1687 selbständig erfunden haben[2]). Sein Wissen in dieser Beziehung würde kein geringeres gewesen sein, wenn Leibniz damals noch gar nicht geboren gewesen wäre. Möge

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 223 und Giesel in dem Delitzscher Schulprogramm von 1866 S. 17 Anmerkung 46. [2]) *proprio Marte inveni.*

dieser daher anderer Schüler sich etwa rühmen, ihn könne er nicht unter deren Zahl rechnen, dafür könne der Briefwechsel, welchen er, Fatio, mit Huygens geführt habe, falls er zur Veröffentlichung gelange, als Zeugniss dienen. Dann heisst es weiter[1]: „Das freilich erkenne ich an, dass Newton der erste und um mehrere Jahre älteste Erfinder dieses Calcüls war, denn dazu nöthigt mich die Augenscheinlichkeit der Dinge. Ob Leibniz, der zweite Erfinder, etwas von jenem entlehnt hat, darüber sollen lieber andere als ich ihr Urtheil abgeben, denen Einsicht in die Briefe oder sonstige Handschriften Newtons gestattet wird. Niemanden, der durchstudirt, was ich selbst an Dokumenten aufgerollt habe, wird das Schweigen des allzubescheidenen Newton oder Leibnizens vordringliche Geschäftigkeit täuschen."

Wir machen dazu drei Bemerkungen. Erstens Fatio schickte seine Streitschrift nicht an Leibniz. Zweitens dieselbe erschien unter ausdrücklicher und ausgesprochener Genehmigung des stellvertretenden Vorsitzenden der Royal Society. Drittens Fatio hatten Papiere Newtons vorgelegen, was ohne dessen Einwilligung kaum denkbar ist.

Was für Papiere und Briefschaften das gewesen sein mögen, lässt sich mit voller Bestimmtheit nicht behaupten, vielleicht solche, die gleichfalls im Jahre 1699 im Drucke erschienen. Wir wissen, dass 1693 der zweite Band von Wallis' Werken erschienen war und in ihm ein Bericht über die späteren Briefe Newtons an Wallis (S. 251 bis 253). Im Jahre 1699 liess Letzterer den dritten Band seiner Werke folgen, und in ihm war der erste und zweite Brief Newtons an Leibniz und die Antwort Leibnizens zu lesen. Diese Papiere könnte allenfalls Fatio auch ohne Newtons Wissen in der Druckerei gesehen haben.

Zwischen dem Entwurfe von Leibnizens Antwort auf den zweiten Brief Newtons vom 24. October 1676 und dem Abdrucke dieser Antwort im III. Bande von Wallis' Werken besteht ein merkwürdiger Unterschied, den wir hier hervorzuheben haben. Wir sagten (S. 184), dass Oldenburg den Brief vom 24. October 1676 erst unter dem 2. Mai 1677 an Leibniz abgehen liess, dass dieser alsdann (S. 187) den Brief an dem Tage, an welchem er ihn erhielt, noch beantwortete. Unsere Quelle war der Abdruck des Entwurfes[2]. Da der Entwurf

[1] *Commerc. epistol.* pag. 168 und 224: *Newtonum tamen primum ac pluribus annis vetustissimum hujus calculi inventorem ipsa rerum evidentia coactus agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius secundus ejus inventor malo eorum quam meum sit judicium quibus visae fuerint Newtoni litterae aliique ejusdem manuscripti codices. Neque modestioris Newtoni silentium, aut prona Leibnitii sedulitas, inventionem hujus calculi sibi passim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractaverint, quae ipse evolvi, instrumenta.* [2] Leibniz I, 154.

unter dem Leibnizischen Nachlasse in der Königlichen öffentlichen Bibliothek in Hannover aufbewahrt wird, so liessen wir uns, um sicher zu gehen, ein Facsimile der Anfangszeilen kommen[1]. Sie lauten: *Accepi hodie literas tuas diu expectatas cum inclusis Neutonianis sane pulcherrimis*, ich erhielt heute Ihren lange erwarteten Brief und als Einschluss einen sehr schönen Brief Newtons. Die Worte sind in fortlaufender Linie geschrieben, abgesehen von dem vierten Worte *tuas*, welches über der Linie stehend eingeflickt erscheint. Eine sonstige Aenderung ist in beiden Zeilen, welche von Leibniz selbst geschrieben sind, nicht wahrnehmbar. Eine gleichzeitige Datirung ist nicht vorhanden, dagegen hat Leibniz später mit etwas schwärzerer Tinte an den Kopf des Blattes geschrieben: *21. Jun. 1677. Exstat Commerc. p. 88.* Nun der englische Abdruck. Er gibt das Datum 21. Juni 1677 und lässt das zweite Wort der ersten Zeile ***hodie*** weg. Wie ist diese Veränderung zu Stande gekommen? Darüber musste das Original des nach England gekommenen Briefes befragt werden, wenn es noch vorhanden war, und es fand sich nebst einer Abschrift desselben im Archive der Royal Society in London[2]. Das Original bildet einen Theil einer mit der Nummer LXXXI bezeichneten Sammlung: „Letters and papers referred to in the Commercium epistolicum. Edit. 1722." Es ist in recht unreinlichem Zustande und enthält zahlreiche Durchstreichungen und Veränderungen. Das Wort *hodie* ist nicht eigentlich durchstrichen, sondern durch einen es bedeckenden Klecks nahezu unleserlich, es sei denn, man wisse, wie es heissen soll. Die Abschrift befindet sich in einem „Letter-Book" und enthält das Wort *hodie* gar nicht. Darnach scheinen nur zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder ist der Klecks absichtlich oder unabsichtlich vor Absendung des Briefes in Hannover entstanden, oder man hat in England schon vor 1699 das Wort unleserlich gemacht. Wir halten die erstere Vermuthung für die weitaus wahrscheinlichere, wie wir im nächsten Kapitel begründen wollen. Auf die Folgen, welche jene Veränderung nach sich zog, kommen wir im weiteren Verlaufe zurück.

Dem Marquis De L'Hôpital kam Fatios Schrift zu Händen, und er schickte sie Leibniz am 13. Juli 1699. In dem Begleitbriefe machte L'Hôpital[3] auch auf den im III. Bande der Gesammtwerke von Wallis erfolgten Abdruck einiger Briefe von Leibniz u. s. w. auf-

[1] Herr Dr. Bodmann, der Vorstand jener Bibliothek, hatte die grosse Güte, das Facsimile selbst für mich anzufertigen. [2] Die Auskunft über die im Besitze der Royal Society befindlichen Belegstücke verdanken wir dem liebenswürdigen Entgegenkommen eines Beamten der Gesellschaft, Herrn Robert Harrison. [3] Leibniz II, 336.

merksam, welcher die Absicht erkennen lasse, Newton die Erfindung der Leibnizischen Differentialrechnung zuzuschreiben, welche dieser Fluxionsrechnung nenne. Es scheine, als ob die Engländer auf alle Art versuchten, den Ruhm der Erfindung für ihre Nation in Anspruch zu nehmen. Leibnizens Antwort[1]) enthält den Dank für die Uebersendung. Ueber Fatios Ruhmredigkeit macht er sich lustig. Wenn dieser schon so lange so viel gewusst hat, warum hat er es nicht bekannt werden lassen? Newton werde Fatios Aeusserungen hoffentlich nicht billigen, dazu wisse er zu genau, wie der wahre Sachverhalt sei. Endlich die Veröffentlichung seiner Briefe durch Wallis sei mit seiner Einwilligung erfolgt. Wallis habe ihm auch gestattet anzugeben, was er etwa beim Abdruck gestrichen wünsche, er aber habe, da er das Bekanntwerden der nackten Wahrheit nicht zu fürchten brauche, geantwortet, Wallis solle aus den Briefen nach Gutdünken drucken lassen, was ihm der Veröffentlichung werth erscheine.

