桑木文庫
洋書
0143

桑木文庫
洋書
0143

MARUZEN KABUSHIKI-KAISHA
BOOKS
AND
GENERAL STATIONERY
TOKYO OSAKA KYOTO
株式會社丸善

物理
12
C
108

九州帝國大學理學部
9791
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002001791
九州大学蔵書

貴重書

圖書番號 800407
部門
カード

# VORLESUNGEN

ÜBER

# GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

MORITZ CANTOR.

DRITTER BAND.

VON 1668—1758.

MIT 147 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

貴重書

東京帝國大學圖書館
昭19. 4. 25
130949

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

# Vorwort.

Etwa drei und ein viertel Jahre sind verflossen, seit ich im April 1898 das Vorwort zur ersten Auflage dieses III. Bandes niederschreibend mit einer Art von schmerzlicher Freude auf die Fortsetzung des Werkes verzichtete, zu welcher ich selbst den Muth nicht mehr habe, für so wünschenswerth ich sie halte. In beiden Beziehungen konnte meine Sinnesmeinung selbstredend keine Aenderung erfahren. War damals mindestens ein IV. Band noch erwünscht, so ist er heute fast zur Nothwendigkeit geworden; konnte ich damals mich nicht entschliessen, weiter zu arbeiten, so haben die seitdem verflossenen drei Jahre mich jedenfalls nicht jünger gemacht, und trotz mehrseitiger schmeichelhafter Aufforderungen, selbst die Hand ans Werk zu legen, verabschiede ich mich zum zweiten Male von meinem Buche und von meinen Lesern.

Die neue Auflage ist von der ersten in den Hauptpunkten nicht verschieden, wenn es auch, dank dem Aufschwunge, welchen die Wissenschaftsgeschichte aller Orten genommen hat, möglich und nöthig war, an Einzelheiten die bessernde Hand anzulegen. Sogar während des Druckes dieses Bandes ist in dankenswerther Weise da und dort eine schöpferische Kritik geübt worden, deren Ergebnisse ich in diesem Vorworte mitzutheilen habe.

Zunächst mögen einige Druckfehler berichtigt werden.

S. 323 Z. 34 statt 1711 lies 1713.
S. 343 Z. 8 statt $0+1+1+1+1+\cdots$ lies $0+1+2+3+4+\cdots$.
S. 355 Z. 23 statt *Ars Cogitandi* lies *Ars Conjectandi*.
S. 466 Z. 33 statt $xdx + xydy$ lies $xdx + ydy$.

Ferner ist zu bemerken:

S. 12. Nach Riccardi erschienen die von E. Astorini herausgegebenen *Apollonii Conica restituta* erstmalig in Neapel 1698. Den *Archimedes restitutus* erwähnt der gleiche Gewährsmann überhaupt nicht. Dadurch wird sehr zweifelhaft, ob ein solcher erschienen ist.

S. 17. Dechales war nicht der einzige mathematische Schriftsteller, der die Exponenten in gleicher Linie mit der Grundzahl drucken liess, also z. B. $4A3$ statt $4x^3$. Ganz ebenso schrieben,

H. Eneström zufolge, auch Jacques de Billy (1602—1679) und der schwedische Mathematiker Andreas Spole (1630—1699).

S. 22. Die von Kochansky behandelte Aufgabe ist deutlicher dahin zu bezeichnen, dass er verlangte, den Durchmesser $AD$ eines Kreises in $B$ so zu theilen, dass, wenn im Theilungspunkte $B$ die zum Durchmesser senkrechte $BC$ bis zur Peripherie gezogen würde, $AB : BC = BC : BD = BD : AD$ stattfinde. Er gibt dazu die im Texte mitgetheilten angenähert richtigen Zahlenwerthe und wünscht eine geometrische Auffindung des Punktes $B$. Er selbst schlägt keine solche vor.

S. 38. Der Name Barrème ist allmählich zu einem vollständigen Dingwort geworden und bezeichnet bei den heutigen Franzosen irgend eine tabellarische Uebersicht, einen Tarif u. dergl.

S. 58. Mercator war es, der nach Edm. Hoppe, *Notiz zur Geschichte der Logarithmentafeln* (Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg IV, 52—56) in seiner *Logarithmotechnica* (London 1668 pag. 4) dem ganzzahligen Theile eines Logarithmen den Namen der Charakteristik beilegte.

S. 98. H. Padé hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass Huygens beiläufig bemerkt, dass, wenn in irgend einem Theilbruche des Kettenbruches der Nenner durch kleinere Zahlen ersetzt werde, Zwischenbrüche entstehen, welche, je nachdem die Veränderung in einem Theilbruche ungrader oder grader Ordnung erfolgt, grösser beziehungsweise kleiner als der Kettenbruch ausfallen. Das sind die *fractions intermédiaires*, eingeschaltete Näherungsbrüche, denen nachmals Lagrange seine Aufmerksamkeit zuwandte.

S. 100. H. Vacca (Biblioth. math. 1901, pag. 149) stellt fest, dass nicht erst Leibniz darauf aufmerksam gemacht habe, jede Primzahl mit Ausnahme der 2 und der 3 müsse von der Form $6n \pm 1$ sein, sondern dass Pietro Bongo (latinisirt Bungus) schon 1599 in seinem Werke *Numerorum mysteria* das Gleiche aussprach. Ferner hat H. Vacca in dem Leibnizischen handschriftlichen Nachlasse in Hannover eine Stelle aufgefunden, welche sich als Vorahnung des Wilsonschen Satzes zu erkennen gibt.

S. 123. H. Eneström bemerkt mit Recht, dass $a_0 x^n = 0$ nicht durch irgend eine Werthbestimmung für $z$ zur Erfüllung gebracht werden könne. Leider steht mir Rolles *Traité d'Algèbre*, welche ich seiner Zeit aus der Münchner Hofbibliothek entliehen hatte, gegenwärtig nicht zur Verfügung. Ich möchte daher solche Fachgenossen, welche in der Lage sind, jenes Buch zu Rath zu ziehen, bitten, die nöthige Veränderung des Textes zu ermitteln und etwa in der Biblioth. math. zu veröffentlichen.



S. 137. Wenn Barrow als den Veranlasser seiner Veröffentlichungen über die Infinitesimalrechnung in unzweideutiger Weise Newton bezeichnet, allerdings ohne ihn ausdrücklich zu nennen, so halte ich es doch für gänzlich ausgeschlossen, dass auch nur ein geringer Theil des so Veröffentlichten Newton angehören sollte. Wenn dem so wäre, so hätte Barrow es zuverlässig auch erklärt und sich nicht damit begnügt zu sagen, Jener habe ihm den betreffenden Abschnitt abgequält.

S. 174. Ausser Fermat hat, wie H. Zeuthen richtig hervorhebt, auch Descartes sich einmal eines schiefwinkligen Coordinatensystems bedient und zwar bei Behandlung der Aufgabe des Pappus. Der Unterschied ist nur der, dass Descartes diese Thatsache nicht besonders betonte.

S. 201 Z. 30 statt *gleich einer Constanten* muss es vielmehr heissen *gleich einer endlichen Grösse.*

S. 215. Wenn auch das Wort *functio* erst 1694 von Leibniz mit einer Definition versehen worden ist, so hat doch Ebendieser, nach einer von H. Pringsheim in der Encyklop. der mathem. Wissensch. (Bd. II pag. 3) veröffentlichten, durch H. Eneström (Biblioth. math. 1901, pag. 150) ergänzten Bemerkung, schon 1692 in einem Aufsatze *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis* etc. (A. E. 1692, 168—172, insbesondere pag. 170) das Wort *functio* gebraucht. Etwa gleichzeitig mit dem Aufsatze von 1694 ist ein Brief Leibnizens an Huygens vom 28. Juni 1694, in welchem es heisst: *J'appelle fonctions l'abscisse, l'ordonnée, la corde, tangente, perpendiculaire .... et quantité d'autres.*

S. 218 Figur 40. Im Texte fehlt eine Bestimmung des Punktes $P$, welche aber leicht ergänzt werden kann. $HF$ ist ein als gradlinig gedachtes Stückchen der Curve $BFG$ und die Gerade $HFN$ ist demgemäss Berührungslinie an jene Curve. Dann ist aber $GP \parallel FN$ gezogen.

S. 225 und 250. Allerdings geht aus dem in Stockholm aufbewahrten, von H. Eneström durchgearbeiteten, leider aber noch immer nicht dem Drucke übergebenen Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli, De L'Hospital und anderen Mathematikern hervor, dass Johann Bernoulli 1694 auf ausdrückliches Verlangen De L'Hospitals diesem die Methode der Auswerthung von $\frac{0}{0}$ nebst dem klassisch gewordenen Beispiele dazu mittheilte. Ebenfalls in Stockholm befindet sich auch ein Brief De Montmorts an Johann Bernoulli vom 28. October 1718 ähnlichen Inhaltes wie einer vom 26. Juni 1718, aus welchem Auszüge in den A. E. vom Mai 1721 in

einer gegen Taylor gerichteten Abhandlung sich finden, als deren Verfasser zwar Jacob Burkard aus Basel genannt ist, deren geistiger Urheber aber zweifellos Johann Bernoulli war. Fand doch auch die ganze Abhandlung ihren Abdruck in Johann Bernoullis Werken (Opera II, 483—512). De Montmort schreibt am 26. Juni, er kenne seit 13 oder 14 Jahren (immerhin vermuthlich nach De L'Hospitals Tode 1704) eine Abschrift der von Johann Bernoulli für Jenen verfassten Vorlesungen. Pater Reyneau (1656—1728), der im 105. Kapitel uns wieder begegnet, sei ihr Besitzer und habe, setzt De Montmort am 28. October hinzu, einige kleine Fetzen davon in seine *Analyse démontrée* (1708) aufgenommen. Eine andere Abschrift besass ein Pater Bizance, an welchen De L'Hospital schrieb, er möge dieselbe De Montmort mittheilen. Allerdings hatte dieses Ersuchen keinen Erfolg, und De Montmort schreibt diese Thatsache einer geheimen Verabredung zu. De Montmort glaubte folglich damals an die Berechtigung der gegen De L'Hospital erhobenen Anschuldigung. Aber was will das gegen die zwischen Johann Bernoulli und De L'Hospital gewechselten Briefe sagen? Auch die Frage, wo denn die Handschrift von Bernoullis Differentialrechnung sei, wird durch die Mittheilung, verschiedene Nachschriften seien vorhanden gewesen, keineswegs überflüssig. Die S. 225 aufgeworfene Frage kann doch nicht anders als in dem Sinne verstanden werden, warum Johann Bernoulli sein Vorlesungsheft der Integralrechnung sorgsam aufbewahrte, das der Differentialrechnung nicht, wenn dieses ebenso genau ausgearbeitet und druckfähig war? Ja Bernoulli selbst bestätigt gradezu die Unfertigkeit seines Heftes über Differentialrechnung, indem er Burkard in der genannten Abhandlung von 1721 fortfahren lässt, De L'Hospital habe von Johann Bernoulli in späteren Briefen weit mehr gelernt als durch jenen ihm 1691 und 1692 in Paris ertheilten Unterricht.

S. 227. In Johann Bernoullis Vorlesungen über Integralrechnung, welche auf 1692 zurückgehen sollen, findet sich, wie H. Eneström hervorgehoben hat, auch die Integration der homogenen Differentialgleichung. In der That heisst es dort (Joh. Bernoulli, Opera III, 422) *Sic omnes aequationes differentiales, ubi nulla reperitur littera constans pro supplendis homogeneis, possunt reduci ad alias separabiles; si pro x substituatur zy et pro dx, zdy + ydz, vel contra, pro y, zx et pro dy, zdx + xdz.* Der Druck dieser Stelle erfolgte erst 1742, so dass Manfredi mit seiner Veröffentlichung von 1714 die unzweifelhafte Priorität zukommt (S. 461). Ob aber Daniel Bernoulli, als er 1725 von der Integrirbarkeit homogener Differentialgleichungen als von einer ganz bekannten Thatsache sprach (S. 479), auf Manfredis Veröffentlichung anspielte, ob er die Methode durch seinen Vater kannte, welcher 1720 in den A. E. (Joh. Bernoulli Opera II, 437), allerdings ohne den einzuschlagenden Weg anzugeben, die Integrirbarkeit jener Gleichungen behauptet hatte, das dürfte kaum zu entscheiden sein.



S. 232. Von der *Linea* oder *Curva logarithmica* ist, wie H. Tannery (Intermédiaire des Mathématiciens 1900, VII, 94—95) bemerkt hat, seit 1673 wiederholt die Rede. Leibniz kennt sie um jene Zeit und Collins nicht minder. Auch im Briefwechsel zwischen Descartes und Debeaune (so muss H. Tannery zufolge der Name geschrieben werden) ist schon 1638 und 1639 von der logarithmischen Curve insofern die Rede, als Eigenschaften einer Curve besprochen sind, welche auf $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$ hinweisen. Die logarithmische Spirale wird gleichfalls für Descartes in Anspruch genommen, der am 20. Februar 1639 die Aufgabe stellte, eine Curve zu finden, deren Berührungslinie mit dem Leitstrahle einen constanten Winkel bilde.

S. 247. Der Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli und De L'Hospital gibt nach H. Eneström darüber Auskunft, wann Beide ihre Meinungen über Wendepunkte austauschten. Es geschah zwischen dem 7. April und dem 16. Juli 1694.

S. 394. Colson hat, worauf uns H. Vacca aufmerksam machte, 1726 in den P. T. (Nr. 396 in Band XXXIV, 161—173) einen Aufsatz unter dem Titel *A short account of negativo-affirmative Arithmetic* veröffentlicht. Colson schlägt darin vor, die Zahlen dadurch mit so niedrigen Einzelziffern als nur möglich zu schreiben, dass man jede Ziffer über 5 durch deren mittels eines kleinen darüber befindlichen Horizontalstriches als negativ gekennzeichneten dekadischen Ergänzung ersetze. Beispielsweise ist $7304682 = 10305002 - 3000320$, und dieses schreibt Colson als $1\bar{3}305\bar{3}22$. Einen gleichen Gedanken sprach Cauchy im November 1840 in den Comptes Rendus der Pariser Akademie der Wissenschaften aus. Colsons Vorschlag hat bei dem Anschreiben der Logarithmen von echten Brüchen sich in England und Intalien, auch bei vereinzelten Deutschen und Franzosen eingebürgert. Anhänger dieses Verfahrens schreiben also $\log 0{,}7 = \bar{1}{,}8450980$ anstatt $\log 0{,}7 = 0{,}8450980 - 1$.

S. 477. Der Satz *Daniel Bernoulli wartete noch zwei Jahre mit der Veröffentlichung seiner Methode* muss mit Rücksicht auf das im Texte sich unmittelbar Anschliessende durch die Worte *in den A. E.* ergänzt werden.

S. 646. Die Meinung, das Moivresche Binomialtheorem sei zum ersten Male in den *Miscellanea analytica* von 1730 veröffentlicht

worden, ist irrig. H. v. Braunmühl (Biblioth. math. 1901 pag. 97 bis 102) hat auf eine Notiz De Moivres von 1707 und auf eine zweite desselben Verfassers von 1722 hingewiesen, welche beide in den P. T. (Nr. 309 pag. 2368—2371 und Nr. 374 pag. 228—230) im Drucke erschienen, und deren erste das genannte Theorem schon voraussetzt, während die zweite mit ausdrücklicher Berufung auf die erste den Satz ausspricht: „Sind $x$ und $t$ die Sinus versus zweier beliebiger Bögen, die sich wie $1:n$ verhalten, und eliminirt man zwischen den beiden verwandten Gleichungen $1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t$ und $1-2z+z^2=-2zx$ die Grösse $z$, so gibt die entstehende Gleichung die Beziehung zwischen $x$ und $t$.“ H. v. Braunmühl hat aber durch Vornahme jener Elimination gezeigt, dass dieselbe das Theorem genau in der Form von 1730 hervorbringt.

S. 701. Bevor Euler im 2. Kapitel des I. Bandes der Introductio auf die Zerlegung der Brüche in Partialbrüche mit möglich einfachsten Nennern eingeht, schickt er die Zerlegung in nur zwei Brüche voraus, deren Nenner zu einander theilerfremd sind und mit einander vervielfacht als Product den Nenner des zu zerlegenden Bruches hervorbringen.

S. 798. H. Brocard hat (Intermédiaire des Mathematiciens 1901, VIII, 8) hervorgehoben, dass Koersma ein Werk *Principes généraux des Mathématiques divisez en trois Parties* verfasst hat, von welchem er in der Bibliothèque universelle historique für 1689, XII, 565 bis 568 (Amsterdam 1700) eine Anzeige veröffentlichte. In dieser ist eine Beschreibung der Cardioide enthalten, ohne dass der Curve ein besonderer Name beigelegt wäre.

Heidelberg, Juli 1901.

**Moritz Cantor.**

## Inhaltsverzeichniss.

### Abschnitt XVI. (1668—1699.)


| | | | Seite |
|---|---|---|---|
| Kapitel | 82. | Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Elementargeometrie | 3 |
| „ | 83. | Einzelne geometrische Untersuchungen. Leibnizens Characteristica geometrica | 20 |
| „ | 84. | Rechenkunst. Combinatorik. Leibrenten | 37 |
| „ | 85. | Reihen. Mercator. Brouncker. Gregory. Newton | 56 |
| „ | 86. | Reihen. Leibniz. Halley. De Moivre. Jakob Bernoulli. Kettenbrüche | 75 |
| „ | 87. | Zahlentheorie. Algebra | 98 |
| „ | 88. | Kegelschnitte. Curvenlehre | 124 |
| „ | 89. | Newtons und Leibnizens erste Entdeckungen im Gebiete der Infinitesimalrechnung | 156 |
| „ | 90. | Newton und Leibniz bis 1687 | 179 |
| „ | 91. | Leibniz 1687—1699. Jakob und Johann Bernoulli bis zu ihrem Streite | 207 |
| „ | 92. | Streit der Brüder Bernoulli. De L'Hôpital. Newtons Briefe von 1693. Gegner Leibnizens | 233 |


### Abschnitt XVII. (1700—1726.)


| | | | |
|---|---|---|---|
| Kapitel | 93. | Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Infinitesimalrechnung bis 1704 | 265 |
| „ | 94. | Der Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz bis April 1712 | 285 |
| „ | 95. | Der Prioritätsstreit seit April 1712 | 306 |
| „ | 96. | Combinatorische Analysis. Wahrscheinlichkeitsrechnung | 328 |
| „ | 97. | Reihenlehre. Differenzenrechnung | 360 |
| „ | 98. | Algebra | 390 |
| „ | 99. | Differentiren. Integriren. Analytische und projective Geometrie | 412 |
| „ | 100. | Differentialgleichungen | 446 |


### Abschnitt XVIII. (1727—1758.)


| | | | |
|---|---|---|---|
| Kapitel | 101. | Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Wörterbücher | 495 |
| „ | 102. | Rechenkunst, besonders in Deutschland | 511 |
| „ | 103. | Lehrbücher der Elementargeometrie. Parallelenlehre. Saccheri | 526 |
| „ | 104. | Elementargeometrische Einzeluntersuchungen | 541 |
| „ | 105. | Algebra bis 1745 | 561 |

Seite

Kapitel 106. Algebra seit 1746 . . . . . 584
„ 107. Zahlentheorie . . . . . 610
„ 108. Combinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . . 624
„ 109. Reihen bis 1736 . . . . . 641
„ 110. Reihen seit 1737 . . . . . 666
„ 111. Eulers Introductio, Band I . . . . . 699
„ 112. Reihen 1749—1754. Die Grundlagen der Differentialrechnung 722
„ 113. Eulers Differentialrechnung . . . . . 749
„ 114. Analytische Geometrie bis 1740. Clairaut. Braikenridge. De Gua . . . . . 773
„ 115. Analytische Geometrie 1740—1748. Maclaurin. Eulers Introductio, Band II . . . . . 798
„ 116. Analytische Geometrie 1748—1756. Cramer . . . . . 819
„ 117. Maximal- und Minimalaufgaben. Eulers Methodus inveniendi 842
„ 118. Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen . . . . . 870

# XVI. Die Zeit von 1668—1699.

貴重書

北京圖書館藏

82. Kapitel.

## Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Elementargeometrie.

Die gleichen Namen, welche am Schlusse des VIII. Abschnittes im I. Bande dieses Werkes auftraten, und welche als die der Träger einer neuen Zeit angekündigt wurden, eröffneten im II. Bande den IX. Abschnitt. Ein ähnlicher Abschluss wie dem I. Bande konnte auch dem II. gegeben werden, ein Zeichen dafür, dass die von uns benutzte Eintheilung keine bloss äusserliche ist. Der XV. Abschnitt kündigte in seinen letzten Sätzen wieder zwei Männer an, Leibniz und Newton, deren geschichtliche Bedeutung es bilden sollte, Methoden, welche vorher den Gipfelpunkt bezeichneten, bis zu welchem nur besonders ausgewählte Geister aufzusteigen vermochten, der Allgemeinheit zugänglich zu machen. Auf dem früher unerreichbar steilen Gipfel konnte man nunmehr daran denken, einen neuen mächtig in die Höhe ragenden Bau aufzuführen, an dessen Errichtung abermals Jahrhunderte gearbeitet haben, und noch immer arbeiten.

Werden wir den XVI. Abschnitt damit beginnen können, die wissenschaftliche Thätigkeit eben jener beiden Männer genau zu schildern? Was wir in den vorhergehenden Zeilen über die Bedeutung von Leibniz und Newton ausgesprochen haben, genügt, um die aufgeworfene Frage zu verneinen. Noch war die Infinitesimalrechnung das letzte Ziel mathematischen Denkens. Noch boten niedriger gelegene Gebiete Raum und Gelegenheit zu erfolgreicher Forschung. Ihre Geschichte haben wir gleichfalls zu erzählen, und, wie uns däucht, ist es nicht bloss der seitherigen Darstellung inbesondere des XIV. und XV. Abschnittes entsprechender, sondern in der That sachgemässer, auch die drei Abschnitte dieses letzten Bandes, deren jeder eine Zeitdauer von ungefähr 30 Jahren umfassen soll, so zu gliedern, dass die einzelnen Kapitel etwa der Schwierigkeit der in ihnen bearbeiteten Gegenstände ihre Rangfolge verdanken, während als Einleitung diejenigen Arbeiten besprochen werden sollen, welche innerhalb des jedesmaligen Zeitraumes geschichtlichen Untersuchungen sich zuwandten.

Im gegenwärtigen Abschnitte sind es vier Männer, von welchen wir geschichtliche Leistungen zu erwähnen haben, ein Deutscher, ein Engländer, ein Franzose, ein Schwede.

Georg Albrecht Hamberger[1]) (1662—1716) war Professor der Mathematik, später der Physik an der Universität Jena. Er hat 1694 zwei Schriften herausgegeben, deren Titel beanspruchen dürfen hier genannt zu werden: *De meritis Germanorum in mathesin* und *De usu matheseos in theologia.*

John Wallis (1616—1703) ist uns im vorigen Bande wiederholt begegnet [Bd. II, S. 686 und häufiger]. Sein *Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises* (London 1685) ist in lateinischer Bearbeitung 1693 im II. Bande der Werke von Wallis abermals gedruckt. Auf den Werth dieser Algebra als solcher kommen wir später zu reden, über deren geschichtlichen Theil müssen wir das Urtheil ergänzend wiederholen, welches wir [Bd. II, S. 792 Note 3] gelegentlich aussprachen. Er ist überhaupt kein geschichtlicher Theil, sondern eine von englischem übermässigem Nationalstolze beeinflusste Parteischrift. Eine Verherrlichung von Thomas Harriot, von Isaac Newton, von Wallis selbst ist beabsichtigt, und namentlich der erstgenannte hat, wenn man Wallis Glauben schenkt, so ziemlich Alles erfunden, was von hervorragender Wichtigkeit in der Lehre von den Gleichungen ist. Durch das Studium Harriots soll z. B. Descartes auf den Satz von Zeichenwechsel und Zeichenfolge gekommen sein[2]), von welchem jener nicht ein Wort gesagt hat, noch sagen konnte, weil für ihn negative Wurzeln nicht vorhanden waren. Sich selbst schreibt Wallis die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$, zu; er will diese Lehre und ihre Anwendung bei dem irreductiblen Falle der Gleichung dritten Grades erfunden haben[3]), Dinge von damals schon mehr als hundertjährigem Alter. Das schlimmste war, dass kritiklose Leser den zuversichtlich ausgesprochenen Behauptungen vertrauten, und so entstanden Irrthümer, welche lange Zeit unangefochten von Lehrbuch zu Lehrbuch sich forterbten.

Claude François Milliet Dechales[4]) (1621—1678) in Chambéry in Savoyen geboren, war Mitglied des Jesuitenordens und fand bald als Missionar in der Türkei, bald als Lehrer an verschiedenen Anstalten, in Marseille, in Lyon, in Chambéry, Verwendung. Sein *Cursus seu Mundus mathematicus* erschien 1674 in Lyon in drei Foliobänden, und 1690 folgte eine auf vier Bände angewachsene aber

[1]) Poggendorff I, 1007. [2]) Wallis Opera II, 171. [3]) Ebenda 187.
[4]) *Biographie universelle* VII, 637 s. v. Challe.



dadurch keineswegs verbesserte zweite Auflage. Dechales war inzwischen längst verstorben, so dass es zweifelhaft erscheinen könnte, wie weit man berechtigt ist, ihn für die 108 Seiten starke Abhandlung *Tractatus prooemialis de progressu matheseos et illustribus mathematicis,* welche in der zweiten Auflage das Werk eröffnet, während die erste Auflage sich durch ihr Fehlen vortheilhaft auszeichnet, verantwortlich zu machen. Der Zweifel schwindet jedoch gegenüber der Vorrede zur zweiten Auflage. Pater Aimé Varcin, der durch den Bruder des Verstorbenen mit der Aufgabe den Neudruck zu leiten betraut war, und dem Dechales' schriftlicher Nachlass dazu zur Verfügung stand, erklärt dort ausdrücklich, er habe jene Abhandlung, welcher er nicht genug Lobsprüche ertheilen kann, vorgefunden. Fachmänner sind nicht im Stande, jenem Lobe zuzustimmen, vermögen vielmehr zu Dechales' Entschuldigung höchstens zu vermuthen, dieser habe nur einen ersten, keineswegs für die Oeffentlichkeit bestimmten Entwurf niederzuschreiben die Zeit gehabt, den er vor dem Drucke noch Zeile für Zeile abgeändert haben würde. Wäre dem nicht so, so müsste man dem strengen Urtheile sich anschliessen, welches einer der gründlichsten Kenner des Alterthums gefällt hat[1]): „Wer dieses oft gelobte Buch nicht gelesen hat, hat gar keine Vorstellung davon, mit welcher Gedankenlosigkeit diese vorgebliche Geschichte der Mathematik zusammengestoppelt ist.“ Kein Mensch kann es Dechales zum Vorwurfe machen, dass ihm damals nur handschriftlich zerstreut vorhandene, aber noch nicht herausgegebene Schriftsteller unbekannt waren; auch das mangelnde Quellenstudium der bereits gedruckten Mathematiker könnte man allenfalls entschuldigen; wenn er nur wenigstens die Schriften von Ramus (Bd. II, S. 546), von Vossius (Bd. II, S. 652) genügend benutzt hätte! Und unter allen Umständen rechtfertigt sich der härteste Dechales gemachte Vorwurf, der der Gedankenlosigkeit, durch die fortwährend zu Tage tretenden Verwechslungen, aus welchen der Leser nicht klug werden kann, wenn er nicht selbst mit besseren Kenntnissen versehen ist, als sie bei Dechales ihm aufgetischt werden. Man weiss aus Proklus (Bd. I, S. 136), dass ein Bruder des Stesichorus als Geometer gerühmt wurde. Dessen Name wird bald Mamerkus, bald Mamertinus, bald Ameristus geschrieben; im Tractatus prooemialis pag. 7 heisst es: *Thaleti proxime successit Mamertinus insignis Geometra quique multa geometrica adinvenisse dicitur. Eodem fere tempore vixit Amethistus . . . . Frater fuit Stesichori poetae.* Aus einem Mathematiker sind mithin deren zwei geworden. Geminus von Rhodos lebte zu drei verschiedenen

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 12—13.

Zeiten: auf pag. 8 vor Euklid, auf p. 79 als Zeitgenosse Ciceros und Sullas, auf pag. 11 und pag. 47 als Lehrer des Proklus im IV. nachchristlichen Jahrhunderte. Dieser letzteren Zeit gehörte gemäss p. 11 auch Eudemus an. Theon von Smyrna hat zweimal gelebt: auf pag. 61 im II., auf pag. 12 und pag. 30 im XII. Jahrhunderte. Auf der ersten Kolumne von pag. 13 wird zum XV. Jahrhunderte berichtet: *Frater lucas de Burgo sancti sepulchri Minorita de Geometria et de divina proportione scripsit;* auf der zweiten Kolumne heisst es: *1508 Frater Lucas Patiolus Burgensis Minorita tractatum edidit geometricum Italicum de mensuratione scilicet, et productione corporum sphaerae inscriptibilium.* Dass hier nur eine und dieselbe Person gemeint ist, ist schwer zu errathen. In ähnlichem Widerspruche steht pag. 13: *Decimo quinto sacculo Ioannes de Monteregio inter multa opus de triangulis edidit tam de rectilineis, quam sphaericis* zu pag. 14: *1561 Joannes Regiomontanus Trigonometriam edidit.* Wie es nun gar mit der Vollständigkeit beschaffen ist, dafür mag als Beispiel dienen, dass keine einzige algebraische Schrift des Cardano genannt ist.

Harald Vallerius[1]) (1646—1716), seit 1690 Professor der Mathematik in Upsala, veröffentlichte 1694 eine 20 Seiten starke Abhandlung *De matheseos incrementis*, welche durch Beispiele zu belegen suchte, wie weit die damalige Mathematik der der Alten überlegen sei.

Den geschichtlichen Werken schliessen wir das Auftreten von in regelmässiger Wiederkehr erscheinenden Schriften an, in welchen neue wissenschaftliche Ergebnisse mitgetheilt werden konnten, was früher, wie wir wissen, sofern der Urheber die Buchform nicht wählen wollte, oder nicht zu wählen im Stande war, nur durch gelehrten Briefwechsel zu geschehen pflegte. Gelehrte Gesellschaften fanden derartige Veröffentlichungen seit ihrem Entstehen als ihren Zwecken entsprechend.

Die Accademia del Cimento (Bd. II, S. 661), gegründet im Juni 1657, aber schon 1667 wieder geschlossen — wie man sagt, weil der Papst die Verleihung des Cardinalhutes an Leopold von Medici, den Gründer jener Akademie, an diese Bedingung knüpfte — gab 1667 das während der zehn Jahre ihres Bestandes durch ihren Sekretär Lorenzo Magalotti (1637—1712) geführte Tagebuch ihrer Sitzungen heraus.

Die Royal Society in London constituirte sich nach wohl zwölfjährigem geheimen Bestehen am 16. November 1660 öffentlich und erhielt 1662 die königliche Bestätigung[2]). Ihr erster Präsident war Lord Brouncker (Bd. II, S. 765), ihr Sekretär Heinrich Oldenburg[1]) (etwa 1615—1677) neben John Wilkins[2]) (1614—1672). Ersterer in Bremen geboren, war 1653 als Consul seiner Vaterstadt nach England übergesiedelt und hatte später als Hofmeister einiger jungen Adligen Eingang in hochgestellte Familien gewonnen. Die Royal Society bediente sich seiner zur Führung des auswärtigen Briefwechsels und insbesondere auch zur Herausgabe der akademischen Schriften, welche den Namen der *Philosophical Transactions* erhielten. Der erste Band gilt für das Jahr 1665.

[1]) Poggendorff II, 1168. — Eneström in Bibliotheca mathematica 1889 S. 3. [2]) A. Hume, The learned societies etc. (London, 1853) pag. 67.



Die Gründung der Pariser Académie des sciences fällt in das Jahr 1666 (Bd. II, S. 675). Ihr Sekretär war Jean Baptiste Duhamel[3]) (1624—1706), ein Mitglied der Congregation des Oratoriums und seit 1656 Almosenier des Königs Ludwigs XIV. Daneben bekleidete er die Professur der Philosophie am Collège de France. Duhamel gab in der *Histoire de l'Académie des sciences* einen sehr unregelmässigen und unvollständigen Bericht über den Inhalt der Sitzungen dieser gelehrten Körperschaft, und erst seit deren neuen Satzungen von 1699 lenkte die Veröffentlichung in geregelte Bahnen ein.

Aber inzwischen waren wissenschaftliche Zeitschriften entstanden, welche auch allgemeineren Wünschen durch die Einrichtung entgegenkamen, dass sie nicht nur solche Mittheilungen brachten, welche vorher in einer Sitzung einer Akademie hatten vorgetragen werden können. Die erste solche Zeitschrift war das *Journal des Sçavans* und weil sie die erste war, mag von ihrer Geschichte etwas ausführlicher die Rede sein[4]). Denis de Sallo, Sieur de la Coudraye (1626—1669) war seit 1652 Nachfolger seines Vaters als Parlamentsrath in Paris. Sein wesentlicher Charakterzug war eine auf alle Gebiete sich erstreckende Wissbegierde, die er dadurch zu befriedigen suchte, dass er las was immer neu erschien, und dass er Leute besoldete, welche für ihn die Stellen abschrieben, die er bezeichnete, und denen er Bemerkungen und eigene Gedanken zu diesen Stellen in die Feder diktirte. Auf Grund dieser Sammlung von wichtigen Auszügen war De Sallo in den Stand gesetzt, binnen sehr kurzer Zeit Abhandlungen über die entlegensten Dinge zu verfassen, und so lehrte ihn die eigene Erfahrung den Nutzen gut gemachter Bücherauszüge. Er fasste den Gedanken einer Zeitschrift, welche ihrem Leserkreise das biete, was er für sich allein mit grossem Kosten-

[1]) Rix, *Henry Oldenburg, first secretary of the royal societiy* in der Zeitschrift Nature Vol. 49 pag. 9—12 (London, 1893). [2]) Rees, *Cyclopaedia* XXXVIII (London, 1819). [3]) *Nouvelle Biographie universelle* XV, 99—102 (Paris, 1856). [4]) Jacques Boyer, *Denis de Sallo fondateur du Journal des Sçavans et son oeuvre* in der Revue scientifique (Revue rose) LII, 400—401 vom 23. Septbr. 1893.

aufwand zu beschaffen sich gewöhnt hatte. Er fand Mitarbeiter, welche bereit und befähigt waren, auf seinen Plan einzugehen, darunter den Abbé Jean Gallois[1]) (1632—1707), Professor des Griechischen am Collège Royal zu Paris, der zu derartigen Arbeiten wie geboren erschien. Der damals allmächtige, den Wissenschaften günstige Minister Colbert (1619—1683) wurde ins Interesse gezogen und liess der neuen Zeitschrift ein Privilegium zu Theil werden, und am Montag 5. Januar 1665 erschien die erste Nummer des Journal des Sçavans auf anderthalb Druckbogen in Quart. Als Herausgeber war Hédouville genannt, ein Diener De Sallos. Die Auszüge waren aber auch Kritiken, und so zahm diese gehalten waren, verliehen sie doch der Zeitschrift eine gewisse Macht und schufen ihr Feinde. Besonders verhasst war sie dem Jesuitenorden, De Sallo war überdies des Jansenismus verdächtig, und als nun gar eine Stelle gedruckt wurde, welche als Tadel einer Inquisitionsmassregel aufgefasst werden konnte, trat der päpstliche Nuntius als Kläger auf. Colbert sah sich genöthigt, De Sallo die Fortführung der Zeitschrift zu untersagen. Seine eigentliche Herzensmeinung äusserte sich dadurch, dass er De Sallo, um ihn für den Verlust zu entschädigen, in der Finanzverwaltung unterbrachte und die Leitung der Zeitschrift, welche nicht unterdrückt wurde, dem seitherigen Mitarbeiter Gallois übertrug, in dessen Händen sie 1666 bis 1675 blieb. Von 1675 bis 1686 war Abbé La Roque der Herausgeber, auf ihn folgte der Präsident Cousin, und 1701 übernahm der Staat die Zeitschrift, mit deren Leitung eine Vereinigung mehrerer Gelehrten betraut wurde. Das ist die Gestalt, in welcher sie bis 1792 fortbestand, in welcher sie 1816 neubegründet wurde.

Italien war das erste Land, welches dem in Frankreich gegebenen Beispiele folgte[2]). Francesco Nazari gab in Rom 1668—1681 das *Giornale de'Letterati* heraus, eine Uebersetzung des Journal des Sçavans unter Beifügung von Berichten über italienische dort vernachlässigte Arbeiten. Pietro Moretti und Francesco Miletti leiteten 1671—1689 das *Giornale veneto*, Roberti und Bacchini traten 1686—1689 an die Spitze des *Giornale di Parma*. Aehnliche Unternehmungen waren das *Giornale di Modena* 1692—1697, das *Giornale di Ferrara* 1688—1689, die in Venedig erscheinende *Galleria di Minerva*

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XIX, 326—327 (Paris 1857). 2) Gino Loria, *Il Giornale de' Letterati d'Italia di Venezia e la Raccolta Calogerà come fonti per la storia delle matematiche nel Secolo XVIII.* Hist. Festschr. 1899, S. 243—274, besonders S. 243—244 und S. 255—256. Unter Hist. Festschr. 1899 soll die Festschrift verstanden sein, welche als Neuntes Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 1899 in Leipzig (bei B. G. Teubner) erschien.



1696, das *Gran Giornale di Forli* 1701. Aber alle diese Zeitschriften bestanden nur verhältnissmässig kurze Zeit. Lebenskräftiger erwies sich das *Giornale de' letterati d'Italia* 1710—1740 gegründet von Apostolo Zeno unter Beihilfe von dessen Bruder Pier Catarino Zeno und von Scipione Maffei, Antonio Vallisneri, Giovanni Poleni, während der Grossherzog von Toscana das Unternehmen durch Geldmittel unterstützte. War bei den erwähnten Zeitschriften der Hauptzweck der der Berichterstattung ohne selbständige Mittheilungen auszuschliessen, so gründete Angelo Calogerà (1699—1766) im Jahre 1728 eine ausschliesslich für selbständige Arbeiten bestimmte *Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici*, gewöhnlich *Raccolta Calogerà* genannt, von welcher 51 Bände kleinsten Formates (Octodez-Bändchen) in Venedig erschienen.

In Deutschland wurde das Pariser Journal des Sçavans Vorbild der von 1682 bis 1774 in Leipzig herausgegebenen *Acta Eruditorum*, seit 1707 *Nova Acta Eruditorum*, welche Otto Mencke[1]) (1644—1707) ins Leben rief.

In Holland wurden ähnliche Unternehmungen ins Werk gesetzt, die *Nouvelles de la république des lettres* 1684—1718, die *Bibliothèque universelle et historique* 1686—1693, die *Histoire des ouvrages des savants* 1687—1709, denen insgesammt ein nur kleines Format — Duodez — gegeben wurde.

Das sind die wichtigsten Fundorte für Einzelveröffentlichungen zunächst in der Zeit, mit welcher dieser Abschnitt sich beschäftigt, aber auch noch über jene Zeit hinaus.

Als gleichfalls an die geschichtlichen Arbeiten sich anschliessend nannten wir die Veranstaltung von Ausgaben klassischer Schriftsteller. Deren Anzahl beginnt aus einem doppelten Grunde abzunehmen. Erstens gab es nachgrade schon Ausgaben der am meisten berühmten Werke des Alterthums, dem eigentlichen Bedürfnisse war also schon genügt; und zweitens hat die zweite Hälfte des XVII. Jahrh. wenigstens in Frankreich und England eher eine Abneigung gegen das Alterthum, eine Minderschätzung seiner Leistungen, als eine besondere Vorliebe desselben, welche kritische Ausgaben hätte ins Leben rufen können, heranwachsen sehen. Beide Gründe wirkten gemeinsam, wenn auch nicht so zwingend, dass nicht Ausnahmen von der Regel in den meisten Ländern Europas zu verzeichnen wären.

In Paris gab Claude Perrault (1613—1688), ein Mann von vielseitiger Bildung, der uns im 91. Kapitel wiederbegegnen wird,

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXI, 312—313 (Artikel von Mutzenbecher).

1673 den Vitruv heraus. Ebenda erschien 1693 unter dem Titel *Veterum mathematicorum opera omnia* eine von Melchisedech Thévenot veranstaltete Sammlung alter Kriegsschriftsteller. In Amsterdam besorgte Wilhelm Goesius 1674 die römischen Feldmesser zum Drucke.

In England begegnen wir einer Persönlichkeit, welche mit mindestens gleicher Vorliebe die Veröffentlichung von Schriften der jüngsten Vergangenheit neben solchen des Altertums nach Kräften förderte. Wir meinen John Collins[1]) (1625—1683). Er war in seiner Jugend Lehrling bei einem Buchhändler; später ging er zum Rechenfache über; während der englischen Revolution war er Schiffsmann. Nach der Wiederherstellung des Königthums kamen für Collins ruhigere und auch bessere Zeiten. Von einem königlichen Jahresgehalte lebend, wurde er Mitglied der Royal Society. Er führte einen so ausgedehnten gelehrten Briefwechsel, dass derselbe von geschichtlicher Wichtigkeit für die Entdeckungen des letzten Drittels des XVII. Jahrh. geblieben ist, trotzdem gerade damals, wie wir oben sagten, Akademieschriften und Zeitschriften die Briefwechsel in grossem Maassstabe allmälig verdrängten. Collins also vermittelte 1668 den Druck der mit Zusätzen von Pell versehenen Brancker-schen Uebersetzung der Algebra von Rahn (Bd. II, S. 777). Er soll bei Herausgabe der Algebra von Kersey 1673—1674 betheiligt gewesen sein. Er übergab 1675 Bearbeitungen der Werke des Archimed, der Kegelschnitte des Apollonius dem Drucke, welche Isaac Barrow verfasst hatte, und auch schon 1669—1670 eigene Schriften desselben Gelehrten. Wenn Collins auch eine Mitwirkung bei dem Drucke der 1687, mithin vier Jahre nach seinem Tode erschienenen Algebra des Wallis nachgerühmt wird, so kann dieselbe höchstens darin bestanden haben, dass er den Verfasser zur Herausgabe ermunterte.

Wir haben Isaac Barrow[2]) (1630—1677) genannt. Er war in erster Linie und aus vollster Ueberzeugung Theologe, aber um ein guter Theologe zu sein, musste er, wie von einem Lobredner gesagt worden ist, Chronologie verstehen, Chronologie schliesst Astronomie, Astronomie Mathematik ein, und auf diese Weise wurde Barrow zum Mathematiker. Die Anfänge seiner Laufbahn waren schwierig. Barrow gehörte gleich Lord Brouncker, gleich John Wallis, gleich William Oughtred der strenggläubigen Partei an und musste

[1]) *National Biography* XI, 369 (London, 1887, edited by Leslie Stephen).
[2]) *National Biography* III, 299—305 (London, 1885, edited by Leslie Stephen). W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge* pag. 46—49 (Cambridge, 1889). *Opera mathematica Barrowii* (1860 ed. Whewell).



die Verfolgungen erdulden, unter welchen alle seine Gesinnungsgenossen litten. Bei Wiedereinsetzung des Königthums erhielt Barrow die sogenannte Gresham-Professur der Geometrie. Er gab sie 1663 wieder auf, als er zu der damals durch letztwillige Verfügung von Henry Lucas gegründeten Professur der Geometrie nach Cambridge berufen wurde, und auch diese Stellung legte er 1669 zu Gunsten seines Schülers Isaac Newton nieder, um von da an geistliche Aemter zu verwalten. Die frühsten mathematischen Arbeiten Barrows greifen bis 1655 zurück, wo er die Elemente, und 1657, wo er die Daten Euklids in lateinischen Bearbeitungen veröffentlichte, welche 1676 abermals gedruckt wurden und bis zum Anfange des XVIII. Jahrh. in England ausschliesslich in Gebrauch blieben. Dann folgten 1675 jene vorerwähnten, durch Aufforderung von Collins hervorgerufenen Bearbeitungen der Werke des Archimed und der Kegelschnitte des Apollonius, auch eine Bearbeitung der Sphärik des Theodosius. Die Archimedbearbeitung enthält auch die aus einer arabischen Uebersetzung 1659 durch Samuel Foster (Bd. II, S. 585) bekannt gewordenen Wahlsätze (Bd. I, S. 283). Eine nachgelassene, 1678 gedruckte Schrift Barrows *Lectio in qua theoremata Archimedis de sphaera et cylindro per methodum indivisibilium investigata exhibentur* darf hier gleichfalls genannt werden.

Mit der wirklichen Herausgabe des Archimed und zwar in deutscher Sprache beschäftigte sich Johann Christoph Sturm[1]) (1635—1703). Er hat schon während der Zeit, da er als Prediger zu Deiningen im Oettingschen angestellt war, 1667 eine deutsche Uebersetzung der archimedischen *Sandeszahl* veröffentlicht, und als er 1669 als Nachfolger von Abdias Trew zum Professor der Mathematik und Physik in Altdorf ernannt wurde, liess er 1670 den *Deutschen Archimed* nachfolgen, eine von zahlreichen Anmerkungen begleitete Uebersetzung auch der übrigen archimedischen Schriften mit Ausnahme der Wahlsätze, deren Auffindung Sturm entgangen sein dürfte. Schon in der Sandeszahl hat Sturm Gewicht darauf gelegt, deutsche Ausdrücke an die Stelle der fremdländischen zu setzen. Eine *Nota*, welche das Vorwort schliesst, sagt ausdrücklich: *Damit der begierige Leser durch einige scheinende Neuigkeit etlicher verteutschter Kunstwörter nicht aufgehalten werde, so soll er wissen, dass hierinnen ein Durchmesser so viel heisse als sonsten Diameter, der Halbmesser so viel als Semidiameter, Proportio ist von uns eine Verhältniss, Proportionalia gleichver-*

[1]) Poggendorff II, 1043—1044. S. Günther, Die mathematischen und Naturwissenschaften an der nürnbergischen Universität Altdorf (Separatabzug aus dem 3. Hefte der Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg) S. 28—29.

*haltende Dinge, Cylindrus eine Rund-Säule etc. verteutschet.* In dem Deutschen Archimed ist sodann der Gesammtvorrath deutscher Ausdrücke in dem Maasse angewachsen, dass ein *gedoppeltes Register* nach der deutschen und nach der lateinischen und griechischen Buchstabenfolge auf $3^1/_2$ Folioseiten im Vorberichte abgedruckt werden konnte. Wir erwähnen aus dem ersten deutsch geordneten Register: *gleichlauffende Lineen für Parallela, Folge für Corollarium, Hülfssatz für Lemma, Lehrsatz für Propositio,* dann aus dem zweiten Register: *Centrum der Mittelpunkt, Latus rectum der Mitmesser in denen Kegellinien, Postulatum eine Forderung, Vertex der Scheitelpunkt* u. s. w., Ausdrücke, welche wohl zum grössten Theil von Sturm zuerst benutzt worden sein mögen. Sein *Mitmesser* dürfte dem einige dreissig Jahre früher in Frankreich entstandenen *Paramètre* nachgebildet sein. Die Sandeszahl von 1667 ist dem Deutschen Archimed von 1670 als letzter Abschnitt beigefügt, hat aber die alten mit 1 anfangenden Seitenzahlen beibehalten. Von einer zufälligen Anheftung durch den Buchbinder kann nicht die Rede sein, denn in dem zu Anfang befindlichen *Verzeichnis derer in diesem Werk begriffenen Archimedischen Schrifften* ist die Sandeszahl als VII. Schrift angekündigt. Man wird also annehmen müssen, dass von dem Drucke von 1667 noch so viele Exemplare auf Lager sich befanden, dass es unnöthig war, diesen Abschnitt 1670 neu zu drucken.

Jakob Kreza[1]) (1648—1715) ist in Smrschitz in Mähren geboren. Er war Jesuit und lehrte Mathematik in Prag, Olmütz, Madrid, zuletzt in Brünn, wo er starb. Während seines Aufenthaltes in Madrid übersetzte Kreza die 6 ersten Bücher, das 11. und das 12. Buch der Euklidischen Elemente ins Spanische und fügte einige Sätze des Archimed hinzu. Der Band wurde 1688 in Brüssel gedruckt. Eigene Schriften Kreza's über Arithmetik, Trigonometrie u. s. w. genossen insbesondere an den Ordensanstalten einen sehr guten Ruf.

In Italien finden wir Elia Astorini[2]) (1651—1702), einen Carmelitermönch, der weite, lang ausgedehnte Reisen machte und in Marburg und Gröningen, zuletzt in seinem Heimathlande in Siena als Universitätslehrer thätig war. Er gab in Italien 1691 die Elemente des Euklid, 1702 die Kegelschnitte des Apollonius heraus. Von einem Archimedes restitutus finden wir gleichfalls unbestimmte Nachricht.

Gehen wir von den Herausgebern alter Geometer zu den Originalschriftstellern über, so wird, und zwar nicht bloss in diesem Kapitel, eine Erscheinung uns entgegentreten, auf welche wir gleich hier, wo

[1]) Briefliche Mittheilung von H. Studnička mit Berufung auf Wydra, Historia Matheseos in Bohemia et Moravia cultae. — Poggendorff I, 1318.
[2]) Poggendorff I, 71.



es um die Männer sich handelt, welche im Geiste und nach der Weise der Alten Geometrie trieben, aufmerksam machen möchten: die Namen der Schriftsteller, welche eine grosse geschichtliche Bedeutung erworben haben, sind recht dünn gesäet. Wir müssen, um nicht allzuviele scheinbare Lücken gegen bibliographische Sammelwerke aufzuweisen, noch Mittelgut und noch Geringeres erwähnen. Nicht als ob in dieser Bemerkung ein Tadel gegen die Leistungen der Endjahrzehnte des XVII. Jahrh. ausgesprochen sein soll.

Es ist ja wahr, dass in Deutschland die Nachwehen des dreissigjährigen Krieges sich, wie überall so auch in den mathematischen Wissenschaften, wahrnehmen liessen. Es ist nicht minder wahr, dass in Frankreich der wachsende Einfluss der Jesuiten, welcher in der Aufhebung des Ediktes von Nantes am 22. October 1685 gipfelte, zahlreiche Persönlichkeiten aus dem Lande trieb, welche bei ruhiger verlaufendem Leben die Mathematik gerade in Frankreich vielleicht in dem stetigen Wachsthume erhalten hätten, von welchem unser XIV. und XV. Abschnitt glänzende Zeugnisse gaben. In Italien mag eine ähnliche Machtentfaltung des gleichen Ordens, der seit seinem Siege über Galilei allgewaltig geworden war, unserer Wissenschaft schädlich gewesen sein. Wollten wir unseren Rundgang durch Europa nach England fortsetzen, so könnten wir dort auf die Nachwirkung der kaum beseitigten Staatsumwälzung, könnten wir auf neuerdings beginnende politische Wirren hinweisen.

Alle diese Störungen waren thatsächlich vorhanden. Aber wollten wir irgend einen anderen Zeitraum von annähernd gleicher Dauer und innerhalb desselben die politischen Verhältnisse der europäischen Reiche unter die Lupe nehmen, so würden Störungsgründe einer ruhigen Entwicklung gleichfalls nicht fehlen. Haben wir doch an manchen Stellen des I. wie des II. Bandes auf Derartiges aufmerksam gemacht. Es ist vielmehr ein Andres, was in Betracht kommt.

Je näher die Zeit an unsere Gegenwart heranrückt, um so mehr Bücher haben sich erhalten, deren Verfasser durch den Lokalpatriotismus ihrer Heimaths- oder Ordensgenossen, aber auch nur durch diesen, mit dem Lorbeer der Berühmtheit belohnt wurden. Die Vergessenheit hatte noch nicht Zeit sich ihrer zu bemächtigen, denn nur langsam, dann aber meistens sicher siebt die Gerechtigkeit der Nachkommen. Um ein Beispiel von schlagender Beweiskraft anzuführen, wen kennen wir aus dem grossen Jahrhunderte griechischer Mathematik? Euklid, Archimed, Eratosthenes, Apollonius. Glaubt Jemand, in der Zeit, welche diese Männer hervorzubringen im Stande war, habe neben ihnen kein einziger anderer Mathematiker gelebt? Gewiss nicht, aber jene anderen sind meistens vergessen. Aehnlich wird es mit Dutzen-

den von Persönlichkeiten gehen, welche dem nicht minder grossen Jahrhunderte angehören, dessen Darstellung dieser III. Band unserer Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gewidmet ist. Wir fühlen uns nur nicht berechtigt vorzugreifen und sie heute schon todtzuschweigen.

Wir nennen deshalb Gilles François Gottigniez[1]) (1630 bis 1689), einen belgischen Jesuiten, der seit 1662 am Collegio Romano in Rom lehrte, und der dort seit 1666 zahlreiche Schriften veröffentlichte. Sie beziehen sich nicht auf Geometrie allein, sondern stellen in ihrer Gesammtheit einen vollständigen Lehrgang der Elementarmathematik dar.

Camillo Guarino Guarini[2]) (1624—1683), ein italienischer Theatiner, gab 1671 und 1676 zu Turin einen *Euclides adauctus et methodicus* heraus, dessen XXXII. Abschnitt ein Vorläufer der späteren descriptiven Geometrie genannt worden ist.

Vitale Giordano Giordani[3]) (1633—1711) aus Unteritalien kam nach wildem Wanderleben nach Rom, wo er Mathematiker der dorthin in einer Art von Selbstverbannung zurückgezogenen Königin Christine von Schweden und später Professor der Mathematik an verschiedenen gelehrten Anstalten wurde, zunächst 1666 an der von Ludwig XIV., König von Frankreich, gestifteten Schule für Maler und Bildhauer, dann 1685 an der sogenannten Sapienza. Er übergab 1686 einen *Corso di matematica* dem Drucke, dessen erster Band den besonderen Titel *Euclide restituto* führt. In diesem Buche ist der Versuch gemacht zu erweisen, dass der Ort der Endpunkte der Senkrechten von gleicher Länge auf dieselbe Gerade selbst eine Gerade sein müsse. Im Jahre 1689 lernte Giordano Leibniz kennen, der sich damals in Rom befand. Drei kurz darauf zwischen beiden gewechselte Briefe haben sich erhalten[4]). Sie beziehen sich auf geometrische Definitionen.

Nicolas de Malézieu[5]) unterrichtete 1696—1700 den Duc de Bourgogne (1682—1712), den Sohn Ludwig's XIV., welcher mathematisch begabt gewesen zu sein scheint. Malézieu verfasste für seinen Zögling *Élémens de géométrie*, in welcher der Versuch gemacht ist,

[1]) De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jésus* II, 253. Quételet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* pag. 233. [2]) Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana* VIII, 276. Chasles, *Aperçu hist.* 345 (deutsch 363). [3]) Ebenda l. c. VIII, 273. Poggendorff I, 901. Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss (Leipzig, 1895) S. 33—34. Viel ausführlicher bei Camerer, *Euclidis Elementorum libri sex priores* I, 411—415. [4]) Leibniz, Mathematische Schriften herausgegeben von C. J. Gerhardt I, 195—200. [5]) Histoire de l'Académie des sciences de Paris. Année 1727 (Histoire pag. 145—151).



das Parallelenaxiom zu erweisen und zwar so, dass Widersprüche hervortreten, wenn zwischen zwei Parallelen, vorausgesetzt dass sie keine ihnen gemeinsame Senkrechte besässen, abwechselnd von dem Endpunkte der Senkrechten auf die eine Parallele eine solche auf die andere gefällt würde. Die Élémens de géométrie erschienen 1715 und enthalten die Bemerkung, die Ergänzungen, welche es bringe, rührten von dem jungen Herzoge selbst her. Ob diese Behauptung lediglich Höflingsgerede war, ob zwischen den Élémens de géométrie und dem schon 1713 (also auch nach dem Tode des Duc de Bourgogne) in Padua gedruckten Buche *Serenissimi Burgundiae Ducis Elementa geometrica ex Gallico sermone in Latinum translata*[1]) ein Zusammenhang besteht, wissen wir nicht zu sagen.

Claude François Milliet Dechales und sein *Mundus mathematicus* von 1674 und 1690 ist uns (S. 4—6) durch die sehr schwache geschichtliche Einleitung bekannt geworden, welche als Verschlimmbesserung der zweiten Auflage an deren Spitze trat. Im Uebrigen kann man das Lehrbuch keineswegs als schlecht bezeichnen, wenigstens nicht in dem, was es enthält. Es beginnt, wenn wir von jener Einleitung absehen, mit einer Geometrie nach Euklid, d. h. die sechs ersten, das elfte und das zwölfte Buch der Elemente sind der Hauptsache nach vorhanden, die dazwischen liegenden Bücher VII bis X fehlen. Es folgt das Rechnen, und zwar zuerst das Zahlenrechnen an ganzen und gebrochenen Zahlen mit Einschluss der Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln, dann die *Arithmetica calculatoria et divinatoria.* Arithmetica calculatoria ist das alte Linienrechnen mit Rechenpfennigen nebst dessen Anwendung auf benannte Zahlen. Arithmetica divinatoria ist eine kleine Sammlung von Rechenkunststückchen und dergleichen, unter welchen auch die Aufgabe von den 15 Christen und 15 Türken (Bd. II, S. 362 und öfter) nicht fehlt. Nun geht der Verfasser zu der Sphärik des Theodosius in freier Uebersetzung über und nach dieser zur Trigonometrie. Deren erstes Buch lehrt den Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen unter einander und die Berechnung trigonometrischer Tafeln. Das zweite Buch lehrt Logarithmen sowohl der trigonometrischen Funktionen als der Zahlen für die Basis 10 mit sieben Decimalstellen berechnen und dieser Logarithmen sich bedienen. Dann folgt eine Logarithmentafel selbst. Das dritte Buch ist der ebenen, das vierte, fünfte, sechste der sphärischen Trigonometrie gewidmet. Jetzt kommen lauter Gebiete, welche man als angewandte Mathematik oder als Physik zu benennen pflegt: Praktische Geometrie, Mechanik, Statik, Geographie, Magnetismus,

[1]) Gino Loria in Hist. Festschr. 1899 S. 253.