Ungefähr gleichzeitig wie an L'Hôpital schrieb Leibniz unter dem 4. August auch an Wallis[2]). Der unverdiente und unerwartete Angriff, den Fatio auf ihn gemacht habe, würde ihn wenig berühren, wenn nicht die Druckerlaubniss von Seiten der Royal Society ertheilt worden wäre, was er, er müsse es gestehen, nicht ohne grosse Verwunderung gesehen habe. Wie er eine solche öffentliche Verletzung verdient habe, sei er nicht im Stande sich auszudenken. Sein einziger Trost bestehe in der Hoffnung, jene Druckerlaubniss möge erschlichen worden sein, doch bedürfe er der Bestätigung dieser Hoffnung. Wallis möge in Gemässheit seines öfters bezeugten Wohlwollens die Sache untersuchen. Wenn dieser ihm dann sage, dass die Schreibart, deren Fatio sich gegen ihn bedient habe, den Beifall der Royal Society nicht finde, so genüge ihm das.

Wallis that, worum Leibniz ihn bat. Am 29. August erklärte er[3]) Leibniz, er habe Fatios Buch gesehen, aber nicht gelesen. Bis zum Empfange von Leibnizens Brief habe er nicht geahnt, dass in dem Buche gegen Diesen gerichtete Dinge sich fänden, welche er selbst keineswegs billige, mögen sie von Fatio oder von einem anderen geschrieben sein[4]). Nach diesem Satze, der vielleicht in dem Sinne zu verstehen ist, als vermuthe Wallis, Fatio habe nur als Sprachrohr eines Dritten gedient, dessen Name alsdann leicht einzusetzen ist, geht er zu einer Würdigung Fatios über. Es sei ja wahr, dass Fatio in die Royal Society Aufnahme gefunden habe,

[1]) Leibniz II, 337. [2]) Ebenda IV, 70. [3]) Ebenda IV, 71—72. [4]) *Sive ab ipso sive ab alio scriptum.*

aber deshalb stehe er in der Achtung der Mitglieder keineswegs so hoch, dass er Leibniz vorgezogen werde, oder denselben unwürdig behandeln dürfe, einen Mann, der wie auch in anderen Dingen ganz besonders in der Mathematik sich grosse Verdienste erworben habe. Im nächsten Absatze wirft Wallis, scheinbar unbefangen, die Frage auf, ob etwa Fatio auch der Verfasser eines namenlos in den A. E. vom Februar 1699 pag. 87 flgg. erschienenen Aufsatzes gegen David Gregory sei, und wenn nicht, ob dann Leibniz bei der Redaction den Namen des Verfassers in Erfahrung bringen könne. Es gebe ein Geschlecht von Menschen, die ihre eigenen Sachen höher achten als die der übrigen Sterblichen und lieber andere verletzen, als sich selbst Verdienste erwerben.

Diese Briefstelle war freilich geeignet, Leibniz in Verlegenheit zu setzen, denn der namenlose Aufsatz rührte von ihm selbst her[1]). Aber freilich war, und das sagt auch Leibniz in seinem Antwortschreiben[2]), zwischen jenem Aufsatze und den Aeusserungen von Fatio ein ganz wesentlicher Unterschied. David Gregory hatte eine Untersuchung über die Kettenlinie veröffentlicht, welche zwar zu einem richtigen Ergebnisse führte, d. h. zu dem gleichen, welches seit 1691 (S. 219) den Mathematikern bekannt war, aber dieses Ergebniss auf einem dem Widerspruche ausgesetzten Wege erreichte. Diesem Widerspruche hatte der ungenannte Verfasser des Aufsatzes in den A. E. Worte verliehen, ohne gegen Gregory verletzend zu werden. Die Redaction weigere sich deshalb, erklärte Leibniz, den Namen des Einsenders zu nennen, während sie bereit sei, bei der ersten passenden Gelegenheit ihre Hochachtung vor Gregorys anderweitigen Verdiensten, die man voll anerkenne, deutlich auszusprechen. Diese Zusage wurde auch 1703 erfüllt[3]) durch eine lobende Besprechung von Gregorys *Astronomia physica et geometrica*, als deren Verfasser eine schriftliche Randnote Ferdinand Helfreich Lichtscheidt (1661—1707) nennt, einen hochgebildeten Geistlichen in Berlin, der auch der dortigen Akademie angehörte[4]). Leibniz hätte aber in seinem Briefe schon die Schlussworte jenes früheren Aufsatzes als Beweis dafür anführen können, dass es dort nur um eine sachliche Widerlegung sich handelte. Es sei glaublich, hiess es daselbst, dass Gregory bei wiederholter Ueberlegung seinen Irrthum unbefangen eingestehen werde; blieben ihm noch Zweifel, so möge

[1]) Leibniz V, 336—339. In den A. E. trägt der Aufsatz natürlich nicht, wie in dem späteren Abdrucke, die Bezeichnung: *ex Epistola G. G. Leibnitii*, sondern ist namenlos. [2]) Ebenda IV, 74. [3]) A. E. 1703 pag. 452—462. [4]) Poggendorff I, 1453—1454.

er Newton, dessen Methode er nach eigener Aussage benutzte, zu Rathe ziehen.

Wie konnte Wallis eine solche schlichte, in den höflichsten Formen auftretende Erwiderung mit persönlichen Verdächtigungen auf gleiche Linie stellen? Wir sehen hier eine Wirkung des englischen Nationalgefühls, an dessen Uebertreibung Wallis krankte, wie wir bei früherer Gelegenheit (S. 4) bemerken mussten. Im Prioritätsstreite werden wir noch oft auf die hässlichen Folgen einer an sich lobenswerthen Geistesrichtung hinweisen müssen. Wo ein Engländer in Frage kommt, hört bei Wallis, hört auch bald bei der Royal Society das Licht und Schatten gleich vertheilende Gerechtigkeitsgefühl auf. Den Engländer hören wir auch aus einem anderen Satze des Briefes Wallis' vom 29. August: Fatio sei kein Engländer, sondern ein Deutscher aus der Schweiz[1]), der allerdings eine gewisse Zeit in England verweilte, aber gegenwärtig wieder fort sei.

Nun kommt noch die Druckgenehmigung der Royal Society zur Sprache. Der stellvertretende Vorsitzende habe das Recht, dieselbe zu ertheilen und habe, da er glaubte nur eine geometrische Abhandlung vor sich zu sehen, von dem Rechte Gebrauch gemacht, ohne den Inhalt der Schrift zu lesen. Es liege also nur eine Unvorsichtigkeit vor, wie Leibniz aus einem beigelegten Briefe des Secretärs der Royal Society entnehmen könne, und welche er alsdann wohl entschuldigen werde. Dieser Secretär war seit 1693 Hans Sloane (1660—1752), ein bedeutender Arzt und Naturforscher. Sein von Wallis erwähnter, unzweifelhaft damals beigeschlossener Brief ist nicht gedruckt vorhanden. Eine Bestätigung der Uebersendung findet sich in Leibnizens Antwort[2]) an Wallis. An Fatios Aeusserungen, sagt er, sei ihm nicht mehr viel gelegen, seit er wisse, dass sie von der Royal Society nicht gebilligt würden; er behalte sich vor Herrn Sloane einen Dankbrief für seine so rasch bereite Freundlichkeit[3]) zu schreiben.

Jetzt begnügte sich aber Leibniz nicht mehr mit brieflichen Aeusserungen, sondern er gab in den A. E. eine öffentliche Antwort[4]) auf Fatios Beleidigungen. Der ganze Aufsatz ist ein Muster feiner Abfertigung und verdiente genauer bekannt zu sein. Die Gleichmässigkeit der Darstellung gestattet uns leider keinen ausführlichen Bericht, und wir heben nur drei Punkte hervor. Leibniz spricht erstens aus, dass Sloane in einem Briefe an einen Freund die Zusicherung gegeben habe, es werde in Zukunft von Gesellschaftswegen

[1]) Leibniz IV, 72: *non Anglus est, sed Germanus ex Helvetia.* [2]) Ebenda IV, 74. [3]) *in me quoque promtissimae humanitati.* [4]) Leibniz V, 340—349.

darauf gesehen werden, dass kein bissiger Ton von Seiten eines Mitgliedes gegen ein anderes eingeschlagen werde. Zweitens geht Leibniz auf eine der von Fatio behandelten Aufgaben ein, auf die Aufgabe die Gestalt des Körpers geringsten Widerstandes in einem dichten Mittel zu finden. Newton hatte im 7. Abschnitte des II. Buches der Principien die Aufgabe gestellt und gelöst, allerdings so gelöst, wie es bei ihm nur zu häufig war, ohne Ableitung oder Beweis des Ergebnisses. Damit trat nun Fatio hervor. Er wies einen Zusammenhang zwischen jener Eigenschaft des geringsten Widerstandes und dem Krümmungshalbmesser der Curve, welche bei ihrer Umdrehung den Körper erzeugt, nach. Noch 1699 liessen erst De L'Hôpital, dann Johann Bernoulli in den A. E. andere Beweise drucken[1]), welche einfacher waren, indem sie nur von Tangenteneigenschaften jener Curve Gebrauch machten. De L'Hôpital betonte dabei, in wie fern sein Beweis als der einfachere zu gelten habe: die Krümmung hänge nämlich vom zweiten, die Tangente nur vom ersten Differentialquotienten ab[2]), und eben diese Bemerkung wiederholt Leibniz. Drittens beruft sich Leibniz für die Unabhängigkeit seiner Erfindung der Differentialrechnung auf Newton[3]): „Hat dieser doch hinreichend öffentlich in seinen Principien von 1687 es ausgesprochen, dass Keiner von uns gewisse geometrische Erfindungen, welche uns gemeinschaftlich sind, der durch den Anderen ihm gelieferten Erleuchtung verdanke, dass Jeder vielmehr sie seinem eigenen Nachdenken schulde, dass ich sie schon ein Jahrzehnt früher auseinandergesetzt habe.“ Leibniz nennt hier das Scholium im 2. Abschnitte des II. Buches der Principien nicht ausdrücklich, aber es kann nicht zweifelhaft sein, dass er diese Stelle (S. 203—204) meinte. Ebensowenig kann zweifelhaft sein, dass Newton den Leibnizischen Aufsatz gelesen haben muss. Die ganze Angelegenheit machte sicherlich, seit Sloane im Namen der Royal Society sich eingemengt hatte, wenn nicht schon früher, in England so viel von sich reden, dass Newton, der mindestens mittelbar Betheiligte, unmöglich den Verlauf des Streites unbeachtet lassen konnte. Fatio hat überdies den Aufsatz gelesen, hat eine Entgegnung für die A. E. geschrieben, deren Aufnahme Mencke verweigerte[4]), und Fatio sollte nicht dafür gesorgt haben, dass Newton mit diesem Benehmen und mithin mit dem ganzen Streite bekannt werde? Das ist undenkbar. Newton wusste also

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 307—315. [2]) Ebenda I, 313. [3]) Leibniz V, 345: *Satisque indicavit publice, cum sua Mathematica Naturae Principia publicaret anno 1687, nova quaedam inventa Geometrica, quae ipsi communia mecum fuere, neutrum luci ab altero acceptae, sed meditationibus quemque suis debere, et a me jam decennio ante exposita fuisse.* [4]) A. E. 1701 pag. 134.

ganz gut, welchen Sinn man dem Scholium beilegte, und wenn er zwischen dem 11. October 1709 und dem 15. April 1710 (S. 204) dem Scholium eine nur noch deutlicher die beiderseitige Unabhängigkeit betonende Fassung geben liess, so wusste er, was damit gemeint war. Er wusste es und duldete es, trotzdem inzwischen der erste Act des Prioritätsdramas längst abgeschlossen und der Vorhang zum zweiten Aufzug schon in die Höhe gegangen war.

Wir wissen (S. 279), dass Newton im Jahre 1704 in der Druckerei der Royal Society ein englisch geschriebenes Buch über die Farben der Presse übergab und als Anhang zwei lateinische Abhandlungen beifügte, die *Enumeratio linearum tertii ordinis* und die *Quadratura Curvarum*. Schon im Januarhefte 1705 der A. E. erschien eine Besprechung dieses Anhangs[1]), deren Verfasser sich zwar nicht genannt hat, aber nie verkannt wurde. Die allgemeine Muthmassung deutete auf Leibniz hin, und ihre Bestätigung ergibt sich ebensowohl durch eine der schon mehrfach erwähnten Randnoten als durch die Empfangsanzeige Menckes[2]) vom 12. November 1704: „Hierauf habe berichten sollen, dass gestern Dero relation von des Hrn. Newton zweyen Algebraischen tractaten endlich bey mir eingelaufen, undt sage ich dafür gehorsamsten Danck.“ Durch eine Randbemerkung wissen wir ferner, dass Leibniz es auch gewesen war[3]), der 1703 ein anderes, die Fluxionsrechnung betreffendes Buch, die *Fluxionum methodus inversa* von George Cheyne[4]) (1671—1734) ziemlich günstig besprochen und es dahin gekennzeichnet hatte, es bediene sich zur Auflösung der inversen Tangentenaufgabe wesentlich der Reihenentwicklung unter Benutzung der Methode der unbestimmten Coefficienten, wodurch man zu Ergebnissen gelange, wenn andere Methoden nicht aufzufinden seien. Die Besprechung der beiden Newtonschen Abhandlungen berichtet zuerst auf vier Seiten über die *Enumeratio linearum tertii ordinis*, dann geht sie zu der *Quadratura Curvarum* über. Wir glauben hier die wichtigste Stelle wörtlich anführen zu müssen.

„Bevor der ungemein geistreiche Verfasser zu der Quadratur der Curven (oder vielmehr der krummlinigen Figuren) gelangt, schickt er eine kurze Einleitung voraus. Damit man diese besser verstehe, muss man wissen, dass wenn irgend eine Grösse stetig wächst, wie z. B. eine Linie durch das Fliessen eines sie beschreibenden Punktes wächst, jene augenblicklichen Zuwächse Differenzen genannt werden, nämlich Unterschiede zwischen der Grösse, wie sie früher war, und

[1]) A. E. 1705 pag. 30—36. [2]) Leibniz, Supplementband des Briefwechsels S. 15. [3]) A. E. 1703 pag. 450—452. [4]) Poggendorff I, 434.

wie sie durch die Veränderung eines Augenblickes wurde, und dass daraus der Differentialcalcül entstanden ist und dessen Umkehrung der summatorische Calcül, deren Elemente von ihrem Erfinder Herrn G. G. Leibniz in dieser Zeitschrift mitgetheilt worden sind, und wovon viele Anwendungen gezeigt wurden sowohl durch Ebendenselben als durch die Herren Brüder Bernoulli und durch den Marquis De L'Hôpital, dessen jüngst eingetretenen frühzeitigen Tod alle die schwer beklagen müssen, die den Fortschritt der tieferen Wissenschaft lieben. Statt der Leibnizischen Differenzen benutzt nun Herr Newton, und hat er immer benutzt[1]) Fluxionen, welche sich so nahe wie möglich wie die in gleichen kleinstmöglichen Zeittheilchen hervorgebrachten Vermehrungen der Fluenten verhalten. Er hat davon in seinen Mathematischen Principien der Naturlehre und in anderen später veröffentlichten Schriften einen eleganten Gebrauch gemacht, wie auch später Honoratus Fabri in seiner Synopsis Geometrica den Fortschritt der Bewegungen an Stelle der Methode Cavalieris setzte“[2]).