Bürgerliche Baukunst, Zimmerkunst (ars tignoria), Steinschnitt, Kriegsbaukunst, Hydrostatik, Lehre von den Quellen und Flüssen, Hydraulik, Schifffahrtskunde, Optik, Perspektive, Katoptrik, Dioptrik, Musik, Feuerwerkskunst, Benutzung der Astrolabien, Gnomonik, Astronomie, Kalenderkunde. Auf 25 Folioseiten schliesst sich die Astrologie an oder vielmehr neben der Angabe der Regeln, nach welchen die Astrologen beim Aufstellen der Horoskope verfahren, eine kräftige Bekämpfung der Hallucinationen, als welche dem Verfasser die ganze Sterndeuterei erscheint. Die Zusammenstellung der Gründe, um derenwillen man auf das Gerede der Astrologen, Wetterpropheten u. s. w. nichts geben dürfe, ist eine so vollständige, dass sie auch heute noch gegen manchen Aberglauben, der in wissenschaftlichem Gewande auftritt, mit Erfolg benutzt werden könnte. Und nun kommen als Schluss des ganzen Werkes noch drei Wissensgebiete, die man an dieser Stelle gewiss nicht leicht mehr sucht: Algebra, Indivisibilien, Kegelschnittslehre. Die Algebra, mehr als 100 Folioseiten in acht Bücher eingetheilt, führt den Leser auf eine Stufe, welche nicht ganz mit der von Vieta erreichten Höhe übereinstimmt, so innig auch in manchen Dingen, beispielsweise in dem Gebrauche fremdartiger Kunstausdrücke, in der Nichtanerkennung negativer Gleichungswurzeln, in der Anwendung der Buchstaben $A$, $E$, $I$, $O$, $V$, $Y$ für unbekannte Grössen, die Anlehnung an Vieta ist. Von diesen Vokalen macht ferner Dechales ebenso wenig wie Vieta ausschliesslichen Gebrauch. In der *Algebra numerosa*, welche von der *Algebra speciosa* unterschieden wird, heisst die Unbekannte nach der bei Vieta theilweise noch erhaltenen Sitte einer weit zurückliegenden Zeit $R$, ihr Quadrat $q$, ihr Kubus $c$ u. s. w. Diese Buchstaben werden aber bei höheren Potenzen nicht addirt, sondern multiplicirt, und damit ist Vieta gegenüber (Bd. II, S. 631) ein bewusster Rückschritt vollzogen. Dechales hat ihn damit zu begründen gesucht, dass er sagt[1]), man könne die fünfte Potenz doch nicht, wie es Einige wollen, *quadratocubus* nennen, da sie weder ein Quadrat noch ein Kubus sei. Er hat aber dabei nicht bedacht, dass ihm so die Multiplicationsregel der Potenzen durch blosses Nebeneinanderschreiben ihrer Zeichen verloren ging, welche der Gewinn bei Vieta's Neuerung war, mochten auch sprachliche Einwendungen gegen sie erhoben werden können. In der Algebra speciosa, in welcher die Vokale als Vertreter der Unbekannten auftreten, werden die aufeinander folgenden Potenzen durch rechts von

[1]) *Quintus numerus ab unitate vocatur ab aliquibus quadrato-cubus sed male cum neque sit quadratus, neque cubus, atque adeo nec dici possit quadratus cubi, nec cubus quadrati: eum vocabimus supersolidum vel surde solidum. Itali relatum primum dixerunt, nos illum littera S. notabimus.*



den Buchstaben aber auf gleicher Linie mit ihnen angeschriebenen Zahlen, die Glieder einer arithmetischen Reihe, angedeutet, welche Exponenten genannt werden[1]). Dem Ausdrucke „sie werden genannt" darf man wohl entnehmen, dass Dechales das Wort Exponent einem Vorgänger entlehnte, und dieser Vorgänger war nach aller Wahrscheinlichkeit Michael Stifel, der in seiner *Arithmetica integra*[2]) das gleiche Wort für die Glieder einer arithmetischen Reihe, welche solchen einer geometrischen Reihe entsprechen, in Anwendung brachte. Links von den Buchstaben stehen abermals Zahlen als Coefficienten, wie Dechales mit Vieta (Bd. II, S. 632) aber in erweiterter Bedeutung des Wortes sagt. Demnach ist bei Dechales $4A3$ das Gleiche, was Descartes und seine Nachfolger $4x^3$ schrieben. Dechales behandelt Gleichungen ersten und zweiten Grades, letztere indem er sie durch Wegschaffung des Gliedes ersten Grades in reinquadratische umwandelt, wenn er auch diesen Grundgedanken nirgend deutlich ausspricht, so wenig Vieta es gethan hat. Gleichungen von höherem Grade werden, wieder im Anschlusse an Vieta (Bd. II, S. 640), durch ein gewisses Divisionsverfahren numerisch aufgelöst. Der Name des Diophant kommt häufig bei Dechales vor. Einestheils wird bei quadratischen Gleichungen die gewöhnliche Auflösung von der Diophantischen unterschieden. Unter ersterer versteht Dechales die Zurückführung der Gleichung auf die Form, in welcher das Quadrat der Unbekannten nur noch mit dem Coefficienten 1 versehen ist, unter letzterer dagegen die vorbereitende Vervielfachung der Gleichung mit dem Coefficienten des quadratischen Gliedes, so dass dieses einen selbst quadratischen Coefficienten erhält. Anderntheils sind zahlreiche Aufgaben aus den beiden ersten Büchern des Diophant, und zwar sowohl bestimmte als unbestimmte, behandelt. Die unbestimmten sind ihrem Ursprunge nach von höherem als dem ersten Grade, da unbestimmte Aufgaben ersten Grades bei Diophant nicht vorkommen. Bachets methodisches Verfahren (Bd. II, S. 772—773) zur Auffindung ganzzahliger Auflösungen solcher Gleichungen ersten Grades, deren Unbekannte an Zahl die der vorgelegten Gleichungen übertreffen, darf man daher bei Dechales nicht suchen. Am Schlusse jener Diophantischen Gleichungsbeispiele meint er dann[3]) einigermassen naiv, sie genügten dem Anfänger, um sich daran zu üben:

[1]) *Hi numeri progressionis arithmeticae respondentes numeris cossicis vocantur eorum exponentes.* [2]) *Arithmetica integra* fol. 250 recto: *Est — 3 exponens ipsius* $\frac{1}{8}$, *sicut 6 est exponens numeri 64 et 3 est exponens numeri 8.* [3]) *Atque haec sufficiant ut Tyro se exercere possit, et intelligat Diophantum; qui plura volet assumat ipsum Diophantum, quem ex praesuppositis fundamentis percurret facile.*

wolle einer mehr, so solle er den Diophant selbst zur Hand nehmen, den er nach dem Vorausgeschickten leicht werde durchlaufen können. Die Behandlung der Indivisibilien, nach Cavalieri gearbeitet, bewahrt sich eine gewisse Freiheit von dem Vorbilde, dem nicht alle Beweise genau so, wie sie bei Cavalieri vorkommen, entnommen sind. Allerdings haben auch nicht alle Sätze Cavalieris Eingang gefunden, und beispielsweise von dem wichtigsten Ergebnisse von Cavalieris Untersuchungen (Bd. II, S. 845), welches der Formel

$$\int_0^a \frac{kb^n x^n}{a^n}\,dx = \frac{kab^n}{n+1}$$

entspricht, ist keine Rede. Dagegen sind die Untersuchungen über die Quadratrix und über die Spirale vorhanden. Bei ersteren lässt Dechales sein Licht als grosser Geschichtskenner leuchten. Die Quadratrix stamme von Nicostratus und Nicomedes! Es gehört fast eine gewisse Phantasie dazu, den Namen Dinostratus hier zu erkennen. Die in fünf Büchern behandelten Kegelschnitte bilden den Schluss des Werkes. Das erste Buch handelt von der Parabel, das zweite von der Ellipse, das dritte von der Hyperbel, wo überall die Curven innerhalb der Ebene betrachtet sind. Das vierte Buch setzt sie zu dem durch eine Ebene geschnittenen Kegel in Beziehung. Das fünfte Buch lehrt die Ellipse als Cylinderschnitt kennen. In einer Vorrede erklärt Dechales, es habe ursprünglich in seiner Absicht gelegen, Alles zu vereinigen, was man von den Kegelschnitten wisse, aber er habe diese Absicht aufgegeben, weil zu den früher bekannten vier Büchern des Apollonius drei weitere Bücher getreten seien, weil ausserdem das Werk des Gregorius von St. Vincentius mit mehr als tausend Lehrsätzen zu benutzen gewesen wäre, und so begnüge er sich mit dem, was in der angewandten Mathematik, namentlich in der Optik zur Anwendung komme, um die Leser nicht abzuschrecken. Man sieht, dass Dechales die Arbeiten von Mydorge, von Desargues, von Pascal ebenso wenig erwähnt wie die von Fermat, von Descartes, von Wallis. Was er gibt, ist ein Auszug aus Apollonius mit geringen Zuthaten, wie z. B. die *zweier asymptotischer Parabeln*. Dechales versteht darunter (Figur 1) zwei Parabeln von gleicher Brennweite, deren Axen aufeinander liegen, deren Scheitel aber von einander entfernt angenommen

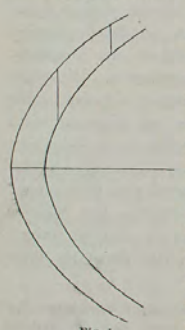

Fig. 1.



werden. Beide schneiden sich erst im Unendlichen, und ihre Entfernung nimmt fortwährend ab, wenn man als Entfernung das Stück einer zur Axe senkrechten Geraden von einem Punkte der einen Parabel bis zum Durchschnitte mit der anderen Parabel annimmt[1]). Die Methode der Beweisführung ist die altgriechische, eine analytische Geometrie gibt es für die Leser des Mundus mathematicus noch nicht. Einige Kunstausdrücke, wie Parameter, ordinatim Applicata, Focus haben sich allerdings eingeschlichen. Statt Focus wird häufiger *Umbilicus*, Nabelpunkt gebraucht. Die auf der Axe gemessene Entfernung von dem Scheitel des Kegelschnittes bis zum Eintreffen einer Ordinate heisst *Sagitta*, während in den Indivisibilien das Wort Abscissa dafür in Gebrauch war.

Wir haben den Mundus mathematicus recht ausführlich, mancher Leser wird vielleicht denken allzuausführlich geschildert. Wir haben es gethan, weil er ein weit und breit berühmtes Lehrbuch war, weil er die Summe des Wissens uns kennzeichnet, welche am Anfange des letzten Viertels des XVII. Jahrh. solche Gebildete besassen, die, ohne Mathematiker von Fach zu sein, doch ihrer Kenntnisse in dieser Wissenschaft sich einigermafsen rühmen konnten.

Dass die an sich ziemlich beengten Ausblicke nach einer höheren Mathematik am Ende des ganzen Werkes vereinigt sind, fordert fast zum Vergleiche mit den in derselben Zeit durch Mitglieder desselben Ordens veranstalteten Klassikerausgaben *in usum Delphini* auf, in welchen alle für schlüpfrig gehaltenen Stellen ausgemerzt, dagegen am Schlusse vereinigt abgedruckt waren, und nicht minder erinnert das Ausweichen vor wirklichen Schwierigkeiten an wieder in derselben Zeit veranstaltete Klassikerausgaben mit einer Fülle oberflächlicher Anmerkungen, durch welche Minelli eine flüchtige Berühmtheit erlangte.

Eine wesentlich bessere Meinung von dem, was die grosse Menge am Ende des siebzehnten Jahrhunderts von einem Lehrbuche der Geometrie verlangte, flösst uns auch die *Pratique de la géométrie* von Sebastien Le Clerc[2]) nicht ein, welche 1669 in Paris erschien, 1682 und 1700 neu aufgelegt werden musste, 1692 in Amsterdam, 1699 in Bern nachgedruckt wurde, und zwar in Bern unter dem erschwerenden Umstande, dass fälschlich Ozonam (sic!) als Name des Verfassers angegeben war. Le Clerc war ein sehr geschickter Kupfer-

[1]) Die Gleichungen der beiden Parabeln heissen: $Y^2 = pX$, $y^2 = p(X-a)$. Folglich ist $Y^2 - y^2 = pa$, $Y - y = \frac{pa}{Y+y}$ und da $Y + y$ fortwährend wächst, so nimmt $Y - y$ fortwährend ab.

[2]) J. H. Graf, Die Geometrie von Le Clerc und Ozonam in der Hist. Festschr. 1899, S. 115—122.

stecher und liebte es, die geometrischen Figuren mit Landschaftsbildern zu verquicken. Das verleiht seinem Buche und auch den Nachdrucken einen gewissen Wert für Freunde absonderlicher Drucke, übt aber auf den wissenschaftlich ganz unbedeutenden Inhalt nicht den geringsten Einfluss.

## 83. Kapitel.

### Einzelne geometrische Untersuchungen. Leibnizens Characteristica geometrica.

Einen Gegensatz gegen die Vereinigung sämmtlicher elementaren mathematischen Lehren in ein Werk bildet die Behandlung einzelner geometrischer Aufgaben. Dahin gehört das 1678 in Mailand gedruckte Buch *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* des Giovanni Ceva[1]). Hier ist der Satz des Menelaos (Bd. I, S. 386) mit Hülfe von Schwerpunktbetrachtungen bewiesen (Figur 2). In $a, A, C$ mögen die Massen $a_1$, $A_1$, $C_1$ sich befinden, von denen $a_1$ willkürlich ist, $A_1$, $C_1$ aber den Bedingungen genügen, dass $B$ der Schwerpunkt von $a_1$ und $C_1$ und $b$ der Schwerpunkt von $A_1$ und $C_1$ sei. Dann muss $aB \cdot a_1 = BC \cdot C_1$ sein und durch Addition von $aB \cdot C_1 = aB \cdot C_1$ auch $aB(a_1 + C_1) = aC \cdot C_1$, mithin $\frac{aB}{aC} = \frac{C_1}{a_1 + C_1}$. Weil $B$ Schwerpunkt von $a_1$ und $C_1$ ist, können diese beiden Gewichte durch das in $B$ angebrachte Gewicht $a_1 + C_1$ ersetzt werden. Der Schwerpunkt der drei Gewichte $a_1, A_1, C_1$ muss erstens auf der Verbindungsgeraden von $a$ mit $b$ (als dem Schwerpunkte von $A_1$ und $C_1$) liegen und zweitens auf der Verbindungsgeraden von $A$ mit $B$ (als dem Schwerpunkte von $a_1$ und $C_1$) d. h. in dem Durchschnittspunkte $c$ von $ab$ und $AB$. Mithin ist das Produkt von $Bc$ in das nach $B$ verbrachte Gewicht $a_1 + C_1$ gleich dem Produkte von $cA$ in $A_1$, also auch $\frac{a_1 + C_1}{A_1} = \frac{cA}{cB}$. Die Vervielfachung dieser Gleichung mit der oben erhaltenen $\frac{C_1}{a_1 + C_1} = \frac{aB}{aC}$ gibt $\frac{C_1}{A_1} = \frac{aB \cdot cA}{aC \cdot cB}$. Weil aber $A_1$ und $C_1$ ihren Schwerpunkt gegebenermassen in $b$ besitzen, muss $\frac{C_1}{A_1} = \frac{bA}{bC}$ sein, und so entsteht der zu beweisende Produktensatz: $aB \cdot bC \cdot cA = aC \cdot bA \cdot cB$. Ceva hat aber

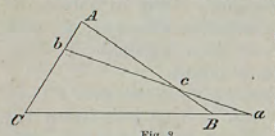

Fig. 2.

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 294—296 (deutsch 299—302). Poggendorff I, 414.



dann auch einen zweiten Produktensatz für die Abschnitte, die auf den drei Seiten eines Dreiecks durch Ecktransversalen mit gemeinsamem Durchschnittspunkte gebildet werden, bewiesen, und dieser Satz pflegt in der Geometrie als Satz des Ceva benannt zu werden. Es sei (Figur 3) $D$ der Durchschnittspunkt der Transversalen $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. In $A$ denkt man sich ein beliebiges Gewicht $A_1$, in $B$ und $C$ solche Gewichte $B_1$ und $C_1$, dass $\gamma$ der Schwerpunkt von $A_1$ und $B_1$, $\beta$ der von $A_1$ und $C_1$ ist. Der Schwerpunkt der drei Gewichte $A_1, B_1, C_1$ muss nun ebensowohl auf $C\gamma$ als auf $B\beta$ liegen, d. h. in $D$.

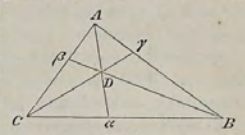

Fig. 3.

Damit ist aber festgestellt, dass jener gemeinsame Schwerpunkt auch auf den Verbindungsgeraden von $A$ mit dem Schwerpunkte der $B_1$ und $C_1$ liegen muss, d. h. dass $\alpha$ dieser letztere Schwerpunkt ist. In den drei Punkten $\alpha, \beta, \gamma$ finden demnach die Gleichungen statt:

$$C\alpha \cdot C_1 = B\alpha \cdot B_1, \quad A\beta \cdot A_1 = C\beta \cdot C_1, \quad B\gamma \cdot B_1 = A\gamma \cdot A_1.$$

Deren Multiplikation aber führt nach Weglassung der auf beiden Seiten auftretenden Faktoren $A_1, B_1, C_1$ zu $C\alpha \cdot A\beta \cdot B\gamma = B\alpha \cdot C\beta \cdot A\gamma$. Ceva fügte diesem statischen Beweise noch zwei geometrische hinzu, deren einen er dem Mailänder Kriegsbaumeister Pietro Paolo Caravaggio[1]) (1617—1688) als Erfinder zuschrieb. Ceva beweist dann gleichfalls auf statischem Wege einen ganz ähnlichen Satz über das Viereck, dessen Eckpunkte nicht alle derselben Ebene angehören: werde es von einer Ebene so geschnitten, dass jede Seite in zwei Abschnitte zerfällt, so sei das Produkt von vier von diesen Abschnitten, welche keinen Endpunkt unter sich gemeinschaftlich haben, gleich dem Produkte der vier anderen. Das zweite Buch wendet die Gedanken und Sätze des ersten Buches auf Kegelschnitte an. Hier ist unter Anderem bewiesen, dass in jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt besitzen. Endlich lehrt ein Anhang, der vielleicht besser als besondere Abhandlung bezeichnet wäre, Sätze, die sich auf die Flächeninhalte gewisser ebenen Figuren und auf die Rauminhalte und Schwerpunkte von Umdrehungskörpern zweiten Grades beziehen.

Pater Sigismund Ferdinand Hartmann[2]) (1632—1681), Professor der Mathematik in Breslau und Olmütz, dann Professor der Mathematik und Theologie in Prag, stellte im September 1679 die Aufgabe, ein gleichseitiges Dreieck zu verdoppeln, so dass es

[1]) Poggendorff I, 375. [2]) Ebenda I, 1023.

gleichseitig bleibe, bei der Auflösung sollten aber Proportionen nicht angewandt werden. In den Acta Eruditorum[1]) von 1682, dem ersten Bande dieser Zeitschrift (S. 9) hat sich ein Ungenannter mit der sehr leichten Aufgabe beschäftigt. Die Heidelberger Universitätsbibliothek besitzt ein Exemplar der A. E., in welchem die Namen der Verfasser, so weit sie nicht im Drucke genannt sind, in schriftlicher Randnote beigesetzt erscheinen. Dort ist pag. 23 als Verfasser des erwähnten Aufsatzes Basilius Titel, Festungshauptmann der Pleissenburg angegeben. Titel also, wenn wir jener Randnote Glaube beimessen[2]), fügte noch einige Fragen bei, und diese beantwortete auf pag. 230 des gleichen Jahrganges ein polnischer Jesuit Adam Adamandus Kochansky, früher in Prag ansässig, nachmals Mathematiker des Königs von Polen. Kochansky behauptet zugleich, wenn $AD$ Durchmesser eines Kreises, $BC$ eine Senkrechte auf den Durchmesser im Punkte $B$ bis zum Durchschnitte $C$ mit der Kreisperipherie sei, so verhalte sich nicht nur, wie allgemein bekannt ist,

$$AB : BC = BC : BD,$$

sondern es sei auch weiter $BC : BD = BD : AD$, oder mit anderen Worten $BC$ und $BD$ seien die zwei mittleren Proportionalen zwischen $AB$ und $AD$. Kochansky bestätigt seine jedenfalls nur näherungsweise aufgestellte Behauptung durch die Zahlenwerthe

$$AD = 20\,000\,000\,000,\quad AB = 6\,353\,443\,923,\quad BD = 13\,646\,556\,077,$$

aus welchen $BC = 9\,311\,424\,637$ folgt, und diese Zahlenwerthe erfüllen die zweite der behaupteten Proportionen. Ein in Wien lebender Piarist Augustin Thomas a St. Josepho[3]) hat alsdann 1690 es der Mühe werth gehalten, ein besonderes Büchelchen *Metamorphosis geometrica proportionum vinculis expedita* über die ursprüngliche Hartmannsche Aufgabe zu schreiben, und dieser selbe Wiener Mönch stand in Briefwechsel mit Leibniz, der ihn schätzte.

Der vorhin genannte Kochansky hat in den A. E. von 1686 einen kleinen Aufsatz über magische Quadrate veröffentlicht, aber er ist am bekanntesten durch eine äusserst elegante näherungsweise vollzogene Rectification des Kreises, welche er in den A. E. von 1685,

[1]) Da wir die Acta Eruditorum ausserordentlich häufig zu erwähnen haben werden, so wollen wir sie künftig regelmässig nur durch A. E. bezeichnen.
[2]) Dass dieses nicht immer statthaft ist, trotzdem auch in den Bibliotheken von Leipzig, Dresden u. s. w. Exemplare mit gleichen Randnoten sich befinden, hat F. Giesel nachgewiesen. Vergl. dessen Delitzscher Programm der Höheren Bürgerschule für Ostern 1866: Die Entstehung des Newton-Leibniz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Anmerkung 53 auf S. 17—18. [3]) Poggendorff I, 1203.



pag. 394—398 unter der Ueberschrift *Observationes Cyclometricae ad facilitandam Praxin accomodatae* veröffentlichte. Man zieht (Figur 4) an den Endpunkten des Durchmessers $BD$ die Berührungslinien $BG$, $DL$ und macht $DL$ dem dreifachen Halbmesser gleich. Dann zieht man $AC \perp BD$ und schneidet von $C$ aus die Bögen $CE$ und $CF$ von je $60^0$ ab, worauf man $AEJ$, $AFK$ bis zum Durchschnitte mit $BG$, $DL$ zeichnet. Verbindet man $J$ mit $L$ geradlinig, so ist, sagt Kochansky, $JL =$ arc $BCD$ *proxime*. Ist der Halbmesser zur Einheit gewählt, und berücksichtigt man, dass das Dreieck $AJB$ und ebenso das ihm gleiche $AKD$ die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ist, so ergibt sich

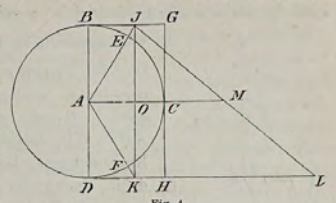

Fig. 4.

$$AD = 1,\quad DK = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{6}\sqrt{12},\quad DL = 3,$$

$$KL = 3 - \tfrac{1}{6}\sqrt{12},\quad KL^2 = \tfrac{28}{3} - \sqrt{12};$$

ferner $JK = BD = 2$, $JK^2 = 4$, folglich

$$JL^2 = \tfrac{40}{3} - \sqrt{12} = 13{,}3333333 - 3{,}4641016 = 9{,}869\,2317$$

und $JL = \sqrt{9{,}8692317} = 3{,}1415\cdots$ also eine Zeichnung, welche den Werth von $\pi$ auf vier Decimalstellen liefert.

An diese angenäherte Rectification können wir eine gleichfalls angenäherte geometrische Kreistheilung anschliessen, welche Carlo Renaldini[1]) (1615—1698) zugeschrieben wird, der sie in seiner Schrift *De resolutione et compositione mathematica* veröffentlicht haben soll. Renaldini war seit 1649 Professor in Pisa und seit 1657 zugleich auch Mitglied der Accademia del Cimento. Als diese Vereinigung 1667 aufgelöst wurde, siedelte Renaldini, wie man sagt, weil das Klima von Pisa ihm nicht zuträglich war, nach Padua über, von wo er 1698 sich nach seiner Vaterstadt Ancona zurückzog. Dort starb er nach ganz kurzer Zeit. Renaldini gab allerdings 1668 in Padua ein Buch des angeführten Titels heraus, aber es war nur der wiederholte Abdruck eines Abschnittes eines bereits 1655 als *Opus mathematicum* erschienenen Werkes, und die Methode Renaldinis ist zudem keine andere als die 1628 durch Antoine de Ville zuerst

[1]) Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana* VIII, 247.

veröffentlichte, welche alsdann Abraham Bosse 1665 verbesserte (Bd. II, S. 672). Wir nehmen Gelegenheit, sie hier nachträglich mitzutheilen[1]) (Figur 5). Ueber dem Durchmesser $AB$ des Kreises wird das gleichseitige Dreieck $ABC$ gezeichnet und $AB$ in $n$ gleiche Theile getheilt, so dass $AE = ED = \cdots = \frac{AB}{n}$.

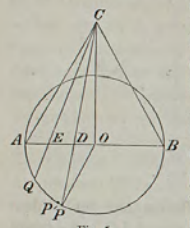

Fig. 5.

De Ville schrieb vor, man solle $C$ mit $E$ durch eine Gerade verbinden, welche verlängert den Kreis in $Q$ treffe, so sei $AQ$ der $2n$te, und bei $AQ = QP'$ folglich $AP'$ der $n$te Theil des Kreisumfanges. Bosse veränderte die Vorschrift dahin, man solle $C$ mit dem zweiten Theilpunkte $D$ des Durchmessers durch eine Gerade verbinden, welche verlängert den Kreis in $P$ treffe, so sei $AP$ der $n$te Theil des Kreisumfanges. Renaldinis Vorschrift deckt sich mit der von Bosse. Ob sie schon im Opus mathematicum von 1655 enthalten ist, mithin älter als die Veröffentlichung von Bosse, ob sie jünger als letztere erst im Abdrucke von 1668 erschien, wissen wir nicht zu entscheiden. Zur rechnerischen Prüfung des Verfahrens führt folgende Betrachtung[2]). Sei $AO = OB = OP = 1$, so ist

$$OC = \sqrt{3}, \quad \frac{OC}{OP} = \frac{\sin OPC}{\sin OCP} = \sqrt{3}, \quad \sin OPD = \sqrt{3} \cdot \sin OCP.$$

Ferner $AD = \frac{2AB}{n} = \frac{4}{n}$, $\quad DO = AO - AD = \frac{n-4}{n}$,

$$\operatorname{tang} OCD = \frac{OD}{OC} = \frac{n-4}{n\sqrt{3}}, \quad \sin OCD^2 = \frac{\operatorname{tang} OCD^2}{1 + \operatorname{tang} OCD^2} = \frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 8n + 16}.$$

Mithin

$$\sin OCP = \sqrt{\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 8n + 16}}, \quad \sin OPD = \sqrt{3} \cdot \sin OCP = \sqrt{\frac{3n^2 - 24n + 48}{4n^2 - 8n + 16}}$$

und

$$\operatorname{arc} OCP = \arcsin \sqrt{\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 8n + 16}}, \quad \operatorname{arc} OPD = \arcsin \sqrt{\frac{3n^2 - 24n + 48}{4n^2 - 8n + 16}}.$$

Aber

$$180^0 = POD + 90^0 + OCP + OPD,$$
$$POD = AOP = 90^0 - OCP - OPD.$$

Da nun $AOP = \frac{360^0}{n}$ sein soll, so setzt die angegebene Construction voraus, es sei

$$\arcsin \sqrt{\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 8n + 16}} + \arcsin \sqrt{\frac{3n^2 - 24n + 48}{4n^2 - 8n + 16}} = \frac{n-4}{n} \cdot 90^0.$$

[1]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, 1. Sammlung, S. 266—281. A. J. Pressland, *On the history and degree of certain geometrical approximations* pag. 1—2. [2]) Diese Prüfung hat Kästner l. c. angestellt.



Dieses trifft, wie man sofort sieht, bei $n = 4$ genau ein, aber auch bei grösseren $n$ ist der Fehler nicht sehr beträchtlich.

Hier können wir vielleicht zweckmässig auch eine Aufgabe der praktischen Geometrie erwähnen, das sogenannte Rückwärtseinschneiden (Bd. II, S. 705). Die Lösung dieser Aufgabe wurde 1692 durch Laurent Pothenot der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegt und im X. Bande ihrer Berichte (1730) gedruckt, ohne dass der frühere Bearbeiter der gleichen Aufgabe Willebrord Snellius genannt wäre. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass dieses Verschweigen eines Vorgängers ohne jede böse Absicht stattfand und auf Unkenntnis beruhte. Pothenot[1]) war 1679 Bewerber um die damals zu besetzende Professur der Mathematik am Collège Royal de France, unterlag aber gegen einen gewissen La Montre. Als dieser nach Rochefort versetzt worden war, meldete Pothenot sich neuerdings und zwar ohne Wettbewerber und wurde 1684 in Besitz der Professur gesetzt, welche er bis zu seinem Tode 1732 behielt. Auch Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften war Pothenot seit 1682. Vor 1699 wurde aber sein Sitz wegen fortgesetzter Abwesenheit des Inhabers wieder für frei erklärt. Die Professur dagegen wurde ihm offen gehalten, und seit 1726 hielt er auch wieder selbst Vorlesungen.

Prinz Ruprecht von der Pfalz (1619—1682) der dritte Sohn Königs Friedrich V. von Böhmen und der englischen Prinzessin Elisabeth, der mit König Karl II. von England in dessen Vaterland kam, ist in der Geschichte der Physik bekannt. Er gehörte der Königlichen Gesellschaft an und zeigte in ihr die sog. Glasthränen. Er stellte und löste auch die Aufgabe einen Würfel durch einen ihm gleichen Würfel hindurchzustecken. Nachmals löste ein gewisser Ronayne, der sonst ganz unbekannt ist, die gleiche Aufgabe, indem er den einen Würfel als Drahtgestell anfertigte[2]).

Zur elementaren Geometrie im Sinne der Alten haben wir im vorigen Bande auch die Streitfrage über den Contingenzwinkel gerechnet und wenn auch allmälig die Behandlungsweise jener Frage sich veränderte, wenn Gesichtspunkte hervortraten, deren erstes Erscheinen auf ganz anderem Gebiete liegt und erst in viel späteren

[1]) L. Am. Sédillot, *Les professeures de mathématiques et de physique générale au Collège de France* im *Bulletino Boncompagni* II, 444—446. [2]) Nach brieflicher Mittheilung des Herrn J. C. Kluyver in Leiden findet sich eine Notiz über diese Aufgabe in einer Fussnote zu pag. 222 der ersten Ausgabe von Montucla, Histoire des mathématiques (Paris, 1758), in welcher für die Auflösung selbst auf Wallis, Opera II verwiesen sei. Die Erwähnung der Auflösung des Ronayne fand H. Hennessy (Philosophical Magazine Ser. 5, Vol. 39, pag. 184 sqq.) in einem geschichtlichen Buche von 1750.

Kapiteln dieses Abschnittes uns beschäftigen wird, so halten wir es doch für zweckmässig der alten Gewohnheit treu zu bleiben. Wir erinnern uns, dass es der Hauptsache nach zwei einander widersprechende Meinungen über den Contingenzwinkel gab, deren letzte Vertreter Clavius und Wallis waren (Bd. II, S. 687). Ersterer nannte den Contingenzwinkel zwar einen Winkel, von dessen Grösse man zu reden berechtigt sei, der aber von heterogener Natur als die durch grade Linien gebildeten Winkel mit diesen nicht verglichen werden könne. Der letztere behauptete, der Contingenzwinkel sei überhaupt ein *non-angulum*, ein *non-quantum*. Wir wissen ferner, dass der Jesuit Leotaud für seinen Ordensgenossen Clavius in die Schranken trat. Es geschah dieses in der *Cyclomathia* von 1662. Ihr wieder entgegenzutreten schickte sich Wallis 1667 an. Er verfasste einen vom 17. Februar 1667 datirten Brief an Leotaud. Dessen Herausgabe unterblieb jedoch bis 1685, wo der Brief als Theil der *Defensio Tractatus de angulo contactus et semicirculi* Aufnahme fand. Eine zweite Veröffentlichung fand statt, als 1693 die Gesammtwerke von Wallis im Drucke erschienen[1]). Indem Wallis zunächst darauf abhebt, Leotaud habe wahrscheinlich in Clavius mehr den Ordensgenossen als den Mathematiker vertheidigt, was ihm besonders schlecht anstehe, der selbst gegen einen Ordensgenossen, gegen Gregorius von St. Vincentius, die Feder geführt habe (Bd. II, S. 716), setzt er hinzu, zwei andere Ordensgenossen, Aynscom und Tacquet, stünden in der Berührungsfrage auf seiner Seite gegen Clavius, beziehungsweise gegen Leotaud. Aus dem eigentlichen Inhalte der Defensio heben wir als wesentlich hervor, dass Wallis deutlich betont, man müsse wirklich vorhandene Grössen von solchen unterscheiden, die nur im Entstehen begriffen seien. Ein Punkt sei keine Länge, sondern Anfang einer Länge. Eine Linie sei keine Fläche, sondern Anfang einer Fläche. Geschwindigkeit sei keine Bewegung, sondern Antrieb zur Bewegung. So sei auch ein Winkel nicht die Entfernung zweier Linien, sondern ihr Bestreben sich von einander zu entfernen[2]). Wie weit die Linien, die im Vereinigungspunkte gar keinen Winkel bilden, im späteren Verlaufe sich von einander entfernen, das hängt von dem Krümmungsgrade[3]) ab, den man zu vergleichen habe. Ein Kreis mit kleinem Halbmesser sei in höherem Grade gekrümmt als ein solcher mit grossem Halbmesser, weil gleichviel Krümmung bei ihm auf kürzerer Strecke vorhanden sei[4]). So

[1]) Wallis, Opera II, 631—664. [2]) Ebenda II, 654: *Angulus (seu gradus divaricationis) Distantia non est sed Inceptivus distantiae.* [3]) Ebenda 656: *gradus curvitatis.* [4]) *Circuli minoris arcus est magis curvus ut qui tantundem curvitatis habet in minori longitudine, adeoque est intensive curvior.*



spitzt sich schliesslich der ganze Streit auf eine Benennungsfrage zu. Clavius nannte *Angulus Contactus*, was Wallis viel richtiger *Gradus Curvitatis* nennt, richtiger weil die Benutzung dieses Ausdruckes zeigt, dass Krümmung und Krümmung nach einem und demselben Maassstabe verglichen werden können, nicht aber Krümmung und Winkel. Die Gerade hat die geringste Krümmung, von dem Winkel aber, den sie mit einer von ihr berührten Curve bildet, kann man nicht sagen, er sei grösser oder kleiner als der Winkel, den eine zweite dort berührte Curve mit der ersten bildet: es ist beidemal ein Nichtwinkel.

Wallis hat noch eine zweite Schwierigkeit der elementaren Geometrie der Untersuchung unterworfen: das *Parallelenaxiom*. Seinen vermeintlichen Beweis trug er im Juli 1663 in Oxford vor, veröffentlichte ihn aber erst 1693 in der Abhandlung *De postulato quinto*[1]), mithin nachdem das Buch von Giordani (S. 14) schon im Drucke erschienen war. Wallis bespricht zuerst die Frage, ob man es mit einer des Beweises bedürftigen Annahme oder mit einer Forderung zu thun habe, und kommt zur Ueberzeugung, eine solche Unterscheidung sei nur Wortklauberei. Sodann gibt er den von Naṣîr Eddîn (Bd. I, S. 735) herrührenden Beweis, welchen Edward Pocock[2]) (1604 bis 1691), Professor der arabischen Sprache in Oxford, für ihn übersetzt hatte. Wir benutzen diese Gelegenheit, den in unserem I. Bande vernachlässigten Beweis hier anzudeuten. Drang doch Naṣîr Eddîns Untersuchung jetzt erst in lateinischer Sprache in die europäische Mathematik ein, für welche sie bisher nicht vorhanden war. Der Geometer aus Tûs beginnt mit drei Hilfssätzen (Figur 6). Erstens: wenn zwei Gerade $AB$, $CD$ durch die $GH$, $JK$, $LM$ ... so geschnitten werden, dass alle Schneidenden auf $AB$ senkrecht stehen, d. h. mit ihr nur rechte Winkel bilden, mit der $CD$ dagegen Winkel, welche ihren Nebenwinkeln ungleich sind, so dass die gegen $C$ sich öffnenden Winkel sämmtlich stumpf, die gegen $D$ sich öffnenden sämmtlich spitz sind, so nehmen die Schneidenden gegen $D$ hin fortwährend ab $GH > JK > LM \cdots$ und umgekehrt: wenn die insgesammt zu $AB$ senkrechten Schneidenden in dem angegebenen Sinne an Grösse abnehmen, so bilden sie mit der $CD$ gegen $C$ hin stumpfe, gegen $D$ hin spitze Winkel. Zweitens: wenn $RH$ und $SQ$ zu $AB$ senkrecht stehen und unter einander gleich sind, so stehen sie auch zu der $R$ mit $S$ verbindenden Geraden

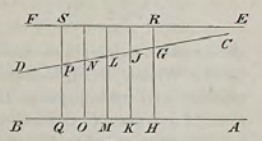

Fig. 6.

[1]) Wallis, Opera II, 665—678. [2]) Poggendorff II, 478.

$EF$ senkrecht. Drittens: die drei Winkel eines Dreiecks haben als Winkelsumme zwei Rechte. Auf sie stützt sich dann die weitere Untersuchung. Von den Hilfssätzen selbst wird der dritte in drei von einander unterschiedenen Fällen (rechtwinkliges, stumpfwinkliges, spitzwinkliges Dreieck) mit Hilfe des zweiten bewiesen, der zweite in indirekter Beweisführung mit Hilfe des ersten; der erste leuchte von selbst ein. Sei es, wirft Wallis hier ein[1]), aber ist der Satz von dem Durchschnitt zweier in derselben Ebene sich einander nähernden Geraden nicht noch leichter einleuchtend, als diese ganze Vorbereitung? Und am Schlusse der Darstellung des ganzen Naṣîr Eddin'schen Beweisverfahrens kommt er wiederholt zu dem Ausspruche[2]), man schlage unverdientermassen auf Euklid wegen seiner nicht unbilligen Forderung. Wenn Wallis trotzdem einen ihm selbst eigenthümlichen Beweisversuch anschliesst[3]), so kann man vorauswissen, dass auch dieser Versuch auf nichts anderes hinauslaufen wird, als auf den Ersatz der euklidischen Forderung durch eine minder anstössige. Der Kern der Sache ist folgender (Figur 7). Steht eine Gerade $AB$ auf einer anderen $AC$ unter einem Winkel auf, so kann der Winkel weiter geschoben werden ohne sich in seiner Grösse zu verändern, und zwar durch eine Bewegung, bei welcher der Schenkel $AC$ immer einen Theil derselben unendlichen Geraden bildet. Der Winkel bei $A$ ist dann dem gleichliegenden in jeder von ihm erzielten Stellung gleich und vereinigt sich mit dessen Nebenwinkel zu zwei Rechten. Ist der Winkel $DCA$ kleiner als jener Nebenwinkel, so muss $CP$ zwischen $AC$ und diejenige Lage von $AB$ fallen, welche entsteht, wenn $A$ bis nach $C$ verschoben wird. Vorher kann aber unmöglich $\alpha\beta$ etwa ganz zwischen $CD$ und $CA$ fallen, denn wie wollte die plötzliche Lagenänderung eintreten, dass $\alpha\beta$ nur rechts, eine ihr gleichlaufende Gerade nur links von $CD$ sich befände? Demnach muss $\alpha\beta$ die $CD$ in einem Punkte $\pi$ schneiden, so dass ein Dreieck $C\alpha\pi$ entsteht. Lässt man alle diese Schlüsse gelten, so kommt nun noch eine neue Forderung, welche die euklidische an Gewaltsamkeit weit

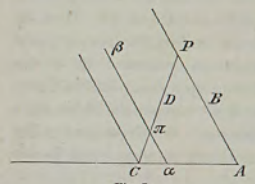

Fig. 7.

[1]) Wallis II, 670: *Esto. At, inquam, equis non facilius conceperit ut clarum, Duas rectas (in eodem plano) convergentes, tandem (si producantur) occursuras, quam hunc totum apparatum.* [2]) Wallis II, 673: *Quo confirmatior factus sum, immerito suggillatum iri Euclidem propter hoc (non iniquum) Postulatum.* [3]) Ebenda 674—678.



übertrifft. Wallis nimmt nämlich beweislos an, zu jeder Figur könne eine ihr ähnliche mit beliebiger Veränderung der einzelnen Ausmessungen erzielt werden. Folglich müsse über der Grundlinie $CA$ ein Dreieck gebildet werden können, welches dem Dreiecke $C\alpha\pi$ ähnlich sei. Heisst dieses Dreieck $CAP$, so ist $P$ ein Durchschnittspunkt der $AB$ und $CD$, d. h. diese beiden Geraden, welche mit $AC$ Winkel bilden, die beide nach innen schauend eine geringere Summe als zwei Rechte besitzen, schneiden einander.

Der theoretischen Begründung von Theilen der Elementargeometrie gab sich auch ein Mann von hoher wissenschaftlicher Bedeutung hin: Gottfried Wilhelm Leibniz[1]) (1646—1716). Wir werden bei ihm und, sagen wir es gleich voraus, bei seinem grossen Nebenbuhler Newton im Verlaufe unserer Darstellung vielfach auf einzelne Lebensereignisse ein erhebliches Gewicht zu legen haben. Wir müssen deshalb genauer bei der Lebensgeschichte beider verweilen, zunächst bei der von Leibniz.

Die Familie Leibniz war aus Polen eingewandert. Ein Mitglied derselben wurde in Leipzig Notar und Professor der Moral. Er schrieb sich Leibnütz, aber der Sohn Gottfried Wilhelm liess auf seinen ersten Schriften den Namen in der Form Leibnuzius und Leibnüzius drucken, später Leibnitius. Die Unterschrift war meistens Leibniz und nur ausnahmsweise Leibnitz. Ein frühreifer Student von noch nicht 15 Jahren wurde Leibniz zu Ostern 1661 in die Listen der Leipziger Hochschule eingetragen. Im Frühjahre 1663 vertheidigte er als Baccalaureus der Philosophie eine die Logik betreffende Abhandlung und ging dann auf ein halbes Jahr nach Jena, wo er unter Erhard Weigel seine in Leipzig schon ohne Lehrer begonnenen mathematischen Studien fortsetzte. Grosse Förderung erhielt Leibniz offenbar nicht durch Weigel, wenigstens sagt er nirgend dergleichen[2]). 1664 erwarb Leibniz in Leipzig die philosophische Magisterwürde, 1665 eben dort das juristische Baccalaureat, 1666 erlangte er durch die Schrift *Dissertatio de arte combinatoria* das Recht ein akademisches Lehramt auszuüben. Noch in demselben Jahre wurde er in Altdorf Doctor beider Rechte, eine ihm sofort dort angebotene ausserordentliche Professur lehnte er ab.

Das Jahr 1667 brachte Leibniz in Beziehung zu Joh. Christ. von Boineburg, dem geistreichen ehemaligen kurmainzischen Minister, und dieser veranlasste sein erstes Eintreten in eine politisch bedeutsame Thätigkeit, welche er von Frankfurt am Main, später von

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XVIII, 172—209. Artikel von Prantl, welcher sämmtliches bis 1882 herausgegebene Material an Briefen u. s. w. berücksichtigt. [2]) Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland S. 139.

Mainz aus ausübte. In diese Jahre fallen aber auch Leibnizens erste Abhandlungen über die Bewegungslehre (1670 und 1671), welche ihn unter Anderem mit Oldenburg in London, mit Honoratus Fabri in Rom in briefliche Verbindung brachten. Im März 1672 ging Leibniz mit politischen Aufträgen nach Paris, und wenn auch die Absichten der Auftraggeber keinen Erfolg erzielten, für Leibniz war der Pariser Aufenthalt, der ihn mit dortigen Gelehrten bekannt machte, von grösster Bedeutung.

Im Januar 1673 begleitete er den kurmainzischen Gesandten nach London. Oldenburg wurde besucht, Collins aber kann Leibniz damals bei dem ersten etwa siebenwöchentlichen Londoner Aufenthalte von 1673 nicht kennen gelernt haben. Sonst hätte Oldenburg in einem Briefe an Leibniz vom 6. April 1673 nicht schreiben können: *Scias me scriptum tuum impertiisse Doctiss. nostro Collinio, similiter e Societate Regia*[1]). Das musste Leibniz von Collins wissen, wenn er mit ihm zusammengetroffen wäre und ein Zusammentreffen beider, ohne dass Oldenburg davon Kenntniss erhalten hätte, ist bei dem engen Verkehre der Londoner Gesellschaftsmitglieder unter einander vollends undenkbar. Anfangs März war Leibniz wieder in Paris, etwa fünf Wochen später, am 9. April, ernannte ihn die Königliche Gesellschaft in London einstimmig zu ihrem Mitgliede.

Leibniz blieb inzwischen in Paris, wo er jetzt Huygens persönlich kennen lernte, und wo er, während er nach den verschiedensten Seiten Fühlung nahm, um eine sichere Lebensstellung zu gewinnen, immer tiefer in die Mathematik eindrang. Zu einzelnen Arbeiten vereinigte er sich mit Walther von Tschirnhaus, welcher im September 1675 von London, wo er mit Oldenburg und Collins verkehrt hatte, nach Paris kam.

Im September 1676 erhielt Leibniz einen Ruf nach Hannover als Bibliotheksvorstand und Hofrath mit einem Jahresgehalte von 600 Thalern. Er nahm ihn an, ging aber zunächst im October auf wenige Wochen nach London. Das war der zweite kurze Londoner Aufenthalt vom October 1676, während dessen Leibniz mit Collins verkehrte.

Im gleichen Monate war Leibniz in Amsterdam bei Hudde. Auch im Haag, in Delft hielt er sich bei Gelehrten auf. Zu Ende December 1676 traf er in Hannover ein und verweilte hier fast volle 11 Jahre bis zum October 1687. Die in dieser Zeit entstandenen

[1]) Leibnizens mathematische Schriften herausgegeben von C. J. Gerhardt I, 38. Wir citiren künftig diese 1849 bis 1863 im Drucke erschienene Ausgabe kurz als Leibniz. Die Bände I bis IV enthalten den mathematischen Briefwechsel, die Bände V bis VII Abhandlungen.



Arbeiten, gleichwie die früheren, gleichwie die späteren werden, soweit sie mathematischen Inhaltes waren, uns noch beschäftigen, zunächst haben wir es nur mit der Herstellung eines Ort und Zeit in Zusammenhang bringenden Rahmens zu thun.

Im October 1687 verliess Leibniz Hannover, um eine wissenschaftliche Reise zur Durchforschung von Bibliotheken und Archiven in Deutschland und Italien anzutreten. Es sollte Stoff zu einer Geschichte des welfischen Hauses gesammelt werden, zu deren Anfertigung Leibniz sich 1680 verpflichtet hatte. Auch Staatsgeschäfte wurden auf dieser Reise besorgt, welche sich bis zum Juni 1690 ausdehnte.

Wieder beginnt ein durch zahlreiche wissenschaftliche und staatsmännische Arbeiten ausgefüllter, durch kleine Reisen ab und zu unterbrochener zehnjähriger Aufenthalt in Hannover. Zu Anfang März 1700 lud der Kurfürst von Brandenburg Leibniz nach Berlin ein. Es handelte sich um eine Verbesserung des Kalenders, um die Annahme eines Reichskalenders, der in den Daten mit dem gregorianischen Kalender übereinstimmte. Es handelte sich zugleich um die Gründung der Berliner Akademie.

Wir beabsichtigen, unseren XVI. Abschnitt mit dieser Gründung zu schliessen. Gleichwohl sei gestattet, Leibnizens Lebenslauf über jene Grenze hinaus in die dem XVII. Abschnitte zugewiesene Zeit zu verfolgen. Leibniz, von seinem Kurfürsten Georg Ludwig von Hannover beurlaubt, nahm im Mai 1700 die Einladung an. Am 11. Juli unterzeichnete Kurfürst Friedrich III. von Brandenburg den Stiftungsbrief der *„Societät der Wissenschaften“*, am folgenden Tage ernannte er Leibniz zu deren Präsidenten, eine Ernennung, welche aber staatsrechtliche Dienste keineswegs ausschloss, wie denn Leibniz auch an den langathmigen Unterhandlungen betheiligt war, welche dahin führten, dass sich Kurfürst Friedrich am 18. Januar 1701 in Königsberg die Krone aufs Haupt setzte und fortan König Friedrich I. von Preussen hiess.

Auch der andere Monarch, dem Leibniz seine Dienste widmete, Kurfürst Georg Ludwig von Hannover, hatte die Anwartschaft auf eine Königskrone, und wir müssen ausnahmsweise die Geschichte der englischen Thronfolge, um die es sich handelt, berühren. In Karl II. war 1660 wieder ein König eingesetzt worden, der nach wenigen Jahren die Zuneigung, die ihm anfangs entgegengebracht wurde, neuerdings verscherzte. Aber der König hatte die Macht in Händen und brach den sich regenden Widerstand mit eiserner Strenge, die er insbesondere seit 1680 walten liess. Sein Bruder, der zum Katholicismus übergetretene Herzog von York, führte thatsächlich die Regierung, und zahlreiche Todesurtheile wurden gefällt und vollzogen.

Karl II. starb 1685, sein eben genannter Bruder erbte als Jakob II. die Königswürde. Er hatte aus der Zeit, in welcher er noch Protestant gewesen war, zwei Töchter: Maria und Anna, jene mit Wilhelm von Oranien, diese mit Georg von Dänemark vermählt. Da wurde 1688 die Geburt eines Kronprinzen Jakob verkündigt, der in der Volksmeinung für ein untergeschobenes Kind galt, untergeschoben, um die protestantischen Töchter von der Regierung auszuschliessen und das katholische Königthum erblich zu machen. Jetzt landete Wilhelm von Oranien mit bewaffneter Macht in England. Volk, Armee, Flotte jubelten ihm zu, und ein zusammentretendes Parlament sprach 1689 Maria nebst ihrem Gemahle, jetzt Wilhelm III., die durch neue dem Parlamente vorbehaltene Rechte ziemlich beschränkte Königswürde zu. Nach ihrem kinderlosen Tode sollte die Krone auf Marias Schwester Anna übergehen Maria starb 1694, Wilhelm III. 1702, Leibeserben beider waren nicht vorhanden, und Königin Anna bestieg den Thron. Ein Jahr früher (1701) war mit dem Parlamente die *Succession-Act* vereinbart worden, welche auch den Fall des kinderlosen Todes Annas vorsehend, die Kurfürstin Sophie von Hannover, die jüngste Tochter jener englischen Prinzessin Elisabeth, welche einst mit Friedrich von der Pfalz verheirathet gewesen, und ihre Nachkommen, sofern sie protestantisch seien, auf Englands Thron berief. Neben den hier geschilderten politischen Ereignissen gingen noch andere kriegerischer Natur einher, indem Frankreich die Partei des vertriebenen Jakob II. und seines Sohnes, der als Jakob III. Anspruch auf die Thronfolge erhob, ergriff, ohne wesentliche Erfolge erzielen zu können. Auch Königin Anna war, soweit ihre Macht reichte, geneigt, dem von ihr persönlich anerkannten Bruder Jacob III. die Nachfolge zu verschaffen, und, was das Auffallendste ist, Kurfürstin Sophie, die berufene Erbin des englischen Thrones, theilte die gleiche Neigung.

Leibniz war es vorbehalten, durch mündliche und schriftliche Ueberredung es dahin zu bringen, dass Kurfürstin Sophie endlich einwilligte, jenes die Erbfolge ordnende Gesetz ihrerseits gut zu heissen. Königin Anna starb am 12. August 1714. Kurfürstin Sophie war ihr am 14. Juni vorausgegangen. Deren Sohn, der mehrgenannte Georg Ludwig, bestieg als Georg I. den englischen Thron. Es ist begreiflich, dass Leibnizens Thätigkeit in der ganzen Frage kein Geheimnis blieb, und dass, woran wir uns später erinnern müssen, die Gegner der Hannoverischen Thronfolge in England um so erbittertere Gegner, ja persönliche Feinde Leibnizens wurden.

Die ganze Zeit, deren Bedeutung für die englische Geschichte wir hier zu erläutern hatten, war für Leibniz auch in jeder anderen



Beziehung reich ausgefüllt. Schriftstellerische Thätigkeit der mannigfachsten Art, ein ausgedehnter Briefwechsel, in welchem kaum ein Gebiet menschlichen Denkens undurchsprochen blieb, staatsrechtliche Gutachten über fast alle Fragen der damals so bewegten grossen Politik, daneben persönliche Bestrebungen, denen zu Liebe Leibniz oft zwischen Hannover, Berlin, Wien unterwegs war, und die doch ebenso wie die um ihretwillen unternommenen Reisen geheim bleiben sollten, nahmen Zeit und Gedanken Leibnizens in fortwährend wechselnden Anspruch, worauf wir auch später hinzuweisen haben werden. Seine Gönner sahen diese Zersplitterung mit wachsendem Unmuthe, und in Berlin beispielsweise gab man im December 1710 der Societät der Wissenschaften ohne Leibnizens Vorwissen einen neuen Direktor und den neuen Namen der *„Akademie der Wissenschaften“*, unter welchem sie am 19. Januar 1711 gleichsam neu gegründet wurde.

Als König Georg I. 1714 seine Residenz in London aufschlug, beabsichtigte Leibniz ihm dahin zu folgen, und diese Uebersiedelung hätte vermuthlich zur Klärung mancher Verhältnisse zu englischen Mathematikern beigetragen, allein sie wurde ihm gradezu untersagt, weil das Ministerium bezüglich der in Hannover und in England einzuhaltenden Politik seine Meinung nicht theilte, namentlich in dem Punkte nicht seiner Ansicht war, man müsse sich jeder Einmischung in englische Parteiverhältnisse von Hannover aus enthalten. Die letzten Jahre des so bewegten und inhaltreichen Lebens erhielten dadurch einen bitteren Geschmack, erhöht durch schwere körperliche Leiden. Als Leibniz am 14. November 1716 in Hannover starb, betheiligte sich an seinem Leichenbegängnisse weder der Hof noch die Geistlichkeit. In der Pariser Akademie, welcher Leibniz seit 1699 als Mitglied angehörte, wurde durch Fontenelle eine Lobrede auf ihn gehalten. Die Berliner Akademie schwieg den Mann todt, der sie ins Leben gerufen hatte, und erst viel später entschloss man sich zu der Sühne der noch jetzt üblichen alljährlichen Leibnizfeier.

Leibniz verlebte (S. 30) von December 1676 bis October 1687 elf Jahre ruhiger Geistesarbeit in Hannover. In dem dritten Jahre dieses Zeitabschnittes im August 1679 brachte er seine *Characteristica geometrica*[1]) zu Papier, die Arbeit, durch welche er dem gegenwärtigen Kapitel angehört. Charaktere nennt Leibniz Dinge, durch welche die gegenseitigen Beziehungen anderer Dinge dargestellt werden, während sie leichterer Behandlung als jene zugänglich sind[2]). So ist ein Modell Charakter einer Maschine, eine Zeichnung in der Ebene

[1]) Leibniz V, 141—171. Vergl. Gerhardt, Math. Deutschl. 184—186.
[2]) Ebenda V, 141: *Characteres sunt res quaedam, quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio.*

Charakter eines räumlichen Gebildes, ein Buchstabe Charakter einer unbestimmt gelassenen Zahl. Geometrisches durch Charaktere zu bezeichnen sei sehr wünschenswerth, damit unter Vermeidung des Gewirres vielliniger Figuren Sätze einfach an den Charakteren erwiesen werden könnten. Schon gewisse algebraische Grössenbeziehungen genügen unter Umständen. So bedeute $AB = BC = AC$, dass $ABC$ ein gleichseitiges Dreieck sei. So sei in $AB + BC = AC$ der Satz enthalten, dass die drei Punkte $A, B, C$ in gerader Linie liegen. Aber das Bestreben müsse doch dahin sich richten, das Geometrische selbst zu charakterisiren, und dazu habe er wohl zehnmal den Anlauf genommen, bis er zu einer ihm genügenden von den ersten Grundbegriffen ausgehenden Auffassung gelangt sei.

Der Punkt ist das räumlich Meistbegrenzte und drückt einfach die Ruhelage im Raume aus[1]). Alle Punkte können zusammenfallen, sind congruent. Der Weg eines Punktes nach einem anderen heisst Linie. Er ist ein Stetiges, denn jeder Theil desselben hat Endpunkte, welche ihm mit einem vorhergehenden, mit einem folgenden Theile gemeinsam sind. Der Weg einer Linie, deren Punkte nicht immer der eine an die Stelle des anderen gelangen, ist eine Oberfläche, und der Weg einer Oberfläche, deren Punkte nicht immer der eine an die Stelle des anderen gelangen, ist ein Körper. Der Körper aber kann nicht bewegt werden, ohne dass alle seine Punkte immer einer an die Stelle des anderen gelangen, er bringt daher keine neue Abmessung hervor[2]).

Unter den Linien ist die Gerade besonders hervorzuheben. Ihr Begriff ist gleichzeitig mit dem der begrenzenden Punkte als einfachster Weg — *via simplissima* — vom einen zum anderen gegeben, aber die Entstehung der Geraden kann verschiedentlich gelehrt werden. Folgende Erzeugungsweise ist die einfachste: Die Gerade enthält alle Punkte, welche, während ein Körper um zwei feste unbewegliche Punkte in Bewegung versetzt wird, mit jenen beiden Punkten in Ruhe bleiben[3]). Als eine zweite Entstehung wird die derartige Spannung einer biegsamen Linie bezeichnet, dass sie nicht zu grösserer Länge ausgedehnt werden kann. Des Weiteren definirt Leibniz den Kreis, die Ebene[4]). Wird ein Linienzug $ACB$ so in Bewegung ge-

[1]) Leibniz V, 144: *Punctum exprimit id quod in extensione maxime limitatum est, nempe simplicem situm.* [2]) Ebenda 145: *Via lineae eiusmodi, ut puncta eius non semper sibi invicem succedant, Superficies est; et via superficiei, ut puncta eius non semper sibi invicem succedant est Corpus. Corpus autem moveri non potest, quin omnia eius puncta sibi succedant, et ideo novam dimensionem non producit.* [3]) Ebenda 147: *Sit corpus aliquod, cuius duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescentia incident in rectam, quae per duo puncta fixa transit.* [4]) Ebenda 165.



setzt, dass seine Punkte $A$ und $B$ unbewegt bleiben, so beschreibt der Punkt $C$ eine Kreislinie. Der Ort aller Punkte, die sich gleichmässig zu einem Punkte $A$ wie zu einem anderen Punkte $B$ verhalten, wird Ebene genannt.

Ein Punkt, der eine Linie durchläuft, kann ${}_{y}b$ genannt werden, wobei der links angebrachte Stellenzeiger $y$, der aber bei Leibniz noch durch keinen Kunstausdruck wie Index oder dergleichen benannt wird, die verschiedensten Zahlenwerthe annimmt. Die ganze Linie heisst alsdann $\overline{{}_{y}b}$, indem der Stellenzeiger mit einem ihn deckenden wagrechten Strichelchen versehen wird. Wird die Linie so bewegt, dass der frühere Punkt ${}_{y}b$ nach ${}_{z}b$ gelangt, so entsteht eine Oberfläche $\overline{{}_{zy}b}$. Die gleiche Oberfläche muss als $\overline{{}_{yz}b}$ entstehen, wenn durch Rückwärtsbewegung der Linie jeder ihrer Punkte ${}_{z}b$ nach ${}_{y}b$ gelangt. Man erkennt leicht in $\overline{{}_{xyz}b}$ einen Körper, welcher durch die soeben beschriebene Oberfläche erzeugt wird.

Leibniz führt nun einige neue geometrische Zeichen ein. $\infty$ (das Gleichheitszeichen von Descartes Bd. II, S. 794) bedeutet das Zusammenfallen oder Identischsein[1]). Dasselbe Zeichen aufwärts gestellt $\between$ bedeutet Congruenz oder die Möglichkeit durch Bewegung zum Zusammenfallen gebracht werden zu können. Allerdings hat er mit beiden Zeichen auch gewechselt. Congruenz wird mitunter durch $\simeq$, Coincidenz (also Identität) durch $|\simeq|$ dargestellt[2]), und in einem Aufsatze *Mathesis universalis*, welcher undatirt unter dem Leibnizschen Nachlasse sich vorfand, heisst das links geschlossene $\infty$ (das Unendlichkeitszeichen von Wallis Bd. II, S. 820) Zeichen der Identität[3]). Kehren wir zu den im August 1679 benutzten Zeichen zurück, so ist $\sim$ (ein liegendes $s$ als Anfangsbuchstabe von similis) Zeichen der Aehnlichkeit. Aehnlich aber ist, was einzeln für sich betrachtet nicht unterschieden werden kann[4]); betrachtet man dagegen Aehnliches gemeinsam, so erscheint sofort ein Unterschied, das Grössersein des einen. Gleichheitszeichen ist $\sqcap$.

Geometrisch richtig darf man folgende Schlüsse ziehen: Wenn $a \between e$, $b \between f$, $c \between g$, $d \between h$, so ist $a + b - c + d \sqcap e + f - g + h$. Wenn $a \sim b$ und $a \sqcap b$, so ist $a \between b$. Wenn $a \infty b$, so ist $a \between b$, $a \sqcap b$ und $a \sim b$. Wenn ferner $a, b$ und $b, c$ durch eines der Zeichen $\infty, \between, \sim, \sqcap$ verbunden sind, so darf dasselbe Zeichen zwischen $a, c$ gesetzt werden. Dagegen darf nicht geschlossen werden, dass, wenn $a$ nicht $\infty\, b$ und $b$ nicht $\infty\, c$, auch $a$ nicht $\infty\, c$ sei. Bei Coincidenzen ist Addition gestattet, bei Congruenzen nicht. Aus $a \infty c$ und

[1]) Leibniz V, 150: *atque ita eadem esse sive coincidere dicentur.* [2]) Ebenda 185. [3]) Ebenda VII, 57: *Nota coincidentiae seu identitatis.* [4]) Ebenda V, 153: *Similia sunt quae singula per se considerata discerni non possunt.*

$b \infty d$ folgt $a \cdot b \infty c \cdot d$; aber obwohl $A \between C, B \between D$, wenn $A, B, C, D$ Punkte bedeuten, weil je zwei beliebige Punkte congruent sind, folgt doch nicht $A \cdot B \between C \cdot D$. Gestattet dagegen ist $A \cdot B \between D \cdot E$, $B \cdot C \between E \cdot F$, $A \cdot C \between D \cdot F$ zu $A \cdot B \cdot C \between D \cdot E \cdot F$ zu vereinigen.

Leibniz war von diesen Gedanken so erfüllt, dass er schon am 8. September 1679 an Huygens darüber schrieb[1]). Ich bin, sagte er, mit der Algebra noch nicht zufrieden, weil sie weder die kürzesten Wege der Geometrie einschlägt, noch deren schönste Constructionen kennen lehrt. Ich glaube daher, man bedürfe einer besonderen geometrischen Analysis, welche uns unmittelbar den *situs* ausdrückt, wie die Algebra die *magnitudo*.

Darauf erläuterte er in einer Beilage[2]) jene Begriffe, von denen eben die Rede war, und bewies mit deren Hilfe den Satz, dass die Kugel durch eine Ebene in einer Kreislinie geschnitten wird. Jeder Kugelpunkt $Y$ ist mit dem Kugelmittelpunkte $A$ durch eine Gerade $AY$ verbunden, welche mit einer bestimmten $AC$ zur Deckung gebracht werden kann, oder $AC \between AY$ ist der Ausdruck für eine Kugel. Der Ausdruck für eine Ebene ist, vermöge deren Definition (S. 35), $AY \between BY$, mithin auch $AC \between BC$, vorausgesetzt, dass $C$ ein Punkt der Ebene sein soll. Aus $BC \between AC$ und $AC \between AY$ nebst $AY \between BY$, folgt $BC \between BY$. Addirt man zu diesem $BC \between BY$ das früher bekannte $AC \between AY$ und das selbstverständliche $AB \between AB$, so entsteht $ABC \between ABY$. Letzteres ist aber der der Definition (S. 35) entsprechende Ausdruck für eine Kreislinie, und somit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Huygens antwortete am 20. November in wenig ermuthigender Weise[3]), er glaube nicht, dass auf die neue Charakteristik grosse Hoffnungen zu gründen seien. Es ist wohl anzunehmen, dass dieses abfällige Urtheil eines Mannes, den Leibniz ungemein hoch stellte, die Schuld trug, dass Jener mit seinen für die damalige Zeit allerdings durchaus neuen Gedanken nicht an die Oeffentlichkeit trat, dass er auch in seinen handschriftlichen Privatnotizen nicht weit über das an Huygens Mitgetheilte hinausging. Insbesondere hat sich kein Versuch Leibnizens erhalten, auch die Aehnlichkeit und die Bewegung neben der Congruenz in den Beweisen zur Geltung zu bringen, was ursprünglich in seiner Absicht lag[4]).

An die Schriften über Geometrie schlossen wir in früheren Abschnitten solche an, welche in der Geometrie zu benutzende Vorrich-

[1]) Leibniz I, 19. [2]) Ebenda I, 22—25. [3]) Ebenda I, 27. [4]) Ebenda V, 172: *Nunc autem ad explicandam rem situs non nisi congruentia utemur, sepositis in alium locum similitudine et motu.*



tungen kennen lehrten. Wir haben gegenwärtig nur einen solchen Schriftsteller allenfalls zu nennen: Michael Scheffelt[1]) aus Ulm (1682—1720), welcher einen Messstab erfand, der den Neperschen Rechenstäben (Bd. II, S. 723) nachgebildet das Rechnen mit geometrischen Grössen auf ein Ablesen zurückführte. Die erste Veröffentlichung ist von 1697. Ihr folgten vier weitere Auflagen bis 1732, ein Beweis, dass man damals die Erfindung schätzte.

Noch älter ist eine Vorrichtung, von welcher wir vielleicht zweckmässiger im folgenden Kapitel sprächen, weil sie dem Rechnen diente, welche wir indessen ihres mechanischen Wesens wegen hier nennen. Wir meinen die Rechenmaschine von Leibniz. Wir wissen (Bd. II, S. 725), dass Leibniz in Paris die von Pascal erfundene Rechenmaschine sah und schätzte. Dieses hinderte aber nicht, dass er einige Unvollkommenheiten derselben bemerkte, gegen welche er Abhilfe suchte. Schon 1673 während des ersten Londoner Aufenthaltes zeigte Leibniz seine Einrichtung der Königlichen Gesellschaft dort vor[2]), und als er weitere Verbesserungen angebracht hatte, fand er auch bei der Pariser Akademie Beifall. Die Beschreibung der Leibnizischen Maschine wurde allerdings erst wesentlich später 1710 in den Druckschriften der Berliner Akademie unter dem Titel *Brevis descriptio machinae arithmeticae*[3]) veröffentlicht. Vollkommen war freilich auch diese Vorrichtung noch nicht, wiewohl Leibniz bei den immer erneuerten Versuchen der Verbesserung grosse Summen — man erzählt von 24000 Thalern — nach und nach aufgewandt hatte.

## 84. Kapitel.

### Rechenkunst. Combinatorik. Leibrenten.

Die hervorragenderen Schriftsteller haben im letzten Drittel des XVII. Jahrh. nachgrade aufgehört, ihre Kräfte dem elementaren Rechnen zu widmen. Was an Büchern darüber in den verschiedenen Ländern gedruckt wurde, war höchstens mittelgut, und nur ganz vereinzelte mögen wegen der weiten Verbreitung, welche sie besassen, genannt werden.

[1]) Weyermann, Nachrichten von Gelehrten, Künstlern und anderen merkwürdigen Personen aus Ulm (Ulm, 1798), S. 462—463. [2]) Klügel, Mathemathisches Wörterbuch II, 741—742 unter „Instrumentale Arithmetik". Vergl. auch Leibniz I, 33 einen Brief Leibnizens an Oldenburg vom 8. März 1673: *In instrumento meo arithmetico laboratur strenue;* ferner Leibniz III, 72 Anmerkung und Gerhardt, Math. Deutschl. S. 141. [3]) Miscellan. Berolin. T. I.

Tobias Beutel[1]) verfasste ein Lehrbuch: *Chursächsischer Cedernwald, eine Arithmetik oder sehr nützliche Rechenkunst*, welches seit der Mitte bis zum Ende des XVII. Jahrh. achtmal aufgelegt wurde. Die Regeln sind in Reime gefasst, damit sie um so leichter erlernt werden konnten. Darauf beruhte gewiss wenigstens zum Theil die vielfache Anwendung des Lehrbuches, welche zum Beispiele in dem Lehrplane der Franckeschen Stiftungsschule in Halle von 1702 anbefohlen ist[2]).

Ein Vorgänger Beutel's in der Stellung von in Reime gekleideten Aufgaben war Arnold Möller, Rechenmeister zu Lübeck, mit seinem *Güldenen Lehrschatz* von 1647. Letztere Schrift hat dann unmittelbar Heinrich tho Aspern (1631—1695) in einem Buche von 1676 als Muster benutzt, welches zwar bis auf unsere Tage ungedruckt blieb[3]), aber als Handschrift nachweislich einflussreich wirkte. Tho Aspern's Rechenbuch zerfiel in vier Klassen und einem Lustgärtlein. Die 1. Klasse lehrte die vier gemeinen Rechnungsarten an ganzen Zahlen, die 2. Klasse an Brüchen. Die 3. Klasse hatte es mit der Regeldetri zu thun, die 4. Klasse mit Mischungsrechnungen (*Regula Alligationis*), unbestimmten Aufgaben (*R. Virginum*) und dem falschen Ansatz (*R. Falsi*). Das Lustgärtlein ging dann über diese Aufgaben noch hinaus. In seinen Beeten — so hiessen die einzelnen Kapitel — wuchsen Ausziehungen von Wurzeln zweiten bis neunten Grades, Auflösungen von Gleichungen bis zum dritten Grade einschliesslich, Untersuchungen über figurirte Zahlen.

François Barrême[4]), ein Rechenmeister zu Paris, veröffentlichte 1677 *L'Arithmétique ou le livre facile pour apprendre l'arithmétique soi même*, welche zahlreiche Auflagen nöthig machte und noch heute ein sprichwörtliches Nachleben in Frankreich führt, wo man bei einfachsten Rechnungsergebnissen sehr häufig Barrême als scherzhafte Beglaubigung anführt, ähnlich wie in Deutschland Adam Riese.

Ein Schriftsteller von vermeintlicher erfinderischer Kraft auf elementarem Gebiete war Erhard Weigel[5]) (1625—1699), der zu Weiden in der Oberpfalz geboren in Halle zum Studium sich vorbereitet hat und dort dem weit und breit bekannten Astrologen Schimpfer als Schreiber diente. Weigel, der, seit er mit elf Jahren seinen Vater verloren, auf sich selbst angewiesen war und schon in

[1]) Unger, Die Methoden der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung, S. 75, 124—125. [2]) Ebenda S. 140. [3]) Riessen, Ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676 (Glückstadter Programmbeilagen für 1893 und 1894). [4]) Poggendorff I, 105. [5]) Erhard Weigel. Ein Beitrag zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften auf den deutschen Universitäten im 17. Jahrhundert von Dr. Bartholomaei (Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplem. S. 1—44). Edm. Spiess, Erhard Weigel (Leipzig, 1881).



diesem zarten Alter fast gleichaltrige Kinder im Schreiben und Rechnen zu unterrichten pflegte, kam in Halle mit Studirenden aus Leipzig in Berührung, welche nicht selten dorthin reisten, um sich eben von Schimpfer ihre Nativität stellen zu lassen. Ihr Zureden bewog Weigel, sich ebenfalls zur Leipziger Hochschule zu wenden, wo er 1650 die Würde eines Magisters der Philosophie erwarb. Unter seine dortigen Gönner zählte ein Oberst Titel, Festungshauptmann der Pleissenburg, vielleicht ein naher Verwandter jenes Basilius Titel (S. 22), der 1682 dieselbe Stellung einnahm und Mitarbeiter an den A. E. war. Im Jahre 1653 starb der Jenaer Professor der Mathematik Heinrich Hofmann, und Weigel wurde zu seiner Nachfolge berufen, eine Stellung, in welcher er bis zu seinem Tode, mithin 46 Jahre hindurch, verblieb. Eine als *Astrognostisch-heraldisches Collegium* von ihm angekündigte Vorlesung zog mehr als 400 Zuhörer an, so dass er keinen genügenden Hörsaal finden konnte und vor der Stadt im Freien seine Vorträge halten musste. Den Gegenstand bildete wahrscheinlich der Europäische Wappenhimmel, d. h. die Ersetzung der altheidnischen Sternbilder durch die Wappen der Europäischen Staaten. Weigels Mathematik kann als Beispiel der Bedürfnisslosigkeit gelten, welche damals die ausnahmslose Regel an deutschen Universitäten bildete. Die Schriften von Descartes hat er niemals studirt, er würde sie auch nicht verstanden haben. Bildete er sich doch nicht wenig auf seine Erfindung des *divisor vicinus*, d. h. auf die Erfindung einer Regel ein, die durch die Formel

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{a - \frac{a}{b}(b-c)}{b-c}$$

dargestellt ist. So ist z. B. $998 = 1000 - 2$ und demnach

$$\frac{a}{998} = \frac{a}{1000} + \frac{a - \frac{a}{1000} \cdot 998}{998}.$$

Als sein Hauptwerk betrachtete er vollends seine *Tetractys*, welche er in drei verschiedenen Schriften der Gelehrtenwelt empfahl, insbesondere in einer Schrift[1]) von 1673. Tetractys ist das Zahlensystem mit der Grundzahl 4, welches Weigel dem mit der Grundzahl 10 weit vorziehen zu müssen glaubte. Viertheilung sei das Natürliche und Nächstliegende, während die Zehnzahl ein künstlich Gemachtes sei. Einige Namen müssten zur volksthümlichen Einführung des Vierersystems allerdings neu erfunden werden, und Weigel

[1]) Erhardi Weigelii, *Artium Architectonicarum Supremi Directoris et Prof. Publ. Tetractys, summum tum Arithmeticae tum Philosophiae discursivae compendium, artis magnae sciendi genuina radix.* Jenae MDCLXXIII.

schlägt daher mitten im lateinischen Texte derartige deutsche Namen vor. Sie lauten *Secht* statt viermal vier und *Schock* statt viermal viermal vier. Später ersetzte Weigel auch das Wort vier durch eine Neubildung *Erff*, wodurch die Zusammensetzungen und Zusammenziehungen *Zwerff* und *Dreff* für zweimal, beziehungsweise dreimal vier sich herstellen liessen. Noch 1690 ging Weigel mit dem Gedanken um, nach London zu reisen, um der dortigen Königlichen Gesellschaft seinen Divisor vicinus, seine Tetractys und verschiedene technische Erfindungen mit Ausschluss einer Schnellpresse, welche er nicht zu veröffentlichen beabsichtigte, um die Buchdrucker nicht um Arbeit und Brod zu bringen, vorzulegen. Der dazu erbetene Urlaub wurde ihm jedoch glücklicherweise verweigert, und so unterblieb der Versuch, der in einer Zeit, in welcher die fruchtbarsten Entdeckungen im Gebiete der höheren Mathematik an der Tagesordnung waren, Weigel nur hätte lächerlich machen können. Wir mussten grade wegen der Unbedeutendheit des Mannes bei ihm verweilen, denn, wie wir schon sagten, er gibt uns den Massstab für die damals an deutschen Universitäten gelehrte Mathematik. Und dieser Mann war Leibnizens Lehrer (S. 29)?

Es bedürfte kaum der ausführlicheren Darstellung, welche Leibniz zum Schlusse eines im April 1703 an Jakob Bernoulli gerichteten Briefes von seinem Studiengange gab[1]), um die sichere Ueberzeugung zu hegen, er müsse wesentlich sich selbst Lehrer gewesen sein. „Als ich," heisst es in der Nachschrift zu jenem Briefe, welche beim wirklichen Ausfertigen desselben unterdrückt wurde und erst aus dem Leibnizischen Nachlasse bekannt geworden ist, „im Jahre 1672 nach Paris kam, war ich Autodidakt in der Geometrie, aber als solcher wenig durchgebildet[2]). Mir fehlte die Geduld, durch lange Reihen von Beweisen hindurchzueilen. Ich hatte als Knabe eine für Kinder geeignete Algebra eines gewissen Lanzius[3]), dann die des Clavius zu Rathe gezogen, die des Cartesius schien mir zu verwickelt." Wir bemerken hierzu, dass unter jener Kinderalgebra wahrscheinlich die *Institutiones arithmeticae* gemeint sind, welche der Ingolstadter Professor Johann Lantz[4]) 1616 und 1619 in München herausgab. Etwas weiter unten heisst es in jener Nachschrift dann weiter: „In dieser, ich hätte beinahe gesagt stolzen Unwissenheit in der Mathematik zog ich Geschichte und Rechtswissenschaft in Erwägung, dass ich ihrem Studium mich widmete."

Und in dieser stolzen Unwissenheit, möchten wir, Leibnizens

[1]) Leibniz III, 71—72. [2]) *Eram ego Geometra autodidactus, sed parum subactus.* [3]) *Algebram Lanzii cuiusdam puerilem,* [4]) Poggendorff I, 1374.



Worte wiederholend, fortfahren, schrieb er 1666 seine *Dissertatio de arte combinatoria*[1]), fasste er nur kurze Zeit darauf den (S. 37) bereits zur Rede gebrachten Gedanken einer *Rechenmaschine.*

Combinatorische Betrachtungen waren nichts weniger als neu. Bei Tartaglia, bei Cardano, bei Buteo, am ausführlichsten bei Pascal (Bd. II, S. 522, 532, 562, 752), in dessen 1665 durch den Buchhandel verbreiteten *Traité du triangle arithmétique* hätte Leibniz sehen können, wie weit man ihm zuvorgekommen war. Aber einestheils waren ihm jene Quellen selbst unbekannt, soweit ihr Inhalt nicht in Schwenters Erquickstunden (Aufgabe 32 und 33 des I. Buches dieser in Deutschland damals sehr verbreiteten Sammlung) übergegangen war, anderntheils war der Ausgangspunkt und noch mehr der letzte Zielpunkt Leibnizens ganz anderer Natur als bei seinen Vorgängern. Bei jenen handelte es sich um kleine mathematische Scherze, wenn wir dieses Ausdrucks uns bedienen dürfen, welche bei Cardano Anklänge an Wahrscheinlichkeitsrechnung erkennen lassen, bei Pascal erst zu höherer mathematischer Bedeutung sich erheben. Leibniz war der Zeitfolge und vielleicht auch der Geistesrichtung nach erst Philosoph und dann Mathematiker. Schon seit 1663 sind in seinem Kopfe die Keime einer *Scientia generalis* vorhanden gewesen[2]), einer allgemeinen Wissenschaftslehre, welche alle Einzelwissenschaften als Unterabtheilungen oder Anwendungen in sich fassen sollte. Der allgemeinen Wissenschaft sollte auch eine allgemeine Sprache, *Lingua rationalis,* zur Verfügung stehen, welche dem Gedanken sich so genau anzupassen hätte, dass sie als *filum meditandi,* als Leitfaden des Denkprozesses, zu dienen im Stande sei, ja dass die Schrift, ohne welche die Sprache der Mittheilbarkeit ausser in engsten Kreisen entbehren würde, die gleiche Eigenschaft der Gedankenhilfe besitze. Auch in dieser Richtung war Leibniz nicht ohne Vorgänger. Er war nicht der erste, welcher die Möglichkeit einer Weltschrift wenigstens ins Auge fasste, mit welcher allerdings eine Weltsprache noch nicht gegeben wäre. Die chinesische Schrift wird thatsächlich von verschiedenen Völkern, von jedem in seiner Sprache, gelesen und ermöglicht zwischen ihnen schriftlichen Verkehr, während sie einander mündlich nicht verstehen. Und auch in Europa waren seit 1661 Versuche in die Oeffentlichkeit getreten[3]).

[1]) Leibniz V, 7—79. [2]) Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 12 lin. 3 v. u.: *Rem enim iam a decimo octavo aetatis anno agitavi et quotidianis experimentis in instituto sum confirmatus, tametsi rudia satis prima cogitata essent.* [3]) Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 6—9.

John Wilkins (1614—1672), einer der Gründer der Royal Society in London, Prediger daselbst und von 1668 an Bischof von Chester, gab 1641 eine Schrift heraus, welche den Titel führte: *Mercury, or the secret and swift Messenger: shewing how a Man may with Privacy and Spead communicate his Thoughts to a Friend at a Distance,* und in ihr versuchte er die Begriffe zu ordnen und in ein System zu bringen, um durch gewisse Zeichen, welche ebenfalls einem Systeme angehören sollten, alle überhaupt möglichen Begriffe augenfällig zu machen. Ein zweiter Engländer, George Dalgarno, führte den Gedanken weiter aus und gab ihm 1661 in seiner *Ars signorum, vulgo character universalis et lingua philosophica* praktische Gestaltung. Er bildete 17 Grundbegriffe, welche er durch einfache Buchstaben des lateinischen und des griechischen Alphabetes (von letzterem nur $\eta$ und $\nu$) darzustellen vorschlug und glaubte damit auszukommen. Nach ihm wandte Wilkins sich abermals dem vorher schon bearbeiteten Gegenstande zu und veröffentlichte 1668 den *Essay towards a Real Character and a Philosophical Language, with a alphabetical Dictionary.* Noch späteren Datums dürfte der Versuch von P. Labbe sein, von dem Leibniz 1709 erzählt[1]), er habe *die Lateinische mittelst einiger Veränderungen zur allgemeinen Sprach machen wollen.*

Als Leibniz 1663 zuerst den Plan fasste, eine Scientia generalis zu erfinden, war demnach die erste Schrift von Wilkins und die von Dalgarno vorhanden, aber ob irgend Jemand auf dem Festlande von Europa sie damals schon gesehen hatte, ist mindestens als zweifelhaft zu bezeichnen; von dem jungen deutschen Kandidaten vollends kann mit an Gewissheit grenzender Wahrscheinlichkeit behauptet werden, er habe keine Gelegenheit gehabt, jene Schriften auch nur dem Namen nach kennen zu lernen.

Später freilich wurde das anders. Leibniz hat Dalgarnos Werk besessen und, wie er es mit den meisten Büchern machte, die in seinem Nachlasse aufgefunden worden sind, mit Randnoten versehen[2]). Er vereinigt in seinen Bemerkungen Lob mit Tadel. Er meint, Dalgarnos Methode und ebenso das, was Wilkins daraus machte, liefere einen leichten Verkehr zwischen Personen von verschiedener Sprache, aber sie sei darum doch keine *Characteristica Realis,* wie er sie zu bilden beabsichtige. Diese müsse beim Erfinden, beim Behalten, beim Beurtheilen eine unüberwindliche Kraft entwickeln. Sie müsse gleichviel bei welchem Denkstoffe das zuwege bringen, was arithmetische und algebraische Symbole in der Mathematik leisten.

[1]) Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 36 lin. 12 v. u. [2]) Ebenda VII, 7.



Leider hat Leibniz nie und nirgend genau dargelegt, wie seine grossartigen Absichten zur Verwirklichung kommen können. Er hat die Zerlegung von Begriffen auf der einen Seite, die Vereinigung von Begriffen auf der anderen Seite zum Gegenstande von Arbeiten gemacht. Er hat die Wichtigkeit der Erzielung von Vollständigkeit in der Bildung von Verbindungen erkannt. Er hat auch mathematische Symbole unter wenig veränderter Gestalt, wie z. B. ein eingeringeltes Pluszeichen, für logische Operationen angewandt, deren Verwandtschaft mit solchen der Arithmetik ihm einleuchtete. Aber die deutliche Auseinandersetzung, er verstehe das und das unter dem Namen der Characteristica Realis, hat er niemals gegeben.

Wir haben (S. 33—36) von Leibnizens Characteristica geometrica gesprochen. Wir erkennen jetzt, das jene Abhandlung von 1679 einen Theil jener Absichten erfüllen sollte, welche für die Characteristica realis den eigentlichen Gegenstand zu bilden bestimmt waren, dass sie vermuthlich im Nachsinnen über die allgemeinere Aufgabe entstand. Dem Leserkreise unseres Werkes gegenüber dürfen wir ferner uns gestatten, hier schon vorgreifend Dinge zu erwähnen, welche eigentlich erst im 89. Kapitel zur Rede kommen, und zu bemerken, dass die Zerlegung der Begriffe in Elementartheile mathematisch zum Differential führen musste. Das gleiche Bestreben verliess Leibniz ebenso wenig bei seinen eigentlich philosophischen Untersuchungen. Ohne dieselben in Erörterung ziehen zu dürfen, erlauben wir uns den Namen der Monade zu erwähnen, der 1698 zuerst[1]) gedruckt bei Leibniz vorkommt, während er allerdings auch in einem Briefe an Fardella von 1697 schon gebraucht sein soll.

In der Abhandlung von 1666, zu deren eigentlichen Besprechung wir jetzt erst gelangen, hat Leibniz denjenigen Theil seines grossen Planes in Angriff genommen, der in der Erzielung von Vollständigkeit der Anzahl möglicher Begriffsverbindungen besteht, und er hat der mathematischen Auffassung dieser Aufgabe den Namen der *Ars combinatoria* beigelegt, der ihr bleiben sollte. Sowohl die Versetzungen (Permutationen), als die Verbindungen (Combinationen des heutigen Sprachgebrauches) werden betrachtet[2]). Die Anzahl der vorkommenden Elemente heisst *numerus,* die Permutationen werden *variationes,* die Combinationen *complexiones* genannt, und *exponens* ist die Klasse, zu welcher combinirt wird. Der Exponent wird auch zur Bildung von Wörtern benutzt, aus welchen man die Klasse heraushört, Wörter, die freilich schon ein altes Gepräge tragen. *Com-*

[1]) Die philosophischen Schriften von Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt IV, 511 lin. 20. [2]) Leibniz V, 14.

*binatio* für Verbindung zu Zweien kommt bei vielen römischen Schriftstellern vor, *conternatio* für Verbindung zu Dreien bei Hyginus. Neu ist bei Leibniz die Schreibweise, beziehungsweise der Druck in Gestalt von *com 2 natio* und *con 3 natio*. Leibniz gibt einige Lehrsätze über Permutationszahlen[1]), welche, wenn die Permutationszahl für $n$ unter einander verschiedene Elemente d. h. also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = P_n$ gesetzt wird, und wenn man den Begriff und die Bezeichnung der Congruenz der heutigen Zahlentheorie entnimmt, in folgender Gestalt auftreten:

$$P_{n(n>1)} \equiv 0 \pmod{2} \qquad P_{n(n>4)} \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\sum_1^n {}_h P_h \equiv 1 \pmod{2} \qquad \sum_1^{n>3} {}_h P_h \equiv 3 \pmod{10}$$

$$P_n \equiv 0 \pmod{P_{h(h<n)}} \qquad 2 P_n - (n-1) P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$$

$$\frac{P_n^2}{P_{n-1}} = P^{n+1} - P_n.$$

Die Zahlen $\frac{P_n}{1}, \frac{P_n}{2}, \cdots \frac{P_n}{n}$ bilden eine ganzzahlige harmonische Reihe. Die Permutationszahl bei theilweise wiederholt vorkommenden Elementen ist auffallenderweise unrichtig angegeben[2]): um die Permutationszahl der Töne ut, ut, re, mi, fa, sol anzugeben, bildet nämlich Leibniz nicht $\frac{P_6}{P_2} = \frac{720}{2} = 360$, sondern

$$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600.$$

Richtig dagegen ist mit $P_{n-1}$ die Anzahl derartiger Versetzungen von $n$ Elementen angegeben, welche bei cyklischer Schreibart als verschieden sich ergeben[3]); hier gelten beispielsweise *abcd*, *bcda*, *cdab*, *dabc* als nur eine Versetzung, wenn sie im Kreise angeschrieben sind[4]) Das wäre etwa das mathematisch Bemerkenswerthe aus der Abhandlung. Einzelne Beispiele sind für den philosophischen Zweck des Verfassers kennzeichnend, und man findet auch die Erwähnung[5]) der *Logica inventiva* und der *Scriptura universalis*.

Im Jahre 1680 leiteten der Scientia generalis zugewandte Ueberlegungen Leibniz abermals auf das Gebiet der mit Zahlentheorie verknüpften Combinatorik, auf die Zerlegung von Zahlen in ihre Primfaktoren[6]) Vielleicht stammt aus jener Zeit die undatirt erhaltene Abhandlung *De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria*[7]), in

[1]) Leibniz V, 62. [2]) Ebenda 68. [3]) Ebenda 67: *Dato numero rerum variationem situs mere relati seu vicinitatis invenire.* [4]) *velut in circulo scripta.* [5]) Ebenda 49. [6]) Die philosophischen Schriften von Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 18 lin. 8. [7]) Leibniz VII, 101—113.



welcher die Theilbarkeit von $(a+1)(a+2)\cdots(a+n)$ durch $1 \cdot 2 \cdots n$ bei ganzzahligem $a$ bewiesen ist.

Die Ars combinatoria von 1666 wurde ohne Leibnizens Wissen 1690 in Frankfurt a. M. nachgedruckt, wogegen sich Leibniz in den A. E. von 1691 beschwerte[1]). Es sei ein Unrecht, dass der Drucker nicht erklärt habe, es handle sich nur um eine neu aufgelegte Jugendarbeit, denn gegenwärtig habe man das Recht, Anderes und Gereifteres von ihm zu verlangen, als zur Zeit, da er seine Erstlingsschrift veröffentlichte. Einige Zahlenrechnungen seien vollständiger zu vollziehen und genauer zu beweisen als es damals geschehen sei. Auch auf einen 1666 vorgekommenen Irrthum weist die Verwahrung von 1691 hin, der aber nicht jene Ermittelung der Versetzungszahl bei theilweise einander gleichen Elementen betrifft, von der (S. 44) die Rede war. Jenen Irrthum scheint also Leibniz 1691 entweder übersehen oder nicht als Irrthum erkannt zu haben.

Die Combinatorik leitet über zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir haben hier zunächst eine schon (Bd. II, S. 760) erwähnte Schrift von Jan de Witt zu besprechen, dessen *Waerdye van lyfrenten nar proportie van los-renten* (Werth von lebenslänglichen Renten im Verhältnisse zu gewöhnlichen Renten) von 1671, eine Abhandlung, welche ursprünglich nur in dreissig Exemplaren gedruckt war, von denen durch einen glücklichen Zufall eines aufgefunden wurde, nach welchen 1879 ein Neudruck hergestellt werden konnte[2]). In Holland fingen grade damals die Rentenversicherungen auf Lebensdauer an volksthümlich zu werden und De Witt suchte sie weiter zu empfehlen. Er fühlte, dass dazu eine Berechnung des Baarwerthes einer solchen Rente auf Lebensdauer am geeignetsten sei, und er gab diese Berechnung unter Benutzung einer vierprozentigen Verzinsung, welche demnach damals die in Holland die Regel bildende gewesen sein muss. Zweierlei ist, was dabei hervorgehoben zu werden verdient: die Art der Rabattirung künftig fälliger Rentenzahlungen auf die Gegenwart und die Berücksichtigung der Sterblichkeit.

In ersterer Beziehung hat De Witt zwei Rechner T. Bellechiere und Jacob Lense benutzt, beide Buchhalter der Staaten von Holland und Westfriesland, die jeder für sich eine durch die Uebereinstim-

[1]) Die philosophischen Schriften von Leibniz herausgeg. von C. J. Gerhardt IV, 163—164. [2]) H. Bierens de Haan, der glückliche Auffinder des Originals, hat den Neudruck bei Gelegenheit des 100jährigen Stiftungsfestes einer Amsterdamer mathematischen Gesellschaft, welche meistens nach ihrem Wahrspruche: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*, benannt wird, veranstaltet.

mung der Ergebnisse in ihrer Richtigkeit gewährleistete Tabelle berechneten. Wie sie die Rechnung vollzogen, ist nicht gesagt. Da indessen die Tabelle 9 805 807 als den Baarwerth von nach einem halben Jahre zahlbaren 10 000 000 angibt und $9\,805\,807 = \frac{10\,000\,000}{\sqrt{1{,}04}}$ ist, so ist kein Zweifel, dass zur Rabattirung einer nach $n$ Jahren fälligen Zahlung $K$ auf die Gegenwart die Formel $\frac{K}{1{,}04^n}$ angewandt wurde, mochte $n$ ganzzahlig oder gebrochen sein, und die übrigen Zahlen der Tabelle sind gleichfalls Zeugnisse für die Benutzung dieser Formel.

Was den Einfluss der Sterblichkeit betrifft, so wird angenommen, dass während der vollen Kraft des menschlichen Lebens, für welche als Geltungsdauer die ganze Zeit vom 4. bis zum vollendeten 53. Lebensjahre vorausgesetzt ist, jährlich 2 der Versicherten sterben, was ebensogut im ersten wie im zweiten Halbjahre eintreffen könne. Von 53 bis zu 63 Jahren sterben dann jährlich 3, von 63 bis zu 73 Jahren jährlich 4, von 73 bis zu 80 Jahren jährlich 6 Personen. Nach dieser Zeit dürfe man rechnungsmässig die ganze Menschheit als abgestorben betrachten, wenn auch thatsächlich da und dort einzelne dieses Alter und sogar nicht unbeträchtlich überschreiten. Da also die Versicherten nunmehr alle als verstorben gelten, so lässt sich ihre Anfangszahl rückwärts berechnen. Sie betrug $50 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 212$. Später stellte De Witt eine zweite Annahme in Rechnung, welche ein wesentlich rascheres Absterben der Menschen in Aussicht nahm und demgemäss den Preis einer zu erwerbenden Leibrente erniedrigte. Nach der ersten Annahme verhält sich die Sterbenswahrscheinlichkeit zwischen 53 und 63 Jahren zu der früher vorhandenen wie 3 : 2. Dieses Verhältniss steigert sich zwischen 63 und 73 Jahren auf 2 : 1, zwischen 73 und 80 Jahren auf 3 : 1.

Von diesen Grundlagen aus, deren Rechtfertigung nicht versucht wird, sondern die als einfache Voraussetzungen ausgesprochen sind, schliesst De Witt nun weiter. Eine Leibrente von 10 000 000 Stüber im halben Jahre (1 Stüber ist der zwanzigste Theil eines Guldens, die Rente beträgt darnach eine Million Gulden im Jahre) sei einem eben in die Zeit voller Lebenskraft eingetretenen 3jährigen Kinde zugesichert, so dass sie am Ende jedes halben Jahres zur Auszahlung gelangen soll. Der Tod des Kindes kann eintreten im 1., im 2., im 3., im 100. Halbjahre nach dem Beginne der Versicherung. Stirbt das Kind im 1. Halbjahre, so kommt die Rente überhaupt nicht zur Auszahlung und ihr Baarwerth ist 0. Stirbt das Kind im 2. Halbjahre, so hat es einmal die Rente bezogen, und deren Baarwerth ist $\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{1}{2}}} = 9\,805\,807$. Stirbt das Kind im 3. Halbjahre, so kam die Rente sowohl am Schlusse des 1., als am Schlusse des 2. Halbjahres zur Auszahlung und der Baarwerth ist



$$\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{1}{2}}} + \frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{2}{2}}} = 19\,421\,192.$$

Genau in der gleichen Weise wird der Baarwerth sämmtlicher Rentenzahlungen gerechnet, wenn der Empfangsberechtigte im 4., 5.... 100. Halbjahre stirbt, die Rente mithin 3, 4 ... 99 mal bezog. Im letztgenannten Falle ist der Baarwerth

$$\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{1}{2}}} + \frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{2}{2}}} + \cdots + \frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{99}{2}}} = 432\,490\,825.$$

Die Gesammtsumme aller Baarwerthe bis dahin, welche durch einfache Addition vereinigt werden, weil die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens irgend eines dieser Fälle als gleich gilt, ist

$$0 + 9\,805\,807 + 19\,421\,192 + \cdots + 432\,490\,825 = 28\,151\,475\,578.$$

Soll der Baarwerth der Renten berechnet werden, sofern der Tod im 101. Halbjahre eintritt, so kommt zu dem vorhergewonnenen 432 490 825 noch $\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{100}{2}}} = 1\,407\,126$ hinzu, er wird demnach 433 897 951. So kann man fortfahren bis zum Baarwerthe 455 999 472 der Renteneinnahmen dessen, der erst im 120. Halbjahre stirbt, und die Summe dieser gesammten aus 20 Zahlen bestehenden Gruppe ist

$$433\,897\,951 + \cdots + 455\,999\,472 = 8\,911\,946\,713.$$

Allein nun trat die erhöhte Sterblichkeit ein. Von Rechts wegen musste, weil die Sterblichkeit im Verhältnisse von 3 : 2 zunahm, jeder Baarwerth im Verhältnisse von 2 : 3 herabgemindert werden, und nimmt man zur bequemeren Rechnung die Vervielfachung mit $\frac{2}{3}$ nur einmal bei der Gesammtsumme vor, so gewinnt man

$$\frac{2}{3} \cdot 8\,911\,946\,713 = 5\,941\,297\,809.$$

Eine weitere Gruppe von 20 Einzelbaarbeträgen wird nach ihrer Vereinigung in eine Summe mit $\frac{1}{2}$, eine letzte von 14 Einzelbaar-

beträgen nach ihrer Vereinigung mit $\frac{1}{3}$ vervielfacht werden müssen, um der im Verhältnisse von 2 : 1, von 3 : 1 zunehmenden Sterblichkeit Rechnung zu tragen. Alle auf ihre vorschriftsmässigen Vielfache zurückgeführten Summen geben zusammen 40 964 113 736 Stüber als Baarwerth aller Renten, die überhaupt bis zum Eintreffen je eines Todesfalles im Halbjahre zur Auszahlung kamen. Zur Bildung der genannten Summe kamen erst 100, dann 20, dann abermals 20, endlich 14 Summanden in Betracht. Es wäre aber nach De Witt unrichtig, aus $100 + 20 + 20 + 14 = 154$ den Divisor zu bilden, mittels dessen man sich den Durchschnittswerth zu verschaffen hätte. Vielmehr lässt De Witt die gleiche Sterblichkeitsabminderung wie bei den Baarwerthen auch bei jenen Gruppenzahlen anwenden, d. h. er bildet

$$1 \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot 14 = 128$$

und dann

$$\frac{40\,964\,113\,736}{128} = 320\,032\,138 \text{ Stüber} = 16\,001\,606 \text{ Gulden.}$$

Er gewinnt so den runden Baarwerth von 16 Millionen für eine Leibrente von 1 Million. Die Leibrente liefert etwa $\frac{1}{16}$ des Anlagekapitals an Zins, während die gewöhnliche Rente von 4 Prozent nur $\frac{1}{25}$ an Zins einbringt. Die erstere Anlageweise ist also dringend zu empfehlen. De Witt liess sich die Richtigkeit seiner Schlüsse von Johann Hudde (Bd. II, S. 801) bestätigen.

Mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben anderer Art beschäftigt sich eine Abhandlung *Reckening van Kanssen* (Berechnung der Chancen), welche 1687 gemeinsam mit einer von Spinoza herrührenden Schrift über den Regenbogen erschien und vielleicht von dem gleichen Verfasser herrührt. In ihr ist folgende Aufgabe gelöst: A und B würfeln mit zwei gewöhnlichen Würfeln; A soll gewinnen, wenn er 6 Augen wirft, B dagegen muss 7 Augen werfen, um zu gewinnen; zuerst wirft A einmal, dann B zweimal, dann haben A und B umschichtig je zwei Würfe, bis ein Gewinnwurf fällt. Wie verhalten sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler? Die Antwort lautet: A : B = 10355 : 12276.

Wir haben die De Wittsche Schrift ausführlich geschildert, damit ersichtlich werde, wie sehr die Lehre von der Wahrscheinlichkeit nur erfahrungsgemäss bekannter Ereignisse und insbesondere die Lehre von der Sterblichkeit damals noch im Argen lag. Einen ungeheuren Schritt weiter ging Edmund Halley[1]) (1656—1742). Er war vorzugsweise Astronom und ist am bekanntesten durch seinen Katalog südlicher Sterne, durch die Bahnbestimmung des nach ihm genannten Halleyschen Kometen, ausserdem durch seine Declinationskarte, Dinge, deren blosse Nennung uns hier genügen muss. Aber auch mathematische Leistungen Halleys werden uns in sehr verschiedenen Kapiteln dieses Bandes begegnen. Gegenwärtig haben wir es mit einem Aufsatze zu thun, der unter dem Titel: *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives* in den Philosophical Transactions von 1693 erschien[2]). Auf verhältnissmässig kleinem Raume ist daselbst eine grosse Menge der fruchtbarsten Gedanken mehr angedeutet als entwickelt.



In Breslau waren für die 5 Jahre 1687—1691 Geburts- und Todeslisten veröffentlicht worden, welche das Geschlecht und beim Ableben auch das Lebensalter, in welchem es erfolgt war, genau angaben. 6193 Geburten stehen in dem ganzen Zeitraume 5869 Todesfällen gegenüber, und alljährlich ziemlich zutreffend die Durchschnittszahl von 1238 Geburten bei 1174 Todesfällen, Der jährliche Ueberschuss an Geburten von 1238—1174 = 64 oder etwa einem Zwanzigstel der Geburten bringt schwerlich eine Vermehrung der Einwohnerzahl hervor, weil annähernd ebenso viele Erwachsene zum Kriegsdienste ausgehoben werden. Bei dieser stationären Bevölkerung — ein Kunstausdruck, dessen Halley sich nicht bedient, der aber in unserem Jahrhunderte benutzt wird, um das Gleichgewicht zwischen Zuwachs und Abnahme der Bevölkerung zu bezeichnen — zeigt die Todesliste, dass von den 1238 Neugeborenen 348 innerhalb des ersten Jahres sterben und nur 890 in das zweite Lebensjahr eintreten. Von diesen sterben weitere 198 zwischen Vollendung des ersten und sechsten Lebensjahres u. s. w.

Indem Halley die proportionalen von einer Anfangszahl 1000 beginnenden Zahlen der in jedem Lebensalter lebenden Persönlichkeiten zusammenstellt, erhält er eine Liste, die, sofern nur die drei ersten und die drei letzten Zeilen abgedruckt werden sollen, folgendermassen aussieht:

[1]) Dessen Todesjahr ist bei Poggendorff I, 1005 verdruckt als 1724 angegeben. Ueber Halleys Leben und seine Verdienste um die Astronomie vergl. Weidler, *Historia Astronomiae* (Wittenberg, 1741) pag. 543—546, wo Halley als noch lebend bezeichnet ist, dann Montucla II, 593—599. [2]) *Philosophical Transactions* XVII, 596—610. Ein Zusatz unter der Ueberschrift *Some further Considerations on the Breslaw Bills of Mortality* ebenda 654—656. Durch

| | | |
|---|---|---|
| 1. Jahr | 1000 | Lebende |
| 2. Jahr | 855 | Lebende |
| 3. Jahr | 798 | Lebende |
| — — — | — — | — |
| 82. Jahr | 28 | Lebende |
| 83. Jahr | 23 | Lebende |
| 84. Jahr | 20 | Lebende |
| | 34000 | Lebende. |

Die Summe der in den verschiedenen Lebensjahren als Lebende angegebenen Anzahlen beträgt 34000, und so gross ist die der Liste entsprechende Bevölkerung.

Halley begründet diese Behauptung nicht näher, aber die Meinung ist augenscheinlich die, dass angenommen wird, die stationäre Bevölkerung sammt den absoluten Geburts- und Todeszahlen, in deren Gefolge sie eintrat, hätten sich seit 84 Jahren nicht verändert; auch damals seien, wie regelmässig in allen folgenden Jahren, 1000 Geburten im Jahre vorgekommen, die Sterbefälle mit den Lebensjahren, in welchen sie sich ereignen, hätten sich ebensowenig irgend verändert, und die gegenwärtige Bevölkerung sei die Summe der aus allen diesen Geburten am Leben Gebliebenen, indem eine Bevölkerungsveränderung durch Ein- oder Auswanderung für ausgeschlossen gilt oder doch für so geringfügig, dass sie vernachlässigt werden darf.

Halley benutzt nun erstlich seine Liste, um die Lebenswahrscheinlichkeit während eines Jahres in jedem Lebensalter zu bestimmen. Wenn neben 1. Jahr die Zahl 1000, neben 2. Jahr die Zahl 855 mit der Differenz 145 sich findet, so folgt daraus, dass man 855 gegen 145 oder beiläufig 6 gegen 1 wetten kann, dass ein im ersten Lebensjahre stehendes Kind in das zweite Lebensjahr eintreten werde. Aehnlicherweise ist die Wahrscheinlichkeit, auf englisch *the odds*[1]), für einen Vierzigjährigen, dass er weiter sieben Jahre leben werde, der Tafel zu entnehmen. Neben 40. und 47. stehen die Zahlen 445 und 377 mit der Differenz 68. Demgemäss kann 377 gegen 68, bei läufig 11 gegen 2, auf die Erhaltung des Lebens während der 7 Jahre gewettet werden. Halley fragt weiter nach der Anzahl der Jahre, auf deren fernere Durchlebung in einem gegebenen Alter 1 gegen 1 gewettet werden könne? Bei 30 Jahren z. B. findet er die Zahl 531. Deren Häfte ist $265\frac{1}{2}$. Nun steht neben 57. die Zahl 272, neben

verschiedene Druckfehler in den Seitenzahlen kommt pag. 654 zweimal in dem Bande vor. Der Halleysche Zusatz ist bei dem zweiten Vorkommen aufzusuchen. *Philosophical Transactions* kürzen wir künftig als P. T. ab.

[1]) P. T. XVII, 601—602.



58. die Zahl 262, zwischen beiden Zahlen liegt $265\frac{1}{2}$, also ist gleichauf zu wetten — *it is an even lay* — dass ein 30jähriger noch zwischen 27 und 28 Jahren leben werde. In den Nachträgen[1]) bemerkt Halley, von den 1238 Neugeborenen der Breslauer Liste seien mit 17 Jahren nur noch 616 am Leben. Der Mensch habe also nicht das geringste Recht über vorzeitigen Tod — *an untimely death* — zu klagen, sofern der Verstorbene über 17 Jahre alt wurde.

Nach diesen für damals ganz neuen die Sterblichkeit betreffenden Entwickelungen legt Halley das Hauptgewicht auf die Werthbestimmung von Leibrenten. Der Zinsfuss, dessen er sich bedient, ist 6 Prozent[2]), woraus man entnehmen mag, wie wesentlich anders die englischen Geld- und Handelsverhältnisse im Jahre 1693 gestaltet waren als die holländischen im Jahre 1671. Der briggische Logarithmus von 1,06 ist auf 6 Decimalstellen genau 10 — 9,974694, oder 9,974694 ist die arithmetische Ergänzung — *the arithmetical complement* — jenes Logarithmen, und $9{,}974694n - 10n$ ist der Logarithmus des Baarwerthes der an alle in $n$ Jahren noch Lebende zu zahlenden Rente vom Betrage 1. Zu ihm muss daher der Logarithmus der Anzahl dieser Lebenden addirt werden, um sodann mittelst einer Logarithmentafel den Baarwerth der Gesammtleistung der Versicherungsgesellschaft nach $n$ Jahren zu finden. Diese Rechnung muss für alle Jahrgänge, d. h. für alle Werthe von $n$, durchgeführt und die Summe der sämmtlichen Baarwerthe durch die Zahl der in der Gegenwart Lebenden dividirt werden. Der Quotient lehrt, was einem gegenwärtig Lebenden eine Leibrente vom Betrage 1 werth ist. Halley hat diese Rechnung durchgeführt, indem er als gegenwärtiges Alter 1, 5, 10 Jahre und stets um 5 Jahre zunehmend zuletzt 70 Jahre annahm. Er findet

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Baarwerth | der | Leibrente | 1 | bei | 1 | Jahre | ist | 10,28 |
| „ | „ | „ | 1 | „ | 5 | „ | „ | 13,40 |
| „ | „ | „ | 1 | „ | 10 | „ | „ | 13,44 |
| — — | — | — — | — | — | — | — | — | — |
| „ | „ | „ | 1 | „ | 70 | „ | „ | 5,32. |

Im Gegensatze zu De Witt erkennt Halley in seinen Zahlen einen Grund zur Abmahnung von dem Ankauf von Leibrenten, und auch hieraus erkennt man, wie grundverschieden die Verhältnisse waren, innerhalb derer beide lebten. In England war[3]) vor kurzem ein 14 Prozent Jahreszins gewährendes königliches Anlehen ausgegeben

[1]) P. T. XVII, 655. [2]) Ebenda 603. [3]) Ebenda 604: *the present Fund lately granted to their Majesties giving 14 per Cent per Annum.*

worden, wodurch man um wenig mehr als 7 als Ankaufspreis eine Rente 1 erhielt, was bei der Leibrente erst in hohem Alter, zwischen 60 und 65 Jahren möglich war.

Halley wendet sich hierauf zur Frage des Ueberlebens bei zwei Personen verschiedenen Alters. Nach der Tabelle sind 610 ($N$) im Alter von 18 und 490 ($n$) im Alter von 35 Jahren vorhanden; 8 Jahre später sind 560 ($R$) im Alter von 26 und 417 ($r$) im Alter von 43 Jahren vorhanden, während 50 ($Y$) von der jüngeren und 73 ($y$) von der älteren Gruppe starben. Die beiden Gleichungen $N = R + Y$, $n = r + y$ werden miteinander vervielfacht und liefern $Nn = Rr + Yy + Ry + Yr$. Sämmtliche fünf Glieder dieser neuen Gleichung haben eine leicht verständliche Bedeutung. $Nn$ bedeutet die Anzahl der verschiedenaltrigen Paare, welche aus allen zu Anfang Lebenden gebildet werden konnten, $Rr$ dasselbe für den späteren Zeitpunkt. $Yy$ ist die Anzahl der verschiedenaltrigen Paare unter den aus beiden Gruppen Verstorbenen. $Ry$ zeigt das Ueberleben eines Jüngeren, $Yr$ das eines Aelteren an, und die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ereignisses wird mittels Division des ihm entsprechenden Produktes durch $Nn$ gefunden. Halley hat diese Darstellung auch mit Hilfe einer Zeichnung versinnlicht[1]) (Figur 8). Aus den Seiten $AB = N$ und $BD = n$, welche in $H$, beziehungsweise in $I$, in ihre Abschnitte $R + Y$, $r + y$ zerlegt sind, bildet er ein Rechteck und zieht $HE \parallel BD$, $IF \parallel AB$. So entstehen innerhalb des grossen Rechteckes die vier kleineren, deren Verhältnisse zum grossen die Wahrscheinlichkeiten dafür darstellen, dass nach der angegebenen Frist beide Personen am Leben seien oder beide todt, oder die jüngere, die ältere allein noch am Leben. Wird in $B$ senkrecht zur Ebene $ABCD$ eine Gerade $BK = v$ gedacht, deren Theile $\varrho$ und $v$ heissen sollen, so entsteht leicht ein Parallelopipedon $Nnv$, welches durch Schnittebenen in die 8 kleineren Parallelopipeda $Rr\varrho$, $Yyv$, $Rrv$, $Ry\varrho$, $Yr\varrho$, $Ryv$, $Yrv$, $Yy\varrho$ zerfällt, deren Verhältnisse zum grossen Parallelopipedon die Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, dass drei in Untersuchung genommene Personen nach einer bestimmten Frist noch leben, oder alle drei

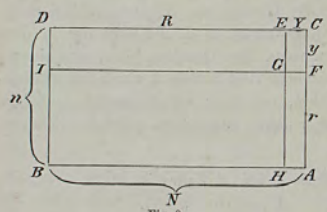

Fig. 8.

[1]) P. T. XVII, 605—606.



verstorben sind, oder zwei derselben noch leben, oder endlich nur noch eine.

Wenige Jahre nach Halleys Veröffentlichung, nämlich 1699, gründete Stansfeld in London eine Wittwen- und Waisenkasse, *Society of Assurance for Widows and Orphans*, in deren Satzungen die Sterblichkeit so weit berücksichtigt war, als das Beitrittsalter auf höchstens 50 Jahre bestimmt war und die Sterblichkeit zu $\frac{1}{50}$ angenommen wurde[1]). Nach heutigen Erfahrungen ist bei 50 Jahren die Sterblichkeit 0,01814.

Während in Holland und England die Zinseszinsrechnung wenigstens innerhalb der hier besprochenen Leibrentenberechnung als in dem Maasse selbstverständlich betrachtet wurde, dass eine Begründung derselben überflüssig erscheinen mochte, lag die Sache in Deutschland wesentlich anders. Der bekannte sächsische Jurist Benedict Carpzow[2]) (1595—1666), dessen Vorschriften für die Rechtsprechung lange Jahrzehnte hindurch als unanfechtbar galten, bediente sich bei Berechnung des Interusuriums, d. h. des Abzugs, welchen der Gläubiger sich gefallen lassen muss, wenn eine nach der Zeit $t$ zahlbare Schuld $S$ durch Baarzahlung getilgt werden will, der Methode dass er fragte, welchen Zins $z$ jenes $S$ in der Zeit $t$ abwerfe und dass er dann dieses $z$ von $S$ abzog, eine Methode, welche, so grundfalsch sie ist, übungsmässig bis auf unsere Tage gestattet wird, wo es um die sogenannte Discontirung eines nach verhältnissmässig kurzer Frist fälligen Wechsel sich handelt.