An diese wortgetreu durch uns übersetzte und auch bezüglich der Hervorhebung einzelner Wörter durch den Druck streng an das Original sich anschliessende Stelle knüpft Leibniz dann eine Schilderung der beiden Aufgaben der Differentiation und Integration mittels seiner Zeichen und ohne der Newtonschen Bezeichnung zu gedenken. Bei der Quadratur als Aufgabe der Integralrechnung habe Newton sehr nützliche Arbeiten vollbracht[3]). Er habe Reihen angewandt, welche bald ins Unendliche fortlaufen, bald abbrechen, und in diesem letzteren Falle das Ergebniss in algebraischer Gestalt aufweisen. Das seien Dinge, über welche seiner Zeit bei Gelegenheit des Berichtes über das Buch von Cheyne gesprochen worden sei.

Im Ganzen war also der Ton der Besprechung ein sehr wohlwollender, und der (S. 285) von uns angekündigte Widerspruch gegen die Veröffentlichung als solche wäre ein sehr milder gewesen, wenn nicht ein Satz in derselben vorgekommen wäre, dessen schriller Misston durchgehört werden musste, der Satz, dessen lateinischen Wortlaut wir in einer Anmerkung wiedergeben zu müssen glaubten. Newton wird mit Fabri verglichen, der den Fortschritt der Bewegungen an Stelle der Methode Cavalieris setzte. Fabri kannte Cavalieris Schriften, kannte sein Verfahren und veränderte es in nicht der Rede werthen Nebenumständen. Er hat sich damit nur selbst geschadet. Seine Synopsis geometrica von 1669 gehört zu den

[1]) *adhibet semperque adhibuit.* [2]) *Quemadmodum et Honoratus Fabrius in sua Synopsi Geometrica motuum progressus Cavallerianae Methodo substituit.* [3]) *a Dn. Newtono est utilissime laboratum.*

wenigst bekannten Schriften der damaligen Zeit und würde ohne die Erwähnung in dem Satze, von dem wir grade reden, wohl ganz vergessen sein. Und mit diesem Fabri wird Newton verglichen, wird mit ihm durch den Vergleich auf eine Linie gestellt!

Leibniz hat sich später ausreden wollen. Er hat behauptet, der andere Ausdruck, dessen lateinischer Wortlaut gleichfalls in einer Anmerkung mitgetheilt worden ist, schliesse die Annahme aus, dass Newton als blosser Nachahmer mit leichter Veränderung der gebrauchten Namen und Zeichen habe hingestellt werden wollen. Dem ist nicht so. Wohl heisst es, Newton benutze Fluxionen statt der Differenzen und habe sie immer benutzt, aber seit wann? Die Besprechung der Quadratura Curvarum nennt als das Werk, in welchem Newton von den Fluxionen einen eleganten Gebrauch gemacht habe, die Principien und andere später herausgegebene Schriften. Die Principien sind aber von 1687, Leibnizens Veröffentlichung der Differenzialrechnung von 1684. Der unbefangene Leser konnte also einen Gegensatz der beiden Aeusserungen nicht erkennen. Er musste vielmehr in der Vereinigung beider den Sinn finden, welcher, wie wir uns erinnern, in einer brieflichen Aeusserung von Johann Bernoulli vom August 1696 (S. 253) sich abspiegelte, Newton habe erst nach 1684 und in Folge der aus der Leibnizischen Abhandlung empfangenen Anregung seine Fluxionsrechnung erdacht. Wenn Leibniz damals Bernoulli eines Besseren belehrte, so musste er auch jetzt die Leser vor dem gleichen Missverständnisse bewahren. Er durfte nicht von den Principien und später herausgegebenen Schriften sprechen ohne hinzuzufügen, dass er wisse, dass Newton schon 1676 eine Fluxionsrechnung besessen habe. Die Leibnizischen Worte waren also mindestens unglücklich gewählt und objectiv unrichtig.

Schwieriger ist die Beurtheilung der subjectiven Schuld oder Schuldlosigkeit dessen, der die unglücklichen Worte gebrauchte. Leibniz, sagten wir, habe damals bestritten, dass in seiner Aeusserung ein Vorwurf enthalten gewesen sein solle, enthalten sein könne. Sollen wir ihm darin Glauben schenken, so fällt noch immer die Schuld der Unüberlegtheit auf ihn; aber wir fürchten, wir thun Leibniz mit diesem letzteren Vorwurfe Unrecht, und der Stich, welcher Newton 1705 traf, war von keiner ungeschickten Hand geführt worden. Leibniz hatte die Beleidigung von 1699 nicht vergessen, hatte insbesondere nicht vergessen, dass Newton, den er in der Antwort an Fatio von 1700 gradezu als Zeuge aufgerufen hatte, sich kein Wort entlocken liess und auch, als er 1704 die Quadratura Curvarum zum Drucke gab, nichts über Leibniz zu sagen fand, als nur eine vom Zaune gebrochene Abweisung der unendlich kleinen Unterschiede,

die Leibniz auf sich zu beziehen Grund hatte. Da mag in Leibniz der Gedanke wach geworden sein, Newtons Zunge dadurch zu lösen, dass er ihn fühlen liess, wie weh ein unberechtigter Vorwurf thut. Newton sollte empfinden, was er selbst 1699 hatte empfinden müssen. So erscheinen uns die Seelenvorgänge, aus welchen der Bericht von 1705 hervorging. Wir haben allerdings keinerlei Beweis dafür und müssen gewärtig sein, dass unsere Leser nicht alle mit uns übereinstimmen, aber mit diesem Zugeständnisse vereinigt dürfen wir doch wohl unseren Erklärungsversuch wagen.

Was die spätere Aeusserung betrifft, Newton könne sich nicht beleidigt fühlen, weil anerkannt sei, dass er immer der Fluxionen sich bedient habe, so ist das eine Ausrede und, wie wir schon gezeigt haben, eine recht schlechte Ausrede. Wir haben ihr nicht mehr Gewicht beizulegen als den beiden Briefen Leibnizens vom 28. Juni 1713 an Johann Bernoulli[1]) und an Nicolaus Bernoulli[2]), in welchen Leibniz leugnet die Besprechung von 1705 verfasst zu haben.

Ist die Leibnizische Besprechung Newton zu Händen gekommen? Newton selbst hat es am 22. März und wiederholt am 5. April 1711 in Abrede gestellt[3]). Heutigen Tages wäre die Thatsache so gut wie unmöglich. Auch am Anfange des XVIII. Jahrhunderts ist sie auffallend genug, aber ohne unterstützende Beweismittel sind wir nicht berechtigt, irgend einem Betheiligten eine absichtliche Unwahrheit zuzutrauen. Von einer unabsichtlichen Unwahrheit kann selbstverständlich nicht die Rede sein, denn eine verletzende Besprechung überhaupt gelesen zu haben, vergisst kein Schriftsteller, mag ihm auch der genaue Inhalt aus dem Gedächtnisse schwinden. Aber wie können wir erklären, dass die A. E. in England weniger gelesen wurden, als z. B. die P. T. in Deutschland? Dazu mögen zwei Umstände beigetragen haben. Erstens bildete es damals schon eine lobenswerthe Eigenschaft deutscher Gelehrten, mehr als die Gelehrten irgend eines anderen Volkes sich um die im Auslande erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten zu kümmern, zweitens war zwischen den A. E., als Zeitschrift, und den P. T., als Veröffentlichungen der Royal Society der grosse Unterschied, dass auf erstere abonnirt werden musste, während letztere den ausserhalb England lebenden Mitgliedern der Gesellschaft, deren es eine ziemlich grosse Anzahl gab, nach Vollendung eines Bandes zugeschickt wurden.