Leibniz hat in den A. E. von 1683 die Interusuriumsfrage behandelt[3]). Sein Gedankengang ist folgender. Die Summe 1 sei nach einem Jahre zahlbar, und der Zinsfuss sei 5 Prozent oder $\frac{1}{v}$ des Kapitals, *sors*, wo die Zahl $v$ bei dem angenommenen Zinsfusse den Werth 20, bei anderem Zinsfusse einen anderen Wert besitzt. Zahlt der Schuldner dem Gläubiger jetzt schon 1, so wird er für diesen Betrag Gläubiger seines bisherigen Gläubigers, und wenn letzterer auch am Jahresende die Rückgabe der Summe 1 gegen seine eigene alsdann fällige Forderung wettschlagen kann, so muss er doch den Zins mit $\frac{1}{v}$ bezahlen. Diesen Zins vergüte er gleich jetzt, beziehungsweise gestatte, dass der Schuldner ihm nur $1 - \frac{1}{v}$ auszahle, so wird der Schuldner am Ende des Jahres neuerdings als Schuldner mit dem

[1]) Cornelius Walford, *History of Life Assurance in the united Kingdom.* [2]) Allgemeine deutsche Biographie IV, 11—20, Artikel von Muther. [3]) *Meditatio iuridico-mathematica de interusurio simplice.* Einen Abdruck dieser Abhandlung vergl. Leibniz VII, 125—132.

Betrage $\frac{1}{v^2}$ erscheinen. Dessen Baarbezahlung erfordert abermals am Ende des Jahres eine Verzinsung mit $\frac{1}{v^3}$, welche der ursprüngliche Gläubiger dem ursprünglichen Schuldner zu entrichten hat. Setzt man diese Betrachtungen ins Unendliche fort, so erscheint als Baarwerth der nach Jahresfrist fälligen Forderung 1 die Summe

$$1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \cdots.$$

Die Summe dieser unendlichen geometrischen Reihe ist aber $\frac{v}{v+1}$, oder mit anderen Worten: ihr $v+1$ faches ist $v$. Leibniz beweist dieses durch Ausführung der Multiplikation. Die $v$ fache Reihe, sagt er, ist $v - 1 + \frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} + \cdots$, die einfache $1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \cdots$, und deren Summe ist $v$. Alsdann geht Leibniz weiter zur Untersuchung, welcher Baarwerth für die in zwei Jahren fällige Forderung 1 gezahlt werden müsse, und er findet die unendliche Reihe

$$1 - \frac{2}{v} + \frac{3}{v^2} - \frac{4}{v^3} + \cdots.$$

Ihre Entstehung ist diese. Die Baarzahlung 1 bringt innerhalb eines Jahres $\frac{1}{v}$ Zins, innerhalb des zweiten Jahres ebenso viel. Werden diese $\frac{2}{v}$ jetzt schon von der Zahlung zurückbehalten, so geben sie zur Hälfte Zins über 1 Jahr, zur anderen Hälfte Zins über 2 Jahre, was zusammen $\frac{3}{v^2}$ ausmacht u. s. w. Die Summe der erhaltenen Reihe leitet Leibniz nicht ab; er sagt einfach, sie sei $\left(\frac{v}{v+1}\right)^2$. Aehnlicherweise bemerkt er, bei dreijähriger Dauer bis zur Fälligkeit sei der Baarwerth $1 - \frac{3}{v} + \frac{6}{v^2} - \frac{10}{v^3} + \frac{15}{v^4} - \cdots$ mit den aufeinander folgenden Dreieckszahlen als Zählern der einzelnen Glieder und mit der Summe $\left(\frac{v}{v+1}\right)^3$ u. s. w. Man könne, fährt er fort, die Rabattirung auch immer von einem Jahre zu dem nächstvorhergehenden vornehmen. Die $\frac{v}{v+1}$, welche aus 1 entstanden, werden bei abermaliger Rabattirung zu $\left(\frac{v}{v+1}\right)^2$, diese bei nochmaliger zu $\left(\frac{v}{v+1}\right)^3$, und so liefere die Rabattirung von 1 über $a$ Jahre den Baarwerth $\left(\frac{v}{v+1}\right)^a$, welches Leibniz in der Form $\boxed{a}\frac{v}{v+1}$ drucken liess.

Gegen Schluss des Aufsatzes behielt Leibniz sich vor, eine Fortsetzung zu veröffentlichen, welche mit Leibrenten sich beschäftigen



sollte, er hat dieses Vorhaben aber nicht ausgeführt. Ein in Leibnizens Nachlasse aufgefundener kurzer Aufsatz[1]) war möglicherweise schon entworfen, als die Abhandlung von 1683 erschien, und wurde gleich so manchem Anderen zurückbehalten. Jedenfalls wäre eine Veröffentlichung nach Halley, also nach 1693, unmöglich gewesen, indem Leibniz noch den Standpunkt einnahm, die voraussichtliche Lebensdauer des Rentennehmers ohne jegliche Begründung nach Gutdünken anzunehmen und in Rechnung zu ziehen.

Die Untersuchungen über Zinseszinsrechnung finden einen Fortsetzer in einem Mathematiker, mit dessen Persönlichkeit das 86. Kapitel uns bekannt machen wird. Es war Jakob Bernoulli, der im Maihefte 1690 der A. E. die Frage nach augenblicklichem Zinseszins stellte[2]). Ist $a$ die Anfangsschuld, $b$ der bedungene Jahreszins, so wächst nach Bernoulli die Schuld innerhalb eines Jahres auf $a + b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3a^2} + \cdots$. Eine Ableitung dieser Formel gibt Bernoulli nicht; es ist indessen nicht schwer, sich von ihrer Richtigkeit zu überzeugen. Die Reihe ist nämlich in anderer Form geschrieben:

$$a\left[1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \cdots\right] = a \cdot e^{\frac{b}{a}} = a \cdot e^{\frac{p}{100}},$$

wenn $p$ den Jahreszinsfuss bedeutet, vermöge dessen $b = \frac{ap}{100}$, $\frac{b}{a} = \frac{p}{100}$ ist. Ist aber $p$ der Jahreszinsfuss, so ist $\frac{p}{n}$ der relative, oder mit Jakob Bernoulli zu reden, der proportionale Zinsfuss, der für die Dauer von $\frac{1}{n}$ Jahr in Rechnung zu ziehen ist. In einem ganzen Jahre wächst demnach $a$ zu

$$a \cdot \left(\frac{100 + \frac{p}{n}}{100}\right)^n = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n = a\left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100}}$$

und bei augenblicklicher Verzinsung, d. h. bei $n = \infty$, geht

$$\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}} \text{ in } e,$$

mithin das Endergebniss in $ae^{\frac{p}{100}}$ über.

Wieder in der Zeit vor 1700 wurde eine bedeutsame Erweiterung der Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen nach der Richtung vor-

[1]) Der Aufsatz *De reditibus ad vitam.* Vergl. Leibniz VII, 133—137. *Si creditor aliquis pecuniam suam foenori exponat ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae sorti annumeretur.* Der Aufsatz ist abgedruckt in Jac. Bernoulli Opera I, 427—431.

genommen, dass man sie auf Geistesthatsachen ausdehnte. John Craig[1]), ein Schotte, der etwa seit 1680 in Cambridge studirte, später an verschiedenen Orten als Geistlicher lebte und zuletzt in London sich niederliess, wo er 1731 starb, veröffentlichte 1699 ein Buch *Theologiae Christianae principia mathematica*, in welchem die Zuverlässigkeit menschlicher Uebertragung der Prüfung unterzogen wurde. Craig nahm an, die Glaubwürdigkeit nehme im Quadrate der Zeit ab. Daraus zog er die Folgerung, der Glaube an die Wahrheit der christlichen Religion werde im Jahre 3150 so herabgemindert sein, dass er als nicht mehr vorhanden gelten müsse. Der jüngste Tag werde aber prophezeitermassen eintreten, ehe aller Glaube erloschen sei, folglich sei das Weltende vor 3150 zu erwarten.

Mit der abnehmenden Glaubwürdigkeit menschlicher Zeugnisse beschäftigte sich auch ein 1699 anonym erschienener Aufsatz[2]): *A Calculation of the credibility of human testimony.*

## 85. Kapitel.

### Reihen. Mercator. Brouncker. Gregory. Newton.

In dem Leibnizischen Aufsatze über Zinseszinsrabattirung von 1683 kommt, wie wir (S. 54) bemerkt haben, die Summe der unendlichen geometrischen Reihe mit wechselnden Vorzeichen

$$1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \cdots = \frac{v}{v+1}$$

vor, welche bewiesen, nicht abgeleitet wird. Schon seit 14 Jahren waren damals Untersuchungen über unendliche Reihen als solche zum Drucke gelangt, war durch James Gregory (Bd. II, S. 718) der Kunstausdruck der Convergenz bekannt gegeben. Zahlreiche, hochbedeutsame Fortschritte auf der neuen Bahn sind zu verzeichnen, deren Darstellung wir uns zuzuwenden haben[3]).

Man eröffnet die Reihe der zu nennenden Namen wohl am richtigsten mit Nicolaus Mercator[4]). Der eigentliche Name war Kaufmann, sein Geburtsland Holstein. Von Kopenhagen, wo Mercator studirte, und wo er auch nach vollendeten Studien noch längere Zeit blieb, wandte er sich nach London. Dort gehörte er der Royal Society an, dort verfasste er unter anderen Schriften auch die *Logarithmotechnia*[1]) von 1668. Später wandte er sich nach Paris und wirkte bei der Anlage der Wasserkünste von Versailles mit. Er starb 1687 in Paris. Mercator hatte, gleich allen Zeitgenossen, welche irgend über mathematische Gelehrsamkeit verfügten, des Wallis *Arithmetica Infinitorum* von 1655 studirt. Er wusste, dass der Satz Giltigkeit besass, welchen wir (Bd. II, S. 904) in der erheblich späteren Form von $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ ausgesprochen haben. Aehnlicher Summirung waren auch Ausdrücke zugänglich, bei denen, wenn wir jene späte Schreibweise beibehalten, $\int_0^1 (x^{m_1} + x^{m_2} + \cdots + x^{m_\mu}) dx$ in Frage kam, oder, noch anders ausgedrückt, Wallis und seine unmittelbaren Schüler waren im Stande die Fläche zu quadriren, deren Begrenzung aus der Abscissenaxe, aus zwei Ordinaten und aus der Curve von der Gleichung

$$y = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \cdots + a_\mu x^{m_\mu}$$

bestand. Bei der gleichseitigen Hyperbel — das wusste man seit 1647 durch Gregorius a Sto. Vicentio (Bd. II, S. 896) — maass jene Fläche sich durch die Logarithmen, vorausgesetzt, dass eine Asymptote der Hyperbel als Abscissenaxe gewählt wurde. Aber die Hyperbelgleichung hatte in diesem Falle nicht die oben angegebene Gestalt, sie hiess vielmehr $xy = 1$, und deshalb misslang jeder Vereinigungsversuch der beiden Ergebnisse zu einem einzigen Satze.

Hier war der Punkt, wo Mercator einsetzte. Er veränderte die Hyperbelgleichung in $y = \frac{1}{1+a}$ und wagte es, die in dem Ausdrucke $\frac{1}{1+a}$ angedeutete Division nach den gewöhnlichen Regeln der Buchstabenrechnung auszuführen. Er setzte also

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots \text{ in infinitum.}$$

Für unsere heutigen Begriffe ist das ein Schritt von fast naiver Einfachheit, aber damals war er neu und von einer Tragweite, welche die Zeitgenossen kaum zu ermessen im Stande waren, so hoch sie auch Mercators Erfindung sofort schätzten.

Vermöge dieser Reihenentwicklung neuer Art war Mercator im Stande

[1]) Rouse Ball, *A History of the study of mathematics ad Cambridge*, pag. 77—78. [2]) P. T. XXI, 359—365. [3]) Vergl. insbesondere Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, 1889. Wir citiren dieses sehr zuverlässige Werk kurz als Reiff. [4]) *Nouvelle Biographie universelle* XXXV, 12—13.

[1]) Sie ist abgedruckt im I. Bande der *Scriptores logarithmici*, welche Francis Maseres in sechs Bänden (London, 1791—1807) herausgab.

$$\int_0^a \frac{da}{1+a} = \int_0^a (1 - a + a^2 - a^3 + \cdots) da = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots$$

mit $\int_0^a \frac{da}{1+a} = \log(1+a)$ zu verbinden und demnach die logarithmische Reihe zu erfinden.

Hat er sie erfunden? Hat er die Gleichung

$$\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots$$

wirklich angesetzt? Sie kommt in ihrer unmittelbaren Gestalt zwar nicht in der Logarithmotechnia vor, aber auf der letzten Seite dieser Schrift ist die *Inventio summae logarithmorum*, d. h. die abermalige Integration $\int_0^a \log(1+a) da$ vollzogen, und ihr Ergebniss

$$\int_0^a \log(1+a) da = \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^4}{3 \cdot 4} - \cdots$$

kann doch kaum in anderer Weise gefunden worden sein, als indem Mercator den Logarithmus durch seine Potenzreihe ersetzte, wie er es vorher mit dem Quotienten $\frac{1}{1+a}$ gemacht hatte.

Das gleiche Jahr 1668 sah noch drei andere Arbeiten in England gedruckt, welche die Reihenlehre förderten. Lord Brouncker (Bd. II, S. 765) legte der Royal Society am 13. April 1668 eine Abhandlung *The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of Rational Numbers*[1]) vor, welche die geometrische Herleitung der Reihe

$$\log 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

enthielt. Er verfuhr dabei wie folgt. Er zeichnete (Figur 9) das Quadrat $ABDE$ von der Seitenlänge 1. $AB$ soll ein Stück der einen Asymptote der gleichseitigen Hyperbel $EC$ sein, $AE$ und $BD$ sind der anderen Asymptote parallel. Ueberdies dient zur genauen Bestimmung der Hyperbel, dass sie durch den Eckpunkt $E$ des gegebenen Quadrates und durch die Mitte $C$ der Quadratseite $BD$

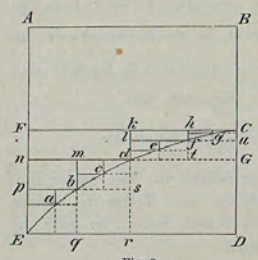

Fig. 9.

[1]) P. T. II, 645—649.



hindurchgehen soll. Die in der Figur auftretenden Rechtecke sind so gebildet, dass ihre Grundlinien durch fortgesetzte Halbirung der Quadratseite entstehen. So ist

$$Er = ps = dG = \frac{1}{2}, \quad Eq = bs = dt = fu = \frac{1}{4};$$

die Grundlinien der Rechtecke $ap$, $cm$, $el$ sind $\frac{1}{8}$ u. s. w. Brouncker behauptet nun, die in der Figur zu erkennenden Rechtecke besässen folgende Flächeninhalte:

$$dD = \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad br = \frac{1}{4 \cdot 5}, \quad fG = \frac{1}{6 \cdot 7}, \quad aq = \frac{1}{8 \cdot 9},$$

$$cs = \frac{1}{10 \cdot 11}, \quad et = \frac{1}{12 \cdot 13}, \quad gu = \frac{1}{14 \cdot 15}$$

u. s. w. Andererseits sei

$$CA = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad dF = \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad bn = \frac{1}{5 \cdot 6}, \quad fk = \frac{1}{7 \cdot 8},$$

$$ap = \frac{1}{9 \cdot 10}, \quad cm = \frac{1}{11 \cdot 12}, \quad el = \frac{1}{13 \cdot 14}, \quad gh = \frac{1}{15 \cdot 16}$$

u. s. w. Einen Beweis hinzuzufügen, erspart sich Brouncker. Er verweist nur auf Satz 87—95 der Arithmetica Infinitorum von Wallis und auf die Eigenschaft der Hyperbel, dass die um gleiche Abscissenunterschiede von einander abstehenden Ordinaten, sofern sie von der Hyperbel bis zum Durchschnitt mit der $AB$ gemessen werden, eine harmonische Reihe bilden, *are in an Harmonic series*. Sehen wir zu, ob Brounckers Behauptungen richtig sind.

Ist $xy = 1$ die Gleichung der auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogenen Hyperbel, und ist $E$ mit der Ordinate 1, $C$ mit der Ordinate $\frac{1}{2}$ auf der Hyperbel gelegen, so muss $E$ die Abscisse 1, $C$ die Abscisse 2 besitzen, d. h. der auf der Figur nicht sichtbare Coordinatenanfangspunkt $O$ muss auf der Verlängerung von $BA$ über $A$ hinaus liegen und von $A$ um $OA = 1$ entfernt sein. Die Abscisse von $b$ z. B. ist alsdann $1 + \frac{1}{4}$ weil $Eq = \frac{1}{4}$, und die Ordinate von $b$ muss $\frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ sein. Nun ergänzt $bq$ die Ordinate von $b$ zur Längeneinheit, ist also $\frac{1}{5}$, und das Rechteck $br$ von den Seiten $qr = \frac{1}{4}$, $bq = \frac{1}{5}$ besitzt den Flächenraum $\frac{1}{4 \cdot 5}$. Auf ganz ähnliche Weise lassen Brounckers übrige Flächenangaben sich bestätigen. So ist z. B. $dr = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, $rD = \frac{1}{2}$, Rechteck $dD = \frac{1}{2 \cdot 3}$ u. s. w.

Aber aus $dr = \frac{1}{3}$ folgt auch $dk = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$, und dieses Stück bildet mit $dn = \frac{1}{2}$ das Rechteck $dF = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \cdot 4}$. So erhält man die Summe der beiden Rechtecke

$$dD + dF = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ Rechteck } CA,$$

was auch geometrisch mittels

$$dD = rn, \quad rn + dF = rF = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} CA$$

einleuchtet. Auch hier finden ganz ähnliche Gleichungen mehrfach statt. Es ist $\frac{1}{2} dD = br + bn$, $\frac{1}{2} dF = fG + fk$, $\frac{1}{2} br = aq + ap$ u. s. w. Dabei ist aber beispielsweise $bn > fG$, mithin

$$\frac{1}{2} dD > br + fG \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7}.$$

Allgemeiner wäre der arithmetische Beweis, welcher freilich nicht im Geiste der damaligen Zeit lag: die als richtig vorausgesetzte Ungleichung $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ geht durch Wegmultipliciren mit den Nennern in $4n^2 + 8n + 3 > 4n^2 + 6n + 3$ oder in $n > 0$ über, gilt also für jedes positive $n$.

Damit ist aber die Wahrheit von Sätzen bewiesen, welche Brouncker abermals ohne jede Begründung ausspricht. Wie die Hälfte des Anfangsgliedes $\frac{1}{2 \cdot 3}$ grösser als die Summe der beiden folgenden Glieder $\frac{1}{4 \cdot 5}$ und $\frac{1}{6 \cdot 7}$ ist, so sei, behauptet Brouncker, die Hälfte jener beiden Glieder oder $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7}\right)$ grösser als die Summe der vier folgenden Glieder oder

$$\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{14 \cdot 15} \text{ u. s. w.}$$

Die nicht ausdrücklich hervorgehobene grosse Bedeutung dieser Sätze liegt darin, dass in ihnen der Beweis der Convergenz der unendlichen Reihe $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots$ enthalten ist. Addirt man die sämmtlichen Ungleichungen:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} > 2\left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7}\right),$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} > 2\left(\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{14 \cdot 15}\right),$$

$$\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{14 \cdot 15} > 2\left(\frac{1}{16 \cdot 17} + \frac{1}{18 \cdot 19} + \cdots + \frac{1}{30 \cdot 31}\right)$$

. . . . . .



und lässt auf beiden Seiten die übereinstimmenden Glieder weg, so folgt $\frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \cdots$, und daraus wieder

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \cdots.$$

Brouncker, wir wiederholen es, hebt diese Folgerung aus seinen Ungleichungen nicht besonders hervor, aber weshalb könnte er sie selbst abgeleitet und betont haben, wenn ihm ihre Verwerthung in dem von uns angedeuteten Sinne nicht mehr oder minder klar vorschwebte?

Brouncker vereinigte ferner die beiden Reihen

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} \cdots \quad \text{und} \quad \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots$$

unter Verschränkung der Glieder zu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} \cdots = 1.$$

Er fügt hinzu, die Summe bis zu dem Gliede $\frac{1}{a(a+1)}$ einschliesslich sei $\frac{a}{a+1}$, und $\frac{1}{a+1}$ sei die Summe der dann noch folgenden unendlich vielen Glieder.

Wie er dieses fand, sagt er wieder nicht. Vermuthlich hat er jedes Glied der Reihe in eine Differenz verwandelt, d. h. $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\cdots \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ gesetzt und so $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{a(a+1)}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$$

erhalten. Damit ergab sich zugleich $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots$ in infinitum $= 1$. Die Convergenz der Reihe $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots$ sowie die der Reihe $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$ zieht dann auch die Convergenz der Reihe $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$ nach sich, und die Kenntniss aller dieser Thatsachen wird man Brouncker kaum absprechen können.

Allerdings legte er ihnen zuverlässig nicht die Bedeutung bei, welche man heute mit ihnen verbindet. Dass eine Reihe vor der Benutzung auf ihre Convergenz zu prüfen sei, ist erst im XIX. Jahrh. Gemeingut der Wissenschaft geworden. Noch das XVIII. und um so mehr das XVII. Jahrh. mochten ab und zu Convergenzuntersuchungen ausführen, aber von ihrer Nothwendigkeit hatte man, eine

einzige Ausnahme, auf die wir gleich zurückkommen, vorbehalten, keine Ahnung. Es waren eben Untersuchungen über Reihen wie andere auch, interessant, wenn sie etwa den Werth einer Reihe näherungsweise kennen lehrten, aber ohne die Eigenschaft der Convergenz war nach dem stillschweigenden Einverständnisse sämmtlicher Mathematiker eine Reihe nicht minder beachtenswerth. Die einzige von uns berührte Ausnahme trat dann ein, wenn eine praktische Anwendung einer Reihe zur Auswerthung der ihr gleichen Funktion gemacht werden wollte. In diesem Falle drängte sich der Missstand, dass die Rechnung mittels divergenter Reihen das erwünschte Ergebniss verweigerte, von selbst auf und verlangte Abhilfe.

Als Beleg dafür können wir auf die zweite Arbeit aus dem Jahre 1668 verweisen, an welche (S. 58) gedacht wurde, auf einen Bericht von John Wallis[1]) über Mercators Logarithmotechnia in den P. T. vom 17. August 1668. Er ist von Mercators Reihe, welche $\log(1+A)$ von $A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \cdots$ abhängig macht, entzückt, aber man dürfe sich nicht verbergen, dass die Sache einen Haken habe. Es sei offenbar, dass bei $A > 1$ die späteren Potenzen höher in das Gebiet der ganzen Zahlen sich erstrecken, und dass sie deshalb keineswegs vernachlässigt werden dürfen[2]). Da, meint Wallis, könne man durch einen Kunstgriff sich helfen. Seine Ausdrucksweise ist nicht leicht verständlich, doch dürfte seine Meinung die folgende sein. Jede Zahl über 1 ist ein Bruch vom Zähler 1, dessen Nenner echtgebrochen ist, mithin als Unterschied von 1 und einem anderen echten Bruche dargestellt werden kann. So führt das zu logarithmirende $1 + A$ zu einem $\frac{1}{1-a}$ und der Logarithmus von $1 - a$ wird gewonnen, indem man die Divison $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots$ vollzieht und letztere Reihe integrirt. Man erhält $a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 \cdots$.

In dem gleichen Bande der P. T. ist in der Nummer vom 13. Juli 1668 ein gegen Huygens gerichteter Aufsatz von James Gregory abgedruckt[3]), und diesen Aufsatz erwähnt Gregory wieder in seinen *Exercitationes Geometricae* von 1668, deren Drucklegung somit später als Mitte Juli stattfand. Ging derselben auch der Bericht von Wallis vom 17. August vorher, den wir besprachen? War Gregory in der Lage ihn noch benutzen zu können? Das sind Fragen, auf welche wir keine Antwort wissen. Jedenfalls nennen wir eine *Appendicula*

[1]) P. T. II, 753—756. [2]) *Cum enim jam ponenda sit $A > 1$ manifestum est, posteriores ipsius potestates altius in Integrorum sedes penetraturas adeoque minime negligendas.* [3]) P. T. II, 732.



*ad veram Circuli et Hyperbolae Quadraturam* und *N. Mercatoris Quadratura Hyperboles geometrice demonstrata*, welche zusammen die 13 ersten Seiten des genannten nicht umfangreichen Buches Gregorys füllen, als die dritte englische auf unendliche Reihen sich beziehende Arbeit von 1668. In ihr ist geometrisch, und zwar so, dass die Abhängigkeit von Brounckers Aufsatze in hohem Grade wahrscheinlich gemacht ist, gelehrt, wie man die Maasszahlen gewisser Parallelogramme, welche in unendlicher Anzahl gewählt die Hyperbelfläche ausfüllen, zu finden im Stande sei. Auf diese Grundlage stützt sich alsdann folgender Satz[1]): Der Unterschied der Logarithmen der Zahlen $A$ und $B$ verhalte sich zum Unterschiede der Logarithmen der Zahlen $D$ und $E$ wie

$$\frac{N}{C} + \frac{N^3}{3C^3} + \frac{N^5}{5C^5} + \cdots \quad \text{zu} \quad \frac{O}{F} + \frac{O^3}{3F^3} + \frac{O^5}{5F^5} + \cdots,$$

wenn

$$C = \frac{A+B}{2},\ F = \frac{D+E}{2},\ N = C - A = \frac{B-A}{2},\ O = F - D = \frac{E-D}{2}.$$

Setzt man diese letzteren Werthe ein, so nimmt der Satz die Gestalt an

$$\log\frac{B}{A} : \log\frac{E}{D} = \left[\frac{B-A}{B+A} + \frac{1}{3}\left(\frac{B-A}{B+A}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{B-A}{B+A}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$: \left[\frac{E-D}{E+D} + \frac{1}{3}\left(\frac{E-D}{E+D}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{E-D}{E+D}\right)^5 + \cdots\right].$$

Werden nun für $B$ und $A$ zwei bekannte Zahlen, z. B. $B = 1001$, $A = 999$, $\frac{B}{A} = 1 + \frac{2}{999}$, $\frac{B-A}{B+A} = \frac{1}{1000}$ eingeführt und ist $\log\frac{B}{A}$ auf irgend eine Weise schon berechnet, so sei, sagt Gregory, der Unterschied $\log E - \log D$ zweier Logarithmen grosser Zahlen $D$ und $E$ mittels der angegeben Formel leicht zu finden. Setzt man $\frac{E}{D} = z$, mithin $\frac{E-D}{E+D} = \frac{z-1}{z+1}$, so ergibt sich aus Gregorys Formel die Proportionalität von

$$\log z \text{ mit } \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots,$$

aber diese Folgerung hat Gregory nicht gezogen.

Schon mehrere Jahre vor der Veröffentlichung dieser auf Reihen bezüglichen Untersuchungen waren ähnliche Arbeiten von einem in der Mitte der Zwanziger stehenden, also noch sehr jugendlichen Gelehrten unternommen worden, von Isaac Newton[2]). Haben wir früher

[1]) J. Gregory, *Exercitationes geometricae* pag. 13. [2]) Brewster, *The memoirs of Newton* (2. Auflage 1860). W. Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics.* Chapter XVI (1888). Cantor, Sir Isaac Newton (in der Zeitschrift „Nord und Süd". Januar und Februar 1881). F. Rosenberger, Isaac Newton und seine physikalischen Principien (1895).

(S. 29—33) uns in ganz ausnahmsweise umständlicher Erzählung mit Leibnizens Lebensschicksalen bis zu dessen 1716 erfolgtem Tode bekannt gemacht, und haben wir nicht vermeiden können, dabei die Geschichte der englischen Regentenfolge zum Gegenstand von Erörterungen zu machen, so haben wir gleich damals zum voraus (S. 29) die Pflicht übernommen, ein ähnliches Verfahren für Newton einzuschlagen, und diese Pflicht wollen wir jetzt erfüllen.

Isaac Newton (1643—1727) ist in Woolsthorpe bei Grantham in England geboren. Er kam als so schwächliches Kind zur Welt, dass Niemand ihm ein mehr als 84jähriges Leben zugetraut haben würde. Von früher Jugend an legte Newton Neigung zu mechanischen Künsteleien an den Tag, zu welcher sich eine solche Liebe zu mathematischen Studien gesellte, dass die widerstrebende Mutter sich genöthigt sah, den Sohn, von dem sie gewünscht hätte, er möge als Landwirth das väterliche Erbe zur Geltung bringen, den Wissenschaften sich widmen zu lassen. Im Jahre 1660 bezog Newton das Trinity-College in Cambridge, in dem gleichen Jahre also, in welchem das Königthum in England wieder hergestellt wurde. Von 1663 an war Isaac Barrow Professor der Mathematik an der gleichen Anstalt (S. 11), und dieser Mann übte auf die wissenschaftliche Ausbildung Newtons, übte nicht minder auf seine politische und religiöse Gesinnung einen fest bestimmenden Einfluss. Unter Barrows Einfluss beschäftigte sich Newton, was wir leider nur im Vorübergehen erwähnen dürfen, trotzdem uns dadurch die Gelegenheit entgeht, seine grossartigsten wissenschaftlichen Entdeckungen rühmen zu dürfen, mit Optik. Barrows Nachfolger wurde er 1669 in der Cambridger Professur. Gleich Barrow war Newton von strengst conservativem und kirchlichem Geiste, so dass seine felsenfeste Königstreue nur dann in Erschütterung gerathen konnte, wenn zwischen ihr und der noch festeren Treue gegen die Kirche eine Kluft sich öffnete.

Jakob II. sorgte dafür, dass auch die eingefleischtesten Tories, wie der englische Parteiname lautete, nicht ferner für ihn sich erklären konnten, und als 1689 die sogenannte Convention zusammentrat, jene parlamentarische Versammlung, welche Wilhelm III. zum Könige von England ernannte, war Newton als Vertreter der Universität Cambridge Mitglied der Versammlung.

Das Wort hat Newton allerdings nie ergriffen, weder in der Convention noch als er später einmal dem Parlamente angehörte. Oeffentliche Aeusserungen, und gar solche, welche zu öffentlicher Gegenrede führen und ihn so nöthigen konnten, selbst aus dem Stegreife zu antworten, waren niemals Newtons Sache. Ein Grundzug seines Charakters war vielmehr die Scheu vor öffentlichem



Kundgeben seiner Meinung, was sich nicht allein auf die Politik bezog, sondern auch das Hervortreten mit wissenschaftlichen Entdeckungen hemmte.

Als 1690 ein regelmässig gewähltes Parlament an die Stelle der Convention trat, bewarb sich Newton nicht um Wiederwahl, er wirkte vielmehr für die Ernennung von Sir Robert Sawyer, einem eingefleischten Tory, und so wird man nicht fehlgehen, wenn man annimmt, Newton habe, insbesondere seit dem Tode von Königin Maria 1694, durch welchen auch der letzte Rest legitimistischen Anstriches, der der Regierung Wilhelm III. anhaftete, verloren ging, zu der toristischen Oppositionspartei gehört.

Sie setzte da ein, wo die Unzufriedenheit der Bevölkerung ohnedies schon rege war, bei der Münzfrage. England besass seit den Tagen der Königin Elisabeth eine Doppelwährung. Neben den Goldmünzen waren, rechtlich denselben gleichgestellt, Silbermünzen im Betrage von fünf und ein halb Millionen Pfund Sterling im Umlauf. Aber dieses Silbergeld war nachgerade so abgenutzt, abgefeilt und beschnitten, dass der Wertverlust auf ein und ein fünftel Million Pfund veranschlagt wurde. Die Thronrede von 1695 forderte das Parlament auf, Heilmittel gegen den mehr als je unhaltbaren Zustand vorzuschlagen, da es so weit gekommen war, dass die Bank von Amsterdam, eine damals allgewaltige Geldmacht, englisches Silbergeld überhaupt nicht mehr annahm. Das Oberhaus, das zuerst mit der Angelegenheit sich beschäftigte, verlangte, von einem in Gemeinschaft mit dem Unterhause zu bestimmenden Tage an solle beschnittene Münze nicht mehr in Zahlung genommen werden. Das wäre freilich eine ebenso einfache als einschneidende Lösung der schwebenden Frage gewesen, aber damit wäre der ganze Verlust auf die Schultern der Besitzer von Silbermünzen gewälzt worden, vorwiegend auf diejenigen, welche nur Silber besassen, auf die dem Vermögen nach Schwächeren, und es entstand eine ungeheure Aufregung. Unter deren Druck entschied sich das in seiner grossen Mehrheit whigistisch zusammengesetzte Unterhaus dahin, dass die öffentlichen Kassen gehalten sein sollten, die beschnittenen Münzen einzuziehen und gegen vollwichtige umzutauschen.

Kanzler der Schatzkammer war damals Karl Montague. Er war ein Führer der Whigs, aber er war in Cambridge einer der wenigen Schüler Newtons gewesen, er soll mit einer Nichte Newtons insgeheim vermählt gewesen sein. Diese Umstände vereinigt brachten ihn wohl dazu, Newton die unter den gegebenen Verhältnissen keineswegs untergeordnete Stellung eines Aufsehers der Münze anzubieten, wenn nicht als weiterer Beweggrund der Wunsch wirksam war, einen

bekannten Tory an der Ausführung jenes Münzbeschlusses in so hohem Grade zu betheiligen, dass der Opposition dadurch Stillschweigen auferlegt wurde.

Newton trat 1696 in die neue Stellung ein, und damit war er für die mathematische Wissenschaft so gut wie verloren. Er behielt zwar seine Professur in Cambridge dem Namen nach bis 1701 bei, auch nachdem er 1699 zum Münzmeister befördert worden war, aber gelehrt hat er nicht mehr, und ebenso wenig sind wichtigere neue mathematische Untersuchungen von ihm aus einer Zeit nach 1696 bekannt, wenn es auch nicht an Veröffentlichungen fehlt. Möglicherweise hängt dieses Nachlassen seiner Thätigkeit mit dem Uebermaasse vom Amtsgeschäften zusammen, möglicherweise ist es die mittelbare Folge einer mit einer gewissen geistigen Störung verbundenen Krankheit von 1693.

Newtons politische Thätigkeit war dagegen nicht abgeschlossen. Er gehörte als Abgeordneter der Universität Cambridge dem Parlamente an, welches am 30. December 1701 zusammentrat, und während dessen Dauer Wilhelm III. starb, Königin Anna den Thron bestieg. Sie entliess das whigistische Ministerium und bildete ein solches aus Tories entsprechend der Mehrheit der Mitglieder des Unterhauses. Wie diese Mehrheit wechselten unter Königin Anna auch die Ministerien in bunter Folge, und immer zählte Newton, ob siegreich bei den Wahlen, oder unterliegend, zu den Tories äusserster Richtung, deren Stellung zu einzelnen bestimmten Fragen allerdings so häufig sich änderte, dass es schwer hält, ohne eine Ausführlichkeit, die uns nicht gestattet ist, sich zurecht zu finden. Die *Succession-Act* von 1701 (S. 32) war hauptsächlich toristischen Ursprunges. Die männliche Erbfolge schien in der kräftigen hannoverischen Linie auf lange gesichert, und ein gesichertes Königthum entsprach den Gesinnungen der Tories. Später änderte sich das Verhältniss. Unter Königin Annas Regierung wüthete ein langdauernder Krieg zwischen England und Frankreich. Die Whigs bestanden auf Fortsetzung des Krieges, die Tories wünschten Herstellung des Friedens. Kurfürst Georg Ludwig von Hannover aber hatte 1707 ein Commando am Rhein geführt, hatte in dieser Stellung selbst am Kriege theilgenommen, hatte laut und bestimmt gegen die von den Tories für annehmbar erklärten Friedensbedingungen sich ausgesprochen. Diese Handlungen machten den Kurfürsten den Whigs eben so genehm, als sie ihm die Tories entfremdeten. Man sagte sogar, und es wurde geglaubt, die Tories im Ministerium, gestützt auf ihre Gesinnungsgenossen im Parlamente, beabsichtigten die Succession-Act wieder aufzuheben und Jakob III. zum Thronfolger zu erklären.



Die Whigs verlangten nunmehr 1713 die Einberufung des Kurfürsten zum Parlamente, in dessen Oberhaus ihm als Herzog von Cambridge ein Sitz eingeräumt worden war, und die Tories widerstrebten diesem Verlangen, während Leibniz den Kurfürsten zu bestimmen suchte, nach London sich zu begeben, wo man die Armee bereits für die Zwecke des Prätendenten zu desorganisiren beginne.

Man begreift jetzt, wie unter solchen Verhältnissen ein aus der Politik ganz fremden Gründen entstandener Streit zwischen Newton, dem fanatischen Tory, und Leibniz, dem Berather des Thronkandidaten der Whigs, sich persönlich zuspitzen konnte, wenn nicht musste. Man begreift jetzt die Worte von Johann Bernoulli in einem unter dem 29. Juli 1713 an Leibniz gerichteten Briefe[1]): „Sie theilen das Loos Ihres Fürsten, welchen unbillig denkende Engländer in gleicher Weise von der Thronfolge ausschliessen möchten, wie Sie selbst von dem Besitze der Differentialrechnung.“ Man begreift Leibnizens Antwort[2]) vom 19. August, es sei in der That so; ein befreundeter Engländer habe ihm geschrieben, in diesem Falle seien nicht etwa Mathematiker und Mitglieder der Royal Society gegen ein anderes Mitglied aufgetreten, sondern Tories gegen Whigs. Man begreift, dass solche Misshelligkeiten um so weniger ausgeglichen werden konnten, als es (S. 33) Leibniz verwehrt war, sich 1714 persönlich nach London zu begeben,

Kehren wir zu Newtons Privatleben zurück. Am 30. November 1703 traf ihn die Wahl zum Vorsitzenden der Royal Society, eine Wahl, welche sich dann alljährlich wiederholte. Im April 1705 wurde er von der Königin Anna in den Ritterstand erhoben und Sir Isaac Newton war von nun an sein Name. Sein Tod erfolgte erst 1727.

Wir haben die Lebensgeschichte Newtons hiermit so genau angegeben, als es für unsere späteren Zwecke erforderlich ist. Die mathematischen Leistungen des grossen Mannes müssen sich je nach ihrem Inhalte da und dort einreihen. Gegenwärtig haben wir es mit Untersuchungen über Reihen zu thun, welche zugleich der Entstehungszeit nach die ältesten mathematischen Ergebnisse sind, zu welchen Newton gelangte. In einem Briefe an Oldenburg[3]) vom 24. October 1676 sagt wenigstens Newton, er habe sich mit jenen Dingen beschäftigt, als die Pest in Cambridge ausbrach und ihn nöthigte von

[1]) Leibniz III, 915 lin. 27—30. [2]) Ebenda 919 lin. 29—33. [3]) *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota etc. ou Correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVII. Siècle relative à l'analyse supérieure* publiée par J. B. Biot et F. Lefort (Paris, 1856) pag. 125 lin. 8—11. Diese neueste und zuverlässigste Ausgabe citiren wir einfach als *Commerc. epistol.*

dort die Flucht zu ergreifen, *eo tempore pestis ingruens coegit me hinc fugere*, und ein späterer Zusatz bestimmt jene Zeit auf die Jahre 1665 und 1666. Jedenfalls wurde die Abhandlung *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* schon 1669 Barrow vorgelegt und von diesem im Juli desselben Jahres 1669 an Collins zur Mittheilung an Lord Brouncker geschickt[1]). Dieser Abhandlung war mithin damals eine nicht gerade vertrauliche Verbreitung zu Theil geworden, und soweit sie Erfinderrechte begründet, muss sie als 1669 bekannt gemacht gelten, wenn der Druck auch erst im XVIII. Jahrh. erfolgte. Collins nahm 1669 eine Abschrift[2]), welche, wie spätere Vergleichung mit dem Originale gezeigt hat, eine durchaus sorgfältige und genaue war. Aber eine andere Massregel ergriff weder Collins noch Brouncker, so leicht sie ihnen gefallen wäre. Keiner von beiden vermittelte einen Abdruck der Newtonschen Abhandlung in den P. T., keiner von beiden liess den Hauptinhalt wenigstens in die geschriebenen Protokolle der Royal Society aufnehmen. Aber dachte man damals überhaupt an derartige Sicherung eines geistigen Eigenthums? Allerdings. Als im Jahr 1664 Huygens mit R. Moray gemeinschaftlich sich um die Belohnung ihres Verfahrens, die geographische Länge mit Hilfe von Pendeluhren zu bestimmen, bewerben wollten und Huygens ängstlich war, irgend ein Unberechtigter möchte ihnen zuvorkommen, beruhigte ihn Moray, indem er ihm am 5. December von London aus schrieb[3]), er habe Sorge dafür getragen, dass von ihrem Verfahren in den Protokollen der Royal Society gesprochen sei; ein solcher Eintrag habe seinesgleichen nicht, um Erfinderrechte zu sichern. Man war also in den Kreisen der Mitglieder der Royal Society durchaus mit der Wichtigkeit von Protokolleinträgen bekannt, welche das Datum einer Erfindung feststellten, ohne doch die Erfindung selbst der Oeffentlichkeit preiszugeben, sofern man dieses aus einem oder dem anderen Grunde nicht wünschte, und wenn Collins, wenn Brouncker es unterliessen, für Newton einen derartigen Schritt zu thun, so gibt es doch wohl keinen anderen Erklärungsgrund dafür als den, dass beide damals, als sie 1669 die Abhandlung erhielten, nicht erkannten, dass deren Inhalt verdiene, besonders gesichert zu werden. Wir beabsichtigen hiermit keinen besonderen Vorwurf gegen beide zu erheben, sondern nur festzustellen, wie Mathematiker, die man keinen-

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 53—54. [2]) Ebenda pag. 54—75. Ein Abdruck des Originals wurde 1744 durch Castillion in den *Opuscula Newtonis* I, 3—28 veranstaltet. [3]) *Oeuvres complètes de Christian Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences* V, 157. Wir citiren diese Ausgabe künftig als Huygens, *Oeuvres*.



falls als Feinde Newtons bezeichnen kann, seine Erstlingsarbeit betrachteten.

Und doch bildete einen wesentlichen Bestandtheil der *Analysis per aequationes*, wie wir den Titel der Abhandlung künftig abkürzen, die Binomialreihe, welcher man 1727 bei Newtons Tode unter freilich veränderten Umständen eine solche Wichtigkeit beigelegt haben soll, dass man sie aus allen anderen Leistungen des Verstorbenen auswählte, um als Inschrift auf seinen Grabstein in der Westminsterabtei eingemeisselt zu werden. So erzählt wenigstens ein Schriftsteller, von welchem im 93. Kapitel die Rede sein wird, Edmund Stone, in seinem ebendort zu erwähnenden Werke *New mathematical dictionary* unter dem Worte *Binomial Root*. Spätere Schriftsteller weichen allerdings von diesem Berichte ab. Brewster spricht in seiner Biographie Newton's nur von einer eingemeisselten convergenten Reihe. De Morgan stellte 1840 die ganze Behauptung in Abrede. H. Cajori[1]) hat 1894 den Grabstein neuerdings untersucht, aber nur die durch Verwitterung verursachte Unlesbarkeit der Inschrift feststellen können.

Es ist richtig, die Binomialreihe war 1669 nicht von befremdender Neuheit. Für den Fall eines positiven ganzzahligen Exponenten, der die Binomialreihe zu einer endlichen macht, welche nach einer den Exponenten um die Einheit übersteigenden Gliederzahl von selbst abbricht, war die Entwicklung seit mehr als einem Jahrhundert bekannt. Newtons Leistung bestand in der Ausdehnung der Reihe auf den Fall solcher Exponenten, welche die Eigenschaft positiver Ganzzahligkeit nicht besassen, und er vollzog sie durch ein Wallis nachgebildetes Interpolationsverfahren (Bd. II, S. 901).

Newton hat dasselbe in dem (S. 67) erwähnten an Oldenburgs Adresse gerichteten, eigentlich aber zur Vorzeigung an Leibniz bestimmten Briefe vom 24. October 1676 auseinandergesetzt[2]). Wallis war, wie wir in Erinnerung bringen, die Quadratur von Curven von der Gleichung $y = (1 - x^2)^m$ gelungen, wenn $m$ die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w. besass. Jene Quadraturen waren alsdann der Reihe nach:

$$x,\ x - \frac{x^3}{3},\ x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,\ x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \text{ u. s. w.}$$

Newton suchte nach dem Gesetze dieser Entwicklung. Als erstes Glied erschien immer $x$, als zweites $-\frac{x^3}{3}$ vervielfacht mit der Zahl

[1]) F. Cajori, Was the binomial theorem engraven on Newton's monument? (New-York, Americ. mathem. soc. $1_2$, 1894, 52—54.) [2]) *Commerc. epistol.* pag. 122 flgg.

$m$, also $-\frac{0}{3}x^3$, $-\frac{1}{3}x^3$, $-\frac{2}{3}x^3$, $-\frac{3}{3}x^3$ u. s. w. Die ferneren Glieder ergaben sich nicht ganz so einfach. Die Exponenten der Potenzen von $x$ und die ihnen gleichen Nenner der Zahlencoefficienten dieser Potenzen wuchsen zwar in arithmetischer Reihe der ungraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. Die Zähler der Coefficienten ergaben sich als die aufeinander folgenden Potenzen der Zahl 11, nämlich

$$11^1 = 11, \quad 11^2 = 121, \quad 11^3 = 1331, \quad 11^4 = 14641 \text{ u. s. w.},$$

sofern die einzelnen Ziffern jener Zahlen getrennt als Zähler betrachtet werden, also 1, 1, dann 1, 2, 1, ferner 1, 3, 3, 1, ebenso 1, 4, 6, 4, 1 u. s. w. Aber das war noch kein Bildungsgesetz. Als solches erkannte Newton, dass wenn 1 und $m$ die beiden ersten Zähler waren, die folgenden sich aus ihnen durch fortgesetzte Multiplikation mit $\frac{m-1}{2}$, mit $\frac{m-2}{3}$, mit $\frac{m-3}{4}$ u. s. w. ergeben, wodurch das Abbrechen der Reihe, sobald durch ganzzahlig positive Wahl von $m$ ein Faktor 0 auftrat, sich von selbst erklärte. Diese Bemerkung war ebenso neu wie das multiplikative Entstehen der Binomialcoefficienten, welche man bisher seit Michael Stifel (Bd. II, S. 433—434) stets additiv nach dem Gesetze $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ erhalten hatte. Wenn Pascal (Bd. II, S. 782) sich die figurirten Zahlen mittels Multiplicationen verschaffte, so hat er sie doch nicht als Binomialcoefficienten bezeichnet, obwohl wir gern zugestehen, dass der Schritt von dem Einen zu dem Anderen ein sehr kleiner war. Newton ging nun den oben als Interpolation bezeichneten kühnen Schritt weiter; er meinte das von ihm gefundene Gesetz auch dann festhalten zu dürfen, wenn $m$ keine positive ganze Zahl sei.

Bei $m = \frac{1}{2}$ entstanden ihm so die Coefficienten

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}, \quad \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-1}{2}}{5} = -\frac{1}{40}, \quad \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-2}{3}}{7} = \frac{1}{112} \text{ u. s. w.},$$

und da die Vorzeichen ausserdem wechseln mussten, so entstand ihm für die Fläche des Kreisabschnittes

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 + \cdots.$$

Newton kam weiter auf den Gedanken, auch andere Reihen in ähnlicher Weise zu interpoliren. Die Entwicklungen von $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$, von $(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$, von $(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$ u. s. w. gaben Reihen, deren Coeffi-



cienten jene vorerwähnten Zähler waren: 1, dann 1, 1, ferner 1, 2, 1 u. s. w. Die Interpolation führte zu

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots.$$

Aber jetzt erhob sich der Zweifel, ob die eigentlich ganz willkürliche Interpolation sich rechtfertigen lasse? Newton vervielfachte die Reihe $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$ mit sich selbst und sah als Ergebniss $1 - x^2$ erscheinen. Er zog als weitere Sicherung des Ergebnisses aus $1 - x^2$ die Quadratwurzel nach ähnlichem Verfahren wie es gehandhabt wird, wenn man eine angenäherte Quadratwurzel mit Hilfe von Decimalbrüchen berechnen will, und er fand wieder

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots.$$

Als ich diesen Einblick gewonnen, schreibt Newton[1]), liess ich von Reheninterpolationen ab und bediente mich jener Operationen als einer naturgemässeren Grundlage. Auch die Reihenentwicklung durch Division blieb mir nicht verborgen, eine weit leichtere Sache.

An einer etwas späteren Stelle des Briefes setzt Newton dann hinzu, er habe, während er die genannten Untersuchungen führte, durch Barrow Kenntniss von Mercators eben erschienener Logarithmotechnia erhalten. Da habe er um die begonnene Arbeit sich wenig mehr gekümmert, denn er habe vermuthet, Mercator werde die Wurzelausziehung grade so gut kennen wie die Division, oder es werden wenigstens, nachdem das Divisionsverfahren einmal enthüllt sei, Andere das Uebrige auffinden, bevor er ein zu schriftstellerischer Thätigkeit reifes Alter erreicht haben werde[2]).

So der Brief vom 24. October 1676. Newton hat in demselben den Vorhang weggezogen, hat einen vollen Einblick in seine geistige Werkstätte eröffnet, wie er nicht lehrreicher, nicht fesselnder geboten werden kann. Hätte er in der Analysis per aequationes gleiche Offenheit walten lassen, so ist kaum zu zweifeln, dass Collins und Brouncker sie anders gewürdigt haben würden, als es der Fall war, aber Newton liess sich vielleicht aus schriftstellerischer Ungewandtheit den Vortheil einer spannenden Darstellung entgehen. Er schrieb zwar die Abhandlung und liess nicht, wie in dem Briefe vom October 1676 steht, die ganze Arbeit mehr oder weniger liegen, aber er be-

[1]) *His perspectis neglexi penitus interpolationem serierum, et has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Divisionem, res utique facilior.* [2]) *prius quam ego aetatis essem maturae ad scribendum.*

diente sich in ihr sofort derjenigen Mittel zur Reihenentwicklung, auf welche er erst zuletzt verfallen war, der Division und der Wurzelausziehung. Bei der Division machte er die Bemerkung, man könne mit gleichem Rechte

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \text{ und } \frac{1}{x^2+1} = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - \cdots$$

setzen. Die erstere Entwicklung sei vorzunehmen, wenn $x$ hinlänglich klein, die zweite, wenn $x$ hinlänglich gross vorausgesetzt werde[1]). Als Beispiele der Wurzelausziehung dienen

$$\sqrt{a^2+x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \cdots$$

und

$$\sqrt{a^2-x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \cdots.$$

Auch eine Berechnung von $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$ wird vorgenommen, und zwar so, dass jede der beiden Quadratwurzeln für sich als eine unendliche Reihe entwickelt und dann der Quotient beider Reihen wieder als Reihe gesucht wird. Das allgemeine Abhängigkeitsgesetz eines Binomialcoeficienten von dem unmittelbar vorhergehenden fehlt in der Abhandlung, wiewohl Newton dem Briefe zufolge es seit 1666 kannte.

Im weiteren Verlaufe der Analysis per aequationes, den vollständig zu schildern hier noch nicht der richtige Ort ist, ist auch von der Umkehrung der Reihen die Rede, d. h. von der Aufgabe aus $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ die Darstellung von $x$ durch eine nach Potenzen von $z$ fortlaufende Reihe zu ermitteln[2]). Zunächst soll $\frac{1}{5}x^5$ das letzte in Rechnung gezogene Reihenglied sein, also die Gleichung

$$\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$$

stattfinden, aus welcher, wenn die höheren Potenzen von $x$ ausser Acht bleiben, wegen $x - z = 0$, der Werth $x = z$ folgt. Newton ergänzt ihn zu $x = z + p$ und setzt diesen Werth in die einzelnen Glieder der angegebenen Gleichung, die er allerdings nicht mit für alle Glieder gleicher Genauigkeit sich verschafft. Er setzt nämlich

$$\frac{1}{5}x^5 = \frac{1}{5}z^5, \quad -\frac{1}{4}x^4 = -\frac{1}{4}z^4 - z^3p, \quad \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2,$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2, \quad x = z + p, \quad -z = -z$$

[1]) *Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 20—21.



und durch Zusammenfassung

$$0 = \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - p[z^3 - z^2 + z - 1] + p^2\left(z - \frac{1}{2}\right).$$

Wie er vorher schon manche Glieder bei Seite liess, so entfernt er jetzt abermals alle Glieder, welche in Bezug auf $z$ den zweiten, in Bezug auf $p$ den ersten Grad überschreiten oder $p$ und $z$ enthalten. Er behält also nur $0 = -\frac{1}{2}z^2 + p$, woraus $p = \frac{1}{2}z^2$ folgt und unter Benutzung einer zweiten Ergänzug $p = \frac{1}{2}z^2 + q$. Um $q$ zu finden, setzt Newton den angenommenen Werth von $p$ in die zwischen $z$ und $p$ gegebene Gleichung, welche ihm die Gestalt annimmt:

$$0 = \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^2$$
$$- q(z^3 - z^2 + z - 1) + \left(\frac{1}{4}z^4 + z^2q + q^2\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)$$

oder auch:

$$0 = -\frac{1}{20}z^5 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{6}z^3 + q\left(\frac{1}{2}z^2 - z + 1\right) + q^2\left(z - \frac{1}{2}\right).$$

Nunmehr wird das Glied mit $q^2$ vernachlässigt und aus der übrig bleibenden Gleichung die Folgerung gezogen

$$q = \frac{\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5}{1 - z + \frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5.$$

Somit gewinnt er schliesslich

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots$$

und dabei beruhigt er sich. So ungründlich Newtons Verfahren ist und das Ergebniss, man möchte sagen, durch einen glücklichen Instinkt ermittelt, so überraschend richtig ist die gewonnene Reihe. Die Annahme $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ entspricht ja $z = \log(1 + x)$, und daraus folgt

$$e^z = 1 + x, \; x = -1 + e^z = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots$$

Newton hat also hier im Vorbeigehen die Exponentialreihe entdeckt.

Wenn wir sagten, Newton habe sich bei der Entwicklung beruhigt, nachdem als letztes Reihenglied $\frac{1}{120}z^5$ aufgefunden war, so kam er doch nur ganz wenig später unter der Ueberschrift *De Serie*

*progressionum continuanda*[1]), d. h. über die Fortsetzung der Reihen, auf das eigentliche Bildungsgesetz zurück. Hier sei, sagte er, im Vorbeigehen angemerkt, dass wenn 5 bis 6 Glieder jener Entwicklungen bekannt sind[2]), man dieselben meistens beliebig weiterführen kann. Als Gesetz von $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots$ nennt er dann die fortwährende Division des jedesmal vorhergehenden Zahlencoefficienten durch 4, 5, 6 u. s. w.

Um $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \cdots$ fortzusetzen, müsse man die Zahlencoefficienten durch $6 \times 7$, durch $8 \times 9$ u. s. w. dividiren. Bei $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \cdots$ seien die Divisoren $5 \times 6$, $7 \times 8$ u. s. w. Die Reihe

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

bilde die folgenden Zahlencoefficienten durch Vervielfachung mit $\frac{7 \times 7}{8 \times 9}$, mit $\frac{9 \times 9}{10 \times 11}$ u. s. w. Ein Beweis dieser Bildungsgesetze ist nicht gegeben, die einfache Induction muss als solcher dienen. Dagegen weiss Newton, dass der Werth der drei letztgenannten Reihen $\sin z$, $\cos z$, $\arcsin z$ ist.

Auch über Reihenconvergenz äussert sich Newton[3]). Es entgeht ihm nicht, dass bei der Umkehrung von Reihen es nothwendig sei zu zeigen, wie die Ergänzungsgrössen $p, q, r \ldots$, unter deren fortgesetzter Annahme die Entwicklung vor sich geht, schliesslich kleiner als jede gegebene Grösse werden[4]). Er bedient sich zu diesem Zwecke der Reihe $x + x^2 + x^3 + \cdots$, welche die Eigenschaft besitzt, dass bei $x = \frac{1}{2}$ jedes Glied derselben den gleichen Werth besitzt wie die Summe aller ihm nachfolgenden Glieder. Bei $x < \frac{1}{2}$ ist jedes Glied mehr als die Summe der folgenden Glieder. Allerdings heisst bei Newton die Voraussetzung umgekehrt $x > \frac{1}{2}$[5]), aber das ist ein Schreibfehler. Setzt man nämlich $x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots = R = \frac{x^{k+1}}{1-x}$, so ist ersichtlich $x^k > R$ wenn $x^k + R > 2R$, oder, wegen

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 22—23. [2]) *quinque vel sex terminis istarum radicum cognitis.* [3]) *Opuscula Newtoni* I, 27—28: *Demonstratio resolutionis aequationum affectarum.* [4]) *Tandem evadet minor quavis data quantitate.* [5]) *si x superet* $\frac{1}{2}$.



$$x^k + R = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots = \frac{x^k}{1-x},$$

wenn $\frac{x^k}{1-x} > \frac{2x^{k+1}}{1-x}$, d. h. wenn $x < \frac{1}{2}$. Die bei anderen Reihen zu den einzelnen Gliedern hinzutretenden Zahlencoefficienten, sagt Newton weiter[1]), nehmen meistens unaufhörlich ab, und nehmen sie ja einmal zu, so ist nur erforderlich, dass $x$ noch kleiner gewählt werde. In diesem Ausdrucke noch kleiner, *adhuc minor*, finden wir den Beleg dafür, dass das vorhin bemängelte $x > \frac{1}{2}$ nur Schreibfehler, nicht Denkfehler war.