In den ersten Monaten des Jahres 1705 war Newton auch durch politische Aufregungen in Anspruch genommen. Wir haben (S. 66)

---

[1]) Leibniz III, 913. [2]) Ebenda III, 986. [3]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXII lin. 17—20.

von den unter Königin Anna zu Tage tretenden Parteiverschiebungen gesprochen. Eine solche fällt in das Jahr 1705[1]). Königin Anna war den Tories geneigt. Ihr Ministerium bestand aus solchen, wenigstens galt Marlborough, der an der Spitze stand, damals gleich den übrigen als Tory. Im Unterhause hatten die Tories die unbestrittene Mehrheit. So schien ein Zerwürfniss unmöglich. Die kirchlich Unduldsamen im Unterhause brachten dasselbe zu Stande. Die Fernhaltung aller der bischöflichen Kirche nicht zugehörigen Persönlichkeiten von öffentlichen Stellen beruhte auf dem Zwange, die Formen eben dieser Kirche auszuführen, ein Zwang, der sich darin äusserte, dass der Anzustellende das Abendmahl nach Anglicanischer Form zu nehmen hatte. Katholiken konnten sich dazu allerdings niemals verstehen, aber die protestantischen sogenannten Nonconformisten konnten sehr wohl das kleine Opfer bringen, ihre Abendmahlformen nach denen der herrschenden Kirche umzumodeln, und sie thaten es, so dem Wortlaute des Gesetzes gehorchend. Gelegentliche Conformität nannten solches die zu äusserst rechts stehenden Tories, und sie beschlossen einen Sturmlauf dagegen: wer nicht ganz und gar der Kirche, d. h. eben der bischöflichen Kirche, angehöre, sei von den öffentlichen Aemtern auszuschliessen. Der Erfolg dieses Gesetzes, wenn es durchging, musste nicht bloss bei der Besetzung jener Stellen selbst, er musste auch für die Zusammensetzung des Parlamentes den Ausschlag geben. Nur in Städten, wo nonconformistische Magistrate vorhanden waren, pflegten Whigs gewählt zu werden. Beseitigte man jene städtischen Verwaltungen, so konnte man hoffen, ein rein toristisches Parlament zu erhalten. In diesem aber wären muthmasslich die Weitestgehenden die Führer gewesen, und die Minister mussten befürchten, von rechts stehenden Gesinnungsgenossen verdrängt zu werden. So kam es, dass die Regierung den Widerstand des Oberhauses gegen den Gesetzvorschlag unterstützte, der dadurch nicht Gesetz werden konnte, trotzdem er in zwei auf einander folgenden Jahren vom Unterhaus angenommen wurde. Marlborough wurde den Hochtories mehr und mehr verhasst, sein Sturz war beschlossene Sache. Ein Ereigniss der äusseren Politik rettete ihn. Die Schlacht bei Höchstädt am 13. August 1704, in welcher Marlborough vereint mit Prinz Eugen die Franzosen auf's Haupt schlug, vernichtete die Pläne seiner heimischen Gegner. Der siegreiche Held war der Liebling der Nation geworden, und der allgemeine Zug riss die gemässigten Tories neben den Whigs in sein Geleite. Unter diesen Verhältnissen

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXIV und Ranke, Englische Geschichte VII, 11—13 und 23.

vollzogen sich die Parlamentswahlen vom April 1705. Sir Isaac, wie Newton hiess, seitdem er am 16. April in den Ritterstand erhoben worden war, war der Candidat der äussersten Partei für Cambridge. Die Kirche sei in Gefahr, war das Stichwort derselben, und die Verhandlungen, welche bei der nun folgenden Parlamentssitzung im Oberhause stattfanden, haben klar gestellt, dass eben bei der Cambridger Wahl ein Studentenauflauf stattfand, dass man hundertstimmig schrie: Kein Fanatiker, nichts von gelegentlicher Conformität. So unterlag damals Newton. Die hier erzählten Parteikämpfe gehören insofern zu unserem Gegenstande, als auch sie zur Erklärung dafür dienen können, dass Newton jene Besprechung der A. E. von 1705 nicht kennen lernte. Hätte er sie kennen gelernt, er hätte im Augenblick doch wohl geschwiegen, schweigen müssen. Der politisch in den Hintergrund Gedrängte war nicht geeignet, die Sympathie seiner Landsleute für sich wachzurufen, und die ihm ungünstige Volksstimmung hätte ihm die Antwort untersagt.

Am 16. August 1705 starb Jakob Bernoulli. Leibniz verlangte[1]) von Jakob Hermann, dem dankbaren Schüler des Verstorbenen, dessen Nekrolog, den Hermann am 28. October einschickte[2]), und der in den A. E. für Januar 1706 abgedruckt ist. Eine Randbemerkung des Heidelberger Exemplars nennt Leibniz als den Verfasser, und das ist eine der Stellen, wo die im Allgemeinen zuverlässigen handschriftlichen Zusätze sich als irrig erweisen. Leibniz war Vermittler, nicht Verfasser des Beitrags, oder doch nur in dem Sinne Verfasser, als er sich eine gewisse Veränderung des von Hermann niedergeschriebenen und handschriftlich erhaltenen Wortlautes gestattete. Nicht etwa als ob Leibniz den von Hermann herrührenden Satz, zu Jakob Bernoullis nahen Freunden habe Fatio de Duillier gehört, ein sehr würdiges Mitglied der Royal Society[3]), gestrichen hätte. Ihn liess Leibniz, wenn vielleicht auch widerwilligen Sinnes, abdrucken. Am Schlusse dagegen kürzte er. Hermann hatte die wichtigsten Aufsätze des Verstorbenen, welche theils in den A. E., theils im Journal des Sçavans dem Drucke übergeben worden waren, einzeln genannt. Er hatte zwischendrein gesagt: Besonders verdient hier der Differentialcalcül erwähnt zu werden, welchen er durch eigenes Nachdenken in Gemeinschaft mit seinem berühmten Bruder sich so sehr zu eigen machte und vervollkommnete, dass der vortreffliche Erfinder desselben, der hochstehende Leibniz[4]) aus freien

[1]) Leibniz IV, 284. [2]) Ebenda IV, 288—292. [3]) *Dn. Nicolaum Fatium Duillerium Regiae Londinensis Societatis sodalem dignissimum.* [4]) *Excell. ejus Inventor, Ampl. Leibnitius.*

Stücken eingestand, der neue Calcül verdiene mit gleichem Rechte der beiden Bernoulli als der seinige genannt zu werden. Hier, wie gesagt, kürzte und änderte Leibniz. Die Herzählung der Abhandlungen nebst der Zwischenbemerkung ersetzte er durch folgenden Wortlaut: Seine sehr zahlreichen und schönen Erfindungen, welche in den A. E. und anderwärts zu lesen sind, führen wir nicht einzeln an; wir begnügen uns beizufügen, dass, als die grosse Erfindung unseres Jahrhunderts, die Leibnizische Infinitesimalanalysis[1]) hervorgetreten war, der Dahingegangene aus einem leichten vom Erfinder gegebenen Beispiele (dem Beweise der Isochrone) plötzlich ein neues Licht für die Anwendung auf physikalisch-mechanische Fragen schöpfte[2]) und auf die Ausbildung jenes analytischen Calcüls, den man Differentialrechnung und seine Umkehrung summatorische oder Integralrechnung nennt, mit grossem Eifer und Erfolg sich legte, ausgezeichnete Aufgaben löste und nach Recht und Verdienst unter die grössten Förderer der grossen Erfindung gezählt werden kann. Leibniz widmete dem Gedächtnisse des verstorbenen und immer zu betrauernden Freundes folgende Zeilen:

> Ein unendliches Licht erglänzte Dir schon auf der Erde,
> Wer wird leugnen, o Freund, dass Du erhalten uns seist?

Viel mehr als eine Kürzung und stylistische Abänderung unter Beibehaltung des Sinnes, den Hermann in seinen Wortlaut gelegt hatte, war das nicht, aber es war eben doch abermals von der grossen Leibnizischen Erfindung die Rede und immer nur von der Leibnizischen.

Spät, im Jahre 1710 erst, kam die entgegengesetzte Behauptung im XXVI. Bande der P. T. wieder zum Ausdruck. Der Band enthielt die der Royal Society 1708 vorgelegten Arbeiten, und sein Druck war schon im September und October 1708 im Gange. Es ist das nicht unwichtig, weil es einen Beleg für die eigenthümliche Thatsache gibt, dass, als zwischen October 1709 und April 1710 das Scholium in der zweiten Ausgabe der Principien im Drucke war, Newton wusste, dass binnen Kurzem eine ihm widersprechende Meinung in den P. T. zur öffentlichen Kenntniss kommen werde.

John Keill[3]) (1671—1721), ein Schotte, eifriger Bewunderer Newtons, seit 1700 Professor der Physik in Oxford, hatte eine Abhandlung über die Gesetze der Centripetalkräfte, *De legibus virium centripetarum*, eingereicht, und in ihr war, ohne dass der Gegenstand die allergeringste Veranlassung dazu geboten hätte, folgender Satz

[1]) *Analysis infinitesimalis Leibnitiana.* [2]) *ex facili exemplo ab autore exhibito (demonstratione scilicet Curvae Isochronae) novam subito lucem hausisse.* [3]) Poggendorff, I, 1236. — *National Biography* XXX, 310—311 (London 1892, edited by Sidney Lee).

eingeschaltet[1]): „Dieses alles folgt aus der heutigen Tages sehr berühmten Fluxionsrechnung. Diese hat, ohne dass ein Zweifel stattfände, Herr Newton erfunden, wie bei Jedem feststehen wird, der die von Wallis herausgegebenen Briefe liest. Später wurde jedoch dieselbe Rechnung von Herrn Leibniz unter Veränderung des Namens und der Bezeichnungsweise in den A. E. veröffentlicht."

Das war, wir wiederholen es, eine etwas späte Antwort auf die Besprechung von 1705, auf die Aeusserungen im Nekrologe von 1706, aber sie liess an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig. Sie beschuldigte Leibniz ohne Weiteres des geistigen Diebstahls unter den erschwerendsten Umständen, Leibniz habe ein fremdes Verfahren unter Veränderung von Namen und Bezeichnung herausgegeben!

Leibniz erhielt als Mitglied der Royal Society den vollendeten Band der P. T. durch den Secretär Sloane allerdings recht verspätet im Februar oder März 1711, da er gerade in Berlin war, und noch von dort aus schrieb er unter dem 4. März eben an Sloane. Er bedauere, sagte Leibniz in diesem Briefe[2]), zum zweiten Male mit einer Klage auftreten zu müssen. Vor längerer Zeit habe Nicolaus Fatio de Duillier sich öffentlich mit Sticheleien an ihn gemacht, als ob er eine fremde Erfindung sich angeeignet hätte. Er habe ihn damals in den A. E. eines Besseren belehrt, und die Royal Society habe ihm selbst gegenüber durch ihren Secretär, und das sei, so viel er sich erinnere, grade Sloane gewesen, ihre Missbilligung ausgesprochen. Auch Newton, der treffliche Mann, habe, wie ihm berichtet sei, den verkehrten Eifer missbilligt[3]), welchen Einige in dieser Sache für ihr Volk und für ihn an den Tag legten. Und jetzt scheine Herr Keill in dem eben erschienenen Bande der P. T. auf S. 185 die ungeschickteste der Anklagen zu erneuern. Wer könne den Satz: „Später wurde .... veröffentlicht" lesen und ihm Glauben schenken, ohne Leibniz in Argwohn zu nehmen, eine fremde Erfindung in der Verkleidung untergeschobener Benennung und Zeichen herumgetragen zu haben? Wie falsch dieses sei, wisse Niemand besser als Newton selbst. Gewiss, fuhr Leibniz fort, ich habe weder den Namen der Fluxionsrechnung aussprechen hören, noch die Zeichen, deren Newton sich bediente, mit Augen gesehen, bevor beides in Wallis' Werken erschien. Dass ich die Sache gleichfalls viele Jahre, bevor ich sie herausgab,

[1]) P. T. XXVI, 185: *Haec omnia sequuntur ex celebratissima nunc dierum fluxionum arithmetica, quam sine omni dubio primus invenit D. Newtonus, ut cui libet ejus epistolas a Wallisio editas legenti facile constabit, eadem tamen arithmetica postea mutatis nomine et notationis modo a D. Leibnitio in Actis Eruditorum edita est.* [2]) *Commerc. epistol.* pag. 171—172. [3]) *praeposterum studium improbavit.*

besass, beweisen meine durch Wallis veröffentlichten Briefe. Wie kann ich Fremdes, welches ich nicht kannte, verändert herausgegeben haben? Leibniz schloss mit der Aeusserung, er sei weit davon entfernt, Keill einen Verleumder zu nennen, aber dessen Anklage sei verleumderisch und Keill müsse, das verlange er von der Royal Society, die Anklage öffentlich zurücknehmen.

Die Angelegenheit mit Fatio hatte seiner Zeit rasche und leichte Erledigung gefunden (S. 290), aber jetzt waren die Verhältnisse ganz andere als 1699 und 1700. Newton war seit dem 30. November 1703 Präsident der Royal Society (S. 67), in ihr also naturgemäss eine wesentlich einflussreichere Persönlichkeit als ein ausserhalb England wohnendes Mitglied, und wäre es auch Leibniz, und sein Ruhm musste oder durfte doch wenigstens der Gesellschaft vor Allem am Herzen liegen. Auch seit 1705 hatte mancherlei sich geändert. Die Friedenssehnsucht der englischen Nation war der whigistischen den Krieg gegen Frankreich in die Länge ziehenden Regierung müde geworden. Ein toristisches Parlament war gewählt, und seit September 1710 stand der Hochtory Bolingbroke an der Spitze der Reichsgeschäfte. Newton war also jetzt der Gesinnungsgenosse der leitenden Kreise in Volk und Regierung, Leibniz der Berather jenes hannöverschen Prinzen, der den Krieg gegen Frankreich selbst führen half (S. 66). Diese mehrfachen Aenderungen spiegeln sich deutlich in dem weiteren Verlaufe des Streites.

Ein Auszug aus den Sitzungsprotokollen der Royal Society ist veröffentlicht[1]). Wir lassen seine Uebersetzung folgen, welche wir nur jeweils zu unterbrechen uns vorbehalten, wo uns Einschaltungen nothwendig erscheinen. Am 22. März 1711 fand eine Sitzung unter Newtons Vorsitze[2]) statt. Ein Theil des Leibnizischen Briefes wurde verlesen und Sloane beauftragt, eine Antwort zu schreiben. Newton war, bevor der Aufsatz in den A. E. von 1705 ihm gezeigt wurde, ärgerlich über das, was Keill gesagt hatte, aber in der nach Verlauf von vierzehn Tagen folgenden Sitzung vom 5. April lenkte Keill die Aufmerksamkeit auf jenen unbilligen Bericht[3]) über die Abhandlung Quadratura Curvarum. Dann gab der Präsident eine kurze Darstellung der Sache mit Beifügung der genauen Zeit, zu welcher er seine Erfindung zuerst erwähnte oder enthüllte[4]), und berief sich auf einige durch Wallis veröffentlichte Briefe; hierauf wurde Herr Keill ersucht, einen Bericht über den Gegenstand des Streites zu verfassen und den-