## 86. Kapitel.

### Reihen. Leibniz. Halley. De Moivre. Jakob Bernoulli. Kettenbrüche.

Die Newtonsche Analysis per aequationes gelangte, wie wir uns erinnern (S. 68), 1669 in die Hände von Collins, welcher durch Barrow gradezu aufgefordert war, die Weiterverbreitung zu befördern. Waren wir daher in der Lage, Collins und ausser ihm Brouncker dafür verantwortlich zu machen, dass sie die Abhandlung nicht so ihrem Werthe nach würdigten, dass sie einen Abdruck in den P. T. oder eine Inhaltsangabe in den Protokollen der Royal Society vermittelten, so wurde doch wenigstens Gregory durch Collins mit den Reihen jener Abhandlung bekannt gemacht. Ein Brief von Collins an Gregory[2]) vom 24. December 1670 theilte diesem die Reihen für den Sinus, den Cosinus, den Arcussinus als Erfindungen Newtons mit. Gregorys Antwort[3]) ist vom 15. Februar 1671. Er meine, so schreibt Gregory, Newtons Methode einigermassen[4]) zu kennen, und weil Collins ihm einige Reihen gegeben habe, für welche er ihm dankbar sei, so wolle er Aehnliches zurückgeben.

Wenn $r$ den Halbmesser eines Kreises, $a$ einen Bogen, $t$ dessen Tangente, $s$ dessen Sekante bedeute, so sei

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \cdots,$$

$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \cdots,$$

$$s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7} + \cdots.$$

[1]) *Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.* [2]) *Commerc. epistol.* pag. 78—79. [3]) Ebenda pag. 79—80. [4]) *aliqua ex parte.*

Eine Ableitung der Reihen ist auch andeutungsweise nicht vorhanden. Wird die Tangente dem Halbmesser gleich, $t = r$, was bei dem Bogen eintritt, der den Centriwinkel von $45^0$ bespannt, wo also $a = \frac{r\pi}{4}$ ist, so geht die erste Reihe von Gregory über in

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Eben diese Entwicklung für $\frac{\pi}{4}$ fand einige Jahre nachher auch Leibniz und theilte sie Freunden mit. Da man in späterer Zeit Leibniz wegen dieser Reihe des geistigen Diebstahls an Gregory beschuldigt hat, so ist, um Grund oder Ungrund jener Anklage zu erkennen, die Sache gleich hier genau zu untersuchen.

Zu seinem ersten Londoner Aufenthalte von Januar bis März 1673 brachte Leibniz an gedruckten mathematischen Arbeiten nur die *Dissertatio de arte combinatoria* mit. Der Ausführung nahe waren seine Gedanken über eine allgemeine Charakteristik, über eine anzufertigende Rechenmaschine. Andere Pläne mögen nur als Geistesblitze in Gesprächen aufgetaucht sein, aber das Vorhandene, das nur im Keime sich Zeigende genügte doch, wie wir wissen (S. 30), Leibnizens einstimmige Aufnahme in die Royal Society zu bewirken. Mit Collins traf Leibniz, wie wir gleichfalls wissen, nicht zusammen. Dagegen führte er am 2. Februar 1673 ein Gespräch mit Pell, welches mittelbar auf Reihen sich bezog, und von welchem deshalb hier die Rede sein muss. Man kennt dessen Inhalt aus einem am 3. Februar, also gleich am folgenden Tage, von Leibniz an Oldenburg gerichteten Brief[1]). Leibniz hatte zu Pell von dem gesprochen, was er erzeugende Differenzen nannte, und Pell hatte erwidert, ganz Aehnliches sei in dem Buche *Observationes diametrorum solis et lunae apparentium* vorhanden, welches 1670 im Drucke erschienen war. Der Verfasser jenes Buches, Gabriel Mouton[2]) (1618—1694) aus Lyon, war eigentlich Theologe und als Vikar an der Paulskirche seiner Vaterstadt angestellt. Leibniz wusste, dass ein Werk des von Pell ihm genannten Titels in Vorbereitung war: das hatte er offenbar in Paris gehört. Dass das Werk wirklich erschienen war, war ihm unbekannt. Er ging zu Oldenburg, in dessen Bibliothek er es vorfand und entlieh. Bei aufgeregt raschem Durchlesen fand sich, dass Pell die volle Wahrheit gesagt hatte[3]). Die Ausdrucksweise eines „bei Herrn Oldenburg, Sekretär der Royal Society leihweise

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 86—91 und Leibniz I, 27—31. [2]) Poggendorff II, 219. [3]) *Quae apud Dominum Oldenburgium Soc. Reg. Secretarium sumtum mutuo tumultuarie percurri, et inveni verissima dixisse Pellium.*



entnommenen Buches“ in einem an Oldenburg selbst gerichteten Briefe lässt vermuthen, dass es ein sehr officieller, vielleicht auf Oldenburgs eigene Veranlassung geschriebener Brief war, in welchem Leibniz für alle Fälle seine von Mouton unabhängige Gedankenfolge darlegen sollte.

Mouton war es auf den *praktischen* Kunstgriff angekommen, durch Bildung wiederholter Differenzen von in Tafeln geordneten Zahlen diese Tafeln selbst leicht zu ergänzen, was, wie Pell in jenem Gespräche vom 2. Februar bemerkte, auch Briggs bei Berechnung seiner Logarithmentafel schon theilweise ins Auge gefasst hatte. Leibniz war von der *theoretischen* Frage ausgegangen, ob nicht bei den höheren Potenzen der in der natürlichen Zahlenreihe aufeinander folgenden Zahlen ein Bildungsgesetz sich erkennen lasse dem ähnlich, welches bei den Quadratzahlen obwalte, die bekanntlich je um eine ungrade Zahl von einander abstehen, und zwar $n^2$ von $(n+1)^2$ um $2n+1$. Er fand, dass bei den Kubikzahlen die aufeinander folgenden Unterschiede in fünf Reihen sich ordnen lassen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0 | 0 | | |
| | 6 | 6 | 6 | 6 | | |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | | |
| 1 | 7 | 19 | 37 | 61 | 91 | |
| 0 | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 |

und er nannte die in den vier unteren Reihen zu äusserst links stehenden Zahlen 0, 1, 6, 6 die Erzeugenden, *generatrices*, weil aus ihnen die anderen Kubikzahlen sich bilden. Es ergab sich nämlich

$$0^3 = 0 \cdot (1)$$
$$1^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (1)$$
$$2^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (2) + 6 \cdot (1)$$
$$3^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (3) + 6 \cdot (3) + 6\,(1)$$

u. s. w.

Die eingeringelten Zahlen sind die aufeinander folgenden Binomialcoefficienten derjenigen Potenz, deren Exponent die jeweils zu kubirende Zahl ist; die nicht eingeringelten Faktoren sind die Erzeugenden Somit würde weiter gefunden werden:

$$4^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (4) + 6 \cdot (6) + 6 \cdot (4)$$
$$5^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (5) + 6 \cdot (10) + 6 \cdot (10)$$

und allgemein: $n^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (n) + 6 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + 6\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)$.

Leibniz führt zwar die allgemeine Bildung von $n^3$ nicht aus, sagt aber, seine Analyse habe ihm die Allgemeinheit der Behauptung dargethan[1]). So geistreich Leibnizens Gedanke ist, so kann man ihn doch kaum eine Beschäftigung mit unendlichen Reihen nennen. Die Anregung dürfte ihm in Deutschland geworden sein, wo Faulhaber (Bd. II, S. 749) den Grundstein zu der Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung gelegt hatte.

Jetzt lernte Leibniz Mercators Logarithmotechnia kennen und vermuthlich leitete sie ihn zu wirklichen Untersuchungen unendlicher Reihen. Jetzt begann er auch andere Werke zu studiren. Er verdankte dieses wesentlich dem persönlichen Umgange mit dem gleich ihm in Paris verweilenden Huygens.

Christian Huygens[2]) war 1666 durch Colbert in die Akademie der Wissenschaften nach Paris berufen worden und verblieb dort, abgesehen von zwei Reisen, welche er 1670 und 1675 nach Holland machte, bis 1681. In diesem Jahre zog er nach Aufhebung des Ediktes von Nantes in seine Heimath nach dem Haag sich zurück. Dort starb er 1695. Wir werden von Huygens mathematischem Hauptwerke, dem *Horologium oscillatorium* von 1673, mehrfach zu reden haben. Gegenwärtig nennen wir es nur, um die Bemerkung daran zu knüpfen, dass Huygens dasselbe beim Erscheinen Leibniz schenkte, der kurz vorher von dem ersten Londoner Aufenthalte nach Paris zurückgekehrt war.

Beim Lesen des Horologium oscillatorium sah Leibniz deutlich ein, wie unwissend er sei, und wie er mit dem mathematisch Vorhandenen sich bekannt machen müsse[3]). Er studirte die Schriften von Descartes, von Pascal, von Gregorius von St. Vincentius, auch die 1659 gedruckte *Synopsis Geometrica* von Honoratus Fabri[4]) (1607—1688), einem französischen Jesuiten, welcher erst im Ordenscollegium in Lyon Philosophie lehrte, später nach Rom versetzt wurde und in dem Gerichtshofe der Inquisition eine angesehene Stellung einnahm.

Leibniz studirte als genialer Denker. Mit der Aufnahme fremder Forschungsergebnisse ging die Entwerfung und Ausarbeitung eigener Untersuchungen Hand in Hand. Hatte er gelernt, wie Flächen durch Zerlegung in Rechtecke quadrirt werden konnten, so nahm er selbst Zerlegungen in Dreiecke vor, und er nannte dieses Transmutation.

[1]) *Idque Analysis mihi universale esse comprobavit.* [2]) Allgemeine deutsche Biographie XIII, 480—486. [3]) Leibniz III, 72—73 Anmerkung. Gerhardt, Math. Deutschl. S. 142. [4]) Poggendorff I, 711.



Eine Mittheilung der durch Transmutation erhaltenen Reihe

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

erfolgte an Huygens, der unter dem 6. November 1674 die Schrift, welche den Titel *Quadrature arithmétique* geführt zu haben scheint, mit grossen Lobeserhebungen zurückschickte. Es ist nichts geringes nach meiner Ansicht, schreibt er[1]), bei einer Aufgabe, die so viele Geister in Bewegung gesetzt hat, einen neuen Weg gefunden zu haben, welcher einige Hoffnung zu geben scheint, zu der wahren Auflösung zu gelangen. Das Datum der sicherlich vor dem 6. November 1674 an Huygens gelangten Mittheilung genau zu kennen wäre von einiger Wichtigkeit, weil es allem Anscheine nach dem der Entdeckung durch Leibniz entsprach, welcher kaum gesäumt haben dürfte, den am gleichen Orte mit ihm lebenden Gönner von seinem Funde in Kenntniss zu setzen.

Gegen April 1675 schickte alsdann Leibniz seine Reihe auch an Oldenburg, welcher am 12. dieses Monats den Empfang bestätigte[2]) und dabei Gregorys Arcustangensreihe angab. Ende Juli 1676 hat dann Oldenburg weitere Reihen des seit October 1675 verstorbenen Gregory brieflich an Leibniz mitgetheilt[3]), und am gleichen Datum schickte er ihm die Abschrift eines für Leibniz bestimmten Briefes Newtons[4]), in welchem die Binomialreihe, die Sinusreihe und die Cosinusreihe enthalten war. An den Rand dieses Briefes schrieb Leibniz nach seiner Gewohnheit mancherlei Notizen, die sicherlich nur für den eigenen Gebrauch bestimmt waren. An einer Stelle heisst es[5]): „Das ist schön; das gibt eine höchst elegante Abkürzung meiner durch Transformation erhaltenen Kreismessung". Er war also in unbefangenster Sicherheit über sein Anrecht an die oft erwähnte Reihe. Nun kommt der Zeitfolge nach ein Brief Leibnizens[6]) an Oldenburg vom 27. August 1676, in welchem die Transmutation als Quelle der Reihe für $\frac{\pi}{4}$ angegeben ist, in welchem auch eigene Ableitungen der Sinusreihe und der Cosinusreihe sich vorfinden.

Aber auch an die Veröffentlichung seiner arithmetischen Quadratur durch den Druck dachte Leibniz ernstlich, und, bevor er im Herbste 1676 Paris verliess, war eine Abhandlung druckfertig[7]). Ihr Titel war *De quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae,*

[1]) Leibniz II, 16. [2]) Ebenda I, 60—69. [3]) Ebenda I, 88—99. [4]) Ebenda I, 100—113. [5]) Ebenda I, 104 Anmerkung: *Hoc pulchrum et hinc etiam elegantissimum compendium pro mea circuli dimensione ope transformationis facta.* [6]) Ebenda I, 114—122. [7]) Ebenda I, 84.

*cuius corollarium est trigonometria sine tabulis. Autore G. G. L.* Leibniz übergab sie bei der Abreise einem Agenten, der den Druck überwachen sollte, aber als Verzögerungen eintraten und Leibniz überdies immer mehr und mehr hinzu entdeckte, unterblieb der Druck. Erst 1682, 1684, 1691 kamen einander ergänzende Veröffentlichungen in den A. E. zu Stande.

Unter allen Umständen ist eine Verschiedenheit zwischen dem was Gregory und was Leibniz fand, bemerkenswerth. Wenn Gregory ausschliesslich die Kreisbogenfläche aus der trigonometrischen Tangente $t$ mittels der Reihe $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots$ berechnete, so hatte Leibniz die Quadratur eines Ausschnittes sich als Aufgabe gestellt, der durch einen Bogen irgend eines Mittelpunktkegelschnittes begrenzt war. Die Hyperbel nicht minder als die Ellipse oder der Kreis konnte jenen die Figur abschliessenden Bogen liefern, und die Reihe änderte sich nur insofern, als bei der Hyperbel alle Glieder positiv zu nehmen waren, die Zusammenfassung aller Fälle folglich durch die Reihe $\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \cdots$ dargestellt war[1]). Als Einheit ist beim Kreise der Halbmesser angenommen, und die Tangente $t$ darf nicht grösser als der Halbmesser gewählt werden[2]). Der deutlichste Nachweis der Reihe für den Kreis, bei welchem das Leibniz eigenthümliche Verfahren der Transmutation, d. h. die Bildung eines Sectors recht klar hervortritt, kann dem *Compendium quadraturae arithmeticae* entnommen werden, welches sich handschriftlich erhalten hat. Es besteht aus 51 Sätzen, deren Beweise allerdings kaum mehr als angedeutet genannt zu werden verdienen. Der Gang für den hier in Rede kommenden Satz beim Kreise ist folgender[3]).

Ist (Figur 10) $AC \perp BD$ und ebenso $HD \perp BD$, so ist ersichtlich $\triangle CBA \sim BDH$, also $\frac{CB}{CA} = \frac{BD}{BH}$. Daraus folgt

$$\frac{CB^2}{CA^2} = \frac{BD^2}{BH^2} = \frac{BH \cdot BE}{BH^2} = \frac{BE}{BH}.$$

Man kann aber auch schreiben $\frac{BE}{BH} = \frac{CB^2}{CA^2} = \frac{CB^2}{AB^2 + CB^2} = \frac{t^2}{r^2 + t^2}$ und $BE = \frac{2rt^2}{r^2 + t^2} = 2\left[\frac{t^2}{r} - \frac{t^4}{r^3} + \frac{t^6}{r^5} - \frac{t^8}{r^7} + \cdots\right]$, indem von der

[1]) Diese Zusammenfassung findet sich in dem Briefe von 27. August 1676. Leibniz I, 117. [2]) Leibniz V, 97: *Regula huc redit ut Tangente, quae radio non major sit, posita b, radio Unitate, arcus ipse scil. quadrante non major sit* $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. Dann ferner ebenda V, 107 lin. 4: *Opportet autem AB non esse minorem quam BC.* [3]) Ebenda V, 106—107. Vgl. dazu Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 46—47.



Division Gebrauch gemacht wird, deren Anwendung zur Reihenentwicklung Leibniz bei Mercator kennen gelernt hatte. Hier war $DC$ Berührungslinie an den Kreis in $D$. Wird auch an den benachbarten Kreispunkt $D_1$ eine Berührungslinie $D_1C_1$ gezogen, welche als gradlinige Fortsetzung von $DD_1$ betrachtet werden darf, so erkennt man, dass

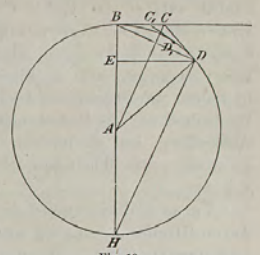

Fig. 10.

$$\triangle CDC_1 = \frac{CC_1 \cdot BE}{2}$$
$$= CC_1\left[\frac{t^2}{r} - \frac{t^4}{r^3} + \frac{t^6}{r^5} - \frac{t^8}{r^7} + \cdots\right].$$

Das Dreieckchen war dadurch in eine unendliche Summe von Gliedern wechselnden Vorzeichens verwandelt — Transmutation — deren jedes als Rechteckchen von der Höhe $\frac{t^{2k}}{r^{2k-1}}$ und von der Basis $CC_1$ sich darstellt, $CC_1$ als sehr kleines Stückchen der $BC = t$ gedacht. Solche Rechteckchen zu summiren verstand man. Das Glied $\frac{t^{2k}}{r^{2k-1}} \cdot CC_1$ gibt über die ganze $BC$ summirt $\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)r^{2k-1}}$. Das ganze gemischtlinige Dreieck aus dem Bogen $BD$ und den Berührungslinien $BC$ und $DC$ ist demnach

$$\frac{t^3}{3r} - \frac{t^5}{5r^3} + \frac{t^7}{7r^5} - \frac{t^9}{9r^7} + \cdots.$$

Aber das Viereck $ABCD$ ist das Doppelte des Dreiecks $ABC$ oder $2 \cdot \frac{rt}{2} = rt$, und zieht man von ihm das vorher ermittelte gemischtlinige Dreieck $BCD$ ab, so bleibt der Kreissektor

$$ABD = tr - \frac{t^3}{3r} + \frac{t^5}{5r^3} - \frac{t^7}{7r^5} + \cdots.$$

Jetzt gewinnt die oben erwähnte Bedingung[1]), dass $AB$ nicht kleiner als $BC$ sein dürfe, ihre richtige Bedeutung. Leibniz erkannte offenbar, dass nur unter dieser Bedingung, die man auch in der Form $r = 1$ und $t < 1$ anschreiben kann, die einzelnen Glieder von

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots$$

immer kleiner und kleiner werden und daraus ein Satz folgt, den er als 49. Satz des Compendium quadraturae arithmeticae so ausspricht[2]):

[1] Leibniz V, 107 lin. 4. [2]) Ebenda V, 112.

Wenn eine Grösse $a$ einer unendlichen Reihe

$$b - c + d - e + f - g \text{ etc.}$$

gleich ist, so ist $b$, $b - c + d, \cdots$ grösser als $a$, und der Ueberschuss beträgt weniger als $c$, als $e \ldots$; dagegen ist $b - c$, $b - c + d - e, \cdots$ kleiner als $a$, und der Mangel beträgt weniger als $d$, als $f \ldots$. Jene Zusammenstellung von 51 Sätzen war offenbar nicht selbst zum Druck bestimmt. Sie bildete für Leibniz nur die Gedankenfolge zu einer genauer auszuarbeitenden Abhandlung, und da brauchte nicht alles und jedes breit erörtert zu werden, was ihm selbst schon in knappster Andeutung verständlich war.

Um so deutlicher sprach er den wichtigen Satz, dass eine Reihe, deren Glieder beständig abnehmen[1]) und alternirend positiv und negativ sind[2]), einen endlichen Werth besitze in einem allerdings sehr viel späteren Briefe vom 10. Januar 1714 gegen Johann Bernoulli aus[3]). Wegen des engen Zusammenhanges mit dem Satze im Compendium quadraturae arithmeticae greifen wir bis zu jenem Briefe vor und entnehmen ihm den strengen Beweis. Die Reihe

$$\underbrace{\overbrace{a - b + c - d + e}^{L} - f}_{M} + g - h + i - k \text{ etc.}$$

sei von der vorgeschriebenen Art. Die Glieder sollen ins Unendliche abnehmen, so dass jedes kleiner als das nächstvorhergehende ist[4]). Leibniz nennt nun die ganze Reihe $S$, während $L$, $M$ die Zusammenfassung der Glieder bis zu $e$, $f$ einschliefslich bedeutet, dann sei $L > S > M$. Es ist erstens $L > S$, weil $L$ in $S$ übergeht, indem mehr subtrahirt wird (nämlich $f, h, \ldots$) als addirt (nämlich $g, i, \ldots$) Es ist zweitens $M < S$, weil $M$ in $S$ übergeht, indem mehr addirt wird (nämlich $g, i, \ldots$) als subtrahirt (nämlich $h, k \ldots$). Der Unterschied $L - M = f$ muss grösser sein als $L - S$ oder als $S - M$. Geht man beliebig weit, so wird $f$ kleiner als jede gegebene Grösse[5]). Das ist genau der Beweis des Convergenzsatzes für Reihen mit alternirenden Vorzeichen und unendlich abnehmenden Gliedern, wie er in den neuesten Lehrbüchern noch immer vorgetragen wird, denn ob man sagt $f - g$, $h - i, \ldots$ und $g - h$, $i - k, \ldots$ seien positiv und deshalb $L > S > M$, oder ob man der Leibnizischen Ausdrucksweise sich bedient, kann doch nur als Unter-

[1]) *continuo decrescentes.* [2]) *alternationis affirmativae et negativae.* [3]) Leibniz III, 926. [4]) *Termini decrescant in infinitum, ita ut quivis sit minor proxime antecedente.* [5]) *Continuando quantum lubet f est minor data.*



schied älteren und neueren mathematischen Sprachgebrauches erachtet werden.

Wir haben die Aufsätze in den A. E. genannt, durch welche die Reihe $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ in die Oeffentlichkeit drang, während bis dahin weder Gregory noch Leibniz mehr als halbvertrauliche briefliche Mittheilungen von sich gegeben hatten. Die erste gedruckte Erörterung des Gegenstandes in den A. E. von 1682 führt den Titel: *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa*[1]). Wir bringen sie aus zwei Gründen zur besonderen Erwähnung. Erstens sind in ihr zunächst beweislos die Summen einiger anderen numerischen Reihen angegeben, auf die wir noch zurückkommen werden, zweitens kommt dort ein Ausdruck und ein Begriff zuerst vor, denen nicht früher als in unserer Zeit eine genauere Beachtung zu Theil wurde: die Partialreihe, *series partialis.*

Die Reihe der Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \cdots$, sagt Leibniz, sei eine harmonische, und harmonisch seien auch die Reihen, deren Glieder durch einen Sprung[2]) aus den genannten Zahlen hervorgehen $\frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9} \cdots$ ebenso wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11} \cdots$. Die Kreisreihe entstehe, indem man die zweite Partialreihe von der ersten abziehe[3]). Leibniz bleibt dann noch einen Augenblick bei sprungweise gebildeten Reihen stehen. Fasse man in der Kreisreihe je ein positives und ein ihm unmittelbar nachfolgendes negatives Glied zusammen, so entstehe

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195} + \frac{1}{323} + \cdots.$$

Die Nenner der Glieder dieser Reihe sind aber auch wieder durch Sprünge ausgelesen[4]), und zwar aus der Reihe der um eine Einheit verminderten Quadratzahlen, d. h. aus der Reihe 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99 .... Wählt man unter ihnen die erste und dann jeweils die vierte Zahl, so hat man unsere Zahlen[5]). Partialreihen sind demnach für Leibniz solche, deren Glieder aus einer anderen gesetzmässigen Reihe von einem Anfangsgliede aus durch Sprünge von gleichbleibender Weite hervorgeholt werden.

Zwischen Leibnizens Brief an Oldenburg vom 27. August 1676 und dem Aufsatze von 1682 liegt Leibnizens zweiter Londoner Aufenthalt im October 1676. Damals lernte er Collins persönlich kennen.

[1]) Leibniz V, 118—122. [2]) *per saltum.* [3]) *posteriorum seriem partialem a priori subtrahendo.* [4]) *excerpti per saltum.* [5]) *ex cujus serici numeris quartus quisque post primum noster est.*

Damals entstand wahrscheinlich ein von Leibnizens Hand geschriebener in seinem Nachlasse gefundener Auszug aus Newtons Analysis per aequationes. In dem dritten Aufsatze über die Kreisreihe, in der *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum, quae centrum habent* (A. E. von 1691) hat Leibniz auch seine englischen Wettbewerber in der Reihenlehre genannt. Er gibt dort[1]) die verschiedenen Reihenentwicklungen, von denen wir gesprochen haben, an und sagt, sie rührten theils von ihm her, theils von anderen wie Mercator, Newton, Gregory.

So weit können wir fürs erste die Arbeiten verfolgen, durch welche Newton und Leibniz sich um die Reihenlehre verdient machten, ohne die Zeitgrenze 1700 zu überschreiten, ohne Kenntnisse vorauszusetzen, welche einem anderen Gebiete angehören, und welche uns nöthigen, den Bericht über ihre Anwendung mit der Geschichte jenes Wissenszweiges selbst zu verbinden. Dagegen schliessen sich hier noch einige Arbeiten anderer Mathematiker an, welche ungezwungen als Fortsetzer der Newtonschen und Leibnizischen Gedanken bezeichnet werden können.

Wir nennen in erster Linie Edmund Halley mit einer Abhandlung von 1695 über Logarithmenberechnung[2]). Wir haben gesehen, dass bei Mercator, bei Gregory die Proportionalität von Logarithmen gegebener Zahlen mit gewissen Reihen auftrat, aber der Proportionalitätsfaktor, der Modulus des Logarithmensystems, wenn ein später Ausdruck gebraucht werden darf, kam nicht zu deutlicher Kenntniss. Auf diese Erweiterung des Wissens legte Halley ein grosses Gewicht, sowie auch auf die Gewinnung logarithmischer Reihenentwicklung ohne Einmischung der Quadratur der Hyperbel, vielmehr durch rein analytische Betrachtungen, welche von Newtons Binomialtheorem ausgehen. Wir schicken ferner voraus, dass in Halleys recht schwer verständlichem Aufsatze von Neperschen Logarithmen im Gegensatze zu Briggischen Logarithmen die Rede ist. Unter letzteren versteht Halley diejenigen von der Grundzahl 10. Erstere sind für ihn diejenigen, welche mit 0,434 294 48 vervielfacht oder durch 2,302 585 dividirt werden müssen, um in Briggische überzugehen. Das sind also natürliche Logarithmen und keineswegs die zuerst von Neper erhaltenen (Bd. II, S. 736). Vielleicht war Halley der erste Schriftsteller, der sich diese Verwechslung zu Schulden kommen liess, die allmälig immer allgemeinere Verbreitung gewann[3]).

---

[1]) Leibniz V, 129. [2]) P. T. XIX, 58—67. Vgl. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 38—40. [3]) Cajori, Hist. Festschr. 1899, S. 33.



Halley will das Verhältniss, die Ratio, zweier Zahlen dadurch genauer darstellen, dass er Theile desselben, kleine Verhältnisse, Ratiunculae, ins Auge fasst. Man schiebe z. B. zwischen die Zahlen 1 und 10 mittlere Proportionale ein 100 000 an der Zahl, so werden zwischen 1 und 2 sich 30 102, zwischen 1 und 3 sich 47 712 solcher eingeschobenen Zahlen finden, welche, als Potenzen der Grundzahl aufgefasst, Exponenten besitzen, welche um je $\frac{1}{100\,000}$ von einander abstehen und dieses $\frac{1}{100\,000}$ ist die Ratiuncula. Allgemeiner ist sie $\frac{1}{n}$, sofern $n$ die sehr gross gewählte Zahl 100 000 oder auch eine andere grosse Zahl darstellt. Ist etwa $a$ die Basis und $1+q$ eine Zahl, so wird $a^{\frac{m}{n}} = 1+q$ und $a^{\frac{1}{n}} = (1+q)^{\frac{1}{m}}$,

$$a^{\frac{1}{n}} - a^0 = (1+q)^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Aber die kleine Differenz $a^{\frac{1}{n}} - a^0$ lässt sich, wenn $a$ und $n$ gegeben sind, als Vielfaches von $\frac{1}{n}$, etwa als $\frac{k}{n}$ berechnen, wodurch $k$ selbst bekannt wird. Nachdem $\frac{k}{n}$ als Werth von $(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1$ erkannt ist, wird auf die Potenzgrösse $(1+q)^{\frac{1}{m}}$ der binomische Lehrsatz angewandt. Halley findet:

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}\cdot q + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1\cdot 2} q^2 + \cdots.$$

Ist $m$ sehr gross, so dürfen in den Binomialcoefficienten, für welche Halley sich des bei Oughtred schon vorkommenden Namens der Unciae, Klammergrössen, bedient, höhere Potenzen von $\frac{1}{m}$ weggelassen werden. Man darf also schreiben

$$\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2m}, \quad \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{3m} \text{ u. s. w.}$$

So entsteht

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}q - \frac{1}{2m}q^2 + \frac{1}{3m}q^3 - \cdots$$

und

$$\frac{k}{n} = (1+q)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}\left(q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \cdots\right).$$

Mithin

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{k}\left(q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \cdots\right),$$

als der für die Basis $a$ sich ergebende Logarithmus von $1+q$. Nimmt man umgekehrt als Ausgangspunkt

$$\log(1+q) = \frac{1}{k}\left(q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \cdots\right) = \frac{m}{k}\left[(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1\right],$$

so ist auch

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{k}{m}\log(1+q) \quad \text{und} \quad 1+q = \left[1 + \frac{k}{m}\log(1+q)\right]^m.$$

Wird hier rechter Hand die Binominalentwicklung vorgenommen und $k \cdot \log(1+q) = L$ gesetzt, so entsteht bei wiederum als sehr gross angenommenem $m$ die Reihe $1+q = 1 + L + \frac{L^2}{1 \cdot 2} + \cdots$.

Sollen Briggische Logarithmen gefunden werden, so ist $k = 2{,}302\,585$, wie wir (S. 84) angekündigt haben. Diese Zahl kann aber auch viel genauer ausgerechnet werden. Halley gibt sie auf 60 Decimalstellen. Auf ebenso viele Decimalstellen gibt er das reciproke $\frac{1}{k} = 0{,}434\,299\,48\cdots$, auf ebenso viele die Briggischen Logarithmen der Primzahlen unter 20, also von 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Halley selbst hat die umfangreichen, ermüdenden Rechnungen, deren Ergebnisse er mittheilt, nicht ausgeführt. Sie rühren vielmehr von Abraham Sharp[1]) (1651—1742) her. Dieser ebenso zuversichtliche als zuverlässige Rechner begann als Handelslehrling, war dann Schulmeister, Steuerbeamter, Buchhalter, Gehilfe an der Sternwarte zu Greenwich, zuletzt Privatmann in seiner Vaterstadt Little Horton nicht weit von Bradford und errichtete sich daselbst aus eigenen Mitteln eine kleine Sternwarte, um seinen astronomischen Neigungen sich hingeben zu können.

Der Newtonschen Richtung gehörte auch Abraham de Moivre[2]) (1667—1754) an, der aus protestantischer Familie in Vitry in der Champagne geboren, noch in jungen Jahren nach der Aufhebung des Ediktes von Nantes Frankreich verliess. Er lebte dann in London und ernährte sich hauptsächlich durch Ertheilung mathematischen Unterrichtes. Seit 1697 gehörte er der Londoner Royal Society als Mitglied an, aber schon etwas früher legte er ihr eine Arbeit[3]) vor, welche der Potenzerhebung unendlicher Multinomien, d. h. also dem polynomischen Lehrsatze gewidmet war. Leibniz hatte zwar schon mit derselben Aufgabe sich beschäftigt und in einem Briefe an Johann Bernoulli vom Mai 1695 davon gesprochen[4]), aber

[1]) Poggendorff II, 917. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences pour* 1754 (Histoire pag. 175—184). [3]) *A Method of raising an infinite Multinomial to any given Power, or extracting any given Root of the same.* P. T. XIX, 619—625. [4]) Leibniz III, 175.



De Moivre war jedenfalls der erste Veröffentlicher einschlagender Untersuchungen. Die angeführte De Moivresche Abhandlung betrifft, wiewohl der Titel auch Wurzelausziehung einzubegreifen scheint, ausschliesslich den Fall von Potenzen mit ganzzahlig positivem Exponenten $m$ und gibt ausführlich die Glieder mit $z^m$, $z^{m+1}$ bis einschliesslich $z^{m+6}$, welche in der Entwicklung von

$$(az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + fz^6 + gz^7 + \cdots)^m$$

zu Tage treten. Im nächsten Bande der P. T. gab der inzwischen zum Mitgliede der Royal Society Ernannte eine Fortsetzung[1]) der früheren Abhandlung. Er geht aus von der Gleichung zwischen zwei unendlichen Reihen

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \cdots = gy + hy^2 + iy^3 + ky^4 + \cdots,$$

aus welcher er eine nach Potenzen von $y$ fortschreitende Entwicklung für $z$ folgert. Die dabei angewandte Methode ist die der unbestimmten Coefficienten (Bd. II, S. 749), welche nachgrade zu allgemeiner Benutzung gelangt war. De Moivre setzt also

$$z = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \cdots$$

und gewinnt durch Einsetzung dieses Werthes

$$\begin{aligned} az + bz^2 + cz^3 + \cdots = aAy + aBy^2 + aCy^3 \quad &+ \cdots \\ + bA^2y^2 + 2bABy^3 &+ \cdots \\ + cA^3y^3 \quad &+ \cdots \\ &+ \cdots, \end{aligned}$$

welches mit $gy + hy^2 + iy^3 + \cdots$ übereinstimmen muss. Folglich ist $aA = g$, d. h. $A = \frac{g}{a}$; dann $aB + bA^2 = h$, d. h. $B = \frac{h - bA^2}{a}$; weiter $aC + 2bAB + cA^3 = i$, d. h. $C = \frac{i - 2bAB - cA^3}{a}$ u. s. w. Die Nenner der entstehenden Werthe von $A, B, C \cdots$ sind sämmtlich $a$. Eine Einsetzung der einmal gefundenen Coefficienten $A, B \cdots$ in die nachfolgenden $C, D \cdots$ wird nicht vorgenommen.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten dient De Moivre auch dazu, die logarithmische Reihe abzuleiten. Er nimmt an

$$1 + z = (1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}y^2 \cdots$$

$$\text{oder } z = ny + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}y^2 + \cdots.$$

Ferner nimmt er an

$$\log(1+z) = az + bz^2 + cz^3 + \cdots.$$

Dann muss aber auch

[1]) *A method of extracting the Root of an infinite equation.* P. T. XX, 190—193.

$$\log(1+y) = ay + by^2 + cy^3 + \cdots$$

sein neben

$$\log(1+z) = n\log(1+y) = nay + nby^2 + ncy^3 + \cdots.$$

Setzt man den Werth $z = ny + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \cdots$ in die Reihe $az + bz^2 + cz^3 + \cdots$ ein, so müssen zwei übereinstimmende Entwicklungen von $\log(1+z)$ nach Potenzen von $y$ erscheinen, aus deren gliedweiser Vergleichung die Coefficienten $a, b, c \cdots$ erhalten werden.

Eine Wurzelausziehung aus einem mehrgliedrigen Ausdrucke hat De Moivre auch in dem zweiten Aufsatze nicht gelehrt, aber man sieht doch, wie die Methode der unbestimmten Coefficienten die Aufgabe zu lösen im Stande ist, wie man unter Annahme von

$$\sqrt[n]{(a + by + cy^2 + \cdots)} = A + By + Cy^2 + \cdots$$
$$\text{zu } a + by + cy^2 + \cdots = (A + By + Cy^2 + \cdots)^n$$

gelangt, wie man den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen nach den Regeln des ersten Aufsatzes in

$$A^n + nA^{n-1}By + (nA^{n-1}C + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^{n-2}B)y^2 + \cdots$$

entwickeln und mittels

$$a = A^n,\ b = nA^{n-1}B,\ c = nA^{n-1}C + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^{n-2}B \text{ etc.}$$

die $A, B, C \cdots$ allmälig berechnen kann.

Gehen wir nach dem europäischen Festlande über, wo eine Leibnizische Richtung deutlich zu verfolgen ist, so müssen wir mit den Leistungen eines Mannes uns bekannt machen, dessen ganze Familie eine so einzig dastehende Bedeutung für die Geschichte der Mathematik gewonnen hat, dass wir abermals von unserer sonstigen Uebung abweichend, in ähnlicher Weise wie wir bei Leibnizens und Newtons Lebensskizzen uns nicht an die Regel banden, persönliche Angaben über alle Familienmitglieder, die überhaupt in diesem Bande vorkommen, hier vereinigen.

Es handelt sich um die Familie Bernoulli[1]). Ein gewisser Jakob Bernoulli verlegte in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrh. seinen Wohnsitz von Antwerpen nach Frankfurt am Main, um den religiösen Verfolgungen der spanischen Gewalthaber in den Niederlanden zu entgehen. Ein zweiter Jakob Bernoulli, Enkel des ersten, siedelte im XVII. Jahrh. nach Basel über, wo sein Sohn Niclaus Bernoulli (1623 bis 1708) als Rathsherr eine angesehene Stellung einnahm. Mit drei

[1]) Merian, Die Mathematiker Bernoulli (Basel, 1860). Allgemeine Deutsche Biographie II, 470—480.



von dessen Söhnen Jakob, Niclaus, Johann und deren Nachkommen haben wir es zu thun.

Jakob Bernoulli (1654—1705) studirte dem Willen des Vaters gehorchend Theologie, daneben in fast geheimer Selbstthätigkeit Mathematik und Astronomie. Als er nach vollendetem Studium und mehrjährigen Reisen 1682 nach Basel zurückkehrte, wurde ihm eine Predigerstelle in Strassburg angeboten. Er schlug sie aus und blieb in Basel, wo er dem physikalischen und mathematischen Lehrberufe sich widmete. Zu seinen Schülern zählte als der weitaus hervorragendste der jüngere Bruder Johann Bernoulli (1667—1748). Auch ihn hatte der Vater zu einem ihm nicht zusagenden Berufe, zum Kaufmannsstande bestimmt, auch ihn zog unwiderstehliche Neigung zur Mathematik. Neben der Mathematik studirte Johann Medizin. Als er 1690 das Licentiat der Arzneiwissenschaft errungen hatte, ging er auf Reisen nach Genf, Lyon, Paris und überall trat er als mathematischer Schriftsteller, als mathematischer Lehrer mit Glück auf. In der Heimath erwarb er sich 1694 den medizinischen Doktorgrad, dann folgte er 1695 einem Rufe nach Groeningen, wo er als Professor der Mathematik und Physik zehn Jahre hindurch wirkte. Das Jahr 1705 brachte ihn nach Basel zurück, wo er dem Namen nach in die Professur der griechischen Sprache einrücken, d. h. deren Besoldung beziehen sollte. Während der Uebersiedelung starb der ältere Bruder Jakob, und nun erhielt Johann dessen freigewordene Professur der Mathematik, welcher er seinerseits bis zu seinem Tode, also noch 42 Jahre lang, vorstand, ohne durch eine der an ihn ergangenen Berufungen nach Leiden, Padua, Groeningen (zum zweiten Male), Berlin sich zum Weggehen versuchen zu lassen. Ein mittlerer Bruder zwischen Jakob und Johann war Niclaus, geboren 1662, Dieser trat als Rathsherr in die väterlichen Fusstapfen, aber in seinem Sohne Niclaus Bernoulli (1687—1759) offenbarte sich der mathematische Familiengeist. Er war zunächst Schüler seines Onkels Jakob in Basel, dann seines Onkels Johann in Groeningen. Mit Johann kehrte Niclaus 1705 nach Basel zurück. Seine Arbeiten theilen sich zwischen Mathematik und Jurisprudenz. Er trat 1716 in die mathematische Professur in Padua ein, kehrte aber 1719 nach Basel zurück, wo er 1722 zur Professur der Logik, 1731 zu der des Codex und des Lehensrechtes ernannt wurde. Wir haben nun noch zwei Söhne von Johann Bernoulli zu nennen: Niclaus Bernoulli II. (1695—1726) und Daniel Bernoulli (1700—1782). Jener, in Basel geboren, war ein frühreifer Jüngling von den bedeutendsten Geistesgaben. Er trieb nebeneinander Jurisprudenz und Mathematik. In jener erwarb er sich 1715 das Licentiat, in dieser unterrichtete er

seit 1711 den jüngeren Bruder Daniel. Nach 1716 begab sich Niclaus auf Reisen, 1723 berief man ihn als Professor der Rechtswissenschaft nach Bern. Der in Groeningen geborene Daniel wurde, wie wir sagten, durch Niclaus in die Mathematik eingeführt. Später (1721 bis 1723) genoss er den Unterricht des Vaters, der aber die Fortschritte des Sohnes unterschätzte und ihn dem Kaufmannsstande zuwenden wollte, später ihm das Studium der Medizin gestattete. Während Daniel auf Reisen in Italien verweilte, kam an ihn und Niclaus gemeinsam ein Ruf an die nach einem Plane Peter des Grossen soeben ins Leben gerufene Petersburger Akademie. Beide Brüder folgten 1725 mit Freuden diesem Rufe, der ihnen ein Zusammenleben und Zusammenwirken in Aussicht stellte, welches leider nicht von langer Dauer sein sollte. Niclaus starb nach noch nicht einjährigem Aufenthalte in Petersburg. Daniel liess sich nur mit Mühe nach Ablauf der fünf Jahre, auf die er sich verpflichtet hatte, auf weitere drei Jahre gewinnen, dann kehrte er nach Basel zurück, wo er nunmehr 1733—1782 verblieb. Seine Stellung war die eines Professors der Anatomie und Botanik, seit 1750 auch noch der Experimentalphysik.

Wir haben hier nur die rohesten Umrisse des Lebens der fünf Männer gegeben, welche dem Namen der Bernoulli zur Unsterblichkeit verhalfen. Nicht erwähnt wurden die theilweise sehr hässlichen Streitigkeiten, deren Geschichte gleichfalls mit dem Namen der Bernoulli untrennbar verbunden ist, nicht erwähnt die wissenschaftlichen Leistungen, um derentwillen die Bernoulli so berühmt sind. Für beides wird bald da, bald dort in diesem Bande der nöthige Raum geschafft werden müssen.

Veranlassung dazu, wenigstens eine Art von Stammbaum der Mathematiker Bernoulli an dieser Stelle einzuschalten, gaben uns die Arbeiten von Jakob Bernoulli über Reihen, fünf Abhandlungen, welche unter dem gemeinsamen Titel *Propositiones Arithmeticae de Seriebus infinitis eorumque summa finita* erschienen, ein Titel dem von der zweiten an die Ordnungszahlen *pars altera, tertia, quarta, quinta* beigefügt wurden. Es sind Dissertationen, über welche unter Jakob Bernoullis Vorsitze disputirt wurde, und zwar sind die Vertheidiger und die Jahrgänge, in welchen jeweil die Disputationen stattgefunden haben: Fritz 1689, Beck 1692, Hermann 1696, Harscher 1698, Niclaus Bernoulli 1704. Von den fünf Vertheidigern ist der zuletzt genannte Niclaus I. der Sohn des Rathsherrn Niclaus Bernoulli. Hermann, genauer Jakob Hermann[1]) (1678—1733), ist ein besonders

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie XII, 181—182.



in der Geschichte der Mechanik rühmlichst bekannter Schriftsteller. Die drei anderen Persönlichkeiten haben sich keine solchen Verdienste erworben, dass ihr Name besonders erhalten zu werden beanspruchen könnte. Jedenfalls rühren die Abhandlungen über Reihen auch nicht zum Theil von den fünf Vertheidigern her. Diese sind einzig Eigenthum von Jakob Bernoulli und mit Recht in dessen Werke aufgenommen[1]), welche in zwei mit durchgehenden Seitenzahlen versehenen Bänden in Genf gedruckt wurden. Dass die Abhandlungen über Reihen dort durch weite Zwischenräume von einander getrennt sind, liegt an der die Zeitfolge streng wahrenden Anordnung der Ausgabe. Jakob Bernoulli selbst hielt ihre Zusammengehörigkeit nicht bloss dadurch aufrecht, dass die Abhandlungen als *pars altera, tertia, quarta, quinta* benannt wurden, sondern noch deutlicher durch die Bezifferung der Kapitel, welche von I bis LX durch die fünf Abhandlungen sich fortsetzt, und welche so die fortwährenden Rückbeziehungen erleichtert. Niclaus Bernoulli I hat darum auch, als er 1713 eine nachgelassene Schrift seines Lehrers und Onkels über Wahrscheinlichkeitsrechnung herausgab[2]) und die Reihenuntersuchungen, deren Tragweite er voll erkannte, als Anhang drucken liess, jede Trennung vermieden und die sechzig Kapitel ohne Sonderung in Abschnitte als fortlaufende Kapitel einer einheitlichen Abhandlung behandelt.

Der erste 1689 veröffentlichte Theil bietet die grösste Ausbeute. Jakob Bernoulli geht von dem an sich nicht uneleganten Satze aus, dass eine geometrische Progression $A, B, C, D, E \cdots$ und eine arithmetische Progression $A, B, F, G, H \cdots$, welche in den beiden Anfangsgliedern $A, B$ übereinstimmen, so fortschreiten, dass von den Folgegliedern jedes Glied der geometrischen Progression grösser sein muss, als das Glied der arithmetischen Progression von gleicher Rangordnung. Daraus folgert er, dass erstens die Glieder einer steigenden geometrischen Progression grösser als jede beliebig gegebene Zahl und zweitens die Glieder einer fallenden geometrischen Progression kleiner als jede beliebig gegebene Zahl, erstere also unendlich gross, letztere schliesslich Null werden. Bernoulli wendet sich sodann zur Reihe $\frac{a}{b} + \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+2c}{b+2d} + \cdots$, um nach dem Werthe $t$ des unendlich fernen Gliedes zu fragen. Der dabei eingeschlagene Gedankengang ist höchst eigenartig. Als $n$tes Glied betrachtet ist $t = \frac{a+(n-1)c}{b+(n-1)d}$, woraus $n = 1 + \frac{bt-a}{c-dt}$. Damit aber

[1]) Jacobi Bernoulli Basileensis Opera I, 373—402; I, 517—542; II, 745 bis 764; II, 849—867; II, 955—975. Wir citiren diese 1744 erschienene Ausgabe als Jac. Bernoulli Opera. [2]) Von ihr wird im XVII. Abschnitte erst die Rede sein, weil ihre Ergebnisse nicht vor 1713 in die Oeffentlichkeit drangen.

$n = \infty$ werde, kann nicht $bt - a = \infty$ sein. Das würde nämlich $t = \infty$, $c - dt = -\infty$, $\frac{bt-a}{c-dt}$ negativ bedingen, wodurch $n$ Null oder negativ würde, was ein Unsinn ist. Also muss $n = \infty$ aus $c - dt = 0$ hervorgehen und $t = \frac{c}{d}$ sein. Nun ist entweder

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{d} > \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

jedenfalls sind daher die unendlich vielen Glieder, vom ersten an bis zu $t$, alle grösser als $\frac{c}{d}$ oder als $\frac{a}{b}$, oder gleich beiden Brüchen, und ihre Summe ist mehr als das Unendlichfache eines gegebenen Ausdruckes, beziehungsweise ihm gleich, d. h. unendlich gross. Damit hängt der weitere Satz zusammen, dass bei zu summirenden unendlichen Reihen die Glieder schliesslich verschwinden müssen, weil die Reihe andernfalls keine endliche Summe besitzen könne[1]).

Nun geht es an wirkliche Summirungen. Sei unter $N$ die Reihe $\frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \cdots$ verstanden, unter $P$ die Reihe $\frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \cdots$, welche die um das Anfangsglied $\frac{a}{c}$ verkürzte Reihe $N$ oder $N - \frac{a}{c}$ ist. Ziehe man beide Reihen gliedweise von einander ab, so entstehe eine neue Reihe $Q$, welche $N - \left(N - \frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c}$ sein müsse. Also

$$\begin{array}{l} \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \cdots = N \\ \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \cdots = N - \frac{a}{c} = P \\ \hline \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot c} + \frac{a}{2 \cdot 3 \cdot c} + \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot c} + \cdots = \frac{a}{c} = Q. \end{array}$$

Jakob Bernoulli empfand selbst das höchst Bedenkliche dieses Verfahrens, wir würden heute sagen die Unzulässigkeit des Rechnens mit divergenten Reihen, denn er bemerkte sofort, ohne besondere Vorsicht dürfe man sich dieser Methode nicht bedienen[2]). Sei nämlich: $\frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \cdots = S$, $\frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \cdots = T = S - \frac{2a}{c}$ und man zöge die ähnliche Folgerung wie vorher, so entstände diesmal $\frac{a}{1 \cdot 2 \cdot c} + \frac{a}{2 \cdot 3 \cdot c} + \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot c} + \cdots = \frac{2a}{c} = Q$, während doch unmöglich eine und dieselbe Reihe $Q$ einmal $\frac{a}{c}$ und einmal $\frac{2a}{c}$ zur Summe haben könne. Der Fehler liege daran, dass das Grössenverhältniss der Endglieder der Reihen im zweiten Falle keine Beachtung

[1]) *cum alias illarum summae finitae esse non possent.* [2]) *Observandum tamen, non sine cautela hac utendum esse methodo.*



gefunden habe. In den Reihen $N$ und $P$ verschwinden die Endglieder, deshalb komme es bei der gliedweisen Subtraktion $N - P$ nicht darauf an, dass die Reihe $P$ um ein Glied weiter reiche als $N$. Ganz anders liege die Sache bei den Reihen $S$ und $T$. Es sei

$$S = \frac{2a}{c} + \frac{2a + a}{c + c} + \frac{2a + 2a}{c + 2c} + \cdots.$$

Das unendlich ferne Glied dieser Reihe sei daher nach dem Früheren $\frac{a}{c}$. Um dieses Glied sei also $T$ länger als $S$, und deshalb sei $S - T$ nicht $\frac{2a}{c}$, sondern $\frac{2a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c}$, d. h. $Q$ habe genau denselben Werth wie vorher.

Jakob Bernoulli betrachtet alsdann die harmonische Reihe, welche eine unendlich grosse Summe besitze[1]). Man könne den Beweis nach zwei Methoden führen, deren erste von Johann Bernoulli herrühre, welcher die Sache auch zuerst bemerkt habe. Setze man in die wiederholt beigezogene Reihe $Q$ statt $a$ und $c$ jedesmal die Zahl 1, so entstehe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots = 1.$$

Augenscheinlich sei

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{4}{4 \cdot 5} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) + \cdots \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \end{aligned}$$

oder, wenn man $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = A$ setze, gelange man zu $A = 1 + A$. Hätte also $A$ einen endlichen Werth, so wäre das Ganze $(1 + A)$ seinem Theile $(A)$ gleich, was nicht möglich sei. Nachdem Jakob Bernoulli die überraschende Bemerkung des jüngeren Bruders kennen gelernt hatte, zog er selbst die harmonische Reihe in Erwägung und fand folgenden unmittelbaren Beweis ihrer unendlich grossen Summe. Die Glieder $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a^2}$ besitzen eine Summe, welche grösser ist, als wenn sämmtliche $a^2 - a$ Glieder

[1]) *Summa seriei infinitae harmonice progressionalium* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ *est infinita.*

den niedrigsten Werth $\frac{1}{a^2}$ besässen, d. h. sie betragen zusammen mehr als $\frac{a^2-a}{a^2} = 1 - \frac{1}{a}$. Dann folgt weiter

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a^2} > 1.$$

Man kann also innerhalb der harmonischen Reihe von einem beliebigen Gliede an eine endliche Gruppe von Gliedern angeben, deren Summe grösser als Eins ist. Ist nun $N$ eine beliebig grosse ganze Zahl, so zieht man $N$ solche Gliedergruppen in Betracht, die sich unmittelbar an einander schliessen, und deren Summe $> N$ ist. Alle Folgeglieder bleiben alsdann noch übrig, die Summe der unendlichen harmonischen Reihe ist also erst recht grösser als jedes $N$, grösser als jede noch so grosse angebbare Zahl, d. h. unendlich gross. Damit ist zugleich festgestellt, dass die Summe einer unendlichen Reihe, deren Endglied verschwindet, bald endlich, bald unendlich ist[1]).

Gleichwohl fühlt Jakob Bernoulli sich durch die Gewissheit, dass die Endglieder der Reihe verschwinden, hinlänglich beruhigt, um mit Hilfe der harmonischen Reihe und anderer ähnlich gestalteten Reihen die Leibnizischen Summen von 1682 (S. 83) abzuleiten. Aus $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ und

$$A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

folgert er mittels gliedweiser Subtraktion

$$\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{4\cdot 6} + \cdots,$$

also auch

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \cdots = \frac{3}{4}.$$

Aus $E = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ und

$$E - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

folgert er ähnlicherweise

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots = \frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

Man kann nicht verkennen, dass Jakob Bernoulli sich bei diesen Schlüssen von einem richtigen Gefühle leiten liess. Nennt man $A_n$ die Summe der $n$ ersten Glieder der harmonischen Reihe, und zieht

[1]) *Summa serici infinitae, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.*



von $A_n$ die Glieder $A_n - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ ab, so ist genau richtig

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)},$$

und dieser Ausdruck geht in der That, weil die späten Glieder der harmonischen Reihe verschwinden, bei $n = \infty$ in $\frac{3}{4}$ über u. s. w. Freilich drückte Jakob Bernoulli sich noch nicht so modern aus, wie wir (S. 82) auch einem Leibnizischen an sich durchaus berechtigten Schlusse gegenüber zu bemerken in der Lage waren.

Den folgenden vier Abhandlungen über Reihen haben wir weitaus nicht so viele hervorragende Ergebnisse zu entnehmen, es sei denn, dass wir entschieden falsche Dinge hervorheben wollten, so falsch, dass man kaum begreifen kann, dass man den gleichen Verfasser vor sich hat, wie in der Abhandlung von 1689. Wenn z. B. 1692 behauptet wird[1]), es sei

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = \frac{2}{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folglich sei durch Addition die ganze harmonische Reihe

$$= \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots,$$

mithin sei weiter $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ die halbe harmonische Reihe, und die fehlenden graden Glieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$ müssten die andere Hälfte bilden. Wenn daraus weiter geschlossen wird, es sei

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$$

trotzdem jedes Glied links einen höheren Werth besitze, als das ihm der Ordnungszahl nach entsprechende Glied rechts, so können wir Jakob Bernoulli, den tiefen Denker, höchstens aus der Zusatzbemerkung erkennen, solches rühre daher, dass beide Reihen, die links ebenso wie rechts, unendlich grosse Summen haben, deren Gleichheit durch den zwischen den einzelnen Gliederpaaren vorhandenen Unterschied nicht beeinträchtigt werde. In dieser zweiten Abhandlung ist

[1]) Jac. Bernoulli Opera I, 530.

auch erstmalig die Reihe der reciproken Quadratzahlen allerdings erfolglos in Angriff genommen. Nicht ohne Interesse sind ferner einige unendliche Operationsfolgen anderer Art als der einfachen Addition[1]). So sagt Jakob Bernoulli, aus $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\cdots}}}} = x$ folge $x^2 = a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\cdots}}} = ax$ und $x = a$; aus

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = x \text{ folge } x^2 = a + \sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}$$
$$= a + x \text{ und } x = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + a} \text{ u. s. w.}$$

In der dritten Abhandlung von 1696 ist die Division $\frac{l}{m+n}$ in Mercatorscher Weise vollzogen. So entsteht

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \cdots,$$

und bei $n = m$ werde daraus

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \cdots,$$

ein nicht unelegantes Paradoxon[2]). Dessen Ursprung sei, dass bei fortgesetzter Division der jedesmalige Rest nicht geringer werde, sondern unverändert $\pm l$ bleibe; es trete also noch $\pm \frac{l}{2m}$ zur Reihe hinzu, und zwar gelte das untere Zeichen, wenn die Reihe bei einem ungraden positiven Gliede abbreche, das obere, wenn die Reihe bis zu einem geraden negativen Gliede fortgesetzt werde. Was sonst in der dritten und den ihr folgenden Abhandlungen bemerkenswerth erscheint, muss an späterer Stelle erst Erwähnung finden.

In dem Abdrucke der Algebra von Wallis in seinen Gesammtwerken[3]) ist von den aufeinanderfolgenden Näherungswerthen eines Kettenbruches die Rede, und dabei sagt Wallis: *Ejusque partes decimales abscissas appendicem voco sive Mantissam.* Das hier erstmalig in mathematischem Gebrauche erscheinende Wort Mantisse[4]) bedeutet einen Ueberschuss. Schon bei dem Grammatiker Festus kommt es in der Bedeutung von Zugabe zu einem Gewichte vor, und damit rechtfertigt sich von selbst die gegenwärtig allgemein übliche Benutzung des Ausdruckes für die Decimalstellen eines Logarithmen. Etymologisch soll *mantissa* von *manus tensa*, die ausge-

[1]) Jac. Bernoulli Opera I, 536—539. [2]) Ebenda II, 751: *unde paradoxum fluit non inelegans.* [3]) Ausgabe von 1693, Bd. II, pag. 41. [4]) P. Tannery in dem *Intermédiaire des mathématiciens* 1899 pag. 181 und A. Desprats ebenda pag. 182.



streckte Hand, sich herleiten, weil der Verkäufer beim Abwägen von Verkaufsgegenständen mit ausgestreckter Hand ein Stückchen nach dem anderen auf die Wage lege, bis das gewünschte Gewicht erreicht sei, und zuletzt noch ein Stückchen zugebe. So soll wenigstens Scaliger behaupten.

Wir haben einige unendliche Ausdrücke, welche nicht durch blosse Addition zusammenhängen, früher bei Vieta (Bd. II, S. 595), bei Wallis und Brouncker (Bd. II, S. 766), zuletzt bei Jakob Bernoulli auftreten sehen. Brouncker hatte den unendlichen Kettenbruch gebildet und mit Kettenbrüchen hat sich auch Huygens beschäftigt[1]). Es war in einer nachgelassenen Schrift *Descriptio automati planetarii*, deren Datirung mit keinerlei Sicherheit zu wagen ist. Veröffentlicht wurde sie 1698 gemeinsam mit anderen Schriften aus Huygens Nachlasse.

Huygens verfolgte bei den Untersuchungen über Kettenbrüche durchaus praktische Zwecke. Er wollte, wie schon die Ueberschrift der Abhandlung zu erkennen gibt, ein Planetarium anfertigen, d. h. ein Modell des ganzen Sonnensystems mit allen Planeten, deren Umläufe durch ein Räderwerk mit in einander greifenden Zähnen geregelt waren. Die Hauptaufgabe bestand daher darin, die Anzahl der Zähne jedes Rades derart zu bestimmen, dass ihr Verhältniss die Umlaufzeiten der einzelnen Planeten den in der Natur gegebenen Zeiten so nahe als möglich entsprechen liess, und zwar diese Absicht durch kleinstmögliche Verhältnisszahlen zu erreichen, weil die praktische Mechanik ihre Grenzen hat und nicht gestattet, beliebig viele einander genau gleiche Zähne in einen Radumfang von mässiger Grösse einzuschneiden. Einmal liegen beispielsweise die Verhältnisszahlen 2 640 858 und 77 708 431 vor, und mit solchen Zahlen an die wirkliche Herstellung von ihnen entsprechenden Vorrichtungen nur von fern herantreten zu wollen ist unmöglich. Huygens erkannte als Mittel zur Beschaffung anderer Verhältnisszahlen die Umwandlung des gegebenen Verhältnisses in das der Einheit zu einer mit einem Kettenbruche versehenen Zahl, d. h.

$$1 : 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}}}}$$

[1]) Eine Zusammenstellung der hierher gehörenden Arbeiten bei S. Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Programm der Lateinschule zu Weissenburg. 1872.

Dann werde, sagt Huygens, bei der fortgesetzten Umwandlung durch immer erneute Divisionen es endlich einmal dahin kommen, dass als Rest bei einer Division die Einheit erscheine[1]), und dann sei naturgemäss die Umwandlung vollendet. Aber mit dieser Umwandlung ist nur der erste Schritt gethan, und der zweite führt dahin, die einzelnen Näherungswerthe des ermittelten Kettenbruches zu finden:

$$29 = 29, \quad 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2},$$

$$29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{147}{5}, \quad 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{206}{7} \text{ u. s. w.}$$

Nun zieht Huygens den Satz V, 1 der euklidischen Elemente in Betracht. Wenn bei zwei ungleichen Zahlen das Kleinere immerfort von dem Grösseren weggenommen wird, und der Rest nicht eher, als bis er die Einheit geworden, die nächste Zahl vor ihm genau misst, so sind erstgenannte Zahlen zu einander theilerfremd. Daraus folgert er sofort, dass Zähler und Nenner der Näherungswerthe theilerfremd, die Näherungswerthe also reduzirte Brüche sein müssen. Einen zweiten Satz spricht er dahin aus, dass kein Bruch mit kleineren Zahlen in Zähler und Nenner dem ursprünglich gegebenen Bruche näher liegen könne als ein Näherungswerth. Der dritte Satz beweist, dass die Näherungswerthe abwechselnd bald kleiner, bald grösser als der ursprünglich gegebene Bruch seien. So weit hat also Huygens die Lehre von den Kettenbrüchen gefördert. Bei seinen Beweisführungen bedient er sich nicht allgemeiner Buchstaben, sondern der Zahlen des bestimmten Beispiels, es dem Leser überlassend, die Allgemeingiltigkeit der Auseinandersetzung einzusehen.

## 87. Kapitel.

### Zahlentheorie. Algebra.

Die Sätze, welche Huygens der Lehre von den Kettenbrüchen abgewann, sind weniger rechnerischer als zahlentheoretischer Natur. Sie bilden dadurch einen willkommenen Uebergang zur Darstellung dessen, was die Mathematiker des letzten Drittels des XVII. Jahrh. auf diesem Gebiete geleistet haben. Keineswegs Unerhebliches, könnte man uns hier vorwerfen, haben wir bereits im II. Bande vorweg-

[1]) *Eo devenitur, ut a divisione tandem unitas supersit.*



genommen. Wir haben Fermats zahlentheoretische Leistungen dort insgesammt zur Sprache gebracht, und doch sind dessen Anmerkungen zu Diophant erst 1670, seine *Opera Varia* erst 1679, Briefe zahlentheoretischen Inhaltes von Fermat, von Brouncker, von Frénicle, von Wallis allerdings schon 1658 (Bd. II, S. 773) gedruckt worden. Man könnte uns vorwerfen, wir seien in unserer Erzählung der Geschichte vorausgeeilt, wir hätten gegen das geschichtliche Gesetz uns verfehlt, dass Erfindungen und Erfinderrechte kein früheres Datum tragen als das der Veröffentlichung. So bereitwillig wir diesen Vorwürfen Berechtigung zugestehen, so können wir doch zwei wesentliche Entschuldigungsgründe für unser Verfahren in Anspruch nehmen. Erstlich blieben Fermats zahlentheoretische Leistungen durchaus nicht ganz geheim. Durch Briefe und Gespräche wurden viele seiner Sätze bekannt, lange bevor sie gedruckt waren. Zweitens aber hat eine Bestreitung von Fermats Anrecht an seine zahlentheoretischen Erfindungen niemals stattgefunden und konnte auch nicht stattfinden. Vor der Veröffentlichung wie nach der Veröffentlichung blieben die Fermatschen Sätze sein ausschliessliches Eigenthum, da niemand im Stande war, sie zu beweisen, wenn es auch nicht an Versuchen dazu gefehlt hat. Deshalb durften wir Fermat als Zahlentheoriker im II. Bande behandeln. Andrerseits freilich müssen wir gegenwärtig auf die erwähnten Drucklegungen von 1658, von 1670, von 1679, von 1693 in der Ausgabe von Wallis' Werken hinweisen. Sie haben für uns neben dem, was sie enthalten, eine geschichtliche Bedeutung. Sie liefern den Beweis, dass damals Mathematiker von Fach durch Veröffentlichungen, denen vermöge des Namens ihres Verfassers ein weiter Leserkreis gesichert war, auf die Zahlentheorie hingewiesen wurden und lassen es dem gegenüber nur um so auffallender erscheinen, dass der reichlich ausgestreute Samen kaum an wenigen Stellen zum Keimen kam.

Wallis selbst muss hier wegen einer Leistung rühmend genannt werden. Er hat sich im 88. und 89. Kapitel seiner Algebra mit den bei der Division entstehenden Reihen und vergleichend mit der Verwandlung von Brüchen in Decimal- und Sexagesimalbrüche beschäftigt. Er will bei dieser Verwandlung den Bruch zunächst reducirt wissen, ein Kunstausdruck, den er hier für die Kürzung des Bruches durch den grössten Gemeintheiler von Zähler und Nenner einführt. Enthält der Nenner des reducirten Bruches keine anderen Grundtheiler als 2 und 5, so verwandelt sich der Bruch in einen geschlossenen Decimalbruch. Enthält der Nenner noch andere Grundtheiler, so ist der Decimalbruch endlos, *Quotiens est interminata.* Alsdann ergibt sich, dass nach einer gewissen Fortsetzung des Verfahrens die gleichen

Zahlen wie zuerst und in der gleichen Ordnung immer wieder auftreten, *redeunt iidem numeri et eodem ordine circulantur quo primo.* Die Anzahl der so cyklisch wiederkehrenden Ziffern kann nicht grösser als der um die Einheit verminderte Divisor sein, häufig ist sie ein Untervielfaches jener Zahl. Damit war also die Lehre von den periodischen Decimalbrüchen und in ihr ein wichtiges Kapitel der Zahlentheorie in Angriff genommen.

Auch einzelne Aufgaben zahlentheoretischer Natur wurden noch immer gestellt. In den Zeitschriften war z. B. von einer Aufgabe Renaldinis die Rede (S. 23), die darin bestand, drei Zahlen $x, y, z$, von der Beschaffenheit zu finden, dass

$$x^2 - y^2, \quad x^2 - z^2, \quad y^2 - z^2, \quad x - y, \quad x - z, \quad y - z$$

insgesammt Quadratzahlen seien[1]).

Leibniz hat 1678 es für mittheilungswürdig gehalten, dass Primzahlen stets einer der Formen $6n - 1$ oder $6n - 5$ angehören[2]), nicht einmal dahin sich erhebend, die beiden Formen als $6n \pm 1$ zu vereinigen. Derselbe Schriftsteller hat aus der Formel

$$\frac{y(y-1)\cdots(y-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

für die Combinationen zu je $k$ von $y$ unter einander verschiedenen Elementen und aus der Ganzzahligkeit, welche dem Ausdrucke vermöge seines Sinnes anhaften muss, Schlüsse auf die Theilbarkeit eines Produktes auf einander folgender Zahlen durch ein ähnlich gebautes Produkt gezogen[3]). Er hat auch mit der Gleichung $y^2 = x + \frac{a}{x}$ sich beschäftigt[4]), sowie mit dem Satze, dass die Fläche eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks kein Quadrat sein könne[5]). Das sind sehr geringfügige Leistungen, doppelt geringfügig als solche eines Leibniz, der die Pflicht gehabt hätte, wo er Hand anlegte, Hervorragendes zu schaffen.

In Frankreich können wir als einen Gelehrten, welcher der Zahlentheorie einiges Nachdenken widmete, Claude Jaquemet[6]) (1651—1729) nennen. Er gehörte der Congregation der Priester vom Oratorium Jesu an, einer 1614 in Frankreich entstandenen nicht klösterlichen Brüderschaft, welche sich ziemlich rasch verbreitete. Zu ihren Mitgliedern zählte sich auch Nicolas Malebranche (1638 bis 1715), dessen Thätigkeit zwar der Hauptsache nach eine philosophische war, der aber auch der Mathematik Interesse entgegenbrachte. Man hatte deshalb handschriftlich in der Pariser Bibliothek erhaltene zahlentheoretische Bruchstücke zuerst Malebranche zugeschrieben und sie unter seinem Namen veröffentlicht[1]), bis nachträglich erkannt wurde, dass Jaquemet der Verfasser war. Die Bruchstücke beziehen sich auf drei Fragen. Erstlich ist der Versuch gemacht, den Fermatschen Unmöglichkeitssatz ($x^n + y^n = z^n$ bei ganzzahligen Werthen von $x, y, z, n$ unmöglich, sofern $n > 2$) zu beweisen. Der Beweis ist nicht richtiger als alle späteren, die von elementarer Grundlage ausgingen und nicht mit besonderen Zahlenwerthen von $n$ sich begnügten, aber es ist immerhin ein erster Versuch, die Sache allgemein anzufassen. Dabei ist gelegentlich ein Satz ausgesprochen, welcher vielleicht selbst, namentlich aber wegen des Beweisganges Erwähnung verdient. Er lautet folgendermassen: Ist $z$ eine positive ungerade Zahl, so ist bekanntlich

$$x^z + y^z = (x + y)(x^{z-1} - x^{z-2}y + \cdots + y^{z-1});$$

sind nun die gleichfalls positiven ganzen Zahlen $x, y$ theilerfremd, so haben die beiden Faktoren $x + y$ und $x^{z-1} - x^{z-2}y + \cdots + y^{z-1}$ nur entweder $z$ oder irgend einen Faktor von $z$ als Gemeintheiler. Sei $d$ dieser Gemeintheiler, so wird er, weil in $x + y$, auch in

$$(x + y)x^{z-2} = x^{z-1} + x^{z-2}y$$

und ebenso in

$$\begin{aligned} x^{z-1} - x^{z-2}y + \cdots + y^{z-1} - [x^{z-1} + x^{z-2}y] \\ = -2x^{z-2}y + x^{z-3}y^2 - \cdots + y^{z-1} \end{aligned}$$

enthalten sein. Ein ähnlicher Schluss führt dazu, dass $d$ in

$$3x^{z-3}y^2 - \cdots + y^{z-1}$$

enthalten sein muss, schliesslich in $zx^{z-z}y^{z-1} = zy^{z-1}$. Bei der Theilerfremdheit von $x$ und $y$ kann $d$, der Theiler von $x + y$, nicht Theiler von $y$ sein, also auch nicht von $y^{z-1}$, daher muss $d$ in $z$ enthalten sein, der Fall $d = 1$ mit eingeschlossen. Zweitens hat Jaquemet in jenen Bruchstücken bewiesen, dass eine ganze Zahl, die nicht die Summe zweier ganzzahliger Quadrate ist, auch nicht Summe zweier gebrochener Quadrate sein kann, und an diesen Satz knüpft sich die dritte Untersuchung an, in welcher er mit der Gleichung $Ax^2 + 1 = y^2$ sich beschäftigt[1]). Jaquemet zeigt hier unter Anderem, dass aus einem Werthepaare $x = \alpha$, $y = \beta$ ein zweites $x = 2\alpha\beta$,

[1]) A. E. 1685 pag. 176. [2]) Leibniz VII, 119—120. [3]) Ebenda VII, 101—113. [4]) Ebenda VII, 114—119. [5]) Ebenda VII, 120—125. [6]) Aristide Marre, *Deux mathématiciens de l'Oratoire* (im *Bulletino Boncompagni* XII, 886—894).

[1]) Ch. Henry im *Bulletino Boncompagni* XII, 565—568. [2]) *Bulletino Boncompagni* XII, 646—648 und ebenda 893.

$y = 2Aa^2 + 1$ sich ableitet und durch Fortsetzung dieses Verfahrens beliebig viele Werthepaare.

Ein anderer französischer Zahlentheoretiker war Jean Prestet († 1690). Wenigstens hat er in seinen *Elemens des Mathematiques*[1]), welche erstmalig 1675 und dann in wiederholten Auflagen erschienen, in jenes Gebiet einschlagende Aufgaben behandelt. Prestets Lehrbuch war sehr geschätzt. Aus ihm hat De Moivre (S. 86), dem nur ein sehr mangelhafter Unterricht in der Mathematik zu Theil wurde, die Kenntnisse sich angeeignet, welche ihn hernach zu eigenen Entdeckungen befähigten. Wallis hat in seiner englischen Algebra von 1685 das Werk als eine nahezu vollständige Zusammenstellung alles dessen geschildert, was auf algebraischem Gebiete vorhanden sei, Eigenes finde man dagegen wenig oder gar nicht; auch die wirklichen Erfinder nenne der Verfasser nicht, es sei denn, dass es seine Landsleute Vieta und Descartes seien. Für den Verfasser des anonym erschienenen Werkes[2]) hielt Wallis den oben von uns genannten Nicolas Malebranche. Prestet verwahrte sich in der mit Namensunterschrift versehenen Vorrede der zweiten Auflage von 1689 gegen die ihm gemachten Vorwürfe. Auch andere Schriftsteller als Vieta und Descartes werde der aufmerksame Leser erwähnt und gerühmt finden. Seine Eigenschaft als Verfasser hielt Prestet in der bescheiden klingenden Form aufrecht, Wallis habe das Werk einer geschickteren Persönlichkeit zugeschrieben als er selbst sei[3]). Der Vorwurf, von welchem Prestet nichts sagt, dass in dem Lehrbuche Eigenes nur in geringem Maasse oder gar nicht zu finden sei, scheint mindestens übertrieben Prestet hat z. B. mit vollkommenen Zahlen sich beschäftigt[4]) und die acht ersten derselben, die achte als 19ziffrige Zahl, ausgerechnet. Die neunte vollkommene Zahl sei $2^{513} - 2^{256}$. Ausserdem hat Prestet muthmasslich zuerst eine Recursionsformel aufgestellt[5]), welche die Summe der $m$ten Potenzen von in arithmetischer Progression gegebenen Zahlen

$$S_m = a^m + (a + r)^m + \cdots + (a + (n - 1)r)^m,$$

mittels der Summen $S_{m-1}$, $S_{m-2}$, $\cdots$ der niedrigeren Potenzen derselben Zahlen darstellt.

Auch Jaques Ozanam[6]) (1640—1717) ist hier zu nennen wegen eines Aufsatzes im Journal des sçavans von 1680, der den

[1]) *Bulletino Boncompagni* XII, 562. [2]) Nur die Vorrede ist in wenig deutlicher Weise mit J. P. gezeichnet. [3]) *mes premiers Elemens des Mathématiques qu'il attribue à une personne plus habile que moy.* [4]) *Bulletino Boncompagni* XI, 784. [5]) Ebenda X, 300. [6]) *Mémoires de l'Académie des Sciences.* Paris, 1717.



Fermatschen Unmöglichkeitssatz in dem besonderen Falle $n = 4$ behandelt. Weitaus bekannter ist Ozanam durch seine *Récréations mathématiques*, eine Aufgabensammlung von der Art wie Bachet de Meziriac, Leurechon, Schwenter (Bd. II, S. 768—770) sie verfasst hatten, und welche in Frankreich wenigstens ihre Vorgänger bald verdrängte, wofür die zahlreichen Auflagen des Buches den Beweis liefern. Bachet de Meziriac hat (Bd. II, S. 768) zur Herstellung magischer Quadrate die Terrassenmethode ersonnen, Frénicle hat sie in einem 1693 gedruckten Aufsatze erweitert, Ozanam hat in seiner Aufgabensammlung diesem Gegenstande seine Aufmerksamkeit zugewandt[1]).

Von den soeben erwähnten älteren Schriftstellern hat Bachet de Meziriac deutlicher, als es je vor ihm geschehen war, die Aufgabe betont, unbestimmte Gleichungen durch ganzzahlige Wurzelwerthe zu befriedigen. Er trat auch selbst an die Lösung der Aufgabe heran, wenngleich sein Verfahren kaum mehr als eine versuchsweise Annahme aufeinander folgender Zahlen für die eine der beiden Unbekannten der Gleichung war (Bd. II, S. 772). Ein anderer französischer Schriftsteller, Michel Rolle[2]) (1652—1719), seit 1685 besoldetes Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften, *géomètre pensionnaire*, ging wesentlich darüber hinaus. Er veröffentlichte 1690 einen *Traité d'Algèbre*[3]), mit dem wir es im weiteren Verlaufe dieses Kapitels noch einmal zu thun bekommen. Das VII. Kapitel des I. Buches führt die Ueberschrift *Eviter les fractions*[4]) und handelt von der ganzzahligen Auflösung unbestimmter Gleichungen. Rolle hat die Regel, welche er benutzt wissen will, in allgemeinen Worten ausgesprochen, aber da er nichts weniger als leicht zu schreiben wusste, so ziehen wir es vor, das Verfahren an dem ersten dort behandelten Beispiele $12z - 221h = 512$ kennen zu lernen. Wir bedienen uns dabei der von Rolle benutzten Buchstaben. Als Gleichheitszeichen gebrauchen wir das gewöhnliche, während Rolle nur das von Descartes eingeführte $\infty$ (Bd. II, S. 794) anwendet. Man soll die Gleichung so umordnen, dass die Unbekannte, welche den niedrigsten Zahlencoefficienten besitzt, allein links vom Gleichheitszeichen stehen bleibt, also $12z = 221h + 512$. Nun dividirt man den grösseren Zahlencoefficienten 221 durch den kleineren 12 und findet 18 als Quotienten und 9 als Rest. Mithin ist, abgesehen von der unberück-

[1]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876) S. 235—239 und 249—250. [2]) *Mémoires de l'Académie des Sciences.* Paris, 1719. [3]) Die Jahreszahl des Erscheinens ist durch einen Druckfehler als M.DC.LXC angegeben. [4]) Rolle, *Traité d'Algèbre* pag. 69—78.

sichtigt bleibenden Constanten 512, die $z > 18h$ und man setzt $z = 18h + p$. Dieser Substitutionswerth macht aus der ersten Gleichung $216h + 12p = 221h + 512$ oder $5h = 12p - 512$, indem wieder die Umordnung vorgenommen ist, welche die Unbekannte mit dem niedrigsten Zahlencoefficienten allein auf die linke Seite bringt. Indem $5h$ mit $12p$ allein verglichen wird, erscheint $h > 2p$, und man setzt $h = 2p + s$ in $5h = 12p - 512$. So erhält man

$$10p + 5s = 12p - 512, \text{ beziehungsweise } 2p = 5s + 512.$$

Man sieht sofort, dass nun $2p$ mit $5s$ in Zusammenhang gebracht $p = 2s + m$ liefert, und dass alsdann $4s + 2m = 5s + 512$ beziehungsweise $s = 2m - 512$ folgt, womit die Aufsuchung neuer Substitutionswerthe abgeschlossen ist, weil $s$ den Zahlencoefficienten 1 besitzt. Die gefundenen Gleichungen schreiben wir in umgekehrter Reihenfolge an:

$$\begin{aligned} s &= 2m - 512 \\ p &= 2s + m \\ h &= 2p + s \\ z &= 18h + p. \end{aligned}$$

Rolle nennt diese Zusammenstellung die Rückkehrsäule, *colonne de retour*. Jede Gleichung wird zur Umformung der ihr nachfolgenden benutzt, und so entsteht der Reihe nach:

$$\begin{aligned} s &= 2m - 512, \\ p &= 5m - 1024, \\ h &= 12m - 2560, \\ z &= 221m - 47104. \end{aligned}$$

Jedes ganzzahlige $m$ liefert in die Schlussgleichungen eingesetzt ganzzahlige $h$ und $z$. Will man diese kleinstmöglich positiv haben, so muss $12m > 2560$ d. h. $m > 213$ und $221m > 47104$ d. h. $m > 213$ sein. Beiden Bedingungen genügt $m = 214$, und man hat $h = 8$, $z = 190$, welche in der That $12z - 221h = 512$ erfüllen. Das unmittelbar sich anschliessende VIII. Kapitel[1]) geht unter der Ueberschrift *Eviter les nombres negatifs* noch näher auf die Auswahl einer Zahl ein, welche gegebene Ausdrücke positiv werden lässt. Sollen z. B. $-14 + 7z$, $-30 + 10z$, $32 - 8z$, $45 - 9z$, $66 - 11z$ positiv sein, so muss gleichzeitig hervorgebracht werden $7z > 14$, $10z > 30$ und $8z < 32$, $9z < 45$, $11z < 66$ oder $z > 2$, $z > 3$ und $z < 4$, $z < 5$, $z < 6$. Von den beiden ersten Ungleichungen schliesst die zweite die erste, von den drei letzten die erste die übrigen ein.

[1]) *Traité d'Algèbre* pag. 78—86.



Sämmtliche Bedingungen vereinigen sich also zu $3 < z < 4$, und jedes $z$ innerhalb dieses Zwischenraumes macht die fünf gegebenen Ausdrücke positiv, bei der so gestellten Aufgabe allerdings nicht zugleich auch ganzzahlig. Im Jahre 1699 liess Rolle noch ein besonderes Bändchen von 68 Quartseiten erscheinen: *Méthodes pour resoudre les questions indéterminées de l'Algèbre*, in welchem unbestimmte Gleichungen höherer Grade behandelt sind.

Der Titel von Rolles Buch von 1690 *Traité d'Algèbre* führt uns leicht hinüber zum zweiten Gegenstande, der in der Ueberschrift dieses Kapitels neben der Zahlentheorie genannt ist, zur Geschichte der Algebra. An ihrer Spitze erscheint wieder die uns schon bekannte Abhandlung Newtons von 1669, seine *Analysis per aequationes* (S. 69).

Nach der Reihenentwicklung durch Wurzelausziehung (S. 71) kommt der Verfasser auf die Auflösung von Zahlengleichungen, welche durch fortgesetzte Annäherung an den Wurzelwerth in Gestalt einer Reihe von mehr und mehr in Betracht zu ziehenden Gliedern erreicht wird, mithin vollständig in das Bereich derjenigen Untersuchungen fällt, denen die Analysis per aequationes gewidmet ist. Allerdings setzt Newtons Methode[1]) voraus, dass eine gewisse Annäherung schon vollzogen sei. Er nimmt nämlich als gegeben an, dass die Voraussetzung $y = 2$ als Wurzelwerth der Gleichung

$$y^3 - 2y - 5 = 0,$$

welche als Beispiel dient, um weniger als den zehnten Theil vom genauen Wurzelwerthe sich unterscheide. Hierauf wird $y = 2 + p$ in die Gleichung eingesetzt, welche dadurch in

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

übergeht. Weil nun $p$ nur einen in Zehnteln darstellbaren Werth besitzt, so ist unter vorläufiger Vernachlässigung der höheren Potenzen von $p$ zunächst $10p - 1 = 0$, $p = 0{,}1$ und genau $p = 0{,}1 + q$. Die Einsetzung dieses Werthes in die für $p$ gefundene Gleichung liefert $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, in welcher neuen Gleichung die Unbekannte $q$ nur aus Hunderteln besteht. Um so berechtigter ist die vorläufige Vernachlässigung der höheren Potenzen von $q$. Aus $11{,}23q + 0{,}061$ entsteht aber $q = -0{,}0054$ und genau

$$q = -0{,}0054 + r.$$

Die Fortsetzung des gleichen Verfahrens führt zu

$$r = \frac{-0{,}000\,541\,708}{11{,}161\,96} = -0{,}000\,048\,53.$$

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 10—12.

Mithin ist

$$y = 2 + 0{,}1 - 0{,}0054 - 0{,}000\,048\,53 = 2{,}094\,551\,47.$$

Newton benutzt weiter ein dieser Methode nachgebildetes Verfahren, um aus einer zwei Unbekannte $x$ und $y$ enthaltenden Gleichung die eine, etwa $y$, in eine nach Potenzen von $x$ fortlaufende Reihe zu entwickeln, und zwar in eine steigende[1]), wenn man weiss, dass $x$ sehr klein, in eine fallende[2]), wenn man weiss, dass $x$ sehr gross ist. Sei z. B. bei kleinem $x$ die Gleichung

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

vorgelegt. Wäre $x$ so klein als irgend möglich, d. h. Null, so wäre einfacher $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ und $y = a$. Dieses erste Reihenglied ergänzt man zu $y = a + p$, und die Einsetzung des vervollständigten Werthes von $y$ in die ursprüngliche Gleichung liefert

$$4a^2p + 3ap^2 + p^3 + a^2x + apx - x^3 = 0,$$

von welcher nur die Glieder zunächst benutzt werden, welche nach $x$ und nach $p$ vom ersten Grade sind, also

$$4a^2p + a^2x = 0, \quad p = -\frac{x}{4}.$$

Der rohe Werth von $p$ ergänzt sich zu $p = -\frac{x}{4} + q$, welches dann in die zwischen $a$, $p$ und $x$ gegebene Gleichung eingeführt wird. Man sieht, wie die Rechnung weiter verläuft, wie $q = \frac{x^2}{64a} + r$ gefunden wird u. s. w. Zuletzt ist

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16\,384a^3} + \text{etc.}$$

Ist dagegen bei grossem $x$ die Gleichung

$$y^3 + x^2y - 2x^3 + axy - a^3 = 0$$

vorgelegt, welche aus der Gleichung des vorher behandelten Falles durch Vertauschung von $a$ mit $x$ entsteht, so berücksichtigt man zunächst nur diejenigen Glieder, in welchen $y$ und $x$ zusammen vom dritten Grade sind: $y^3 + x^2y - 2x^3 = 0$. Daraus folgt roh $y = x$, genau $y = x + p$. Einsetzung dieses Werthes in die gegebene Gleichung verwandelt sie in

$$(4p + a)x^2 + (3p^2 + ap)x + p^3 = 0$$

mit überwiegendem Anfangsgliede. Mithin ist $(4p + a)x^2 = 0$ zu setzen, roh $p = -\frac{a}{4}$ und genau $p = -\frac{a}{4} + q$, wo $q$ bereits klein gegenüber von $a$ ist. Substitution des Werthes von $p$ lässt

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 12—15. [2]) Ebenda I, 15—18.



$$4qx^2 - \frac{1}{16}a^2x - \frac{1}{2}aqx - \frac{a^3}{64} + 3q^2x + \frac{3}{16}aq^2 + q^3 = 0$$

entstehen. Hier sind $4qx^2 - \frac{1}{16}a^2x$ die höchstwerthigen Glieder, deren Nullsetzung roh $q = \frac{a^2}{64x}$ und genau $q = \frac{a^2}{64x} + r$ liefert u. s. w. Mithin wird $y = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16\,384x^3} + \text{etc.}$, ein Ergebniss, welches naturgemäss aus dem des vorhergehenden Falles gleichfalls durch Vertauschung von $x$ mit $a$ entsteht. Die eigentliche Ausrechnung gibt Newton nur für die Glieder $x - \frac{a}{4}$.

Man erkennt leicht, dass Newton sich um die Convergenz der entstehenden Reihen wenigstens so weit kümmerte, als er, je nach dem Werthe von $x$, ein anderes Fortschreitungsgesetz der Glieder zur Geltung kommen liess. Man erkennt ferner, dass die Umkehrung der Reihen, von der (S. 72—73) die Rede war, nur ein Fall der *Literalis aequationum affectarum resolutio*, d. h. der Auflösung einer mit Zusatzgliedern behafteten Gleichung in Buchstaben, ist, wie Newton die soeben von uns besprochene Aufgabe nannte.

Newtons Gleichungsauflösungen fanden ihre erste Veröffentlichung im Drucke in der Algebra von Wallis, und zwar ebenso in deren englischen Ausgabe von 1685 als in der lateinischen von 1693. Ebenda wurde auch ein Abschnitt des (S. 69—71) von uns erwähnten Newtonschen Briefes vom 24. October 1676 abgedruckt, welcher das sogenannte Newtonsche Parallelogramm[1]) erläuterte.

Newton gab nämlich in diesem mittelbar für Leibniz bestimmten Briefe folgende Methode zur Auflösung der Gleichung

$$y^6 + 5xy^5 + \frac{x^2}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0,$$

beziehungsweise zur Auffindung des Anfangsgliedes der Reihe, in welche $y$ entwickelt werden soll, weil nach seiner Feststellung die Ergänzungen $p, q, r \cdots$ wesentlich leichter zu ermitteln sind. In der vorgelegten Gleichung ist $y^6$ das höchste Vorkommen von $y$, $x^4$ das höchste Vorkommen von $x$. Man bildet (Figur 11) ein aus $(6+1)(4+1) = 35$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^4$ | $x^4y$ | $x^4y^2$ | $x^4y^3$ | $x^4y^4$ | $x^4y^5$ | $x^4y^6$ |
| $x^3$ | $x^3y$ | $x^3y^2$ | $x^3y^3$ | $x^3y^4$ | $x^3y^5$ | $x^3y^6$ |
| $x^2$ | $x^2y$ | $x^2y^2$ | $x^2y^3$ | $x^2y^4$ | $x^2y^5$ | $x^2y^6$ |
| $x$ | $xy$ | $xy^2$ | $xy^3$ | $xy^4$ | $xy^5$ | $xy^6$ |
| $o$ | $y$ | $y^2$ | $y^3$ | $y^4$ | $y^5$ | $y^6$ |

Fig. 11.

[1]) Kästner, Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen. III. Auflage (Göttingen, 1794), S. 419—476. — S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig, 1876), S. 136—187. — Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, S. 35—37.

kleinen Rechteckchen bestehendes Rechteck und bezeichnet die sieben Rechteckchen an der Basis von links nach rechts mit $0, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6$, die fünf linken Randrechteckchen von unten nach oben mit $0, x, x^2, x^3, x^4$. Sämmtliche übrigen Rechteckchen werden gleichfalls bezeichnet, und zwar jedes mit dem Produkte der senkrecht darunter beziehungsweise zu äusserst links stehenden Randrechteckchen, so dass also die sämmtlichen Glieder der Gleichung, freilich ohne Zahlencoefficienten, als Bezeichnungen einzelner Rechteckchen vorkommen. In einer zweiten durchaus ähnlich gebildeten Zeichnung (Figur 12) werden die Felder der in der Gleichung vorkommenden Glieder durch Sternchen bemerkbar gemacht. Nun nimmt Newton ein Lineal und legt dasselbe an die linke untere Ecke des tiefstliegenden mit einem Sternchen versehenen linken Randfeldes. Um diesen Punkt als Drehungspunkt dreht er das Lineal von links nach rechts, bis es wieder an die linke untere Ecke eines durch ein Sternchen ausgezeichneten Feldes gelangt. Dann werden aus der vorgelegten Gleichung die zwei oder auch mehrere Glieder, deren Felder das Lineal an der linken unteren Ecke berührt, ausgesucht und aus ihnen sammt ihren Zahlencoefficienten eine Gleichung gebildet, welche das Anfangsglied der Entwicklung für $y$ liefert. In dem gegebenen Beispiele sind die mit Sternchen versehenen dem Lineale anliegenden Felder die mit den Bezeichnungen $x^3, x^2y^2, y^6$. Die neue Gleichung enthält somit nur die Glieder $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$. Ihr genügen die vier Wurzeln

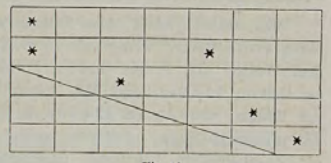

Fig. 12.

$$y = \sqrt{ax}, \quad y = -\sqrt{ax}, \quad y = \sqrt{2ax}, \quad y = -\sqrt{2ax},$$

und jeden dieser vier Werthe darf man als Anfang einer Entwicklung von $y$ benutzen, je nachdem man sich entschlossen hat, den einen oder den anderen Wurzelwerth zu ermitteln[1]). Die beiden noch übrigen Wurzeln der Hilfsgleichung: $y = \pm\sqrt{-3ax}$ lässt Newton unberücksichtigt, da er zwar positive und negative Gleichungswurzeln anerkennt, imaginäre aber noch nicht.

Ausser in dem Briefe vom 24. October 1676 hat Newton sein Parallelogramm auch in der Abhandlung *Methodus fluxionum et serie-*

[1]) *quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.*



*rum infinitarum*[1]) auseinandergesetzt. Die Abhandlung war gegen Ende 1671 druckfertig und sollte, wie Collins in an Borelli und an einen damals in Paris verweilenden Engländer Francis Vernon gerichteten Briefen vom December 1671 mittheilte[2]), als Anhang zu einer von Newton vorbereiteten neuen Ausgabe der Algebra oder *Stel-konst* eines holländischen Mathematikers Gerhard Kinckhuysen erscheinen, deren erste Auflage von 1661 stammt. Als diese unterblieb, war Newtons nächste Absicht, welche gleichfalls etwa 1671 gefasst wurde, die mathematische Abhandlung einem optischen Werke beizugeben[3]). Auch daraus wurde nichts. Vielmehr erschien die Methodus fluxionum erst 1736, also 10 Jahre nach Newtons Tode in englischer von John Colson herrührender Uebersetzung mit fortlaufenden Erläuterungen. Ob, beziehungsweise welche Veränderungen Newton nach 1671 an seiner Abhandlung vorgenommen hatte, wird in anderem Zusammenhange im 89. Kapitel besprochen werden müssen. Auch in der Methodus fluxionum ist das Parallelogramm nur beschrieben, nicht bewiesen, und von den durch Andere nachträglich gelieferten Beweisen wird erst innerhalb der Zeit, zu welcher dieselben entstanden, zu reden sein.

Newton hatte mit seinen Regeln zur näherungsweisen Auflösung der Gleichungen einen ziemlich grossen Schritt über das von Stevin, von Vieta, von Harriot Erreichte hinaus vollzogen, aber — wir müssen stets darauf zurückkommen — es dauerte in England geraume Zeit, bis man die Analysis per aequationes, die seit 1669 bei Collins in keineswegs geheimer Verwahrung lag, richtig würdigte (S. 68). In den Jahren 1673 und 1674 erschien dort eine zweibändige Algebra von John Kersey[4]) (1616—1690?) unter dem Titel *The elements of mathematical art commonley called algebra*, welche alsbald nach ihrem Erscheinen als ein klassisches Werk betrachtet wurde. Leibniz hat in einem nachgelassenen Aufsatze über die Entwicklungsgeschichte der Algebra[5]) das Kerseysche Werk als eine wohlausgestattete und reiche Vorrathskammer der Algebra bezeichnet. Schon vor dem Erscheinen kamen 1672 in dem VIII. Bande der P. T. lobpreisende Ankündigungen. Wallis und Collins selbst waren deren Verfasser, aber Collins macht hier auch nicht die leiseste Anspielung auf Newtons Untersuchungen, es ist, als wenn sie für ihn nicht vorhanden gewesen wären.

Auch Leibniz hat zu verschiedenen Zeiten mit der Lehre von den Gleichungen sich beschäftigt, vor wie nach dem ersten Londoner

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 31—199, besonders pag. 41 sqq. [2]) *Commerc. epistol.* pag. 81. [3]) Ebenda pag. 126—127. [4]) *National Biography* (edited by Sidney Lee), XXI, 69. [5]) Leibniz VII, 215—216.

Aufenthalte von 1676, aber seine Arbeiten beziehen sich nicht auf die Auffindung von Näherungswerthen der Wurzeln numerischer Gleichungen. Die ersten Arbeiten schlossen sich während seines Pariser Aufenthaltes an das Studium der Bombellischen Algebra an, zu welchem Leibniz die Anregung von Huygens erhalten hatte, und ihre Ergebnisse finden sich in dem zwischen Leibniz und Huygens damals geführten Briefwechsel[1]) und in einem vielleicht damals entstehenden Abhandlungsentwurfe[2]) über kubische Gleichungen und deren in imaginärer Form auftretenden reellen Wurzeln. Namentlich die von Leibniz aufgestellte Identität

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

machte auf Huygens einen überraschenden Eindruck. Zur wirklichen Einsicht in diese räthselhaften Formen war aber die Zeit noch nicht gekommen, und Leibnizens Formel war zwar ein auffallendes Beispiel, brachte aber die Frage nach dessen eigentlicher Bedeutung um keinen Schritt weiter, hätte vielleicht diesen Erfolg kaum haben können, wenn es der Oeffentlichkeit übergeben worden wäre.

Von viel grösserer Tragweite ist ein Gegenstand, dessen Keim schon 1676 nachweisbar ist, den Leibniz dann wieder in einem Briefwechsel, welchen er 1693 mit dem Marquis de l'Hospital führte, und in nachgelassenen Aufsätzen behandelte, und bei welchem die Glanzseite Leibnizischen Denkens, seine formale Erfindungsgabe, wie wir sagen möchten, in das hellste Licht trat. Guillaume François Marquis de l'Hospital[3]) (1661—1704) gehörte den höchsten französichen Adelskreisen an. Einige Jahre lang war er Rittmeister in der Armee seines Vaterlandes, dann zog er sich in ein wissenschaftlich erfülltes Privatleben zurück. Er stand in Briefverkehr mit Huygens, in persönlichen Beziehungen zu Johann Bernoulli, während dieser in Paris verweilte; seit Ende 1692 war auch ein Briefwechsel mit Leibniz im Gange. Wir haben im vorigen Kapitel (S. 80) von dem Aufsatze *Compendium quadraturae arithmeticae* gesprochen, welcher muthmasslich 1676, wenn nicht schon 1675 vollendet war. In diesem Aufsatze dürfte Leibniz zum ersten Male Stellenzeiger oder Indices (Bd. II, S. 751) angewandt haben, um Punkte derselben Gattung mit dem gleichen Buchstaben benennen zu können, ohne doch befürchten zu müssen, durch diese Gleichnamigkeit Verwechslungen hervorzurufen. Die einer und derselben Curve angehörenden Punkte nannte er[4]) insgesammt $C$, fügte aber links unten die Stellenzeiger 1, 2, 3, 4, 5 hinzu, so dass von Punkten ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$, ${}_4C$, ${}_5C$ die Rede

[1]) Leibniz II, 11—15. [2]) Ebenda VII, 138—154. [3]) *Mémoires de l'Académie des sciences.* Paris 1704. [4]) Leibniz V, 100.



ist. Eine ähnliche Benutzung von Stellenzeigern liegt gedruckt in der *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum* in den A. E. von 1691 vor. Dort sind[1]) Punkte $H$, $d$, $l$, $q$ durch links angebrachte Stellenzeiger unterschieden. In einem Briefe an den Marquis de l'Hospital vom 28. April 1693 ging Leibniz über diese frühere nicht hoch genug zu schätzende Neuerung abermals einen gewaltigen Schritt hinaus[2]): er erfand, wie wir heute sagen, die Anwendung mehrfacher Stellenzeiger, er benutzte sie zur Auflösung des Eliminationsproblems. Seien drei Gleichungen (1), (2), (3) vorgelegt, in welchen eine erste Unbekannte $x$, eine zweite Unbekannte $y$ vorkommen, deren Entfernung beabsichtigt ist, so könne man, sagt Leibniz, die neun vorkommenden Coefficienten je zweiziffrig schreiben, so dass die erste Ziffer erkennen lasse, ob der Coefficient der (1), (2), (3) Gleichung angehöre, die zweite, ob er in Verbindung mit keiner, der 1. oder der 2. Unbekannten auftrete. Die drei Gleichungen heissen dementsprechend:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 10+11x+12y=0\\
&(2)\quad 20+21x+22y=0\\
&(3)\quad 30+31x+32y=0.
\end{aligned}$$

Die Wegschaffung von $y$ zwischen (1) und (2), beziehungsweise zwischen (1) und (3) liefert zwei neue Gleichungen, denen Leibniz die Namen (4) und (5) beilegt. Sie heissen, sagt er,

$$\begin{aligned}
&(4)\quad 10\cdot 22-12\cdot 20+11\cdot 22x-12\cdot 21x=0\\
&(5)\quad 10\cdot 32-12\cdot 30+11\cdot 32x-12\cdot 31x=0
\end{aligned}$$

und wir bemerken dabei auch den Punkt als Multiplikationszeichen, den Leibniz hier gebrauchte, ohne besonders darauf aufmerksam zu machen. Nun sei, fährt Leibniz fort, zwischen (4) und (5) die Unbekannte $x$ wegzuschaffen und das führe zu

$$\begin{aligned}
&1_0\cdot 2_1\cdot 3_2 \quad 1_0\cdot 2_2\cdot 3_1\\
&1_1\cdot 2_2\cdot 3_0 = 1_1\cdot 2_0\cdot 3_2\\
&1_2\cdot 2_0\cdot 3_1 \quad 1_2\cdot 2_1\cdot 3_0.
\end{aligned}$$

Man könne, wenn man die Rechnung fortsetze, zu einem allgemeinen Lehrsatze gelangen. Es handle sich schliesslich immer um die Gleichsetzung gewisser Produkte, in deren jedem je ein Coefficient aus jeder Gleichung vorkomme. Wir haben kaum nöthig darauf aufmerksam zu machen, dass bei Leibnizens Schlussgleichung die zweiten Ziffern der vorher zweiziffrig auf gleicher Zeile geschriebenen Coefficienten

[1]) Leibniz V, 130—131. [2]) Ebenda II, 209—211.

herunterrückend als rechts stehende Indices auftreten, dass ferner sowohl die links als die rechts vom Gleichheitszeichen unvermittelt unter einander stehenden Produkte additiv vereinigt gedacht sind, dass endlich die Eliminationsgleichung genau diejenige ist, welche man später als zu Null werdende Determinante zu schreiben gelernt hat. Der Schlusssatz des Briefes lässt erkennen, dass Leibniz ein volles Bewusstsein von der Bedeutsamkeit dieser Untersuchung besass. Man sieht hier, sagt er, auf was ich schon gelegentlich hingewiesen habe, dass die Vervollkommnung der Algebra von der Combinatorik abhängt[1]). Um so auffallender erscheint, dass Leibniz auch in dem handschriftlichen Nachlasse nichts hinterliess, was das Eliminationsproblem noch weiter gefördert hätte, wenn er auch von symbolisch zwei- und dreiziffrig geschriebenen Coefficienten häufig genug Gebrauch machte, und dass er sogar von dieser Bezeichnungsweise einmal in der Oeffentlichkeit in einer in den A. E. von 1700 gedruckten Abhandlung sprach[2]).

Von Versuchen Leibnizens, Gleichungen fünften Grades aufzulösen, reden wir weiter unten. Dagegen berühren wir hier noch im Vorbeigehen einen algebraischen Gegenstand, der Leibniz einmal beschäftigt hat. Die Gleichung $x^x + x = 30$ sagt er[3]), werde durch $x = 3$ erfüllt, aber meistens seien solche Gleichungen ausser mit Hilfe von Transcendenten unlösbar.

Ein weiterer Schriftsteller, der algebraische Untersuchungen anstellte, war Ehrenfried Walther von Tschirnhaus auf Kiesslingswalde[4]) (1651—1708). Er gehörte einem alten, früher böhmischen oder mährischen, aber schon durch vier Jahrhunderte Lausitzer Adelsgeschlechte an. Nach geringer, den damaligen deutschen Verhältnissen entsprechender Vorbildung in der Mathematik, zu welcher Tschirnhaus durch innere Neigung sich hingezogen fühlte, begab er sich 1668 zum Studium nach Leiden. Bald Krankheit, bald kriegerische Ereignisse, an welchen sich Tschirnhaus als Freiwilliger betheiligte, unterbrachen seine wissenschaftlichen Bestrebungen, ohne ihnen ein Ende zu machen. Er kehrte vielmehr immer wieder zur Mathematik und zu der ihr nahe verwandten Physik und Philosophie zurück. Nachdem er 1675 einen kurzen Besuch in der Heimath gemacht hatte, ging er über Holland nach England, von

[1]) *On voit aussi par la une chose que j'ai indiquée déja dans les occasions, c'est que la perfection de l'Algèbre depend de l'art des Combinaisons.* [2]) Leibniz V, 348. [3]) Ebenda VII, 215: *Sed plerumque valor nisi in transcendentibus imposibilis est.* [4]) Herm. Weissenborn, Lebensbeschreibung des Ehrenfried Walther v. Tschirnhaus auf Kiesslingswalde und Würdigung seiner Verdienste. Eisenach, 1866.



da im September des gleichen Jahres nach Paris, wo er (S. 30) mit Leibniz bekannt wurde, an welchen Oldenburg ihn mit einem Empfehlungsschreiben versehen hatte. Länger als ein Jahr blieben die beiden jungen, im Alter nur um fünf Jahre von einander abstehenden, in der Geistesrichtung nahe verwandten deutschen Gelehrten auf fremdem Boden in engsten Beziehungen, bis Leibniz im October 1676 Paris verliess. Nicht viel später ging auch Tschirnhaus wieder von dannen. Briefe vom April 1677 bis zum April 1678 aus Rom lassen den damaligen Aufenthaltsort erkennen. Ein abermaliger Besuch der Heimath fällt in das Jahr 1679. Ebendort verweilte er im April 1681. Dann war Tschirnhaus wiederholt in Paris, wo er am 22. Juli 1682 als Mitglied der Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. Aber die meisten Briefe Tschirnhausens seit 1681 sind doch aus Sachsen datirt, wo er seinen endgiltigen Aufenthalt nahm, wo er mit kurfürstlicher Unterstützung drei Glashütten ins Leben rief, und wo er bald am Hofe, bald in der unmittelbaren Nähe jener Fabriken verweilte. Sein Vermögen scheint dabei in bedenklicher Weise abgebröckelt zu sein, auch seine Gesundheit litt, und somit waren seine letzten Lebensjahre eigentlich recht traurig.

Die Arbeit über Gleichungen, welche Veranlassung bot, diese Angaben über Tschirnhausens Lebensgeschichte hier einzuschalten, ist in den A. E. von 1683 abgedruckt[1]) und führt die Ueberschrift *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione per D. T.*, wo die Bedeutung der beiden Buchstaben D. T., welche *Dominum Tschirnhausen* als den Verfasser bezeichneten, jedem damaligen Leser verständlich gewesen sein wird, nachdem seit 1682 schon wiederholt Aufsätze aus seiner Feder in den A. E. veröffentlicht worden waren. Wenn Tschirnhaus wirklich zu leisten im Stande war, was der Titel versprach, d. h. wenn er jede Gleichung durch Wegschaffung aller zwischen dem ersten und dem letzten Gliede befindlichen Zwischenglieder in eine binomische Gleichung von der Form

$$x^n - k^n = 0$$

zu verwandeln vermochte, dann war das allgemeinste Problem der Algebra gelöst.

Tschirnhausens Methode bestand in Folgendem, wenn wir einen Augenblick seine Bezeichnung und Darstellungsweise zu Gunsten einer allgemeineren Erörterung verlassen. Sei die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

gegeben. Man bildet eine hinzutretende Hilfsgleichung, *aequatio assumta*, von der Form

[1]) A. E. 1683, 204—207 (Maiheft).

$$x^{n-1} = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1} + y$$

und eliminirt $x$ zwischen der ursprünglichen und der angenommenen Gleichung. Dabei entsteht eine neue Gleichung mit der Unbekannten $y$, welche gleichfalls $n$ten Grades ist[1]), mithin

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots + c_{n-1} y + c_n = 0$$

heisst. In $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ kommen aber die willkürlichen Grössen $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ vor, welche man so bestimmen wird, dass

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0,$$

dass mithin nur noch $y^n + c_n = 0$ als neue Gleichung übrig bleibt, womit die Aufgabe gelöst ist. Wir wissen heute, dass diese Schlussfolgerung eine übereilte ist. Allerdings entsteht mit Hilfe der angenommenen Gleichung das Eliminationsergebniss

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots + c_{n-1} y + c_n = 0.$$

Allerdings enthalten die $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ die willkürlichen Grössen $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$. Aber die Bestimmung der letzteren aus

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$$

ist meistens mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft.

Von diesen Schwierigkeiten sagt Tschirnhaus kein Wort, während er sehr gut erkennt, dass die erforderte Elimination wesentlich einfacher von statten geht, wenn man die Gleichung in $x$ als von ihrem zweithöchsten Gliede schon befreit, also in der Form

$$x^n + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

in Rechnung zieht[2]). Wie Tschirnhaus die Elimination vollzogen wissen wollte, mit deren Hilfe jene neue Gleichung entsteht, deren mittlere Coefficienten nach seiner Behauptung zum Verschwinden gebracht werden können, sagt er nicht. Wir möchten vermuthen, er habe sich der Subtraktion der bald mit der Unbekannten, bald mit Bekanntem vervielfachten angenommenen Gleichung von der ursprünglich gegebenen Gleichung in mehrfacher Wiederholung bedient.

Tschirnhausens Beispiel der kubischen Gleichung heisst, nachdem das quadratische Glied schon entfernt ist, $y^3 = qy + r$, die angenommene Gleichung ist $y^2 = by + z + a$. Wir wollen jene die Gleichung I, diese die Gleichung II nennen. Wird II mit $y$ vervielfacht von I abgezogen, so entsteht $by^2 = (q - a - z)y + r$. Davon die mit $b$ vervielfachte II abgezogen bringt

[1]) *quae aeque altas dimensiones obtinet.* [2]) Vergl. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, 1878. S. 119—126. Ueber das zuletzt Erwähnte vergl. S. 121, Z. 24—28.



$$(z + a + b^2 - q)y = -bz - ab + r$$

hervor, beziehungsweise $y = \frac{-bz - ab + r}{z + a + b^2 - q}$. Setzt man aber diesen Werth von $y$ in II ein und schafft die Brüche durch Multiplikation der Gleichung mit $(z + a + b^2 - q)^2$ weg, so erhält man

$$z^3 + (3a - 2q)z^2 + (3a^2 - 4qa + q^2 - qb^2 + 3rb)z$$
$$+ (a^3 - 2qa^2 + q^2 a - qb^2 a + 3rba - r^2 - qrb + rb^3) = 0,$$

und das ist ganz genau die Gleichungsform, von welcher Tschirnhaus sagt, man gelange zu ihr.

Das Verschwinden der Mittelglieder fordert erstlich $3a - 2q = 0$ also $a = \frac{2}{3}q$ und zweitens $3a^2 - 4qa + q^2 - qb^2 + 3rb = 0$ oder

$$qb^2 - 3rb = 3a^2 - 4qa + q^2 = -\frac{1}{3}q^2$$

$$\text{also } b = \frac{3}{q}\left[\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}\right]$$

wie Tschirnhaus schreibt. Diese Werthe von $a$ und $b$ braucht man nur in die angenommene Gleichung einzusetzen, so wird aus

$$y^3 = qy + r \text{ und } y^2 = \frac{3}{q}\left[\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}\right] y + z + \frac{2q}{3}$$

unter Wegfall von $y$ eine Gleichung in $z$ entstehen, welche $z^3$ einer aus lauter Bekanntem zusammengesetzten Grösse gleichsetzt.

Tschirnhaus gibt dann weiter die Werthe von $a$ und $b$ an, welche diejenigen angenommenen Gleichungen hervorbringen, welche sich eignen, aus den schon vom zweithöchsten Gliede befreiten Gleichungen 4., 5., 6. Grades neue Gleichungen gleichen Grades hervorbringen, welche auch vom dritthöchsten Gliede befreit sein werden. Aber warum diese Genügsamkeit? Warum gibt Tschirnhaus nicht lieber diejenige angenommene Gleichung 4. Grades an, welche die Gleichung 5. Grades von ihren vier Mittelgliedern befreien lässt? Sollte er an der Unfehlbarkeit seiner Methode irre geworden sein, als er sie zur Auflösung der Gleichung 5. Grades benutzen wollte, oder sollte er diesen Versuch gar nicht gemacht haben? Wir halten letztere Annahme für gradezu ausgeschlossen.

Wir haben Leibnizens Beschäftigung mit der Gleichung fünften Grades (S. 112) erwähnt. Sie ist durch einen Brief sicher gestellt, welchen Huygens an Leibniz während ihres gemeinschaftlichen Aufenthaltes in Paris schrieb[1]). Nun kam Tschirnhaus im

[1]) Leibniz II, 14: *Vous vous estes mis a chercher une chose qui doit estre bien difficile a trouver puisqu'elle ne l'a pas esté encore, qui est de donner des formules de racines pour les Equations du 5e degré et au delà.*

September 1675 nach Paris. Er stand mit Leibniz im engsten wissenschaftlichen Verkehr, und wenn man daraus an und für sich folgern könnte, Leibniz werde auch von seinen algebraischen Forschungen dem Freunde kein Hehl gemacht haben, so können wir die Thatsache auch anderwärts bestätigen. Als Tschirnhaus im Spätherbst 1679 nach Deutschland zurückkehrte, besuchte er Leibniz auf einige Tage in Hannover[1]). Leibniz rief ihm damals die Pariser Tage ins Gedächtniss zurück und frischte nachmals die Erinnerung auch in einem Briefe wieder auf, aus welchem wir eine Stelle übersetzen[2]): „Sie werden zugeben, dass ich nicht unbedachtsam über Ihre Methoden zur Auffindung von Gleichungswurzeln geurtheilt habe: und Sie werden glauben, dass ich nicht aus Eitelkeit sagte, dass ich Aehnliches schon früher gesucht habe, sondern von der Erwägung ausgehend, dass Sie nicht später einmal mich in Verdacht haben möchten, etwas von Ihnen abgeschrieben zu haben; und dass, wenn ich Ihnen ins Gedächtniss zurückrief, was ich Ihnen in Paris gezeigt hatte, ich es nicht that, als wenn ich glaubte, Sie hätten sich meine Gedanken angeeignet — weiss ich doch, was sie für sich allein können — sondern um Ihnen leichter zu beweisen, dass ich kein Neuling in jenen Untersuchungen war.“ Aus dieser Stelle geht überdies hervor, dass Leibniz damals mit Tschirnhausens Untersuchungen über Gleichungen bekannt gewesen sein muss, und so war es auch.

Schon am 10. April 1678 hatte Tschirnhaus von Rom aus ausführliche Mittheilung an Leibniz gemacht[3]), und wenn auch der Brief leider nicht im Wortlaute durch den Druck bekannt gegeben worden ist, so weiss man doch so viel, dass das Wesentliche des Inhaltes der Abhandlung von 1683 dort entwickelt war. Man weiss überdies aus Leibnizens Antwort und aus einem späteren Briefe Tschirnhausens, dass Tschirnhaus damals auch andere Methoden für die Gleichungsauflösung in Vorschlag brachte, bei welchen vermuthlich die Unbekannte einer Gleichung $n$ten Grades der Summe von $n-1$ Grössen gleichgesetzt wurde[4]) und jene Summanden selbst auch als $n$te Wurzeln gewählt werden konnten[5]).