[1]) **Edleston**, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXII. [2]) *President in the chair.* [3]) *unfair account.* [4]) *with the particular time of his first mentioning or discovering his invention.*

selben in ein richtiges Licht zu setzen. Sitzung vom 12. April. Die Verlesung der früheren Aufzeichnungen[1]) gab Gelegenheit, den in den Leipziger A. E. erwähnten Gegenstand weiter zu besprechen. Der Präsident fühlte sich bewogen[2]), seine vor vielen Jahren an Herrn **Collins** gerichteten Briefe über seine Methode der Curvenbehandlung u. s. w. zu erwähnen, und da Herr Keill anwesend war, wurde dieser abermals ersucht, einen Aufsatz niederzuschreiben und das Recht des Präsidenten in dieser Angelegenheit zu behaupten. Sitzung vom 24. Mai. Keill's Erwiderung wurde verlesen. Eine Abschrift soll an Leibniz geschickt werden, und sobald Leibnizens Antwort darauf eingetroffen sein wird, soll Keills Schrift in den P. T. gedruckt werden. In der nächsten Sitzung vom 31. Mai, in welcher Newton nicht gegenwärtig war, verlas Sloane einen Brief an Leibniz, welcher gebilligt wurde. Sloanes Brief ist nie veröffentlicht worden und dürfte ein ziemlich farbloses Begleitschreiben der Keill'schen Erwiderung gewesen sein, sonst hätte man ihn kaum in Newtons Abwesenheit gutgeheissen. Das wichtige Keill'sche Schriftstück dagegen ist im Drucke vorhanden[3]) und fordert unseren Bericht.

Ich gebe es zu, heisst es nach kurzen Einleitungssätzen, dass ich gesagt habe, die Fluxionsrechnung sei von Newton erfunden, dann von Leibniz unter Veränderung des Namens und der Bezeichnungsweise herausgegeben worden. Ich will damit keineswegs gesagt haben, der Name, den Newton seiner Methode beilegte, oder die Bezeichnung, deren er sich bediente, seien Leibniz bekannt gewesen. Ich wollte nur zu verstehen geben, dass Newton der erste Erfinder der Fluxionsrechnung oder des Differentialcalüls war; dass er in zwei Briefen an Oldenburg, welche durch diesen an Leibniz gelangten, Kennzeichen davon gab, die für einen Mann von grossem Scharfsinne hinreichten, ihm den Weg zu zeigen[4]), und dass Leibniz aus ihnen die Grundgedanken jener Rechnung schöpfte oder wenigstens schöpfen konnte. Da er aber die Sprech- und Schreibweise, von denen Newton Gebrauch machte, durch blosse Vernunftschlüsse nicht ermitteln konnte, so wählte er die von ihm selbst ersonnenen. Als Beweggrund zu jenen Aeusserungen wird die Besprechung der Quadratura Curvarum in den A. E. angegeben, welche ihre Leser zu dem Glauben veranlassen könne, als habe Newton erst nach 1684 die Fluxionsrechnung erfunden. Wenn die Leipziger ihrem Leibniz fremdes Eigenthum hinzudichten dürfen, so dürfen auch die Engländer, ohne der Anschuldigung der Verleum-

[1]) *the former minutes being read.* [2]) *was pleased.* [3]) *Commerc. epistol.* pag. 172—180. Im Original sind die auftretenden Personen meistens Dominus Newtonus, Dominus Leibnitius genannt. Lediglich zur Abkürzung lassen wir das Wort Herr weg. [4]) *indicia dedisse perspicacissimi ingenii viro satis obvia.*

dung zu verfallen, das zurückfordern, was Newton geraubt wurde. Ich habe also, fährt Keill wörtlich fort, zu zeigen, dass Newton wahrer und erster Erfinder der Fluxionsrechnung oder des Differentialcalcüls war, ferner, dass er Leibniz so klare und auf den Weg führende Kennzeichen seiner Methode gegeben hat, dass es diesem leicht wurde, auf die gleiche Methode zu verfallen[1]). Nun folgt eine Schilderung der beiden Briefe Newtons, welche wir in unserem 90. Kapitel grade mit Rücksicht auf das, was Leibniz aus ihnen lernen konnte, ausführlich besprochen haben. Keill kommt allerdings zu der ganz entgegengesetzten Schlussfolgerung, zu welcher wir damals gelangten, denn er behauptet kurzweg[2]): Aus diesen Kennzeichen, unterstützt durch diese Beispiele, hätte ein gewöhnlicher Geist Newtons Verfahren bis ins Innerste erkennen müssen, und man kann nicht entfernt glauben, dass es dem Scharfsinne eines Leibniz verborgen geblieben sein könne. Das freilich sei Leibniz in vollstem Maasse zuzugeben, dass er weder den Namen Fluxionsrechnung gehört, noch die von Newton benutzte Bezeichnung gesehen habe, bevor sie in Wallis' Werken erschienen, denn Newton selbst habe mit Namen und Bezeichnung gewechselt. In der Analysis per aequationes — welche eben erst durch William Jones im Drucke herausgegeben war — seien beide verschieden von den in den Principien[3]). Endlich sei man Leibniz neben anderen hohen Verdiensten, welche er um die Mathematik sich erwarb[4]), auch dafür verpflichtet, dass er der Erste war, der diesen Calcül im Drucke herausgab und der Oeffentlichkeit überlieferte.

Das also war es, was vom 5. April bis zum 24. Mai, in vollen sieben Wochen, durch Keill zusammengebracht worden war! Dürfen wir wirklich sagen durch Keill? Newton war sicherlich in gleichem Maasse wie Keill bei der Arbeit betheiligt, das beweisen die oben angeführten Protokollbemerkungen vom 5. und 12. April.

Nun aber eine Frage, welche hier aufgeworfen werden muss: glaubten Newton und Keill selbst an die durch sie erhobene Anklage? Wir meinen diese Frage bejahen zu dürfen, und zwar mit Rücksicht auf das in dem Abdrucke des Leibnizischen Briefes bei Wallis fehlende Wort hodie (S. 287). Oldenburg hatte Newton's Brief vom 24. October 1676 bis zum 2. Mai 1677 in seiner Verwahrung gehabt. Ein volles Halbjahr war darüber weggegangen, bis der Brief Beförderung fand. Nun wusste Newton allerdings von einer Verspätung von vier und ein halb Monaten, denn am 5. März 1677 hat Collins ihm geschrieben[1]), dass der Brief damals noch nicht abgegangen war, dass aber in den nächsten acht Tagen Jemand ihn nach Hannover mitnehmen würde. Newton war also, wenn ihm keine weitere Mittheilung zugegangen ist — und wir wissen wenigstens von keiner weiteren — berechtigt anzunehmen, sein Brief sei etwa am 10. März durch Oldenburg abgeschickt worden. Nun kam Leibnizens vom 21. Juni datirte Antwort. Musste dieses Datum unter Anrechnung der höchstmöglichen Reisezeit des Briefes nicht den Verdacht erwecken, Leibniz habe sich etwa zwei Monate Frist gegeben, den Brief zu beantworten? Je höher die Meinung von Leibnizens mathematischem Können in der Zeit von 1684 bis 1708 gestiegen war, um so eher konnte man jetzt argwöhnen, Leibniz habe aus dem für jeden anderen Leser unentzifferbar räthselhaften zweiten Newtonschen Briefe so viel Anregung gewonnen, dass er in jenen zwei Monaten den Differentialcalcül nacherfand. Das Wort *hodie* würde den Verdacht im ersten Augenblick niedergeschlagen haben, aber vielleicht hatte wirklich Leibniz, wie wir als möglich annahmen, das Wort beim Abschreiben vernichtet! So konnte Newton Verdacht hegen, um wie viel mehr Keill, der Newtons Brief und Leibnizens Antwort aus dem Abdrucke bei Wallis citirte. Das Wort *hodie* fehlte. Dass Newton's Brief am 5. März 1677 noch in London war, stand bei Wallis allerdings auch zu lesen[2]). Nehmen wir aber an, dass Keill, was nicht zu den Unmöglichkeiten gehört, beim Studium der Prioritätsfrage einen Brief von Collins überschlagen zu dürfen glaubte, wenn er nur die zwischen Newton und Leibniz gewechselten Briefe las, so kann er zur Meinung gekommen sein, Leibniz habe mehr als sechs Monate verstreichen lassen, bis er mit seiner Antwort herausrückte, er habe wirklich die Differentialrechnung nur nacherfunden, und Keills Zornesaufwallung war dann, wenn auch nicht gut begründet, doch jedenfalls guten Glaubens. Wunderbar genug, dass, so viel wir wissen, noch kein Schriftsteller, sei es zur Zeit des Streites, sei es später, auf das fehlende Wort und seine Bedeutung hingewiesen hat[3]).