Leibniz unterliess es nicht, dem Freunde Einwürfe zu machen, welche Tschirnhaus noch auf der Reise zukamen. Auch aus diesem Briefe übersetzen wir eine Stelle[6]) mit der Bemerkung, dass Leibniz sich regelmässig des Zeichens ⊓ als Gleichheitszeichen zu bedienen pflegte (S. 35), dass wir aber vorzogen, das gewöhnliche Zeichen dafür eintreten zu lassen. „Was Ihre dritte Methode zur Auffindung

[1]) Leibniz IV, 423. [2]) Ebenda IV, 482. [3]) Ebenda IV, 450. [4]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 182—185. [5]) Leibniz IV, 469. [6]) Ebenda IV, 478—479.



von Gleichungswurzeln betrifft, die darin besteht, zur Auflösung von

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

die Annahme

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y$$

zu machen, dann $x$ mittels $y$ zu eliminiren und mit Hilfe der willkürlichen Grössen $b$, $c$, $d$ u. s. w. die Mittelglieder in der entstehenden Gleichung $y^5 + \cdots = 0$ zu entfernen[1]), so glaube ich nicht, dass sie bei Gleichungen höherer Grade von Erfolg sein kann, es sei denn in besonderen Fällen. Ich glaube dafür einen Beweis zu besitzen.“ Wir machen besonders auf den letzten Ausspruch aufmerksam, den wir durch den Druck hervorheben liessen. Erst anderthalb Jahrhunderte später im Jahre 1824 gab Abel den unanfechtbaren Beweis der algebraischen Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung von höherem als dem vierten Grade. Die Benutzung von Tschirnhausens Methode, um die Gleichung 5. Grades auf die Form

$$x^5 + Ax + B = 0$$

zu bringen, ist noch einige dreissig Jahre jünger. Leibnizens briefliche Warnung verhallte ungehört. Nun kam jene Unterredung in Hannover. Kann es zweifelhaft sein, dass damals von der Anwendung der Tschirnhausenschen Methode auf Gleichungen 5. Grades die Rede gewesen sein muss? Tschirnhaus hat zuverlässig Versuche nach dieser Richtung angestellt, hat sich von ihrer Vergeblichkeit überzeugt, und er ist dadurch von der Werthschätzung seiner Methode zurückgekommen.

Auch für diese Behauptung besitzen wir einen Beleg. Im Jahre 1682 war Tschirnhaus in Paris. Er hatte, um in die Pariser Akademie der Wissenschaften aufgenommen zu werden — ein Wunsch, der, wie wir wissen (S. 113), am 22. Juli jenes Jahres in Erfüllung ging — derselben ein Verzeichniss seiner wissenschaftlichen Leistungen eingereicht. Von jenem Verzeichnisse machte er am 27. Mai Mittheilung an Leibniz[2]), und in ihm ist von der allgemeinen Auflösung jeder Gleichung $n$ten Grades keine Rede.

Und dennoch erfolgte die Veröffentlichung von 1683? Sie erfolgte, und als Leibniz alsdann fragte[3]): „Ich möchte doch wissen, ob sie mit Hilfe Ihrer Methode zur Auffindung der Wurzeln aller Gleichungen endlich die so lange erhofften Wurzeln der Gleichung 5. Grades aufweisen können, denn die der Gleichungen niedrigeren

[1]) In dem Abdrucke des Leibnizischen Briefes finden sich einige Fehler, entweder Druck- oder Schreibfehler. In der Hilfsgleichung heisst das Glied rechts vom Gleichheitszeichen $q$ statt $y$, und das erste Glied der Schlussgleichung heisst $y^4$ statt $y^5$. [2]) Leibniz IV, 488. [3]) Ebenda IV, 501.

Grades kennen wir schon lange nach anderen Methoden", da blieb Tschirnhaus die Antwort schuldig.

Aber auch der Beweggrund ist bekannt, der Tschirnhaus zur Veröffentlichung von 1683 veranlasste. Am 25. August 1683 schreibt Tschirnhaus buchstäblich[1]): *Dass sonsten bieshero in den Actis eines und das andere inseriren lassen, ist geschehen, dass sie zu Paris sehen, wie das in meinen studiis fortgehe, und das zugleich andern innotescire.* Es genügte Tschirnhaus nicht, Mitglied der Pariser Akademie zu sein; er wollte gleich vielen anderen Gelehrten von Ludwig XIV. mit einem Jahresgehalte bedacht werden, und deshalb sollte man insbesondere in Paris sehen, *wie das in seinen studiis fortgehe.* Deshalb warf er in dem gedruckten Aufsatze mit allgemeinen Möglichkeiten um sich, an die er — so ist wenigstens unsere Ueberzeugung — selbst nicht mehr glaubte, wenn er auch in dem eben erwähnten Briefe vom 25. August 1683 fortfuhr: *Was den methodum anlanget, die Radices ope ablationis intermediorum terminorum zu determiniren, ist gar leicht zu demonstriren, dass er richtig; wo es gewiesse rationes nicht verhindern, die ich habe, so wihl solches publice auch in 5to gradu darthun.* Das müssten denn doch ganz absonderliche *rationes* gewesen sein, welche ihn abhielten, nachdem der Gedanke der Methode preisgegeben war, ihre edelste Frucht auf den Markt zu bringen.

Wir sind aus doppeltem Grunde so ausführlich auf Tschirnhausens algebraische Untersuchungen eingegangen. Erstlich wegen der grossen Bedeutung, welche dieselben nachträglich gewonnen haben, nachdem sie fast schon der Vergessenheit anheimgefallen waren, zweitens weil sie uns die Gelegenheit boten, Tschirnhausens Persönlichkeit auch in den wenig lobenswerthen Charakterzügen kennen zu lernen. Tschirnhaus war unzweifelhaft ein Mann von grosser Geistesschärfe und von mathematischer Erfindungsgabe. Er durchforschte erfolgreich sämmtliche damals in Angriff genommenen Gebiete. Aber er beabsichtigte aus seinen wissenschaftlichen Erfolgen einen unmittelbaren persönlichen Vortheil sich zu verschaffen, und deshalb kam es ihm nicht darauf an, vor der Oeffentlichkeit manches noch stärker aufzubauschen, als es in seinen eigenen Augen verdiente. Wir werden uns daran zu erinnern haben.

Der Zeitfolge nach nennen wir einige englische Schriften. Ein Geistlicher, Thomas Baker[2]), gab 1684 *The geometrical key or the gate of equations unlocked* heraus[3]), dessen wesentlicher Inhalt in der geometrischen Auflösung der von ihrem zweithöchsten Gliede nicht

[1]) Leibniz IV, 499. [2]) *National Biography* (edited by Leslie Stephen) III, 17. [3]) Ein Bericht darüber in den P. T. XIV, 549—550.



befreiten Gleichung von höchstens viertem Grade mit Hilfe einer Parabel und eines Kreises besteht.

Die Algebra von John Wallis, englisch 1685, lateinisch 1693 erschienen, haben wir (S. 4) von der geschichtlichen Seite aus unmöglich loben können. Aber als Lehrbuch der Algebra betrachtet war es ein ganz vorzügliches Werk, wäre es ein solches gewesen, wenn es auch nur die Newtonschen Untersuchungen allein zugänglich gemacht hätte, welche, wie wir erzählt haben (S. 107), dort zum Abdruck kamen. Der Leser konnte und kann noch heute ein massenhaftes Material an Regeln zur Auflösung von Gleichungen darin angesammelt finden und hat einzig davor sich zu hüten, Wallis unbedingten Glauben bezüglich der Urheberschaft der einzelnen Sätze entgegenzubringen. Eigene Untersuchungen auf algebraischem Gebiete hat Wallis nicht angestellt. Die lateinische Algebra lässt sich als zweite vermehrte Ausgabe der ersten englischen gegenüber betrachten. Es sind Dinge hineingearbeitet, welche erst nach 1685 bekannt wurden. So findet sich in ihr[1]) ein Auszug aus der *Analysis aequationum universalis* von Joseph Raphson, welche 1690 im Drucke erschien. Raphson war ein unbedingter Bewunderer und Nachahmer Newtons. Seine Auflösung von Zahlengleichungen ähnelt ungemein der newtonischen. Der Unterschied ist einzig der, dass wenn Newton die Ergänzungen $p$, $q$, $r$ u. s. w. jeweils aus neuen Gleichungen ermittelte, Raphson den dem Schüler vielleicht leichter verständlichen, aber jedenfalls viel mehr Rechnung mit verhältnissmässig grösseren Zahlen erfordernden Weg einschlug, dass er die um $p$, dann die um $p+q$, die um $p+q+r$ u. s. w. veränderte Anfangsannahme der Unbekannten immer aufs neue in die ursprünglich gegebene Gleichung einsetzte.

Bakers und Raphsons Arbeiten fanden einen Fortsetzer in Edmund Halley[2]). Er gab 1687 in zwei Aufsätzen die zeichnende Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen mittels einer einzigen, also ein für allemal hergestellten Parabel und einem von Fall zu Fall sich ändernden Kreise. Er berücksichtigte dabei insbesondere, dass jene Parabel mit dem Kreise nur in einer graden Anzahl von Punkten sich schneiden könne, den Fall gleicher Wurzeln mit eingeschlossen, welcher zwei Durchschnittspunkte in einen Berührungspunkt übergehen lasse. Er verwandelte die kubische Gleichung, deren Unbekannte $z$ heissen mag, durch Vervielfachung mit

[1]) Wallis, Opera II, 396—397. [2]) Die drei Aufsätze Halleys, von welchen hier die Rede ist, sind in den P. T. Nr. 188 (1687), 190 (1687), 210 (1694) erschienen, aber auch vereinigt im Anhang zu der *Arithmetica universalis* von Newton (Leiden, 1732) abgedruckt.

$z - e$ in eine biquadratische Gleichung, und da nunmehr ein Durchschnittspunkt der neu hinzugetretenen Wurzel $z = e$ entstammen musste, so war durch den ihm entsprechenden zweiten Durchschnittspunkt mindestens eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung gesichert. Halley wandte sich hierauf 1694 den rechnenden Annäherungsverfahren zu. Neben Newton und Raphson berücksichtigte er auch ein Werk eines französischen Mathematikers Thomas Fantet de Lagny[1]) (1660—1734). Dieser hatte 1692 *Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines* herausgegeben und darin behauptet $\sqrt[3]{a^3+b}$ liege zwischen $a + \frac{ab}{3a^3+b}$ und $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}} + \frac{a}{2}$, und es sei ferner $\sqrt[5]{a^5+b}$ annähernd gleich

$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{b}{5a}} - \frac{a^2}{4}}.$$

Halley zeigte, dass unter der selbstverständlichen Voraussetzung eines im Verhältnis zu $a$ kleinen $b$ diese Formeln ähnlich abgeleitet werden können wie bei der Newtonschen Gleichungsauflösung verfahren wird. Sei $a + e = \sqrt[3]{a^3+b}$, so folge $3a^2e + 3ae^2 + e^3 = b$, und unter Weglassung der höheren Potenzen von $e$ könne $3a^2e = b$, $e = \frac{b}{3a^2}$ gesetzt werden. Genauer sei $(3a^2 + 3ae)e = b$, also $e = \frac{b}{3a^2 + 3ae}$, beziehungsweise

$$e = \frac{b}{3a^2 + 3a \cdot \frac{b}{3a^2}} = \frac{ab}{3a^3+b}.$$

Andrerseits könne aus dem näherungsweise richtigen $3a^2e + 3ae^2 = b$ auch gefolgert werden

$$e = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}} \text{ u. s. w.}$$

Noch etwas früher als De Lagnys hier erwähnte Schrift, nämlich 1690, ist der *Traité d'algèbre* von Michel Rolle erschienen. Wir haben (S. 103—105) einiges aus diesem Werke angeführt, was die Lösung unbestimmter Aufgaben betraf. Es war eine wirkliche Methode, die uns dort entgegentrat, alle früheren Leistungen ähnlicher Art überholend, und nicht minder ist, was wir jetzt zu erwähnen haben, ganz anders geartet, als was wir aus anderen Schriftstellern zu entnehmen im Stande waren. Erwägt man dabei, dass, wie wir schon bei unserer ersten Begegnung äusserten, Rolle nicht leicht oder gar angenehm zu schreiben wusste, so begreift man den ver-

[1]) *Mémoires de l'Académie des Sciences.* Paris, 1734. — Montucla II, 168.



hältnissmässig geringen Einfluss, den sein Traité d'algèbre übte. Fremdartig z. B. musste es schon erscheinen, dass Rolle, um das Nichts darzustellen[1]), den griechischen Buchstaben θ verwerthete, und wir sind nicht im Stande, die etwaige Frage, warum nicht die Null in ihrem Rechte blieb, zu beantworten. Fremdartig waren die Säulen, die er benutzte. Die Rückkehrsäule, *colomne de retour*, haben wir in ihrer Anwendung auf unbestimmte Aufgaben kennen gelernt, auch bei bestimmten Aufgaben erscheint diese Art der Anordnung. Neu war ferner der Name der Hypothesen[2]), worunter Rolle zwei Annahmen für die Unbekannte versteht, die zwar beide die Gleichung nicht erfüllen, von denen aber die eine dem Gleichungspolynom einen positiven, die andere einen negativen Werth gibt, so dass ein Wurzelwerth zwischen ihnen liegen muss. Man kommt dem Wurzelwerthe näher und näher, indem man die Hypothesen durch andere ersetzt, deren gegenseitige Entfernung kleiner und kleiner wird, und somit ist die Aufgabe der Gleichungsauflösung auf die der Auffindung zweckdienlicher Hypothesen zurückgeführt. Eine Hypothese ist immer die Null, und ihre Substitution gibt dem Gleichungspolynome das Zeichen seines letzten Gliedes[3]) Aber wie findet man die zweite Hypothese? Dazu führen verschiedene Umwandlungen der vorgelegten Gleichung, welche zum Theil schon Vieta (Bd. II, S. 637 bis 638) bekannt waren. Eine Umwandlung schafft alle Brüche fort, indem die ganze Gleichung mit dem kleinsten Gemeinvielfachen aller vorkommenden Nenner vervielfacht wird, so dass die Gleichung

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

erscheint mit lauter ganzzahligen theils positiven, theils negativen Coefficienten, deren hier gebrauchte Bezeichnung, wie wir kaum zu sagen nöthig haben, bei Rolle nicht vorkommt. Eine zweite Umwandlung gibt dem Wurzelwerthe das entgegengesetzte Zeichen dadurch, dass alle Glieder mit ungradem Exponenten das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Eine dritte Umwandlung schafft den Coefficienten $a_0$ des höchsten Gliedes fort, indem $z = \frac{y}{a_0}$ eingesetzt und die neuentstehende Gleichung mit $a_0^{n-1}$ vervielfacht wird, was nach der Regel ausgeführt wird, man solle den Coefficienten von $z^n$ weglassen und unter die Folgeglieder (solche mit dem Coefficienten 0 miteingeschlossen) die Zahlen $1, a_0, a_0^2 \cdots$ schreiben, mit welchen man ihre Coefficienten zu vervielfachen habe[4]).

[1]) Rolle, *Traité d'algèbre* pag. 11: *pour marquer le rien.* [2]) Ebenda pag. 103. [3]) Ebenda p. 108: *Le θ donnera toujours le mesme signe que celuy du dernier terme.* [4]) Ebenda p. 118.

Eine, wie es scheint, Rolle angehörende Umformung will den Gleichungsgliedern wechselnde Vorzeichen geben[1]). Sei $a_0$ positiv (was, wenn es nicht von vorn herein der Fall ist, durch Vervielfältigung der ganzen Gleichung mit $-1$ hervorgebracht wird) und $-g$ der grösste vorkommende negative Coefficient. Man dividirt $g$ durch $a_0$ und vermehrt $\frac{g}{a_0}$ um 1 oder um 1 und einen echten Bruch $\alpha$, der $\frac{g}{a_0}$ zu einer ganzen Zahl ergänzt, so dass also $\frac{g}{a_0} + 1 + \alpha = h$ eine positive ganze Zahl ist. Die Substitution $z = h - x$ hat alsdann den gewünschten Erfolg. Rolle beweist den Satz nicht, aber er zeigt seine Richtigkeit an Beispielen. Bei $8z^2 - 5z - 2 = 0$ ist $a_0 = 0$, $g = 5$, $h = \frac{5}{8} + 1 + \frac{3}{8} = 2$ und $z = 2 - x$ führt die gegebene Gleichung in $8x^2 - 27x + 20 = 0$ über. Die Regel setzt voraus, mindestens ein negatives Glied komme in der Gleichung vor, oder es fehle mindestens ein Glied, welches man dann mit dem Coefficienten $-0$ behaftet denken kann, d. h.

$$g = 0, \quad h = 0 + 1 = 1, \quad z = 1 - x.$$

Ist beides nicht der Fall, so genügt die Substitution $z = -x$, um den regelmässigen Zeichenwechsel hervorzubringen.

Eben die Zahl $h$, deren Entstehung wir kennen gelernt haben, ist auch als eine Hypothese, und zwar als sogenannte grosse Hypothese zu benutzen[2]), während der Werth 0 die kleine Hypothese heisst. Gemeinsam heissen sie äusserste Hypothesen, und zwischen ihnen liegen mittlere Hypothesen. Solche mittlere Hypothesen kann man durch ein Tastverfahren suchen, indem man das arithmetische Mittel zweier schon gefundener Hypothesen versuchsweise statt der Unbekannten setzt[3]). Man kann auch, wenn $z = c$ ein Näherungswerth der Unbekannten ist, weitergehend $z = c + x$ versuchen und dann die Ermittelung von $x$ anstreben[4]). Ein drittes Verfahren, und damit sind wir bei Rolles wichtigster Entdeckung angelangt, ist die Methode der Cascaden[5]).

Sei die mit wechselnden Vorzeichen versehene Gleichung

$$a_0 v^n - a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0$$

gegeben und sei $v = x + z$ eingesetzt und die neue Gleichung nach $x$

[1]) Rolle, *Traité d'algèbre* pag. 120: *Lorsque le premier terme, le troisiéme, le cinquiéme, le septiéme et generalement tous les termes impairs sont précedez du signe +, et que tous les autres termes sont précedez du signe —, on dira que les signes de l'égalité sort alternatifs: et l'on pourra toûjours faire que les signes soient alternatifs par le moyen de la regle suivante.* [2]) Ebenda pag. 124. [3]) Ebenda pag. 103. [4]) Ebenda pag. 107. [5]) Ebenda pag. 125 flgg.



geordnet oder in Rolles Ausdrucksweise $x$ als Ursprung genommen[1]). Dadurch entsteht:

$$\left.\begin{array}{r} a_0 x^n + n a_0 z x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_0 z^2 x^{n-2} + \cdots + a_0 z^n \\ - a_1 x^{n-1} - (n-1) a_1 z x^{n-2} - \cdots - a_1 z^{n-1} \\ + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_2 z^{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm a_n \end{array}\right\} = 0$$

und soll diese Gleichung für jedes $x$ erfüllt werden, so müssen die als nach $z$ geordnete Summen auftretenden Coefficienten der Potenzen von $x$ einzeln verschwinden, d. h. es muss sein:

$$n a_0 z - a_1 = \frac{n(n-1)}{2} a_0 z^2 - (n-1) a_1 z + a_2 = \cdots.$$
$$= a_0 z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0.$$

Diese $n$ Gleichungen sind als Cascaden bezeichnet[2]). Aber auch eine andere Bildungsweise derselben lehrt Rolle schon etwas früher. Man soll in der ursprünglich gegebenen Gleichung $z$ statt $v$ schreiben, jedes ihrer Glieder mit dem Exponenten der in ihm auftretenden Potenz von $z$ multipliziren, die Summe der so entstehenden Ausdrücke durch $z$ dividiren und dann gleich Null setzen; man soll mit der neu erhaltenen Gleichung ebendasselbe vornehmen u. s. w.[3]). In der Sprache der Neuzeit heisst dieses: die aufeinander folgenden Cascaden sind die aufeinander folgenden Ableitungen der gegebenen Gleichung.

Rolle behauptet nun: die Wurzeln irgend einer Cascade von der letzten anfangend und aufsteigend bis zur ursprünglich gegebenen Gleichung seien stets als Hypothesen in der Cascade nächsthöheren Grades zu verwenden. In unseren Tagen spricht man den Satz so aus[4]): Zwischen zwei aufeinander folgenden Wurzeln $\alpha$ und $\beta$ der Gleichung $f'(z) = 0$ kann nicht mehr als eine einzige Wurzel von $f(z) = 0$ liegen.

Rolle hat im Traité d'algèbre keinen Beweis seiner Cascadenmethode gegeben. Dagegen muss er noch in dem Druckjahre 1690 jenes Lehrbuches ein Duodezbändchen *Sur les effections geometriques* veröffentlicht haben, in welchem jener Beweis enthalten ist. So erzählt er selbst am Ende der dritten Seite der Vorrede der (S. 105) erwähnten *Methodes pour resoudre les questions indeterminees de l'algebre* von 1699.

[1]) *si on prend x pour l'origine.* [2]) Ebenda pag. 126—127. [3]) Ebenda pag. 125. [4]) J. A. Serret, Handbuch der höheren Algebra (deutsch von G. Wertheim) 2. Auflage. Leipzig, 1878. I, 224.

Der beachtenswerthen Gegenstände sind aber im Traité d'algèbre noch mehr. Wir nennen nur beiläufig den Satz[1]), dass, wenn zwei Hypothesen in eine Gleichung eingesetzt werden, die Differenz der Ergebnisse durch die Differenz der Hypothesen theilbar sein müsse, ferner ein Kapitel[2]) von der Aufsuchung des grössten Gemeintheilers zweier Gleichungspolynome, endlich den Satz[3]), das jede $n$te Wurzel $n$ Werthe besitze. Ist der Wurzelexponent ungrad, sagt Rolle, so sind alle Wurzeln bis auf eine imaginär, und diese eine ist positiv oder negativ; ist der Wurzelexponent grade, so sind entweder alle Wurzeln imaginär oder alle mit Ausnahme von zweien, von denen die eine positiv, die andere negativ ist.

Zum Abschluss unseres Kapitels und zur Ueberleitung in das nächstfolgende eignet sich vielleicht die Erwähnung einer 1695 in Frankfurt gedruckten neuen Ausgabe der Descartes'schen Geometrie. Jakob Bernoulli veranstaltete sie und fügte zahlreiche Anmerkungen bei, welche auch gesammelt in seinen Werken sich vereinigt finden[4]). Besonders erwähnenswerth ist die IV. Anmerkung über die niedrigstgradigen Curven, durch welche eine Gleichung construirbar wird[5]). Jakob Bernoulli hatte übrigens schon 1688 im Januarhefte der A. E. sich der gleichen algebraisch-geometrischen Frage zugewandt[6]) (vgl. Bd. II, S. 816, Note 3).

## 88. Kapitel.

### Kegelschnitte. Curvenlehre.

Was wir zuletzt berührten, war eine algebraische Frage, welche durch Curvendurchschnitte hervorgerufen wurde. Auch die Auflösungen von Gleichungen 3. und 4. Grades mit Hilfe von Kegelschnitten, welche Baker (S. 118), welche Halley (S. 119) sich zur Aufgabe stellten, sollten der Vervollkommnung der Algebra dienen. Man könnte ja einen Augenblick sich darüber wundern, dass trotz der neuerfundenen und vervollkommneten rechnenden Näherungsmethoden der alte Weg zeichnender Darstellung von Gleichungswurzeln noch immer betreten wurde. Thatsächlich war er nicht überflüssig gemacht Wir haben gesehen, dass die rechnenden Näherungsmethoden voraussetzten, ein Wurzelwerth sei roher Weise, etwa so weit ganze Zahlen ihn kennen lehren, bereits ermittelt, und grade diesen Anfangswerth zur genaueren Annäherung konnten Curvendurchschnitte

[1]) Rolle, *Traité d'algèbre* pag. 152. [2]) Ebenda pag. 169—183. [3]) Ebenda pag. 230. [4]) Jac. Bernoulli Opera II, 665—717. [5]) Ebenda II, 677—679. [6]) Ebenda I, 343—351.



sehr leicht liefern. Die Kegelschnitte und ihr Studium traten daher auch bei solchen Schriftstellern nicht vollständig in den Hintergrund, deren wissenschaftliche Geschmacksrichtung der Algebra zugewandt war. Andere Schriftsteller beschäftigten sich mit Kegelschnitten, mit Curvenlehre um des Gegenstandes selbst willen.

Antonio Hugo Omerique[1]) gab 1698 in Cadix Anwendungen der Algebra auf die Geometrie der Ebene unter dem Titel *Analysis geometrica* heraus.

Philipp De la Hire[2]) (1640—1718) sollte nach dem Wunsche seines Vaters, der königlicher Maler war, gleichfalls der Kunst sich widmen und gehorchte dieser Anweisung namentlich in Rom, wohin er 1660 zum Theil aus Gesundheitsrücksichten geschickt wurde. Er eröffnete auch bei seiner Rückkehr in seine Vaterstadt Paris daselbst eine Malerschule. Nicht minder indessen wandte er der Geometrie und Astronomie sich zu, und seit 1678 gehörte er der Akademie der Wissenschaften an. Er versah die Professur der Mathematik am Collège royal de France und wurde mit geodätischen Arbeiten betraut. Ausser zahlreichen Abhandlungen, welche in den Veröffentlichungen der Akademie der Wissenschaften gedruckt sind, machte sich De la Hire namentlich durch drei grössere Schriften über Kegelschnitte verdient. Zuerst erschien die *Nouvelle méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques* 1673, dann kamen die *Nouveaux élémens des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effection des équations* 1679, endlich *Sectiones conicae in novem libros distributae* 1685.

Gleich die erste Schrift von 1673 hätte von bahnbrechender Bedeutung werden können, wenn man ihr genügende Beachtung geschenkt hätte, aber das war nicht der Fall. Die *Nouvelle Méthode*[3]) besteht aus zwei Abschnitten, deren erstem eigentlich der Titel zukommt, welcher als der des ganzen Bandes genannt zu werden pflegt, und über diesen ersten Abschnitt wurde im Journal des sçavans unter dem 17. December 1674, sowie in den P. T. von 1676 (Nr. 129) ausführlich und günstig berichtet. Aber der zweite Abschnitt, *Planiconiques* überschrieben, wurde in beiden Berichten vernachlässigt, im ersten mit einem Worte des Lobes ohne Inhaltsangabe abgefertigt, im zweiten ganz übergangen, während die Planiconiques grade das

[1]) G. Vicuña in der Bibliotheca mathematica 1890 pag. 36. [2]) Ernst Lehmann, De la Hire und seine Sectiones conicae. Programme zu den Jahresberichten des Königl. Gymnasiums zu Leipzig für die Schuljahre Ostern 1887 bis Ostern 1888 und Ostern 1889 bis Ostern 1890. Ersteres Programm führt in der Reihenfolge deutscher Schulprogramme die Bezeichnung 1888, Nr. 510, letzteres 1890, Nr. 532. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* 127—130 (deutsch 124—126).

Neue bildeten, muthmasslich das Allzuneue, als dass es Anklang gefunden hätte. Hier ist zum ersten Male eine Construction gelehrt, welche ausgehend von einem gegebenen Kreise und zwei ebenfalls gegebenen festen Geraden, der Formatrix und der Directrix, sowie einem gegebenen festen Punkte einen Kegelschnitt entstehen lässt (Figur 13). Eine Sehne $M'M$ des Kreises schneidet bei ihrer Verlängerung die Formatrix in $F$, die Directrix in $D$. Der feste Punkt $P$ wird mit $D$, mit $M$, mit $M'$ gradlinig verbunden. Zieht man nun $FM_1M_1' \parallel DP$, so sind die Durchschnittspunkte $M_1$ und $M_1'$ dieser Geraden mit der $PM$ und $PM'$ die von $M$ und $M'$ aus gebildeten — *formés* — Punkte eines Kegelschnittes. De la Hires Beweis dafür, dass der geometrische Ort der Punkte $M_1$ und $M_1'$ in der That ein Kegelschnitt sei, wird von Denjenigen, welche das ungemein selten gewordene Buch zu sehen Gelegenheit hatten, als äusserst verwickelt gekennzeichnet, aber nicht näher geschildert.

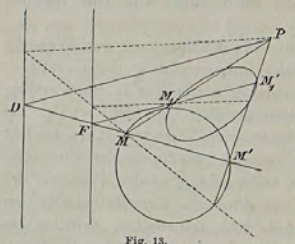

Fig. 13.

Die *Nouveaux Élémens* von 1679 sind mehr analytisch geometrisch gehalten. Die an die Spitze gestellte Definition der Kegelschnitte ist die aus den Eigenschaften der Brennstrahlen hergehende: ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort der Punkte, welche entweder gleiche Entfernung von einem festen Punkte und einer festen Geraden oder eine constante Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten besitzen. Im Verlaufe der Untersuchung ist das Normalenproblem für alle Kegelschnitte mittels des Kreises und der Geraden gelöst.

Wir erinnern uns daran (Bd. II, S. 674), dass De la Hire in dem gleichen Jahre 1679, in welchem er die Nouveaux Élémens herausgab, jene Abschrift von Desargues Hauptwerk von 1639 anfertigte, welche auf die Gegenwart gekommen ist und ihr die Kenntniss von den Leistungen jenes grossen Geometers vermittelt hat. De la Hire selbst hat offenbar damals, wenn nicht schon früher, den Desarguesschen Gedankengang sich ganz zu eigen gemacht, und eine Frucht dieser Vertiefung in die ohne analytische Hilfsmittel zu Werke gehende Geometrie sind die *Sectiones Conicae* von 1685. Das erste der neun Bücher, in welche De la Hire seine Kegelschnitte eingetheilt hat, beschäftigt sich nur mit harmonischen Punkten und Strahlen und deren Auftreten bei dem Kreise. Die harmonischen Strahlen



führen bei ihm erstmalig den Namen der Harmonikalen. Der XI. Lehrsatz spricht den Satz aus, dass die von einem Punkte einer Ebene nach den Endpunkten und der Mitte einer derselben Ebene angehörenden Strecke gezogenen Gerade nebst einer von demselben Punkte ausgehenden Parallele zu jener Strecke vier Harmonikale sind Zu drei gegebenen Punkten einer Geraden wird der vierte harmonische Punkt unter alleiniger Anwendung des Lineals gefunden, indem von den Eigenschaften des vollständigen Vierseits Gebrauch gemacht wird. Der XXI. Lehrsatz ist der von der harmonischen Theilung einer Kreissekante durch die Kreislinie und die zum Ausgangspunkte der Sekante zugehörige Polare. Er lautet in genauer Uebersetzung folgendermassen: Sei (Figur 14) $BFDG$ ein Kreis, und seien an ihn von dem in seiner Ebene aber ausserhalb des Kreises gelegenen Punkte $A$ die Berührenden $AF$, $AG$ gezogen, sowie auch die $FG$ als Verbindungsgrade der Berührungspunkte $F$ und $G$. Zieht man alsdann von $A$ aus eine beliebige Gerade $AD$, welche die Kreislinie in $B$ und $D$, die $FG$ in $C$ trifft, so ist $AD$ in den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ harmonisch getheilt. De la Hires Beweis beschreibt über $BD$ einen Halbkreis, zieht $CH \perp AD$ bis zum Durchschnitt des Halbkreises in $H$, dann die Gerade $AH$ und $BI \parallel DE \parallel CH$ bis zum Durchschnitt mit $AH$ in $I$ und $E$. Ueberdies wird $O$, die Mitte von $FG$, mit $A$ verbunden. Erstlich wird nun behauptet, dass $AH$ in $H$ jenen Halbkreis über $BD$ berühre. Es ist $AF^2 = AO^2 + OF^2$, ferner $AC^2 = AO^2 + OC^2$. Weiter ist das Produkt

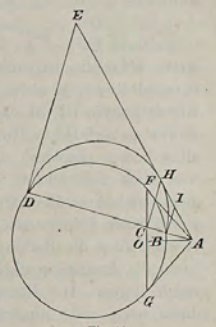

Fig. 14.

$$CF \cdot CG = (OF - OC)(OF + OC) = OF^2 - OC^2,$$

also $OF^2 = CF \cdot CG + OC^2$ und

$$OF^2 + AO^2 = CF \cdot CG + OC^2 + AO^2$$

$$\text{oder } AF^2 = CF \cdot CG + AC^2.$$

Ferner ist nach dem Satze von einander schneidenden Kreissehnen

$$CF \cdot CG = CB \cdot CD,$$

und letzteres Produkt ist ersichtlich $= CH^2$, also

$$AF^2 = CH^2 + AC^2 = AH^2, \quad AF = AH.$$

Weil aber $AF$ eine Berührungslinie, $AD$ eine Sekante des Kreises

$BFD$ ist, muss $AF^2 = AB \cdot AD$, d. h. auch $AH^2 = AB \cdot AD$ sein, und hieraus folgt, mit Rücksicht darauf dass $AD$ auch Sekante des Kreises $BHD$ ist, dass $AH$ Berührungslinie an eben diesen Kreis sein muss. Nach der Construction sind die $BI$ und $DE$ senkrecht zum Durchmesser $BD$ des Kreises $BHD$, also Berührungslinien an diesen Kreis ebenso wie $IHE$. Folglich ist $BI = IH$, $DE = EH$. Wegen Dreiecksähnlichkeit ist

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BI}, \quad \text{d. h.} = \frac{EH}{IH}.$$

Ferner ist

$$\frac{EH}{IH} = \frac{DC}{BC}, \quad \text{also } \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \text{ oder } AB : AD = BC : CD,$$

worin eben die harmonische Theilung von $ABCD$ besteht. Der Satz selbst war ja nicht neu. Schon Apollonius hat ihn in seinen Kegelschnitten III, 37 ausgesprochen[1]), aber der von uns berichtete Beweis gehört De la Hire an, und wenn Desargues gleichfalls des alten Satzes eingedenk war (Bd. II, S. 678), so ist dessen Fassung wesentlich undeutlicher und schwerer verständlich. De la Hire zog dann, und diese Erweiterung ist wieder sein volles Eigenthum, aus jenem Satze Folgerungen. Im XXVI. bis XXIX. Satze führt er den Beweis, dass die Berührungssehnen in einem Punkte sich schneiden, wenn die Ausgangspunkte der Paare von Berührenden auf einer Geraden liegen. Die Namen Pol und Polare hat De la Hire allerdings noch nicht eingeführt. Er umschrieb jene Begriffe noch in ähnlicher Weise, wie wir es hier ihm nachgethan haben. Erst im XIX. Jahrhunderte hat Servois das Wort Pol in der hier gemeinten Bedeutung eingeführt[2]), und zwei Jahre später hat Gergonne das Wort Polare dem mathematischen Wortschatze einverleibt[3]). Das zweite Buch überträgt die Eigenschaften des Kreises, welcher Basis eines Kegels ist, auf den durch eine den Kegel durchsetzende Ebene hervorgebrachten Kegelschnitt. Insbesondere wird gezeigt, wie einem Punkte, einem Winkel, einer harmonischen Theilung in der Grundebene Aehnliches in der Schnittebene entspreche, und der VI. Satz, von De la Hire selbst als Stützpunkt des ganzen Werkes bezeichnet[4]), spricht aus, dass in jedem Kegelschnitte Durchmesser auftreten, welche je ein paralleles Sehnensystem halbiren. Die Uebertragung der Sätze vom Kreise auf irgend einen Kegelschnitt findet nun statt. Der XXI. Satz z. B. wiederholt den gleichbezifferten Satz des ersten

[1]) Apollonius Pergaeus (ed. Heiberg) I, 402. [2]) Gergonne, *Annales des mathématiques* I, 367 (1810). [3]) Ebenda III, 297 (1812). [4]) *Lectorem geometram hic admonitum esse volo totum hoc opus conicum huic inniti propositioni.*



Buches, von dem vorhin die Rede war, in der verallgemeinerten Auffassung. Das dritte Buch bringt eine Anzahl von Flächensätzen, das vierte die Asymptoten. Im fünften Buche folgen Sätze über die gleichseitige Hyperbel, über die gemeinschaftlichen Ordinaten von einander schneidenden Kegelschnitten, über die Fläche eines Parabelsegmentes. Den Hauptinhalt des sechsten Buches bilden die ähnlichen Kegelschnitte. Das siebente Buch ist der Normalenaufgabe gewidmet, welche in dem gleichen Sinne behandelt wird, wie bereits bei Apollonius; auch für De la Hire ist die Normale die kürzeste oder die längste Strecke, welche von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt, in dessen Ebene der Punkt liegt, gezogen werden kann. Erst im achten Buche treten die Brennpunkte der Kegelschnitte auf. In demselben Buche finden sich die Sätze über den geometrischen Ort des Scheitels eines aus Berührungslinien an den Kegelschnitt gebildeten rechten Winkels, welcher für die Ellipse und die Hyperbel in einem Kreise, für die Parabel in einer Geraden besteht. Das neunte Buch lehrt die Construction von Kegelschnitten aus gegebenen Elementen.

Neben den drei Werken über Kegelschnitte hat De la Hire auch einige geometrische Abhandlungen veröffentlicht, welche in den Druckschriften der Pariser Akademie der Wissenschaften enthalten sind. Eine derselben[1]) erschien 1694 und beschäftigt sich mit der Epicycloide. De la Hire sagt in der Vorrede, er habe beim Schlosse Beaulieu, acht Stunden von Paris, ein Zahnrad mit epicycloidisch geformten Zähnen zum Ersatz eines ähnlichen herstellen lassen, welches von Desargues herstammte. Auf diese Aussage stützt sich die Annahme (Bd. II, S. 678), Desargues habe bereits erkannt, dass epicycloidische Zähne die geringste Reibung erzeugen und deshalb am zweckmässigsten seien. Dieser Annahme widersprach Leibniz aufs bestimmteste. In Briefen an Johann Bernoulli nimmt er vielmehr die Erfindung für den dänischen Astronomen Olaf Roemer (1644 bis 1710), den Entdecker der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, in Anspruch, der in den Jahren 1671 bis 1681 in Paris lebend dort bis 1676 in persönlichem Verkehre mit Leibniz und Huygens gestanden und beiden von seiner Erfindung Mittheilung gemacht habe. Leibniz weiss sich nicht genug zu verwundern, dass Roemer, der als Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften, wenn auch in Kopenhagen lebend, deren Veröffentlichungen jedenfalls zu sehen bekam, sein geistiges Eigenthum sich ruhig entwenden liess. Uns

[1]) *Mémoires de l'Académie royale des sciences depuis 1666 jusqu'à 1699.* T. IX. [2]) Leibniz III, 477, 811, 816.

scheint grade die Thatsache von Roemers Schweigen bei De la Hires Veröffentlichung den Beweis zu liefern, dass von einer geistigen Eigenthumsanmassung keine Rede sein kann. Wir bezweifeln keineswegs, dass Roemer die Vorzüge epicycloidischer Zähne kannte, dass er in voller Unabhängigkeit zu dieser Kenntniss gekommen war, aber in ihr war Desargues eben doch sein Vorgänger. Das erfuhr Roemer aus De la Hires Vorrede, und deshalb schwieg er. Aber sei dem wie da wolle, eigentlich curventheoretische Untersuchungen über die Epicycloide waren jedenfalls im Drucke nicht vorhanden, weder von Desargues noch von Roemer, und sie gehören mithin mit allem Rechte dem einzigen Veröffentlicher De la Hire an. In seiner Abhandlung hat dieser die Quadratur der Epicycloide ermittelt, die Berührungslinie an dieselbe gezogen und gezeigt, dass die Evolute der Epicycloide eine Curve von der gleichen Art sei. Die Methode ist eine rein geometrische, den Griechen nachgebildet. Für die Lösung der Tangentenaufgabe diente offenbar die bekannte Tangentenconstruction bei der Cycloide als Vorbild, und De la Hire wurde darauf wie auf den Begriff der Evolute durch Huygens hingeleitet, der, wie wir bald sehen wollen, 1673 darüber schrieb. Spätere Abhandlungen gehören eigentlich erst dem XVIII. Jahrh. an, sollen aber hier erwähnt werden, weil De la Hire uns künftig nicht abermals beschäftigen wird. Im Jahre 1706 kam De la Hire in einem *Traité des roulettes* abermals und in allgemeinerer Weise als 1694 auf die Epicycloiden zurück, und im Jahre 1708 veröffentlichte er *Des conchoides en général*, worin wieder nach rein geometrischen Methoden die Berührungslinien, die Inflexionspunkte, die Fläche, die Bogenlänge der Conchoiden zur Untersuchung kamen.

Wir sind mit diesen Abhandlungen De la Hires bereits von der Kegelschnittlehre auf das Gebiet allgemeiner Curvenuntersuchungen hinübergeschritten, ein Gebiet, welches gleichfalls nicht erst neuerdings in Angriff genommen wurde. Im 78. bis 81. Kapitel haben wir unter der gemeinsamen Ueberschrift der Infinitesimalbetrachtungen zusammengestellt, was in der ersten Hälfte des XVII. Jahrh. auf jenem Felde geerntet worden war. Wir haben dabei gesehen, dass die wichtigsten Fragen, die nach den Berührungslinien, nach der Quadratur, nach der Kubatur, nach der Rectification schon gestellt waren, dass es auch nicht an Beantwortungen gefehlt hat, und dass namentlich Fermat Methoden ersann, welche dem, was nun bald Differentialrechnung heissen soll, täuschend ähnelten, während die künftige Integralrechnung aus den Erfindungen von Kepler, von Cavalieri, von Pascal, von Wallis fertig zugehauene Quader zur Errichtung ihres Baues entnehmen durfte. Haben wir doch grade



die Arbeiten von Wallis auch im 85. und 86. Kapitel dieses Abschnittes mehr als einmal als die Grundmauern einer neuen Reihenlehre kennen gelernt. Wohl war jetzt die Zeit gekommen, in der, wie die Schlussbetrachtungen des XV. Abschnittes es ankündigten, die Grammatik der Sprache erfunden werden sollte, welche bisher nur empirisch in Gestalt einzelner Wortformen zur Kenntniss gekommen war, aber während die künftigen Lehrer noch zurückhielten, jeder derselben für sich im Geheimen sann und ersann, arbeitete und verarbeitete, waren andere Forscher nicht müssig die frühere Art der Untersuchung fortzusetzen, und über sie und ihre Leistungen muss berichtet werden.

Wir beginnen mit Isaac Barrow[1]). Ein von ihm in den Jahren 1664—1666 unter dem Titel *Mathematicae lectiones* verfasstes Werk war von geringer Wirkung. Aus ihm dürfte etwa hervorzuheben sein, dass Barrow, ähnlich wie vor ihm Roberval (Bd. II, S. 877) sich dagegen verwahrte, als ob Ungleichartiges mit einander in Vergleich gebracht werden könne. Linien seien nicht aus Punkten, sondern nur wieder aus kleineren Linien, Flächen nicht aus Linien, sondern aus kleineren Flächen zusammengesetzt u. s. w. Ungleich bedeutender waren die *Lectiones opticae et geometricae*, welche 1669 und 1670, dann in einer rasch nöthig gewordenen neuen Auflage 1674 erschienen, erstmalig[2]) also in dem Jahre, in welchem Barrow auf seine Professur in Cambridge zu Gunsten seines Schülers Newton verzichtete (S. 11). Schon in der Vorrede zu den optischen Vorlesungen, welche den Band eröffnen, erklärt Barrow, sein College Newton, ein Mann von ungemein auserlesenem Geiste und bemerkenswerther Erfahrung[3]), habe das Buch durchgesehen und manche Verbesserungen angerathen, manches auch aus dem Eigenen hinzugefügt, was man da und dort unter Nennung des Urhebers eingemischt sehen werde. In der Vorrede zu den geometrischen Vorlesungen, welche mit neu beginnender Seitenzählung nachfolgen, hat Barrow dann abermals Newton zwar nicht geradezu genannt, aber doch hinlänglich deutlich bezeichnet, wenn er sagt, die letzte Vorlesung habe ihm ein Freund, sonst ein ehrenwerther Mann wie Einer, in der-

[1]) C. J. Gerhardt, die Entdeckung der höheren Analysis (1855) S. 45—48. — H. Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis (1856) S. 16—21 und 73—77. — Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics* (1888) S. 268—270. — Zeuthen, Barrow le maitre de Newton in der *Oversigt over det kgl. Danske videnskabernes selskabs forhandlinger*. 1897. pag. 565—606.
[2]) Uns lag der Druck von 1674 vor. [3]) *peregregiae vir indolis ac insignis peritiae exemplar revisit, aliqua corrigenda monens, sed et de suo nonnulla penu suggerens, quae nostris alicubi cum laude innexa cernes.*

artigen Dingen aber ein unbilliger Forderer, abgequält[1]). Davon, dass Newton auch die geometrischen Vorlesungen durchgesehen habe, ist nicht die Rede, doch ist es nicht unmöglich, dass es geschah, wenn auch nirgend in ihnen auf Newton als Erfinder oder Einflösser Bezug genommen ist, mit Ausnahme einer Stelle gegen Schluss der zehnten Vorlesung und einer zweiten am Anfang des ersten Anhanges zur elften Vorlesung. Barrow selbst legte auf die geometrischen Vorlesungen nur geringes Gewicht, oder gab sich wenigstens den Anschein solcher niedrigen Schätzung derselben. Gebraucht er doch wieder in der Vorrede die Redewendung, diese Vorlesungen sollten den optischen nur als Begleiter und gewissermassen als Zugabe, *mantissa* (S. 96), dienen, denn in anderem Falle würde er kaum daran gedacht haben, solchen Auskehricht, *quisquiliae*, an das Sonnenlicht zu bringen. Wir glauben auf diesen Ausdruck hinweisen zu sollen, weil die Bedeutung, welche ein Schriftsteller dieser oder jener unter seinen Arbeiten beimisst, nicht selten ersehen lässt, ob und in wie weit er selbst erkannte, wie gross eigentlich der von ihm vollzogene Schritt war. Barrow ging von der Bewegung aus, welche ihrer Art und ihrer Grösse nach zu betrachten sei. Der Art nach ist sie fortschreitend, kreisförmig oder aus beiden gemischt. Zur Beurtheilung der Bewegungsgrösse, d. h. ob sie schneller ob langsamer als eine andere, bedarf man des Zwischenbegriffes der Zeit. Zeit aber ist das Verharren eines jeden Gegenstandes in seinem Sein[2]). Auf die Frage, ob der Begriff der Zeit nicht den der Bewegung einschliesse, antwortet Barrow, das thue er nicht mehr als er den Begriff der Ruhe einschliesse. Die Grösse der Zeit hänge von keinem von beiden ab, sie sei eine Grösse für sich. Um aber ein Maass dieser Grösse zu erhalten, ist das Hilfsmittel der Bewegung zu benutzen[3]). Diejenigen Bewegungen, welche meistens als Zeitmaass dienen, sind die der Gestirne, aber nicht unmittelbar, sondern in uns nahe gerückter Weise, so dass unsere Sinne sie wahrnehmen, unsere Versuche sie zur Erscheinung bringen können,[4]); Sonnenuhr und Sanduhr erläutern die Meinung dieses Ausspruchs. Die Zeit wird durch irgend ein Bild dargestellt werden können, welches die Gleichmässigkeit veranschaulicht, namentlich durch Gerade und Kreis. Ist doch

[1]) *Ultimam amicus (vir sane cum primis probus, sed in hujusmodi negotiis flagitator improbus) extorsit.* [2]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 2: *Tempus est perseverantia rei cujusque in suo esse.* [3]) Ebenda pag. 3: *Ita per se tempus quantum est, etsi quo temporis quantitas a nobis dignoscatur, advocandum sit motus subsidium.* [4]) Ebenda pag. 5: *coelestia corpora non esse primarias et originales temporis mensuras, ast illos potius motus, qui prope nos sensibus observantur et experimentis subjacent nostris.*



die Zeit als einfach ausgedehnte Grösse[1]) und durch den stetigen Fluss eines Augenblickes entstanden zu denken[2]). Schliesslich wählt Barrow nur die Gerade als Versinnlichung der Zeit und eine senkrecht zur Zeitlinie gezogene Gerade als Versinnlichung der in jedem Augenblicke vorhandenen Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeitsgeraden können, je nachdem die Geschwindigkeit als gleichbleibende oder als veränderliche gedacht ist, von derselben oder von verschiedener Länge sein. Die durch die Gesammtheit der Geschwindigkeitslinien gebildeten Flächenräume liefern ein Bild der in der gegebenen Zeit mit den gegebenen Geschwindigkeiten vollzogenen Bewegungen, der vereinigten Geschwindigkeit[3]), der bewegenden Kraft[4]) (Figur 15). Das Rechteck $AEZZ$, das Dreieck $AEY$ erläutern die Meinung. Es erscheint nicht unangemessen, auf das wiederholte Vorkommen der unterschiedlosen Buchstaben $Z$ und $Y$ hinzuweisen und dabei an die Leibnizischen Stellenzeiger zur Unterscheidung gleicher Buchstaben zu erinnern. Unterschiedlose Buchstaben zu gebrauchen lag in der Gewohnheit der Zeit, und auch Pascal bediente sich ihrer wiederholt[5]). Barrow hat durch die Erörterung der Bewegung den Ort der Punkte $Z$, $Y$ u. s. w. entstehen sehen.

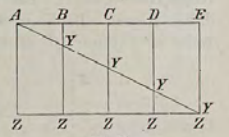

Fig. 15.

Er ist bei den Curven angelangt, denen er in der zweiten Vorlesung sich zuwendet.

Sie entstehen als Endprodukte einer Erzeugenden, Genetrix, welche längs einer Leitlinie, Directrix, verschoben wird[6]). Bei der Berechnung der entstehenden Flächenräume ist nach der Methode der Indivisibilien zu verfahren, welche unter allen Methoden die freieste von Schwierigkeiten ist, und nicht minder gewiss und untrüglich, wenn sie nur richtig angewandt wird[7]).

In der dritten Vorlesung entsteht eine Curve auch durch zusammengesetzte und zusammentreffende Bewegungen[8]), wenn z. B.

[1]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 6: *unica dimensione praeditum quantum.* [2]) Ebenda pag. 6: *ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginamur.* [3]) Ebenda pag. 10: *aggregata velocitas.* [4]) Ebenda pag. 13: *vis motiva.* [5]) Pascal, Oeuvres III, 373 in dem Briefe von Dettonville an Carcavi und an vielen anderen Orten. [6]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 14: *Notatur autem abhinc brevitatis ergo tam in his, quam in similibus casibus harum linearum illam quae motu suo magnitudinem describit, a me Genetricem dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens prior defertur, Directricem appellari.* [7]) Ebenda pag. 21: *juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, et modo rite adhibeatur haud minus certam et infallibilem.* [8]) Ebenda pag. 24: *Ad compositos nunc et concurrentes, eidem proposito servientes, motus accingimur.*

die eine Gerade $AB$ in gleichförmiger Bewegung eine Parallelverschiebung erfährt, während zugleich die zu $AB$ senkrechte $AC$ in einer zweiten ebenfalls gleichförmigen Parallelverschiebung sich befindet, so dass die aufeinander folgenden Lagen beider Geraden in Punkten $M$ der Curve sich schneiden. Die Zusammensetzung kann aber auch verwickelterer Natur sein. Es kann eine fortschreitende mit einer drehenden Bewegung, es können weit mehr als zwei Bewegungen mit einander zusammentreffen.

In der vierten Vorlesung kommt Barrow zur Tangentenaufgabe als Anwendung des Gedankens, die Zusammensetzung von Bewegungen zur Erörterung der Eigenschaften der Curven zu gebrauchen[1]). Die Bewegung der einen Geraden, welche etwa von links nach rechts gedacht wird, nennt Barrow Seitenbewegung[2]), die Bewegung nach abwärts auf der seitlich verschobenen Geraden heisst Abwärtsbewegung[3]). Bei anderer Lage der Figur kann die Wahl dieser Namen allerdings wenig zweckmässig erscheinen. Beispielsweise sei[4]) (Figur 16) die Gerade $TMS$ Berührungslinie an der Curve $OMO$ in $M$, so verhält sich in diesem Punkte $M$ die Abwärtsbewegung zur Seitenbewegung wie $TP$ zu $PM$, und diese Benennungen stimmen nur dann, wenn man die ganze Figur um einen rechten Winkel gedreht denkt, so dass $X$ der höchste Punkt, $Y$ der am weitestens rechts befindliche wird. Jenes Verhältniss muss nämlich stattfinden, damit ein Punkt längs der Geraden $TM$ sich bewege, und weil in $M$ Curve und Berührungslinie übereinstimmen, so muss dort auch für die Curve das gleiche Verhältniss der beiden Bewegungen stattfinden. Naturgemäss lässt alsdann der Satz sich auch umkehren: Stellen $TP$ und $PM$ die Abwärts- und die Seitenbewegung des Curvenpunktes $M$ dar, so muss

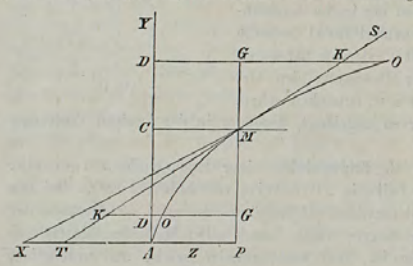

Fig. 16.

[1]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 29: *Propositum est nobis e compositione motuum emergentes linearum affectiones indagare ac exponere.* [2]) *motus transversus.* [3]) *descensus* oder auch *motus descendens.* [4]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 32—33. Die Buchstaben an der Figur sind genau dieselben wie bei Barrow.



$TM$ Berührungslinie sein. Es ist kaum nothwendig hervorzuheben, dass Barrow hier der Hauptsache nach Robervals Gedankengang (Bd. II, S. 881) einschlägt, und wenn wir weiter daran erinnern (Bd. II, S. 905), dass Wallis schon 1659 Torricelli gegen Roberval in Schutz nahm, dass also damals Robervals Tangentenmethode in England sehr wohl bekannt war, so ist an eine Anlehnung Barrows an diesen Vorgänger nicht zu zweifeln.

Wir überspringen die folgenden Vorlesungen bis ans Ende der zehnten Vorlesung, wo Barrow dem Rathe eines Freundes, offenbar wieder Newtons, folgend die Methode der durch Rechnung zu beschaffenden Berührungslinien mittheilt[1]), deren er sich zu bedienen pflege. Es sei (Figur 17) $MT$ Berührungslinie an die Curve $ANM$ in $M$ und $MN$ ein Curvenstück von unbegrenzter Kleinheit[2]). $MP$ und $NQ$ sind senkrecht zu $AP$, während $NR \parallel AP$. Barrow benennt die einzelnen auftretenden Strecken durch einfache Buchstaben $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$, $NR = e$. Die Stücke $MR$, $NR$ werden durch eine Gleichung mit einander in Verbindung gesetzt, wobei folgende Regeln festgehalten werden: 1. Beim Rechnen wirft man alle Glieder fort, welche höhere Potenzen von $a$ und $e$ oder Producte dieser Grössen in einander enthalten. 2. Ist die Gleichung hergestellt, so wirft man die Glieder weg, welche $a$ und $e$ nicht enthalten, weil jene Glieder, als Gleichungspolynom gedacht, immer Null sind. 3. Nun ersetzt man $a$ durch $m$ und $e$ durch $t$, so wird $PT$ bekannt. Als Begründung fügt Barrow hinzu: Wenn in die Rechnung ein unendlich kleines Stück einer Curve eingeht, so wird statt dessen ein richtig gewähltes Stück der Berührungslinie oder irgend eine wegen der unendlichen Kleinheit des Curvenstückes gleichwerthige gerade Strecke genommen[3]). Auch hier ist eine Erinnerung wohl angebracht, welche ins Gedächtniss zurückruft, dass Fermat (Bd. II, S. 863) ein für allemal gewisser Buchstaben zur Bezeichnung bestimmter geometrisch erklärter Punkte und Strecken sich zu bedienen pflegte, und dass sein $E$ genau die gleiche Bedeutung hatte wie Barrows $e$. Alle anderen Buchstaben weichen allerdings wesentlich ab, und die Subtangente insbesondere, Barrows $t$, heisst bei Fermat $A$. Dagegen ist darin wieder volle Uebereinstimmung, dass grade die Subtangente

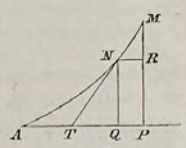

Fig. 17.

[1]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 80—81. [2]) *indefinite parvum.* [3]) *Quod si calculum ingrediatur curvae cujupiam indefinita particula substituatur ejus loco tangentis particula rite sumpta; vel ei quaevis (ob indefinitam curvae parvitatem) aequipollens recta.*

gesucht wird, um mittels ihrer den Fusspunkt der Berührungslinie kennen zu lernen. Es ist allerdings anzuerkennen, dass der Druck von Fermats *Opera varia* erst 1679 stattfand, also bedeutend später als der von Barrows geometrischen Vorlesungen, aber seine Tangentenbestimmung war seit 1642 und 1644 durch Hérigone (Bd. II, S. 859) bekannt gegeben. Das erste Beispiel, welches Barrow durchführt, ist (Figur 18) das einer Curve $ANMO$, deren Sehne $AM$ (beziehungsweise $AN$) in ihrer Verlängerung auf der Geraden $BH$ ein ihr gleiches Stück $BK$ (beziehungsweise $BL$) abschneidet, wobei der Winkel $ABH$ als ein rechter vorausgesetzt ist

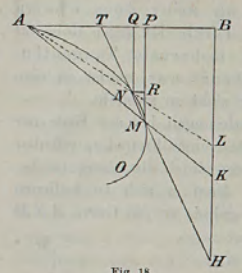

Fig. 18.