Der Brief Keills und das Begleitschreiben Sloanes gingen nach

[1]) *deinde ipsum adeo clara et obvia Methodi suae indicia Leibnitio dedisse, ut inde ipsi facile fuerit in eandem Methodum incidere.* [2]) *His indiciis atque his adjectis exemplis Ingenium vulgare Methodum Newtonianum penitus discerneret; ita ut ne suspicari fas sit, cum acerrimi Leibnitii acumen posse latuisse.* [3]) Keill hätte noch hinzufügen können, dass sie in der Quadratura Curvarum abermals andere waren. [4]) *inter caetera quae de re Mathematica praeclare meritus est Leibnitius.*

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 146. [2]) Wallis, *Opera* III, 647. [3]) H. Sloman, Leibnizens Ansprüche auf die Erfindung der Differenzialrechnung. Leipzig 1857. S. 51 in der Fussnote hat das Fehlen von *hodie* in dem älteren Abdrucke bemerkt, aber nicht hinreichend gewürdigt.

dem 31. Mai 1711 an Leibniz ab. Wann sie in seine Hände kamen, wissen wir nicht, aber der ganze Sommer 1711 war für Leibniz eine von den mannigfachsten Geschäften erfüllte Zeit[1]). Da kam ein Briefwechsel über die hannövrisch-englische Thronfolge in Verbindung mit dem Plane, die anglikanische Kirchenverfassung und Liturgie in Preussen und Hannover einzuführen, ein Plan, der, wenn er gelang, die Tories vielleicht wieder für die hannövrische Linie gewonnen haben würde, der aber bald wieder einschlief. Da wurden mit Des Maizeaux, dem Herausgeber des Bayle'schen Dictionnaire, Briefe über die praestabilirte Harmonie gewechselt. Da erhielt Leibniz im September einen Mitarbeiter an dem grossen Geschichtswerke der Annalen des Welfischen Hauses, welcher neben der Aufgabe der Beihilfe auch die hatte, Leibnizens eigenen Fleiss zu überwachen. Da musste Leibniz im October den Herzog Ulrich von Braunschweig nach Torgau begleiten, wo die Vermählungsfeier von dessen Tochter mit dem russischen Prinzen Alexei, dem Sohne Peter des Grossen, stattfand, eine Reise, welche dadurch für die Wissenschaft fruchtbar wurde, dass der Zar gelegentlich einer Unterredung Leibniz versprach, im russischen Reiche Magnetnadelbeobachtungen anstellen zu lassen. In derselben Unterredung hatte aber Peter der Grosse eine Rechenmaschine verlangt, deren Anfertigung Leibniz besorgen sollte, und welche ihn in einen weitläufigen Briefwechsel verwickelte. Man begreift es, wie bei solcher vielgespalteten Thätigkeit das Jahr seinem Ende sich nähern konnte, bevor Leibniz die englischen Briefe, welche ohnedies sein Schreiben vom 4. März erst am 31. Mai beantwortet hatten, erledigte. Er schrieb am 29. December folgenden Brief an Hans Sloane:

Was Herr Johannes Keill Ihnen jüngst schrieb, greift meine Unbescholtenheit noch offener als früher an. Dass ich diese in meinem Alter[2]), nach den Proben meines Lebens, durch eine Vertheidigungsschrift rechtfertigen und mit einem gelehrten, aber immerhin als Neuling zu betrachtenden Manne, der die früheren Ereignisse wenig kennt und ohne Auftrag dessen ist, den die Sache angeht, wie vor einem Gerichtshofe streiten soll, wird mit Einsicht und Billigkeit Niemand gutheissen. Seinen Argwohn bezüglich der Art, wie ich die Sache kennen lernte, zu widerlegen, um ihn zu belehren, dazu ist er ein zu wenig geübter Schiedsmann in der Kunst des Erfindens, aber meine Freunde wissen, dass ich einen ganz anderen und anderswohin gerichteten Weg einschlug. Vergebens beruft er sich auf die A. E., um

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie XVIII, 202. [2]) Leibniz war damals $65\frac{1}{2}$, Newton 69, Keill 40 Jahre alt.

seine Worte zu entschuldigen. Ich finde nicht, dass dort irgend wem irgend etwas entzogen wird, vielmehr ist an verschiedenen Stellen Jedem das Seine zugewiesen[1]). Auch ich und Freunde von mir haben verschiedentlich gezeigt, dass wir ganz gern glauben, dass der berühmte Urheber der Fluxionen von sich aus zu den unsrigen ähnlichen Grundlagen gekommen sei; aber ich habe nicht weniger Anrecht auf das Erfinderthum, wie auch Huygens, der einsichtsvollste und unbestechlichste Richter, öffentlich anerkannte: ich habe sogar nicht geeilt mein Recht zu beanspruchen, ich habe meine Erfindung mehr als nur neun Jahre verborgen gehalten, nur damit Niemand sich beklagen könne, ich habe ihm den Rang abgelaufen. Ich überlasse es Ihrer Billigkeit, ob dem leeren und ungerechten Geschrei nicht Schranken zu setzen sind, von welchem ich vermuthe, dass es bei Newton, dem hervorragenden Manne und besten Kenner der Thatsachen, Missbilligung findet. Ich bin überzeugt, er wird gern ein Zeichen dieser seiner Meinung von sich geben.

Auch in diesem Briefe kommt ein Satz vor, der besser ungeschrieben geblieben wäre. Es ist die von uns in der Anmerkung im lateinischen Wortlaut wiedergegebene Behauptung, in den A. E. sei Jedem das Seine zugewiesen. Der unmittelbar anschliessende Satz von Newtons Selbständigkeit nimmt der Aeusserung zwar den verletzenden Stachel, den man hat hineindeuten wollen, aber immerhin war es ungerechtfertigtes Festhalten an einer stylistischen Wendung, welche wir schon oben (S. 294) tadeln mussten.

Die letzten Worte des Briefes forderten abermals Newton in unzweideutigster Weise auf, das Wort zu ergreifen, und Sloane scheint die Aufforderung nicht für unangemessen gehalten zu haben. Der Protokollauszug fährt nämlich fort: 31. Januar 1712. Leibnizens Antwort vom 29. December 1711 wurde verlesen und Newton übergeben. Wozu das Letztere, wenn die Meinung nicht war, er solle nun seinerseits das Wort ergreifen? Aber das passte ihm nicht. Unter dem 7. Februar heisst es: Da der Präsident nicht kam, wurde über Leibnizens Brief an Doctor Sloane nicht berichtet. Daran schliesst sich unmittelbar der Eintrag vom 6. März: In Folge des Leibnizischen Briefes wurde ein Ausschuss aus den Herren Arbuthnot, Hill, Halley, Jones, Machin und Burnet gebildet, um die Briefe und Papiere, welche auf den Streit sich bezogen, in Augenschein zu nehmen und einen Bericht für die Gesellschaft anzufertigen. Am 20. März wurde der Ausschuss durch Francis Robartes, am 27. März

[1]) *in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, sed potius passim suum cuique tributum.*