Ausser den uns schon bekannten Bezeichnungen

$$MR = a, \quad NR = QP = e, \quad MP = m, \quad PT = t$$

sei noch $AB = r$, $AP = q$. Nun ist

$$AQ = q - e, \quad QN = m - a,$$

also

$$(q - e)^2 + (m - a)^2 = AN^2 = BL^2.$$

Ferner ist

$$AQ : QN = AB : BL,$$

also

$$BL = \frac{r(m-a)}{q-e} \quad \text{und} \quad BL^2 = \frac{r^2(m-a)^2}{(q-e)^2}.$$

Die beiden Werthe von $BL^2$ sind einander gleichzusetzen:

$$(q - e)^2 + (m - a)^2 = \frac{r^2(m-a)^2}{(q-e)^2}.$$

Folglich ist

$$(q - e)^4 = (r^2 - (q - e)^2)(m - a)^2.$$

Entwickelt man unter Weglassung aller Glieder von höherer als erster Dimension in $a$ und $e$, so entsteht

$$q^4 - 4q^3e = r^2m^2 - q^2m^2 + 2qem^2 - 2amr^2 + 2amq^2.$$

Weiter soll $q^4 = r^2m^2 - q^2m^2$ in Wegfall kommen. Eine Begründung dafür gibt Barrow nicht, aber es hat seine Richtigkeit. Wegen $AB : BK = AP : PM$ ist

$$(AB \cdot PM)^2 = (AP \cdot BK)^2 = (AP \cdot AM)^2 = AP^2(AP^2 + PM^2)$$

$$\text{d. h. } r^2m^2 = q^2(q^2 + m^2) \quad \text{und} \quad q^4 = r^2m^2 - q^2m^2.$$

Nach Weglassung dieser Glieder bleibt noch



$$-4q^3e = 2qem^2 - 2amr^2 + 2amq^2.$$

Jetzt wird $a$ durch $m$, $e$ durch $t$ ersetzt, und man erhält

$$t = \frac{r^2m^3 - q^2m^2}{2q^3 + qm^2}.$$

Bei Barrow ist in Folge einer Irrthums an die Stelle des Pluszeichens im Nenner des Ausdruckes für $t$ ein Minuszeichen getreten. Barrow behandelt noch vier weitere Beispiele, deren zweites das Cartesische Blatt (*folium cartesii* Bd. II, S. 856), das dritte die Quadratrix ist. Jene Descarte'sche Curve, deren Gleichung in der heute üblichen Schreibweise $x^3 + y^3 = axy$ lautet, heisst bei Barrow in einer Randnote *La Galande*, im Texte kommt ein Name nicht vor. Jene Randnote ist ein neuer Beleg dafür, dass Barrow mit französischen geometrischen Untersuchungen bekannt war. Im 11. Paragraphen der zehnten Vorlesung ist ein Zusammenhang der Subtangente einer Curve mit der Quadratur einer zweiten Curve hergestellt, auf welchen grosses Gewicht gelegt worden ist[1]). Barrow hat nämlich in diesem Paragraphen ein deutlicheres Bewusstsein der Verwandtschaft zwischen Quadratur und inverser Tangentenaufgabe an den Tag gelegt, als es Descartes (Bd. II, S. 856) und Fermat (Bd. II, S. 864) besassen oder wenigstens zu erkennen gaben.

Was Wallis 1672 als seine Tangentenmethode veröffentlichte[2]), verleugnet ebensowenig seine Abhängigkeit von schon bekannten Methoden. Die Subtangente wird gesucht, und als Mittel zum Zweck dient eine in der Nähe des Berührungspunktes gezogene Ordinate bis zum Durchschnitte mit der Curve, beziehungsweise mit der Berührungslinie. Unterscheidend ist, dass Wallis das unendlichkleine Abscissenstückchen zwischen der Ordinate des Berührungspunktes und der ihr benachbarten Ordinate nicht $E$ oder $e$, sondern $a$ nennt, und dass er, was allerdings ein bedeutsamerer Unterschied ist, nicht eine, sondern zwei der Berührungsordinate benachbarte Ordinaten in Rechnung zieht, beide um $a$ von derselben abstehend, aber die eine einem früheren, die andere einem späteren Curvenpunkte angehörend, so dass die Berührungsordinate zwischen beiden liegt. Wallis Darstellung gewinnt dadurch unleugbar an Klarheit.

In demselben Bande der Veröffentlichungen der Londoner Königlichen Gesellschaft[3]) ist die Tangentenmethode von De Sluse nach einem Briefe desselben vom 17. Januar 1673 zum Drucke befördert, über welche wir (Bd. II, S. 917—918) berichten durften, weil sie

[1]) Zeuthen, l. c. pag. 575—576. [2]) P. T. VII, 4010—4016 (Nr. 81).
[3]) Ebenda VII, 4243—4247 (Nr. 90).

ihrer Erfindung nach wohl schon dem Jahre 1652 angehört, wenn sie auch erst mehr als zwanzig Jahre später der lesenden Welt zur Verfügung gestellt wurde. De Sluse versprach in seinem Briefe einen Beweis seiner Methode. An dieses Versprechen gemahnt, liess er am 3. Mai 1673 einen zweiten Brief nachfolgen[1]). Statt eines Beweises gab er indessen nur drei Sätze an, auf welche seine Methode sich gründe. Erstens sei die Differenz gleich hoher Potenzen mit positiv ganzzahligen Exponenten zweier Zahlen durch die Differenz der zwei Zahlen selbst theilbar. Zweitens bestehe die Entwicklung einer Potenz von abermals positiv ganzzahligem Exponenten eines Binomiums aus einem Gliede mehr als der Exponent Einheiten zähle. Drittens stehen die Quotienten derselben Zahl getheilt durch zwei andere in dem umgekehrten Verhältnisse jener Divisoren. Die Sätze seien in der angegebenen Reihenfolge zu benutzen, und aus dieser Angabe werde der Leser ohne grossen Zeitaufwand den Beweis herzustellen wissen.

Abermals auf früher (Bd. II, S. 905) Mitgetheiltes zurückgreifend führen wir an, dass Wallis. Brouncker und Wren[2]) im October 1673 die Erstlingsrechte von Neil und Wren auf die Ermittelung von Rectificationen aufrecht hielten. Veranlassung dazu gab die durch Huygens 1673 herausgegebene Schrift *Horologium oscillatorium*, in welcher die Rectification der semicubischen Parabel für Van Heuraet in Anspruch genommen war[3]).

Wir müssen auf das hochbedeutende Werk von Huygens, von welchem eine erste Niederschrift schon am 5. Februar 1665 vollendet war[4]), näher eingehen. Durch eine vom 25. März 1673 datirte Widmung an König Ludwig XIV. von Frankreich eingeleitet, zerfällt das Werk[5]) in fünf Theile: 1. die Beschreibung der Pendeluhr, 2. der Fall schwerer Körper und ihre Bewegung längs der Cycloide, 3. die Lehre von der Evolution, 4. der Schwingungsmittelpunkt, 5. die Fliehkraft.

Der erste Theil bietet für unsere Zwecke nichts zur Mitheilung. Im zweiten Theile sind zunächst die Fallgesetze zu beweisen. Den Ausgangspunkt des Beweises bildet die dritte Hypothese[6]), dass, sofern auf einen Körper sein den Fall verursachendes Gewicht und

[1]) P. T. VIII, 6059 (Nr. 95). [2]) Ebenda VIII, 6146—6150 (Nr. 98). [3]) Huygens, *Opera varia* (Leiden, 1724) pag. 100—101. [4]) Huygens' Gesammtausgabe V, 223 (Haag, 1893). [5]) Huygens, *Opera varia* pag. 33—248, die Widmung schon pag. 17—20. — Ein sehr ausführlicher Auszug, in welchem namentlich die der Mechanik angehörenden Sätze genau mitgetheilt sind, bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* V, 27—67. [6]) Huygens, *Opera varia* pag. 51.



irgend eine andere Kraft gleichzeitig einwirken, jede Wirkung für sich zu betrachten sei, eine Hypothese, welche später die noch allgemeinere Form erhalten sollte, dass von zusammen wirkenden Kräften jede für sich und unabhängig von den anderen in Rechnung kommen müsse. Der Fall der Körper wird theils in freier Luft, also senkrecht, theils längs einer Curve untersucht, und da Huygens auf den Fall längs eines Cycloidenbogens hinsteuert, so spricht er in mehreren Sätzen von dieser Curve. Im XV. Satze[1]) wird die Berührungsaufgabe für die Cycloide behandelt und erweitert. Denkt man sich irgend eine Figur in Rollbewegung längs einer Geraden, so dass ein Punkt $A$ der erzeugenden d. h. rollenden Figur bei dieser Bewegung in seinem eine Curve bildenden Laufe beobachtet werden kann, ist ferner $C$ der tiefste Punkt der Figur, in welchem sie auf der Geraden, über die sie rollt, jedesmal aufsteht, so ist in jeder einzelnen Lage $CA$ normal zur Rollcurve. Das ist jener Satz, an welchem wir (S. 130) dachten, wo wir von den Anregungen redeten, welche De la Hire von Huygens erhalten haben mochte. Der Fall längs der Hohlseite einer Cycloide, welche durch einen unterhalb einer wagrechten Geraden rollenden Kreis erzeugt ist, deren Scheitelpunkt mithin der tiefste Punkt der ganzen Zeichnung ist, wird untersucht, und im XXV. Satze[2]) kommt Huygens zu dem Ergebnisse, dass ein Körper, von welchem Punkte des absteigenden Cycloidenarmes aus er in fallende Bewegung gerathe, genau in derselben Zeit beim Tiefpunkte anlange. Das ist die merkwürdige Eigenschaft, welche man später den Tautochronismus der Cycloide genannt hat.

Wir bemerken beiläufig, dass dieser eine Satz schon vor dem Erscheinen des Horologium oscillatorium in die Oeffentlichkeit gedrungen sein muss. Ignace Gaston Pardies[3]) (1633—1673) aus Pau, der am Jesuitencollegium seiner Vaterstadt alte Sprachen, Mathematik und Physik lehrte und kurz vor seinem Tode als Professor der Rhetorik an das Collège Louis le Grand in Paris kam, kannte ihn wenigstens. Sein Todestag war der 22. April 1673. Unmittelbar vorher gab er in französischer Sprache *La statique ou la science des forces mouvantes* heraus, und bewies darin jenen Satz, welchen er den Isochronismus der Cycloide nannte. Das Horologium war aber damals noch nicht im Buchhandel. Pardies sagte vielmehr ausdrücklich in seiner Vorrede, er sehe mit Begierde dem Erscheinen der Schrift von Huygens entgegen, um sich zu überzeugen, ob sein Beweis mit dem des Erfinders übereinstimme[4]). Lord Brouncker hat

[1]) Huygens, *Opera varia* pag. 69—70. [2]) Ebenda pag. 87. [3]) Poggendorff II, 358. [4]) Vergl. den Bericht über die Statique von Pardies in den P. T. VIII, 6043 (Nr. 94).

dann gleichfalls bei Gelegenheit des Herauskommens der Statique einen Beweis veröffentlicht[1]). Brounckers Ausdrucksweise ist etwas zu unbestimmt, als dass man aus ihr entnehmen könnte, ob er damals den Satz kennen lernte und zu ihm einen Beweis ermittelte, oder ob er auf eine frühere Erfindung des Satzes Anspruch zu erheben wünschte, aber grade wegen der Unbestimmtheit ist ersteres das Wahrscheinlichere.

Wir kehren zu dem Horologium oscillatorium zurück, und zwar zu dessen drittem Theile. Ist, sagt Huygens in der III. Definition dieses Theiles[2]), um eine nach einer Seite hin hohle Linie ein biegsamer Faden gewickelt, und blieb das eine Ende des Fadens mit der Curve in Verbindung, während das andere unter fortwährender Spannung des abgelösten Stückes weiter geführt wird, so beschreibt dieses Fadenende eine zweite Curve, welche die durch Abwickelung beschriebene, *Descripta ex evolutione*, heissen soll. Das ist diejenige Curve, welche heute den Namen der Evolvente führt. Die erste Curve dagegen nennt Huygens in der IV. Definition[3]) die Abgewickelte, Evoluta, und dieser Name ist ihr geblieben. Der I. Satz[4]) behauptet, dass jede Berührungslinie der Evolute auf der Evolvente senkrecht stehe. Wenn (Figur 19) die Gerade $FDC$ in $D$ die Evolute berührt, wenn alsdann in dem der Evolvente angehörenden Punkte $C$ die $CE$ senkrecht zu $DC$ gezogen wird, so treffe, heisst es, diese $CE$ die Evolvente in keinem anderen Punkte als in $C$, berühre sie folglich eben dort. Bei Fortsetzung der Abwicklung, bis der Faden die Evolute in $G$ berührt, trifft der die Evolvente beschreibende Endpunkt in $H$ ein, und $GH$ schneidet die $CE$ in $E$. In dem bei $C$ rechtwinkligen Dreiecke $CEF$ ist $EF > CF$. Ferner ist Bogen $AD = CD$, Bogen $AG = GH$ und zugleich Bogen $AG =$ Bogen $AD +$ Bogen $DG = CD +$ Bogen $DG$. Aber $DF + FG >$ Bogen $DG$, also $CD + DF + FG > GH$ oder $CF + FG > GH$. Daraus folgt weiter $CF > GH - FG$ oder $CF > FH$. Nun war $EF > CF$, und umsomehr ist $EF > FH$,

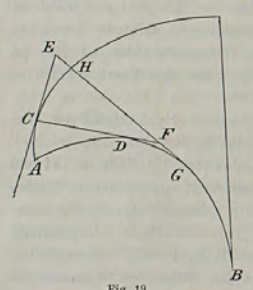

Fig. 19.

[1]) P. T. VIII, 6032 (Nr. 94): *nunc juris publici facta ex occasione quam suppeditavit Rev. P. Pardies.* [2]) Huygens, *Opera varia* pag. 89: *lineae in unam partem cavae.* [3]) Ebenda pag. 90. [4]) Ebenda pag. 90—91.



d. h. $E$ liegt jenseits der Evolvente. An einer zweiten Figur wird durch ganz ähnliche Schlüsse nachgewiesen, dass auch, wenn der Punkt $H$ der Evolvente zwischen $A$ und $C$ liegt, $G$ folglich auf der Evolute zwischen $A$ und $D$ sich befindet, $GH > GE$ sein muss, also auch dieser Punkt $E$ jenseits der Evolvente liegt, und damit ist der an die Spitze gestellte Satz bewiesen, ist zugleich bewiesen, dass die Curve $AHCH$ fortwährend gleichartig gekrümmt ist[1]). Der V. Satz[2]) beweist, dass, wenn zwei Cycloiden von gleichen Erzeugungskreisen so übereinander gezeichnet sind, dass die Grundlinien parallel sind und der Anfang der oberen Cycloide mit dem Scheitelpunkte der unteren zusammenfällt, alsdann die Berührungslinien der unteren Cycloide auf der oberen senkrecht stehen. Im VI. Satze wird weiter gezeigt, dass der unteren Cycloide als Evolute die obere als Evolvente entspricht, und der VII. Satz zieht die Folgerung, die halbe Länge der unteren Cycloide müsse dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises gleich sein. Nach der Cycloide wendet Huygens sich der gewöhnlichen Parabel zu, als deren Evolute eine semicubische Parabel auftritt, welche folglich gleich jeder Evolute als rectificirbar sich erweist. Diese Auseinandersetzung ist es, bei welcher, wie (S. 138) erwähnt wurde, Huygens für die Erfinderrechte Van Heuraets auf die Rectification der semicubischen Parabel den durch Wallis vertretenen Ansprüchen Neils gegenüber mit mehr Geschick als Recht eine Lanze bricht. Huygens schaltet nunmehr einige unbewiesene Constructionen ein, welche den Flächeninhalt einer Oberfläche zweiten Grades als Kreis darstellen, zeigt den Zusammenhang der Rectification der gewöhnlichen Parabel mit der Quadratur der Hyperbel, bespricht die Evoluten der Ellipse und der Hyperbel und gelangt so zu dem ganz allgemeinen XI. Satze[3]), dass zu jeder Curve die Evolute gefunden werden könne, welche letztere nothwendig rectificirbar sei. Der Grundgedanke bei der Auffindung der der Curve $ABF$ (Figur 20) entsprechenden Curve $DE$ ist folgender. Die Berührungslinien an $DE$ stehen senkrecht auf $BF$, also müssen die Senkrechten auf $ABF$ die $DE$ treffen. Weil sie senkrecht zu einer als einförmig gewölbt vorausgesetzten Curve nach ihrer Hohlseite hin sind, müssen sie auch einander selbst schneiden, und so seien beispielsweise $BD$, $FE$ zwei Senkrechte zu $ABF$, welche in $D$ und $E$ die Evolute treffen und in $G$ einander

[1]) *in partem unam inflexam esse.* [2]) Ebenda pag. 95—97 die Sätze V, VI, VII. Dann folgt pag. 98: Geschichtliches über die Entdeckung der einzelnen Eigenschaften der Cycloide, deren Rectification zuerst von Wren vollzogen worden sei. [3]) Huygens, *Opera varia* pag. 108—109 und dann wieder 111 bis 112.

schneiden. Je näher $F$ bei $B$ liegt, um so näher liegen die Punkte $D, G, E$ bei einander. Ist der Zwischenraum $BF$ unendlich klein[1]), so fallen die drei genannten Punkte zusammen, und überdies wird alsdann $BH$, welche die Curve $ABF$ in $B$ berührt, auch als deren Berührende in $F$ angesehen werden können[2]). Damit ist genau das Gleiche ausgesprochen, was heutige Mathematiker in die Worte zu kleiden pflegen, die Evolute sei der Ort die Durchschnittspunkte consecutiver Normalen an die Evolvente. Nun handelt es sich um die thatsächliche Auffindung von $G$. Zieht man die $BX$, $YN$, die in $K$ einander senkrecht durchschneiden und ihnen parallel die an der Figur erkennbaren Geraden, wobei $KT = KM$, $LV = LN$ abgemessen wird, so ist

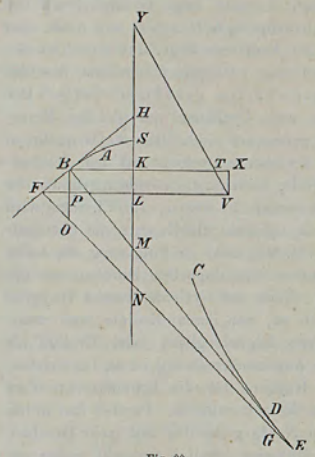

Fig. 20.

$$BG : MG = BG : (BG - BM) = BO : MN = \frac{BO}{BP} : \frac{MN}{BP} = \frac{HN}{HL} : \frac{MN}{KL}.$$

Nun ist die Länge von $BM$, $HN$, $HL$ aus der Figur ersichtlich, und überdies werden diese Strecken für jede Curve berechenbar sein. Findet letzteres auch noch für $\frac{MN}{KL}$ statt, so ist demnach $BG$ in der Proportion

$$BG : (BG - BM) = \frac{HN}{HL} : \frac{MN}{KL}$$

als gegeben zu betrachten. Aber

$$MN - KL = (LM + MN) - (KL + LM)$$
$$= LN - KM = LV - KT = TX.$$

Also $MN = TX + KL = TX + XV$ und

$$\frac{MN}{KL} = \frac{TX + XV}{XV} = 1 + \frac{TX}{XV}$$

[1]) *si interstitium $BF$ infinite parvum intelligatur.* [2]) *$BH$, quae curvam in $B$ tangat, eadem quoque pro tangente in $F$ censebitur.*



d. h. man kennt $\frac{MN}{KL}$ sofern man $\frac{TX}{XV}$, die trigonometrische Tangente des Winkels $TYK$, kennt. Die $YV$, welche diesen nunmehr in Betracht kommenden Winkel mit der gegebenen $YK$ bildet, ist die Verbindungsgerade der Punkte $T$, $V$, d. h. Berührungslinie an die Curve der Punkte $T$, $V$, welche so definirt werden kann, dass in ihr jedes $KT = KM$ oder die Ordinate jedes Curvenpunktes $T$ der Subnormale desjenigen Punktes $B$ der gegebenen Curve $ABF$ gleich ist der mit $T$ auf gleicher Ordinatenlinie liegt. Würde man die Zeichen der heutigen Mathematik in Anwendung bringen und die Gleichung der $ABF$ als $F(x, y) = 0$ schreiben, so wäre $KM = yy'$. Ebenso gross wäre also $KT$ und daher

$$\text{tang } TYK = \frac{d(yy')}{dx} = y'^2 + yy'' = \frac{TX}{XV}.$$

Somit ist $\frac{MN}{KL} = 1 + y'^2 + yy''$. Andrerseits ist der oben als berechenbar bezeichnete Bruch

$$\frac{HN}{HL} = 1 + \frac{LN}{HL} = 1 + \frac{yy'}{y : y'} = 1 + y'^2.$$

Die Proportion, zu welcher wir oben gelangt waren, hat daher die Gestalt

$$BG : (BG - BM) = (1 + y'^2) : (1 + y'^2 + yy'').$$

Ihr entnimmt man $\frac{BG}{BM} = -\frac{1 + y'^2}{yy''}$, $BG^2 = \frac{BM^2(1 + y'^2)^2}{y^2 y''^2}$. $BM$ ist die Normale der Curve $ABF$, also

$$BM^2 = y^2(1 + y'^2) \text{ und } BG^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}$$

in Uebereinstimmung mit bekannten Ergebnissen. Es bedarf sicherlich nicht der Bemerkung, dass Huygens nicht im Stande war, die hier zuletzt geführte allgemeine Rechnung vorzunehmen. Wir wollten unseren Lesern nur die Controle über den Gedankengang von Huygens ermöglichen und führten sie deshalb ziemlich weit über ihn hinaus. Huygens musste seine allgemeinen Betrachtungen, welche für jede Curve galten, mit $\frac{MN}{KL} = 1 + \text{tang } TYK$ beschliessen. Von diesem Punkte an war er genöthigt, für jede besondere Curve die Berechnung von $BG$ in besonderer Weise vorzunehmen, und das hat er auch gethan.

Der vierte Theil des Horologium oscillatorium hat es mit dem Oscillationsmittelpunkte zu thun, d. h. mit der Auffindung desjenigen einfachen, aus einem an einem nicht biegsamen gewichtlosen

Faden hängenden Gewichte bestehenden Pendels[1]), dessen Schwingungsdauer mit der eines gegebenen Körpers, der als Pendel benutzt wird, übereinstimmt. Die Aufgabe war 1646 von Pater Mersenne gestellt worden[2]), und Descartes und Roberval versuchten sich an ihrer Auflösung, welche beiden misslang, was sie aber nicht verhinderte darüber in Streit zu gerathen. Huygens erkannte die ganze Wichtigkeit der Frage, erkannte auch bereits 1664, dass das einfache Pendel sich dazu eigne, eine Längeneinheit zu bilden, deren erfahrungsmässiges Element in der Schwingungsdauer liege[3]), und Robert Hooke stellte Versuche zur Ermittelung der Länge eines Pendels an, das der Einfachheit so nahe als möglich kam[4]). Im Horologium oscillatorium gab nun Huygens die wirkliche Lehre vom Oscillationsmittelpunkte, naturgemäss auf Grund gewisser Voraussetzungen, ohne welche keine physikalische Frage in Angriff genommen werden kann. Huygens' Grundannahme[5]) besteht darin, dass, wenn irgend welche Gewichte in Folge ihrer Schwere[6]) sich zu bewegen anfangen, ihr gemeinsamer Schwerpunkt nicht höher steigen könne als bis dahin, wo er am Beginne der Bewegung sich befand. Dieser Ausspruch, setzt er hinzu, besage nichts weiter als was niemals in Abrede gestellt worden ist, dass schwere Körper nicht von selbst in die Höhe streben[7]). Als zweite Annahme dient ihm, dass im widerstandslosen Raume der Schwerpunkt eines bewegten Pendels beim Abwärts- und Aufwärtsschwingen gleiche Kreisbogen beschreibe. Es würde uns von unserem Gegenstande, der geschichtlichen Entwickelung der Curvenlehre, viel zu weit abführen, wollten wir berichten, wie Huygens auf die erwähnten Annahmen die ganze Lehre vom Oscillations- oder Schwingungsmittelpunkte aufbaut, bis er zuletzt im XX. Satze[8]) zur Vertauschbarkeit des Aufhängepunktes und des Schwingungsmittelpunktes gelangt und daran die Aufsuchung des Schwingungsmittelpunktes bestimmter ihrer Figur nach gegebener Pendel knüpft, wobei theils ebene Figuren, theils wirkliche Körper als Pendel dienen. In einem kurzen fünften Theile sind noch beweislos Sätze über die Fliehkraft[9]) beigefügt.

Haben wir in dem Werke von 1673 Huygens als fruchtbaren geometrischen Erfinder kennen gelernt, so zeigen zwei Abhandlungen von 1693, wie er im Stande war in Fermats Gedanken einzudringen

[1]) *pendulum simplex, hoc est pondus filo inflexili gravitatis experto appensum.* [2]) Heller, Geschichte der Physik II, 74. [3]) Huygens' Gesammtausgabe V, 149: Brief vom 21. November 1664. [4]) Ebenda V, 170: Brief vom 23. December 1664. [5]) Huygens, *Opera varia* pag. 121. [6]) *vi gravitatis suae.* [7]) *gravia sursum non ferri.* [8]) Huygens, *Opera varia* pag. 154. [9]) *De vi centrifuga ex motu circulari.*



und sie klarer darzustellen, als jener selbst vermochte. Es sind Darlegungen von Fermats Methoden Maximal- und Minimalwerthe zu finden[1]) und das Tangentenproblem aufzulösen[2]). Sei etwa (Figur 21) die Gerade $DE$, seien ausserdem die Punkte $A$ und $B$ gegeben, und man suche auf der $DE$ einen Punkt $C$ von der Beschaffenheit, dass $AC^2 + BC^2$ zu einem Minimum werde. Huygens nimmt als selbstverständlich an, es gebe einen solchen Punkt $C$, und es gebe zu beiden Seiten von $C$ stets Punkte $F$, $G$, welche $AF^2 + BF^2 = AG^2 + BG^2 > AC^2 + BC^2$ werden lassen.

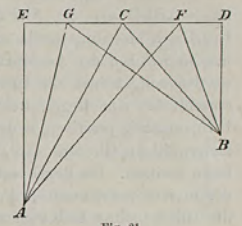

Fig. 21.

Als gegeben gilt $AE = a$, $BD = b$, $ED = c$. $GF$ wird durch $e$ und $EG$ durch $x$ bezeichnet. Nun ist

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 = a^2 + x^2,$$
$$AF^2 = AE^2 + (EG + GF)^2 = a^2 + (x + e)^2,$$
$$BG^2 = BD^2 + (ED - EG)^2 = b^2 + (c - x)^2,$$
$$BF^2 = BD^2 + (ED - EG - GF)^2 = b^2 + (c - x - e)^2.$$

Die vorausgesetzte Eigenschaft der Punkte $F$, $G$, welche

$$AF^2 + BF^2 = AG^2 + BG^2$$

lautete, heisst daher jetzt

$$a^2 + x^2 + b^2 + (c - x)^2 = a^2 + (x + e)^2 + b^2 + (c - x - e)^2$$

oder $a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2 - 2ce + 4xe + 2e^2,$$

und kennt man $e$, so ist $x$ durch diese Gleichung gegeben. Nimmt man jenes $e$ als unendlich klein an, so fallen die drei Punkte $G$, $C$, $F$ in $C$ zusammen, und $x$ ist die Entfernung des gesuchten Punktes $C$ von $E$. Werden in der gefundenen Gleichung zunächst die Brüche weggeschafft, deren in dem vorliegenden Beispiele keine vorhanden sind[3]), so streichen sich dann auf beiden Seiten die gleichen Glieder weg, und das werden nothwendigerweise alle die sein, in welchen $e$ nicht vorkommt, wie leicht ersichtlich, da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen aus dem links von demselben befindlichen so entstand, dass $x$ durch $x + e$ ersetzt wurde. Die übrig bleibenden Glieder der Gleichung besitzen also $e$ als gemeinsamen Faktor, durch welchen

[1]) Huygens, *Opera varia* pag. 490—498. [2]) Ebenda pag. 498—506. [3]) *sublatis primum, si quae sunt, fractionibus (quae in hoc exemplo nullae sunt).*

dividirt werden kann. Dann erscheint eine neue Gleichung, deren Glieder theils von $e$ frei sind, theils $e$ noch als Faktor besitzen. Letztere fallen weg, weil $e$ als unendlich klein betrachtet wird, und nun ermittelt man $x$. Aus dieser Theorie lässt aber eine praktische Regel sich herleiten, welche in den Fällen zur Anwendung zu kommen hat, in welchen der Ausdruck, der ein Maximum oder ein Minimum werden soll, keinen die Unbekannte im Nenner enthaltenden Bruch einschliesst, eine Regel, welche darin ihre Begründung findet, dass bei ganzzahlig positivem $n$ der Ausdruck $(x+e)^n = x^n + nx^{n-1}e +$ anderweitigen Gliedern wird, welche höhere Potenzen von $e$ zu Faktoren besitzen. Die Regel lautet: „Jedes Glied ist mit dem Exponenten der in ihm vorkommenden Potenz der Unbekannten zu vervielfachen, die Glieder ohne Unbekannte sind wegzulassen, alle jene Produkte zusammen sind gleich Null zu setzen.“ Aus

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$$

wird demnach

$$-2cx + 4x^2 = 0, \quad x = \frac{c}{2}.$$

Vergleicht man Huygens Begründung mit den Sätzen, auf welchen nach De Sluses zweitem Briefe von 1673 (S. 138) dessen Tangentenmethode beruhte, so kann man kaum zweifeln, dass De Sluses Gedankengang mit dem von Huygens hier bei Gelegenheit der Bestimmung von Maximal- und Minimalwerthen Entwickelten nahe verwandt war. Doch wir gehen in unserem Berichte über die Huygens'sche Abhandlung weiter. Ist der zum Maximum oder Minimum zu machende Ausdruck mit Brüchen behaftet, deren Nenner die Unbekannte enthalten, so nimmt die Regel folgende Gestalt an, deren Beweis wiederum von dem gleichen Gedanken aus wie vorher leicht zu führen ist: „Zunächst werden alle die Unbekannte nicht enthaltenden Glieder weggelassen; dann bringt man alle Glieder auf gemeinschaftlichen Nenner; der ganze Zähler wird hierauf mit dem ganzen Nenner vervielfacht und jedes einzelne Glied des Produktes überdies mit der Differenz der Exponenten der Unbekannten in den dem Zähler und dem Nenner angehörenden Faktoren, positiv wenn ersterer, negativ wenn letzterer den höheren Exponenten besitzt; die Summe dieser Produkte endlich ist gleich Null zu setzen.“ Das von Huygens gewählte Beispiel ist $\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3}$. Er bildet

$$(3-0)bc^2 \cdot bx^3 - (2-0)bc^2 \cdot c^2x^2 - (1-0)bc^2 \cdot 2bc^2x$$
$$+ (3-3)x^3 \cdot bx^3 - (2-3)x^3 \cdot c^2x^2 - (1-3)x^3 \cdot 2bc^2x = 0$$

oder

$$3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x + c^2x^5 + 4bc^2x^4 = 0.$$



Diese Gleichung ist durch $bc^2x + c^2x^2$ theilbar und liefert als Quotienten $x^3 + 3bx^2 - 2bc^2 = 0$, woraus $x$ zu ermitteln ist. Huygens gibt ausdrücklich Fermat als den Schriftsteller an, aus welchem er die Anregung zu seiner Darlegung entnommen habe. Es ist kein Zweifel, dass er die Regeln wesentlich bequemer als Jener (Bd. II, S. 858—859) gestaltete, aber ebensowenig, dass er zwei Mängel weder beseitigte, noch vermuthlich erkannte, welche Fermat übrig gelassen hatte. Huygens gleich Fermat weiss nur rationalen Ausdrücken beizukommen, er lässt es vom Zufalle abhängen, ob der gefundene Werth von $x$ ein Maximum oder ein Minimum hervorbringt, von jenen Fällen zu schweigen wo keines von beiden eintritt.

In Notizen von 1675 hat Huygens einen interessanten Satz über Maximalwerthe ausgesprochen ohne ihn zu begründen: von allen Vielecken, welche mittels $n$ gegebener Strecken als Seiten hergestellt werden können, sei dasjenige von grösstem Flächenraume, durch dessen Eckpunkte ein Kreis hindurchgelegt werden könne[1]).

Die zweite Abhandlung von 1693 ist der Tangentenaufgabe gewidmet. Sie muss sehr viel früher geschrieben als dem Drucke übergeben worden sein, denn Huygens sagt in den einleitenden Worten, er habe diese Fassung der Fermatschen Regel als eine praktische erkannt, noch bevor Descartes Briefwechsel herausgekommen war, aus welchem er ersah, wie dieser letztere sich mit jener Regel abzufinden suchte. Das muss also schon vor 1667 gewesen sein, weil in diesem Jahre Clerselliér den genannten Briefwechsel zum Drucke beförderte. Immerhin dürfte es nicht vor 1652 gewesen sein, da damals Huygens Nachdenken wesentlich durch fremde wie eigene auf die Quadratur des Kreises sich beziehende Untersuchungen in Anspruch genommen war. 1652 aber erfand De Sluse (Bd. II, S. 917) seine, wie wir oben bemerkt haben, mit Huygens Gedankenfolgen ungemein nahe verwandte Tangentenmethode. Auch der 1673 veröffentlichte Wortlaut von De Sluses Regel deckt sich fast vollständig mit dem der von Huygens ausgesprochenen Vorschrift. Der Erfindung wie der Veröffentlichung nach ist also hier Huygens der zweite. Sein Eigenthum bleibt nur das Wort Subtangente und eine Klarlegung der Gründe, auf welche die Regel sich stützt, während De Sluse, wie wir gleichfalls wiederholen, sich mit Angabe dreier die Grundlage bildenden Sätze begnügt hatte (S. 138). Im Grossen und Ganzen kommt die Auseinandersetzung wieder darauf hinaus, dass bei ganzzahlig positivem $n$ die Differenz $(x+e)^n - x^n$ mit $nx^{n-1}e$ beginne, um in den weiterfolgenden Gliedern höhere Potenzen von $e$ zu enthalten.

[1]) Huygens, Oeuvres VIII, 80.

Zu den Schriftstellern, welche mit der Curvenlehre sich beschäftigten, gehört auch Tschirnhaus. Manches, was er darüber dachte und veröffentlichte, kann nicht als richtig befunden werden, sei es, dass der Wunsch Früchte seiner rasch wachsenden Berühmtheit zu geniessen ihn Dinge zum Druck befördern liess, an deren vollen Zuverlässigkeit er selbst nicht recht glaubte (S. 118), sei es dass er allzugierig schon auf mangelhafte Induktion hin der neuen Sätze sich freute, welche sich ihm darboten. Werthvoll blieb seine Entdeckung der Brennlinien durch Zurückwerfung, wenn sie wirklich sein Eigenthum wäre, und er sie nicht 1678 in Paris durch Huygens kennen gelernt hätte.[1]) Sei (Figur 22) eine Curve $AFE$ den parallel einfallenden Sonnenstrahlen ausgesetzt, und der Strahl $DF$ werde in der Richtung $FG$ zurückgeworfen. Ein ihm zunächst eintreffender Strahl erzeugt einen auch dem $FG$ sehr nahe liegenden zurückgeworfenen Strahl, der jenen in $G$ schneidet. Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte je zweier zunächst liegender zurückgeworfener Strahlen ist eine Curve $BGE$, welche als Brennlinie durch Zurückwerfung benannt zu werden pflegt, mit fremdländischem Ausdrucke als Catacaustica. Durch gebrochene Strahlen erzeugte Brennlinien führen den Namen Diacaustica. Beide Namen rühren von Johann und Jakob Bernoulli her[2]). Tschirnhaus hat seine Ergebnisse 1682 der Pariser Akademie der Wissenschaften mitgetheilt[3]) und hat sich in seinen Briefen an Leibniz weitläufiger darüber ausgelassen, auch ein Brief an Huygens vom August 1682 ist vorhanden, in welchem Tschirnhaus mit geradezu naiver Unbefangenheit von seinen Entdeckungen redet, als ob diese Dinge für Huygens von überraschender Neuheit wären[4]). Beweise von Tschirnhaus für die Sätze kennt man nicht. Einzelne seiner Behauptungen sind auch thatsächlich unrichtig, was er später in den A. E. vom Februar 1690 zuzugeben sich genöthigt sah: Er habe einen Rechenfehler begangen, indem er früher die Catacaustica des Kreises für eine Curve vierten Grades gehalten habe,

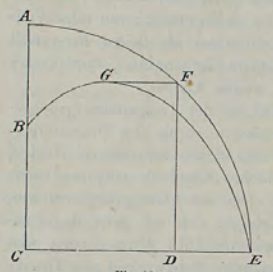

Fig. 22.

[1]) Uylenbroek, Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae II, 40 (Haag 1830). [2]) Jac. Bernoulli, Opera I, 466, 473 und öfter. [3]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 148—179. [4]) Huygens, Oeuvres VIII, 380.



sie sei, wie Jakob Bernoulli ihn aufmerksam gemacht habe, vom sechsten Grade[1]). Der wichtigste Satz Tschirnhausens spricht aus, dass die Bogenlänge $EG$ der Catacaustica der Summe der beiden Strahlen $DF + FG$ gleich sei. Einen Beweis dafür lieferte Leibniz 1682 sofort in dem Antwortschreiben auf die ihm gemachte Mittheilung[2]), indem er dabei von dem nachgrade allgemein gewordenen Gedanken des Unendlichkleinen, beziehungsweise des Zusammenfallens eines Curvenelementes mit seiner Berührungslinie, einer Senkrechten auf eine Gerade mit einem um den Anfang der Geraden als Mittelpunkt beschriebenen unendlich kleinen Kreisbogen u. s. w. Gebrauch machte.

Eine sich von selbst aufdrängende Bemerkung ist es, dass die Durchschnittspunkte nächstliegender Strahlen, wie sie in der Catacaustica auftreten, und Durchschnittspunkte nächstliegender Normalen, wie sie als Evolute erscheinen, sehr verwandte Forderungen an die geometrische Einbildungskraft stellen. Wir wollen damit nicht sagen, Tschirnhaus habe das Horologium oscillatorium studirt, und der Gedanke von Huygens habe bewusst oder unbewusst in ihm weiter gearbeitet. Das kann nicht behauptet, es kann ebensowenig gradezu geleugnet werden, um so weniger geleugnet werden, als Tschirnhaus gleich das erste Mal, wo er Leibniz Andeutungen über seine neuen Untersuchungen machte, die Frage beifügte[3]), ob dieser glaube, dass Huygens, dessen Dioptrik jüngst herausgekommen sei, Aehnliches kenne. Man kann dieser Frage vielleicht entnehmen, dass Tschirnhaus die Empfindung hatte, es sei für Huygens nur naturgemäss, den einmal erfolgreich benutzten Gedanken des Durchschnittes nächstliegender Geraden weiter auszubilden.

Huygens that es auch wirklich, wobei er selbst bis zu einem gewissen Grade einen Vorgänger in Descartes besass, dessen Ovalen (Bd. II, S. 815) Durchschnitte brechender Flächen waren, welche die von einem Punkte ausgehenden Strahlen wieder in einem anderen Punkte vereinigen.[4]) Huygens hat im sechsten Kapitel seines 1678 geschriebenen und Pariser Gelehrten vorgezeigten, dann allerdings erst 1690 gedruckten *Traité de la Lumière* die Aufgabe der Diacaustica gestellt und gelöst.

Die ältesten geometrischen Untersuchungen Tschirnhausens, von denen wir wissen, und die ihn auf der Reise nach Italien beschäftigten, nachdem er eben Paris verlassen, wo er unter Leibnizens Augen und mit diesem gemeinsam, wenn nicht von ihm, mathematisch

[1]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 153. [2]) Leibniz IV, 493—494. [3]) Ebenda IV, 484. [4]) Briefliche Bemerkung von H. Korteweg.

arbeiten gelernt hatte, beziehen sich auf Quadraturen[1]). Zunächst, d. h. während des Jahres 1678, wissen wir von solchen Arbeiten aus an Leibniz gerichteten brieflichen Mittheilungen. Tschirnhaus verfuhr theils nach Cavalieris Methode der Indivisibilien, theils nach einer Methode, die dem *Ductus plani in planum* des Gregorius a Sto. Vincentio augenfällig nachgebildet war, was Leibniz nicht anstand, ihm bemerklich zu machen. Dann probirte es Tschirnhaus mit der umgekehrten Aufgabe: quadrirbare Curven zu finden. Er sagt, er stelle einen algebraischen Ausdruck auf, welchen er als die Quadratur einer Curve betrachtet wissen wolle, und dann könne man nach einer Methode, welche an Barrow sich anschliesse[2]), die Gleichung der Curve finden. Näher erklärte er sich nicht, gab auch keine Beispiele, denen man entnehmen könnte, ob Tschirnhaus richtig schloss. Leibniz antwortete in etwas vorwurfsvollem Tone, das seien Dinge, welche er, Leibniz, ihm in Paris mündlich auseinandergesetzt habe, aber Tschirnhaus scheine nicht Acht gegeben zu haben[3]). Die Sache verhalte sich so. Die Gleichung irgend einer Curve möge

$$0 = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + \text{ etc.}$$

heissen, und man wolle wissen, ob sie algebraisch allgemein quadrirbar sei. Nun stelle man die Gleichung einer zweiten Curve

$$0 = l + mx + nz + pxz + qx^2 + rz^2 + \text{ etc.}$$

auf, welche die Curva summatrix, die summirende Curve genannt werden möge. Ist $t$ deren Subtangente, so sei

$$\frac{z}{t} = \frac{m + pz + 2qx + \cdots}{n + px + 2rz + \cdots},$$

und bei $\frac{z}{t} = y$ entstehe

$$ny + pxy + 2rzy + \cdots = m + pz + 2qx + \cdots.$$

Aus dieser Gleichung sei mittels

$$0 = l + mx + nz + pxz + qx^2 + rz^2 + \text{ etc.}$$

die Unbekannte $z$ wegzuschaffen, und man erhalte eine neue Gleichung, welche als Unbekannte nur $x$ und $y$, in den Coefficienten aber $l, m, n, p, q, r \cdots$ enthalten werde. Die Frage sei nun darauf zurückgeführt, ob durch Identification dieser Gleichung mit

$$0 = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + \text{ etc.}$$

die $l, m, n, p, q, r \cdots$ bestimmt werden können oder nicht; im ersteren Falle habe man eine algebraisch allgemein quadrirbare Curve, im

[1]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 71—112. [2]) Leibniz IV, 472. — Weissenborn, Tschirnhaus S. 84. [3]) Leibniz IV, 481: *Et memini me Tibi jam haec Parisiis dicere, sed ut video non attendisti.*



zweiten nicht. In die Sprache der heutigen Mathematik gekleidet würde die Leibnizische Vorschrift besagen, dass wenn $z = f(x)$ zur Quadratur von $y = \varphi(x)$ führen soll, man $y = \frac{z}{t} = z'$ setzen müsse, weil alsdann

$$\int y \cdot dx = \int z' \cdot dx = z = f(x)$$

liefert. Im Jahre 1678 war das noch nicht so leicht zu verstehen, und nur die mündlichen Unterredungen in Paris, auf welche Leibniz anspielte, mochten den Schlüssel zum Verständniss geliefert haben.

Tschirnhaus schwieg von nun an in seinen Briefen über diesen Gegenstand, aber nach Ablauf mehrerer Jahre gab er im Octoberhefte 1683 der A. E. eine Abhandlung *Methodus datae figurae, rectis lineis et curva geometrica terminatae, aut quadraturam aut impossibilitatem ejusdem quadraturae determinare*[1]) heraus, welche schon durch die an der Spitze stehende Zeichnung (Figur 23) Zeugniss dafür ablegt, dass Tschirnhaus, mochte er auch eine Zeit lang vergessen haben, was Leibniz ihm in Paris mündlich gesagt hatte, dessen Brief um so sorgsamer sich eingeprägt und dessen Sinn begriffen hatte. Tschirnhaus nimmt in der Abhandlung an, zwischen der Curve $AHD$, deren Ordinaten $y$ heissen, und der Curve $AFB$, deren Ordinaten $z$ heissen, während die beiden Curven gemeinsamen, auf $AGC$ gemessenen Abscissen durch $x$ bezeichnet werden, finde die Beziehung statt, dass das Rechteck $ACDE$ dem gemischtlinigen Dreieck $ACB$ gleich sei, ebenso $AGHI = AGF$ u. s. w. Die Gleichung der $AHD$ wird als gegeben angenommen, und zwar als Gleichung 1., 2., 3. u. s. w. Grades. Er gibt alsdann die Gleichung zwischen $x$ und $z$ an, welche der Curve $AFB$ angehören muss, damit die geforderte Beziehung stattfinde. Wie er zu diesen Gleichungen gelangt sei, sagt er nicht, und überdies hat sich bei einer Nachrechnung unter Benutzung der heute landläufigen Mittel herausgestellt[2]), dass sie nicht einmal richtig sind.

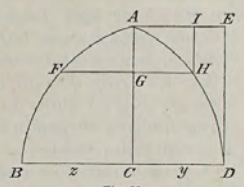

Fig. 23.

Es würde uns zu weit führen, wollten wir genauer erzählen, wie Leibniz über Tschirnhausens Verfahren, ein ihm brieflich Angedeutetes auszubeuten, ohne auch nur der ihm gegebenen Anregung mit einem

[1]) A. E. 1683 pag. 433—437. [2]) Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange. Halle, 1856. S. 79—82.

Worte zu gedenken, erzürnt war, und wie es der Vermittelung von Mencke, dem Herausgeber der A. E., bedurfte, um zu verhüten, dass nicht ein öffentlicher Streit zwischen Leibniz und Tschirnhaus in jener Zeitschrift selbst ausbrach.

Einige Monate früher als die Abhandlung über Quadraturen liess Tschirnhaus in den A. E. vom December 1682 und vom März 1683 zwei Aufsätze erscheinen[1]), welche das Tangentenproblem und das der Maxima und Minima behandelten. Zur Lösung beider Aufgaben wurden allgemeine Regeln aufgestellt, welche in dieser Allgemeinheit falsch sind und nur ausnahmsweise in einigen besonderen Fällen Richtiges liefern.

Einige Jahre später dagegen, 1686, erschien Tschirnhaus mit einem grösseren Werke auf dem Büchermarkt, mit der *Medicina mentis*[2]). Tschirnhaus selbst durfte 1695 eine neue verbesserte Ausgabe veranstalten, weitere Abdrücke erfolgten 1705 und 1753 und beweisen, dass der Geschmack der Zeit für derartige Bücher empfänglich war, wenn auch Tadel und Widerspruch nicht fehlten. Die Medicina mentis ist eine Logik und würde sich unserer Beachtung entziehen, wenn nicht Tschirnhaus, wie seit Aristoteles alle Schriftsteller über Logik es mehr oder weniger gethan haben, seine Beispiele mit einiger Vorliebe der Mathematik entlehnte, und zwar blieb er, wie man voll anerkennen muss, nicht bei den alten breitgetretenen Beispielen stehen, sondern er ersann deren neue, die im Lichte der Mathematik betrachtet zu werden verdienen. Die menschlichen Kenntnisse werden nach Tschirnhaus theils durch die Begriffsfähigkeit erzeugt, theils durch die Einbildungskraft empfangen[3]). Erzeugen, der Concept, ist das logisch Bedeutsamere, und insbesondere ist zu untersuchen, wie die ursprünglichen Concepte erzeugt werden. Sie theilen sich ein nach der Anzahl der bei der Bildung wirksamen Elemente, und hierfür tritt ein erstes neues Beispiel auf: die Erzeugung von Curven aus Brennpunkten[4]). Eine Curve hat einen Brennpunkt, Focus, wenn sie so entsteht, dass ein Faden von gegebener Länge an einem festen Stifte $A$ befestigt ist, und dass das Ende des Fadens mittels eines Griffels $B$ herumgeführt wird; sie ist ein Kreis. Die Ellipse als Curve mit zwei Brennpunkten entsteht, indem der Faden mit beiden Enden in festen Stiften $A$, $B$ befestigt ist und mittels eines bewegten Griffels $C$ gespannt wird. Nun gelangt man zur Curve (Figur 24) mit den drei

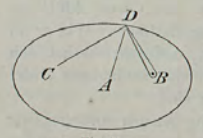

Fig. 24.

[1]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 129—148. [2]) Ebenda S. 19—69. [3]) *Intellectus concipit, imaginatio percipit.* [4]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 35—36.



durch feste Stifte $A$, $B$, $C$ hergestellten Brennpunkten. Der Faden ist in $A$ befestigt, um $B$ lose herumgeschlungen, mit dem anderen Ende in $C$ befestigt, und nun spannt ihn der bewegte Griffel $D$. Man sieht den weiteren Verlauf, d. h. die Entstehung der Curve mit vier und mehr Brennpunkten. Bei $m$ Brennpunkten als allgemeinem Falle — den Tschirnhaus freilich nicht erörtert — sind die beiden Enden des Fadens an Stiften befestigt, während er inzwischen um $m-2$ Stifte lose herumgeschlungen ist, so dass von jedem dieser $m-2$ Stifte Doppelfäden nach jedem Curvenpunkte gehen. Als besondere Fälle sind zu unterscheiden, wie viele von den Brennpunkten in einer Geraden liegen u. s. w. Die Anzahl der Brennpunkte soll man den Grad der Curve nennen, und da durch das Zusammenfallen von Brennpunkten der Grad sich erniedrigt, so sind alle Brennpunktscurven niedrigen Grades besondere Fälle derer von höherem Grade. Man kann aber die Erzeugung nunmehr dadurch verwickelter machen, dass Brennpunktscurven an die Stelle einzelner Brennpunkte treten. Wollte man, was Tschirnhaus nicht thut, dafür die Benennung Ordnung benutzen, so wären die gewöhnlichen Brennpunktscurven solche erster Ordnung, die soeben geschilderten neuen Curven wären Brennpunktscurven zweiter Ordnung, und Brennpunktscurven $n$ter Ordnung wären solche, bei welchen Brennpunktscurven $n-1$ter Ordnung an die Stelle der Brennpunkte traten. Sind (Figur 25) zwei Brennpunkte $a$, $d$ vorhanden, deren einer $a$ durch $\lambda$, der andere $d$ durch $\mu$ Fäden mit dem Curvenpunkte $c$ vereinigt ist, so dass also $\lambda \cdot ac + \mu \cdot dc$ die unveränderliche Länge des ursprünglichen Fadens darstellt, so glaubte Tschirnhaus auf folgende Weise die Berührungslinie an die Curve in $c$ erhalten zu können: Man beschreibe um $c$ als Mittelpunkt mit irgend einem Halbmesser einen Kreisbogen $mp$, welcher in $m$ den Leitstrahl $ca$ nach dem einen Brennpunkte $a$, in $p$ den Leitstrahl $cd$ nach dem anderen Brennpunkte $d$ schneide. Den Bogen $mp$ theile man in $r$ in umgekehrtem Verhältnisse der Anzahl der nach $a$ und $d$ führenden Fäden, d. h. so dass $mr : rp = \mu : \lambda$. Alsdann stehe $rc$ in $c$ zur Curve senkrecht.

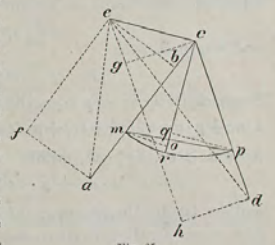

Fig. 25.

Ein damals noch sehr junger schweizer Mathematiker, Nicolas Fatio de Duillier (1664—1753), von welchem im 92. Kapitel ausführlicher die Rede sein wird, trat in der *Bibliothèque universelle*

(Année 1688, Tome V, pag. 25) gegen die Tschirnhausensche Vorschrift auf und behauptete, die $rc$ sei nur unter der Voraussetzung senkrecht zur Curve, wenn sie nicht den Kreisbogen $mrp$, sondern dessen Sehne $mnp$ in dem verlangten Verhältnisse theile, d. h. wenn $mn : np = \mu : \lambda$. Ist $nc$ alsdann zur Curve senkrecht, und ist $ce$ wieder senkrecht zu $nc$, so muss $ce$ die Berührungslinie sein, d. h. kein weiterer Punkt $e$ dieser Geraden kann der Curve angehören. Letzteres hat man für den Punkt $e$ zu beweisen, d. h. man muss zeigen, dass $\lambda \cdot ae + \mu \cdot de$ mehr als die Fadenlänge beansprucht. Werden diejenigen senkrechte und parallele Hilfslinien gezogen, welche aus der Figur ersichtlich sind, so erscheinen, wie leicht zu beweisen, drei Paare einander ähnlicher Dreiecke,

$$\Delta\, cmo \sim ecb, \qquad \Delta\, cpq \sim ceg, \qquad \Delta\, mon \sim pqn,$$

und daraus folgen die drei Proportionen:

$$1.\quad cm : om = ec : bc,$$
$$2.\quad cp : qp = ce : ge,$$
$$3.\quad om : qp = mn : pn.$$

Weil $cp = cm$ als Halbmesser desselben Kreises, lässt 2. sich auch

$$cm : qp = ec : eg$$

schreiben, und daraus in Verbindung mit 1. erhält man

$$om : qp = bc : eg$$

und wegen 3. auch

$$bc : eg = mn : pn = \mu : \lambda.$$

Demnach ist $\lambda \cdot bc = \mu \cdot eg$. Die Länge des mehrgenannten Fadens ist

$$\lambda \cdot ac + \mu \cdot dc = \lambda(ab + bc) + \mu \cdot dc = \lambda \cdot ef + \mu \cdot eg + \mu \cdot gh = \lambda \cdot ef + \mu \cdot eh.$$

Aber $ae > ef$, $de > eh$, mithin

$$\lambda \cdot ae + \mu \cdot de > \lambda \cdot ef + \mu \cdot eh,$$

und das ist die Ungleichung, auf deren Beweis es ankam. Allerdings fehlt noch der Beweis einer eben solchen Ungleichung für den Fall, dass $e$ auf der anderen Seite von $c$ (näher beim Brennpunkte $d$) liegt, aber auch ihn erbrachte Fatio de Duillier unter Herstellung einer der vorigen ähnlichen Zeichnung mittels fast buchstäblich gleicher Schlüsse. Fatio de Duillier ging aber noch einen beträchtlichen Schritt über diesen ersten interessanten Lehrsatz hinaus. Seien $b, c, d$ die Brennpunkte einer dreibrennpunktigen Curve und $m$ ein Punkt dieser Curve, deren Gesetz sich dadurch ausdrückt, dass die Fadenlänge

$$L = \varkappa \cdot mb + \lambda \cdot mc + \mu \cdot md$$

sein muss. Nun solle man um $m$ als Mittelpunkt mit beliebigem Halbmesser einen Kreisbogen beschreiben, der die $mb$ in $f$, die $mc$



in $g$, die $md$ in $h$ schneiden möge, und in $f, g, h$ Gewichte im Grössenverhältnisse $\varkappa : \lambda : \mu$ angebracht denken. Fällt deren Schwerpunkt nach $n$, so sei $nm$ zur Curve senkrecht. In der That ist auch diese Behauptung richtig. Aus Notizen, welche Huygens im März 1687 in sein Taschenbuch eintrug, geht hervor, dass dieser in fortwährendem Verkehre mit Fatio de Duillier über die hier erwähnten Sätze stand und an deren Erfindung betheiligt war. Huygens z. B. war es, der den letzten allgemeinsten Satz bewies.[1])

Tschirnhaus vertheidigte sich zunächst im Septemberheft 1688 der Bibliothèque universelle in sehr gewundener Weise, indem er in der Hauptsache nachgab, d. h. zugestand, dass die Tangentenregel in der Medicina mentis irrig sei. In der zweiten Auflage der Medicina mentis von 1695 verbesserte er den Irrthum, indem er die Schwerpunktmethode einführte, aber er ersetzte sie durch eine rein geometrische Vorschrift, deren Beweis er zu anderer Gelegenheit zusagte. Er hat ihn nie gegeben vermuthlich also auch nicht besessen.

Immer und überall kehrt das Gleiche wieder. Tschirnhaus verallgemeinert, verspricht Beweise der Verallgemeinerung und bleibt sie schuldig. Ein letztes Beispiel können wir dem im Novemberheft 1695 der A. E. gedruckten Aufsatze *Nova et singularis geometriae promotio circa dimensionem quantitatum curvarum* entnehmen. Dort ist der richtige Satz ausgesprochen, dass, wenn zwei Parabeln (Figur 26) mit der Axe $AX$ und dem Brennpunkte $C$ auf einander liegen, eine von $C$ aus gezogene Gerade $CDE$ die Parabelbögen $BD$, $AE$ begrenze, deren Längen sich wie die Parameter der beiden Parabeln verhalten. Aber sofort geht Tschirnhaus weiter und verallgemeinert den Satz in ungerechtfertigter Weise, ja er geht so weit, dass er sogar behauptet[2]), er sei im Besitze eines Verfahrens, welches ihm ermögliche, bei jeder Curve ein Bogenstück zu ermitteln, welches zu einem anderen auf ihr gegebenen Bogenstücke in gegebenem Verhältnisse stehe! Natürlich blieb er auch dieses Verfahren schuldig und hinterlässt uns den Zweifel, ob er heissblütig genug war, Sätze, die er nur ahnte, ohne weiteres für wahr zu halten, oder ob er immer mit Bewusstsein flunkerte.

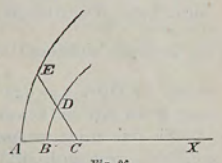

Fig. 26.

[1]) Briefliche Mittheilung von H. Korteweg mit Berufung auf Uylenbroek, Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae II, 56—58. [2]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 117.